



HAL
open science

Analyse et Estimations Spectrales des Processus alpha-Stables non-Stationnaires

Nourddine Azzaoui

► **To cite this version:**

Nourddine Azzaoui. Analyse et Estimations Spectrales des Processus alpha-Stables non-Stationnaires. Mathématiques [math]. Université de Bourgogne, 2006. Français. NNT: . tel-00138027

HAL Id: tel-00138027

<https://theses.hal.science/tel-00138027>

Submitted on 23 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse et Estimations Spectrales des Processus α -Stables non-Stationnaires

THÈSE

présentée publiquement le : 11 décembre 2006

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Bourgogne à Dijon
(spécialité mathématiques appliquées)

par

Nourddine AZZAOU

Composition du jury

- Président :** Christian ROBERT Professeur à l'Université de Paris Dauphine-ENSAE
- Rapporteurs :** Dominique DEHAY Professeur à l'Université de haute Bretagne
Paul DOUKHAN Professeur à l'ENSAE
Bernard GAREL Professeur à l'INPT-ENSEEIH T Toulouse
- Examineur :** Véronique MAUME-DESCHAMPS (HDR) à l'Université de Bourgogne
- Directeurs de thèse :** Rachid SABRE (HDR) à l'université de Bourgogne - ENESAD
Bernard SCHMITT Professeur Émérite à l'Université de Bourgogne

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mes co-directeurs de thèse Bernard Schmitt et Rachid Sabre. Je leur adresse mes plus sincères remerciements pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur disponibilité et pour leur précieux conseils.

Je suis très honoré que les professeurs: Dominique Dehay, Paul Doukhan et Bernard Garel aient accepté de rapporter cette thèse. Je leur suis reconnaissant pour l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail, d'avoir apporté de très judicieuses remarques et de m'avoir aidé à améliorer la qualité de la présentation.

Mes remerciements vont également à Madame Véronique Maume-Deschamps et à Monsieur Christian Robert qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie toute l'équipe du département Sciences pour l'Ingénieur (DSI) et le laboratoire MAIS de l'ENESAD pour l'accueil et l'aide scientifique indispensable à mes recherches. Je remercie aussi toute l'équipe « Applications des Mathématiques » ainsi que toute l'équipe administrative et technique de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (IMB) pour leur aide précieuse dans tous les problèmes scientifiques et pratiques que j'ai pu rencontrer.

Merci à tous les autres thésards du laboratoire avec qui j'ai passé de très bons moments. Mes derniers remerciements sont bien sûr pour ma famille et mes amis qui ont su me soutenir pendant ces années. Je dédie tout particulièrement ce travail à Marion à qui je dois beaucoup.

A la mémoire de ma mère.

Notations et Abréviations

Nous utilisons les notations suivantes :

Nombres complexes

- $\mathcal{Re}(X)$: la partie réelle de X .
- $\mathcal{Im}(X)$: la partie imaginaire de X .
- i : le nombre complexe solution de l'équation $i^2 = -1$.

Variables aléatoires et modes de convergence

- $\mathbb{P}(A)$: la probabilité de l'événement A
- $\mathbb{E}(X)$: l'espérance mathématique de la variable aléatoire X
- $\mathcal{B}(E)$: la tribu borélienne définie sur un espace métrique E .
- $X \stackrel{d}{=} Y$: les deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité.
- $X_n \xrightarrow{p.s.} Y$: la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers Y .
- $\sigma(X_l, l \in L)$: la σ -algèbre engendrée par la famille de variables aléatoires $(X_l, l \in L)$

Notations α -stables

- S α S : symétrique α -stable
- $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$: la variable aléatoire X suit une loi α -stable de paramètres α, β, σ et μ .
- $[X, Y]_\alpha$: la covariation de X sur Y .
- $\|X\|_\alpha$: la norme de la covariation de X ou paramètre d'échelle de X .

Notations d'ordre général

- $A \triangleq B$: une expression compliquée B sera notée par définition A ou A sera noté B
- S_d : la sphère unité de \mathbb{R}^d
- i.i.d. : indépendantes et identiquement distribuées.
- $\mathcal{F}(f)$: Transformée de Fourier de la fonction f .
- $\mathcal{F}^{-1}(f)$: Transformée de Fourier inverse de la fonction f .

Table des matières

Notations et Abréviations

Introduction Générale

Chapitre 1

Variables et processus symétriques α -stables

1.1	Historique	21
1.2	Variables aléatoires α -stables univariées	23
1.2.1	Définitions et résultats préliminaires	24
1.2.2	Densité de probabilité	26
1.2.3	Propriétés algébriques et asymptotiques des distributions α -stables	28
1.2.4	Représentation en série de Lepage d'une variable aléatoire α -stable	29
1.3	Lois et variables aléatoires stables multivariées	30
1.3.1	Définitions et propriétés	31
1.3.2	Variables et vecteurs aléatoires complexes	34
1.3.3	Mesure de dépendance dans l'espace des variables aléatoires SaS	35
1.4	Processus stochastiques α -stables	37
1.4.1	Norme de la covariation	38
1.4.2	Intégration stochastique.	40
1.4.3	Intégrale stochastique de Lebesgue-Stieljes	40
1.4.4	Densité spectrale au sens de Masry-Cambanis	42
1.4.5	Intégrale stochastique par rapport à une mesure SaS.	43
1.5	Conclusion	44

Chapitre 2

Représentation spectrale

2.1	Représentation intégrale au sens de Morse-Transue de la covariation.	47
2.1.1	Définitions et résultats préliminaires	47
2.1.2	Condition suffisante pour l'additivité de la covariation par rapport à la deuxième composante	51
2.2	Représentation double intégrale de la fonction de covariation	57
2.2.1	Intégrale de Morse Transue	57
2.2.2	Représentation spectrale de la fonction de covariation	63
2.3	Cas des processus harmonisables	67
2.3.1	Classification	67
2.4	Conclusion et discussion	69

<p>Chapitre 3 Représentation en séries de type Lepage</p>

3.1	Préliminaires	72
3.1.1	Cas où $d\xi$ est à accroissements indépendants	72
3.1.2	Position du problème	73
3.2	Résultats intermédiaires	75
3.2.1	Etude d'un cas particulier fondamental	77
3.2.2	Correspondance entre la bimesure F et l'application φ_A	80
3.3	Représentation en série de type Lepage	82
3.3.1	Représentation de la mesure aléatoire $d\xi(A)$	82
3.3.2	Représentation du processus X	85
3.4	Techniques et méthodes de Simulation	89
3.4.1	Simulation d'un exemple de processus vérifiant la condition (O)	92

<p>Chapitre 4 Techniques statistiques d'estimation spectrale</p>
--

4.1	Résultats préliminaires.	96
4.1.1	Comportement des moments au voisinage de α	97
4.2	Estimation spectrale dans les processus SaS harmonisables périodiquement covariés 98	
4.2.1	Estimation des coefficients de Fourier et de leur densité spectrale	98
4.2.2	Propriétés asymptotiques des estimateurs	106
4.3	Estimation de la densité de la bimesure F	111
4.3.1	Construction de l'estimateur de h	113

4.4 Conclusion et discussion	114
--	-----

Chapitre 5

Path delay model based on α-stable distribution for the 60GHz indoor channel.
--

5.1 Introduction	117
5.2 Conclusion sur ce chapitre	124

Conclusion générale et perspectives
--

Bibliographie	129
----------------------	------------

Introduction Générale

L'analyse spectrale est considérée comme un outil parmi les plus puissants en traitement statistique des processus stochastiques. Ses points forts résident dans le fait qu'elle se focalise sur le caractère répétitif ou sur les fréquences de ces processus : cela veut dire, que contrairement au traitement temporel, elle permet de révéler le mélange d'informations se répétant à des fréquences données mais cachées dans les réalisations du processus. Les bases théoriques de cette technique remontent aux travaux de Fourier qui, dans sa fameuse décomposition ("dite de Fourier"), exprime chaque fonction comme combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. Au début du 20^{ème} siècle, cette technique a été exportée pour traiter des fonctions aléatoires ou ce que l'on appelle processus stochastiques ; c'est-à-dire une application mesurable définie par :

$$X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, \omega) \longmapsto X(t, \omega) = X_t(\omega), \end{array}$$

où $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé complet muni d'une tribu \mathcal{B} . Les premiers travaux dans ce sens n'étaient pas envisageables sans les travaux pionniers de Kolmogorov [63, 64] ; ce dernier a donné les fondements de la théorie des probabilités modernes ainsi que sa fameuse construction des processus stochastiques connue sous le théorème de Kolmogorov. L'idée principale de l'analyse spectrale de certaines classes de variables aléatoires, est de trouver une correspondance reliant cette classe à un espace fonctionnel. Cette idée a été introduite également par Kolmogorov. Ce dernier a trouvé une correspondance isométrique reliant l'espace vectoriel des variables aléatoires généré par des processus gaussiens stationnaires à un certain espace vectoriel des fonctions de carrés intégrables.

C'est Wiener [108] qui est à l'origine du tournant principal de la théorie de l'analyse spectrale en 1930, quand il a édité son papier "Generalized Harmonic Analysis". Parmi ses contributions, il avait donné la définition statistique précise de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance pour les processus aléatoires fortement stationnaires (stationnarité au

sens large) du second ordre. En 1934, Khinchine [60] était le premier à définir la notion de stationnarité faible en terme de la fonction de covariance ou corrélation. Ainsi, un processus stochastique X à temps continu est faiblement stationnaire si sa fonction de covariance définie par :

$$r : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, t) \longmapsto r(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t), \end{array} \quad (1)$$

est continue et ne dépend que de la différence de temps $|s - t|$. Dans ce cas, la fonction r est réduite à une fonction d'une seule variable continue et définie positive. Par application du théorème de Bochner [12], la fonction r peut être représentée comme la transformée de Fourier d'une mesure positive et bornée F :

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} F(d\lambda). \quad (2)$$

La mesure F est appelée mesure spectrale de X . Grâce à cette dernière représentation (2), plusieurs résultats concernant la structure des processus du second ordre ont été établis. Notons par exemple le théorème de Cramer-Kolmogorov qui affirme qu'un processus stochastique stationnaire de fonction de covariance vérifiant (2) peut avoir la représentation intégrale stochastique suivante :

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\xi(\lambda) \quad (3)$$

avec ξ une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux¹ définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de \mathbb{R} voir Rao [90]. Ces processus faiblement stationnaires ont trouvé d'importantes applications dans plusieurs domaines ; entre autres, en météorologie, en communication, en ingénierie électrique, ...etc. Ces applications sont citées dans plusieurs références de la littérature à titre d'exemples [35, 1, 3, 7, 15, 25, 26, 41].

Tandis que les processus faiblement stationnaires possèdent une belle théorie mathématique, il existe dans la pratique plusieurs situations pour lesquelles la notion de stationnarité est une restriction inacceptable [90, 91, 69]. Notons par exemple qu'en économétrie ou dans des problèmes de détection des signaux, le fait que la covariance ne dépend que d'une seule variable est peu admis [39, 88]. Cela a donc rendu nécessaire une relaxation de la condition de stationnarité faible. Pour s'adapter à de tels problèmes tout en maintenant les méthodes d'analyse harmonique, Loève [69] avait présenté, au milieu des années 40, une notion moins restrictive de la stationnarité qu'il avait appelé *harmonisabilité*. Ainsi, un processus stochastique est harmonisable au

¹C'est-à-dire que ξ est une application σ -additive qui vérifie, $\text{cov}(\xi(A), \xi(B)) = F(A \cap B)$

sens de Loève si et seulement si sa fonction de covariance s'écrit comme :

$$r(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(s\lambda - t\lambda')} F(d\lambda, d\lambda'), \quad (4)$$

où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une mesure complexe définie positive et à variation bornée au sens de Vitali². Loève [70] a donné également une représentation intégrale stochastique du processus semblable à (3) mais cette fois la mesure aléatoire Z vérifie une condition plus générale que l'orthogonalité de ses accroissements : c'est-à-dire qu'elle vérifie, $\text{cov}(\xi(A), \xi(B)) = F(A, B)$. Notons que d'autres représentations de la covariance généralisant celle de la stationnarité ont émergé dans la littérature ; en 1947, Karhunen [59] avait introduit une classe de processus non stationnaires plus générale que (2), tels que leurs covariances vérifient la représentation suivante :

$$r(s, t) = \int_{\mathbb{R}} g(s, \lambda) \overline{g(t, \lambda)} F(d\lambda), \quad (5)$$

où $(g(t, \cdot), t \in \mathbb{R})$ est une famille de fonctions de carré intégrable par rapport à une mesure positive F . Ce n'est qu'en 1951 que Cramer [25] avait introduit un concept beaucoup plus général en définissant une classe de processus de second ordre qui englobe (4) et (5). Il s'agit de la classe des processus ayant une fonction de covariance vérifiant :

$$r(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(s, \lambda) \overline{g(t, \lambda')} F(d\lambda, d\lambda') \quad (6)$$

L'étude de ces processus a été largement développée sous différents aspects car ils couvrent la plupart des processus non stationnaires. Nous trouvons un exposé largement détaillé sur ce sujet dans Rao [90, 91].

Pour rendre la théorie spectrale accessible aux chercheurs dans des domaines appliqués, il a été nécessaire d'introduire des outils statistiques qui s'adaptent à leurs besoins notamment en matière d'estimation spectrale. Tuckey [104, 105] est le fondateur de l'analyse spectrale empirique moderne : en 1949, il a donné les fondements de l'estimation spectrale en donnant des méthodes permettant d'estimer la fonction d'autocorrélation à partir d'un échantillon prélevé sur les réalisations d'un processus stationnaire. Notons également que la plupart des termes et des techniques de l'estimation spectrale comme "Aliasing, Lissage, tapering...etc" sont attribués

² Une application F est dite bornée au sens de Vitali si et seulement si sa variation définie par : $V(F) = \sup \left\{ \sum_{i,j} |F(A_i, B_j)|, \text{ où pour toute famille finie } (A_i)_i, (B_j)_j \text{ les produits } A_i \times B_j \text{ sont disjoints} \right\}$ est finie. Pour plus de détails voir [90].

à J. Tuckey. Parmi les outils les plus utilisés dans les techniques d'estimation spectrale, on trouve le périodogramme qui représente un ingrédient important pour l'estimation de la densité spectrale : c'est une estimation spectrale des coefficients de Fourier à partir des observations d'un processus. Le périodogramme a été introduit à la fin du 19^{ème} siècle et a été utilisé pour détecter les périodicités cachées dans les observations des fameuses taches solaires. Parmi les travaux les plus influents en matière d'estimation spectrale des processus du second ordre stationnaires, nous trouvons Parzen [85, 86], Rosenblatt [94], Anderson [3], Masry [76, 78, 77], Priestley [88]. En ce qui concerne les processus du second ordre non stationnaires, nous citons entre autres : Priestley [88, 89], Dahlhaus [26]...etc. La classe des processus non stationnaires périodiquement et presque périodiquement corrélés a bénéficié d'une attention particulière. Ces processus sont utilisés dans la modélisation de plusieurs phénomènes naturels notamment en météorologie, en astronomie, en traitement du signal...etc. Parmi les travaux les plus influents dans ce domaine on trouve Gladyshev [46], Hurd [54, 53, 55], Gardner [43], Dehay [28, 30, 29, 31], Lii et Rosenblatt [68].

Cette grande quantité de travaux sur les processus du second ordre, qu'ils soient stationnaires ou non stationnaires, a été concevable grâce à la structure hilbertienne des variables aléatoires de second ordre et notamment grâce à la fonction de covariance qui possède plusieurs belles propriétés algébriques. Dans plusieurs situations pratiques et théoriques, les chercheurs ont été amenés à traiter des processus stochastiques qui ne sont pas forcément du second ordre. Cela implique nécessairement que les résultats ainsi obtenus ne sont pas utilisables dans ce cas. Pour tenter de résoudre même partiellement ce problème, plusieurs probabilistes et statisticiens se sont penchés sur la classe des processus stochastiques α -stables. Ces derniers se présentent comme une généralisation des processus gaussiens mais ils ont la particularité d'avoir des moments infinis quand l'ordre est supérieur à α . Ces processus, qui font partie des processus infiniment divisibles, trouvent des applications dans divers domaines. Nous citons entre autres en physique : Doob [33], West et Seshardi [107]) qui les ont utilisés dans l'examen de l'énergie d'un système à fluctuations très variables. Mandelbrot et Van Ness [75] et Mandelbrot [74] utilisent les processus α -stables fractionnaires dans diverses situations économiques, hydrologiques et physiques. Hughes, Slessinger et Montroll [52] et Montroll et Shlessinger [82] ont étudié les marches aléatoires auto-similaires. Teitler et Rjagopal et Ngai [103] ont appliqué les processus α -stables en électricité, mécanique et nucléaire. Nikias [84] a introduit une littérature concernant l'utilisation

des processus et variables α -stables en traitement statistique des signaux et dans les communications. Depuis, ce champ de recherche n'a pas cessé de donner d'importants résultats sur ces processus.

Dans cette thèse nous nous intéressons plus particulièrement à la théorie spectrale de la classe des processus symétriques α -stables dans un cadre plus général que celui des processus α -stables stationnaires ; d'ailleurs ce dernier cas a été largement étudié dans la littérature. Nous citons entre autres [102, 19, 16, 79]. D'abord, afin de remplacer la covariance qui n'est pas définie dans ce cas, Miller [81] a introduit un nouveau concept la généralisant : la covariation. Cette mesure de dépendance a joué un rôle semblable à la covariance dans plusieurs situations [21] mais elle ne possède pas la plupart de ses belles propriétés algébriques. Parmi ses défauts notons qu'en général, elle n'est ni symétrique ni additive par rapport à sa deuxième composante. Pour remédier au problème d'asymétrie, d'autres mesures de dépendance ont été introduites : il s'agit de la codifférence qui est introduite par Astrauskas [4] et du coefficient de covariation symétrique introduit par Garel et al.[44] et [32]. Des techniques d'estimation de ce coefficient ainsi que son rôle dans la régression linéaire et dans l'identification des modèles ARMA ont été données dans Garel [45] et D'Estampes [32]. Le problème de la non-additivité de la covariation, qui constitue le pilier principal de la représentation spectrale de la covariation, est surmonté par la condition d'indépendance. Ainsi, pour des processus symétriques α -stables (SaS) réels admettant une représentation intégrale stochastique³ de la forme (3) où ξ est à accroissements indépendants, Miller et Cambanis [18, 19] ont donné une représentation de la covariation semblable à celle donnée dans (2). Cambanis [16] a généralisé ce résultat dans le cas des processus SaS complexes. Il a également établi l'existence d'une isométrie reliant l'espace vectoriel engendré par les accroissements de ξ et l'espace vectoriel des fonctions de moments d'ordre α par rapport à la mesure spectrale de ξ (dite aussi mesure de contrôle). Cambanis [16] s'est intéressé de plus près aux processus SaS harmonisables : ainsi, il a donné une condition nécessaire et suffisante pour la stationnarité, au sens large, d'un processus harmonisable à savoir la condition d'isotropie (symétrie sphérique) voir Cambanis [16]. Notons qu'on trouve dans la littérature plusieurs travaux concernant les processus harmonisables α -stables : nous citons entre autres Hosoya [51, 50].

³Ce résultat a été consolidé par les travaux de Hardin [48] qui a montré que, sous certaines conditions, chaque processus SaS peut avoir une représentation intégrale stochastique par rapport à des processus ou mesures aléatoires α -stables à accroissements indépendants : l'intégrand est une fonction déterministe de $L^\alpha(\mu)$ où μ est une mesure de contrôle. Cette représentation n'est pas unique mais elle est minimale au sens d'une métrique qu'il avait définie. Pour plus de détails et une vision nouvelle de ce résultat voir Rosinski [95].

L'estimation de la densité spectrale d'un processus harmonisable SaS a été étudiée par Masry [79], Sabre [97, 99, 98, 100] et Checkmenok [24]. Pour un processus harmonisable donné par (3) où ξ est α -stable à accroissements indépendants, la fonction de covariation ne dépend que de la différence de temps. Ainsi, si nous voulons parler de stationnarité et de non-stationnarité faibles tous ces processus sont stationnaires en covariation. Pour enrichir cette classe importante, une représentation de la covariation semblable à (4) est souhaitable. Pour atteindre cet objectif, une condition plus faible que l'indépendance des accroissements de ξ est nécessaire.

Nous résumons la problématique de cette thèse dans les trois questions suivantes auxquelles nous avons apporté une réponse :

- **Sous quelles conditions peut-on donner une représentation de la covariation, semblable à la représentation de la covariance donnée dans (6), d'un processus stochastique SaS ? Est-ce que la bimesure figurant dans (6) caractérise le processus stochastique X et sous quelles conditions ?**
- **Dans le but de réaliser des simulations et de donner des résultats semblables au cas où ξ est à accroissements indépendants, comment construire une représentation en série de type Lepage du processus X qui généralise celle établie quand ξ est à accroissements indépendants ?**
- **Finalement, dans le cas des processus harmonisables, comment estimer la bimesure F quand elle admet une densité ou une dérivée de Radon-Nikodym ? Quels sont le mode et la vitesse de convergence de cet estimateur ?**

Cette thèse se décompose en cinq chapitres qui détaillent l'évolution de notre travail.

Le premier chapitre est dédié à un rappel sur l'histoire et l'évolution des recherches concernant les variables aléatoires et les processus α -stables. Ce rappel est donné dans l'ordre suivant : nous commençons par les définitions et propriétés des variables α -stables unidimensionnelles puis nous traitons le cas des vecteurs α -stables et finalement nous passons au concept général de processus α -stables. Dans chacune de ces étapes nous présentons les résultats les plus importants qui nous seront utiles dans les chapitres qui suivent. Nous prêtons une attention particulière à la représentation spectrale des processus α -stables donnés dans Cambanis [16]. Ce travail est à l'origine des travaux développés dans cette thèse.

Le deuxième chapitre apporte une réponse à la première question principale que nous nous sommes posés, à savoir : existe-t-il une représentation spectrale, semblable à 6, de la fonction de covariation des processus symétriques α -stables ? La construction de cette représentation est établie par étapes : d'abord nous commençons par donner une condition suffisante, plus faible que celle de l'indépendance, pour que la covariation soit additive par rapport à sa deuxième composante. Ensuite, en utilisant cette condition, nous construisons une bimesure F à partir de la covariation entre les accroissements de ξ . Nous rappelons également la notion d'intégrabilité au sens de Morse-Transue [83]. Nous donnons, dans la proposition 2.2.1, ses propriétés en fonction de celle du processus ξ . La proposition 2.2.2 donne la représentation spectrale de la covariation du processus X . Finalement, dans la proposition 2.2.3 nous montrons que la bimesure F ainsi construite est unique et caractérise le processus X dans le cas réel ou complexe isotrope. A la fin de ce chapitre nous définissons la notion de stationnarité, périodicité ou plus généralement la non-stationnarité du processus X au sens de la covariation. Dans le cas particulier des processus harmonisables, nous donnons une classification de ces processus en fonction de la nature de la bimesure F .

Dans le deuxième chapitre, nous avons caractérisé les processus SaS réels ou complexes isotropes par une bimesure. Maintenant, si nous voulons utiliser ces processus dans les domaines appliqués, une méthode permettant de les générer à partir de la bimesure F qui les caractérise, est nécessaire : cela fait l'objet du troisième chapitre. En effet, nous donnons une représentation en série de type Lepage généralisant celle donnée dans le cas où ξ est à accroissements indépendants. Il s'agit d'une série de variables aléatoires faisant intervenir des temps d'arrivée d'un processus de Poisson et d'autres caractérisées par la bimesure F . Au départ nous donnons la structure générale de cette représentation et les conditions qu'elle doit vérifier. Dans la proposition 3.2.4, nous montrons l'existence d'une correspondance reliant la bimesure F à des couples de variables aléatoires. Ces derniers sont utilisés, dans la proposition 3.3.1, pour construire cette représentation dans le cas simple d'une mesure aléatoire de Lebesgue-Stieljes. Une généralisation de ce résultat est détaillée dans le théorème 3.3.2. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux techniques de simulations : dans un premier temps nous donnons une méthode déterminant le seuil auquel nous devons tronquer la série de Lepage afin d'obtenir une précision donnée. Finalement nous présentons quelques exemples des réalisations des processus traités dans cette thèse ainsi que des graphiques comparant des estimations de la densité de la bimesure F .

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à l'estimation de la bimesure F quand le processus X est harmonisable. Dans ce cas, la fonction de covariation est donnée comme transformation de Fourier de cette bimesure. Pour construire un estimateur de la densité de F , une estimation de la fonction de covariation est nécessaire. Pour atteindre cet objectif, nous introduisons dans la première partie quelques résultats préliminaires concernant les liens entre les moments fractionnaires et la covariation. Nous examinons minutieusement la façon dont les moments d'ordre proche de α convergent vers l'infini. Dans la deuxième partie nous traitons, plus particulièrement, les processus périodiquement covariés. Grâce à la nature de la bimesure F qui les caractérise et la structure périodique de leur fonction de covariation, nous montrons que les coefficients de Fourier sont donnés comme transformation de Fourier d'une mesure complexe (que nous appelons aussi mesure spectrale). L'estimation de ces mesures spectrales est inspirée des techniques utilisées dans les processus périodiquement corrélés voir Dehay [29, 31, 28, 30], Hurd [55, 54, 53]. En effet, dans un premier temps, en utilisant les résultats de la première partie nous donnons un estimateur asymptotiquement sans biais des coefficients de Fourier de la fonction de covariation. Dans une seconde étape, nous estimons les densités spectrales en lissant les estimateurs des coefficients de Fourier par un noyau. Dans la proposition 4.2.4, nous donnons la vitesse de convergence et le biais de ces estimateurs et dans la proposition 4.2.5 nous montrons qu'ils convergent presque sûrement sous des conditions de mélanges. Finalement, la dernière partie est consacrée à l'estimation de la densité de la bimesure F dans le cas général. Cet estimateur à noyau est une modification de l'estimateur de la densité spectrale introduit par Parzen [87]. En utilisant la transformation de Fourier inverse et une estimation de la fonction de covariation nous construisons un estimateur naturel de F . Ainsi, dans la proposition 4.3.1, nous montrons que cet estimateur est asymptotiquement sans biais mais sa variance ne converge pas vers 0. Pour améliorer son mode de convergence, nous le lissons par un noyau de convolution; la proposition ?? montre que cet estimateur lissé est également asymptotiquement sans biais et donne sa vitesse de convergence.

Le chapitre 5, donne une application des processus et variables α -stables dans le domaine des communications. Il s'agit de donner un modèle mathématique de la réponse impulsionnelle⁴ du canal 60 GHz. Nous avons donné un nouveau modèle mathématique des retards dans la réponse

⁴ Il s'agit d'une modélisation mathématique des mécanismes de transmission radio qui se résument en l'atténuation des signaux, les retards qu'ils mettent pour atteindre un récepteur et les phases qui modélisent la direction d'arrivée d'un rayon et finalement le nombre de rayons qui atteignent le récepteur.

impulsionnelle basé sur les lois α -stables. Ce modèle a été vérifié sur des données collectées lors d'une campagne de mesures réalisées dans les locaux de l'IEMN⁵. Nous avons également donné une justification théorique de ce modèle.

⁵ Institut d'Électronique de Micro-électronique et de Nano-technologies à Lille

Chapitre 1

Variables et processus symétriques α -stables

1.1 Historique

L'un des problèmes considérés par les chercheurs probabilistes et statisticiens des 18^{ème} et 19^{ème} siècles, était de trouver le meilleur ajustement d'une équation à un ensemble de données observées (modélisation). Après plusieurs échecs, ils y sont arrivés grâce à la méthode des moindres carrés. Les travaux de Legendre et Laplace ont été les plus influents dans ce domaine. Pour la distribution des erreurs, Gauss a insisté sur l'importance de la loi normale appelée aussi la loi gaussienne. Après l'émergence de la théorie de Fourier à la fin de l'année 1800, Poisson a appliqué les représentations en séries et intégrales de Fourier aux distributions de probabilités comme étant un nouvel outil naturel dans le monde de l'analyse. A la fin de 1850, Cauchy, étudiant formé par Laplace, s'intéresse à la théorie des erreurs et généralise la densité de la loi gaussienne par la fonction suivante :

$$f_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-ct^\alpha} \cos(tx) dt; \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

où t^2 est remplacé par t^α . Il a réussi à évaluer l'intégrale pour $\alpha = 1$: $f_1(x) = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$, densité de la fameuse loi de Cauchy. Ensuite, un silence s'étant installé jusqu'en 1919, Bernstein a montré que f_α est une densité de probabilité seulement quand $0 < \alpha \leq 2$. Plus tard, en 1924, Paul Levy [71] a relancer ce domaine de recherche par la théorie des distributions α -stables, en cherchant des conditions plus générales pour la validité du théorème de la limite centrale. Il a montré qu'une distribution α -stable peut se substituer à la distribution gaussienne pour la modélisation des phénomènes à variances infinies. Les lois α -stables multivariées ont été

ensuite étudiées et développées par Paul Levy, Khinchine [61] et Gnedenko [47]. Ces derniers ont, parmi d'autres, exploré les propriétés des distributions α -stables multivariées notamment les propriétés de stabilité par produit de convolution et le théorème de la limite centrale. La stabilité par produit de convolution se traduit par le fait que la somme finie de vecteurs stables indépendants et identiquement distribués est une variable stable. Cependant, l'hypothèse de l'indépendance n'est pas nécessaire dans le cas où $1 \leq \alpha < 2$ ou dans le cas des vecteurs strictement stables, voir par exemple Samorodnitsky et Taqqu [101] ou Dudley et Kanter [36]. Une troisième caractérisation des distributions et vecteurs α -stables multivariés est donnée à travers leur fonction caractéristique. Contrairement à la densité de probabilité, cette fonction caractéristique a été donnée sous une forme analytique exacte voir Feldheim [40], Lévy [72], Feller [41].

Une notion importante dans l'analyse des vecteurs aléatoires est le concept d'indépendance ou de dépendance entre leurs composantes. Par exemple, la matrice de covariance d'un vecteur gaussien est un outil incontournable pour décrire sa structure de dépendance qui se manifeste à travers cette matrice. Outre cette dernière vertu, la covariance détermine entièrement la distribution de probabilité d'un vecteur gaussien centré. C'est pour cette raison qu'elle joue un rôle essentiel dans plusieurs domaines théoriques et appliqués notamment dans la plupart des théories de traitement statistique des processus et séries chronologiques. Évidemment, la covariance n'est pas définie dans le cas des variables aléatoires stables car leurs moments d'ordre deux sont infinis. Pour remédier à ce problème et introduire une mesure de dépendance compatible avec les vecteurs aléatoires α -stables, Miller [81] a été le premier à introduire le terme "covariation"⁶ comme une généralisation de la covariance. Il avait montré que malgré son asymétrie et sa non bilinéarité, elle peut jouer dans certains cas, le même rôle que la covariance, voir aussi [79].

Quand il s'agit de vecteurs aléatoires α -stables de dimension infinie, on parle de processus stochastiques α -stables. Ce concept a été largement étudié dans la littérature et utilisé dans plusieurs domaines d'application, notamment quand il s'agit de l'étude des phénomènes aléatoires qui se produisent dans le temps et qui sont caractérisés par une grande variabilité [101, 57, 1, 2, 5, 8, 75]. Leur utilité a été prouvée dans plusieurs domaines d'applications, notamment en traitement du signal [84], en finance [11, 2]...etc. La définition et le développement de l'intégrale stochastique ont permis à plusieurs auteurs d'étendre la plupart des propriétés des processus

⁶ Cette mesure de dépendance avait été utilisée par Kanter [58] mais pas sous le nom de covariation.

gaussiens aux processus α -stables. L'intégrale stochastique par rapport aux mouvements α -stables parfois dits de Lévy ou plus généralement par rapport à une mesure stochastique α -stable, a été étudiée par Hardin [48], Hosoya [51], Cambanis et Miamee [17], Makagon et Manderkar [73] Samorodnitsky et Taqqu [101]. L'utilité de l'intégrale stochastique est qu'elle permet de relier ces processus à un espace fonctionnel : cette notion est connue sous le nom de l'analyse spectrale des processus. Dans le cas des processus α -stables, les premiers travaux dans ce sens étaient ceux de Bretnagolle [14] puis Miller et Cambanis [18, 16].

Ce chapitre sera organisé de la manière suivante : nous commençons par donner un bref rappel des définitions d'une variable α -stable et nous nous intéressons plus particulièrement au cas symétrique α -stable (S α S). La deuxième section traite le cas des vecteurs aléatoires et les distributions α -stables multivariées ainsi que la définition de la covariation et ses propriétés. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux processus stochastiques S α S. Nous nous intéressons, plus particulièrement, aux processus stochastiques représentés comme une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire. Nous rappelons les travaux effectués dans le cas d'une intégrale par rapport à une mesure aléatoire à accroissements indépendants avec une attention particulière pour la représentation spectrale de la fonction de covariation donnée dans Cambanis [16].

1.2 Variables aléatoires α -stables univariées

Dans cette partie nous rappelons les définitions d'une distribution stable de quatre manières équivalentes et nous donnons l'interprétation pratique de chaque paramètre de cette distribution afin d'en clarifier les propriétés statistiques. Les deux premières définitions concernent la propriété de stabilité par produit de convolution, c'est-à-dire que la famille des distributions stables est préservée par convolution. La troisième définition explique le rôle des distributions stables dans le contexte du théorème central limite, c'est-à-dire que les distributions stables peuvent être approchées par une somme normalisée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette propriété rend importante l'utilisation des distributions α -stables dans la modélisation. La quatrième définition spécifie la fonction caractéristique d'une variable aléatoire α -stable. Cette fonction caractéristique est explicitée d'une manière analytique exacte. Par contre, les densités de probabilité ne sont données par une formule explicite que pour les trois distributions de Gauss($\alpha = 2$), de Cauchy($\alpha = 1$) et de Levy($\alpha = 0.5$). Nous rappelons les

propriétés algébriques et le comportement asymptotique de leur densité et de leur fonction de répartition.

1.2.1 Définitions et résultats préliminaires

Définition 1.2.1. *Une variable aléatoire X est dite stable (ou a une distribution stable) si et seulement si pour tous réels positifs A et B , il existe un réel positif C et un réel D tels que la distribution de la variable aléatoire $AX_1 + BX_2$ est égale à celle de $CX + D$, où X_1 et X_2 sont des copies aléatoires de X indépendantes.*

La loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est le produit de convolution des lois respectives de ces deux variables. La définition 1.2.1 justifie donc la nomination "stable" car elle fait intervenir la stabilité par produit de convolution. Il est démontré dans Feller [41] que pour toute variable aléatoire X stable, il existe un réel $\alpha \in]0, 2]$, tel que les nombres réels positifs A , B et C vérifient,

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha \tag{1.1}$$

Le nombre α est unique et ne dépend que de la loi de la variable aléatoire X , d'où la nomination α -stable. La relation (1.1) peut être généralisée pour un nombre fini de copies indépendantes d'une variable α -stable. La définition suivante explicite cela :

Définition 1.2.2. *Une variable aléatoire X est dite stable si et seulement si pour tout entier $n \geq 2$ il existe un réel positif C_n et un réel D_n tels que la loi de probabilité de la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est égale à celle de $C_n X + D_n$. Les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont des copies aléatoires indépendantes de X .*

En utilisant la relation(1.1) et en procédant par récurrence, il est facile de voir que la constante $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ où α est celui défini dans la relation (1.1). En particulier quand $\alpha = 2$, nous avons $C_n = \sqrt{n}$. La définition suivante explicite les variables stables en terme du théorème limite centrale.

Définition 1.2.3. *Une variable aléatoire X est dite avoir une distribution stable si et seulement si elle possède un domaine d'attraction. Cela veut dire qu'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(Y_i)_i$, une suite de nombres positifs d_n et une suite de nombres réels a_n , telles que : $\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{d_n} + a_n$ converge en loi vers X .*

La définition 1.2.3 est équivalente aux définitions 1.2.1 et 1.2.2. Pour plus de détails voir Feller [41] ou [101]. Elle permet de définir une variable aléatoire stable comme somme normalisée d'une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d.*). Remarquons que ce résultat est très utile dans la pratique car il permet d'approcher une somme normalisée d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.* par une variable aléatoire stable. Cela généralise le cas classique du théorème de la limite centrale pour les variables aléatoires de variance finie (cas Gaussien). Ces trois dernières définitions introduisent les variables α -stables d'une manière abstraite et ne donnent aucune précision sur la distribution de probabilité de ces variables. La définition suivante donne la fonction caractéristique de ces variables.

Définition 1.2.4. Une variable aléatoire X est dite avoir une distribution stable si et seulement si il existe quatre paramètres uniques : $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et un réel μ tels que la fonction caractéristique de X s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{E}e^{i\theta X} = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(\text{sign}(\theta))\tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}(\theta))\ln|\theta|) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

avec

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta > 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } \theta < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous suivons les notations de Samorodnitsky et Taqqu (1994), ainsi une variable α -stable de paramètres α, σ, β et μ sera notée $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$

Les quatre paramètres α, σ, β et μ caractérisent d'une manière unique les distributions stables, ce qui signifie que les lois stables sont paramétriques. Pour un praticien, il est important de connaître la signification statistique de chaque paramètre ainsi que son influence sur l'allure de la courbe de la densité ou de la fonction de répartition.

- le paramètre α est appelé l'indice de stabilité ; il mesure l'épaisseur de la "queue" représentant la fonction de distribution de la variable stable. La variabilité des réalisations autour de μ augmente avec la diminution de ce paramètre.
- Le paramètre σ est appelé paramètre d'échelle et parfois dit paramètre de dispersion ; son rôle est similaire à celui de l'écart-type dans le cas d'une variable normale.
- Le paramètre β est appelé paramètre de symétrie, dit aussi paramètre de biais ; il prend ses valeurs sur l'intervalle $[-1, 1]$ et mesure la dissymétrie de la densité d'une variable

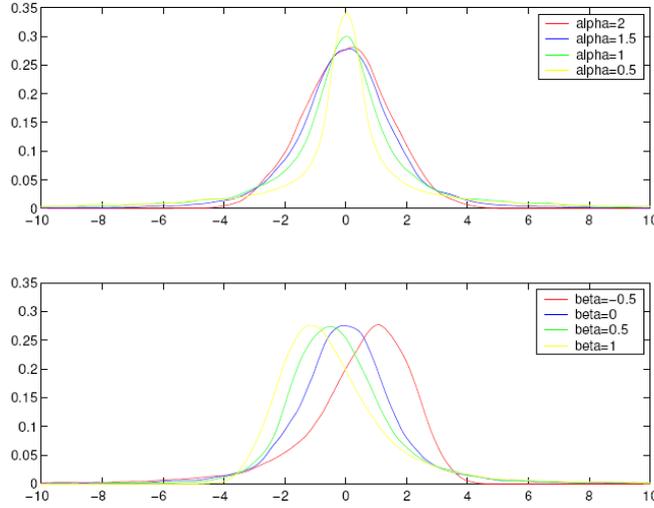


FIG. 1.1 – Densités de probabilité pour différentes valeurs de α , β .

aléatoire stable. Par exemple, à une valeur positive de β correspond un étalement à droite de la densité alors qu'à une valeur négative correspond un étalement à gauche. La courbe est symétrique autour de μ si $\beta = 0$. Notons que la classe des distributions α -stables symétriques, notée $S\alpha S$, est très utilisée dans la littérature.

- Le paramètre μ est dit paramètre de position ; c'est le point autour duquel il y a le plus de réalisations. Par exemple, pour $1 < \alpha \leq 2$ c'est la moyenne mais il représente la médiane dans le cas où $0 < \alpha < 1$.

Pour illustrer d'une manière plus visible le rôle de chaque paramètre, nous donnons dans Fig. 1.1 les courbes des densités de probabilité de quelques variables aléatoires stables.

1.2.2 Densité de probabilité

Pour les variables aléatoires α -stables, il n'existe pas une expression explicite de la densité de probabilité dans le cas général. Cependant on peut obtenir une expression sous forme d'une intégrale à l'aide de la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique Φ_X ,

$$\begin{aligned}
 f(x, \alpha, \beta, \sigma, \mu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\iota.tx) \cdot \Phi_X(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\iota.tx) \cdot \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - \iota\beta(\text{sign}t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \iota\mu.t\} dt
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

La distribution est dite symétrique si ($\beta = 0$) et ($\mu = 0$) ; la fonction caractéristique est donc réelle et paire. Ces conditions permettent de simplifier l'expression de la densité de probabilité qu'on peut écrire comme suit :

$$f(x, \alpha, \sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha) \cos(tx) dt. \quad (1.5)$$

A ce jour l'évaluation explicite de l'intégrale (1.5) n'est possible que dans les trois cas particuliers suivants : distribution de Lévy quand $\alpha = \frac{1}{2}$, distribution de Cauchy quand $\alpha = 1$ et distribution gaussienne quand $\alpha = 2$. A l'exception de ces trois lois particulières, la densité de probabilité des distributions α -stables n'a pas d'expression analytique exacte. Cependant, en utilisant la représentation intégrale (1.5) avec $\sigma = 1$, un développement en série entière de celle-ci a été introduit dans la littérature par Bergström [9].

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k}, \quad (1.6)$$

où Γ est la fonction Gamma usuelle définie, pour $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.7)$$

Le développement en série (1.6) est donné dans plusieurs ouvrages traitant les lois α -stables, à titre d'exemple voir Feller [41] ou [101]. Vu que ces sommes regroupent un nombre infini de termes contenant la fonction gamma avec des signes alternés, il est difficile de les utiliser dans la pratique. Pour remédier à ce problème, Bergström [9] avait proposé un développement asymptotique de la densité dans le cas des distributions SaS avec $\alpha > 1$, ainsi quand x tend vers 0, nous avons :

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k} + O(|x^{2n+1}|) \quad (1.8)$$

et quand x tend vers l'infini, nous avons :

$$f(x, \alpha) = \frac{-1}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) \frac{\sin(k\alpha\pi/2)}{|x|^{\alpha k + 1}} + O(|x|^{-\alpha(n+1)-1}). \quad (1.9)$$

Le calcul de la série asymptotique pour des larges valeurs de n pose des problèmes au niveau de la fonction gamma. Ces difficultés peuvent être réduites en suivant la procédure proposée dans [[84], p. 17]. Comme on peut le déduire facilement à partir de la décomposition asymptotique (1.9), la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable α -stable décroît vers 0 à la même vitesse que $x^{-\alpha}$ quand x tend vers l'infini. On parle alors de "*heavy-tailed distributions*".

Définition 1.2.5. La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est dite "heavy-tailed" d'indice α s'il existe une fonction h à variation lente, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(bx)}{h(x)} = 1$ pour tout $b \in \mathbb{R}^+$, telle que :

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-\alpha} h(x). \quad (1.10)$$

Les lois α -stables sont des "heavy-tailed distributions". En effet, ce résultat se résume dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $0 < \alpha < 2$, alors nous avons les deux résultats suivants :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) &= \sigma^\alpha \cdot C_\alpha \cdot \frac{1 + \beta}{2} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) &= \sigma^\alpha \cdot C_\alpha \cdot \frac{1 - \beta}{2} \end{cases} \quad (1.11)$$

où C_α est une constante qui ne dépend que de α et donnée par :

$$C_\alpha = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 2/\pi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Pour la démonstration de cette proposition voir [[101], p.16].

1.2.3 Propriétés algébriques et asymptotiques des distributions α -stables

Proposition 1.2.2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des distributions α -stables $S_\alpha(\sigma_1, \beta_1, \mu_1)$ et $S_\alpha(\sigma_2, \beta_2, \mu_2)$ alors nous avons les propriétés suivantes :

– la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$ est α -stable $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec :

$$\sigma^\alpha = \sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha, \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \mu = \mu_1 + \mu_2 \quad (1.13)$$

– pour tous nombres réels a et b , la variable aléatoire $aX_1 + b$ est α -stable donnée par $S_\alpha(|a| \cdot \sigma_1, \text{sign}(a) \cdot \beta_1, \mu_1 + b)$.

– Si X est une variable S_α , alors les moments finis sont ceux d'ordre inférieur à α c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}|X^r| < \infty \quad \text{si} \quad r < \alpha \quad (1.14)$$

$$\mathbb{E}|X|^r = \infty \quad \text{si} \quad r \geq \alpha. \quad (1.15)$$

– Si X est une variable aléatoire α -stable $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ avec $\alpha > 1$ alors nous avons $\mathbb{E}(X) = \mu$.

Les démonstrations de ces résultats sont détaillées dans la plupart des livres traitant les lois α -stables, voir par exemple [101, 57]. Comme nous venons de le voir dans (1.15), les moments d'ordre α sont infinis. Un point important que nous exploiterons dans le chapitre 4, est de savoir comment les moments d'ordre très proche de α tendent vers l'infini. La proposition suivante éclaire ce point.

Proposition 1.2.3. *Soit X une variable aléatoire $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, alors nous avons les deux limites suivantes :*

$$\lim_{r \nearrow \alpha} (\alpha - r) \mathbb{E}|X|^r = \alpha C_\alpha \sigma^\alpha \quad (1.16)$$

$$\lim_{r \nearrow \alpha} (\alpha - r) \mathbb{E}X^{<r>} = \alpha \beta C_\alpha \sigma^\alpha \quad (1.17)$$

où C_α est définie dans (1.12) et $x^{<\alpha>} = |x|^\alpha \text{sign}(x)$.

Cette dernière proposition donne la vitesse de convergence vers l'infini des moments quand leur ordre s'approche de α . Ce point sera traité avec plus de détails dans le chapitre 4.

1.2.4 Représentation en série de Lepage d'une variable aléatoire α -stable

En général la représentation en série d'une variable aléatoire infiniment divisible⁷ sans composante gaussienne a été établie par Fergusson et Klass [42], puis développée par Lepage [66]. L'extension de cette représentation à des situations plus générales a été étudiée par Rosinski [96]. L'idée de cette représentation consiste à écrire une variable aléatoire α -stable comme une somme infinie faisant intervenir des variables aléatoires indépendantes et des temps d'arrivée d'un processus de Poisson. L'utilité de cette décomposition réside dans le fait qu'elle permet la démonstration de plusieurs résultats théoriques, voir par exemple [101]. A noter également que les séries de type Lepage peuvent être utilisées pour générer une variable α -stable; mais plusieurs auteurs déconseillent l'utilisation de cette décomposition dans la simulation à cause de la lenteur de sa convergence. Ils conseillent plutôt les méthodes directes de simulation introduites par [22]. Nous nous intéressons au cas particulier des variables aléatoires SaS pour leur

⁷ La famille des distributions ou variables aléatoires infiniment divisibles est une classe de distributions plus générale que celle des distributions α -stables. Ces distributions se caractérisent entre autres par le fait qu'elles vérifient le théorème central limite et qu'elles possèdent des domaines d'attraction.

utilisation pratique. Pour énoncer la proposition suivante, nous utilisons le formalisme : soient $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\Gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ trois suites indépendantes de variables aléatoires telles que :

- Les variables aléatoires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ sont indépendantes et identiquement distribuées d'une loi de Rademacher : il s'agit d'une distribution concentrée sur 1 et -1 , telle que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$.
- Les variables $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$ sont des temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité 1. Elles suivent une loi gamma de paramètre i et elles sont dépendantes entre elles comme suit :

$$\Gamma_i = E_1 + \dots + E_i.$$

Les variables aléatoires $(E_k)_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées d'une loi exponentielle de paramètre 1.

- $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Proposition 1.2.4. *Si W est une variable aléatoire de moment d'ordre α fini, c'est-à-dire $\mathbb{E}|W|^\alpha < \infty$ alors pour tout $0 \leq \alpha < 2$, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $S\alpha S$ de paramètre d'échelle $\sigma = C_\alpha^{-1} [\mathbb{E}|W_1|^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$, avec C_α donnée dans (1.12).*

Pour la démonstration voir [101] ou [57]. Inversement, chaque variable aléatoire symétrique α -stable ($S\alpha S$) admet une décomposition de type Lepage. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.2.5. *Soit X une variable aléatoire $S\alpha S$ telle que $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ alors*

$$X \stackrel{d}{=} (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i \tag{1.18}$$

Avec $\sigma = (\mathbb{E}|W|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

La démonstration de ce résultat est détaillée dans [101]. A noter que la représentation (1.18) n'est pas unique car le choix de W est arbitraire mais de moment d'ordre α vérifiant $\sigma^\alpha = \mathbb{E}|W|^\alpha < \infty$.

1.3 Lois et variables aléatoires stables multivariées

La définition d'une distribution stable multivariée est l'extension de la définition d'une variable aléatoire stable unidimensionnelle. Comme dans le cas gaussien, le théorème 1.3.1 montre

que les combinaisons linéaires des composantes d'un vecteur stable est aussi stable, mais la réciproque n'est en général pas vraie; elle n'est vraie que quand $\alpha > 1$ ou si ce vecteur est strictement stable.

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.1. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est dit α -stable dans \mathbb{R}^d si pour tous nombres positifs A et B , il existe un nombre positif C et un vecteur D de \mathbb{R}^d tels que

$$AX^{(1)} + BX^{(2)} \stackrel{d}{=} CX + D, \quad (1.19)$$

où $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont des copies indépendantes de X . Lorsque D est le vecteur nul, on parle de loi strictement stable.

La définition 1.3.1 impose des conditions sur la distribution conjointe du vecteur aléatoire X . Pour mettre en évidence la stabilité des composants de ce vecteur, le théorème suivant montre, comme dans le cas gaussien, que les composantes de X sont aussi stables et plus généralement toute combinaison des composantes est aussi une variable aléatoire stable.

Théorème 1.3.1. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire stable, alors nous avons :

- toute combinaison linéaire des composants de X de la forme $Y = \sum_{k=1}^d b_k X_k$ est une variable α -stable.
- il existe une constante $\alpha \in]0, 2]$ telle que les constantes, A , B et C de la définition 1.3.1 vérifient : $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$. Cela justifie l'appellation α -stable.

A partir du théorème 1.3.1, le corollaire suivant donne un résultat semblable à la définition (1.2.2) :

Corollaire 1.3.2. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est α -stable dans \mathbb{R}^d avec $0 < \alpha < 2$ si et seulement si pour tout $n \geq 2$ il existe un vecteur D_n de \mathbb{R}^d tel que :

$$X^{(1)} + \dots + X^{(n)} \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X + D_n, \quad (1.20)$$

où $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ sont des copies indépendantes de X .

Le théorème 1.3.1 montre que toute combinaison linéaire des composants d'un vecteur stable est aussi stable. Il est connu que la réciproque est vraie dans le cas des vecteurs Gaussiens. Par

contre, elle n'est pas toujours vraie dans le cas des vecteurs aléatoires stables. La proposition suivante détaille ce résultat.

Proposition 1.3.3. *Soit X un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^d alors :*

- *Si toute combinaison linéaire $Y = \sum_{k=1}^d b_k X_k^{(1)}$ est strictement stable alors le vecteur aléatoire X est aussi strictement stable.*
- *Si toute combinaison linéaire Y est symétrique stable, alors X est également symétrique stable.*
- *Si toute combinaison linéaire Y est α -stable avec un indice de stabilité supérieur ou égal à 1 alors le vecteur X est aussi α -stable.*
- *Si on suppose que X est infiniment divisible et si toute combinaison linéaire est stable alors le vecteur X est aussi stable.*

Les démonstrations de ces résultats sont détaillées dans [101]. Comme nous venons de le voir, les définitions exposées dans ce paragraphe sont abstraites et difficilement exploitables dans les domaines appliqués car elles ne donnent aucune précision sur l'expression analytique de la loi de probabilité d'un vecteur α -stable. Comme dans le cas des distributions stables univariées, il est difficile de donner une expression analytique de leur densité de probabilité, par contre nous pouvons donner l'expression de leur fonction caractéristique, c'est-à-dire expliciter, pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, l'expression de :

$$\Phi_X(\theta) = \mathbf{E}(\exp(\imath(\theta, X))) = \mathbf{E}\left(\exp(\imath \sum_{k=1}^{k=d} \theta_k X_k)\right) \quad (1.21)$$

Le résultat suivant à été démontré par Feldheim [40]. Pour plus de détails, voir par exemple Kuelbs [65].

Théorème 1.3.4. *Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 2$. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ est α -stable si et seulement si il existe une mesure finie Γ définie sur la sphère unité $S_d = \{s \in \mathbb{R}^d, \|s\| = s_1^2 + \dots + s_d^2 = 1\}$ et un vecteur réel μ de \mathbb{R}^d tels que :*

- *si $\alpha \neq 1$ alors,*

$$\Phi_X(\theta) = \exp\left\{-\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha (1 - \imath \cdot \text{sign}((\theta, s)) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) \Gamma(ds) + \imath \cdot (\theta, \mu)\right\}, \quad (1.22)$$

– si $\alpha = 1$ alors,

$$\Phi_X(\theta) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\theta, s)| \left(1 - \imath \frac{2}{\pi} \text{sign}((\theta, s)) \ln(|(\theta, s)|) \right) \Gamma(ds) + \imath \cdot (\theta, \mu) \right\}. \quad (1.23)$$

La mesure Γ est appelée, par abus de langage⁸, mesure spectrale. Le couple (Γ, μ) est unique.

Contrairement aux variables α -stables, les vecteurs aléatoires α -stables ne sont pas paramétriques mais ils sont entièrement déterminés par la mesure spectrale Γ et le vecteur μ dit paramètre de position. Quand $\alpha > 1$, le paramètre μ est égal à l'espérance de X . Nous donnons quelques exemples de fonctions caractéristiques de certains vecteurs α -stables usuels.

Exemples 1.3.1. – Lien avec les variables stables univariées

le théorème 1.3.4 est une généralisation de la définition des distributions stables univariées. Par exemple pour $d = 1$ et $\alpha > 1$, la mesure Γ est concentrée sur la sphère unité de \mathbb{R} qui est formée par les deux points $\{1\}$ et $\{-1\}$. D'un côté, en utilisant la fonction caractéristique donnée dans (1.22), nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_X(\theta) &= \exp \left\{ \Gamma(\{1\}) |\theta \cdot 1|^\alpha \left(1 - \imath \text{sign}(\theta) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(\{-1\}) |-\theta|^\alpha \left(1 + \imath \text{sign}(\theta) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ |\theta \cdot 1|^\alpha (\Gamma(\{1\}) + \Gamma(\{-1\}) - \imath \text{sign}(\Gamma(\{1\}) - \Gamma(\{-1\}))) \right\}, \end{aligned}$$

d'un autre côté, en comparant avec (1.2), Φ_X est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire α -stable $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ telle que :

$$\sigma = \Gamma(\{1\}) + \Gamma(\{-1\}), \quad \beta = \frac{\Gamma(\{1\}) - \Gamma(\{-1\})}{\Gamma(\{1\}) + \Gamma(\{-1\})}.$$

Si la variable aléatoire X est symétrique c'est-à-dire si $\beta = 0$ alors la mesure spectrale Γ est symétrique et nous avons $\Gamma(\{1\}) = \Gamma(\{-1\})$.

– Vecteurs symétriques α -stables

Un vecteur aléatoire α -stable X est dit symétrique si X et $-X$ ont la même loi de probabilité. Cela veut dire que, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d on a : $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A)$. A partir de cette définition, nous pouvons donner une caractérisation des vecteurs symétriques α -stables au moyen de leur mesure spectrale Γ . Un vecteur X est symétrique α -stable si et

⁸ Nous allons voir plus loin ce que nous appellerons mesure spectrale dans le cas des processus α -stables traités dans cette thèse.

seulement si il existe une mesure symétrique Γ définie sur la sphère unité S_d telle que sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\Phi_X(\theta) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right\}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}^d. \quad (1.24)$$

La structure de la mesure spectrale Γ nous permet de distinguer plusieurs types de vecteurs α -stables. Par exemple, dans la pratique, une classe de mesures qu'on utilise souvent est la famille des mesures concentrées sur un ensemble dénombrable de points de la sphère unité. Un résultat important sur l'indépendance des composants d'un vecteur α -stable est le suivant : les composants d'un vecteur stable sont indépendants si et seulement si la mesure spectrale Γ est concentrée sur les points d'intersection entre la sphère unité et les droites décrites par la base canonique de \mathbb{R}^d , c'est-à-dire l'espace engendré par la famille $(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)$.

– Vecteurs aléatoires sous-Gaussiens

Un vecteur aléatoire X est dit sous-gaussien s'il est de la forme, $X = A.(G_1, \dots, G_n)$ où $G = (G_1, \dots, G_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien où A est une variable aléatoire $\frac{\alpha}{2}$ -stable indépendante du vecteur G . Ce type de variables stables joue un rôle important dans la littérature car il fait le lien entre les variables gaussiennes et α -stables. D'un autre point de vue, leur fonction caractéristique est donnée par la formule algébrique simple suivante :

$$\Phi_X(\theta) = \exp \left\{ - ({}^t\theta \Sigma \theta)^{\frac{\alpha}{2}} \right\}, \quad (1.25)$$

où Σ est la matrice de variance-covariance du vecteur gaussien $G = (G_1, \dots, G_n)$.

1.3.2 Variables et vecteurs aléatoires complexes

Les variables aléatoires complexes trouvent des applications dans divers domaines, notamment en traitement du signal. L'étude des variables complexes a été favorisée par l'importance des processus harmonisables qui s'expriment comme une transformation de Fourier d'une mesure aléatoire.

Définition 1.3.2. Une variable aléatoire complexe $X = X_1 + \iota.X_2$ est α -stable si et seulement si le couple de variables aléatoires réelles (X_1, X_2) est α -stable dans \mathbb{R}^2 . Plus généralement, soit (X_1, \dots, X_d) un vecteur aléatoire complexe avec $X_j = X_j^1 + \iota.X_j^2$ pour $j = 1 \dots d$. Ce vecteur complexe est α -stable si et seulement si le vecteur $(X_1^1, X_1^2, \dots, X_d^1, X_d^2)$ est α -stable dans \mathbb{R}^{2d} .

Définition 1.3.3. Une variable aléatoire complexe $S\alpha S$, $X = X_1 + i.X_2$ est dite isotrope (rotationnellement invariante) si et seulement si pour tout $\phi \in [0, 2\pi[$ la loi de la variable aléatoire $e^{i\phi}.X$ est la même que celle de X .

Les variables isotropes sont fréquemment rencontrées en communications sans fil où les directions ou plus clairement les phases n'influencent pas le signal reçu, c'est pour cette raison qu'on les appelle parfois "rotationnellement invariantes" voir par exemple [106]. Ces variables possèdent plusieurs propriétés que nous donnons dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.5. Soit $X = X_1 + i.X_2$ une variable aléatoire complexe isotrope alors,

- Les parties réelle et imaginaire X_1 et X_2 sont des variables α -stables réelles dépendantes.
- la mesure spectrale Γ du vecteur $S\alpha S$, (X_1, X_2) est donnée par la loi uniforme sur le cercle unité.
- le vecteur aléatoire réel (X_1, X_2) est sous-gaussien.
- la fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\Phi_X(\theta) = \mathbb{E}(\exp\{i.\mathcal{R}e(\theta.\bar{X})\}) = \exp\{-c_0.\Gamma_{(X_1, X_2)}(S_2).|\theta|^\alpha\} \quad (1.26)$$

où c_0 est donnée par, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\phi)|^\alpha d\phi$

Cette dernière propriété montre que la fonction caractéristique d'une variable α -stable isotrope dépend seulement du module $|\theta|^\alpha$ et du paramètre $\Gamma_{(X_1, X_2)}(S_2)$.

La démonstration de ces résultats est détaillée dans [79].

1.3.3 Mesure de dépendance dans l'espace des variables aléatoires $S\alpha S$

Pour des variables aléatoires gaussiennes, la matrice de variance-covariance permet de caractériser la distribution du vecteur gaussien. Ses propriétés algébriques souples, telles que sa bilinéarité et le fait qu'elle soit définie positive, rendent l'étude de ces plus simple. Cet important outil associé aux variables gaussiennes est basé sur le calcul des moments d'ordre deux. Or d'après (1.15), ces derniers sont infinis dans la cas des variables α -stables avec $0 < \alpha < 2$. Miller [81] a introduit sous le nom "covariation" une nouvelle mesure de dépendance destinée à remplacer la covariance dans le cas des variables aléatoires symétriques α -stables avec $1 < \alpha < 2$.

La covariation

Dans toute la suite nous supposons que $1 < \alpha < 2$ sauf mention contraire.

Définition 1.3.4. Soit (X_1, X_2) un vecteur symétrique α -stable réel de mesure spectrale Γ définie sur le cercle unité S_2 . La covariation de X_1 sur X_2 est notée $[X_1, X_2]_\alpha$ et est définie par la quantité :

$$[X_1, X_2]_\alpha = \int_{S_2} s_1 \cdot s_2^{\langle \alpha-1 \rangle} d\Gamma(s_1, s_2) \quad (1.27)$$

avec $s^{\langle \beta \rangle} = \text{sign}(s) \cdot |s|^\beta$ quand s est un nombre réel. De la même manière, si $X^1 = X_1^1 + \imath X_2^1$ et $X^2 = X_1^2 + \imath X_2^2$ sont deux variables aléatoires complexes jointement symétriques α -stables, la covariation de X^1 sur X^2 est donnée par :

$$[X^1, X^2]_\alpha = \int_{S_4} (s_1^1 + \imath s_2^1) \cdot (s_1^2 + \imath s_2^2)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\Gamma_{X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2}(s_1^1, s_2^1, s_1^2, s_2^2) \quad (1.28)$$

où $\Gamma_{X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2}$ est l'unique mesure spectrale correspondant au vecteur $S\alpha S(X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2)$, avec la notation $z^{\langle \beta \rangle} = |z|^{\beta-1} \bar{z}$ où \bar{z} est le conjugué de z .

Nous constatons dans cette définition que, contrairement à la covariance, la covariation n'est pas en général symétrique. Cette asymétrie provient de la puissance signée $\langle \alpha - 1 \rangle$ qui figure dans (1.27) et (1.28). Il existe une autre définition équivalente à la définition 1.3.4 et qui fait intervenir l'exposant de la fonction caractéristique donnée dans (1.22). Ce résultat simple à manipuler dans la pratique est donné par la proposition suivante :

Proposition 1.3.6. Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ alors la covariation de X_1 sur X_2 peut s'écrire,

$$[X_1, X_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1} \quad (1.29)$$

où $\sigma(\theta_1, \theta_2)$ est le paramètre de dispersion de la variable aléatoire réelle $S\alpha S, \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$.

L'équivalence entre la proposition 1.3.6 et l'équation (1.27) de la définition 1.3.4 est détaillée dans [101].

Comme nous l'avons mentionné au début, la covariation a été conçue pour remplacer la covariance mais malheureusement elle ne possède pas certaines de ses propriétés. La proposition suivante donne les différentes caractéristiques et propriétés de la covariation.

Proposition 1.3.7. La covariation vérifie les propriétés suivantes :

1. La covariation est linéaire à gauche (par rapport à sa première composante) c'est-à-dire, pour tout vecteur $S\alpha S, (X_1, X_2, Y)$ on a, $[X_1 + X_2, Y]_\alpha = [X_1, Y]_\alpha + [X_2, Y]_\alpha$.

2. Si X et Y sont deux variables aléatoires SaS indépendantes réelles ou complexes, alors $[X, Y]_\alpha = 0$. La réciproque n'est pas toujours vraie.
3. La covariation est additive par rapport à sa deuxième composante dans le cas d'indépendance c'est-à-dire, $[X, Y_1 + Y_2]_\alpha = [X, Y_1]_\alpha + [X, Y_2]_\alpha$ si Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
4. Pour tous réels ou complexes a et b , la covariation vérifie la propriété : $[a.X, b.Y]_\alpha = ab^{\langle \alpha-1 \rangle} [X, Y]_\alpha$.

La démonstration de ces résultats est détaillée dans la plupart des travaux traitant les variables et processus α -stables. Par exemple dans Cambanis [16] nous trouvons les démonstrations de ces propriétés dans le cas général des variables complexes.

1.4 Processus stochastiques α -stables

Les recherches sur les processus stochastiques et les modèles α -stables ont été développées, d'une part, dans le but de trouver des résultats semblables à ceux établis pour les processus gaussiens et d'autre part pour trouver aussi leurs caractéristiques propres. Récemment, plusieurs résultats sur les propriétés de ces processus (notamment sur la sous classe importante des processus à accroissements indépendants) ont été introduits dans la littérature. Pour plus de détails voir par exemple [101, 57, 95]. Nous commençons d'abord par donner la définition des processus stochastiques α -stables et nous donnons quelques résultats élémentaires sur ces processus :

Définition 1.4.1. Soit T un ensemble ordonné et $0 < \alpha \leq 2$. Un processus stochastique réel ou (complexe) $(X_t, t \in T)$ est α -stable si pour toute sous famille finie $\{t_1, \dots, t_n\}$ de T , le vecteur aléatoire réel ou (complexe), $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est α -stable.

Théorème 1.4.1. Un processus stochastique $(X_t, t \in T)$ est symétrique α -stable si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de la forme :

$$\sum_{k=1}^d b_k X_{t_k} \quad \text{où, } d \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T \text{ et } b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad (1.30)$$

sont aussi symétriques α -stables.

Ce théorème montre que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de la forme (1.30) du processus $X = (X_t, t \in T)$ constitue un sous espace vectoriel que l'on va noter $l(X)$.

Dans le paragraphe suivant, nous construisons sur cet espace vectoriel une norme par rapport à laquelle $l(X)$ sera un espace de Banach. Il s'agit de la norme de la covariation.

1.4.1 Norme de la covariation

Il est connu que l'espace vectoriel engendré par une famille de variables aléatoires à variance finie est un espace de Hilbert. Cette structure hilbertienne est non concevable pour les variables aléatoires α -stables car leurs moments du second ordre sont infinis. Il existe un cadre plus général dans lequel l'espace de Hilbert sera remplacé par un espace de Banach. En effet, si l'on considère un processus α -stable $(X(t), t \in T)$, alors l'ensemble des combinaisons linéaires des variables aléatoires $X(t)$ forme un espace vectoriel noté $l(X)$. Dans cet espace, toutes les variables aléatoires sont conjointement α -stables de même indice de stabilité α , voir [19]. Le théorème suivant précise la structure de l'espace vectoriel $l(X) = l(X(t), t \in T)$.

Proposition 1.4.2. *Soit α un nombre positif tel que $1 < \alpha < 2$ alors l'application,*

$$\|\cdot\|_\alpha : \begin{array}{l} l(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ Y \longmapsto \|Y\|_\alpha \triangleq ([Y, Y]_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \end{array} \quad (1.31)$$

définit une norme appelée norme de la covariation. Dans ce cas $(l(X), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach et sa topologie induite est équivalente à la topologie de la convergence en probabilité. De plus, pour un Z fixé de $l(X)$, l'application définie par,

$$\begin{array}{l} l(X) \longrightarrow \mathbb{C} \\ Y \longmapsto [Y, Z]_\alpha \end{array}$$

est linéaire continue de norme $\|Z\|_\alpha^{\alpha-1}$.

Dans $(l(X), \|\cdot\|_\alpha)$, la covariation est également continue par rapport à sa deuxième composante et pour tout vecteur complexe $S\alpha S (Z_1, Z_2, Z_3)$ nous avons :

$$|[Z_1, Z_2]_\alpha - [Z_1, Z_3]_\alpha| \leq 2\|Z_1\|_\alpha \cdot \|Z_2 - Z_3\|_\alpha^{\alpha-1}. \quad (1.32)$$

Démonstration. La démonstration de la première partie de cette proposition est détaillée dans [16]. Pour démontrer l'inégalité (1.32), notons par $Z_1 = Z_1^1 + i.Z_1^2$, $Z_2 = Z_2^1 + i.Z_2^2$, $Z_3 = Z_3^1 + i.Z_3^2$ et $\Gamma = \Gamma_{(Z_1, Z_2, Z_3)}$ l'unique mesure définie sur la sphère unité S_6 de \mathbb{R}^6 correspondante au vecteur $S\alpha S (Z_1^1, Z_1^2, Z_2^1, Z_2^2, Z_3^1, Z_3^2)$, alors par définition de la covariation voir [16] nous avons :

$$|[X, Y]_\alpha - [X, Z]_\alpha| \leq \int_{S_6} |z_1| |z_2|^{\langle \alpha-1 \rangle} - |z_3|^{\langle \alpha-1 \rangle} |d\Gamma(w_1, \dots, w_6)$$

où $z_i = z_i^1 + iz_i^2$. En utilisant l'inégalité $|z_1^{\langle\alpha-1\rangle} - z_2^{\langle\alpha-1\rangle}| \leq 4|z_1 - z_2|^{\alpha-1}$ et d'après l'inégalité de Hölder nous avons :

$$\begin{aligned} |[X, Y]_\alpha - [X, Z]_\alpha| &\leq 4 \int_{S_6} |z_1| |z_2 - z_3|^{\langle\alpha-1\rangle} d\Gamma(z_1^1, z_1^2, \dots, z_3^1, z_3^2) \\ &\leq 4 \left[\int_{S_6} |z_1|^\alpha d\Gamma(z_1^1, z_1^2, \dots, z_3^1, z_3^2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left[\int_{S_6} |z_2 - z_3|^\alpha d\Gamma(z_1^1, z_1^2, \dots, z_3^1, z_3^2) \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\ &\leq 4 \|X\|_\alpha \cdot \|Y - Z\|_\alpha^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{1.33}$$

□

Nous donnons quelques résultats concernant les moments des variables aléatoires SaS complexes isotropes ainsi que leur relation avec la covariation.

Proposition 1.4.3. *Soit Y une variable aléatoire symétrique α -stable alors, si Y est réelle le moment d'ordre p , avec $1 < p < \alpha$, de X est donné par :*

$$\mathbb{E}|Y|^p = \mathcal{S}_\alpha(p) \cdot \|Y\|_\alpha^p \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_\alpha(p) = 2^p \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2}) \cdot \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \tag{1.34}$$

où Γ est la fonction gamma usuelle définie dans (1.7). Si Y est complexe isotrope alors le moment d'ordre p , avec $1 < p < \alpha$ est donné par :

$$\mathbb{E}|Y|^p = \tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p) \cdot \|Y\|_\alpha^p \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p) = 2^p \frac{\Gamma(\frac{2+p}{2}) \cdot \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2})} \tag{1.35}$$

La démonstration de ces résultats est détaillée par exemple dans Feller [41] pour le cas réel et Cambanis et Miamee [17] dans le cas complexe isotrope. Dans la définition 1.3.4, la covariation est donnée en terme de la mesure spectrale. Cette mesure qui n'est pas donnée d'une manière explicite est difficile à manipuler dans la pratique. La proposition suivante donne la covariation en fonction des moments conjoints $\mathbb{E}(XY^{\langle p-1 \rangle})$ où $1 < p < \alpha$. La démonstration de ce résultat se trouve dans Cambanis et Miamee [17].

Proposition 1.4.4. *Soient X et Y deux variables aléatoires conjointement SaS réelles ou complexes isotropes. Alors pour tout $1 < p < \alpha$, nous avons :*

$$\frac{[X, Y]_\alpha}{\|Y\|_\alpha^\alpha} = \frac{\mathbb{E}(X \cdot Y^{\langle p-1 \rangle})}{\mathbb{E}|Y|^p}. \tag{1.36}$$

Les résultats (1.34), (1.35) et (1.36) seront discutés d'une manière plus détaillée et exploités dans le chapitre 4.

1.4.2 Intégration stochastique.

L'histoire de l'intégration stochastique a débuté en 1900 avec Bachelier [6] qui l'a utilisée pour des modélisations dans le domaine des finances. Ensuite, c'est Einstein [38] qui les utilisa dans le domaine de la physique en essayant de donner une intégration par rapport à un processus de Wiener. Ce n'est qu'après les travaux pionniers de Kolmogorov [63, 64] sur la théorie des probabilités que K. Itô [56], dit le père de l'intégration stochastique, a donné les fondements de ce concept tel qu'on le connaît aujourd'hui. L'intégrale stochastique par rapport à un processus α -stable à accroissements indépendants a été étudiée par plusieurs auteurs au cours des années 70, nous citons entre autres, Schilder [102], Hosoya [51], Hardin [48], Miller [81], Cambanis [18, 19, 16] ... etc. Dans Smorodnitsky et Taquu [101], nous trouvons un exposé détaillé sur la construction ainsi que les propriétés de l'intégration stochastique par rapport à une mesure aléatoire α -stable à accroissements indépendants. Dans toute la suite nous supposons que $T \subseteq \mathbb{R}$.

1.4.3 Intégrale stochastique de Lebesgue-Stieljes

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'intégrale stochastique de Lebesgue Stieljes construite à partir d'un processus SaS. Nous reprenons la technique détaillée dans Cambanis [16]. Considérons un processus stochastique symétrique α -stable $\xi = (\xi_t, t \in \mathbb{R})$ avec $1 < \alpha < 2$. Notons par $l(\Delta\xi)$ l'espace de Banach engendré par les accroissements de ξ c'est-à-dire la complétion, par rapport à la norme de la covariation $\|\cdot\|_\alpha$, de l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des accroissements de ξ . D'après Cambanis [16], pour que l'intégrale stochastique de Lebesgue-Stieljes par rapport à ξ existe, il faut que le processus ξ vérifie les deux conditions suivantes :

- Le processus ξ est continu à droite par rapport à la norme de la covariation.
- Pour toute combinaison linéaire ζ des accroissements de ξ l'application, $v : t \mapsto [\xi_t, \zeta]_\alpha$ est à variation bornée.

L'intégrale stochastique au sens de Lebesgue-Stieljes est construite de la manière suivante :

Pour une fonction étagée définie sur un intervalle borné $[a, b[$ c'est à dire , $f = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{]t_{k-1}, t_k]}$ avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, Cambanis [16] a défini l'intégrale stochastique de la fonction f par :

$$\int f d\xi = \sum_{k=1}^n f_k (\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}). \quad (1.37)$$

Comme la fonction v est à variation bornée et continue à droite nous pouvons définir une norme $\|f\|_{1,\alpha} \triangleq \left(\int f(t)dv(t) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ avec $v(t) = [\xi_t, \int f d\xi]_\alpha$. Un simple calcul montre que,

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,\alpha}^\alpha &= \int f(t)dv(t) = \sum_{k=1}^n f_k \cdot (v(t_k) - v(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n f_k \cdot \left[\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}, \int f d\xi \right]_\alpha = \left[\sum_{k=1}^n f_k (\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}), \int f d\xi \right]_\alpha \\ &= \left[\int f d\xi, \int f d\xi \right]_\alpha = \left\| \int f d\xi \right\|_\alpha^\alpha \end{aligned} \quad (1.38)$$

D'abord, en utilisant le fait que la convergence par rapport à la norme de la covariation est équivalente à la convergence en probabilité, voir par exemple Cambanis [16] ou Samorodnitsky et Taqu [101], nous déduisons qu'une suite d'intégrales stochastiques $\int f_n d\xi$ converge en probabilité si et seulement si elle converge par rapport à la norme de la covariation $\|\cdot\|_\alpha$. Par conséquent, d'après (1.38), si et seulement si la suite de fonction f_n est de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_{1,\alpha}$. Comme dans [16], nous notons par $\Lambda_\alpha(\Delta\xi)$ la complétion par rapport à la norme $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ des fonctions étagées à support compact de \mathbb{R} . Pour toute fonction f de $\Lambda_\alpha(\Delta\xi)$ il existe une suite f_n de fonctions étagées à support compact telle que, $\|f_n - f\|_{1,\alpha} \rightarrow 0$. Nous définissons donc l'intégrale stochastique de f au sens de Lebesgue-Stieljes comme limite en probabilité de $\int f_n d\xi$ définie par (1.37). Nous obtenons donc un isomorphisme de $\Lambda_\alpha(\Delta\xi)$ vers $l(\Delta\xi)$.

Etude du cas où ξ est à accroissements indépendants

Nous exposons quelques résultats concernant l'intégration stochastique par rapport à un processus à accroissements indépendants, pour plus de détails voir [16]. L'intérêt de ce cas provient du fait que, d'une part il est facile de voir que ces processus admettent des limites à droite et continues à gauche par rapport à la topologie de la convergence en probabilité. D'autre part pour toute famille finie de réels $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, en utilisant l'indépendance des accroissements de ξ nous pouvons les décomposer de la manière suivante :

$$\|\xi_{t_n} - \xi_{t_0}\|_\alpha^\alpha = \sum_{k=1}^n \|\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}\|_\alpha^\alpha. \quad (1.39)$$

Cette propriété d'additivité a permis de construire une mesure de Lebesgue-Stieljes μ définie par :

$$\mu([s, t]) = \|\xi_t - \xi_s\|_\alpha^\alpha \quad \text{pour tout, } s < t. \quad (1.40)$$

soient maintenant f et g deux fonctions étagées à supports compacts qu'on peut écrire comme, $f = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{]t_{k-1}, t_k]}$ et $g = \sum_{k=1}^n g_k \mathbb{1}_{]t_{k-1}, t_k]}$. Notons par $X_k = \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$. En utilisant la définition de l'intégrale de f et g donnée dans (1.37), nous avons :

$$\left[\int f d\xi, \int g d\xi \right]_{\alpha} = \left[\sum_{k=1}^n f_k X_k, \sum_{k=1}^n g_k X_k \right]_{\alpha} \quad (1.41)$$

Comme le processus ξ est à accroissements indépendants donc les variables aléatoires X_0, X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes. Grâce à la pseudo linéarité de la covariation par rapport à sa deuxième composante de la proposition 1.3.7, nous avons :

$$\begin{aligned} \left[\int f d\xi, \int g d\xi \right]_{\alpha} &= \left[\sum_{k=1}^n f_k X_k, \sum_{k=1}^n g_k X_k \right]_{\alpha} = \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^n f_k \cdot g_{k'}^{<\alpha-1>} [X_k, X_{k'}]_{\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^n f_k \cdot g_k^{<\alpha-1>} [X_k, X_k]_{\alpha}, \text{ car pour } k \neq k', [X_k, X_{k'}]_{\alpha} = 0. \\ &= \sum_{k=1}^n f_k \cdot g_k^{<\alpha-1>} \|\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}\|_{\alpha}^{\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^n f_k \cdot g_k^{<\alpha-1>} \mu((t_{k-1}, t_k]) \\ &= \int f \cdot g^{<\alpha-1>} d\mu \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ce résultat peut être généralisé à toutes les fonctions de $\Lambda_{\alpha}(\Delta\xi)$. La mesure de Lebesgue-Stieljes μ est appelée mesure de contrôle du processus ξ . Cambanis [16] a montré, dans la proposition suivante, que toute mesure de Lebesgue-Stieljes est une mesure spectrale d'un certain processus symétrique α -stable à accroissements indépendants.

Proposition 1.4.5. *Pour toute mesure finie de Lebesgue Stieljes sur \mathbb{R} , il existe un processus stochastique réel ou complexe ξ à accroissements indépendants tel que, $\Lambda_{\alpha}(\Delta\xi) = L^{\alpha}(\mu)$ et que la relation (1.42) est vérifiée.*

1.4.4 Densité spectrale au sens de Masry-Cambanis

Masry et Cambanis [79] se sont intéressés aux processus stochastiques SaS harmonisables $X_t = \int e^{it\lambda} d\xi(\lambda)$ où ξ est un processus symétrique α -stable à accroissements indépendants et isotropes. Dans ce cas, la relation (1.42) s'écrit comme :

$$[X_s, X_t]_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda} d\mu(\lambda). \quad (1.43)$$

La représentation (1.43) est semblable à celle de la fonction de covariance des processus harmonisables de second ordre donnée dans la formule (2) de l'introduction. Par analogie avec la densité spectrale de puissance des processus de second ordre, Masry et Cambanis ont appelé la mesure μ définie dans (1.40) mesure spectrale du processus X . Quand cette mesure admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, cette densité est appelée la densité spectrale du processus X .

Bien que (1.43) n'a pas la même signification énergétique que la densité spectrale des processus de second ordre, Masry et Cambanis ont remarqué qu'elle peut jouer un rôle similaire dans plusieurs situations pratiques. Dans le cas d'un processus à temps continu, un estimateur de la densité spectrale a été donné dans [79] en observant le processus sur un intervalle continu. Dans le cas des processus à temps discret une estimation de la densité spectrale à partir des observations discrètes a été étudiée dans [99, 100]. Elle a été également estimée dans le cas où la mesure spectrale est mixte dans [97, 98].

1.4.5 Intégrale stochastique par rapport à une mesure $S\alpha S$.

Rappelons l'intégrale par rapport à une mesure aléatoire $S\alpha S$ à accroissements indépendants telle qu'elle est définie dans Samorodnitsky et Taqqu [101]. Soient E un espace métrique et $\mathcal{B}(E)$ sa tribu borélienne. Nous donnons d'abord la définition d'une mesure aléatoire dans le cas général.

Définition 1.4.2. *Une mesure aléatoire est une application mesurable M définie sur $\Omega \times E$ à valeur dans \mathbb{C} telle que : pour tout ω fixé, l'application $A \mapsto M(\omega, A)$ est une mesure complexe.*

Soit m une mesure positive définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{B}(E))$. Notons par $L^\alpha(m)$ l'ensemble des fonctions mesurables admettant des moments d'ordre α et par $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{B}(E), m(A) < \infty\}$. Nous donnons la définition d'une mesure aléatoire $S\alpha S$.

Définition 1.4.3. *Une mesure aléatoire M est dite symétrique α -stable de mesure de contrôle m si et seulement si elle vérifie les assertions suivantes :*

- *La mesure aléatoire M est à accroissements indépendants c'est-à-dire, pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_0$ deux à deux disjoints $(M(A_1), \dots, M(A_n))$ est un vecteur aléatoire $S\alpha S$ de composantes deux à deux indépendantes.*
- *Pour tout $A \in \mathcal{E}_0$, la variable aléatoire $M(A)$ est symétrique α -stable de paramètre d'échelle $(m(A))^{\frac{1}{\alpha}}$, c'est-à-dire $M(A) \sim S_\alpha((m(A))^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0)$.*

L'intégrale stochastique par rapport à M d'une fonction réelle f de $L^\alpha(m)$ a été construite par induction de la manière suivante : pour une fonction étagée $f = \sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_0$ deux à deux disjoints, nous avons :

$$\int_E f dM = \sum_{k=1}^n f_k M(A_k). \quad (1.44)$$

Par utilisation des propriétés de la norme de la covariation et la convergence en probabilité, cette intégrale a été définie pour une fonction quelconque f de $L^\alpha(m)$. Elle est définie comme limite en probabilité de la suite de variables aléatoires $(\int f_n dM)_n$ où $(f_n)_n$ est une suite de fonctions étagées qui convergent vers f dans $L^\alpha(m)$. Ce résultat a été également généralisé pour les fonctions complexes. Il a été démontré que la famille $(\int f dM, f \in L^\alpha(m))$ forme un processus stochastique dont les distributions fini-dimensionnelles sont données à travers leur fonction caractéristique. Pour tout $f_1, \dots, f_n \in L^\alpha(m)$, le vecteur $X = (\int f_1 dM, \dots, \int f_n dM)$ est symétrique α -stable de fonction caractéristique donnée par :

$$\Phi_X(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp \left\{ - \int_E |\theta_1 f_1 + \dots + \theta_n f_n|^\alpha dm \right\}. \quad (1.45)$$

Pour plus de détails voir [101].

1.5 Conclusion

Comme nous venons de le remarquer, la notion d'indépendance a joué un rôle fondamental dans la plupart des résultats discutés dans ce chapitre ; notamment l'additivité de la covariation qui a permis d'avoir la représentation spectrale (1.43). La question naturelle qu'on peut se poser est : que se passe-t-il si cette condition d'indépendance n'est pas vérifiée ? Dans ce cas, existe-t-il une représentation semblable à (1.43) ? C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Représentation spectrale

Introduction

Les processus stochastiques du second ordre réels ou complexes ont joué un rôle important dans la modélisation de la plupart des phénomènes de la nature. En particulier, grâce à la flexibilité de ses caractéristiques, la classe des processus stationnaires a connu un grand intérêt. Cependant, tous les phénomènes de la nature ne vérifient pas forcément cette propriété. Pour décrire des phénomènes ayant certaines dépendances particulièrement cachées, les processus périodiquement et presque périodiquement corrélés ont fait l'objet de plusieurs travaux. Ils ont été introduits, en leurs aspects actuels, par Gladyshev [46]. Depuis, ils ont été largement étudiés dans la littérature d'autant plus qu'ils ont été exploités dans de nombreuses applications, voir Hurd [54, 53, 55], Gardner [43], Dehay [28, 30, 29, 31], Lii et Rosenblatt [68]. L'étude de ces processus, qui sont de second ordre, a été simplifiée par les propriétés topologiques de l'espace de Hilbert L^2 des fonctions de carrés intégrables et la commodité de la fonction de covariance.

Nous nous intéressons à une famille des processus qui ne sont pas de second ordre : c'est la classe des processus symétriques α -stables (S α S) avec ($1 < \alpha < 2$). Grâce à leurs fluctuations impulsives, ces processus sont fréquemment rencontrés dans divers domaines d'applications : télédétection, communications, traitement d'image, physique nucléaire, astronomie...etc. Dans le chapitre 1, nous avons vu que la covariation peut être une alternative à la covariance dans le cas des processus S α S. Bien que cette nouvelle mesure de dépendance ait été conçue pour remplacer la covariance quand $1 < \alpha < 2$, elle n'est pas assez puissante car elle ne possède pas certaines propriétés classiques de la covariance, voir proposition 1.3.7. L'un de ses grands défauts est qu'elle n'est pas, en général, additive par rapport à sa deuxième composante. Cette

dernière propriété a joué un rôle important dans la représentation intégrale de la covariation par rapport à une mesure spectrale (mesure de contrôle). Dans le cas des processus symétriques α -stables, Cambanis [16], a utilisé la notion d'indépendance comme condition suffisante pour l'additivité de la covariation ce qui lui avait permis de construire une représentation spectrale⁹ de la covariation voir (1.43). Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons une condition suffisante permettant d'avoir l'additivité de la covariation par rapport à sa deuxième composante.

Il est connu que l'intégrale stochastique est une représentation très commode d'une variable aléatoire SaS. Par exemple dans Samorodnitsky et Taqqu [101], on trouve un exposé largement détaillé sur l'intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire SaS à accroissements indépendants. Parmi la classe des processus SaS, nous étudions les processus $X=(X_t, t \in \mathbb{R})$ ayant la représentation intégrale stochastique au sens de Lebesgue-Stieljes suivante :

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) d\xi(\lambda). \quad (2.1)$$

où ξ est un processus stochastique SaS. En utilisant le concept de la covariation et sa relation avec la notion de convergence en probabilité, Miller [19] a donné les conditions générales d'existence de l'intégrale (2.1) que nous avons rappelées dans le chapitre 1. Le cas où ξ est à accroissements indépendants a été largement étudié dans la littérature, citons, entre autres, les travaux de Cambanis [19, 16], Masry [79]. Il a été également exploité dans divers applications comme le problème de la régression linéaire et l'analyse spectrale des processus stationnaires [17, 19, 20, 79].

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous remplaçons la condition d'indépendance des accroissements de ξ , qui figurent dans [16], par la condition que nous avons introduite dans la première partie permettant l'additivité de la covariation par rapport à sa deuxième composante. En se basant sur ce concept nous donnons une nouvelle représentation double intégrale, au sens de Morse-Transue [83], de la fonction de covariation du processus X par rapport à une bimesure F que nous définissons à partir du processus ξ et de sa fonction de covariation. Cette représentation généralise celle établie par Cambanis [16] quand ξ est à accroissements indépendants. Elle est similaire à la représentation de la covariance donnée par Rao [90] dans le cas des processus du second ordre, voir (6). Nous exploitons cette représentation pour étudier une classe importante des processus harmonisables non stationnaires et dont la covariation est périodique (*que nous appellerons processus périodiquement covariés*), ainsi nous donnons une classification des

⁹ Notons qu'il ne faut pas confondre le mot spectral avec la notion de la mesure spectrale Γ_X donnée dans le théorème 1.3.4.

processus harmonisables selon la structure de la bimesure F .

2.1 Représentation intégrale au sens de Morse-Transue de la covariation.

2.1.1 Définitions et résultats préliminaires

Nous avons vu qu'un vecteur aléatoire réel et centré $X^d=(X_1, X_2, \dots, X_d)$ est symétrique α -stable (SaS) si et seulement si sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_{X^d}(t_1, \dots, t_d) = \exp\left\{- \int_{S_d} \left| \sum_{i=1}^d t_i \cdot s_i \right|^\alpha d\Gamma_{(X_1, \dots, X_d)}(s_1, \dots, s_d)\right\}, \quad (2.2)$$

où $\Gamma_{(X_1, \dots, X_d)}$ est une unique mesure symétrique et finie, définie sur la sphère unité S_d , voir (1.24). La définition d'un vecteur complexe SaS se généralise naturellement en passant par les parties réelles et imaginaires. D'abord la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire complexe $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ est définie par :

$$\Phi_Z(\theta_1, \dots, \theta_d) = \mathbb{E}(\exp\{\imath \cdot \mathcal{R}e\langle \theta, \bar{Z} \rangle\}) = \mathbb{E}\left(\exp\{\imath \cdot \mathcal{R}e \sum_{k=1}^d \theta_k \bar{Z}_k\}\right) \quad (2.3)$$

pour tout vecteur complexe $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ de \mathbb{C}^d . Il est clair que le calcul de la fonction caractéristique (2.3) s'obtient de la même façon que dans la définition 1.3.2 c'est-à-dire en calculant la fonction caractéristique du vecteur SaS réel $Z^{2d} = (Z_1^1, Z_1^2, \dots, Z_d^1, Z_d^2)$ où $Z_j = Z_j^1 + \imath Z_j^2$. Quand Z est complexe Γ_Z désigne la mesure spectrale correspondante au vecteur réel $Z^{2d} = (Z_1^1, Z_1^2, \dots, Z_d^1, Z_d^2)$. La covariation de deux composantes de Z est donnée dans (1.28). Cambanis [16] avait montré que pour toute famille finie de complexes, (a_j) et (b_j) nous avons :

$$\left[\sum_j a_j \cdot Z_j, \sum_j b_j \cdot Z_j \right]_\alpha = \int_{S_{2d}} \left(\sum_j a_j (s_{j,1} + \imath s_{j,2}) \right) \left(\sum_j b_j (s_{j,1} + \imath s_{j,2}) \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\Gamma_{Z^{2d}} \quad (2.4)$$

avec $z^{\langle \alpha \rangle} = |z|^{\alpha-1} \bar{z}$. Il a montré aussi que, pour $1 < \alpha \leq 2$, l'application $X \mapsto \|X\|_\alpha = ([X, X]_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ définit une norme sur l'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires SaS.

Ce qui nous intéresse dans cette partie est l'additivité de la covariation par rapport à sa deuxième composante, c'est à dire $[Y, X_i + X_j]_\alpha = [Y, X_i]_\alpha + [Y, X_j]_\alpha$. Cette propriété est habituellement assurée par la condition d'indépendance de X_i et X_j ou plus généralement par la condition : $\Gamma \{(s_1, \dots, s_d) \in S_d, s_i \cdot s_j = 0\} = 1$, voir Cambanis et Miller [18, 19]. En vue d'étendre

les travaux réalisés sous la condition d'indépendance, nous introduisons une condition sur les vecteurs X^d plus générale que la condition d'indépendance et permettant l'additivité de la covariance. Nous commençons d'abord par démontrer quelques résultats qui nous seront de grande utilité dans ce chapitre.

Lemme 2.1.1. *Pour tous $1 < \alpha < 2$, et pour tout réel s , nous avons :*

$$s^{<\alpha-1>} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(st)}{t^\alpha} dt \triangleq \varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\sin(st)}{t^\alpha} dt \quad (2.5)$$

où Γ est la fonction gamma usuelle.

Démonstration. Nous avons l'égalité classique suivante que l'on peut trouver dans Nikias et Shao[84] :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^{\alpha+1}} dt = |s|^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\alpha}. \quad (2.6)$$

Puisque $1 < \alpha < 2$ alors pour tout réel s , l'application $t \mapsto \frac{\sin(st)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car au voisinage de l'infini $|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}| \sim \frac{1}{t^\alpha}$ et au voisinage de 0, $|\frac{\sin(t)}{t^\alpha}| \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$, donc nous pouvons dériver l'égalité (2.6) sous le signe intégrale par rapport à s . Nous aboutissons donc à l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(st)}{t^\alpha} dt = s^{<\alpha-1>} \Gamma(1-\alpha) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})$$

d'où la démonstration du lemme. □

Dans la proposition suivante nous généralisons l'égalité (2.6) aux nombres complexes.

Lemme 2.1.2. *Soient $z = a + i.b$ un nombre complexe et p un nombre positif tels que $0 < p < 2$. Alors en utilisant la notation complexe $x = s + it$, nous avons l'égalité suivante :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\mathcal{R}e(x.\bar{z}))}{|x|^{2(p+1)}} ds dt = c(p).|z|^{2p} \quad (2.7)$$

où $c(p)$ est une constante qui ne dépend que de p . Elle est donnée par :

$$c(p) = 2^{-p-1} \frac{\Gamma(1-2p) \cos(p\pi)}{p} \int_0^{2\pi} |1 + \sin(2\theta)|^p d\theta$$

Démonstration. En utilisant la notation complexe $z = a + ib$ et $x = s + it$ il est clair que $\mathcal{R}e(x.\bar{z}) = as + bt$ et $|x| = \sqrt{s^2 + t^2}$ donc le calcul de l'intégrale (2.7) revient au calcul de

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(as + bt)}{(s^2 + t^2)^{p+1}} ds dt \quad (2.8)$$

Pour calculer l'intégrale I en fonction de a et b , nous utilisons le changement de variable :

$$\begin{cases} s = s(x, y) &= \frac{1}{a^2 + b^2}[(a + b)x + (a - b)y] \\ t = t(x, y) &= \frac{1}{a^2 + b^2}[(b - a)x + (a + b)y] \end{cases} \quad (2.9)$$

D'abord la Jacobienne de la transformation (2.9) est donnée par :

$$J = \begin{vmatrix} a + b & a - b \\ \frac{a^2 + b^2}{b - a} & \frac{a^2 + b^2}{a + b} \\ \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{a^2 + b^2}$$

Un simple calcul montre que : $as + bt = x + y$ et $s^2 + t^2 = \frac{2(x^2 + y^2)}{a^2 + b^2}$, cela implique que :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x + y)}{\left(\frac{2(x^2 + y^2)}{a^2 + b^2}\right)^{p+1}} \cdot \frac{2}{a^2 + b^2} dx dy \\ &= (a^2 + b^2)^p \cdot 2^{-p} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x + y)}{(x^2 + y^2)^{(p+1)}} dx dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En faisant un changement de variables avec des coordonnées polaires puis par utilisation de (2.6), nous avons,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(x + y)}{(x^2 + y^2)^{(p+1)}} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(r(\cos(\theta) + \sin(\theta)))}{r^{(2p+2)}} r dr d\theta \\ &= \frac{\Gamma(1 - 2p) \cos(p\pi)}{2p} \cdot \int_0^{2\pi} |\cos(\theta) + \sin(\theta)|^{2p} d\theta \\ &= \frac{\Gamma(1 - 2p) \cos(p\pi)}{2.p} \cdot \int_0^{2\pi} |1 + \sin(2\theta)|^p d\theta. \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière égalité dans (2.10), on achève la démonstration de la proposition. \square

Nous pouvons déduire une formule semblable à (2.5) du lemme 2.1.1 dans le cas des nombres complexes.

Lemme 2.1.3. Soit z un nombre complexe alors nous avons l'égalité suivante,

$$z^{\langle p-1 \rangle} = \rho_p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\operatorname{Re}(x \cdot \bar{z}))}{(\bar{x})^{\langle p+1 \rangle}} ds dt \quad (2.11)$$

où $x = s + i.t$ et

$$\rho_p = \frac{1}{p \cdot c\left(\frac{p}{2}\right)} \quad (2.12)$$

Démonstration. Considérons l'opérateur de dérivation dans l'espace des nombres complexes \mathbb{C} défini pour $z = a + \iota.b$ par, $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial a} - \iota \frac{\partial}{\partial b} \right)$. Comme dans le lemme 2.1.1 nous dérivons par rapport à z l'égalité (2.7) sous le signe intégrale c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1 - \cos(\operatorname{Re}(x.\bar{z}))}{|x|^{2(p+1)}} \right) dsdt = c(p) \cdot \frac{\partial}{\partial z} |z|^{2p}. \quad (2.13)$$

Un simple calcul des dérivées montre que, $\frac{\partial}{\partial z} |z|^{2p} = 2p.z^{<2p-1>}$ et de la même manière nous avons, $\frac{\partial}{\partial z} \cos(\operatorname{Re}(x.\bar{z})) = -\bar{x} \sin(\operatorname{Re}(x.\bar{z}))$. En utilisant ces dérivées dans (2.13) nous déduisons que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\operatorname{Re}(x.\bar{z}))}{(\bar{x})^{<2p+1>}} dsdt = 2p.c(p).z^{<2p-1>}. \quad (2.14)$$

Pour déduire l'égalité (2.11) il suffit de remplacer $2p$ par p dans l'égalité (2.14). \square

La proposition suivante donne une généralisation, de la proposition 1.3.6 au cas complexe.

Proposition 2.1.4. *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire complexe SaS alors la covariation de X et Y est donnée par :*

$$[X, Y]_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma^{\alpha}(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1} \quad (2.15)$$

avec $\sigma^{\alpha}(\theta_1, \theta_2) = \|\theta_1 X + \theta_2 Y\|_{\alpha}^{\alpha}$ pour tous complexes θ_1 et θ_2 . L'opérateur de dérivation complexe par rapport à $\theta_1 = \theta_1^1 + \iota.\theta_1^2$ est défini par la formule classique $\frac{\partial}{\partial \theta_1} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1^1} - \iota \frac{\partial}{\partial \theta_1^2} \right)$. Dans le cas complexe isotrope la quantité $\sigma^{\alpha}(\theta_1, \theta_2)$ est égale à une constante près à $-\log(\Phi_{(X,Y)}(\theta_1, \theta_2))$ où $\Phi_{(X,Y)}$ est la fonction caractéristique de (X, Y) . Ce résultat est semblable à celui du cas réel donné dans la proposition 1.3.6.

Démonstration. D'une part, en utilisant la définition de la covariation donnée dans (1.28) nous avons :

$$[X, Y]_{\alpha} = \int_{S_4} z_1(z_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{(X,Y)}(s_1, s_2, s_3, s_4), \quad (2.16)$$

avec $z_1 = s_1 + \iota s_2$ et $z_2 = s_3 + \iota s_4$. D'autre part, par la définition de $\sigma^{\alpha}(\theta_1, \theta_2)$ nous avons :

$$\sigma^{\alpha}(\theta_1, \theta_2) = \int_{S_4} |\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2|^{\alpha} d\Gamma_{(X,Y)}(s_1, s_2, s_3, s_4). \quad (2.17)$$

Un simple calcul de dérivées par rapport à θ_1 , comme dans le lemme 2.1.3, nous permet d'avoir,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} |\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2|^{\alpha} = \alpha z_1 (\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2)^{<\alpha-1>}.$$

En remplaçant par $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 1$ nous obtiendrons :

$$\frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1} = \alpha \int_{S_4} z_1(z_2)^{\langle \alpha-1 \rangle} d\Gamma_{(X,Y)}(s_1, s_2, s_3, s_4). \quad (2.18)$$

La comparaison des deux égalités (2.16) et (2.18) achève la démonstration de cette proposition. \square

2.1.2 Condition suffisante pour l'additivité de la covariation par rapport à la deuxième composante

Soient $X^d = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire réel, centré et symétrique α -stable (S α S) et Γ_{X^d} l'unique mesure correspondante définie sur S_d . Notons par ϕ la transformée de Fourier de la mesure spectrale Γ_{X^d} . Elle est exprimée, pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$, par $\phi(\theta) = \int_{S_d} e^{i \sum \theta_i s_i} d\Gamma_{X^d}(s_1, \dots, s_d)$. Puisque Γ est symétrique nous avons :

$$\phi(\theta) = \int_{S_d} \cos\left(\sum \theta_i s_i\right) d\Gamma_{X^d}(s_1, \dots, s_d). \quad (2.19)$$

Si X est un vecteur complexe la transformation de Fourier Γ_{X^d} est donnée, pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{C}^d$, par

$$\phi(\theta) = \int_{S_{2d}} \cos\left(\sum \mathcal{R}e(\theta_i \bar{s}_i)\right) d\Gamma_{X^d}(s_1, \dots, s_d) \quad (2.20)$$

Les moments d'ordre 3 de la mesure Γ_{X^d} existent car Γ_{X^d} est une mesure finie à support compact.

Alors la fonction ϕ est trois fois différentiable et nous avons :

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(\theta_1, \dots, \theta_d) = \int_{S_d} s_i s_j s_k \sin\left(\mathcal{R}e\left(\sum \theta_i s_i\right)\right) d\Gamma_{X^d}(s_1, \dots, s_d) \quad (2.21)$$

avec $\frac{\partial}{\partial \theta_j} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j^1} + i \frac{\partial}{\partial \theta_j^2} \right)$ et $\theta_j = \theta_j^1 + i \theta_j^2$. Quand θ_j est réel cet opérateur est celui de la dérivée partielle habituelle par rapport à θ_j dans \mathbb{R} . Le théorème suivant donne une condition suffisante pour avoir l'additivité de la covariation par rapport à sa deuxième composante.

Théorème 2.1.5. *Pour que la covariation soit additive par rapport à sa deuxième composante c'est à dire :*

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, \forall \theta_1, \dots, \theta_d \in \mathbb{C}, \quad [X_i, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_d X_d]_\alpha = [X_i, \theta_1 X_1]_\alpha + \dots + [X_i, \theta_d X_d]_\alpha, \quad (2.22)$$

il suffit que, pour tous i, j et $k \in \{1, \dots, d\}$ qui ne sont pas tous égaux, la fonction caractéristique ϕ vérifie la condition suivante :

$$\forall \theta_1, \dots, \theta_d \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(\theta_1, \dots, \theta_d) = 0. \quad (2.23)$$

Démonstration. Nous commençons par démontrer le théorème quand X est un vecteur SaS réel puis nous généralisons au cas complexe.

Cas où X est réel :

Nous commençons par démontrer l'additivité dans le cas de trois composantes. Par définition de la covariation et en utilisant le résultat (2.4) il est facile de voir que, pour tous i, j et k tels que $j \neq k$ et pour tous réels θ_j et θ_k nous avons :

$$\begin{aligned} D &\triangleq [X_i, \theta_j \cdot X_j + \theta_k \cdot X_k]_\alpha - [X_i, \theta_j \cdot X_j]_\alpha - [X_i, \theta_k \cdot X_k]_\alpha \\ &= \int_{S_d} s_i \cdot \left((\theta_j s_j + \theta_k s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_j s_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_k s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} \right) d\Gamma_{X^d} \\ &= \int_{S_d} s_i \Delta(s_j, s_k) d\Gamma_{X^d} \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec $\Delta(s_j, s_k) = (\theta_j s_j + \theta_k s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_j s_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_k s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle}$. Par application de l'égalité (2.5) du lemme 2.1.1 nous avons :

$$\Delta(s_j, s_k) = \varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\sin((\theta_j s_j + \theta_k s_k)t) - \sin(\theta_j s_j t) - \sin(\theta_k s_k t)}{t^\alpha} dt. \quad (2.25)$$

En utilisant les propriétés classiques de trigonométrie suivantes,

$$\begin{aligned} \sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right), \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

il est facile de voir que :

$$\Delta(s_j, s_k) = -4\varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta_j s_j}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_k s_k}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_j s_j + \theta_k s_k}{2} t\right)}{t^\alpha} dt. \quad (2.27)$$

En remplaçant $\Delta(s_j, s_k)$ dans (2.24) et par application du théorème de Fubini qui est valable dans notre cas, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} D &= -4\varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\int_{S_d} s_i \sin\left(\frac{\theta_j s_j}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_k s_k}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_j s_j + \theta_k s_k}{2} t\right) d\Gamma_{X^d}}{t^\alpha} dt, \\ &= -4\varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{S(t\theta_j, t\theta_k)}{t^\alpha} dt, \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.1. Représentation intégrale au sens de Morse-Transue de la covariation.

où $S(x, y) = \int_{S_d} s_i \sin\left(\frac{xs_j}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{ys_k}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{xs_j + ys_k}{2}\right) d\Gamma_{X^d}$. Puisque la sphère unité S_d est compacte, elle est fermée et bornée, donc la mesure Γ_{X^d} admet des moments de tout ordre. Par conséquent la fonction $S(x, y)$ est indéfiniment dérivable. Sa dérivée partielle par rapport à y est donnée par :

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{S_d} s_i s_k \sin\left(\frac{xs_j}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{xs_j + 2ys_k}{2}\right) d\Gamma_{X^d}, \quad (2.29)$$

puis en dérivant par rapport à x nous aboutissons à :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{4} \int_{S_d} s_i s_j s_k \cdot \sin((xs_j + ys_k)) d\Gamma_{X^d}. \quad (2.30)$$

Remarquons d'après l'égalité (2.21) que :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(\theta_j, \theta_k) = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}(0, \dots, 0, \theta_j, 0, \dots, 0, \theta_k, 0, \dots, 0).$$

Donc d'après la condition (2.23) du théorème 2.1.5, nous avons :

$$\forall \theta_j, \theta_k \in \mathbb{R} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(\theta_j, \theta_k) = 0. \quad (2.31)$$

De (2.28) et (2.31), pour montrer que $[X_i, \theta_j \cdot X_j + \theta_k \cdot X_k]_\alpha = [X_i, \theta_j \cdot X_j]_\alpha + [X_i, \theta_k \cdot X_k]_\alpha$, il suffit de montrer que (2.31) est équivalent au fait que S est identiquement nulle c'est-à-dire,

$$\forall x, y, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \iff \forall x, y, S(x, y) = 0. \quad (2.32)$$

la deuxième implication est évidente car si S est identiquement nulle, il en est de même pour sa dérivée seconde. Supposons maintenant que nous avons, $\forall x, y, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, on déduit alors que $\forall x, y, \frac{\partial S}{\partial y}(x, y)$ ne dépend pas de x . Cela nous permet d'écrire, $\forall x, y, \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial S}{\partial y}(0, y)$. En remplaçant le terme de droite de cette dernière égalité dans la formule (2.29), nous trouvons que $\forall x, y, \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = 0$. De même, cela implique que $S(x, y)$ ne dépend pas de y , par suite $\forall x, y, S(x, y) = S(x, 0)$ ce qui implique en remplaçant dans la formule de S , définie dans (2.28), qu'elle est identiquement nulle.

La démonstration du cas général se fait avec une technique semblable à celle de trois variables discutée plus haut. En effet, soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ des nombres réels et soit $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ fixé. Notons

par D la différence suivante :

$$\begin{aligned}
 D &\triangleq [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_d X_d]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_1 X_1]_\alpha - \dots - [X_{i_0}, \theta_d X_d]_\alpha \\
 &= [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_d X_d]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_{d-1} X_{d-1}]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_d X_d]_\alpha \\
 &+ [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_{d-1} X_{d-1}]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_{d-2} X_{d-2}]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_{d-1} X_{d-1}]_\alpha \\
 &+ \dots + [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_1 X_1]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_2 X_2]_\alpha \\
 &= \sum_{j=0}^{d-2} D_j
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Avec, pour tout $j \in \{0, \dots, d-2\}$, le terme D_j est donné par :

$$\begin{aligned}
 D_j &\triangleq [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_{d-j} X_{d-j}]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_1 X_1 + \dots + \theta_{d-j-1} X_{d-j-1}]_\alpha - [X_{i_0}, \theta_{d-j} X_{d-j}]_\alpha \\
 &= \int_{S_d} s_{i_0} \left[(\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j} s_{d-j})^{\langle \alpha-1 \rangle} \right. \\
 &\quad \left. - (\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j-1} s_{d-j-1})^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_{d-j} s_{d-j})^{\langle \alpha-1 \rangle} \right] d\Gamma_{X^d}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

De la même façon que dans le cas de trois variables discuté plus haut, nous utilisons l'égalité (2.5) du lemme 2.1.1 puis nous appliquons le théorème de Fubini, nous trouvons une égalité semblable à (2.24) donnée par :

$$\begin{aligned}
 D_j &= \varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\int_{S_d} s_{i_0} \sin\left(\frac{\theta_{d-j} s_{d-j} t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j-1} s_{d-j-1} t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j} s_{d-j} t}{2}\right) d\Gamma_{X^d}}{t^\alpha} dt \\
 &= \varrho_\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_j(t\theta_1, \dots, t\theta_{d-j})}{t^\alpha} dt,
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Delta_j(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) &\triangleq \int_{S_d} s_{i_0} \sin\left(\frac{\theta_{d-j} s_{d-j}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j-1} s_{d-j-1}}{2}\right) \\
 &\quad \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 s_1 + \dots + \theta_{d-j} s_{d-j}}{2}\right) d\Gamma_{X^d}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

D'abord, la fonction Δ_j est deux fois différentiable car la mesure Γ_{X^d} admet des moments de tout ordre. De la même manière que dans (2.29) et (2.30), pour tout $k = 1, \dots, d-j-1$, en dérivant la fonction Δ_j par rapport à θ_k et θ_{d-j} , nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Delta_j}{\partial \theta_k \partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) &= \frac{1}{4} \int_{S_d} s_{i_0} s_k s_{d-j} \cdot \sin\left(\frac{\theta_1 s_1 + \dots + 2\theta_k s_k + \dots + 2\theta_{d-j} s_{d-j}}{2}\right) d\Gamma_{X^d} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta_{i_0} \partial \theta_k \partial \theta_{d-j}}\left(\frac{\theta_1}{2}, \dots, \theta_k, \frac{\theta_{k+1}}{2}, \dots, \theta_{d-j}, 0, \dots, 0\right).
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

En utilisant la condition (2.21) et (2.23), nous déduisons que,

$$\forall k = 1, \dots, d-j-1, \forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}, \frac{\partial^2 \Delta_j}{\partial \theta_k \partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = 0. \tag{2.38}$$

D'après (2.35) et (2.38), pour montrer que $D = 0$ il suffit de montrer l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, d-j-1, \forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}, \frac{\partial^2 \Delta_j}{\partial \theta_k \partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = 0 \\ \iff \\ \forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}, \Delta_j(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = 0. \end{aligned}$$

Une implication triviale est que si Δ_j est identiquement nulle il en est de même pour sa dérivée seconde. Pour l'autre implication, supposons que $\forall k = 1, \dots, d-j-1$ et $\forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}$ nous avons, $\frac{\partial^2 \Delta_j}{\partial \theta_k \partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = 0$. On déduit donc que $\forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}$, la fonction $\frac{\partial \Delta_j}{\partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j})$ ne dépend pas de $\theta_1, \dots, \theta_{d-j-1}$. Ce qui nous permet d'écrire, $\forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}$, $\frac{\partial \Delta_j}{\partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = \frac{\partial \Delta_j}{\partial \theta_{d-j}}(0, \dots, 0, \theta_{d-j})$. En remplaçant le terme à droite de cette dernière égalité dans la formule de $\frac{\partial \Delta_j}{\partial \theta_{d-j}}$, nous trouvons que $\forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}$, $\frac{\partial \Delta_j}{\partial \theta_{d-j}}(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = 0$. Cela implique aussi que Δ_j ne dépend pas de θ_{d-j} et par suite $\forall \theta_1, \dots, \theta_{d-j}$, $\Delta_j(\theta_1, \dots, \theta_{d-j}) = \Delta_j(\theta_1, \dots, \theta_{d-j-1}, 0)$. Il suffit de remplacer par θ_{d-j} par 0 dans la formule (2.36), pour voir que Δ_j est une fonction identiquement nulle.

Cas où \mathbf{X} est un vecteur complexe :

La démonstration de ce théorème dans le cas complexe est similaire à celle du cas réel. Nous donnons une idée de la démonstration en montrant ce résultat dans le cas de trois variables. D'abord par définition de la covariation, pour tout i, j et k distincts et pour tous complexes θ_j et θ_k nous avons :

$$\begin{aligned} D &\triangleq [X_i, \theta_j \cdot X_j + \theta_k \cdot X_k]_\alpha - [X_i, \theta_j \cdot X_j]_\alpha - [X_i, \theta_k \cdot X_k]_\alpha \\ &= \int_{S_d} s_i \cdot \left((\theta_j s_j + \theta_k \cdot s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_j s_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_k \cdot s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} \right) d\Gamma_{X^{2d}} \\ &= \int_{S_d} s_i \Delta(s_j, s_k) d\Gamma_{X^{2d}} \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec $\Delta(s_j, s_k) = (\theta_j s_j + \theta_k \cdot s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_j s_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} - (\theta_k \cdot s_k)^{\langle \alpha-1 \rangle}$. Par application de l'égalité (2.11) du lemme 2.1.3, pour $x = x_1 + ix_2$ nous avons :

$$\Delta(s_i, s_j) = \rho_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\mathcal{R}e(\theta_j s_j + \theta_k s_k \bar{x})) - \sin \mathcal{R}e(\theta_j s_j \bar{x}) - \sin(\mathcal{R}e(\theta_k s_k \bar{x}))}{(x)^{\langle \alpha-1 \rangle}} dx_1 dx_2 \quad (2.40)$$

Le reste de la démonstration est le même que dans le cas des vecteurs réels, c'est-à-dire nous utilisons le lemme 2.1.3, les propriétés trigonométriques (2.26) puis l'opérateur de dérivation complexe comme dans (2.37) et (2.38) et finalement le même raisonnement que dans le cas réel montre le résultat. \square

Exemples 2.1.1. Pour obtenir un exemple simple de fonction ϕ qui vérifie la condition (2.23) on choisit un vecteur aléatoire SaS de mesure spectrale Γ déterminée par sa transformation de Fourier ϕ que l'on prend de la forme :

$$\phi(\theta_1, \dots, \theta_d) = \sum_{i \neq j=1}^d \varphi_{i,j}(\theta_i, \theta_j)$$

où les $\varphi_{i,j}$ sont des fonctions caractéristiques trois fois différentiables. Par application du théorème de Bochner, pour que ϕ soit la transformée de Fourier d'une mesure finie il faut et il suffit qu'elle soit définie positive. Une condition suffisante pour cela est de choisir les fonctions $\varphi_{i,j}$ continues et définies positives : ce qui revient à les choisir comme transformées de Fourier de mesures finies ou probabilités bidimensionnelles. En effet, soient z_1, \dots, z_n des nombres complexes et $\theta_1, \dots, \theta_n$ des vecteurs de \mathbb{R}^d avec $\theta_i = (\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}, \dots, \theta_i^{(d)})$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \phi(\theta_i - \theta_j) &= \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \sum_{l \neq k=1}^d \varphi_{l,k}(\theta_i^{(l)} - \theta_j^{(l)}, \theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) \\ &= \sum_{l \neq k=1}^d \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \varphi_{l,k}(\theta_i^{(l)} - \theta_j^{(l)}, \theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse, les $\varphi_{l,k}$ sont définies positives nous obtenons que pour tout $l \neq k$ la somme, $\sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \varphi_{l,k}(\theta_i^{(l)} - \theta_j^{(l)}, \theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)})$ est positive ; ce qui montre le résultat.

Remarquons que le résultat du théorème 2.1.5 est une généralisation de la condition d'indépendance. En effet, supposons que X_1, \dots, X_d sont deux à deux indépendants, alors d'après Samorodnitsky et Taqqu [[101], p. 68], la mesure Γ_{X^d} est concentrée sur les points d'intersection entre les axes de \mathbb{R}^d et la sphère unité S_d . Nous pouvons donc représenter Γ_{X^d} comme :

$$\Gamma_{X^d} = a_1 \cdot [\delta_{(1,0,\dots,0)} + \delta_{(-1,0,\dots,0)}] + a_2 \cdot [\delta_{(0,1,\dots,0)} + \delta_{(0,-1,\dots,0)}] + \dots + a_d \cdot [\delta_{(0,0,\dots,1)} + \delta_{(0,0,\dots,-1)}]$$

où a_1, \dots, a_d sont des nombres positifs. Il est facile de voir que la transformée de Fourier de la mesure Γ_{X^d} s'écrit sous la forme :

$$\phi(\theta_1, \dots, \theta_d) = \sum_{i=1}^d a_i \cos(\theta_i).$$

Si on dérive trois fois ou même deux fois nous trouverons une fonction nulle. Cela implique clairement que la fonction ϕ vérifie la condition (2.23).

2.2 Représentation double intégrale de la fonction de covariation

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé la représentation spectrale, au sens de Cambanis [16], d'un processus X représenté comme une intégrale stochastique de Lebesgue-Stieljes (2.1) où ξ est à accroissements indépendants. Nous avons vu que la clé de la représentation spectrale de la fonction de covariation donnée dans (1.43) est la condition d'indépendance des accroissements de ξ . Maintenant que nous avons donné dans le théorème 2.1.5 une condition plus faible d'additivité, nous généralisons la représentation (1.43) à des processus X pour lesquels les accroissements de ξ vérifient la condition (2.21). Avant de donner cette représentation, nous rappelons la notion d'intégrabilité au sens de Morse et Transue [83] et nous construisons une bimesure F par rapport à laquelle cette intégrale sera construite.

2.2.1 Intégrale de Morse Transue

Supposons que le processus ξ qui figure dans l'intégrale (2.1) vérifie les conditions suivantes :

1. (I) Le processus ξ est continu à droite par rapport à la norme de la covariation $\|\cdot\|_\alpha$.
2. (II) Pour toute combinaison linéaire ζ des accroissements de ξ , l'application $v : t \mapsto [\xi(t), \zeta]_\alpha$ est à variation bornée.

Considérons l'application qui associe à chaque intervalle $[s, t[$, la variable aléatoire $S\alpha S d\xi$ donnée par :

$$d\xi([s, t]) = \xi_t - \xi_s \tag{2.41}$$

D'après Cambanis [16], sous les conditions (I) et (II) ci-dessus, l'application $d\xi$ peut être prolongée en une mesure aléatoire complexe définie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nous supposons que cette mesure aléatoire $d\xi$ vérifie la condition suivante :

Définition 2.2.1. Condition(O) :

Nous dirons que la mesure aléatoire $d\xi$ vérifie la condition (O) si et seulement si pour tout $n \geq 2$, et pour toute famille de boréliens $\{A_1, \dots, A_n\}$ de \mathbb{R} deux à deux disjoints, le vecteur aléatoire $S\alpha S (d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n))$ vérifie la condition (2.23).

Supposons que la mesure aléatoire $d\xi$ vérifie la condition (O) et considérons l'application F à valeurs complexes définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$F : \begin{array}{ll} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) & \longmapsto [d\xi(A), d\xi(B)]_\alpha \end{array} \quad (2.42)$$

L'application F est additive par rapport à chacune de ses composantes : c'est une bimesure. En effet, l'additivité par rapport à la première composante provient de la linéarité de la covariation par rapport à sa première variable. Pour la deuxième composante, si B_1 , B_2 et B_3 sont des boréliens deux à deux disjoints alors pour tout $i = 1, 2$ ou 3 nous avons,

$$F(B_i, B_1 \cup B_2) = [d\xi(B_i), d\xi(B_1 \cup B_2)]_\alpha = [d\xi(B_i), d\xi(B_1) + d\xi(B_2)]_\alpha \quad (2.43)$$

Or $d\xi$ vérifie la condition (O) donc,

$$[d\xi(B_i), d\xi(B_1) + d\xi(B_2)]_\alpha = [d\xi(B_i), d\xi(B_1)]_\alpha + [d\xi(B_i), d\xi(B_2)]_\alpha = F(B_i, B_1) + F(B_i, B_2).$$

Nous pouvons démontrer que la bimesure F est σ -additive par rapport à chacune de ses composantes. En effet, d'après Rao [90] ou [57], il suffit de montrer que : pour toute suite de boréliens A_n décroissante vers \emptyset , $F(A_n, A_n)$ converge vers 0. Comme le processus ξ est continu à droite par rapport à la topologie de la convergence en probabilité¹⁰ nous déduisons que si A_n décroît vers \emptyset alors $d\xi(A_n)$ converge en probabilité vers 0. Ce qui implique que $F(A_n, A_n) = \|d\xi(A_n)\|_\alpha^\alpha$ converge vers 0.

Remarque 2.2.1. *Il est connu que la fonction de covariance d'un processus harmonisable du second ordre de type (4) est définie positive. Cette propriété joue un rôle fondamental dans l'analyse spectrale des processus du second ordre. Dans le cas des processus α -stables, la bimesure F définie par (2.42) vérifie une propriété semblable que nous formulons de la manière suivante : pour tous complexes z_1, \dots, z_n et pour tous boréliens A_1, \dots, A_n deux à deux disjoints, nous avons :*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i(z_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_i, A_j) \geq 0. \quad (2.44)$$

¹⁰ la topologie de la convergence en probabilité est équivalente à la topologie induite par la norme de la covariation. voir Samorodnitsky et Taqqu [101].

La démonstration de ce résultat est très simple. Il suffit d'utiliser la condition (O). En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i(z_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_i, A_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i(z_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} [d\xi(A_i), d\xi(A_j)]_\alpha \\ &= \left[\sum_{i=1}^n z_i d\xi(A_i), \sum_{i=1}^n z_i d\xi(A_i) \right]_\alpha \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n z_i d\xi(A_i) \right\|_\alpha^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Supposons que la bimesure F vérifie une variation finie semblable à celle de Fréchet (voir Rao [90]), c'est-à-dire :

$$\sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i(b_j)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_i, A_j) \right|, (A_i)_{i=1..n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ et } |a_i| < 1, |b_i| < 1 \right\} < \infty \quad (2.45)$$

Soit B un borélien fixe et considérons la mesure complexe définie par l'application, $F_B : A \mapsto F_B(A) = F(A, B)$. D'après (2.62) la mesure complexe F_B est à variation bornée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme dans Rao [90], nous définissons, au sens de Dunford et Schwartz [37], l'intégrale d'une fonction bornée f par rapport à la mesure F_B , par :

$$\tilde{I}_1(f, B) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) F_B(d\lambda). \quad (2.46)$$

Soit maintenant f une fonction bornée et considérons l'application $B \mapsto \tilde{I}_1(f, B)$ qui est également une mesure complexe à variations bornées dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nous définissons, toujours au sens de Dunford Schwartz, l'intégrale d'une fonction mesurable bornée g par rapport à cette mesure par :

$$I_1(f, g) \triangleq \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \tilde{I}_1(f, d\lambda).$$

De la même manière, en commençant par l'intégrale par rapport à la mesure complexe $\tilde{F}_A(B) = F(A, B)$ où A est un borélien fixe, nous pouvons construire une intégrale $I_2(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \tilde{I}_2(d\lambda, g)$ avec $\tilde{I}_2(A, g) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \tilde{F}_A(d\lambda)$. Notons qu'en général ces deux intégrales ne sont pas égales (voir contre exemple dans Morse and Transue [83]).

Définition 2.2.2. On dit que le couple (f, g) est intégrable, au sens de Morse-Transue [83] (*M-T intégrable*) si $I_1(f, g) = I_2(f, g)$. Dans ce cas leur valeur commune sera notée par :

$$I(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) g(\lambda') F(d\lambda, d\lambda'). \quad (2.47)$$

Comme mentionné par Rao [90], il n'est pas facile d'identifier la classe de toutes les fonctions M-T intégrables. Pour simplifier, nous nous intéressons à une classe de fonctions particulières que nous construisons de la manière suivante :

Considérons l'application $\nu : A \mapsto \nu(A) = \mathbb{E}(v(d\xi, A))$ où $v(d\xi, A)$ est la variation totale de la mesure aléatoire $d\xi$. Elle est définie dans Dunford et Schwartz [[37] , p. 97], pour tout borélien A , par :

$$v(d\xi, A) = \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} |d\xi(A_i)|, (A_i)_{i \in I} \text{ partition de } A \right\} \quad (2.48)$$

D'après Dunford et Schwartz [37], la variation totale $v(d\xi, \cdot)$ est une mesure aléatoire positive. L'application espérance est linéaire et continue, nous déduisons donc que ν est aussi une mesure positive. Comme $d\xi$ est à variation bornée alors ν est bornée. Par rapport à la mesure ν , nous considérons la norme de $L_1(\nu)$ d'une fonction complexe f définie par, $N(f) = \int_{\mathbb{R}} |f| d\nu$. Notons par $\Lambda_\alpha(d\xi)$ la complétion, par rapport à la norme N , de l'ensemble quotient (par rapport à la relation d'équivalence "égalité ν -presque partout") des fonctions complexes étagées à support compact définies sur \mathbb{R} . Nous montrons que les fonctions bornées¹¹ de la classe $\Lambda_\alpha(d\xi)$ sont M-T intégrables par rapport à F . D'abord pour deux fonctions étagées $f = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^m g_j \mathbb{1}_{B_j}$, il est clair que :

$$I_1(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_i g_j F(A_i, B_j) = I_2(f, g) \quad (2.49)$$

Ainsi, les couples des fonctions étagées à support compact de \mathbb{R} sont M-T intégrables. Pour généraliser ce résultat à tous les couples de fonctions bornées de $\Lambda_\alpha(d\xi)$ nous introduisons la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Supposons $d\xi$ vérifie la condition (O) et qu'il est à variations bornées, alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nous avons, $\|d\xi(A)\|_\alpha \leq \Psi_\alpha(1) \cdot \nu(A)$ avec $\Psi_\alpha(p)$ est égale à $\frac{1}{\mathcal{S}_\alpha(p)}$ quand ξ réel et égale à $\frac{1}{\tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p)}$ dans le cas complexe. les quantités $\mathcal{S}_\alpha(p)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p)$ sont données dans la proposition 1.4.3*
2. *Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixe. Pour tout Borélien A tel que $\nu(A) = 0$ alors la variation totale de la mesure F_B en A est nulle c'est-à-dire $v(F_B, A) = 0$. Ce résultat est vrai aussi pour $\tilde{F}_A(B)$ et B fixé.*

¹¹L'importance du cas borné provient de l'utilité, du cas particulier très important, des processus harmonisables (c'est-à-dire si $f(t, \lambda) = e^{t\lambda}$).

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixe, alors pour toute fonction bornée $f \in \Lambda_\alpha(d\xi)$ nous avons :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f dF_B \right| \leq \Psi_\alpha(1) \cdot \|d\xi(B)\|_\alpha^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |f| d\nu \quad (2.50)$$

4. Soit $f \in \Lambda_\alpha(d\xi)$ fixe et posons $G(B) = \tilde{I}(f, B)$. Nous avons l'implication suivante :
 $(\nu(B) = 0 \text{ entraîne } v(G, B) = 0)$.

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, puisque $d\xi(A)$ est une variable réelle (complexe) symétrique α -stable alors d'après la proposition 1.4.3 du premier chapitre, nous avons l'égalité :
 $\|d\xi(A)\|_\alpha^p = \Psi_\alpha(p) \cdot \mathbb{E}|d\xi(A)|^p$. D'après la définition de la variation totale, définie dans (2.48), il est facile de voir que $|d\xi(A)| \leq v(d\xi, A)$. Par conséquent, en prenant $p = 1$, nous avons :

$$\|d\xi(A)\|_\alpha = \Psi_\alpha(1) \mathbb{E}|d\xi(A)| \leq \Psi_\alpha(1) \mathbb{E}(v(d\xi, A)) = \Psi_\alpha(1) \nu(A) \quad (2.51)$$

2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors par définition de la variation totale de la mesure complexe F_B définie dans (2.48) (voir Dunford et Schwartz [37]) et en remplaçant F_B par son expression nous avons :

$$\begin{aligned} v(F_B, A) &= \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} |F_B(A_i)|, (A_i)_{i \in I} \text{ partition de } A \right\} \\ &= \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} |[d\xi(A_i), d\xi(B)]_\alpha|, (A_i)_{i \in I} \text{ partition de } A \right\}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.4.2 et (2.51) nous déduisons que,

$$\begin{aligned} v(F_B, A) &\leq \|d\xi(B)\|_\alpha^{\alpha-1} \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} \|d\xi(A_i)\|_\alpha, (A_i)_{i \in I} \text{ partition de } A \right\} \\ &\leq \Psi_\alpha(1) \|d\xi(B)\|_\alpha^{\alpha-1} \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} \nu(A_i), (A_i)_{i \in I} \text{ partition de } A \right\} \\ &\leq \Psi_\alpha(1) \|d\xi(B)\|_\alpha^{\alpha-1} \nu(A) \end{aligned}$$

Par suite, si $\nu(A) = 0$ alors la variation totale de la mesure F_B en A est nulle c'est-à-dire que $v(F_B, A) = 0$.

3. D'abord commençons par montrer que l'inégalité (2.50) est vraie pour les fonctions étagées

de \mathbb{R} . En effet, soit f une fonction complexe définie par $f = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{1}_{A_i}$, alors :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}} f dF_B \right| &= \left| \sum_i^n f_i F_B(A_i) \right| = \left| \sum_i^n f_i [d\xi(A_i), d\xi(B)]_{\alpha} \right| = \left| \left[\sum_i^n f_i d\xi(A_i), d\xi(B) \right]_{\alpha} \right|, \\
 &\leq \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \left\| \sum_i^n f_i d\xi(A_i) \right\|_{\alpha}, \text{ (en utilisant (1.32))} \\
 &= \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \cdot \mathbb{E} \left| \sum_i^n f_i d\xi(A_i) \right|, \\
 &\leq \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \sum_i^n |f_i| \cdot \mathbb{E} |d\xi(A_i)|. \\
 &\leq \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \sum_i^n |f_i| \cdot \mathbb{E} (v(d\xi, A_i)), \text{ en utilisant (2.51)} \\
 &= \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |f| d\nu.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Si maintenant f est une fonction bornée de $\Lambda_{\alpha}(\xi)$, alors il existe une suite de fonctions étagées f_n telles que $\int |f_n - f| d\nu$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. D'abord la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n dF_B)_n$ est convergente car elle est de Cauchy. En effet, d'après l'inégalité (2.52), pour tous entiers m et n ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n dF_B - \int_{\mathbb{R}} f_m dF_B \right| \leq \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_m| d\nu \tag{2.53}$$

D'un autre côté, comme $(f_n)_n$ converge vers f dans $L_1(\nu)$ on peut donc extraire une sous suite $(f_{n_k})_k$ qui converge vers f ν -presque partout. Cela veut dire qu'il existe un borélien $A \in B(\mathbb{R})$ tel que $\nu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ et $f_{n_k} \mathbb{1}_A$ converge simplement vers $f \cdot \mathbb{1}_A$ quand k tend vers l'infini. En utilisant le résultat 2. de cette proposition et le fait que $\nu(\mathbb{R} \setminus A) = 0$ nous déduisons que $v(F_B, \mathbb{R} \setminus A) = 0$, ce qui implique que la sous suite $(f_{n_k})_k$ converge $v(F_B, \cdot)$ -presque partout vers f . Les fonctions f_{n_k} et la mesure $v(F_B, \cdot)$ étant bornées, par application du théorème de la convergence dominée dans le cas de l'intégrale de Dunford-Schwartz voir Dunford Schwartz [[37], p.151], nous déduisons que la sous suite $(\int_{\mathbb{R}} f_{n_k} dF_B)_k$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f dF_B$. Par unicité de la limite nous déduisons que la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n dF_B)_n$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f dF_B$. Finalement, en utilisant (2.52) nous avons

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n dF_B \right| \leq \Psi_{\alpha}(1) \|d\xi(B)\|_{\alpha}^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\nu \tag{2.54}$$

L'inégalité (2.50) s'obtient par passage à la limite dans (2.54).

4. Soit $f \in \Lambda_\alpha(d\xi)$ fixé. Par définition de la variation totale de G , pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous avons :

$$\begin{aligned} v(G, B) &= \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} |G(B_i)|, (B_i)_{i \in I} \text{ partition de } B \right\} \\ &= \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} \left| \int_{\mathbb{R}} f dF_{B_i} \right|, (B_i)_{i \in I} \text{ partition de } B \right\} \\ &\leq \Psi_\alpha(1) \cdot \int_{\mathbb{R}} |f| d\nu \cdot \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} \|d\xi(B_i)\|_\alpha^{\alpha-1}, (B_i)_{i \in I} \text{ partition de } B \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

En utilisant l'inégalité (2.51) dans (2.55) nous déduisons que :

$$v(G, B) \leq (\Psi_\alpha(1))^\alpha \cdot \int_{\mathbb{R}} |f| d\nu \cdot \sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} (\nu(B_i))^{\alpha-1}, (B_i)_{i \in I} \text{ partition de } B \right\} \quad (2.56)$$

Si $\nu(B) = 0$ alors pour tout I fini et pour tout partition $(B_i)_{i \in I}$ de B , on a $B_i \subset B$ donc $\nu(B_i) = 0$ ainsi $\sup_{I \text{ fini}} \left\{ \sum_{i \in I} |\nu(B_i)|^{\alpha-1}, (B_i)_{i \in I} \text{ partition de } B \right\} = 0$ ce qui implique que $v(G, B) = 0$.

□

L'importance de la dernière proposition réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir une représentation intégrale au sens de Morse et Transue de la fonction de covariation tout comme dans la cas de la covariance des processus du second ordre donnée dans (5). Cette représentation joue un rôle fondamental dans notre thèse car elle constitue le point de départ de tous les travaux entrepris dans les chapitres 3 et 4. Elle permet également de classifier les processus symétriques α -stables selon la structure de la bimesure F .

2.2.2 Représentation spectrale de la fonction de covariation

Proposition 2.2.2. Soient f et g deux fonctions bornées de $\Lambda_\alpha(d\xi)$. La covariation des deux intégrales stochastiques $\int_{\mathbb{R}} f d\xi$ et $\int_{\mathbb{R}} g d\xi$ est donnée par :

$$\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g d\xi \right]_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) (g(\lambda'))^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda'). \quad (2.57)$$

Démonstration. Soient f et g deux fonctions bornées de $\Lambda_\alpha(d\xi)$ et $f_n = \sum_i f_i^n \mathbb{1}_{A_i^n}$ et $g_n = \sum_j g_j^n \mathbb{1}_{B_j^n}$ deux suites de fonctions étagées de $\Lambda_\alpha(d\xi)$ telles que $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\nu$ et $\int_{\mathbb{R}} |g_n - g| d\nu$

convergent vers 0. La relation (2.57) est vraie pour les suites de fonctions étagées $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$. En effet, soient m et n deux entiers alors,

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} f_n d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} &= \left[\sum_i f_i^n d\xi(A_i^n), \sum_j g_j^m d\xi(B_j^m) \right]_{\alpha} \\ &= \sum_i f_i^n \left[d\xi(A_i^n), \sum_j g_j^m d\xi(B_j^m) \right]_{\alpha} \end{aligned}$$

Les boréliens $(B_j^m)_j$ sont deux à deux disjoints et comme $d\xi$ vérifie la condition (O) nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} f_n d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} &= \sum_i \sum_j f_i^n (g_j^m)^{\langle \alpha-1 \rangle} [d\xi(A_i^n), d\xi(B_j^m)]_{\alpha} \\ &= \sum_i \sum_j f_i^n (g_j^m)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_i^n, B_j^m) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_n(\lambda) (g_m(\lambda'))^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda') \end{aligned} \quad (2.58)$$

Le résultat (2.58) reste toujours vrai pour f et g quelconques de $\Lambda_{\alpha}(d\xi)$. D'abord remarquons que :

$$\sum_i \sum_j f_i^n (g_j^m)^{\langle \alpha-1 \rangle} [d\xi(A_i^n), d\xi(B_j^m)]_{\alpha} = \sum_j (g_j^m)^{\langle \alpha-1 \rangle} \int f_n(\lambda) F_{B_j^m}(d\lambda)$$

D'une part pour m fixé, en utilisant le même raisonnement que dans la démonstration de l'assertion 3. de la proposition 2.2.1, nous avons : $\int f_n(\lambda) F_{B_j^m}(d\lambda)$ converge vers $\int f(\lambda) F_{B_j^m}(d\lambda)$.

D'autre part, nous avons l'inégalité,

$$\begin{aligned} \left| \left[\int_{\mathbb{R}} f_n d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} - \left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} \right| &= \left| \left[\int_{\mathbb{R}} f_n - f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} \right| \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} f_n - f d\xi \right\|_{\alpha} \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha-1} \\ &\leq \Psi_{\alpha}(1) \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha-1} \int |f_n - f| d\nu \end{aligned}$$

Comme f_n converge vers f dans $L^1(\nu)$, nous déduisons que $\left[\int_{\mathbb{R}} f_n d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha}$ converge vers $\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha}$. Par conséquent en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité (2.58) nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} &= \sum_j (g_j^m)^{\langle \alpha-1 \rangle} \int f(\lambda) F_{B_j^m}(d\lambda) \\ &= \int (g_m(\lambda'))^{\langle \alpha-1 \rangle} G(d\lambda') \end{aligned} \quad (2.59)$$

où la mesure G est définie dans l'assertion 4. de la proposition 2.2.1. Comme $(g_m)_m$ converge vers g dans $L_1(\nu)$ on peut extraire une sous suite $(g_{m_k})_k$ de (g_m) qui converge vers g (ν -presque partout). Par conséquent, par application de l'assertion 4. de la proposition 2.2.1, nous avons, $(g_m(\lambda'))^{<\alpha-1>}$ converge vers $(g(\lambda'))^{<\alpha-1>}$ ($\nu(G, \cdot)$ -presque partout). Finalement, comme G est à variations bornées, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue assure la convergence de $\int (g_m(\lambda'))^{<\alpha-1>} G(d\lambda')$ vers $\int (g(\lambda'))^{<\alpha-1>} G(d\lambda')$. De la même manière que pour (f_n) ,

$$\begin{aligned} \left| \left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha} - \left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g d\xi \right]_{\alpha} \right| &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} f d\xi \right\|_{\alpha} \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} g_m - g d\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha-1} \\ &\leq \Psi_{\alpha}(\alpha-1) \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} f d\xi \right\|_{\alpha} \left(\int |g_m - g| d\nu \right)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Comme (g_m) converge dans $L^1(\nu)$ vers g alors la covariation, $\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g_m d\xi \right]_{\alpha}$ converge vers $\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g d\xi \right]_{\alpha}$. Finalement en faisant tendre m vers l'infini dans l'égalité (2.59) nous obtenons,

$$\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g d\xi \right]_{\alpha} = \int (g(\lambda'))^{<\alpha-1>} G_f(d\lambda') = I_1(f, g). \quad (2.60)$$

Le même raisonnement sur l'intégrale I_2 nous permet de montrer que $\left[\int_{\mathbb{R}} f d\xi, \int_{\mathbb{R}} g d\xi \right]_{\alpha} = I_2(f, g)$. En conclusion nous avons démontré que le couple (f, g) est M-T intégrable et nous avons l'égalité (2.57); ce qui achève la démonstration de cette proposition. \square

Ce théorème nous permet de caractériser les processus α -stables, représentés par l'intégrale (2.1) où $d\xi$ est à variations bornées et vérifiant la condition (O), par la bimesure F . Contrairement à la mesure spectrale Γ qui figure dans la fonction caractéristique donnée dans (2.3), cette bimesure est la même pour toutes les variables aléatoires du processus.

Proposition 2.2.3. *Supposons que ξ est un processus symétrique α -stable réel ou complexe isotrope. Alors la bimesure F définie dans (2.42) est l'unique bimesure caractérisant X et vérifiant la représentation (2.57).*

Démonstration. Soient A et B deux boréliens quelconques de \mathbb{R} et supposons qu'il existe une autre bimesure F' qui vérifie (2.57). En particulier pour $f = \mathbb{1}_A$ et $g = \mathbb{1}_B$ nous avons :

$$[\xi(A), \xi(B)]_{\alpha} = \int \int \mathbb{1}_A(\lambda) \mathbb{1}_B(\lambda') F(d\lambda, d\lambda') = \int \int \mathbb{1}_A(\lambda) \mathbb{1}_B(\lambda') F'(d\lambda, d\lambda')$$

ce qui implique que $F(A, B) = F'(A, B)$ d'où l'unicité de F .

Soient maintenant t_1, t_2, \dots, t_n une famille finie de réels. Montrons que la fonction caractéristique du vecteur aléatoire SaS , $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est caractérisée par la bimesure F .

Cas réel : Par définition de la fonction caractéristique d'un vecteur SaS réel nous avons,

$$\begin{aligned} \Phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \Phi_{\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}}(1) \\ &= \exp\{-\|\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}\|_\alpha^\alpha\} \\ &= \exp\{-[\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}, \theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}]_\alpha\} \end{aligned}$$

En remplaçant X_t par son expression donnée dans (2.1), il est facile de voir que,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \theta_i X_{t_i}, \sum_{i=1}^n \theta_i X_{t_i} \right]_\alpha &= \left[\sum_{i=1}^n \theta_i \int f(t_i, \lambda) d\xi(\lambda), \sum_{i=1}^n \theta_i \int f(t_i, \lambda) d\xi(\lambda) \right]_\alpha \\ &= \left[\int \sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda) d\xi(\lambda), \int \sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda) d\xi(\lambda) \right]_\alpha \end{aligned}$$

Comme les $f(t_i, \cdot)$ sont des fonctions bornées de $\Lambda_\alpha(d\xi)$ il en est de même pour la somme $\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda)$. D'après (2.57) de la proposition 2.2.2 nous avons :

$$\left[\sum_{i=1}^n \theta_i X_{t_i}, \sum_{i=1}^n \theta_i X_{t_i} \right]_\alpha = \int \int \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda) \right) \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda') \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda')$$

ce qui implique que,

$$\Phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp \left\{ - \int \int \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda) \right) \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda') \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda') \right\} \quad (2.61)$$

il est clair que la fonction caractéristique est exprimée en terme des fonctions déterministes $f(t, \cdot)$ et de l'unique bimesure F .

Cas Complexe isotrope : On sait que les variables aléatoires symétriques α -stables et isotropes sont de distributions paramétriques. Leur fonction caractéristique est entièrement déterminée par la norme $\|\cdot\|_\alpha$. Donc par définition de la fonction caractéristique du vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ nous avons

$$\begin{aligned} \Phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \Phi_{\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}}(1) \\ &= \exp\{-c_0 \|\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}\|_\alpha^\alpha\} \\ &= \exp\{-c_0 [\theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}, \theta_1 X_{t_1} + \dots + \theta_n X_{t_n}]_\alpha\} \end{aligned}$$

où c_0 est définie dans la proposition 1.3.5. De la même manière que dans le cas réel nous trouvons :

$$\Phi_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp \left\{ -c_0 \cdot \int \int \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda) \right) \left(\sum_{i=1}^n \theta_i f(t_i, \lambda') \right)^{<\alpha-1>} F(d\lambda, d\lambda') \right\}$$

Ce qui achève la démonstration de cette proposition. \square

2.3 Cas des processus harmonisables

Nous donnons la définition d'un processus harmonisable.

Définition 2.3.1. *Un processus stochastique symétrique α -stable $X = (X_t, t \in \mathbb{R})$ est dit harmonisable si et seulement si il admet une représentation intégrale stochastique de la forme :*

$$X_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\xi(\lambda)$$

où ξ est un processus SoS vérifiant les conditions (I) et (II) données dans la page 57.

2.3.1 Classification

Dans cette partie nous nous intéressons à un processus (SoS) harmonisable X ayant la représentation intégrale (2.1) avec ($f(t, \lambda) = e^{it\lambda}$) et $d\xi$ vérifiant la condition(O). Nous supposons aussi que la bimesure F est à variation finie au sens de Vitali c'est-à-dire :

$$\|VF\|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \triangleq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |F(A_i, B_j)|, \text{ tels que, } (A_i \times B_j)_{i,j=1..n} \text{ sont disjoints} \right\} < \infty. \quad (2.62)$$

La variation finie au sens de Vitali entraîne la variation finie au sens de (2.45).

Remarque 2.3.1. *Si une bimesure F est à variation finie au sens de Vitali alors, d'après Horowitz [49] ou Klavànek [62], F est extensible en une mesure sur la σ -algèbre engendrée par, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Définition 2.3.2. *Considérons la fonction de covariation du processus X définie par, $C : (s, t) \mapsto [X_s, X_t]_\alpha$. Supposons que C est continue par rapport à ses deux composantes.*

- Nous disons que X est stationnaire en covariation si la fonction $C(s, t)$ ne dépend que de la différence $s - t$.
- Le processus X est périodiquement covarié de période $T > 0$ si $C(s + T, t + T) = C(s, t)$ pour tous réels s et t .

La périodicité de la fonction de covariation C est équivalente à la périodicité de l'application $t \longrightarrow C(t, t + \tau)$ pour tout τ fixe. Si en plus C est intégrable alors en utilisant la décomposition en séries de Fourier d'une fonction périodique, nous déduisons que pour tout réel τ fixé nous avons

$$C(t, t + \tau) \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=-i}^{k=i} a_k(\tau) e^{i \frac{2\pi k}{T} t}, \quad (2.63)$$

où les $a_k(\tau)$ sont les coefficients de Fourier d'ordre k donnés par :

$$a_k(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T C(t, t + \tau) \cdot e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt. \quad (2.64)$$

Si de plus la fonction C est de carrée intégrable cette décomposition peut être donnée par la somme

$$C(t, t + \tau) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_k(\tau) e^{i \frac{2\pi k}{T} t}. \quad (2.65)$$

La série du terme de droite converge presque partout et donc (\sim veut dire égalité presque partout). A noter que la décomposition (2.65) peut être obtenue en remplaçant la condition d'intégrabilité de second ordre de la fonction C par le fait que la somme $\sum_k |a_k(\tau)|$ soit finie ou bien que $C(t, t + \tau)$ est Lipschitzienne en τ .

Dans cette partie nous supposons que $C(t, t + \tau)$ admet la décomposition (2.65). Comme dans le travail de Hurd [54], nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que X soit périodiquement covarié ou qu'il soit stationnaire en covariation.

Proposition 2.3.1. 1. *Le processus X est stationnaire en covariation si et seulement si la bimesure F est concentrée sur la diagonale.*

2. *Le processus X est périodiquement covarié de période T si et seulement si F est concentrée sur les droites parallèles à la diagonale c'est-à-dire les droites $(S_k)_k$ définie par, $S_k = \{(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, / \lambda - \lambda' = \frac{2\pi k}{T}\}$.*

Démonstration. Remarquons que le résultat 1. est un cas particulier de 2. donc il suffit de montrer cette dernière assertion. Pour tout τ fixé, en utilisant la représentation (2.57) et le fait que $(e^{it\lambda'})^{\langle \alpha-1 \rangle} = |e^{it\lambda'}|^{\alpha-2} \cdot e^{-it\lambda'} = e^{-it\lambda'}$, nous avons :

$$\begin{aligned} [X_{t+\tau}, X_t]_\alpha &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} F(d\lambda, d\lambda'), \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} \cdot e^{it(\lambda-\lambda')} F(d\lambda, d\lambda'). \end{aligned}$$

D'un autre côté, d'après la périodicité de la fonction de covariation, pour tout $N > 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} [X_{t+\tau}, X_t]_\alpha &= \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N [X_{t+\tau+kT}, X_{t+kT}]_\alpha, \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} \cdot e^{it(\lambda-\lambda')} e^{ikT(\lambda-\lambda')} F(d\lambda, d\lambda'), \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} \cdot e^{it(\lambda-\lambda')} D_N(\lambda, \lambda') F(d\lambda, d\lambda'). \end{aligned}$$

Avec, $D_N(\lambda, \lambda') = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N e^{ikT(\lambda-\lambda')}$. Il s'agit du noyau de Fejer (voir Hurd (1991)). Il est facile de vérifier que :

$$D_N(\lambda, \lambda') = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda - \lambda' = \frac{2\pi k}{T}. \\ \frac{1}{2N+1} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})T(\lambda-\lambda'))}{\sin(T(\lambda-\lambda'))} & \text{si } \lambda - \lambda' \neq \frac{2\pi k}{T}. \end{cases} \quad (2.66)$$

En faisant tendre N vers l'infini dans (2.66), $D_N(\lambda, \lambda')$ converge simplement vers la fonction indicatrice de $S = \cup_{k \in \mathbb{Z}} S_k = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (\lambda, \lambda'), \lambda - \lambda' = \frac{2\pi k}{T} \right\}$. Comme F est à variations bornées donc, en utilisant le théorème de la convergence dominée qui reste toujours vrai dans notre cas, nous avons pour tout t et τ :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} F(d\lambda, d\lambda') = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} \mathbb{1}_S(\lambda, \lambda') F(d\lambda, d\lambda')$$

Par application de la formule d'inversion de la transformée de Fourier nous verrons bien que F est concentré sur $S = \cup_{k \in \mathbb{Z}} S_k$.

Réciproquement, en utilisant le fait que F est concentrée sur S nous avons :

$$\begin{aligned} [X_{t+\tau+T}, X_{t+T}]_\alpha &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} e^{iT(\lambda-\lambda')} F(d\lambda, d\lambda'), \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} e^{iT(\lambda-\lambda')} I \mathbb{1}_S(\lambda, \lambda') F(d\lambda, d\lambda'). \end{aligned}$$

Or pour tout (λ, λ') de S , $T(\lambda - \lambda')$ appartient à $2\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{iT(\lambda-\lambda')} = 1$ par suite :

$$[X_{t+\tau+T}, X_{t+T}]_\alpha = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t+\tau)\lambda} \cdot e^{-it\lambda'} F(d\lambda, d\lambda') = [X_{t+\tau}, X_t]_\alpha,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

2.4 Conclusion et discussion

Pour un processus X ayant la représentation (2.1), la proposition (2.2.2) exprime la fonction de covariation comme une intégrale par rapport à la bimesure F définie dans (2.42). Ce

résultat est semblable à la représentation de Cramer de la covariance d'un processus du second ordre. D'un autre côté, la proposition 2.2.3 montre que sous la condition (O), la bimesure F détermine entièrement les processus stochastiques symétriques α -stables de $\Lambda_\alpha(\Delta\xi)$. Ce résultat se manifeste plus clairement dans les processus harmonisables : d'après la proposition 2.2.2 la fonction de covariation du processus X peut être exprimée comme la transformation de Fourier de F c'est-à-dire que, si les conditions du théorème d'inversion sont vérifiées, le processus harmonisable X peut être entièrement déterminé par sa fonction de covariation. A noter que cette propriété généralise les résultats de Masry et Cambanis [79]. Nous avons discuté également le cas important des processus harmonisables ayant une fonction de covariation périodique.

Afin d'exploiter ces résultats dans les domaines appliqués, une méthode qui permet de générer ces processus à partir de la bimesure F est nécessaire. Dans le chapitre suivant nous donnons une représentation en série de type Lepage des processus (2.1) vérifiant la condition (O).

Chapitre 3

Représentation en séries de type Lepage

Dans les chapitres précédents nous avons traité des processus stochastiques α -stables, à temps continu, représentés comme une intégrale stochastique de la forme (2.1). L'une des difficultés principales de ces processus est qu'ils sont difficiles à manipuler dans les domaines appliqués notamment quand il s'agit de faire des simulations. Actuellement, il existe des techniques simples qui permettent de générer des variables ou des processus α -stables à accroissements indépendants. Par exemple, pour générer des variables aléatoires α -stables, nous citons entre autres le travail [23]. En ce qui concerne les processus stochastiques, Weron [57] a donné des techniques de simulation des processus SaS représentés comme une intégrale stochastique par rapport à un processus de Lévy¹² à accroissements indépendants ; dans Samorodnitsky et Taqqu [101], nous trouvons également des techniques de simulation de ces processus et entre autres les processus auto-similaires. La simplicité de ces techniques provient du fait que l'on connaît la structure de dépendance des processus par rapport auxquels nous intégrons. En effet, dans les cas cités plus haut, le fait que les processus sont à accroissements indépendants rend facile leur simulation. Il suffit de savoir générer des variables aléatoires α -stables indépendantes (par exemple par la méthode de Stuck et Mallows [23]) ce qui permet de simuler des approximations des trajectoires de ces processus, voir [57]. Une autre technique peut être utilisée pour la simulation des processus à accroissements indépendants : il s'agit de la décomposition de ces processus en série de

¹² Il s'agit d'une généralisation des mouvements Browniens utilisés fréquemment dans le cas du second ordre mais les lois gaussiennes sont remplacées par des lois α -stables.

type Lepage¹³. Cette technique a été rappelée pour le cas d'une variable aléatoire $S\alpha S$ dans la proposition 1.2.4. L'importance de la décomposition en série est qu'outre le fait qu'elle fournisse une méthode de simulation des certains processus stochastiques, elle facilite la démonstration de certains résultats théoriques ; ces derniers sont plus compliqués à prouver avec d'autres méthodes voir [101]. Dans [101], cette importante représentation a été démontrée pour les processus de type (2.1) où $d\xi$ est à accroissements indépendants à partir de la mesure de contrôle définie dans (1.40). Cependant, dans le cas des processus qui ne sont pas nécessairement à accroissements indépendants, ces techniques restent inadaptées. Le but de ce chapitre est de généraliser la représentation en série de Lepage au cas général des processus α -stables représentés par l'intégrale stochastique (2.1) ou $d\xi$ n'est pas nécessairement à accroissements indépendants mais vérifiant la condition (O) page 57 donnée dans le chapitre précédent.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Cas où $d\xi$ est à accroissements indépendants

Nous cherchons à donner une représentation en série de type Lepage d'un processus stochastique $X=(X_t, t \in \mathbb{R})$ donné par l'intégrale stochastique :

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \lambda) d\xi(\lambda). \quad (3.1)$$

L'idée de cette représentation consiste à exprimer ce processus en une somme infinie de variables aléatoires faisant intervenir des temps d'arrivée d'un processus de Poisson et la mesure spectrale du processus ξ . Ce résultat a été démontré dans [101] dans le cas où $d\xi$ est à accroissements indépendants. Dans la proposition suivante nous rappelons ce résultat :

Proposition 3.1.1. *Supposons que $d\xi$ est à accroissements indépendants et soit ν sa mesure spectrale (mesure de contrôle) définie dans (1.40). Soit V une variable aléatoire de loi de probabilité $\frac{\nu}{\nu(\mathbb{R})}$ alors si le processus ξ est réel :*

$$(X_t, t \in \mathbb{R}) \stackrel{d}{=} \left((C_\alpha \nu(\mathbb{R}))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} f(t, V_i) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \right). \quad (3.2)$$

¹³ A noter que les séries de Lepage convergent lentement et que la simulation des variables Γ est coûteuse en temps de calcul, c'est pour cela qu'elles ont été déconseillées par plusieurs auteurs comme [57, 101]. Ce problème de lenteur de convergence peut être surmonté par la puissance des moyens de calculs actuels.

Si ξ est complexe alors,

$$(X_t, t \in \mathbb{R}) \stackrel{d}{=} \left((C_{\alpha\nu}(\mathbb{R}))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (S_i^{(1)} + \iota S_i^{(2)}) f(t, V_i) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \right). \quad (3.3)$$

Les suites de variables aléatoires figurant dans les termes de cette somme sont indépendantes les unes des autres et elles sont données par :

- la suite $(\gamma_i)_i$ est formée des variables indépendantes et identiquement distribuées dont la loi conditionnelle par rapport à V est une loi de Rademacher c'est-à-dire pour tout i , $\mathbb{P}(\gamma_i = 1|V_i) = 1 - \mathbb{P}(\gamma_i = -1|V_i) = \frac{1}{2}$.
- Les variables aléatoires Γ_i sont des temps d'arrivée d'un processus de Poisson. Elles suivent une loi gamma de paramètre i . On peut les écrire aussi comme somme de variables aléatoires *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre 1. Elles ne sont ni indépendantes ni identiquement distribuées.
- les variables aléatoires V_i sont des copies aléatoires de V indépendantes et identiquement distribuées.
- $(S_i^{(1)}, S_i^{(2)})_i$ est une famille indépendante de couples aléatoires identiquement distribués de loi uniforme sur le cercle unité.

La démonstration de ce résultat est détaillée dans Samorodnitsky et Taqqu [[101], p 149]. La généralisation au cas complexe est également traitée dans le même ouvrage page 287.

L'importance de cette représentation en série sur le plan théorique, est qu'elle permet de simplifier la démonstration de plusieurs résultats concernant les lois et processus α -stables. Sur le plan pratique, elle peut être exploitée dans le domaine des simulations et l'approximation de certaines intégrales stochastiques, notamment dans le cas où les méthodes de simulations rapides ne sont pas valables. Par exemple, dans le cas des processus traités dans les chapitre 2, l'utilisation des méthodes classiques est quasiment impossible surtout quand il s'agit de processus dont la structure de dépendance n'est pas explicite. Dans ce cas, une représentation en série de type Lepage peut être une bonne alternative pour générer de telles intégrales stochastiques.

3.1.2 Position du problème

La question à laquelle nous allons répondre dans ce chapitre est : comment représenter le processus (3.1) quand $d\xi$ n'est pas à accroissements indépendants mais qu'il vérifie la condition (O) ? Nous avons montré dans le deuxième chapitre que sous la condition (O), la loi du processus

X est déterminée par la bimesure F . Pour répondre à notre question, il suffit de donner une méthode qui permet de construire une série de type Lepage et qui converge vers un processus SaS caractérisé par une bimesure donnée et qui vérifie la condition (O).

Considérons maintenant F une bimesure vérifiant les conditions données dans (2.44). Nous voulons construire un processus stochastique SaS caractérisé par cette bimesure F . Pour atteindre cet objectif, nous procédons par induction : nous commençons d'abord par le cas simple d'une fonction indicatrice d'un borélien A , c'est-à-dire prendre $d\xi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_A d\xi$. Nous cherchons donc à écrire $d\xi(A)$ comme,

$$d\xi(A) = (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi_A^i \quad (3.4)$$

où (φ_A^i) sont des variables i.i.d. de moment d'ordre α fini et dépendantes de A . Les variables $(\gamma_i)_i$ et $(\Gamma_i)_i$ ne dépendent pas de A . En utilisant la proposition 1.2.5, pour un borélien A fixé, la variable aléatoire $d\xi(A)$ est SaS de paramètre d'échelle égal à $\mathbb{E}|\varphi_A|^\alpha$. Plus généralement, pour tous boréliens A_1, \dots, A_n le vecteur aléatoire $d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n)$ est symétrique α -stable. En effet, pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$, la combinaison linéaire $\theta_1 d\xi(A_1) + \dots + \theta_n d\xi(A_n)$ est aussi symétrique α -stable car :

$$(C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n \theta_k \xi(A_k) = (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{k=1}^n \theta_k \varphi_{A_k}^i. \quad (3.5)$$

Puisque les φ_{A_k} admettent des moments d'ordre α , alors d'après la proposition 1.2.5, la somme à droite de cette dernière égalité (3.5) converge en loi vers une variable symétrique α -stable de paramètre d'échelle vérifiant :

$$\sigma^\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathbb{E}|\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n}|^\alpha. \quad (3.6)$$

Par application de la proposition 1.3.3, nous déduisons que $(d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n))$ est symétrique α -stable. En particulier, pour tous boréliens A et B , la variable aléatoire $\theta_1 d\xi(A) + \theta_2 d\xi(B)$ est symétrique α -stable de paramètre d'échelle vérifiant, $\sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2) = \mathbb{E}|\theta_1 \varphi_A + \theta_2 \varphi_B|^\alpha$. Comme la covariation de $d\xi(A)$ sur $d\xi(B)$ est donnée par $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma^\alpha(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0, \theta_2=1}$, en dérivant l'égalité (3.6) nous déduisons que :

$$[\xi(A), \xi(B)]_\alpha = \mathbb{E}(\varphi_A \cdot \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle}). \quad (3.7)$$

D'après la proposition 2.2.2, pour qu'un processus $(\int f(t, \lambda) d\xi(\lambda), t \in \mathbb{R})$ soit caractérisé par

une bimesure F , il faut qu'elle vérifie l'égalité suivante :

$$F(A, B) = [d\xi(A), d\xi(B)]_\alpha, \quad (3.8)$$

pour tous boréliens A et B . En d'autres termes il faut que F vérifie :

$$F(A, B) = E(\varphi_A \cdot \varphi_B^{<\alpha-1>}) \quad (3.9)$$

Trouver une décomposition en série de $d\xi(A)$ revient donc à expliciter l'application φ_A . Pour des raisons de compatibilité avec l'additivité de $d\xi(A)$ dans (3.4) et la bi-additivité de F (3.9), cette application doit vérifier les conditions suivantes :

1. **Condition 1** : Pour presque chaque ω , l'application $(A, \omega) \mapsto \varphi_A(\omega)$ est additive c'est-à-dire pour tout borélien A et B disjoints, $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B$ presque sûrement.
2. **Condition 2** : Pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ et pour toute famille de boréliens B_1, \dots, B_n deux à deux disjoints, nous avons la condition d'additivité suivante :

$$\mathbb{E}\left(\varphi_A(\theta_1 \varphi_{B_1} + \dots + \theta_n \varphi_{B_n})^{<\alpha-1>}\right) = \mathbb{E}\left(\varphi_A(\theta_1 \varphi_{B_1})^{<\alpha-1>}\right) + \dots + \mathbb{E}\left(\varphi_A(\theta_n \varphi_{B_n})^{<\alpha-1>}\right). \quad (3.10)$$

3.2 Résultats intermédiaires

Les conditions 1 et 2 données plus haut portent sur les moments fractionnaires des variables aléatoires φ_A . La condition 2 est difficile à vérifier dans la pratique. Dans la proposition suivante nous simplifions cette condition en la réduisant à une condition sur la fonction caractéristique de $\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n}$.

Proposition 3.2.1. *Soient A_1, \dots, A_n des boréliens deux à deux disjoints. Notons par Φ la fonction caractéristique de $(\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n})$ et par $R_i(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathcal{R}e \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(\theta_1, \dots, \theta_n) \right\}$. Dans le cas complexe l'opérateur de dérivée partielle est celui donné dans la proposition 2.1.3. Pour que la condition 2 soit vérifiée, il suffit que les dérivées partielles R_i vérifient :*

$$R_i(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{j=1}^n R_i(0, \dots, 0, \theta_j, 0, \dots, 0) \quad (3.11)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tous réels (ou complexes) $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Démonstration. Pour la démonstration de cette proposition, nous distinguons les deux cas, réel et complexe :

Cas réel : Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, nous utilisons le lemme 2.1.1 puis le théorème de Fubini, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\varphi_{A_i} (\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})^{<\alpha-1>} \right) &= \mathbb{E} \left(\varrho_\alpha \int_0^\infty \varphi_{A_i} \frac{\sin((\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})t)}{t^\alpha} dt \right) \\
 &= \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\mathbb{E}(\varphi_{A_i} \sin((\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})t))}{t^\alpha} dt \\
 &= -\varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}e\{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(\theta_1 t, \dots, \theta_n t)\}}{t^\alpha} dt \\
 &= -\varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{R_i(\theta_1 t, \dots, \theta_n t)}{t^\alpha} dt.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

De la même manière, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\varphi_{A_i} (\theta_j \varphi_{A_j})^{<\alpha-1>} \right) &= \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}e\{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(0, \dots, 0, \theta_j t, 0, \dots, 0)\}}{t^\alpha} dt \\
 &= -\varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{R_i(0, \dots, 0, \theta_j t, 0, \dots, 0)}{t^\alpha} dt.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si l'égalité (3.11) est vérifiée, nous déduisons que $R_i(\theta_1 t, \dots, \theta_n t) = \sum_{j=1}^n R_i(0, \dots, 0, \theta_j t, 0, \dots, 0)$, pour tout $t \in [0, \infty[$. Cela implique que, de (3.12) et (3.13), la condition 2 est bien vérifiée.

Cas complexe : La démonstration se fait de la même manière que dans le cas réel. Mais cette fois, nous utilisons le lemme 2.1.3, puis le théorème de Fubini. En utilisant les notations complexes $t = t_1 + it_2$ et l'opérateur de dérivation défini pour $z = a + ib$ par, $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial a} - i \frac{\partial}{\partial b} \right)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\varphi_{A_i} \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \varphi_{A_k} \right)^{<\alpha-1>} \right) &= \mathbb{E} \left(\rho_\alpha \int \int_{-\infty}^\infty \varphi_{A_i} \frac{\sin(\mathcal{R}e((\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})\bar{t}))}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2 \right) \\
 &= \rho_\alpha \int \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathbb{E}(\varphi_{A_i} \sin(\mathcal{R}e((\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})\bar{t}))}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2 \\
 &= -\rho_\alpha \int \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{R}e\{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(\theta_1 t, \dots, \theta_n t)\}}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2 \\
 &= -\rho_\alpha \int \int_{-\infty}^\infty \frac{R_i(\theta_1 t, \dots, \theta_n t)}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

De la même manière, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\varphi_{A_i} (\theta_j \varphi_{A_j})^{<\alpha-1>} \right) &= \varrho_\alpha \int \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}e\{\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(0, \dots, 0, \theta_j t, 0, \dots, 0)\}}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2 \\
 &= -\rho_\alpha \int \int_0^\infty \frac{R_i(0, \dots, 0, \theta_j t, 0, \dots, 0)}{t^{<\alpha+1>}} dt_1 dt_2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nous déduisons de (3.14) et (3.15) que sous (3.11) la condition 2 est bien vérifiée. \square

La condition (3.11) porte sur la fonction caractéristique des variables aléatoires $\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n}$. Pour simplifier nous traitons cette condition sur un cas particulier.

3.2.1 Etude d'un cas particulier fondamental

Nous considérons l'application φ_A définie pour tout borélien A , par :

$$\varphi_A = \vartheta_1 \mathbb{1}_A(v_1) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_A(v_2) \quad (3.16)$$

avec (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ deux couples indépendants de variables aléatoires. Les variables aléatoires v_1 et v_2 sont réelles et ϑ_1 et ϑ_2 peuvent être complexes.

D'abord, indépendamment du choix des couples (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, l'application φ_A donnée dans (3.16) vérifie la condition 1 d'additivité. En effet, soit A et B deux boréliens disjoints alors,

$$\begin{aligned} \varphi_{A \cup B} &= \vartheta_1 \mathbb{1}_{A \cup B}(v_1) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_{A \cup B}(v_2) \\ &= \vartheta_1 \mathbb{1}_A(v_1) + \vartheta_1 \mathbb{1}_B(v_1) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_A(v_2) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_B(v_2) \\ &= \varphi_A + \varphi_B \end{aligned}$$

Dans la partie suivante, nous donnons les conditions sur les couples aléatoires (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ qui permettent que la deuxième condition soit vérifiée. Nous explicitons la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n})$ où A_1, \dots, A_n sont des boréliens de \mathbb{R} deux à deux disjoints. Cette décomposition permet de vérifier la condition (3.11) sur la fonction caractéristique ainsi trouvée. La structure de l'application φ_A permet de décomposer la fonction caractéristique en une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'au plus deux variables aléatoires. Le lemme suivant explicite ce résultat.

Lemme 3.2.2. *Soient A_1, \dots, A_n des boréliens de \mathbb{R} deux à deux disjoints. Introduisons les notations suivantes :*

$$\begin{aligned} a_{jk} &= \mathbb{P}(v_1 \in A_j, v_2 \in A_k) & , & \quad a_j = \mathbb{P}(v_1 \in A_j, v_2 \in \cap_k A_k^c) \\ a_{..k} &= \mathbb{P}(v_1 \in \cap_j A_j^c, v_2 \in A_k) & , & \quad a_{..} = \mathbb{P}(v_1 \in \cap_j A_j^c, v_2 \in \cap_k A_k^c). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Alors la fonction caractéristique $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de $(\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n})$ est donnée par :

$$\Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(\theta_j, \theta_k) + \sum_{j=1}^n a_j \cdot \Phi_{\vartheta_1}(\theta_j) + \sum_{k=1}^n a_{..k} \Phi_{\vartheta_2}(\theta_k) + a_{..} \quad (3.18)$$

où $\Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}$, Φ_{ϑ_1} et Φ_{ϑ_2} sont respectivement les fonctions caractéristiques du couple $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, de la variable aléatoire ϑ_1 et de la variable aléatoire ϑ_2 .

Démonstration. La démonstration de ce lemme repose sur la structure de la variable aléatoire φ_A donnée dans (3.16) ainsi que l'indépendance des couples (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ nous avons,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \mathbb{E} \left(e^{i(\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})} \right), \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(e^{i(\theta_1 \varphi_{A_1} + \dots + \theta_n \varphi_{A_n})} \middle| (\vartheta_1, \vartheta_2) \right) \right), \\ &\triangleq \mathbb{E} (I(\vartheta_1, \vartheta_2)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Comme les couples de variables aléatoires $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ et (v_1, v_2) sont indépendants, l'espérance conditionnelle $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ est calculée comme une espérance habituelle où $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ sont considérées comme des constantes non aléatoires. Remarquons d'abord qu'avec le fait que les boréliens (A_i) sont deux à deux disjoints, nous pouvons avoir la décomposition suivante :

$$\sum_{j=1}^n \theta_j (\vartheta_1 \mathbb{1}_{A_j}(v_1) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_{A_j}(v_2)) = \begin{cases} \theta_j \vartheta_1 + \theta_k \cdot \vartheta_2 & \text{si } \exists(j, k) / v_1 \in A_j \text{ et } v_2 \in A_k \\ \theta_j \vartheta_1 & \text{si } \exists j / v_1 \in A_j \text{ et } v_2 \in \cap_k A_k^c \\ \theta_k \cdot \vartheta_2 & \text{si } \exists k / v_2 \in A_k \text{ et } v_1 \in \cap_j A_j^c \\ 0 & \text{si } \exists j / v_1 \in \cap_j A_j^c \text{ et } v_2 \in \cap_k A_k^c. \end{cases} \quad (3.20)$$

En utilisant le fait que les boréliens $(A_i)_i$ sont deux à deux disjoints, nous déduisons à partir de cette dernière égalité (3.20) que :

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(v_1 \in A_j, v_2 \in A_k) \cdot \mathbb{E} \left(e^{i(\theta_j \vartheta_1 + \theta_k \cdot \vartheta_2)} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(v_1 \in A_j, v_2 \in \cap_k A_k^c) \cdot \mathbb{E} \left(e^{i(\theta_j \vartheta_1)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(v_1 \in \cap_j A_j^c, v_2 \in A_k) \cdot \mathbb{E} \left(e^{i(\theta_k \vartheta_2)} \right) + \mathbb{P}(v_1 \in \cap_j A_j^c, v_2 \in \cap_k A_k^c). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Par conséquent en utilisant les notations (3.17), nous obtenons,

$$\Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(\theta_j, \theta_k) + \sum_{j=1}^n a_j \cdot \Phi_{\vartheta_1}(\theta_j) + \sum_{k=1}^n a_{\cdot k} \Phi_{\vartheta_2}(\theta_k) + a_{\dots} \quad (3.22)$$

Ceci montre le résultat (3.18) dans le cas réel. Dans le cas complexe, la technique de démonstration reste inchangée. Nous remplaçons seulement la fonction caractéristique donnée dans (3.19) par sa définition dans le cas complexe. \square

D'après ce dernier lemme, l'exemple de φ_A donné dans (3.16) nous permet de réduire la condition (3.11) qui porte sur une fonction à n variables, à une condition sur une fonction à deux variables.

Soient maintenant A_1, \dots, A_n des boréliens de \mathbb{R} deux à deux disjoints. Pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$, la fonction caractéristique $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ de $\varphi_{A_1}, \dots, \varphi_{A_n}$ est donnée par :

$$\Phi(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(\theta_j, \theta_k) + \sum_{j=1}^n a_{j.} \Phi_{\vartheta_1}(\theta_j) + \sum_{k=1}^n a_{.k} \Phi_{\vartheta_2}(\theta_k) + a_{..} \quad (3.23)$$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, alors en dérivant par rapport à θ_i nous avons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_i}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial x}(\theta_i, \theta_k) + a_{ki} \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial y}(\theta_k, \theta_i) \right) + a_{i.} \Phi'_{\vartheta_1}(\theta_i) + a_{.i} \Phi'_{\vartheta_2}(\theta_i) \quad (3.24)$$

où $\frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial y}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à la première et la deuxième composante de $\Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}$. Nous notons $\Psi_1(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{R}e \left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial x}(\theta_1, \theta_2) \right\}$ et $\Psi_2(\theta_1, \theta_2) = \mathcal{R}e \left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial y}(\theta_1, \theta_2) \right\}$. Nous déduisons donc que :

$$R_i(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot \Psi_1(\theta_i, \theta_k) + a_{ki} \cdot \Psi_2(\theta_k, \theta_i)) + a_{i.} \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_1}(\theta_i)\} + a_{.i} \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_2}(\theta_i)\} \quad (3.25)$$

où R_i est défini dans la proposition 3.2.1. Soit maintenant $j \in \{1, \dots, n\}$ et supposons que $\mathbb{E}(\vartheta_1) = \mathbb{E}(\vartheta_2) = 0$, alors pour calculer $R_i(0, \dots, 0, \theta_j, 0, \dots, 0)$, nous distinguons deux cas :

- **Cas où $j \neq i$** : comme $\mathbb{E}(\vartheta_1) = \mathbb{E}(\vartheta_2) = 0$ alors $\Psi_1(0, 0) = \Psi_2(0, 0) = \Phi'_{\vartheta_1}(0) = \Phi'_{\vartheta_2}(0) = 0$. Ce qui implique, en utilisant (3.25), que :

$$\begin{aligned} R_i(0, \dots, 0, \theta_j, 0, \dots, 0) &= \sum_{k \neq j}^n (a_{ik} \cdot \Psi_1(0, 0) + a_{ki} \cdot \Psi_2(0, 0)) + a_{ij} \cdot \Psi_1(0, \theta_j) + a_{ji} \cdot \Psi_2(\theta_j, 0) \\ &= a_{ij} \cdot \Psi_1(0, \theta_j) + a_{ji} \cdot \Psi_2(\theta_j, 0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

- **Cas où $j = i$** : de même nous avons :

$$\begin{aligned} R_i(0, \dots, 0, \theta_i, 0, \dots, 0) &= \sum_{k \neq i}^n (a_{ik} \cdot \Psi_1(\theta_i, 0) + a_{ki} \cdot \Psi_2(0, \theta_i)) + a_{ii} \cdot (\Psi_1(\theta_i, \theta_i) + \Psi_2(\theta_i, \theta_i)) \\ &\quad + a_{i.} \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_1}(\theta_i)\} + a_{.i} \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_2}(\theta_i)\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En utilisant les deux égalités (3.26) et (3.27) nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n R_i(0, \dots, \theta_j, \dots, 0) &= \sum_{j \neq i}^n R_i(0, \dots, \theta_j, \dots, 0) + R_i(0, \dots, \theta_i, \dots, 0) \\
 &= \sum_{j \neq i}^n (a_{ij} \cdot \Psi_1(0, \theta_j) + a_{ji} \cdot \Psi_2(\theta_j, 0)) + \sum_{k \neq i}^n (a_{ik} \cdot \Psi_1(\theta_i, 0) + a_{ki} \cdot \Psi_2(0, \theta_i)) \\
 &\quad + a_{ii}(\Psi_1(\theta_i, \theta_i) + \Psi_2(\theta_i, \theta_i)) + a_i \cdot \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_1}(\theta_i)\} + a_i \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_2}(\theta_i)\} \\
 &= \sum_{k \neq i}^n (a_{ik} \cdot (\Psi_1(\theta_i, 0) + \Psi_1(0, \theta_k)) + a_{ki} \cdot (\Psi_2(\theta_k, 0) + \Psi_2(0, \theta_i))) \\
 &\quad + a_{ii}(\Psi_1(\theta_i, \theta_i) + \Psi_2(\theta_i, \theta_i)) + a_i \cdot \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_1}(\theta_i)\} + a_i \mathcal{R}e\{\Phi'_{\vartheta_2}(\theta_i)\}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nous déduisons, de (3.28) et (3.25), qu'une condition suffisante pour que l'égalité (3.11) soit vérifiée, est de choisir le couple de variables aléatoires $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tel que :

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y) = \Psi_1(x, 0) + \Psi_1(0, y) \\ \Psi_2(x, y) = \Psi_2(x, 0) + \Psi_2(0, y) \end{cases}$$

pour tous x et y tels que $x \neq y$. Nous résumons ce résultat dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.3. *Pour que l'application $\varphi_A = \vartheta_1 \mathbb{1}_A(v_1) + \vartheta_2 \cdot \mathbb{1}_A(v_2)$, définie dans (3.16), vérifie la **condition 2**, il suffit de choisir le couple de variables aléatoires $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tel que $\mathbb{E}(\vartheta_1) = \mathbb{E}(\vartheta_2) = 0$ et que les parties réelles des dérivées partielles Ψ_1 et Ψ_2 de sa fonction caractéristique vérifient :*

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y) = \Psi_1(x, 0) + \Psi_1(0, y) \\ \Psi_2(x, y) = \Psi_2(x, 0) + \Psi_2(0, y) \end{cases} \tag{3.29}$$

et cela pour tout $x \neq y$.

Ce théorème nous montre comment construire l'application φ_A à partir de la bimesure F ; nous détaillons ce résultat dans la partie suivante.

3.2.2 Correspondance entre la bimesure F et l'application φ_A

Supposons que les conditions du théorème 3.2.3 sont vérifiées et considérons deux boréliens A et B disjoints. Nous pouvons calculer l'espérance $\mathbb{E}(\varphi_A \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle})$ à partir de la fonction caractéristique Φ donnée dans (3.18). En effet, si nous utilisons l'égalité (2.5) (ou (2.11) dans le cas

complexe) puis (3.25) nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\varphi_A \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle}) &= \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\mathbb{E}(\varphi_A \sin(t\varphi_B))}{t^\alpha} dt \\
 &= \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} \operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \Phi_{(\varphi_A, \varphi_B)}}{\partial x}(0, t) \right\} dt = \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{R_1(0, t)}{t^\alpha} dt \\
 &= \varrho_\alpha \left(a_{12} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial x}(0, t) \right\}}{t^\alpha} dt + a_{21} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial y}(t, 0) \right\}}{t^\alpha} dt \right) \\
 &= D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) \cdot \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in B) + D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) \cdot \mathbb{P}(v_1 \in B, v_2 \in A),
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

où $D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) \triangleq \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial x}(0, t) \right\}}{t^\alpha} dt = \mathbb{E}(\vartheta_1 \cdot \vartheta_2^{\langle \alpha-1 \rangle})$ et

$$D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) \triangleq \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\left\{ \frac{\partial \Phi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}}{\partial y}(t, 0) \right\}}{t^\alpha} dt = \mathbb{E}(\vartheta_2 \cdot \vartheta_1^{\langle \alpha-1 \rangle}).$$

Dans le cas de deux boréliens disjoints A et B , la bimesure F définie par $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle})$ est entièrement déterminée par la loi du couple de variables aléatoires (v_1, v_2) et des constantes D_1 et D_2 qui dépendent de $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. La bimesure F étant bi-additive, pour la déterminer il suffit de savoir calculer $F(A, B)$ avec A et B disjoints et calculer $F(A, A)$. L'égalité (3.30) nous permet de calculer $F(A, B)$ avec A et B disjoints; pour le calcul de $F(A, A) = \mathbb{E}|\varphi_A|^\alpha$, il est facile de voir que :

$$\mathbb{E}|\varphi_A|^\alpha = \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in A) \cdot \mathbb{E}|\vartheta_1 + \vartheta_2|^\alpha + \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \notin A) \cdot \mathbb{E}|\vartheta_1|^\alpha + \mathbb{P}(v_1 \notin A, v_2 \in A) \cdot \mathbb{E}|\vartheta_2|^\alpha \tag{3.31}$$

Ainsi, les deux équations (3.30) et (3.31) déterminent entièrement la bimesure F définie par $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle})$.

Ce qui est intéressant pour trouver une représentation en série d'un processus SaS, caractérisé par une bimesure F , est de pouvoir construire les couples de variables aléatoires (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ qui vérifient $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A \varphi_B^{\langle \alpha-1 \rangle})$. Pour atteindre cet objectif, considérons un couple $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ fixé et vérifiant les conditions du théorème 3.2.3. Pour simplifier, notons par $D_1 \triangleq D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2)$ et $D_2 \triangleq D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2)$. Soient A et B deux boréliens disjoints. D'après (3.30), nous avons :

$$F(A, B) = D_1 \cdot \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in B) + D_2 \cdot \mathbb{P}(v_1 \in B, v_2 \in A) \tag{3.32}$$

$$F(B, A) = D_1 \cdot \mathbb{P}(v_1 \in B, v_2 \in A) + D_2 \cdot \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in B). \tag{3.33}$$

En calculant la différence $D_1 \cdot F(A, B) - D_2 \cdot F(B, A)$, nous obtenons :

$$D_1 \cdot F(A, B) - D_2 \cdot F(B, A) = ((D_1)^2 - (D_2)^2) \cdot \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in B).$$

Nous en déduisons que pour tous A et B disjoints, si on choisit $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tel que $D_1^2 \neq D_2^2$, nous avons :

$$\mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in B) = \frac{D_1 \cdot F(A, B) - D_2 \cdot F(B, A)}{(D_1)^2 - (D_2)^2}. \quad (3.34)$$

D'autre part, nous utilisons (3.31) et (3.34) en remplaçant B par A^c , nous avons :

$$\begin{aligned} F(A, A) &= \mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in A) \cdot \mathbb{E}|\vartheta_1 + \vartheta_2|^\alpha + \frac{D_1 \cdot F(A, A^c) - D_2 \cdot F(A^c, A)}{(D_1)^2 - (D_2)^2} \mathbb{E}|\vartheta_1|^\alpha \\ &\quad + \frac{D_1 \cdot F(A^c, A) - D_2 \cdot F(A, A^c)}{(D_1)^2 - (D_2)^2} \mathbb{E}|\vartheta_2|^\alpha. \end{aligned}$$

En notant par $\Delta_1 \triangleq \mathbb{E}|\vartheta_1|^\alpha$, $\Delta_2 \triangleq \mathbb{E}|\vartheta_2|^\alpha$ et $\Delta_{1,2} \triangleq \mathbb{E}|\vartheta_1 + \vartheta_2|^\alpha$, nous déduisons que :

$$\mathbb{P}(v_1 \in A, v_2 \in A) = \frac{F(A, A)}{\Delta_{1,2}} - \frac{(D_1 \Delta_1 - D_2 \Delta_2) \cdot F(A, A^c) + (D_2 \Delta_1 - D_1 \Delta_2) \cdot F(A^c, A)}{\Delta_{1,2}((D_1)^2 - (D_2)^2)}. \quad (3.35)$$

La loi du couple de variables aléatoires (v_1, v_2) est entièrement déterminée par les formules (3.34) et (3.35). Nous résumons ce résultat dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.4. *Soit F une bimesure vérifiant la condition (2.44) et soit $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ un couple de variables aléatoires de fonction caractéristique vérifiant les conditions du théorème 3.2.3 et tel que $(D_1)^2 \neq (D_2)^2$, alors il existe un unique couple de variables aléatoires (v_1, v_2) tel que l'application φ_A définie dans (3.16) vérifie les conditions 1 et 2 et que $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A(\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle})$ pour tous boréliens A et B . Dans ce cas, la loi de probabilité du couple (v_1, v_2) est entièrement déterminée par les formules (3.34) et (3.35).*

Cette dernière proposition montre qu'à chaque bimesure F vérifiant l'équation (2.44) correspond une application φ_A définie par la formule (3.16) et telle que $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A(\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle})$ et vérifiant les conditions 1 et 2. Inversement pour chaque φ_A vérifiant les conditions 1 et 2, il existe une bimesure F définie par $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A(\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle})$ et que cette bimesure vérifie la condition (2.44). En résumé, il existe une correspondance surjective $\Lambda : F \mapsto ((v_1, v_2), (\vartheta_1, \vartheta_2))$ définie sur la famille des bimesures F vérifiant (2.44) et à valeur dans l'ensemble des couples de variables aléatoires (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vérifiant les conditions de la proposition 3.2.4. Si on choisit $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ alors la correspondance entre F et (v_1, v_2) est bijective.

3.3 Représentation en série de type Lepage

3.3.1 Représentation de la mesure aléatoire $d\xi(A)$

Soit $\xi = (\xi_t, t \in \mathbb{R})$ un processus stochastique α -stable réel ou complexe isotrope et non nécessairement à accroissements indépendants. Nous considérons la mesure de Lebesgue-Stieljes

$d\xi$ telle qu'elle est définie dans (2.41) et supposons qu'elle vérifie la condition (O). D'après la proposition 2.2.3, nous avons démontré que cette mesure aléatoire est entièrement déterminée par une bimesure F définie par $F(A, B) = [\xi(A), \xi(B)]_\alpha$. Le but de cette partie est de répondre à la question suivante : étant donnée une bimesure F à variation bornée et vérifiant les propriétés (2.44) comment construire une mesure aléatoire $d\xi$ vérifiant la condition (O) et caractérisée par la bimesure F ?

Pour répondre à cette question il suffit de construire deux couples de variables aléatoires (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ tels que F vérifie, $F(A, B) = E[\varphi_A \cdot (\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle}]$ où φ_A est donnée par la formule (3.16) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ vérifient les conditions du théorème (3.2.3) et (v_1, v_2) sont déterminées par la formule (3.34) et (3.35). Dans ce cas la mesure aléatoire $d\xi$ peut être exprimée en terme de série de Lepage donnée dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Soit ξ un processus stochastique $S_\alpha S$ réel ou complexe isotrope et vérifiant la condition (O). Soit F la bimesure définie par (2.42) du chapitre 2. Si ξ est réel, alors la mesure aléatoire $d\xi$ vérifie :*

$$(d\xi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \stackrel{d}{=} (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi_A^i, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right). \quad (3.36)$$

Les (φ_A^i) sont des copies aléatoires i.i.d. de la variable aléatoire φ_A définie dans (3.16) où les couples $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ et (v_1, v_2) sont donnés dans la proposition 3.2.4. Si le processus ξ est complexe isotrope, alors nous avons,

$$(d\xi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \stackrel{d}{=} (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (S_i^{(1)} + \iota S_i^{(2)}) \varphi_A^i, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right). \quad (3.37)$$

Les suites (γ_i) et (Γ_i) sont définies dans la proposition 3.1.1. Les couples $(S_i^{(1)}, S_i^{(2)})_i$ forment une famille de couples aléatoires indépendants et identiquement distribués d'une loi uniforme sur le cercle unité de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Pour un borélien fixé A notons par,

$$\begin{cases} \tilde{S}_A = (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi_A^i & \text{si } \xi \text{ est réel,} \\ \tilde{\tilde{S}}_A = (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot (S_i^{(1)} + \iota S_i^{(2)}) \cdot \varphi_A^i & \text{si } \xi \text{ est complexe isotrope.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Pour montrer l'égalité (3.36) (respectivement (3.37)), il suffit de montrer que pour toute famille finie de Boréliens (A_1, \dots, A_n) , la fonction caractéristique de $(d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n))$ est égale à celle de $(\tilde{S}_{A_1}, \dots, \tilde{S}_{A_n})$ (respectivement $(\tilde{\tilde{S}}_{A_1}, \dots, \tilde{\tilde{S}}_{A_n})$). Comme l'application φ_A vérifie le **condition** 1 d'additivité, il suffit de montrer ce résultat dans le cas où les boréliens (A_1, \dots, A_n) sont deux à deux disjoints. Afin de montrer ce résultat, nous distinguons deux cas :

Cas réel : pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$ nous avons :

$$\Phi_{(\tilde{S}_{A_1}, \dots, \tilde{S}_{A_n})}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \Phi_{\theta_1 \tilde{S}_{A_1} + \dots + \theta_n \tilde{S}_{A_n}} \quad (3.39)$$

En remplaçant \tilde{S}_A par son expression donnée dans (3.38), nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \theta_j \tilde{S}_{A_j} &= (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}^i, \\ &\triangleq (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i, \end{aligned} \quad (3.40)$$

où $W_i = \sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}^i = \sum_{j=1}^n \theta_j (\vartheta_{1,i} \mathbb{1}_{A_j}(v_{1,i}) + \vartheta_{2,i} \mathbb{1}_{A_j}(v_{2,i}))$. Comme les couples $(\vartheta_{1,i}, \vartheta_{2,i})$ et $(v_{1,i}, v_{2,i})$ sont des copies i.i.d de $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ et (v_1, v_2) , nous déduisons que les $(W_i)_i$ sont des variables aléatoires i.i.d. et de moment d'ordre α fini. D'après la proposition 1.2.4, la somme $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} W_i$ converge en loi vers une variable aléatoire SaS de paramètre d'échelle égale à $(E|W_1|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Par conséquent, la fonction caractéristique (3.39) est donnée par :

$$\Phi_{(\tilde{S}_{A_1}, \dots, \tilde{S}_{A_n})}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp\{-\mathbb{E}(|W_1|^\alpha)\} = \exp\left\{-\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}\right|^\alpha\right)\right\} \quad (3.41)$$

Nous calculons l'espérance qui figure dans l'exponentielle. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}\right|^\alpha\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}\right)^{<\alpha-1>}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \theta_j \mathbb{E}\left(\varphi_{A_j} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k \varphi_{A_k}\right)^{<\alpha-1>}\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Comme les φ_A vérifient le **condition** 2, nous déduisons donc que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n \theta_j \varphi_{A_j}\right|^\alpha\right) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \theta_j (\theta_k)^{<\alpha-1>} \mathbb{E}(\varphi_{A_j} \cdot (\varphi_{A_k})^{<\alpha-1>}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \theta_j (\theta_k)^{<\alpha-1>} F(A_j, A_k). \end{aligned} \quad (3.43)$$

En remplaçant l'égalité (3.43) dans (3.41), nous trouvons :

$$\Phi_{(\tilde{S}_{A_1}, \dots, \tilde{S}_{A_n})}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \theta_j(\theta_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_j, A_k)\right\}. \quad (3.44)$$

D'autre part, puisque $(d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n))$ est un vecteur réel symétrique α -stable, sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_{(d\xi(A_1), \dots, d\xi(A_n))}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \exp\left\{-\left\|\sum_{j=1}^n \theta_j d\xi(A_j)\right\|_{\alpha}^{\alpha}\right\} \\ &= \exp\left\{-\left[\sum_{j=1}^n \theta_j d\xi(A_j), \sum_{j=1}^n \theta_j d\xi(A_j)\right]_{\alpha}\right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Comme $d\xi$ vérifie la condition (O) et que les boréliens (A_1, \dots, A_n) sont deux à deux dis-joints, la covariation est additive par rapport à sa deuxième composante. Puisque, $F(A, B) = [\xi(A), \xi(B)]_{\alpha}$, nous déduisons alors que :

$$\begin{aligned} \Phi_{(\xi(A_1), \dots, \xi(A_n))} &= \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \theta_j(\theta_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} [\xi(A_j), \xi(A_k)]_{\alpha}\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \theta_j(\theta_k)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(A_j, A_k)\right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pour finir la démonstration il suffit d'utiliser les égalités (3.44) et (3.46).

Cas Complexe isotrope : La démonstration du cas complexe se fait de la même manière. Nous utilisons seulement la définition de la fonction caractéristique donnée dans (1.26) et la proposition 2.2.3 □

Dans la partie suivante, nous généralisons le résultat de cette dernière proposition aux processus de type (3.1).

3.3.2 Représentation du processus X

Théorème 3.3.2. *Soit F la bimesure définie à partir du processus réel ξ par (2.42). Soient (v_1, v_2) et $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ des couples de variables aléatoires vérifiant les conditions de la proposition 3.2.4, tels que pour tous boréliens A et B nous avons, $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A \cdot (\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle})$, où φ_A est définie dans (3.16). Dans ce cas, il existe une mesure aléatoire $S\alpha S$, $d\xi$ caractérisée par la*

bimesure F , telle que pour toute famille de fonctions $(f(t, \cdot), t \in \mathbb{R})$ de $\Lambda_\alpha(d\xi)$ introduit dans le chapitre 2, le processus stochastique $X = (X_t = \int f(t, \lambda)d\xi, t \in \mathbb{R})$ est représenté en série :

$$(X_t, t \in \mathbb{R}) \stackrel{d}{=} \left((C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f(t, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t, v_2^i)), t \in \mathbb{R} \right). \quad (3.47)$$

Démonstration. Notons par, $S_{t_k} \triangleq (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f(t_k, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t_k, v_2^i))$. La démonstration de ce théorème est inspiré de la démonstration de la proposition 3.3.1. Il suffit de montrer que, pour tout t_1, \dots, t_n , les deux vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ sont symétriques α -stables ayant la même loi de probabilité. En d'autres termes, nous montrons que toutes combinaisons linéaires (avec les mêmes coefficients) des composants de chacun de ces deux vecteurs sont deux variables symétriques α -stables admettant une même fonction caractéristique. Pour atteindre cette objectif, nous procédons en deux étapes :

Étape 1 : cas des fonctions étagées.

Supposons que les fonctions $(f(t_1, \cdot), \dots, f(t_n, \cdot))$ sont des fonctions étagées, c'est-à-dire pour chaque i la fonction $f(t_i, \cdot)$ s'écrit comme, $f(t_i, \cdot) = \sum_{j=1}^d f_j^i \mathbb{1}_{A_j}$ où les A_j sont des boréliens deux à deux disjoints. Pour tous t_1, \dots, t_n , nous avons :

$$\begin{aligned} S_{t_k} &= (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f(t_k, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t_k, v_2^i)) \\ &= (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^d f_j^k (\vartheta_1^i \mathbb{1}_{A_j}(v_1^i) + \vartheta_2^i \mathbb{1}_{A_j}(v_2^i)) \\ &= (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^d f_j^k \varphi_{A_j}^i. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pour tous $\theta_1, \dots, \theta_n$ notons

$$S_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) \triangleq \sum_{k=1}^n \theta_k S_{t_k}. \quad (3.49)$$

En remplaçant S_{t_k} par son expression dans la formule précédente et en échangeant les sommes nous avons :

$$S_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = (C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^d \varphi_{A_j}^i \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right). \quad (3.50)$$

D'après la proposition 1.2.5 la variable aléatoire $S_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est symétrique α -stable de paramètre d'échelle vérifiant, $\sigma^\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^d \varphi_{A_j} \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \right|^\alpha$. Nous utilisons la même technique que celle de (3.43), nous pouvons donc développer cette espérance comme :

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_{j'}^k \right)^{\alpha-1} \mathbb{E}(\varphi_{A_j} \cdot (\varphi_{A_{j'}})^{\alpha-1}) \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_{j'}^k \right)^{\alpha-1} F(A_j, A_{j'}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

En utilisant la définition de l'intégrale, $I \triangleq \int \int \sum_{k=1}^n \theta_k f(t_k, \lambda) \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f(t_k, \lambda') \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda')$ par rapport à la bimesure F nous avons :

$$\begin{aligned} I &= \int \int \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \theta_k f_j^k \mathbb{1}_{A_j}(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \theta_k f_j^k \mathbb{1}_{A_j}(\lambda') \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda') \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_{j'}^k \right)^{\alpha-1} F(A_j, A_{j'}). \end{aligned} \quad (3.52)$$

D'après (3.51) et (3.52), nous déduisons que la variable aléatoire $S_{t_1, \dots, t_n}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est symétrique α -stable de paramètre d'échelle :

$$\sigma(\theta_1, \dots, \theta_n) = \int \int \sum_{k=1}^n f(t_k, \lambda) \left(\sum_{k=1}^n f(t_k, \lambda') \right)^{\langle \alpha-1 \rangle} F(d\lambda, d\lambda'). \quad (3.53)$$

D'autre part, la définition de l'intégrale stochastique par rapport à $d\xi$ définie pour une fonction étagée dans le chapitre 1, donne,

$$\int f(t_i, \lambda) d\xi(\lambda) = \sum_{j=1}^d f_j^i d\xi(A_j). \quad (3.54)$$

Comme les variables aléatoires $d\xi(A_j)$ sont symétriques α -stables, il en est de même pour toute combinaison linéaire des $d\xi(A_j)$. Par conséquent, pour tout $\theta_1, \dots, \theta_n$, la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n \theta_k \int f(t_k, \lambda) d\xi(\lambda)$ est symétrique α -stable. Notons par $\tilde{\sigma}_\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n)$ son paramètre d'échelle. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^\alpha(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k \int f(t_k, \lambda) d\xi(\lambda) \right\|_\alpha^\alpha = \left\| \sum_{k=1}^n \theta_k \sum_{j=1}^d f_j^k d\xi(A_j) \right\|_\alpha^\alpha \\ &= \left[\sum_{j=1}^d d\xi(A_j) \sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k, \sum_{j=1}^d d\xi(A_j) \sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right]_\alpha. \end{aligned} \quad (3.55)$$

La mesure aléatoire $d\xi$ vérifie la condition (O), donc la covariation donnée dans cette dernière égalité (3.55) est additive par rapport à sa deuxième composante. En utilisant le fait que $[d\xi(A_j), d\xi(A_{j'})]_\alpha = F(A_j, A_{j'})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_{j'}^k \right)^{<\alpha-1>} [d\xi(A_j), d\xi(A_{j'})]_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^d \sum_{j'=1}^d \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_j^k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \theta_k f_{j'}^k \right)^{<\alpha-1>} F(A_j, A_{j'}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Cela implique alors que,

$$\tilde{\sigma}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \int \int \sum_{k=1}^n f(t_k, \lambda) \left(\sum_{k=1}^n f(t_k, \lambda') \right)^{<\alpha-1>} F(d\lambda, d\lambda'). \quad (3.57)$$

D'après (3.57) et (3.53), dans le cas des fonctions étagées, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ ont la même distribution.

Etape 2 : Cas général des fonctions de $\Lambda_\alpha(\xi)$

Supposons maintenant que pour tous réels t_1, \dots, t_n , les fonctions $f(t_1, \cdot), \dots, f(t_n, \cdot)$ sont des fonctions de $\Lambda_\alpha(\xi)$. Par définition de la classe $\Lambda_\alpha(\xi)$, il existe une famille de suites de fonctions étagées à support compact, $(f_k^1)_k, \dots, (f_k^n)_k$ telles que chaque suite de fonctions $(f_k^j)_k$ converge dans $L^1(\nu)$ vers $f(t_j, \cdot)$ où ν est définie dans le chapitre 2 par $\nu(A) = \mathbb{E}(v(d\xi, A))$ et $v(d\xi, A)$ est la variation totale de $d\xi$. Nous en déduisons que pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$, la suite de fonctions $(\theta_1 f_k^1 + \dots + \theta_n f_k^n)_k$ converge dans $L^1(\nu)$ vers $\theta_1 f(t_1, \cdot) + \dots + \theta_n f(t_n, \cdot)$.

D'après la proposition 2.2.1, si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^1(\nu)$ alors $\int f_n d\xi$ converge par rapport à la norme de la covariation vers $\int f d\xi$. Cela implique alors, que pour tous réels $\theta_1, \dots, \theta_n$, la suite des intégrales stochastiques $S_\alpha S \int (\theta_1 f_k^1(\lambda) + \dots + \theta_n f_k^n(\lambda)) d\xi(\lambda)$ converge par rapport à la norme de la covariation vers $\int (\theta_1 f(t_1, \lambda) + \dots + \theta_n f(t_n, \lambda)) d\xi(\lambda)$. D'après [101, 16], la convergence par rapport à la norme de la covariation entraîne la convergence en probabilité et par conséquent la convergence en loi. L'égalité en distribution (3.47) est vraie pour les fonctions étagées, donc pour montrer qu'elle est vraie pour les fonctions de $\Lambda_\alpha(\xi)$, il suffit d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\Lambda_\alpha(\xi)$ et $(Y_n)_n$ la suite de variables aléatoires définie par :*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f_n(v_1^i) + \vartheta_2^i f_n(v_2^i)). \quad (3.58)$$

Alors si $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^1(\nu)$, la suite de variables aléatoires $S\alpha S$, (Y_n) converge par rapport à la norme de la covariation vers $\int f d\xi$.

D'après l'étape 1, comme (f_n) est une fonction étagée, nous avons $Y_n = \int f_n d\xi$. Or, (f_n) converge vers f dans $L^1(\nu)$ donc, d'après la proposition 2.2.1, l'intégrale $\int f_n d\xi$ converge vers $\int f d\xi$ par rapport à la norme de la covariation. Pour la démonstration du lemme, il suffit de montrer que la suite $(Y_n)_n$ est convergente par rapport à la norme de la covariation car dans ce cas, par unicité de la limite, sa limite sera $\int f d\xi$. Pour montrer que (Y_n) est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy par rapport à la norme $\|\cdot\|_\alpha$. En effet, soient n et m deux entiers naturels alors,

$$\|Y_{n+m} - Y_n\|_\alpha^\alpha = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i(f_{n+m}(v_1^i) - f_n(v_1^i)) + \vartheta_2^i(f_{n+m}(v_2^i) - f_n(v_2^i))) \right\|_\alpha^\alpha. \quad (3.59)$$

Comme f_n et f_{n+m} sont des fonctions étagées, d'après l'étape 1 nous pouvons écrire :

$$\|Y_{n+m} - Y_n\|_\alpha^\alpha = \left\| \int (f_{n+m}(\lambda) - f_n(\lambda)) d\xi(\lambda) \right\|_\alpha^\alpha. \quad (3.60)$$

Nous en déduisons d'après la première assertion de la proposition 2.2.1 que :

$$\|Y_{n+m} - Y_n\|_\alpha^\alpha \leq \Psi_1(1) \int |f_{n+m}(\lambda) - f_n(\lambda)|^\alpha d\nu. \quad (3.61)$$

Comme f_n converge vers f dans $L^1(\nu)$, elle est de Cauchy dans $L^1(\nu)$. Nous en déduisons que Y_n est de Cauchy dans $\Lambda_\alpha(\xi)$ par rapport à la norme de la covariation. D'où le résultat du lemme. \square

Remarque 3.3.1. *Ce théorème est démontré dans la cas réel mais il reste vrai dans le cas complexe isotrope; la technique de démonstration est la même.*

3.4 Techniques et méthodes de Simulation

Dans cette section, nous exposons une méthode qui permet de générer les trajectoires d'un processus stochastique X représenté par une intégrale stochastique (3.1) où $d\xi$ vérifie la condition (O). Pour atteindre cet objectif nous utilisons la représentation de type Lepage donnée par le théorème 3.3.2. La série (3.47) est donnée comme une somme infinie de termes, donc

il est impossible de la calculer exactement. Pour surmonter cette difficulté, nous donnons une approximation en sommant jusqu'à un certain ordre N . Ainsi nous utiliserons la somme :

$$X_N(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f(t, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t, v_2^i)), \quad (3.62)$$

où N est un entier choisi assez grand de façon à avoir une approximation raisonnable. En effet, il serait plus important de mesurer l'ordre d'erreur de l'approximation en fonction de N . Nous calculons la probabilité pour qu'une approximation $X_N(t)$ ne soit pas proche de la vraie trajectoire $X(t)$. Soient d et ε deux nombres positifs assez petits. Il serait raisonnable d'imposer le test d'arrêt suivant :

$$\mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}, \quad |X_N(t) - X(t)| > d) < \varepsilon. \quad (3.63)$$

Ainsi nous exigeons que la probabilité, pour que la distance entre la valeur exacte $X(t)$ et la valeur approchée $X_N(t)$ dépasse le petit nombre d , soit inférieure au petit seuil ε . Pour cela, nous avons besoin de la loi de probabilité de $|X_n(t) - X(t)|$. En s'inspirant de Weron [57], nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.4.1. *Supposons que le processus X est continu à droite en probabilité alors, pour tous $n > \frac{2}{\alpha}$ et $m > 0$, nous avons :*

$$\mathbb{P}(|X(t) - X_n(t)| > \eta) \leq \frac{H(\alpha, f, t)}{\eta^2} R_n(\alpha) \quad (3.64)$$

avec

$$R_n(\alpha) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{[i - \frac{2}{\alpha}]^{\frac{2}{\alpha}}} \quad \text{et} \quad H(\alpha, f, t) = E|\vartheta_1 f(t, v_1) + \vartheta_2 f(t, v_2)|^2. \quad (3.65)$$

Démonstration. Pour tous $n > \frac{2}{\alpha}$ et $m > 0$, par définition de $X_n(t)$ dans (3.62), nous avons :

$$\begin{aligned} |X_{n+m}(t) - X_n(t)|^2 &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} \gamma_i \Gamma_i^{-\frac{1}{\alpha}} (\vartheta_1^i f(t, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t, v_2^i)) \right|^2 \\ &\triangleq \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} U_i \right|^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Par conséquent nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_{n+m}(t) - X_n(t)|^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=n+1}^{n+m} U_i \cdot U_j \right) \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+m} \sum_{j=n+1}^{n+m} \mathbb{E}(U_i \cdot U_j). \end{aligned} \quad (3.67)$$

On sait que les variables aléatoires $\gamma_i, \Gamma_i, (\vartheta_1^i, \vartheta_2^i)$ et (v_1^i, v_2^i) sont indépendantes, donc pour $i \neq j$ nous avons

$$\mathbb{E}(U_i.U_j) = \mathbb{E}((\gamma_i).\mathbb{E}(\gamma_j)) . \mathbb{E}\left((\Gamma_i\Gamma_j)^{-\frac{1}{\alpha}} . (\vartheta_1^i f(t, v_1^i) + \vartheta_2^i f(t, v_2^i)) . (\vartheta_1^j f(t, v_1^j) + \vartheta_2^j f(t, v_2^j))\right). \quad (3.68)$$

Comme $\mathbb{E}(\gamma_i) = \mathbb{E}(\gamma_j) = 0$, nous déduisons que $\mathbb{E}(U_i.U_j) = 0$; ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_{n+m}(t) - X_n(t)|^2 &= \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{E}(U_i^2) \\ &= \mathbb{E}((\vartheta_1 f(t, v_1) + \vartheta_2 f(t, v_2))^2) . \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{E}[\Gamma_i^{-\frac{2}{\alpha}}] \\ &= H(\alpha, f, t) \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{E}\left(\Gamma_i^{-\frac{2}{\alpha}}\right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

La variable aléatoire Γ_i suit une loi gamma de paramètre i , donc

$$E[\Gamma_i^{-\frac{2}{\alpha}}] = \frac{1}{\Gamma(i)} \int_0^\infty x^{-\frac{2}{\alpha}} . x^{i-1} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(i)} \int_0^\infty x^{i-\frac{2}{\alpha}-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(i - \frac{2}{\alpha})}{\Gamma(i)}. \quad (3.70)$$

En utilisant les propriétés usuelles de la fonction gamma nous pouvons déduire l'inégalité $\frac{\Gamma(i-\frac{2}{\alpha})}{\Gamma(i)} \leq \frac{1}{(i-\frac{2}{\alpha})^{\frac{2}{\alpha}}}$. Par conséquent, en utilisant cette dernière inégalité nous avons,

$$\mathbb{E}|X_{n+m}(t) - X_n(t)|^2 \leq H(\alpha, f, t) R_n(\alpha). \quad (3.71)$$

Pour tout entier m et pour tout réel positif δ , nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(|X(t) - X_n(t)| > \eta) \leq \mathbb{P}(|X_{n+m}(t) - X(t)| > \delta) + \mathbb{P}(|X_{n+m}(t) - X_n(t)| > (\eta - \delta)). \quad (3.72)$$

D'après l'inégalité (3.71) et par application de l'inégalité de Tchebychev sur $\mathbb{P}(|X_{n+m}(t) - X_n(t)| > (\eta - \delta))$ nous avons

$$\mathbb{P}(|X(t) - X_n(t)| > \eta) \leq \mathbb{P}(|X_{n+m}(t) - X(t)| > \delta) + \frac{H(\alpha, f, t) R_n(\alpha)}{(\eta - \delta)^2} \quad (3.73)$$

Comme $X_n(t)$ tend vers $X(t)$ en probabilité donc, en faisant tendre m vers l'infini et δ vers 0, nous aboutissons à l'inégalité (3.64), ce qui achève la démonstration de cette proposition. \square

Comme nous pouvons le remarquer dans l'inégalité (3.64) porte sur une infinité de réels t . Si on veut appliquer le résultat de la proposition 3.4.1, nous serons amenés à majorer par une

somme infinie non dénombrable. En réalité, en utilisant une machine, on ne peut générer qu'une trajectoire discrète du processus stochastique étudié.

Considérons t_1, \dots, t_k des éléments de \mathbb{R} . Si on veut trouver un seuil N qui permet de générer le processus X avec une précision η et un risque ϵ , nous remplaçons le test d'arrêt donné par l'inégalité (3.63) par,

$$\mathbb{P}(\exists t_i \in \{t_1, \dots, t_k\}, \quad |X_N(t_i) - X(t_i)| > \eta) < \epsilon. \quad (3.74)$$

Or,

$$P(\exists t_i \in \{t_1, \dots, t_k\}, \quad |X_N(t_i) - X(t_i)| > \eta) \leq \sum_{i=1}^k P(|X_N(t_i) - X(t_i)| > \eta). \quad (3.75)$$

En utilisant le résultat de la proposition 3.4.1, nous déduisons que :

$$\mathbb{P}(\exists t_i \in \{t_1, \dots, t_k\}, \quad |X_N(t_i) - X(t_i)| > \eta) \leq \frac{R_N(\alpha)}{\eta^2} \cdot \sum_{i=1}^k H(\alpha, f, t_i). \quad (3.76)$$

Cela implique que pour avoir une précision η avec un risque ϵ , il suffit de choisir N de façon que :

$$R_N(\alpha) \leq \frac{\eta^2 \epsilon}{\sum_{i=1}^k H(\alpha, f, t_i)}. \quad (3.77)$$

3.4.1 Simulation d'un exemple de processus vérifiant la condition (O)

Soit $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ un couple de variables aléatoires dont la fonction caractéristique vérifie les conditions de la proposition 3.2.4. Alors, pour chaque bimesure F , il existe un unique couple de variables aléatoires (v_1, v_2) tel que $F(A, B) = \mathbb{E}(\varphi_A \cdot (\varphi_B)^{\langle \alpha-1 \rangle})$. La loi de probabilité de (v_1, v_2) est déterminée par les égalités (3.34) et (3.35). Pour simuler un processus vérifiant la condition (O) et caractérisé par une bimesure F de type (2.44), il suffit de construire un couple de variables aléatoires $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ et (v_1, v_2) vérifiant les conditions de la proposition 4.2.4 puis utiliser la décomposition de Lepage discutée dans la partie précédente. Pour atteindre cet objectif, nous étudions la fonction suivante :

$$\Phi(x, y) = (x \cdot y + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)) \cdot \mathbb{1}_B(x, y). \quad (3.78)$$

Les constituants de la fonction Φ vérifient les conditions :

1. L'ensemble B est un fermé borné de \mathbb{R}^2 symétrique par rapport à l'origine tel que :

- L'intérieur $\overset{\circ}{B}$ de B vérifie : $(x, y) \notin \overset{\circ}{B}$ équivalent au fait que $(x, 0) \notin \overset{\circ}{B}$ et $(0, y) \notin \overset{\circ}{B}$.
- $m_1 \triangleq \max\{t \in \mathbb{R}^+, (0, t) \in B\} \neq \max\{t \in \mathbb{R}^+, (t, 0) \in B\} \triangleq m_2$.
- 2. φ_1 et φ_2 sont deux fonctions paires continues sur \mathbb{R} , telles que :
 - Il existe $\beta > 1$ tel que $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1 + \mathbf{O}(|t|^\beta)$ au voisinage de $t = 0$.
 - Pour tous x, y appartenant au contour ∂B de B nous avons $x.y + \varphi_1(x) + \varphi_2(y) = 0$.
 Cette dernière condition assure la continuité de la fonction Φ .
- 3. Nous supposons également que les deux fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\overset{\circ}{B}$ et que $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$.
- 4. Finalement, pour que Φ soit définie positive, nous supposons que pour tous réels s et t , l'intégrale $\int \int_B (x.y + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)) \cos(s.x + t.y) dx dy$ est positive.

D'après la continuité de Φ , le fait que $\Phi(0, 0) = 1$ et la condition 4, nous déduisons que Φ est une fonction caractéristique d'un couple de variables aléatoires qu'on note $(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Nous montrons que cette fonction caractéristique vérifie également les conditions de la proposition 3.2.4. En effet,

- Les variables ϑ_1 et ϑ_2 sont d'espérance nulle (symétrie ou $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$)
- La fonction caractéristique Φ vérifie (3.29). En effet, il est facile de voir que,

$$\Psi_1(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = (y + \varphi_1'(x)) \cdot \mathbb{1}_B(x, y) \quad \lambda_2 - p.p$$

$$\Psi_2(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = (x + \varphi_2'(y)) \cdot \mathbb{1}_B(x, y) \quad \lambda_2 - p.p$$

D'après la condition 3, $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$, nous déduisons donc que

$$\begin{cases} \Psi_1(x, y) = \Psi_1(x, 0) + \Psi_1(0, y) \\ \Psi_2(x, y) = \Psi_2(x, 0) + \Psi_2(0, y) \end{cases}$$

- Les variables ϑ_1 et ϑ_2 admettent un moment d'ordre α fini. En effet,

$$\mathbb{E}|\vartheta_1|^\alpha = \int_0^\infty \frac{1 - \Phi(t, 0)}{t^{\alpha+1}} dt = \int_0^{m_1} \frac{1 - \varphi_1(t) - \varphi_2(0)}{t^{\alpha+1}} dt < \infty$$

car au voisinage de 0, $1 - \varphi_1(t) - \varphi_2(0) = \mathbf{O}(t^\beta)$ et $\beta > 1$. De la même manière nous montrons que ϑ_2 admet un moment d'ordre α fini.

- Les deux constantes $D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2)$ et $D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2)$ définies dans (3.30) existent et vérifient $(D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2))^2 \neq (D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2))^2$. Elles sont données par :

$$D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) = \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\Psi_1(0, t)}{t^\alpha} dt = \varrho_\alpha \int_0^{m_2} \frac{\Psi_1(0, t)}{t^\alpha} dt = \varrho_\alpha \int_0^{m_2} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt = \frac{\varrho_\alpha}{2 - \alpha} (m_2)^{2-\alpha},$$

de même, nous avons

$$D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2) = \varrho_\alpha \int_0^\infty \frac{\Psi_1(0, t)}{t^\alpha} dt = \varrho_\alpha \int_0^{m_1} \frac{\Psi_1(0, t)}{t^\alpha} dt = \frac{\varrho_\alpha}{2 - \alpha} (m_1)^{2-\alpha},$$

comme $m_1 \neq m_2$, nous déduisons que $(D_1(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2))^2 \neq (D_2(\alpha, \vartheta_1, \vartheta_2))^2$.

Conclusion

Grâce à la représentation en séries de type Lepage introduite dans ce chapitre, nous pouvons construire des processus ou des intégrales stochastiques vérifiant la condition (O). Cela fournit des exemples concrets de ces processus, ainsi qu'une technique permettant de les simuler. Le procédé de cette représentation repose sur la connaissance de la bimesure qui caractérise ces processus. Dans la plupart des situations pratiques, cette bimesure n'est pas toujours explicite ; d'où la nécessité d'introduire des techniques qui permettent de l'estimer. Le chapitre suivant traite cette question.

Chapitre 4

Techniques statistiques d'estimation spectrale

Introduction.

Grâce au progrès spectaculaire des moyens de calcul offerts par l'informatique moderne, l'analyse spectrale des processus a connu récemment une évolution exceptionnelle. Les recherches dans ce domaine sont motivées par le fait que la théorie spectrale fournit un moyen incontournable pour explorer les caractéristiques statistiques des processus stochastiques étudiés. En effet, ces techniques ont prouvé leur efficacité dans l'étude de nombreux domaines non seulement de la nature comme en physique nucléaire et en astronomie mais aussi en traitement du signal et d'image, en économétrie dans la prédiction et l'explication de certains phénomènes liés à la variation des indices de prix...etc. La densité spectrale ou plus généralement la mesure spectrale est l'outil fondamental de l'analyse spectrale. En effet, elle représente la distribution, selon la fréquence, de l'énergie portée par le signal (processus). Ainsi, une valeur maximale de la densité, à une fréquence donnée, explique la présence d'un phénomène se répétant à la même fréquence. Cette fonction, révélatrice de la structure de tous les composants du signal, a suscité la curiosité des probabilistes et statisticiens qui lui ont accordé un grand intérêt. Dans la pratique, il est impossible d'explicitier d'une manière exacte la densité spectrale d'un processus stochastique. C'est pourquoi les chercheurs se sont penchés sur les techniques d'estimation de la densité spectrale à l'aide d'un nombre fini d'observations du processus. Parmi les travaux les plus fondamentaux dans ce domaine, on trouve les travaux pilotes de Parzen [85, 87] dans le cas des processus stationnaires, Anderson [3]...etc. Dans le cas des processus non stationnaires on trouve les travaux

de Gladyshev [46], Priestley [88] Doukhan [34] Lii et Rosenblatt [67]...etc.

Nous nous intéressons à une classe importante de processus stochastiques ayant des moments de second ordre infinis. Il s'agit des processus symétriques α -stables. Ces processus, qui sont infiniment divisibles, trouvent des applications dans divers domaines, entre autres en physique : Doob [33], West et Seshardi [107] ont utilisé ces processus dans la modélisation de l'énergie d'un système à fluctuations très variables. Mandelbrot et Van Ness [75] et Mandelbrot [74] utilisent les processus α stables fractionnaires dans diverses situations économiques, hydrologiques et physiques. Teitler et Rjagopal et Ngai [103] ont appliqué les processus α stables en électricité, mécanique et physique nucléaire. Nikias et Shao [84] utilisent ces processus en traitement du signal et en télécommunications.

La densité spectrale d'un processus S α S harmonisable à temps continu a été définie par Masry et Cambanis [79]. Cette définition a été inspirée par celle des processus de second ordre stationnaires. Les mêmes auteurs ont proposé un estimateur basé sur l'observation continue du processus sur un intervalle de temps. Dans le chapitre 2 nous avons étudié les processus stochastiques (S α S) ayant une fonction de covariation périodique. Nous avons donné une classification selon la structure de la bimesure que nous avons définie dans (2.42). Dans la première partie, nous estimons les coefficients de Fourier de la fonction de covariation. Comme dans le travail de Hurd [55] ou Dehay [29] nous construisons un estimateur asymptotiquement sans biais des densités spectrales correspondant aux coefficients de Fourier. Nous montrons sous une condition de mélange fort que cet estimateur est presque sûrement convergent avec une vitesse de convergence maîtrisable. Dans la deuxième partie, nous construisons un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité de la bimesure F dans le cas des processus harmonisables.

4.1 Résultats préliminaires.

Dans la proposition 1.4.3 et 1.4.4 nous avons donné les moments fractionnaires d'ordre inférieur à α . Nous avons vu également que les moments d'ordre α sont infinis. Dans cette partie nous nous intéressons au comportement asymptotique de ces moments lorsque leur ordre est très proche de α . En d'autres termes, nous voulons savoir comment les moments tendent vers l'infini quand p tend vers α .

4.1.1 Comportement des moments au voisinage de α

Dans cette section, nous démontrons quelques résultats concernant la façon dont les moments d'ordre p tendent vers l'infini quand p croît vers α . Nous donnons par la suite quelques résultats sur la covariation de deux variables SaS. Ces résultats nous seront utiles dans la démonstration de la convergence des estimateurs que nous allons proposer. Rappelons aussi que pour tout $0 < p < 2$, les constantes $\mathcal{S}_\alpha(p)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p)$, données dans (1.34) et (1.35) sont reliées aux constantes ϱ_p et ρ_p données dans (2.5) et (2.11) par les relations suivantes :

$$\mathcal{S}_\alpha(p) = \varrho_p \cdot \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p) = \rho_p \cdot \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha}). \quad (4.1)$$

Lemme 4.1.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires α -stables réelles ou complexes isotropes. Alors quand p croît vers α nous avons les approximations suivantes :*

$$(\alpha - p)\mathbb{E}(|X|^p) - \alpha C_\alpha \|X\|_\alpha^\alpha = \|X\|_\alpha^\alpha (1 + \log(\|X\|_\alpha)). \mathbf{O}(\alpha - p) \quad (4.2)$$

Le terme $\mathbf{O}(\alpha - p)$ ne dépendant pas de X . La covariation entre X et Y vérifie l'égalité suivante :

$$(\alpha - p) \cdot \mathbb{E}(XY^{\langle p-1 \rangle}) - \alpha C_\alpha [X, Y]_\alpha = |[X, Y]_\alpha| \cdot (1 + \log(\|X\|_\alpha)). \mathbf{O}(\alpha - p) \quad (4.3)$$

$$\text{où } C_\alpha = \begin{cases} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} = \varrho_\alpha & \text{dans le cas réel} \\ 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{2+\alpha}{2})}{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})} = \rho_\alpha & \text{dans le cas complexe} \end{cases} .$$

Démonstration. Les moments d'ordre p sont donnés dans (1.34) et (1.35) de la proposition 1.4.3. Le terme qui fait tendre ces moments vers l'infini quand p croît vers α est le terme $\Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})$. En utilisant les propriétés de la fonction Γ donnée dans (1.7) nous avons $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x)$. En appliquant cette dernière propriété avec $x = 1 - \frac{p}{\alpha}$ nous déduisons que pour p assez proche de α nous avons, $\Gamma(1 - \frac{p}{\alpha}) = \frac{\alpha}{\alpha - p} + \mathbf{O}(1)$. Cela implique que si $\alpha - p$ est assez petit et X est réelle, nous avons :

$$(\alpha - p) \cdot \mathcal{S}_\alpha(p) = 2^p \frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} (\alpha + \mathbf{O}(\alpha - p)). \quad (4.4)$$

Si X est complexe isotrope nous avons

$$(\alpha - p) \cdot \tilde{\mathcal{S}}_\alpha(p) = 2^p \frac{\Gamma(\frac{2+p}{2})}{\Gamma(1 - \frac{p}{2})} (\alpha + \mathbf{O}(\alpha - p)). \quad (4.5)$$

En faisant tendre p vers α , nous déduisons de (4.4) et (4.5), que pour $\alpha - p$ assez petit, les deux termes $(\alpha - p) \cdot \mathcal{S}_\alpha(p)$ et $(\alpha - p) \cdot \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha(p)$ peuvent être exprimés comme, $\alpha C_\alpha + \mathbf{O}(\alpha - p)$. Par un développement limité de la fonction exponentielle au voisinage de 0, il est facile de voir que, pour $\alpha - p$ assez petit nous avons, $\|X\|_\alpha^{p-\alpha} = e^{(p-\alpha) \log(\|X\|_\alpha)} = 1 + \log(\|X\|_\alpha) \mathbf{O}(\alpha - p)$. Cela implique que $\|X\|_\alpha^p = \|X\|_\alpha^\alpha \|X\|_\alpha^{p-\alpha} = \|X\|_\alpha^\alpha (1 + \log(\|X\|_\alpha) \mathbf{O}(\alpha - p))$; le terme $\mathbf{O}(\alpha - p)$ ne dépend pas de X . En remplaçant $\mathbb{E}|X|^p$ par sa valeur donnée dans (1.34) ou (1.35) nous aboutissons à l'approximation (4.2).

Pour établir l'approximation (4.3), nous utilisons l'égalité $\mathbb{E}(XY^{<p-1>}) = \frac{[X, Y]_\alpha}{\|Y\|_\alpha^\alpha} \cdot \mathbb{E}|Y|^p$ donnée en (1.36). Puis par application de l'approximation (4.2) à $\frac{|Y|^p}{\|Y\|_\alpha^\alpha} Y$, nous obtenons le résultat. \square

Remarque 4.1.1. *Si la variable aléatoire X est non dégénérée c'est-à-dire $\|X\|_\alpha \neq 0$, nous pouvons démontrer que quand p croît vers α , la variable aléatoire $(\alpha - p)|X|^p$ (resp. $(\alpha - p)X \cdot Y^{p-1}$) ne converge pas dans L^1 vers $\alpha C_\alpha \|X\|_\alpha^\alpha$ (resp. $\alpha C_\alpha [X, Y]_\alpha$). La démonstration de ce résultat est assez simple en procédant par l'absurde. En effet, si nous supposons par exemple que $(\alpha - p)|X|^{\alpha-p}$ converge dans L^1 vers $\alpha C_\alpha \|X\|_\alpha^\alpha$ alors nous pouvons extraire une sous suite qui converge presque sûrement vers $\alpha C_\alpha \|X\|_\alpha^\alpha$. Ceci est en contradiction avec le fait que cette sous suite devrait converger vers 0.*

4.2 Estimation spectrale dans les processus $S_\alpha S$ harmonisables périodiquement covariés

4.2.1 Estimation des coefficients de Fourier et de leur densité spectrale

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un cas particulier de processus harmonisables symétriques α -stables et non stationnaires. Il s'agit des processus périodiquement covariés que nous avons défini dans le deuxième chapitre. Dans la proposition 2.2.3, nous avons montré que la bimesure, caractérisant un processus périodiquement covarié de période T , est concentrée sur les droites parallèles à la première bisectrices de \mathbb{R}^2 et équidistantes de $\frac{2\pi}{T}$. Nous les avons notées $S_k = \{(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \lambda - \lambda' = \frac{2\pi k}{T}\}$. Dans ce cas, la fonction de covariation, donnée par $C(s, t) = \int \int e^{i(\lambda s - \lambda' t)} F(d\lambda, d\lambda')$, peut être décomposée comme :

$$C(s, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{2\pi k}{T} \cdot t} \int \int e^{i\lambda(s-t)} \mathbb{1}_{S_k}(\lambda, \lambda') F(d\lambda, d\lambda'). \quad (4.6)$$

Supposons que la fonction de covariation admet une décomposition de Fourier comme dans (2.65). Par unicité des coefficients de Fourier et en comparant (4.6) et (2.65), nous déduisons que :

$$a_k(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} r_k(d\lambda), \quad (4.7)$$

où r_k est une mesure définie par $r_k(A) = \int_A \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{S_k}(\lambda, \lambda') F(d\lambda, d\lambda')$. Elle peut être complexe ($\mathbb{1}_{S_k}$ étant la fonction indicatrice de S_k). Dans certaines situations pratiques il est important d'identifier les mesures (r_k) ou éventuellement leurs densités [31, 29]. Pour atteindre cet objectif, nous donnons une méthode d'estimation dans le cas où elles admettent des dérivées de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Supposons que $(r_k(d\lambda) = \phi_k(\lambda)d\lambda)$ alors, en utilisant (4.7), les coefficients de Fourier sont donnés comme transformée de Fourier des fonctions ϕ_k par :

$$a_k(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} \phi_k(\lambda) d\lambda. \quad (4.8)$$

Les ϕ_k seront appelées "densités spectrales" (elles peuvent être complexes).

Remarque 4.2.1. *Dans le cas des processus stationnaires, nous avons montré que la bimesure F est concentrée sur la première bissectrice. Elle est donc réduite à une mesure sur \mathbb{R} . Ainsi tous les coefficients $a_k(\tau)$ sont nuls sauf $a_0(\tau)$ qui est donné par (4.8). La densité spectrale ϕ_0 est celle définie dans le travail de Masry et Cambanis [79]. Ce travail est le premier à donner une estimation non paramétrique de la densité spectrale d'un processus α -stable harmonisable et stationnaire. Leur technique est totalement différente de la nôtre. En fait, ils passent par un 'tapering' du processus (par un noyau qui devrait vérifier certaines conditions) puis par la structure de la fonction caractéristique du processus obtenu ils déduisent une approximation de la densité spectrale... Nous pouvons envisager de suivre la même technique mais cette fois avec la bimesure F . Les démonstrations seront beaucoup plus compliquées que dans le cas stationnaire. C'est pour cette raison que nous avons choisi de travailler d'abord avec des techniques semblables à celles des processus du second ordre en cherchant à explorer le comportement asymptotique des moments d'ordre très proche de α .*

Le but de cette partie est d'estimer les densités spectrales ϕ_k à partir des observations du processus sur un intervalle de temps $[-A, A]$ et $A \in \mathbb{N}$. Pour cela, nous commençons d'abord par estimer les coefficients de Fourier $a_k(\tau)$. En s'inspirant des travaux de [29, 54] et l'approximation

de la covariation donnée dans le lemme 4.1.1 puis de la définition des coefficients de Fourier, nous proposons l'estimateur suivant :

$$\hat{a}_k(\tau) = \begin{cases} \frac{U_A}{\alpha A C_\alpha} \int_0^{A-\tau} X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt & \text{si } 0 < \tau < A \\ \frac{U_A}{\alpha C_\alpha A} \int_{-\tau}^A X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt & \text{si } -A < \tau < 0 \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad (4.9)$$

où U_A décroît vers 0 quand A tend vers l'infini¹⁴. Avant d'étudier la convergence de cette estimateur, nous montrons le résultat suivant :

Lemme 4.2.1. *soient $a < b$ deux nombres réels. Alors la variable aléatoire définie pour tout $A \in \mathbb{R}^+$ et τ fixés, par*

$$J_A(\tau) = \int_a^b X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

admet un moment d'ordre 1 et nous pouvons appliquer le théorème de Fubini (c-à-d intervertir l'intégrale et l'espérance).

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbb{E} \left(\int_a^b \left| X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} \right| dt \right)$ est finie. D'abord par le théorème de Tonelli nous avons,

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b \left| X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} \right| dt \right) = \int_a^b \mathbb{E} \left| X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} \right| dt.$$

Par application de l'inégalité de Hölder, puis (1.34) et (1.35) nous avons,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} \right| &\leq \left(\mathbb{E} |X_t|^{\alpha-U_A} \right)^{\frac{1}{\alpha-U_A}} \cdot \left(\mathbb{E} |X_{t+\tau}|^{\alpha-U_A} \right)^{\frac{\alpha-U_A-1}{\alpha-U_A}} \\ &= \mathcal{S}_\alpha(\alpha - U_A) \|X_t\|_\alpha \cdot \|X_{t+\tau}\|_\alpha^{\alpha-U_A-1} \\ &= \mathcal{S}_\alpha(\alpha - U_A) (C(t, t))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (C(t + \tau, t + \tau))^{\frac{\alpha-U_A-1}{\alpha}} \end{aligned}$$

La fonction C est périodique et continue donc elle est bornée par la constante définie par, $cst(A) = \sup \left\{ (C(t, t))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (C(t + \tau, t + \tau))^{\frac{\alpha-U_A-1}{\alpha}} \right\}$. Par conséquent,

$$\mathbb{E} \left(\int_a^b \left| X_t.(X_{t+\tau})^{<\alpha-1-U_A>} \right| dt \right) = (b - a).cst(A).\mathcal{S}_\alpha(\alpha - U_A) < \infty.$$

D'où le résultat du lemme. □

¹⁴ Les moments d'ordre supérieur ou égal à α d'une variable α -stable sont infinis. Ainsi le terme U_A est introduit de façon à ce que l'ordre du moment reste toujours inférieur strictement à α . Nous savons par le lemme 4.1.1 que les moments d'ordre p (quand p croît vers alpha) tendent vers l'infini avec la même vitesse que $\frac{1}{\alpha-p}$. Cette convergence vers l'infini ne se produit pas lorsqu'on multiplie par $\alpha - p$ qui est égal à U_A dans ce cas. Cette propriété de convergence des moments vers l'infini est également valable pour $\mathbb{E}(XY^{<p-1>})$. Ceci se voit grâce à la formule (1.36) de la proposition 1.4.4. Si on enlève les U_A le biais ne serait même pas défini.

La proposition suivante montre que l'estimateur (4.9) est asymptotiquement sans biais et donne sa vitesse de convergence.

Proposition 4.2.2. *Pour chaque τ , l'estimateur $\hat{a}_k(\tau)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais du coefficient de Fourier $a_k(\tau)$. De plus il existe une constante M_2 et un A_0 tels que pour tout $A \geq A_0$ nous avons :*

$$|\mathbb{E}(\hat{a}_k(\tau)) - a_k(\tau)| \leq M_2 U_A + \frac{g(A, \tau)}{A},$$

où $|g(A, \tau)| \leq M_3 + |\tau a_k(\tau)|$ et M_3 est une constante positive indépendante de A et de τ .

Démonstration. Soient $0 \leq \tau \leq A$ un nombre fixe et k un entier quelconque. Par définition de l'estimateur $\hat{a}_k(\tau)$ et en utilisant le lemme 4.2.1 nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{a}_k(\tau) - a_k(\tau)) &= \frac{U_A}{\alpha C_\alpha A} \int_0^{A-\tau} \mathbb{E} \left(X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A^{-1} \rangle} \right) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt - a_k(\tau), \\ &= \frac{1}{A} \int_0^{A-\tau} \left(\frac{U_A \cdot \mathbb{E} \left(X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A^{-1} \rangle} \right)}{\alpha C_\alpha} - C(t, t + \tau) \right) e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt \\ &\quad + \left(\frac{1}{A} \int_0^{A-\tau} C(t, t + \tau) \cdot e^{-i \frac{2\pi k}{T} t} dt - a_k(\tau) \right) \\ &\triangleq I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

D'une part, par application de l'approximation (4.3) du lemme 4.1.1, il existe une constante M telle que pour A assez grand nous avons :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{A} \int_0^{A-\tau} \left| \frac{U_A \cdot \mathbb{E} \left(X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\alpha - U_A^{-1}} \right)}{\alpha C_\alpha} - C(t, t + \tau) \right| dt \\ &\leq \frac{M}{\alpha C_\alpha} \cdot U_A \left(1 - \frac{\tau}{A}\right) \cdot \left(\frac{1}{A - \tau} \int_0^{A-\tau} |C(t, t + \tau) (1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))| dt \right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

La fonction de covariation C est périodique et continue donc bornée c'est-à-dire $|C(t, \tau)| \leq M_0$ uniformément pour t et τ . En particulier les deux applications $t \mapsto C(t, t)$ et $(t, \tau) \mapsto C(t + \tau, t + \tau)$ sont bornées. En utilisant le fait que la covariation vérifie l'inégalité $|C(t, t + \tau)| \leq \|X_t\|_\alpha \cdot \|X_{t+\tau}\|_\alpha^{\alpha-1} = (C(t, t))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (C(t + \tau, t + \tau))^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leq (M_0)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} (C(t, t))^{\frac{1}{\alpha}}$, nous avons alors :

$$|C(t, t + \tau) (1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))| \leq M_0 + \frac{1}{\alpha} (M_0)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot (C(t, t))^{\frac{1}{\alpha}} \log(C(t, t)).$$

L'application : $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}} \log(x)$ est continue sur l'intervalle $[0, M_0]$. Par conséquent, il existe une constante M_1 telle que $|C(t, t + \tau) (1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))| \leq M_1$. Comme $0 < 1 - \frac{\tau}{A} < 1$, nous avons :

$$|I_1| \leq \frac{M \cdot M_1}{\alpha C_\alpha} U_A.$$

Avec le même raisonnement nous montrons cette dernière inégalité si $-A \leq \tau \leq 0$.

Pour la deuxième intégrale, posons $N = [\frac{A-\tau}{T}]$ où $[\cdot]$ est la partie entière de $\frac{A-\tau}{T}$. Alors :

$$I_2 = \frac{1}{A} \int_0^{NT} C(t, t + \tau) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt - a_k(\tau) + \frac{1}{A} \int_{NT}^{A-\tau} C(t, t + \tau) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt.$$

D'après la périodicité de la fonction de covariation et la définition des coefficients de Fourier donnés dans (2.64).

$$I_2 = (\frac{NT}{A} - 1)a_k(\tau) + \frac{1}{A} \int_{NT}^{A-\tau} C(t, t + \tau) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}t} dt.$$

Puisque $|\frac{NT}{A} - 1| \leq \frac{T}{A} + \frac{|\tau|}{A}$, nous déduisons que :

$$|I_2| \leq \frac{T}{A} \cdot |a_k(\tau)| + \frac{1}{A} \int_{NT}^{A-\tau} |C(t, t + \tau)| dt + \frac{|\tau a_k(\tau)|}{A}.$$

Posons $g(A, \tau) = T \cdot |a_k(\tau)| + \int_{NT}^{A-\tau} |C(t, t + \tau)| dt + |\tau a_k(\tau)|$. D'après la définition de $a_k(\tau)$ donnée

par (2.64), il est facile de voir que $|T a_k(\tau)| \leq \int_0^T |C(t, t + \tau)| dt$ et comme $A - \tau - NT < T$,

$$\int_{NT}^{A-\tau} |C(t, t + \tau)| dt \leq \int_0^T |C(t, t + \tau)| dt.$$

Nous déduisons donc que, $T \cdot |a_k(\tau)| + \int_{NT}^{A-\tau} |C(t, t + \tau)| dt \leq 2 \cdot \int_0^T |C(t, t + \tau)| dt \leq M_3$, où M_3 est une constante positive. En posant $M_2 = \frac{M \cdot M_1}{\alpha C_\alpha}$, nous avons :

$$|\mathbb{E}(\hat{a}_k(\tau) - a_k(\tau))| \leq M_2 U_A + \frac{g(A, \tau)}{A}.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Avant de passer à l'estimation des densités spectrales, nous rappelons une notion que nous utiliserons par la suite : il s'agit des noyaux de convolution.

Définition 4.2.1. *Un noyau K est une application de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R} bornée, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et d'intégrale égale à 1.*

Exemples 4.2.1. *Nous donnons quelques exemples de certains noyaux parmi les plus utilisés dans la littérature.*

Noyaux de Parzen-Rosenblatt : *Ce sont des noyaux qui convergent vers 0 quand x tend vers l'infini et vérifient la condition, $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^d K(x) = 0$.*

Noyaux de Geffroy : Ce sont des noyaux vérifiant les conditions suivantes,

- L'ensemble des points de discontinuité de K est de mesure nulle.
- L'application $x \mapsto \sup(\|K(u)\|, \|u - x\| < 1)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Par exemple tout noyau à variation bornée est un noyau de Geffroy.

Noyaux d'Epanechnikov : Ils sont définis, pour tout x de \mathbb{R}^d par :

$$K(x) = \begin{cases} V \cdot (1 - \|x\|^2) & \text{si } \|x\|^d \leq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\|^d > 1 \end{cases}$$

où V est une constante de normalisation et $\|\cdot\|$ et la norme euclidienne de \mathbb{R}^d .

Soit K un noyau et notons par K_b l'application définie par $K_b(x) = \frac{1}{b^d} K(\frac{x}{b^d})$. Pour construire un estimateur à noyau, nous avons besoin du lemme de Bochner. Ce lemme montre que le produit de convolution par K_b perturbe peu les fonctions intégrables.

Lemme 4.2.3. Soit K un noyau de Parzen-Rosenblatt et g une fonction intégrable. Alors pour tout point de continuité x de g , nous avons $\lim_{b \rightarrow 0} (g * K_b)(x) = g(x)$. Si maintenant K est un noyau quelconque et g une fonction intégrable et uniformément continue alors $g * K_b$ converge uniformément vers g .

La démonstration de ce résultat est détaillée dans Bosq [13].

Maintenant que nous avons trouvé un estimateur asymptotiquement sans biais de $\hat{a}_k(\tau)$, nous estimons la densité spectrale ϕ_k , en appliquant la formule d'inversion de Fourier à l'égalité (4.8). Un estimateur naturel de la densité spectrale ϕ_k pourrait être la quantité : $\tilde{\phi}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{a}_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau$. Nous suivons la même technique que dans Hurd [53] qui consiste à lisser cet estimateur par un noyau de convolution ; ainsi nous proposons l'estimateur suivant :

$$\hat{\phi}_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A K(b_A\tau) \hat{a}_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \quad (4.12)$$

où K est la transformée de Fourier d'un noyau pair et borné vérifiant : il existe un nombre positif δ tel que $K(\tau) = 1 + O(|\tau|^\delta)$ au voisinage de 0. Le paramètre de lissage b_A vérifie : $b_A \rightarrow 0$, $A \cdot (b_A)^2 \rightarrow \infty$ et $\frac{U_A}{b_A} \rightarrow 0$ quand A tend vers l'infini. Montrons que l'estimateur (4.12) est asymptotiquement sans biais. Plus précisément nous montrons le résultat suivant :

Proposition 4.2.4. *Supposons qu'il existe $r > 1$ tel qu'au voisinage de l'infini $|a_k(\tau)| = O(|\tau|^{-r})$. Supposons également que $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|K(\tau)d\tau < \infty$. Alors l'estimateur (4.12) est asymptotiquement sans biais quand A tend vers l'infini et nous avons l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{E}(\hat{\phi}_k(\lambda)) - \phi_k(\lambda) = O\left(\frac{U_A}{b_A}\right) + O(b_A^\delta) + O(b_A^{r-1}) + O(A^{1-r}) + O\left(\frac{1}{A(b_A)^2}\right).$$

Démonstration. Nous avons,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\phi}_k(\lambda)) - \phi_k(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-A}^A K(b_A\tau) \mathbb{E}(\hat{a}_k(\tau)) e^{-i\lambda\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} a_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-A}^A K(b_A\tau) (E(\hat{a}_k(\tau)) - a_k(\tau)) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{-A}^A (K(b_A\tau) - 1) a_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau - \int_{|\tau|>A} a_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right) \\ &\triangleq \frac{1}{2\pi} [I_1 + I_2 - I_3]. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale nous utilisons le résultat de la proposition 4.2.2. Ainsi, pour A assez grand nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{-A}^A K(b_A\tau) |\mathbb{E}(\hat{a}_k(\tau)) - a_k(\tau)| d\tau, \\ &\leq M \cdot U_A \int_{-A}^A |K(b_A\tau)| d\tau + \frac{1}{A} \int_{-A}^A |K(b_A\tau)| g(A, \tau) d\tau, \\ &\triangleq J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Un simple changement de variables nous permet d'avoir :

$$|J_1| \leq \frac{M \cdot U_A}{b_A} \int_{-Ab_A}^{Ab_A} |K(\tau)| d\tau \leq \frac{M \cdot U_A}{b_A} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)| d\tau, \quad (4.13)$$

comme la fonction $g(A, \tau) \leq M_3 + |\tau| \cdot a_k(\tau)$

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq \frac{M_3}{Ab_A} \int_{-Ab_A}^{Ab_A} |K(\tau)| d\tau + \frac{cst}{A(b_A)^2} \int_{-Ab_A}^{Ab_A} |\tau| \cdot |K(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M_3}{Ab_A} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\tau)| d\tau + \frac{cst}{A(b_A)^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \cdot |K(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le noyau K étant intégrable et vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \cdot |K(\tau)| d\tau < \infty$. Alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que,

$$|I_1| \leq \frac{C_1 \cdot U_A}{b_A} + \frac{C_2}{A(b_A)^2}. \quad (4.15)$$

La vitesse de convergence de I_2 et I_3 dépend de la nature de $a_k(\cdot)$ et du noyau $K(\cdot)$. Puisque $a_k(\tau) = \mathbf{O}(|\tau|^{-r})$ et que $a_k(\tau)$ est bornée, alors il existe une constante C_3 telle que $|a_k(\tau)| \leq$

$C_3 \inf(1, |\tau|^{-r})$. De même pour le noyau K , il existe une constante C_4 telle que $|1 - K(\tau)| \leq C_4 \inf(1, |\tau|^\delta)$. Par suite, nous avons la majoration de l'intégrale I_2 suivante :

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{-A}^A (K(b_A\tau) - 1) a_k(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right| \\ &\leq C_3 \int_{-A}^A |K(b_A\tau) - 1| \inf(1, |\tau|^{-r}) d\tau \\ &\leq 2C_3 \int_0^A |K(b_A\tau) - 1| \inf(1, |\tau|^{-r}) d\tau \\ &\leq 2C_3 \left(\int_0^1 |K(b_A\tau) - 1| d\tau + \int_1^A |K(b_A\tau) - 1| \tau^{-r} d\tau \right) \\ &\leq 2C_3 (J_1 + J_2). \end{aligned}$$

Par un simple changement de variables et le fait que pour un A assez grand $b_A < 1$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{b_A} \int_0^{b_A} |K(\tau) - 1| d\tau \leq \frac{C_4}{b_A} \int_0^{b_A} \inf(1, \tau^\delta) d\tau \leq C_4 (b_A)^\delta, \\ J_2 &= (b_A)^{r-1} \int_{b_A}^{Ab_A} |K(\tau) - 1| \tau^{-r} d\tau \\ &= (b_A)^{r-1} \left(\int_{b_A}^1 |K(\tau) - 1| \tau^{-r} d\tau + \int_1^{Ab_A} |K(\tau) - 1| \tau^{-r} d\tau \right) \\ &\leq C_4 (b_A)^{r-1} \left(\int_{b_A}^1 \tau^{\delta-r} d\tau + \int_1^{Ab_A} \tau^{-r} d\tau \right) \\ &\leq \frac{C_4 \delta}{(r-1)(\delta-r+1)} [b_A]^{r-1} + \frac{C_4}{\delta-r+1} [b_A]^\delta + \frac{C_4}{1-r} [A]^{1-r}. \end{aligned}$$

De même pour l'intégrale I_3 , nous avons :

$$|I_3| \leq \int_{\{|\tau|>A\}} |a_k(\tau)| d\tau \leq 2C_3 \int_A^\infty \tau^{-r} d\tau \leq \frac{C_3}{1-r} A^{1-r}. \quad (4.16)$$

Finalement, en utilisant les majoration de I_1 , I_2 et I_3 :

$$|E(\hat{\phi}_k(\lambda)) - \phi(\lambda)| = \mathbf{O}\left(\frac{U_A}{b_A}\right) + \mathbf{O}(b_A^\delta) + \mathbf{O}(b_A^{r-1}) + O(A^{1-r}); \quad (4.17)$$

ceci achève la démonstration. □

Cette dernière proposition montre que les estimateurs (4.9) et (4.12) sont asymptotiquement sans biais. La partie suivante donne les conditions qui permettent d'améliorer le mode de convergence, il s'agit de la convergence presque sûre.

4.2.2 Propriétés asymptotiques des estimateurs

Les processus stochastiques harmonisables symétriques α -stables et stationnaires ne sont pas ergodiques, voir par exemple [57]. Dans la proposition suivante nous montrons que nous pouvons avoir la convergence presque sûre des deux estimateurs (4.9) et (4.12), malgré la non ergodicité. Nous rappelons la notion de mélange fort :

Définition 4.2.2. *Nous disons que le processus X est fortement mélangeant¹⁵ de fonction de mélange χ si et seulement si pour tous $A \in \sigma(X_l, l \leq s)$ et $B \in \sigma(X_l, l > s + t)$, nous avons : $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \chi(t)$. Pour plus de détails voir Billingsley [10], Doukhan[34]...*

Proposition 4.2.5. *Supposons que le processus périodiquement covarié X de période T est fortement mélangeant de fonction de mélange χ vérifiant les hypothèses suivantes :*

1. *Il existe un nombre positif γ tel que, $\chi(t) = \mathbf{O}(t^{-\gamma})$ au voisinage de l'infini,*
2. *La fonction $\chi(t)$ est paire, intégrable et décroissante sur l'intervalle $[0, \infty[$,*
3. *La suite $(U_A)_A$ vérifie, $U_A = \frac{\alpha}{\log \log(A)}$,*

alors l'estimateur (4.9) converge presque sûrement vers $a_k(\tau)$. Si en plus les conditions de la proposition 4.2.4 sont vérifiées alors l'estimateur (4.12) converge presque sûrement vers la densité spectrale $\phi_k(\lambda)$.

Démonstration. Notons par Z le processus aléatoire défini par :

$$Z(t, \tau) = X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A^{-1} \rangle} - \mathbb{E} \left(X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A^{-1} \rangle} \right) \quad (4.18)$$

D'après la proposition 4.2.2 le biais $\mathbb{E}(\hat{a}_A(\tau)) - a_k(\tau)$ converge vers 0 quand A tend vers l'infini. Donc pour montrer la convergence presque sûre, il suffit de montrer que : $\hat{a}_A(\tau) - E(\hat{a}_A(\tau))$ converge presque sûrement vers 0. Nous démontrons ce résultat quand Z est réel. Le cas complexe se déduit du cas réel en montrant la convergence presque sûre de la partie réelle et de la partie imaginaire. Cela est possible car les conditions sur Z , que nous utiliserons dans la démonstration, restent toujours valables pour les parties réelle et imaginaire. Pour simplifier nous écrivons :

$$I \triangleq \frac{U_A}{\alpha C_\alpha A} \left(\int_0^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt + \imath \int_0^{A-\tau} Z(t, \tau) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \right) = I_1 + \imath I_2.$$

Il suffit de montrer la convergence presque sûre de la partie réelle de I ; la convergence de la partie imaginaire s'obtient de la même manière.

¹⁵ La notion de mélange fort est celle de l' α -mélange utilisée fréquemment dans la littérature.

Soit $N = \lceil \frac{A-\tau}{T} \rceil$ la partie entière de $\frac{A-\tau}{T}$, alors nous pouvons décomposer I_1 comme :

$$I_1 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N P_i + \frac{U_A}{\alpha C_\alpha A} \left(\int_{NT}^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \right),$$

avec $P_i = \frac{U_A}{\alpha C_\alpha} \left(\int_{(i-1)T}^{iT} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \right)$.

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

- **Étape 1** : nous montrons que $\frac{1}{A} \sum_{i=1}^N P_i \xrightarrow{p.s.} 0$ en utilisant la loi forte de Marcinkiewicz.
- **Étape 2** : nous montrons que $R_A \triangleq \frac{U_A}{\alpha C_\alpha A} \left[\int_{NT}^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \right] \xrightarrow{p.s.} 0$ en utilisant le lemme de Borel-Cantelli.

Étape 1 : convergence presque sûre de $\frac{1}{A} \sum_{i=1}^N P_i$:

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.6. *Sous l'hypothèse de forte mélangeance du processus X alors,*

- Pour chaque τ fixé, le processus $(Z(t, \tau), t \in \mathbb{R})$ est fortement mélangeant de fonction de mélange définie par $\chi_\tau(t) = \chi(|t| - |\tau|)$.
- Le processus discret $(P_i, i \in \mathbb{N}^*)$ est fortement mélangeant de fonction de mélange $\delta_i = \chi(|T - 1|i - |\tau|)$

Démonstration. Soient $t \geq 0, \tau \geq 0$ et $s \geq t$. Nous notons par $\sigma(X_l, l \in L)$ la σ -algèbre engendrée par la famille de variables aléatoires $(X_l, l \in L)$.

Mélange fort de Z : Remarquons d'abord, par définition de Z donnée dans (4.18), il est facile de voir que :

$$\sigma(Z(l, \tau), l \leq t) = \sigma(X_l, (X_{l+\tau})^{\langle \alpha-1-U_A \rangle}, l \leq t)$$

Comme pour tout $l \leq t$ nous avons $\begin{cases} X_l \text{ est } \sigma(X_l, l \leq t + \tau) \text{ - mesurable} \\ \text{et} \\ X_{l+\tau} \text{ est } \sigma(X_l, l \leq t + \tau) \text{ - mesurable} \end{cases}$

nous obtenons que $\sigma(X_l, (X_{l+\tau})^{\langle \alpha-1-U_A \rangle}, l \leq t) \subseteq \sigma(X_l, l \leq t + \tau)$. Par conséquent, nous avons :

$$\sigma(Z(l, \tau), l \leq t) \subseteq \sigma(X_l, l \leq t + \tau).$$

Par le même raisonnement nous montrons que : $\sigma(Z(l, \tau), l \geq t + s) \subseteq \sigma(X_l, l \geq t + s)$.

Soit maintenant $B \in \sigma(Z(l, \tau), l \leq t)$ et $C \in \sigma(Z(l, \tau), l \geq t + s)$, alors $B \in \sigma(X_l, l \leq t + \tau)$ et $C \in \sigma(X_l, l \geq t + s)$. Comme le processus X est fortement mélangeant de fonction de mélange

χ , d'après [10, 34] :

$$|\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)| \leq \chi(s - \tau) = \chi(|s| - |\tau|) = \chi_\tau(s). \quad (4.19)$$

L'inégalité (4.19) peut être vérifiée de la même manière dans le cas où $s \leq 0$ et $|s| > |t|$ et/ou $\tau \leq 0$.

Mélange fort de P : Pour presque tout ω , la fonction $t \mapsto Z(\omega, t, \tau) \cos(\frac{2\pi k}{T}t)$ est intégrable car l'application, $t \mapsto \|X_t\|_\alpha^\alpha = C(t, t)$ est intégrable, pour plus de détails voir [[101], Chap. 11]¹⁶. Donc pour presque tout ω fixé, nous approchons l'intégrale P_i par les sommes de Riemann :

$$P_i(\omega) = \frac{U_A}{\alpha C_\alpha} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m_k^i f(\omega, t_k^i)$$

Pour tout entier i , $(t_k^i)_k$ est une subdivision de l'intervalle $[(i-1)T, iT]$, $m_k^i = t_k^i - t_{k-1}^i$ et $f(\omega, t) = Z(\omega, t, \tau) \cos(\frac{2\pi k}{T}t)$. Comme pour tout $k \geq 0$, $t_k^i \in [(i-1)T, iT]$ alors la variable aléatoire $Z(t_k^i, \tau)$ est $\sigma(Z(l, \tau), l \in [(i-1)T, iT])$ -mesurable. Par conséquent P_i l'est aussi car c'est la limite presque sûre d'une suite de variables aléatoires $\sigma(Z(l, \tau), l \in [(i-1)T, iT])$ -mesurables.

Soient maintenant, $B \in \sigma(P_l, l \leq h)$ et $C \in \sigma(P_l, l \geq h + m)$ donc $B \in \sigma(Z(l, \tau), l \leq hT)$ et $C \in \sigma(Z(l, \tau), l \geq (h + m - 1)T)$. Comme Z est χ_τ -mélangeant nous avons :

$$|\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(C)| \leq \chi_\tau((m-1)T) = \chi(|m-1|T - |\tau|).$$

D'où la démonstration du lemme. □

Suite de la démonstration du théorème 4.2.4 : Pour déduire la convergence presque sûre de $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i$, nous n'avons qu'à appliquer la loi forte de Marcinkiewicz donnée dans Rio [93, 92]. Ce travail est également rappelé dans Doukhan et Dedecker [27]. Nous utilisons les énoncés et les notations de ce dernier article.

1. Dans [27], la dernière assertion du théorème 2 affirme que : pour $p \in [1, 2[$ (dans notre cas on

¹⁶Il s'agit des résultats concernant l'intégrabilité des trajectoires d'un processus α -stable, plus précisément le théorème 11.3.2 page 505. Nous, on est dans le cas $1 < p < \alpha$ et le processus est symétrique α -stable (dans ce cas, en suivant les notations du théorème 11.3.2 de [101], nous avons $\eta(t) = 0$ ce qui implique (11.3.5) du même théorème). La condition suffisante d'intégrabilité de $|X_t|^p$ donnée dans (11.3.6) s'écrit comme $\int_T \|X_t\|_\alpha^p dt$, voir aussi [18]. Nous pouvons suivre la même technique que dans la démonstration du théorème 11.3.2 de [101] ("case $p > 1$ " page 507) mais cette fois nous utilisons notre décomposition en série de Lepage. À noter également qu'ils ont affirmé (dans la pages 509, remarque 2.) que la démonstration est la même dans le cas complexe.

prend $p=1$), si la condition $D(p, \frac{\theta}{2}, P)$ est satisfaite¹⁷. Alors la somme $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (P_k - E(P_k))$ converge presque sûrement vers 0.

2. Dans le lemme 1, toujours de [27], une condition suffisante pour $D(1, \theta/2, P)$ est la condition $D(1, 2\chi, P)$.

3. Pour montrer la convergence presque sûre de $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i$, il suffit de montrer que la condition $D(1, 2\chi, P)$ est satisfaite. D'après la dernière assertion du lemme 2 de [27] et en prenant $\delta_i = 2\chi(|i-1|T - |\tau|)$ ¹⁸, alors $D(1, \delta, P)$ est satisfaite si et seulement si $\sum_i \frac{\delta_i}{i}$ est finie. Comme χ est décroissante alors $\tilde{\delta}_i = \delta_i$. Cela veut dire qu'il suffit de montrer que $\sum_i \frac{\chi(|i-1|T - |\tau|)}{i}$ est finie.

comme $\chi(\tau) = \mathbf{O}(|\tau|^{-\gamma})$ au voisinage de l'infini et $\gamma > 0$ alors la série $\sum_m \frac{\chi(|m-1|T - |\tau|)}{m}$ est convergente pour chaque τ . Nous avons donc la convergence presque sûre de $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i$ vers

0. Par conséquent, $\frac{1}{A} \sum_{i=1}^N P_i$ converge presque sûrement vers 0, car $\frac{N}{A}$ converge vers $\frac{1}{T}$ quand A tend vers l'infini.

Étape 2 : convergence presque sûre de R_A

Pour achever la démonstration de la convergence presque sûre de $\hat{a}_k(\tau)$ il reste à montrer que :

$$R_A = \frac{U_A}{\alpha C_{\alpha} A} \left[\int_{NT}^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \right] \xrightarrow{p.s.} 0.$$

Pour montrer cette convergence, nous utilisons le lemme de Borel-Cantelli. D'abord, puisque U_A est choisie telle que $U_A > \frac{\alpha}{\log \log(A)}$ en posant $p = 1 + \frac{1}{\log \log(A)}$ alors, à partir d'un certain rang A_0 , l'espérance $\mathbb{E}|R_A|^p$ existe. D'un autre côté, en appliquant l'inégalité de Jensen pour une loi uniforme sur l'intervalle $[NT, A - \tau]$ et l'application convexe, $x \mapsto |x|^p$, nous avons,

$$\left| \int_{NT}^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt \right|^p \leq (A - \tau - NT)^{p-1} \int_{NT}^{A-\tau} |Z(t, \tau)|^p dt \leq (T)^{p-1} \int_{NT}^{A-\tau} |Z(t, \tau)|^p dt$$

¹⁷ Dans [27], les fonctions α et θ sont définies selon le type de mélange. Elles sont introduites au début de l'article dans la définition 1. A partir des fonctions α et θ , ils ont introduit des conditions qu'ils ont appelées $D(p, \delta, X)$, pour plus de détails voir [27]. Dans notre travail nous utilisons le mélange fort (α -mélange) mais pour éviter le risque de confusion avec le alpha de 'alpha stable' nous avons noté la fonction de mélange par χ .

¹⁸ La suite $(\tilde{\delta}_i)_i$, est l'unique sous suite décroissante extraite d'une suite positive non croissante $(\delta_i)_i$

à partir d'un certain rang A_0 , le terme $T^{p-1} = T^{\frac{1}{\log \log(A)}} < 2$, cela implique que,

$$\begin{aligned} I &\triangleq \mathbb{E} \left| \int_{NT}^{A-\tau} Z(t, \tau) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt \right|^p \\ &\leq 2 \cdot \mathbb{E} \left(\int_{NT}^{A-\tau} |Z(t, \tau)|^p dt \right) \\ &\leq 2 \cdot \int_{NT}^{A-\tau} \mathbb{E} |Z(t, \tau)|^p dt. \end{aligned}$$

Par la condition de mélange fort et le lemme 3.5 de McLeish [80] (l'inégalité (3.7) avec $r = p$), nous avons :

$$\mathbb{E} |Z(t, \tau)|^p \leq [2(2^{\frac{1}{p}} + 1)]^p \mathbb{E} |X_t(X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A - 1 \rangle}|^p.$$

Donc :

$$I \leq 2[2(2^{\frac{1}{p}} + 1)]^p \int_{NT}^{A-\tau} \mathbb{E} |X_t(X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A - 1 \rangle}|^p dt.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (avec $\frac{1}{\alpha - U_A} + \frac{\alpha - U_A - 1}{\alpha - U_A} = 1$), nous avons :

$$\begin{aligned} J &\triangleq \mathbb{E} |X_t \cdot (X_{t+\tau})^{\langle \alpha - U_A - 1 \rangle}|^p \\ &\leq (\mathbb{E} |X_t|^{p(\alpha - U_A)})^{\frac{1}{\alpha - U_A}} (\mathbb{E} |X_{t+\tau}|^{p(\alpha - U_A)})^{\frac{\alpha - U_A - 1}{\alpha - U_A}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

En multipliant l'inégalité (4.20) par $(U_A)^p$, nous aboutissons à l'inégalité suivante :

$$(U_A)^p J \leq \left[(U_A)^p \mathbb{E} |X_t|^{p(\alpha - U_A)} \right]^{\frac{1}{\alpha - U_A}} \left[[U_A]^p \mathbb{E} |X_{t+\tau}|^{p(\alpha - U_A)} \right]^{\frac{\alpha - U_A - 1}{\alpha - U_A}}$$

En utilisant (4.2) du lemme 4.1.1 et le fait que $p(\alpha - U_A) = (1 + \frac{1}{\log \log(A)})(\alpha - U_A) < \alpha$ est convergente vers α quand A tend vers l'infini, nous obtenons que,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left((\alpha - p(\alpha - U_A)) \cdot \mathbb{E} |X_t|^{p(\alpha - U_A)} \right)^{\frac{1}{\alpha - U_A}} = (\alpha C_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \|X_t\|_\alpha^\alpha.$$

Le fait que $U_A \sim \frac{1}{\log \log(A)}$, implique que la limite $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(U_A)^p}{\alpha - p(\alpha - U_A)}$ est finie. Nous déduisons donc la limite,

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[[U_A]^p \mathbb{E} |X_t|^{p(\alpha - U_A)} \right]^{\frac{1}{\alpha - U_A}} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[(\alpha - p(\alpha - U_A)) \cdot \mathbb{E} |X_t|^{p(\alpha - U_A)} \right]^{\frac{1}{\alpha - U_A}} \\ &\quad \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{[U_A]^p}{\alpha - p(\alpha - U_A)} \right]^{\frac{1}{\alpha - U_A}} \end{aligned}$$

Comme $\|X_t\|_\alpha^\alpha = C(t, t)$ est borné, nous déduisons de (4.20) que, uniformément par rapport à t et τ , nous avons l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E} |R_A|^p \leq \frac{\text{const}}{A^p},$$

où "const" est une constante positive indépendante de A . Nous appliquons l'inégalité de Markov : pour tout $\epsilon > 0$ et à partir d'un certain rang A_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_A \geq \epsilon) &\leq \frac{\mathbb{E}|U_A|^p}{\epsilon^p} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\epsilon^p A^p}. \end{aligned}$$

Au voisinage de l'infini nous avons, $\epsilon^p \sim \epsilon$ car $p = 1 + \frac{1}{\log \log(A)}$. De plus la série $\sum A^p$ est convergente il suffit de la comparer à une série de Bertrand. En effet, la suite de terme général $L_A = \frac{1}{A^p}$ converge vers 0 plus rapidement que n'importe quelle suite de type $B_A = \frac{1}{A \cdot (\log(A))^\beta}$. Cela provient de

$$\begin{aligned} \frac{L_A}{B_A} &= e^{[\beta \cdot \log(\log(A)) - \frac{\log(A)}{\log(\log(A))}]} \\ &= e^{[\log(\log(A))(\beta - \frac{\log(A)}{(\log(\log(A)))^2})]}. \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\log(A)}{(\log(\log(A)))^2}$ converge vers plus l'infini, nous déduisons donc que $\frac{L_A}{B_A}$ converge vers 0. Cela implique que pour tout $\epsilon > 0$, la série $\sum_{A=1}^{\infty} \mathbb{P}(R_A \geq \epsilon) < \infty$ est convergente. Donc par application du lemme de Borel-Cantelli nous avons la convergence presque sûre de R_A ; ce qui implique finalement la convergence presque sûre de l'estimateur (4.9).

La convergence presque sûre de l'estimateur $\hat{\phi}_k$ s'obtient par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans l'intégrale (4.12) et le fait que $\hat{a}_k(\tau)$ est presque sûrement dominé par une fonction qui ne dépend que de ω . Cette dernière propriété se déduit de l'intégrabilité des trajectoires de $|X_t|^\alpha$. \square

Remarque 4.2.2. *Pour simplifier nous avons démontré, dans cette dernière proposition, la convergence presque sûre seulement de la première quantité de l'estimateur c'est-à-dire quand $0 \leq \tau \leq A$ mais le cas général s'obtient de la même manière.*

4.3 Estimation de la densité de la bimesure F

Considérons un processus SaS harmonisable X représenté comme,

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\xi(\lambda), \quad (4.21)$$

où $d\xi$ est un processus SaS réel ou complexe isotrope et vérifiant la condition (O) donnée dans le chapitre 2. Dans le chapitre précédent, nous avons démontré que ce processus est entièrement

déterminé par la bimesure F définie dans (2.42). Dans cette partie, nous supposons que cette bimesure est prolongeable en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, voir par exemple [49]. Supposons également qu'elle admet une dérivée de Radon Nikodym qu'on notera h . Dans ce cas d'après la proposition 2.2.2, la covariation peut s'écrire

$$C(s, t) \triangleq [X_s, X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda - t\lambda')} h(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda'. \quad (4.22)$$

Si la fonction de covariation C est intégrable alors par application de la transformation de Fourier inverse, nous obtenons une expression de h comme :

$$h(\lambda, \lambda') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} .C(s, t) ds dt \quad (4.23)$$

Le principe de l'estimation de la densité h consiste à donner un estimateur de la fonction de covariation C et à utiliser l'expression (4.23). D'après le lemme 4.1.1, pour tout $1 < p < \alpha$, la fonction de covariation C peut s'écrire comme :

$$C(s, t) = \frac{\alpha - p}{\alpha C_\alpha} \mathbb{E}(X_s X_t^{<p-1>}) + R_p(s, t), \quad (4.24)$$

avec

$$|R_p(s, t)| \leq M.(\alpha - p) |.C(s, t).(1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))| \quad (4.25)$$

et M est une constante positive. En remplaçant cette approximation de la covariation dans l'égalité (4.23), nous obtenons :

$$\begin{aligned} h(\lambda, \lambda') &= \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} \mathbb{E}(X_s X_t^{<p-1>}) ds dt + \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} R_p(s, t) dt \\ &\triangleq J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Par application du théorème de Fubini sur l'intégrale J_1 , nous pouvons déduire que,

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \mathbb{E} \left(\int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} X_s . X_t^{<p-1>} ds dt \right), \\ &= \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\lambda} X_s ds . \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda'} X_t^{<p-1>} dt \right), \\ &= \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \mathbb{E} \left(I(\lambda) \overline{I_p(\lambda')} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\lambda} X_s ds$ et $\overline{I_p(\lambda')} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda'} X_t^{<p-1>} dt$. Cela implique que,

$$h(\lambda, \lambda') = \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \mathbb{E} \left(I(\lambda) \overline{I_p(\lambda')} \right) + \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} R_p(s, t) ds dt. \quad (4.27)$$

Supposons que la fonction de covariation C et la fonction définie par $(s, t) \mapsto C(s, t) \log(C(t, t))$ sont intégrables sur \mathbb{R}^2 . En utilisant le fait que $|R_p(s, t)| \leq M \cdot (\alpha - p) \cdot |C(s, t) \cdot (1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))|$, nous déduisons que le terme $\int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} R_\alpha(s, t) ds dt$ converge, uniformément par rapport à (λ, λ') , vers 0 quand p croît vers α . Cela implique que, uniformément par rapport à (λ, λ') , nous pouvons déduire le résultat suivant :

$$h(\lambda, \lambda') = \lim_{p \nearrow \alpha} \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \mathbb{E} \left(I(\lambda) \overline{I_p(\lambda')} \right). \quad (4.28)$$

L'expression (4.28) nous permet de construire un estimateur théorique asymptotiquement sans biais de la densité h en choisissant p très proche de α . Dans ce cas cet estimateur serait :

$$\hat{h}(\lambda, \lambda') = \frac{\alpha - p}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} I(\lambda) \cdot \overline{I_p(\lambda')}. \quad (4.29)$$

L'estimateur que nous avons donné dans la formule (4.29) suppose que nous pouvons observer le processus X sur \mathbb{R} . Cette condition est impossible à réaliser dans la pratique : nous ne pouvons observer le process X que sur un intervalle borné de \mathbb{R} . La non disponibilité des observations peut être due par exemple à la limitation des appareils de mesure. Notamment en traitement du signal, nous sommes amenés parfois à traiter des signaux qui sont non nuls seulement sur un intervalle de temps. Le but de la partie suivante est de donner un estimateur convergeant de la densité spectrale h à partir des observations du processus X sur un intervalle de temps $[-A, A]$ et $A \in \mathbb{N}$.

4.3.1 Construction de l'estimateur de h

Compte tenu de l'expression (4.28) de h , un estimateur naturel est donné par :

$$\tilde{h}(\lambda, \lambda') = \frac{U_A}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \tilde{I}(\lambda) \cdot \overline{\tilde{I}_{\alpha - U_A}(\lambda')} \quad (4.30)$$

avec $\tilde{I}(\lambda) = \int_{-A}^A e^{-is\lambda} X_s ds$ et $\overline{\tilde{I}_p(\lambda')} = \int_{-A}^A e^{it\lambda'} X_t^{<p-1>} dt$ et U_A décroît vers 0 quand A tend vers l'infini. L'existence des intégrales $\tilde{I}(\lambda)$ et $\tilde{I}_p(\lambda')$ provient de l'intégrabilité de la fonction de covariation, pour plus de détails voir [[101], Chap. 11]. L'estimateur (4.30) est asymptotiquement sans biais. Plus précisément nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.3.1. *Supposons que la fonction de covariation du processus stochastique X et la fonction $(s, t) \mapsto C(s, t) \log(C(t, t))$ sont intégrables sur \mathbb{R}^2 . Alors, l'estimateur (4.30) est*

asymptotiquement sans biais et pour tous λ et λ' , nous avons,

$$\left| \mathbb{E} \left(\tilde{h}(\lambda, \lambda') \right) - h(\lambda, \lambda') \right| = G_A + \mathbf{O}(U_A) \quad (4.31)$$

où le terme G_A dépend seulement de la nature de la fonction de covariation. Il tend vers 0 quand A tend vers l'infini.

Démonstration. De la même manière que dans (4.26), nous avons,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\tilde{h}(\lambda, \lambda') \right) &= \frac{U_A}{4\pi^2 \alpha C_\alpha} \int_{-A}^A \int_{-A}^A e^{-i(s\lambda - t\lambda')} \mathbb{E}(X_s X_t^{\langle \alpha - U_A - 1 \rangle}) ds dt, \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-A}^A \int_{-A}^A e^{-i(s\lambda - t\lambda')} C(s, t) ds dt - \int_{-A}^A \int_{-A}^A e^{-i(s\lambda - t\lambda')} R_{\alpha - U_A}(s, t) ds dt, \\ &\triangleq J_1 - J_2. \end{aligned}$$

En utilisant (4.23), il est facile de voir que,

$$J_1 = h(\lambda, \lambda') - \int \int_{\Omega_A} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} C(s, t) ds dt$$

avec $\Omega_A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que, } |s| > A \text{ ou } |t| > A\}$. La fonction de covariation C étant intégrable alors, uniformément par rapport à λ et λ' , le terme $\int \int_{\Omega_A} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} C(s, t) ds dt$ converge vers 0 quand A tend vers l'infini car

$$\left| \int \int_{\Omega_A} e^{-i(s\lambda - t\lambda')} C(s, t) ds dt \right| \leq \int \int_{\Omega_A} |C(s, t)| ds dt \triangleq G_A.$$

Pour majorer l'intégrale J_2 , nous utilisons la majoration de $R_{\alpha - U_A}$ donnée dans (4.25). Dans ce cas nous avons,

$$|J_2| \leq M \cdot U_A \int \int |C(s, t) \cdot (1 + \frac{1}{\alpha} \log(C(t, t)))| ds dt = \mathbf{O}(U_A).$$

Ceci achève la démonstration. □

4.4 Conclusion et discussion

Ce chapitre donne des méthodes non paramétriques d'estimation de la densité de la bimesure F qui caractérise les processus harmonisables de type (2.1). Cet estimateur peut être très utile dans des situations pratiques dans lesquelles les conditions de stationnarité habituelles ne sont pas vérifiées. Nous avons commencé par le cas pratique des processus périodiquement covariés où nous avons donné des estimateurs consistants des densités spectrales et des coefficients de

Fourier. Ces résultats sont inspirés de ceux établis dans le cas des processus du second ordre, voir [29, 55, 53]...etc. Dans un deuxième temps nous avons étudié l'estimation non-paramétrique de la bimesure F caractérisant les processus harmonisables de type (2.1).

Chapitre 5

Path delay model based on α -stable distribution for the 60GHz indoor channel.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une application des processus α -stables dans le domaine des communications large bande. Il s'agit de donner un nouveau modèle statistique décrivant la réponse impulsionnelle du canal 60 Ghz. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la modélisation des retards qui influencent considérablement la qualité des transmissions et qui sont plus difficiles à modéliser. Sachant que les anciens modèles habituellement utilisés dans ce domaine ne sont pas valables pour le canal 60Ghz, nous avons réalisé, dans un premier temps, une analyse exploratoire des données recueillies à l'IEMN. Après avoir remarqué, par des tests statistiques, que les distributions α -stables sont des modèles appropriés pour les retards, nous en avons donné la justification théorique en se basant sur la nature des mécanismes de propagation des ondes dans le milieu d'expérimentation.

Path delay model based on α -stable distribution for the 60GHz indoor channel.

Nourddine Azzaoui
ENESAD, Université de Bourgogne
26,BD docteur Petitjean
21000, Dijon
Email: n.azzaoui@enesad.fr

Laurent Clavier
ENIC, I.E.M.N - UMR.CNRS 8520
Cité scientifique, rue Guglielmo Marconi
59658 Villeneuve d'Ascq Cedex
Email: clavier@enic.fr

Rachid Sabre
ENESAD, Université de Bourgogne
26,BD docteur Petitjean
21000, Dijon
Email: r.sabre@enesad.fr

Abstract—In this work we give a statistical model of the paths' arrival time in the 60GHz wide band channel. This model is based on the class of stable distributions, we show its accurateness on modeling real data. We also give a theoretical justification of its compatibility.

I. INTRODUCTION

High data rate transmission in an indoor environment is an important issue for the next generation of wireless communication systems. For high data rate links (155 Mbits/s), the spectrum around 60 GHz is an attractive solution [1]. A massive amount of spectral space (2 to 5 GHz) has been allocated world-wide for unlicensed, dense wireless local communications. At this frequency, the signal is strongly attenuated and the propagation characteristics are different from microwaves since the molecules of oxygen in the atmosphere interact with the radio wave. The peak value of the absorption attenuation coefficient reaches about 15 dB/km at 60 GHz. This property, which appears to be a disadvantage for wide range radio transmission, is an advantage for indoor cellular systems. It provides an important interference reduction, simplifying the frequency planning and allowing an efficient use of the spectrum. Furthermore, the millimeter wave band facilitates miniaturization of components and antennas. The use of full monolithic microwave integrated circuit (MMIC) transmitters and receivers will make possible the use of hand held multimedia terminals.

However, in the case of mobile indoor radio communications, multipath propagation causes severe degradations of the transmission quality. To solve this problem and hence prepare the future generation of wide band indoor networks, an accurate and flexible modelling of the channel is necessary. This will allow realistic simulations and the optimization of the communication chain.

The channel can be represented by a linear filter characterized by its impulse response. Extensive works about modelling the impulse response was made in the literature [2], [3], [4]. The path arrival times is one difficult aspect to model. If it is tempting to describe them in terms of a Poisson distribution, it was shown in [5] that, in the case of 60GHz channel in small rooms, this modelling is not accurate. Turin [1], also observing that the Poisson hypothesis was not confirmed by experience, showed in the case of 488, 1280 and 2980MHz

that times of arrival could be modelled by a modified Poisson process, where the Poisson parameter changes when a path arrives. This model was further developed by Suzuki [3] and Hashemi [6]. It is termed the Δk model and based on the fact that echoes arrive in clusters, corresponding to reflections on closely spaced buildings. Saleh and Valenzuela [4] developed a different model in the case of the 7.5GHz indoor channel. They also considered the clusters and introduced two arrival time processes : one for the clusters and one for the echoes in each cluster.

In this paper we investigate the observed data of impulse responses collected in IEMN¹ [5]. We introduce a new distribution, which can be seen as an association of several Poisson processes, to give a new statistical model of the impulse response, especially the arrival times : the α -stable distributions.

In the first part we describe briefly some properties of the stable distribution and an historical review about estimating their parameters. In the second part we present the statistical results of fitting the delays to α -stable distributions. In the third section the proposition (V-A) gives a theoretical justification of modelling the delays by stable distributions and confirms the empirical results.

II. DESCRIPTION OF MEASUREMENT SYSTEM.

A wide band channel sounder based on the measurement of the channel Transfer Function $H(f)$ in the frequency domain [7] has been developed in IEMN. The measured sampled frequency response of the multipath radio channel is converted into the impulse response in the time domain by taking the inverse Fourier transform. The frequency step of 1.25 MHz yields a maximum measurable delay of 800 ns. The frequency span of 2 GHz yields a delay resolution of 0.5 ns. The measurement system has been dimensioned in such a way that the signal-to-noise ratio (SNR) at the network analyser was not less than 10 dB. The apparatus dynamic was of 124 dB. Furthermore, a processing dynamic of 30 dB from the strongest detected path was chosen to obtain reliable results. A transmitted power of 10 dBm was sufficient to guarantee this measurement quality on a TR distance that can reach 45

¹Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologies

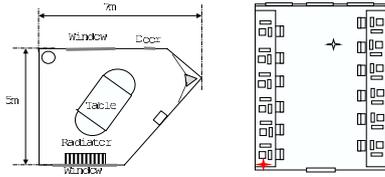


Fig. 1. measurements rooms

m. In our measurements, the environment was kept static. Only the receiver was moved between two measurements by using an automated positioning system that consists in a linear table of 50 cm with a step-motor driven millimeter screw along it. Measurement campaigns were made in rooms presented on [fig 1] using a 60 GHz channel sounder based on a network analyser [5, 7]. Respectively 1140 and 6500 impulse responses were measured in the rooms.

III. ALPHA STABLE DISTRIBUTIONS

The α -stable distribution is a direct generalization of the gaussian distribution and shares many of its familiar properties :

- The convolution stability property, which means that the convolution of two stable distributions is also stable, or in term of random variables the sum of two stable random variables is also a stable one.
- The central limit theorem, which means that every stable random variable may be expressed as a limit, in distribution, of a normalized sum of independents and identically distributed random variables.

Besides, they are parametric distributions, because they are fully described by four parameters.

Since their discovery by Paul Levy in 1925, a vast amount of knowledge has been accumulated about the properties of these probability distributions. On the other hand they have been found to provide useful models for various application fields, especially phenomena with large fluctuations and high variability that are not compatible with the Gaussian models.

Except the Gaussian, the cauchy and the Levy distributions which are special cases of the stable class, there is no exact expression of the probability density function of an α -stable distribution. However we can approximate it through its characteristic function which is given by :

$$\phi(\theta) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & \text{if } \alpha \neq 1 \\ \exp\{-\sigma |\theta| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(\theta) \ln |\theta|) + i\mu\theta\} & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

where

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta > 0 \\ 0 & \text{if } \theta = 0 \\ -1 & \text{if } \theta < 0 \end{cases}$$

and α , σ , β and μ are the four parameters characterizing the stable distribution.

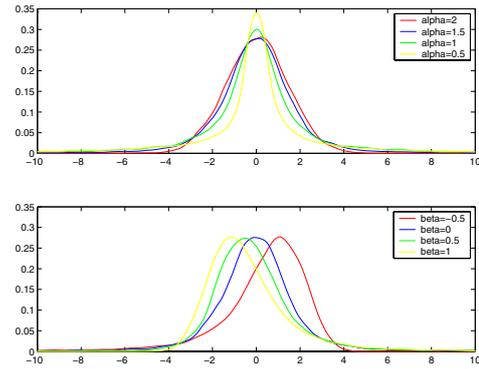


Fig. 2. the probability density function of a stable distribution with $\mu = 0$, $\sigma = 1$ and different values of α and β

- α is called the characteristic exponent ($0 < \alpha \leq 2$) : it measures the thickness of the tail of the distribution. Thus the larger the value of α the less likely it is to observe values which are far from the central location.
- μ is the location parameter ($-\infty < \mu < \infty$) : for instance, in an observed sample the most observations are concentrated about its value. It corresponds to the mean for $1 < \alpha \leq 2$ and to the median for $0 < \alpha \leq 1$
- σ is the dispersion parameter ($\sigma > 0$) : it is like the standard error in the case of a gaussian distribution.
- β is the index of symmetry ($-1 \leq \beta \leq 1$) which characterizes the dissymmetry of the density function about its central location. When $\beta = 1$ we say that the distribution is totally skewed to the right; it is symmetric if $\beta = 0$.

[fig 2] presents the density function obtained for different values of the parameters α and β and illustrates their effect on the behavior and the form of an α -stable distribution.

In practice it is very important to estimate the parameters of a stable distribution from an observed sample especially the index α and the scale parameter σ . Several methods have been proposed in the literature. Among them, maximum likelihood method developed by DuMouchel [8] is asymptotically efficient but difficult to compute. Zolotarev [9] estimates the parameters by the method of moments but requires that the location parameter is known. McCulloch [10] generalized the Famma and Roll [11] method to provide a simple consistent estimator of the parameters. A characteristic function based method was introduced by Koutrelvis [12] by using a regression type estimation. This last method has the importance to be easy to compute and appears to be more accurate if no parameter is a priori known.

IV. STATISTICAL RESULTS

It was shown in [5] that, in the case of the 60GHz channel in small rooms, modelling the delays with a Poisson distribution is not accurate. From the different observed delays, we have noticed an important variability in the realization of arrival delays. We, also, observed the existence of many realization that are considered as outliers for the usual statistical models

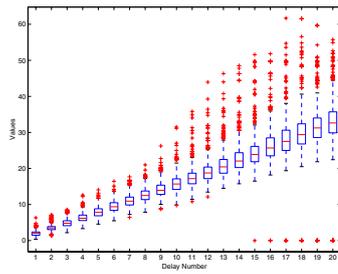


Fig. 3. Box-plot of the observed delays.

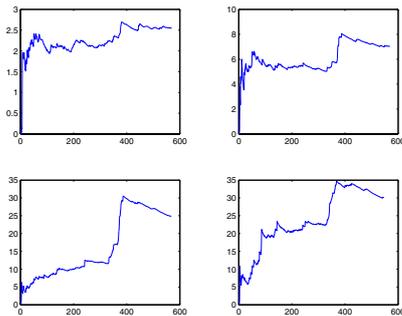


Fig. 4. Test for the infinite variance we present the partial variances of the delays samples.

: for example the box plot in [fig 3] shows clearly this fact, the (+) are outliers.

To confirm the high variability, we have performed the test for infinite variance, by the method presented in [13]. As it is shown by [fig 4], the variance of the delays may be considered as tending towards infinity. We have also made a kernel non parametric estimation of the densities of the delays, we obtained a bell shape curves skewed to the right see [fig 5] which confirms the dissymmetry remarked in the box plots.

This preliminary results show that the delays may be approximated by α -stable random variables. To confirm the stable approach, we have estimated the four parameters characterizing the stable distribution from the delays samples using the Koutrouvelis [12] regression type method for its simplicity and its accurateness [14]. From this observed values we have

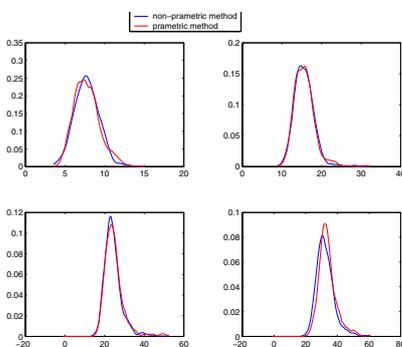


Fig. 5. Examples of estimated densities of the delays by the parametric and the non-parametric method.

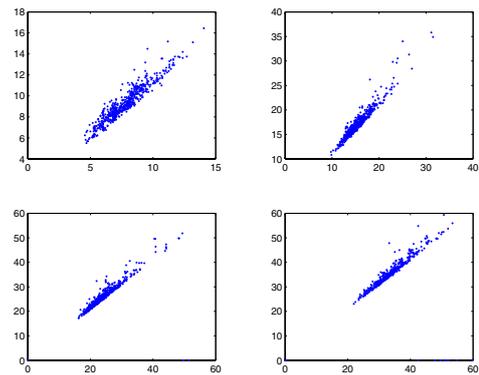


Fig. 6. clouds representing the dependence between consecutive delays

order of arrival	mean delay	order of arrival	mean delay
1	0	22	35,000
2	1,9774	23	37,4238
3	3,4396	24	39,2968
4	4,9040	25	41,2302
5	6,3774	26	42,7980
6	7,8776	27	44,3026
7	9,3246	28	46,1994
8	11,8001	29	47,9919
9	12,8370	30	49,2257
10	14,2232	31	50,7094
11	15,9078	32	52,3222
12	17,5302	33	53,2318
13	19,2500	34	54,9030
14	21,0594	35	55,8073
15	22,8572	36	56,8959
16	24,7044	37	58,0885
17	26,5525	38	59,0987
18	28,4078	39	60,7391
19	30,2190	40	62,7386
20	32,0349	41	63,0094
21	33,8977	42	67,0000

Fig. 7. example of mean delays between arrivals observed in one room.

approximated the theoretical densities and plotted them in the same graphic with the densities obtained by the non parametric method. Thus from the [fig 5] it is clear that the α -stable fits well the probability distribution of the arrival times in the 60GHz channel. This fact was confirmed by a Kolmogorov-Smirnov test performed on the observed and simulated data.

As it was first remarked, in the box plot, the means of the observed delays are increasing see also [fig 7]. A test of spearman shows that, in the case of indoor 60 GHz channel, in 72.5 percent of the observed impulse responses the delays are with independent increments. The [fig 6] shows the existence of a linear dependence between two consecutive delays. Assuming that the delays between paths are constant in a given room, and motivated by its simplicity and its low cost of computation we have adopted a linear model as follows :

$$Y = AX + \epsilon \quad (2)$$

where $Y = (\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_N)$, $X = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1})$, N is the number of arrivals, and ϵ is an α -stable white noise see [fig 8] for the estimation of its parameters. A is the matrix of the linear model parameters. Dependence between increment could be modelled by a diagonal matrix since we supposed that the delays are with independent increment. The estimation of A was made by the least absolute deviation method (LAD) (see [13] for its compatibility with α -stable models and its consistence). The [fig 9] represent on the same graphic the observed delays and those predicted using the linear model

Order of arrivals	Alpha	Beta	Sigma	mu
1	1.9288	1.0000	0.3558	0.0000
2	1.7530	1.0000	0.3536	-0.0000
3	1.8738	1.0000	0.3724	0.0000
4	1.8441	1.0000	0.4153	0.0000
5	1.8632	1.0000	0.3734	-0.0000
6	1.7902	1.0000	0.3493	-0.0000
7	1.7382	1.0000	0.3587	0.0000
8	1.7218	1.0000	0.3738	-0.0000
9	1.6371	1.0000	0.4081	-0.0000
10	1.6541	1.0000	0.3776	-0.0000
11	1.6710	1.0000	0.4183	0.0100
12	1.5468	0.8960	0.4392	-0.0000
13	1.5615	0.7069	0.4433	0.0137
14	1.4967	0.8095	0.4631	0.0051
15	1.2874	1.0000	0.4465	0.0041
16	1.6801	0.9214	0.5007	0.0042
17	1.8062	1.0000	0.5437	-0.0000
18	1.6080	1.0000	0.5416	0.0073
19	1.3609	1.0000	0.4976	0.0074
20	1.5749	1.0000	0.5343	0.0114
21	1.6067	1.0000	0.5817	0.0043
22	1.5774	1.0000	0.5725	0.0085
23	1.4483	1.0000	0.6110	0.0328
24	1.3734	1.0000	0.5580	0.0114
25	1.2919	1.0000	0.4786	0.0000
26	1.3383	1.0000	0.6261	0.0040
27	1.2975	1.0000	0.4939	0.0037
28	1.3407	1.0000	0.5422	-0.0000
29	1.3021	1.0000	0.5525	0.0073
30	1.3449	1.0000	0.6161	0.0041
31	1.5518	1.0000	0.6262	0.0000

Fig. 8. Example of the α -stable estimated parameters fitted to the residuals of the linear model (2).

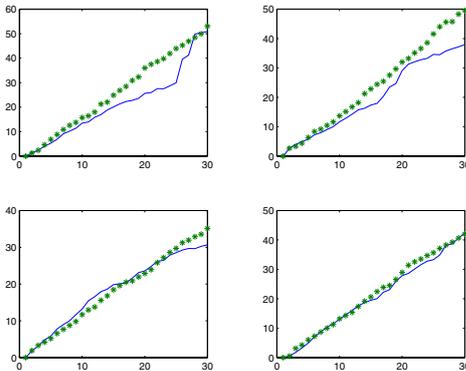


Fig. 9. Examples of real delays(plotted with stars) and the corresponding predicted delays using the linear model (2)

(2). Also a spearman test reveals the linear model residuals $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1})$ are independents.

V. THEORETICAL TAIL PROBABILITY OF THE DELAYS BETWEEN ARRIVALS

The aim of this section is to establish the theoretical probability distribution of the delays between arrivals in the impulse response of the 60Ghz channel and hence justify the results observed in the experimental data. Each received ray has passed through a countable number of obstacles encountered in the transmission environment. Each obstacle reflects it and redirects the ray to another obstacle or eventually to the receiver. Note that many rays may arrive at the same time but this fact will only affect the amplitude of the signal and not the time of arrivals.

To formulate mathematically our problem, we define : N , the number of obstacles that a ray has effectively encountered before arriving to the receiving antenna (N can tend towards infinity), $d_{k,i}$, the duration between the reflection on the k^{th}

and the $(k+1)^{th}$ reflectors for a given path i . T , the total transmission duration : $T = \sum_{k=1}^N d_{k,i}$. If we denote by t_0 the deterministic value of the first path time of arrival, the i^{th} ray observed in the impulse response arrives with the delay :

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{N_i} d_{k,i} - t_0. \quad (3)$$

Since the number N of reflectors encountered by a received ray depends on the random structure and geometry of the room, it is an integer random variable. Similarly the time to pass from an obstacle to another one depends on the random distribution and positions of the obstacles existing in the environment, hence we will suppose that the d_k are mutually independents and identically distributed random variables. In addition we suppose that they are independent of N .

A basic assumption in our model, as well as many of the previous models of the impulse response channel [13], is that the number of obstacles (that a received ray has effectively encountered in his path the receiver) is a Poisson point process with parameter increasing with the order of arrival². This assumption is inspired from the fact that : in the case of static environment, which was the case of measurements rooms : the long time takes an arrived ray to reach the receiver, the more likely it has followed a complicated path and hence has encountered many obstacles. We formulate this assumption by :

H1) : the number of encountered obstacles, by the i^{th} arrived ray, is a Poisson random variable with parameter δ_i^α where $(0 < \alpha < 2)$ and δ_i is positive number that increases to infinity as the order of arrival i increases : more precisely δ_i^α is the mean number of obstacles encountered by the i^{th} arrived path of duration δ_i . The free parameter α controls how the mean number of obstacles tends toward infinity as time passes. It can be linked to the characteristics of the transmission environment (for instance the disposition of the obstacles in the room...etc).

In reality, when the number of encountered obstacles is very large (this means that the ray follows a very complicated path to arrive), the power of the received signal will be very small, consequently the passage from one obstacle to another becomes increasingly difficult. In other words, the probability to encounter a next obstacle will decrease with the increase of its distance from its precedent. It will also decrease with the growth of the time passed since the first emission of the ray. For convenience,³ we suppose the next hypothesis on the probability distribution of $d_{k,i}$:

H2) : Suppose that the probability distribution of the delay $d_{k,i}$ to pass from an obstacle to another one is given by :

$$P(d_{k,i} > x) = \begin{cases} \delta_i^{-\alpha} x^{-\alpha} & \text{if } x > \frac{1}{\delta_i} \\ 1 & \text{if } x \leq \frac{1}{\delta_i}. \end{cases}$$

²Arrivals are ordered in time so saying that the order of arrival increases means that the time passes.

³Note that we haven't verified, physically or by experience, this two hypothesis.

A. Proposition

Under the hypothesis (H_1) and (H_2) the delay time given by (3) is a random variable verifying :

- if $0 < \alpha < 1$ the random variable τ_i converges in distribution, as δ_i goes to infinity, to an α -stable distribution totally skewed to the right with a scale parameter given by the formula $\sigma^\alpha = \Gamma(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0$.
- if $1 < \alpha < 2$ then the random variable $\tau_i - \frac{\alpha}{\alpha-1} [\frac{1}{\delta_i}]^{1-\alpha}$ converges in distribution, as δ_i goes to infinity, to an α -stable distribution totally skewed to the right with a scale parameter verifying $\sigma^\alpha = \Gamma(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0$.

where Γ is the usual gamma function.

Proof is given in appendix.

B. Remarks

This proposition gives a theoretical justification for modelling the delays, in the impulse response of the 60GHz channel, by α -stable distributions, and also confirms the empirical results, and curve fitting of their distributions. As we noticed when fitting the theoretical distribution to the measured data, accuracy increases with the path order of arrival. This fact can occur because the complication of the paths let δ goes to zero and hence the sum (3) becomes stable due to this last proposition. It also explain the right dissymmetry of the observations about their means. The estimation of the index of variability gives values between one and two which let $\delta^{1-\alpha}$ increases slowly to infinity as delta goes to 0 which is the case in our observed means.

VI. CONCLUSION

Channel paths' arrival times play an important role on the behavior of a communication system. An accurate model is then necessary for simulation and development of communication chains. Previous models, based on Poisson processes are difficult to generalize to new sets of measurements. We have proposed in this paper a new approach with α -stable distributions. In contrast of the Poisson distribution they have four free parameters that can be adjusted to provide a good fit. On the other hand they can be seen as a mixture of Poisson processes which leads to a theoretical justification of their use. Besides, we have shown a good fit between measurements and those distributions and efficient methods exist for the calculation of the parameters. Those distributions appear to be a good solution for modelling the paths' arrival times for the 60GHz channel and could certainly be extended to new configurations and frequency bands.

APPENDIX

Proof: For simplicity and without loss of generality, we omit the index i and we take $\delta = \frac{1}{\delta_i}$. We will show the proposition (V-A) when $1 < \alpha < 2$. The other case ($0 < \alpha < 1$) is demonstrated in [15]. For this purpose it suffices to show that the characteristic function of $Y_\delta = \tau - \frac{\alpha}{\alpha-1} \delta^{1-\alpha}$ converges to the characteristic function of an α -stable distribution. By using the condition of

independence we have :

$$\begin{aligned}\Phi_\tau^\delta(\theta) &= E[e^{i\theta Y_\delta}] \\ &= E\left[\exp\left(i\theta \sum_{k=1}^N d_k - \frac{\alpha}{\alpha-1} \delta^{1-\alpha}\right)\right] \\ &= e^{i\frac{\alpha}{\alpha-1}\theta\delta^{1-\alpha}} E\left[[Ee^{i\theta d_1}]^N\right].\end{aligned}$$

Since N is a poisson random variable with parameter $\delta^{-\alpha}$ so the expectation in the second hand side of the last equality is obtained through it's factorial generating function, hence :

$$E[Ee^{i\theta d_1}]^N = \exp[\delta^{-\alpha}(Ee^{i\theta d_1} - 1)]$$

so,

$$\begin{aligned}\Phi_\tau^\delta(\theta) &= \exp[\delta^{-\alpha}(Ee^{i\theta d_1} - 1) - i\theta\frac{\alpha}{\alpha-1}\delta^{1-\alpha}] \\ &= \exp[\delta^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta\zeta} - 1) dF_\delta(\zeta) - i\theta\frac{\alpha}{\alpha-1}\delta^{1-\alpha}] \\ &= \exp\left[\int_\delta^\infty \alpha \frac{e^{i\theta\zeta} - 1}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta - i\theta\frac{\alpha}{\alpha-1}\delta^{1-\alpha}\right] \\ &= \exp\left[\alpha \int_\delta^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1 - i\theta\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta\right].\end{aligned}$$

As δ converges to zero, then for $\theta \geq 0$ the characteristic function is equal :

$$\Phi_\tau(\theta) = \exp\left[\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1 - i\theta\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta\right]$$

by a simple integration by parts and the fact that $1 < \alpha < 2$ we have :

$$\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1 - i\theta\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta = i\theta \int_0^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1}{\zeta^\alpha} d\zeta$$

the integral in the second hand side of the last equality is obtained through the characteristic function of the gamma distribution calculated in Feller [16] that is for every $0 < \alpha < 1$ and $\theta \geq 0$ we have :

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta = -\theta^\alpha \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\alpha} e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}}$$

which implies that in the case of $1 < \alpha < 2$ and $\theta \geq 0$ we have:

$$\begin{aligned}\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\theta\zeta} - 1 - i\theta\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta &= -i\theta^\alpha \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{(\alpha - 1)} e^{-i\pi\frac{\alpha-1}{2}} \\ &= -|\theta|^\alpha \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{(1 - \alpha)} e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}} \\ &= -|\theta|^\alpha \Gamma(1 - \alpha) e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}}\end{aligned}$$

If θ is negative we use the fact that this last integral is equal to the conjugate of the second hand side of the last equality, which leads to :

$$\Phi_\tau(\theta) = \exp[-|\theta|^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) \Gamma(1 - \alpha) [1 - i \text{sign}(\theta) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]]$$

which is nothing but the characteristic function of an α -stable distribution totally skewed to the right with scale parameter verifying $\sigma^\alpha = \Gamma(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) > 0$. ■

REFERENCES

- [1] Smulders P. (2002), "Exploiting the 60 GHz band for local wireless multimedia access : prospects and future direction", IEEE Communications Magazine, January 2002, pp 140-147.
- [2] Turin G. L. , Calpp F. D. ,Johnston T. L. ,Fine S. B. andLavry D. , (1972), "A statistical model of urban multipath propagation", IEEE, trans., Veh. Tech., vol. VT-21, pp 1-9.
- [3] Suzuki H. (1977) "A statistical model for urban radio propagation", IEEE Trans., commun., vol. COM-25, pp 673-680.
- [4] Saleh A.A.M , Valenzuela R.A. , A statistical model for indoor multipath propagation, IEEE Journal on selected areas of communication, Vol. SAC-5, 128-137, February 1987.
- [5] Clavier L. ,Rachdi M., Fryziel M. , Delignon Y. , LeTuc V., Garnier C. , Rolland P.A., (2001) " Wide band 60GHz indoor channel : Characterization and statistical modelling" IEEE 54th VTC fall, Atlantic City; NJ USA, 7-11 October, 2001.
- [6] Hashemi H. (1979) "Simulation of the urban propagation channel". IEEE Transactions on Vehicular Technology , vol. 28, no. 3, pp. 213-225, August 1979.
- [7] Michel FRYZIEL, Christophe LOYEZ, Laurent CLAVIER, Nathalie ROLLAND, Paul Alain ROLLAND, "Path loss model of the 60 GHz indoor radio channel", Microwave and optical technology letters, 2002.
- [8] Dumouchel W.H., (1983) "estimating the stable index α in order to measure tail thickness : a critique" Amer.statist., vol. 11, N.4,pp, 1019-1031.
- [9] Zolotarev V. M., (1986) "one dimensional stable distributions", Providence, RI, American Mathematical Society.
- [10] McCulloch J. H. , (1986), "simple consistent estimators of stable distribution parameters, Comm.Statist.Simula., Vol. 14, N 4, pp 1109-1136.
- [11] Famma E.F. and Roll, (1971) "parameter estimates for symmetric stable distributions", J.Amer.statist.assoc., vol. 66 (June), pp. 331-338.
- [12] Koutrouvelis I.A. , (1981) "An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws", Commun.Statist.Simula, Vol. 10, N 1, pp17-28.
- [13] Nikias C. L. , Shao M. (1996), "Signal processing with alpha-stable distributions and applications" J.Wiley, Wiley inter science.
- [14] Weron R. Wroclow, "Performance of the estimators of stable law parameters", AMS 1991 subject classifications.primary 60E07,62G07.
- [15] Samorodnitsky G. and Taqqu M.S. , (1994) "Stable non Gaussian random processes : stochastic model with infinite variance", New York, Chapman & Hall.
- [16] Feller W. (1971) "an introduction to probability theory and it's applications", Vol 2, New York, J.Wiley.

5.2 Conclusion sur ce chapitre

Ce travail a été le point de départ des travaux développés dans cette thèse. En effet, la technique de mesure (sondage du canal) est basée sur un sondeur du canal qui calcule directement sa fonction de transfert. Cette dernière est exprimée comme transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle dont on déduit les paramètres par une série de prétraitements (transformée de Fourier inverse (IFFT), recherche des trajets, calcul des amplitudes, calcul des phases,...etc). Au cours de ce pré-traitement, nous perdons beaucoup d'informations sur le plan des techniques numériques (IFFT, recherche des maximums...etc), mais notamment sur les estimations statistiques car avec ce traitement nous réduisons le nombre des données, utilisées dans l'estimation : de 4 à 5% des données réellement recueillies (de 1601 observations on retient seulement 40 à 60 observations). Les estimations auraient pu être plus précises si nous avions travaillé directement sur les fonctions de transferts. Ceci nous ramène à trouver une représentation spectrale des processus harmonisables par une bimesure F . Cette dernière caractérise la fonction de transfert et par conséquent la réponse impulsionnelle du canal. Une représentation en série de Lepage permettra donc de calculer directement la réponse impulsionnelle à partir de la bimesure F . En faisant une intégration déterministe (par rapport aux fréquences) sur cette représentation en série, nous déduisons une formule théorique semblable à la réponse impulsionnelle discrète donnée dans ce chapitre. Ce travail est en cours de publication.

Conclusion générale et perspectives

Le premier résultat de cette thèse concerne une nouvelle représentation spectrale des processus symétriques α -stables. Il s'agit d'une correspondance reliant un espace fonctionnel à l'espace vectoriel engendré par un processus symétrique α -stable ξ non nécessairement à accroissements indépendants. Cette dernière condition d'indépendance a été remplacée par une condition plus faible que nous avons introduite et appelée condition (O). Elle porte sur la structure de la transformation de Fourier de la mesure spectrale correspondant aux accroissements de ξ . Sous cette nouvelle condition, nous avons construit une bimesure F permettant de déterminer la loi du processus considéré. Dans un premier temps, nous avons exploré les caractéristiques de la bimesure F ainsi que ses liens avec la variation et la régularité du processus ξ . Dans un deuxième temps, nous avons donné une représentation double intégrale, au sens de Morse-Transue par rapport à la bimesure F , de la fonction de covariation. Cette représentation est semblable à celle de la covariance des processus du second ordre. Elle généralise celle établie pour les processus représentés comme intégrale stochastique par rapport à un processus symétrique α -stable à accroissements indépendants. L'intérêt de ce résultat se manifeste clairement dans le cas des processus harmonisables. En effet, la bimesure F peut être exprimée comme une transformation de Fourier inverse de la fonction de covariation. Dans ce cas, une classification de ces processus a été donnée à partir de la structure de la bimesure F . C'est ainsi que nous avons introduit les processus périodiquement covariés et que nous avons donné la structure de la bimesure qui les caractérise.

La clé principale de cette représentation spectrale est la propriété d'additivité de la covariation dont la condition (O) est une condition suffisante. La question qu'on peut se poser est la suivante : est-ce que cette condition est nécessaire ? Nous sommes persuadés que la réponse est oui mais sa démonstration reste dans les perspectives de nos recherches futures.

En remarquant que si la bimesure F vérifie (2.44), nous pouvons construire une semi-norme

sur l'espace des fonctions réelles ou complexes par : $\|f\| = \left(\int \int f(\lambda) \cdot (f(\lambda'))^{<\alpha-1>} F(d\lambda, d\lambda') \right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Cela nous permettra de montrer que si (2.61) est une fonction caractéristique, elle serait celle d'une distribution symétrique α -stable¹⁹. Une question intéressante à traiter est de trouver les conditions sur la bimesure F pour que cette fonction soit une fonction caractéristique. Plus précisément, est-ce que la condition (2.44) est suffisante pour cela ? Dans ce cas, nous pouvons donner une construction des processus SaS et vérifiant la condition (O) en suivant la même démarche que pour la construction des intégrales stochastiques par rapport à une mesure aléatoire SaS à accroissements indépendants. Voir Samnodnitsky et Taqqu [101].

Dans le chapitre 3, nous avons fourni une représentation en série de Lepage des processus SaS étudiés dans cette thèse : à savoir les processus vérifiant la condition (O) ou plus généralement la propriété d'additivité de la covariation. Cela nous permet de montrer l'existence de ces processus ainsi qu'une technique qui permet leur simulation. Après avoir donné les conditions générales de l'existence de cette décomposition en série, nous avons introduit un exemple fondamental qui permet de construire une représentation de la mesure aléatoire $d\xi$. Ce résultat a été généralisé pour les intégrales stochastiques par rapport à $d\xi$. Nous avons également discuté l'existence d'une correspondance reliant chaque bimesure F à des couples de variables aléatoires.

Pour rendre les processus, étudiés dans les chapitres 2 et 3, plus accessibles aux praticiens, des techniques d'estimation ont été discutées dans le quatrième chapitre. Au début, nous nous sommes intéressés aux processus périodiquement covariés. Nous avons commencé par estimer les coefficients de Fourier de la fonction de covariation d'un processus harmonisable périodiquement covarié. Cette estimation est basée sur le comportement asymptotique des moments d'ordre proche de α . L'intérêt de cette technique est qu'elle est simple à manipuler et semblable aux techniques d'estimation dans les processus du second ordre. A partir de la structure de la bimesure caractérisant les processus périodiquement covariés, nous avons montré que les coefficients de Fourier peuvent être exprimés comme une transformation de Fourier de mesures spectrales. L'estimation de ces dernières a été obtenue par lissage des estimateurs des coefficients de Fourier. Nous avons vérifié que ces estimateurs sont asymptotiquement sans biais. La convergence presque sûre a été établie sous une condition de mélange fort.

Dans la dernière partie du chapitre 4, nous nous sommes intéressés au cas général des processus harmonisables non stationnaires. Nous avons introduit le fondement de notre technique d'es-

¹⁹ Pour montrer cela il suffit d'utiliser la formule (2.61) et la définition 1.3.1 d'une loi stable multivariée

timation. Elle est basée sur le fait que la densité de la bimesure F (densité spectrale) s'exprime comme transformation de Fourier inverse de la fonction de covariation. Ainsi, une estimation de cette dernière permet de construire un estimateur de la densité spectrale. Nous avons montré que l'estimateur ainsi introduit est asymptotiquement sans biais.

Les travaux d'estimation sont loin d'être finis. En effet, que ce soit pour le cas des processus périodiquement covariés ou le cas général des densités de la bimesure F , nous n'avons donné qu'une méthode d'estimation ponctuelle des densités spectrales. Afin de rendre ces estimateurs plus utiles notamment en pratique, d'autres modes de convergence doivent être prouvés (convergence dans L^1 , la convergence en probabilités et en loi...etc). Comme perspective, nous citons l'étude des choix optimaux des paramètres de lissage des noyaux utilisés dans l'estimation. Cette notion d'optimalité peut être étudiée pour des critères de comparaison d'estimateurs : critères de validation croisée en minimisant le **MISE**, **ISE**... Un autre point qui serait important dans les domaines appliqués, notamment en traitement du signal, est d'estimer la densité spectrale à partir des observations discrètes du processus. Plus précisément, estimer les densités spectrales à partir des observations du processus à des instants conduits par échantillonnages poissonien ou autres...etc. Ces techniques d'échantillonnage permettent d'éviter les phénomènes d'aliasing.

Bibliographie

- [1] R. J. ADLER, S. CAMBANIS, AND G. SAMORODNITSKY, *On stable markov processes*, Stochastic Processes and their Applications, 34 (1990), pp. 1–17.
- [2] V. AKGIRAV AND G. BOOTH, *The stable-law model of stock returns*, Journal of economics and statistics, 6 (1988), pp. 51–57.
- [3] T. W. ANDERSON, *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley and Sons, 1971.
- [4] A. ASTRAUSKAS, *Limit theorems for sums of linearly generated random variables*, Lithuanian Mathematical Journal, 23 (1983), pp. 127–134.
- [5] A. ASTRAUSKAS, J. LEVY, AND M. S. TAQQU, *The asymptotic dependence structure of the linear fractional levy motion*, Lietuvos Matematikos Rinkiny (Lithuanian Mathematical Journal)., 31 (1) (1991), pp. 1–28.
- [6] L. BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, PhD thesis, à la Faculté des Sciences de PARIS GAUTHIER-WILLARS, 1900.
- [7] A. BANERJEE, P. BURLINA, AND R. CHELLAPPA, *Adaptive target detection in foliage-penetrating sar images using alpha-stable models*, IEEE Transactions on Image Processing, 8 (12) (1999), pp. 1823–1831.
- [8] O. E. BARNDORFF-NIELSEN, T. MIKOSCH, AND S. I. RESNICK, *Lévy Processes : Theory and Applications*, Boston : Birkhäuser, 2001.
- [9] H. BERGSTRÖM, *On distribution functions with a limiting stable distribution function*, Arkiv. Mat, 2 (1953), pp. 463–474.
- [10] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, New York : Wiley, 1968.
- [11] R. BLATTBERG AND N. GONEDES, *A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices*, Journal of Business, 47 (1974), pp. 244–280.

- [12] S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, 1932.
- [13] D. BOSQ AND J. LECOUTRE, *Théorie de l'estimation fonctionnelle*, Economica, 1987.
- [14] J. BRETAGNOLLE, D. DACUNHA-CASTELLE, AND J. KRIVINE, *Lois stables et espaces l^p* , Annals de l' Institut Henri Poincaré, 2, section B (1966), pp. 231–259.
- [15] P. BROCKWELL AND R. DAVIS, *Time Series : Theory and Methods*, New York : Springer-Verlag, 1987.
- [16] S. CAMBANIS, *Complex symmetric stable variables and processes*, Contribution to Statistics : P.K sen editions, Contribution to statistics (Essays in honor of Norman L. Johnson), (1983), pp. 63–79.
- [17] S. CAMBANIS AND A. G. MIAMEE, *On prediction of harmonizable stable processes*, Sankhya : The Indian Journal of Statistics, V, 51 (1989), pp. 269–294.
- [18] S. CAMBANIS AND G. MILLER, *Some path properties of p^{th} order and symmetric stable processes*, The Annals of Probability, 8 (1980), pp. 1148–1156.
- [19] S. CAMBANIS AND G. MILLER, *Linear problems in p^{th} order and symmetric stable processes*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 41 (1981), pp. 43–69.
- [20] S. CAMBANIS, G. SAMORODNITSKY, AND M. TAQQU(EDS.), *Stable Processes and Related Topics*, Volume 25 of Progress in Probability, Boston : Birkhäuser, 1991.
- [21] S. CAMBANIS AND A. R. SOLTANI, *Prediction of stable processes : Spectral and moving average representation*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 66 (1984), pp. 593–612.
- [22] J. CHAMBERS, C. MALLOWS, AND B. STUCK, *A method for simulating stable random variables*, Journal of the American Statistical Association, 71 (354) (1976), pp. 340–344.
- [23] J. CHAMBERS, C. MALLOWS, AND B. STUCK, *Correction to : "a method for simulating stable random variables"*, Journal of the American Statistical Association, 82 (1987), p. 704.
- [24] S. L. CHEKHMENOK, *On the calculation of the density and distribution function of the probabilities of strictly symmetric stable random variables*, Vestn. Beloruss. Gos. Univ. Ser. 1 Fiz. Mat. Inform, 3 (2003), pp. 95–98.
- [25] H. CRAMÉR AND M. LEADBETTER, *Stationary and Related Stochastic Processes*, New York : Wiley, 1967.

-
- [26] R. DAHLHAUS, *Fitting time series models to nonstationary processes*, The Annals of Statistics, 25 (1997), pp. 1–37.
- [27] J. DEDECKER AND P. DOUKHAN, *A new covariance inequality and applications*, Stochastic Process. Appl, 106 (2003), pp. 63–80.
- [28] D. DEHAY, *On a class of asymptotically stationary harmonizable processes*, Journal of Multivariate Analysis, 22 (1987), pp. 251–257.
- [29] D. DEHAY, *Spectral analysis of the covariance of the almost periodically correlated processes*, Stochastic processes and their applications, 50 (1994), pp. 315–330.
- [30] D. DEHAY AND H. L. HURD, *Representation and estimation for periodically and almost periodically correlated random processes*, Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, (1993).
- [31] D. DEHAY AND J. LESKOW, *Testing stationarity for stock market data*, Economics Letters, 50 (1996), pp. 205–212.
- [32] L. DESTAMPES, *Traitement statistique des processus alpha-stables : mesures de dépendance et identification des AR stables.*, Thèse de doctorat de l’ Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- [33] J. L. DOOB, *The brownian movement and stochastic equations*, The Annals of Mathematics, 43 (1942), pp. 351–369.
- [34] P. DOUKHAN, *Mixing : properties and examples*, Springer-Verlag, 1994.
- [35] ———, *Models, inequalities, and limit theorems for stationary sequences*, Theory and applications of long range dependence (Doukhan et alii ed.) Birkhauser, (2002), pp. 43–101.
- [36] R. M. DUDLEY AND M. KANTER, *Zero-one laws for stable measures*, Proceedings of the American Mathematical Society, 45 (1974), pp. 245–252.
- [37] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part I*, Wiley, New York, 1958.
- [38] A. EINSTEIN, *On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*, Annals of Physics, 17 (1905), pp. 891–921.
- [39] E. FAMA, *The behavior of stock market prices*, Journal of Business, 38 (1965), pp. 34–105.
- [40] E. FELDHEIM, *Étude de la stabilité des lois de probabilité.*, PhD thesis, Imprimerie et librairie de la ville, 1937.

- [41] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, New York : Wiley(2nd ed.), 1971.
- [42] T. FERGUSON AND M. KLASS, *A representation theorem of independent increment processes without gaussian component*, *Annals of Mathematical Statistics*, 43 (1972), pp. 1634–1643.
- [43] W. A. GARDNER, *Statistical spectral analysis : a nonprobabilistic theory*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1986.
- [44] B. GAREL, L. D’ESTAMPES, AND D. TJOSTHEIM, *Revealing some unexpected dependence properties of linear combinations of stable random variables using symmetric covariation*, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 33 (2004), pp. 769–786.
- [45] B. GAREL AND M. HALLIN, *Rank-based autoregressive order identification*, *Journal of the American Statistical Association*, 94 (1999).
- [46] E. G. GLADYSHEV, *Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter*, *Theory Prob. and Appl*, 8 (1963), pp. 173–177.
- [47] V. GNEDENKO AND A. N. KOLMOGOROV, *Limit distributions for sums of independent random variables adisson-wesley publ, Co., Cambridge, Mass, (1954).*
- [48] C. D. HARDIN, *Spectral representation of symmetric stable processes*, *Journal of Multivariate Analysis*, 12 (1982), pp. 385–401.
- [49] J. HOROWITZ, *Une remarque sur les bimesures*, *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 11 (1977), pp. 59–64.
- [50] Y. HOSOYA, *Discrete time stable processes and their certain properties*, *The Annals of Probability*, 6 (1978), pp. 94–105.
- [51] ———, *Harmonizable stable processes*, *Probability Theory and Related Fields*, 60 (1982), pp. 517–533.
- [52] B. D. HUGHES, M. F. SHLESINGER, AND E. W. MONTROLL, *Random walks with self-similar clusters*, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 78 (1981), pp. 3287–3291.
- [53] H. HURD, *Nonpararnetric time series analysis for periodically correlated processes*, *IEEE Transactions On Information Theory*, 35 (1989).

-
- [54] ———, *Representation of strongly harmonizable periodically correlated processes and their covariances*, Journal of Multivariate Analysis, 29 (1989), pp. 53–67.
- [55] ———, *Correlation theory of almost periodically correlated processes*, Journal of Multivariate Analysis, 37 (1991), pp. 24–45.
- [56] K. ITO, *Stochastic integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20 (1944).
- [57] A. JANIKI AND A. WERON, *Simulation and Chaotic Behavior of Stable Processes*, Marcel Dekker, 1993.
- [58] M. KANTER, *Linear sample spaces and stable processes*, Journal of Functional Analysis, 9 (1972).
- [59] H. KARHUNEN, *Über lineare methoden in der wahrscheinlich-keitsrechnung*, Ann. Acad. Science Fenn, (1947).
- [60] A. Y. KHINCHINE, *Korrelationstheorie der stationären stochastischen prozesse*, Mathematische Annalen, 109 (1934), p. 604.
- [61] A. Y. KHINCHINE AND P. LÉVY, *Sur les lois stables*, Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences, Academie des science (Paris), 202, (Serie A) (1936), pp. 374–376.
- [62] I. KLUVANEK, *Remarks on bimeasures*, Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (1981), pp. 233–239.
- [63] A. N. KOLMOGOROV, *Über die analytischen methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Annalen, 104 (1931), pp. 415–458.
- [64] ———, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin : Springer, 1933.
- [65] J. KUELBS, *A representation theorem for symmetric stable processes and stable measures on h* , Probability Theory and Related Fields, 26 (1973), pp. 259–271.
- [66] R. LEPAGE, *Multidimensional infinitely divisible variables and processes. part i : Stable case*, Springer Lecture Notes in Math, 1391 (1990), pp. 153–163.
- [67] K.-S. LII AND M. ROSENBLATT, *Spectral analysis for harmonizable processes*, Annals of Statistics, 30 (2002), pp. 258–297.
- [68] K. S. LII AND M. ROSENBLATT, *Estimation for almost periodic processes*, The Annals of Statistics, 34 (2006), pp. 1115–1139.

- [69] M. LOÈVE, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Herman : Paris, France, 1948.
- [70] ———, *Probability Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1955.
- [71] P. LÉVY, *Théorie des erreurs. la loi de gauß et les lois exceptionnelles*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 52 (1924), pp. 49–85.
- [72] ———, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1954.
- [73] A. MAKAGON AND V. MANDREKAR, *The spectral representation of stable processes : Harmonizability and regularity*, Probability Theory and Related Fields, 85 (1990), pp. 1–11.
- [74] B. B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, San Francisco : Freeman, 105 (1982).
- [75] B. B. MANDELBROT AND J. W. V. NESS, *Fractional brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, 10 (1968), pp. 422–437.
- [76] E. MASRY, *Alias-free sampling : An alternative conceptualization and its applications*, IEEE Transactions on Information Theory, 124 (1978).
- [77] ———, *The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional brownian motion*, Information Theory, IEEE Transactions on, 39 (1993), pp. 260–264.
- [78] E. MASRY AND S. CAMBANIS, *On the reconstruction of the covariance of stationary gaussian processes observed through zero-memory nonlinearities—part ii (corresp.)*, Information Theory, IEEE Transactions on, 26 (1980), pp. 503–507.
- [79] ———, *Spectral density estimation for stationary stable processes*, Stochastic processes and their applications, 18 (1984), pp. 1–31.
- [80] D. L. MCLEISH, *Invariance principles for dependent variables*, Probability Theory and Related Fields, 32 (1975), pp. 165–178.
- [81] G. W. MILLER, *Some results on symmetric stable distributions and processes*, PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill., 1977.
- [82] E. W. MONTROLL AND M. F. SHLESINGER, *Maximum entropy formalism, fractals, scaling phenomena, and 1/f noise : A tale of tails*, Journal of Statistical Physics, 32 (1983), pp. 209–230.
- [83] M. MORSE AND W. TRANSUE, *C-bimeasures λ and their integral extensions*, The Annals of Mathematics, 64 (1956), pp. 480–504.

-
- [84] C. L. NIKIAS AND M. SHAO, *Signal Processing With Alpha-stable Distributions and Applications*, New York :Wiley, 1996.
- [85] E. PARZEN, *On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series*, The Annals of Mathematical Statistics, 28 (1957), pp. 329–348.
- [86] ———, *On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series*, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 20, No. 2 (1958), pp. 303–322.
- [87] ———, *Time series analysis papers*, Holden-Day, 1967.
- [88] M. B. PRIESTLEY, *Spectral analysis and time series*, Academic Press New York, 1981.
- [89] ———, *Non-linear and non-stationary time series analysis*, London : Academic Press, 1988, (1988).
- [90] M. M. RAO, *Harmonizable processes : Structure theory*, L'enseignement Mathématique (Essays in Honor of prof. S. Bochner), 28 (1982), pp. 295–351.
- [91] ———, *Measure Theory and Integration*, John Wiley and Sons, 1987.
- [92] E. RIO, *A maximal inequality and dependent marcinkiewicz-zygmund strong laws*, The Annals of Probability, 23 (1995), pp. 918–937.
- [93] ———, *Theorie asymptotique des processus aleatoires faiblement dependants*, Collection Mathematiques et Applications 31, Springer, Berlin, 2000.
- [94] M. ROSENBLATT, *Remarks on some nonparametric estimates of a density function*, The Annals of Mathematical Statistics, 27 (1956), pp. 832–837.
- [95] J. ROSINSKI, *Minimal integral representations of stable processes*, To appear in Probability and Mathematical Statistics, 26(1).
- [96] ———, *On series representations of infinitely divisible random vectors*, The Annals of Probability, 18 (1990), pp. 405–430.
- [97] R. SABRE, *Estimation de la densité de la mesure spectrale mixte pour un processus symétrique stable strictement stationnaire*, Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique, 319 (1994), pp. 1307–1310.
- [98] ———, *Spectral density estimation for stationary stable random fields*, Applicationes Mathematicae Journal, 2 (1995), pp. 107–133.

- [99] ———, *Discrete estimation of spectral density for symmetric stable process*, STATISTICA, 60 (2000), pp. 497–520.
- [100] ———, *Aliasing free for stable random fields*, The Egyp. Statistical journal, 46 (2002), pp. 53–75.
- [101] G. SAMORODNITSKY AND M. S. TAQQU, *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance*, Chapman & Hall, 1994.
- [102] M. SCHILDER, *Some structure theorems for the symmetric stable laws*, The Annals of Mathematical Statistics, 41 (1970), pp. 412–421.
- [103] S. TEITLER, A. K. RAJAGOPAL, AND K. L. NGAI, *Relaxation processes and time-scale transformations*, Physical Review A, 26 (1982), pp. 2906–2912.
- [104] J. W. TUKEY, *Non-parametric estimation, ii- statistically equivalent blocks and tolerance regions - the continuous case*, Annals of Mathematical Statistics, 18 (1947), pp. 529–539.
- [105] ———, *The future of data analysis*, Annals of Mathematical Statistics, 33 (1962), pp. 1–67.
- [106] V. V. UCHAIKIN AND V. M. ZOLOTAREV, *Chance and Stability : Stable Distributions and Their Applications*, VSP, 1999.
- [107] B. J. WEST AND V. SESHADRI, *Linear systems with lévy fluctuations*, Physica A, 113 (1982), pp. 203–216.
- [108] N. WIENER, *Generalized harmonic analysis*, Acta Mathematica, 55 (1930), pp. 178–258.

Résumé

Dans cette thèse une nouvelle représentation spectrale des processus symétriques α -stables est introduite. Elle est basée sur une propriété de pseudo-additivité de la covariation et l'intégrale au sens de Morse-Transue par rapport à une bimesure que nous construisons en utilisant la pseudo-additivité. L'intérêt de cette représentation est qu'elle est semblable à celle de la covariance des processus du second ordre ; elle généralise celle établie pour les intégrales stochastiques par rapport à un processus symétrique α -stable à accroissements indépendants. Une classification des processus harmonisables non stationnaires a été étudiée selon la structure de la bimesure qui les caractérise et les processus périodiquement covariés ont été définis. Pour pouvoir simuler cette inhabituelle classe de processus, une nouvelle décomposition en séries de type Lepage a été apportée. Finalement des techniques non paramétriques d'estimation spectrale sont discutées. En particulier un estimateur presque sûrement convergent sous une condition de mélange fort, a été introduit pour les processus périodiquement covariés.

Mots-clés: Processus α -stables, Covariation, Analyse spectrale, Densité spectrale, Estimation spectrale, Statistiques non paramétriques, Séries de Lepage, Processus périodiquement covariés, Mélange fort.

Abstract

In this work a new spectral representation of a symmetric α -stable processes is introduced. It is based on a covariation pseudo-additivity and Morse-Transue's integral with respect to a bimesure built by using pseudo-additivity property. This representation, specific to S α S processes, is analogous to the covariance of second order processes. On the other hand, it generalizes the representation established for stochastic integrals with respect to symmetric α -stable process of independent increments. We provide a classification of non-stationary harmonizable processes ; this classification is based on the bimesure structure. In particular, we defined and investigated periodically covariated processes. To simulate and build this unusual class, a new decomposition in the Lepage's type series was derived. Finally, to apply this results in practical situations, a nonparametric estimation of spectral densities are discussed. In particular, in the case of periodically covariated processes, an almost sure convergent estimators was derived under the strong mixing condition.

Keywords: α -stable Processes, Covariation, Spectral Analysis, Spectral density, Spectral estimation, non-parametric Statistics, Lepage Series, Periodically covariated processes, Strong mixing.

