HAL
open science

Optimisation des Canalisations Electriques et des Armoires de Distribution

Jean-Paul Gonnet

To cite this version:

Jean-Paul Gonnet. Optimisation des Canalisations Electriques et des Armoires de Distribution. Energie électrique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT : . tel-00137973

HAL Id: tel-00137973

https://theses.hal.science/tel-00137973

Submitted on 22 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier

N° attribué par la bibliothèque
/_/_/_/_/_/_/_/_/_/_/

THESE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UJF

Spécialité : "Génie Electrique"

Préparée au **Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

UMR 5529

Dans le cadre de l'école doctorale

"**E**lectronique, **E**lectrotechnique, **A**utomatique, **T**élécommunication, **S**ignal"

Présentée et soutenue publiquement

par

Jean-Paul GONNET

Le 09/06/2005

Titre :

OPTIMISATION DES CANALISATIONS ÉLECTRIQUES ET DES ARMOIRES DE DISTRIBUTION

Directeur de thèse : James ROUDET

JURY

M. Pascal BROCHET	, Président, Rapporteur
M. Arnulf KOST	, Rapporteur
M. James ROUDET	, Directeur de thèse
Mme. Nadia MAIZI-MENARD	, Examinateur
M. Alain ANGLADE	, Examinateur
M. Philippe WENDLING	, Examinateur
M. Vincent MAZAURIC	, Examinateur

Remerciements

Nous y voilà ! La fin de l'aventure ! Une petite anecdote de 3 ans qui a commencé en septembre 2002... Ce n'était pourtant pas prévu au programme puisque certains se rappelleront sûrement m'avoir entendu promettre de ne jamais faire de thèse... Comme on dit, il n'y a que les imbéciles qui ne changent pas d'avis !

En tout cas cela m'aura au moins appris à ne pas affirmer sans connaître, d'autant que l'aventure en valait la peine !

Bref, trêve de rêveries nostalgiques, revenons en à l'objet principal de ces quelques mots :

Je commencerais donc par adresser mes plus sincères remerciements à Messieurs Pascal Brochet, *Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, responsable de l'équipe Conception et Optimisation des Machines Electriques au L2EP*, et Arnulf Kost, *Professeur à la Brandenburgische Technische Universität à Cottbus et Président de la Compumag Society*, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie également Madame Nadia Maizi, *Professeur à l'école de Mines de Paris et Directrice du Centre de Mathématiques Appliquées*, d'avoir accepté une incursion dans le monde obscur (et mathématiquement douteux il faut bien l'avouer) du génie électrique en participant à ce jury.

Je souhaite également remercier chaleureusement Monsieur Alain Anglade, *Ingénieur, Expert pour la Maîtrise de la Demande d'Energie à l'ADEME*, non seulement pour sa participation à ce jury, mais également pour notre collaboration tout au long de ce travail, puisqu'il a été notre contact privilégié (et un promoteur de ce travail) à l'ADEME, avec des échanges toujours faciles.

Je remercie aussi Monsieur Philippe Wendling, *Vice-Président de MAGSOFT Corp. (USA)*, dont le soutien et la bonne humeur me vont droit au cœur, d'autant que le chemin l'amenant à ce jury n'était pas des plus courts (puisque les méandres passaient par Arlington,VA ...) !

Il me reste encore à remercier sincèrement Monsieur James Roudet, *Professeur à l'Université Joseph Fourier*, qui plus qu'un membre du jury, fut aussi un directeur de thèse présent dans les quelques moments de doute et de remise en question. Bref une personnalité tant scientifique qu'humaine à ne pas rater !

Une autre personnalité à ne pas rater complète ce jury, ainsi que l'encadrement de ce travail : Vincent Mazauric, *Expert Sénior Electromagnétisme à la Direction Scientifique et Technique de Schneider Electric*, mon Grand Gourou Magnétiseur (Envoûtements Thermodynamiques sur simple demande). Au delà du fait qu'il m'ait initié au côté obscur (la thermo !) de l'électrotechnique, je ne saurais assez le remercier de la liberté qu'il m'a donnée au long de ces 3 ans en même temps qu'un soutien scientifique et surtout humain sans faille. Je pense vraiment qu'il a contribué fortement à me faire apprécier la recherche en milieu industriel !

Je ne saurais bien sûr à l'évocation de ce jury oublier de mentionner Madame Edith Clavel, *Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier*, absente pour un motif bien légitime puisqu'il coïncidait avec un heureux événement, qui a bien entendu contribué à mon encadrement universitaire.

Dans ce qui suit, on ne m'en voudra pas je l'espère de ne pas citer nominativement tout le monde, mais j'ai tellement peur d'oublier quelqu'un... j'espère que chacun se reconnaîtra !

Avant de reparler de recherche, parlons un peu d'industrie, puisqu'on y a mis un pied.

Bref, au sein de Schneider, je souhaite d'une part remercier les personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler à Montmélian, les ex-SBS se reconnaîtront...

D'autre part, il va sans dire que je suis également infiniment reconnaissant à toute l'équipe I2EA dans laquelle j'ai été intégré et au sein de laquelle j'ai trouvé une ambiance de travail extrêmement agréable, avec des gens dynamiques et chaleureux avec lesquels j'ai pris plaisir à échanger.

Reparlons également un peu recherche : qui dit recherche dit laboratoire, et qui dit laboratoire dit thésards et qui dit thésards ... dit sacrée bande de bras cassés ! !

En résumé, le LEG fut également, pendant ces trois ans, un lieu où j'ai pris plaisir à passer du temps, grâce à tous ces gens, permanents, ou moins permanents qui font l'âme de ces lieux.

Entre discussions scientifiques (on trouve toujours quelqu'un à embêter pour bricoler un bout de solveur ou parler magnétisme) et gros moments de rigolade, on se s'y ennuie jamais !

Je ne peux m'empêcher une petite note spéciale pour la petite famille d'EPTE (à laquelle j'associerai volontiers quelques individus de Schneider au passage), les anciens ou les moins anciens (et même les expatriés), chasseurs ou pas, roulant à (mini-)moto ou à vélo, avec ou sans cheveux, avec ou sans poils, avec ou sans chaussons, sachant skier ou pas, avec accent bulgare ou sans, sachant éviter une raquette de squash ou pas, que je bats ... ou pas, avec ou sans enfants, avec ou sans 'chachats', grimpeurs... ou tombeurs (ou presque).

Bref, ce qui est remarquable dans tous les gens qui me viennent à l'esprit (tant au LEG que chez Schneider), c'est que j'ai trouvé des collègues avec lesquels l'entente était suffisante pour que l'on ait encore envie de se supporter le soir ou le week end en plus des journées ! !

A ceux ci s'ajoutent bien sûr les copains et copines des précédents, mais aussi d'autres hurluberlus dont j'ai eu la chance de croiser la route (alors que certains sont de vrais fous du volant !), danseurs et danseuses, grimpeurs, randonneurs, amateurs de pizzas.... et j'en oublie sûrement !

Merci donc à tous pour ces bons moments, avec encore une fois une pensée (émue) spéciale pour tous les compagnons de cordées, de ski, (et/ou) de rando, de vélo... d'autant que je vous rappelle qu'il reste des plombs à prendre, de la poupoudre à manger, des cols à franchir... sans oublier de bonnes photos bien ridicules à faire.

Bien entendu, mes remerciements seraient bien incomplets si je ne mentionnais d'une part ma famille, à laquelle je dois beaucoup (en particulier mes parents), ne serait-ce que pour avoir eu la possibilité d'en arriver là, en plus de leur soutien de toujours, et d'autre part mon petit rayon de soleil personnel : Mathilde.

Merci encore à tous.

Bonne lecture.

Jean-Paul

Table des matières

Table des matières **v**

Table des figures **ix**

Liste des tableaux **xiii**

1 Introduction **1**
1.1 Scenarii énergétiques à l'horizon 2030-2050-2100 3
1.2 Le rôle des interconnexions 7

2 De la thermodynamique à PEEC **11**
2.1 Dérivation thermodynamique des équations de Maxwell 13
2.1.1 Définition des sources : charges et courants électriques 13
2.1.2 Description complémentaire du champ électromagnétique 21
2.1.3 Décomposition et consolidation d'un système 31
2.2 Modélisation 32
2.2.1 Modélisation des actionneurs : Méthode de Eléments Finis 32
2.2.2 Modélisation des connectiques : Méthode PEEC 34
2.3 Conclusion 46

3 Optimisation avec la méthode PEEC **47**
3.1 Les enjeux 49
3.1.1 La conception d'interconnexions de puissance. 49
3.1.2 Lutter contre les effets induits 50
3.1.3 L'état de l'art 53
3.1.4 Apport de la méthode PEEC 54
3.2 Existence d'une marge d'optimisation accessible 60
3.3 Ciblage des conducteurs 'massifs' 63
3.3.1 Aluminium vs. Cuivre 65
3.3.2 Traitement générique des formes complexes 68
3.3.3 Barres Linergy – Quantification des contributions 70
3.3.4 Evidement de barres massives 73
3.3.5 Validation analytique 74
3.4 Optimisation de la forme des conducteurs massifs 79
3.4.1 Nécessité d'une optimisation topologique 79
3.4.2 Optimisation topologique et innovation 80
3.4.3 Définition du problème d'optimisation 81
3.5 Présentation des méthodes d'optimisation adaptées 83
3.5.1 Colonies de fourmis (Ant system) 83
3.5.2 Recherche tabou 84
3.5.3 Recuit simulé (Simulated Annealing) 86

3.5.4 Algorithmes Génétiques . . . 88
3.5.5 Choix d'une méthode . . . 89
3.6 Couplage PEEC - Algorithmes génétiques . . . 90
3.6.1 Principe de couplage . . . 90
3.6.2 Présentation de l'algorithme . . . 92
3.7 Mise en oeuvre . . . 99
3.7.1 Validation sur un cas analytique . . . 99
3.7.2 Exemple d'optimisation de forme sur un jeu de barres de répartition . . 103
3.7.3 Affinage . . . 111
3.7.4 Extraction de contours . . . 112
3.7.5 Complément : Fonctions de pénalisation . . . 113
3.8 Conclusions . . . 116
3.8.1 Convergence vers une solution optimale . . . 116
3.8.2 Limitations inhérentes à la méthode PEEC . . . 117

4 De PEEC à 'muPEEC' 119
4.1 Introduction . . . 121
4.1.1 Enjeu de canalisations préfabriquées . . . 121
4.1.2 Rappel des limitations de la méthode PEEC Standard . . . 122
4.2 Extension des formulations PEEC : vers 'muPEEC' . . . 123
4.2.1 Modélisation Ampérienne des matériaux ferromagnétiques . . . 123
4.2.2 Traduction du modèle Ampérien dans l'approche PEEC . . . 126
4.2.3 Obtention d'un système auto-cohérent . . . 127
4.2.4 Détail du calcul du champ pour les conditions de passage . . . 133
4.2.5 Résolution d'un système linéaire . . . 135
4.3 Validation analytique . . . 139
4.3.1 Résolution PEEC et comparaison . . . 139
4.3.2 Conclusion et mises en garde . . . 140
4.4 Validations numérique . . . 142
4.4.1 Concentration des lignes de champ - Courants induits . . . 142
4.4.2 Réaction d'induit . . . 146
4.4.3 Conducteur ferromagnétique parcouru par un courant imposé . . . 149
4.4.4 Jeu de barres OKKEN . . . 151
4.5 Points délicats . . . 153
4.6 Validation expérimentale . . . 155
4.6.1 Canalisations préfabriquées Canalis type KS . . . 155
4.6.2 Extraction d'impédances . . . 155
4.6.3 Impédances de boucles brutes . . . 157
4.6.4 Prise en compte des connexions . . . 160
4.6.5 Un mot sur le conditionnement - Valeurs propres du système . . . 163
4.7 Conclusion . . . 166

5 Vers un outil de conception dédié aux interconnexions 167
5.1 Démarche globale de conception . . . 169
5.1.1 Une méthode dédiée aux interconnexions . . . 169
5.1.2 Stratégies d'optimisation . . . 170
5.1.3 Un outil dédié : InCa 3D . . . 172
5.2 Prise en compte de l'ACV . . . 174
5.2.1 Présentation de l'ACV . . . 174
5.2.2 Un outil d'ACV : EIME . . . 174
5.3 Déclinaison sur les jeux de barres . . . 177
5.3.1 Les points clés de l'A.C.V. . . . 177

5.3.2 Optimisation de position - Tableaux Okken - Suivi EIME 178
5.3.3 Optimisation de forme - Barres Linergy Aluminium – Suivi EIME . . . 180
5.4 L'enjeu des interconnexions 184
5.4.1 Enjeu Schneider Electric 184
5.4.2 Déclinaison sur un marché cible : les Data-Centers 186
5.4.3 Enjeu global 191
5.5 Conclusion : vers une intégration de l'ACV 193

6 Conclusion 195

Bibliographie 199

A Mur métallique semi-infini (Analytique) 211
A.1 Description 211
A.2 Résolution 212
A.2.1 Symétries du problème 212
A.2.2 Calcul du champ 212
A.2.3 Courants induits dans le fer 214
A.2.4 Calcul du potentiel vecteur A 214
A.3 Approche Ampérienne 215
A.3.1 Sans courants liés de surface 215
A.3.2 Ajout des courants liés de surface 216

B Solveurs Spécifiques 219
B.1 Circuit monophasé 219
B.1.1 Résolution avec toutes les subdivisions 220
B.1.2 Résolution avec des subdivisions déconnectées 220
B.2 Cas triphasé étoile avec neutre 222
B.3 Cas triphasé sans neutre couplage étoile 224
B.4 Cas triphasé sans neutre avec un conducteur passif 225

C Pertes dans une tôle (Analytique) 229
C.1 Description 229
C.2 Champ crée une harmonique spatiale : film de courant 229
C.2.1 Symétries : 230
C.2.2 Conditions aux limites : 231
C.2.3 Champ électrique dans le blindage 232
C.3 Champ crée par un fil 233

Table des figures

1.1 Démographie, Economie et Energie 3
1.2 Energie & pauvreté 4
1.3 Emissions de CO_2 liées à l'énergie 5
1.4 Une vision à long terme des bilans énergétiques 6
1.5 Capacité de production d'électricité installée 6
1.6 La connectique dans les tableaux de distribution 7
1.7 Transparence des interconnexions 8

2.1 Développement multipolaire des charges et des courants 14
2.2 Lissage spatial des charges localisées. 15
2.3 Environnement du champ électromagnétique 22
2.4 Probleme type d'électromagnétisme 23
2.5 Définition de la tension 31
2.6 Algorithme de résolution éléments finis 33
2.7 Principe de la méthode PEEC 34
2.8 Principe d'obtention des élements partiels 38
2.9 Impact du maillage sur le calcul des pertes 41
2.10 Approximation de l'effet de peau par une couronne conductrice 44
2.11 Résistance équivalente vs. rang harmonique 44
2.12 Sensibilité à la longueur du calcul '2D' des pertes. 45
2.13 Sensibilité à la longueur - Impact sur la répartition du courant 46

3.1 Exemple de système de jeu de barres triphasé 50
3.2 Flot de courant dans le jeu de barres triphasé 53
3.3 Echauffement des barres présentées sur la figure 3.2 54
3.4 Définition d'un outil d'aide à la conception 55
3.5 Jeu de barre Okken modélisé sous FLUX 2D - Maillage 57
3.6 Canalisation préfabriquée type - Maillage sous FLUX 57
3.7 CEP sous FLUX - Densité d'énergie et lignes de **B** 58
3.8 Vue en coupe du jeu de barres Okken 60
3.9 Jeu de barres Okken modélisé 60
3.10 Jeu de barre Okken - Quantification des effets induits 61
3.11 Coffret type Prisma double fermé 63
3.12 Section des barres Linergy Cuivre 1600A avec système de raccordement 63
3.13 Système de jeu de barres Linergy 64
3.14 Evolution des cours du cuivre et de l'aluminium au LME 67
3.15 Coût comparé d'un conducteur en cuivre et en aluminum 67
3.16 Saisie des géométries par traitement d'image 68
3.17 Vision de la gamme de barres Aluminium 70
3.18 Caractéristiques géométriques des barres Linergy 70

3.19 Caractérisation des barres Linergy 1600A 71
3.20 Conducteur cylindrique creux 74
3.21 Impact d'un évidement des barres massives 77
3.22 Evolution de la puissance en fonction des paramètres géométriques 78
3.23 Scenarii possibles d'optimisation 78
3.24 Illustration d'une optimisation paramétrique classique. 79
3.25 Complexité de la description d'une section extrudée 80
3.26 Définition d'une topologie de section 81
3.27 Définition des contraintes 82
3.28 Principe d'une recherche tabou 85
3.29 Principe de base du recuit simulé 86
3.30 Principe de base des Algorithmes Génétiques 88
3.31 Couplage du modèle PEEC avec l'algorithme génétique. 90
3.32 Cas simple monophasé. 92
3.33 Principe de l'Algorithme Génétique retenu 93
3.34 Sélection des parents par tournoi simple 94
3.35 Opération de croisement (cross-over) 95
3.36 Opération de mutation 96
3.37 Principe du masquage 96
3.38 Etude analytique de la fonction objectif 99
3.39 Résultat de l'optimisation 100
3.40 Evolution des perfomances de la population au fil des itérations 101
3.41 Performance des solutions 101
3.42 Simplification du problème triphasé 103
3.43 Grille d'optimisation 104
3.44 Topologie initiale triphasée avec neutre 105
3.45 Phase 2 initiale 106
3.46 Grille d'optimisation 106
3.47 Evolution du spectre de performance des individus 107
3.48 Evolution de la forme optimale et de la moyenne sur la population. 108
3.49 Forme optimale de la phase 2 pour $f = 8 \cdot P + S$ 108
3.50 Optimum correspondant à différentes fonctions objectives 108
3.51 Forme optimale de la phase 1 pour $f = 8 \cdot P + S$ 109
3.52 Forme optimale de la phase 3 pour $f = 8 \cdot P + S$ 109
3.53 Resultat global 110
3.54 Affinage par une deuxième passe d'optimisation. 111
3.55 Extraction des contours de la section 112
3.56 Fonction de pénalisation 113
3.57 Spectre des performances avec fonction de pénalisation 114
3.58 Nouvelle forme obtenue avec pénalisation 114
3.59 Frontière de Pareto 116

4.1 Principe de l'optimisation de forme 121
4.2 Calcul du champ crée par la matière aimantée 124
4.3 Principe de l'équivalence ampérienne 126
4.4 Cas du mur infini - Vue 3D 128
4.5 Cas du mur infini - Vue 2D 128
4.6 Approche Ampérienne sans courants liés de surface 129
4.7 Mur infini - Modélisation PEEC 129
4.8 Approche Ampérienne avec courants liés de surface 130
4.9 Ajout des éléments de surface 131
4.10 Principe de calcul des conditions de passage 133

4.11 Ajout de subdivisions fictives 136
4.12 Plaque métallique excitée par un fil de courant 139
4.13 Modélisation μPEEC et définition des lignes de tracé de la densité de courant. 140
4.14 Densité de courant sur le tracé 1 140
4.15 Densité de courant sur le tracé 2 141
4.16 Description du dispositif (échelle non respectée) 142
4.17 Comparaison des lignes de champ magnétique B (en phase avec le courant). . . 143
4.18 Comparaison des cartes de champ B (en module) 143
4.19 Erreur relative (%) sur les cartes de champ μPEEC vs. FLUX 144
4.20 Densité de courant (en module) sur une coupe horizontale au centre du fer . . . 144
4.21 Comportement en régime statique (fréquence nulle) 145
4.22 Dispositif étudié 146
4.23 Variation de la densité de courant le long d'un inducteur 146
4.24 Carte de champ B 147
4.25 Comparaison des cartes de champ en phase et en quadrature 148
4.26 Conducteur ferreux à courant imposé 149
4.27 Champ **B** - μPEEC vs. FLUX 149
4.28 Dispositif étudié 151
4.29 Relevés de densités de courant vs. Optimisation 151
4.30 Carte de champ – Optimisation 151
4.31 Okken - Lignes et module de B 153
4.32 Maillage de surface dans les coins et courants dans les éléments de surface . . . 153
4.33 Système Canalis type KS 155
4.34 Modélisation d'un tronçon droit de canalis 156
4.35 Obtention d'un schéma équivalent partiel réduit 156
4.36 Impédance de boucle 157
4.37 Banc d'essai de la canalisation KSA 80 158
4.38 Epanouissements nécessaires au raccordements 160
4.39 Modélisation PEEC de l'épanouissement 160
4.40 Raccordement de deux sections une éclisse 161

5.1 Vers un outil de conception des interconnexions 169
5.2 Stratégies d'optimisation 171
5.3 InCa 3D - Superviseur - Intégration dans l'environnement Flux 172
5.4 InCa3D - Interface Utilisateur 173
5.5 Diagramme des flux du cycle de vie d'un produit 174
5.6 JdB Okken - Optimisation vs. Impact EIME 179
5.7 Linergy - Impact Global 181
5.8 Phase Utilisation-Solution initiale vs. optimisée 183
5.9 Phase Fabrication-Solution initiale vs. optimisée 183
5.10 Présentation d'un datacenter type 186
5.11 Profil de consommation d'un datacenter 187
5.12 Niveau de pertes selon le rang harmonique pour le même courant 188
5.13 Répartition de la consommation d'un datacenter par usages 189

A.1 Mur infini excité par une nappe de courant 211
A.2 Demi-mur infini excité par une nappe de courant - vue 2D 212
A.3 Film de courant 215

B.1 Cas simple monophasé. 219

C.1 Plaque métallique excitée par une feuille de courant harmonique 230

C.2 Plaque métallique excitée par un dirac spatial de courant 233

Liste des tableaux

3.1 Evaluation des effets induits 51
3.2 Optimisation du jeu de barres Okken 62
3.3 Caractéristiques comparées du cuivre et de l'aluminium électrique 65
3.4 Evaluation des effets induits 72
3.5 Comparaison des densités de courant : section pleine vs. section évidée 73

4.1 Evolution des courants induits dans le 'fer' avec la fréquence 145
4.2 Comparaison des pertes par effet Joule 147
4.3 Niveaux de pertes Joule comparés pour 100 A. 150
4.4 Comparaison des pertes Joule vs. Optimisation et Blindage 152
4.5 Okken - Vérification des tendances 152
4.6 Comparaison des pertes Joule : Maillage fin vs. Maillage grossier 152
4.7 KSA 80 - Impédances de boucle 158
4.8 KSA 80 - Impédances de boucle 161
4.9 Conditionnement 163
4.10 Moyenne des vecteurs propres 165

5.1 JdB Okken - Impacts EIME 179
5.2 Linergy - Impacts EIME 181
5.3 Linergy - Impacts relatifs 181
5.4 Linergy - Impacts relatifs fabrication 183

Chapitre 1

Introduction

1.1 Scenarii énergétiques à l'horizon 2030-2050-2100

	1960	*1980*	*2000*	*2020*	*2050*	*2100*
▪ **Population Mondiale Ghab**	3.0	4.5	6.0	7.5	8.0	10.0
▪ **PIB Mondial (Base PPA) 10^{12} $ 1990**	8.0	20	35	70	150	300
▪ **Consommation d'énergies commerciales (Gtep)**	3.8	6.4	9.5	14.0	18.0	23.0
▪ **PIB/Tête (en $/90)**	2670	4.440	5830	9.330	18.750	30 000
▪ **Energie/Tête (en Tep/hab)**	1.3	1.4	1.6	1.9	2.3	2.3
Nombre de TEP consommées par 1000 $ 1990 de PIB mondial	0.47	0.32	0.27	0.20	0.12	0.08
Nombre de $ 1990 de PIB mondial pour chaque Tep consommée	2100	3125	3680	5.000	8330	10.000

FIG. 1.1 – Démographie, Economie et Energie (Source [Bauquis 01])

Avant de rentrer dans les détails techniques de cette étude, il est opportun de dresser un rapide état des lieux du contexte actuel sur le plan de l'énergie ou plutôt, étant donné que ce travail est axé sur la conception de dispositifs, notre regard devra se tourner vers le contexte futur dans lequel ils vont s'insérer.

Les équipements liés au transport et à la distribution de l'énergie électrique ont une vitesse de renouvellement relativement faible. Les équipements ont une durée de vie qui va de 15 à 50 ans selon le niveau de développement des pays. Si l'on ajoute à ce facteur les temps de développement, d'industrialisation et de percées 'marketing' de solutions techniques remettant en cause les architectures existantes, il est pertinent de s'intéresser aux scenarii énergétiques à une échéance d'un minimum de 15 ans. Nous allons même un instant nous projeter plus loin, ce qui permet de se faire une bonne idée des enjeux et tendances à venir pour le génie électrique.

Le coeur du problème est le challenge du développement durable. Il s'agit d'une prise de conscience relativement récente, liée à des phénomènes climatiques préoccupants tels que l'effet de serre et à la perspective de l'épuisement d'un certain nombre de ressources fossiles. Notons d'ailleurs que le terme 'épuisement' est inexact. Il s'agit plutôt dans un premier temps d'un épuisement des ressources 'facilement' accessibles, ce qui revient au même, puisque l'accès aux ressources jusqu'ici vierges va nécessiter des moyens techniques plus importants qui ont donc un surcoût qui va dans le même sens que celui de la raréfaction.

En un mot, nous sommes confrontés à une limite de la ressource accessible, parallèlement à une limite (mal définie certes) de l'empreinte acceptable pour un développement à long terme.

L'enjeu est considérable, du fait de l'évolution démographique, puisque les estimations donnent une population mondiale de l'ordre de 8 milliards de personnes pour 2050 et 10 milliards de personnes pour 2100 (voir figure 1.1 [Bauquis 01]). Les chiffres sur lesquels on s'appuie ici ne sont certes que des estimations et sont donc sujets à discussion ; mais les tendances, elles, sont indéniables.

Ces chiffres ne sont pas un facteur de bouleversement énergétique à eux seuls. En effet, ce qui importe réellement, c'est qu'actuellement 1,6 milliards de personnes n'ont pas accès à l'énergie domestique (soit plus du quart de la population mondiale - voir la répartition géographique sur la figure 1.2 [Appert 02]).

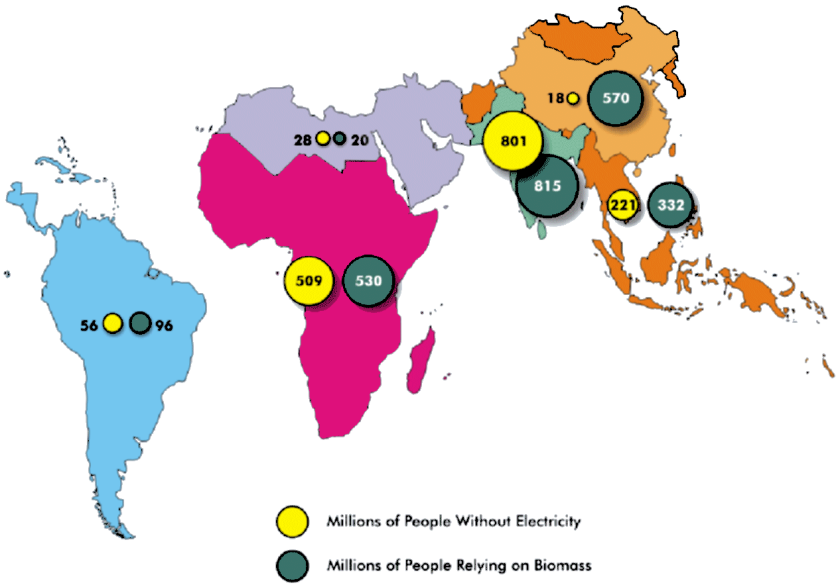


FIG. 1.2 – Répartition mondiale des personnes n'ayant pas accès à l'électricité domestique - Le total représente 1.6 milliard de personnes soit 1/4 de la population mondiale (Source [Appert 02])

L'accession de la population des pays en développement à l'énergie domestique (également liée à l'augmentation du niveau d'éducation) est donc le facteur déterminant de l'augmentation de la consommation d'énergie. Cette augmentation s'accompagnera nécessairement d'une augmentation des émissions de CO_2 (voir figure 1.3), ce qui pose un problème écologique préoccupant. Il est donc nécessaire : d'une part, d'aller vers des énergies de synthèse pour palier à l'épuisement de la ressource fossile et, d'autre part, de promouvoir les filières énergétiques les plus efficaces et les moins poluantes, la filière électrique étant probablement la plus apte à répondre à ce challenge.

On doit en outre ajouter à cette augmentation de consommation par la démographie une augmentation liée à la migration de certains services (transports[1], ou autres ...) vers le vecteur électrique. A ce titre, 10 000 milliards de $ d'investissements [IEA 04] sont prévus sur 30 ans rien que pour la production transport et distribution de l'énergie électrique dont 4 000 milliards de $ sont prévus pour la croissance, le restant étant dévolu au renouvellement du parc existant (on en a d'ailleurs une bonne image au niveau de l'installation de capacité de production [IEA 04], voir figure 1.5).

L'enjeu est donc d'optimiser les architectures des filières énergétiques de 2100, en vue du maintien du niveau actuel de consommation. Dans ce cadre, on entend par optimisation une amélioration de l'efficacité énergétique vis à vis du service final rendu.

La filière électrique repose sur la notion de réseau. L'optimisation de l'efficacité énergétique du réseau sous entend donc d'arriver à globalement perdre le moins de valeur de service possible, ce qui implique d'une part de minimiser l'énergie dégradée (sous forme de chaleur) et d'autre part de maîtriser les évolutions de ce dernier. On remarquera que cette filière -contrairement aux autres- peut atteindre un rendement de transmission théorique maximal de 100%.

[1] Notons que la pile à combustible n'est qu'un moyen de stocker de l'énergie et pas un moyen de production.

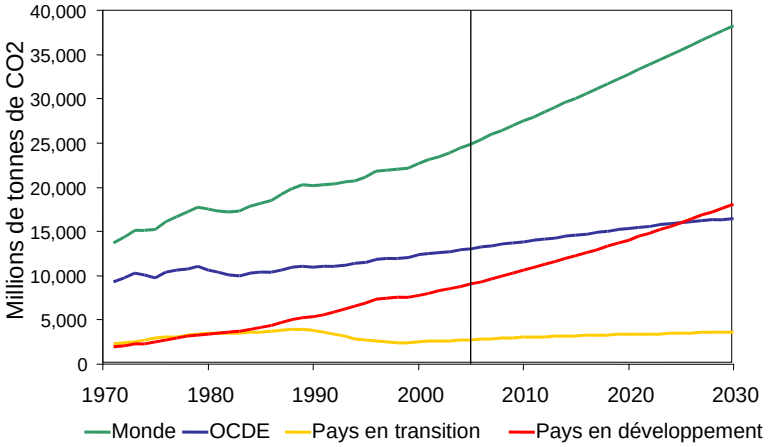


FIG. 1.3 – Emissions de CO_2 liées à l'énergie - D'après les modèles de prévision, les émissions mondiales augmentent de 1.8% par an, pour atteindre 38 milliards de tonnes en 2030, soit 70% d'augmentation par rapport à l'année 2000 (Source [Appert 02])

Dans l'architecture d'un réseau électrique, on peut distinguer schématiquement deux types de composants de base :

- les organes localisés, parmi lesquels on distinguera :
  - les organes de conversion : qui assurent les conversions nécessaires à :
    - la production d'énergie en amont (alternateurs, transformateurs ...),
    - la restitution d'une valeur de service (moteurs, actionneurs, convertisseurs statiques...) ;
  - les organes de contrôle (appareillages de surveillance et de monitoring) qui sont couplés à des actionneurs pour permettre le pilotage du réseau
- les organes délocalisés, c'est à dire caractérisés du point de vue du réseau non pas comme un lieu de transformation d'énergie, mais comme un vecteur. Ils sont voués au transport et à la distribution d'énergie et sont définis par leur capacité à véhiculer un courant, en réalisant l'adaptation des tensions entre les différents organes localisés.

Ce travail s'adresse tout particulièrement à cette dernière catégorie de composants. Ils sont ici introduits d'un point de vue macroscopique vis à vis du réseau, ce qui adresse bien entendu tous les câbles, jeux de barres, canalisations préfabriquées de transport et de distribution de puissance. En réduisant l'échelle d'observation, on retrouve toute la câblerie interne des appareillages de conversion, les pistes de circuits imprimés et même les connexions gravées sur silicium.

	2000		2050		2100	
	Gtep	%	Gtep	%	Gtep	%
Pétrole	3.7	40	3.5	20	1.5	6
Gaz	2.1	22	4.5	25	2.0	9
Charbon	2.2	24	4.5	25	4.5	20
Total énergies fossiles	8.0	86	12.5	70	8.0	35
Renouvelables	0.7	7.5	1.5	8	3.0	13
Dont filières électriques	(0.5)		(0.9)		(2.0)	
Nucléaire	0.6	6.5	4	22	12	52
Total toutes énergies	9.3	100.0	18.0	100.0	23.0	100.0

FIG. 1.4 – Une vision à long terme des bilans énergétiques - Horizons 2000-2050-2100 (Source [Bauquis 01])

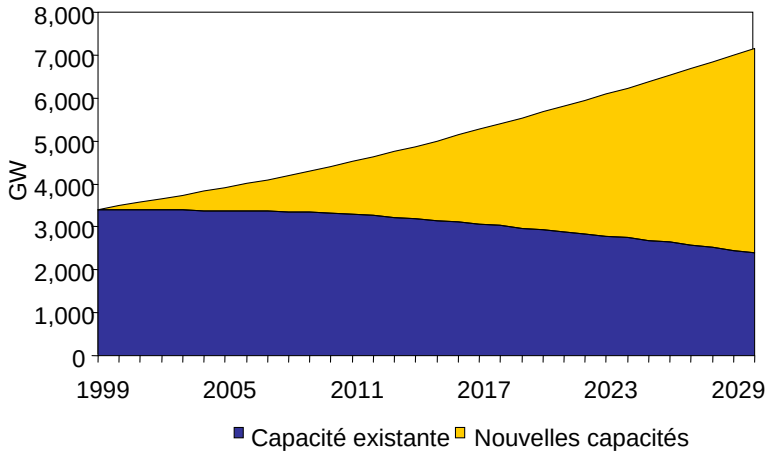


FIG. 1.5 – Capacité de production d'électricité installée - Près de 5 000 GW de capacités de production sont prévues sur 30 ans (Source [Appert 02])

1.2 Le rôle des interconnexions

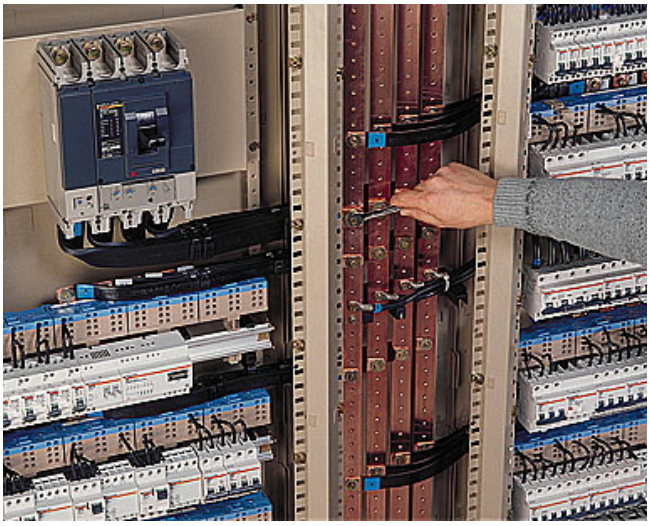


FIG. 1.6 – La connectique dans les tableaux de distribution basse tension (Source [Schneider 04])

On s'intéresse donc ici aux interconnexions en général en tant que lieu d'échange entre l'offre et la demande d'énergie électrique.

Dans le cadre des réseaux de transport et distribution, les courants véhiculés sont alternatifs. Ce choix 'historique' s'est imposé bien avant l'apparition de convertisseurs statiques performants pour permettre l'adaptation des niveaux de tension en vue de la réduction des niveaux de courants dans les lignes de transport. Protéger le réseau aurait également été beaucoup plus contraignant en courant continu. La fréquence actuelle des réseaux est de l'ordre de 50 ou 60Hz selon les pays. Ce choix[2] provient d'un optimum de conception des alternateurs/moteurs. Cette fréquence permet le meilleur compromis entre puissance disponible (donc minimum de dissipation) et coût des pièces ferromagnétiques.

Le fonctionnement en régime variable a un impact très important sur le fonctionnement des interconnexions. Nous avons précisé qu'elles ne sont qu'un moyen de transport de l'énergie. C'est pourquoi on ne leur attribue aucune valeur de service, puisqu'elles ne réalisent aucune conversion électromagnétique ou électromécanique.

Du point de vue de la conception, cela signifie qu'il n'y a aucun arbitrage entre valeur de service électrique et dégradation d'énergie : l'amélioration de l'efficacité consiste seulement en la réduction des pertes.

Cependant -nous aurons largement l'occasion d'y revenir- le fonctionnement en régime variable 's'oppose' à cet objectif. Les courants alternatifs font en effet des interconnexions des lieux de stockage et de conversion d'énergie dont on ne peut récupérer l'énergie de service, qui est par conséquent dégradée en chaleur ou stockée de manière permanente (ainsi, l'énergie réactive représente un investissement qui est dissipé dans l'arc qui se forme lorsque l'on ouvre le circuit).

[2] On notera d'ailleurs que ce critère d'optimum appliqué aux réseaux embarqués dans les avions conduit à un autre choix de fréquence (de l'ordre de 400Hz), car la contrainte du poids des dispositifs de conversion intervient.

C'est ce dernier point qui nous permet ici de proposer des méthodes et des outils de conception adaptés à ce paradoxe. Comme nous le verrons par la suite, ces considérations sont rarement (ou souvent mal) prises en compte, ce qui fait des interconnexions le 'parent pauvre' de l'optimisation. C'est également ce qui fait l'intérêt de ce travail, puisque nous montrerons que d'importantes marges d'optimisation sont accessibles et jusqu'ici inexploitées.

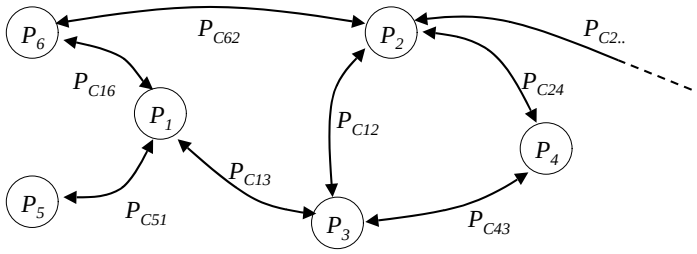


FIG. 1.7 – Seule la transparence des interconnexions permet de garantir l'optimisation de l'efficacité du réseau.

D'autre part, dans une optique d'optimisation globale de la filière électrique (donc vis à vis d'une valeur d'énergie finale délivrée), on cherche classiquement à optimiser chaque élément indépendamment, puisque la conception peut difficilement appréhender la globalité du réseau. L'état de l'art des bureaux d'études garantit :

$$\sum \min\left(P_i\right)$$

Seule l'optimisation des échanges (voir figure 1.7) et donc la minimisation des pertes dans les interconnexions (qui jouent le rôle d'une taxation sur les échanges) permet de garantir que l'on tend bien vers l'optimum global :

$$\min\left(\sum P_i\right) \rightarrow \sum \min\left(P_i\right)$$

On a affaire à une sorte de cercle vertueux, puisque l'optimisation des interconnexions va dans le sens de la réduction globale de ce qui est consommé, sans perte de service, ce qui doit permettre de réduire la production. Les points de fonctionnement de tous les dispositifs doivent être adaptés pour obtenir l'optimum global, ce qui sous-entend instinctivement qu'actuellement on se trouve très loin du minimum.

La contribution de ce travail est principalement axée sur les jeux de barres et canalisations de puissance (produits Schneider), pour lesquels nous allons mettre en place des stratégies et de méthodes d'optimisation reposant sur la méthode de modélisation PEEC (acronyme de Partial Element Equivalent Circuit) en vue d'une utilisation en bureaux d'études.

1. La méthode PEEC sera introduite dans le chapitre 2 en dérivant les équations de l'électromagnétisme d'une approche thermodynamique. Elle apparaîtra ainsi comme l'outil de modélisation naturel pour les interconnexions et cette approche nous permettra en outre de définir sans ambiguïtés les modèles employés, ainsi que les hypothèse de validité de la méthode (notamment l'impossibilité de traiter les matériaux ferromagnétiques). On introduira également à ce stade les fondements de l'approche Ampérienne de la matière qui servira de base à l'extension de la méthode proposée au chapitre 4.

2. L'utilisation de cette méthode dans le cadre de la conception des jeux de barres nous permettra ensuite, dans le chapitre 3, d'une part de rappeler les phénomènes électromagnétiques sur lesquels on va agir (pertes supplémentaires dans les conducteurs liées aux effets induits) ; d'autre part d'envisager une optimisation visant à la réduction des pertes. On rappellera la possibilité d'optimiser la position des conducteurs, puis on développera une méthodologie adaptée à l'optimisation de la forme des conducteurs. On se basera pour cela sur un couplage entre algorithmes méta-heuristiques et méthode de modélisation PEEC.

3. Etant donné l'intérêt des méthodes d'optimisation développées autour de la méthode PEEC au chapitre 3, nous verrons comment, sur la base d'une approche Ampérienne de la matière aimantée introduite dans le chapitre 2, il est possible d'étendre le domaine de validité de la méthode PEEC. On développera ainsi dans le chapitre 4 une extension de la méthode, baptisée '$\mu PEEC$' ou '$MuPEEC$' qui permet de modéliser les tôles ferromagnétiques qui entourent par exemple les canalisations électriques préfabriquées (CEP). Cette extension sera validée numériquement dans un premier temps, puis sur des mesures expérimentales.

4. Enfin, nous aborderons dans le chapitre 5 la valorisation des gains des méthodes d'optimisation présentées dans le chapitre 3. On mettra à ce stade l'accent sur les objectifs d'optimisation dans le cadre d'un développement durable, ce qui nous conduira à la notion d'analyse du cycle de vie. Les gains accessibles à la méthode (notamment étendus par les résultats du chapitre 4) seront quantifiés sur le marché des produits Schneider. Nous les déclinerons dans le cadre du marché cible des data-centers. La valorisation de ce travail dans un outil logiciel industriel sera également évoqué.

Chapitre 2

Justification thermodynamique de la méthode PEEC

On propose ici d'introduire les lois de l'électromagnétisme en adoptant le point de vue d'un gestionnaire de réseau qui cherche à transmettre une énergie (travail mécanique) entre un lieu de production et un lieu de consommation. La transaction se doit d'être la plus efficace possible, c'est-à-dire qu'elle engendre un minimum de perte de valeur (chaleur) et nécessite le minimum d'investissement (énergie réactive).

Le vecteur d'échange choisi est l'énergie électrique. On montrera que la loi de conversion électromécanique (Faraday) garantit l'optimalité de l'échange.

Après avoir identifié les sources, nous pourrons aborder le cadre de la magnétostatique, puis celui des évolution temporelles dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents. Nous verrons également sous quelles hypothèses il est possible d'optimiser la conception des éléments constitutifs du réseau tout en visant un optimum global. Dans cette décomposition, on fera apparaître des dispositifs :

- *localisés*, dédiés à la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique (moteurs, actionneurs...). Cette conversion s'exprimant dans un compromis entre adiabaticité et réversibilité, la Méthode des Eléments Finis apparaîtra naturelle à leur conception ;
- *étendus,* qui privilégient une orientation donnée par une 'fibre neutre' . Ils sont dédiés à la distribution et au transport (câbles, jeux de barres, circuiterie d'appareillage, pistes de PCB...) et leur rôle est de véhiculer un courant donné en assurant l'adaptation des tensions entre dispositifs de conversion. A ce titre, ils devront générer le minimum de pertes Joule et séquestrer le minimum d'énergie réactive. C'est pourquoi la méthode PEEC apparaîtra naturelle à leur optimisation.

La dérivation thermodynamique des équations de Maxwell permettra de bien identifier les sources et définir les équations d'évolution des champs. Nous pourrons ainsi rappeler les principes de la méthode des éléments finis avant de présenter plus en détail l'approche PEEC, en ayant levé les ambiguïtés qui peuvent apparaître dans des présentations plus 'classiques' de la méthode et précisé les raisons de son efficacité pour la modélisation des connectiques.

2.1 Dérivation thermodynamique des équations de Maxwell

2.1.1 Définition des sources : charges et courants électriques

Nous examinons ici les conditions requises pour représenter un problème d'électromagnétisme par des champs macroscopiques continus :

- On part d'une distribution classique de particules chargées sur laquelle on discrimine les échelles spatiales pour faire apparaître la notion de charges 'libres'. Cela permet de définir la notion de matériau diélectrique ou conducteur (associés à l'existence de courants 'libres').
- Afin de traduire le caractère étendu de l'interaction électromagnétique, le déplacement électrique $\mathbf{D}$ et le champ magnétique $\mathbf{H}$ sont introduits comme des champs 'sources' macroscopiques dont dérivent les densités de charges et de courants 'libres' ;
- On abordera enfin les conditions sous lesquelles on peut effectuer une représentation Ampérienne de l'aimantation d'un milieu par des courants 'liés', notamment dans l'optique d'étendre la méthode PEEC au milieux ferromagnétiques doux (voir chapitre 4).

Densités de charges et de courants

Pour décrire l'évolution d'un système macroscopique, qui inclue un nombre de particules de l'ordre du nombre d'Avogadro, on doit renoncer à suivre individuellement les charges à l'origine des phénomènes électromagnétiques pour adopter une description en 'champ'. On introduit :

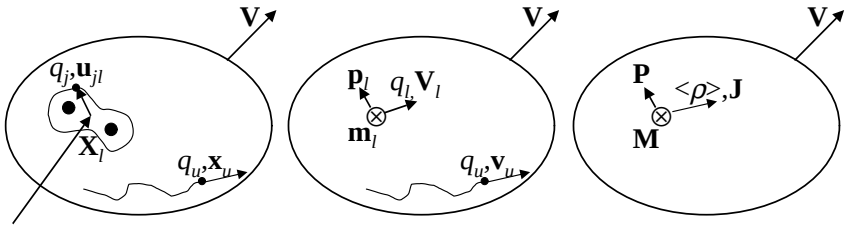


FIG. 2.1 – Développement multipolaire des charges et des courants. Le filtrage sur l'amas l des charges localisées permet d'introduire les notions de charge moyenne q_l, de moment dipolaire $\mathbf{p}_l$ et de moment magnétique $\mathbf{m}_l$. L'intégration sur le matériau définit les densités de charges libres $\langle\rho\rangle$ et de courants libres $\mathbf{J}$, ainsi que la polarisation $\mathbf{P}$ et l'aimantation $\mathbf{M}$.

– la distribution totale de charges :

$$\rho_T(\mathbf{x},t) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

– la distribution totale de courants :

$$\mathbf{j}_T(\mathbf{x},t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))$$

où les sommations sont effectuées sur l'ensemble des charges i appartenant au système.

Les champs scalaire $\rho_T(\mathbf{x},t)$ et vectoriel $\mathbf{j}_T(\mathbf{x},t)$ présentent les mêmes irrégularités spatiales et temporelles que la description particulaire et se prêtent donc aussi mal à une étude macroscopiques. Par contre, cette écriture permet d'isoler les charges :

– *délocalisées*, indicées par u (pour 'unbound'), contribuant au courant électrique. Elles sont susceptibles de se déplacer sur des distances grandes devant la longueur typique de la liaison chimique[1] ;
– *localisées*, contribuant à la cohésion de la matière. Afin de restituer certaines propriétés d'invariance géométriques dans la matière, il est intéressant de la diviser en 'amas moléculaires' l dont chacun définit (figure 2.1) :
  – une distribution de charges ρ_l localisée sur un centre $\mathbf{X}_l$:

$$\rho_l(\mathbf{x},t) = \sum_{j(l)} q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t) - \mathbf{u}_{jl}(t))$$

  où $\mathbf{u}_{jl} = \mathbf{x}_{j(l)} - \mathbf{X}_l$ est la coordonnée relative de la charge j de l'amas $j(l)$;
  – une distribution de courants localisés $\mathbf{j}_l$:

$$\mathbf{j}_l(\mathbf{x},t) = \sum_{j(l)} q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t) - \mathbf{u}_{jl}(t))$$

  où $\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_{j(l)} - \mathbf{V}_l$ est la vitesse relative de la particule $j(l)$ dans l'amas moléculaire l.
  – une vitesse $\mathbf{V}_l = \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_l}{\mathrm{d}t}$

[1] Pour fixer les idées, le libre parcours moyen des électrons de conduction dans un métal est typiquement de l'ordre de quelques dizaines d'Angstrom, alors que la maille cristalline est de l'ordre de l'Angstrom [Ashcroft 81].

A présent, les distributions totales de charges et de courants s'écrivent :

$$\rho_T(\mathbf{x},t) = \sum_u q_u \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_u(t)) + \sum_l \rho_l(\mathbf{x},t) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{j}_T(\mathbf{x},t) = \sum_u q_u \mathbf{v}_u \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_u(t)) + \sum_l \mathbf{j}_l(\mathbf{x},t) \tag{2.2}$$

L'intérêt de cette décomposition est de faire apparaître des grandeurs localisées autour des centres des amas $\mathbf{X}_l$.

Lissage spatial

Afin de séparer l'allure générale des variations fines des distributions de charges, on leur applique un lissage spatial [Russakoff 70]. On commence par réaliser une transformation de Fourier spatiale sur la distribution de charges (2.1). Le spectre de la contribution localisée $\sum_l \rho_l(\mathbf{x},t)$ fait apparaître (voir figure 2.2) :

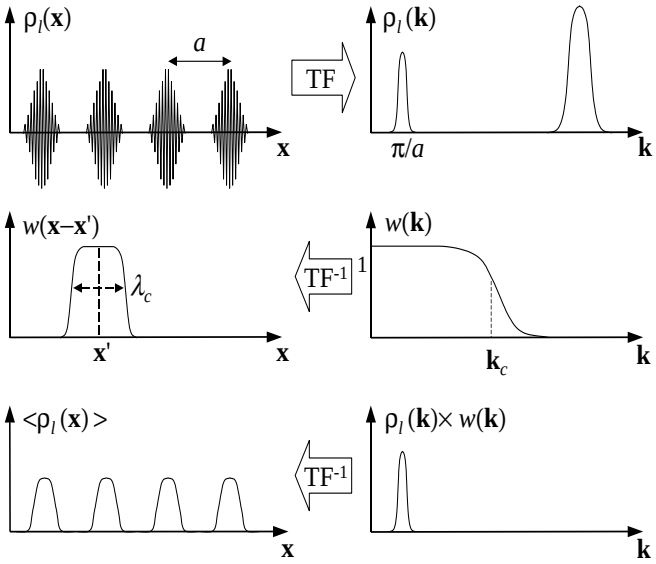


FIG. 2.2 – Illustration du lissage spatial des irrégularités sub-atomiques de la densité de charge localisée. Si $\lambda_c < a$, il ne restera, après lissage, que les modulations de charge inter-atomiques.

- une fréquence spatiale sub-atomique correspondant aux variations de charges localisées dans les amas moléculaires ;
- une fréquence spatiale inter-atomique correspondant à la périodicité des amas moléculaires ;
- des fréquences spatiales de grandes longueurs d'onde correspondant aux "impuretés" diluées dans le milieu.

Le lissage spatial consiste à appliquer sur ce spectre un filtre passe-bas $\mathrm{w}(\mathbf{k})$ pour éliminer les fréquences spatiales associées aux petites longueurs d'onde qui n'interagissent pas avec les excitations aux fréquences usuelles en génie électrique[2] La densité de charge totale s'exprime

[2] Pour fixer les idées : pour une fréquence $< 10^{12}$ Hz, $\lambda > 0,3$mm dans le vide

alors grâce au produit de convolution :

$$\langle \rho_T(\mathbf{x},t)\rangle = \int \rho_T(\mathbf{x}',t)\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3x'$$

où w est la *fonction nuage* utilisée pour le filtrage. Sa longueur caractéristique est $\lambda_c = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_c|}$. Elle est normée pour assurer la conservation de la charge :

$$\int \mathrm{w}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3x = 1$$

On passe ainsi d'une distribution discontinue (2.1) à une densité suffisamment régulière pour permettre des opérations du calcul vectoriel à condition que la fonction nuage tolère les mêmes opérations de calcul vectoriel et que la longueur caractéristique λ_c de la fonction nuage recouvre la distance moyenne entre singularités.

La fonction nuage variant très peu sur les dimensions des amas moléculaires, elle peut être développée au second ordre :

$$\mathrm{w}(\mathbf{u}+\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\nabla^2\,\mathrm{w}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}\cdots \tag{2.3}$$

Alors la densité de charges localisées autour de l'amas moléculaire l se développe selon :

$$\langle \rho_l(\mathbf{x},t)\rangle = \sum_{j(l)} q_j \int \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{X}_l(t)-\mathbf{u}_{jl}(t))\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3x' = \sum_{j(l)} q_j\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t)-\mathbf{u}_{jl}(t))$$

soit :

$$\begin{aligned}\langle \rho_l(\mathbf{x},t)\rangle = &\sum_{j(l)} q_j\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t)) - \sum_{j(l)} q_j\mathbf{u}_{jl}(t)\cdot\mathbf{grad}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))\\ &+\frac{1}{2}\sum_{j(l)} q_j\mathbf{u}_{jl}(t)\cdot\nabla^2\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))\cdot\mathbf{u}_{jl}(t)+\cdots\end{aligned}$$

De même la densité des courants localisés autour de l'amas moléculaire l se développe selon :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{j}_l(\mathbf{x},t)\rangle &= \sum_{j(l)} q_j\mathbf{v}_j \int \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{X}_l(t)-\mathbf{u}_{jl}(t))\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathrm{d}^3x'\\ &= \sum_{j(l)} q_j\left(\mathbf{V}_l + \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t)-\mathbf{u}_{jl}(t))\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{j}_l(\mathbf{x},t)\rangle = &\mathbf{V}_l\sum_{j(l)} q_j\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))\\ &-\mathbf{V}_l\sum_{j(l)} q_j\mathbf{u}_{jl}\cdot\mathbf{grad}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t)) + \sum_{j(l)} q_j\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))\\ &+\frac{1}{2}\mathbf{V}_l\sum_{j(l)} q_j\mathbf{u}_{jl}\cdot\nabla^2\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))\cdot\mathbf{u}_{jl} - \sum_{j(l)} q_j\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_{jl}\cdot\mathbf{grad}\,\mathrm{w}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t))+\cdots\end{aligned}$$

Ces expressions introduisent naturellement :

– la charge q_l localisée sur l'amas moléculaire l :

$$q_l = \sum_{j(l)} q_j$$

– le moment dipolaire $\mathbf{p}_l$ de l'amas moléculaire l :

$$\mathbf{p}_l = \sum_{j(l)} q_j \mathbf{u}_{jl}(t)$$

– le moment quadripolaire $[q]_l$ de l'amas moléculaire l, tenseur symétrique d'ordre 2, dont les composantes sont :

$$q_{l,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j(l)} q_j u_{jl,\alpha}(t)\, u_{jl,\beta}(t)$$

Ce qui permet d'écrire le dernier terme du développement de la densité des courants localisés $\langle \mathbf{j}_l(\mathbf{x},t)\rangle$ autour de l'amas moléculaire l sous la forme :

$$\sum_{j(l)} q_j \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}_{jl} \cdot \mathbf{grad}\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) = \frac{\mathrm{d}[q]_l}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{grad}\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) - \mathbf{rot}\,(\mathbf{m}_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)))$$

où $\mathbf{m}_l$ désigne le moment magnétique de l'amas moléculaire l :

$$\mathbf{m}_l = \frac{1}{2} \sum_{j(l)} \mathbf{u}_{jl} \times q_j \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{jl}}{\mathrm{d}t} \tag{2.4}$$

Avec ces notations, la distribution totale de charge (2.1) devient, après filtrage :

$$\langle \rho_T(\mathbf{x},t)\rangle = \sum_u q_u\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)) + \sum_l q_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) - \mathrm{div}\left[\sum_l (\mathbf{p}_l - \mathrm{div}\,[q]_l)\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t))\right] + \cdots$$

et la distribution totale de courants (2.2) :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{j}_T(\mathbf{x},t)\rangle = &\sum_u q_u \mathbf{v}_u\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)) + \sum_l q_l \mathbf{V}_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) \\ &+ \mathbf{rot}\left[\sum_l \mathbf{m}_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t))\right] \\ &+ \sum_l \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_l}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) - \mathbf{V}_l \mathrm{div}\,(\mathbf{p}_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)))\right] \\ &- \mathrm{div} \sum_l \left[\frac{\mathrm{d}[q]_l}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)) - \mathbf{V}_l \mathrm{div}\,([q]_l\, \mathrm{w}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)))\right] + \cdots\end{aligned} \tag{2.5}$$

Densité de charges libres

L'intérêt de ces développements réside dans le fait que le premier moment multipolaire non-nul est indépendant de l'origine $\mathbf{X}_l$ où il est calculé, ce qui lui confère un caractère intrinsèque. Il permet également de différencier deux types de milieux :

1. Les milieux *diélectriques* (ou isolants) dans lesquels il n'existe pas de charges délocalisées et donc pas de courants macroscopiques. Le milieu est localement neutre. Le développement de la densité de charges filtrée commence au premier terme multipolaire non-nul. La densité de charge filtrée s'identifie à une *densité de charges liées* :

$$\langle \rho_T(\mathbf{x},t)\rangle = -\mathrm{div}\mathbf{P}$$

dérivant de la polarisation du milieu :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t) = \sum_l \mathbf{p}_l \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right)$$

Au delà, l'absence de courants de polarisation (*i.e.* $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_l}{\mathrm{d}t} \equiv 0$) conférera un caractère intrinsèque à l'aimantation du milieu :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},t) = \sum_l \mathbf{m}_l \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right) \tag{2.6}$$

de telle sorte que la densité de courants filtrée s'identifie, au plus bas ordre, à une densité de courants liés :

$$\langle \mathbf{j}_T(\mathbf{x},t)\rangle = \mathbf{rot}\,\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \cdots$$

après simplification de la dérivée particulaire dans (2.5) ;

2. Les milieux *conducteurs* dans lesquels des charges délocalisées circulent et peuvent contribuer à l'apparition de courants électriques, c'est-à-dire *libres*. Alors le premier terme du développement est non-nul. Les termes multipolaires sont sans caractère intrinsèque puisqu'ils dépendent de l'origine prise sur chacun des amas moléculaires. On est donc conduit à isoler les deux premiers termes pour définir la distribution 'vraie' de charges :

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sum_u q_u \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)\right) + \sum_l q_l \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right)$$

de telle sorte que sa représentation filtrée définisse la *densité de charges libres* :

$$\langle \rho(\mathbf{x},t)\rangle = \sum_u q_u \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)\right) + \sum_l q_l \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right) \tag{2.7}$$

bien que cette dénomination puisse prêter à confusion car $\langle \rho(\mathbf{x},t)\rangle$ ne correspond pas uniquement à la contribution des charges délocalisées mais plutôt à la charge moyenne par unité de volume.

Densité de courants libres : conservation de la charge

La variation locale de charges libres s'obtient par dérivation temporelle de (2.7) :

$$\frac{\partial \langle \rho\rangle}{\partial t} = \sum_u q_u \sum_\alpha \left(\frac{\partial \,\mathrm{w}}{\partial x_{u,\alpha}}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)\right)\right)\left(\frac{\mathrm{d}x_{u,\alpha}}{\mathrm{d}t}\right) + \sum_l q_l \sum_\alpha \left(\frac{\partial \,\mathrm{w}}{\partial X_{l,\alpha}}\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right)\right)\left(\frac{\mathrm{d}X_{l,\alpha}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Cette expression fait apparaître les vitesses instantanées des charges délocalisées $\mathbf{v}_u$ et des amas moléculaires $\mathbf{V}_l$ pour donner :

$$\frac{\partial \langle \rho\rangle}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(\sum_u q_u \mathbf{v}_u \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)\right) + \sum_l q_l \mathbf{V}_l \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right)\right)$$

En introduisant la distribution de courants libres :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \sum_u q_u \mathbf{v}_u \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u(t)\right) + \sum_l q_l \mathbf{V}_l \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l(t)\right)$$

la conservation de la charge libre filtrée s'exprime par :

$$\mathrm{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \langle \rho\rangle}{\partial t} = 0 \tag{2.8}$$

où $\mathbf{J}$ est la densité filtrée de courants libres :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \sum_u q_u \mathbf{v}_u \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_u(t)\right) + \sum_l q_l \mathbf{V}_l \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x}-\mathbf{X}_l(t)\right) \tag{2.9}$$

Ainsi écrite, la densité de courants libres réalise une moyenne d'ensemble sur les vitesses des charges mobiles. En distinguant chacune des espèces de charges, la densité de courants libres s'écrit également :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \sum_n q_n \sum_{p(n)} \mathbf{v}_p \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)\right)$$

où $p(n)$ indice chacune des particules mobiles de l'espèce n. Pour une fonction nuage quasi-constante jusqu'à λ_c dont la décroissance est ensuite suffisamment rapide pour que les charges localisées à sa surface soient nettement moins nombreuses que celles contenues dans le nuage, l'expression précédente s'approxime par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &\approx \sum_n q_n \left\langle \mathbf{v}_n(\mathbf{x},t)\right\rangle \sum_{p(n)} \mathrm{w}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)\right) \\
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &\approx \sum_n \left\langle \mathbf{v}_n(\mathbf{x},t)\right\rangle \sum_{p(n)} q_n \,\mathrm{w}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_p(t)\right) \\
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &\approx \sum_n \left\langle \rho_n(\mathbf{x},t)\right\rangle \left\langle \mathbf{v}_n(\mathbf{x},t)\right\rangle
\end{aligned} \tag{2.10}$$

On retrouve l'expression classique de la densité de courants libres en fonction de la *vitesse de dérive* $\langle \mathbf{v}_n(\mathbf{x},t)\rangle$ de chaque espèce de charge. Dans le cas d'un conducteur rigide immobile la densité de courants libres (2.9) ne fera intervenir que les charges délocalisées.

L'expression (2.8) constitue le point de départ de l'approche thermodynamique qui sera développée à la section suivante puisque c'est sur les densités de charges et de courants libres que des générateurs de tension et de courant pourront macroscopiquement agir pour modifier l'état électromagnétique du système.

Densité de courants liés : représentation Ampérienne

Avec ces notations, la distribution totale de courants (2.5) devient :

$$\left\langle \mathbf{j}_T(\mathbf{x},t)\right\rangle = \mathbf{J}(\mathbf{x},t) + \mathbf{J}_l(\mathbf{x},t) \tag{2.11}$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ est la densité de courants libres et $\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t)$ est la densité de courants liées. Elle fait apparaître un terme d'aimantation à condition de conserver (tous) les termes du développement multipolaire jusqu'à l'ordre 2 (pour lui conserver son caractère intrinsèque) :

$$\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t) = \mathbf{rot}\,\mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{P} - \mathrm{div}\,[Q]\right) + \cdots \tag{2.12}$$

En *régime stationnaire* (*i.e.* $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$), cette expression montre qu'on pourra représenter une aimantation $\mathbf{M}$, par exemple observée comme une réalité expérimentale, par une densité de courants liés $\mathbf{J}_l$: c'est la l'équivalence Ampérienne qui sera :

- étendue au régimes quasi-permanents (voir ci-dessous) ;
- utilisée au chapitre 4.

Champs sources étendus

Afin de traduire le fait que l'interaction électromagnétique exercée par des répartitions macroscopiques de charges et de courants libres localisés dans des conducteurs se fait à distance, on introduit deux champs étendus (c'est-à-dire définis dans tout l'espace) par les équations locales (2.13) et (2.14) :

1. le *déplacement électrique* $\mathbf{D}$ dont dérive la densité de charges libres par l'équation de *Maxwell-Gauss* :
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \langle\rho\rangle \tag{2.13}$$
Alors, la conservation de la charge (2.8) devient :
$$\mathrm{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0$$
ce qui permet d'introduire :
2. le *champ (ou excitation) magnétique* $\mathbf{H}$, lié aux densités de courants libres $\mathbf{J}$ et de *courants de déplacement* $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ par l'équation de *Maxwell-Ampère* :
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2.14}$$

On constate que $\mathbf{D}$ est défini à un rotationnel près alors que $\mathbf{H}$ est défini à un gradient près. Ainsi définis, les champs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ sont intrinsèquement macroscopiques, c'est-à-dire que leurs variations spatiales n'ont de signification physique qu'au delà de la longueur caractéristique λ_c de la fonction nuage.

Approximation des régimes quasi-permanents

L'approximation des régimes quasi-permanents postule la non-coexistence des courants libres et des courants de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.14). Dans les conducteurs, elle se traduit par :

- la conservation de la densité de courant libre :
$$\mathrm{div}\mathbf{J} = 0 \tag{2.15}$$
qui peut être interprétée de façon intégrale par la 'loi des noeuds' :
$$\sum_b I_b = 0 \tag{2.16}$$
où b désigne les branches connectées à un noeud.
- l'existence d'une densité de charges libres $\langle\rho\rangle$ stationnaire (*i.e.* $\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t} = 0$) qui va s'avèrer nulle.

On constate expérimentalement que la circulation d'un courant (libre) dans les conducteurs s'accompagne toujours d'un dégagement de chaleur : c'est l'*effet Joule*. Il est invariant par renversement du temps, donc son développement de Mac-Laurin ne fait intervenir que des termes d'ordre pair de la densité de courants libres, soit :
$$p_J(\mathbf{J}) = \mathbf{J}\cdot\sigma^{-1}\cdot\mathbf{J} + \cdots \text{termes d'ordre pair} \cdots > 0 \tag{2.17}$$

Dans cette expression :

– les termes d'ordre supérieur correspondent à des comportements non-linéaires exclus ici (phénomènes d'avalanche ...) ;
– le terme quadratique introduit naturellement le tenseur résistivité σ^{-1} : c'est un tenseur d'ordre 2 positif et symétrique par construction.

La densité volumique de charge libre $\langle\rho\rangle$ étant une grandeur particulaire – donc invariante par *transformation galiléenne*[3] –, la densité de courant dans le référentiel d'étude vérifie, d'après (2.10)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \langle\rho\rangle\,\mathbf{V}_i \tag{2.18}$$

où :
– $\mathbf{V}_i$ désigne la vitesse du repère i par rapport au référentiel d'étude (noté sans indice) ;
– $\mathbf{J}$ (resp. $\mathbf{J}_i$) est la densité de courant dans le conducteur mesurée dans le référentiel d'étude (resp. référentiel i).

Ainsi, pour un conducteur qui dissipe :
– la densité statique de charges libres volumique $\langle\rho\rangle$ est uniformément nulle (sinon, la puissance dissipée fluctue selon le référentiel d'étude, or c'est un invariant galiléen). Les conducteurs définissant des domaines connexes, l'absence de charges libres permet d'y imposer :

$$\mathbf{D} \equiv 0$$

– la densité de courant $\mathbf{J}$, le tenseur résistivité σ^{-1} sont invariants par changement de référentiel (galiléen ou non) ;
– une accumulation de charges libres est possible sur les surfaces des conducteurs (ou les interfaces entre milieux conducteurs). Elle est caractérisée par la densité surfacique $\langle\sigma\rangle$.

Afin d'alléger les notations, à partir de ce point :
– on supposera que le tenseur résistivité σ^{-1} est simplement un scalaire ρ, que l'on ne pourra plus confondre avec la densité volumique de charge libre $\langle\rho\rangle$ puisque nous venons de montrer que celle-ci est nulle ;
– on notera σ la densité surfacique de charges libres sur les conducteurs.

2.1.2 Description complémentaire du champ électromagnétique

Afin d'obtenir les équations de Maxwell complémentaires (conservation de l'induction magnétique et loi de Faraday), on adopte le point de vue du gestionnaire de réseau électrique qui cherche à transmettre une énergie entre un lieu de production et un lieu de consommation. La transaction se doit d'être la plus efficace possible, c'est-à-dire qu'elle engendre un minimum de perte de valeur (chaleur) et nécessite le minimum d'investissement (énergie réactive stockée par le système). On considère le système simplifié représenté sur la figure 2.3.

L'énergie reçue par le système composé du champ électromagnétique couplé à son générateur de courant I et au potentiel V_0 pendant $\mathrm{d}t$ est :

$$-\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 - \frac{\mathrm{d}Q_{th}}{\mathrm{d}t}$$

où (on fait ici abstraction de ce qui permet d'obtenir un travail mécanique en amont) :

[3] Rappelons qu'un référentiel, indicé par i, sera *galiléen* s'il est en mouvement de translation uniforme par rapport à une autre référentiel galiléen. Il s'agit d'une notion relative entre repères dont les coordonnées vérifient

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x} - \mathbf{V}_i t$$

où $\mathbf{V}_i$ est la vitesse de translation du référentiel i dans le référentiel d'étude (noté sans indice). Conséquence du principe de l'action et de la réaction, la physique newtonienne postule de l'invariance des grandeurs particulaires, *i.e.* attachées à un domaine matériel, mesurées au même instant dans deux référentiels galiléens. Comme les horloges sont synchrones en physique galiléenne, les dérivées temporelles des grandeurs particulaires sont également les mêmes.

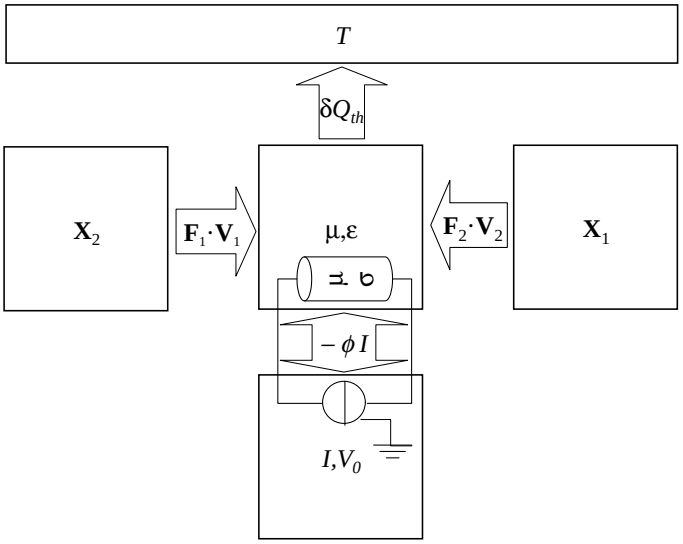


FIG. 2.3 – Environnement du champ électromagnétique : La régie électrique cherche à transmettre le travail mécanique de l'actionneur $\mathbf{X}_1$ à l'actionneur $\mathbf{X}_2$. Pour cela elle peut régler l'excitation I d'un inducteur (par exemple le rotor d'une machine synchrone). L'ensemble échange de la chaleur avec le thermostat T et des charges avec une ' masse' au potentiel V_0.

- $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 - \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2$ correspond à la puissance mécanique reçue ;
- $\frac{\mathrm{d}Q_{th}}{\mathrm{d}t}$ est la chaleur reçue par le thermostat .

Le premier principe de la thermodynamique impose que cet accroissement d'énergie soit conservé dans le couplage entre le champ, le générateur et la masse, soit :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}Q_{th}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\phi I)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(QV_0)}{\mathrm{d}t}$$

où :
- le flux ϕ traduit le couplage entre le champ électromagnétique et l'excitation I,
- V_0 est un potentiel de référence qui fixe la charge Q cédée par la masse au système.

L'efficacité optimale du transfert est obtenue en minimisant :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q_{th}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\phi I)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(QV_0)}{\mathrm{d}t} \tag{2.19}$$

Notons ici que pour une transformation *cyclique*, le second principe impose que le système ne peut dégrader du travail qu'en chaleur, soit :

$$\oint \mathrm{d}W = \oint \mathrm{d}Q_{th} \geq 0$$

si bien, qu'intégrée sur un cycle, la minimisation de (2.19) aboutira toujours à un minimum positif.

Ayant identifié les sources du champ électromagnétique et défini ses couplages, les principes de la thermodynamique [Callen 85], et la condition d'optimalité (2.19), vont permettre d'obtenir les champs complémentaires $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ dans l'approximation des régimes quasi-permanents (figure 2.4).

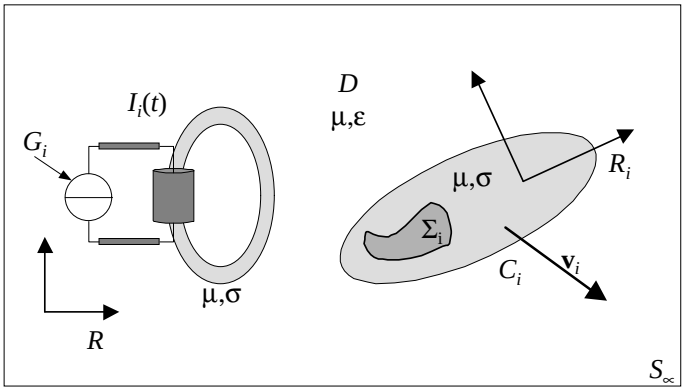


FIG. 2.4 – Probleme type d'électromagnétisme dans l'approximation des régimes quasi-permanents. L'espace se partitionne en : (i) conducteurs rigides C_i, éventuellement mobiles, (ii) des espaces diélectriques D_i éventuellement déformables pour compenser les déplacement des conducteurs, (iii) des générateurs G_i, souvent sous entendus dans les inducteurs qu'ils alimentent. On s'intéresse ici particulièrement aux liaisons qui permettent d'associer inducteurs et générateurs, ainsi que leurs interactions avec d'éventuels conducteurs passifs (blindages). L'énergie du champ électromagnétique est négligeable au delà d'une surface S_∞, plongée elle-même dans une thermostat à la température T.

Equilibres statiques

Les variables d'état $(T, I, V_0, \mathbf{X})$ définissent de manière univoque –c'est-à-dire reproductible– une fonction d'état du champ électromagnétique. Le *premier principe* de la thermodynamique lui confère une valeur énergétique.

Dans notre cas, où :

- une excitation I doit être maintenue pour préserver l'équilibre magnétostatique ;
- le système est en contact avec un thermostat à la température T ;
- une liaison existe avec un réservoir de charge (la terre...) ;

Elle s'appelle *l'enthalpie libre ou énergie libre de Gibbs* G du système. Le second principe permet d'écrire sa différentielle :

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T - \phi\mathrm{d}I - Q\mathrm{d}V_0 - \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} \tag{2.20}$$

où :

- S désigne l'entropie du système ;
- $\phi = -\frac{\partial G}{\partial I}$ est le flux (magnétique) ;
- $Q = -\frac{\partial G}{\partial V_0}$ est la charge électrique libre portée par le système à la surface de ses conducteurs ;
- $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}G$ est la force exercée par l'actionneur pour maintenir les conditions aux limites sur le champ.

A ce stade, il est intéressant d'introduire les densités des grandeurs énergétiques selon :

$$G\left(T, I, V_0, \mathbf{X}\right) = \int g\left(\mathbf{x}\right)\mathrm{d}^3x$$

ce qui permet de repousser la description de la géométrie du système dans la définition des domaines d'intégration.

Magnétostatique

L'écriture de g n'est pas unique, mais un choix classique consiste à localiser l'énergie magnétique sur la mesure d'un champ magnétique $\mathbf{H}$ vérifiant l'écriture statique de l'équation de Maxwell-Ampère (2.14) :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{2.21}$$

qui traduit le caractère étendu de l'interaction électromagnétique. Pour des évolutions statiques et isothermes, en l'absence de variation du potentiel V_0, les variations de la densité d'enthalpie libre se réduisent à une expression de la forme :

$$\mathrm{d}g = g|_{T,\mathbf{X},I+\delta I} - g|_{T,\mathbf{X},I} = -\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H} \tag{2.22}$$

ce qui permet d'introduire l'induction magnétique $\mathbf{B}$ comme vérifiant :

$$\mathbf{B} = -\nabla_{\mathbf{H}} g \tag{2.23}$$

Condition de stationnarité de l'équilibre magnétostatique : conservation de l'induction magnétique

L'enthalpie libre magnétostatique doit évidemment rester invariante pour toute variation de $\mathbf{H}$ ne changeant pas les courants imposés par les sources. En se limitant à des transformations statiques et isothermes, la variation d'enthalpie libre magnétostatique s'écrit :

$$\mathrm{d}G = \int (-\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H})\ \mathrm{d}^3x$$

Or d'après (2.21) les variations de $\mathbf{H}$ laissant invariants les courants sont de type potentielles :

$$\delta\mathbf{H} = \mathbf{grad}\delta\Phi$$

La condition d'invariance devient donc :

$$\mathrm{d}G\,(\delta\Phi) = \int (-\mathbf{B})\cdot\mathbf{grad}\delta\Phi\ \mathrm{d}^3x = 0 \qquad \text{quel que soit } \delta\Phi \tag{2.24}$$

Compte tenu de la relation d'analyse vectorielle [Gradshteyn 94] :

$$\mathrm{div}\,(a\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}a + a\,\mathrm{div}\mathbf{u} \tag{2.25}$$

il vient après une intégration par partie :

$$\mathrm{d}G\,(\delta\Phi) = \int \mathrm{div}\mathbf{B}\cdot\delta\Phi\mathrm{d}^3x + \oint_{S_\infty} \delta\Phi\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}^2x = 0$$

La condition d'invariance sur G impose donc :

- dans tout l'espace

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{2.26}$$

- une condition de décroissance à l'infini.

On retrouve ainsi que l'induction magnétique $\mathbf{B}$ doit posséder (localement) une divergence nulle pour assurer l'invariance (globale) de l'enthalpie libre magnétostatique sous des variations potentielles de $\mathbf{H}$. Au delà, la résolution de (2.24) nécessite la connaissance d'une loi de comportement magnétique 'champ-à-champ' entre $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ dont nous allons préciser la forme.

Condition d'équilibre magnétostatique : positivité de la perméabilité magnétique

Pour une température T fixée par un thermostat, des conditions aux limites $\mathbf{X}$ figées par les positions des actionneurs et un courant I imposé par le générateurs, le *second principe* de la thermodynamique impose que l'équilibre final soit le résultat d'une 'marche vers l'équilibre' où l'entropie du système isolé (constitué du champ, du générateur, de l'actionneur et du thermostat) n'a pu que croître. Cette condition d'équilibre correspond à un minimum du potentiel de Gibbs $\widetilde{G}$ dont la valeur à l'équilibre est précisément l'enthalpie libre magnétostatique G. En introduisant la densité du potentiel magnétostatique de Gibbs $\widetilde{g}$, l'équilibre s'exprime par :

– une condition d'extremum à l'équilibre :

$$\text{Trouver } \mathbf{B} \text{ tel que : } \int \left(\nabla_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{X},I,\mathbf{B}} \cdot \delta\mathbf{B} \right) \mathrm{d}^3x = 0 \tag{2.27}$$

– une condition de convexité à l'équilibre :

$$\int \left(\delta\mathbf{B}^T \cdot \nabla^2_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{X},I,\mathbf{B}} \cdot \delta\mathbf{B} \right) \mathrm{d}^3x > 0 \tag{2.28}$$

sur des variations quelconques $\delta\mathbf{B}$ de l'induction.

La densité du potentiel magnétostatique de Gibbs devant coïncider à l'équilibre avec la densité d'enthalpie libre, on imposera à la fonctionnelle $\widetilde{g}$ d'être suffisamment régulière pour que ses accroissements suivent ceux de g (2.22) selon :

$$\widetilde{g}|_{T,\mathbf{X},I+\delta I,\mathbf{B}} - \widetilde{g}|_{T,\mathbf{X},I,\mathbf{B}} \simeq -\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{H} \tag{2.29}$$

dans un voisinage suffisamment restreint de l'équilibre.

La minimisation du potentiel de Gibbs pour caractériser l'équilibre magnétostatique nécessite évidemment d'en connaître une forme analytique approchée. Pour pouvoir poursuivre, il est nécessaire de préciser certaines caractéristiques des milieux matériels. On introduit les notions de milieux [Ashcroft 81] :

– *permanents* : les propriétés intrinsèques n'évoluent pas dans le temps.
– *locaux* : la connaissance des champs en un point suffit à déterminer la densité d'énergie en ce point.
– *non-dispersifs* : la valeur instantanée de la densité d'énergie ne dépend que de la valeur instantanée des champs, et non pas du passé (pas de phénomène d'hystérésis).
– *homogènes* : la densité d'énergie ne dépend pas explicitement des coordonnées spatiales

Sous ces hypothèses, dites de l'équilibre thermodynamique local, la densité de potentiel magnétostatique de Gibbs en un point ne dépend explicitement que des valeurs instantanées et locales des champs en ce point, soit :

$$\widetilde{g}|_{T,\mathbf{X},I,\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \widetilde{g}\left(T(\mathbf{x}), \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x})\right)$$

Ceci permet de simplifier considérablement les conditions d'équilibre puisqu'en différenciant la condition (2.27) pour une petite variation $\delta\mathbf{H}$ des sources, on obtient :

$$\nabla^2_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{H},\mathbf{B}} \cdot \nabla_{\mathbf{H}}\mathbf{B} + \nabla_{\mathbf{H}}\nabla_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{H},\mathbf{B}} = 0$$

soit, compte tenu de (2.29) :

$$\nabla^2_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{H},\mathbf{B}} \cdot \nabla_{\mathbf{H}}\mathbf{B} = \mathrm{Id}$$

et, compte tenu de (2.23) :

$$\nabla^2_{\mathbf{B}} \widetilde{g}|_{T,\mathbf{H},\mathbf{B}} \cdot \nabla^2_{\mathbf{H}} g|_{T,\mathbf{H}} = -\mathrm{Id}$$

Cette expression fait apparaître :

– le hessian de la densité de potentiel magnétostatique de Gibbs à l'équilibre appelé ici *réluctivité magnétique* :

$$\nu\left(T,\mathbf{H}\right)=\nabla^2_{\mathbf{B}}\widetilde{g}\big|_{T,\mathbf{H},\mathbf{B}}$$

C'est un tenseur d'ordre 2, défini et symétrique par construction, et positif compte tenu de (2.28) ;

– la *perméabilité magnétique différentielle* du milieu

$$\mu\left(T,\mathbf{H}\right)=\nabla_{\mathbf{H}}\mathbf{B}=-\nabla^2_{\mathbf{H}}g\big|_{T,\mathbf{H}}=\left[\nu\left(T,\mathbf{H}\right)\right]^{-1} \tag{2.30}$$

C'est le tenseur d'ordre 2 défini, positif, symétrique, inverse de la réluctivité.

Ce résultat est très important car :

– il assure l'existence d'une loi de comportement magnétique liant localement les variations de l'induction d'équilibre à celles de l'excitation ;
– il relie à une mesure expérimentale *à l'équilibre* de la caractéristique magnétique du milieu :
  – la convexité du potentiel magnétostatique de Gibbs, dont on recherche le minimum, par rapport à des variations $\delta\mathbf{B}$ de l'induction,
  – la concavité de la densité d'enthalpie libre par rapport à des variations $\delta\mathbf{H}$ de l'excitation .

Pour une évolution quasistatique et monotone du champ magnétique $\mathbf{H}$, on peut obtenir une caractéristique globale de la loi de comportement magnétique

$$\mathbf{B}\left(T,\mathbf{H}\right)=\int_0^{\mathbf{H}}\mu\left(T,\mathbf{H}\right)\cdot\delta\mathbf{H}+\mathbf{B}_r\left(T\right) \tag{2.31}$$

où $\mathbf{B}_r\left(T\right)=\mathbf{B}_r\left(T,0\right)$ désigne l'induction *rémanente*. Le milieu sera dit :

– *réversible* si les lois de comportement selon $\mathbf{H}$ croissant et décroissant sont identiques ;
– *linéaire* si $\mu\left(T,\mathbf{H}\right)$ est indépendant de $\mathbf{H}$ et l'induction rémanente nulle.

Enfin, on constate que le 'vide' (de matière) est perméable à l'énergie magnétique. S'agissant d'un milieu parfait et sans inertie, puisqu'il n'y a pas de matière, on lui attribue une perméabilité de référence telle que

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$$

Electrostatique

L'existence d'une distribution de charges électriques libres à la surface des conducteurs est à l'origine d'une énergie électrostatique localisée dans les diélectriques. Cette énergie est, aux pertes par effet Joule près, celle que l'opérateur extérieur a dû fournir pour amener les charges depuis l'infini – où elles sont sans interaction entre elles – jusqu'à la surface des conducteurs. Une des manifestations de cette énergie électrostatique est le 'claquage diélectrique' observé lorsque des conducteurs chargés isolés sont trop proches les uns des autres.

La démarche étant identique à celle utilisée pour caractériser l'équilibre magnétostatique, on rappellera juste les principales étapes [Mazauric 03] :

– On commence par caractériser l'influence de conducteurs isolés C_i portant sur leurs surfaces les charges Q_i. L'introduction du champ étendu $\mathbf{D}$ permet de disposer d'une densité d'énergie électrostatique et de définir le champ électrique $\mathbf{E}$ dans le diélectrique. L'invariance (globale) de l'énergie électrostatique permet alors d'établir que :
  – le champ électrique $\mathbf{E}$ dérive d'un potentiel V tel que :

$$\mathbf{E}=-\mathbf{grad}V \tag{2.32}$$

pour lequel :

  - la surface de chaque conducteur isolé C_i réalise une équipotentielle V_i (donc en particulier la masse au potentiel V_0) ;
- Sous des hypothèses de milieux diélectriques permanents, locaux, non-dispersifs et homogènes, l'étude des conditions d'équilibre (extremum et convexité) permet alors de montrer l'existence d'une *permittivité différentielle diélectrique* caractérisant l'équilibre électrostatique du diélectrique :

$$\epsilon\left(T, \mathbf{E}\right) = \nabla_{\mathbf{E}}\mathbf{D}$$

  C'est un tenseur d'ordre 2, symétrique et positif. On introduit alors les notions de milieu *réversible* et *linéaire*.
- Enfin, on constate que le 'vide' (de matière) est perméable à l'énergie électrostatique. S'agissant d'un milieu parfait, sans inertie puisqu'il n'y a pas de matière, on lui attribue une permittivité de référence telle que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$$

Evolution du champ électromagnétique

Afin de montrer que l'équation de Maxwell-Faraday résulte de la condition d'optimalité (2.19), on réalise successivement :
- l'écriture de la relation (2.19) en fonction des champs étendus ;
- la minimisation de cette relation pour obtenir :
  - la densité de courant dans les régions conductrices,
  - la densité de charges à la surface des conducteurs.

On admet que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour rester dans l'approximation des régimes quasi-permanents. Rappelons qu'elle implique que l'évolution du système suive une succession d'équilibres magnétostatiques et électrostatiques, si bien que :
- dans les conducteurs :
  - la densité de charges libres est nulle, ce qui permet d'y imposer $\mathbf{D} \equiv 0$;
  - la densité de courant $\mathbf{J}$ et le champ magnétique $\mathbf{H}$ s'adaptent instantanément l'un sur l'autre, conformément à (2.21) ;
- dans les diélectriques, le champ électrique $\mathbf{E}$ dérive d'un potentiel V conformément à (2.32).

Loi de Faraday

La puissance mécanique reçue par le champ électromagnétique (2.19) admet comme expression la plus simple en fonction des champs étendus $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \sum_i \int_{C_i(t)} \rho\left(\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\right)^2 \mathrm{d}^3x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathrm{d}^3x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D(t)} \left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)\mathrm{d}^3x \tag{2.33}$$

Cette expression se scinde en deux types de contribution (figure 2.4) :
- sur chacun des conducteurs C_i, éventuellement en mouvement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{C_i(t)} = \int_{C_i(t)} \rho\left(\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\right)^2 \mathrm{d}^3x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{C_i(t)} \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathrm{d}^3x \tag{2.34}$$

- sur le diélectrique D dont la déformation s'adapte au mouvement des conducteurs :

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{D(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D(t)} \left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)\mathrm{d}^3x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D(t)} \left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)\mathrm{d}^3x \tag{2.35}$$

La transformation des dérivées particulaires tient compte non seulement des variations locales et convectives dans le temps mais également des déformations du domaine d'intégration [Duvaut 90]. Dans une hypothèse de régimes quasi-permanents, la vitesse de chaque conducteur est supposée suffisamment petite pour qu'ils puissent être considérés comme indéformables et continuent à définir des référentiels galiléens. En se plaçant dans des référentiels rigidement liés aux conducteurs, la contribution (2.34) à la puissance mécanique se transforment :

– dans les conducteurs C_i selon :

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{C_i(t)} = \int_{C_i} \left[\rho\left(\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\right)^2 + \frac{\partial\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right)}{\partial t}\right] \mathrm{d}^3x_i \tag{2.36}$$

Considérant des variations stationnaires de $\mathbf{H}$, le second terme se transforme selon :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\delta\mathbf{H} + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\cdot\delta\mathbf{B}$$

L'existence d'une loi de comportement non-dispersive (2.30) permet d'obtenir :

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\cdot\delta\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\delta\mathbf{H}$$

si bien que la condition d'extremum sur chacune des régions conductrices C_i s'exprime par :

$$\delta\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{C_i(t)} = \int_{C_i} 2\left[\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\cdot\rho\cdot\mathbf{rot}\,\delta\mathbf{H} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\delta\mathbf{H}\right]\mathrm{d}^3x_i$$

Compte tenu de la relation d'analyse vectorielle [Gradshteyn 94] :

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right) = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v} \tag{2.37}$$

et du théorème de la divergence, il vient, après une intégration par partie sur le premier terme :

$$\begin{aligned}\delta\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{C_i(t)} &= 2\int_{C_i}\delta\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{rot}\left(\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\right) + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]\mathrm{d}^3x_i \\ &\quad - 2\oint_{\partial C_i}\left(\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H}\times\delta\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{n}\;\mathrm{d}^2x_i\end{aligned} \tag{2.38}$$

– dans le diélectrique (2.35) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{D(t)} = \int_{D(t)}\frac{\partial\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\right)}{\partial t}\mathrm{d}^3x \tag{2.39}$$

En considérant toujours des variations stationnaires des champs et des lois de comportements non-dispersives, on aboutit à :

$$\delta\left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{D(t)} = 2\int_{D(t)}\left(\delta\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \delta\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}^3x$$

L'équation de Maxwell-Ampère dans les diélectriques :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

prise pour des variations stationnaires du champ $\mathbf{D}$ permet de transformer l'expression précédente selon :

$$\begin{aligned}\delta \left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{D(t)} &= 2\int_{D(t)} \delta\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{rot}\,\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]\,\mathrm{d}^3x \\ &- 2\oint_{\partial D(t)} (\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H})\,\mathrm{d}^2x \\ &+ 2\int_{D(t)} \delta\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}^3x\end{aligned}$$

La condition de stationnarité sur la puissance mécanique s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}\delta\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0 = 2\sum_i\int_{C_i} \delta\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{rot}\,(\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H})+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]\,\mathrm{d}^3x_i \\ + 2\int_{D(t)} \delta\mathbf{H}\cdot\left[\mathbf{rot}\,\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]\,\mathrm{d}^3x \\ - 2\sum_i\oint_{\partial C_i} ((\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H}-\mathbf{E})\times\delta\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}^2x_i \\ - 2\oint_{S_\infty} (\mathbf{E}\times\delta\mathbf{H})\,\mathrm{d}^3x \\ + 2\int_{D(t)} \delta\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}^3x\end{aligned}$$

si bien qu'une condition nécessaire d'extremum sur la puissance mécanique transmise exprime, pour des variations stationnaires de l'excitation :

- faiblement l'équation de Maxwell-Faraday dans le référentiel du conducteur C_i, supposé galiléen :

$$\mathbf{rot}\,(\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H}) = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- faiblement l'équation de Maxwell-Faraday dans le diélectrique D :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- une condition de continuité sur la surface ∂C_i de chaque conducteur :

$$\rho\mathbf{rot}\,\mathbf{H}-\mathbf{E} = 0$$

- une condition de décroissance à l'infini sur le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{2.40}$$

car, pour des variations stationnaires de $\mathbf{B}$, la dernière variation exprime simplement les conditions d'équilibre d'un diélectrique polarisé par des conducteurs C_i aux potentiels V_i, soit :

$$\int_{D(t)} \delta\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}^3x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D(t)} \mathbf{grad}\delta V\cdot\mathbf{D}\,\mathrm{d}^3x = 0$$

Loi d'Ohm dans les conducteurs

Afin de dériver l'équation de Maxwell-Faraday dans un référentiel quelconque dans lequel le conducteur C_i est soumis au champ des vitesses de déplacement $\mathbf{V}_i$, considérons une surface Σ_i appartenant au milieu conducteur (figure 2.4). Alors, le flux de l'induction magnétique :

$$\phi\left(\Sigma_i, t\right) = \int_{\Sigma_i} \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\right) \mathrm{d}^2 x_i$$

et la circulation du champ électrique :

$$\Gamma\left(\Sigma_i, t\right) = \oint_{\partial \Sigma_i} \left(\rho \mathbf{J} \cdot \mathbf{t}\right) \mathrm{d}x_i$$

représentent des grandeurs particulaires invariantes par changement de référentiel galiléen et liées par l'expression intégrale de la loi de Faraday :

$$\Gamma\left(\Sigma_i, t\right) = -\frac{\mathrm{d}\phi\left(\Sigma_i, t\right)}{\mathrm{d}t} \tag{2.41}$$

Dans le référentiel d'étude, on recherche une induction magnétique vérifiant $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$. Sous cette condition, sa dérivée particulaire $\phi\left(\Sigma_i, t\right)$ vérifie [Duvaut 90] :

$$\frac{\mathrm{d}\phi\left(\Sigma_i, t\right)}{\mathrm{d}t} = \int_{\Sigma_i(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\left(\mathbf{B} \times \mathbf{V}_i\right)\right) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}^2 x \tag{2.42}$$

où $\mathbf{V}_i$ représente le champ de vitesses du milieu conducteur, auquel la surface Σ_i est soumise, dans le référentiel d'étude. Compte tenu de la loi de Faraday (2.41) et du théorème de Stokes, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\Sigma_i, t\right) + \int_{\Sigma_i(t)} \mathbf{rot}\left(\mathbf{B} \times \mathbf{V}_i\right) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}^2 x &= \oint_{\partial \Sigma_i(t)} \left(\rho \mathbf{J} - \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{t} \cdot \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Sigma_i(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}^2 x\end{aligned}$$

quel que soit le référentiel galiléen d'étude. Cette expression prolonge naturellement le champ électrique $\mathbf{E}$ à l'intérieur du conducteur :

- caractérisant le milieu conducteur vu depuis le référentiel d'étude ;
- satisfaisant à la *loi d'Ohm avec mouvement* :

$$\mathbf{J} = \rho^{-1}\left(\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}\right) \tag{2.43}$$

- qui vérifie l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.44}$$

dont la forme est, par construction, invariante par transformation galiléenne.

L'équation de Maxwell-Faraday montre la possibilité de générer un courant électrique à partir d'une induction magnétique variable dans le temps. Pour des matériaux et des architectures donnés, elle correspond au transfert optimal de puissance mécanique, conformément à (2.19). Cette remarque fonde le rôle privilégié de l'énergie électrique comme vecteur de domestication de l'énergie.

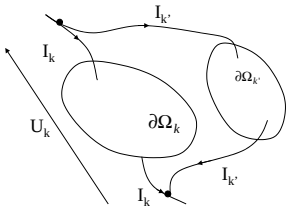


FIG. 2.5 – Définition de la tension

2.1.3 Décomposition et consolidation d'un système

La description précédente adresse une description globale du système : elle se prête donc mal à la conception d'une installation. Afin de discuter l'adaptation d'équipements électriques entre eux, il est utile d'introduire la tension aux bornes d'un dipôle k traversé par le courant I_k (voir figure 2.5) :

$$U_k = -\frac{1}{I_k} \oint_{\partial\Omega_k} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}^2 x \tag{2.45}$$

comme le flux rentrant normalisé du vecteur de Poynting (2.40) à travers une surface $\partial\Omega_k$. Ainsi définie, la valeur de U_k dépend de Ω_k. Les équations de Maxwell et la loi d'Ohm avec mouvement permettent de localiser la puissance électrique sur les branches k :

$$\begin{aligned} \sum_k U_k I_k = & \int_{\cup C_k} \rho \mathbf{J}^2 \mathrm{d}^3 x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\cup \Omega_k} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, \mathrm{d}^3 x \\ & - \int_{\cup \Omega_k} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3 x \\ & + \int_{\cup C_k} \mathbf{V} \, (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}^3 x \end{aligned} \tag{2.46}$$

Pour une exhaustion (Ω_k) suffisante de l'espace, la puissance électrique :

- exhibe la condition d'optimalité sur la puissance mécanique en fonction des champs étendus (2.33) ;
- s'annule en raison de la décroissance du vecteur de Poynting à l'infini ;

si bien que :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = - \int_{\cup C_k} \mathbf{V} \, (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}^3 x + \int_{\cup \Omega_k} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3 x$$

Cette puissance mécanique est au mieux égale à celle correspondant à une transformation réversible, soit d'après (2.20) exprimée en fonction des champs étendus :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} + S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \int_{\cup \Omega_k} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3 x$$

Pour une évolution isotherme de l'installation, les variations d'enthalpie libre obéissent à l'inégalité :

$$- \int_{\cup C_k} \mathbf{V} \, (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, \mathrm{d}^3 x \geq \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$$

l'égalité étant vérifiée pour une transformation réversible. En d'autres termes, le travail des forces de Laplace sera au mieux égal à la variation d'enthalpie libre, qui fixe la transmission optimale de travail pour une excitation I de la génétratrice maintenue constante.

Réciproquement, décomposons l'installation en k sous-systèmes dont la compatibilité est assurée par la loi des noeuds (2.16) et dont on réalise séparément les optima mécaniques. La localisation de la puissance mécanique optimale sur chaque sous-systèmes k s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t} = U_k I_k + \int_{\Omega_k} \left(\mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3x - \int_{C_k} \mathbf{V} \left(\mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \mathrm{d}^3x$$

S'agissant d'optimisations prises séparément, on a évidemment :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \geq \sum_k \frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t}$$

Pour un réseau équilibré, c'est-à-dire vérifiant :

$$\sum_k U_k I_k = 0$$

on restaure la condition d'optimalité globale. En d'autres termes, la consolidation du système devra assurer la loi des mailles – à savoir que deux branches en parallèle auront la même tension (2.45) – pour garantir le meilleur transfert de puissance à travers le réseau[4].

Cette remarque est très importante car elle justifie la décomposition d'un système pour le concevoir (ou le réguler). A condition que les liaisons soient "transparentes" – c'est-à-dire qu'elles garantissent l'adaptation de tension entre sous-systèmes –, l'optimum global consistera en la juxtaposition des optima locaux. Autrement dit, le fonctionnement du système correspondra aux régimes nominaux des différents organes de conversion. C'est pourquoi on introduit deux types de composants :

- les connectiques dont le rôle est précisément de réaliser cette adaptation de tension en exhibant la plus petite chute de tension possible ;
- les organes de conversion de l'énergie.

Chacun de ces dispositifs adresse une méthode de conception dédiée.

2.2 Modélisation

2.2.1 Modélisation de organes de conversion de l'énergie : Méthode des éléments finis

Dans le cas où la résolution des équations de Maxwell n'admet pas de solution analytique, l'existence des principes variationnels (2.24) et (2.33) procure une alternative numérique naturelle au problème de conversion d'énergie optimale opérée par les dispositifs (voir figure 2.6). Sans rentrer dans les détails, l'écriture d'un problème sous une forme variationnelle introduit naturellement l'espace fonctionnel approprié sur lequel on prouve l'existence et l'unicité d'une solution, puis on établit des critères de convergence [Axelsson 84].

La Méthode des Eléments Finis consiste à construire une fonctionnelle approchée discrétisée sur un maillage (d'éléments) fini(s) de l'espace. Afin d'assurer la continuité de la fonctionnelle

[4] On retrouve ainsi l'exigence d'équilibrage dans la gestion d'un réseau électrique. Cela se traduit par :
- un investissement matériel pour surveiller le réseau ;
- un niveau de réactif (stock (ϕI)) suffisant pour faire face à des fluctuations de charge ;
- un feed-back pour adapter la production le cas échéant.

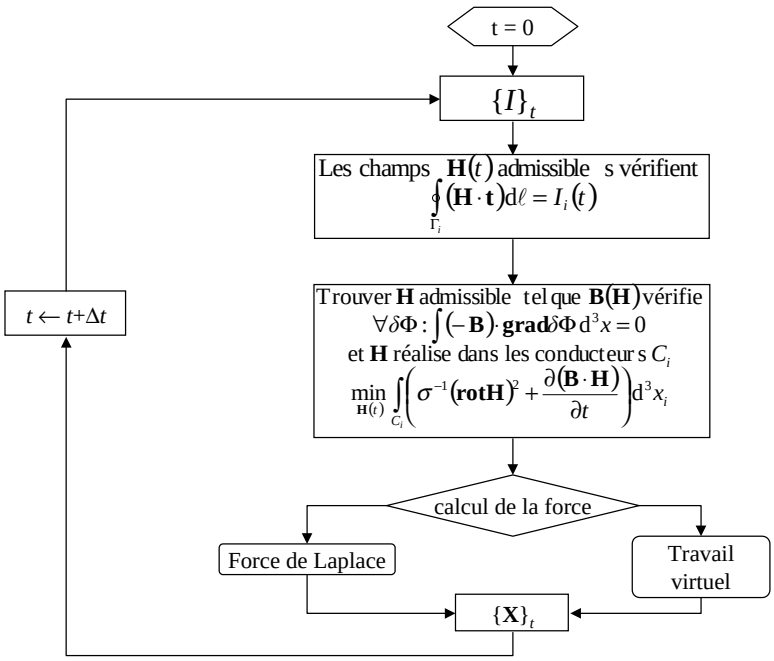


FIG. 2.6 – Algorithme de résolution d'un problème électromagnétique par la méthode des éléments finis

entre chaque maille, on impose une interpolation des densités d'énergie et de puissance en fonction de paramètres variationnels (champs, circulations, flux...) pris sur des éléments canoniques du maillage (respectivement nœuds, arêtes, facettes...) [Bossavit 98].

Alors, les techniques numériques de minimisation font appel à des algorithmes classiques, robustes et éprouvés [Dongarra 00] :

- de résolution de (larges) systèmes linéaires pour déterminer le lieu du minimum ;
- d'analyse spectrale pour étudier la sensibilité de la solution.

Après minimisation, la qualité numérique de la solution est analysable en fonction de la densité du maillage et/ou de l'ordre d'interpolation des éléments selon un critère simple qui consiste à retenir l'expérience numérique qui a procuré la plus basse enthalpie libre et la meilleure conversion d'énergie.

Ce travail n'étant pas dédié à ce type de dispositifs, la suite du chapitre ne concernera plus la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, ni son intégration dans la chaîne de conception. On pourra néanmoins consulter [Coulomb 85], [Meunier 03], [Meunier 02b], [Meunier 02a].

2.2.2 Modélisation des connectiques : Méthode PEEC

Présentation de l'approche PEEC

La méthode PEEC (acronyme de Partial Element Equivalent Circuit) a été développée dans les années 1970 par Ruehli ([Ruehli 72], [Ruehli 74], [Brennan 79]) dans le cadre du développement par IBM des PCB (Printed Circuit Boards ou circuits imprimés) dans les ordinateurs personnels. La problématique était alors d'étudier les couplages inductifs pouvant exister entre les différentes pistes du circuit imprimé, dans une optique haute fréquence.

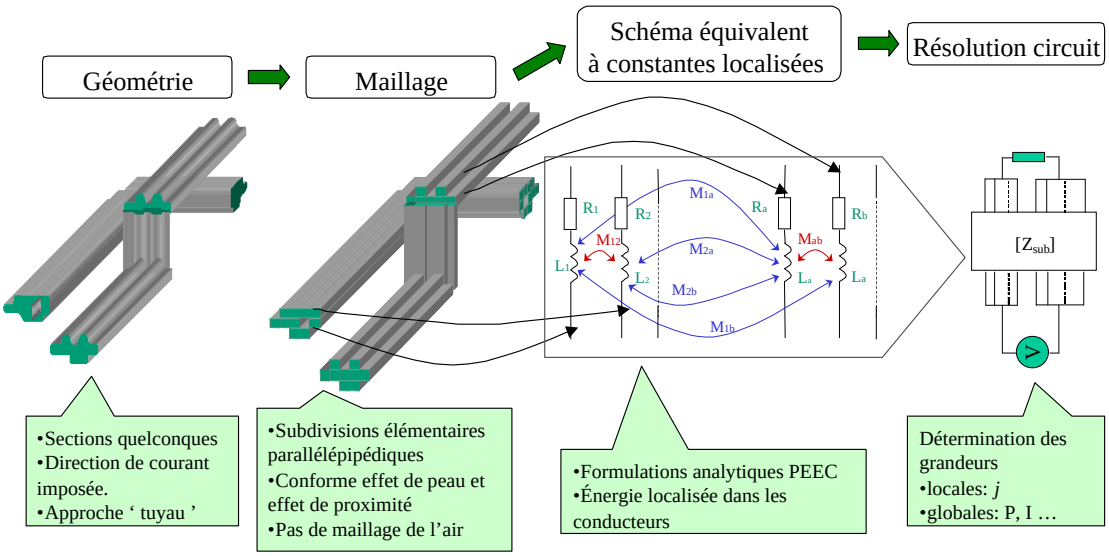


FIG. 2.7 – Principe de la méthode PEEC

Partant d'un système de conducteurs décrits selon une approche tuyau (c'est à dire que l'on connaît la direction du courant), la première étape consiste à réaliser un maillage de la section des conducteurs. Ce maillage permet d'obtenir des éléments de section suffisamment faible pour entrer dans le cadre d'une approche 'filiforme', c'est-à-dire que l'on pourra considérer que leur section porte une densité de courant uniforme.

Le maillage se devra donc d'être conforme avec les variations des courants induits dans la section liés aux effets de peau et de proximité. Nous reviendrons sur ces phénomènes au paragraphe 3.1.2.

Remarque 1 *On remarquera à ce stade qu'il n'est - à la différence de ce que l'on pratique dans le cadre des méthodes éléments finis- pas question de maillage dans l'air. Seules les sections des conducteurs sont maillées. Ce point fera partie des arguments en faveur du choix de la méthode PEEC dans le cadre de l'optimisation (voir paragraphe 3.1.4).*

L'approche PEEC va permettre de remplacer les tronçons pseudo-filiformes de conducteurs définis par le maillage par un schéma électrique équivalent à constantes localisées. Chaque subdivision du maillage est remplacée par des éléments dits partiels constitués pour chacun d'une résistance partielle et d'une inductance partielle. L'équivalence nécessite également pour chaque branche équivalente la présence d'éléments de couplage inductifs avec tous les autres éléments de maillage appelées mutuelles partielles.

Cette méthode repose sur l'intégration des équations de Maxwell locales dans un conducteur faisant partie d'un système de conducteurs filiformes [Clavel 02] et permet donc l'obtention de formulations analytiques pour les éléments partiels du schéma équivalent.

Le schéma électrique équivalent obtenu pourra ensuite être directement raccordé aux sources et charges auxquelles les conducteurs sont normalement connectés[5]. Une résolution de circuit permettra de connaître la répartition du courant dans les différentes branches correspondant aux subdivisions du maillage. On obtient ainsi le courant et donc la densité de courant (dans l'hypothèse où celle-ci est uniforme sur chaque subdivision) partout dans le système. On peut également en déduire les grandeurs globales telles que la puissance dissipée par effet Joule.

Voyons à présent comment sont introduits et déterminés les éléments partiels.

Chute de tension aux bornes d'un conducteur

Le développement du vecteur de Poynting (2.40) permet d'exprimer la contribution du volume $\Omega_k \supseteq C_k$ à la puissance électrique (2.46) sous les formes successives :

$$\begin{aligned} U_k I_k &= \int_{\Omega_k} \left(\mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{E} \right) \mathrm{d}^3 x \\ &= \int_{C_k} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \mathrm{d}^3 x + \int_{\Omega_k} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathrm{d}^3 x + \int_{\Omega_k \setminus C_k} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathrm{d}^3 x \end{aligned}$$

La conservation du flux magnétique (2.26) justifie l'existence d'un potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ vérifiant :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\, \mathbf{A} \tag{2.47}$$

Après une intégration par partie et compte tenu de (2.37), l'expression précédente devient, au premier ordre en $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$U_k I_k = \int_{C_k} \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3 x - \oint_{\partial \Omega_k} \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathrm{d}^2 x + \int_{\Omega_k \setminus C_k} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathrm{d}^3 x$$

On fait alors l'hypothèse que la partition (Ω_k) est suffisamment raffinée pour que ∂C_k réalise une équipotentielle V_k pour le diélectrique. Compte tenu de (2.25) et de la définition du champ électrique dans le diélectrique (2.32), la dernière intégrale devient après intégration par partie :

$$\int_{\Omega_k \setminus C_k} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathrm{d}^3 x = V_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\partial C_k} \sigma \mathrm{d}^2 x - \oint_{\partial \Omega_k} V \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathrm{d}^2 x$$

où σ désigne la densité de charge libre à la surface du conducteur C_k. Pour une exhaustion (Ω_k) suffisante de l'espace, les intégrales sur $\partial \Omega_k$ se compensent sauf à l'infini si bien que la puissance électrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_k U_k I_k = &\sum_k \int_{C_k} \mathbf{rot}\, \mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^3 x \\ &+ \sum_k V_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\partial C_k} \sigma \mathrm{d}^2 x \\ &- \oint_{S_\infty} \left(\mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - V \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}^2 x \end{aligned}$$

[5] Le bouclage du circuit est nécessaire, puisque l'écriture des éléments est non-unique.

L'approximation des régimes quasi-permanents impose une décroissance suffisante des champs et de leurs variations temporelles à l'infini pour annuler la dernière intégrale. Pour un milieu diélectrique linéaire et un maillage suffisamment fin de la surface, la seconde intégrale se transforme en une expression du type :

$$\sum_k V_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\partial C_k} \sigma \mathrm{d}^2 x = \sum_{kk'} C_{kk'} V_k \frac{\mathrm{d}V_{k'}}{\mathrm{d}t}$$

où $C_{kk'}$ désigne les éléments de la matrice capacitance. S'agissant d'une matrice symétrique, les différences de potentiel entre conducteurs $(V_k - V_{k'})$ s'introduisent naturellement à partir de l'expression précédente pour restituer l'influence des couplages capacitifs : nous négligerons ces effets par la suite, sachant qu'ils pourraient être réintroduits aux niveau de la matrice impédance (2.57). Il reste alors :

$$\sum_k U_k I_k = \sum_k \int_{C_k} \mathbf{rot}\,\mathbf{H} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \mathrm{d}^3 x$$

Cette expression permet de retrouver les définitions usuelles de la tension dans quelques cas particulier et d'introduire la notion de tension partielle à la base de la méthode PEEC :

- Dans le cas d'un conducteur unique massif fermé, on retrouve l'expression usuelle de la tension [Meunier 02c] :

  $$U = \int_{C_k} \mathbf{rot}\,\mathbf{h} \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \mathrm{d}^3 x$$

  où $\mathbf{h}$ est un champ magnétique normalisé (obtenu pour $I_k = 1\,\mathrm{A}$) ;
- Dans le cas où chaque conducteur C_k peut être considéré comme filiforme au regard de l'effet de peau et de son rayon de courbure, la densité de courant est uniforme sur sa section S_k si bien que :

  $$\mathbf{x} \in \mathbf{C_k} : \mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\mathbf{I_k}}{\mathbf{S_k}} \mathbf{t_k}$$

  où $\mathbf{t}_k$ désigne le vecteur unitaire de la fibre neutre Γ_k du conducteur k. En substituant cette expression il vient :

  $$\sum_k U_k I_k = \sum_k I_k \int_{C_k} \frac{\mathbf{t}_k}{S_k} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \mathrm{d}^3 x$$

  si bien que la puissance électrique apparaît comme une fonction homogène des I_k. Pour un réseau équilibré, la puissance électrique est nulle si bien que l'on peut définir de manière intrinsèque une tension partielle sur un circuit filiforme :

  $$U_k = \int_{\Gamma_k} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{t}_k \mathrm{d}\ell$$

  telle que deux branches en parallèle auront la même tension imposée par le reste du réseau. En introduisant la loi d'Ohm statique, il vient :

  $$U_k = R_k I_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Gamma_k} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}_k \mathrm{d}\ell \tag{2.48}$$

  où :

  $$R_k = \rho \frac{L_k}{S_k} \tag{2.49}$$

  est la résistance du circuit filiforme C_k. La relation (2.48) est à la base de la méthode PEEC.

– On généralise ainsi l'expression usuelle de la tension aux bornes d'un circuit filiforme fermé :

$$\Delta U = RI + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \mathrm{d}\ell$$

Le rôle des connexions étant de garantir la meilleure adaptation de tension possible entre organes de conversion de l'énergie, on cherchera à minimiser les tensions partielles (2.48) à leurs bornes.

Introduction des éléments partiels

L'équation (2.48) fait apparaître dans le membre de droite un 1er terme résistif et un 2ème terme que nous allons attribuer à des couplages inductifs. Il n'y a pas de terme capacitif puisque l'on a fait l'hypothèse de l'absence de charges de surface[6].

On considère à présent un système de N conducteurs filiformes. Compte tenu de (2.21), (2.47) et de la loi de comportement magnétique (2.31), le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ obéit à :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{A}) = \mathbf{grad}\,(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu\mathbf{J}$$

pour un milieu homogène. En adoptant la jauge de Coulomb :

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \tag{2.50}$$

pour imposer l'unicité du potentiel vecteur $\mathbf{A}$, le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ satisfait donc à l'équation de Poisson :

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{2.51}$$

Dans le cas d'un milieu linéaire, il peut alors se décomposer selon les N contributions $\mathbf{A}_n$ des N conducteurs filiformes du système :

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{A}_n$$

ce qui se traduit sur (2.48) par :

$$U_k = R_k I_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=1}^{N} \int_{C_k} \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{t}_k \mathrm{d}\ell$$

A ce stade, pour chaque conducteur C_k, dit 'élémentaire', en introduisant la notion d'inductance mutuelle de couplage[7] avec chaque conducteur C_n [Ruehli 72] :

$$M_{kn} = \frac{1}{I_n} \int_{C_k} \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{t}_k \mathrm{d}\ell \tag{2.52}$$

on peut écrire la chute de tension U_k en régime harmonique (courants et tensions sont des grandeurs complexes) sous la forme :

$$U_k = R_k I_k + j\omega \sum_{n=1}^{N} M_{kn} I_n \tag{2.53}$$

[6] Des travaux ont été menés pour corréler les capacités entre pistes et les inductance mutuelles, afin de prendre en compte les effets capacitifs dans les structures d'électronique de puissance. [Besacier 01], [Ekman 03a], [Ekman 03b] et éventuellement les pertes dans les diélectriques [Antonini 03b]

[7] Dans le cas de formulations volumiques, l'hypothèse d'une densité de courant uniforme sur un conducteur élémentaire permet d'extraire le courant de l'intégrale.

On note ici la symétrie de calcul de la mutuelle M_{kn}. A partir de ce point, nous nous placerons toujours dans le cadre de grandeurs harmoniques. La pulsation de référence est celle des courants sources (c'est-à-dire celle du réseau 50 Hz). On adoptera la notation complexe. Les grandeurs sont en valeur efficace.

Par extension, on peut isoler une mutuelle de couplage particulière correspondant à la contribution au potentiel vecteur du conducteur sur lui même comme étant l'inductance partielle propre du conducteur C_k.

$$L_k = \frac{1}{I_k} \int_{C_k} \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{t}_k \mathrm{d}\ell \tag{2.54}$$

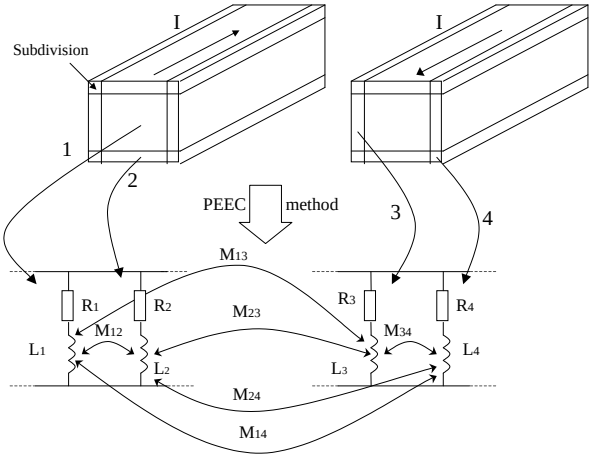


FIG. 2.8 – Principe d'obtention des élements partiels

On recherche ainsi un schéma électrique équivalent à constantes localisées : chaque conducteur est découpé en un ensemble de conducteurs élémentaires de taille suffisamment petite rapportée aux dimensions du problème pour que la densité de courant qui lui est associée puisse être considérée comme uniforme sur le conducteur élémentaire.

Les conducteurs (ou subdivisions) élémentaires sont associés à des branches R-L équivalentes, couplées par des inductances mutuelles M_{kn} [Hoer 65].

On obtient ainsi un circuit électrique, équivalent aux conducteurs physiques, dont chaque élément est caractérisé analytiquement en fonction de paramètres géométriques, ce qui est propice à une optimisation.

Evaluation des éléments partiels

L'évaluation des éléments partiels tels qu'ils sont définis par (2.52) nécessite l'évaluation de la contribution $\mathbf{A}_n$ de chaque conducteur élémentaire C_n. L'intégration de (2.51) [Jackson 75], [Vassallo 80] donne (toujours dans le cadre d'un milieu homogène) :

$$\mathbf{A}_n(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_n} \frac{\mathbf{J}(r')}{|r - r'|} \mathrm{d}^3 r' \tag{2.55}$$

Le calcul des éléments partiels ne sera pas détaillé plus ici. Il se fait par (2.52) en utilisant l'expression de $\mathbf{A}_n$ donnée par (2.55). Les M_{kn} sont ainsi calculés en fonction de paramètres géométriques :

– dimensions de la subdivision k (largeur, hauteur, longueur et direction),
– dimensions de la subdivision n (idem),
– position relative sur les 3 axes.

Les subdivisions k et n peuvent être confondues, ce qui permet de calculer $L_k = M_{kn}$.

On trouvera les expressions complètes dans [Clavel 96] ou [Clavel 97c] qui ont été largement validées dans le cadre de conducteurs tous perpendiculaires ou parallèles. Les formulations pour les conducteurs non-orthogonaux existent [Ruehli 03], [Antonini 02], mais n'ont pas été jusqu'ici intégrées dans nos outils de calcul. Dans une grande majorité de cas, l'utilisation de conducteurs orthogonaux est suffisante. La complexité et surtout la lourdeur en terme de calculs de ces formulations [Clavel 96] n'est pour l'instant pas justifiée par nos applications.

Résolution

Le circuit équivalent complet des N conducteurs élémentaires peut se mettre sous forme matricielle (complexe) :

$$[V] = [Z] \cdot [I] \tag{2.56}$$

avec :

$$[Z] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & R_k & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & M_{kn} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

où l'on trouve dans les vecteurs $[V]$ et $[I]$ sur chaque ligne respectivement, la tension complexe imposée aux bornes de l'élément partiel associé à la subdivision et le courant complexe (ou la densité de courant locale) qui le traverse.

La résolution du circuit électrique équivalent mène à la connaissance du courant dans chaque subdivision, et donc à la répartition du courant total dans les conducteurs élémentaires.

Remarque 2 *Dans certains cas de figures complexes, la taille de la matrice impédance peut être trés importante, ce qui pose un problème de place en mémoire et de temps de calcul. Des techniques de réduction d'ordre permettent de palier à ce problème [Antonini 00], [Antonini 01], [Cullum 00]. Il est également envisageable de 'creuser' la matrice en négligeant certains termes [Krauter 95].*

Remarque 3 *Si aux fréquences industrielles de distribution, le maillage en subdivisions conformes à l'effet de peau ne pose pas de problèmes, ce n'est pas le cas en haute fréquence. Un traitement particulier est alors nécessaire [Coperich 00].*

Séparation des effets induits

La section droite de chaque conducteur est vue comme une équipotentielle (voir section 2.1.3), de telle sorte qu'il est commode d'ordonner la matrice impédance de manière à regrouper les subdivisions appartenant à un même conducteur.

La matrice impédance se décompose alors en blocs (regroupant les éléments appartenant à un conducteur) :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ [V^i] \\ \vdots \\ [V^j] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & [Z^i] & \cdots & [Z^{ji}] & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & [Z^{ij}] & \cdots & [Z^j] & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ [I^i] \\ \vdots \\ [I^j] \\ \vdots \end{bmatrix}$$

avec :

$$\left[V^k\right] = \begin{bmatrix} V_1^k \\ \vdots \\ V_{n_k}^k \end{bmatrix}, \quad V_1^k = V_2^k = \ldots = V_{n_k}^k$$

et :

$$\left[I^k\right] = \begin{bmatrix} I_1^k \\ \vdots \\ I_{n_k}^k \end{bmatrix}, \quad \sum_{p=1}^{n_k} I_p^k = I_{Total}^k$$

Avec cette mise en forme :

- Les blocs diagonaux $\left[Z^k\right]$ permettent de traduire le comportement de chaque conducteur en l'absence d'interaction avec les autres. Ils sont donc représentatifs des effets induits à l'intérieur d'un conducteur, c'est à dire à l'effet de peau.
- Les blocs hors-diagonale $\left[Z^{ij}\right]$ traduisent quant à eux les effets induits entre les différents conducteurs. Ils sont la transcription des effets de proximité.

Remarque 4 *D'un point de vue vocabulaire, on parle ici de courants induits, que l'on retrouve souvent sous le nom de courants de Foucault dans le cadre des régimes transitoires. Les deux notions sont identiques : il s'agit de l'apparition de courant crées par des variations de champ qu'elles soit causée par une variation des courants sources (régimes transitoires et/ou alternatifs 'time-varying induced eddy currents') ou un mouvement ('motion induced eddy currents').*

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette décomposition lorsque nous allons nous intéresser plus précisément aux effets induits et à leurs conséquences dans le paragraphe 3.1.2.

Cette écriture permet en outre de faire directement le lien entre les tensions aux bornes des subdivisions et aux bornes des conducteurs, ainsi que de voir les courants dans les subdivisions comme une distribution du courant total dans le conducteur, ce qui rend évident le couplage avec le circuit extérieur aux conducteurs modélisés.

On perçoit bien ici que la résolution du circuit ne se résume pas directement à l'inversion de la matrice impédance, puisque les tensions aux bornes des conducteurs ne sont pas forcément toutes connues, de même que la répartition du courant entre conducteurs à chaque noeud.

La résolution circuit va donc consister à mettre en forme un système d'équations linéaires prenant d'une part en compte la matrice impédance, mais également les lois des noeuds et des mailles sur le circuit extérieur. Pour ces aspects nous nous reposerons en grande partie sur un solveur circuit générique [Guichon 00a]. Le paragraphe 3.6.1 fait cependant appel à des méthodes de calculs adaptées à des cas spécifiques qui sont développées dans l'annexe B. On pourra s'y reporter pour plus de détails sur la résolution circuit.

Evaluation des pertes Joule

Méthode de calcul

En l'absence de mouvement et de tout travail mécanique, la puissance active cédée aux conducteurs correspond aux pertes Joule :

$$P_j = \int \rho\left(\mathbf{x}\right) \left|\mathbf{J}\left(\mathbf{x}\right)\right|^2 \mathrm{d}^3x$$

Dans l'approche PEEC, $\mathbf{J}$ est nul partout en dehors des conducteurs. Comme l'hypothèse de maillage repose sur une distribution uniforme de courant sur la surface de chaque maille,

avec une direction de courant imposée, la puissance dissipée par effet Joule devient :

$$P_j^{PEEC} = \sum_{i=1}^{n-1} R_i \left|I_i\right|^2$$

où R_i est la résistance équivalente de la subdivision i.

Etant donné qu'il s'agit d'une somme quadratique, pour une valeur donnée du courant total dans un conducteur :

$$I_{Total} = \int \mathbf{J}\left(\mathbf{x}\right) \mathrm{d}^2 x$$

la puissance est d'autant plus importante que la dispersion des valeurs de **J** sur la section est grande.

Erreur liée au maillage

Le fait de discrétiser la densité de courant sur la section des conducteurs a bien sûr un impact sur le calcul des pertes. L'approximation des densités de courant se fait par un profil en 'marches d'escalier' qui à tendance à minorer la dispersion sur les densités de courant.

La figure 2.9 illustre ce phénomène sur un cas de maillage purement unidirectionnel.

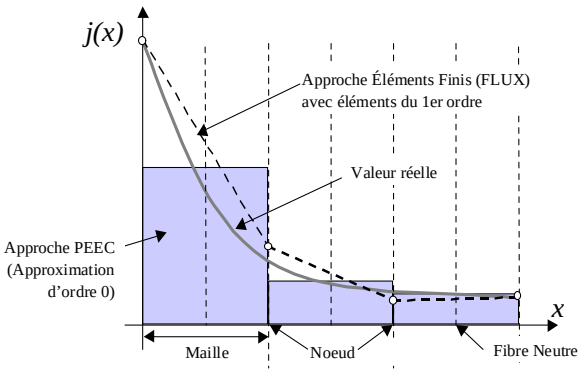


FIG. 2.9 – Impact du maillage sur le calcul des pertes

Lors de la résolution PEEC, on impose un courant total pour chaque conducteur. On a a priori simplement la garantie que la sommation des courants dans les subdivisions donne le courant global.

$$I_{total} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \cdot j_i$$

Cependant, on constate que la méthode converge, c'est-à-dire qu'en raffinant le maillage, on tend vers la bonne densité de courant. Cette convergence n'est possible que sur la valeur du courant dans chaque subdivision :

$$j_i \rightarrow \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} j(x) d\ell$$

Dans ce cadre (si on suppose la convergence effective), le calcul des pertes Joule met en évidence une sous-estimation des pertes :

$$P_j^{PEEC} = \sum_{i=1}^{n-1} R_i \left|I_i\right|^2$$

$$P_j^{PEEC} = \rho \ell h \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \left|j_i\right|^2 = \rho \ell h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\Delta x_i} \left| \int_{\Delta x_i} j(x).dx \right|^2$$

où ℓ est la longueur des subdivisions, h leur hauteur commune. Soit :

$$P_j^{PEEC} \leq \rho \ell h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\Delta x_i} \int_{\Delta x_i} \left|j(x)\right|^2 .dx = \int_{v_i} \rho \cdot \left|j\right|^2 dv$$

d'où :

$$P_j^{PEEC} \leq P_j$$

Ainsi, la convergence sur la valeur des pertes Joule n'est possible que par défaut (sous-estimation des pertes). Cela n'a rien d'alarmant, puisqu'en revanche, toutes les tendances sont respectées, comme nous pourrons le vérifier dans les nombreux exemples traités par la suite et notamment au paragraphe 4.4.4.

On notera simplement que la convergence (par rapport à la finesse du maillage) de la méthode PEEC est a priori moins rapide que celle que l'on peut espérer avec une modélisation éléments finis. Les méthodes EF, dans le cas des éléments nodaux (qui sont les plus couramment utilisés), réalisent une convergence sur la valeur au noeud des grandeurs (sans garantir la valeur aux noeuds, puisque la convergence se fait en minimisant la puissance totale). Une approximation au minimum linéaire est ensuite faite sur les variations à l'intérieur d'une maille. Par contre, l'approche EF en éléments nodaux (en formulation A-V) ne garantit pas la conservation du courant total [Slama 01].

Cas des harmoniques en courant

La méthode PEEC se base sur une approche harmonique. Elle n'exclut pas cependant une reconstitution temporelle des signaux. En effet, dans l'hypothèse de linéarité des matériaux, il est possible de reconstituer simplement un signal par superposition des contributions harmoniques [Antonini 03a], [Restle 01], [Rong 02], [Wollenberg 03], [Wollenberg 04].

Nous allons détailler ici uniquement ce qui se passe en terme de contribution aux pertes par effet Joule.

Pour chaque conducteur parcouru par un courant $i(t)$ possédant un contenu harmonique :

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

La réponse du conducteur à cette excitation est linéaire, on peut donc écrire la tension à ses bornes sous la forme :

$$u(t) = Z_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \varphi'_n)$$

les termes Z_n étant l'impédance équivalente du conducteur pour chaque harmonique, associée au 'nouveau' déphasage φ'_n.

Ainsi, pour chaque conducteur, la puissance qu'il dissipe est évaluée par :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)\, i(t)\, dt$$

avec T la période du fondamental, soit :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On constate ici qu'il n'y a pas de termes croisés (entre harmoniques de rang différent) puisque :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \varphi_n)\ Z_n I_n \sqrt{2} \sin(m\omega t - \varphi'_m)\ dt &= 0 \quad \text{si } n \neq m \\ &= Z_n\ I_n^2 \quad \text{si } n = m \end{aligned}$$

Ainsi, les pertes sont directement reconstituées à partir des pertes associées à chaque harmonique :

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n\ I_n^2 \tag{2.58}$$

l'impédance équivalente Z_n devant bien sûr être évaluée pour chaque harmonique, puisqu'elle dépend de la répartition du courant pour chaque rang harmonique (la profondeur de peau dépendant notamment de la fréquence).

Remarque 5 *La première approche pour estimer l'impact de la présence d'harmoniques sur le courant peut être la suivante :*

On considère que l'effet de peau se traduit par une conduction qui se fait uniquement sur une couronne conductrice d'épaisseur δ (voir figure 2.10).

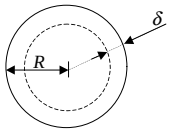


FIG. 2.10 – Approximation de l'effet de peau par une couronne conductrice

Il est alors possible de définir directement une 'résistance' équivalente en fonction du rang harmonique de fréquence $f = n \cdot f_0$, *avec* $\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\mu \pi f}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{n}}$ *:*

$$R_{eq}(f) = \frac{\rho L}{S_{eq}} = \frac{\rho L}{\pi \left(R^2 - (R-\delta)^2 \right)}$$

L'évolution de la résistance équivalente en fonction du rang harmonique prend une expression très simple, qui permet aisément de tracer une allure (voir figure 2.11)

$$\frac{R_{eq}(n \cdot f_0)}{R_{eq}(f_0)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{\delta_0}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{\delta_0}{R} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} \tag{2.59}$$

Il ne s'agit bien sur ici que d'un premier moyen d'estimation, qui ne prend pas en compte les effets de proximité à chaque fréquence. Nous aurons l'occasion au paragraphe 5.4.2 de mettre en pratique ce calcul.

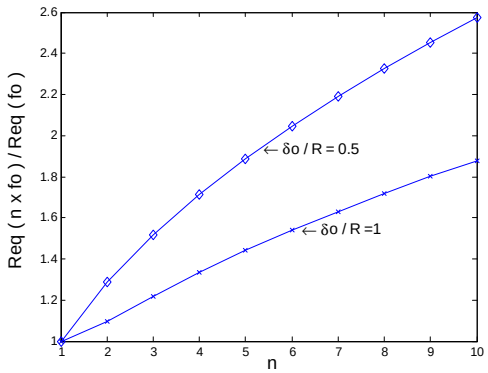


FIG. 2.11 – Variation de la résistance équivalente en fonction du rang harmonique - Approximation

Approche Tuyau vs. calcul 2D

Nous allons par la suite souvent nous placer dans le cadre d'un problème bidimensionnel, pour évaluer des valeurs rapportées à une unité de longueur. On s'intéresse à ce qui se passe dans des portions rectilignes de conducteurs, en négligeant les coudes et raccordements. Ce sera notamment le cas des développement du chapitre 4.

Il est important à ce stade de bien différencier les notions d'approche 2D et d'approche tuyau. La modélisation PEEC se base sur une approche tuyau, ce qui signifie simplement que l'on connaît la direction du courant dans chaque segment de conducteur. Ce n'est pas pour autant une méthode limitée à la 2D. Les formulations PEEC sont tridimensionnelles, c'est-à-dire que d'une part, les courants et donc les conducteurs peuvent être orientés selon les 3 directions et d'autre part, pour deux conducteurs parallèles, une différence de longueur entre les deux barres sera prise en compte dans le calcul des inductances mutuelles.

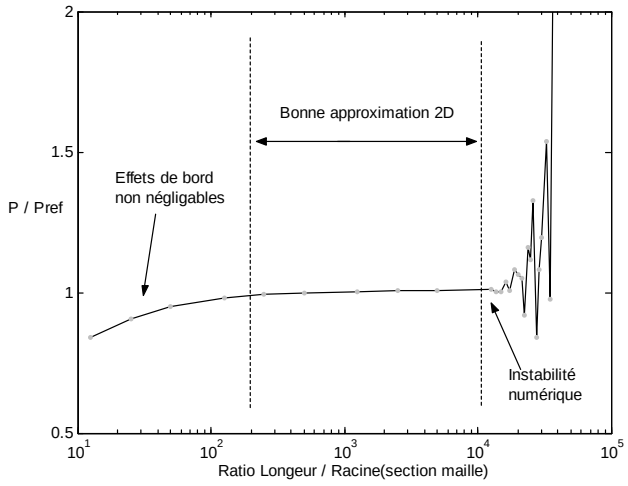


FIG. 2.12 – Sensibilité à la longueur du calcul '2D' des pertes.

Cependant, en prenant des sections de conducteurs toutes propagées sur une même longueur, on est ramené au cas 2D sauf si l'effet de bord ne peut être négligé devant le couplage inductif moyen par unité de longueur.

Pour les conducteurs considérés ici, dont les sections sont de l'ordre de quelques cm^2 et les distances inter-conducteurs de l'ordre de quelques cm, une longueur de l'ordre du mètre garantit l'approximation 2D.

La figure 2.12 montre l'influence de la longueur sur la 'validité' de l'approximation 2D. Il s'agit d'un cas simple de barre carrée (40 mm de côté) maillé en carrés de 4mm de côté. L'approximation est bonne pour une longueur de quelques dizaines de centimètres à quelques dizaines de mètre.

Cette figure met également en évidence un deuxième problème : la stabilité numérique des formulations PEEC (pour le calcul des éléments de la matrice impédance). On constate en effet que lorsque le ratio entre la taille équivalente de la maille (par exemple $\sqrt{\text{Section}}$) et la longueur de la subdivision dépasse un facteur 10^3, une instabilité apparaît, donnant des résultats aberrants.

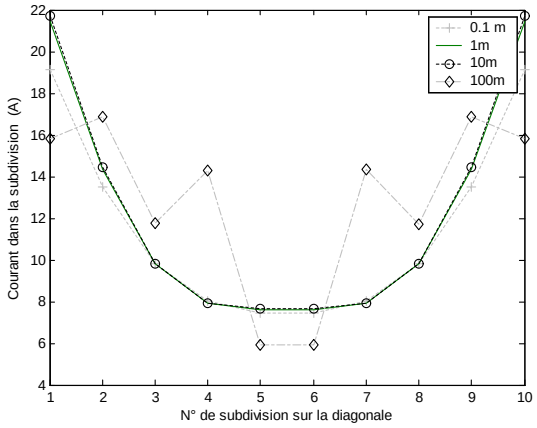


FIG. 2.13 – Sensibilité à la longueur - Impact sur la répartition du courant

La figure 2.13 met en évidence ce phénomène sur un relevé de la densité de courant sur la diagonale de la section carrée de la barre. Pour une longueur de 100m, le calcul erroné des inductances mutuelles partielles entraîne un non-respect de l'équation de diffusion dans la section.

2.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire la méthode PEEC et surtout les hypothèses de calcul essentielles qui y sont attachées. Cette méthode de calcul apparaît comme une méthode de modélisation séduisante. Nous allons à présent voir dans le chapitre 3, qu'il s'agit surtout d'une alternative sérieuse aux méthodes éléments finis dans le cadre de l'optimisation des systèmes de jeux de barres et des canalisations électriques.

La présentation de la méthode faite ici n'est volontairement pas limitée à notre cadre d'étude. Notre but est certes essentiellement de travailler sur les jeux de barres, mais l'objectif est également de promouvoir la méthode comme un outil essentiel de la conception des interconnexions au sens large (nous reviendrons largement sur ce point au chapitre 5).

A ce stade, on pourrait s'interroger sur le traitement réservé aux canalisations préfabriquées, qui ont été identifiées comme cible de l'étude alors que nous avons précisé que la méthode PEEC n'est pas apte à modéliser des matériaux métalliques (tels que les enveloppes en tôle entourant les canalisations). Un moyen de palier à cette limitation sera présenté plus loin, dans le chapitre 4, en se basant sur les principes évoqués dans ce chapitre.

Chapitre 3

Optimisation des interconnexions de puissance par la méthode PEEC

3.1 Les enjeux

3.1.1 La conception d'interconnexions de puissance.

La conception de ces liaisons conductrices de puissance est contrainte par un certain nombre de critères :

1. Géométriques :
   (a) Configuration des points de raccordement
   (b) Limites d'encombrement acceptables
   (c) Distances d'isolement et de sécurité à respecter
2. Mécaniques :
   (a) Possibilités de fixation
   (b) Solidité des raccordements électriques
   (c) Tenue aux vibrations
   (d) Tenue aux efforts électrodynamiques (notamment en situation de court-circuit [Thierry 82])
3. Electriques
   (a) Chute de tension admissible
   (b) Equilibrage des phases
   (c) Impact CEM
4. Thermiques
   (a) Puissance dissipée
   (b) Température de fonctionnement admissible
5. Economiques
   (a) Adéquation du volume de cuivre utilisé par rapport à la puissance transitée
   (b) Coût des pertes électriques pour l'exploitant

Certains de ces critères, notamment les distances d'isolement de sécurité, la tenue aux efforts électrodynamiques [Dupont 03] ou la température de fonctionnement doivent satisfaire les exigences d'une norme [IEC 87].

Classiquement, les contraintes géométriques et mécaniques sont prises en compte très en amont dans le processus de conception. Le dimensionnement des conducteurs est ajusté a posteriori pour satisfaire les contraintes thermiques (processus de type essai-erreur, basé essentiellement sur des variations de l'existant). Ainsi, on réalise une connexion 'géométrique'. La section des conducteurs sera ajustée pour la norme thermique qui spécifie une valeur maximale pour le point accessible le plus chaud du dispositif.

Ainsi, le problème principal rencontré lors de la conception est d'ordre mécano-thermique. Ce type de problème est délicat à résoudre et les modélisations associées sont complexes. Une difficulté majeure réside notamment dans la détermination des coefficients d'échange thermique pour les phénomènes de convection. Un bon moyen de contourner cette difficulté consiste tout simplement à remonter à la source des problèmes de thermique, c'est-à-dire la dissipation de chaleur par effet Joule pour limiter leur impact sur le bon fonctionnement des dispositifs d'interconnexion.

3.1.2 Lutter contre les effets induits

Reste à présent à expliciter ce que l'on entend par 'maîtrise' des pertes Joule. Le jeu de barre décrit par la figure 3.1 va nous servir d'exemple. Il s'agit d'un jeu de barres triphasé avec neutre, en cuivre, parcouru par un système de courants triphasés équilibrés (imposés par une charge équilibrée). Bien qu'extrêmement simple, ce jeu de barres est conforme à ce que l'on peut rencontrer couramment. La section est de 800 mm^2 pour un courant de l'ordre de 2000 A efficaces par phase.

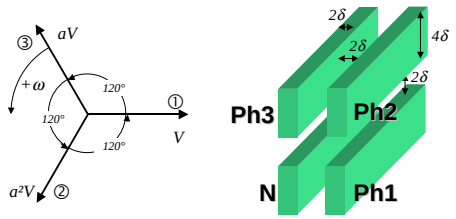


FIG. 3.1 – Exemple de système de jeu de barres triphasé avec neutre. L'épaisseur de peau δ est de l'ordre de 10 mm (Cuivre). On considère 1m de longueur de jeu de barres.

Le tableau 3.1 présente le comportement du jeu de barres dans 3 cas de figure différents. Ainsi sont présentés à droite la répartition des densités de courant sur les sections des conducteurs, et à gauche les pertes Joule associées.

1. Une première évaluation de la situation consiste à considérer une répartition uniforme du courant sur la section des conducteurs. C'est ce que l'on aurait dans le cadre d'une alimentation en courant continu. C'est également le moyen de dimensionnement le plus élémentaire : on a par exemple ici choisi les dimensions des conducteurs pour atteindre une densité de courant 'moyenne' de 2.5 $\mathrm{A/mm}^2$. Il s'agit du cas idéal, où les pertes sont minimales, puisque l'utilisation de la section de cuivre est homogène.

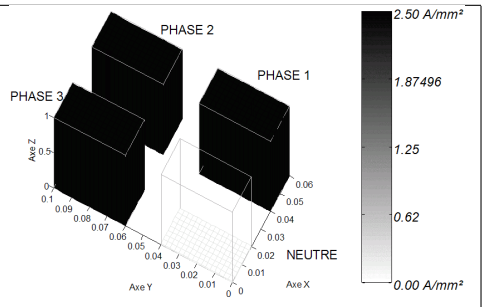
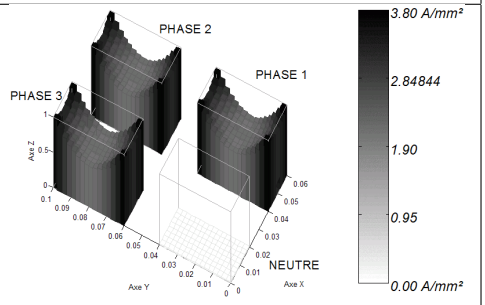
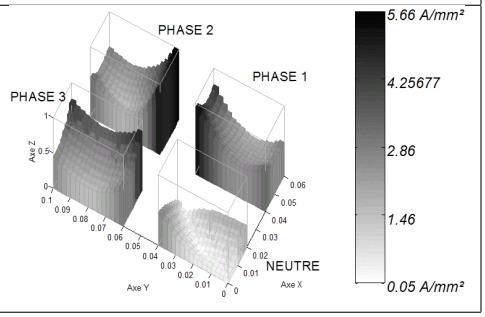
2. Si on prend ensuite en compte le fait que la distribution se fait en courant alternatif, à 50Hz, on fait apparaître une épaisseur de peau, qui rend la répartition du courant non uniforme (forme de cuvette caractéristique). La densité de courant varie à présent de 1.9 à 3.8 $\mathrm{A/mm}^2$. Cette dispersion des valeurs de J augmente la dissipation de puissance par effet Joule du fait du caractère quadratique de la puissance (voir 2.2.2). Cette situation est *fictive* : on fait l'hypothèse que chaque barre est isolée magnétiquement du reste du système. La proximité des autres barres n'est pas prise en compte.

   Remarque 6 *On rappelle ici que contrairement à une idée très répandue, l'effet de peau ne se traduit pas directement par l'apparition d'une 'couronne' conductrice sur tous les bords de la section du conducteur (définie au paragraphe 2.2.2), mais par une équation de diffusion. Nous reviendrons sur ce point dans l'étude des conducteurs massifs (voir section 3.3). Les limites de l'approche 'couronne conductrice' sont également mis en évidence dans le paragraphe 5.4.2.*
   Néanmoins, on gardera à l'esprit que dans bien des cas, c'est là que s'arrête l'état de l'art de la conception.

3. Ce dernier cas représente la situation réelle : effets de peau et de proximité sont pris en compte, c'est-à-dire que la répartition du courant dans chaque conducteur respecte la loi de diffusion, modifiée par les conditions aux limites en bordure des conducteurs. Ces dernières sont imposées par le champ extérieur (créé par les autres conducteurs) dans lequel

baigne chaque phase. En terme d'écriture matricielle PEEC, cet effet 'supplémentaire' est relié aux éléments partiels mutuels de couplage entre subdivisions n'appartenant pas au même conducteur. La dispersion des densités de courant augmente encore fortement, puisque J atteint 5.66 $\mathrm{A/mm^2}$ soit plus du double de la valeur moyenne. Ceci explique l'augmentation conséquente du niveau de pertes (36% par rapport au cas continu qui correspond au minimum théorique à section équivalente). Le niveau de pertes est également pénalisé par le développement de courants induits dans le conducteur de neutre.

Remarque 7 *L'existence de courants induits dans le neutre ne remet pas en cause la nullité du courant total dans le neutre : le système reste bien équilibré* globalement. *Le déphasage des courants induits est tel que leur somme sur la section est nulle, mais ils existent localement et génèrent des pertes supplémentaires. De la même manière, tout conducteur passif proche des conducteurs alimentés peut, sans globalement conduire de courant, être le lieu de pertes Joule liées à des courants induits (c'est notamment le cas des tôles de blindage comme on le verra dans le chapitre 4).*

1.**Courant Continu** $P_j = 3 \times 88\,\mathrm{W/m}$ $P_j^{DC} = 264\,\mathrm{W/m}$	
2.**Effet de peau** $P_j = 3 \times 102\,\mathrm{W/m}$ $P_j^{AC} = 306\,\mathrm{W/m}$ $P_j^{AC} = P_j^{DC} + \mathbf{16}\%$	
3.**Peau+Proximité** $P_N = 15\,\mathrm{W/m}$ $P_1 = 112\,\mathrm{W/m}$ $P_2 = 120\,\mathrm{W/m}$ $P_3 = 111\,\mathrm{W/m}$ $P_j^{Tot} = 358\,\mathrm{W/m}$ $P_j^{Tot} = P_j^{AC} + \mathbf{17}\%$ $P_j^{Tot} = P_j^{DC} + \mathbf{36}\%$	

TAB. 3.1 – Evaluation des effets induits - Puissance dissipée et Module de la densité de courant en altitude sur une section droite du jeu de barre de la figure 3.1

La troisième situation est la seule à traduire le comportement réel du système. En effet, le découplage entre effets de peau et de proximité est physiquement impossible. Cependant, le découplage au niveau de la modélisation permet de bien comprendre quelles sont les caractéristiques du design qui influent sur chaque effet, ainsi que l'impact de chacun, ce qui permet comme nous le verrons par la suite d'envisager une stratégie d'optimisation.

La décomposition des effets proposée ici fait apparaître deux pistes de recherche pour un design optimal des connexions :

- L'effet de proximité est essentiellement lié à la position relative des conducteurs dans l'espace, qui va déterminer le champ dans lequel baigne chaque conducteur.
- L'effet de peau est la conséquence directe de l'équation de diffusion sous les conditions aux limites imposées précédemment. Il est donc essentiellement relié à la forme de la section des conducteurs.

Cette discrimination qui est 'naturelle' par la méthode PEEC (voir section 2.2.2) est plus difficile à obtenir par les éléments finis.

Schématiquement, maîtriser les pertes Joule consiste donc à contrôler au mieux les effets de peau et de proximité induits par la géométrie d'un système de conducteurs. L'optimum en terme d'efficacité d'un système de conducteur est aisément défini : il s'agit d'une répartition uniforme de courant sur les sections de conducteurs. Puisque le rôle des interconnexions est d'assurer un transit de puissance, on pourra définir cette efficacité comme le coût énergétique lié à la présence de l'interconnexion pour une puissance transitée donnée.

Comme nous le verrons par la suite, la notion de coût énergétique ne s'arrête pas ici simplement aux pertes Joule. En effet, une solution triviale pour faire chuter le niveau de pertes serait d'augmenter la section de conducteur (lorque la section de conduction tend vers l'infini, les pertes deviennent nulles). C'est pour cela que la quantité de matière nécessaire devra être rapportée à une quantité d'énergie pour définir une efficacité globale, comme nous le verrons dans le chapitre 5.

L'approche proposée ici consiste donc à prendre en compte les phénomènes électromagnétiques à l'origine des pertes Joule en amont, dès la phase de conception, afin de prévoir leur impact. Cela permet de :

- réduire le nombre d'itérations essai-erreur d'une part. Le but n'est autre que d'ajouter une brique à la notion de prototype virtuel pour le volet électrique / électromagnétique, dans le cadre des interconnexions de puissance.
- augmenter la performance des interconnexions, puisque maîtriser la dissipation de puissance par effet Joule doit permettre de repousser les limites de fonctionnement sur d'autres contraintes.

3.1.3 L'état de l'art

Historiquement, les barres de liaisons électriques employées sont de type méplat (section rectangulaire aplatie). Ces barres sont obtenues par :

- filage à chaud (une billette de cuivre est pressée à travers une filière de la forme souhaitée) ;
- puis étirage à froid (étape qui permet l'obtention de côtes précises, ainsi qu'un écrouissage qui confère aux barres une grande rigidité mécanique).

Notons d'ailleurs que 30% des barres ainsi produites sont destinées à la production et au transport de l'énergie électrique. Dans une approche de dimensionnement classique (donc en dehors des considérations relatives aux pertes Joule supplémentaires dues aux effets induits) l'utilisation de méplats de cuivre est assez commode. Cela permet d'utiliser directement des dimensions 'catalogue' que l'on sélectionne en fonction des tenues mécaniques souhaitées. On adapte ensuite éventuellement le nombre de barres par phase et/ou les dimensions pour satisfaire aux contraintes d'échauffement.

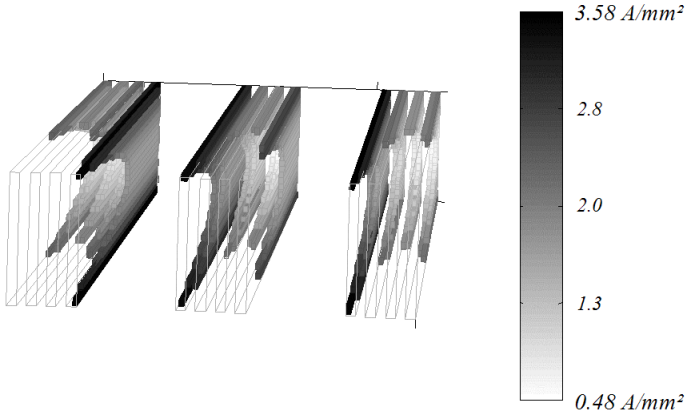


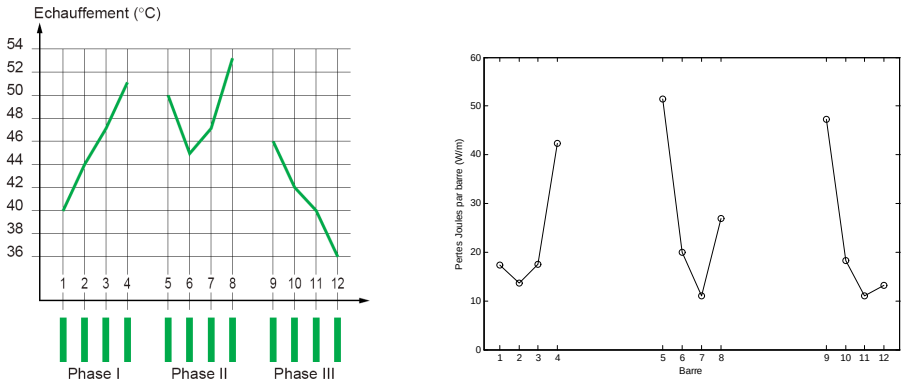
FIG. 3.2 – Jeu de barre triphasé avec représentation du 'flot' de courant : les altitudes (vue de dessus) représentent le module de la densité de courant.

La prise en compte des effets induits se traduit par des abaques de dimensionnement qui donnent un facteur de déclassement du pouvoir de conduction des conducteurs en fonction de leur forme [C.D.A. 56], [Ait Aissi 80] (et éventuellement de leur agencement dans quelques cas simples du type barres alignées). L'état de l'art du dimensionnement est résumé dans [Ducluzaux 82].

A titre d'illustration, on peut reprendre l'exemple qu'il cite : un jeu de barres triphasé, constitué de 4 barres par phase[1]. La seule grandeur aisément accessible à la mesure est le relevé des températures sur chaque barre (figure 3.3, obtenue par pose de thermocouples - Vue la conductivité thermique du cuivre, hors transitoire, chaque barre peut être considérée comme isotherme). On constate que le calcul des pertes (voir figure 3.3, les pertes sont obtenues par la méthode PEEC après calcul de la répartition effective du courant, présentée figure 3.2. La résistivité ne tient pas compte de la température[2]) est difficilement corrélable aux températures, puisque rayonnement et convection entrent en ligne de compte [Hus 89].

[1] Pour chaque phase : pour un courant efficace de 2500 A, 4 barres en cuivre de 6x80 mm espacées de 6 mm. 60 mm séparent les phases.

[2] La résistivité du cuivre dépend en fait de la température. On la caractérise usuellement par : $\rho_\theta = \rho_0\ (1 + a\ \theta)$ avec θ la température en °C, a le coefficient de température ($a = 0.0039$) et ρ_0 la résistivité à 0 °C. On a pris ici la résistivité à 25 °C. Par rapport à une température maximale de 53 °C, l'erreur sur la résistivité atteint 10% au pire.



Echauffement des barres Pertes associées

FIG. 3.3 – Echauffement des barres présentées sur la figure 3.2

Cet exemple illustre bien le fait qu'il est illusoire de penser intervenir sur le comportement électromagnétique des jeux de barres par des procédés de type essai erreur, puisqu'il est quasiment impossible de remonter aux informations utiles simplement. En procédant ainsi, on pallie faiblement aux conséquences des pertes Joule, sans intervenir à la source des phénomènes.

Remarque 8 *Un couplage modèle thermique / modèle électromagnétique en éléments finis est proposé par [Hedia 99] (le modèle thermique permet de corriger les conductivités, mais l'obtention des coefficients d'échanges convectifs reste hasardeuse). Le modèle est utilisé pour choisir un ordre de permutation des phases dans un système triphasé à 3 barres par phase. L'étude se limite à l'évaluation de toutes les combinaisons.*

3.1.4 Apport de la méthode PEEC

Nous proposons donc d'attaquer directement la source de dissipation, en réduisant les pertes par effet Joule.

En s'attaquant à un problème électromagnétique, on espère optimiser le dimensionnement des barres pour réduire les pertes, et donc réduire les problèmes de thermique afférents.

C'est dans cette optique que la modélisation du comportement électromagnétique des systèmes de connecteurs prend tout son intérêt. La figure 3.4 résume ce contexte.

Pour maîtriser la puissance dissipée par effet Joule, on est amené à choisir une méthode de modélisation suffisamment précise sur l'évaluation de la façon dont le courant se répartit dans les conducteurs sur des variations 'élémentaires' de géométrie qui sera compatible avec un processus d'optimisation.

La problématique est la suivante : nous avons besoin sur une géométrie donnée, en régime harmonique, de calculer la répartition du courant sur la section (quelconque) des conducteurs. De la justesse des dispersions de valeurs de courant dépend la précision du calcul des pertes. Plus important encore, dans une optique d'optimisation, l'impact d'une variation de géométrie doit être finement évalué. Ce type de calcul peut se faire de différentes façons, essentiellement :

- calcul Analytique,
- calcul par méthode Eléments Finis (FEM),
- méthode PEEC.

Nous allons à présent passer rapidement en revue ces méthodes du point de vue de l'optimisation afin de justifier l'intérêt qu'a pour nous la méthode PEEC dans ce contexte.

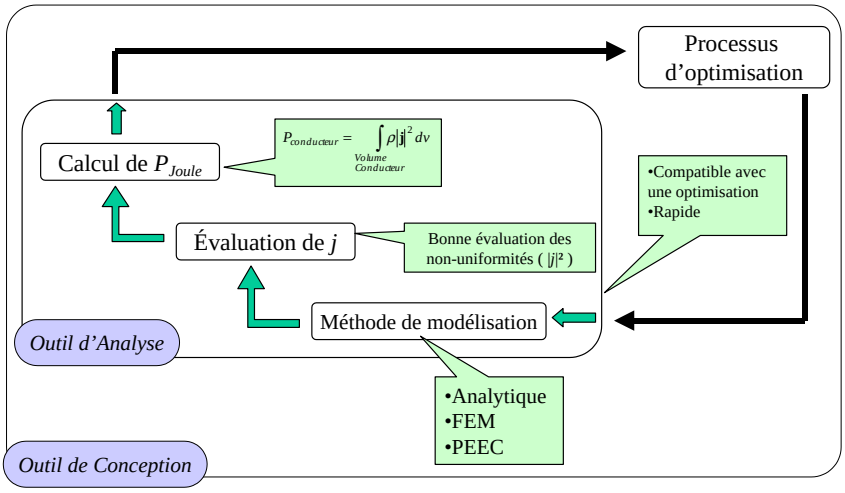


FIG. 3.4 – Définition d'un outil d'aide à la conception

Calculs analytiques :

Dans une optique d'optimisation, obtenir une expression analytique paramétrée des pertes serait appréciable, puisque la précision des résultats n'est plus un problème et qu'il est possible d'obtenir les dérivées de la fonction objectif. Cette solution reste malheureusement réservée à quelques rares cas simples. Comme on le verra dans le paragraphe 3.3.5 sur un cas de comparaison 'analytique', la résolution d'une équation de diffusion sans conditions aux limites imposées n'a rien de trivial et l'on est rapidement contraint à des approximations.

Quelques travaux en la matière existent cependant, mais la complexité des résultats obtenus comparés aux approximations consenties ne feront que nous pousser vers d'autres méthodes.

Notons que la prise en compte de l'effet de peau n'est pas une préoccupation nouvelle, les travaux de Dwight ([Dwight 18],[Dwight 16]) en sont la preuve. Pour des applications haute fréquence, il s'intéresse à l'effet de peau dans un conducteur tubulaire qui est décliné dans le cas limite du conducteur plat mince en tant que tube 'déroulé'. Son objectif est de dégager des comportements asymptotiques haute fréquence.

Pour ce qui est du cas du simple conducteur rectangulaire, les calculs analytiques nécessitent de recourir à des approximations. C'est par exemple le cas des travaux de [Giacoletto 96]. Il propose un calcul analytique de la répartition du courant dans un conducteur rectangulaire basé sur des décompositions en séries spatiales. Cependant, pour être mené à son terme, le calcul nécessite de faire l'hypothèse d'une condition aux limites uniforme sur la surface extérieure du conducteur, ce qui est rarement le cas. Il n'est donc pas utile de rentrer plus avant dans ces 'obscurs' calculs.

Sur ce plan, notons d'ailleurs que [Stoll 74] fait l'inventaire des hypothèses sur le champ extérieur qui peuvent permettre de mener à bien le calcul au travers de transformées de Fourier spatiales ... avant de passer à la méthode des différences finies.

Pour résumer l'état de l'art, il est possible de calculer analytiquement la diffusion du courant dans un conducteur quelconque seulement si les conditions aux limites sont connues (cas du champ extérieur imposé) ou si les symétries permettent de compenser le manque d'information (cas cylindrique). La forme de la section n'est pas un problème en soit puisque les techniques de décomposition en séries spatiales sont efficaces. Notons enfin que si la répartition de courant peut être supposée uniforme sur la section, le problème redevient soluble.

Reste alors le problème des effets de proximité, qui va à nouveau poser problème dans l'écriture des conditions aux limites.

Une conclusion évidente s'impose ici : les méthodes analytiques directes ne pourront nous servir qu'à traiter quelques cas de validation, et vérifier quelques tendances, mais en aucun cas elles ne nous permettront de développer une méthode générique.

Les méthodes éléments finis :

Puisque les méthodes analytiques sont exclues, les méthodes éléments finis apparaissent comme une bonne alternative [Moro 82]. Pour les calculs en électromagnétisme, ce type de méthodes a largement fait ses preuves ! Nous n'allons pas revenir ici sur la description de ce que sont les éléments finis (voir section 2.2.1). En quelques mots, un logiciel de type FLUX 2D permet la résolution d'un problème magnéto-harmonique 2D propagé sans grandes difficultés. On peut aisément prendre en compte les effets induits dans les conducteurs, avec un couplage au circuit électrique extérieur, qui permet de fixer les courants dans les phases. De plus, il est possible de prendre en compte des matériaux ferromagnétiques passifs (pour les enveloppes métalliques).

Les formulations existantes sont donc amplement suffisantes (en 2D au moins) pour traiter notre problème du point de vue caractérisation. Cependant, c'est lorsque l'on s'intéresse à l'optimisation que l'on bute sur un problème de taille : le maillage.

Ce découpage de l'espace (l'espace entier : y compris l'air / le vide) est indispensable, et constitue d'ailleurs une étape délicate de la modélisation. En effet, de la qualité du maillage dépend la qualité des résultats. C'est ici la caractéristique qui différencie fondamentalement les éléments finis de la méthode PEEC. En effet, dans le cadre de l'électromagnétisme, la résolution éléments finis repose sur la minimisation de fonctionnelles énergétiques sur tout l'espace[3]. Ainsi, contrairement à ce que l'on peut trouver en mécanique, où tout se passe dans la matière, les systèmes électromagnétiques stockent de l'énergie dans l'air, qui doit donc être maillé. L'obtention d'un maillage pertinent n'a rien de trivial, puisqu'il est difficile de donner un critère de qualité fiable sur la combinaison de 2 aspects :

- pertinence du maillage pour la précision de la grandeur observée (caractérisation) ;
- sensibilité d'un remaillage imposé par une petite variation de la géométrie (optimisation).

Les figures 3.5 et 3.6 donnent l'image de ce que peut être le maillage respectivement d'un jeu de barre (jeu de barre Okken 4000 A sous enveloppe) et d'une canalisation préfabriquée (type KS puissance moyenne à forte).

Il est évident que le maillage présenté ici est quelque peu exagéré, puisqu'il est quasi uniforme sur la surface interne à l'enveloppe, mais on ne peut objectivement le grossir si on ne s'autorise qu'un calcul. En effet, tout ce que l'on peut raisonnablement supposer , c'est que le champ extérieur à l'enveloppe est fortement atténué, donc le maillage peut se relâcher rapidement à l'extérieur. Sur les conducteurs, on doit retranscrire correctement les effets de peau et de proximité, et donc mettre une dizaine de mailles dans l'épaisseur de peau (le critère classique qui consiste à placer 2 mailles dans l'épaisseur de peau est ici insuffisant puisque l'on s'intéresse particulièrement aux non uniformités de densité de courant et non pas à la répartition du champ dans l'espace). Le maillage de l'air est alors problématique, et est souvent guidé par l'expérience de l'utilisateur, qui, au travers de différents essais aura pu évaluer la sensibilité

[3] On minimise 2 fonctionnelles (voir chapitre 2) pour un problème magnétique dynamique (avec courants de Foucault) :

- La stationnarité de l'enthalpie libre permet de garantir $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$;
- Une minimisation de la puissance permet d'obtenir Maxwell-Faraday dans les conducteurs.

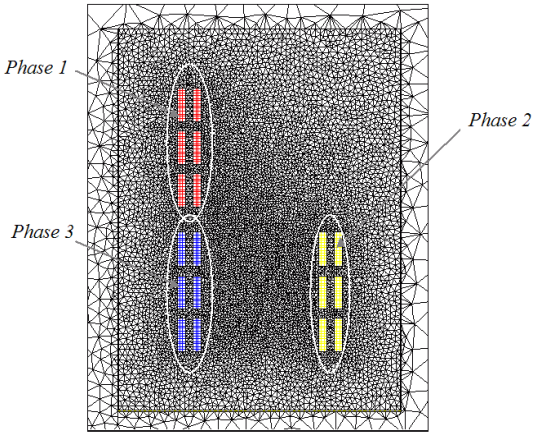


FIG. 3.5 – Jeu de barre Okken modélisé sous FLUX 2D - Maillage

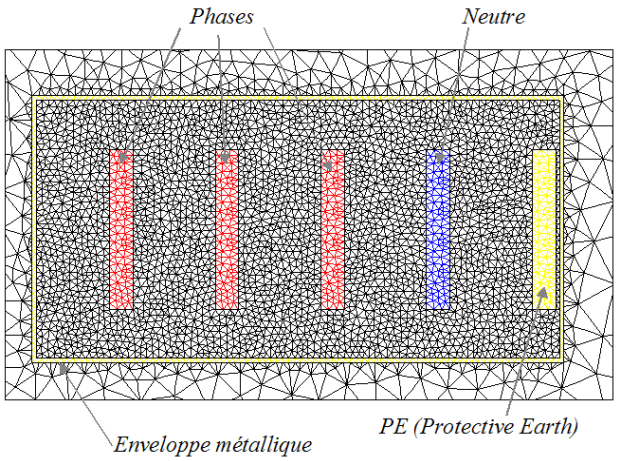


FIG. 3.6 – Canalisation préfabriquée type (simplifiée) modélisée sous FLUX 2D - Maillage

au maillage de certaines zones, et aura pu apprécier qualitativement des allures convenables pour les variations des différentes grandeurs.

Certains logiciels raffinent le maillage (ce qui demande donc plusieurs passes de calcul) en fonction de la répartition de la densité d'énergie, mais ce critère peut aisément être mis en défaut. La figure 3.7 présente une carte de densité d'énergie, ainsi que les lignes de champ. Le critère énergétique va encourager un maillage fort entre les conducteurs alimentés (zone 'sombre'), alors que 'tout' se passe autour, là où les lignes de champ sont canalisées.

Si on ajoute à cela l'objectif d'optimisation, on peut se demander comment le maillage va se comporter. En effet le modèle doit permettre de comparer deux solutions géométriquement proches, qui ne posséderont pas le même maillage. Il est très difficile de garantir que le bruit introduit par le remaillage ne va pas être supérieur à la variation de la grandeur étudiée. On se trouve en fait dans la même problématique que celle de la prise en compte du mouvement [Leconte 00].

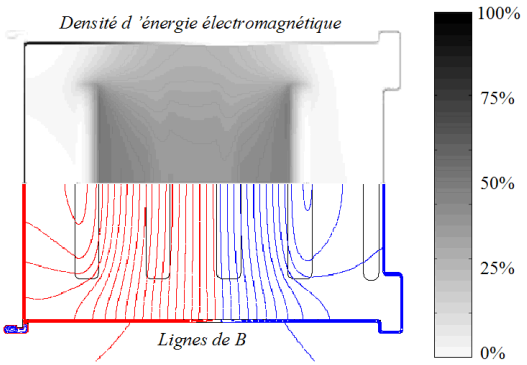


FIG. 3.7 – Modélisation éléments finis d'une canalisation préfabriquée, essai en court-circuit phase-neutre. Carte de densité d'énergie électromagnétique et lignes de champ.

Notons aussi que ces problèmes ne vont que s'accentuer lorsque la taille du système augmente (par rapport en tout cas à la taille des conducteurs), ce qui peut facilement être le cas dans le cadre des interconnexions [Guichon 03b].

La problématique exposée ici pourrait ne pas être un obstacle si l'optimisation se révélait peu gourmande en itération, car dans ce cas, il est envisageable d'employer un maillage très fin, qui augmentera bien sûr le coût de calcul. Cependant, les optimisations par la méthode PEEC ont permis de préciser a posteriori l'ordre de grandeur : sachant que l'optimisation de position (voir section 3.2) requiert de l'ordre de quelques 1000 à 10 000 itérations [Guichon 01b] et l'optimisation de forme qui sera présentée plus loin (voir section 3.6) quelques 30 000 itérations, on comprend que cet argument soit rédhibitoire.

Remarque 9 *Notons que le couplage de la méthode des élements finis avec des éléments intégraux de frontière permet de s'affranchir du maillage de l'air dans certaines zones. Cependant, cette approche présente l'énorme inconvénient de transformer les matrices bandes que l'on traite usuellement en éléments finis en matrices plus pleines, ce qui est fortement pénalisant en terme de résolution, vu la taille des matrices considérées.*

Une voie pertinente pour l'optimisation dans le cadre de modélisation éléments finis reste l'utilisation des surfaces de réponses [Caldora Costa 01]. Ce procédé consiste en l'utilisation d'une fonction objectif approchée pour l'optimisation. L'approximation de la fonction objectif se fait par une interpolation qui doit traduire au mieux le comportement de la fonction objectif réelle. L'idée de base de cette approche est de limiter le coût global de l'optimisation, puisque la fonction approchée, même si elle peut être coûteuse à obtenir, pourra ensuite être optimisée à un coût de calcul beaucoup plus faible.

La méthode PEEC :

Comme cela a été précisé (voir section 2.2.2), cette méthode ne localise pas l'énergie dans l'air, mais uniquement sur les conducteurs, qui sont le lieu de la dissipation d'énergie que l'on veut observer. De plus, le calcul des éléments partiels se relie directement aux phénomènes induits que l'on observe.

Plus encore : ici, contrairement aux éléments finis, les degrés de liberté de la méthode de calcul (les courants) sont directement les paramètres variationnels de l'optimisation.

Comme nous allons le préciser dans le paragraphe 3.2, la méthode PEEC permet de s'affranchir des problèmes de maillage évoqués. Elle a permis de réaliser les premières optimisations d'interconnexions visant à minimiser les pertes Joule qui n'avaient pu être menées à bien par les méthodes éléments finis. On verra donc qu'en plus de l'absence du maillage de l'air, cette méthode permet de se contenter de modèles légers, faiblement discrétisés, qui sont conformes aux tendances réelles. Il est ainsi possible de limiter fortement le coût des calculs, et de mener à bien les nombreuses itérations nécessaires à l'optimisation dans des temps raisonnables. On verra ainsi dans le cadre de l'optimisation de forme (voir section 3.6) qu'un couplage astucieux du modèle à l'algorithme d'optimisation permet de minimiser le coût des calculs.

3.2 Existence d'une marge d'optimisation accessible

La démarche proposée est étayée par des résultats antérieurs. qui ont permis de montrer sur un exemple industriel qu'une marge d'optimisation était effectivement accessible grâce à la méthode PEEC [Guichon 01a], [Arnaud 02].

L'exemple traité était un jeu de barres principal d'alimentation de tableau Okken (figure 3.8). Il s'agit d'un jeu de barres basse tension triphasé (400 V, 50 Hz, sans neutre dans la version considérée) de fort calibre (4000 A). Chaque phase est constituée par un groupe de 6 conducteurs méplats en cuivre dont les dimensions sont précisées sur la figure 3.9.

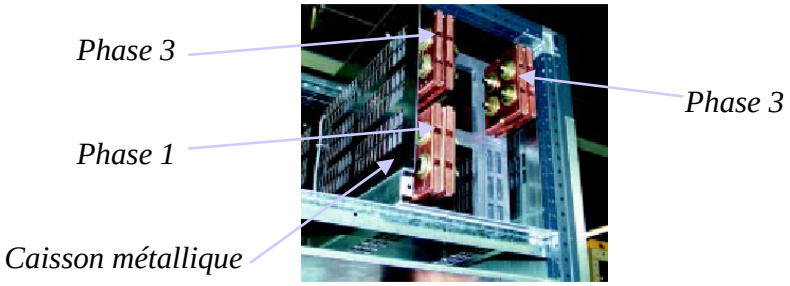


FIG. 3.8 – Vue en coupe du jeu de barres Okken

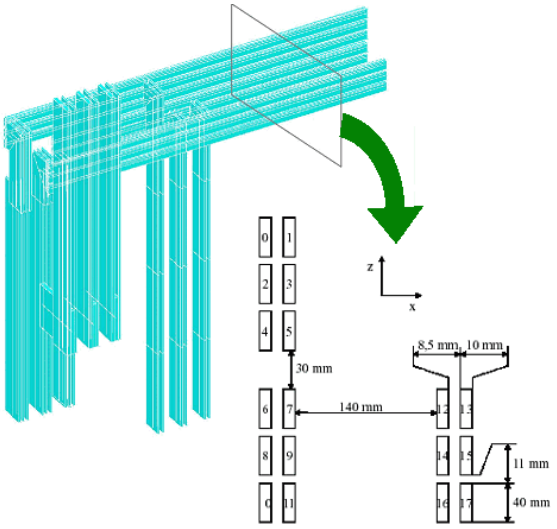


FIG. 3.9 – Jeu de barres Okken modélisé (Source [Janet 00])

Conformément à ce qui a été présenté en 3.1.2, on peut évaluer séparément les contributions des effets induits (figure 3.10) dont le total augmente les pertes de 74% par rapport au minimum théorique qui est le cas continu (il est associé à la base 100%). Cet exemple laisse apparaître une prépondérance des effets de proximité. Ils conduisent à eux seuls à une augmentation de 68% des pertes par effet Joule.

En effet, comme on peut le constater sur la partie gauche du tableau 3.2, la répartition du courant dans chaque phase est très inégale entre les 6 conducteurs, à cause de la proximité des

autres phases. En revanche, du fait de la faible épaisseur des barres, l'effet de peau, même s'il reste pénalisant, a un impact secondaire.

Remarque 10 *Ici encore, la séparation des effets est artificielle, elle permet juste de s'apercevoir que le problème majeur vient d'un mauvais équilibrage du courant entre les conducteurs en parallèle.*

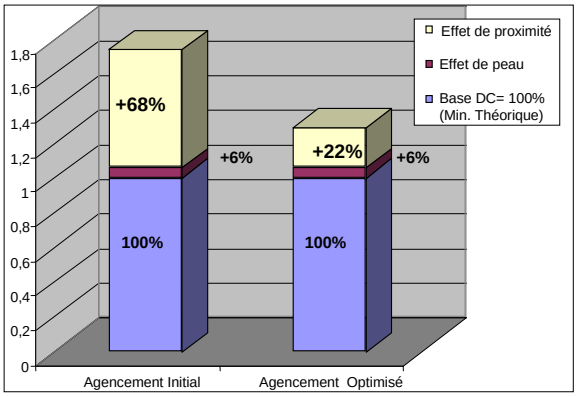


FIG. 3.10 – Jeu de barre Okken - Quantification des effets induits

Optimisation de position :

Dans l'exemple présenté, il s'agit donc de s'attaquer à l'effet de proximité : pour réduire les effets induits entre les conducteurs appartenant aux différentes phases, on modifie l'agencement des barres pour minimiser les pertes Joule. Le tableau 3.2 présente une solution optimisée de l'agencement des barres qui autorise la séparation des phases en groupes de 2 barres isolées. L'ensemble des barres est contraint dans la zone délimitée par les pointillés, et des distances minimales d'isolement ont été imposées.

Cette optimisation a été réalisée en couplant la méthode PEEC sous forme d'un composant (qui fournit en sortie la valeur de grandeur recherchée, soit ici les pertes Joule, en fonction de paramètres d'entrée, ici les positions des différents groupes de barres) à un environnement d'optimisation généraliste (EDEN [Atienza 99]) [Guichon 03a].

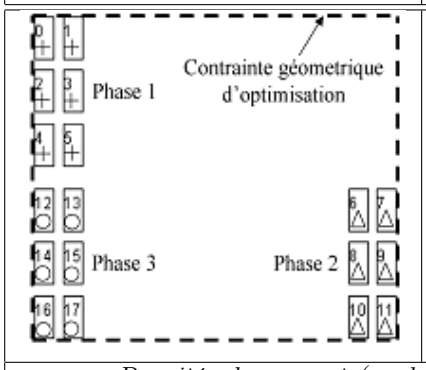
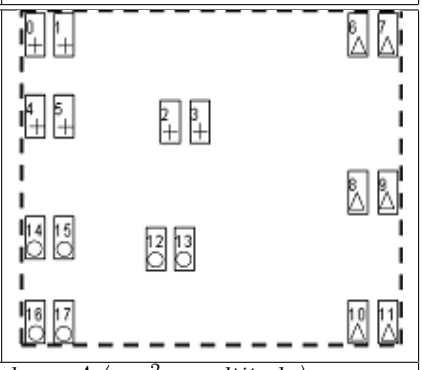
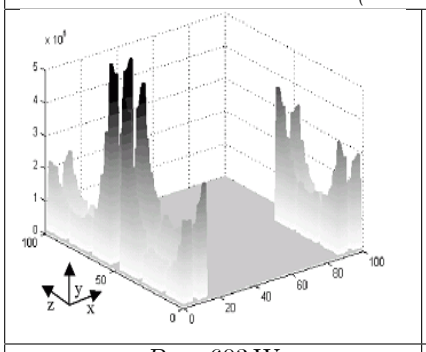
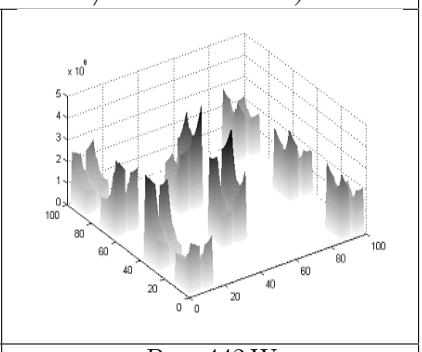
Remarque 11 *L'algorithme employé ici est déterministe, de type gradient, couplé à un procédé de tirage aléatoire des points de départ. Il appartient à la famille des SQP (Sequential Quadratic Programing) qui utilisent les dérivées de la fonction objectif (ici évaluées numériquement). Il s'agit de CFSQP [Lawrence 97], disponible dans l'environnement EDEN.*

La solution retenue ici est obtenue en 1032s[4] pour 6120 appels au solveur PEEC. Une méthode FEM classique aurait nécessité autant de remaillages manuels que d'itérations. On constate qu'il en aurait fallu plus de 6000 ici ce qui justifie a posteriori qu'aucune optimisation n'ait pu être menée en FEM.

[4] Calculateur utilisé : Années 2000-2001, Type PC – Processeur Pentium III 450MHz / 256 Mo de RAM

La méthode de la surface de réponse n'a pas été tentée. Cependant, pour une comparaison entre optimisation sur un modèle analytique proche de la méthode PEEC et mise en oeuvre des techniques de surface de réponse sur un modèle FEM, on pourra se reporter à [N'Guessan 04].

Le gain sur les pertes Joule (à section de cuivre constante) est de 23%. D'autres optimums ont été trouvés (seuls des minimums locaux sont garantis), avec des niveaux de pertes inférieurs, mais ne sont pas industrialisables.

Agencement Initial	**Résultat d'optimisation**
	
Densités de courant (module en A/mm² en altitude)	
	
$P_j = 603\,\mathrm{W}$	$P_j = 442\,\mathrm{W}$

TAB. 3.2 – Optimisation du jeu de barres Okken

On constate ici que l'optimisation a conduit à trouver un agencement qui exploite les effets de proximité afin de répartir au mieux le courant sur les 6 conducteurs de chaque phase. La dispersion des densités de courant en est grandement réduite.

Des non-uniformités subsistent sur la section de chaque méplat, ce qui explique que l'on ne puisse atteindre le minimum théorique, puisque la forme des barres ne permet pas de s'adapter à la répartition naturelle du courant.

Cet exemple a permis de démontrer la faisabilité d'une optimisation visant à diminuer les pertes par effet Joule dissipées par un jeu de barre, avec des gains intéressants. C'est pourquoi une nouvelle stratégie d'optimisation a été explorée pour prolonger ces travaux, et exploiter les marges restantes, ou traiter des cas dans lesquels l'agencement des conducteurs ne peut être modifié. On pressent bien ici que l'agencement, une fois figé, seule la forme des conducteurs peut permettre de jouer sur les effets induits, et c'est cette voie qui va être explorée dans la suite. Un autre type de jeu de barres a été ciblé, où la position des barres ne peut être modifiée.

3.3 Ciblage des conducteurs 'massifs'

FIG. 3.11 – Coffret type Prisma double fermé (Source [Schneider 04])

On s'intéresse ici aux armoires de distribution basse tension (type Prisma® - exemple sur figure 3.11). Il s'agit d'un système de coffrets modulaires permettant toutes sortes d'associations de matériels de protection ou de commande. La figure 3.13 montre une cellule de base dépourvue des tôles d'habillage (destinées à interdire l'accès aux pièces sous tension) dans une configuration typique. L'alimentation du tableau se fait par le haut. On se raccorde au disjoncteur de tête. Celui-ci alimente ensuite un jeu de barre de répartition qui distribue l'énergie sur les différents départs. Dans le cas de la figure 3.11, des reprises de courant se font des deux côtés du jeu de barre de répartition.

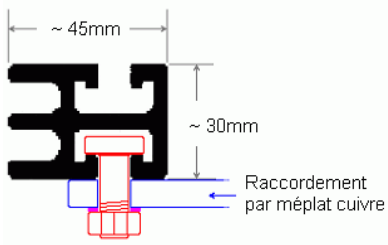


FIG. 3.12 – Section des barres Linergy Cuivre 1600A avec système de raccordement

Le raccordement des dérivations (reprises de courant pour alimenter des départs) se fait par des barres isolées préformées ou des clinquants, comme on le voit sur la vignette de droite, ou directement via des câbles munis de cosses. Les dérivations sont serrées contre le jeu de barre de répartition au moyen d'une vis que l'on insère directement dans une gorge ménagée à cet effet dans la section des conducteurs.

Avec l'apparition de techniques d'extrusion performantes, les concepteurs ont à présent la possibilité de réaliser des barres de section complexes. Les profils réalisés peuvent avoir des

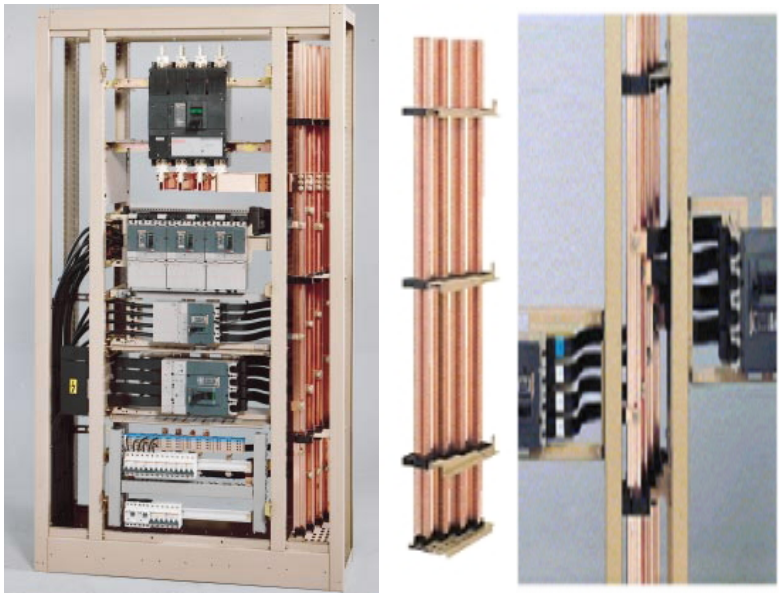


FIG. 3.13 – Système de jeux de barres Linergy (à droite, mise en évidence des systèmes de raccordement et de fixation) - Source [Schneider 04]

contours quasi-quelconques, et même contenir des évidements. Deux gammes existent : cuivre ou aluminium. La figure 3.12 montre la section du conducteur 1600A de la gamme cuivre, avec l'empreinte de raccordement.

Selon la puissance transitant dans l'armoire, le dimensionnement des barres est adapté en section conductrice. On dispose ainsi d'une gamme de barres allant de 630 à 1600 A de courant nominal. Afin de permettre la standardisation des pièces de fixation et de raccordement, la forme des barres présente des caractéristiques communes à tous les calibres. Par exemple pour la gamme cuivre, les barres de calibre 1600 A s'inscrivent dans un rectangle de 45x30 mm. Ensuite, pour les autres calibres, l'empreinte destinée aux vis de raccordement conserve la même taille et la hauteur reste de 30 mm.

3.3.1 Aluminium vs. Cuivre

Dans un premier temps, précisons que dire que l'on emploie des barres en cuivre ou en aluminium est un abus de langage pratique mais assez inexact, surtout dans le cas de l'aluminium. On devrait en fait parler d'alliages. En effet, de nombreuses inclusions (et impuretés) sont présentes et modifient (voire dégradent pour les impuretés) les propriétés des alliages en terme de résistivité, de tenue à la corrosion, d'état de surface, de tenue au pliage...

	Cuivre	Aluminium
Pureté typique (% en masse)	99.9%	98%
Principaux additifs	Ag, Bi, O, Pb	Si, Fe, Mg, Mn, Cr, Zn
Masse volumique (g/ cm^3)	8.9	2.7
Résistivité à 20 °C ($\mu\,\Omega.$ m)	0.01786	0.033
Coeff. de température (résistivité) $\left(°\mathrm{C}^{-1}\right)$	0.0039	0.0040
Profondeur de peau à 20 °C (mm)	9.5	12.9
Résistance mécanique$^{(i)}$ R_m $\left(\mathrm{N.\,mm}^2\right)$	200 à 350	100 à 200
Conductivité thermique$^{(ii)}$ (W/ m/ °C)	385	200

TAB. 3.3 – Caractéristiques comparées du cuivre et de l'aluminium électrique. (i) Force de rupture en traction ; (ii)La loi de Wiedemann-Franz montre en fait que les conductivités thermiques et électriques sont couplées : le rapport K/S est proportionnel à la température (modèle du gaz électronique [Kittel 70])

Le tableau 3.3 fait une rapide comparaison des propriétés des matériaux intéressantes dans notre cas. Le cuivre est le meilleur conducteur, avec une résistivité deux fois plus faible que celle de l'aluminium. Il présente également une meilleure tenue mécanique. Cependant, l'aluminium est bien plus léger (même en prenant en compte le fait qu'il va falloir des sections plus importantes du fait de sa plus grande résistivité), et ses propriétés mécaniques permettent également la réalisation de profilés plus complexes que ceux obtenus avec le cuivre.

Enfin, même si certaines industries ou pays restent 'culturellement' attachés à l'emploi de cuivre pour les jeux de barres, l'aluminium tend à s'imposer du fait de son plus faible coût. L'évolution des cours du cuivre et de l'aluminium ces dernières années (voir figure 3.14) montre que cette tendance ne pourra que se confirmer, puisque les cours du cuivre s'envolent (83% d'augmentation sur les 2 dernières années), alors que le cours de l'aluminium reste relativement stable et prévisible[5] (probablement du fait d'une part plus importante du process de traitement par rapport au coût du minerai brut comparé au cuivre).

Il est d'ailleurs intéressant de poursuivre le raisonnement pour avoir une meilleure appréciation de la différence de coût. On peut par exemple comparer 2 barres ayant le même pouvoir de conduction en continu (il faudrait en fait prendre en compte la profondeur de peau, mais celle-ci joue moins que la résistivité).

$$R_{DC} = \rho_{cu}\frac{L}{S_{cu}} = \rho_{al}\frac{L}{S_{al}}$$

Comparons à présent la masse des 2 conducteurs ainsi définis :

$$\frac{M_{cu}}{M_{al}} = \frac{m_{vcu}}{m_{val}} \cdot \frac{S_{cu}}{S_{al}} \cdot \frac{L}{L} = \frac{m_{vcu}}{m_{val}} \cdot \frac{\rho_{cu}}{\rho_{al}} = 1.75$$

[5] L'aspect 'épuisement de la ressource' (voir paragraphe 5.2.2) a bien évidement ici un impact non négligeable, vecteur de stabilité pour les cours de l'aluminium et d'explosion pour celui du cuivre.

On peut alors tracer la courbe 3.15 qui donne une comparaison relative du coût du conducteur selon la nature du matériau employé. Même si ici le process de mise en forme des barres n'est pas pris en compte, l'extrusion et les éventuelles différences dans les traitements de surface ne remettent pas en cause ce classement économique.

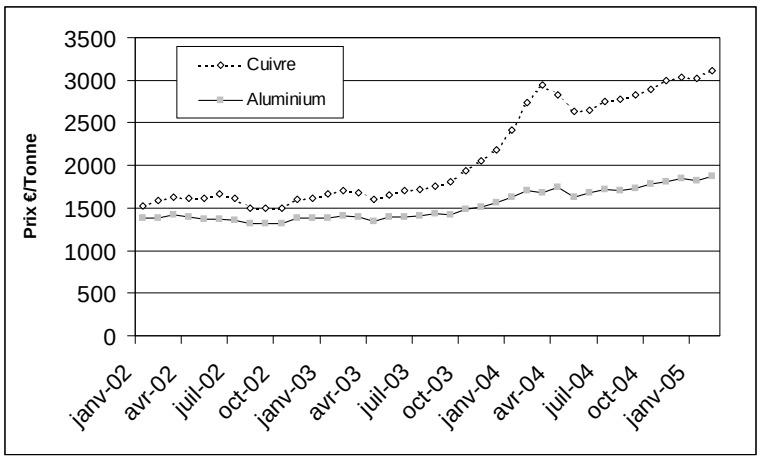


FIG. 3.14 – Evolution des cours du cuivre et de l'aluminium au LME (London Metal Exchange - Cours officiels) depuis 3 ans .

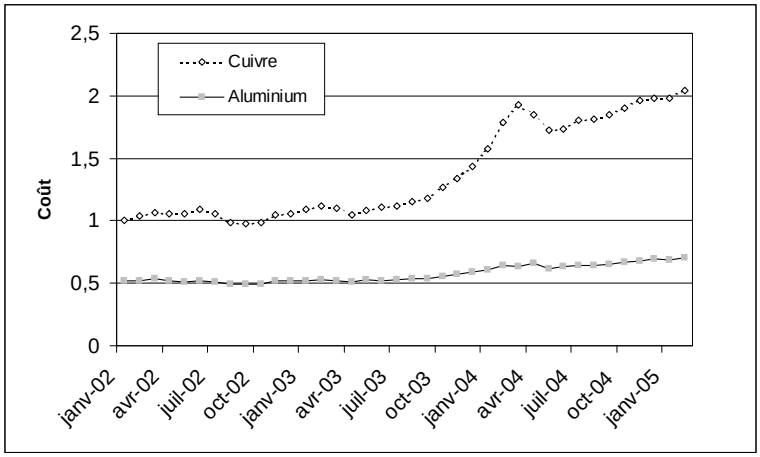


FIG. 3.15 – Coût comparé d'un conducteur en cuivre et en aluminum à pouvoir de conduction en continu ($\tilde{}R_{DC}$) constant. La référence est fixée à 1 pour du cuivre en Janvier 2002.

3.3.2 Adaptation du modèle d'analyse : traitement générique des formes complexes

Comme on l'a vu, les conducteurs considérés ne sont pas de simples méplats. On a vu également que la méthode PEEC se basait sur un maillage en éléments parallélépipédiques. Ce type de maillage laisse peu de latitude pour le traitement des arrondis. Aussi, afin de prendre en compte les sections 'complexes' de ces barres, un procédé type traitement d'images a été adopté : une image des sections est dégradée, pixelisée, puis on fait correspondre à chaque pixel une subdivision PEEC, ce qui donne un maillage uniforme, et évite la simplification et la saisie de la structure par ses paramètres géométriques.

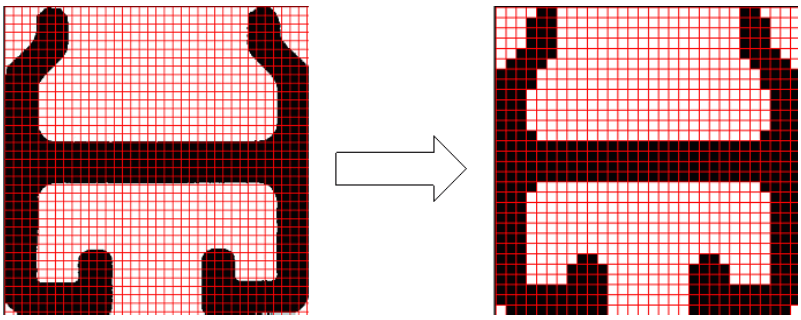


FIG. 3.16 – Saisie des géométries par traitement d'image

Ce procédé est discutable du point de vue du respect des contours extérieurs des sections. Cependant, du point de vue de l'étude de la répartition du courant, il est tout à fait pertinent, étant donné que la taille des mailles peut être ajustée pour tenir compte de la profondeur de peau qui conditionne les gradients de densité de courant sur la section. Notons également que ce maillage uniforme ne préjuge absolument pas de la façon dont le courant se répartit ce qui sera utile par la suite, en terme d'optimisation (et correspond d'ailleurs à une réalité : s'il est possible pour un conducteur isolé dans l'espace d'intuiter l'impact de l'effet de peau, le jeu se révèle être un vrai casse tête dès lors que les effets de proximité entrent en scène, comme c'est évidemment le cas dans un système triphasé).

Nous ne rentrerons pas ici dans le détail des algorithmes de traitement utilisés, puisqu'il s'agit, pour la plupart de fonctions classiques des logiciels de traitement / retouche des photos. Quelques étapes importantes :

- Une image type bitmap de bonne qualité de la section du conducteur est extraite du logiciel de CAO.
- Les dimensions extérieures du profil doivent être précisées.
- Le nombre de pixel finaux de la section doit être défini selon 2 critères :
  - Epaisseur de peau
  - Finesse des motifs définissant la section
- La 'pixelisation' doit se faire à l'aide d'algorithmes type 'tout ou rien', c'est-à-dire qu'un pixel sera :
  - Noir, donc contiendra de la matière si + de 50% de la surface qu'il recouvre sur la section initiale est dans la section.
  - Blanc, donc vide dans le cas contraire.
- Une phase de retouche manuelle est souvent indispensable, afin de concilier :
  - Conservation de la section totale du conducteur
  - Respect de l'allure extérieure de la section

Cette approche s'avère soumise à l'empirisme, dans la mesure où la qualité du maillage est liée à un coût en terme de calculs. On peut donc être amené à des compromis, selon l'optique du travail :

- Maillage 'léger' : 4 mailles ou moins dans l'épaisseur de peau si la complexité de la section le permet, pour une estimation imprécise des pertes, parfaitement adapté à la comparaison des solutions, à l'optimisation de positions.
- Maillage fin : de l'ordre de 10 mailles dans l'épaisseur de peau (soit dans le cuivre ou l'aluminium, des mailles de l'ordre du mm^2 à 50 Hz) pour une évaluation précise de pertes, adapté à un travail sur la section des conducteurs (optimisation).

3.3.3 Barres Linergy – Quantification des contributions

Nous allons à présent nous intéresser aux jeux de barres Linergy Aluminium qui peuvent équiper les tableaux présentés précédemment. La figure 3.17 illustre la notion de gamme pour les barres en aluminium.

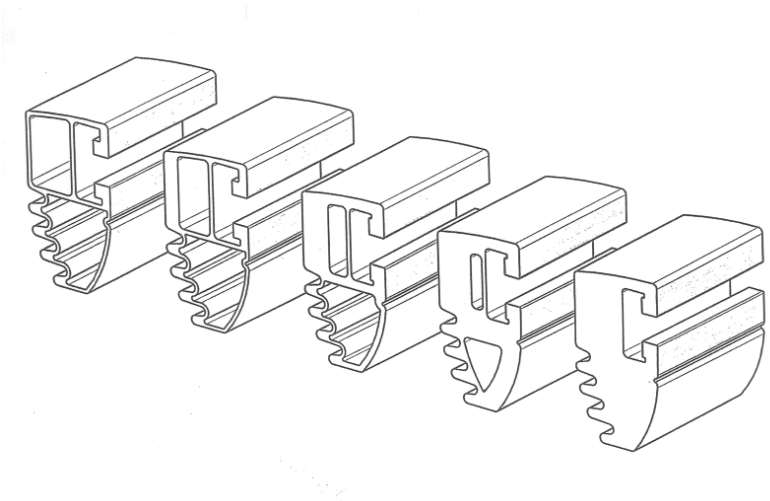


FIG. 3.17 – Vision de la gamme de barres Aluminium

On s'intéressera plus particulièrement au modèle 1600 A, dont le profil est donné par la figure 3.18. On a bien ici affaire à un profil relativement complexe, de part la présence d'un rail de positionnement des vis de raccordement, ainsi que par la présence des ailettes qui sont par ailleurs communes à toutes les barres de la gamme.

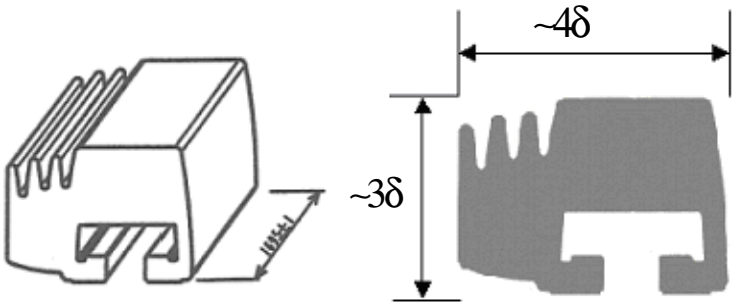


FIG. 3.18 – Caractéristiques géométriques des barres Linergy 1600 Aluminium (profilé en aluminium, longueur ∼1.7m, Section ∼900 mm^2, Poids par barre ∼4 kg, Courant Nominal=1600A ; profondeur de peau δ de l'ordre de la dizaine de mm)

Il est possible d'analyser le comportement de ce jeu de barres en traitant la section comme présenté en 3.3.2. La méthode PEEC permettant de séparer les effets de proximité et de peau, on peut étudier le comportement d'une barre seule isolée, soumise seulement à l'effet de peau et le système triphasé complet, ce qui permet de quantifier les effets.

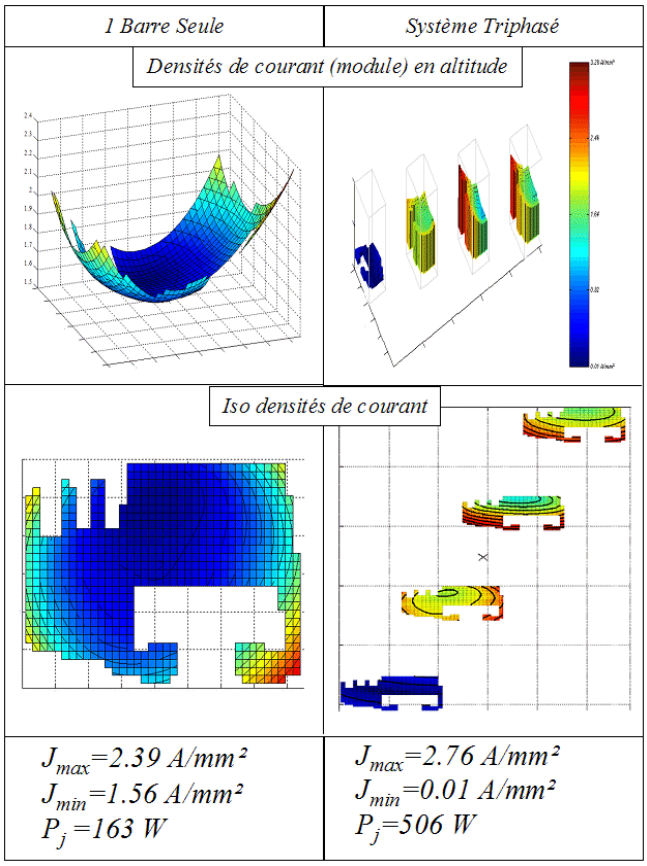


FIG. 3.19 – Caractérisation des barres Linergy 1600A (les pertes sont données pour la hauteur du tableau prisma)

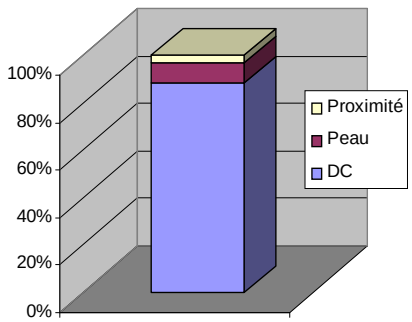
L'importance relative des effets induits est différente de ce qu'on pouvait observer sur le jeu de barres Okken (3.10), notamment du fait des distances entre barres. On constate ici une prépondérance de l'effet de peau.

Ici, la comparaison entre la situation effet de peau seul et la situation triphasée (qui prend en compte les effets de proximité) montre qu'il est difficile d'isoler réellement l'effet de peau. En effet l'effet de peau est responsable de la répartition caractéristique du courant en forme de cuvette sur la section des conducteurs. Cependant, les figures du bas de la figure 3.19 montrent que la présence d'autres conducteurs dans le voisinage modifie les répartitions de courant, sans changer cette forme caractéristique. Le minimum ou 'centre' de la cuvette se trouve simplement déplacé par effet d'influence.

Ainsi, le problème que nous allons chercher à résoudre n'est pas directement la réduction des pertes liées à l'effet de peau. Il est plus judicieux de considérer que la section des conducteurs impose une dispersion des densités de courant qui engendre des pertes Joule excessives.

On peut relier la dispersion des densités de courant à l'efficacité énergétique de la matière conductrice : les zones portant les densités de courant les plus importantes ont une meilleure contribution à un transport efficace de l'énergie électrique.

	P_{Joule}
DC	444W
Effet de peau seul	489W = P_{DC}+10 %
Peau+Proximité	506W = P_{DC} +14%

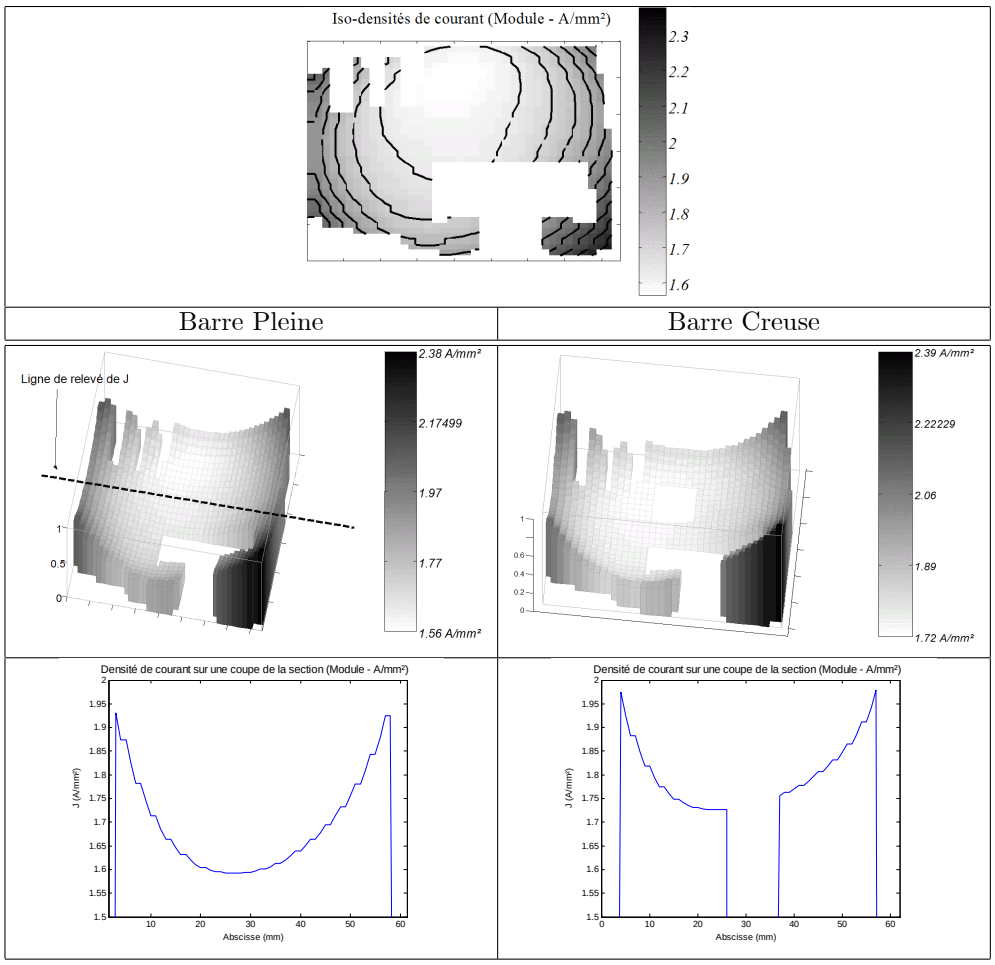


TAB. 3.4 – Evaluation des effets induits - Densités de courant et puissance dissipée

Le fait que l'on soit dans une situation de positionnement des barres imposée comme c'est le cas pour le jeu de barres Linergy n'est donc pas vraiment différent de la situation à laquelle on arrive après une optimisation de position : la forme des conducteurs doit être adaptée à la répartition 'naturelle' du courant.

3.3.4 Evidement de barres massives

La matière conductrice présente dans les zones portant les plus faibles densités de courant est peu efficace. Cette matière peut être considérée comme inutile. Le tableau 3.5 montre l'intérêt que peut présenter le retrait de matière dans les zones peu 'chargées' : la figure de gauche (en bas) présente le profil de densités de courant sur un chemin traversant la section du conducteur plein, celle de droite, l'équivalent après extrusion (même courant global).



TAB. 3.5 – Comparaison des densités de courant avec une section pleine et une section évidée

Ici, en conservant le même courant global transité et en évidant la barre dans la zone où l'aluminium est le moins chargé, le niveau de $J_{\max}$ est inchangé, seul le niveau $J_{\min}$ est relevé, permettant ainsi de diminuer sensiblement la valeur de

$$\Delta J = J_{\max} - J_{\min}$$

La puissance étant une somme quadratique, la réduction de ΔJ permettrait de diminuer les pertes à section de conducteur constante. Ici, de la matière a été enlevée, donc le niveau des pertes a légèrement augmenté, mais la réduction de ΔJ garantit une meilleure utilisation de la matière restante.

3.3.5 Validation analytique

Afin de quantifier l'influence d'un évidement au centre d'un conducteur massif, une comparaison avec un cas analytique a été réalisée. Il n'est pas possible, dans le cas général d'obtenir analytiquement la répartition de la densité de courant dans un conducteur massif en champ libre. Cependant, le cas du conducteur cylindrique permet, de part sa symétrie de révolution, de s'affranchir du manque d'informations sur les conditions aux limites de champ à la frontière du conducteur.

De plus l'aspect quasi-circulaire des iso-densités de courant sur la section non-circulaire (loin s'en faut !) des barres Linergy laisse à penser que l'analogie est pertinente.

Nous considérerons donc le conducteur cylindrique creux présenté sur la figure 3.20. La barre est supposée infiniment longue selon l'axe z, parcourue par un courant total I_{total}, en champ libre (hors d'influence de toute source de champ extérieur).

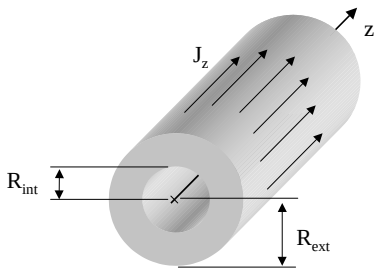


FIG. 3.20 – Conducteur cylindrique creux

La diffusion du courant **J** est obtenue directement par l'intégration des équations de Maxwell [Smythe 68] (en l'absence de matériaux ferromagnétiques) :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ (Maxwell-Ampère)} \tag{3.1}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \text{(Maxwell-Faraday)} \tag{3.2}$$

auxquelles on ajoute la loi de comportement du matériau (ici un conducteur non ferreux, cuivre ou aluminium) :

$$\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E} \text{ (Loi d'Ohm)}$$

où :

- **H** est le vecteur d'excitation magnétique.
- **E** est le vecteur champ électrique
- σ est la conductivité du matériau ($\sigma = \frac{1}{\rho}$)

La combinaison de (3.1) et (3.2) donne en régime harmonique à la fréquence $f = 2\pi\omega$:

$$\text{rot}\,(\text{rot } \mathbf{H}) = -j\mu_0\sigma\omega\, \mathbf{H}$$

soit :

$$\Delta \mathbf{H} = -j\mu_0\sigma\omega\, \mathbf{H} \tag{3.3}$$

qui n'est autre qu'une équation de la diffusion caractérisée par la profondeur de peau :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \tag{3.4}$$

Comme la barre est supposée infiniment longue selon l'axe z, le courant est parallèle à cet axe (on néglige ainsi tout effet de bord). Par la symétrie de révolution, le champ est orthoradial et ne dépend que de r, le rayon depuis le centre de la barre. Si on choisit un système de coordonnées cylindriques, adapté à cette géométrie :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_\phi(r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'équation (3.3) devient :

$$\left(\frac{1}{r^2} + j\mu_0\sigma\omega\right) h_\phi(r) - \frac{1}{r}\frac{d}{dr}h_\phi(r) - \frac{d^2}{dr^2}h_\phi(r) = 0$$

On peut résoudre cette équation avec les conditions de champ aux limites données par le théorème d'Ampère :

– sur le contour extérieur du conducteur, où tout le courant est enlacé :

$$h_\phi(R_{ext}) = \frac{1}{2}\frac{I_{total}}{\pi R_{ext}}$$

– sur le contour intérieur :

$$h_\phi(R_{\text{int}}) = 0$$

Remarque 12 *C'est souvent à ce niveau que le calcul analytique se trouve bloqué dans le cas général. En effet, si on prend le simple cas d'un conducteur de section carrée parcouru par un courant non uniforme (avec effet de peau), la valeur du champ au bord du conducteur n'est pas constante et ne peut donc être imposée.*

On obtient alors le champ magnétique puis, par (3.1), la densité de courant selon l'axe z :

$$J_z(r) = \frac{(1-j)\ I_{total}}{2\pi\delta R_{ext}} \frac{B_Y^1((1-j)\ r_i)\ B_J^0((1-j)\ r) - B_J^1((1-j)\ r_i)\ B_Y^0((1-j)\ r)}{B_J^1((1-j)\ r_e)\ B_Y^1((1-j)\ r_i) - B_J^1((1-j)\ r_i)\ B_Y^1((1-j)\ r_e)}$$

où les B_J^i et B_Y^i sont respectivement des fonctions de Bessel du 1er et 2nd type, d'ordre i et r, r_e, r_i sont les rayons en valeur réduite par rapport à δ[6] :

$$r = \frac{R}{\delta}, r_i = \frac{R_{int}}{\delta}, r_e = \frac{R_{ext}}{\delta}$$

soit :

$$J_z(r) = \frac{(1-j)\ I_{total}}{2\pi\delta R_{ext}} \frac{N_j(r)}{D_j} \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{cases} N_j(r) = B_Y^1((1-j)\ r_i)\ B_J^0((1-j)\ r) - B_J^1((1-j)\ r_i)\ B_Y^0((1-j)\ r) \\ D_j = B_J^1((1-j)\ r_e)\ B_Y^1((1-j)\ r_i) - B_J^1((1-j)\ r_i)\ B_Y^1((1-j)\ r_e) \end{cases}$$

Remarque 13 *Notons ici qu'en fait la résolution de ce problème peut être considérée comme 'semi-analytique', puisqu'elle fait intervenir les fonctions de Bessel. Ces dernières sont définies comme les solutions implicites d'une équation. Par exemple, $B_J^\upsilon(z)$ est une solution de :*

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + \left(z^2 - \upsilon^2\right) y = 0$$

Ainsi, le calcul numérique de ces fonctions se fait soit par résolution des équations associées, soit par valeurs tabulées.

[6] δ est de l'ordre de 9.5 mm dans le cuivre et 12.7 mm dans l'aluminium.

Il est à présent possible de calculer la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur pour une longueur ℓ, en intégrant la densité de courant sur la couronne conductrice :

$$P = \int_{r_i}^{r_e} \rho\ell\, 2\pi\delta^2 r\ |J_z(r)|^2\, dr \tag{3.6}$$

On peut en tirer une expression analytique paramétrée par les rayons intérieurs et extérieurs.

$$P = \frac{\rho\ell I_{total}^2}{2\pi R_{ext}^2}\frac{1}{D_j^2}\left(\text{signe}\left(\frac{N_j(r_e)^2}{D_j^2}\right)\left(N_j(r_e)^2 + D_j^2\right) r_e^2 - \text{signe}\left(\frac{N_j(r_i)^2}{D_j^2}\right) r_i^2\, N_j(r_i)^2\right) \tag{3.7}$$

où la fonction signe(x) est définie par :

$$\text{signe}(x) = \frac{x}{|x|}$$

Malheureusement, il s'avère en pratique que les fonctions de Bessel sont rapidement instables numériquement, ce qui se traduit par exemple dans le cas de (3.7) par un résultat complexe (partie imaginaire non nulle, alors que la puissance ainsi calculée doit rester strictement réelle). L'instabilité provient ici en grande partie de l'erreur de calcul sur les fonctions signe [7].

Par contre, le calcul de $J_z(r)$ par (3.5) reste assez stable pour des rayons inférieurs à 10 fois la valeur de δ, ce qui est amplement suffisant pour les cas que nous considérons[8].

Nous allons à présent pouvoir comparer l'effet de l'évidement d'une barre conductrice massive Linergy, avec la situation équivalente pour une barre cylindrique creuse.

La figure 3.21 montre l'évolution de la puissance dissipée par la barre lorsque l'on retire de la matière conductrice au 'centre' de la barre (calcul par la méthode PEEC) : on cherche à retirer de la matière au minimum de densité de courant, ce qui est aisé au départ, mais devient problématique quand la taille du trou réalisé déplace le centre de masse de la section. Cette évolution est comparée à une barre cylindrique équivalente (même section de conducteur), pour laquelle le calcul analytique est possible (le rayon extérieur est fixé, on agit sur le rayon intérieur).

Cette étude est très riche en informations :

- On constate un très bon accord entre les courbes correspondant au cas analytique et à notre barre extrudée (modélisée avec la méthode PEEC). Bien que de forme sensiblement différente, la barre étudiée se comporte comme une barre cylindrique que l'on extruderait. Un désaccord apparaît seulement lorsque, comme le montrent les figures superposées au graphique, il n'est plus physiquement possible de centrer le 'trou de matière' au centre du puits de densité de courant.
- Lorsque l'on retire de la matière, la puissance dissipée augmente, mais du fait de l'effet de peau, on augmente l'efficacité de la barre, par rapport à la surface de conducteur restante. La courbe correspondant au cas réel reste nettement sous le cas DC (courbe en pointillés), ce qui signifie que l'on a une possibilité d'améliorer l'efficacité de la barre.

[7] Les termes N_j et D_j sont évalués avec trop d'incertitude pour une bonne mesure de leur argument, d'où une erreur sensible sur la fonction signe. L'évaluation des pertes se faisant par la différence de termes souvent trés proches, on obtient un résultat incohérent.

[8] Pour fixer les idées : en faisant l'hypothèse d'une répartition uniforme du courant, $I_{total} = J_Z \cdot S = J_Z \cdot \pi \cdot \delta^2 \cdot r^2$. Les règles usuelles de dimensionnement conseillent une densité de courant variant entre 1 et 5 $\mathrm{A.mm^2}$. Ainsi, pour un courant total de 2000 A, avec un conducteur en cuivre, le rayon d'une barre pleine adaptée varie de 1.2 à 2.7 δ.

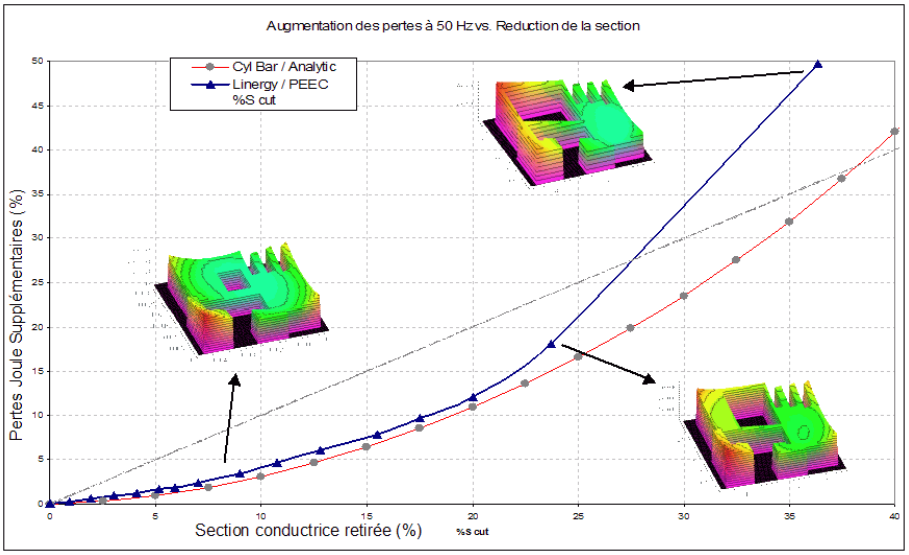


FIG. 3.21 – Impact d'un évidement des barres massives - gain matière en % vs pertes supplémentaires en %. La courbe en pointillés représente l'évolution que l'on aurait eue en courant continu, c'est-à-dire 1% de matière en moins crée 1% de pertes supplémentaire.

Cette étude montre qu'il existe une marge d'amélioration de l'efficacité des barres massives. Ici, elle se fait au détriment de la puissance dissipée, puisque l'on n'a pas gardé constante la section conductrice.

L'intérêt majeur de la comparaison avec le cas analytique est de permettre une exploration facile du domaine de variation des paramètres géométriques (y compris pour le rayon extérieur).

La figure 3.22 montre l'évolution des pertes Joule ramenées à 1A transité (P est directement proportionnel à I^2), pour 1 mètre de barre, avec les pourcentages d'évolution dans le domaine de variation des paramètres qui sont :

- la section de matériau conducteur ;
- le facteur d'extrusion : c'est le rapport entre rayon intérieur et rayon extérieur (lorsqu'il est égal à 1, la barre est pleine).

Pour une évolution à section constante, l'augmentation du facteur d'extrusion implique que la barre pleine devient une couronne dont le rayon moyen augmente.

La figure 3.22 permet ainsi d'envisager différents scenarii d'optimisation : ainsi, partant du point équivalent aux barres Linergy, on peut, en restant dans des dimensions 'raisonnables' :

1. conserver la puissance dissipée, et extruder la barre (son périmètre extérieur va croître), le gain escomptable en matière (réduction de la section) est de l'ordre de 15% ;
2. conserver la section, et extruder la barre, le gain en pertes (diminution des pertes Joule) peut atteindre 15% ;
3. envisager tout autre scénario qui permet d'optimiser le coût énergétique de la barre, en prenant en compte à la fois le coût de production (relié au coût matière) et le coût à l'utilisation. Ce dernier aspect sera évoqué à nouveau dans la partie 5.

Cette étude démontre la possibilité d'améliorer l'efficacité énergétique de liaisons de puissance massives. De plus, on constate qu'il est possible théoriquement d'atteindre le meilleur compromis sur les différents paramètres, puisque l'on dispose de plusieurs degrés de liberté.

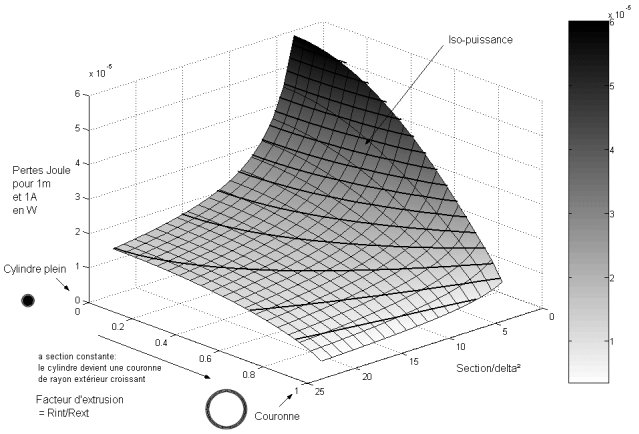


FIG. 3.22 – Evolution de la puissance en fonction des paramètres géométriques - Etude analytique

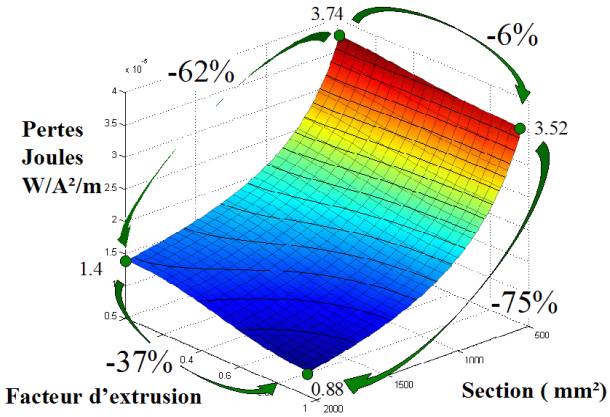


FIG. 3.23 – Scenarii possibles d'optimisation : étude analytique du cylindre creux. Lorsque le facteur d'extrusion tend vers 1, on tend vers une couronne infiniment mince (ce cas limite rejoint celui du ruban) dont le rayon augmente. Avec une section maximale, ce cas représente le minimum. Il n'est jamais atteignable, puisque l'on est toujours limité dans les dimensions extérieures de la barre.

3.4 Optimisation de la forme des conducteurs massifs

Dans le paragraphe précédent, on s'est attaché à montrer l'existence d'une marge d'optimisation accessible en travaillant sur la section des conducteurs massifs. Le procédé employé était purement manuel, ce qui était possible de part la simplicité du cas considéré : on tentait de 'suivre' le minimum de densité de courant. Cependant, la figure 3.21 montrait déjà qu'il est impossible de poursuivre le processus lorsque les modifications sont suffisantes pour modifier totalement le comportement de la barre (déplacement du centre de masse).

De plus, on s'est contenté de retirer de la matière d'une section existante, ce qui peut dans un premier temps servir à décliner une gamme à partir du calibre le plus élevé, mais n'est guère satisfaisant en terme d'optimisation. En effet, on arrive à améliorer le 'rendement' du cuivre investi, mais au détriment du niveau de pertes, ce qui n'est pas forcement admissible.

Il serait donc nécessaire de pouvoir réinvestir une partie de la matière 'économisée' de manière à conserver un niveau de pertes constant, ou plus généralement à satisfaire tout arbitrage entre matière et pertes admissibles. L'automatisation recherchée va nous conduire à un problème d'optimisation.

Le procédé mis en œuvre dans le paragraphe précédent est manuel. Une réelle optimisation doit permettre d'obtenir des topologies originales, non intuitives.

3.4.1 Nécessité d'une optimisation topologique

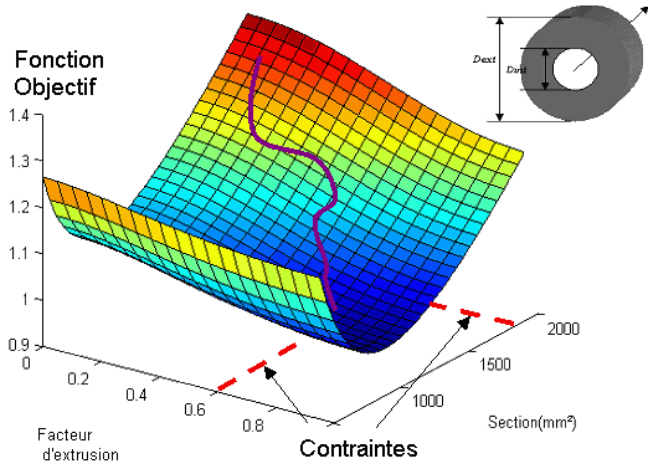


FIG. 3.24 – Illustration d'une optimisation paramétrique classique.

Si l'on reprend l'analogie avec la barre cylindrique, il est aisé de définir un problème classique d'optimisation. On s'est contenté jusqu'ici de faire varier le rayon intérieur, à périmètre extérieur constant. Afin d'optimiser un compromis entre pertes et coût matière, on va jouer sur les deux paramètres R_{ext} et R_{int} (ou, ce qui est équivalent, sur le facteur d'extrusion k et la section S). On va alors minimiser une fonctionnelle de 'coût' (traduisant une 'performance') :

$$\min_{k,S} f = \min_{k,S} (\alpha \cdot P_j + \beta \cdot S)$$

avec éventuellement des contraintes extérieures (liées au process de fabrication ou autres) :

$$\begin{aligned} k &< k\,\max \\ S &< S\,\max \end{aligned}$$

On définit alors un problème d'optimisation sous contraintes simple que l'on peut illustrer sur la figure 3.24.

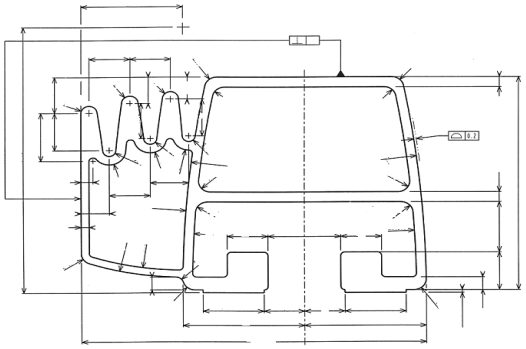


FIG. 3.25 – La description d'une forme extrudée complexe nécessite la définition de trés nombreux paramètres.

Dans ce cas précis, on connaît une écriture analytique de la fonction objectif, qu'il est aisé de dériver pour utiliser des algorithmes déterministes de type gradient.

Comme on l'a vu précédemment, cette approche trouve vite une limite puisque les sections que l'on considère sont rapidement différentes de formes basiques. Ainsi, la section présentée sur la figure 3.25 introduit plus de 30 paramètres, sans pour autant proposer une définition universelle de section.

3.4.2 Optimisation topologique et innovation

La définition de la topologie de la section par un nombre fini de paramètres conduit donc à figer cette dernière, ce qui est préjudiciable en terme d'innovation, puisque l'on doit se contenter de variations des frontières d'une forme existante.

La conception doit en effet trouver l'équilibre entre deux aspects :

- l'existant est souvent la capitalisation d'un certain nombre de règles de dimensionnement éprouvées.
- les habitudes associées à l'existant sont un frein à l'innovation.

Dans le cas de jeux de barres, l'approche présentée ici est en rupture avec les méthodes de conception classique, ce qui exclut de retrouver dans l'existant (sauf heureux hasard, et les exemples traités ont prouvé le contraire) la prise en compte des effets induits en amont.

Par conséquent, il est légitime de remettre en cause la topologie même des sections de conducteurs, afin de s'affranchir de toute idée préconçue sur la forme optimale.

L'essence même de l'optimisation de topologie est de fournir un cadre d'optimisation très général, qui fait le moins de présupposés possibles, tant sur la définition des contraintes, que sur la solution attendue. On cherche en quelque sorte à repartir de la feuille blanche. La notion de forme paramétrée devra donc être laissée de côté.

3.4.3 Définition du problème d'optimisation

L'approche qui va être développée ici est très largement inspirée des techniques d'optimisation mises en oeuvre dans le cadre de la conception mécanique. En effet, on trouve dans la littérature de nombreux exemples d'optimisation de la forme de pièces pour maîtriser leur tenue mécanique, ou les fréquences de résonnance. [Eschenauer 01] fait une synthèse de ce genre d'applications. Il s'agit typiquement d'évider une pièce pour limiter son poids en plaçant les congés de matière de manière à limiter les accroissements locaux des contraintes [Missoum 99].

Même si la physique associée n'est pas directement comparable[9], l'analogie avec le retrait de matière dans les barres massives nous a largement incité à explorer cette voie.

Topologie ?

L'approche qui a été proposée pour le traitement automatisé des sections complexes des conducteurs va nous servir de base. Afin d'avoir une description cohérente avec la méthode de modélisation qui va être utilisée pour évaluer la performance de chaque topologie, l'optique ici va être celle du placement de matière. On a vu dans la partie 3.3.2 que toute section de conducteur pouvait être décrite sur une grille uniforme (dont la finesse est reliée au maillage PEEC).

Le problème d'optimisation peut donc s'exprimer comme suit :

$$\min_{(p_1,\ldots,p_n)} f$$

où les p_i sont n états binaires traduisant la présence (1) ou l'absence (0) de matière sur chaque élément de la grille (voir figure 3.26) et f la fonction objectif, qui peut être la minimisation des pertes ou un compromis plus élaboré.

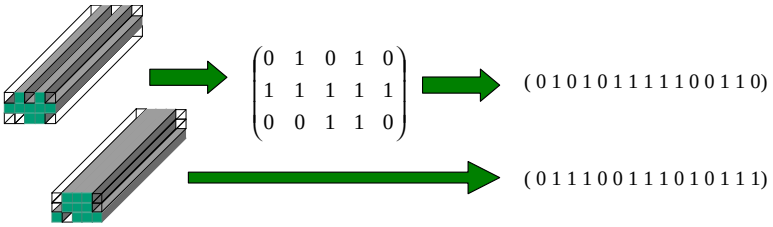


FIG. 3.26 – Définition d'une topologie de section

Chaque topologie de conducteur est donc simplement représenté par un n-uplet de binaires, dont la longueur est fixée par la taille de la grille de recherche.

L'intérêt ici est que la finesse de définition de la topologie est directement reliée à la précision de l'évaluation de la fonction objectif.

Contraintes géométriques

La grille présentée ici est de forme rectangulaire par souci de clarté, mais il est évident qu'il s'agit déjà d'un présupposé, que nous placerons dans la catégorie des contraintes. Les contraintes purement géométriques peuvent donc être faites directement sur la définition de

[9] Dans le cadre de l'optimisation de structures mécaniques, on résout (en statique) un équilibre $\operatorname{div}\sigma + f = 0$ où σ est le torseur de contraintes et f les efforts de volume. L'équivalent en électromagnétisme serait un problème d'électrostatique, où on résout $\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) + Q = 0$, avec V le potentiel électrique et Q la charge de volume. Il s'agit cependant d'un problème purement fictif, puisque Q est toujours nulle pour les diélectriques.

l'espace de recherche. La figure 3.27 montre un exemple de définition d'un espace de recherche rectangulaire restreint en fait aux zones noires, puisque certains blocs se voient imposer ou interdire la présence de matière (pour prévoir un système de raccordement par exemple sur la partie droite et une contrainte de proximité avec une autre barre sur le coin supérieur gauche).

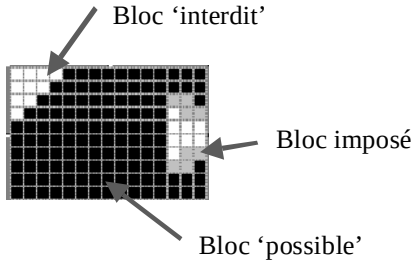


FIG. 3.27 – Définition des contraintes

Ainsi, l'optimisation ne portera que sur les éléments dont l'état (conducteur ou non) n'est pas présupposé, ce qui revient à dire que l'espace de recherche est directement donné par les n éléments restant indéterminés, donnant un espace de recherche de taille 2^n, sans contrainte géométrique supplémentaire. Cette description du problème est intimement liée à la façon dont on va coupler la méthode de calcul à l'algorithme d'optimisation, c'est pourquoi cet aspect sera détaillé dans la partie 3.6.

3.5 Présentation des méthodes d'optimisation adaptées

Nous avons donc défini un problème d'optimisation globale [Berthiau 01], [Gotzig 97], [Grossmann 96], combinatoire et de complexité importante.

Un problème combinatoire peut être traité de deux façons :

- Soit par recherche directe, exacte, ce qui s'apparente à énumérer et évaluer toutes les solutions possibles. Cette solution n'est pas envisageable ici, car elle nécessiterait des temps de calculs inacceptables.
- Soit par une recherche incomplète (et donc approchée) mais potentiellement plus efficace.

Dans cette deuxième catégorie, on trouve les méthodes dites *méta-heuristiques* [Hao 99], qui permettent de définir une *heuristique* pour résoudre un problème d'optimisation. La notion d'heuristique s'oppose à la notion d'algorithme dans la mesure ou il s'agit d'effectuer un apprentissage qui va permettre de tendre vers une solution en tirant le bénéfice des enseignements du passé.

On distingue généralement dans les méthodes méta-heuristiques d'optimisation globale :

- les méthodes travaillant sur l'amélioration d'une solution unique, telles que les méthodes type :
  - recuit simulé,
  - recherche tabou ;
- les méthodes visant à faire progresser un ensemble de solutions (ou population), dans lesquelles on citera essentiellement :
  - les colonies de fourmis,
  - les algorithmes génétiques.

Toutes les méthodes évoquées ont une caractéristique commune : l'absence de garantie de résultat. En effet dans la majorité des cas, il n'existe pas de preuve théorique permettant de garantir la convergence. Tous ces algorithmes ont été employés avec succès dans des applications variées. Toutes sont a priori des méthodes génériques, mais nous allons voir que leur caractéristiques les rendent dépendantes de certains réglages, dont l'ajustement n'est pas trivial.

Nous allons dans un premier temps passer en revue les méthodes pour mettre l'accent sur les points délicats de mise en oeuvre de chacune. Ce paragraphe ne se veut nullement exhaustif sur les méta-heuristiques, car cela n'aurait pas grand intérêt. En effet, chaque application nécessite une adaptation (ou au moins un réglage) spécifique de la méthode d'optimisation.

Notons également que ces algorithmes n'acceptent généralement pas de trou (par exemple un paramètre contraint sur un intervalle du type $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$ est impossible) dans l'espace de recherche ni de contraintes d'égalité.

Nous allons simplement tenter de dégager une méthode aisément adaptable à nos applications.

3.5.1 Colonies de fourmis (Ant system)

Il s'agit de la plus récente des méthodes citées ici (1992 pour la première implémentation sur le problème classique du voyageur de commerce) [Dréo 03].

Comme son nom l'indique, cette méthode imite le fonctionnement d'une colonie de fourmis qui explore un domaine à la recherche de nourriture. L'idée est d'exploiter la capacité naturelle d'une population de fourmis à résoudre des problèmes complexes. La colonie est auto-organisée, et apprend collectivement. Tout repose sur la communication par phéromones, que l'on peut décrire comme un marqueur à durée de vie limitée. Ainsi, au cours de ses déplacements, chaque

individu va laisser une trace de son passage, ce qui permet de capitaliser l'information pour toute la population. Cependant, cette information est volatile, ce qui permet de laisser une place à l'exploration du domaine.

Nous n'irons pas plus loin dans la description de cette approche, car c'est de très loin la moins évidente à mettre en oeuvre dans le cas qui nous intéresse (L'application typiquement présentée est la recherche d'un itinéraire optimal, que l'on associe aisément au comportement d'une colonie de fourmis et qui renvoie à l'optimisation des flux dans les chaînes logistiques par exemple. L'association à l'optimisation topologique est bien moins évidente ...).

3.5.2 Recherche tabou

Nous remontons à présent la chronologie : les algorithmes de recherche tabou sont attribués simultanément et indépendamment à [Glover 86] et [Hansen 86].

La recherche tabou est une technique d'exploration d'arbre de choix par élimination de solutions. La figure 3.28 donne le principe de base d'une recherche tabou. On se déplace dans l'espace des solutions par des améliorations locales de la solution qui est modifiée aléatoirement. Les mouvements (modification du jeu de paramètres) améliorant la performance de la solution sont effectués et mémorisés dans une liste dite 'tabou' afin d'interdire leur répétition. Cette méthode travaille sur un seul individu.

Son originalité réside dans la gestion de la liste tabou, qui a une taille limitée et est généralement de type FIFO (First In First Out). Ainsi, différentes méthodes de gestion de cette liste à court / moyen / long terme existent. La gestion de cette liste est fondamentale, car c'est le fait d'oublier en certaines circonstances qu'une modification a déjà été tentée qu'il est possible d'explorer tout l'espace des solutions.

La principale difficulté est donc de garantir que l'algorithme ne va pas se fermer de portes abusivement.

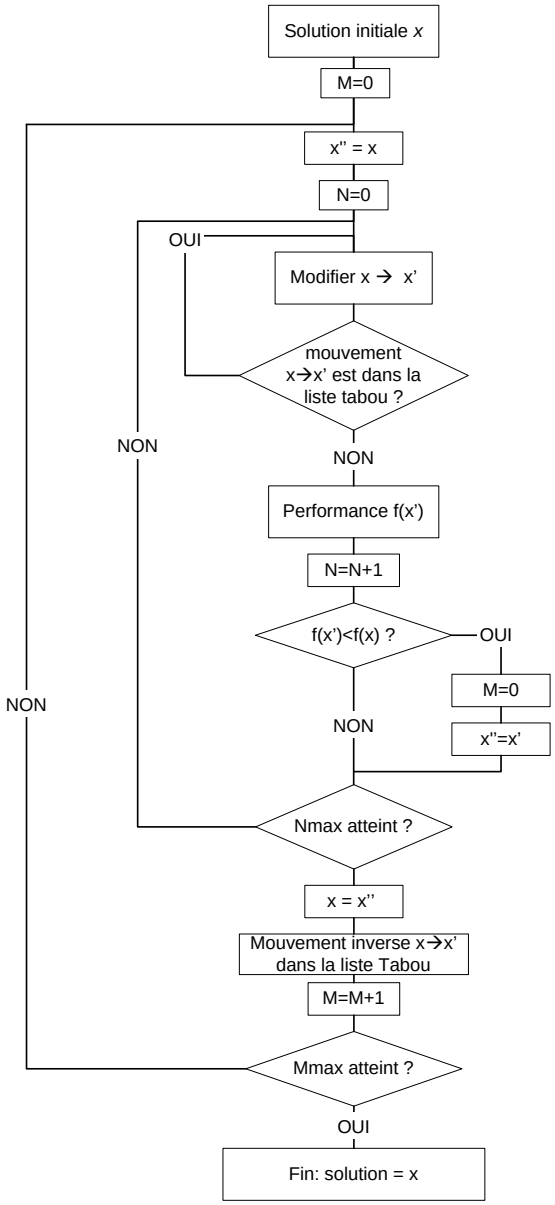


FIG. 3.28 – Principe d'une recherche tabou

3.5.3 Recuit simulé (Simulated Annealing)

La technique du recuit simulé est certainement l'alternative la plus prometteuse à l'emploi des algorithmes génétiques dans notre cas, probablement parce qu'elle est basée sur l'imitation d'un phénomène physique. Cette méthode, attribuée à [Kirkpatrick 83], copie la solidification d'un métal en fusion lors d'une phase de recuit.

Lors du refroidissement, la structure de la matière va tendre vers des états de moindre énergie. La performance d'une solution est assimilée à l'énergie du système. Au cours du refroidissement, le système va subir des perturbations qui peuvent le faire passer par des états de plus haute énergie. Le critère d'acceptation d'une solution perturbée repose sur une loi de probabilité de Boltzmann. Lorsque l'on perturbe la solution x stable, on fait varier l'énergie du système de $\Delta f = f(x') - f(x)$. Deux cas de figures sont envisageable :

- Si $\Delta f < 0$, la perturbation est acceptée d'emblée
- Si $\Delta f > 0$, la perturbation pourra être acceptée avec une probabilité :

$$p(x') = e^{\left(-\frac{\Delta f}{T}\right)}$$

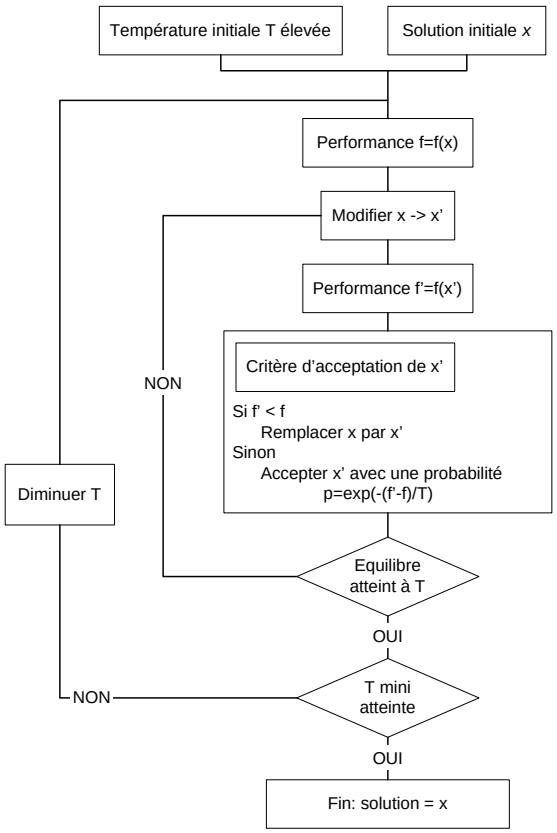


FIG. 3.29 – Principe de base du recuit simulé

Comme le montre la figure 3.29, la baisse de la température va être au coeur de l'algorithme. Une seule solution est considérée. La température diminue par pas successifs. A chaque étape, on cherche à stabiliser l'état de la structure. Le critère d'acceptation permet l'exploration de l'espace de recherche. A contrario, la température finale permet de régler très finement le niveau de précision de la solution, puisque qu'elle conditionne l'acceptation d'états 'approchés'.

Les difficultés de mise en oeuvre de cette méthode résident essentiellement au niveau du schéma de décroissance de la température. Il doit permettre une stabilisation suffisante à chaque étape, sans limiter l'exploration du domaine qui est aussi régie par la température initiale. Le réglage de la température finale est également critique, notamment en terme de lenteur de convergence.

3.5.4 Algorithmes Génétiques

Les algorithmes génétiques (A.G.) sont les plus anciens de cet état de l'art. Ils ont été introduits par [Holland 75].

Ce type d'algorithme repose sur l'imitation de l'évolution des espèces, basée sur la survie du mieux adapté. L'A.G. travaille sur une population, dont chaque individu est caractérisé par un ensemble de gènes. Ces gènes représentent un codage des paramètres du système à optimiser. La capacité de chaque individu à survivre, et à se reproduire, dépend de son adaptation à l'environnement – de sa performance en terme de fonction objectif.

Ici, le codage du problème sous forme de gènes apparaît assez naturellement : partant de la discrétisation en subdivisions élémentaires d'une section, on obtient une grille constituée d'un nombre fini d'éléments, pouvant chacun porter de la matière ou non. Ceci est directement traduit en un mot binaire – i.e. le code génétique d'un individu.

Ainsi, avec une population de départ aléatoire (on ne fait aucune hypothèse sur la solution), l'enchaînement des générations avec les croisements (les meilleurs individus croisent leurs gènes pour donner de nouveaux individus potentiellement plus performants), ou les mutations (spontanément, les 'enfants' font apparaître des gènes originaux) doit fournir la solution présentant la meilleure performance en permettant une exploration de l'espace de recherche. La figure 3.30 représente ce cercle 'vertueux' d'amélioration.

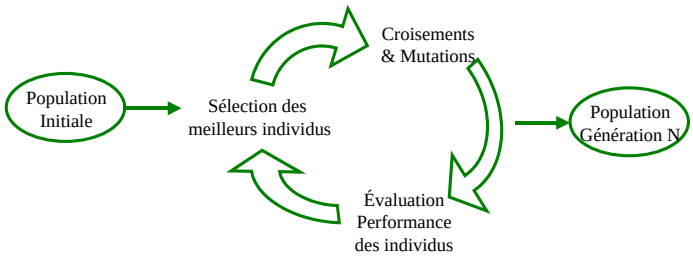


FIG. 3.30 – Principe de base des Algorithmes Génétiques

Ce type de méthode est relativement simple à mettre en oeuvre. [Gen 00] en présente les bases algorithmiques. Comme cela a déjà été mentionné, il n'existe pas de justification théorique garantissant la convergence. On notera cependant que [Whitley 94] propose une formalisation mathématique des opérateurs de croisement et de mutation en vue de l'étude de la vitesse de convergence.

De très nombreuses (innombrables ?) variantes de techniques de croisement existent. Etant donné que c'est la méthode qui a été retenue dans le cadre de ce travail, on se reportera directement à la section suivante pour une description plus détaillée. Nous en profiterons pour évoquer les alternatives aux solutions retenues. La description des différentes étapes sera faite ultérieurement, car elle est assez naturelle dans le cadre d'optimisation topologique définie précédemment.

Les algorithmes génétiques ont déjà été largement employés sur des aspects mécaniques [Eschenauer 01], [Yu 03]. On voit à présent également apparaître d'autres types d'applications couplant les algorithmes génétiques aux méthodes éléments finis, telles que l'optimisation des surfaces des paliers à air [Zhang 03] voire des applications électromagnétiques, c'est-à-dire le design des contours de pièces ferromagnétiques. On cherche à optimiser la forme des rotors dans les moteurs DC-brushless pour réduire les vibrations dues aux variations de couple ([Yoo 00] et [Yoo 02]), ou les entrefers dans les actionneurs non-linéaires ([Wang 02] et [Cavarec 03]).

On gardera cependant à l'esprit que l'optimisation se limite alors à la forme des encoches du rotor pour éviter les saturations locales.

Ces optimisations sont cependant encore très fortement limitées par des coûts de calcul importants (de l'ordre de 140 heures par optimisation dans [Zhang 03]). Ceci est dû au fait que la présence de matière ne peut être gérée directement de façon binaire, car elle impose des déplacements des frontières des pièces polaires, et donc des conditions aux limites. Il est alors nécessaire de recourir à des artifices tels que des matériaux fictifs pouvant prendre des états intermédiaires entre air et fer ou à des fonctions de description de la topologie [De Ruiter 01].

Remarque 14 *Les algorithmes génétiques ne sont pas réservés à l'optimisation de paramètres discrets. L'optimisation de paramètres continus se fait au travers d'un codage adapté des jeux de paramètres en gènes [Saludjian 92].*

3.5.5 Choix d'une méthode

Ce rapide tour d'horizon des méta-heuristiques ne permet pas à lui seul de trancher sur l'intérêt d'une méthode face aux autres. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes orientés vers les algorithmes génétiques, car cette catégorie d'algorithmes présente une facilité de couplage avec la méthode PEEC que nous allons développer plus loin. Il n'était bien évidement pas possible d'affirmer a priori l'efficacité d'un tel couplage, mais les exemples cités dans le domaine de la mécanique des structure et les machines électriques présentent des analogies suffisantes avec notre problème d'optimisation pour justifier l'expérience.

D'autre part, on aura pu voir que les méthodes de réglage des méta-heuristiques sont délicates. L'intérêt des algorithmes génétiques est de ne présenter qu'un nombre limité de 'potentiomètres' de réglage.

Les deux premières méthodes citées paraissent moins intéressantes. Les méthodes type 'colonies de fourmis' sont difficilement applicables en l'état. Les méthodes 'tabou' paraissent quant à elles inadaptées. Dans notre cas, il est difficile d'envisager une solution comme le résultat d'une série de choix. En effet, nous verrons par la suite que l'espace de recherche est probablement trop plat pour que l'on obtienne un optimum global via un seul individu.

Si l'on devait proposer une alternative aux algorithmes génétiques a posteriori, on se tournerait probablement vers les méthodes de recuit simulé. D'une part parce qu'elles travaillent également sur une population de solutions ; et d'autre part parce que le principe physique du recuit semble intuitivement 'coller' à une distribution la plus homogène possible de matière. Reste cependant la question du schéma de décroissance de la température qui est probablement la principale raison pour laquelle cette voie n'a pas été explorée.

Le recuit pourrait également avoir un intérêt en phase d'affinage des solution, dont il sera question au paragraphe 3.7.3.

Remarque 15 *L'ensemble des méthodes citées ci-dessous fait appel à la notion de tirage aléatoire. Dans le cadre de l'implémentation de ces algorithmes, il est nécessaire de faire appel à des générateur 'pseudos-aléatoires' uniformes, connus sous le nom de fonctions 'ranf', 'rand' ou 'Random' [L'Ecuyer 05]. Si les fonctions disponibles dans des outils de calcul scientifique de type Matlab donnent des distributions convenables, il convient de rester vigilant sur ce point. Les simulations Monte-Carlo mettent plus facilement en évidence les limites de ces générateurs.*

3.6 Couplage PEEC - Algorithmes génétiques

L'utilisation des algorithmes génétique est assez répandue. Suffisamment pour que l'on trouve en ligne des implémentations génériques, par exemple sous forme de toolbox pour Matlab [Houck 95]. Dans notre cas, il a été préférable de développer un algorithme génétique dédié. L'emploi d'un codage binaire le rend extrêmement simple. Cela permet de maîtriser au mieux le couplage entre optimiseur et modèle d'évaluation, notamment au niveau des opérateurs d'évolution. On préserve ainsi l'aspect 'naturel' de cette association.

3.6.1 Principe de couplage

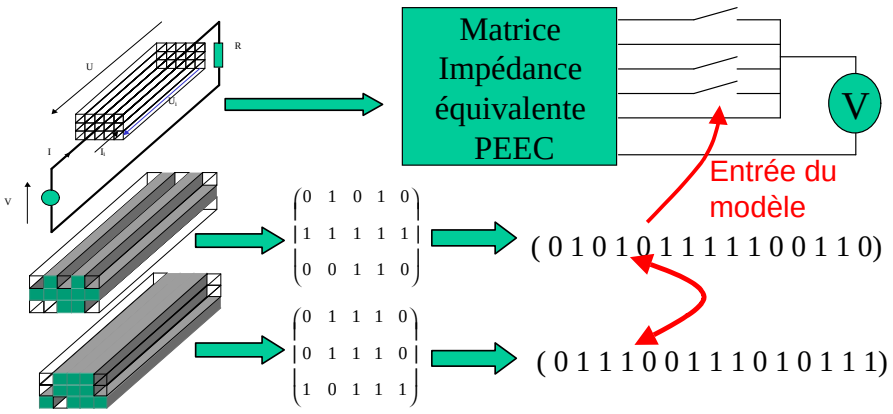


FIG. 3.31 – Couplage du modèle PEEC avec l'algorithme génétique.

Le couplage entre l'algorithme d'optimisation et le modèle de calcul est assez évident et naturel. Partant de la grille définie comme espace de recherche pour l'optimisation, toute topologie peut être décrite par un génome qui n'est autre qu'un vecteur de binaires traduisant la présence ou non de matière sur chaque élément associé.

Ce génome va être utilisé directement comme entrée du modèle PEEC qui va servir à évaluer la performance de chaque individu (ou topologie). L'originalité vient du fait que ce procédé va permettre de limiter considérablement le coût d'évaluation de chaque individu.

En effet, on a vu qu'une modélisation par la méthode PEEC comprenait 3 étapes majeures :

1. Maillage des conducteurs
2. Calcul des éléments d'un schéma électrique équivalent (obtention d'une matrice impédance donnant les couplages entre tous les éléments du maillage)
3. Résolution du circuit électrique équivalent et obtention des grandeurs locales (densités de courant) puis globales (pertes, courants totaux, etc ...)

L'expérience montre que le temps de calcul global est très majoritairement consommé par :
– le calcul de la matrice impédance pour moitié ;
– la résolution du circuit pour l'autre moitié.

Comme présenté sur la figure 3.31, une fois la grille d'optimisation figée, la différence entre deux topologies peut se faire au moment de la résolution circuit. En effet, il est possible de calculer préalablement la matrice impédance pour la grille complète. Les branches ne portant pas de matière sont ensuite tout simplement 'débranchées' lors de l'évaluation des courants,

ce qui est sans conséquence sur la qualité du résultat, puisque les branches déconnectées ne voient passer aucun courant et sont donc sans influence sur les autres.

On divise ainsi quasiment par 2 le coût de calcul global pour une optimisation, puisque la matrice impédance est évaluée une seule fois, quel que soit le nombre d'individus évalués par la suite.

Utilisation de solveurs spécifiques pour l'accélération

La résolution du schéma électrique équivalent reste cependant une étape coûteuse en terme de temps de calcul. On utilise en effet un ensemble de branches électriques associées aux mailles dans les conducteurs et couplées par une matrice impédance avec des composants extérieurs simples tels que des sources de tension et des résistances de charge qui permettent de simuler le fonctionnement des jeux de barres dans le réseau. Les connexions se font par des noeuds électriques. Sans rentrer dans le détail des calculs [Guichon 01a], on peut facilement comprendre que la résolution de ce schéma nécessite deux étapes :

- la recherche d'un jeu de mailles indépendantes qui permet d'écrire un nombre suffisant d'équations linéaires ;
- la résolution du système équivalent.

Cette manière de procéder a l'énorme avantage d'être généralisable, puisqu'il existe des algorithmes de recherche des mailles indépendantes très efficaces. Cependant cette étape représente 50% du coût de calcul de la résolution de circuit.

D'autre part, cette étape n'est pas 'réutilisable' dans la mesure où elle est générique : en effet sur le cas présenté sur la figure 3.32, qui comprend une barre maillée, une source et une charge, on comprend bien qu'un algorithme générique de recherche des mailles indépendantes a toutes les chances de définir des mailles sur deux subdivisions du conducteur.

Dans le cadre de l'optimisation, on peut être amené à supprimer une des branches de la maille, ce qui rend alors le jeu d'équations caducs.

Par exemple pour 2 subdivisions, on peut écrire le jeu d'équations :

$$\begin{aligned} V &= U_1 + R \cdot (I_1 + I_2) \text{ soit } V = Z_1 I_1 + Z_{12} I_2 + R \cdot (I_1 + I_2) \\ U_1 &= U_2 \text{ soit } Z_1 I_1 + Z_{12} I_2 = Z_2 I_2 + Z_{21} I_1 \end{aligned}$$

Il est alors impossible de 'débrancher' la subdivision 1, car dans ce cas $I_1 = 0$, d'où $I_2 = 0$ également.

Inversement, en choisissant les mailles de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V &= U_1 + R \cdot (I_1 + I_2) \text{ soit } V = Z_1 I_1 + Z_{12} I_2 + R \cdot (I_1 + I_2) \\ V &= U_2 + R \cdot (I_1 + I_2) \text{ soit } V = Z_2 I_2 + Z_{21} I_1 + R \cdot (I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Supprimer une branche ($I_i = 0$) ne pose aucun problème.

Cette approche est développée et généralisée dans l'annexe B, avec quelques configurations courantes (monophasé, triphasé avec ou sans neutre, etc ...). Ainsi, pour le cas monophasé, on peut, par une écriture astucieuse des équations de circuit, arriver à expliciter la solution sous une forme du type :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \left(\left[\{([Z] + [R]) \odot [Mask]\} + R \cdot [Id_n] \odot \overline{[Mask]} \right]^{-1} \cdot [V] \right) \odot [mask]$$

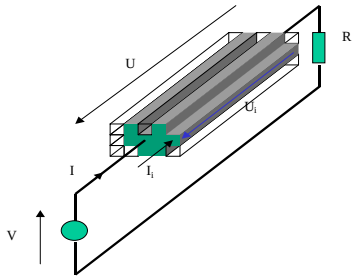


FIG. 3.32 – Cas simple monophasé.

qui donne une écriture directe des courants par inversion (résolution) directe d'un système linéaire dont l'écriture est immédiate à partir de la matrice impédance $[Z]$ et d'un opérateur de masquage (L'opérateur $\odot$ est une simple multiplication terme à terme de matrices de tailles identiques) :

$$[Mask] = [mask] \times [mask]^T \text{ avec } [mask] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notons ici que le vecteur de masquage n'est autre que le génome sorti de l'algorithme.

Il est ainsi possible de réduire au strict minimum le coût de l'évaluation de chaque individu. Cependant, l'emploi de ces solveurs spécifiques fait perdre son caractère générique à la méthode. C'est pourquoi la résolution par recherche des mailles indépendantes reste indispensable, notamment parce qu'il n'est pas toujours possible d'arriver à ce genre d'écriture.

3.6.2 Présentation de l'algorithme

La figure 3.33 donne le principe de l'algorithme mis en œuvre. Il travaille avec une population de taille constante, ce qui n'est pas obligatoire, puisque d'autres exemples réduisent la population quand sa 'diversité' diminue. Ici, le parti a au contraire été pris de maintenir autant que possible une diversité qui permet à l'algorithme de ne pas stagner au fil des générations.

Cet algorithme a été implémenté de la manière la plus 'basique' possible, pour être le plus générique possible par rapport au couplage qui est fait avec le modèle d'évaluation de la performance.

Ainsi, on a vu que le génome était l'entrée directe du modèle PEEC. Or, il est tout à fait envisageable d'optimiser la forme d'un conducteur dans un système en contenant plusieurs, qui seront maillés. De même, on a évoqué la possibilité d'imposer la présence de matière. Tous ces facteurs reviennent à restreindre l'espace de recherche de l'algorithme, ce qui n'est pas souhaitable en général (les algorithmes génétiques sont réputés peu enclin à l'optimisation sous contrainte). Cette spécificité a été prise en compte au niveau des opérateurs comme cela sera détaillé dans ce qui suit.

L'intervention du hasard, au travers de tirages aléatoires est présente aussi souvent que possible, de manière à favoriser le caractère innovant de l'algorithme. Les tests de mise au point ont également montré que le hasard est un bon garant de la convergence. Nous aurons l'occasion de discuter ce point dans le paragraphe 3.6.2 concernant le réglage de l'algorithme.

Les étapes importantes vont à présent être détaillées.

Remarque 16 *L'opération de masquage est spécifique au codage retenu ici et sera explicité dans le détail de la mutation (voir section 3.6.2).*

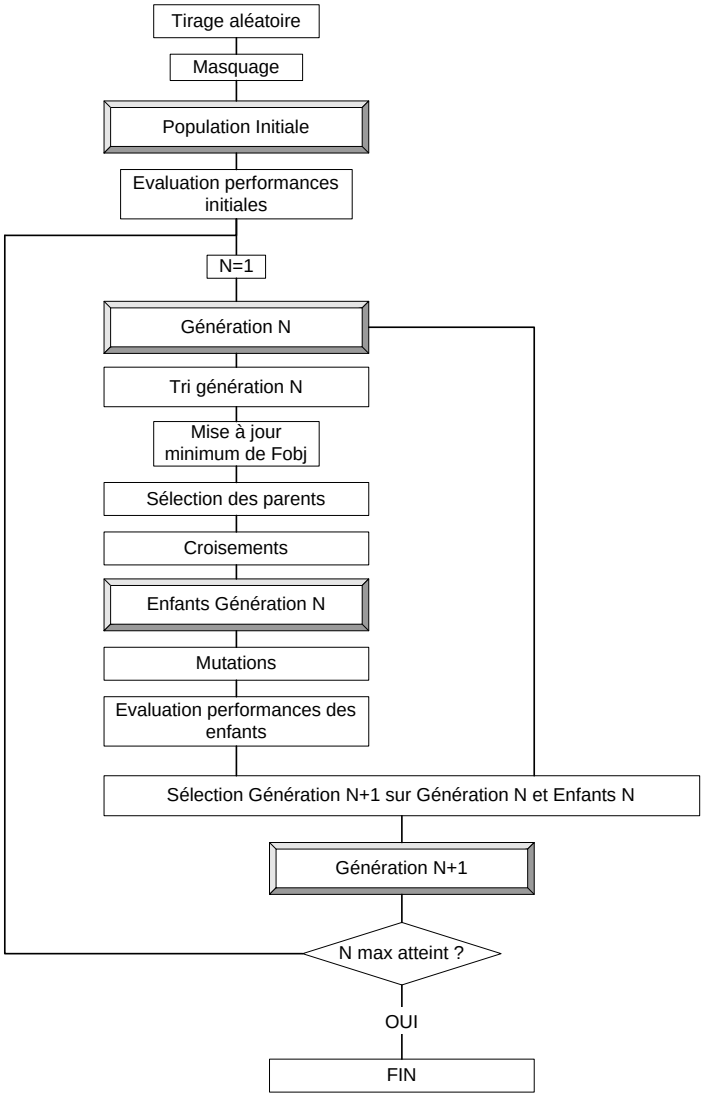


FIG. 3.33 – Principe de l'Algorithme Génétique retenu

Sélection

C'est ici qu'intervient l'adaptation des individus dans le processus d'évolution. Le mode de sélection retenu est le tournoi simple. Etant donné la simplicité du procédé choisi ici, on devra avoir une population contenant un nombre pair d'individus, ou qui le deviendra après le premier processus de croisements. A chaque génération de N (pair) individus, N/2 'parents' sont sélectionnés. Après croisement, chaque couple de parents donnera systématiquement deux nouveaux individus (ou 'enfants'), soit au total N nouveaux individus.

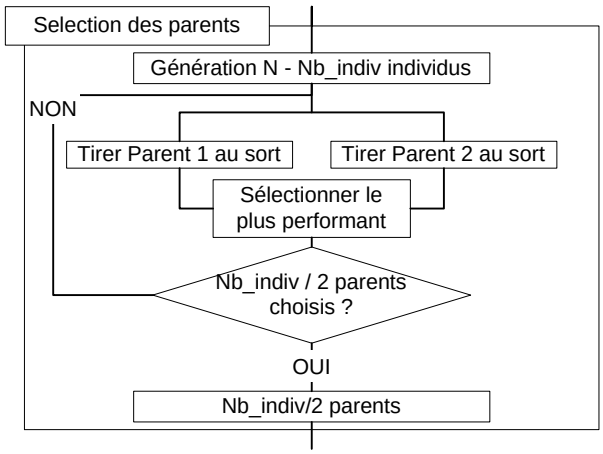


FIG. 3.34 – Sélection des parents par tournoi simple

C'est cette étape qui fait la force en terme d'exploration de l'espace de ce type d'algorithme. En effet, cette étape répond à deux critères :

- Les mieux adaptés doivent avoir une plus grande probabilité que les autres de transmettre leurs gènes, avant de concentrer les recherches sur les zones prometteuses de l'espace de recherche.
- Des individus de moindre performance doivent aussi pouvoir transmettre leurs caractéristiques pour maintenir la diversité de la population, et explorer l'espace de recherche dans son ensemble.

Chaque parent peut avoir été sélectionné plusieurs fois. Un parent peut d'ailleurs être sélectionné deux fois pour le même tournoi, ce qui le qualifie d'office pour engendrer la génération suivante.

Un autre moyen classique de sélection est le principe de la roue biaisée, qui consiste à tirer les individus au sort avec une probabilité non uniforme. Leur chance d'être retenus est proportionnelle à leur performance. Cette alternative ne s'est pas révélée plus efficace, probablement parce qu'elle a tendance à concentrer les recherches autour d'un point, au détriment de l'exploration.

Il semble important de laisser la possibilité de conserver dans la population des individus 'non-optimaux', car ils apportent une diversité nécessaire pour éviter à l'algorithme de stagner (tous les individus prenant les mêmes caractéristiques).

La nouvelle génération est confrontée à la précédente, et on ne conserve que les N meilleurs individus sur le total (parents et enfants confondus). Il n'y a pas de durée de vie limitée des individus. Cette confrontation des générations a été ajoutée pour éviter de perdre des individus performants qui risquaient d'apparaître seulement à une génération. Ainsi, on donne une pseudo-mémoire à l'algorithme.

Croisements (Cross-overs)

Le codage employé étant purement unidirectionnel (on travaille sur un génome vectoriel qui correspond aux lignes de la grille d'optimisation mises bout à bout), l'opérateur de croisement ne respecte aucune proximité. Ici encore, le procédé se veut exempt de tout présupposé. On peut en effet considérer que les opérateurs de croisements 2D, qui font des croisements de sous-blocs rectangulaires (directement sur la matrice correspondant à la grille d'optimisation) pour respecter le caractère 2D de la géométrie, introduisent un biais dans le procédé d'exploration.

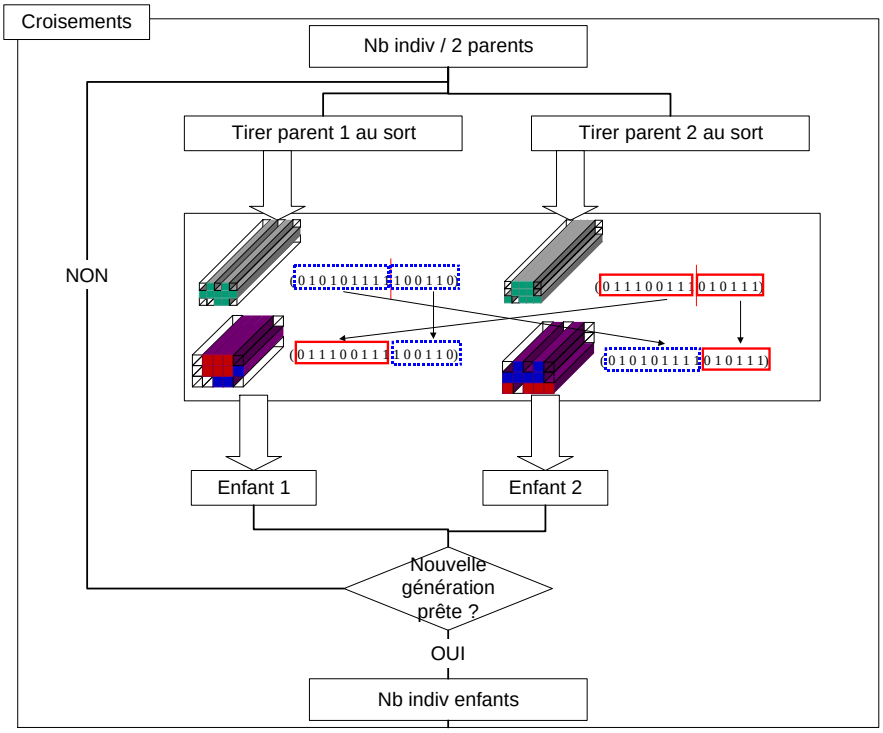


FIG. 3.35 – Opération de croisement (cross-over)

D'autres opérateurs de croisement sont envisageables :

- introduction de coupures multiples, voire même un croisement digit par digit ;
- utilisation de macro-opérateurs pour réduire le nombre de gènes [Dufour 00] ;
- un codage 2D des gènes (sous-forme d'une matrice au lieu d'un vecteur [Im 03]) permet de respecter le caractère 2D de la topologie recherchée, ce qui permet d'effectuer des croisements par blocs. Il s'avère cependant que cette approche a tendance à 'appauvrir' les facultés d'exploration de l'algorithme, dans la mesure où il s'agit en fait d'un présupposé sur le rôle des gènes.

Dans notre cas, comme cela a déjà été évoqué, génome et entrée du modèle sont confondus, ce qui se traduit par le fait que tous les gènes du génome ne sont pas accessibles à l'optimisation. Cette spécificité est prise en compte dans le croisement, qui se fait uniquement sur un sous-génome non contraint. Mais cela nous paraît également exclure les opérateurs 2D qui n'ont dans ce cas pas grand intérêt quant au respect de la topologie.

Mutations

La mutation est la deuxième vecteur d'exploration de l'espace de recherche. Là encore, on reproduit une caractéristique naturelle : l'apparition spontanée de gènes originaux lors du croisement.

Notre implémentation de la mutation est, elle aussi, très simple. Du fait que certains gènes ne sont en fait pas modifiables, la mutation se fait directement sur chaque gène. Par souci de généricité, on effectue même la mutation indépendamment de la nature (modifiable ou non) de chaque gène, puis une passe de masquage est effectuée. Elle consiste tout simplement à empêcher des mutations interdites.

La mutation se matérialise donc simplement par un taux de probabilité pour chaque gène de changer spontanément d'état.

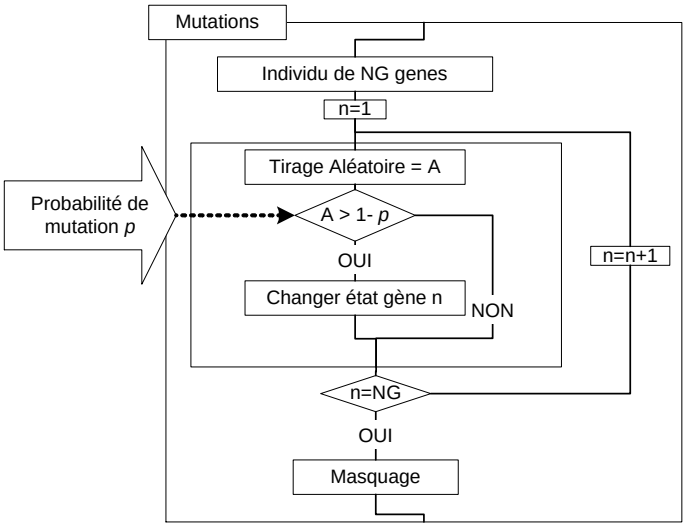


Fig. 3.36 – Opération de mutation

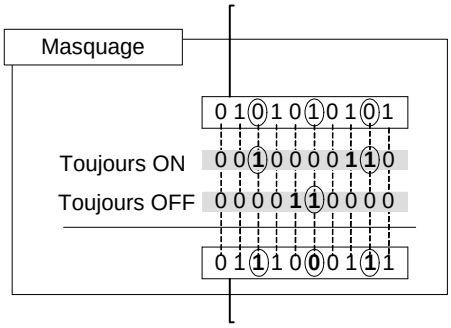


Fig. 3.37 – Principe du masquage : le vecteur 'toujours OFF' correspond aux emplacement où il ne peut y avoir de matière et 'toujours ON' aux éléments de matière imposée (voir figure 3.27)

C'est le procédé qui permet d'apporter du 'sang neuf' dans la population, et permet d'explorer au mieux toutes les régions de l'espace de recherche[10]. C'est ce qui permet d'éviter l'écrasement de la courbe de convergence. La mutation prend d'autant plus d'importance que la convergence est avancée. Ainsi il est utile de faire débuter la convergence de l'algorithme avec un taux de mutation faible et de l'augmenter ensuite pour faciliter la fin de convergence en évitant une stagnation trop rapide de la population.

Réglage et critère d'arrêt

L'algorithme génétique tel que nous l'avons définit requiert un jeu de paramètres d'entrée :
- nombre d'individus de la population,
- nombre de générations à générer,
- taux de mutation.

Nous devons également définir une fonction performance, mono-objectif, qui peut être toute expression mathématique faisant intervenir :

1. les grandeurs accessibles par la modélisation PEEC :
   - pertes Joule,
   - courants par phase / par barre (pour équilibrage),
   - impédances équivalentes,
   - ... ;
2. les grandeurs permettant de caractériser la topologie :
   - sections effectives de conduction,
   - poids des conducteurs ;
3. d'autres grandeurs simplement estimables sur le maillage existant :
   - estimation de coût (relié au poids),
   - estimation de la tenue mécanique (module d'Young ...).

La définition de la fonction objectif a été évoquée avec l'exemple du compromis entre niveau de pertes et section de conducteur. Elle sera à nouveau discutée dans la suite.

Cependant, précisons autant que possible le rôle des trois paramètres propres à l'optimiseur. Il ne peut malheureusement s'agir que de considérations relativement empiriques, fortement liées aux exemples traités. Un examen de la littérature montre en effet que le réglage (y compris la condition d'arrêt) constitue le point faible des algorithmes génétiques :
- Il n'existe pas de critère de convergence des algorithmes génétiques, ce qui signifie que le seul critère d'arrêt disponible est le nombre maximal de générations. Comme on le verra dans l'exemple qui suit (voir figure 3.40), la courbe de convergence a toujours une allure de décroissance exponentielle. Cependant, l'observation de la pente de cette courbe n'est pas un bon critère d'arrêt, car il faut aussi tenir compte de la dispersion des performances de la population. De plus, on notera que le minimum n'est pas connu à l'avance, alors que la décroissance peut réaliser des paliers, d'où le danger de repérer un aplatissement. On se contentera donc du nombre de générations comme critère d'arrêt, qui doit être 'adapté' à la taille de la population ;
- Le nombre d'individus de la population est intimement lié au nombre de gènes. La taille de la population de départ doit être suffisante pour offrir un bon échantillonnage de l'espace de recherche, mais également pour garantir une bonne diversité de la population tout au long de la convergence. En effet, au fil de l'exploration, le spectre de performance

[10] L'introduction d'individus totalement nouveaux -ce qui constituerait réellement du 'sang neuf'- a été tentée, mais elle n'apporte aucune amélioration en faible nombre. Pire, cela empêche la convergence si le nombre d'éléments nouveaux augmente. On peut justifier ceci par le fait que l'optimum correspond à une certaine 'organisation générale' de la matière que l'on ne peut perturber.

de la population doit se restreindre puisqu'il y a convergence, ce qui se traduit également par une convergence vers un génome commun. L'uniformisation du génome entraîne la stagnation de l'algorithme (ce qui n'est pas forcement une convergence réussie). Les essais qui ont été menés tendent à montrer que :

- le nombre d'individus doit être du même ordre de grandeur que la taille du génome (ou au nombre de gènes modifiables le cas échéant). Selon la complexité des contraintes extérieures (effets de proximité), ce chiffre peut aller entre 1/3 à 3 fois le nombre de gènes ;
- le nombre de générations doit être de 2 à 3 fois celui du nombre d'individus ;
  Remarque 17 *On verra que dans le cas de l'emploi de fonctions de pénalisation, les proportions sont inversées : 2 à 3 fois plus d'individus que de gènes et un nombre de générations parfois inférieur au nombre de gènes.*

- C'est en partie le rôle de la mutation que d'empêcher la stagnation en fin de convergence. On trouve dans la littérature des valeurs typiques de taux de mutation de l'ordre de 10% à 15%. Cependant, telle qu'elle est envisagée ici, c'est-à-dire que chaque gène a la possibilité de muter indépendamment des autres, le taux de mutation ne peut guère dépasser les 0.5% sans mettre en péril la convergence de la population.

Cette description, qui fait ressortir une bonne dose d'empirisme dans l'utilisation des algorithmes génétiques, ne remet aucunement en cause leur efficacité à résoudre des problèmes très compliqués. Il s'agit plutôt d'une mise en garde. On ne doit pas espérer obtenir un optimiseur universel de type 'presse-bouton'.

Cependant, comme on le verra, la phase de réglage n'est pas pour autant un casse-tête insoluble. Il convient simplement de procéder à une optimisation par étapes successives, commençant par une pré-optimisation rapide (maillage léger, peu coûteux en temps de calcul) qui sert de réglage et que l'on pourra ensuite affiner.

3.7 Mise en oeuvre

Etant donné que le but de l'optimisation est ici l'obtention de topologies innovantes, non-intuitives, il nous est apparu nécessaire de vérifier le bon fonctionnement dans un cas où le résultat optimal peut être connu. C'est pourquoi nous revenons au cas (soluble analytiquement) de la barre cylindrique creuse.

3.7.1 Validation sur un cas analytique

Repartant des résultats du paragraphe 3.3.5, on peut définir un problème d'optimisation simple et représentatif. Nous allons considérer une barre cylindrique en cuivre (épaisseur de peau $\delta \approx 10\,\text{mm}$ à 50 Hz) de rayon extérieur fixé à $R_{ext} = 25\,\text{mm}$.

La fonction objectif considérée est un équilibre entre niveau de pertes Joule et section du conducteur. Ce choix peut paraître ici artificiel, mais nous aurons l'occasion de le justifier plus loin, dans la section 3.7.2 et surtout dans le chapitre 5 :

$$f = P_j + \frac{S}{6}$$

avec S en mm^2 et P_j en W.

La figure 3.38 montre les variations de f en fonction du rayon intérieur. Elle ne présente qu'un minimum, relativement marqué, pour un rayon intérieur $R_{int} = 18\,\text{mm}$.

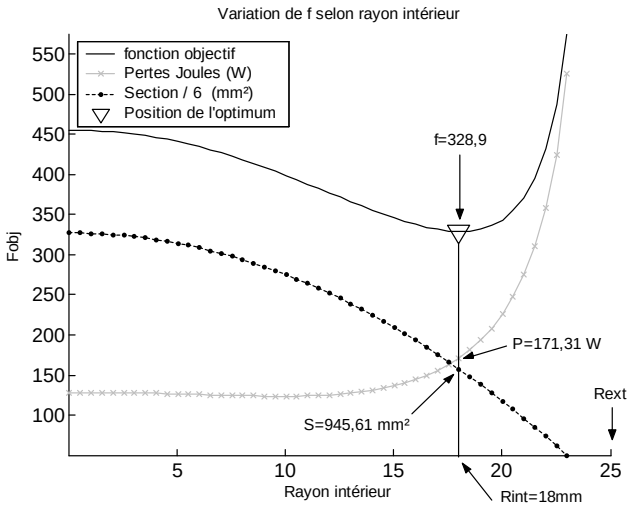


FIG. 3.38 – Etude analytique de la fonction objectif 'Fobj' (à rayon extérieur fixé à 25mm)

On choisit d'insérer la section dans une grille de 15x15 éléments (Soit 225 éléments de 3,33 mm de côté, donc 3 mailles dans l'épaisseur de peau). Comme on impose le rayon extérieur, la grille est ramenée à un contour circulaire, où il ne reste que 177 éléments modifiables. Les réglages de l'algorithme sont les suivants :

Nombre de générations : 180
Nombre d'individus : 60
Taux de mutation : 0.5 %

Les résultats obtenus sont très satisfaisants, puisque l'algorithme converge vers une section cylindrique creuse en seulement 122s[11], ce qui n'est imposé par aucune contrainte. En effet, nous

[11] Calculateur : Type PC Pentium 4 / 3GHz

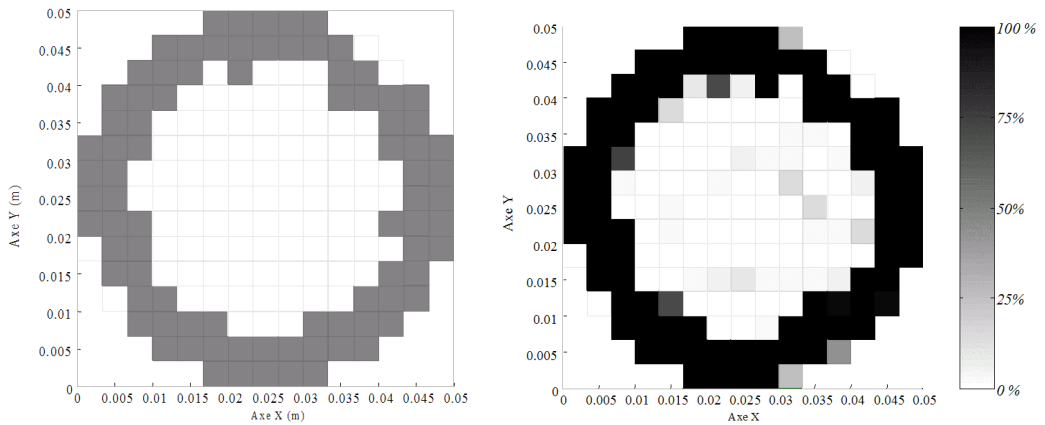
savons que la forme optimale doit ici avoir une symétrie de révolution, mais l'algorithme n'a quant à lui aucune connaissance des spécificités de la géométrie. Le fait d'obtenir la géométrie attendue est donc déjà un résultat en soi.

Remarque 18 *On remarquera d'ailleurs que le nombre d'individus (60) est assez faible devant la taille du génome (177 gènes), ce qui laisse à penser que la 'simplicité' et la symétrie de la physique mise en oeuvre entrent en compte. En présence d'effet de proximité, la symétrie n'étant plus respectée, on est amené à augmenter le nombre d'individus.*

La figure 3.39 montre la solution vers laquelle l'algorithme a convergé. A gauche on trouve le meilleur individu, et à droite la moyenne sur la population, ce qui donne une densité de probabilité de présence. La moyenne donne une meilleure confirmation de la forme que le minimum absolu rencontré, puisque les zones de 'doute' restantes concernent uniquement les contours de forme.

On constate donc que la convergence n'est pas totale, puisqu'il reste une certaine diversité dans la population. La figure 3.40 donne la courbe de convergence associée à l'optimisation. Il s'agit en fait du spectre de performance de la population au fil des génération. On observe une enveloppe à décroissance exponentielle, avec une dispersion qui diminue au fil de générations, de façon non linéaire. Le fait que ce spectre ne se réduise pas à un trait en fin d'optimisation confirme qu'il reste une certaine diversité dans la population.

Remarque 19 *C'est ce qui rend la définition d'un critère d'arrêt difficile : on observe un début de stagnation entre la 10ème et 20ème génération avant une accélération de la convergence.*



Meilleur Individu

Moyenne sur la population finale
(Densité de probabilité de présence)

FIG. 3.39 – Résultat de l'optimisation

La précision de l'optimum est assez remarquable. La figure 3.41 précise les caractéristiques de l'optimum obtenu, comparé au 'point initial' que constitue la barre pleine (l'algorithme part en fait de topologies aléatoires).

Une meilleure précision ne peut être espérée avec le maillage retenu, d'autant que l'optimum est relativement plat en regard des éléments situés sur les contours de la forme.

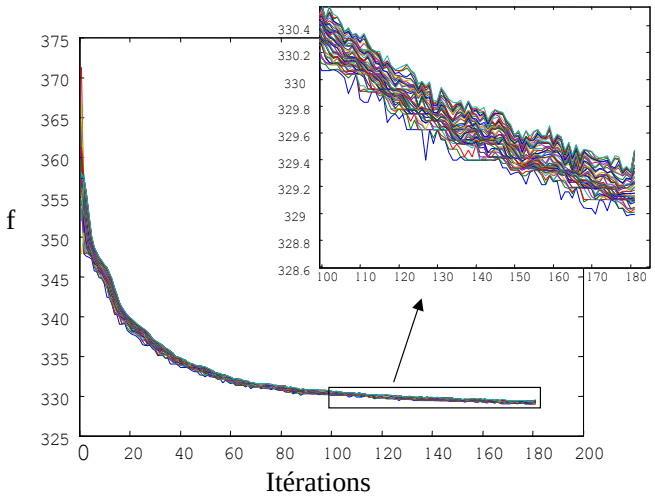
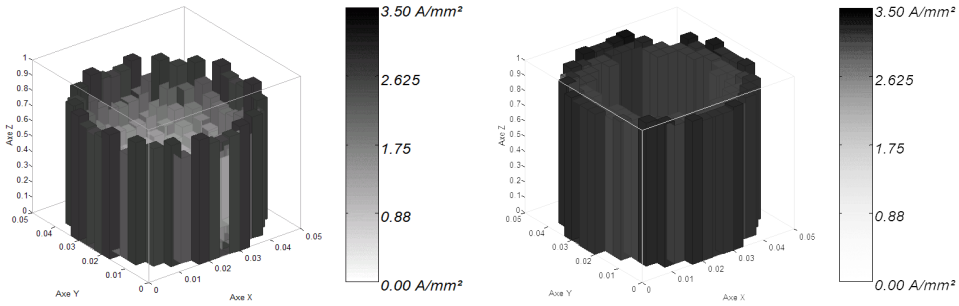


FIG. 3.40 – Evolution des perfomances de la population au fil des itérations : à chaque itération, on a la performance de tous les individus, d'où un spectre de valeurs.

Remarque 20 *Le temps d'optimisation (2 minutes) est très raisonnable. On pourrait alors penser que l'on peut s'autoriser un maillage beaucoup plus fin (et donc un génome plus grand). Nous ne préconiserons pas cette voie. En effet, l'augmentation de la taille du génome fait croître le nombre d'individus nécessaires et, du même coup, le nombre de générations. On peut ainsi rapidement alourdir le calcul, puisque l'on aura plus d'itérations d'un modèle plus coûteux à simuler. Nous préférerons l'idée des affinages successifs, car il ne faut pas oublier que le réglage de l'algorithme est délicat !*

Cet exemple permet également de mettre en lumière une particularité intéressante du problème que nous optimisons. Etant donné que la fonction objectif intègre une pondération des pertes Joule, nous avons une certaine garantie de la continuité de la matière. C'est-à-dire que la solution optimale a peu de risques de se présenter sous la forme de morceaux de section disjoints. Ce point n'a pas été évoqué jusqu'ici, car il ne s'est pas avéré nécessaire dans les



$P = 126W$ / $S = 1967\,\mathrm{mm}^2$
$f = 453$

$P = 171.3W$ / $S = 944.4\,\mathrm{mm}^2$
$f = 328.7$

FIG. 3.41 – Performance des solutions : barre pleine à gauche (Le modèle analytique donne P=128W / S=1963mm š, l'écart étant bien sûr dû au crénelage du contour de la section) ; et optimisée (creuse) à droite.

exemples traités.

On modélise la diffusion du courant sur les sections. Celle-ci fait apparaître des iso-valeurs continues, sur lesquelles la matière 'vient se déposer'. Il s'agit d'un critère de succès de l'optimisation très important, puisque cela évite de devoir mettre en place des artifices pour assurer la continuité de la matière qui viendraient perturber l'algorithme.

3.7.2 Exemple d'optimisation de forme sur un jeu de barres de répartition

L'optimisation topologique va à présent être déclinée sur la forme des barres d'un jeu de barres de répartition (type Linergy). Comme nous l'avons vu précédemment, même si on travaille essentiellement sur la diffusion du courant sur la section des conducteurs (effet de peau), l'effet de proximité ne peut réellement être négligé, puisqu'il modifie sensiblement la répartition du courant. Nous nous sommes donc intéressés au problème triphasé.

Simplification d'un problème triphasé

Traiter le problème triphasé (avec 4 conducteurs à mailler finement) n'est pas un problème en terme de caractérisation, puisqu'un seul calcul est nécessaire. En revanche, dans le cas d'une optimisation, on aura de nombreuses itérations à réaliser. Nous allons voir que l'on peut largement réduire la taille du problème PEEC. L'idéal est de pouvoir se ramener à quelques centaines de mailles pour une pré-optimisation rapide.

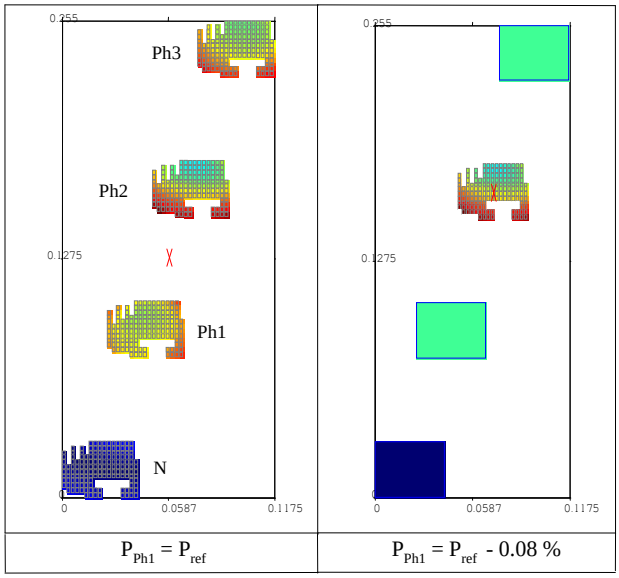


FIG. 3.42 – Simplification du problème triphasé : le remplacement des autres phases par une subdivision unique ne modifie pas le calcul des pertes de la phase 2 de moins de 0.1% (cas le plus défavorable). On passe de 536 à 137 mailles. Le temps de résolution est divisé par 15.

On travaille ainsi sur un problème triphasé, mais il est simplifié : le conducteur étudié (optimisé) est détaillé finement en subdivisions PEEC. Les autres phases sont remplacées par un conducteur équivalent constitué d'une seule subdivision. Etant donné les distances intervenant entre les phases, les autres conducteurs sont vus par une phase comme un 'fil' de courant équivalent dont la forme a peu d'influence. Ainsi, une seule subdivision équivalente suffit pour évaluer les effets de proximité. Le champ rayonné par ce fil équivalent est suffisant pour reproduire les conditions aux limites sur le contour de la phase considérée.

La figure 3.42 montre cette simplification dans le cas d'un jeu de barres Linergy 1600 A aluminium. L'erreur commise sur le calcul de la puissance dans la phase 2 est inférieure à 0.1% et le profil de densité de courant est conservé (les effets de proximité sont toujours convenablement pris en compte). Il n'est en revanche pas possible d'évaluer les pertes dans les autres conducteurs.

Description du problème

L'utilisation d'un algorithme d'optimisation permet ici de s'attaquer à un problème réaliste. On va donc chercher à améliorer l'efficacité d'une barre Linergy 1600 A.

Etant données les caractéristiques particulières de cette gamme de barres, qui présentent toutes une forme extérieure identique, on va conserver l'aspect extérieur de la barre, ainsi que le système de fixation. La grille décrivant le conducteur (voir figure 3.43) comporte donc quelques contraintes géométriques. Les éléments bleus restent obligatoirement présents. Les éléments rouges ne peuvent être présents. La forme est contrainte dans le rectangle d'optimisation exclusivement.

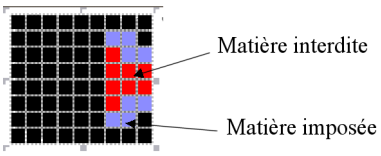


FIG. 3.43 – Grille d'optimisation

Discussion sur le choix de la fonction objectif :

La fonction objectif de l'optimisation est une fonction 'coût' :

$$f = K_1 \cdot P_{\text{Joule}} + K_2 \cdot S_{\text{Aluminium}}$$

où K_1 est en W^{-1} et K_2 en mm^{-2}.

Puisqu'il est nécessaire de faire un arbitrage en matière et pertes Joule, pourquoi ne pas tenter de rendre les termes homogènes par une traduction financière ? On peut pour cela se baser sur les chiffres de l'IEA (International Energy Agency) qui fournit le prix de l'énergie électrique par pays [IEA 04]. Ainsi, pour la France :

	Coût
Industriel	0.0501 USD/kWh
Domestique	0.1417 USD/kWh

Si on se place au coût industriel, le coût de l'électricité devient :

$$1\,\text{W} \cdot \text{an} = 0.33\ €$$

Si on prend maintenant le cours actuel de l'aluminium (1872 €/T - voir 3.3), compte tenu de la masse volumique de l'aluminium (2.7 T/m^3), le coût d'1mm^2 en section sur 1 mètre de longueur de barre est :

$$1\,\text{mm}^2 \cdot 1\,\text{m} = 5.10^{-3}\ €$$

Prenons maintenant le cas d'un jeu de barres 1600 A en Aluminium triphasées avec neutre, avec une durée de vie de 15 ans, et un facteur d'utilisation de 10% en terme de puissance (correspond à un fonctionnement moyenné à 1/3 du courant nominal en permanence).

$$4 \times 900\,\text{mm}^2 \cdot 1.7\,\text{m} \approx 31\ €$$

$$500\,\text{W} \cdot 15\ \text{ans} \cdot 10\% = 750\,\text{W} \cdot \text{an} \approx 248\ €$$

Soit un ratio proche de 8.

On ne considère ici que la 'part variable' du coût économique, puisque le coût réel de fabrication n'est pas estimé. On fait l'hypothèse qu'une fois le process établi, seule la masse de matière première a un impact, ce qui est certainement assez inexact. Cependant, cette évaluation va nous permettre de choisir une fonction objectif qui correspondra dans un premier temps à un coût économique.

$$f\,[€] = P_{\text{Joule}}\left[€ \cdot W^{-1}\right] + \frac{1}{8} \cdot S_{\text{Aluminium}}\left[€ \cdot \text{ mm}^{-2}\right] \tag{3.8}$$

Optimisation

Partons à présent du jeu de barres d'étude représenté en coupe avec la répartition de courant associée sur la figure 3.44 (La forme des barres est représentative de l'état de l'art : un congé de matière pour la fixation ...). Ce jeu de barres a une section de 975 mm^2 d'aluminium par phase (soit 3900 mm^2 pour les 4 conducteurs), pour un courant de 2000 ampères efficaces par phase.

	Pertes pour 1m (W)	Déséquilibres
Neutre	2.7	
Phase 1	150.0	$P_{moy} - 3\%$
Phase 2	162.4	$P_{moy} + 6\%$
Phase 3	145.9	$P_{moy} - 5\%$
Total	P_{moy}=153.7 W/barre	P_{total} =461 W

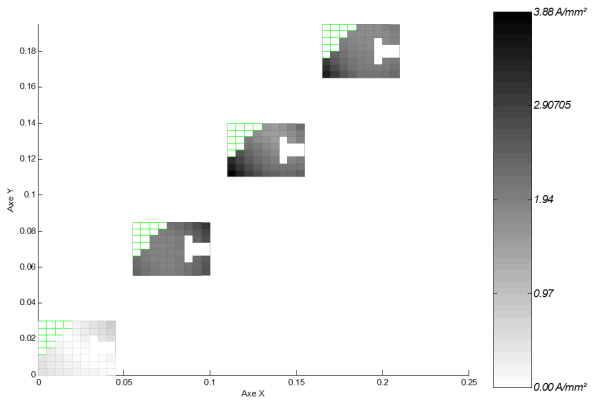


FIG. 3.44 – Topologie initiale triphasée avec neutre. Les barres ont une section incluse dans un rectangle de $\sim 4\delta \times 3\delta$. Elles sont décalées horizontalement et verticalement de $\sim 5\delta$.

Nous nous intéresserons dans un premier temps à la phase 2, car elle semble la plus contrainte. En effet, elle subit les effets de proximité des phases 1 et 3, d'où un niveau de pertes plus élevé.

Phase 2 :

La simplification du problème par remplacement des autres phases par une maille équivalente ne pose pas de problème

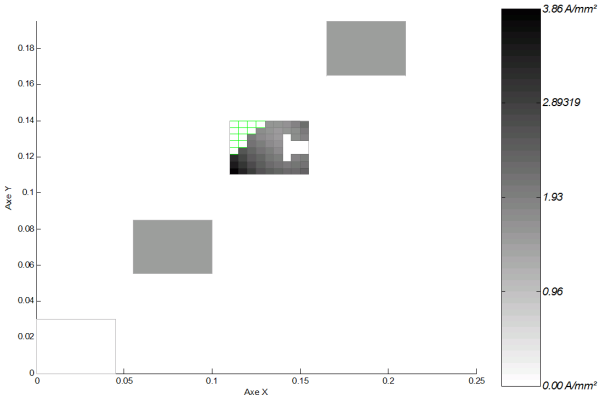


FIG. 3.45 – La phase 2 dissipe initialement 162W pour 975 mm^2

L'optimisation est donc lancée sur la grille suivante, avec la fonction objectif (3.8).

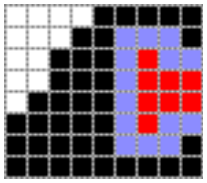


FIG. 3.46 – Grille d'optimisation (En rouge, présence interdite, en bleu, présence obligatoire)

Le réseau de courbes de la figure 3.47 montre l'évolution de la performance des individus pendant l'optimisation. L'algorithme s'avère très performant pour donner une bonne idée du placement optimal de la matière puisque l'optimisation (ici simplifiée au maximum) prend environ 68s[12].

Le tableau suivant donne le résultat de l'optimisation :

Phase 2 : $f = 8 \cdot P + S$	Initial	Solution optimale	Ratio
P (W)	162.4	162	-0.3%
S (mm^2)	975	881	-10%

La solution optimale est illustrée par la figure 3.49.

La même optimisation peut être relancée avec d'autres pondérations de la fonction objectif, ce qui conduit à des compromis différents sur la forme optimale. Cela permet de mieux percevoir les caractéristiques importantes de la section. Celle ci prend une forme allongée, correspondant à l'écrasement de l'effet de peau par les effets de proximité des autres phases. La forme globale est contrainte par la taille de la grille d'optimisation. La matière au centre est enlevée car moins efficace.

[12] Calculateur PC type P4 1.6GHz

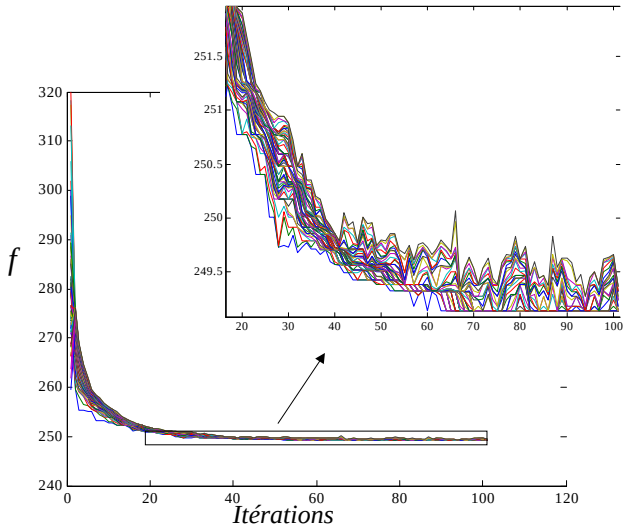


FIG. 3.47 – Evolution du spectre de performance des individus

Remarque 21 *On note ici que la 'solution optimale' est à chaque fois optimale du point de vue de la fonction objectif choisie, ce qui ne signifie pas qu'il s'agit d'une topologie intéressante du point de vue de la fonctionnalité attendue. Simplement, cette approche permet une exploration efficace des différents compromis optimaux réalisables.*

Le même calcul peut être lancé sur les deux autres phases, toujours avec le même compromis $f = 8 \cdot P + S$, ce qui donne des formes de sections différentes.

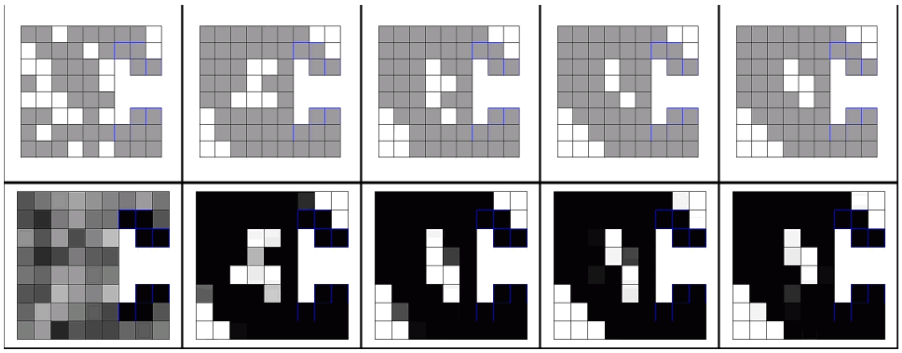


FIG. 3.48 – Evolution de la forme optimale (en haut) et de la moyenne sur la population (en bas) au fil des générations.

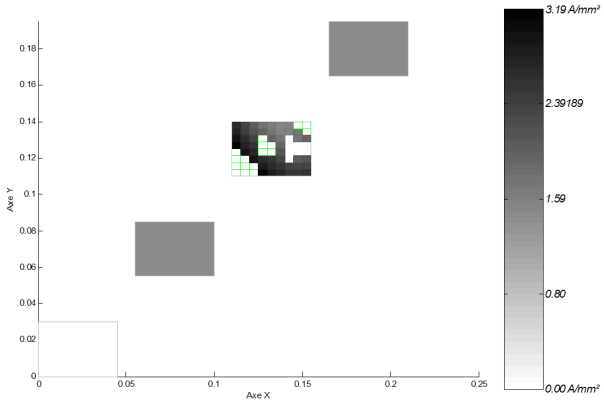
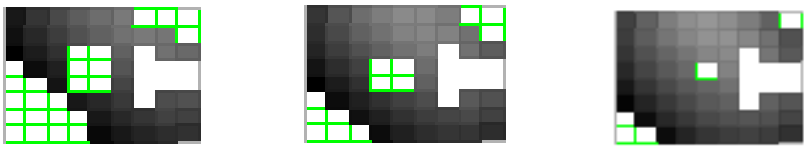


FIG. 3.49 – Forme optimale de la phase 2 pour $f = 8 \cdot P + S$



$f = 5P + S$	$f = 10P + S$	$f = 20P + S$
P=183 W (+13%)	P=153W (-6%)	P=142W (-12%)
S=750 mm^2 (-23%)	S=956mm^2 (-2%)	S=1106mm^2(+13%)
Coût Alu > Coût kWh	Coût Alu ∼ Coût kWh	Coût Alu < Coût kWh

FIG. 3.50 – Optimum correspondant à différentes fonctions objectives

Phase 1 :

Phase 1 : $f = 8 \cdot P + S$	Initial	Solution optimale	Ratio
P (W)	150	153	+2%
S (mm^2)	975	881	−10%

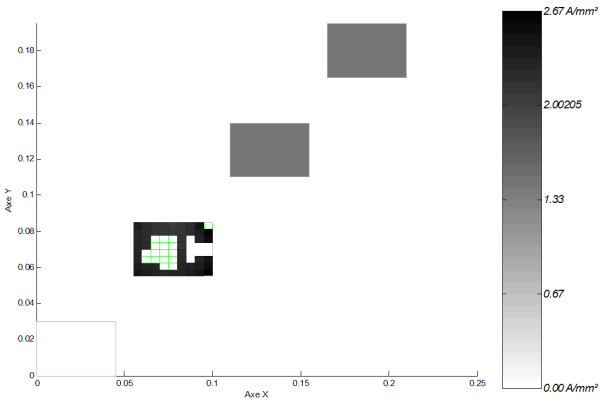


FIG. 3.51 – Forme optimale de la phase 1 pour $f = 8 \cdot P + S$

Phase 3 :

Phase 3 : $f = 8 \cdot P + S$	Initial	Solution optimale	Ratio
P (W)	146	140	−5%
S (mm^2)	975	956	−2%

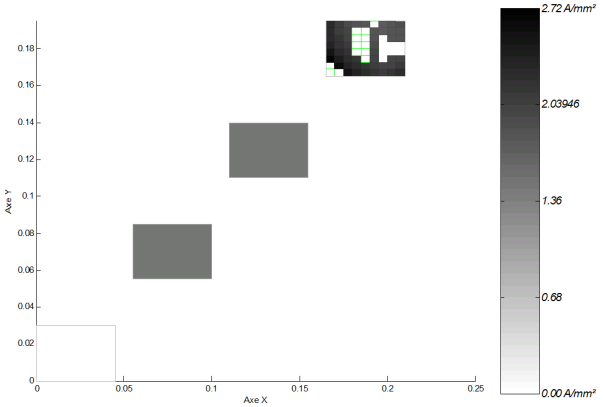


FIG. 3.52 – Forme optimale de la phase 3 pour $f = 8 \cdot P + S$

Cette étude montre qu'il peut être intéressant d'envisager un jeu de barres où les phases ne sont pas parfaitement identiques. Cependant, cet 'investissement' supplémentaire devra être

compensé par les gains obtenus, puisque cela va à l'encontre d'une politique de réduction des coûts par standardisation des composants de base (plateforming).

En dehors de cette hypothèse, l'optimum trouvé pour la phase 2 apporte un gain significatif, sur la phase la plus contrainte. Cette forme, même si elle n'est pas strictement optimale pour les autres phases, peut convenir.

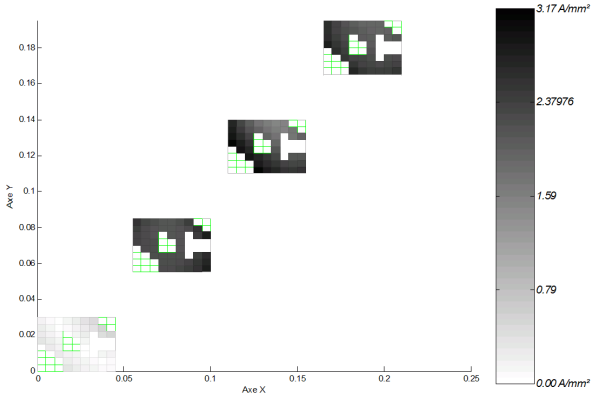


FIG. 3.53 – Comportement du jeu de barres par duplication de la barre optimisée pour la phase 2.

Si l'on prend la forme obtenue sur la phase 2 pour toutes les phases, les niveaux de pertes sont les suivants :

	Pertes pour 1m (W)	Déséquilibres
Neutre	1.5	
Phase 1	155.9	$P_{moy} - 1\%$
Phase 2	161.9	$P_{moy} + 3\%$
Phase 3	153.1	$P_{moy} - 2\%$
Total	P_{moy}=157.3 W/barre	P_{total} =472 W

Les pertes totales passent de 461 à 472W, soit une augmentation de seulement 2%, contre un gain de 10% sur la matière première (chaque phase passe de 975 à 881mm^2).

On notera que l'utilisation de la nouvelle section, qui, pour limiter les pertes, limite l'influence des effets induits tend à ramener de la symétrie dans le comportement du jeu de barres : les pertes sur les 3 phases sont plus homogènes, et les pertes du neutre (nulles dans un cas théorique symétrique) réduites de moitié, ce qui est favorable au bon comportement du jeu de barres en cas de défaut (équilibrage des courants de défaut pour le réglage des protections).

A titre de comparaison, avec des formes différentes pour chaque phase (le neutre est conservé avec une section de 975mm^2) on obtient (sans compter le neutre) :

	Pertes pour 1m (W)	Section (mm^2)
Phase 1	153	881
Phase 2	162	881
Phase 3	140	956
Total	455	2718
Initial	458	2925
Gain	-1%	-7%

3.7.3 Affinage

La grille d'optimisation utilisée jusqu'ici est relativement grossière, même si elle permet de retranscrire convenablement les effets induits. La comparaison relative entre les différentes solutions est correcte, seul le niveau absolu de pertes est imprécis.

Cependant, en terme de définition de la topologie optimale, la description des contours en marches d'escalier est probablement trop grossière. Ainsi, pour affiner la solution sans pour autant travailler directement sur une grille contenant trop de gènes, qui poserait des problèmes de convergence, nous proposons de relancer l'optimisation sur une grille plus fine, en ne laissant libres que les gènes 'proches' des contours qui pourront ainsi être affinés.

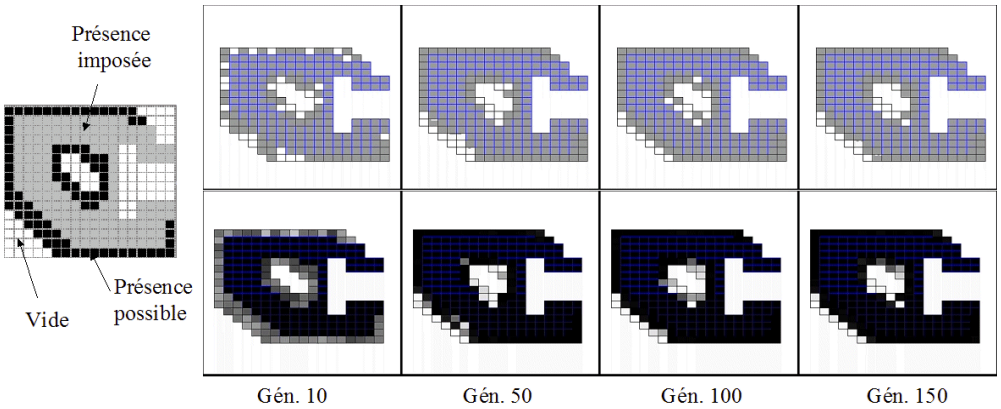


FIG. 3.54 – Affinage par une deuxième passe d'optimisation.

[Choi 98] propose une approche similaire pour l'optimisation de placement de matière ferromagnétique dans des systèmes de chauffage par induction. L'optimisation se fait en étapes découplées : dans un premier temps on travaille sur un matériau fictif qui peut prendre des propriétés (perméabilité, résistivité) intermédiaires entre vide et fer. L'état de chaque élément est ensuite tranché vers l'état plein ou non pour définir des contours. Ces derniers sont ensuite affinés.

Dans notre cas, des affinages successifs sont ainsi possibles, en bloquant progressivement l'état des gènes ne participant pas à la définition du contour de la pièce. Le seul inconvénient de cette approche réside dans le coût de calcul : en effet, même si le nombre de gènes optimisables n'est pas forcément croissant, puisque l'on fige le plus de mailles possible, la taille du problème en terme de nombre de mailles PEEC peut devenir rédhibitoire, puisque l'on est forcé de conserver un maillage uniforme (sinon, la précision du maillage est potentiellement en contradiction avec l'affinage souhaité).

Un moyen alternatif permet de limiter le nombre d'affinages (voire de se satisfaire d'une seule passe d'optimisation). Il s'agit de l'extraction de contours.

3.7.4 Extraction de contours

Deux points de vue sont possibles pour l'interprétation de la solution :

- considérer le meilleur individu obtenu durant l'optimisation (mais il n'est pas forcément présent à la dernière génération du fait de l'algorithme retenu) ;
- considérer l'évolution globale de la population. On extrait alors une moyenne sur les individus, qui donne une densité de probabilité de présence de matière. Afin de faciliter l'interprétation de ce résultat, il est utile d'avoir recours à l'extraction de contours [Hsu 01].

Il s'agit d'obtenir une forme aisément lisible, en bénéficiant de l'information contenue dans tous les individus. Pour cela, on fait simplement appel à des procédures génériques de traitement d'image, qui peuvent déduire un contour entre zone noire et zone blanche sur une image en niveaux de gris par interpolation sur la densité des pixels voisins.

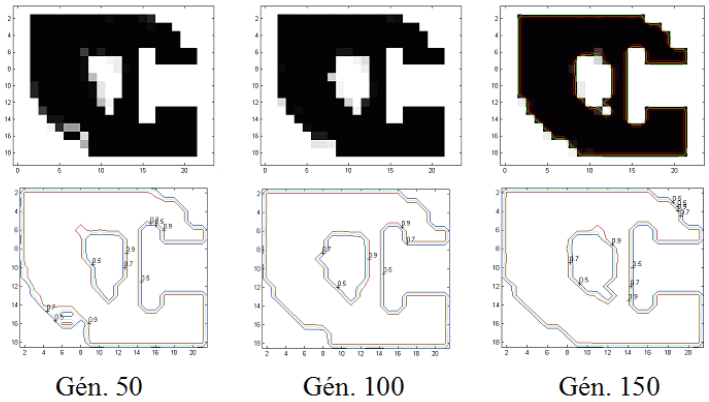


FIG. 3.55 – Extraction des contours de la section

Ce procédé permet à la fois d'obtenir une topologie aux caractéristiques plus facilement exploitables et de récupérer toute l'information contenue dans la population finale, puisque l'on dispose en fait d'un faisceau de contours, avec leurs sensibilités relatives.

3.7.5 Complément : Fonctions de pénalisation

On a pu constater que l'optimisation des différentes phases avec la même fonction objectif a donné pour les phase 1 et 2 des sections identiques (881 mm^2 - ce qui était a priori imprévisible). La même optimisation sur la phase 3 donne un compromis tout autre (140W / 956mm^2).

Il apparaîtrait intéressant dans ce cas de pouvoir directement guider l'optimisation vers la même section, afin d'évaluer la possibilité d'avoir des barres de sections identiques.

Remarque 22 *Les normes NEMA*[13] *(US) n'autorisent notamment pas une section libre pour les câbles et jeux de barres. Ainsi, pour chaque calibre en courant, une section minimale de conducteur est imposée, d'où l'intérêt de cette démarche. Dans un cadre plus général, l'enjeu est de pouvoir guider plus facilement l'optimisation si l'on dispose de contraintes explicites.*

Comme cela a déjà été évoqué, les algorithmes génétiques (comme la quasi totalité des méta-heuristiques) ne peuvent prendre en compte de contraintes fortes de type égalité ($S = S_{ref}$) ou inégalité ($S > S_{\min}$).

Pour contourner cette limitation, on a recours à une fonction dite 'de pénalisation' qui va guider l'optimiseur vers des solutions satisfaisant la contrainte, sans pour autant empêcher sa convergence. L'idée est de pénaliser les solutions ne satisfaisant pas à la contrainte en terme de performance, en laissant la possibilité à l'algorithme d'évaluer ces solutions et de les comparer.

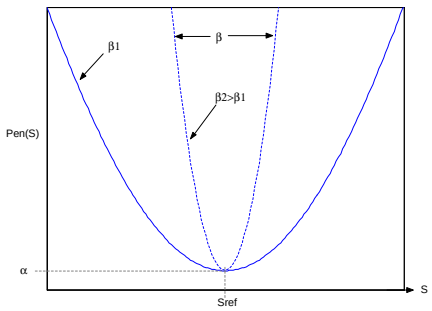


FIG. 3.56 – Fonction de pénalisation

La fonction objectif pour cet exemple est du type :

$$f = P + Pen(S)$$

où la fonction de pénalisation est (par exemple) :

$$Pen(S) = \alpha \left(1 + \beta \log \left[\cosh \left(\frac{(S - S_{ref})}{S_{ref}}\right)\right]\right)$$

[13] NEMA : National Electrical Manufacturers Association.
On peut citer à titre d'exemple les normes :
- NEMA Standards Publication BU 1-1999, Busways, qui traite des jeux de barres ;
- NEMA Standards Publication VE 2-2001, Cable Tray Installation Guidelines, qui traite des chemins de câbles.

Comme on peut le constater, cette fonction doit permettre une pénalité suffisante pour forcer l'optimum à tendre vers S_{ref} : le caractère abrupte de la pénalité est réglé avec le paramètre β, tout en recherchant la minimisation de P, l'arbitrage entre les 2 aspects se réglant avec le paramètre α.

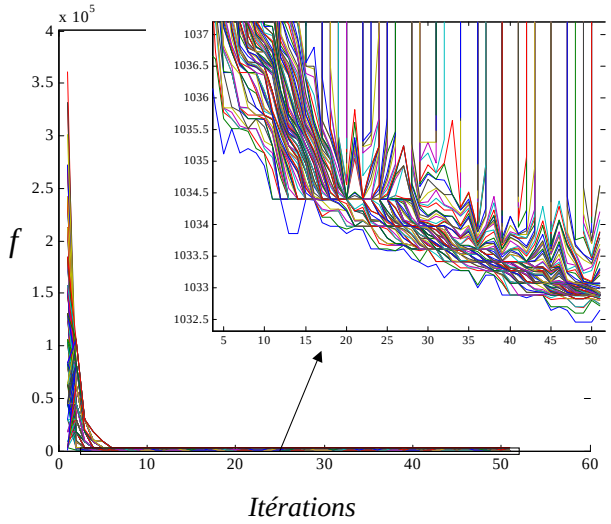


FIG. 3.57 – Spectre de performance de la population au fil des générations dans le cas de l'emploi d'une fonction de pénalisation

L'introduction de cette pénalisation n'est pas sans conséquence sur la convergence de l'algorithme, puisque l'on constate sur le spectre de performance (fig. 3.57), que le comportement est nettement différent. Le réglage de la fonction de pénalisation est assez délicat (ici $\alpha = 10$ et $\beta = 10^4$). Les réglages de l'algorithme doivent être adaptés, puisqu'il est difficile de conserver la diversité de la population. La tendance s'inverse par rapport aux réglages typiques annoncés précédemment :

- 2 à 3 fois plus d'individus que de gènes libres (ici 150 individus)
- L'algorithme va stagner au delà d'un nombre de générations équivalent à la moitié de la taille de la population (ici la solution est stabilisée pour 50 générations)

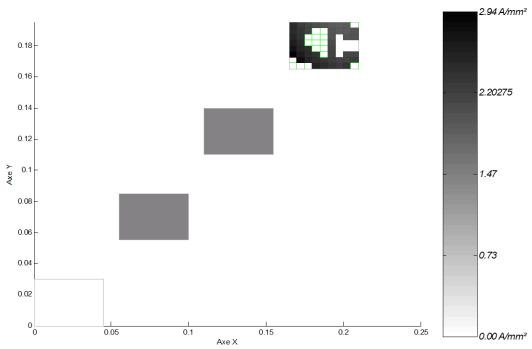


FIG. 3.58 – Nouvelle forme obtenue pour la phase 3 avec pénalisation (P=151 W / S=881mm^2)

L'utilisation de fonctions de pénalisation ouvre la possibilité de prendre en compte toutes sortes de contraintes. On pense notamment aux contraintes mécaniques : en optimisant la section des conducteurs sur un compromis pertes / section conductrice, on peut être amené à réduire la résistance en flexion de la barre, ce qui est néfaste pour la tenue aux efforts de court-circuits. On peut donc pour palier à ce risque soit :

- calculer le nombre de points de fixation adéquat, mais cela a un coût, qui peut être ajouté à la fonction objectif ; soit
- introduire une pénalisation sur la résistance mécanique (module d'Young par exemple) de la barre.

Remarque 23 *On peut de la même manière même envisager une contrainte d'inégalité ($S >$ ou $< S_{ref}$) avec une fonction de pénalisation nulle à gauche ou à droite d'une référence.*

3.8 Conclusions

3.8.1 Convergence vers une solution optimale

Le couplage introduit ici entre une méthode de modélisation et un optimiseur se révèle être un outil d'exploration très efficace. Chaque réglage de la fonction objectif permet d'obtenir la topologie optimale adaptée. Etant donné que la fonction objectif est ici simple, et n'agit que sur deux grandeurs dont on fixe l'importance relative, il est possible de rechercher l'ensemble des compromis possibles [Regnier 04].

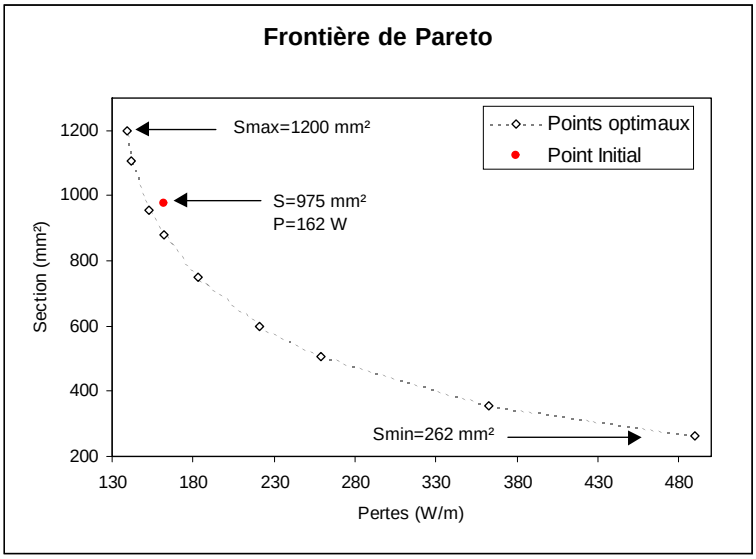


FIG. 3.59 – Tracé des optimums correspondant aux différentes pondérations - Frontière de Pareto

Il s'agit de tracer la frontière de Pareto, qui n'est autre que l'ensemble des optimums pour chaque compromis possible. On a alors la garantie que chaque point de la frontière n'est 'dominé' par aucune autre solution, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de meilleure solution sur un des objectifs (pertes ou section) ne dégradant pas l'autre (voir fig. 3.59).

Toute solution située au dessus de la frontière n'est pas optimale. C'est ainsi le cas de notre solution initiale, pour lequel on peut trouver une topologie de section dissipant le même niveau de pertes, mais de section inférieure, ou de même section, mais dissipant moins.

Nous resterons toutefois très prudents pour ce qui est de l'optimisation multi-objectifs (en prenant par exemple en compte la résistance mécanique), car la complexité du réglage de la convergence de l'algorithme pourrait être un frein important. Notons de plus que le temps d'optimisation était ici réduit au minimum, ce qui n'est pas forcement possible, selon la complexité du modèle.

L'outil ainsi bâti reste cependant une aide précieuse au pré-dimensionnement et au design de ce type d'interconnexions, puisqu'il permet rapidement de trouver le meilleur design qu'on puisse espérer obtenir pour différentes stratégies et d'affiner une solution intéressante. Cet aspect présente un intérêt :

– d'une part pour l'amélioration de solution existantes ;

– d'autre part pour le développement de nouvelles solutions où les contraintes sont minimales en début de dimensionnement, laissant une meilleure marge de manoeuvre.

La recherche du compromis entre pertes Joule et coût matière a ici été justifiée par un critère purement économique. Nous verrons par la suite que cet arbitrage pourra être remis en cause dans une optique de développement durable et de suivi des impacts environnementaux des solutions retenues.

3.8.2 Limitations inhérentes à la méthode PEEC

Les exemples de mise en oeuvre du couplage algorithmes génétiques / Méthode PEEC ont prouvé l'efficacité de cette méthode en terme d'aide au design. Cependant, la méthode PEEC 'standard' ne permet pas la prise en compte des matériaux ferromagnétiques, ce qui réduit considérablement son champ d'action. Afin de profiter des méthodes d'optimisation développées, la recherche d'un moyen d'étendre la validité de la méthode au métaux ferreux apparaît pertinente. En effet, les interconnexions de type canalisations électriques préfabriquées, de part leur faible encombrement, impliquent une grande proximité des conducteurs, dont les sections peuvent être importantes. Le rôle joué par les effets induits y est loin d'être négligeable. Nous allons donc à présent voir comment étendre la validité de la méthode, pour décliner ce qui a été développé ici sur le design des CEP.

Chapitre 4

Introduction de matériaux ferromagnétiques dans la méthode PEEC

4.1 Introduction

4.1.1 Enjeu de canalisations préfabriquées

Le but est ici de permettre la prise en compte de matériaux ferromagnétiques (μ_r>1) dans le cadre de modélisations avec la méthode PEEC. Les applications visées en priorité sont les équipements de distribution électrique basse tension, forte puissance, donc basse fréquence (50-60 Hz). La méthode PEEC a déjà été mise en œuvre avec succès pour l'optimisation de systèmes de conducteurs de forte puissance de type 'busbars'. Cependant bon nombre de busbars sont, essentiellement pour en empêcher l'accès, inclus dans une enveloppe métallique. C'est notamment le cas pour les produits de type Canalis®.

Dans le cas de busbars pour armoire de distribution types Okken®, ou Prisma®, les enveloppes métalliques se trouvent assez éloignées des conducteurs de puissance, ce qui rend leur influence sur la répartition du courant dans les conducteurs peu sensible [Gonnet 03] (faible réaction d'induit). Ainsi est-il possible d'optimiser le design du jeu de barres sans prendre en compte les enveloppes. Une vérification à l'aide d'une autre méthode (telle que la méthode des éléments finis) a posteriori est suffisante pour vérifier que la solution optimale proposée n'est pas dégradée par la présence du blindage (qui n'a d'ailleurs a priori que rarement un rôle de blindage magnétique 'volontaire').

En revanche, dans le cas des canalisations électriques préfabriquées (CEP) type Canalis®, même si le rôle essentiel de l'enveloppe métallique est d'assurer une rigidité mécanique à l'ensemble des conducteurs, ainsi que de permettre un chemin de retour des courants en cas de défaut, la compacité du dispositif impose une grande proximité entre l'enveloppe et les conducteurs. La réaction d'induit est suffisante pour modifier sensiblement la distribution du courant sur la section des conducteurs. Impossible alors de proposer un design optimisé des conducteurs sans prendre en compte l'enveloppe, puisque celle-ci conditionne le comportement électromagnétique du dispositif.

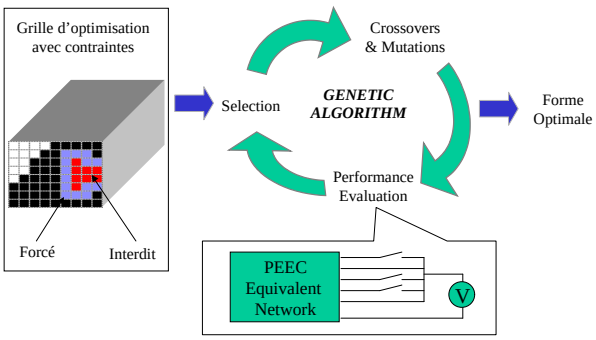


FIG. 4.1 – Principe de l'optimisation de forme

Etant donnés les objectifs d'optimisation, la prise en compte des matériaux ferreux se devait de rester dans l'esprit de la méthode PEEC, c'est-à-dire rester dans un niveau de complexité qui ne remette pas en cause la possibilité de couplage de la méthode à un algorithme d'optimisation. Par exemple, dans le cadre de l'optimisation de forme dont le principe est rappelé dans la figure 4.1, l'optimisation repose sur le fait que l'on peut 'préparer la résolution' pour toutes les configurations. En effet, pour évaluer chaque configuration, il suffit de résoudre le circuit électrique équivalent en prenant en compte l'ouverture de certaines branches, ce qui peut se ramener à multiplier la matrice équivalente par une matrice booléenne et à une simple inversion de système linéaire.

Dans ce qui va être présenté, on s'efforcera de rester dans ce cadre, afin de proposer une solution compatible, sachant qu'il est en plus hors de question d'atteindre une complexité équivalente à une résolution par la méthode des éléments finis.

D'autre part, ce qui va suivre n'est pour l'instant validé que dans un cadre 2D, c'est-à-dire un 'plan de coupe' de la géométrie propagée. Il est donc possible de traiter uniquement des sections droites de conducteurs, ce qui correspond néanmoins à une grande partie des problèmes qui nous intéressent.

Remarque 24 *La modélisation des CEP par les éléments finis n'est pas pour autant triviale, du fait de la faible épaisseur des enveloppes métalliques (leur maillage -sans avoir recours à des éléments spéciaux- est un handicap majeur). Les méthodes FEM sont relativement inadaptées, notamment pour le calcul du champ extérieur rayonné, pour lequel un couplage BEM*[1] */ FEM est préférable [Bottauscio 96], [Chindilov 03]. D'autres méthodes alternatives, telles que la méthode des images magnétiques peuvent être envisagées [Roshen 90].*

4.1.2 Rappel des limitations de la méthode PEEC Standard

On rappelle simplement ici que l'obtention des éléments partiels permettant la location de l'énergie dans les conducteurs repose sur l'intégration de l'équation de Poisson sur le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

Cette intégration n'est possible que dans le cas d'une perméabilité μ homogène sur tout l'espace (donc μ_0, étant donné la présence de l'air par défaut autour des conducteurs). Nous allons donc proposer une approche Ampérienne de la matière ferromagnétique (déjà abordée dans le chapitre 2 et qui va être ici développée dans le cadre de la méthode PEEC) qui vise à conserver l'approche PEEC tout en prenant en compte l'effet des blindages et autres enveloppes métalliques dans l'environnement immédiat des jeux de barres.

Dans ce qui va être développé ici, il n'est bien sûr pas question de calculer finement les pertes dans les tôles. En effet, on recense trois types de pertes dans les matériaux ferromagnétiques [Goodenough 02], [De Lacheisserie 99b] :

- les pertes par hystérésis (liées à l'énergie de retournement des moments) ;
- les pertes Joule dûes aux courants de Foucault :
  - macroscopiques : ce sont les pertes 'classiques',
  - microscopiques : liées aux courants de Foucault induits au niveau microscopique par les déplacements des parois de domaines magnétiques, elles sont dites 'anormales'.

On se contentera ici de retranscrire les effets 'macroscopiques' tels que l'atténuation de champ [Araneo 03] et les pertes dont il sera question dans les éléments métalliques sont des pertes par effet Joule macroscopiques 'classiques' uniquement (ce qui est d'ailleurs l'approche usuelle en l'absence de modèle correctif de pertes type μ complexe ou autre...).

[1] BEM = Boundary Element Method ou méthode des intégrales de frontières.

4.2 Extension des formulations PEEC : vers 'muPEEC'

4.2.1 Modélisation Ampérienne des matériaux ferromagnétiques

L'approche Ampérienne de la matière a été présentée dans le chapitre 2 d'un point de vue microscopique. Nous allons ici reprendre cette approche, de manière complémentaire, d'un point de vue macroscopique ; ce qui permettra de faciliter la comparaison avec l'introduction 'classique' de la méthode PEEC.

Dans l'approche énoncée précédemment, le caractère ferromagnétique d'un matériau est décrit par la loi de comportement (2.30) qui fait intervenir la perméabilité relative μ_r du matériau :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{4.1}$$

Nous allons nous tourner vers une modélisation Ampérienne de la matière aimantée. Ce type de raisonnement a déjà été partiellement mis en oeuvre dans le cadre de la méthode PEEC dans [Long 03] pour prendre en compte l'effet d'une métallisation de faible épaisseur utilisée pour la réalisation d'inductances de type planar[2]. Les effets étaient dans ce cas considérés comme uniquement surfaciques, l'objectif visé étant l'évaluation de la modification d'inductance introduite par la métallisation. En revanche, les pertes dans les matériaux ne peuvent être connues.

Nous allons ici adopter un angle d'attaque plus général, pour prendre en compte les courants volumiques à la fois dans les matériaux ferreux des enveloppes et dans les conducteurs.

Etant donné que la nature du champ magnétique (induction $\mathbf{B}$) crée par la matière aimantée et celui crée par des courants est strictement équivalent pour un $\frac{\partial}{\partial t}$ suffisamment faible d'après (2.12), la modélisation Ampérienne consiste à reproduire les effets de l'aimantation par une distribution équivalente de courants (d'où le terme d'équivalence Ampérienne) [Ciric 88]. Cette approche permet de se replacer dans le contexte du magnétisme du vide [Brissoneau 97], [De Lacheisserie 99a].

Le modèle Ampérien de la matière aimantée consiste à décomposer le champ $\mathbf{B}$ en tout point de l'espace en deux contributions. L'effet propre de l'excitation $\mathbf{H}$, et l'effet de l'aimantation $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M}\right) \tag{4.2}$$

En passant de la représentation discrète de (2.6) et (2.4) à une représentation continue ($\sum m_l \rightarrow d\mathbf{m}$), l'aimantation (locale) $\mathbf{M}$ est attribuée à une densité locale de moment magnétique $d\mathbf{m}$:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv}$$

Etant donné que les effets de l'aimantation se font sentir jusqu'à des échelles très faibles, tant que l'on reste à une échelle supérieure à celle de l'atome, on peut considérer les boucles de courant à l'origine de l'aimantation et donc faire l'approximation du dipôle magnétique, ce qui permet d'écrire le potentiel crée en P par le moment magnétique élémentaire $d\mathbf{m}$ situé en P' (voir figure 4.2) comme :

$$d\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

D'où le potentiel en P :

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \mathbf{M} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dv$$

[2] Notons également une application aux calculs de pertes dans les tôles de moteurs [Bobbio 95] hors du cadre de PEEC.

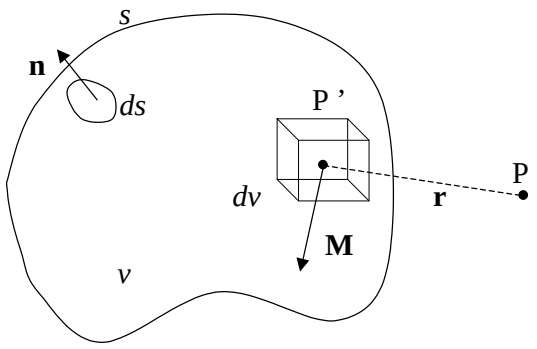


FIG. 4.2 – Calcul du champ crée par la matière aimantée en tout point de l'espace. Le point P' est dans la matière, le point P à l'extérieur.

Or, au point P' :

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \mathbf{grad}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)$$

soit :

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \mathbf{M}\times\mathbf{grad}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right)\, dv$$

Or, on peut exploiter la relation d'analyse vectorielle suivante [Gradshteyn 94] :

$$\mathbf{rot}\,(a\cdot\mathbf{u}) = a\mathbf{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\times\mathbf{grad}\,(\alpha)$$

$\mathbf{A}_m$ peut ainsi être décomposé en deux contributions $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{A}}_s$:

$$\mathbf{A}_m = \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}_s \tag{4.3a}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{\mathbf{rot}\,\mathbf{M}}{|\mathbf{r}|}\, dv \tag{4.3b}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_s = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}|}\right)\, dv \tag{4.3c}$$

On reconnaît $\tilde{\mathbf{A}}$ comme le potentiel crée par une distribution de courants $\mathbf{rot}\,\mathbf{M}$.

La deuxième contribution $\tilde{\mathbf{A}}_s$ peut aussi se ramener au potentiel crée par une distribution de courants grâce à la 'formule du rotationnel' de Stokes, soit :

$$\tilde{\mathbf{A}}_s = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}|}\right)\, dv = -\frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \mathbf{ds}\times\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s \frac{\mathbf{M}\times\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|}ds$$

où $\mathbf{n}$ est la normale sortante à la surface.

$\tilde{\mathbf{A}}_s$ peut donc être attribué à des courants de surface.

Ainsi, l'excitation et l'aimantation sont reliées à l'existence de deux types de courants, décrits précédemment par (2.11) :

– l'excitation $\mathbf{H}$ est créée par les courants de conduction $\mathbf{J}$ macroscopiques, dits courants libres, soit :

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{4.4}$$

- l'aimantation $\mathbf{M}$ est crée par des courants fictifs, dits liés, de deux type :
  - des courants liés de volume $\tilde{\mathbf{J}}$, tels que (on retrouve le premier terme de la relation (2.12)) :
$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{J}} \tag{4.5}$$
  - des courants liés de surface $\tilde{\mathbf{J}}_s$, tels que :
$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{J}}_s \tag{4.6}$$

Remarque 25 *A présent, dans la matière aimantée, on a :*

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \tilde{\mathbf{J}}\right)$$

et l'excitation $\mathbf{H}$ *définie par* $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ *continue de vérifier le théorème d'Ampère (alors que ce n'est plus le cas pour l'induction* $\mathbf{B}$*).*

Courants liés de volume

Les courants libres participent à la conduction macroscopique et donc à l'effet Joule. En revanche, les courants liés de volume $\tilde{\mathbf{J}}$ peuvent être vus comme des boucles de courants localisées, qui ne participent pas à la conduction (donc ne participent pas à l'effet Joule), mais sont générateurs de champ.

La loi de comportement se trouve reportée sur l'aimantation :

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} = (\mu_r - 1)\,\mathbf{H} \tag{4.7}$$

C'est d'ailleurs à ce niveau qu'intervient l'effet de saturation, que nous ne prendrons pas en compte par la suite. Tous les matériaux seront supposés linéaires.

Comme l'approche PEEC impose des courants unidirectionnels dans les conducteurs élémentaires, la direction des courants liés est connue et est la même que celle des courants de conduction. Par extension de (4.7), il vient :

$$\tilde{\mathbf{J}} = (\mu_r - 1)\,\mathbf{J} \tag{4.8}$$

Les courants liés produisent donc un effet de levier sur les courants de conduction qui augmentent l'induction $\mathbf{B}$, mais pas l'excitation $\mathbf{H}$.

Courants liés de surface

Les courants de surface Ampériens ($\mathbf{M} \times \mathbf{n}$) permettent quant à eux le rebouclage des courants liés. En effet, les courants liés de volume ne participant pas à la conduction globale, ils ne peuvent se reboucler par le circuit extérieur et il est nécessaire d'introduire les courants de surface pour garantir qu'il n'y ait pas d'accumulation de charges en surface (voir figure 4.3).

Ces courants de surface contribuent donc à garantir la condition de passage :

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{ext} - \mathbf{H}_{int}) = 0$$

à l'interface entre fer et air, soit la conservation du champ $\mathbf{H}$ tangentiel à l'interface :

$$\mathbf{H}_{ext}^T = \mathbf{H}_{int}^T$$

Nous verrons par la suite que la condition de passage à l'interface peut être utilisée pour l'évaluation des courants de surface.

4.2.2 Traduction du modèle Ampérien dans l'approche PEEC

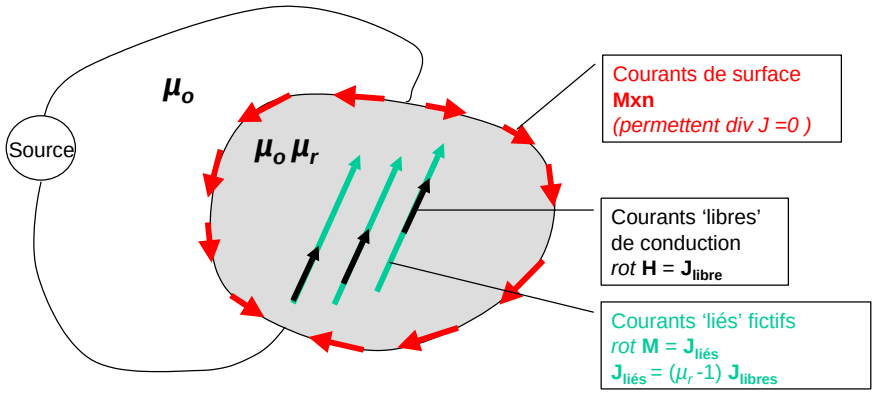


FIG. 4.3 – Principe de l'équivalence ampérienne

Comme nous l'avons vu, il est possible de remplacer les matériaux ferromagnétiques par des matériaux de perméabilité équivalente à celle du vide, si on leur adjoint des courants liés proportionnels aux courants de conduction qui s'y développent.

Dans cette hypothèse, on peut reprendre l'approche PEEC, moyennant quelques modifications.

Dans le volume des matériaux ferreux, l'aimantation est considérée comme un terme source [Robinson 73], générateur de champ. Elle contribue ainsi au même titre qu'une densité de courant de conduction au champ **B** et au potentiel vecteur **A** [Jackson 75], d'où, pour un élément k filiforme parcouru par un courant de conduction **J** :

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^0(\mathbf{J}) + \tilde{\mathbf{A}}_k\left(\tilde{\mathbf{J}}\right) \tag{4.9}$$

où :

- $\mathbf{A}_k^0$ est le potentiel créé par **J** en espace libre (c'est le potentiel que créerait un fil identique de perméabilité μ_0),
- $\tilde{\mathbf{A}}_k$ est le potentiel créé par les courants liés fictifs $\tilde{\mathbf{J}}$,

Ainsi, comme les courants liés sont de même direction et directement proportionnels aux courants libres (4.8) :

$$\tilde{\mathbf{A}}_k\left(\tilde{\mathbf{J}}\right) = \mathbf{A}_k^0\left(\tilde{\mathbf{J}}\right) = \left(\mu_{r_k} - 1\right)\mathbf{A}_k^0(\mathbf{J})$$

d'où (4.9) devient :

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^0(\mathbf{J}) + \left(\mu_{r_k} - 1\right)\mathbf{A}_k^0(\mathbf{J}) = \mu_{r_k}\,\mathbf{A}_k^0(\mathbf{J}) \tag{4.10}$$

Remarque 26 *Tout l'intérêt de l'approche PEEC est ici de connaître la direction privilégiée du courant.*

Il est ainsi possible de remplacer le système étudié par un système équivalent, dont tous les matériaux ont la perméabilité du vide. Leur perméabilité réelle est alors prise en compte par l'existence de courants liés. Ce système équivalent rentre dans le cadre de l'approche PEEC, ce qui permet de reprendre la modélisation par éléments partiels :

$$\Delta V_i = R_i I_i + j\omega \sum_{k=1}^{N} M_{ik} I_k \tag{4.11}$$

Les courants considérés ici sont les courants de conduction ($I \sim \mathbf{J}$ dans le cas filiforme), qui participent à l'effet Joule. Le calcul des éléments R_i n'est pas impacté par l'introduction de courants liés.

Il est possible d'évaluer M_{ik} directement dans le système équivalent, en faisant intervenir $\mathbf{A}_k^0$:

$$M_{ik} = \frac{1}{I_k} \int_{S_i} \mathbf{A}_k \cdot d\ell_i = \frac{\mu_{r_k}}{I_k} \int_{S_i} \mathbf{A}_k^0 \cdot d\ell_i$$

$\mathbf{A}_k^0$ peut être directement obtenu par intégration de l'équation de Poisson (2.51), puisqu'il s'agit du potentiel en espace libre. Ainsi, partant des formulations PEEC standard, on peut noter :

$$M_{ik} = \mu_{r_k} \cdot M_{ik}^0$$

où M_{ik}^0 est la mutuelle calculée pour deux éléments de perméabilité μ_0.

On obtient alors l'expression suivante pour la matrice impédance $[Z]$:

$$[Z] = \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & R_i & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \mu_{r_k} M_{ik}^0 & \mu_{r_{(k+1)}} M_{i(k+1)}^0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

qui apparaît comme une simple multiplication des colonnes de la matrice PEEC du système homogène par la perméabilité relative des éléments associés.

Cette partie de l'équivalence permet de recréer l'épaisseur de peau dans les matériaux ferromagnétiques, ainsi que l'effet de réaction d'induit qu'ils créent. Cependant, l'équivalence est à ce stade incomplète puisque l'équivalence Ampérienne implique l'existence de courants de surface Ampériens. En effet, l'obtention du potentiel vecteur magnétique par (4.10) implique le non respect du théorème d'Ampère aux interfaces entre des milieux de perméabilité différente. L'homogénéisation du milieu assure la continuité de la composante tangentielle de **B** au lieu de celle de **H.**

4.2.3 Obtention d'un système auto-cohérent

Même si l'approche telle qu'elle a été présentée jusqu'ici est a priori valable dans des cas 3D (en restant dans l'approche PEEC), ce qui suit est plus problématique, puisque nous allons aborder la question des courants liés de surface. Par la suite, nous ne considérerons donc que l'approche 2D, ce qui simplifie sensiblement la démarche. Celle-ci doit cependant être adaptable à des modèles 3D.

Courants liés de surface et conservation de H tangentiel

Le cas du mur ferromagnétique infini excité par un film de courant (voir figures 4.4 et 4.5) permet de mettre en évidence le lien entre les courants liés de surface et la condition de passage à l'interface fer/air en champ tangentiel.

Ce problème, du fait de son caractère non-physique (les plaques sont supposées infinies en y et z, donc une énergie non bornée), présente une indétermination sur la valeur du champ pour les x tendant vers l'infini.

On considérera donc que l'on étudie que la moitié d'une géométrie qui est constitué par symétrie de la figure 4.5 par rapport à un plan $x = cste$ situé suffisamment loin de la surface de fer pour que le champ soit nul. Il n'y a donc pas d'interaction entre les 2 moitiés du dispositif.

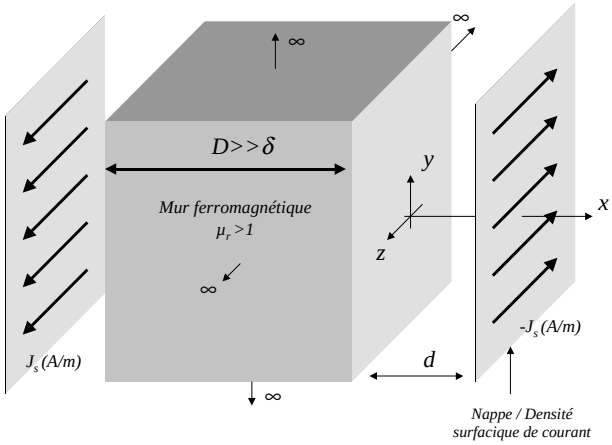


FIG. 4.4 – Cas du mur infini - Vue 3D

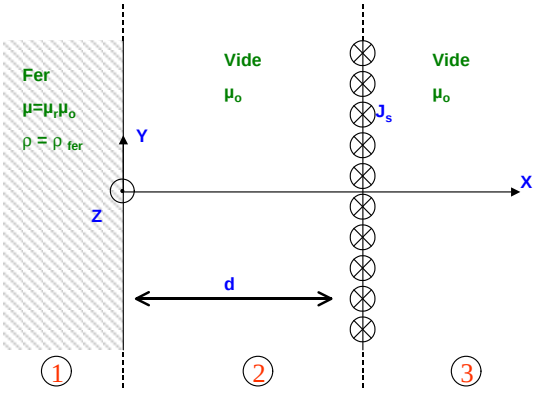


FIG. 4.5 – Cas du mur infini - Vue 2D

Ce cas d'étude est soluble analytiquement, du fait des symétries du problème. Les calculs sont développés dans l'annexe A. On est ramené à l'étude d'un problème unidimensionnel (selon l'axe x). Le champ magnétique est tangent au mur, et dirigé selon l'axe y.

On omet ici volontairement dans un premier temps les courants liés de surface. La carte de champ obtenue est donnée analytiquement sur la figure 4.6 et parallèlement par la méthode PEEC sur la figure 4.7. Le calcul PEEC est effectué ici tel qu'il vient d'être présenté, c'est-à-dire que l'on prend en compte les courants liés de volume uniquement.

Remarque 27 *Il n'est pas possible dans l'approche PEEC de modéliser un système infini, puisque l'on ne dispose d'aucun moyen permettant d'assigner des conditions aux limites. On doit donc se contenter de travailler sur de 'grandes' dimensions, et observer les effets loin des effets de bord, ce qui explique par exemple que A n'est pas strictement décroissant pour les x négatifs (on subit l'effet de bord lié à l'épaisseur finie du mur pour $x < 0$).*

L'étude des variations du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ ($\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$, seule la composante A_z, dans l'axe des courants est non nulle) montre que l'on reproduit la profondeur de peau dans le matériau. Par contre, à l'interface air/blindage, on observe la continuité du potentiel vecteur

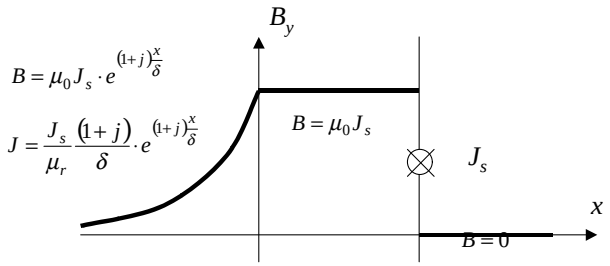


FIG. 4.6 – Etude avec une approche Ampérienne en omettant les courants liés de surface

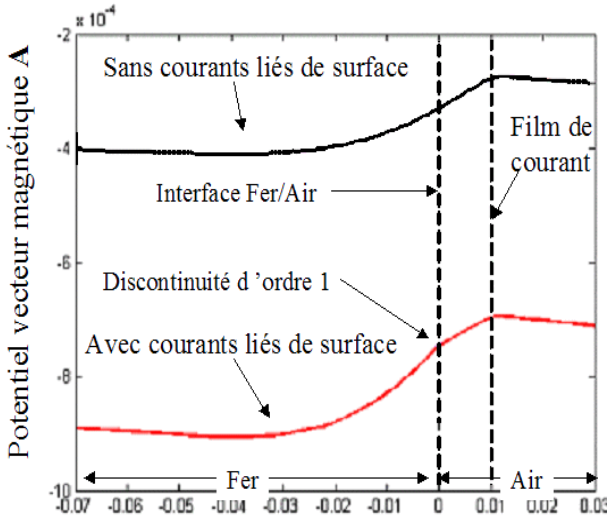


FIG. 4.7 – Résultats obtenus sur le cas du mur infini avec la méthode PEEC – Influence des courants de surface

à l'ordre 1, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} \\ B_{T_2} &= B_{T_2} \\ H_{T_2} - H_{T_1} &= \frac{(\mu_r - 1)\, B_{T_1}}{\mu_r \mu_0} = K_{surf} \neq 0 \end{aligned}$$

Remarque 28 *Le potentiel vecteur est défini à une constante d'intégration près.*

Il en découle l'existence d'une densité surfacique de courant K_{surf} *réelle* au niveau du métal, alors que l'on a considéré des courants dans le volume. Le niveau de courants induits dans le fer est erroné.

Ce constat conduit à introduire les courants liés de surface comme un moyen de rétablir la condition de passage en champ tangentiel à la surface du matériau.

Les courants ajoutés en surface des matériaux ferromagnétiques devront garantir la conti-

nuité de la composante tangentielle de l'induction **H**, lors de la traversée de ces interfaces :

$$H_{fer}^T - H_{air}^T = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\mu_r} B_{fer}^T - B_{air}^T = 0 \quad (4.14)$$

La figure 4.8 et la partie inférieure de la figure 4.7 montrent l'effet des courants liés ajoutés. Le détail des calculs est donné dans l'annexe A.

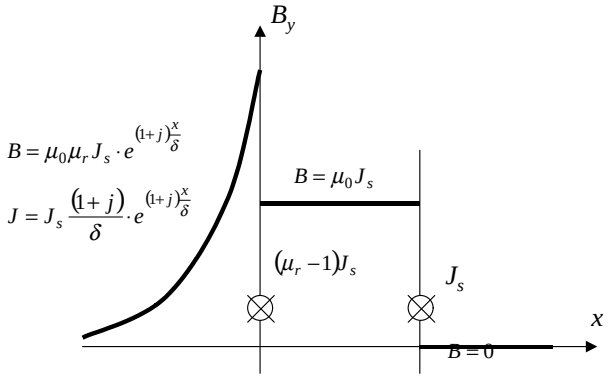


FIG. 4.8 – Etude par l'approche Ampérienne, avec prise en compte des courants liés de surface.

Nous allons à présent nous intéresser à des géométries bidimensionnelles. Dans le cas général, l'aimantation des matériaux n'est pas connue a priori, donc les courants liés de surface ne sont pas uniformes sur la surface des métaux, et sont également à déterminer.

Cependant, la relation (4.14) doit être vérifiée en tout point de la surface d'interface entre fer et air (ou métal non ferreux).

Comme les courants liés de surface contribuent au même titre que les courants libres et liés de volume au champ **B** total en tout point de l'espace, ils vont être vus comme les variables d'ajustement des conditions de passage.

Nous allons donc à présent montrer que cette condition permet l'écriture d'un système consistant permettant d'évaluer les courants de surface nécessaires pour corriger les conditions de passage, en même temps que l'évaluation des courants de conduction dont les niveaux dépendent des conditions aux limites des matériaux.

Ecriture sous forme matricielle

A chaque interface fer/air, une couche de subdivisions PEEC de surface est ajoutée (voir figure 4.9). Afin de ne pas se superposer à d'autres subdivisions, les éléments de surfaces doivent être disposés uniquement sur la face extérieure du matériau. La surface de fer n'est pas accrue. Nous allons voir que l'épaisseur de cette couche supplémentaire ne joue que sur la précision d'ajustement des conditions de passage.

Comme on l'a vu précédemment, les courants liés de volume ne nécessitent pas l'ajout de subdivisions, puisque l'on se contente d'ajouter un effet de levier sur le potentiel vecteur généré.

On travaille donc à présent sur un système constitué de n subdivisions PEEC divisées en :

– n_v subdivisions de volume (dans lesquelles on considère le courant libre de conduction)
– n_s subdivisions de surface (dans lesquelles circulent des courants liés de surface)

Chaque élément de surface va donner une variable d'ajustement : le courant qui le parcourt, soit un degré de liberté supplémentaire au système. Pour chaque élément de surface, on peut donc envisager de contrôler la condition de passage en un point, ce qui va imposer une équation du type de (4.14) supplémentaire à résoudre.

Le courant qui parcourt un élément de surface n'est bien évidemment pas directement responsable de la condition de passage (c'est-à-dire du champ **B** de chaque côté de l'interface) qui la traverse, puisque le champ pris en compte de chaque côté de l'interface est le champ total (créé par l'ensemble des subdivisions du système), mais il en est le facteur prépondérant, puisque la distance est minimale.

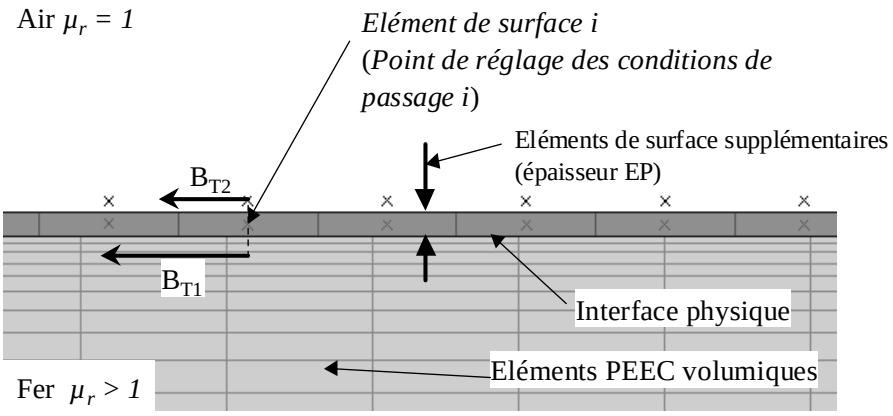


FIG. 4.9 – Ajout des éléments de surface

Considérant que l'on ajoute n_s éléments de surface pour recouvrir toutes les interfaces fer/air, on va ainsi avoir n_s conditions de passage à vérifier :

$$\forall i \in [1..n_s], \quad \frac{B_i^{T_1}(x_i, y_i)}{\mu_{i_1}} - \frac{B_i^{T_2}(x_i, y_i)}{\mu_{i_2}} = 0 \tag{4.15}$$

Le calcul du champ au point (x_i, y_i) de chaque côté de la frontière se fait par simple application de la formule de Biot & Savart (on a néanmoins recours à une approche 'fils fins' qui sera détaillée plus loin).

En effet, le champ créé en tout point du problème est la somme des contributions de chaque subdivision PEEC (y compris les éléments de surface). Chaque contribution $\mathbf{B}_i$ au champ **B** total peut s'exprimer linéairement en fonction du courant parcourant la subdivision ($\mathbf{K}_i$ ne dépend que de paramètres géométriques).

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}_i) = \int_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_{r_i} I_i \cdot \mathbf{d}\ell \times \mathbf{r}_i}{\mathbf{r}^3} = \mathbf{K}_i(\mathbf{r}_i) \cdot I_i$$

On peut donc exprimer le champ en tout point du problème comme une combinaison

linéaire des courants dans tout le problème, pour chaque composante :

$$\begin{aligned} B^x(x,y) &= \sum_i B_i^x(r_i) = \sum_i K_i^x(r_i)\cdot I_i = \begin{pmatrix} K_1^x & \dots & K_n^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \\ B^y(x,y) &= \sum_i B_i^y(r_i) = \sum_i K_i^y(r_i)\cdot I_i = \begin{pmatrix} K_1^y & \dots & K_n^y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que l'on projette tangentiellement à l'interface (il ne reste qu'une composante).

Ainsi, les n_s conditions de passage de (4.15) peuvent se mettre sous forme d'un système linéaire matriciel :

$$\begin{pmatrix} K_1^1 & & \vdots & & K_n^1 \\ & \dots & K_i^j & \dots & \\ K_1^{ns} & & \vdots & & K_n^{ns} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$[K]\cdot[I] = 0 \tag{4.16}$$

avec

$$K_i^j = \frac{1}{I_i}\left(\frac{B_i^{T_2}(x_j,y_j)}{\mu_{i_2}} - B_i^{T_1}(x_j,y_j)\right) \tag{4.17}$$

où $B_i^{T_2}$ et $B_i^{T_1}$ sont les composantes tangentielles (selon la normale à l'interface au point considéré (x_j, y_j)) du champ crée par la subdivision i.

Ainsi, le système considéré est maintenant :

$$\begin{aligned} [V] &= [Z]\cdot[I] \\ [K]\cdot[I] &= [0] \\ [Z] &= [R] + j\omega\,[M'] \end{aligned}$$

Les V_i sont les chutes de tension aux bornes des subdivisions, et les I_i les courants dans chaque subdivision, les éléments de surface étant considérés comme des subdivisions standards ; $[M']$ est la matrice des couplages calculée sur le système équivalent prenant en compte des courants liés.

4.2.4 Détail du calcul du champ pour les conditions de passage

Comme nous l'avons vu dans (4.17), il est nécessaire, pour tous les points de contrôle des conditions de passage, d'évaluer la valeur du champ **B** de part et d'autre de la frontière. Ce calcul nécessite quelques précautions particulières, puisque que l'on cherche à réaliser l'égalité (4.15), avec un $\mu_{r_{fer}}$ pouvant atteindre des valeurs importantes. Il y a une variation brutale de **B** au niveau de l'interface qui rend la précision de calcul du champ cruciale.

Deux points sont à prendre en compte pour ce calcul : le moyen d'évaluer finement la valeur du champ de part et d'autre de l'interface alors qu'il présente un saut important et la manière de l'évaluer dans le cadre de chemins de courants discrétisés par le maillage PEEC.

Approximation linéaire des variations de B

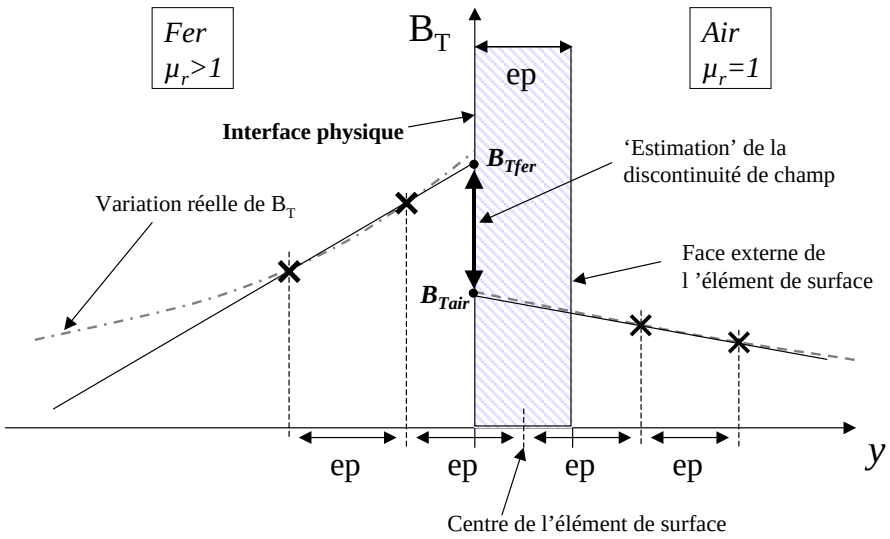


FIG. 4.10 – Principe de calcul des conditions de passage

Il est numériquement impossible d'évaluer le champ tangentiel de part et d'autre de la frontière trop proche de celle ci, à cause la variation brutale de B_T. Pour contourner ce problème, on procède à l'évaluation du champ en deux points de part et d'autre de l'interface comme indiqué sur la figure 4.10, ce qui permet de faire une approximation linéaire des variations du champ pour en déduire la valeur à l'interface.

Dans l'air, les variations du champ sont a priori quasi-linéaires. Dans le fer, les variations du champ proche de l'interface sont a priori guidées par l'épaisseur de peau. Il suffit donc de choisir une épaisseur d'éléments de surface suffisamment faible[3] devant δ pour garantir la qualité de l'approximation linéaire.

Approche fils fins

Malgré la précaution citée précédemment, on est amené à calculer le champ proche des subdivisions portant le courant et même à l'intérieur de celles-ci lorsque que l'on calcule le

[3] Typiquement : un rapport 10 est amplement suffisant. On doit cependant prendre garde à la largeur associée des subdivisions, car les formulations risquent de diverger pour des subdivisions trop 'écrasées'. Cependant, les tests effectués montrent qu'un rapport largeur/épaisseur de 1000 pour des subdivisions longues de 1m ne pose pas de problèmes.

champ du côté du matériau. L'évaluation directe du champ par la formule de Biot & Savart en assimilant simplement les conducteurs à des cylindres de section équivalente (variation linéaire du champ dans le conducteur puis décroissance en 1/r) s'avère largement insuffisante dans ce cas [Guichon 01a]. Il est donc nécessaire d'avoir recours à une approche dite de fils fins, qui consiste à décrire une subdivision PEEC parcouru par un courant uniforme comme un assemblage de 'fils fins'. Cette approche [Clavel 04] fournit des expressions analytiques du champ rayonné par un conducteur parallélépipédique à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du conducteur.

Cette approche a ici été employée avec succès, à la fois pour l'écriture des équations de conditions de passage et pour l'évaluation du champ total après résolution, en post-traitement.

Nous allons à présent nous intéresser à la résolution du système (4.18).

4.2.5 Résolution d'un système linéaire

La définition du circuit extérieur fixe les équipotentielles aux bornes des subdivisions d'un même conducteur de chaque côté du conducteur, ainsi que le raccordement des sources et charges. Cependant, pour les éléments de surface, on ne connaît pas a priori le courant qui les traverse, et donc pas non plus la chute de tension associée. On dispose cependant du nombre d'équations supplémentaires suffisant grâce à (4.16).

La résolution du schéma électrique équivalent étant dévolue à un solveur circuit générique [Guichon 01a], on peut résoudre tout circuit composé de branches électriques (l'élément de base) dont les connexions sont faites par nœuds. Toutes les branches possèdent leurs caractéristiques propres, ainsi que des éléments de couplage (un couplage inductif mais aussi résistif est ici nécessaire, même s'il n'existe pas de représentation physique directe) avec les autres branches du circuit.

Il suffit donc de fournir au solveur la manière dont les subdivisions sont connectées, et la matrice de couplage pour résoudre le système.

Système complet

Dans un premier temps, pour rentrer dans ce cadre générique, une solution va consister à rajouter n_s branches électriques fictives, ce qui nous permettra d'intégrer le nombre équivalent d'inconnues et d'équations. En effet, du point de vue du circuit électrique, les subdivisions de surface présentent 2 inconnues : le courant les traversant, et la chute de tension associée.

Pour faciliter la compréhension, nous allons supposer que les subdivisions PEEC ont été ordonnées de manière à les regrouper par nature :

- les subdivisions constituant les éléments volumiques de 1 à n_v (exposant v).
- les subdivisions constituant les éléments surfaciques de $n_v + 1$ à n_s (ou de 1 à n_s avec exposant s).

$$[I] = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \end{array}\right) \quad [V] = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} V_1^v \\ \vdots \\ V_{n_v}^v \\ \hline V_1^s \\ \vdots \\ V_{n_s}^s \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} V_1^v \\ \vdots \\ V_{n_v}^v \\ \hline V_1^s \\ \vdots \\ V_{n_s}^s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Z_v & Z_{vs} \\ \hline Z_{sv} & Z_s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} K_v & K_s \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de contrôler l'alimentation en courant des éléments de surface, chaque élément est associé à une branche électrique supplémentaire fictive couplée, qui permet la transposition du système d'équations sous forme de circuit électrique. Cette branche n'a aucune réalité physique, mais sa présence est indispensable, pour ne pas avoir de circuit 'ouvert' au niveau du solveur circuit. Cet élément sera un élément R-L (pas forcément positif) classique, avec couplage mutuel (pas forcément symétrique).

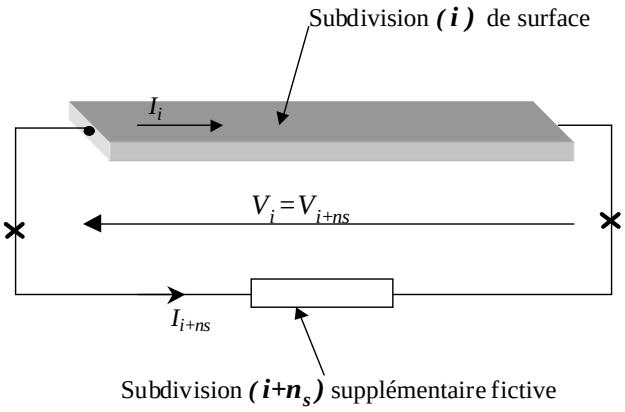


FIG. 4.11 – Ajout de subdivisions pour la prise en compte des équations supplémentaires

On travaille donc à présent sur un système à $n+n_s = n_v+2n_s$ branches électriques couplées (hors sources et charges extérieures) :

$$\left[\tilde{V}\right] = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n+n_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^v \\ \vdots \\ V_{n_v}^v \\ \hline V_1^s \\ \vdots \\ V_{n_s}^s \\ \hline\hline V_1^f \\ \vdots \\ V_{n_s}^f \end{pmatrix} \qquad \left[\tilde{I}\right] = \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_{n+n_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \\ \hline\hline I_1^f \\ \vdots \\ I_{n_s}^f \end{pmatrix}$$

- Les branches 1 à n_v sont des subdivisions PEEC de volume.
- Les branches notées s correspondent aux n_s subdivisions réelles de surface.
- Les branches notées f correspondent aux n_s subdivisions fictives associées aux éléments de surface.

Le circuit électrique associé va être résolu, avec comme matrice de couplage entre branches :

$$\left(\begin{array}{c} V_1^v \\ \vdots \\ V_{n_v}^v \\ \hline V_1^s \\ \vdots \\ V_{n_s}^s \\ \hline\hline V_1^f \\ \vdots \\ V_{n_s}^f \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc||ccc} [Z_v] & & [Z_{vs}] & & & [0] & \\ \hline & R_s & & 0 & & & \\ [0] & & \ddots & & & [0] & \\ & 0 & & R_s & & & \\ \hline\hline & & & & -R_s & & 0 \\ [K_v] & & [K_s] & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & -R_s \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \\ \hline\hline I_1^f \\ \vdots \\ I_{n_s}^f \end{array}\right)$$

avec R_s une résistance équivalente affectée aux éléments de surface. R_s peut être fixée arbitrairement à 1 par exemple.

Le solveur circuit va imposer $V_i^s = V_i^f$ et $I_i^s = -I_i^f$. On fait apparaître des résistances négatives qui n'ont pas de réalité physique, mais sont une traduction en schéma électrique des équations. Elles peuvent être prises directement unitaires comme ici, mais on peut éventuellement adapter la valeur de R_s pour assurer le bon conditionnement de la matrice. On remarque également que l'on a supprimé les parties $[Z_{sv}]$ et $[Z_s]$ de la matrice impédance initiale, puisque seule l'action des éléments de surface sur les autres éléments à un intérêt, la réciproque étant inutile.

Le système ainsi décrit permet la résolution globale du système, en considérant les courants de surface comme des subdivisions physiquement présentes. Cependant, on constate que pour obtenir un système digérable par le solveur circuit générique, il est nécessaire d'augmenter la taille du système, ce qui est fortement pénalisant en terme de temps de calcul.

Système minimal

Il est cependant possible d'extraire de ce calcul des relations matricielles :

$$\left(\begin{array}{c} [V^v] \\ \hline [V^s] \\ \hline\hline [V^f] \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} V_1^v \\ \vdots \\ V_{n_v}^v \\ \hline V_1^s \\ \vdots \\ V_{n_s}^s \\ \hline\hline V_1^f \\ \vdots \\ V_{n_s}^f \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c} [I^v] \\ \hline [I^s] \\ \hline\hline [I^f] \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I_1^v \\ \vdots \\ I_{n_v}^v \\ \hline I_1^s \\ \vdots \\ I_{n_s}^s \\ \hline\hline I_1^f \\ \vdots \\ I_{n_s}^f \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} [V^v] &= [Z_v] \cdot [I^v] + [Z_{vs}] \cdot [I^s] \\ [0] &= [K_v] \cdot [I^v] + [K_s] \cdot [I^s] \end{aligned}$$

qui permettent d'isoler les subdivisions PEEC 'réelles' (hors éléments de surface et branches associées)

$$[V^v] = \Big([Z_v] - [Z_{vs}] \cdot [K_s]^{-1} [K_v]\Big) \cdot [I^v]$$

La résolution de ce système réduit ne fournit pas directement les courants de surface, mais est suffisant pour déterminer les courants de conduction dans le système.

La deuxième relation permet ensuite de remonter à la valeur des courants liés de surface,

$$[I^s] = -[K_s]^{-1} \cdot [K_v] \cdot [I^v]$$

qu'il ne faut bien sûr pas omettre pour l'évaluation a posteriori du champ total dans le système.

L'intérêt de ce calcul est de réduire sensiblement la taille du système linéaire à résoudre. Si l'on omet les composants électriques extérieurs, la taille de la matrice à inverser est donnée par le nombre d'éléments de volume n_v. Il faut bien sûr préalablement inverser la matrice $[K_s]$, de taille n_s.

Le coût de calcul est donc bien inférieur à la première solution proposée, où il fallait directement inverser une matrice $n_v + 2 \cdot n_s$.

Nous allons à présent tenter de valider l'extension proposée de la méthode PEEC, à laquelle on se référera fréquemment sous le nom $'\mu PEEC'$.

4.3 Validation analytique

Outre le cas du mur semi-infini qui nous a servi à introduire la méthode d'obtention des courants de surface, il paraît intéressant de valider l'approche proposée sur un cas plus représentatif (donc réellement 2D).

Il s'avère que les cas de comparaison solubles analytiquement ne sont pas légion, puisqu'il est souvent nécessaire d'imposer des conditions aux limites ou, pour évacuer les problèmes aux interfaces, de les repousser à l'infini.

Considérons donc le cas de la plaque métallique infinie (mais d'épaisseur finie) soumise au champ d'un fil conducteur [Del Vecchio 03].

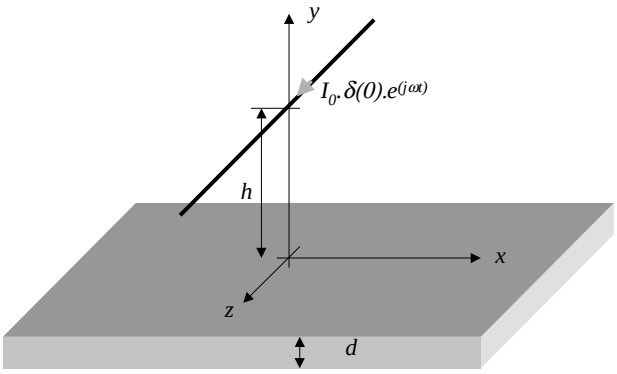


FIG. 4.12 – Plaque métallique excitée par un fil de courant

Ce problème est soluble analytiquement grâce au caractère infini de la plaque, que l'on exploite pour travailler avec des harmoniques spatiales. On considère d'abord un film de courant parcouru par un courant variable selon x qui décrit une harmonique spatiale. Le fil est alors vu comme un Dirac de courant et obtenu par sommation des contributions des harmoniques spatiales. Les calculs sont détaillés dans l'annexe C.

4.3.1 Résolution PEEC et comparaison

Ici encore, comme il n'est pas possible d'imposer des conditions aux limites pour prendre en compte le caractère infini de la plaque, on doit se contenter de travailler sur une grande largeur (1 mètre de part et d'autre du fil, pour une coupe 2D propagée sur 1 mètre).

Les caractéristiques du fer ($\mu_r = 300$, $\rho = 1.10^{-5}\Omega.m$) et l'épaisseur de peau associée ($\delta = 13mm$) donnent une profondeur de peau des courants induits significative par rapport à l'épaisseur de la plaque (d=400 mm, cette épaisseur peut paraître importante, mais elle a pour but de limiter l'impact des courants de retour, dont nous parlerons plus loin). Le maillage est de type géométrique, de manière à observer finement les variations de la densité de courant à l'aplomb du fil.

Un courant total de 1000 A est imposé dans le fil situé à 50 mm de la surface de la plaque.

La figure 4.14 montre une relativement bonne cohérence entre le calcul analytique et la résolution μPEEC lorsque l'on observe la décroissance de la densité de courant dans la profondeur de la plaque à l'aplomb du fil (sur un axe $X = 0$, orienté selon Y). Cependant, la valeur de la densité de courant à l'interface ($X = 0$, $Y = 0$) diffère sensiblement.

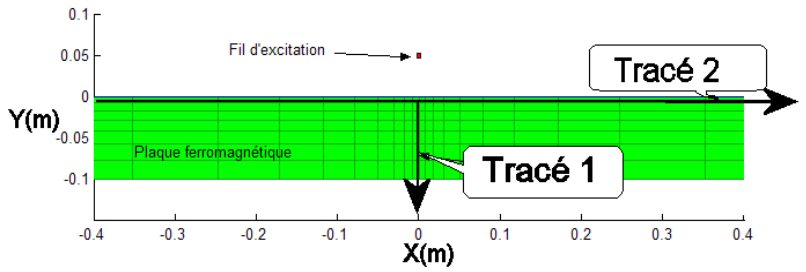
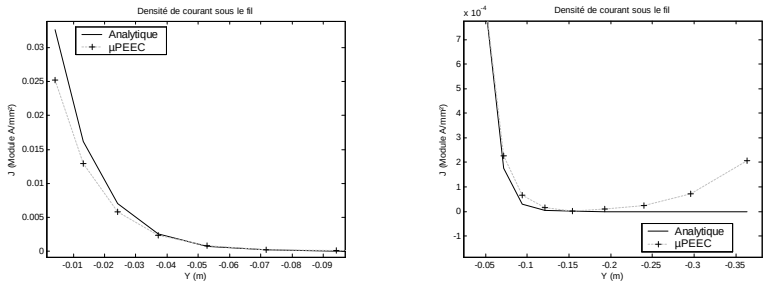


FIG. 4.13 – Modélisation μPEEC et définition des lignes de tracé de la densité de courant.



Entre $Y = 0$ et $Y = -100mm$ Entre $Y = -50$ et $Y = -400mm$

FIG. 4.14 – Densité de courant sur le tracé 1

Le relevé sur un tracé parallèle à la surface de la plaque de métal, 1mm sous l'interface (tracé 2), donne un résultat plus mitigé, puisque l'allure des deux courbes est parfaitement similaire, mais leur niveau diffère.

Nous allons à présent discuter des raisons de cet écart significatif entre calcul analytique et modélisation μPEEC qui ne doit pas être imputé à la méthode. Il montre simplement la limite des approches analytiques, qui imposent des hypothèses de calcul fortes et surtout 'non-physiques'.

4.3.2 Conclusion et mises en garde

Cet exemple peu paraître peu flatteur en terme de validation de l'approche proposée. Il n'en est en fait rien : l'écart constaté provient d'un problème classique. Il y a ici une différence fondamentale entre le problème que l'on résout analytiquement et ce qui peut être modélisé par la méthode PEEC.

Le problème résolu analytiquement n'est pas physiquement réaliste pour plusieurs raisons. La première est le caractère infini de la plaque. Cependant, cela ne pose pas ici de problème majeur, puisque cette plaque est un élément passif. Les courants induits qui s'y développent décroissent rapidement lorsque l'on s'éloigne du fil ce qui signifie qu'en 'coupant' la plaque à une distance suffisante du fil, on ne doit que peu modifier les résultats.

Ici le problème provient du rebouclage des courants à l'infini. En effet on considère d'une part un fil de courant de longueur infini, qui n'est rebouclé sur aucun conducteur modélisé et une plaque dans laquelle se développent des courants induits. Le courant global dans une

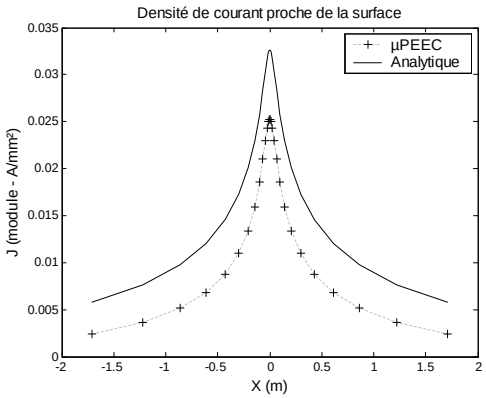


FIG. 4.15 – Densité de courant sur le tracé 2 (tracé parallèle à l'axe des X, Y=-1mm, Z=cste)

section de la plaque n'est donc pas nul et ces courants ne sont pas non plus rebouclés dans un conducteur présent dans le modèle. On se trouve donc confronté à un problème relativement récurrent : aller et retour des courants n'étant pas pris en compte, il est 'délicat' de définir quelque énergie que ce soit.

Ainsi, dans la modélisation PEEC, on voit apparaître des courants 'de retour' sur la face inférieure de la plaque. Ils sont responsables de l'allure de la figure 4.14 et garantissent un courant global nul dans la tôle. L'apparition de ces courants est inévitable et modifie le niveau de courant sur la face supérieure puisqu'ils sont en interaction avec le reste du système, d'où l'écart sur la figure 4.15. Le niveau de pertes associé est bien évidement légèrement sous-estimé.

Cet exemple 'non-démonstratif' est volontairement présenté ici, en guise de mise en garde et de justification aux essais de validation qui vont suivre. En effet, on doit se méfier de la modélisation de tout problème non-physique, en prêtant une attention toute particulière au rebouclage des courants 'à l'infini'. D'une manière générale, tout courant doit se reboucler à l'intérieur du dispositif modélisé. Le rebouclage de courants par la terre par exemple pourra se faire en modélisant ce conducteur 'hors d'influence' par une résistance de retour, mais il faudra veiller à la pertinence de cette hypothèse. Une bonne garantie est de s'assurer que la relation :

$$\iint_S J dS = 0 \tag{4.20}$$

est vraie sur une coupe S du dispositif (en 2D).

Remarque 29 *Cette mise en garde sera d'autant plus valable lorsque nous parlerons de notion d'inductance équivalente, puisque la notion même d'inductance n'a de sens que sur une boucle fermée (voir obtention de la tension (2.48)).*

Aussi allons nous à présent pour valider notre approche nous tourner dans un premier temps vers des validations numériques, certes moins 'nobles', mais qui permettront d'envisager des situations 'physiquement' plus acceptables. Il s'agit cependant de cas d'études, dont certaines caractéristiques (matériaux, dimensions ..) ne sont pas réalistes, mais sont 'représentatifs' en terme d'effets.

Puis nous conclurons par une validation expérimentale qui montrera une application intéressante de l'approche développée.

4.4 Validations numérique

Quelques cas d'études sont présentés ici pour confronter l'approche PEEC étendue proposée (μPEEC) à des simulations éléments finis réalisées avec FLUX 2D (v. 8.1 Patch D [Flux 04]). Tous les exemples présentés ici sont réalisés dans l'approximation 2D : on considère les conducteurs en sections droites propagées sur une longueur de 1m.

Nous nous reposerons grandement sur la robustesse de FLUX qui est souvent considéré comme une référence de validation. Ces cas d'étude vont permettre de valider la méthode, tout en mettant en évidence les effets que l'extension permet de prendre en compte. Nous avons pris le parti de séparer les effets, pour les valider indépendamment.

4.4.1 Concentration des lignes de champ - Courants induits

Description

On considère un noyau ferromagnétique (de dimensions 40 mm × 400 mm, pour une longueur unitaire d'un mètre), excité par deux films de courant (situés à 30mm de la surface du noyau). Ces inducteurs minces (3mm) constituent l'aller et le retour d'un même chemin de courant (imposé pour une source de tension et une charge importante à 100 A). Le courant est réparti uniformément sur leur section (c'est-à-dire que le noyau magnétique est plongé dans un champ magnétique imposé par l'équivalent 2D d'un solénoïde – il n'y a pas d'effet de réaction d'induit). La fréquence d'étude est fixée à 50 Hz.

La surface du noyau est couverte d'éléments de surface corrigeant les conditions de passage (l'épaisseur est fixée à 0.1mm, pour une épaisseur de peau de 22,5 mm, conformément à 4.2.4)

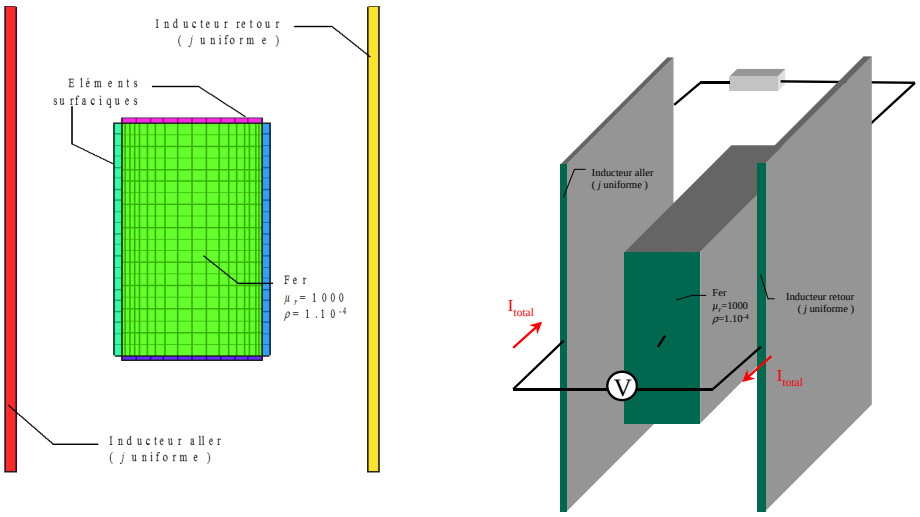
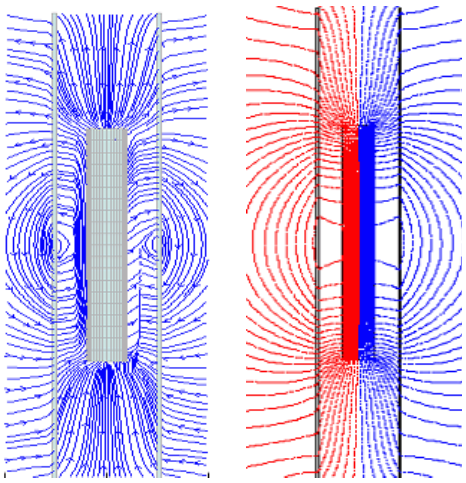


FIG. 4.16 – Description du dispositif (échelle non respectée)

Les caractéristiques choisies ici pour le fer ne sont pas réalistes, puisqu'il est très fortement résistif. Cela permet néanmoins de visualiser la diffusion du champ dans le matériau.

Le courant global dans le métal est imposé à 0, ce conducteur étant totalement passif. Cela implique que les courants induits sur une face se rebouclent sur l'autre pour garantir la nullité du courant total.

Cartes de champ

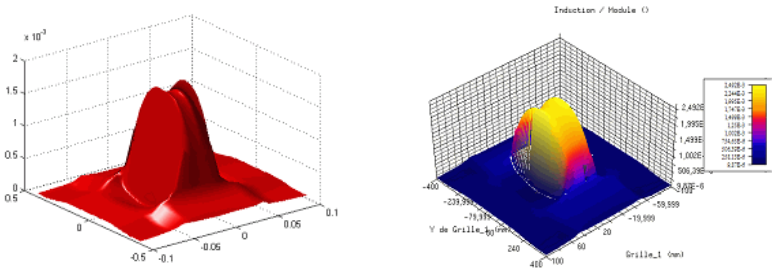


μPEEC FLUX

FIG. 4.17 – Comparaison des lignes de champ magnétique B (en phase avec le courant).

On vérifie bien ici l'effet de canalisation des lignes de champ par le noyau métallique [Demoulin 00].

Une comparaison plus fine peut être observée en dressant la carte de champ magnétique **B** total (en module).



μPEEC FLUX

FIG. 4.18 – Comparaison des cartes de champ B (en module)

La figure 4.19 dresse la carte de l'erreur relative entre les modélisations FLUX 2D et PEEC étendue sur la valeur du champ. La cohérence est bonne, les zones présentant l'erreur la plus importante sont les zones frontières, comme on pouvait s'y attendre, puisqu'il s'agit de zones proches des subdivisions, avec des courants localisés sur les surfaces.

L'erreur relative maximum relevée est de 3,8% sur le module de **B** en phase avec le courant (partie réelle). L'accord avec le calcul FLUX peut donc être considéré comme excellent, puisque le maillage PEEC employé est assez faible (430 mailles pour tout le problème, y compris les

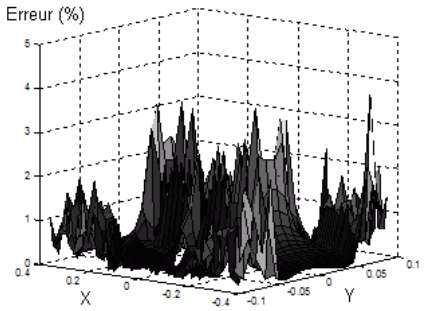


FIG. 4.19 – Erreur relative (%) sur les cartes de champ μPEEC vs. FLUX

éléments de surface. Il y a seulement 20 éléments de surface sur la hauteur du noyau[4]). De plus, il s'agit là d'un post-processing. L'erreur cumule donc l'erreur de résolution du système après calcul approché des conditions de passage aux interfaces et l'erreur d'évaluation du champ total pour établir la cartographie.

Densités de courants induits

La comparaison de la diffusion du courant de conduction induits à l'intérieur du fer permet également de vérifier la cohérence du modèle proposé. Comme le montre la figure 4.20, la variation de la densité de courant sur une ligne horizontale coupant le noyau en son milieu est correcte.

Ce point est important dans le cadre d'application qui a motivé cette extension de la méthode PEEC, puisque nous nous intéressons aux pertes par effet Joule, qui nécessitent une bonne connaissance des densités de courant partout dans les conducteurs (ferreux ou non).

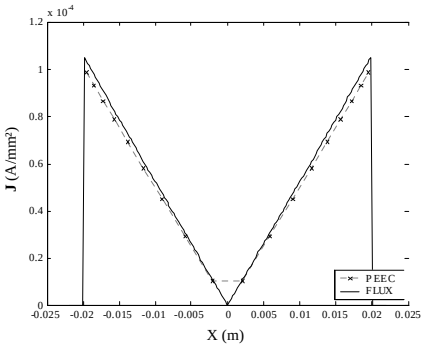


FIG. 4.20 – Densité de courant (en module) sur une coupe horizontale au centre du fer

Etude fréquentielle

Une étude fréquentielle montre également que la méthode proposée reste valable en faisant

[4]Pour comparaison, le maillage employé sous FLUX 2D nécessite environ 2800 éléments surfaciques (le maillage des 2 plaques d'excitation, très minces, est pénalisante pour le raccord avec l'air, ce qui n'est pas le cas avec le maillage PEEC). Les temps de calcul sont comparables, de l'ordre de 2 minutes.

	FLUX		μPEEC		Ratio μPEEC/FLUX	
f(Hz)	P_{fer}(W)	J_{max}(A/mm^2)	P_{fer}(W)	J_{max}(A/mm^2)	P_{fer}	J_{max}
10^{-6}	$1{,}74.10^{-18}$	$2{,}12.10^{-12}$	$1{,}56.10^{-18}$	$1{,}98.10^{-12}$	90%	94%
1	$1{,}74.10^{-6}$	$2{,}12.10^{-6}$	$1{,}56.10^{-6}$	$1{,}98.10^{-6}$	90%	94%
10	$1{,}74.10^{-4}$	$2{,}12.10^{-5}$	$1{,}56.10^{-4}$	$1{,}98.10^{-5}$	90%	94%
50	$4{,}28.10^{-3}$	$1{,}06.10^{-4}$	$3{,}85.10^{-3}$	$9{,}80.10^{-5}$	90%	93%
100	$1{,}64.10^{-2}$	$2{,}11.10^{-4}$	$1{,}48.10^{-2}$	$1{,}97.10^{-4}$	91%	93%

TAB. 4.1 – Evolution des courants induits dans le 'fer' avec la fréquence

varier l'épaisseur de peau dans le fer (dans des limites acceptables aux vues du maillage qui est resté constant).

On s'intéresse ici à deux grandeurs : la densité maximale de courant dans le fer qui traduit l'exactitude du niveau de champ à l'interface avec l'air, et la puissance dissipée, qui permet de vérifier globalement que les variations de J sur la section sont correctes.

On vérifie un bon suivi en fréquence, ce qui permet en outre de vérifier le bon comportement en statique [Chen 02] de l'approche proposée (voir figure 4.21). En effet, les résultats restent valides à fréquence quasi-nulle (elle n'a pu être fixée à 0 exactement pour des raisons uniquement techniques). On peut donc prendre en compte les effets de blindage statique, bien que dans l'approche PEEC, tous les effets induits se fassent par des couplages inductifs, qui disparaissent à fréquence nulle.

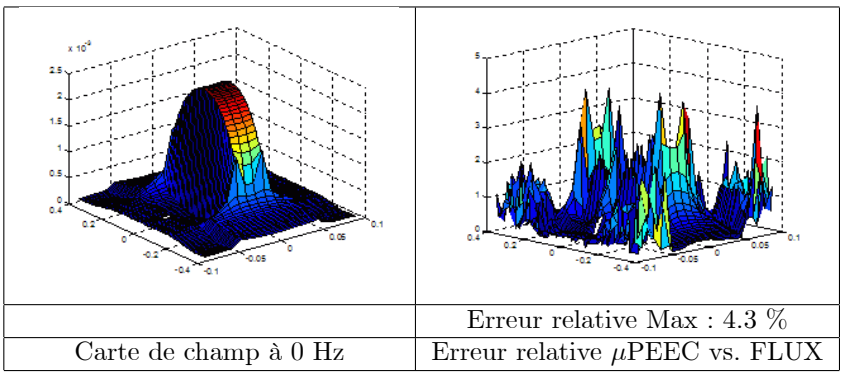


FIG. 4.21 – Comportement en régime statique (fréquence nulle)

On note également ici une légère tendance à la sous-estimation du niveau des pertes. Cette constatation n'a rien d'alarmant, puisqu'il s'agit d'une caractéristique inhérente à la méthode et que l'écart reste stable. L'effet du maillage PEEC tend à minorer la dispersion sur les densités de courant et donc sur les pertes (voir section 2.2.2).

4.4.2 Réaction d'induit

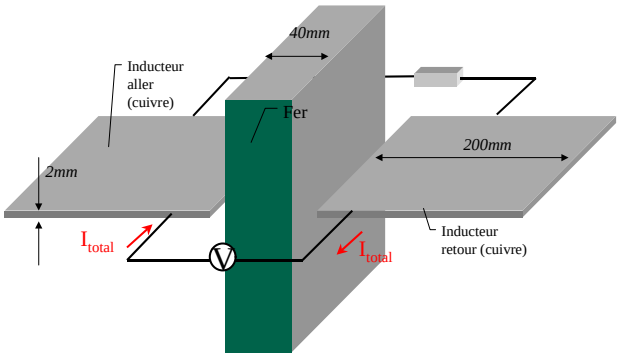


FIG. 4.22 – Dispositif étudié

Partant du cas de figure étudié au paragraphe 4.4.1, on s'intéresse à présent à un phénomène supplémentaire : la réaction d'induit ; c'est-à-dire que l'on va vérifier l'influence de la présence du matériau magnétique en terme de canalisation des lignes de champ sur la manière dont le courant se repartit dans les conducteurs sources.

Le noyau ferreux est donc le même que celui du cas d'étude précédent. On remplace simplement les films de courant inducteurs par un aller et retour par conducteur en cuivre méplat (voir figure 4.22).

Les dimensions des inducteurs (largeur=200mm, épaisseur=2mm, séparés de 5mm du noyau) sont exagérées pour augmenter l'impact de la profondeur de peau dans le cuivre.

On vérifie ici que la canalisation des lignes de champ par le noyau provoque la répulsion du courant à l'extérieur des inducteurs, ce qui valide le fait que la réaction d'induit soit bien prise en compte.

Ce point est important dans le cadre de cette étude, puisque l'on conçoit bien sur cet exemple que le design optimal (minimisant les dispersions de densités de courant) peut être dépendant de la proximité de carcasses métalliques canalisant ou non le champ rayonné.

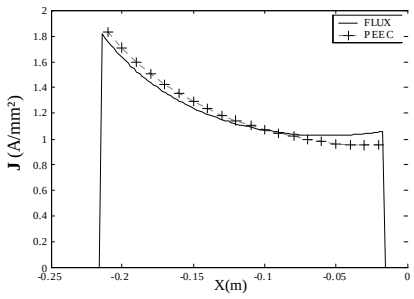


FIG. 4.23 – Comparaison de la variation de la densité de courant le long d'un inducteur (erreur sur la valeur du maximum : 7% , erreur sur la valeur du minimum :1%)

On vérifie par ailleurs plus globalement l'exactitude des distributions de courant en consolidant le niveau des pertes Joule, à la fois dans le cuivre (prise en compte de la réaction d'induit) et dans le fer (canalisation des lignes de champ).

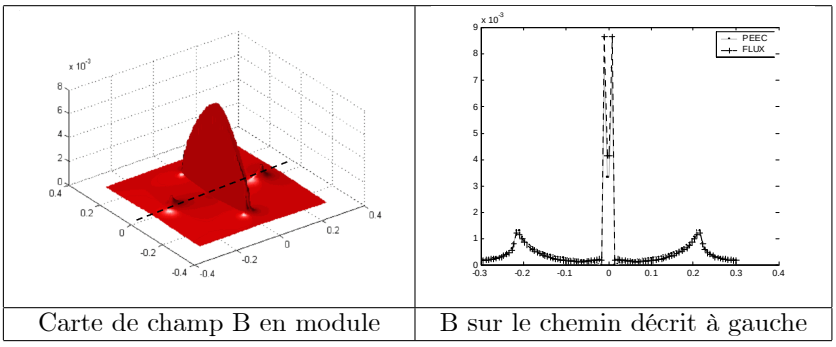
La légère sous-estimation du niveau de pertes par rapport à FLUX inhérente à la méthode PEEC reste présente, dans l'ordre de grandeur habituel de quelques %.

Pertes Joule	μPEEC	FLUX
Fer	0,102 W	0,112 W
Cuivre	10,9 W	10,6 W

TAB. 4.2 – Comparaison des pertes par effet Joule

La figure 4.24 compare le champ (en module sur l'axe horizontal, en $y = 0$), qui permet de vérifier le modèle dans la zone où il y a le plus de variations de champ.

C'est dans cette zone que le maillage est le plus critique, puisque les variations de champ se font dans deux directions. Cependant, quelques essais qualitatifs ont montré que l'influence en terme de réaction d'induit est négligeable.



Carte de champ B en module	B sur le chemin décrit à gauche

FIG. 4.24 – Carte de champ B

La figure 4.25 permet enfin de vérifier que les cartes de champ sont cohérentes, à la fois en phase et en quadrature.

Remarque 30 *Cette dernière vérification a simplement pour but de vérifier que les évaluations en module ne masquent pas une erreur de calcul importante qui donnerait des déphasages erronés.*

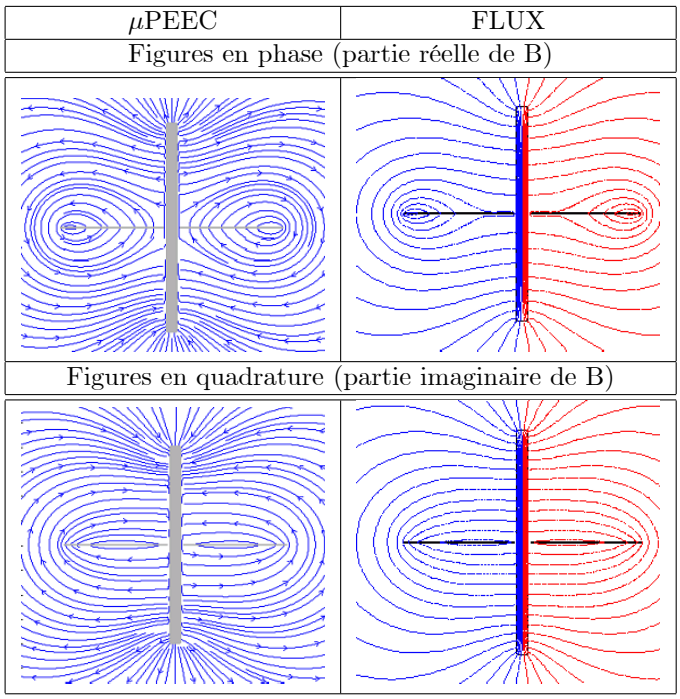


FIG. 4.25 – Comparaison des cartes de champ en phase et en quadrature

4.4.3 Conducteur ferromagnétique parcouru par un courant imposé

Avant de passer à un cas d'étude plus 'pratique', nous allons rapidement vérifier la validité de la méthode dans le cas où le matériau ferromagnétique n'est pas uniquement passif, mais est parcouru par un courant global de conduction non nul (cas de figure d'une canalisation préfabriquée avec défaut phase/enveloppe - voir section 4.6).

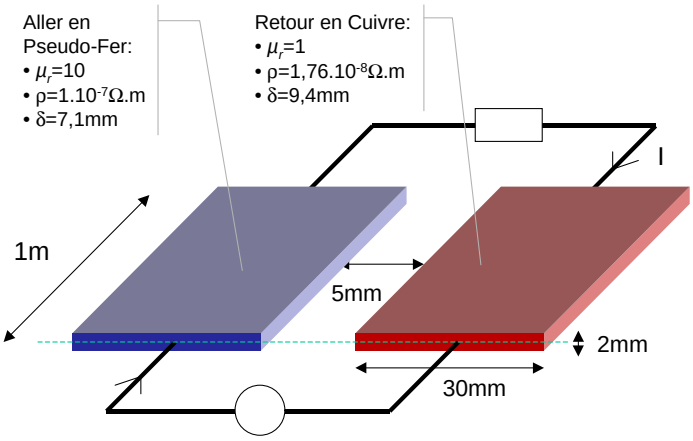


FIG. 4.26 – Boucle de courant avec conducteur aller ferromagnétique et conducteur retour en cuivre (à 50 Hz).

Le dispositif est représenté sur la figure 4.26. On réalise une boucle de courant non-homogène, l'aller étant en matériau ferromagnétique et le retour en cuivre. La perméabilité relative du conducteur aller a été fixée à une valeur faible, afin de pouvoir visualiser le champ **B** simultanément dans et hors des conducteurs sur la même échelle. La comparaison avec les résultats éléments finis (voir figure 4.27) montre une parfaite cohérence. Cela se traduit par un écart très faible sur les pertes par effet Joule sur les deux conducteurs.

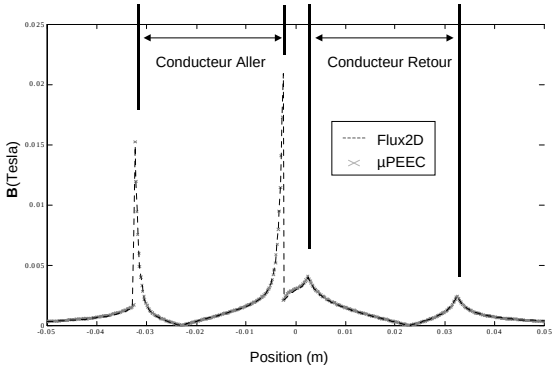


FIG. 4.27 – Relevé du champ **B** sur la courbe pointillée de la figure 4.26 - Comparaison entre méthode μPEEC et Flux2D

La faible variation de perméabilité à l'interface du conducteur aller permet une bonne précision numérique dans l'écriture de la matrice $[K]$ des conditions de passage (puisque les

discontinuités du champ tangentiel restent faibles), d'où une très bonne précision sur les courants induits.

	Conducteur Aller	Conducteur Retour
FLUX	16,66	2,948
μPEEC	16,64	2,947
Erreur	<0.2 %	<0.05%

TAB. 4.3 – Niveaux de pertes Joule comparés pour 100 A.

4.4.4 Jeu de barres OKKEN

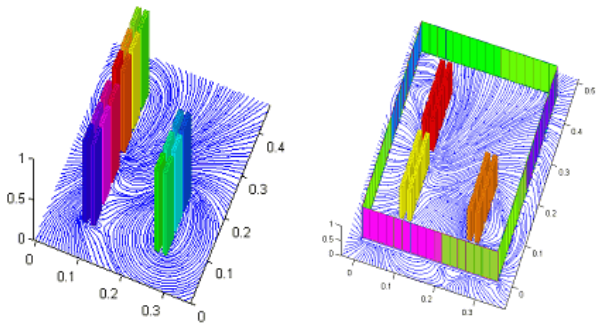


FIG. 4.28 – Dispositif étudié

Le but de ce dernier cas d'étude est de reprendre le jeu de barre traité pour l'optimisation de position (voir 3.2) afin d'évaluer sur un cas connu la pertinence du modèle proposé vis à vis de l'objectif d'optimisation.

Il s'agit d'un jeu de barres triphasé (sans neutre) constitué de 6 méplats de cuivre par phase (10mm x 40mm) pour un courant de 4000 A. L'ensemble est entouré d'une enveloppe métallique de faible épaisseur (0,7mm). L'optimisation a été réalisée sans prise en compte du blindage, qui a été rajouté a posteriori pour évaluer les pertes totales à l'aide d'une simulation EF [Guichon 02], [Guichon 00b].

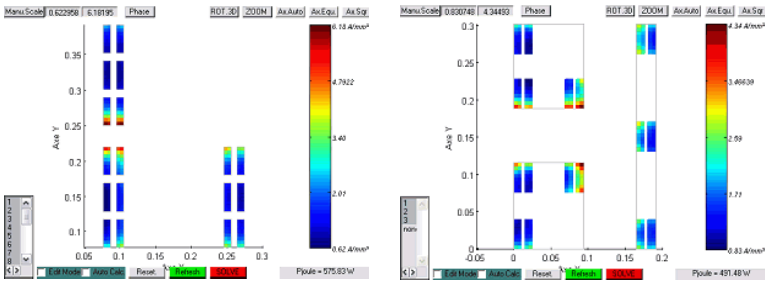


FIG. 4.29 – Relevés de densités de courant vs. Optimisation

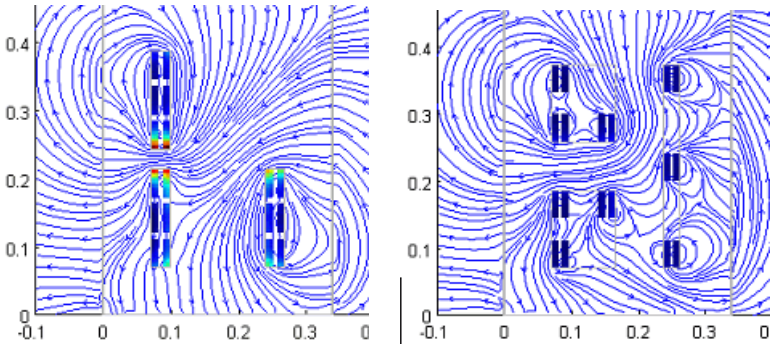


FIG. 4.30 – Carte de champ – Optimisation

Bilan des pertes – Optimisation & Tendances

Pertes (W/m)			μPEEC	FLUX	Ratio
Initial	Sans blindage	Total	576	617	93%
	Avec blindage	Blindage	111	166	67%
		Conducteurs	668	710	94%
		Total	779	876	89%
Optimisé	Sans blindage	Total	492	520	95%
	Avec blindage	Blindage	60	87	69%
		Conducteurs	540	570	95%
		Total	600	657	91%

TAB. 4.4 – Comparaison des pertes Joule vs. Optimisation et Blindage (l'optimisation a été effectuée sans tenir compte du blindage, qui est ajouté a posteriori)

Le tableau 4.4 fait le bilan des différents cas de figure. Les pertes dans le blindage sont assez nettement sous estimées ce qui est justifié par le fait qu'il n'y ait qu'une seule maille dans l'épaisseur de peau ($\mu_r = 1000$, $\rho = 2.10^{-7}$, $\delta = 1$mm or le fer à une épaisseur de 0,7mm ce qui permet, en première approximation de considérer le champ comme uniforme dans la profondeur du blindage) cela réduit ΔJ évalué et donc minimise la valeur calculée des pertes.

Mais les tendances sont conservées (voir tableau 4.5), ce qui laisse à penser que cette approche pourrait être valable dans le cadre d'une optimisation, puisque l'effet du blindage est pris en compte dans les bonnes proportions, même avec l'approximation grossière retenue ici.

Gains (%)		μPEEC	FLUX
Sans blindage	Total	-14,6%	-15,7%
Avec blindage	Blindage	-45,9%	-47,6%
	Conducteurs	-19,2%	-19,7%
	Total	-23,0%	-25,0%

TAB. 4.5 – Vérification des tendances – Gains sur les pertes par rapport à l'agencement initial

Le fait de travailler sur la matrice des subdivisions volumiques permet de réduire le coût de l'ajout des courants de surface, et donc d'améliorer le maillage, ce qui diminue l'erreur commise dans l'évaluation des pertes, et notamment dans l'épaisseur du blindage comme indiqué sur le tableau 4.6

Pertes (W/m)	μPEEC Grossier	μPEEC Fin	FLUX
Blindage	111	129	166
Conducteurs	668	673	710
Total	779	802	876

TAB. 4.6 – Comparaison des pertes Joule : Maillage fin vs. Maillage grossier

4.5 Points délicats

Criticité du maillage

Comme on l'a vu dans les cas étudiés, la tendance naturelle de la méthode PEEC est de sous-estimer les pertes. Cependant, l'erreur commise est très fortement dépendante du maillage, et ce essentiellement dans les zones de forte variation de la densité de courant. Un maillage géométrique proche des interfaces est donc fortement recommandé, sachant que la taille minimale des éléments à la surface 'fixe' en quelque sorte la valeur maximale de la densité de courant, cet effet se retrouve dans une moindre mesure dans le niveau des pertes, puisqu'il y a un effet de moyenne.

Traitement des coins

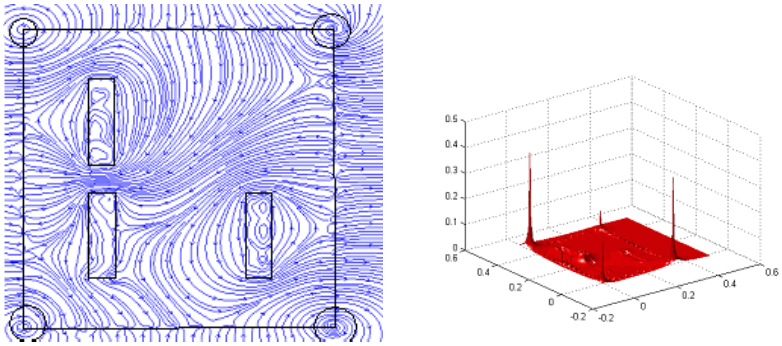


FIG. 4.31 – Okken - Lignes et module de B

Ce point est spécifique à l'extension proposée de la méthode PEEC. En effet, lorsque l'on traite le blindage par ajout d'éléments surfaciques sans précautions particulières dans les angles, on observe des figures de lignes de champ semblables à la figure 4.31

On fait apparaître injustement des courant très importants dans les angles, et plus précisément sur les faces intérieures des angles. Qualitativement, ce sont les courants de surface qui provoquent la courbure des lignes de champ dans l'angle.

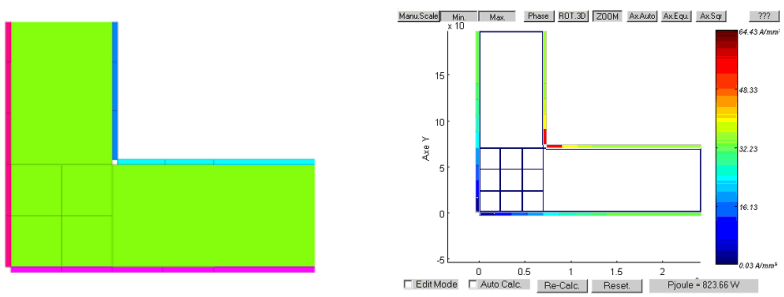


FIG. 4.32 – Maillage de surface dans les coins et courants dans les éléments de surface

L'existence de ces courants n'est pas physiquement à remettre en cause [Prechtl 97]. Cependant, ils doivent être quasi ponctuels d'où la nécessité de raffiner le maillage dans ce secteur, comme proposé sur la figure 4.32. La nécessité de raffiner le maillage dans l'angle est d'autant plus importante que l'épaisseur de blindage est faible dans ce cas d'étude.

La figure 4.32 propose un maillage des angles du blindage. Il n'y a qu'une maille dans l'épaisseur du blindage, ce qui est insuffisant pour évaluer finement les pertes dans le blindage (il en faudrait au moins 3) mais le maillage de surface permet en revanche une bonne prise en compte de la canalisation du champ par les tôles et de la réaction d'induit.

4.6 Validation expérimentale

Nous allons a présent proposer une validation de l'approche μPEEC développée sur un cas réel à base de canalisation préfabriquée. Nous pourrons ainsi directement confronter le résultat de nos simulations à des mesures expérimentales effectuées sur un banc de test réaliste.

Cette exemple va nous permettre d'une part de valider la pertinence de la modélisation retenue, puisqu'il ne s'agit plus ici de comparaison à un autre modèle numérique, mais également de mettre en lumière une application possible de la méthode, jusqu'ici passée sous silence.

On travaille ici directement sur des produits commercialisés, constitués de matériaux standards.

4.6.1 Canalisations préfabriquées Canalis type KS

Les canalisations de type KS sont des canalisations dites de moyenne puissance, de transport et de liaison, pour des calibres allant de 100 à 800A. Elles servent essentiellement à la distribution horizontale pour des densités de dérivations faibles à fortes (branchement d'un récepteur au maximum tous les mètres sur chaque face), mais aussi pour la distribution d'étages industrielle.

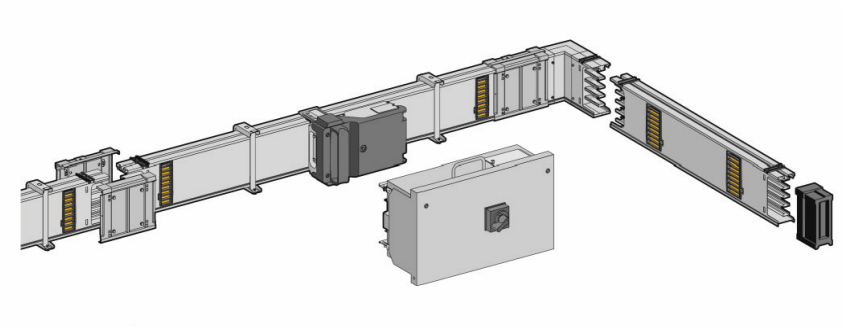


Fig. 4.33 – Système Canalis type KS (Source [Schneider 04])

Il s'agit d'un système modulaire à base de tronçons droits de 3 ou 5m assemblables par des systèmes d'éclissage. Des systèmes de coudes permettent les changements de direction ou une distribution arborescente.

La canalisation est constituée de 3 conducteurs de phase et un conducteur de neutre auxquels on associe un conducteur dit 'PE' (protective earth - 'V_0') qui est destiné au retour des courants de défaut, et donc à la protection des personnes. L'ensemble est enfermé dans une enveloppe en tôle métallique qui assure à la fois la tenue mécanique de l'ensemble et interdit l'accès aux conducteurs.

Le conducteur PE et l'enveloppe ne sont pas réellement distincts, puisqu'ils sont mis au même potentiel V_0 de proche en proche.

4.6.2 Extraction d'impédances

Nous avons jusqu'ici exploité la méthode PEEC essentiellement pour évaluer des pertes par effet Joule (après évaluation de la répartition des densités de courant). Cependant, la méthode PEEC a été initialement développée pour étudier les impédances de câblage.

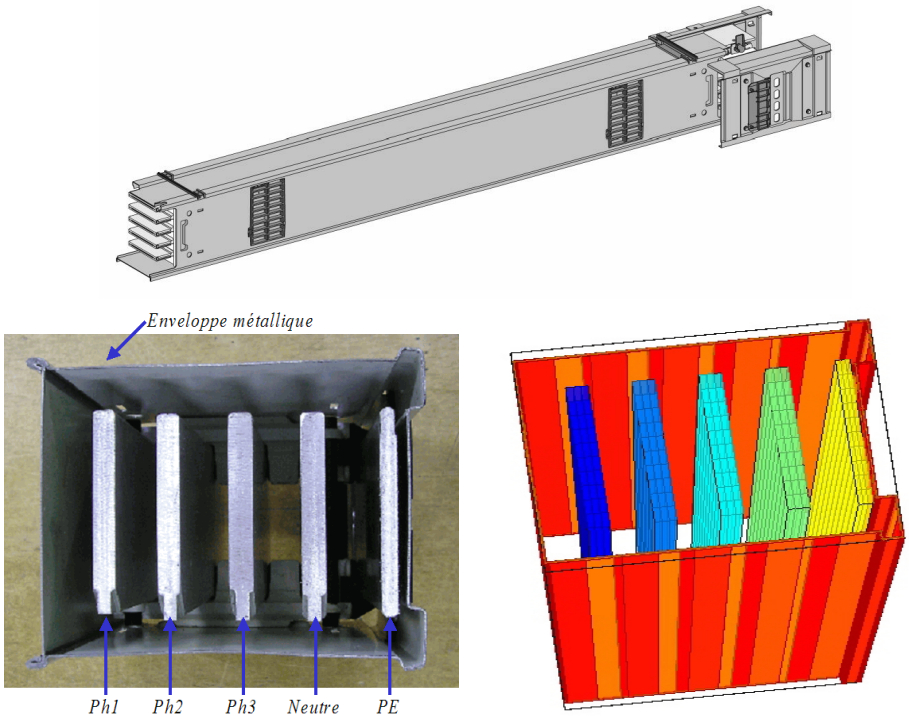


FIG. 4.34 – Modélisation d'un tronçon droit de canalis (Source fig. supérieure [Schneider 04])

Les deux notions ne sont pas du tout antagonistes : la façon dont le courant se répartit dans un système d'interconnexion définit son impédance, qui prend en compte les effets induits et donc les pertes, y compris dans les pièces passives.

Etant donné que la méthode consiste à transformer le système physique en schéma électrique équivalent, il est ensuite possible de réduire la taille du système obtenu (qui possède autant d'entrées-sorties que d'éléments de maillage). En effet, tous les éléments d'un même conducteur étant équipotentiels de part et d'autre, il est possible de réduire la taille du système au nombre physique de conducteurs accessibles comme le montre la figure 4.35.

La réduction du système s'apparente à une résolution partielle.

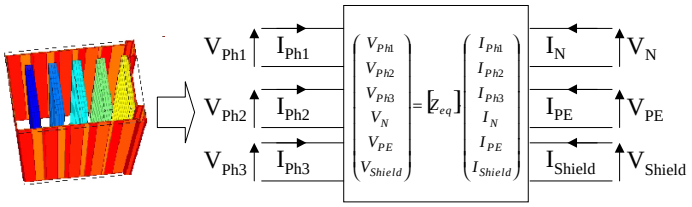


FIG. 4.35 – Obtention d'un schéma équivalent partiel réduit

On obtient un schéma équivalent partiel réduit. Attention cependant : la notion d'impédance partielle n'a ici encore pas de sens physique, il ne s'agit que d'un intermédiaire de calcul. Seul le raccordement sur un circuit extérieur avec aller et retour de courant dans le modèle donne un sens à ce schéma, d'après l'écriture de la tension (2.48).

Ainsi comme indiqué sur la figure 4.36, il suffit de raccorder ce schéma équivalent à une source de tension qui est assimilable à une 'sonde d'impédance'. Une résolution donne la chute de tension et le courant associé de la boucle réalisée, fournissant l'impédance de celle-ci.

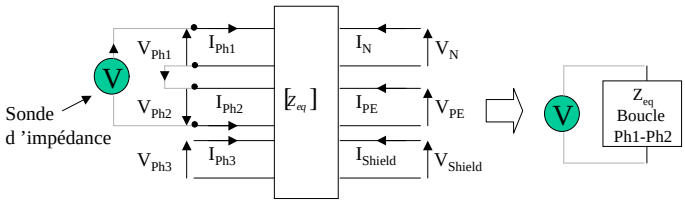


FIG. 4.36 – Obtention d'une impédance de boucle à partir du schéma équivalent partiel réduit

L'intérêt ici est bien sûr que tous les éléments partiels sont évalués une seule fois, indépendamment des raccordements. Il suffit ensuite de calculer l'impédance équivalente de toute boucle (qui a un sens physique) par une résolution circuit au 'coût' dérisoire.[5]

4.6.3 Impédances de boucles brutes

Les mesures effectuées consistent donc à évaluer les impédances de boucles sur la canalisation pour différentes configurations (ou chemins de la boucle de courant). L'évaluation de ces impédances est un élément important du dimensionnement des installations, puisqu'elles sont nécessaire au choix et au réglage des protections, la connectique du réseau restant la seule impédance limitant les courants en cas de mise en court-circuit ou mise à la terre accidentelle de conducteurs actifs.

La valeur de ces impédances donne une image de type 'boîte noire' de la canalisation pour les différents chemins aller et retour de courant (toutes les possibilités ne sont pas envisagées, on se contente des cas classiques, généralement requis pour les calculs de protection. On ne traitera pas par exemple les mises en parallèle de plusieurs conducteurs pour l'aller ou le retour).

Les impédances que l'on mesure prennent en compte à la fois :

- les effets inductifs : on décrit une boucle de courant *dans une enveloppe métallique*,
- mais également résistifs : le courant de la boucle induit des courants dans toutes les pièces conductrices, y compris l'enveloppe lorsqu'elle est passive. La puissance active (puisqu'il y a dissipation) fournie aux conducteurs passifs est prise en compte au niveau des conducteurs source, puisque le transfert se fait par couplage inductif : le système se comporte en quelque sorte comme un transformateur.

Nous nous intéressons donc au Canalis KSA 80, de calibre 800 A. La mesure des impédances s'est faite sur un banc de test (voir figure 4.37) qui assemble 3 tronçons de 3m pour avoir une mesure significative (ramenée ensuite à une longueur unitaire). Pour chaque mesure, on réalise la boucle à mesurer, qui est alimentée de manière à atteindre un courant de 800A. La chute de tension associée est relevée, ainsi que le déphasage courant/tension, ce qui permet de donner une valeur de l'impédance équivalente de la boucle avec une partie résistive et une partie inductive. La précision des mesures réalisées n'est pas exceptionnelle étant donné que nous ne disposions pas d'une charge à introduire dans le circuit d'essai. De ce fait, la régulation de courant se fait sur un circuit faiblement impédant (uniquement l'impédance de la boucle, qui

[5] A titre de comparaison, l'obtention des même informations par une modélisation éléments finis implique autant de résolutions que de boucles à évaluer, dans la mesure où le principe consiste à réaliser effectivement la boucle et à intégrer l'énergie électromagnétique sur le domaine.

est faible même pour une longueur de 9m : quelques 100 $\mu\Omega/m$, donc une charge de l'ordre du $m\Omega$ au mieux). La précision de mesure n'excède pas 5%.

Les résultats sont cependant, on le verra, globalement très satisfaisants, à l'exception de quelques écarts ponctuels (attribuables à une mauvaise stabilisation des grandeurs lors de la mesure).

FIG. 4.37 – Banc d'essai de la canalisation KSA 80, constitué de l'assemblage de 3 tronçons de 3 mètres

Le but n'étant pas ici de discuter des caractéristiques du Canalis KSA 80, les résistances et réactances sont ramenées à leur valeur obtenue avec les mêmes conducteurs en absence de blindage qui sert de base 100% (ces valeurs de référence, différentes pour chaque boucle, sont obtenues par modélisation PEEC standard). Les grandeurs données par le tableau 4.7 indiquent donc les variations d'impédances liées à la présence du blindage. On ne visualise pas ici les déséquilibres ou dissymétries entre les différentes boucles directement.

Le tableau 4.7 résume les impédances de boucle mesurées, et les compare aux grandeurs issues de la modélisation μPEEC.

		Mesures			μPEEC			Erreur relative		
Aller	Retour	R	X	*Z*	R	X	*Z*	**R**	**X**	*Z*
Ph1	Ph2	115%	122%	*118%*	100%	117%	*108%*	**-13,5%**	**-4,3%**	*-9,1%*
Ph2	Ph3	119%	119%	*119%*	100%	116%	*108%*	**-15,5%**	**-2,1%**	*-9,4%*
Ph1	Ph3	126%	132%	*130%*	105%	133%	*125%*	**-16,8%**	**0,7%**	*-4,1%*
Ph1	N	158%	154%	*155%*	117%	150%	*143%*	**-26,2%**	**-2,5%**	*-7,5%*
Ph2	N	136%	133%	*134%*	107%	132%	*125%*	**-21,3%**	**-0,4%**	*-6,8%*
Ph3	N	115%	110%	*113%*	102%	115%	*108%*	**-11,7%**	**4,6%**	*-4,6%*
Ph1	PE	171%	160%	*163%*	121%	158%	*150%*	**-29,1%**	**-1,7%**	*-8,2%*
Ph2	PE	147%	145%	*146%*	111%	141%	*133%*	**-24,4%**	**-3,1%**	*-9,1%*
Ph3	PE	128%	132%	*130%*	103%	125%	*117%*	**-19,2%**	**-5,1%**	*-10,4%*

TAB. 4.7 – KSA 80 - Impédances de boucle

Cette première approche donne un très bon ordre de grandeur des impédances des différentes boucles. On notera que l'effet du blindage qui diffère selon les conducteurs choisi est bien traduit. Cependant, si les inductances mesurées sont convenables, les parties résistives sont assez mal évaluées. On notera toutefois que l'impact sur la valeur globale de l'impédance n'est pas catastrophique, puisque l'erreur maximale est de 10%.

Cependant, nous avons cherché à affiner le modèle pour mieux comparer les résultats. Nous allons a présent voir que l'assemblage des tronçons et leur alimentation introduisent des éléments 'parasites' qu'il convient de prendre en compte pour avoir une modélisation conforme.

Remarque 31 *Notons que l'approche μPEEC n'est pas à remettre en cause, puisque des simulations éléments finis ont également été réalisées à titre de vérification et confirment les valeurs données (les différences entre FLUX (FEM) et μPEEC sont inférieures au %)*

4.6.4 Prise en compte des connexions

L'amélioration du modèle consiste en 2 points :
- la prise en compte des épanouissements aux deux extrémités du banc ;
- la prise en compte des résistances de contact au niveau des éclissages.

Les épanouissements sont visibles sur les figures 4.38. Ils sont nécessaires d'une part pour disposer de plages de raccordement pour l'alimentation (photo de gauche) et d'autre part à l'extrémité opposée pour réaliser le rebouclage du courant. Ces éléments ont été modélisés par la méthode PEEC (figure 4.39) pour en extraire les inductances équivalentes partielles qui peuvent être adjointes à la modélisation de la canalisation.

FIG. 4.38 – Epanouissements nécessaires au raccordements

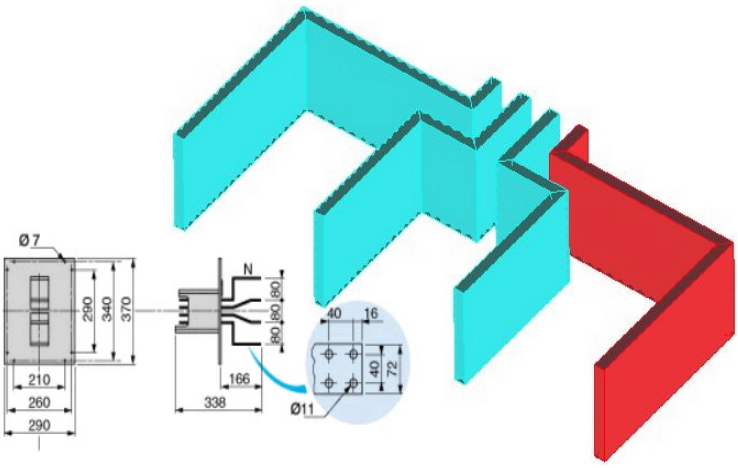


FIG. 4.39 – Modélisation PEEC de l'épanouissement

D'autre part, la mesure se faisant sur 3 tronçons pour avoir une impédance de boucle plus significative, on a recours aux systèmes d'éclissages représentés sur la figure 4.40. Ces systèmes de raccordement introduisent des résistances de contact (2 points de contact pour chaque conducteur à chaque éclisse, y compris pour les 2 épanouissements). La résistance introduite à

chaque contact est de l'ordre du $\mu\Omega$, ce qui n'est pas négligeable devant la résistance équivalente de la boucle.

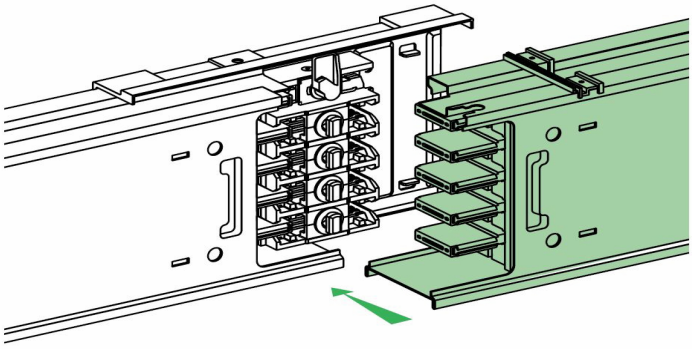


FIG. 4.40 – Raccordement de deux sections droites par un système d'éclissage (Source [Schneider 04])

Le tableau 4.8 présente les résultats du modèle corrigé. Les configurations utilisant le conducteur PE n'ont pas été traitées du fait de la difficulté de modéliser les raccords, qui se font par le contact de couvercles au niveau des éclissages.

		Mesures			μPEEC corrigé			Erreur relative		
Aller	Retour	R	X	*Z*	R	X	*Z*	**R**	**X**	*Z*
Ph1	Ph2	115%	122%	*118%*	106%	123%	*114%*	**-8,0%**	**0,9%**	*-3,7%*
Ph2	Ph3	119%	119%	*119%*	106%	120%	*112%*	**-11,0%**	**1,3%**	*-5,4%*
Ph1	Ph3	126%	132%	*130%*	111%	137%	*129%*	**-12,1%**	**3,4%**	*-0,9%*
Ph1	N	158%	154%	*155%*	123%	153%	*147%*	**-22,2%**	**-0,2%**	*-4,9%*
Ph2	N	136%	133%	*134%*	113%	136%	*129%*	**-17,0%**	**2,3%**	*-3,6%*
Ph3	N	115%	110%	*113%*	108%	121%	*114%*	**-6,2%**	**10,4%**	*1,0%*

TAB. 4.8 – KSA 80 - Impédances de boucle

Ces résultats sont à présent très satisfaisants, surtout en ce qui concerne la partie inductive, où l'erreur par rapport à la mesure reste faible (la valeur Ph3-N n'étant pas dans la tendance des autres valeurs, elle peut être considérée comme découlant d'une erreur de mesure). Il est même difficile d'espèrer mieux, puisque comme nous l'avons précisé, les incertitudes des mesures expérimentales peuvent facilement atteindre 5%, ce qui couvre l'écart entre mesures et modèle.

On constate en revanche une erreur non négligeable sur la partie résistive. Notons cependant que cette erreur est maximale pour la boucle la plus grande (Ph1 et Neutre sont les plus espacés) ce qui implique une grande surface de tôle en regard 'direct' de la boucle. La résistance équivalente relevée dans cette configuration est la plus importante. Cela laisse penser que le modèle de l'enveloppe n'est pas suffisant pour modéliser toutes les pertes. On n'a en effet pu prendre en compte les effets d'une saturation locale ou de pertes par hystérésis (on reste dans le cadre d'un modèle de pertes dans les matériaux ferromagnétiques simple : matériau linéaire et pertes 'classiques' par effet Joule seulement), ni prendre en compte le raccordement des tôles (qui sont plaquées) au niveau des éclisses.

Ce point peut difficilement être amélioré sans rentrer dans une (hasardeuse ?) description fine tridimensionnelle des éclissages. Cette dernière n'aurait d'ailleurs que peu d'intérêt en regard de l'erreur maximale inférieur à 6% sur l'impédance globale, dont une partie doit probablement être imputée à la mesure expérimentale.

On retiendra que l'approche μPEEC permet une très bonne estimation des impédances de boucle, qui nous permet également de prétendre modéliser convenablement les produits de type canalisations électriques préfabriquées.

4.6.5 Un mot sur le conditionnement - Valeurs propres du système

La modélisation de cette canalisation préfabriquée a été l'occasion de se pencher sur le délicat problème du conditionnement numérique du système à résoudre. Nous allons donc en dire quelques mots, sans pour autant malheureusement donner toutes les clés de compréhension, puisque cet aspect n'a été, pour l'instant, qu'effleuré. Disons que ce paragraphe se veut simplement être une mise en garde contre les effets d'un mauvais conditionnement qui ne sont pas facilement décelables, mais peuvent conduire à des résultats fortement erronés.

Lorsque l'on réalise une boucle aller-retour de courant sur la canalisation, il est possible d'évaluer la puissance active dissipée de deux manières :

- Une résolution en courant donne la connaissance des densités de courant partout, ce qui permet d'évaluer les pertes Joule par $\sum \rho \left|J\right|^2$,
- Du point de vue extérieur (point de vue circuit) : on peut évaluer la chute de tension associée au courant parcourant la boucle (pour simplifier, c'est l'équivalent de ce qui est fait pour extraire une impédance partielle réduite). Les pertes sont données par $\Re\left(UI^*\right)$.

La puissance calculée selon les 2 approches doit être la même puisque la puissance dissipée dans la canalisation (dans tous les conducteurs, actifs ou passifs) est fournie par le circuit extérieur (au travers des couplages internes à la canalisation).

Nous avons pu constater que la corrélation entre ces 2 valeurs est très nettement dépendante du maillage de surface des tôles ferromagnétiques. Le tableau 4.9 montre en effet que pour la même boucle de courant (ici aller par phase 1 et retour par le neutre), les puissances réactives et surtout actives vues par le circuit électrique extérieur varient sensiblement selon la largeur des éléments sur la surface des tôles, alors que le niveau des pertes évaluée à partir des densités de courant reste constante (on ne perçoit pas de variations sensibles sur les densités de courant).

Cette incohérence est assez difficile à déceler et peut induire des résultats erronés si on effectue un calcul d'extraction d'impédance équivalente. Notons que la puissance réactive équivalente est 'rapidement' bien évaluée ainsi que l'évaluation directe des pertes par les densités de courant.

Largeur maximale des éléments de surface $\mu PEEC$	P	Q
60 mm	42 W	155 VAr
30 mm	52 W	172 VAr
10 mm	77 W	174 VAr
5 mm	74 W	174 VAr
calcul par ρJ^2 (reste constant)	74 W	-
calcul équivalent par FLUX	74,8 W	179,4 VAr

TAB. 4.9 – Puissance vue du circuit électrique selon le maillage de surface des tôles d'enveloppe

Cette sensibilité au maillage laisse penser qu'un mauvais maillage introduit un mauvais conditionnement du système linéaire résolu. La différence entre les deux calculs traduit une imprécision du résultat qui n'est pas visible sur les courants locaux, mais apparaît seulement par une consolidation globale.

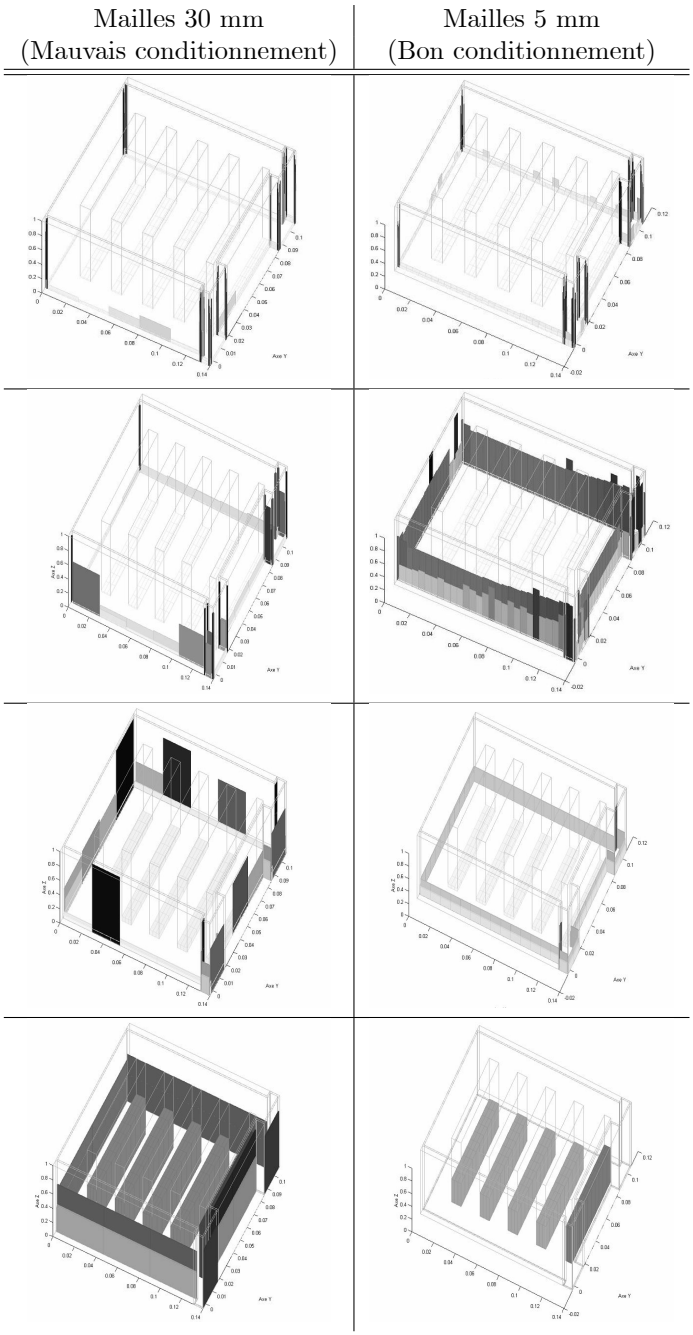
Nous avons donc observé les valeurs propres associées aux systèmes résolus, de manière uniquement qualitative. Le tableau 4.10 donne une représentation graphique de ces vecteurs propre. L'altitude sur chaque maille donne la moyenne sur l'élément de sa valeur dans les vecteurs propres, pondérés par les valeurs propres associées.

Les figures du haut commencent avec une échelle complète (on part des valeurs propres élevées). Chaque fois qu'on descend, l'échelle est tronquée dans sa valeur maximale d'un facteur 10 (les échelles ne sont pas les mêmes à gauche et à droite). Les valeurs dépassant le maximum sont mises à 0, pour ne pas masquer les autres.

Les vecteurs propres sont reliés au conditionnement du système [Ciarlet 82], [Chatelin 88]. Sans pour l'instant expliciter un critère de conditionnement à partir de ces résultats, l'ordre d'apparition des éléments semble donner un indice sur les mailles 'critiques'. Les éléments des angles (et à fortiori les faces intérieures des angles) sont pointés, ce qui n'est pas surprenant, puisque nous avons déjà relevé ce point comme délicat.

Cependant, alors que pour le problème bien conditionné les éléments de surface apparaissent de façon homogène, dans le cas de mauvais conditionnement, certaines zones sont mises en avant, ce qui sous-entend une plus grande sensibilité de la solution par rapport aux autres éléments équivalents. L'amélioration du maillage permet également de réduire l'écart entre les valeurs propres minimales et maximales.

Nous ne pousserons pas ici le raisonnement plus loin, car l'interprétation de ces résultats de manière quantitative n'est pas triviale. Cependant, il s'agit là sans conteste d'une piste à explorer pour disposer d'un critère d'évaluation de la qualité du maillage.



TAB. 4.10 – Trace de la moyenne des vecteurs propres : Partant du haut, on réduit sucessivement le niveau maximum de l'échelle des abscisses en tronquant les valeurs trop élevées

4.7 Conclusion

L'extension des formulations PEEC par l'approche Ampérienne proposée semble prometteuse. Les validations numériques ont permis de montrer la bonne prise en compte des effets de confinement du champ des blindages entourant les systèmes de jeux de barres, ce qui a été également vérifié expérimentalement.

Des améliorations restent nécessaires, notamment sur le maillage, pour garantir de façon automatique sa qualité. Cependant, nous rejoignons ici une problématique qui est bien connue des éléments finis.

D'autre part, seule une modélisation 2D a été validée. Le passage à des modèles 3D doit être possible, cependant, le traitement des angles apparaît comme le point le plus délicat, puisque cela va faire apparaître des singularités géométriques (coins).

Notons, que cette extension de la méthode n'a pas un intérêt strictement limité aux jeux de barres de distribution électrique. On citera par exemple l'analyse des réseaux électrique ferroviaires ou de tramway. Dans ces applications, il est important du point de vue du réseau d'évaluer les impédances des lignes aériennes de contact, ainsi que leur couplage inductif avec les rails conducteurs métalliques. Ce type de calculs nécessitait jusqu'ici un recours très 'délicat' (puisque les conducteurs sont de faible dimension, et baignent dans un volume d'air important : câbles à 5m du sol) aux éléments finis [Morin 05]. Les modélisations PEEC devaient quant à elles faire l'hypothèse, bien douteuse, de rails de roulement en aluminium [Wang 00] !

L'extension μPEEC devrait permettre de lever ce blocage et il ne s'agit que d'un exemple parmi tant d'autres (composants intégrés sur circuit imprimé, ...).

En terme de temps de calcul, les simulations μPEEC sont généralement comparables aux simulations éléments finis réalisées avec FLUX 2D. Il n'est pas réellement possible de préciser la comparaison, du fait du caractère 'expérimental' du code de calcul utilisé pour μPEEC (il subsiste des phases de 'transfert' de données entre langages de programmation, qui bien qu'automatisés et transparentes à l'utilisation, pénalisent la vitesse de résolution). Cependant, la comparaison directe en terme de modélisation n'a pas grand intérêt, puisque l'objectif visé est la conception, où l'approche PEEC prend tout son sens.

Enfin, on aura bien sûr retenu que l'extension proposée ici se limite aux cas de matériaux linéaires. Cela permet évidemment l'écriture d'un système linéaire soluble en une passe. Il serait tout à fait envisageable de prendre en compte des phénomènes de saturation si l'on s'autorise dans ce cas à résoudre le système de manière itérative. Il suffit pour cela après chaque résolution de contrôler le niveau d'aimantation moyen de chaque maille, ce qui permettrait de corriger la perméabilité équivalente, ce qui conduit à relancer une résolution pour corriger les états magnétiques. S'il n'y pas de contre-indications théoriques (outre les problèmes classiques de convergence numérique), il semble probable que les conséquences en terme de temps de calcul seraient pénalisantes. Nous pensons donc que ce type de considérations doit rester de la 'compétence' des méthodes éléments finis, d'autant que l'on peut difficilement concevoir un dispositif optimal en régime saturé (s'il est saturé, c'est précisément qu'il n'est pas optimisé).

Chapitre 5

Vers un outil de conception dédié aux interconnexions

5.1 Démarche globale de conception

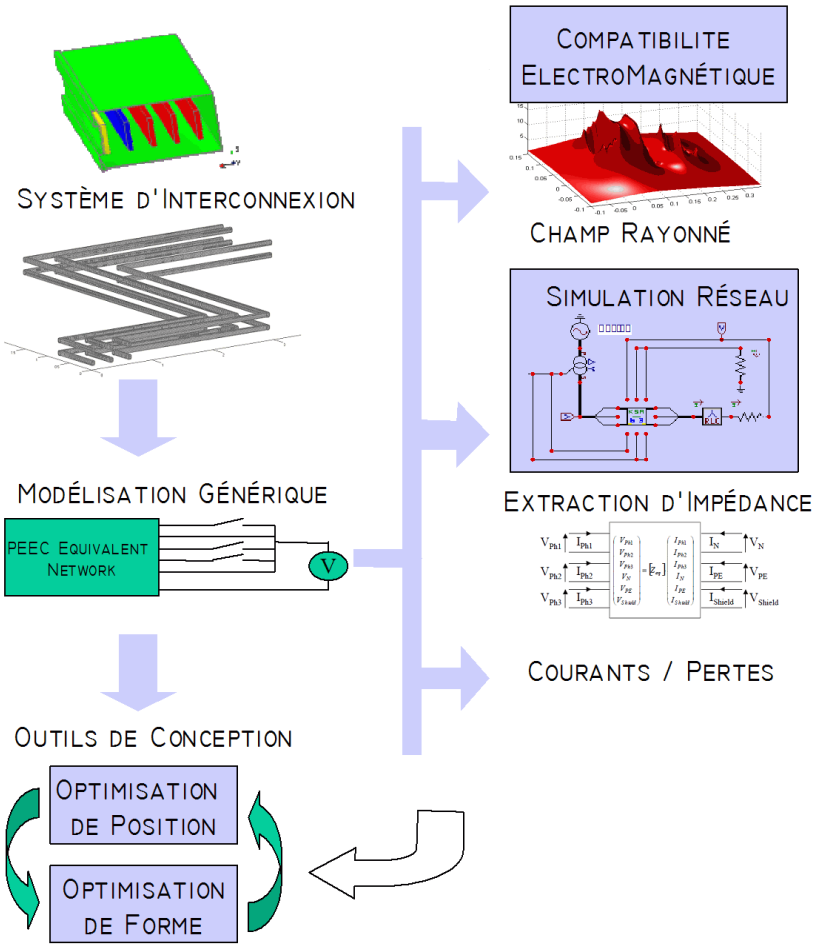


Fig. 5.1 – Vers un outil de conception des interconnexions

5.1.1 Une méthode dédiée aux interconnexions

La méthode PEEC s'avère être un excellent outil de modélisation des jeux de barres et des canalisations électriques de distribution basse tension de puissance et plus largement des interconnexions. Nous reviendrons plus loin sur ce point. L'extension proposée dans le chapitre 4 permet, au moins pour les sections droites des barres de traiter une majorité des conducteurs de distribution électrique.

A partir d'une même modélisation, trois classes de caractérisations sont directement accessibles :

- le calcul de répartitions de courants et donc de pertes ou d'efforts [Guichon 00b],
- le calcul du champ magnétique rayonné (après calcul de courant) [Jover 02], [Archambeault 01] ou conduit [Antonini 97],
- l'extraction de composants équivalents en vue de l'intégration dans une simulation réseau.

Nous avons en outre montré dans le chapitre 3 qu'il est possible de coupler ce modèle à des outils d'optimisation. L'utilisation d'un même modèle permet d'envisager une optimisation prenant en compte différents critères (on citera à titre d'exemple une optimisation de l'équilibrage des impédances de boucle d'une canalisation préfabriquée prenant en compte les pertes en régime normal). On dispose ainsi d'un outil d'aide à la conception dédié aux interconnexions.

Notons d'ailleurs que cette notion ne recouvre pas uniquement l'amélioration de solutions existantes, où, comme nous l'avons constaté, les contraintes existantes (déjà figées par l'intégration du système dans son environnement) réduisent considérablement les marges de manoeuvre pour la modification des caractéristiques des dispositifs et donc limitent l'accessibilité des marges d'optimisation.

Indépendamment de l'objectif d'optimisation, nous avons présenté deux méthodes pouvant représenter des stratégies d'optimisation. Nous allons à présent voir comment les combiner pour atteindre un objectif d'optimisation global.

5.1.2 Stratégies d'optimisation

Deux méthodes d'optimisation mettant toutes les deux en oeuvre la méthode PEEC ont été proposées, pour optimiser le design des systèmes de jeux de barres :

- Une optimisation de la position relative des conducteurs, qui vise à minimiser les effets de proximité (voir paragraphe 3.2) ;
- Une optimisation de la forme des sections droites de conducteur, qui vise à adapter la forme à la diffusion du courant dans les conducteurs (voir section 3.4).

Le diagramme 5.2 montre la complémentarité de ces deux approches. En effet, puisqu'elles adressent des effets 'différents', elle doivent permettre par une application conjointe d'aller vers un optimum global.

Nous avons vu précédemment que la discrimination entre effets de peau et de proximité est possible avec la méthode PEEC, cependant, les exemples présentés montrent également que cette distinction n'est pas aussi catégorique en terme de conception, puisque la diffusion du courant sur une section de conducteur est une combinaison de l'effet de peau et du champ extérieur (donc dû aux effets de proximités).

Cette constatation nous permet de proposer une stratégie globale d'optimisation qui peut combiner séquentiellement les méthodes citées ci-dessus. Nous préconisons donc de travailler en premier lieu sur la position des conducteurs, d'autant que les effets de proximité apparaissent comme prépondérants dans certains cas de figure.

Une fois un agencement préoptimisé (ou dans le cas où l'agencement des conducteurs est déjà figé par les contraintes extérieures : nous avons vu que cela pouvait être le cas pour les jeux de barres de répartition), il est possible de travailler sur la forme des sections des conducteurs, pour les adapter à la répartition naturelle du flot de courant.

Il est cependant admissible à ce stade que l'agencement obtenu précédemment impose des contraintes trop fortes pour l'obtention de formes satisfaisantes. Il faudra dans ce cas réitérer l'optimisation d'agencement avec des contraintes adaptées.

Notons ici que l'enchaînement de ces étapes, ainsi que la définition des problèmes d'optimisation, avec les contraintes associées nécessite de nombreuses interventions du concepteur. La méthode PEEC couplée aux optimiseurs fournit une aide précieuse dans la recherche de la configuration optimale et permet en quelque sorte de s'affranchir d'un prototypage répétitif. Il n'est cependant pas envisageable de disposer d'un automatisme générique d'optimisation. Le

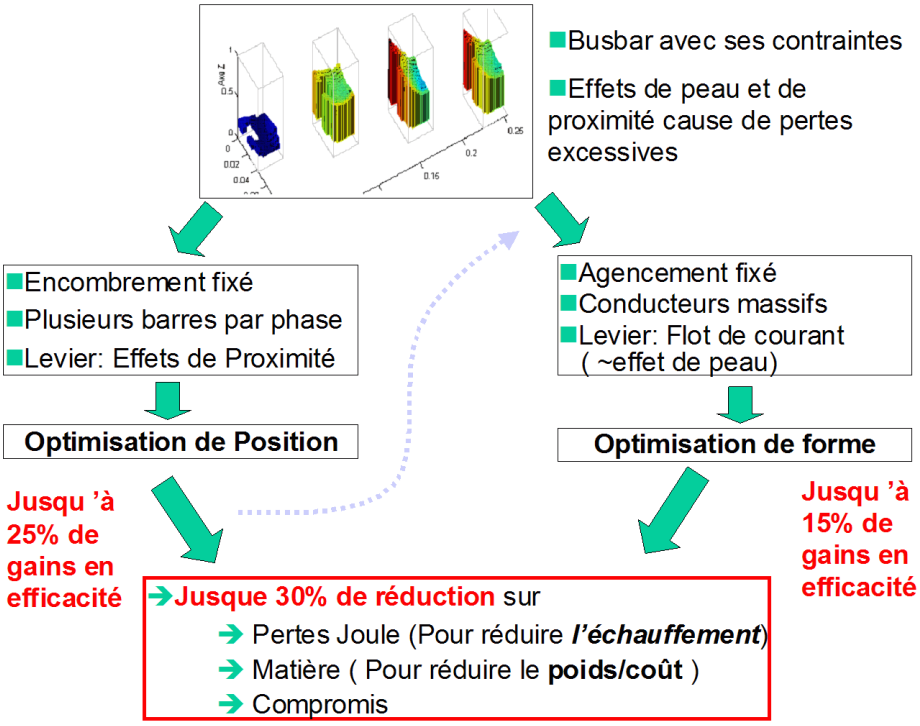


FIG. 5.2 – Stratégies d'optimisation

choix de l'enchaînement des stratégies et de l'espace des solutions à envisager reste dévolu à l'expérience du concepteur.

Les cas traités ont permis de dégager un ordre de grandeur des gains accessibles par les deux stratégies d'amélioration, par rapport à l'état de l'art actuel de conception :
- l'optimisation de position permet de gagner jusqu'à 25% 'd'efficacité' ;
- l'optimisation de forme jusqu'à 15%.

La combinaison des deux approches permet d'espérer un gain de 30%. Reste à définir ce que l'on se fixe comme objectif d'optimisation. L'efficacité pour un système de conducteurs consiste à minimiser le coût de la connexion. On peut décliner ce coût sur différents aspects :
- coût matière,
- consommation électrique (coût en énergie),
- éventuel compromis entre coût matière et pertes.

Cette question revient à fixer la fonction objectif utilisée pour les optimisations. Nous avons vu que la méthode proposée permet efficacement d'adapter la solution à l'importance relative que l'on accorde à chaque critère.

Une première pondération des critères a été proposée sous forme de fonction coût 'économique'. Nous allons à présent voir qu'il est crucial à ce stade de prendre aussi en compte les aspects environnementaux, car ceux-ci peuvent avoir un impact fort sur les choix d'objectifs dans une optique d'éco-conception.

Cette notion est relativement nouvelle en terme de conception. Elle fait l'objet de nombreuses incitations des acteurs institutionnels. Ce nouvel objectif n'est pas à opposer aux autres

objectifs tels que l'amélioration de la performance ou la maîtrise des coûts. On doit même considérer qu'il peut ouvrir de nouvelles voies d'améliorations innovantes et de différenciation.

Avant de parler d'analyse du cycle de vie en vue de l'éco-conception, nous allons faire une parenthèse pour exposer comment les travaux présentés ci-dessus peuvent être capitalisés et intégrés au fonctionnement des bureaux d'étude.

5.1.3 Un outil dédié : InCa 3D

Un bon moyen de pérenniser les méthodes développées autour de la méthode PEEC réside dans une intégration dans un outil logiciel utilisable en bureau d'étude : InCa 3D[1]. Etant donné que la méthode PEEC est un complément aux éléments finis pour traiter les parties connectiques des dispositifs électromagnétiques, le parti a été pris d'aller vers l'intégration dans un environnement de conception électromagnétique.

Dans le cadre d'un consortium alliant Schneider Electric au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et à la société CEDRAT / MAGSOFT, la méthode PEEC se voit intégrée à l'environnement FLUX (Logiciel éléments finis distribué par CEDRAT) et donc participe à un environnement de design en électromagnétisme.

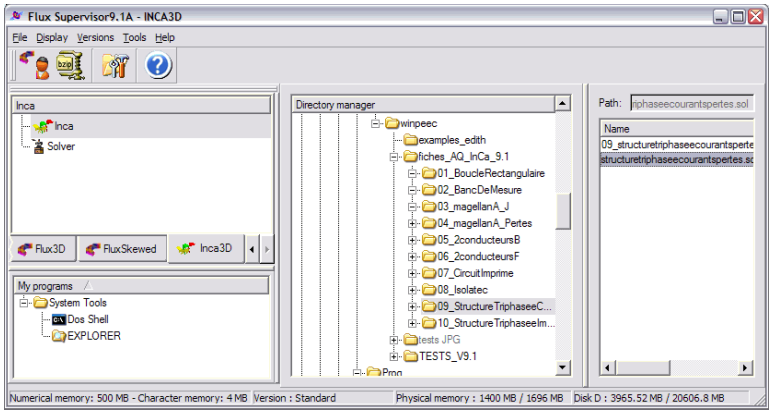


FIG. 5.3 – InCa 3D - Superviseur - Intégration dans l'environnement Flux

L'intégration dans une plate-forme commune permet d'une part de faciliter le travail du concepteur en lui fournissant une interface unifiée, mais permet également d'exploiter la complémentarité des méthodes par l'utilisation de bases de données décrivant les problèmes compatibles avec les différentes approches.

Un nouvel outil dédié aux interconnexions est donc ajouté à la 'boîte' à outils du concepteur de matériel de distribution électrique. Cet outil logiciel donne une base robuste et standardisée pour le couplage avec les méthodes d'optimisation présentées.

Nous allons à présent nous pencher sur les aspects 'éco-conception' apportés par l'optimisation.

[1] InCa est un diminutif de Inductance Calculation, qui est le nom 'historique' choisi pour le logiciel mettant en oeuvre la méthode PEEC [Clavel 96], [Clavel 01]. On notera l'existence d'autres outils non-industriels basés sur la méthode PEEC [Chen 03], [Gala 00], [Gala 01].

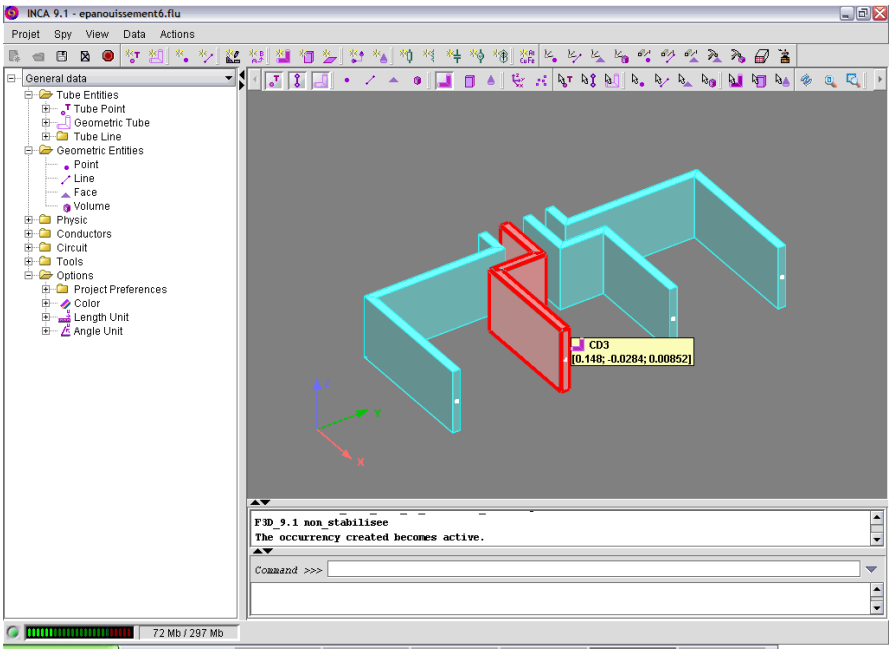


FIG. 5.4 – InCa3D - Interface Utilisateur

5.2 Prise en compte de l'Analyse du Cycle de Vie

Lorsque l'on évoque l'éco-conception d'un produit, c'est-à-dire une conception prenant en compte la notion de développement durable et donc un souci de maîtriser son impact écologique, on se doit d'intégrer la notion d'analyse du cycle de vie [Gonnet 02].

5.2.1 Présentation de l'ACV

L'analyse du cycle de vie (A.C.V. en français ou L.C.A en anglais pour Life Cycle Analysis) d'un produit consiste à effectuer le suivi d'un produit 'du berceau à la tombe'. C'est à dire que l'on va prendre en compte toutes les étapes de la vie du produit dans une évaluation de son empreinte écologique. Le suivi se fait depuis l'approvisionnement en matières premières, en analysant leur transformation, l'assemblage des composants, la distribution du produit (phase logistique/transport). Vient ensuite son utilisation, puis en fin de vie le démontage / recyclage de ses constituant. Chaque étape est éventuellement consommatrice en énergie et peut potentiellement générer des déchets.

Le produit est considéré du point de vue de sa fonction, du service rendu. L'analyse de ses phases de vie va permettre de quantifier le coût environnemental global de la fonction assurée.

L'objectif est ici bien entendu d'aller vers une minimisation de l'empreinte globale d'un produit. L'ACV permet de garantir le caractère global de ce minimum. L'idée est ici que l'on cherche absolument à éviter toute amélioration de type 'matelas pneumatique' qui permettrait de diminuer l'impact sur une étape, en augmentant considérablement le coût ailleurs, rendant la solution globalement défavorable (transfert de pollutions).

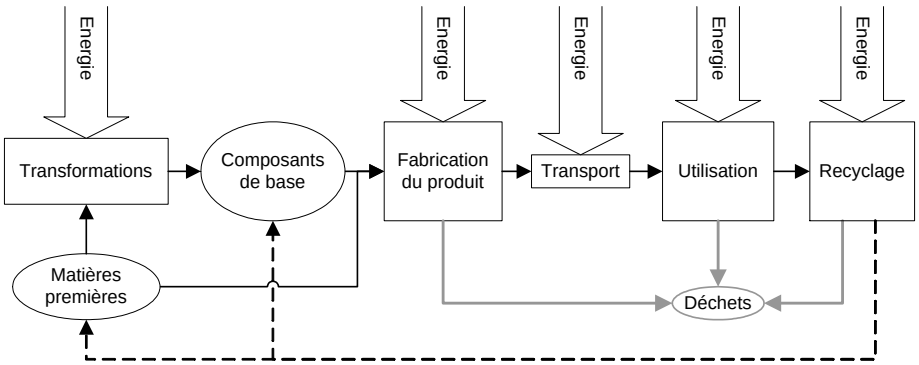


FIG. 5.5 – Diagramme des flux du cycle de vie d'un produit

L'ACV est donc un outil d'évaluation et de comparaison de solutions techniques répondant à une fonction bien déterminée.

5.2.2 Un outil d'ACV : EIME

Si le principe de base de l'analyse du cycle de vie est extrêmement simple, sa mise en oeuvre est loin d'être triviale, puisque l'on peut distinguer 2 étapes :

- l'inventaire du cycle de vie, qui consiste finalement à décrire le plus finement possible les flux associés au cycle de vie du produit, c'est une phase qui est réalisée par le concepteur du produit ;
- l'évaluation des impacts environnementaux.

Les impacts environnementaux sont des indicateurs permettant de quantifier l'empreinte écologique et donnant une valeur concrète à cette notion, sous forme de tableau de bord. Nous les détaillerons par la suite.

Cependant, il est important de comprendre que s'il est relativement aisé de décrire les constituants d'un produit, en détaillant toutes les pièces qui le constituent, son mode d'assemblage, son fonctionnement, les choses se compliquent grandement lorsqu'il est nécessaire de remonter jusqu'à la matière première. C'est à ce niveau qu'interviennent les outils d'ACV, dont EIME [EIME 98] fait partie et dont nous allons préciser le rôle.

Nécessité d'une base de données

Prenons un exemple simple : les jeux de barres dont nous avons parlé sont réalisés à base de barres de cuivre, ou par extrusion d'aluminium. Le concepteur est à même de définir la quantité de cuivre ou d'aluminium qu'il va utiliser, mais il risque pour lui d'être bien plus délicat de préciser les phases de transformation amont, depuis l'extraction du minerai.

Nous avons vu que l'ACV doit pourtant prendre en compte toutes les étapes de la vie du produit. On conçoit bien sur cet exemple que la quantité d'informations nécessaires devient rapidement considérable et dépasse largement la compétence du concepteur en l'état. C'est pour cela que l'on utilise des outils dédiés pour capitaliser l'information et simplifier au maximum l'ACV.

Ainsi, les outils d'ACV sont d'abord de précieuses bases de données qui vont permettre au concepteur de rester dans son champ de connaissances lors de la description de son produit. L'idée est de disposer d'un bibliothèque la plus étoffée possible de ce que l'on a appelé 'constituants de base' dans la figure 5.5. La base de données doit ensuite permettre de remonter de manière transparente aux matières premières consommées initialement, ainsi que pendant les différentes transformations, avec les énergies consommées. Cette base de données peut être renseignée une fois pour toute par les industries compétentes, et permet donc de capitaliser l'information sur un maximum de process industriels.

Ainsi, une grande partie de la richesse d'un outil d'ACV est sa base de données, qui se doit d'être la plus complète et la plus vivante possible, pour pouvoir généraliser l'éco-conception.

L'outil EIME

EIME est l'acronyme de 'Environmental Information and Management Explorer'. Il s'agit d'un logiciel qui est la copropriété d'Alcatel, Alstom, Legrand, Nexans, Thomson Multimédia et Schneider Electric, soutenu par l'ADEME [Lescuyer 03], [Curtis 99].

Cet outil logiciel a pour vocation de servir de référence en matière d'analyse du cycle de vie pour les industriels du secteur de l'électricité et de l'électronique. C'est pour cette raison qu'un distributeur (la société CODDE) a été créé conjointement par la FIEC[2] et le GIMELEC[3] pour faire vivre les bases de données et déployer cet outil d'éco-conception.

L'outil EIME est donc d'une part une base de données de constituants élémentaires associée à une interface permettant de décrire un produit à partir de ses constituants. Mais c'est également un outil de calcul d'empreinte environnementale permettant de transcrire toute l'information recueillie en un nombre réduit de critères d'impacts sur l'environnement. Les

[2] FIEC : Fédération des Industries Electriques, Electroniques et de Communication

[3] Groupement des industries de l'équipement électrique, du contrôle-commande et des services associés.

différents critères correspondent à des risques écologiques. Leur calcul repose sur des méthodes normalisées[4].

Les critères d'impact environnementaux

- *RMD : Raw Material Depletion – Epuisement des ressources de matières premières*
  Cet impact évalue l'épuisement des ressources naturelles (en fraction de réserve par an) en prenant en compte les réserves disponibles recensées pour la ressource associée et le taux d'épuisement sur la base de l'économie actuelle. Cet indicateur s'exprime en fraction de ressource disparaisant par année.

- *ED : Energy Depletion - Consommation d'énergie*
  Indique la consommation d'énergie en MJ, qu'elle provienne de la combustion de combustibles fossiles (y compris l'uranium) ou d'autres sources (hydroélectricité, solaire...). L'énergie récupérée par combustion en phase de recyclage est également comptabilisée ici.

- *WD : Water Depletion - Consommation d'eau*
  Consommation d'eau en dm^3 quelle que soit sa source ou sa qualité (industrielle, potable...)

- *GW = Global Warming – Emissions de CO_2*
  Cet impact donne la contribution au processus de réchauffement de la planète par le phénomène de l'effet de serre. Il s'exprime en g de CO_2. Toutes les émissions sont ramenées à un équivalent CO_2 en terme de potentiel de réchauffement.

- *OD : Ozone Depletion – Destruction de la couche d'ozone*
  Donne la contribution à la destruction de la couche d'ozone stratosphérique par émission de gaz. Il s'exprime en g de CFC-11. Toutes les émissions sont ramenées à un équivalent CFC-11 en terme de potentiel de destruction de la couche d'ozone.

- *AT : Air Toxicity – Toxicité de l'air*
  Cet indicateur donne un volume équivalent de 'mauvais air' dégagé en m^3. Il représente la toxicité pour l'homme des différents gaz émis, en prenant en compte les concentrations et quantités normalement tolérées.

- *POC : Photochemical Ozone Creation - Création Photochimique d'ozone*
  Quantifie le potentiel de création d'ozone troposphérique au travers des gaz relâchés. Cet ozone, sous l'action des radiations solaires donnera par la suite des oxydants que l'on retrouve en basse atmosphère. Il se calcule en g équivalent d'éthylène (C_2H_4).

- *AA : Air Acidification – Acidification de l'air*
  Quantifie l'acidification de l'air par les gaz relâchés dans l'atmosphère. Les substances acides contenues dans l'atmosphère étant ramenées au niveau des végétaux et de la terre végétale par les pluies. Il s'exprime en g équivalent de H^+ pour le potentiel d'acidification.

[4] Les règles applicables en matière d'analyse du cycle de vie en vue de l'éco-conception sont décrites par les normes suivantes :
- ISO 14040 : 1997. Environmental management – Life cycle assessment – Principles and framework
- ISO 14041 : 1998. Environmental management – Life cycle assessment – Goal and scope
- ISO 14042 : 2000. Environmental management – Life cycle assessment – Life cycle impact
- ISO 14043 : 2000. Environmental management – Life cycle assessment – Life cycle interpretation

– *WT : Water Toxicity – Toxicité de l'eau*
Cet indicateur est le pendant de l'indicateur AT, toxicité de l'air, et se calcule de la même manière, en dm^3.

– *WE : Water Eutrophication - Eutrophisation de l'eau*
L'eutrophisation représente l'enrichissement en substances nutritives de l'eau qui favorise le développement d'algues et phytoplanctons susceptibles de déséquilibrer l'écosystème des milieux aquatiques. Elle se calcule en g équivalent de nutriments phosphorés (PO_4^{3-}).

– *HWP : Hazardous Waste Production – Production de déchets toxiques*
Il s'agit tout simplement de la masse solide équivalente en kg de déchets dangereux, c'est-à-dire nécessitant d'après la réglementation en vigueur un 'traitement' spécial.

Tous ces critères sont donnés en valeur absolue pour une solution technique donnée. Une interprétation directe est délicate. En revanche, ces indicateurs prennent tout leur sens lorsque l'on compare de manière relative des solutions techniques différentes répondant à une même valeur de service.

Les indicateurs donnent alors un tableau de bord qui peut permettre de guider le choix vers la solution la moins impactante en terme d'environnement.

5.3 Déclinaison sur les jeux de barres

5.3.1 Les points clés de l'A.C.V.

Pour les exemples d'optimisation qui ont été traités, il est possible, en première approche au moins, de prendre en compte un minimum de flux au niveau de l'ACV, surtout dans le cadre d'une comparaison relative de solutions à fonction équivalente.

L'approche sera imprécise, mais suffisante pour dégager quelques notions importantes.

Ainsi, on va considérer les jeux de barres seulement, c'est à dire dépourvus de leurs moyens de fixation et de raccordement. Comme dans chaque cas, il n'y a pas de changement de procédé de fabrication, nous ne garderons que la notion de quantité de matière utilisée pour les conducteurs. De plus, une étude antérieure à l'utilisation d'EIME [Berthet 96] avait déjà montré qu'en terme de consommation d'énergie la phase d'utilisation des jeux de barres pouvait être de 130 fois (pour le cuivre) à 500 fois (pour l'aluminium) plus énergivore que la phase de fabrication.

Même si ces chiffres restent largement sujets à caution du fait de la difficulté de décrire complètement le process de fabrication, la prépondérance de la consommation en fonctionnement reste indéniable.

La phase d'utilisation ne requiert pas de simplification particulière, puisque l'on est à même (c'est la vocation de la méthode) de donner un modèle de fonctionnement. Il est par contre nécessaire de spécifier un profil d'utilisation, puisque le niveau de pertes dépend bien sur du niveau de charge des conducteurs. Le pays d'installation a bien évidement un impact, puisqu'il change le 'mix' de production d'électricité.

On prendra ici un facteur de charge de 10%, qui correspond à une moyenne de fonctionnement à 1/3 du courant nominal, 100% du temps (Ce taux de charge peut varier selon le type d'équipements alimentés. On se rapproche des 100% dans des industries intensives du type cimenteries, mais il est assez représentatif des usines de chaîne d'assemblage -type automobile- et des locaux à usage tertiaire).

Enfin, notons que la phase de fin de vie aura un impact non négligeable, puisque l'on estime par exemple que 37% du cuivre utilisé chaque année provient du recyclage[5].

5.3.2 Optimisation de position - Tableaux Okken - Suivi EIME

L'impact environnemental du jeu de barre Okken (voir section 3.2) a été étudié sous EIME, ce qui permet de comparer la solution optimisée, qui minimise la puissance dissipée par le jeu de barre, au positionnement initial des barres.

Seul le jeu de barre est ici pris en compte, sans ses moyens de fixation et de raccordement. On considère 1m de longueur. Pour les 2 solutions, chaque phase est constituée de 2400 mm^2 de cuivre ($m_\nu = 8890\, kg \cdot m^{-3}$), soit 64 kg de cuivre pour le système triphasé (on rappelle que le calibre est de 4000 A).

La consommation vue par le réseau correspond aux pertes Joule totales, y compris celles dans le blindage. Elle passe donc de 885 W/m à 654 W/m en optimisant la position des barres, à cuivre constant (Le blindage est pris en compte en tant que lieu passif de dissipation de pertes. En revanche, il n'est pas visible dans le bilan matière.).

Le facteur d'utilisation moyenné est de 10%, avec une durée de vie prévue de 15 ans. Le profil de production électrique est celui de la France[6]. Le tableau 5.1 récapitule les impacts sur les 11 critères principaux des 2 solutions.

La figure 5.6 permet quant à elle la comparaison relative entre les structures, la solution initiale servant de référence.

Etant donné que l'on travaille à matière première constante, seule la consommation électrique est impactée. Le gain de l'optimisation est directement répercuté en gains comparables sur les impacts environnementaux associés (de l'ordre de quelques 20%).

On vérifie ici qu'il n'y a pas forcement concurrence directe entre l'optique d'optimisation en terme de performance et en terme d'impact environnemental, puisque l'on est gagnant sur tous les aspects.

[5] Chiffre donné pour 1997. Source International Copper Study Group. Web : www.icsg.org.

[6] Le profil de production utilisé est le suivant (Mise à jour : 1998-Ecobilan) :
- Charbon : 5.9%
- Pétrole : 1.3%
- Gaz naturel : 0.55 %
- Nucléaire : 77.6%
- Hydroélectricité (Barrages+Eolien+Marée) : 13.7%
- Combustion de déchets : 0.6%
- Pertes à la distribution : 6.195%

Indicateur	Unité	Initial	Optimisé	Ratio
Raw Material Depletion (RMD)	Y^{-1}	1,87E-12	1,85E-12	99%
Energy Depletion (ED)	MJ	1,39E+05	1,04E+05	75%
Water Depletion (WD)	dm^3	3,41E+04	2,69E+04	79%
Global Warming (GW)	g [CO_2]	1,24E+06	1,02E+06	82%
Ozone Depletion (OD)	g [CFC-11]	2,65E-01	2,47E-01	93%
Air Toxicity (AT)	m^3	5,25E+08	4,69E+08	89%
Photochem. Ozone Creation (POC)	g [C_2H_4]	5,90E+02	4,77E+02	81%
Air Acidification (AA)	g [H^+]	4,54E+02	4,10E+02	90%
Water Toxicity (WT)	dm^3	2,15E+05	1,77E+05	82%
Water Eutrophication (WE)	g [PO_4]	3,27E+01	2,85E+01	87%
Hazardous Waste Production (HWP)	kg	1,11E+01	8,23E+00	74%

TAB. 5.1 – Tableau Okken - Evaluation EIME des impacts environnementaux des solutions initiales et optimisées (Voir le radar associé sur la figure 5.6)

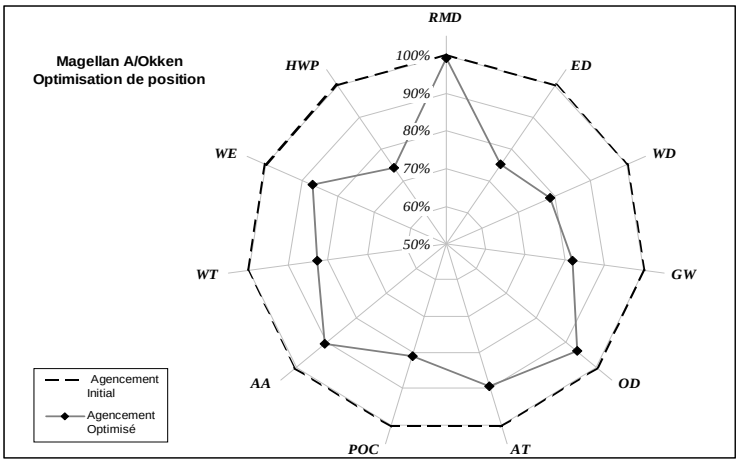


FIG. 5.6 – Jeu de barres Okken - Comparaison de l'impact environnemental de l'agencement initial avec la solution optimisée (minimisation de la puissance dissipée). Les valeurs tracées sont détaillées dans le tableau 5.1.

5.3.3 Optimisation de forme - Barres Linergy Aluminium – Suivi EIME

Le même suivi a été réalisé au terme du processus d'optimisation de la forme des barres Linergy.

L'optimisation portait sur un coût pondéré des pertes par effet Joule et du coût matière. La discussion du paragraphe 3.7.2 nous orientait sur une pondération 'économique' qui conduit à une fonction 'coût' objectif $f = 8 \cdot P_{\text{Joule}} \left[e.W^{-1}\right] + S_{\text{Aluminium}} \left[e.\,\text{mm}^{-2}\right]$.

Cette fonction objectif suppose que tous les coûts sont assumés de façon équitable entre la fabrication et l'utilisation.

Un point de vue 'fabricant' aura tendance à privilégier la réduction du coût matière (avantage fabricant) devant la consommation (avantage client). Prenons donc un ratio adapté $f = 6 \cdot P_{\text{Joule}} + S_{\text{Aluminium}}$ qui force le compromis vers plus d'économie de matière. Notons d'ailleurs que cela suppose que le dispositif pourra satisfaire aux normes thermiques avec le niveau de pertes associés.

On considère ici encore 1 mètre de barre, sans ses systèmes de fixation, qui ne sont pas impactés par la modification, puisque la forme extérieure de la barre est conservée.

La solution initiale utilise 2.46 kg par phase, contre 1.67kg par phase pour le compromis optimisé sur la fonction coût (soit une réduction de 32%).

La consommation électrique liée aux pertes Joule passe de 95 à 117 W/m (+23%) en moyenne par phase.

Le facteur d'utilisation moyenné est de 10%, avec une durée de vie prévue de 15 ans. Le profil de production électrique est celui de la France.

Le tableau 5.2 récapitule les impacts sur les 11 critères principaux des 2 solutions, la version cuivre de même calibre est également évaluée.

La figure 5.7 permet la comparaison entre les structures, la solution initiale servant de référence, le tableau 5.3 donne les valeurs numériques associées.

Le coût économique objectif choisi pour l'optimisation apparaît ici plus discutable en terme d'éco-conception. L'analyse EIME indique en effet que le gain de 32% sur la matière première ne compense pas, en terme d'impact environnemental, la surconsommation électrique de 23%.

Indicateur	Unité	Alu. Initial	Alu. Optimisé	Cuivre
RMD	Y^{-1}	8,96E-15	10,7E-15	1,83E-13
ED	MJ	1,88E+04	2,40E+04	1,20E+04
WD	dm^3	3,75E+03	4,83E+03	3,01E+03
GW	g [CO_2]	1,46E+05	1,70E+05	1,11E+05
OD	g [CFC-11]	1,84E-02	1,81E-02	2,51E-02
AT	m^3	3,61E+07	4,22E+07	4,89E+07
POC	g [C_2H_4]	7,12E+01	8,44E+01	5,26E+01
AA	g [H^+]	2,84E+01	3,34E+01	4,25E+01
WT	dm^3	2,27E+04	2,74E+04	1,93E+04
WE	g [PO4]	2,77E+00	3,24E+00	3,02E+00
HWP	kg	1,53E+00	1,96E+00	9,56E-01

TAB. 5.2 – Linergy Aluminium - Evaluation par EIME des impacts environnementaux des solutions initiales et optimisées, comparaison avec la version 'cuivre'. La comparaison relative est détaillée dans le tableau 5.3 et sur le radar 5.7.

CYCLE COMPLET		Alu. forme initiale	Alu. 'optimale'	Cuivre
RMD	Y^{-1}	100%	119%	2042%
ED	MJ	100%	127%	64%
WD	dm^3	100%	129%	80%
GW	g [CO_2]	100%	117%	76%
OD	g [CFC-11]	100%	98%	136%
AT	m^3	100%	117%	136%
POC	g [C_2H_4]	100%	119%	74%
AA	g [H+]	100%	117%	150%
WT	dm^3	100%	121%	85%
WE	g [PO4]	100%	117%	109%
HWP	kg	100%	128%	63%

TAB. 5.3 – Comparaison relative des solutions aluminium initiales, modifiées et cuivre. Les valeurs brutes sont données par le tableau 5.2.

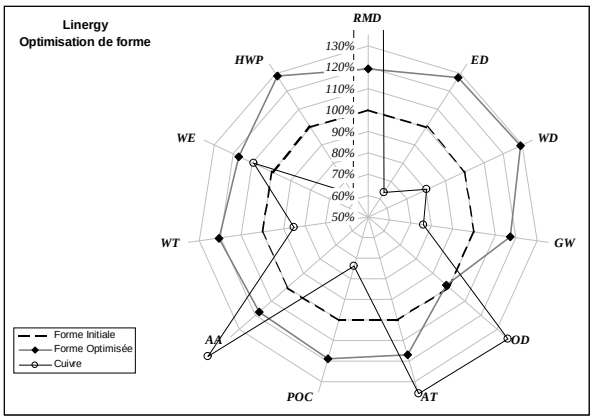


FIG. 5.7 – Comparaison globale entre solutions aluminium initiale et optimisée et solution cuivre (Valeurs dans le tableau 5.3).

Détail sur les phases fabrication et utilisation

On peut détailler la comparaison de la figure 5.7 sur la phase fabrication (voir figure 5.9 et tableau 5.4) et la phase utilisation (figure 5.8).

L'emploi de l'aluminium en remplacement du cuivre semble être une bonne solution, même si cela engendre une consommation électrique plus importante, car l'aluminium est bien moins pénalisant que le cuivre en phase de fabrication sur certains critères.

Cet exemple montre en outre l'importance de la prise en compte des critères environnementaux en phase de conception, pour guider le choix des bonnes fonctions objectifs lors de l'emploi d'algorithmes d'optimisation. Les deux cas traités en exemple suggèrent que la réduction de la consommation électrique des jeux de barres est un meilleur objectif en terme d'impact environnemental que la réduction de la consommation de matière première.

Ainsi, le suivi sous EIME de l'exemple présenté ici indique que la fonction objectif retenue procure des gains privilégiant la marge brute, mais non conformes à une approche d'éco-conception.

Il serait donc nécessaire de pouvoir réaliser la démarche inverse, à savoir, à partir d'E.I.M.E., fixer des paramètres de pondération dans la fonction objectif qui donnent des résultats conformes en terme d'impacts environnementaux (on souhaite un gain sur tous les critères,ce qui renvoie à l'optimisation multicritères au sens de Pareto [Coulomb 02]). On peut toutefois noter que les contraintes préexistantes n'ont probablement pas favorisé la compatibilité des approches économiques et environnementales.

Notons également que le choix de privilégier la réduction du coût matière occulte la possibilité de valoriser l'avantage client concernant l'efficacité de ses organes de distribution électrique. Cette notion, tend à rentrer en ligne de compte, notamment avec l'arrivée programmée de la notion de 'permis de polluer', qui doit donner un coût économique au 'gaspillage' d'énergie, et donc aux pertes Joule.

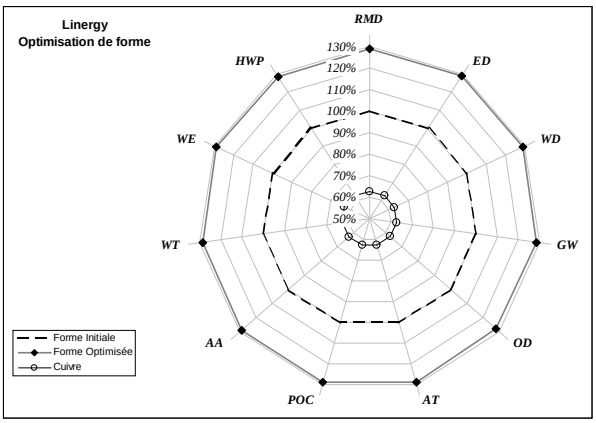


FIG. 5.8 – Phase Utilisation - Comparaison entre solutions aluminium initiale et optimisée et solution cuivre.

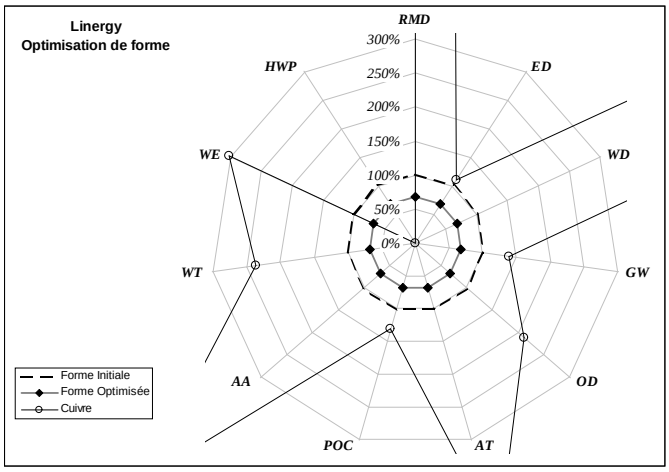


FIG. 5.9 – Phase Fabrication - Comparaison entre solutions aluminium initiale et optimisée et solution cuivre (les valeurs associées sont précisées par le tableau 5.4).

FABRICATION		Alu. Initial	Alu. Optimisé	Cuivre
RMD	Y^{-1}	100%	68%	12637%
ED	MJ	100%	68%	111%
WD	dm^3	100%	68%	15046%
GW	g [CO_2]	100%	68%	138%
OD	g [CFC-11]	100%	68%	212%
AT	m^3	100%	68%	445%
POC	g [C_2H_4]	100%	68%	130%
AA	g [H^+]	100%	68%	527%
WT	dm^3	100%	68%	236%
WE	g [PO4]	100%	68%	302%
HWP	kg	100%	68%	0%

TAB. 5.4 – Linergy - Phase Fabrication - Comparaison relative des solutions aluminium initiale, modifiée et cuivre (voir radar associé sur la figure 5.9.

5.4 L'enjeu des interconnexions

5.4.1 Enjeu Schneider Electric

Le potentiel constitué par la réduction des pertes sur un jeu de barres est valorisable directement sur chaque produit en terme de performance, puisque cela peut permettre la réduction de la température de fonctionnement ou l'augmentation du calibre admissible. La valorisation peut également se faire sur la réduction de la consommation d'énergie. Si cet impact peut paraître négligeable devant les puissances mises en jeu dans les installations (c'est à dire par rapport à l'énergie finale consommée en instantané), la consolidation globale montre la réalité de l'enjeu.

Sur la base des résultats exposés précédemment, il est possible d'estimer l'enjeu énergétique représenté par le traitement de l'ensemble de liaisons de puissance (jeux de barres et canalisations électriques du catalogue Schneider uniquement dans un premier temps) par la méthode développée ici, en axant les gains de l'optimisation sur la réduction des pertes par effet Joule et donc de la consommation des liaisons électriques.

On se limite aux segments de calibres de courant compris entre 250A et 5000A sous 380V triphasé (marché tertiaire et industriel) :

- La production annuelle de Schneider Electric ciblée pour 2005 est de 500km de conducteurs qui se décomposent comme suit par segment d'offre :

Canalisations Electriques Préfabriquées (CEP)	Segmentation	Production (km)
250 A	30%	120
400 A	25%	100
630 A	15%	60
800 A	10%	40
> 800 A	20%[7]	80
Total CEP		400
Tableaux - Jeux de barres (JdB)		
630 A / 800 A	56%	56
1000 A	12%	12
1250 A	12%	12
1600 A	12%	12
> 2000 A	8%	8
Total JdB		100
Total		500 km

- Schneider Electric détient environ 10% du marché mondial accessible des jeux de barres et canalisations préfabriquées.
  Le volume de conducteurs impactés par la méthode est donc de l'ordre de 5.10^6 m par an.
- La puissance dissipée par un mètre de conducteur est de 178 W. Il s'agit d'une moyenne pondérée sur les différents segments de puissance. Ce chiffre est à rapprocher des 885 W observés pour le jeu de barre Okken (gros calibre).
- La durée de vie d'un jeu de barres ou d'une canalisation est de 15 ans.
- On considère que le facteur d'utilisation moyenné sur cette durée des conducteurs est de 10% (soit environ $\frac{1}{3}$ du courant nominal pour une utilisation à plein temps).

[7] 2 à 3% par calibre

L'énergie consommée par l'ensemble des conducteurs décrits installés sur un an, à marché constant, est de :

$$E = 0.1 \times 5 \cdot 10^6 \times 178 \times 15 \times 365 \times 24 = 11.68\, TW \cdot h$$

soit plus de la production annuelle d'un RNSE[8].

Les exemples traités montrent que :
- l'optimisation de l'agencement des conducteurs permet à elle seule un gain de l'ordre de 25% sur la puissance ;
- l'optimisation de forme est susceptible, appliquée seule, de réduire la puissance totale de 10% à 15%.

Sur la base des exemples déjà traités, nous avons pour objectif de réduire de 30% sur l'ensemble des segments les puissances dissipées, par application successive des deux processus d'optimisation évoqués ci-dessus.

L'économie d'énergie accessible par l'installation de jeux de barres et canalisations (nouvelles installations et remplacement) optimisée par la méthode présentée (en visant une consommation électrique minimale en fonctionnement) est de :

$$E = 0.30 \times 11.68 = 3.5\,\mathrm{TWh}$$

par année, consolidée au niveau mondial pour un marché sans croissance.

L'enjeu considéré en terme de réduction des pertes correspond donc à la moitié de la production d'un RNSE.

[8] RNSE est l'acronyme de Réacteur Nucléaire Standard Equivalent, qui correspond à une tranche de réacteur PWR (Pressured Water Reactor) d'environ 1300 MW. La production moyennée est fixée à 800 MW, 365jours par an, 24h/24, soit environ 7 TWh. Le facteur d'utilisation de 60% prend en compte les périodes de mise hors service pour maintenance, ainsi que le facteur de charge typique de ce type de centre de production.

5.4.2 Déclinaison sur un marché cible : les Data-Centers

Afin de consolider les chiffres présentés dans le paragraphe précédent, l'enjeu d'optimisation a été décliné sur un marché cible restreint : celui des centres de données ou datacenters.

Les centres de données offrent des espaces important pour l'installation de matériel informatique (serveurs, équipements réseau, ...) et/ou de télécommunication (modems, commutateurs, ...) pour le traitement centralisé et la gestion d'informations. Ces espaces sont desservis par les utilités annexes indispensables au bon fonctionnement des équipements, à savoir essentiellement l'alimentation en énergie électrique sécurisée, des moyens de climatisation et des points de raccordement aux réseaux de communication.

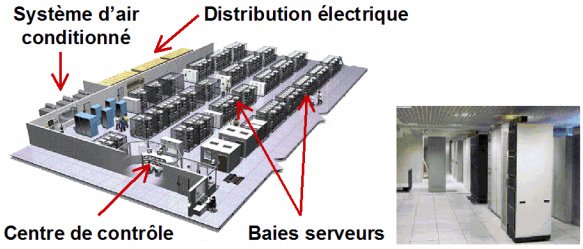


FIG. 5.10 – Présentation d'un datacenter type

Ce marché a été ciblé en accord avec l'ADEME parmi les acteurs du secteur tertiaire comme étant l'un des plus gros consommateurs en énergie électrique [Mitchell-Jackson 01]. Il s'agit également d'une activité à très haute valeur ajoutée pour l'énergie électrique, puisque le principal enjeu technique des datacenters est de permettre une continuité de service (disponibilité à 5 '9' ou plus, soit des taux de fonctionnement de 99,999%[9]). L'alimentation en énergie électrique de ces sites fait l'objet de toutes les attentions, notamment en raison des coûts d'indisponibilité qu'engendreraient une rupture de service pour cause de panne.

Les coûts horaires d'indisponibilité varient selon le type d'application hébergées[10] :

Téléphonie mobile	40 000 €
Réservations aériennes	90 000 €
Transactions bancaires	2 500 000 €
Transactions boursières	6 500 000 €

Dans ce cadre, le réseau de distribution électrique est sécurisé par des UPS (Uninterruptible Power Supply) dont les batteries sont à même de se substituer à une alimentation défaillante. La chaîne entière de distribution est quant à elle architecturée sur la base d'une redondance totale des équipements.

Un autre facteur valorise très fortement l'énergie et surtout l'efficacité énergétique dans ce secteur : les datacenters sont souvent (et c'est une tendance croissante) gérés de façon indépendante des applications hébergées. L'hébergeur loue des emplacements serveurs et fournit les facilités nécessaires, avec une garantie de continuité d'alimentation.

Ainsi, la fourniture d'énergie devient une valeur de service à part entière, qui n'est plus masquée par la valeur de service des applications serveurs. Dans ce cadre, optimiser l'efficacité énergétique des équipements accroît la marge de l'hébergeur.

[9] Correspond à 5,25 minutes d'indisponibilité cumulée par an maximum.

[10] Source : Contingency Planning Research, 1996, Eagle Rock Alliance. Web : http ://www.eaglerockalliance.com

Tout l'intérêt ici est donc d'avoir un marché cible où un gain local en efficacité énergétique est directement perceptible et valorisable.

Au travers d'un audit énergétique sur deux centres (l'un d'environ 5000 m^2, le deuxième environ 3000 m^2), il a été possible de recueillir les informations permettant de quantifier l'enjeu de l'optimisation des interconnexions de la chaîne de distribution électrique sur ce marché cible.

Profil de consommation

Le suivi de la consommation sur une durée significative ainsi que le relevé des suivis des compteurs de fourniture EDF ont permis de dresser un profil de la consommation électrique de ce type de site [Daubert 04]. La figure 5.11 (pour le second site) donne une image du profil de consommation sur différentes échelles de temps.

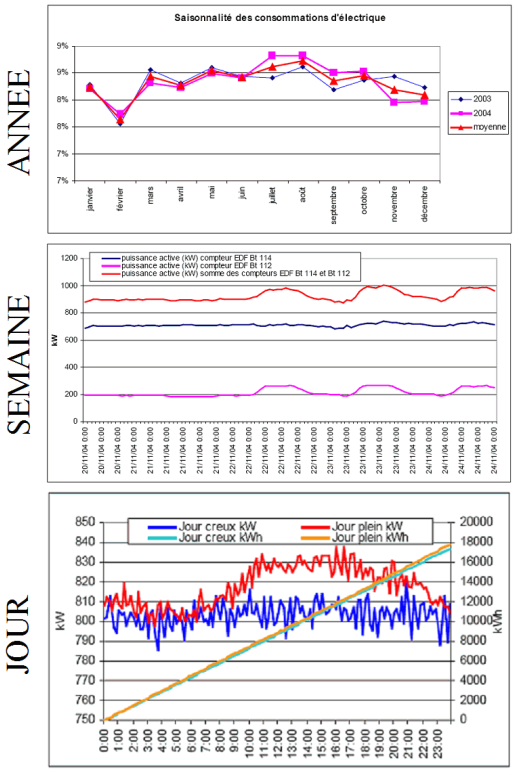


FIG. 5.11 – Profil de consommation d'un data-center - A l'échelle saisonnière, hebdomadaire et journalière

Ce profil permet aisément de déduire un profil d'utilisation de la chaîne de distribution électrique qui se ramène aisément à une consommation constante moyennée sur un an (pour tenir compte des variations saisonnière notamment, avec l'augmentation de la consommation des climatiseurs en été). Cette étude confirme également le caractère énergivore de ces centres, puisque pour le site qui va nous servir de référence (le 1er, de 5000 m^2), on arrive à une consommation moyennée permanente extrapolée à 1280 kW pour un taux de charge de la distribution de 30% (taux typique en tenant compte du niveau de redondance requis).

Présence d'harmoniques en courant

Jusqu'ici, toutes les caractérisations ont été réalisée sur la base d'une alimentation en régime harmonique à 50 Hz. Du fait de l'utilisation d'onduleurs d'une part pour la sécurisation de l'alimentation et de la nature des charges : alimentations à base de composants d'électronique de puissance et donc à découpage pour les serveurs, les courants transitant dans la chaîne de distribution ne se limitent par au simple fondamental à 50 Hz.

Cependant de par la qualité et le surdimensionnement de l'installation (redondance), les taux de distorsion harmoniques (THD) maximaux que nous avons relevé sont de l'ordre de 13%. De plus l'essentiel du contenu harmonique se trouve sur l'harmonique 3 (à 150Hz)

On est en droit de se demander si ce contenu harmonique est susceptible d'avoir un impact sur le niveau de pertes dans la connectique, puisque nous avons vu dans le paragraphe 2.2.2 que chaque harmonique apporte sa contribution aux pertes, en fonction de la résistance apparente des conducteurs à la fréquence de l'harmonique.

Ici, on peut faire l'hypothèse que seul l'harmonique 3 se superpose au fondamental :

$$I = I_1 + I_3$$

Le THD est donné en courant, d'où :

$$THD = \frac{I_3}{I_1} = 13\%$$

D'où au niveau des pertes Joule :

$$\begin{aligned} P_{Total} &= P_1 + P_3 \\ &= R_{eq}(50Hz) * {I_1}^2 + R_{eq}(150Hz) * {I_3}^2 \\ &= P(I_1, 50Hz) + P(I_1, 150Hz) * THD^2 \end{aligned}$$

A ce niveau, nous allons prendre l'exemple d'un système de trois câbles mis en parallèle, en triphasé, puisqu'il s'agit d'un type de conducteur que nous avons fréquemment observé. La figure 5.12 présente le niveau de pertes associées au fondamental, et à l'harmonique 3, pour le même courant nominal.

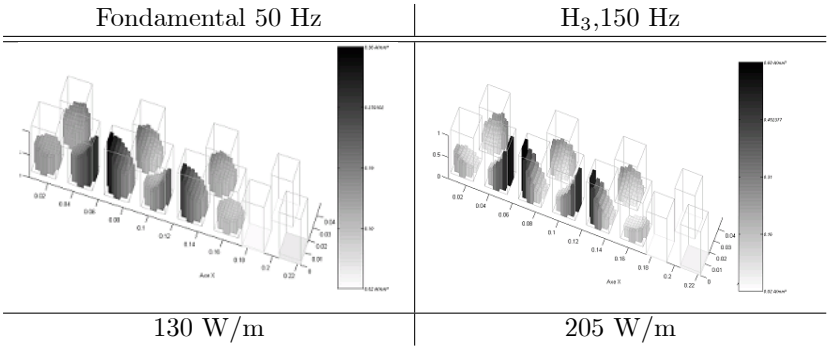


FIG. 5.12 – Niveau de pertes selon le rang harmonique pour le même courant

Cet exemple permet d'extrapoler alors sur l'ensemble de la chaîne de distribution que l'impact sur le niveau de pertes Joule d'un THD en courant de 13% est de l'ordre de :

$$\Delta P = 3\%$$

Ainsi, même si cet impact n'est pas négligeable, il ne modifie pas complètement la situation, ce qui nous permettra de négliger le contenu harmonique en première approche et rester dans le cadre de ce qui a été fait précédemment en terme de marge d'optimisation.

Ici on aurait également pu faire appel au calcul approché développé en remarque au paragraphe 2.2.2. Le rayon des câbles est d'environ 15mm, ce qui compte tenu d'une profondeur de peau de 9,5mm à 50 Hz, donne un accroissement de la résistance équivalente des câbles estimé à 45%.

La simulation indique quant à elle une augmentation de l'ordre de 58%. Dans ce cas, l'approximation par l'approche type 'couronne conductrice' entraîne plus de 20% d'erreur. On constate donc bien ici qu'il ne s'agit que d'un moyen rapide de donner un tendance même pour une forme simple, puisque les effets de proximité ne sont pas pris en compte.

Cet exemple montre par ailleurs que ce type d'approximations, pourtant souvent utilisées en dimensionnement, sont rapidement insuffisantes.

Pertes dans les interconnexions

Les mesures ont permis de segmenter les usages de l'électricité sur le site. Les résultats sont résumés sur le diagramme 5.13.

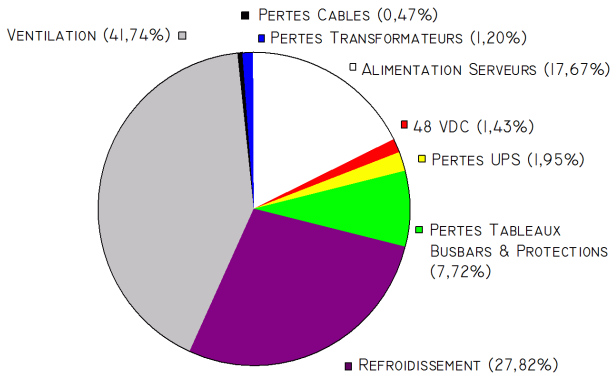


Fig. 5.13 – Répartition de la consommation d'un datacenter par usages

- Cette répartition conduit à une estimation des pertes totales dans les interconnexions de l'ordre de *3%* (ce chiffre recouvre les câbles pour 0.47 %, mais aussi les jeux de barres présents dans les tableaux pour 1/3 des 7.8% de pertes dans les tableaux de distribution [Rodriguez 02]).
- En se basant sur une marge d'optimisation de 30% comme précédemment, on impacte la réduction de la consommation totale du site de l'ordre de 1%.

- Pour effectuer une extrapolation sur le marché, on se base sur la densité moyenne de puissance installée dans les datacenters, qui est de 350W/m2.

- Le potentiel d'ouverture de datacenters actuel (donnée service Product&Technology de Schneider) est de :
  1 300 000 m^2 au niveau mondial,
  31 000 m^2 en France.
- Sachant que le taux de renouvellement des équipements est de 15 ans.
- Le potentiel de réduction de consommation annuel est de :
  600GWh/an au niveau mondial,
  14GWh/an en France.

Ce chiffre représente de l'ordre de 15% de l'enjeu Schneider sur les jeux de barres, ce qui valide d'une part le choix de ce marché cible et consolide d'autre part le calcul de l'enjeu global, puisque cette part n'est pas aberrante.

5.4.3 Enjeu global

On constate actuellement un phénomène d'extension du marché canalisations préfabriquées qui se substituent aux câbles (du fait notamment de la non-maîtrise du mode de pose par les fabricants, ce qui impose des coefficients de déclassement importants [Auber 93]), ce qui laisse supposer que l'enjeu réel pourrait, dans les années à venir, augmenter considérablement.

Dans ce cadre, nous allons nous risquer à une rapide estimation de ce que représente l'enjeu des interconnexions au sens large, c'est à dire telle qu'adressées par la méthode PEEC et non pas uniquement en terme de produits ciblés à la base de cette étude.

Nous ne ciblons donc pas uniquement les pertes dans les conducteurs, mais plus généralement tous les produits ciblés par la méthode en terme d'aide à la conception.

A ce titre, on citera en plus des jeux de barres et des canalisations électriques

- les câbles de tout calibre (y compris les lignes de transport, la câblerie embarquée en automobile, aviation ...) [Sanchez 03] ;
- les sytèmes de raccordement associés [Clavel 03], [Guichon 00c] ;
- les busbars de connexion utilisés dans les convertisseurs d'électronique de puissance. Ce type de connecteurs à faible impédance est de plus en plus largement développé (utilisés par exemple dans les onduleurs pour alimentation sécurisée, ils servent au raccordement de bancs de capacité et de mise en parallèles de composants de commutation) et font l'objet d'études, faisant notamment appel à la méthode PEEC [Pasterczyk 03], [Besacier 03], [Piette 99], [Clavel 97a] ;
- le câblage interne des modules de puissance semi-conducteurs [Martin 04], [Pasterczyk 04], [Clavel 97b], [Siddabattula 99] ;
- les pistes de circuit imprimé [Guena 03] et les composants bobinés intégrés sur circuit [Yin 03] ;
- la filerie courant faible (transport de signaux) [Rauscher 04] ;
- ....

Remarque 32 *Toutes les applications citées ci-dessus font partie du cahier des charges des possibilités du logiciel InCa 3D.*

Pour résumer, le 'marché' accessible à la conception assistée par la méthode PEEC est colossal et pour en donner une estimation, nous allons partir de la consommation globale annuelle des principaux matériaux utilisés pour réaliser des interconnexions électriques (cuivre et aluminium), puisqu'il est difficile de lister les applications une par une.

D'après le LME (London Métal Exchange), les quantités annuelles consommées totales sont :

	Aluminium	Cuivre
Consommation Annuelle	$24.10^9 kg/an$	$15.10^9 kg/an$

L'usage purement 'électrique' ne représente bien sûr pas la totalité de la consommation. Sa part est estimée à 8% pour l'aluminium et à une moyenne de l'ordre de 40% pour le cuivre (cette valeur fluctue largement entre les zones géographiques : 38% pour l'Europe, 25% pour les Etats-Unis, 50% pour l'Asie - Source ICSG[11]).

D'autre part, si pour l'aluminium la quasi totalité des usages électriques sont dédiés aux interconnexions, ce n'est pas le cas pour le cuivre, puisque les usages électriques comptent également les bobinages des machines de production, transformateurs et relais/actionneurs.

En l'absence de segmentation plus fine, on considérera que la moitié seulement des usages électriques du cuivre sont dédiés à la connectique.

[11] International Copper Study Group - www.icsg.org

	Aluminium	Cuivre
Part de la connectique en masse	8%	20%
Volume	$711.10^3 m^3/an$	$337.10^3 m^3/an$
Total	$\sim 1.10^6 m^3$	

Ainsi, si on ramène toute la connectique à des fils équivalents de 1mm^2, la production équivalente annuelle est de l'ordre de :

$$1.10^9 \text{ km/an} \tag{5.1}$$

Notons que la distance équivalente de conducteurs représente :
- 2 millions de fois la production Schneider jeux de barres et canalisations ;
- de l'ordre de grandeur de la distance terre-soleil[12] ....

Voilà qui renforce de façon singulière l'intérêt de la méthode PEEC !

On peut d'ailleurs rapporter cette distance à une consommation électrique :
- les exemples traités dans le cadre de ce travail montrent que les densités moyennes de courant sont de l'ordre de 2,5 A/mm^2 dans le cuivre et 1,8 A/mm^2 dans l'aluminium (ces chiffres correspondent à des interconnexions de puissance, mais étant donné qu'ils sont liés à une contrainte thermique, ils peuvent également servir à une estimation globale)
- Partant d'une expression simple des pertes Joule du type :

$$P = R_{moy}\ I_{moy}^2 = \rho \frac{L}{S} (S\ J_{moy})^2 = \rho\ V\ J_{moy}^2$$

- Avec un facteur d'utilisation de 30%, on arrive à une consommation totale des interconnexions fabriquées chaque année de :

$$P = 0,3 \times 115GW = 34,5GW$$

- Si on suppose à présent que le renouvellement intégral de ces équipements se fait en moyenne sur 10 ans, on peut donner une estimation de la consommation permanente de l'ensembles des interconnexions installées :

$$P = 345GW$$

Ainsi, cette 'grossière' estimation révèle qu'environ 430 RNSE[13] fonctionnent en permanence pour produire les pertes dans les liaisons au niveau mondial. On doit rapporter ce chiffre à la production électrique totale, qui est de l'ordre de 3000 RNSE.

Cela signifie que près de 15% de l'énergie produite est dissipée dans les connectiques de toutes sortes (ce chiffre n'est pas abérent, rapporté aux 10% de pertes à la distribution d'EDF en France).

Le levier de la méthode porte donc en théorie sur la totalité de cette énergie, soit pour la réduction de 30% des pertes envisagée précédemment, 100 RNSE de marge d'optimisation !

[12] qui est (en moyenne) de 150 000 000 km

[13] Rappel : Réacteur Nucléaire Standard Equivalent. La production moyennée est fixée à 800 MW, 365jours par an, 24h/24.

5.5 Conclusion : Vers une intégration des outils de design électrotechnique et d'ACV

Pour conclure cette partie, nous insisterons sur la nécessité d'un couplage entre les outils de conception utilisés en électrotechnique et un outil d'Analyse du Cycle de Vie.

En effet, comme nous l'avons vu, les choix techniques faits lors de la conception d'un produit influent très fortement sur les impacts environnementaux qui en résulteront.

D'autre part, l'analyse du cycle de vie requiert une bonne connaissance du fonctionnement des dispositifs, puisqu'il est nécessaire de connaître un profil d'utilisation et de fonctionnement qui sont deux éléments indissociables d'un dispositif électrotechnique.

Ainsi une première approche nécessite à minima de pouvoir transcrire les résultats des modélisations effectuées avec les outils de conception, qu'il s'agisse de méthode PEEC et éléments finis, en terme d'ACV, ce qui se traduit par une nécessité de pouvoir effectuer un calcul d'impacts directement en post-traitement d'un environnement de calcul type FLUX.

Dans un deuxième temps, ce couplage doit être effectif dans une boucle d'optimisation (multicritère), si l'on souhaite pouvoir intégrer réellement l'éco-conception dans l'optimisation des dispositifs électromagnétiques, d'où la nécessité d'un couplage fort entre outils d'ACV et modélisations électrotechniques.

En effet, le choix d'un compromis peut être très sensible à certains paramètres, tels que le mix énergétique du pays d'utilisation et/ou du pays de production. Il est également nécessaire de pouvoir évaluer la viabilité d'un choix sur le long terme (évolution des prix de l'électricité, épuisement des ressources ...)

Chapitre 6

Conclusion

Cette thèse s'inscrit dans le développement et la promotion de l'utilisation de la méthode PEEC pour la conception des systèmes d'interconnexions électriques basse tension de puissance.

Comme on a pu le voir, cette méthode a été 'détournée' de ses applications d'origine, ce qui ne l'empêche pas d'être un outil extrêmement efficace (et probablement l'outil le mieux adapté à l'heure actuelle) pour traiter l'aspect électromagnétique des applications ciblées ici, à savoir :

- les jeux de barres (sans enveloppe métallique),
- les canalisations électriques préfabriquées (sous enveloppe en tôle ferromagnétique).

Concernant la deuxième catégorie de produits, du fait de la présence de pièces métalliques passives ou non au voisinage des conducteurs de transport, nous avons vu que la méthode PEEC 'classique' imposait des hypothèses de calcul trop fortes pour permettre la modélisation. Nous avons pour cela proposé une extension de la méthode, que nous avons baptisée 'μPEEC' pour signaler la possibilité de prendre en compte la perméabilité relative des matériaux dans le cadre de la méthode PEEC.

C'est d'ailleurs là que se situait tout l'enjeu de cette méthode étendue : ne rien perdre des avantages de la méthode PEEC en terme de simplicité de description du modèle de simulation et de rapidité de calcul. C'est la raison qui nous a conduit à présenter l'extension de la méthode après la mise en oeuvre d'une nouvelle stratégie d'optimisation.

La force de la méthode PEEC, ce qui en fait un complément aux méthodes éléments finis pour l'optimisation des connexions, est d'une part une simplification du problème qui conduit à fixer la direction du courant dans des 'tuyaux' de courant. Cette hypothèse apporte beaucoup d'information et permet une écriture simple du problème. D'autre part, et il s'agit en définitive d'une conséquence de la connaissance des directions de courant, les variables de la méthode sont précisément les leviers sur lesquels on souhaite intervenir. Ce point nous permet de positionner cette méthode comme la mieux adaptée pour traiter les interconnexions.

Une fois présentées les possibilités d'optimisation, le cadre d'une extension de la méthode devait naturellement conserver ses caractéristiques fortes : l'approche tuyau, la modélisation par éléments partiels et enfin une solution obtenue par la résolution d'un simple système linéaire. L'approche Ampérienne de la matière aimantée permet de relever ce défi. Il est bien sûr nécessaire d'avoir recours à une écriture astucieuse du problème pour disposer de suffisamment de conditions pour compenser l'ajout de variables associées aux courants liés, tout en restant dans une écriture matricielle du problème, soluble sans recours à des procédés itératifs.

Le procédé mis au point semble fiable et suffisamment robuste numériquement pour être considéré comme effectif. Il reste bien entendu quelques points à affiner que nous placerons au rayon des perspectives de développement. Il s'agit entre autre des questions de maillage et de conditionnement. Ces points ne remettent pas en cause l'efficacité de la méthode mais ils requièrent un minimum d'attention, pour éviter l'obtention de résultats erronés. Les principaux pièges à éviter ont été évoqués.

Pour ce qui concerne les stratégies d'optimisation, nous avons également présenté une nouvelle méthodologie d'optimisation empruntée à la mécanique des structures : l'optimisation de la topologie de la section des conducteurs. Il s'agit d'une brique supplémentaire qui vient s'insérer dans un schéma global d'optimisation qui, comme on a pu le voir, permet d'associer deux stratégies. Leur utilisation conjointe doit, schématiquement, permettre de lutter contre les deux grandes 'classes' d'effets induits (effet de peau et effets de proximité).

Le succès du couplage de la méthode PEEC avec les algorithmes génétiques résulte du caractère 'fusionnel' du couplage, qui est naturel du point de vue modèle et du point de vue optimiseur.

Les perspectives d'optimisation sont extrêmement intéressantes en terme d'innovation. A ce titre on devra bien considérer les deux aspects de la conception :
- l'amélioration de solutions techniques existantes,
- la création de solutions techniques pour un besoin nouveau.

C'est dans cette dernière voie que se trouve de façon indéniable la meilleure voie de valorisation de la méthode PEEC en terme d'outil de conception, puisque comme nous espérons avoir réussi à le démontrer, les phénomènes électromagnétiques sont au coeur du fonctionnement des interconnexions.

Certes, il est toujours envisageable, les exemples présentés le prouvent, d'améliorer des solutions existantes. Nous restons cependant persuadés que dans ce cas, l'optimisation, même si elle est efficace, souffre de contraintes trop fortes, ou plutôt trop inadaptées. Par inadaptées, nous entendons ici simplement qu'elle résulte d'un choix différent sur la hiérarchie des phénomènes physiques à prendre en compte.

Pour résumer, nous pensons qu'il y a probablement beaucoup à gagner à remettre en cause les méthodes classiques de dimensionnement pour remettre l'électromagnétisme au coeur de la conception des liaisons conductrices de puissance. Le gain adressé n'est d'ailleurs pas forcément lié à la performance. Le concepteur a probablement autant à y gagner en terme de productivité, dans la mesure où il peut mieux cerner le fonctionnement de la connexion.

Enfin, on aura remarqué que nous avons tenté de ne pas être restrictifs en terme d'application dans les développements présentés. Il apparaît en effet que cette méthode, et tous les outils qui peuvent être développés sur cette base, ne doivent pas se limiter aux seuls jeux de barres. Elle s'adresse à toutes les interconnexions, ce qui lui confère un potentiel de valorisation considérable.

Cet aspect est d'autant plus important que nous avons montré un enjeu en terme d'impact environnemental considérable. Cette méthode permet en effet de dégager des marges jusqu'ici oubliées, qui sont conformes à la notion d'éco-conception. Puisque, pour la réduction des phénomènes conduisant à la dissipation des pertes par effet Joule, nous touchons à l'efficacité énergétique des dispositifs, il paraît naturel de replacer la conception dans le cadre d'un développement durable.

On retiendra d'ailleurs que les connexions non-optimisées renforcent les transferts de pollution entre les organes de conversion. Il est donc impératif de les rendre transparentes pour approcher une efficacité optimale globale.

Nous avons pu constater que le levier est ici suffisamment important pour qu'il soit indispensable de prendre en compte cet aspect en phase de conception. Les deux moyens que nous avons mis en lumière pour satisfaire à cet objectif sont d'une part le développement d'un outil logiciel dédié qui est sûrement le meilleur moyen de promotion et de valorisation de la méthode. D'autre part, l'intégration de cet outil à un environnement de développement électrotechnique qui doit lui-même être couplé à un outil d'analyse du cycle de vie des produits.

Il apparaît évident que cet aspect va prendre une importance croissante dans l'avenir, étant donné la prise de conscience progressive à l'échelle planétaire de la nécessité d'introduire la notion de coût environnemental dans nos choix stratégiques.

Dans de nombreux cas déjà, le moindre coût économique et le moindre coût environnemental ne sont pas incompatibles. Gageons que l'avenir verra une généralisation de ce point de vue, puisque des 'incitations' légales vont très probablement directement donner un coût non négligeable aux atteintes à l'environnement.

Bibliographie

[Ait Aissi 80] Daniel Ait Aissi. *Contribution à l'étude numérique de l'effet de peau dans une barre rectangulaire.* Mémoire cnam, MERLIN GERIN, Juin 1980.

[Antonini 97] G. Antonini, E. Clavel, S. Cristina, A. Orlandi, J. Roudet & M. Youssef. *Conducted and Radiated EMI Characterization of Power Electronics Converter.* In IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Guimares, Portugal, 1997.

[Antonini 00] G. Antonini, A. Orlandi & A.E. Ruehli. *Speed-up of PEEC method by using wavelet transform.* In Electromagnetic Compatibility, 2000. IEEE International Symposium on, volume 1, pages 95–100 vol.1, 2000.

[Antonini 01] G. Antonini, A. Orlandi & A.E. Ruehli. *Harten's scheme for PEEC method.* In Electromagnetic Compatibility, 2001. EMC. 2001 IEEE International Symposium on, volume 1, pages 340–344 vol.1, 2001.

[Antonini 02] G. Antonini, A. Orlandi & A.E. Ruehli. *Analytical integration of quasi-static potential integrals on nonorthogonal coplanar quadrilaterals for the PEEC method.* Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on, vol. 44, no. 2, pages 399–403, 2002.

[Antonini 03a] G. Antonini & A.E. Ruehli. *Fast multipole and multifunction PEEC methods.* Mobile Computing, IEEE Transactions on, vol. 2, no. 4, pages 288–298, 2003.

[Antonini 03b] G. Antonini, A.E. Ruehli & A. Haridass. *Including dispersive dielectrics in PEEC models.* Electrical Performance of Electronic Packaging, 2003, pages 349– 352, 2003.

[Appert 02] O. Appert. *Présentation du "World Energy Outlook", "Prospective énergétique à l'horizon 2030".* In Cycle de conférences de politique énergétique Organisé conjointement par le Commissariat général du Plan et la Direction générale de l'Énergie et des Matières premières (8ème Session du 6 novembre), 2002.

[Araneo 03] R. Araneo & S. Celozzi. *Analysis of the shielding performance of ferromagnetic screens.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 2, pages 1046–1052, 2003.

[Archambeault 01] B. Archambeault & A.E. Ruehli. *Analysis of power/ground-plane EMI decoupling performance using the partial-element equivalent circuit technique.* Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on, vol. 43, no. 4, pages 437–445, 2001.

[Arnaud 02] Florian Arnaud. *Optimisation de jeux de barres.* Rapport de stage, Laboratoire d'électrotechnique de grenoble / Schneider Electric, 2002.

[Ashcroft 81] N.W. Ashcroft & N.D. Mermin. Solid state physics. Holt-Saunders International Edition, Tokyo, Japan, 1981.

[Atienza 99] E. Atienza, J. Bigeon, F. Wurtz & B. Belhabib. *Steps to an Electrical Design Environment.* In IEEE-IECON'99, volume 2, pages 815–820, San Jose, CA, USA, 1999.

[Auber 93] Roland Auber & Claude Rémond. *Installations électriques BT - Choix et mise en oeuvre des matériels.* Techniques de l'ingénieur : Traité de génie électrique, vol. D 5 034, pages 1–30, 1993.

[Axelsson 84] O. Axelsson & V.A. Barker. *Variational formulations of boundary value problems : part II.* In Finite element solution of boundary value problems : Theory and computation, Computer science and applied mathematics, pages 101–144. Academic Press, Orlando, USA, 1984.

[Bauquis 01] P.R. Bauquis. *A Reappraisal of Energy Supply and Demand in 2050.* Oil and Gas Science and Technology Ű Rev. IFP, vol. 56, no. 4, pages 389–402, 2001.

[Berthet 96] Hugues Berthet. *Elaboration de règles de conception, pour les appareils futurs, en vue du respect au moindre coût de la réglementation sur les atteintes à l'environnement.* Mémoire cnam, CNAM-CUEFA, 1996.

[Berthiau 01] Gérard Berthiau & Patrick Siarry. *État de l'art des méthodes d'optimisation globale.* RAIRO Oper. Res., vol. 35, pages 329–365, 2001.

[Bertin 77] Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux & Jacques Renault. Électromagnétisme. 1, Électrostatique et magnétostatique. Collection Dunod université. Paris : Dunod, 1977.

[Besacier 01] Maxime Besacier. *Adaptation de la méthode PEEC à la représentation électrique des structures d'électronique de puissance.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.

[Besacier 03] Maxime Besacier, J.-M. Guichon, J.-L. Schanen & J. Roudet. *Bus bar copper losses computation.* The European Physical Journal - Applied Physics, vol. 23, pages 55–62, 2003.

[Bobbio 95] S. Bobbio, A. Del Pizzo, F. Marignetti & E. Pagano. *Eddy current iron losses in axially laminated brushless motors.* IEE Proceedings - Electric Power Applications, vol. 142, nř3, 1995.

[Bossavit 98] A. Bossavit. Computational electromagnetism : Variational formulations, complementarity, edge elements, volume 3 of *Electromagnetism.* Academic Press, San Diego, USA, 1998.

[Bottauscio 96] O. Bottauscio, E. Carpaneto, M. Chiampi, D. Chiarabaglio & I. Panaitescu. *Numerical and experimental evaluation of magnetic field generated by power busbar systems.* IEE Proceedings on Generation, Transmission and Distribution, 1996.

[Brennan 79] P.A. Brennan, N. Raver & A. Ruehli. *Three dimensional inductance computations with partial element equivalent circuits.* IBM J. Res. Develop, 1979.

[Brissoneau 97] P. Brissoneau. Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique. Hermès, Paris, France, 1997.

[Caldora Costa 01] M. Caldora Costa. *Optimisation des dispositifs électromagnétiques dans un contexte d'analyse par la méthode des éléments finis.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.

[Callen 85] H.B. Callen. *Alternative formulations and Legendre transformations.* In Thermodynamics and an introduction to thermostatistics, pages 131–152. John Wiley and sons, New York, USA, 1985.

[Cavarec 03] Pierre Emmanuel Cavarec, Hamid Ben Ahmed & Bernard Multon. *Optimization Material Distribution in Electromagnetic Actuators.* In 11th International Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics (ISEM 2003), 2003.

[C.D.A. 56] Copper Development Association C.D.A., editeur. Copper for busbars, volume CDA Pub Nř22. C.D.A., Copper Development Association, 1956.

[Chatelin 88] Françoise Chatelin. Valeurs propres de matrices. Mathématiques appliquées pour le maîtrise. Masson, 1988.

[Chen 02] Du-Xing Chen, E. Pardo & A. Sanchez. *Demagnetizing factors of rectangular prisms and ellipsoids.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 4, pages 1742–1752, 2002.

[Chen 03] Tsung-Hao Chen, C. Luk & C.C.-P. Chen. *INDUCTWISE : inductance-wise interconnect simulator and extractor.* Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on, vol. 22, no. 7, pages 884–894, 2003.

[Chindilov 03] D.V. Chindilov. *Three-dimensional eddy-current calculation for small skin depths.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 2, pages 968–972, 2003.

[Choi 98] S.H.E. Choi, D.A. Lowther & D.N. Dyck. *Determining boundary shapes from the optimized material distribution system.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 34, no. 5, pages 2833–2836, 1998.

[Ciarlet 82] P.G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Mathématiques appliquées pour le maîtrise. Masson, 1982.

[Ciric 88] I.R. Ciric. *Surface Source Models and Formulas for the Magnetic Field od Polygonal Cross Section Conductors.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 142, nř6, 1988.

[Clavel 96] E. Clavel. *Vers un outil de conception de câblage : le logiciel InCa.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

[Clavel 97a] E. Clavel, Y. Maréchal & J. Roudet. *Modélisation des câblages en électronique de puissance : apport et complémentarité des méthodes d'éléments finis et de circuits équivalents.* The European Physical Journal - Applied Physics, vol. 1, pages 211–223, 1997.

[Clavel 97b] E. Clavel, J. Roudet & Y. Marechal. *Design of a commutation cell of a high power IGBT inverter-the contribution of the simulationThis paper appears in :Meeting Date : 10/05/1997 -.* In Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE, volume 2, New Orleans, LA , USA, 1997.

[Clavel 97c] E. Clavel, J. Roudet & J.-L. Schanen. *How to better know what happens inside a power multi chip module.* In Power Electronics Specialists Conference, 1997. PESC '97 Record., 28th Annual IEEE, volume 1, pages 747–753, St. Louis, MO , USA, 1997.

[Clavel 01] E. Clavel & J. M. Guichon. *Manuel d'utilisation d'InCa (Inductance Calculation) : Modélisation des caractéristiques électriques dde câbalage à l'aide de la méthode PEEC.* Rapport technique, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, 2001.

[Clavel 02] E. Clavel, J. Roudet & A. Foggia. *Electrical modeling of transformer connecting bars.* IEEE Transaction on Magnetics, vol. 38, no. 2, pages 1378–1382, 2002.

[Clavel 03] E. Clavel, J.-M. Guichon & C. Kilindjian. *Evaluation des pertes dans un dispositif électrique à l'aide des méthodes PEEC et EF - Influence du matériau de la vis.* In 4th European Conference on Numerical Methods in Electromagnetism (NUMELEC 2003), volume 1, pages 205–206, Toulouse, France, 2003.

[Clavel 04] E. Clavel. *Intégration de la méthode de recherche de schémas électriques équivalents (PEEC) pour la modélisation, l'analyse et la conception des interconnexions dans les systèmes complexes.* Habilitation à diriger des recherches, LEG, 12 mai 2004.

[Coperich 00] K.M. Coperich, A.E. Ruehli & A. Cangellaris. *Enhanced skin effect for partial-element equivalent-circuit (PEEC) models.* Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, vol. 48, no. 9, pages 1435–1442, 2000.

[Coulomb 85] J.-L. Coulomb & J.-C. Sabonnadière. Cao en électrotechnique. Hermes, Paris, France, 1985.

[Coulomb 02] J.-L. Coulomb. *Optimisation.* In G. Meunier, editeur, Electromagnétisme et problème couplés, volume 3 of *Traité Electronique, Génie Electrique, Microsystèmes*, pages 279–325. Hermès, Paris, France, 2002.

[Cullum 00] J. Cullum, A. Ruehli & T. Zhang. *A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application to PEEC models with retardation.* Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 47, no. 4, pages 261–273, 2000.

[Curtis 99] H. Curtis. *Report on International Symposium on Electronics and the Environment, Tutorial session - Denvers, Massachusetts.* Rapport technique, ISEE, May 11-13 1999.

[Daubert 04] Guillaume Daubert. *Contribution à l'efficacité énergétique des Data-Centers par l'optimisation des jeux de barres et canalisations de puissance.* Rapport de stage mastère ose, Schneider Electric, 2004.

[De Lacheisserie 99a] E. Du Trémollet De Lacheisserie, editeur. Magnétisme : Fondements, volume 1 of *Collection Grenoble Sciences.* Presse Universitaire de Grenoble, Grenoble, France, 1999.

[De Lacheisserie 99b] E. Du Trémollet De Lacheisserie, editeur. Magnétisme : Matériaux et applications, volume 2 of *Collection Grenoble Sciences.* Presse Universitaire de Grenoble, Grenoble, France, 1999.

[De Ruiter 01] M.J. De Ruiter & F. Van Keulen. *Topology Optimization Using the Topology Description Function.* In The Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-4), Dalian, China, 2001.

[Del Vecchio 03] R.M. Del Vecchio. *Eddy-current losses in a conducting plate due to a collection of bus bars carrying currents of different magnitudes and phases.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 1, pages 549–552, 2003.

[Demoulin 00] Bernard Demoulin & Pierre Degauque. *Blindages électromagnétiques.* Techniques de l'ingénieur : Traité de génie électrique, vol. D1320, pages 1–17, 2000.

[Dongarra 00] J. Dongarra & F. Sullivan. *Guest editors' introduction : The top 10 algorithms.* Computing in Science and Engineering, vol. 2, no. 1, pages 22–23, 2000.

[Dréo 03] Johann Dréo, Alain Pétrowski, Patrick Siarry & Eric Taillard. Métaheuristiques pour l'optimisation difficile - chapitre 4 :les algorithmes de colonies de fourmis. Algorithmes. Eyrolles, 2003.

[Ducluzaux 82] A. Ducluzaux. *Pertes supplémentaires dans les conducteurs pour forte intensité par effets de peau et de proximité.* Cahier Technique de Schneider Electric, nř 083, 1982.

[Dufour 00] S. Dufour, G. Vinsard & B. Laporte. *Generating rotor geometries by using a genetic method.* IEEE. Transactions on Magnetics, vol. 36, no. 4, pages 1039–1042, 2000.

[Dupont 03] Dephine Dupont. *Modélisation du comportement électrodynamique d'un jeu de barres.* Rapport de dea, Laboratoire 3S / Schneider Electric, Juin 2003.

[Duvaut 90] G. Duvaut. *Cinématique des milieux continus.* In Mécanique des milieux continus, Collection de mathématiques appliquées pour la maîtrise, pages 5–31. Masson, Paris, France, 1990.

[Dwight 16] H.B. Dwight. *Skin effect of a return circuit of two adjacent strap conductors.* The Electric Journal, vol. 13, pages 57–58, 1916.

[Dwight 18] H.B. Dwight. *Skin effect in tubular and flat conductors.* Transactions AIEE, vol. 37, no. 2, pages 1379–1403, 1918.

[EIME 98] EIME. *Environmental Information and Management Explorer*, 1998.

[Ekman 03a] J. Ekman. *Electromagnetic Modeling Using the Partial Element Equivalent Circuit Method.* PhD thesis, Luleå University of Technology, 2003.

[Ekman 03b] J. Ekman, G. Antonini & A. Orlandi. *3D PEEC capacitance calculations.* In Electromagnetic Compatibility, 2003 IEEE International Symposium on, volume 2, pages 630–635 vol.2, 2003.

[Eschenauer 01] Hans A Eschenauer & Niels Olhoff. *Topology optimization of continuum structures : A review.* Applied Mechanics Reviews, vol. 54, no. 4, pages 331–390, 2001.

[Flux 04] Flux. *CAD package for electromagnetic and thermal analysis using finite elements*, 2004.

[Gala 00] K. Gala, V. Zolotov, R. Panda, B. Young, Junfeng Wang & D. Blaauw. *On-chip inductance modeling and analysis.* In Design Automation Conference, 2000. Proceedings 2000. 37th, 2000.

[Gala 01] K. Gala, D. Blaauw, J. Wang, V. Zolotov & M. Zhao. *Inductance 101 : analysis and design issues.* In Design Automation Conference, Las Vegas, NV, 2001. Proceedings, pages 329 – 334, 2001.

[Gen 00] Mitsuo Gen & Runwei Cheng. Genetic algorithms and engineering optimization. Wiley series in engineering design and automation. John Wiley and Sons, New York, 2000.

[Giacoletto 96] L.J. Giacoletto. *Frequency- and time-domain analysis of skin effects.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 32, no. 1, pages 220–229, 1996.

[Glover 86] Fred Glover. *Future paths for integer programming and links to artificial intelligence.* Comput. Oper. Res., vol. 13, no. 5, pages 533–549, 1986.

[Gonnet 02] J.-P. Gonnet. *Qualité énergétique environnementale et sanitaire : Préparer le bâtiment à l'horizon 2010 : Optimisation des canalisations et des armoires de distribution.* Etude préliminaire réf. 02.07.041 - rapport final, Schneider Electric, 2002.

[Gonnet 03] Jean-Paul Gonnet. *Optimisation des canalisations électriques et des armoires de distribution.* Rapport de dea, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble / Schneider Electric, Juin 2003.

[Goodenough 02] J.B. Goodenough. *Summary of losses in magnetic materials.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 5, pages 3398–3408, 2002.

[Gotzig 97] Bernhard Gotzig. *Recherche du schéma optimal d'exploitation d'un réseau de distribution électrique.* PhD thesis, Thèse de Doctorat de l'INPG, 1997.

[Gradshteyn 94] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik. *Vector field theory.* In A. Jeffrey, editeur, Table of integrals, series and products, page 1116. Academic Press, San Diego, USA, 5th edition, 1994.

[Grossmann 96] Ignacio E. Grossmann. Global optimization in engineering design. Nonconvex optimization and its applications 9. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[Guena 03] A. Guena, F. Costa & C. Labarre. *Association of electromagnetic methods to model printed circuit board in power electronic systems.* Eur. Phys. J. AP, vol. 22, pages 115–132, 2003.

[Guichon 00a] J.-M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet & V. Mazauric. *Method to compute current density in power distribution bars.* In Osama A. Mohammed, editeur, Biennal IEEE Conference on electromagnetic field computation (CEFC2k), volume 1, page 375, Milwaukee, Wisconsin USA, 2000.

[Guichon 00b] J.-M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet & V. Mazauric. *Methodology to compute electrodynamics efforts and temperature on power busbar distribution : coupling of finite elements and analytical approach.* In Osama A. Mohammed, editeur, Biennal IEEE Conference on electromagnetic field computation (CEFC2k), volume 1, page 305, Milwaukee, Wisconsin USA, 2000.

[Guichon 00c] J.-M. Guichon, E. Clavel, C. Turbili & J.-L. Gelet. *Electrodynamics modelling of a structure to test fuses.* PCIM/europe, pages 60–64, 2000.

[Guichon 01a] J.-M. Guichon. *Modélisation, caractérisation, dimensionnement de jeux de barres.* PhD thesis, Institut National Polytechnique, 2001.

[Guichon 01b] J.-M. Guichon, E. Atienza, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric & P. Wendling. *Automatic design of busbars considering electrical criteria.* In The IEEE Power Electrical Systems Conference, Atlanta, USA, 2001.

[Guichon 02] J.-M. Guichon, E. Clavel, F. Janet & V. Mazauric. *Modeling and optimizing power busbars taking into account magnetic materials.* In IEEE International Conference on Power Energy Systems, Marina del Rey, CA, USA, 2002.

[Guichon 03a] J.-M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet & V. Mazauric. *Random coupled gradient optimization of power busbar using PEEC method ; Merging within finite element method.* In J. Webb & D. Giannacopoulos, editeurs, Conference on the computation of magnetic fields (COMPUMAG 2003), volume 3, page 94, Saratoga Springs, NY, USA, 2003.

[Guichon 03b] J.-M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric & P. Wendling. *Evaluation of low-frequency flux density level within an industrial application.* In IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition, Dallas, Texas, USA, 2003.

[Hansen 86] P. Hansen. *The steepest ascent mildest descent heuristic for combinatorial programming.* In Congress on Numerical Methods in Combinatorial Optimization, Capri, 1986.

[Hao 99] J. Hao, P. Galinier & M. Habib. *Métaheuristiques pour l'optimisation combinatoire et l'affectation sous contraintes.* Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 13, no. 2, pages 283–324, 1999.

[Hedia 99] H. Hedia, F. Henrotte, B. Meys, P. Dular, W. Legros & P. Pirotte. *Arrangement of phases and heating constraints in a busbar.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 35, no. 3, pages 1274–1277, 1999.

[Hoer 65] C. Hoer & C. Love. *Exact inductance equations for rectangular conductors with applications to more complicated geometries.* Journal of Research of the National Bureau of Standards C. Engineering and Instrumentation, vol. 69C, no. 2, pages 127–137, 1965.

[Holland 75] John H. Holland. Adaptation in natural and artificial systems. MIT Press, 1975.

[Houck 95] C.R. Houck, J.A. Joines & M.G. Kay. *A genetic algorithm for function optimization : a Matlab implementation.* Technical report : Ncsu-ie-tr-95-09, North Carolina State University, Raleigh, NC, 1995.

[Hsu 01] Yeh-Liang Hsu, Ming-Sho Hsu & Chuan-Tang Chen. *Interpreting results from topology optimization using density contours.* Computers and Structures, vol. 79, no. 10, pages 1049–1058, 2001.

[Hus 89] J. Hus. *Estimating busbar temperatures.* In Petroleum and Chemical Industry Conference, Industrial Applications Society, 36th Annual, pages 119–127, San Diego, CA, USA, 1989.

[IEA 04] International Energy Agency IEA, editeur. World energy outlook 2004. Energy Statistics Division, 2004.

[IEC 87] International Electrotechnical Commission IEC. *Low-voltage switchgear and controlgear assemblies - Particular requirements for busbar trunking systems*, 1987.

[Im 03] Chang-Hwan Im, Hyun-Kyo Jung & Yong-Joo Kim. *Hybrid genetic algorithm for electromagnetic topology optimization.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 5, pages 2163–2169, 2003.

[Jackson 75] J.D. Jackson. Classical electrodynamics. John Wiley and sons, New York, USA, 1975.

[Jain 70] M. P. Jain & L. M. Ray. *Field pattern and associated losses in aluminum sheet in presence of strip bus bars.* IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-89, pages 1525–1539, 1970.

[Janet 00] F. Janet. *Caractérisation et optimisation de liaisons conductrices de puissance.* Rapport de dea, Laboratoire d'électrotechnique de grenoble / Schneider Electric, 2000.

[Jover 02] B. Jover, J. M. Guichon & V. Mazauric. *Synthèse des mesures et des simulations des champs BF réalisées sur le site de STM Crolles.* Rapport technique Rapport Interne nř026990, Schneider Electric, 18-22 Juillet 2002.

[Kirkpatrick 83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr. & Vecchi M. P. *Optimization by simulated annealing.* Science, vol. 220, pages 671–679, 1983.

[Kittel 70] C. Kittel. *Gaz des électrons libre de Fermi I.* In Introduction à la physique de l'état solide, pages 197–223. Dunod, Paris, France, 1970.

[Krauter 95] B. Krauter & L.T. Pileggi. *Generating sparse partial inductance matrices with guaranteed stability.* In Computer-Aided Design, 1995. ICCAD-95. Digest of Technical Papers., 1995 IEEE/ACM International Conference on, pages 45–52, San Jose, CA , USA, 1995.

[Lawrence 97] Craig Lawrence, Jian L. Zhou & André L. Tits. *UserŠs guide for CFSQP version 2.5 : A C Code for Solving (Large Scale) Constrained Nonlinear (Minimax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality Constraints.* Rapport technique, Institute for Systems Research, University of Maryland, College Park, MD 20742 (Institute for Systems Research TR-94-16r1), 1997.

[Leconte 00] V. Leconte, V. Mazauric, G. Meunier & Y. Maréchal. *Comparing F.E.M.-B.E.M. coupling to a remeshing technique to simulate the transients of an axisymmetrical plunger release.* In 5th International Symposium on Electric and Magnetic Fields : From Numerical Models to Industrial Applications, volume 1, Ghent (Belgium), 2000.

[L'Ecuyer 05] P. L'Ecuyer. *Chapter 3 : Random Number Generation.* In S.G. Henderson & B.L. Nelson, editeurs, Elsevier Handbooks in Operations Research and Management Science : Simulation. Elsevier Science, 2005.

[Lescuyer 03] L. Lescuyer. *Un outil simple, évolutif et complet : l'EIME.* Eco-concevoir : appliquer et communiquer : Economica, 2003.

[Long 03] Haibo Long, Zhenghe Feng, Haigang Feng, A. Wang & Tianling Ren. *MagPEEC extended PEEC modeling for 3D arbitrary electro-magnetic devices with application for m-cored inductors.* In Radio Frequency Integrated Circuits (RFIC) Symposium, 2003 IEEE, 2003.

[Martin 04] C. Martin, J.-L. Schanen & R. Pasterczyk. *Inside a power module Ě.* In IAS'04, Industrial Applications Conference, 38th Annual meeting, Salt Lake City, 2004.

[Mazauric 03] V. Mazauric. *Des principes thermodynamiques aux équations de Maxwell : Une approche variationnelle de l'électromagnétisme.* In G. Meunier, editeur, Champs et équations en électromagnétisme, volume 1 of *Electromagnétisme et éléments finis*, pages 147–262. Hermès, Paris, France, 2003.

[Meunier 02a] G. Meunier, editeur. Electromagnétisme et problèmes couplés, volume 3 of *Electromagnétisme et éléments finis.* Hermès, Paris, France, 2002.

[Meunier 02b] G. Meunier, editeur. Modèles et formulations en électromagnétisme, volume 2 of *Electromagnétisme et éléments finis.* Hermès, Paris, France, 2002.

[Meunier 02c] G. Meunier, Y. Lefèvre & P. Lombard. *Couplage avec les équations de circuit.* In G. Meunier, editeur, Electromagnétisme et problèmes couplés, volume 3 of *Electromagnétisme et éléments finis*, pages 21–63. Hermès, Paris, France, 2002.

[Meunier 03] G. Meunier, editeur. Champs et équations en électromagnétisme, volume 1 of *Electromagnétisme et éléments finis.* Hermès, Paris, France, 2003.

[Missoum 99] Samy Missoum. *Optimisation de structures par utilisation combinée de la programmation mathématique et des algorithmes génétiques.* PhD thesis, Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse, 1999.

[Mitchell-Jackson 01] Jennifer D. Mitchell-Jackson. *Energy Needs in an Internet Economy : A closer look at Data Centers.* Master of science, Energy and Resources Group, University of California, Berkeley, 2001.

[Morin 05] Eric Morin. *Modélisation dŠun réseau électrique de tramway : du composant au système.* PhD thesis, Institut National Polytechnique, 2005.

[Moro 82] P. Moro & J.C. Verite. *Etude des densites de courant sur les conducteurs et les gaines d e sortie de centrales.* Revue Générale d'Electricité, pages p. 601–612, 1982.

[N'Guessan 04] K. N'Guessan, V. Leconte, J.L. Coulomb, F. Wurtz & V. Mazauric. *Comparison of two optimization strategies for the design of an ultra-fast actuator.* In VIII-th International Workshop on Optimisation and inverse Problems in Electromagnetism (OIPE2004), Grenoble, France, 2004.

[Pasterczyk 03] R. Pasterczyk, C. Martin & J.-L. Schanen. *Semiconductor and power layout : new challenges for the optimization of high power converter.* In PESC'03, IEEE 34th Annual Conference on Power Electronics Specialist, volume 1, pages 101–106, Acapulco, 2003.

[Pasterczyk 04] R. Pasterczyk, C. Martin & J.-L. Schanen. *Comparative study of new emerged packages for high power IGBT modules.* In Power Conversion Intelligent Motion, Nuremberg, 2004.

[Piette 99] Nadège Piette. *Modélisation et optimisation de la connectique des structures d'électronique de puissance.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.

[Prechtl 97] A. Prechtl & K. Strasser. *Flux distributions near boundaries of magnetizable shells.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 33, no. 5, pages 4295–4302, 1997.

[Rauscher 04] Juergen Rauscher. *PEEC Methods in 2D Signal Line Modeling for Mid-Frequency On-Chip Power Supply Noise Simulations.* 8th Ieee workshop on Signal Propagation on Interconnects, 2004.

[Regnier 04] J. Regnier, B. Sareni & X. Roboam. *Conception optimale de systèmes hétérogènes en génie électrique à l'aide d'algorithmes génétiques multiobjectifs.* Revue internationale de génie électrique, vol. 7/3-4, 2004.

[Restle 01] P.J. Restle, A.E. Ruehli, S.G. Walker & G. Papadopoulos. *Full-wave PEEC time-domain method for the modeling of on-chip interconnects.* Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on, vol. 20, no. 7, pages 877–886, 2001.

[Robinson 73] F.N.H. Robinson. Macroscopic electromagnetism. Pergamon press, Oxford, England, 1973.

[Rodriguez 02] Christian Rodriguez. *Eco-conception d'architectures de distribution électrique pour les bâtiments industriels.* Rapport de stage, ENSAM / Schneider Electric, 2002.

[Rong 02] Aosheng Rong & Andreas C. Cangellaris. *Robust Generalized PEEC Methodology for Full-Wave Analysis of Integrated Circuits. ,.* In URSI General Assembly, 2002.

[Roshen 90] W.A. Roshen. *Effect of finite thickness of magnetic substrate on planar inductors.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 26, no. 1, pages 270 – 275, 1990.

[Ruehli 72] A.E. Ruehli. *Inductance calculations in a complex integrated circuit environment.* IBM - Journal of Research and Development, pages 470–481, 1972.

[Ruehli 74] A.E. Ruehli. *Equivalent Circuit Models for Three-Dimensional Multiconductor Systems.* Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on, vol. 22, no. 3, pages 216– 221, 1974.

[Ruehli 03] A.E. Ruehli, G. Antonini, J. Esch, J. Ekman, A. Mayo & A. Orlandi. *Nonorthogonal PEEC formulation for time- and frequency-domain EM and circuit modeling.* Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on, vol. 45, no. 2, pages 167–176, 2003.

[Russakoff 70] G. Russakoff. *A derivation of the macroscopic Maxwell equations.* American Journal of Physics, vol. 38, no. 10, pages 1188–1195, 1970.

[Saludjian 92] L. Saludjian. *Optimisation en Electrotechnique par Algorithmes Génétiques.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.

[Sanchez 03] Higinio Sanchez & Jose Carpio. *Evaluation of Current Distribution on Wires with a simple model based on PEEC Method.* Electromagnetic Compatibility, 2003 IEEE International Symposium on, 2003.

[Schneider 04] Schneider Electric Industries SAS Schneider. *Catalogue Merlin Gerin Distribution Electrique 2004-2005*, 2004.

[Siddabattula 99] Kalyan Siddabattula. *Electromagnetic modeling of packaging layout in power electronic modules.* PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1999.

[Slama 01] A. Slama, V. Mazauric, Y. Marechal, G. Meunier & P. Wendling. *Electric railgun 3D modeling : computation of eddy currents and Lorentz force.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 1, pages 139–142, 2001.

[Smythe 68] W.R. Smythe. Static and dynamic electricity. International series in pure and applied physics. Mac Graw-Hill, New York, USA, 3rd edition, 1968.

[Stoll 74] R. L. Stoll. The analysis of eddy currents. Monographs in Electrical and Electronic Engineering Oxford University Press Inc., 1974.

[Thierry 82] Jean-Pierre Thierry & C Kilindjian. *Electrodynamic forces on busbars in LV systems.* Cahier Technique de Schneider Electric, nř 162, 1982.

[Vassallo 80] C. Vassallo. Electromagnétisme classique dans la matière. Collection technique et scientifique des télécommunications. Dunod, Paris, France, 1980.

[Wang 00] Y.J. Wang. *A precise method for the impedance calculation of a power rail taking into account the skin effect and complex geometry.* ETEP, vol. 10, nř1, 2000.

[Wang 02] S. Wang & J. Kang. *Topology optimization of nonlinear magnetostatics.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 2, pages 1029–1032, 2002.

[Whitley 94] Darrell Whitley. *A Genetic Algorithm Tutorial*, 1994.

[Wollenberg 03] G. Wollenberg & S.V. Kochetov. *Modeling the skin effect in wire-like 3d interconnection structures with arbitrary cross section by a new modification of the peec method.* Proc. 15th Int. Zurich Symp. Technical Exhibition Electromagnetic Compatibility, page 609Ű614, 2003.

[Wollenberg 04] G. Wollenberg & S.V. Kochtetov. *Coupling electromagnetic pulse-shaped waves into wire-like interconnection structures with a non-linear protection Ű Time domain calculations by the PEEC method.* Advances in Radio Science, Copernicus GmbH, 2004.

[Yin 03] W.Y. Yin, S.J. Pan & L.W. Li. *Comparative characteristics of on-chip single- and double-level square inductors.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 3, pages 1778– 1783, 2003.

[Yoo 00] Jeonghoon Yoo, N. Kikuchi & J.L. Volakis. *Structural optimization in magnetic devices by the homogenization design method.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 36, no. 3, pages 574–580, 2000.

[Yoo 02] Jeonghoon Yoo & N. Kikuchi. *Topology optimization for reduction of vibration caused by magnetic harmonic excitation.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 38, no. 6, pages 3643–3649, 2002.

[Yu 03] S.K. Yu & B. Liu. *Optimal suspension design for femto sliders.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 5, pages 2423–2425, 2003.

[Zhang 03] J. Zhang, A.V. Hanke & F.E. Talke. *A comparison of the genetic algorithm and the subregion approach in the optimization of slider air bearings for sub-7-nm flying height.* Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 5, pages 2432–2434, 2003.

Annexe A

Cas analytique du mur métallique semi-infini

A.1 Description

On considère une plaque de matériau ferromagnétique ($\mu_r > 1$, résistivité ρ) supposée infinie (selon les axes y et z) excitée de part et d'autre par une nappe de courant (une plaque infiniment mince portant une densité surfacique de courant J_s selon l'axe z).

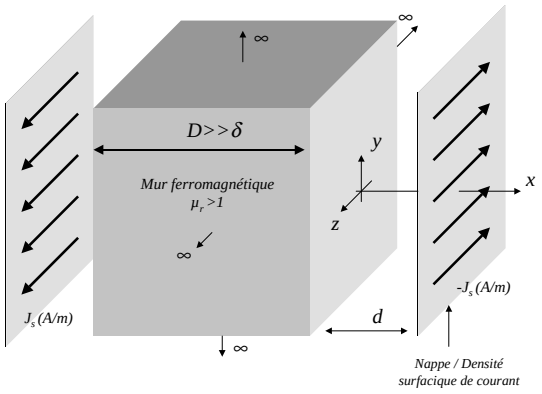


FIG. A.1 – Mur infini excité par une nappe de courant

L'épaisseur de la plaque métallique est supposée très importante devant la profondeur de peau, qui est également la profondeur de pénétration du champ, de telle sorte qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux moitiés du problème (on fait l'hypothèse que le métal est suffisamment épais pour que le champ soit totalement atténué en son centre)

On est donc ramené indépendamment à deux problèmes 1D, de type mur semi-infini. L'intérêt d'avoir considéré le problème avec les nappes de courant aller et retour est de permettre de lever l'indétermination qu'il y aurait sinon sur la valeur du champ pour x tendant vers l'infini.

Ici, on peut considérer que si l'on se place suffisamment loin du système, les deux nappes de courant se confondent, ce qui signifie que le champ vu à l'infini est nul pour les $x > 0$.

A partir de ce point, on considère donc la plaque comme semi-infinie vers les $x < 0$. La figure A.2 définit 3 zones d'étude.

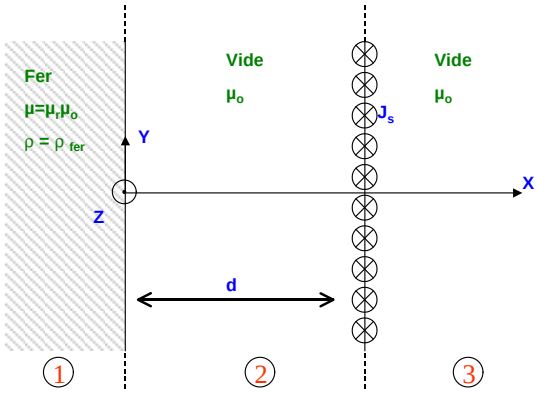


FIG. A.2 – Demi-mur infini excité par une nappe de courant - vue 2D

A.2 Résolution

A.2.1 Symétries du problème

Le système étant infini selon y, tout plan $y = cste$ est plan de symétrie, donc $\mathbf{B}$ est perpendiculaire à ce plan, et ne dépend pas de y. $\mathbf{B}$ est également invariant selon z car le système est infini sur cet axe.

$$B = \begin{pmatrix} B_x(x,y,z) \\ B_y(x,y,z) \\ B_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

d'où

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

A.2.2 Calcul du champ

Dans le vide

Il n'y a pas de courants. La relation de Maxwell-Ampère donne :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} = 0 \tag{A.3}$$

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} \end{pmatrix} = 0 \tag{A.4}$$

d'où dans les zones 2 et 3 :

$$H_y^2(x) = \alpha_2 \text{ et } H_y^3(x) = \alpha_3 \tag{A.5}$$

Dans le fer

Les relations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday donnent :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{J} = \operatorname{rot} \sigma \mathbf{E} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\sigma\mathbf{B} \tag{A.6}$$

Soit, avec la loi de comportement du matériau :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{A.7}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -j\mu_0 \mu_r \sigma \omega \mathbf{H} \tag{A.8}$$

On introduit ici l'épaisseur de peau, ou profondeur de pénétration du champ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega}} \tag{A.9}$$

A.8 devient alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial^2 H_y(x)}{\partial x^2} \\ 0 \end{pmatrix} = -j\frac{2}{\delta^2} \begin{pmatrix} 0 \\ H_y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 H_y(x)}{\partial x^2} = j\frac{2}{\delta^2} H_y(x) \tag{A.11}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$H_y^1(x) = \alpha_1 e^{\sqrt{\frac{2j}{\delta^2}}x} + \beta_1 e^{-\sqrt{\frac{2j}{\delta^2}}x} = \alpha_1 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} + \beta_1 e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.12}$$

On a donc :

$$H_y^1(x) = \alpha_1 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} + \beta_1 e^{-(1+j)\frac{x}{\delta}}$$

Conditions aux limites

Dans le fer Si on suppose que le métal joue parfaitement son rôle d'atténuation du champ, nécessairement :

$$H_y^1('-\infty') = 0 \tag{A.13}$$

soit : $\beta_1 = 0$, d'où :

$$x < 0, \quad H_y^1(x) = \alpha_1 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.14}$$

Dans l'air Comme vu de l'infini, les 2 nappes de courant s'annulent[1],

$$H_y^3(x) = 0 \tag{A.15}$$

Conditions de passage aux interfaces

A l'interface entre deux milieux de perméabilité différente, il y a continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ ($\mathbf{n}_{a\to b}$ est la normale à l'interface orientée de a vers b) :

$$(\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b) \times \mathbf{n}_{a\to b} = \mathbf{j}_s \tag{A.16}$$

et continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ (nulle ici de part les symétries) :

$$\mathbf{n}_{a\to b} \cdot (\mathbf{B}_b - \mathbf{B}_a) = 0 \tag{A.17}$$

[1] Sans cette hypothèse, vu le caractère non-physique de ce cas d'étude (mur et nappe infinie, donc énergie non bornée), il n'est pas possible de lever l'indétermination sur la valeur de α_3.

Interface Fer / Vide Il y a continuité de **H** tangentiel et absence de courants de surface puisqu'il s'agit d'un métal conducteur :

$$x = 0, \quad H_y^1(0^-) = H_y^2(0^+) \tag{A.18}$$

d'où :

$$\alpha_1 = \alpha_2 \tag{A.19}$$

Interface Fer / Vide Au passage de la nappe de courant, **H** tangentiel subit la discontinuité liée aux courants de surface :

$$H_y^2(d^-) - H_y^3(d^+) = +J_s \tag{A.20}$$

soit

$$\alpha_2 - \alpha_3 = J_s$$

d'où :

$x < 0$	$0 < x < d$	$d < x$
$H_y^1(x) = J_s e^{(1+j)\frac{x}{\delta}}$	$H_y^2(x) = J_s$	$H_y^3(x) = 0$
$B_y^1(x) = \mu_0\mu_r J_s e^{(1+j)\frac{x}{\delta}}$	$B_y^2(x) = \mu_0 J_s$	$B_y^3(x) = 0$

A.2.3 Courants induits dans le fer

Maxwell-Ampère donne :

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{A.21}$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} \end{pmatrix} = J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_z(x) \end{pmatrix} \tag{A.22}$$

d'où

$$J_z(x) = J_s \frac{(1+j)}{\delta} e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.23}$$

A.2.4 Calcul du potentiel vecteur A

Le potentiel vecteur magnétique est défini tel que :

$$B = rotA \tag{A.24}$$

d'où :

$$B_y(x) = -\frac{\partial A_z(x)}{\partial x}$$

Le potentiel vecteur est ainsi défini à une constante près :

$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < d$	$x = d$	$d < x$
$\mu = \mu_0\mu_r$, ρ	$J_s = 0$	$\mu = \mu_0$	J_s	$\mu = \mu_0$
$H_y^1 = J_s e^{(1+j)\frac{x}{\delta}}$	$H_y^1 = H_y^2$	$H_y^2 = J_s$	$\Delta H = J_s$	$H_y^3 = 0$
$B_y^1 = \mu_0\mu_r J_s e^{(1+j)\frac{x}{\delta}}$		$B_y^2 = \mu_0 J_s$		$B_y^3 = 0$
$J_z = J_s \frac{(1+j)}{\delta} e^{(1+j)\frac{x}{\delta}}$		$J = 0$		$J = 0$
$A_z^1 = -\frac{\mu_0\mu_r J_s \delta}{(1+j)} e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} + k_1$		$A_z^2 = -\mu_0 J_s x + k_2$		$A_z^3 = k_3$

Les constantes d'intégration doivent néanmoins garantir la continuité de A.

A.3 Approche Ampérienne

Etudions à présent ce cas d'étude avec une approche ampérienne de la matière aimantée. Etant donné que l'aimantation est modélisée par des courants, il est possible de calculer **B** (ou indifféremment **A**) par la loi de Biot & Savart. Etant donné les symétries du problème, on utilisera simplement le champ engendré par un film de courant (voir figure A.3) [Bertin 77] :

$$x > a, \quad B_y(x) = \frac{\mu_0}{2} J_z(a) \tag{A.25}$$

$$x < a, \quad B_y(x) = -\frac{\mu_0}{2} J_z(a) \tag{A.26}$$

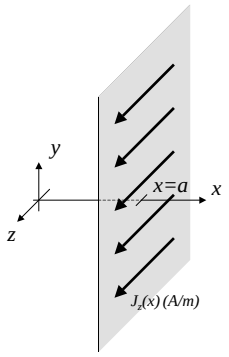


FIG. A.3 – Film de courant

Ainsi, la contribution en terme de champ de la nappe de courant située en $x = d$, portant une densité surfacique de courant $J_z(d) = -J_s$ est :

$$x > d, \quad B_{Nappe}(x) = -\frac{\mu_0}{2} J_s \tag{A.27}$$

$$x < d, \quad B_{Nappe}(x) = \frac{\mu_0}{2} J_s \tag{A.28}$$

A.3.1 Sans courants liés de surface

On suppose que l'on est capable de reproduire la profondeur de peau dans le fer. La densité de courant est de la forme :

$$J_z^{fer}(x) = J_0 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.29}$$

La contribution en terme de champ des courants dans le volume du fer est celle des courants libres, à laquelle s'ajoute celle des courants liés :

$$J_z(x) + \tilde{J}_z(x) = J_z(x) + (\mu_r - 1) J_z(x) = \mu_r J_z(x) \tag{A.30}$$

Soit, pour $x > 0$:

$$B_{J_{fer}}(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mu_0}{2} \mu_r J_z^{fer}(x).dx = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)} \tag{A.31}$$

et, pour $x < 0$:

$$B_{J_{fer}}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mu_0}{2}\mu_r J_z^{fer}(x).dx - \int_{x}^{0} \frac{\mu_0}{2}\mu_r J_z^{fer}(x).dx = \frac{\mu_0\mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)} \left(2e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} - 1\right) \tag{A.32}$$

Si on ne prend pas en compte les courants liés surfaciques, on peut évaluer **B** dans les différentes zones en sommant les contributions des courants dans le fer à celle de la nappe de courant.

B	$x < 0$	$0 < x < d$	$d < x$
Nappe	$\frac{\mu_0}{2} J_s$		$-\frac{\mu_0}{2} J_s$
Fer	$\frac{\mu_0\mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)} \left(2e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} - 1\right)$	$\frac{\mu_0\mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)}$	
Total	$\frac{\mu_0}{2}\left(J_s + \mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)} \left(2e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} - 1\right)\right)$	$\frac{\mu_0}{2}\left(J_s + \mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)}\right)$	$\frac{\mu_0}{2}\left(\mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)} - J_s\right)$

Dans ce cas, à la surface du fer,

$$B\left(0^-\right) = \frac{\mu_0}{2}\left(J_s + \mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)}\right) \tag{A.33}$$

$$B\left(0^+\right) = \frac{\mu_0}{2}\left(J_s + \mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)}\right) \tag{A.34}$$

d'où :

$$\frac{B_{fer}}{\mu_r} \neq B_{air} \tag{A.35}$$

Il y a conservation de **B** tangentiel au lieu de **H** tangentiel.
La nullité du champ à l'infini de part et d'autre conduirait d'ailleurs à :

$$J_0 = \frac{J_s}{\mu_r}\frac{(1+j)}{\delta} \tag{A.36}$$

ce qui donne un niveau de courant erroné dans le fer.

A.3.2 Ajout des courants liés de surface

On doit d'après l'équivalence Ampérienne introduire les courants liés de surface $\tilde{\mathbf{J}}_s$ tels que :

$$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{J}}_s \tag{A.37}$$

On ajoute donc un courant de surface $\tilde{J}_s$ (inconnu) à l'interface fer/air, dont la contribution au champ **B** vient s'ajouter aux autres :

B	$x < 0$	$0 < x < d$	$d < x$
Nappe	$\frac{\mu_0}{2} J_s$		$-\frac{\mu_0}{2} J_s$
$\tilde{\mathbf{J}}_s$	$-\frac{\mu_0}{2}\tilde{J}_s$	$\frac{\mu_0}{2}\tilde{J}_s$	
Fer	$\frac{\mu_0\mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)} \left(2e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} - 1\right)$	$\frac{\mu_0\mu_r}{2} J_0 \frac{\delta}{(1+j)}$	

On vérifie alors que la continuité de **H** tangentiel à l'interface Fer/Air permet d'ajuster les niveaux de courant :

$$H(0^-) - H(0^+) = \frac{B(0^-)}{\mu_0\mu_r} - \frac{B(0^+)}{\mu_0} = 0 \tag{A.38}$$

Soit :

$$(1-\mu_r)\,\mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)} - (1+\mu_r)\,\tilde{J}_s + (1-\mu_r)\,J_s = 0 \tag{A.39}$$

L'atténuation du champ à l'infini donne :

$$\mu_r J_0 \frac{\delta}{(1+j)} + \tilde{J}_s - J_s = 0 \tag{A.40}$$

d'où :

$$\tilde{J}_s = -(\mu_r - 1)\,J_s \tag{A.41}$$

$$J_0 = \frac{(1+j)}{\delta} J_s \tag{A.42}$$

On vérifie alors que le courant de surface ainsi obtenu est le bon :

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{J}} = (\mu_r - 1)\,J_0 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.43}$$

Comme :

$$M_y(x) = (\mu_r - 1)\,\frac{\delta}{(1+j)} J_0 e^{(1+j)\frac{x}{\delta}} \tag{A.44}$$

A l'interface :

$$\tilde{J}_{s_z}(0) = -(\mu_r - 1)\,\frac{\delta}{(1+j)} J_0 \tag{A.45}$$

Annexe B

Solveurs Spécifiques

Nous développons ici des méthodes de résolution adaptées à l'optimisation de position qui permettent, dans des cas bien spécifiques, d'effectuer une résolution circuit du schéma PEEC équivalent sans avoir recours à un solveur générique. L'objectif est bien sûr de limiter le temps de calcul par une mise en forme astucieuse des problèmes.

B.1 Circuit monophasé

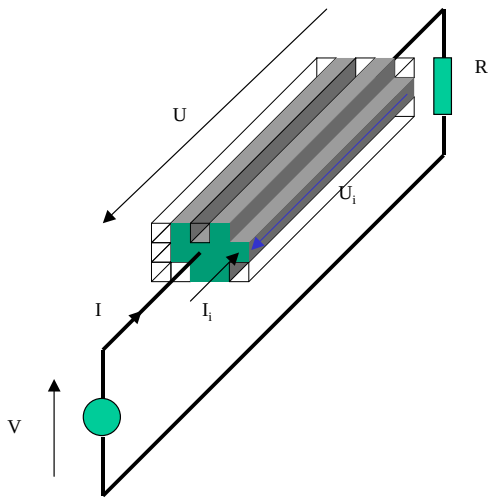


Fig. B.1 – Cas simple monophasé.

On considère un seul conducteur subdivisé (maillage PEEC) et alimenté par une source de tension V sur une charge résistive R qui impose un courant total I. La matrice impédance des subdivisions permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

B.1.1 Résolution avec toutes les subdivisions

Comme les faces 'd'entrée' et de 'sortie' du conducteur sont équipotentielles, il vient :

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_n = U \tag{B.2}$$

et la loi des noeud impose :

$$I = I_1 + \cdots + I_n \tag{B.3}$$

Du point de vue 'circuit', on a :

$$V = U + R \cdot I \tag{B.4}$$

ce qui se traduit au niveau de chaque subdivision par :

$$V = U_i + R \cdot (I_1 + \cdots + I_n) \tag{B.5}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

ou encore :

$$[V] = ([Z] + [R]) \cdot [I] \tag{B.7}$$

avec :

$$[R] = \begin{bmatrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

On peut alors obtenir directement les courants dans les subdivisions par :

$$[I] = ([Z] + [R])^{-1} \cdot [V] \tag{B.9}$$

B.1.2 Résolution avec des subdivisions déconnectées

Dans le cadre de l'optimisation de forme, on travaille sur la base d'un conducteur plein, dans lequel on ôte de la matière en débranchant les subdivisions correspondantes.

Si on débranche une subdivision (par exemple la 2ème pour fixer les idées). On peut définir un vecteur de masquage qui donne l'état électrique de chaque subdivision :

$$[mask] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{B.10}$$

où chaque ligne correspond à une subdivision avec :

- 0 pour une subdivision débranchée,
- 1 pour une subdivision active.

On définit parallèlement une matrice de masquage associée :

$$[Mask] = [mask] \times [mask]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

qui va permettre d'effectuer une opération de masquage sur la matrice impédance :

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

par une simple multiplication terme à terme, matérialisée par l'opérateur $\odot$:

$$[Z] \odot [Mask] = \begin{bmatrix} z_{11} & 0 & z_{13} & \cdots & z_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_{31} & 0 & z_{33} & \cdots & z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & 0 & z_{n3} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

ce qui permet d'annuler tous les couplages de la subdivision débranchée.

Ainsi, il vient :

$$\forall x, \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = ([Z] \odot [Mask]) \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ x \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

soit du point de vue circuit :

$$\forall x, \quad \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix} = (([Z] + [R]) \odot [Mask]) \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ x \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.15}$$

On ne peut directement ici résoudre ce système, puisque $(([Z] + [R]) \odot [Mask])$ n'est pas inversible (une ligne et une colonne de zéros). On va donc considérer le système :

$$\begin{bmatrix} V \\ V \\ V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} + R & 0 & z_{13} + R & \cdots & z_{1n} + R \\ 0 & R & 0 & \cdots & 0 \\ z_{31} + R & 0 & z_{33} + R & \cdots & z_{3n} + R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} + R & 0 & z_{n3} + R & \cdots & z_{nn} + R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ x \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

soit pour une écriture compacte :

$$\begin{bmatrix} V \\ V \\ V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix} = \left[\{([Z] + [R]) \odot [Mask]\} + R \cdot [Id_n] \odot \overline{[Mask]} \right] \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ x \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{B.17}$$

où x est cette fois défini, ce qui rend le système inversible, avec un conditionnement acceptable ($|z_{ii}| \ll R$) ; et $\overline{[Mask]}$ est le complémentaire logique de $[Mask]$ soit avec l'exemple choisi ici :

$$\overline{[Mask]} = \overline{[mask]} \times \overline{[mask]}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{B.18}$$

Il est maintenant possible de résoudre le circuit par :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \left(\left[\{([Z]+[R]) \odot [Mask]\} + R \cdot [Id_n] \odot \overline{[Mask]} \right]^{-1} \cdot [V] \right) \odot [mask] \tag{B.19}$$

Ce raisonnement peut bien sûr être étendu à n'importe quel masque (donc à n'importe quelle configuration de la section conductrice sur la grille de maillage).

B.2 Cas triphasé étoile avec neutre

On considère à présent un système de 4 conducteurs maillés (3 phases + 1 neutre), avec la même approche que pour le cas monophasé. Le couplage est fait en étoile, à la fois pour l'alimentation (symétrique) et pour la charge (également symétrique).

Pour la phase 1, il y a une équipotentielle sur chaque face d'accès, soit :

$$V_1 = U_1 + R \cdot I_1 - U_n \tag{B.20}$$

où U_1 est la chute de tension du conducteur de phase 1, et U_n la chute de tension du neutre.

Le courant de ligne I_1 se répartit sur les n_1 subdivisions de la phase 1 :

$$I_1 = \sum_{i=1..n_1} I_{1i} \tag{B.21}$$

d'où :

$$\forall i \in [1, n_1], U_{1i} = U_1 etdonc V_1 = (U_{1i} - U_n) + R \cdot \left(\sum_{i=1..n_1} I_{1i} \right) \tag{B.22}$$

Il en va de même pour les phases 2 et 3.

Ainsi, en organisant la matrice impédance par groupement des subdivisions de chaque conducteur :

$$\begin{bmatrix} U_{N1} \\ \vdots \\ U_{Nn_N} \\ U_{11} \\ \vdots \\ U_{1n_1} \\ U_{21} \\ \vdots \\ U_{2n_2} \\ U_{31} \\ \vdots \\ U_{3n_3} \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_{N1} \\ \vdots \\ I_{Nn_N} \\ I_{11} \\ \vdots \\ I_{1n_1} \\ I_{21} \\ \vdots \\ I_{2n_2} \\ I_{31} \\ \vdots \\ I_{3n_3} \end{bmatrix} \tag{B.23}$$

Il vient :

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{11} - U_{N1} \\ \vdots \\ U_{1n_1} - U_{N1} \\ U_{21} - U_{N1} \\ \vdots \\ U_{2n_2} - U_{N1} \\ U_{31} - U_{N1} \\ \vdots \\ U_{3n_3} - U_{N1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R \cdot I_1 \\ \vdots \\ R \cdot I_1 \\ R \cdot I_2 \\ \vdots \\ R \cdot I_2 \\ R \cdot I_3 \\ \vdots \\ R \cdot I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_3 \end{bmatrix} = ([A] \cdot [Z] + [B]) \cdot [I] \tag{B.24}$$

avec

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

où tous les termes non-indiqués sont nuls.

Pour que la matrice ne devienne pas singulière, on fait intervenir la conservation du courant (couplage étoile) :

$$\sum_i I_{1i} + \sum_j I_{2j} + \sum_k I_{3k} + \sum_m I_{Nm} = I_1 + I_2 + I_3 + I_N = 0 \tag{B.27}$$

que l'on peut écrire matriciellement sous la forme :

$$[C] \cdot [I] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot [I] = [0] \tag{B.28}$$

Il vient alors :

$$([A] \cdot [Z] + [B] + [C]) \cdot [I] = [V] \tag{B.29}$$

ce qui permet de résoudre le système par :

$$[I] = ([A] \cdot [Z] + [B] + [C])^{-1} \cdot [V] \tag{B.30}$$

Dans le cas où on débranche des subdivisions, il est possible de procéder comme dans le cas monophasé, avec les opérateurs de masquage :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \left(\left[\left([A] \cdot [Z] + [B] + [C] \right) \odot [Mask] + \left(R \cdot [Id_n] \right) \odot \overline{[Mask]} \right]^{-1} \cdot [V] \right) \odot [mask] \tag{B.31}$$

B.3 Cas triphasé sans neutre couplage étoile

L'écriture est analogue :

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} V_1 - V_2 \\ \vdots \\ V_1 - V_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} V_2 - V_3 \\ \vdots \\ V_2 - V_3 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} V_3 - V_1 \\ \vdots \\ V_3 - V_1 \end{matrix}} \end{bmatrix} = [A] \cdot ([Z] + [B]) = [A] \cdot ([Z] + [B]) + [C] \tag{B.32}$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{B.33}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{B.34}$$

et :

$$[C] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & \square & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & \square & \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{B.35}$$

qui traduit simplement :

$$\sum_i I_{1i} + \sum_j I_{2j} + \sum_k I_{3k} = I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{B.36}$$

B.4 Cas triphasé sans neutre avec un conducteur passif

On ajoute au cas précédant la présence d'un conducteur passif (qui peut être un blindage par exemple) qui ne fait transiter aucun courant, mais peut être lieu de pertes Joule par courants induits.

Dans ce cas, en agençant la matrice impédance dans l'ordre Phase1-Phase2-Phase3-Conducteur

passsif, on peut écrire le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} V_1 - V_2 \\ \vdots \\ V_1 - V_2 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} V_2 - V_3 \\ \vdots \\ V_2 - V_3 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} V_3 - V_1 \\ \vdots \\ V_3 - V_1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} = [A] \cdot ([Z] + [B]) = [A] \cdot ([Z] + [B]) + [C] \tag{B.37}$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} & \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -1 & 0 & \cdots \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{B.38}$$

et :

$$[B] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} R & \cdots & R \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R & \cdots & R \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} R_S & \cdots & R_S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_S & \cdots & R_S \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{B.39}$$

R_S étant la résistance sur laquelle on reboucle le conducteur passif (alle peut être très importante pour imposer un courant gloabl nul) et :

$$[C] = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & \end{matrix} \\ & \square & \\ & & \square \\ & & & \square \end{bmatrix} \tag{B.40}$$

qui traduit simplement :

$$\sum_i I_{1i} + \sum_j I_{2j} + \sum_k I_{3k} = I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{B.41}$$

Annexe C

Calcul analytique des pertes dans une plaque métallique excitée par un fil

C.1 Description

Nous reprenons ici les calculs développés par [Del Vecchio 03]. Ils sont basés sur les calculs de [Jain 70] qui traitait le cas de plaques de blindage non ferromagnétiques. Il s'agit ici d'évaluer les pertes engendrées dans une plaque métallique située à proximité d'un ou plusieurs conducteurs (sans prise en compte de la réaction d'induit).

Le calcul part des effets obtenus en excitant la tôle avec un film de courant parcouru par un courant non-uniforme. On choisit un courant harmonique spatialement, ce qui permet ensuite par sommation sur les harmoniques spatiales de se ramener au cas d'un fil (équivalent d'un Dirac de courant) puis au cas d'une barre parcourue par un courant uniforme.

Nous nous arrêtons ici au Dirac de courant qui est suffisant en terme de validation.

C.2 Champ crée une harmonique spatiale : film de courant

Les calculs sont effectués dans le repère $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ associé au coordonnées (x, y, z)

Dans la feuille de courant circule un courant correspondant à une harmonique spatiale :

$$\mathbf{J} = J_0 \cos(ax)\ e^{j\omega t}\ \mathbf{k} \tag{C.1}$$

On va donc résoudre les équations de Maxwell :

– Maxwell-Faraday qui donne en régime harmonique (harmonique temporelle cette fois) :

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega \mathbf{B} \tag{C.2}$$

– Maxwell-Ampère :

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J} \tag{C.3}$$

Dans la plaque, on doit en plus satisfaire à la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{C.4}$$

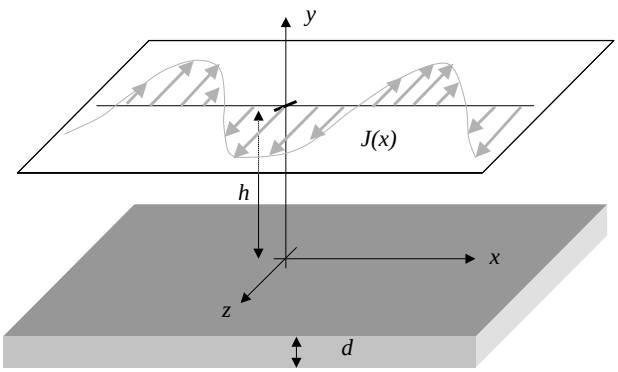


FIG. C.1 – Plaque métallique excitée par une feuille de courant harmonique

C.2.1 Symétries :

On applique le principe de Curie : les effets ne sont pas moins symétriques que les causes, soit ici, comme $\forall z$, $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est un plan d'anti-symétrie :

- $\mathbf{B}$ est dans le plan $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.
- $\mathbf{E}$ est $\perp$ au plan (x,y)

Soit :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_x(x,y) \\ B_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x,y) \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

De plus ($x = 0$ modulo π/a, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) est plan de symétrie. Il y a une périodicité de la source, que l'on doit retrouver sur le champ électrique, d'où :

$$E_z(x,y) = E'(a,y) \cdot \cos(ax) \cdot e^{j\omega t} \tag{C.6}$$

ce qui compte tenue des symétries donne :

$$rot\,(\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E'(a,y)}{\partial y} \cdot \cos(ax) \\ \frac{\partial \cos(ax)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(ax) \cdot \frac{\partial E'(a,y)}{\partial y} \\ -a \sin(ax) \cdot E'(a,y) \end{bmatrix} = -j\omega \begin{bmatrix} B_x(x,y) \\ B_y(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

On travaille sur **E,** qui n'a qu'une seule composante. Dans le blindage :

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathbf{E})) = -j\omega\ \mathrm{rot}(\mathbf{B}) = -\,j\omega\mu_0\mu_r\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{H}) = -\,j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{J} = -\,j\omega\mu_0\mu_r\sigma\mathbf{E} \tag{C.8}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} = -j\omega\mu_0\mu_r\sigma\mathbf{E} \tag{C.9}$$

et donc :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -j\omega\mu_0\mu_r\sigma E_z \tag{C.10}$$

soit

$$-\,a^2 \cos(ax)\, E' + \cos(ax)\, \frac{\partial^2 E'}{\partial y^2} = -j\omega\mu_0\mu_r\sigma E' \cos(ax) \tag{C.11}$$

On pose :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu_r\sigma}} \tag{C.12}$$

la profondeur de peau dans la plaque.

Il vient alors :

$$-a^2E' + \frac{\partial^2 E'}{\partial y^2} = -j\frac{2}{\delta^2}E' \tag{C.13}$$

Ainsi le champ est obtenu :

– dans l'air par :

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial y^2} - a^2E' = 0 \tag{C.14}$$

– dans le blindage par :

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial y^2} + \left(\frac{2j}{\delta^2} - a^2\right)E' = 0 \tag{C.15}$$

C.2.2 Conditions aux limites :

Décroissance du champ à l'infini :

$$|\mathbf{E}|_{y=+\infty} = 0, |\mathbf{E}|_{y=-\infty} = 0 \tag{C.16}$$

Interface Air / Métal : Pour le champ $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathbf{n}_{12} \tag{C.17}$$

soit la continuité de la composante tangentielle (la seule ici).

On en déduit aux 2 interfaces :

$$\begin{array}{rcl} |\mathbf{E}|_{y=0^-} = |\mathbf{E}|_{y=0^+} & & |E'|_{y=0^-} = |E'|_{y=0^+} \\ |\mathbf{E}|_{y=-d^-} = |\mathbf{E}|_{y=-d^+} & soit & |E'|_{y=-d^-} = |E'|_{y=-d^+} \\ |\mathbf{E}|_{y=h^-} = |\mathbf{E}|_{y=h^+} & & |E'|_{y=h^-} = |E'|_{y=h^+} \end{array} \tag{C.18}$$

Pour le champ $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = -\mu_0\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{j}_{st} \tag{C.19}$$

Or :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{C.20}$$

avec :

$$\mathbf{M} = \varkappa_m\mathbf{H} \tag{C.21}$$

Comme :

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} \tag{C.22}$$

il vient :

$$\mu_r = 1 + \varkappa_m \tag{C.23}$$

Ainsi, à l'interface :

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s \tag{C.24}$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0\mathbf{j}_{st} = \mu_0\mathbf{j}_s - \mu_0\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \tag{C.25}$$

– à l'interface blindage/air, il n'y a pas de courant de surface, mais il y a de l'aimantation, d'où :

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \tag{C.26}$$

soit :

$$|H_x|_{y=-d^-} = |H_x|_{y=-d^+} \tag{C.27}$$
$$|H_x|_{y=0^-} = |H_x|_{y=0^+} \tag{C.28}$$

et donc :

$$\left|\frac{B_x}{\mu_0}\right|_{y=-d^-} = \left|\frac{B_x}{\mu_0\mu_r}\right|_{y=-d^+} \tag{C.29}$$
$$\left|\frac{B_x}{\mu_0\mu_r}\right|_{y=0^-} = \left|\frac{B_x}{\mu_0}\right|_{y=0^+} \tag{C.30}$$

d'où :

$$\left|\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=-d^-} = \left|\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=-d^+} \tag{C.31}$$
$$\left|\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=0^-} = \left|\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=0^+} \tag{C.32}$$

– au passage sur la feuille de courant, il y a un courant de surface (on peut aussi le voir avec le théorème d'Ampère, en prenant un contour entourant la feuille), soit :

$$|B_x|_{y=h^-} - |B_x|_{y=h^+} = \mu_0 J_0 \cos(ax) \tag{C.33}$$

d'où :

$$-j\omega\left(|B_x|_{y=h^-} - |B_x|_{y=h^+}\right) = \left(\left|\frac{\partial E_z}{\partial y}\right|_{y=h^-} - \left|\frac{\partial E_z}{\partial y}\right|_{y=h^+}\right) = -j\omega\mu_0 J_0 \cos(ax) \tag{C.34}$$

soit :

$$\left(\left|\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=h+} - \left|\frac{\partial E'}{\partial y}\right|_{y=h^-}\right) = j\omega\mu_0 J_0 \tag{C.35}$$

C.2.3 Champ électrique dans le blindage

Dans la plaque (pour y entre $-d$ et 0), on pose :

$$\gamma = \sqrt{\frac{2j}{\delta^2} - a^2} \tag{C.36}$$

Le champ électrique peut donc être obtenu par résolution des équations différentielles dans l'air et dans le fer, avec les conditions au limites et conditions de passage présentées. On obtient

$$E' = -j\omega\,\mu_0 J_o\, e^{-ah}\,\frac{\left(a + j\frac{\gamma}{\mu_r}\right)e^{j\gamma\,(y+\,d)} - \left(a - j\frac{\gamma}{\mu_r}\right)e^{-j\gamma(y+\,d)}}{\left(a + \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{j\gamma d} - \left(a - \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{-j\gamma d}}$$

soit :

$$E_z = -j\omega\,\mu_0 J_o\, e^{-ah} e^{j\omega t}\cos(ax)\,\frac{\left(a + \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)e^{j\gamma\,(y+\,d)} - \left(a - \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)e^{-j\gamma(y+\,d)}}{\left(a + \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{j\gamma d} - \left(a - \frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{-j\gamma d}}$$

pour le film de courant (harmonique spatiale de base)

C.3 Champ crée par un fil

On considère à présent un Dirac δ de courant :

$$I = \frac{I_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(a\,(x-b))da \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$$

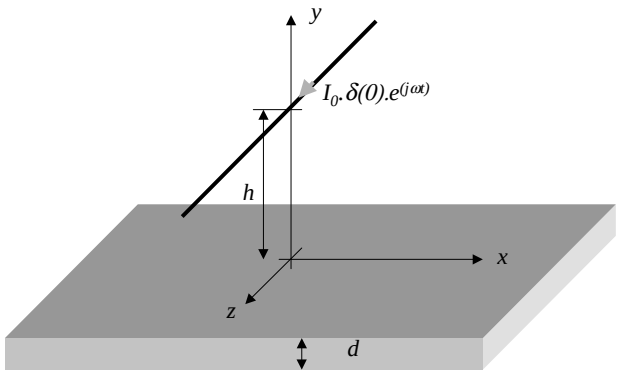


FIG. C.2 – Plaque métallique excitée par un dirac spatial de courant

Le champ crée dans la plaque est alors donné par :

$$E_\delta = -j\frac{\omega\,\mu_0 J_o\,e^{j(\omega t+\varphi)}}{\pi} \int_{a=0}^{\infty} \cos\left(a(x-b)\right)\cdot e^{-ah}\cdot \left[\frac{\left(a+\frac{j\gamma}{\mu_r}\right)e^{j\gamma\,(y+\,d)} - \left(a-\frac{j\gamma}{\mu_r}\right)e^{-j\gamma(y+\,d)}}{\left(a+\frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{j\gamma d} - \left(a-\frac{j\gamma}{\mu_r}\right)^2 e^{-j\gamma d}}\right]\cdot da$$

d'où le calcul des pertes :

$$P = \int_V \sigma E_\delta \overline{E}_\delta dV \tag{C.37}$$

que l'on peut ramener à une unité de longueur (selon **k) :**

$$dP = \sigma \int_{y=-d}^{0} \int_{x=-\infty}^{\infty} E_\delta \overline{E}_\delta \cdot dx \cdot dy$$

Cette expression peut être évaluée numériquement à ce stade.