



Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis

Laurent Mahéo

► To cite this version:

Laurent Mahéo. Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Bretagne Sud, 2006. Français. NNT: . tel-00139112

HAL Id: tel-00139112

<https://theses.hal.science/tel-00139112>

Submitted on 29 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD

Ecole doctorale pluridisciplinaire

Laboratoire Génie Mécanique et Matériaux

2006

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE SUD

par

Laurent MAHEO

**Etude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration
temporelle en calcul dynamique par éléments finis**

Soutenue le 22 decembre 2006 devant le jury composé de :

M. RAKOTOMANANA Lalaonirina	Professeur, Université de Rennes 1	président
M. CARTRAUD Patrice	Professeur, ECN Nantes	rapporteur
M. RAGNEAU Eric	Professeur, INSA Rennes	rapporteur
M. RIO Gérard	Professeur, UBS Lorient	directeur de thèse
M. GROLLEAU Vincent	Maître de conférence, UBS Lorient	co-directeur de thèse

Ce travail a été réalisé avec le soutien des
Ecoles Spéciales Militaires de Saint-Cyr Coëtquidan.

à Céline, ma famille, mes amis.

Remerciements

Le travail qui est présenté dans ce mémoire n'est pas le résultat d'une seule personne. Je tiens, par ces quelques mots, à remercier plusieurs personnes.

Tout d'abord, je tiens à remercier Gérard Rio et Vincent Grolleau, enseignants-chercheurs au laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux de l'UBS de Lorient qui m'ont proposé cet intéressant sujet de thèse. Leur disponibilité et la qualité de leur encadrement m'a permis de m'épanouir pleinement dans cet environnement scientifique. Je tiens également à remercier Gérard Rio puis Pierre-Yves Manac'h, directeurs successifs du LG2M pour leur accueil au sein du laboratoire.

Je tiens également à remercier Bertrand Galpin, docteur agrégé des Ecoles de Coëtquidan qui a mis tout en oeuvre pour obtenir un financement sûr et nécessaire de ces travaux de thèse. Le financement a été assuré par les Ecoles Militaires de Saint-Cyr Coëtquidan et je tiens, par cette occasion, remercier toutes les personnes militaires ou civile qui de près ou de loin ont permis ce financement.

Mes remerciements vont ensuite au Jury de ma thèse. M. Rakotomanana, président du Jury et les rapporteurs MM. Cartraud et Ragneau pour leur rapport et leurs questions pertinentes.

Je souhaiterais ensuite remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer au LG2M, enseignants-chercheurs, doctorants et personnel IATOS pour leurs conseils, leur amitié et leur humeur toujours au beau fixe.

Je poursuis mes remerciements par toute l'équipe enseignante des Ecoles Militaires de Saint-Cyr Coëtquidan. Je tiens ainsi à remercier le Col Liébert et le Col. Doussau, commandant le Division Sciences de l'Ingénieur, le Lcl Bonnaure et le Lcl de Hédouville, chefs du département mécanique-physique. Je tiens également à remercier MM. Galpin, Fohrer, Vandromme et Mudry, professeurs de mécanique pour leurs nombreux conseils pédagogiques. Je tiens enfin à remercier le Capitaine Stefan Umiastowski, enseignant et doctorant aux Ecoles et mon "cadre de contact" pour utiliser le jargon militaire. Ses conseils m'ont permis une bonne intégration aux Ecoles.

Finalement, je voudrais remercier mon épouse Céline et toute ma famille Jean-Yves, Annie, Nicolas et Julie pour leur soutien indéfectible.

Table des matières

Remerciements	v
1 Introduction	1
2 Présentation bibliographique des outils numériques	7
2.1 Introduction	8
2.2 Discrétisation spatiale	10
2.2.1 Principe des Puissances Virtuelles	10
2.2.2 Utilisation de la Méthode des Eléments Finis	10
2.3 Discrétisation temporelle par la MDF	12
2.3.1 Utilisation de la Méthode des Différences Finies	12
2.3.2 Schéma de Newmark	13
2.3.3 Schéma des Différences Finies Centrées	21
2.3.4 Schéma de Runge-Kutta	25
3 Présentation des outils d’amortissement	29
3.1 Amortissement numérique	30
3.1.1 Bulk-viscosity	30
3.1.2 Schémas numériques amortissants	33
3.1.3 Schéma numérique de Tchamwa-Wielgosz	36
3.1.4 Matrice d’amortissement	38
3.1.5 Lois de comportement	39
3.2 Discrétisation temporelle par la MEF (Galerkin-discontinu)	40
3.2.1 Introduction	40
3.2.2 Le modèle de Bonelli	41
3.2.3 Quelques résultats	44
3.2.4 Remarques et conclusions partielles	48
3.3 Conclusion	52
4 Utilisation des outils d’amortissement en 1D	55
4.1 Introduction	56
4.2 Barre 1D libre-encastree	57
4.2.1 Solutions théoriques	57
4.2.2 Mise en données du problème	63
4.2.3 Réponse numérique	64
4.2.4 Influence du pas de temps	72

4.2.5	Influence du maillage	77
4.2.6	Influence des conditions aux limites	82
4.2.7	Influence du chargement	84
4.2.8	Influence de la matrice masse	86
4.2.9	Conclusion	91
4.3	Pilotage de l'amortissement du schéma de Tchamwa	93
4.3.1	Introduction	93
4.3.2	Amortissement ciblé ou évolutif	93
4.3.3	Amortissement piloté	96
4.3.4	Amortissement piloté sur un maillage aléatoire 1D	105
4.3.5	Conclusion	110
4.4	Conclusion	112
5	Etude sur un cas 3D axi-symétrique	113
5.1	Introduction	114
5.2	Barre 3D axi-symétrique libre-encastree	115
5.2.1	Solutions théoriques	115
5.2.2	Mise en données du problème	119
5.2.3	Calcul correspondant à un cas mono-dimensionnel ($\nu = 0$)	120
5.2.4	Calcul avec prise en compte des phénomènes inertiels ($\nu \neq 0$)	123
5.2.5	Conclusion	131
6	Applications	133
6.1	Essai d'impact axial sur une barre en aluminium	134
6.1.1	Résultats expérimentaux	134
6.1.2	Résultats numériques pour une modélisation 1D	135
6.1.3	Résultats numériques pour une modélisation 3D axi-symétrique	140
6.1.4	Conclusion	143
6.2	Essai d'impact transversal sur une tôle en acier	144
6.2.1	Résultats expérimentaux	144
6.2.2	Résultats numériques	144
6.2.3	Conclusion	148
6.3	Conclusion	149
7	Conclusion	151
A	Calcul énergétique pour une barre libre - encastree 1D	157
A.1	Chargement de type créneau	157
A.1.1	Energie cinétique	157
A.1.2	Energie de déformation élastique	158
A.1.3	Energie totale	159
A.2	Chargement de type créneau lissé	159
A.2.1	Energie cinétique	159
A.2.2	Energie de déformation élastique	161
A.2.3	Energie totale	161

B	Algorithme implicite de Newmark	163
B.1	Systèmes linéaires	163
B.2	Systèmes non linéaires	164

Chapitre 1

Introduction

Contexte du laboratoire

Les travaux menés durant cette thèse concernent le domaine de *la dynamique rapide*, axe de recherche du [LG2M(2006)] de l'UBS à Lorient associé à l'équipe [LMM(2006)] des Ecoles Militaires de Coëtquidan.

Ils ont débuté en 1996 par la thèse de [Couty(1999)] en collaboration avec le GERBAM¹ et la DCN² et ont permis d'ouvrir de nombreuses voies d'investigations aussi bien expérimentales que numériques. L'auteur a ainsi relevé les problèmes de conditions aux limites et de chargement, et mis en place un schéma d'intégration temporelle pour modéliser les ondes de chocs. Il s'est également intéressé à la gestion du contact et aux lois de comportement dynamique. Enfin, il a développé un dispositif expérimental de chocs : l'arbalète. L'étendue de ces recherches ont permis de mettre en place les bases de travail de l'équipe mécanique de Lorient.

Ces travaux se sont poursuivis par la thèse numérique de [Soive(2003)] qui a étudié principalement les schémas d'intégration temporelle en dynamique rapide avec notamment le schéma de [Tchamwa(1997)]. Cette thèse définit le principal champ d'investigation des travaux que nous présentons dans ce mémoire. Nous reviendrons en détail sur ce sujet, un peu plus loin, pour expliquer la problématique de notre étude.

Concernant la partie expérimentale, de nombreuses études ont été menées sur le dispositif d'arbalète. [Maillard(2001)] a mis en évidence l'apparition de pertes de contact entre le projectile et la tôle durant la phase d'impact. [Mahéo(2002)] constate l'influence d'une précontrainte dans une tôle de construction navale, précontrainte introduite lors de l'assemblage des tôles. [Bénabès(2003)] effectue des essais dynamiques sur presse hydraulique et obtient les paramètres de la loi de comportement. Plus récemment, la thèse expérimentale d'[Umiastowski(2005)] a permis le développement d'un capteur de force pour le dispositif d'impact du laboratoire. Ce capteur de force basé sur le *Sensing Block System* de [Tanimura(1984)] sert de piège à ondes et permet de connaître l'évolution de la force de contact entre le projectile et une tôle de type navale. Ceci permet notamment de s'affranchir de nombreux problèmes de contact lors de la simulation de l'essai par l'outil numérique. Une comparaison expérimental / numérique réalisée par [Morquecho(2004)] a définitivement validé la géométrie du projectile instrumenté. S. Umiastowski s'est également intéressé au problème de conditions aux limites en proposant une nouvelle forme d'éprouvette de manière à se rapprocher du modèle numérique d'encastrement, plus facile à analyser.

L'expertise acquise par ces recherches permet aujourd'hui de nouer des contacts avec les industriels. On peut notamment citer les thèses en cours de J. Troufflard traitant du gonflement d'un gilet de sauvetage (cf. [Troufflard et al.(2005)]) et de H. Fresnel traitant du comportement dynamique du gonflement d'un airbag.

¹Groupe d'Etudes et de Recherche en Balistique, Armes et Munitions, Gâvres (56)

²Direction des Constructions Navales, à Lorient (56)

Problématique

Parmi les nombreuses voies d'investigations (schéma temporel, contact, conditions aux limites, loi de comportement, ...) décrites par N. Couty dans sa thèse, nous choisissons de poursuivre les travaux de Soive sur les schémas temporels. Pour résoudre un problème en dynamique, plusieurs méthodes d'intégration temporelle peuvent être adoptées. Elles sont décrites par [Tamma et al.(1997)] :

1. les approximations des différences finies pour les dérivées temporelles ce qui a permis les développements de l'intégration temporelle directe à un pas ou plusieurs pas de temps (cf. [Hughes(1983)], [Tamma et al.(2000)] et [Wood et al.(1981)])
2. les méthodes de superposition modale (cf. [Géradin et Rixen(1993)])
3. les formulations d'éléments finis en espace et en temps.
4. les formulations hybrides qui utilisent les méthodes de transformée (Laplace ou Fourier) avec les procédures standard de Galerkin et des éléments finis en espace

A. Soive a tout d'abord choisi les méthodes de discrétisation les plus utilisées et omniprésentes dans les codes industriels, à savoir, la Méthode des Eléments Finis (*MEF*) pour la discrétisation spatiale et la Méthode des Différences Finies (*MDF*) pour la discrétisation temporelle. Ce cadre de travail lui permet d'étudier les propriétés des schémas temporels dans le cadre d'une discrétisation spatiale de type *MEF* sur des cas 1D et 2D plans (cf. [Rio et al.(2005)]). Ses principales constatations sont les suivantes :

- Des erreurs numériques à hautes fréquences liées à la discrétisation spatiale et n'ayant aucune existence dans une certaine *réalité*, viennent perturber la réponse numérique. Il est alors nécessaire d'éliminer ces hautes fréquences numériques via l'utilisation d'une méthode amortissante pour tendre vers le signal théorique continu.
- Pour éviter l'apparition de ces hautes fréquences, il est nécessaire d'appliquer un chargement dépourvu de hautes fréquences (dans la mesure du possible) pour ne pas en introduire dans le système.
- Il faut également essayer d'adopter un maillage avec une taille d'élément le plus homogène possible pour éviter les réflexions d'ondes entre les éléments qui génèrent également les hautes fréquences.

Il conclut que l'utilisation de méthodes amortissantes pour réduire les perturbations numériques révèle les carences d'un modèle face au problème sensible de la dynamique. En effet, la résolution de problèmes de dynamique, de part leur nature hyperbolique, entraîne la propagation voire l'amplification des imperfections du modèle adopté pour représenter un phénomène physique. Les méthodes d'amortissement permettent alors la correction d'un modèle imparfait lors de la simulation.

La problématique des travaux de cette thèse découle de ces constatations : *Comment parvenir à représenter de manière optimale le phénomène avec une discrétisation temporelle de type MDF ? La discrétisation temporelle de type MEF permet-elle d'obtenir de meilleurs résultats ?*

Sans avoir la prétention de répondre à ces deux questions de manière exhaustive, nous tenterons d'apporter une contribution pour comprendre les phénomènes mis en jeu et améliorer les résultats actuels.

Plan

A partir de cette problématique, nous décidons dans une **première partie** bibliographique de présenter les outils numériques que nous utiliserons tout au long de cette étude. Un rappel introductif nous permet dans un premier temps de mieux comprendre les résultats obtenus à partir des différentes discrétisations. En effet, considérer un problème du point de vue de *l'observateur lambda* du phénomène ou du *technicien* effectuant des relevés expérimentaux ou encore de *l'ingénieur* simulant le phénomène sur son ordinateur, entraîne des hypothèses de continuité ou de discrétisation foncièrement différentes, dans le domaine temporel et spatial.

Dans un deuxième temps, nous décrivons brièvement la discrétisation spatiale assurée par la *MEF*.

Nous introduisons ensuite l'intégration temporelle faisant intervenir la *MDF* grâce au schéma implicite de Newmark. Nous poursuivons par l'étude de deux schémas classiques : celui des Différences Finies Centrées (*CFD*) et de Runge-Kutta (*RK*).

Dans une **seconde partie**, les méthodes amortissantes habituelles comme le *bulk-viscosity* et moins habituelles comme les schémas d'intégration temporelle amortissants avec notamment le schéma de Tchamwa-Wielgosz sont présentées et détaillées.

Une nouvelle méthode d'intégration temporelle fondée sur une discrétisation temporelle de type *MEF* est ensuite étudiée. La forme explicite de cette méthode présentée par [Bonelli et al.(2001)] est programmée dans le code de calcul universitaire Herezh++, développé au laboratoire par [Rio(2006)].

Enfin, une conclusion détaillée des différents outils permettra de déterminer les objectifs de la thèse ainsi que justifier l'emploi de ces méthodes.

Dans une **troisième partie**, nous étudions tout d'abord le comportement de plusieurs de ces méthodes amortissantes pour un cas simple 1D pour faire suite aux travaux de Soive. L'étude portera notamment sur l'influence des conditions aux limites, du pas de temps et du maillage. Ensuite, de nouveaux développements sont menés pour piloter l'amortissement au cours du calcul et éviter une baisse trop importante de l'énergie totale du système. Cette méthode de pilotage basée sur les vitesses moyennes nodales et les accélérations nodales offre l'avantage de cibler l'amortissement sur les erreurs numériques.

Dans une **quatrième partie**, les méthodes d'amortissements sont étudiées sur un cas 3D axi-symétrique qui permet la prise en compte des phénomènes inertiels. Des solutions *théoriques* ou plutôt *semi-analytiques* sont calculées pour permettre une comparaison avec les résultats numériques. On pourra noter l'influence du coefficient de Poisson, du pas de temps de calcul ou du maillage sur l'amortissement des différentes méthodes.

Enfin, une **cinquième partie** présentera deux exemples d'application.

- Un essai expérimental d'impact axial est réalisé sur une longue barre en aluminium. Cet essai s'inscrit dans l'étude des barres d'Hopkinson (cf. [Hopkinson(1914)] et [Kolsky(1949)]), essai largement utilisé de nos jours pour la caractérisation dynamique des matériaux.
- Un essai expérimental d'impact transversal mettant en jeu des phénomènes de flexion sur une tôle en acier est réalisé au laboratoire LG2M sur le dispositif expérimental de l'arbalète et utilisant le capteur de force développé par S. Umiastowski.

Enfin, nous concluons sur les travaux effectués durant cette thèse en mettant en avant les avancées depuis la thèse de A. Soive. Nous évoquerons pour finir les prochaines investigations sur le sujet qui seront développées au laboratoire.

Chapitre 2

Présentation bibliographique des outils numériques

Contents

2.1	Introduction	8
2.2	Discrétisation spatiale	10
2.2.1	Principe des Puissances Virtuelles	10
2.2.2	Utilisation de la Méthode des Eléments Finis	10
2.3	Discrétisation temporelle par la MDF	12
2.3.1	Utilisation de la Méthode des Différences Finies	12
2.3.2	Schéma de Newmark	13
2.3.3	Schéma des Différences Finies Centrées	21
2.3.4	Schéma de Runge-Kutta	25

2.1 Introduction

Lorsqu'une structure est soumise à un choc, une importante quantité d'énergie lui est transmise durant un bref instant, quelques milli-secondes par exemple. La structure est accélérée brutalement et localement. Différentes considérations temporelles et spatiales sont à prendre en compte si l'on se place d'un point de vue de l'observateur du phénomène ou du technicien effectuant des relevés expérimentaux sur la structure ou encore de l'ingénieur modélisant le phénomène sur son code calcul. Pour illustrer notre propos, nous analyserons ces trois points de vue grâce à l'exemple d'une poutre encastrée à une extrémité et sollicitée à l'autre.

Dans la réalité physique (point de vue de l'observateur du phénomène), malgré le court instant de montée en charge de la structure, le chargement brutal s'effectue progressivement car le phénomène reste **continu en temps**. Ensuite, la propagation de cette énergie à travers la structure se réalise continûment (à l'échelle macroscopique) car la structure est bien évidemment **continue en espace**.

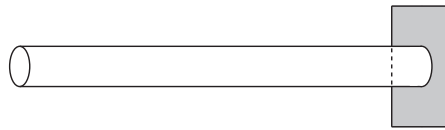


FIG. 2.1 – Phénomène continu en espace et en temps

Expérimentalement (point de vue du technicien effectuant des relevés expérimentaux), si on désire obtenir des informations sur le phénomène décrit précédemment, il est important de différencier le phénomène de la mesure. *Le phénomène* mesuré est en tout point identique à celui décrit précédemment : **continu en temps et en espace**. En revanche, *la mesure* impliquant l'utilisation de capteurs, tels que des jauges de déformation, entraîne certaines considérations. Tout d'abord, il faut mentionner une **discrétisation en temps** provenant de la fréquence d'échantillonnage caractéristique de l'acquisition. Ensuite, malgré leur faible taille, les capteurs ne permettent pas d'effectuer des relevés ponctuels. Les informations recueillies par ces derniers ne sont réellement que des moyennes de mesure sur la surface qu'ils occupent. La mesure, moyennée, **n'est plus totalement continue en espace**.

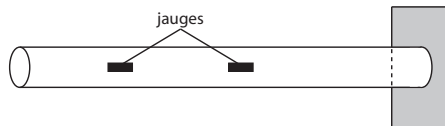


FIG. 2.2 – Phénomène continu en espace et en temps - Mesure discrète en espace et en temps

Numériquement (point de vue de l'ingénieur modélisant le phénomène), l'analyse de la structure est effectuée grâce à la méthode des éléments finis à laquelle on joint un schéma d'intégration temporelle permettant au calcul de progresser. La structure est **discrétisée en espace** et le phénomène est **discrétisé en temps**. Le choc se traduit donc par des accélérations brutales des noeuds en contact puis, de proche en proche, par des accélérations de tous les noeuds de la structure.



FIG. 2.3 – Phénomène et mesure discret en espace et en temps

Ces discrétisations spatiale et temporelle vont être à l'origine d'erreurs purement numériques. Avant d'expliquer les moyens pour limiter leur influence sur les résultats d'un calcul, il est intéressant de rappeler le cadre de travail dans lequel l'étude se place. Après un bref rappel de la méthode des éléments finis permettant la discrétisation spatiale, une étude bibliographique traitera de l'intégration temporelle.

2.2 Discrétisation spatiale

2.2.1 Principe des Puissances Virtuelles

La loi de la dynamique qui peut être écrite sous sa forme vectorielle classique $\vec{F} = m \vec{\gamma}$, généralisation de la formule de Newton, peut également être abordée en caractérisant les efforts par une quantité scalaire liée à la puissance développée par ces efforts. L'idée donne naissance au Principe des Puissances Virtuels (PPV) qui repose sur le principe de mécanique : "un corps est un équilibre équivaut à dire que la puissance totale développée lors d'un mouvement test ou virtuel quelconque est nulle". L'équilibre des puissances virtuelles s'écrit :

$$P_{\gamma}^* - P_{int}^* - P_{ext}^* = 0 \quad (2.1)$$

avec les puissances virtuelles :

– des quantités d'accélération :

$$P_{\gamma}^* = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{V}^* dv \quad (2.2)$$

– des efforts extérieurs :

$$P_{ext}^* = \int_{\mathcal{D}_t} \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}^* dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \vec{T}_{ext} \cdot \vec{V}^* ds \quad (2.3)$$

– des efforts intérieurs :

$$P_{int}^* = - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{D}}^* dv \quad (2.4)$$

où \mathcal{D}_t est la position occupée par le domaine matériel \mathcal{D} à l'instant final t , \vec{V}^* le vecteur vitesse virtuelle, ρ la masse volumique, $\vec{\gamma}$ le vecteur accélération, \vec{F}_{ext} et \vec{T}_{ext} les vecteurs forces extérieures de volume et de surface respectivement, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et $\dot{\boldsymbol{D}}^*$ le tenseur des taux de déformations virtuel.

En notant que la puissance virtuelle des efforts intérieurs P_{int}^* dans tout mouvement virtuel rigidifiant est nulle, on a finalement l'équation générale :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho \vec{\gamma} \cdot \vec{V}^* dv = \int_{\mathcal{D}_t} \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}^* dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \vec{T}_{ext} \cdot \vec{V}^* ds - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{D}}^* dv \quad (2.5)$$

2.2.2 Utilisation de la Méthode des Éléments Finis

La résolution analytique de l'équation (2.5) sur le domaine matériel \mathcal{D} devient vite inextricable pour des structures de géométrie complexe. Deux principales voies d'exploration peuvent être alors utilisées pour tenter de résoudre numériquement le problème.

- la méthode de différences finies centrées, qui s'appuie sur des bases simples et rigoureuses et dont la convergence vers la solution exacte est garantie.
- la méthode des éléments finis (MEF), qui s'est initialement développée d'une manière plus intuitive et dont, dans de nombreux cas (mais pas dans tous), on peut montrer la convergence absolue vers la solution exacte.

Dans le cas d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre, la MEF, tout en étant très performante, permet plus facilement de prendre en compte les conditions limites complexes, ce qui explique son large emploi notamment en mécanique du solide déformable. Dans le cas d'équations aux dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ mode supérieur à 2, les éléments finis posent de nombreux problèmes difficiles à résoudre que n'ont pas les différences finies, qui permettent aisément d'exprimer une dérivée d'ordre n . Lorsque les conditions limites le permettent, ces dernières sont également préférées car leur manipulation est plus simple que celle des éléments finis ; c'est le cas pour de nombreux problèmes de thermique et de mécanique des fluides.

Dans cette étude, nous utiliserons la MEF qui va permettre l'approximation des fonctions solutions du milieu continu par l'utilisation de sous domaines spatiaux appelés éléments finis (voir par exemple : [Dhatt et Touzot(1984)] et [Batoz et Dhatt(1990)]). Cette discrétisation spatiale se fait par les fonctions d'interpolation :

$$\vec{X} = X^{ar} \varphi_r \vec{I}_a \quad (2.6)$$

où les fonctions d'interpolation φ_r et les vecteurs de base \vec{I}_a sont indépendants du temps et où \vec{X} représente la position finale générique constituant l'inconnue vectorielle du problème mécanique. Ces fonctions s'appuient en général sur la géométrie d'éléments de référence indépendante de la géométrie réelle. En notant q les *ddl* (vecteur degrés de liberté X^{ar}), à partir de l'équation (2.5) qui doit-être valide pour tout mouvement virtuel, on obtient l'équation matricielle classique :

$$[M]\ddot{q} - \mathcal{R}_{int}(q, \dot{q}) = \mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q}) \quad (2.7)$$

La discrétisation spatiale étant réalisée par la MEF, intéressons-nous maintenant à la discrétisation temporelle qui fera l'objet de la partie suivante.

2.3 Discrétisation temporelle par la MDF

2.3.1 Utilisation de la Méthode des Différences Finies

Le choix d'une méthode pour la discrétisation temporelle doit également être effectué. La *méthode de la décomposition modale*, qui consiste à décomposer l'équation différentielle afin de trouver les solutions suivant différents modes, connaît ses limites lorsque les problèmes sont non-linéaires [Tchamwa(1997)]. En effet, les méthodes par superposition ne sont pas très adaptées pour les phénomènes impulsions car elles sous-entendent un phénomène qui se répète dans le temps. Finalement, la partie non transitoire sera bien traitée tandis que la partie transitoire, qui nous intéresse, sera la plus difficile à traiter. [Tamma et al.(2000)], outre la méthode de décomposition modale, répertorient trois autres méthodes pour discrétiser le temps dont :

- la *Méthode des Différences Finies (MDF)*
- la *Méthode des Eléments Finis (MEF)*.

Malgré certaines difficultés à imposer les conditions aux limites, notamment lors de l'initialisation du schéma des CFD (voir par la suite), la *MDF* reste largement utilisée dans les problèmes de dynamique, comparée à la *MEF*. C'est la raison pour laquelle, dans un premier temps, nous choisirons et étudierons principalement cette méthode de discrétisation temporelle. Cependant, nous présenterons également des développements concernant la *MEF* (cf. §3.2) de manière à comparer les deux approches.

Phénomènes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre

Les problèmes temporels sont classiquement répartis en deux catégories, suivant leur dérivées temporelles. Ils sont du premier ordre s'ils ne font intervenir que des dérivées premières en t , ou ils sont du second ordre s'il s'agit de dérivées secondes en t . Les premiers sont relatifs aux phénomènes transitoires de la thermique ou de la diffusion par exemple. Les seconds sont relatifs à la dynamique dans laquelle intervient alors la dérivée première en temps, la vitesse, et la dérivée seconde en temps, l'accélération. Notre étude portant sur la dynamique des structures, nous détaillerons uniquement la seconde catégorie.

Choix d'un algorithme

La résolution temporelle de l'équation de la dynamique par la méthode des différences finies impose le choix d'un algorithme temporel qui se présente sous la forme de trois équations permettant le calcul des champs nodaux des accélérations, vitesses et déplacements.

La première équation, dans sa forme générale, assure l'équilibre dynamique et permet le calcul du champ nodal des accélérations :

$$M \ddot{q} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}, q) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}, q) \quad (2.8)$$

Les deux autres équations assurent respectivement le calcul des champs nodaux des vitesses et déplacements :

$$\dot{q} = f(\ddot{q}, \dot{q}) \quad (2.9)$$

$$q = g(\ddot{q}, \dot{q}, q) \quad (2.10)$$

Même si peu de schémas temporels sont proposés aux utilisateurs de codes de calcul industriels (2 ou 3 tout au plus), la littérature scientifique regorge de nombreuses études sur un grand nombre de schémas. Ils se différencient les uns des autres par certaines caractéristiques que l'utilisateur doit avoir à l'esprit lors de leur utilisation. On peut citer :

- la convergence (consistance et stabilité),
- l'erreur d'amplitude et de périodicité,
- la précision,
- le caractère explicite ou implicite,
- le nombre de pas de temps utilisés pour la résolution,
- la conservation de l'énergie totale,
- la capacité à amortir les oscillations numériques.

Pour faciliter le choix entre tous ces schémas, i.e. en définissant chacune des caractéristiques énoncées précédemment, développons le plus connu, le schéma temporel de Newmark qui servira de base de compréhension de l'intégration temporelle.

2.3.2 Schéma de Newmark

Obtention du schéma temporel

Le schéma de [Newmark(1959)], également appelée méthode de Stormer et Cowell ([Curnier(1993)]), permet de calculer l'état d'un système matériel à un instant $t_{n+1} = t_n + h$ (avec h pas d'avancement) à partir de l'état de ce système à un instant connu t_n . Pour cela, on utilise un développement en série de Taylor, comme le fait [Géradin et Rixen(1993)] :

$$f(t_n + h) = f(t_n) + hf'(t_n) + \frac{h^2}{2}f''(t_n) + \dots + \frac{h^i}{i!}f^{(i)}(t_n) + R_i \quad (2.11)$$

où R_i est le reste du développement à l'ordre i .

Soit q , \dot{q} et \ddot{q} représentant respectivement les champs de déplacement, de vitesse et d'accélération. Développons en série de Taylor l'accélération \ddot{q} aux instants n et $n + 1$:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + q^{(4)}(\tau)\frac{(t_n - \tau)^2}{2} + \dots \\ \ddot{q}_{n+1} &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + q^{(4)}(\tau)\frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

En multipliant les équations (2.12) par $(1 - \gamma)$ et par γ respectivement, il vient avec $h = t_{n+1} - t_n$:

$$\ddot{q}(\tau) = (1 - \gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)[\tau - h\gamma - t_n] + \mathcal{O}(h^2q^{(4)}) \quad (2.13)$$

En multipliant les équations (2.12) par $(1 - 2\beta)$ et par β respectivement, il vient d'une manière totalement analogue :

$$\ddot{q}(\tau) = (1 - 2\beta)\ddot{q}_n + \beta\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)[\tau - 2h\beta - t_n] + \mathcal{O}(h^2q^{(4)}) \quad (2.14)$$

En intégrant différemment les équations (2.13) et (2.14) sur τ entre t_n et $t_n + h$, [Gérardin et Rixen(1993)] obtiennent les formules de quadratures numériques :

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n+h} \ddot{q}(\tau) d\tau &= (1-\gamma)h \ddot{q}_n + \gamma h \ddot{q}_{n+1} + r_n \\ \int_{t_n}^{t_n+h} (t_{n+1} - \tau) \ddot{q}(\tau) d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \ddot{q}_n + \beta h^2 \ddot{q}_{n+1} + r'_n \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec les erreurs de quadrature correspondantes :

$$\begin{aligned} r_n &= \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) h^2 q^{(3)}(\tilde{\tau}) + \mathcal{O}(h^3 q^{(4)}) \\ r'_n &= \left(\beta - \frac{1}{6}\right) h^3 q^{(3)}(\tilde{\tau}) + \mathcal{O}(h^4 q^{(4)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $t_n < \tilde{\tau} < t_{n+1}$, pour finalement obtenir les approximations pour la méthode Newmark dans laquelle on néglige les erreurs de quadrature précédentes r_n et r'_n :

$$\boxed{\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma)h \ddot{q}_n + \gamma h \ddot{q}_{n+1}} \quad (2.17)$$

$$\boxed{q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_n + h^2 \beta \ddot{q}_{n+1}} \quad (2.18)$$

Les paramètres γ et β sont les paramètres de Newmark. Suivant la valeur qu'on leur affecte, ils vont jouer une grande importance dans la nature du schéma d'intégration temporelle (voir par la suite). [Curnier(1993)] note que le paramètre β contrôle la stabilité et le paramètre γ contrôle la dissipation de l'algorithme. Aux équations (2.17) et (2.18), on ajoute l'équation d'équilibre dynamique (2.19) qui complète l'écriture du schéma.

$$\boxed{M\ddot{q}_{n+1} = \mathcal{R}_{ext}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(q_{n+1}, \dot{q}_{n+1})} \quad (2.19)$$

où M représente la matrice masse, \mathcal{R}_{ext} et \mathcal{R}_{int} représentent les efforts extérieurs et les efforts intérieurs, respectivement.

A partir de ce schéma de base constitué des équations (2.17), (2.18) et (2.19), on peut s'intéresser aux caractéristiques intrinsèques du schéma énoncées au §2.3.1.

Etude de convergence

Avant l'utilisation du schéma à travers un code de calcul, une étude préliminaire de convergence doit être menée. Cette étude, constituée d'une étude de consistance puis d'une étude de stabilité, permettra de connaître les conditions d'utilisation du schéma, à savoir la plage d'utilisation des paramètres β et γ et éventuellement le pas de temps maximal autorisé.

Etude de consistance

On peut étudier la consistance d'un schéma en comparant l'état du système à deux instants successifs t_n et t_{n+1} . Soient $u_n = [\dot{q}_n, q_n]$ et $u_{n+1} = [\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}]$, les vecteurs d'état qui décrivent complètement l'état du système aux instants t_n et t_{n+1} , respectivement. Le schéma

d'intégration est consistant si la solution modélisée tend vers la solution exacte lorsque le pas de temps tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \dot{u}_n \quad (2.20)$$

Ainsi pour le schéma de Newmark, il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (1 - \gamma) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + (\frac{1}{2} - \beta)h \ddot{q}_n + \beta h \ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_n \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

D'après l'équation (2.21), le schéma de Newmark est consistant quelque soient les valeurs de ses paramètres β et γ .

Etude de stabilité

L'étude de la stabilité du schéma de Newmark est classique. Nous ne présentons ici que les grandes lignes, on pourra se reporter à [Géradin et Rixen(1993)] pour plus de précision.

Un schéma d'intégration est dit stable s'il existe un pas d'intégration $h_0 > 0$ tel que $\forall h \in [0, h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état u_n à l'instant t_n n'entraîne qu'une modification non croissante du vecteur d'état u_{n+j} calculé à l'instant ultérieur t_{n+j} .

On peut écrire le vecteur d'état u_{n+1} en fonction du vecteur d'état u_n et des efforts extérieurs aux instants t_{n+1} et t_n .

$$(u_{n+1}) = [A] (u_n) + g_{n+1} \quad (2.22)$$

où $[A]$ est la matrice d'amplification et g_{n+1} est le vecteur de chargement.

S'il on perturbe les conditions initiales en déplacement, par exemple, $(\delta u_0) = (u'_0) - (u_0)$, on obtient successivement pour la solution non perturbée u_{n+1} :

$$\begin{aligned} (u_{n+1}) &= [A] (u_n) + g_{n+1} \\ &= [A]^2 (u_{n-1}) + [A] g_n + g_{n+1} \\ &= [A]^3 (u_{n-2}) + [A]^2 (g_{n-1}) + [A] g_n + g_{n+1} \\ &\vdots \\ &= [A]^{n+1} (u_0) + \sum_{j=0}^{n+1} [A]^{n-j+1} (g_j) \end{aligned} \quad (2.23)$$

En procédant de même pour la solution non perturbée u'_{n+1} , on obtient :

$$(u'_{n+1}) = [A]^{n+1} (u'_0) + \sum_{j=0}^{n+1} [A]^{n-j+1} (g_j) \quad (2.24)$$

L'effet de la perturbation initiale (δu_{n+1}) est ainsi obtenu :

$$(\delta u_{n+1}) = [A]^{n+1} (\delta u_0) \quad (2.25)$$

Ainsi, si on désire que l'effet de la perturbation initiale n'entraîne pas une modification croissante du vecteur d'état, il faut que le rayon spectral $\rho(A)$ soit strictement inférieur à l'unité. Cette étude n'est valable que dans le cas d'un comportement linéaire où les termes

g_j ne sont pas fonction de u . On obtient ainsi une condition qui est nécessaire mais pas suffisante.

Pour rappel, le rayon spectral est défini par $\rho(A) = \max(\lambda_i)$ où λ_i sont les valeurs propres de A qui sont calculées comme suivant :

$$\lambda_{1,2} = A_1 \mp \sqrt{A_1^2 - A_2} \quad (2.26)$$

avec $A_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(A)$ et $A_2 = \det(A)$.

Pour déterminer les conditions d'utilisation du schéma de Newmark en fonction de ses deux paramètres β et γ , l'étude de stabilité se poursuit par la considération de deux cas usuels :

- cas d'un système non amorti
- cas d'un système amorti

Dans le cas non amorti, lorsque la solution est décomposée en série de modes propres de la structure le calcul du rayon spectral $\rho(A)$ effectué par [Gérardin et Rixen(1993)] aboutit à l'obtention d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi} \quad (2.27)$$

où, à titre d'information, ρ et φ valent :

$$\rho = \sqrt{1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2} \quad (2.28)$$

$$\varphi = \text{Arctan} \left(\frac{\xi \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 \xi^2}}{1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2} \right) \quad (2.29)$$

avec $\xi^2 = \frac{\omega^2 h^2}{1 + \beta \omega^2 h^2}$ et ω la pulsation ou fréquence d'oscillation de la structure, moyennant la condition :

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 h^2} \quad (2.30)$$

Grâce à l'équation (2.30) qui nous renseigne sur la limite de stabilité, notée $\Omega = \omega h$, on peut classer le schéma de Newmark en trois catégories. Ainsi, en fonction de ses paramètres β et γ , il est considéré comme :

- *instable* lorsque $\gamma < \frac{1}{2}$ et $\forall \beta$. En effet, avec ces paramètres, le rayon spectral $\rho(A) > 1$ comme le montre l'équation (2.28) et la limite de stabilité ωh sera nulle. En pratique, ces schémas n'ont aucun intérêt d'utilisation car le pas de temps $h \rightarrow 0$, ce qui rend impossible l'évolution temporelle du calcul.
- *inconditionnellement stable* lorsque $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2$. La limite de stabilité est alors $\omega h \rightarrow \infty$ et il est alors possible d'utiliser un pas de temps de calcul h aussi grand que désiré.

- *conditionnellement stable* lorsque $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2$. La limite de stabilité ωh n'étant pas infinie, cela entraînera une limite sur la taille du pas de temps de calcul h qui ne devra pas excéder une certaine taille h_{max} .

La stabilité du schéma de Newmark peut se résumer au graphe exprimant β en fonction de γ , comme le montre la FIG. 2.4.

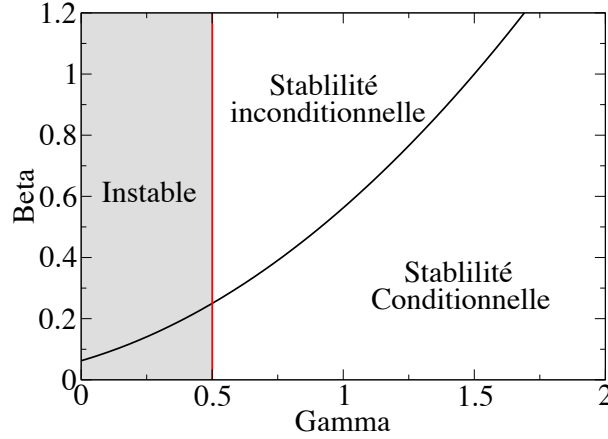


FIG. 2.4 – Stabilité du schéma de Newmark

Dans le cas amorti, [Hughes(1983)] montrent que l'amortissement structural a un effet stabilisant pour des valeurs modérées du coefficient d'amortissement. Ainsi, le cas amorti aura un effet moins pénalisant sur la stabilité que le cas non amorti étudié précédemment. Pour ces raisons, l'étude de stabilité ne sera pas effectuée dans ce cas et le lecteur se référera à [Hughes(1983)], [Hughes(1987)] ou encore [Géradin et Rixen(1993)] pour obtenir plus de renseignements.

Erreur d'amplitude et de périodicité

A la suite de l'étude de convergence, il est intéressant de calculer les erreurs d'amplitude et de périodicité qui vont nous permettre de déterminer l'ordre de précision du schéma d'intégration temporelle.

On poursuit l'étude du cas non amorti défini précédemment. Si l'on impose un déplacement initial q_0 , le mouvement d'un système 1D est une oscillation libre de la forme :

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$$

où $\eta(0) = \eta_0$ et $\dot{\eta}(0) = 0$. La solution exacte est :

$$\eta = \eta_0 \cos \omega t \quad (2.31)$$

L'équation (2.22) devient alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} u_n \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

On a montré dans le paragraphe précédent que les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de la matrice A sont égales à :

$$\lambda_{1,2} = \rho e^{i\varphi}$$

avec ρ et φ définis aux équations (2.28) et (2.29). On obtient facilement la solution exacte à l'instant t_{n+1} grâce à l'équation (2.31) : $\eta_{n+1} = e^{i\omega h} \eta_n$.

[Géradin et Rixen(1993)], par exemple, mesurent l'erreur relative d'amplitude comme étant :

$$\rho - 1 = -\frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \omega^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.33)$$

et mesurent l'erreur relative de périodicité comme étant :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega h}{\varphi} - 1 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (2.34)$$

Grâce aux équations (2.33) et (2.34), on peut souligner le fait que l'ordre des erreurs relatives d'amplitude du déplacement et de périodicité évolueront en fonction de la valeur des paramètres γ et β et également en fonction de h^2 et ω^2 due à la troncature au second ordre.

Ordre de précision

Sous le terme d'ordre de précision d'un schéma peuvent se cacher plusieurs interprétations en fonction de l'inconnue considérée : déplacement, vitesse ou accélération. Comme il a été développé précédemment, [Géradin et Rixen(1993)] calculent l'ordre de précision d'un schéma à partir des équations des erreurs relatives d'amplitude et de périodicité du déplacement repérées aux équations (2.33) et (2.34).

$$\rho - 1 = -\frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \omega^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega h}{\varphi} - 1 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

On peut ainsi établir le tableau concernant la précision du schéma en fonction de la valeur de ses paramètres γ et β .

Précision d'ordre 1	$\gamma \neq \frac{1}{2}$	$\forall \beta$
Précision d'ordre 2	$\gamma = \frac{1}{2}$	$\beta \neq \frac{1}{12}$
Précision d'ordre 3	$\gamma = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{12}$

TAB. 2.1 – Ordre de précision du schéma de Newmark suivant la valeur de β et γ

Caractère explicite ou implicite du schéma temporel

Le caractère explicite du schéma se traduit par le fait que le schéma permet le calcul des inconnues explicitement en fonction des seuls résultats des incréments précédents. Si, de plus, la matrice masse (éventuellement la matrice d'amortissement) est diagonale, alors le schéma explicite conduit à des opérations vectorielles simples ne mettant pas en jeu des inversions complexes et coûteuses en temps, de matrices.

Dans le cas du schéma de Newmark, l'équation de la dynamique (2.19) reste la même, et pour assurer le caractère explicite, le paramètre β doit être nul dans l'équation (2.18), ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1 - \gamma)h \ddot{q}_n + \gamma h \ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_n\end{aligned}\tag{2.35}$$

Le schéma purement explicite ($\gamma = 0$) n'est jamais utilisé car *instable*. En effet, la limite de stabilité $\omega h \leq 0$ implique un pas de temps de calcul $h \rightarrow 0$, empêchant ainsi toute évolution temporelle du calcul.

En général, γ prend la valeur de $\frac{1}{2}$, ce qui correspond au schéma explicite des Différences Finies Centrées (CFD), détaillé par la suite. La limite de stabilité $\omega h = 2$ va entraîner une condition sur le pas de temps du calcul pour que le schéma soit *stable*.

La résolution du système composée de ces équations (2.19) et (2.35) se fera suivant un algorithme qui sera détaillé au §2.3.3.

Les schémas au caractère implicite, de par leur écriture, ne permettent pas de calculer les inconnues explicitement en fonction des résultats issus des incréments précédents. Il est nécessaire de mettre en place une étape de *prédiction / correction* dans l'algorithme de résolution.

Pour les systèmes linéaires (\mathcal{R}_{int} et \mathcal{R}_{ext} sont indépendants des déplacements q), l'algorithme de Newmark permet d'avoir la solution en une fois. Il faut néanmoins inverser préalablement une matrice de la forme $(M + \gamma h C + \beta h^2 K)$ où K et C sont respectivement les matrices de rigidité et d'amortissement. L'algorithme temporel du schéma de Newmark implicite d'un système linéaire est présenté en Annexe B.1.

Pour les systèmes non linéaires, le résidu r de l'équation de la dynamique est calculé puis comparé à une valeur fonction des efforts extérieurs $\epsilon \mathcal{R}_{ext}$ avec ϵ la précision du calcul. Si la précision demandée n'est pas atteinte, une correction Δq est calculée et additionnée aux termes de déplacement, vitesse et accélération. Le calcul effectue le nombre d'itération suffisant pour atteindre la précision demandée puis passer à l'incrément de temps suivant. L'algorithme temporel du schéma de Newmark implicite d'un système non linéaire est présenté en Annexe B.2.

A contrario des schémas explicites définis précédemment, la plupart des schémas implicites ont une limite de stabilité $\omega h = \infty$ pour un comportement linéaire. Cela voudrait dire que les limitations du pas de temps h sont ∞ mais la précision restant du second ordre, à mesure que le pas de temps augmente, l'erreur devient catastrophique. Dans la pratique, il est nécessaire de limiter ce pas de temps dont la taille peut être facilement 100 à 1000 fois celle du pas de temps d'un schéma explicite comme celui des Différences Finies Centrées. Le TAB. 2.2 répertorie les schémas temporels de la famille de Newmark en faisant apparaître leurs particularités. On peut reconnaître alors les schémas de :

- Newmark explicite
- Newmarck CFD ou des Différences Finies Centrées
- Accélération moyenne ou règle des trapèzes
- Accélération linéaire
- Fox-Goodwin ou Numerov ou "voie royale"

schéma	γ	β	Nature	Précision	Limite de stabilité ωh
Newmark explicite	0	0	Explicite	ordre 2	0
Newmark CFD	$\frac{1}{2}$	0	Explicite	ordre 2	2
Newmark Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Implicite	ordre 2	∞
Newmark Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	Implicite	ordre 2	3.46
Newmark Fox-Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	Implicite	ordre 3	2.45
Newmark ordre 1	$> \frac{1}{2}$	-	Implicite	ordre 1	-

TAB. 2.2 – Caractéristiques des schémas temporels de la famille de Newmark

Nombre de pas de temps utilisés pour la résolution

Dans le cas du schéma de Newmark, la résolution est effectuée grâce à un seul pas de temps puisque les équations (2.19) et (2.17) ne font intervenir que des déplacements, vitesses ou accélérations aux instants t_{n+1} et t_n . Certains schémas nécessitent l'utilisation de plusieurs pas de temps pour la résolution temporelle. A titre d'exemple, on peut citer la méthode d'[Houbolt(1950)] qui utilise 3 pas de temps pour la résolution. On utilise ainsi les valeurs nodales aux instants t_{n+1} , t_n , t_{n-1} et t_{n-2} comme le montre l'équation (2.36) :

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n+1} &= \frac{2q_{n+1} - 5q_n + 4q_{n-1} - q_{n-2}}{h^2} \\ \dot{q}_{n+1} &= \frac{11q_{n+1} - 18q_n + 9q_{n-1} - 2q_{n-2}}{6h}\end{aligned}\quad (2.36)$$

Plus récemment, le schéma de [Zhai(1996)] fait intervenir 2 pas de temps pour la résolution. On utilise ainsi les valeurs nodales aux instants t_{n+1} , t_n et t_{n-1} comme le montre l'équation (2.37) :

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1 + \varphi)h \ddot{q}_n - \varphi h \ddot{q}_{n-1} \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left(\frac{1}{2} + \psi \right) \ddot{q}_n - h^2 \psi \ddot{q}_{n-1}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Conservation de l'énergie totale

La conservation ou non de l'énergie totale est une propriété importante des schémas d'intégration temporelle. Elle nous intéresse plus particulièrement dans cette étude car elle permet de déterminer le caractère amortissant ou non d'un schéma temporel. [Géradin et Rixen(1993)] relient les propriétés de stabilité du schéma de Newmark au concept de conservation de l'énergie et montrent le caractère conservatif des schémas *inconditionnellement stables* et dissipatif des schémas *conditionnellement stables*. [Curnier(1993)] complète en écrivant que le schéma de Newmark devient dissipatif dès que le paramètre de dissipation numérique $\gamma > \frac{1}{2}$.

Parmi les schémas qui sont présentés par la suite, tous n'assurent pas la conservation de l'énergie. En effet, certains d'entre eux sont volontairement non conservatifs de manière à dissiper l'énergie des hautes fréquences numériques. Pour ces raisons, nous étudierons systématiquement l'évolution de l'énergie totale du système pour obtenir un renseignement sur l'évolution de la dissipation (ou de *l'amortissement*) au cours du temps.

2.3.3 Schéma des Différences Finies Centrées

Utilisation

Le schéma temporel des Différences Finies Centrées (CFD : Central Finite Differences), qui peut être mis sous la forme du schéma de Newmark avec les coefficients $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$ peut être considéré comme le schéma d'intégration temporelle explicite de base. C'est notamment le seul schéma d'intégration temporelle explicite présent dans les codes de calcul industriels classiques en la matière, comme Abaqus[®] [Abaqus(2002)] ou LS-Dyna[®] [Hallquist(1998)]

$$\begin{aligned} M\ddot{q}_n &= \mathcal{R}_{ext}(q_n, \dot{q}_n) - \mathcal{R}_{int}(q_n, \dot{q}_n) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \frac{h}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (2.38)$$

Le schéma CFD peut s'introduire plus classiquement. L'idée est d'approcher les vitesses calculées à l'instant $n + \frac{1}{2}$ (respectivement $n - \frac{1}{2}$) par les valeurs du déplacement calculé aux instants n et $n + 1$ (respectivement $n - 1$ et n). On obtient ainsi les expressions des vitesses suivantes :

$$\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{q_n - q_{n-1}}{h} \quad \dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{q_{n+1} - q_n}{h}$$

Le calcul de l'accélération à l'instant n se fait ensuite grâce aux vitesses calculées aux instants $n - \frac{1}{2}$ et $n + \frac{1}{2}$:

$$\ddot{q}_n = \frac{\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{q}_{n-\frac{1}{2}}}{h} = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \quad (2.39)$$

Cependant, remarquons qu'en retenant ainsi pour le calcul de la vitesse au temps t : $\dot{q}_n = (q_{n+1} - q_{n-1})/h$ les expressions précédentes sont équivalentes aux expressions (2.38).

Caractéristiques et algorithme de résolution

Les principales caractéristiques du schéma CFD sont :

- un caractère explicite,
- une précision d'ordre 2,
- une résolution effectuée en 1 pas de temps,
- une stabilité conditionnelle avec $\omega h = 2$,
- une conservation de l'énergie globale pour un comportement élastique linéaire,
- une erreur d'amplitude nulle $1 - \rho = 0$ dans le cas d'un comportement élastique linéaire,
- une erreur de périodicité valant $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\omega^2 h^2}{24}$ dans le cas d'un comportement élastique linéaire.

La résolution de ce système de 3 équations peut être réalisée de plusieurs manières. [Géradin et Rixen(1993)] proposent l'algorithme repéré sur la FIG. 2.5 alors que [Nême(2000)] propose celui repéré sur la FIG. 2.6.

La différence majeure provient du calcul ou non du champ de vitesses \dot{q} à l'instant $t_{-\frac{1}{2}}$ lors de l'initialisation.

Le code de calcul universitaire Herezh++ développé par [Rio(2006)] constituera l'outil de travail principal pour les différentes études proposées dans ce mémoire. Plusieurs méthodes de résolution du schéma CFD y ont été implantées. Nous choisissons de montrer celle qui est utilisée couramment et qui diffère des méthodes de Nême et Géradin. La principale différence se situe dans le calcul des vitesses nodales. L'algorithme ne passe pas par le calcul de vitesses milieux mais approche la vitesse notée \tilde{q} à l'instant t_n en fonction de la vitesse \dot{q} et de l'accélération \ddot{q} de l'instant précédent t_{n-1} . Ensuite, une correction de la vitesse \dot{q}_n est effectuée avant l'incrément temporelle de manière à utiliser une vitesse qui n'est pas approchée.

Utilisation à travers un cas mono-dimensionnel

Nous choisissons de débiter par un exemple simple en 1D comme celui défini en introduction au §2.1. Considérons une barre élastique de longueur $L = 200 \text{ mm}$, encastree à une extrémité et soumise à un chargement en compression de type force axiale ($F = 10 \text{ N}$) sur une courte période à l'autre extrémité (cf. FIG. 2.8). La barre est discrétisée avec 100 éléments barres linéaires de longueur $L_{elt} = 2 \text{ mm}$ et ses caractéristiques sont les suivantes : $E = 200 \text{ GPa}$, $\rho = 5.10^{-8} \text{ ton.mm}^{-3}$, $S = 10 \text{ mm}^2$.

Ces valeurs sont inhabituelles dans un cadre expérimental. Elles sont choisies arbitrairement de manière à normer les résultats.

L'utilisation du schéma de CFD à travers cette géométrie entraîne certaines restrictions concernant le pas de temps, noté h . Il ne doit pas excéder un certain pas de temps critique h_c pour des raisons de stabilité du schéma (cf. §2.3.2). Ici, il vaut $h_c = L_{elt} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1.0e^{-6} \text{ s}$. On fixe arbitrairement le pas de temps à $h = 9.0e^{-7} \text{ s}$, soit 90% du pas de temps critique.

La durée du chargement appliqué est choisie suffisamment courte (durée $< \frac{2L}{3} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$) de manière à observer distinctement la propagation des Allers / Retours.

La *solution théorique* en contrainte de ce problème (calculée au §4.2.1) peut s'approcher aisément. Il s'agit d'une suite de 2 créneaux de compression et de 2 créneaux de traction d'une durée égale à celle du chargement et d'une amplitude égale à $\sigma = \frac{F}{S}$.

On peut ainsi comparer le signal de contrainte obtenu en simulation numérique à celui issu de la *solution théorique* du système continu (cf. FIG. 2.9(a)). Le schéma CFD permet d'ap-

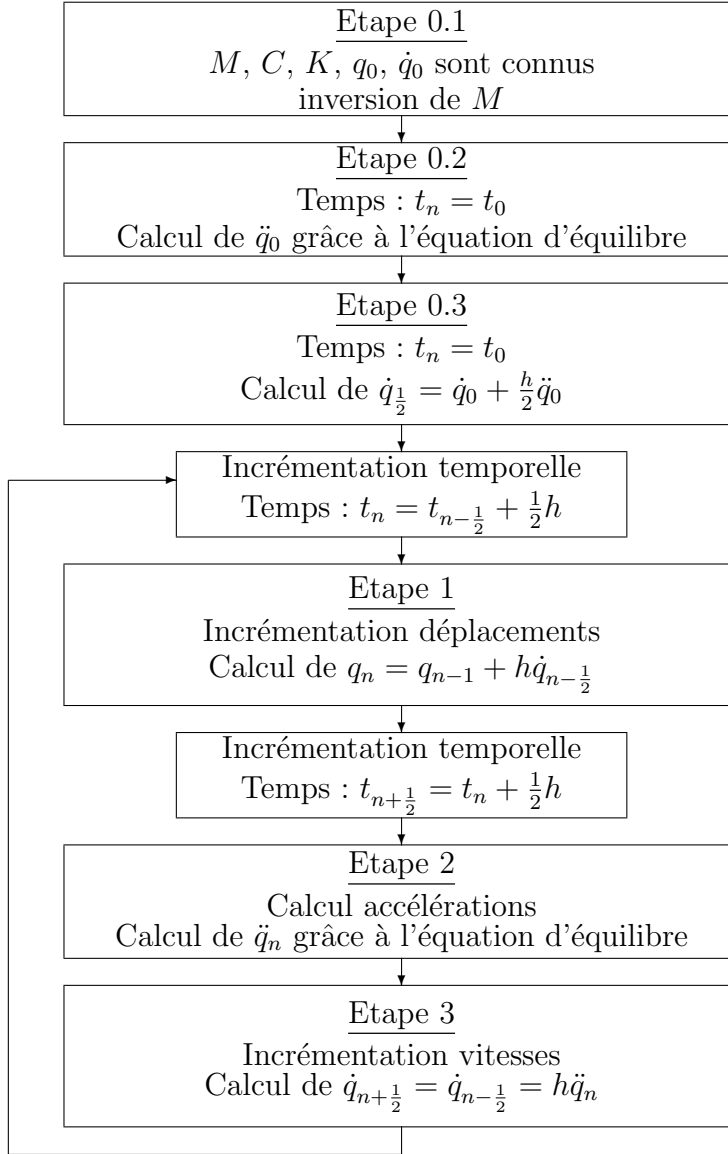


FIG. 2.5 – Algorithme de CFD selon [Géradin et Rixen(1993)]

procher assez grossièrement la *solution théorique*. En effet, pour chaque plateau de contrainte (positif, négatif ou nul) des oscillations hautes fréquences autour de la valeur *théorique* sont observées très distinctement. Ces oscillations n'ont, a priori, aucune *existence réelle* et proviennent du modèle numérique. Ils s'agit d'erreurs numériques que l'on qualifie de parasites (cf. §2.1). Malgré cela, le schéma parvient à reproduire temporellement le phénomène d'une manière assez précise. Concernant l'évolution de l'énergie, on constate tout d'abord une conservation de l'énergie totale confirmant le fait que le schéma CFD est conservatif.

Limite d'utilisation

Même si le schéma CFD est le plus utilisé des schémas explicites, il connaît certaines limites pour représenter le comportement de ce genre de problèmes : apparition d'oscillations

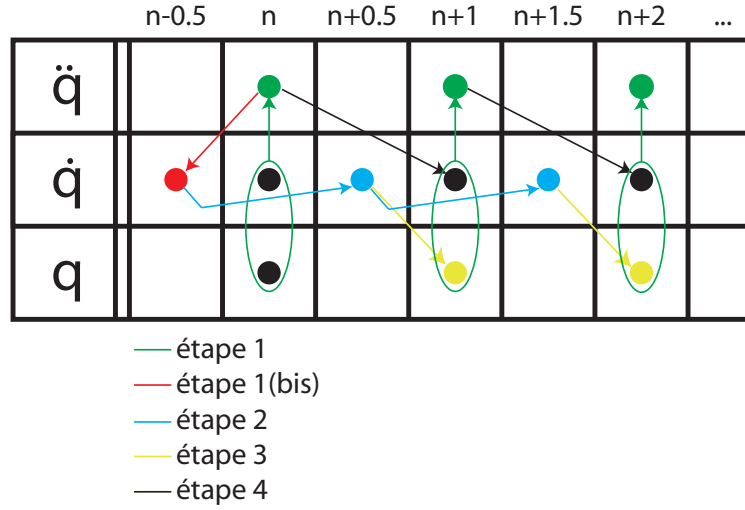


FIG. 2.6 – Algorithme de CFD selon [Nême(2000)]

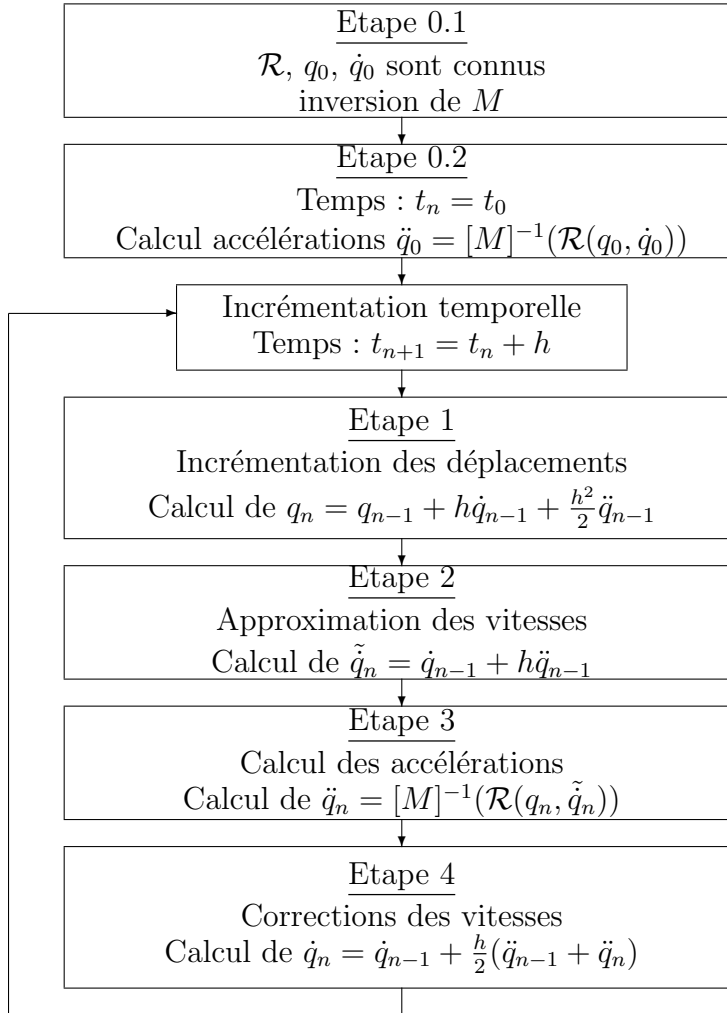


FIG. 2.7 – Algorithme de CFD implanté dans Herezh++

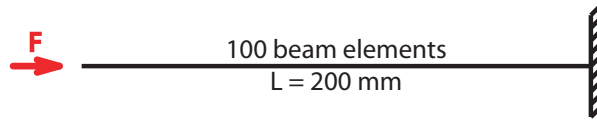


FIG. 2.8 – Description géométrique

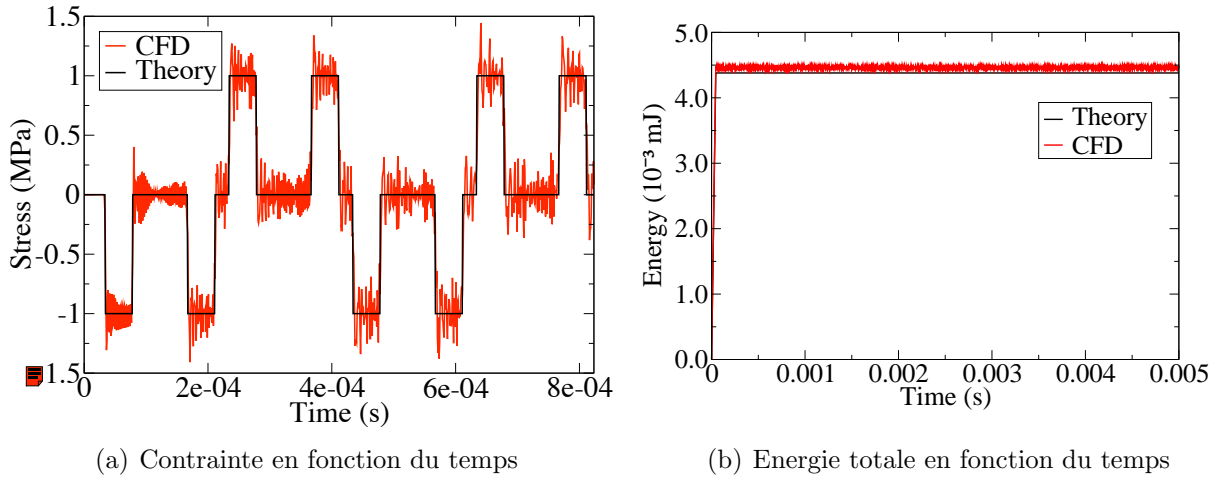


FIG. 2.9 – Comparaison CFD - Théorie

parasites. On peut alors envisager plusieurs voies d'investigations pour tenter d'éliminer ou du moins diminuer ces erreurs numériques :

- Une première voie d'investigation consiste à calculer plus précisément la solution numérique en utilisant des schémas d'ordre élevé. On peut citer notamment le schéma de Runge-Kutta (exposé au §2.3.4).
- La deuxième voie concerne les schémas basés sur une discrétisation temporelle de type *MDF* qui ont pour rôle d'amortir ces oscillations numériques en utilisant des artefacts numériques. Cette solution fera l'objet d'un paragraphe entier dédié à l'amortissement numérique (cf. §3.1.2).
- Enfin on peut citer également les schémas de Galerkin Discontinu en temps basés sur une discrétisation temporelle de type *MEF*, qui possèdent a priori 3 intérêts supplémentaires par rapport à CFD. D'une part, la précision du calcul est d'un ordre supérieur (ordre 3 en temps), d'autre part ces schémas intègrent de manière intrinsèque, la possibilité de prendre en compte des discontinuités temporelles. Enfin, ce sont des schémas amortissants. Le paragraphe 3.2 présente une analyse de ce type de schéma.

2.3.4 Schéma de Runge-Kutta

Introduction

L'objectif est d'utiliser le schéma classique de Runge-Kutta (RK) explicite avec pilotage en fonction d'une estimation d'erreur obtenue à l'aide de deux calculs imbriqués.

Ce type de méthodologie est courante pour la résolution de système d'équations différentielles du premier ordre ([Engeln-Müllges et Uhlig(1996)], [Press et al.(2002)]), dans le cas

où le système est de taille réduite (quelques dizaines d'équations). Dans le cas de la méthode des éléments finis, cette méthodologie n'est habituellement pas employée. Remarquons en particulier que la stabilité de la méthode est difficile à traiter. On peut signaler l'importance des travaux de l'école d'Aukland sur ce sujet, par exemple on peut se référer au document de thèse de W. Wright pour une présentation assez étendue ([Wright(2002)]).

Il est classiquement admis que les méthodes de type RK conduisent à un bon compromis précision - complexité, d'où l'idée d'observer leurs comportements dans le cadre de l'équation d'avancement temporel. L'objectif est ainsi de disposer d'une source de comparaison différente, pour les méthodes principalement étudiées, en particulier le modèle de Tchamwa.

Nous rappelons succinctement la modélisation utilisée, puis des précisions sont apportées quant à l'implantation au sein du code de calcul Herezh++ ([Rio(2006)]).

Avancement temporel avec le modèle de Runge-Kutta imbriqué

L'équation initiale d'avancement temporel du second ordre est transformée en un couple d'équations du premier ordre selon :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= M^{-1}(R_{ext} - R_{int}) \\ \dot{X} &= V\end{aligned}\tag{2.40}$$

Que l'on peut noter de manière plus générale :

$$\dot{y} = f(t, y)\tag{2.41}$$

Le vecteur “y” comprend ainsi les vitesses et les positions, la fonction “f” permet d'en calculer sa dérivée première par rapport au temps.

Le nombre d'inconnues du problème est ainsi doublé. Cependant, ces équations peuvent être traitées dans la pratique séquentiellement ce qui minimise l'inconvénient.

Lorsque l'on applique un schéma de type Runge-Kutta il est possible d'utiliser deux ordres successifs de précision, dont les solutions respectives par soustraction permettent d'obtenir une estimation de l'erreur d'intégration. Les opérations intermédiaires pour le calcul des deux ordres successifs sont mutualisés (utilisés deux fois) pour minimiser le coût de calcul. On obtient ainsi les formules classiques de “Prince-Dormand embedding formulas” ou encore de “Fehlberg embedding formulas”. Ces résultats étant suffisamment classiques, nous ne rappelons ici que le raisonnement général, mais pour plus de précision on pourra consulter par exemple la référence ([Engeln-Müllges et Uhlig(1996)]) §17.

Par exemple dans le cas de la méthode RK-45 (ordres 4 et 5 emboîtés), on peut écrire (cf.[Press et al.(2002)] §16) pour l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(t_n, y_n) \\ k_2 &= h f(t_n + a_2 h, y_n + b_{21} k_1) \\ &\dots \\ k_6 &= h f(t_n + a_6 h, y_n + b_{61} k_1 + \dots + b_{65} k_5) \\ y_{n+1} &= y_n + c_1 k_1 + \dots + c_6 k_6 + O(h^6)\end{aligned}\tag{2.42}$$

où : h est le pas d'avancement en temps choisi, a_i b_{ij} c_i sont des coefficients fixes spécifiques à la méthode. t_n est le temps initial où la solution est supposée connue, l'objectif étant

d'obtenir la solution à t_{n+1} c'est-à-dire y_{n+1} . On remarque, que les coefficients k_i peuvent se calculer successivement conduisant à y_{n+1} de manière explicite.

D'une manière analogue pour l'ordre 4 nous avons :

$$y_{n+1}^* = y_n + c_1^* k_1 + \dots + c_6^* k_6 + O(h^5) \quad (2.43)$$

ce qui conduit à l'estimation d'erreur :

$$err = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \quad (2.44)$$

Cette estimation d'erreur est utilisée pour piloter l'avancement du calcul, en particulier le pas de temps. Dans la pratique, le pilotage n'est pas si simple qu'il peut y paraître. Il tient compte de la précision disponible sur la machine de calcul, d'un nécessaire équilibrage des différentes équations de (2.41), des notions : d'erreurs globales (à tous le vecteur "y") ou local à chaque composante, d'erreur absolue ou relative, d'une stratégie pour augmenter ou diminuer le pas d'un calcul à l'autre en fonction des résultats obtenus ...

Dans notre cas, nous nous sommes appuyés d'une part sur les algorithmes proposés dans (cf.[Press et al.(2002)] §16.2 et dans ([Engeln-Müllges et Uhlig(1996)]) §17.3, et d'autre part sur l'algorithme "RKF45.CC" issu de nombreux travaux effectués en Fortran, que l'on peut consulter à l'adresse ([Watts et Shampine(2005)]).

Implantation

L'implantation comprend deux parties. Tout d'abord, une classe (au sens C++) de méthodes générales de résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre par la méthode de Runge-Kutta imbriquée a été mise en place. Cette classe intègre : les méthodes RK d'ordre 2 et 3 classiques, RK d'ordre 3 et 4 suivant l'algorithme proposé par Fehlberg, RK d'ordre 4 - 5 suivant l'algorithme proposé par Cash-Karp, et enfin la méthode de pilotage.

Ces méthodes sont organisées sous forme de *template* d'une classe générique qui doit contenir la fonction "f" et le vecteur "y".

La seconde partie de l'implantation, concerne la définition de l'algorithme d'avancement temporel sous forme d'une classe dédiée au même titre que l'algorithme de Tchamwa par exemple. L'avancement temporel s'obtient à partir de la fonction "f" calculée d'après (2.40) et de l'algorithme de pilotage RK. Au cours du calcul de "f", on introduit les conditions limites, et on résout le système par inversion de la matrice "M".

Par rapport aux algorithmes CFD ou Tchamwa, le coût en temps de calcul d'un avancement temporel dépend de l'ordre de la méthode, mais dans tous les cas il est bien supérieur. Par exemple dans le cas RK45, 5 nouvelles évaluations de la fonction "f" (la première provenant du pas précédent) sont nécessaires pour un pas de temps, contrairement au cas CFD ou Tchamwa où une seule évaluation est nécessaire. D'une manière simplifiée, on peut dire que les méthodes CFD et dérivées sont équivalentes à une méthode RK du premier ordre sans vérification de la précision.

Chapitre 3

Présentation des outils d'amortissement

Contents

3.1	Amortissement numérique	30
3.1.1	Bulk-viscosity	30
3.1.2	Schémas numériques amortissants	33
3.1.3	Schéma numérique de Tchamwa-Wielgosz	36
3.1.4	Matrice d'amortissement	38
3.1.5	Lois de comportement	39
3.2	Discrétisation temporelle par la MEF (Galerkin-discontinu) . .	40
3.2.1	Introduction	40
3.2.2	Le modèle de Bonelli	41
3.2.3	Quelques résultats	44
3.2.4	Remarques et conclusions partielles	48
3.3	Conclusion	52

3.1 Amortissement numérique

Après avoir détaillé les principales caractéristiques d'un schéma d'intégration temporelle, grâce au schéma de Newmark, de CFD et de Runge-Kutta, intéressons-nous maintenant aux différentes méthodes permettant l'amortissement des hautes fréquences numériques. Nous avons vu précédemment que, par rapport à la réponse théorique d'un système continu en temps et en espace, les discrétisations spatiale et temporelle utilisées dans le modèle numérique, conduisent à l'apparition de hautes fréquences additionnelles dites "numériques" ou "parasites". Plusieurs méthodes classiques sont actuellement disponibles pour filtrer ces fréquences numériques, cependant le sujet n'est pas clos, en particulier car il n'existe pas à notre connaissance de méthode permettant de cibler parfaitement les fréquences numériques parasites sans modifier la réponse du système continu. Ainsi de nouvelles méthodes sont périodiquement présentées. Au travers des nombreux travaux effectués sur le sujet, il est possible de distinguer deux grandes voies d'investigation : le *bulk-viscosity* et les schémas numériques amortissants. Après avoir étudié chacune de ces voies d'investigation, nous détaillerons le schéma numérique amortissant de Tchamwa-Wielgosz [Tchamwa(1997)], schéma qui a été à l'origine de travaux précédemment menés au laboratoire par [Soive(2003)], [Grolleau et al.(2004)] et [Rio et al.(2005)]. Enfin, nous évaluerons l'efficacité d'autres méthodes amortissantes telle l'utilisation d'une matrice d'amortissement, ou l'utilisation de lois de comportement.

3.1.1 Bulk-viscosity

Le *bulk-viscosity*, alternative aux schémas numériques amortissants, est fréquemment utilisé dans les codes de calcul industriels. On le retrouve ainsi dans Abaqus[®] et LS-Dyna[®], pour ne citer qu'eux. Le code LS-Dyna l'utilise même par défaut lors de chaque analyse dynamique ([Hallquist(1998)]).

Origine et définition

Le *bulk-viscosity* trouve son origine dans la mécanique des fluides. Pour s'affranchir du problème des discontinuités dans les équations de chocs hydrodynamiques, [Von Neuman et Richtmeyer(1950)] introduisent un comportement visqueux qui permet de se rapprocher de la physique en faisant intervenir une viscosité sphérique, tout en conservant une description continu du phénomène. Ils ajoutent ainsi un terme de pression q_{bulk} (équ. (3.1)) à la partie sphérique du tenseur des contraintes pour permettre l'étalement du front d'onde devenant discrétisable sur la grille d'espace. Cette pression est, dans un premier temps, fonction quadratique (paramètre C_0) de la trace du tenseur gradient de vitesse de déformation. Dans un second temps, [Landshoff(1955)] ajoute un terme de pression qui est fonction linéaire C_1 pour agir sur les instabilités après le choc.

$$q_{bulk} = \rho l (C_0 l I_{\mathbf{D}}^2 - C_1 a I_{\mathbf{D}}) \quad (3.1)$$

avec ρ la densité, a la vitesse de propagation, l la longueur caractéristique d'un élément, C_0 et C_1 les paramètres du *bulk-viscosity*, \mathbf{D} le tenseur taux de déformation et $I_{\mathbf{D}}$ sa trace.

Le code LS-Dyna[®] propose d'appliquer un amortissement en utilisant C_0 et C_1 lorsque $I_{\mathbf{D}} < 0$ ([Hallquist(1998)]). Les paramètres par défaut retenus pour le *bulk-viscosity* sont :

$C_0 = 1.5$ et $C_1 = 0.06$.

Le code Abaqus[®] applique C_1 de la même manière que LS-Dyna[®] et $C_0 \forall$ le signe de I_D . Les paramètres par défaut retenus pour le *bulk-viscosity* sont : $C_0 = 1.44$ et $C_1 = 0.06$.

Propriétés amortissantes

”Malgré” ses origines de la mécanique des fluides, le *bulk-viscosity* possède de réelles propriétés amortissantes dans le cadre de la dynamique des structures qu’il convient d’explorer. Avec l’approximation d’une discrétisation en éléments finis, on obtient l’équation d’équilibre matricielle classique :

$$\langle \dot{q}^* \rangle \left([M](\ddot{q}) + (\mathcal{R}_{int}(q, \dot{q})) - (\mathcal{R}_{ext}(q, \dot{q})) \right) = 0 \quad (3.2)$$

où $[M]$ est la matrice masse, \mathcal{R}_{int} est le résidu des efforts internes, \mathcal{R}_{ext} est le résidu des efforts externes, q les degrés de liberté (*ddl*) du système qui sont ici les positions nodales avec \dot{q} et \ddot{q} les vitesses et les accélérations. \dot{q}^* est la dérivée temporelle virtuelle des *ddl*.

Rappelons l’expression des efforts internes de l’équation (3.2), on a :

$$\langle \dot{q}^* \rangle (\mathcal{R}_{int}(q, \dot{q})) = \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q}) = \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}}^* dv \quad (3.3)$$

où \mathcal{D}_t est la position occupée par le domaine matériel \mathcal{D} à l’instant t , $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes et \mathbf{D} le tenseur taux de déformation.

Lorsque l’on applique du *bulk-viscosity* au système, cela revient à ajouter une pression numérique σ_{bulk} au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q}) = \int_{\mathcal{D}_t} (\boldsymbol{\sigma} + (q_{bulk} \mathbf{Id})) : \dot{\mathbf{D}}^* dv \quad (3.4)$$

En développant l’équation (3.4), on obtient la somme de la contribution des efforts internes qualifiés d’usuels et de la contribution des efforts internes liés au *bulk-viscosity* :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q}) &= \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{D}}^* dv + \int_{\mathcal{D}_t} (q_{bulk} \mathbf{Id}) : \dot{\mathbf{D}}^* dv \\ &= \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{usuel} + \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Intéressons-nous maintenant à la contribution des efforts internes concernant le *bulk-viscosity* ; à partir des équations (3.5) et (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk} &= \int_{\mathcal{D}_t} (q_{bulk} \mathbf{Id}) : \dot{\mathbf{D}}^* dv \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \rho l (C_0 l I_D^2 - C_1 a I_D) \mathbf{Id} : \dot{\mathbf{D}}^* dv \end{aligned} \quad (3.6)$$

L’équation (3.6) apparaît alors comme étant la somme d’une partie linéaire et d’une partie quadratique du résidu des efforts internes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk} &= \int_{\mathcal{D}_t} (\rho l^2 C_0) I_D^2 \mathbf{Id} : \dot{\mathbf{D}}^* dv + \int_{\mathcal{D}_t} (-\rho a l C_1) I_D \mathbf{Id} : \dot{\mathbf{D}}^* dv \\ &= \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{qua} + \mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{lin} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Développons la partie linéaire en décomposant le tenseur $\bar{\mathbf{D}}^*$ selon sa partie sphérique et sa partie déviatorique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{lin} &= \int_{\mathcal{D}_t} (-\rho a l C_1) I_{\mathbf{D}} \mathbf{Id} : \left(\frac{I_{\mathbf{D}}^*}{3} \mathbf{Id} + \bar{\bar{\mathbf{D}}}^* \right) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (-\rho a l C_1) I_{\mathbf{D}} \mathbf{Id} : \left(\frac{I_{\mathbf{D}}^*}{3} \mathbf{Id} \right) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (-\rho a l C_1) I_{\mathbf{D}} I_{\mathbf{D}}^* dv
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A titre d'information, il vient pour la partie quadratique :

$$\mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{qua} = \int_{\mathcal{D}_t} (\rho l^2 C_0) I_{\mathbf{D}}^2 I_{\mathbf{D}}^* dv \tag{3.9}$$

Ainsi, s'il on veut comparer l'effet de la partie linéaire par rapport à la partie quadratique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{lin} &= \int_{\mathcal{D}_t} (-a C_1) \alpha dv \\
\mathcal{R}_{int}^*(q, \dot{q})_{bulk}^{qua} &= \int_{\mathcal{D}_t} (l C_0 I_{\mathbf{D}}) \alpha dv
\end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $\alpha = \rho l I_{\mathbf{D}} I_{\mathbf{D}}^*$.

Le paramètre quadratique C_0 permettant l'étalement du front d'onde n'agit que très faiblement sur l'amortissement des hautes fréquences. Le paramètre déterminant dans l'amortissement des fréquences numériques est le paramètre linéaire C_1 introduit par [Landshoff(1955)] et qui agit sur les instabilités après le choc ([Fanget(2005)]). D'après les équations (3.10), quand les gradients de déformation sont forts (i.e. $I_{\mathbf{D}}$ grand), le terme quadratique C_0 est prépondérant, mais quand ils sont plus faibles, comme c'est le cas avec les oscillations parasites des éléments, C_1 trouve toute son efficacité.

Finalement, en reprenant l'équation (3.8) concernant la partie linéaire, on peut comparer l'action du *bulk-viscosity* à une loi visqueuse de type Newton (équation (3.29)) :

$$\boldsymbol{\sigma} = K' I_{\mathbf{D}} \mathbf{Id} + 2 \mu \bar{\mathbf{D}} \tag{3.11}$$

où μ est nul et $K' = -\rho a l C_1$:

$$\boldsymbol{\sigma} = K' I_{\mathbf{D}} \mathbf{Id} \tag{3.12}$$

Utilisation à travers un cas mono-dimensionnel

En reprenant le cas test sur une barre libre-encastree énoncé au §2.3.3, nous pouvons observer le pouvoir amortissant du *bulk-viscosity* utilisé avec ses paramètres usuels ($C_0 = 1.5$ et $C_1 = 0.06$) auquel on joint un schéma temporel de Différences Finies Centrées classique (cf. eq. 2.38).

En observant l'évolution de la contrainte dans un élément situé à 66mm de la sollicitation (cf. FIG. 3.1(a)), en fonction du temps, on remarque qu'à partir du premier Aller / Retour

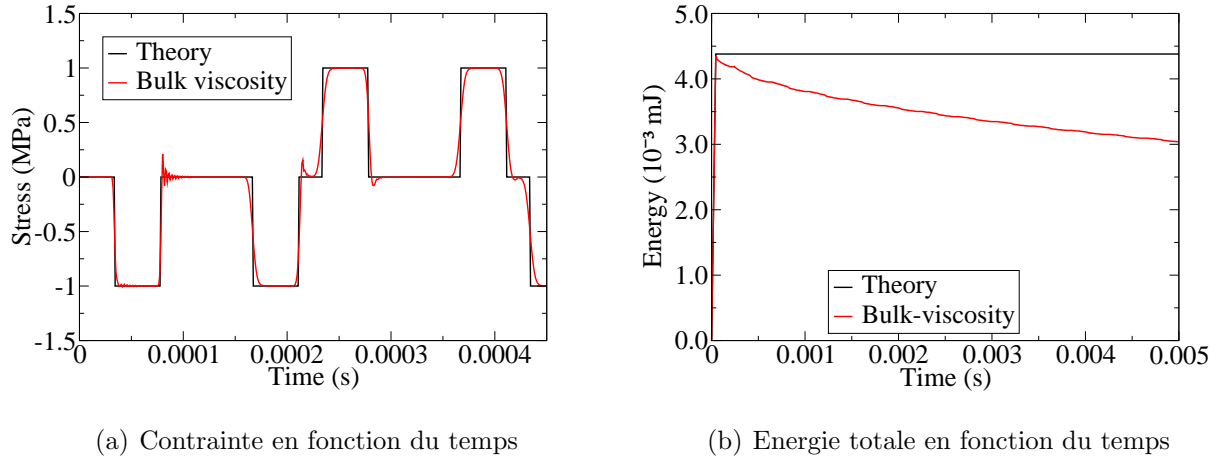


FIG. 3.1 – Comparaison Bulk-viscosity - Théorie

de l'onde dans la barre, le *bulk-viscosity* a complètement éliminé les oscillations numériques parasites. On constate également le caractère fortement dissipatif de cette méthode, dans ce cas, car l'énergie totale du système décroît continûment (cf. FIG. 3.1(b)).

3.1.2 Schémas numériques amortissants

De nombreux schémas d'intégration temporelle amortissants ont été développés depuis l'apparition du schéma de [Newmark(1959)]. Les premiers travaux qui ont permis d'introduire un amortissement datent de la fin des années 1970 avec [Hilber et al.(1977)] puis [Wood et al.(1981)] et se poursuivent encore actuellement avec les travaux de [Armero(2006)]. Les comparaisons entre les schémas peuvent amener à classer les schémas selon différentes caractéristiques. La plupart des auteurs [Noels(2004)] ou encore [Géradin et Rixen(1993)] les différencient en fonction de leur caractère implicite ou explicite. On peut également les classer en trois catégories :

- Les premiers d'entre eux agissent sur l'équation d'équilibre dynamique (2.8). L'équation modifiée est constituée d'une contribution des champs nodaux à l'instant t_n et des champs nodaux à l'instant t_{n+1} .

$$M \ddot{q} + \mathcal{R}_{int}(\dot{q}, q) = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}, q)$$

- Les seconds d'entre eux agissent sur les équations permettant le calcul des champs de vitesses et des champs de déplacement (2.9) et (2.10). Le but recherché est de décaler en temps le calcul des champs nodaux pour moyenner leur valeur entre deux instants.

$$\dot{q} = f(\ddot{q}, \dot{q})$$

$$q = g(\ddot{q}, \dot{q}, q)$$

- Les derniers d'entre eux sont utilisés plus particulièrement dans le domaine non-linéaire où les précédentes méthodes souffrent d'un manque de stabilité. Les schémas consistent à adapter l'intégration pour chaque type de non-linéarité en établissant une formulation des forces qui conduit à vérifier les lois de conservation.

Schémas modifiant l'équation d'équilibre

L'objectif de ces schémas est de modifier l'équation d'équilibre dynamique en pondérant le calcul des différents termes par leurs valeurs aux différents instants t_n et t_{n+1} . On les appelle plus communément, les α -méthodes, en référence au coefficient de pondération utilisé. Ce sont des schémas dont la résolution est effectuée en 1 pas de temps.

Schéma implicite de HHT

[Hilber et al.(1977)] choisissent de pondérer les forces internes \mathcal{R}_{int} entre les temps t_n et t_{n+1} en utilisant le paramètre d'amortissement α_{hht} :

$$M \ddot{q}_{n+1} = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - (1 + \alpha_{hht}) \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) + \alpha_{hht} \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_n, q_n) \quad (3.13)$$

Schéma implicite de WBZ

[Wood et al.(1981)] choisissent, quant à eux, de pondérer les forces d'inerties $M\ddot{q}$ entre les instants t_n et t_{n+1} en utilisant le paramètre d'amortissement α_{wbz} :

$$(1 - \alpha_{wbz}) M \ddot{q}_{n+1} + \alpha_{wbz} M \ddot{q}_n = \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \quad (3.14)$$

Schéma implicite de Chung-Hulbert

[Chung et Hulbert(1993)] combinent les deux méthodes précédentes en utilisant les deux paramètres α_{hht} et α_{wbz} afin de généraliser la méthode :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_{wbz}) M \ddot{q}_{n+1} + \alpha_{wbz} M \ddot{q}_n = \\ (1 - \alpha_{hht}) [\mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})] + \\ \alpha_{hht} [\mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_n, q_n) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_n, q_n)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'équation modifiée de la dynamique (3.15) est couplée aux équations des champs de vitesses et de déplacements issus du schéma de Newmark. On peut ainsi obtenir une méthode amortissante d'une précision d'ordre 2, en choisissant les paramètres γ et β adéquats :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_{wbz} + \alpha_{hht}$$

La stabilité inconditionnelle du schéma est obtenue pour :

$$\alpha_{wbz} \leq \alpha_{hht} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\alpha_{hht} - \alpha_{wbz})$$

Pour maximiser la dissipation des hautes fréquences numériques et respectivement minimiser la dissipation des basses fréquences, les auteurs [Chung et Hulbert(1993)] préconisent, respectivement, d'utiliser le paramètre β fonction des paramètres d'amortissement α_{hht} et α_{wbz} et d'appliquer une relation liant ces paramètres :

$$\beta = \frac{1}{4} [1 - \alpha_{wbz} + \alpha_{hht}]^2 \quad \text{et} \quad \alpha_{hht} = \frac{\alpha_{wbz} + 1}{3}$$

Ces schémas temporels apparaissent dans la bibliographie sous le terme de *Generalized- α methods*, en relation avec le paramètre d'amortissement α .

Schéma explicite de Chung-Lee

Les auteurs [Chung et Lee(1994)] proposent de calculer les efforts intérieurs \mathcal{R}_{int} et les efforts extérieurs \mathcal{R}_{ext} au temps t_n plutôt qu'au temps t_{n+1} :

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_{n+1} &= \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_n, q_n) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_n, q_n) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h (\hat{\gamma} \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1}) \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 (\hat{\beta} \ddot{q}_n + \beta \ddot{q}_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour que le schéma (3.16) soit exact au second ordre, les trois paramètres $\hat{\beta}$, γ et $\hat{\gamma}$ doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\hat{\beta} = \frac{1}{2} - \beta, \quad \gamma = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma} = 1 - \gamma$$

Ensuite, une étude de convergence (consistance et stabilité) conduit à l'utilisation du paramètre β sous la condition :

$$1 \leq \beta \leq \frac{28}{27}$$

Le schéma proposé par [Chung et Lee(1994)] est *conditionnellement stable* avec la limite de stabilité :

$$2 \geq \omega h \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Schémas modifiant les équations des champs de vitesses et de déplacements

Pour les schémas de la deuxième catégorie, les équations des champs de vitesses et/ou déplacements sont modifiées, c'est-à-dire que les valeurs nodales ne sont pas calculées au même moment durant l'avancement temporel.

Schéma de Zhai

[Zhai(1996)] utilise l'équation habituelle d'équilibre dynamique calculée au temps t_{n+1} . Il joint les deux équations des champs de vitesses et de déplacements qui sont calculées grâce aux temps t_{n+1} , t_n et t_{n-1} : la résolution est ainsi effectuée sur 2 pas de temps (cf. §2.3.2).

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_{n+1} &= \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1 + \varphi)h \ddot{q}_n - \varphi h \ddot{q}_{n-1} \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \left(\frac{1}{2} + \psi\right) \ddot{q}_n - h^2 \psi \ddot{q}_{n-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'auteur pondère ainsi le calcul des vitesses et des déplacements nodaux entre les instants t_n et t_{n-1} en faisant intervenir les paramètres de pondération φ pour les vitesses et ψ pour les déplacements.

L'étude de convergence (consistance et stabilité) conduit à une plage d'utilisation importante pour chaque paramètre, a contrario du schéma de Chung-Lee. L'auteur caractérise l'originalité de son schéma en utilisant 2 jeux de paramètres (φ, ψ) . Lorsque l'on utilise le jeu de paramètres $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on retrouve le schéma explicite CFD avec la limite de stabilité habituelle $\omega h = 2$. En revanche, lorsque l'on utilise le jeu de paramètres $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, la limite de

stabilité ωh doit appartenir à l'intervalle $[\sqrt{\frac{24}{5}}, \sqrt{\frac{16}{3}}]$. On peut dès lors envisager une limite de stabilité supérieure à celle du schéma CFD.

La précision du schéma de [Zhai(1996)] est la même que celle du schéma de Newmark implicite (ordre 2) sauf si le jeu de paramètres utilisé est le suivant $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$; la précision est alors du troisième ordre.

Schéma de Tchamwa-Wielgosz

Le schéma de Tchamwa-Wielgosz étant à l'origine de nombreux travaux au laboratoire [LG2M(2006)], notamment la thèse de [Soive(2003)], il fera l'objet d'un paragraphe entier §3.1.3, dans laquelle, il sera étudié en détails.

Schémas établissant une formulation des forces vérifiant les lois de conservation

Introduits par [Simo et Tarnow(1992)], ces schémas possèdent la particularité de pouvoir conserver une certaine stabilité dans le domaine non-linéaire tout en effectuant des grands pas de temps de calcul, ce qui n'est pas le cas des méthodes- α . Pour cela, les auteurs proposent de combiner un schéma du point milieu avec une expression adéquate des forces internes construite en fonction de la non-linéarité. Le lecteur se référera aux ouvrages de référence pour plus d'information, ces schémas ne feront pas l'objet d'étude dans ce mémoire.

3.1.3 Schéma numérique de Tchamwa-Wielgosz

Définition

Comme pour le schéma de Zhai, [Tchamwa(1997)] utilise l'équation de l'équilibre global habituelle. Les équations des champs de vitesses et de déplacements font intervenir 4 paramètres λ , α , β et γ permettant de pondérer le calcul des vitesses et des déplacements. Le schéma n'utilise qu'un pas de temps pour la résolution :

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_{n+1} &= \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \lambda h \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + \alpha h \dot{q}_n + \beta h^2 \ddot{q}_n + \gamma h \dot{q}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

L'étude de convergence (stabilité et consistance) de ce schéma a fait l'objet d'une étude détaillée lors de la thèse de [Soive(2003)] et d'une publication [Rio et al.(2005)]. Elle permet de réduire le nombre de paramètres et finalement un seul paramètre φ demeure :

$$\begin{aligned} M \ddot{q}_{n+1} &= \mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) - \mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1}) \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h \ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + \varphi h^2 \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dans le cas amorti, la plage d'utilisation du paramètre φ s'étale de $[1; +\infty]$ avec une limite de stabilité :

$$\omega h < \sqrt{\frac{2}{\varphi - \frac{1}{2}}}$$

Le pas de temps critique pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz est calculé par rapport au schéma des DFC comme ceci :

$$h_c^{Tchamwa} = \frac{1}{\sqrt{2\varphi - 1}} h_c^{DFC}$$

Propriétés amortissantes

Dans la partie §3.1.1, une étude a été effectuée sur la manière utilisée par le *Bulk viscosity* pour amortir les hautes fréquences. Dans un souci de comparaison, nous effectuons la même étude pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz.

Nous comparons, pour ce faire, le schéma de Tchamwa avec celui des CFD. Pour cela, nous nous intéressons au système d'équations :

– de la CFD (eq. (3.20) et (3.21)) :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{h}{2}(\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1}) \quad (3.20)$$

$$q_{n+1} = q_n + h\dot{q}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_n \quad (3.21)$$

– de Tchamwa (eq. (3.22) et (3.23)) :

$$\tilde{q}_{n+1} = \tilde{q}_n + h\ddot{q}_n \quad (3.22)$$

$$q_{n+1} = q_n + h\tilde{q}_n + h^2\varphi\ddot{q}_n \quad (3.23)$$

Le schéma de Tchamwa est équivalent à celui des CFD pour l'équation (3.22) si aux vitesses \tilde{q}_n et \tilde{q}_{n+1} définies dans Tchamwa correspondent respectivement les vitesses $\dot{q}_{n-\frac{1}{2}}$ et $\dot{q}_{n+\frac{1}{2}}$.

En effet, l'équation (2.39) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= \frac{1}{h}(\tilde{q}_{n+1} - \tilde{q}_n) \\ \ddot{q}_n &= \frac{1}{h}(\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{q}_{n-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

On retrouve à l'équation (3.24) la définition de l'accélération au sens des CFD. Cela revient donc à considérer le schéma de Tchamwa comme *décentré à droite*.

Poursuivons la comparaison par l'équation (3.23), en utilisant la relation $\tilde{q}_n = \dot{q}_{n-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h\tilde{q}_n + h^2\varphi\ddot{q}_n \\ q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} + h^2\varphi\ddot{q}_n \end{aligned} \quad (3.25)$$

On sait que :

$$\dot{q}_n = \frac{1}{2}(\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} + \dot{q}_{n-\frac{1}{2}}) \quad (3.26)$$

En retranchant l'équation (3.24) à l'équation (3.26), on obtient :

$$\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} = \dot{q}_n - \frac{h}{2}\ddot{q}_n \quad (3.27)$$

A partir des équations (3.27) et (3.25), il vient :

$$\begin{aligned}
 q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_{n-\frac{1}{2}} + h^2\varphi\ddot{q}_n \\
 &= q_n + h(\dot{q}_n - \frac{h}{2}\ddot{q}_n) + h^2\varphi\ddot{q}_n \\
 &= q_n + h\dot{q}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_n(2\varphi - 1)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

En comparant l'équation (3.28) avec l'équation (3.21), on constate qu'un facteur $(2\varphi - 1)$ apparaît devant le terme en accélération \ddot{q}_n dans le schéma de Tchamwa.

Finalement, on peut conclure que le schéma de Tchamwa-Wielgosz est un schéma décentré à droite dont l'amortissement agit comme une perturbation de valeur $(2\varphi - 1)$ de la quantité d'accélération.

Utilisation à travers un cas mono-dimensionnel

En reprenant le cas test sur une barre libre-encastree énoncé au §2.3.3, nous pouvons observer le pouvoir amortissant de ce schéma amortissant. On fixe la valeur de son paramètre $\varphi = 1.03$ pour observer son influence.

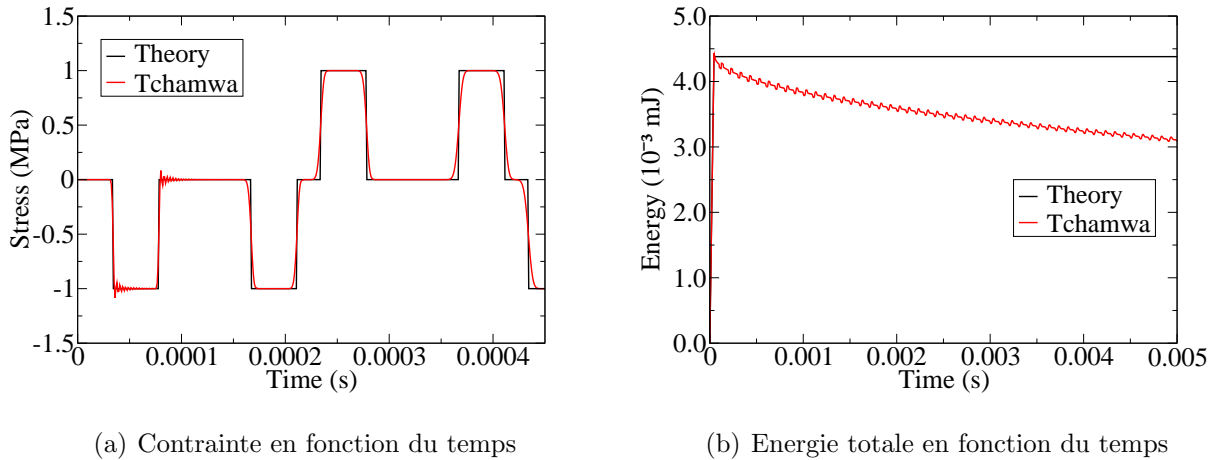


FIG. 3.2 – Comparaison Tchamwa - Théorie

Comme pour le *Bulk-viscosity*, le schéma de Tchamwa-Wielgosz amortit les oscillations numériques parasites comme on le constate sur la FIG. 3.2(a) traitant de l'évolution de la contrainte. Le schéma est dissipatif et l'énergie totale décroît continûment (cf. FIG. 3.2(b)).

3.1.4 Matrice d'amortissement

L'utilisation d'une matrice d'amortissement C permet également d'amortir arbitrairement les oscillations numériques parasites. Sa forme la plus classique est celle de Rayleigh qui consiste à exprimer l'amortissement en une combinaison linéaire de la matrice masse M et de la matrice de raideur K . L'équation d'équilibre dynamique devient :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F \quad \text{avec} \quad C = \alpha M + \beta K$$

Ainsi, cet amortissement permettra une diminution de la quantité de mouvement des noeuds de la structure en utilisant le paramètre α et un amortissement matériau de type visqueux en utilisant le paramètre β .

3.1.5 Lois de comportement

Il existe également une autre voie d'investigation pour éliminer les hautes fréquences. L'utilisation d'une loi de comportement dissipative entraîne une diminution de l'énergie globale du système qui se traduira par un amortissement des oscillations numériques parasites.

L'autre possibilité offerte à l'utilisateur d'un code de calcul pour amortir les oscillations parasites numériques est l'utilisation d'une loi de comportement faisant intervenir de l'amortissement dans sa formulation. On peut, en effet, introduire une certaine viscosité artificiellement pour éviter ainsi des accélérations brutales des noeuds de la structure. Plusieurs lois visqueuses sont alors proposées. On peut notamment citer la loi visqueuse de type Newton complète qui a déjà été comparée au bulk-viscosity au §3.1.1.

$$\boldsymbol{\sigma} = K' I_D \mathbf{Id} + 2 \mu \bar{\mathbf{D}} \quad (3.29)$$

L'objet de la thèse étant l'étude des schémas d'intégration temporelle, nous ne nous attarderons pas sur les différentes lois visqueuses permettant l'amortissement des erreurs numériques.

3.2 Discrétisation temporelle par la MEF (Galerkin-discontinu)

3.2.1 Introduction

Les méthodes traditionnelles utilisées pour traduire l'évolution temporelle de l'équilibre sont fondées sur l'hypothèse d'une évolution continue. Parmi ces méthodes, nous avons vu les différences finies centrées (CFD) pour l'explicite et la famille des méthodes de Newmark pour l'implicite. Dans le cas de fortes impulsions : impacts ou chocs, on observe des oscillations numériques qui n'ont aucun fondement physique : par exemple après un créneau de force. L'objectif ici est d'investiguer la méthode de Galerkin-discontinu, qui inclut par essence la possibilité d'avoir des discontinuités en position ou en vitesse. Différents modèles ont été proposés dans la littérature.

Par exemple X. D. Li et N.-E. Wiberg ([Li et Wiberg(1996)]) proposent une discrétisation de type P1-P1 en position - vitesse. La position et la vitesse sont des variables qui peuvent-être discontinues entre deux pas de temps, ainsi sur chaque intervalle de temps, il y a 4 inconnues, déplacement et vitesse initiaux et finals. La formulation variationnelle est clairement définie et de manière à éviter la résolution d'un système 4 fois plus volumineux en *ddl* que le cas classique (CFD par exemple), une procédure itérative est mise en place qui converge en 2 à 6 itérations sur les exemples donnés. Une procédure d'adaptation automatique de pas de temps est proposée en fonction d'une norme d'erreur fondée sur le saut en vitesse et en position observé à chaque pas de temps. De nombreux exemples classiques de validation montrent l'intérêt de la méthode : 1 *ddl*, 2 *ddl* couplé, 2 *ddl* avec un mode lent et un mode très rapide que l'on veut supprimer, et enfin une superposition de masse ressort modélisant un immeuble soumis à une onde de cisaillement (dont l'équation est traitée comme un problème 1D). Les auteurs, de manière identique à la plupart des autres travaux, montrent que la convergence est du troisième ordre. Elle est bien meilleure que celle de Newmark classique, ce qui permet de retenir un pas de temps important. Il est important de noter que le système de pilotage en pas de temps semble efficace dans les cas où on ne s'intéresse pas justement au saut ! Dans les autres cas, les résultats ne sont pas convaincants. La formulation est principalement implicite, inconditionnellement stable.

Les travaux de C.C. Chien, C.S. Yang, J.H. Tang ([Chien et al.(2003)]) décrivent une méthode (Time-Discontinuous-Galerkin : TDG) qui fait suite au travail de Li and Wiberg, l'apport principal étant le passage en 3D, la comparaison dans ce cas avec d'autres méthodes classiques, et l'introduction d'une modification de l'algorithme itératif qui permet de diminuer le coût de calcul. L'analyse de la stabilité et de la précision est faite à partir d'un oscillateur à 1 *ddl*. Les résultats sont comparés aux schémas classiques : Newmark, HHT, Wilson et Houbolt. On retrouve une précision du 3^{ème} ordre, et on observe un amortissement important des fréquences numériques.

Xikui Li, Dongmei Yao, R. W. Lewis ([Li et al.(2003)]) proposent une formulation où seule la vitesse peut-être discontinue. L'interpolation de la position s'appuie sur les polynômes d'Hermite, et la vitesse est linéaire sur le pas de temps. Par rapport au modèle précédent, le nombre de vecteurs inconnues passe de 4 à 3. Les résultats obtenus semblent convaincants.

Ces dernières années, de très nombreux travaux ont été menés sur le sujet. Cependant, parmi l'ensemble des modèles proposés, très peu concernent un avancement explicite, thème principal de notre étude. Les travaux récents les plus intéressants semblent être ceux présentés

par Bonelli et al ([Bonelli et al.(2001)], [Bonelli et Bursi(2002)]). Ce modèle a été implanté dans Herezh++ et est décrit plus en détail par la suite.

3.2.2 Le modèle de Bonelli

Cette partie concerne la modélisation proposée par Bonelli et al ([Bonelli et al.(2001)], [Bonelli et Bursi(2002)]) et les particularités de l'implantation dans Herezh++. La première publication traite du cas linéaire, la seconde est une extension au cas non linéaire des puissances internes. Dans le cas de l'implantation dans Herezh++, l'algorithme est également étendu au cas des puissances externes non-linéaires. On considère la partition habituelle du temps, et on s'intéresse à l'intégration du processus sur un pas de temps. Les deux inconnues du problème sont la quantité de mouvement (au lieu de la vitesse) et la position, chacune pouvant-être discontinue aux bornes du pas de temps. L'interpolation de ces deux inconnues est de type P1-P1, c'est-à-dire linéaires. Soient $q(t)$ et $p(t)$ la position et la quantité de mouvement.

$$q(t) = t_1(t) q_1 + t_2(t) q_2 \quad , \quad p(t) = t_1(t) p_1 + t_2(t) p_2 \quad (3.30)$$

avec $q_1 = q(t_n^+)$, $q_2 = q(t_{n+1}^-)$, $p_1 = p(t_n^+)$, $p_2 = p(t_{n+1}^-)$ et

$$t_1(t) = \frac{(t_{n+1} - t)}{h} \quad \text{et} \quad t_2(t) = \frac{t - (t_n)}{h} \quad (3.31)$$

On associe aux positions et aux quantités de mouvement, les champs de fonctions tests suivantes :

$$w_q(t) = t_1(t) w_{q1} + t_2(t) w_{q2} \quad , \quad w_p(t) = t_1(t) w_{p1} + t_2(t) w_{p2} \quad (3.32)$$

Avec ces différentes quantités, la méthode de Galerkin-Discontinu peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} w_q \left(\dot{p}(t) + R_{int}(q(t), V(t)) - R_{ext}(q(t), V(t)) \right) dt \\ & + \int_{I_n} w_p \left(M^{-1} p(t) - \dot{q}(t) \right) dt \\ & - w_{pr} (q(t_n^+) - q_0) \\ & + w_{qr} (p(t_n^+) - p_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

pour $r = 1$ et $r = 2$, et où I_n est l'intervalle de temps considéré $]t_n, t_{n+1}[$, $p_0 = p(t_n^-)$, $q_0 = q(t_n^-)$, $V(t)$ est la vitesse au temps t , $R_{int}(q(t), V(t))$ est la puissance des efforts internes, $R_{ext}(q(t), V(t))$ est la puissance des efforts externes.

On remarque que les conditions de continuité en vitesse et en déplacement sont prises de manière "faibles" à l'aide des troisième et quatrième termes de (3.33), tandis que le premier terme représente la forme variationnelle des équations d'équilibres des puissances intégrées sur le pas de temps, et le deuxième terme représente la forme variationnelle de la relation vitesse-déplacement à travers la quantité de mouvement.

Les expressions (3.30) et (3.31) sont introduites dans (3.33) et l'intégration temporelle est effectuée de manière explicite ce qui conduit à (en retenant globalement la démarche proposée par Bonelli) :

$$\begin{aligned}
P_{q\ 1} + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} &= p_0 + P_{i\ 1} \text{ pour } wq_1 \\
P_{q\ 2} - \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2} &= P_{i\ 2} \text{ pour } wq_2 \\
-\frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2} + \frac{h}{3}M^{-1}p_1 + \frac{h}{6}M^{-1}p_2 &= -q_0 \text{ pour } wp_1 \\
\frac{q_1}{2} - \frac{q_2}{2} + \frac{h}{6}M^{-1}p_1 + \frac{h}{3}M^{-1}p_2 &= 0 \text{ pour } wp_2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

où pour $\alpha = 1$ et 2 :

$$\begin{aligned}
P_{q\ \alpha} &= \int_{t_i}^{t_i+1} t_\alpha(t) R_{int}(q(t), V(t)) dt \\
P_{i\ \alpha} &= \int_{t_i}^{t_i+1} t_\alpha(t) R_{ext}(q(t), V(t)) dt
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Dans ces expressions, l'intégration en temps est effectuée selon une quadrature de Gauss. Les auteurs préconisent 3 points d'intégration par sécurité, bien que les tests que nous avons effectués montrent qu'a priori 2 points sont suffisants.

De manière à obtenir une résolution quasi-explicite, une méthodologie de type prédiction-correction est retenue avec une à trois passes de correction. Dans la pratique, deux passes conduisent à un bon compromis précision/rapidité.

Nous rappelons les grandes lignes de la méthode qui est légèrement modifiée pour prendre en compte un comportement non linéaire du chargement.

Tout d'abord, un ré-arrangement des expressions (3.34) conduit au système d'équations suivant, avec k l'indice de la passe de correction :

$$\begin{aligned}
0 &= r_1(k) = \frac{1}{h}M q_2 - P_{q\ 1}(k) - P_{i\ 1}(k) - p_0 - \frac{1}{h}M q_0 \\
0 &= r_2(k) = \frac{1}{h}M q_1 + \frac{1}{3}(P_{q\ 2}(k) + P_{i\ 1}(k)) - \frac{1}{h}M q_0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans ces expressions, les quantités de mouvements ont été condensées explicitement en fonction des déplacements selon :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{h}M (3 q_1 + q_2 - 4 q_0) \\
p_2 &= \frac{1}{h}M (-3 q_1 + q_2 + 2 q_0)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

L'objectif est donc d'obtenir les résidus $r_\alpha(k)$ les plus faibles possibles.

Procédure

1. Initialisation : $i=0$, p_0 , q_0 , $R_{int}(q(0), V(0))$, $R_{ext}(q(0), V(0))$,
2. Pour chaque intervalle de temps t_i, t_{i+1} , on note pour simplifier :
 - q_0 et p_0 les positions et quantités de mouvements à t_i^-
 - q_1 et p_1 les positions et quantités de mouvements à t_i^+
 - q_2 et p_2 les positions et quantités de mouvements à t_{i+1}^-
- (a) Calcul des dérivées temporelles des quantités de mouvement au temps t_i^-

$$\dot{p}_0 = R_{int}(q_0, V_0) - R_{ext}(q_0, V_0) \quad (3.38)$$

- (b) Calcul de la prédiction du déplacement en tenant compte des conditions limites, selon une expression reposant sur le premier terme de la série de Taylor de la solution du schéma implicite TDG1 (tronqué au second ordre).

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + a (h)^2 M^{-1} \dot{p}_0 \\ q_2 &= q_0 + h M^{-1} p_0 + b (h)^2 M^{-1} \dot{p}_0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les paramètres “a” et “b” sont fixes, et sont déterminés pour optimiser la précision et l’amortissement numérique. Bonelli ([Bonelli et al.(2001)], [Bonelli et Bursi(2002)]) présentent une étude complète permettant la détermination automatique de ces paramètres en fonction des objectifs recherchés. D’une manière pratique l’évolution de l’optimum des couples de paramètres est présentée sous la forme d’une approximation polynomiale fonction du rayon spectral de la matrice d’amplification, ceci pour les cas : une passe, deux passes et 3 passes de correction. Le rayon spectral apparaît donc ainsi comme un paramètre de contrôle de l’algorithme, il permet également le calcul du pas de temps critique.

- (c) Calcul de la correction pour $k=0$ au nombre maximum-1 de corrections prévues (1,2 ou 3)
 - i. Calcul des termes $P_{q\alpha}$ et $P_{i\alpha}$, $\alpha = 1$ et 2, selon (3.35). Pour ce faire, on boucle sur les points d’intégration en temps. Pour chaque point d’intégration τ , les positions et vitesses sont évaluées selon (3.30) et (3.31) et associées aux conditions limites en déplacements et vitesses imposées,
 - ii. Calcul des résidus (3.36),
 - iii. Calcul de la correction selon :

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= -h M^{-1} r_2(k) \\ \Delta q_2 &= -h M^{-1} r_1(k) \end{aligned} \quad (3.40)$$

On remarque que la correction correspond à l’application d’un algorithme de Newton, pour lequel seule la partie relative à la matrice masse est prise en compte ce qui, compte tenu du pas de temps, s’avère efficace, la sensibilité à la variation des efforts généralisés se révélant dans nos tests très faible.

3. Calcul des quantités d’accélérations finales qui s’expriment sous forme d’une relation explicite entre les positions et les quantités de mouvements à partir des relations (3.37) :

Au niveau informatique, l'algorithme est implanté sous une forme équivalente aux schémas d'avancements temporels : CFD, Tchamwa, Runge-Kutta. Les paramètres qui contrôlent le calcul sont donc le rayon spectral, le nombre de passes de correction et le nombre de points d'intégration en temps. Contrairement aux autres algorithmes de type CFD et dérivés, le pas de temps critique (pour la stabilité) peut-être choisi légèrement supérieur au pas de temps critique théorique de la condition de Courant (par exemple d'un facteur 1.03). Ceci est à mettre en parallèle avec le pas de temps choisi en pratique dans le cas CFD, qui doit plutôt être choisi inférieur au pas de temps critique théorique (par exemple un facteur 0.9).

3.2.3 Quelques résultats

On s'intéresse à une barre de 400mm de long, 4 mm² de section, en acier ($\rho = 7.8 \cdot 10^{-9} \text{ton.mm}^{-3}$) maillée tout d'abord avec 50 éléments 1D égaux. Le module d'Young est $2.0 \cdot 10^5 \text{MPa}$. La barre est chargée axialement, selon une rampe linéaire puis un palier de 10 N d'où une déformation statique de $1.25 \cdot 10^{-5}$. On se situe donc en petites perturbations. Le temps de montée est très court, de $1.0 \cdot 10^{-9} \text{s}$ et le temps de maintien de $1.0 \cdot 10^{-5} \text{s}$. Le pas de temps critique CFD est sensiblement : $h_{critique} = 1.58 \cdot 10^{-6} \text{s}$. Ainsi, à condition d'utiliser un pas de temps supérieur au temps de montée du chargement, on peut considérer que le chargement est de type créneau.

Temps de calcul - précision

Les temps de calcul sont en particulier reliés au nombre de fois où la puissance interne et la puissance externe sont évaluées par pas de temps. Dans le cas des méthodes classiques, une seule évaluation est effectuée. Dans le cas de l'implantation proposée, nous avons vu que l'intégration s'effectue par une quadrature de Gauss. Le nombre d'évaluation est alors égal au nombre de points de Gauss. Le tableau (3.1) montre quelques comparaisons. On observe qu'effectivement, l'algorithme DGE est plus coûteux d'un facteur supérieur au nombre de points d'intégration. En fait, il s'agit des opérations vectorielles globales qui ne sont pas pour l'instant optimisées.

TAB. 3.1 – Comparaison des temps d'exécution en seconde : algorithme CFD classique et celui proposé par Bonelli, $h = 0.9h_{critique}$, r= ratio par rapport à CFD

maillage	CFD	Bonelli : 2 points de Gauss	Bonelli : 3 points de Gauss
50 éléments	5.49 ($r = 1.$)	14.56 ($r = 2.64$)	18.77 ($r = 3.41$)
200 éléments	17.40 ($r = 1.$)	57.22 ($r = 3.28$)	77.24 ($r = 4.44$)

Résultats en déplacements

La FIG. 3.3 montre l'évolution du déplacement de l'extrémité en fonction du temps. Dans le cas de l'algorithme de Bonelli, $\rho = 0.9$ et le pas de temps est égal à $0.9 h_{critique}$ de manière à pouvoir se comparer avec l'algorithme de CFD classique. D'une manière générale on observe des résultats similaires, en terme de seuil, avec pour CFD à $0.9 h_{critique}$, un ensemble d'oscillations qui ne sont pas présentes avec DGE.

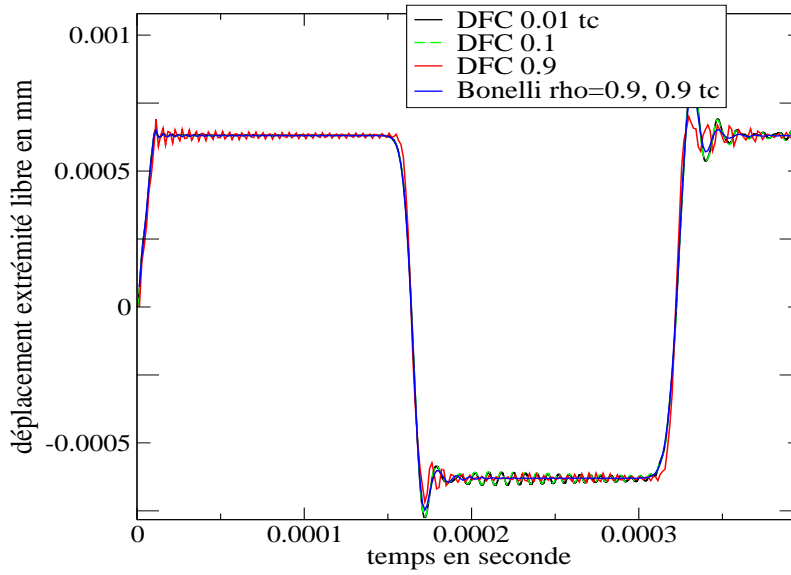


FIG. 3.3 – Comparaison du modèle de Bonelli et du modèle CFD classique pour différent pas de temps

Dans le cas de CFD, faisons varier le pas de temps. A partir d'un pas de temps plus faible que $0.1 h_{critique}$ les résultats obtenus en CFD demeurent sensiblement constants (cf. FIG. 3.4), et peuvent ainsi être considérés comme une bonne approximation de la solution exacte du système discrétisé. La solution CFD alors obtenue pour un pas de temps de $0.9 h_{critique}$ présente une erreur de plus de 5% par rapport à la solution de référence. Dans le cas de DGE, l'erreur est beaucoup plus faible. En fait, la solution obtenue avec DGE pour $0.9 h_{critique}$ est très proche de la solution CFD pour $0.01 h_{critique}$, ce qui peut sembler cohérent avec le fait que la précision de cet algorithme est théoriquement supérieure d'un ordre par rapport à CFD.

Résultats en énergies

La FIG. 3.5 montre la comparaison des énergies cinétiques, de la solution CFD de référence et celle de Bonelli pour un pas de temps également de $0.01 h_{critique}$ puis exactement du pas critique.

Tout d'abord on remarque que la solution obtenue pour un très faible pas de temps est globalement identique à CFD. En fait, pour un très faible pas de temps, comparé au pas de temps critique l'influence de la discontinuité est inexistente. Par contre dans le cas $h = h_{critique}$, DGE conduit à un résultat sensiblement identique initialement, puis qui s'atténue en fonction du temps. Cette évolution montre bien le caractère dissipatif de l'algorithme dans ces conditions. Une interprétation de ces courbes serait qu'il est nécessaire que la partie discontinuité soit répartie à la fois sur plusieurs pas de temps et sur un ou plusieurs éléments selon la finesse de l'interpolation, pour qu'elle soit bien représentée par l'algorithme.

L'algorithme suppose l'intégration temporelle des puissances internes et externes. La FIG. 3.6 montre l'évolution de la solution en fonction du nombre de point de Gauss utilisé. On

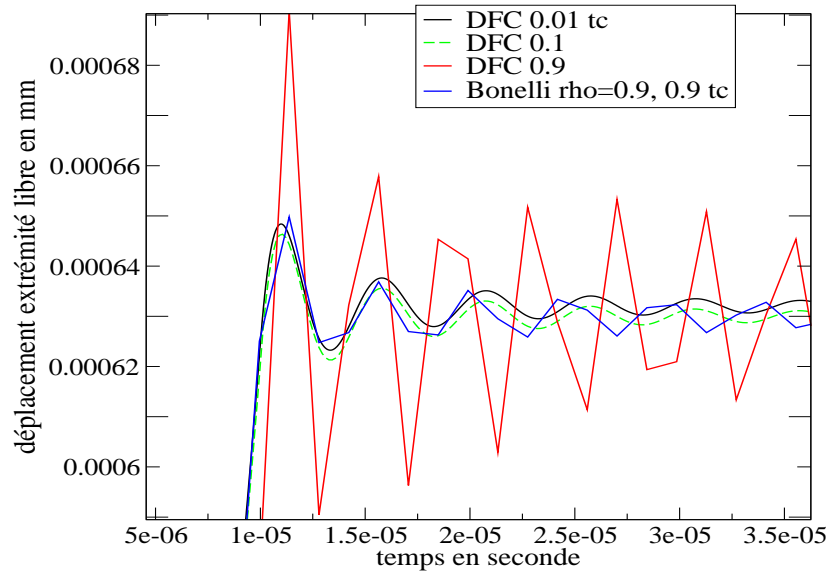


FIG. 3.4 – Agrandissement sur la comparaison du modèle de Bonelli et du modèle CFD classique pour différent pas de temps

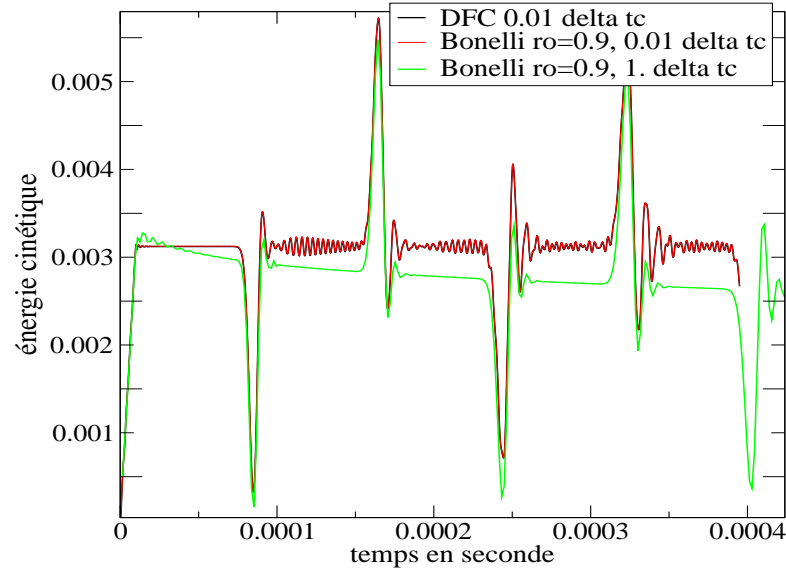


FIG. 3.5 – évolution de l'énergie cinétique

indique également la solution CFD pour différentes valeurs du pas de temps. Les résultats de l'algorithme DGE fluctuent légèrement. Un compromis précision-temps de calcul serait ici 2 points d'intégration.

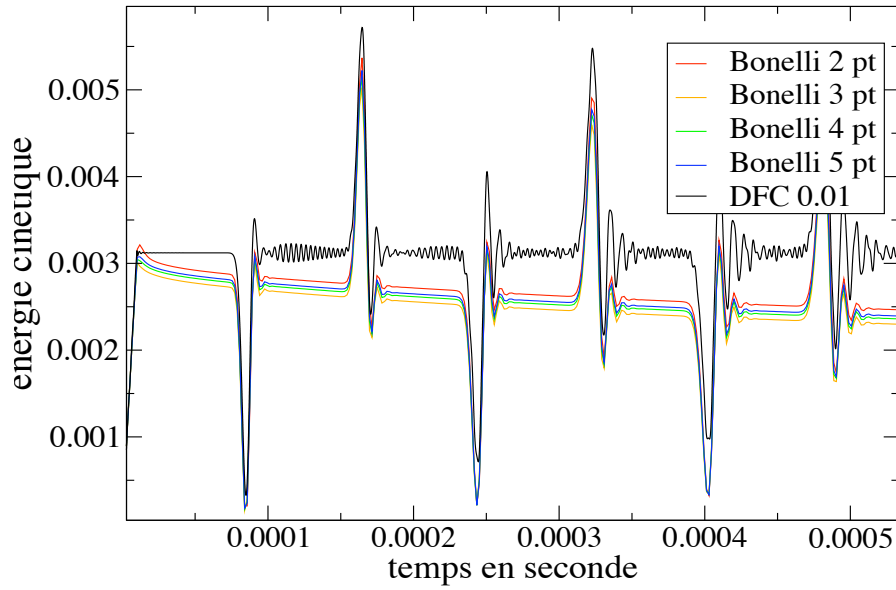


FIG. 3.6 – Influence du nombre de points d'intégration

Résultats en vitesses

On retrouve des tendances analogues sur l'évolution de la vitesse par rapport au temps sur la FIG. 3.7. Les solutions pour $0.01 h_{critique}$ sont confondues pour Bonelli et CFD. Près du pas de temps critique, l'algorithme DGE atténue les hautes fréquences contrairement à CFD, mais ceci tout en gardant une bonne évaluation du niveau d'énergie initiale. Pour comparaison, nous avons indiqué le résultat obtenu avec l'algorithme de Tchamwa pour $\varphi = 1.01$. On observe que lors du premier aller/retour, le signal obtenu avec DGE est beaucoup plus filtré qu'avec Tchamwa.

Cependant, après une vingtaine d'aller/retour (cf. FIG. 3.8), on remarque la tendance inverse : la réponse du modèle Tchamwa est beaucoup plus filtrée que celle de DGE qui a tendance à s'étaler et à s'approcher de la solution exacte du système discrétisé en temps représentée par CFD avec $0.01 h_{critique}$. On observe également le caractère très bruité de la solution CFD avec $0.9 h_{critique}$.

On remarque également (cf. FIG.3.9) que le caractère dissipatif dépend du pas de temps utilisé, tout comme dans le cas des algorithmes de Galerkin continu explicites dissipatifs : par exemple Tchamwa.

On observe également (cf. FIG. 3.10) la tendance à l'augmentation des oscillations dans les premiers instants suivant le chargement, à mesure que l'on se rapproche du pas de temps maxi (ici : $1.08 h_{critique}$). Notons que comparée au modèle de Tchamwa, l'amplitude de ces oscillations (cf.3.11) est plus faible et leur atténuation est plus rapide.

La figure FIG. 3.13 montre l'influence du rayon spectral juste après l'application du chargement. On observe bien l'atténuation lorsque ρ diminue. Néanmoins après une vingtaine d'aller/retours (cf/ FIG. 3.12), l'influence de ρ s'atténue fortement.

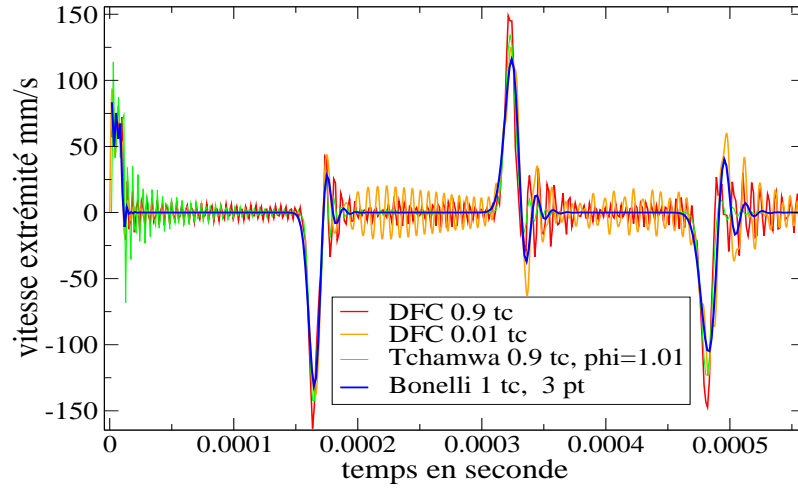


FIG. 3.7 – Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : premiers aller/retours

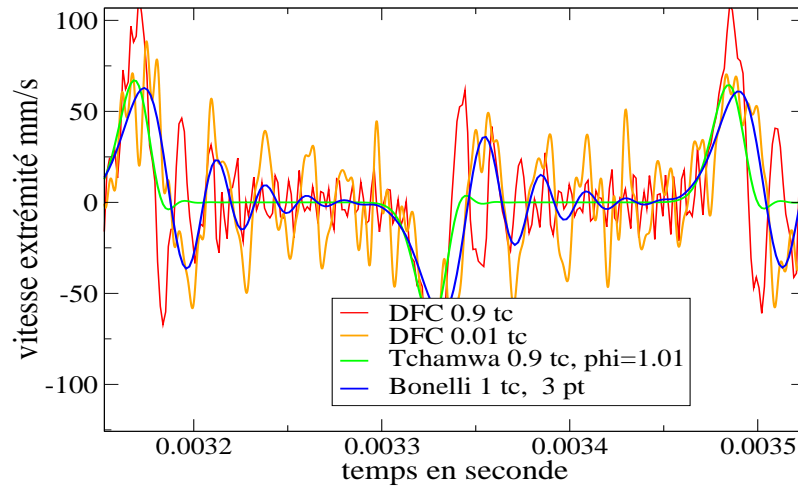


FIG. 3.8 – Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : après 20 aller/retours

3.2.4 Remarques et conclusions partielles

Le modèle CFD est une solution explicite rapide, précise au second ordre, largement employée dans les codes industriels. Cependant, l'algorithme a tendance à introduire des fréquences numériques par rapport à la solution analytique du problème continu. A priori un faible pas de temps permet de converger vers la solution exacte du problème discrétisé spatialement. Pour un maillage homogène 1D, on obtient la solution exacte du système continu

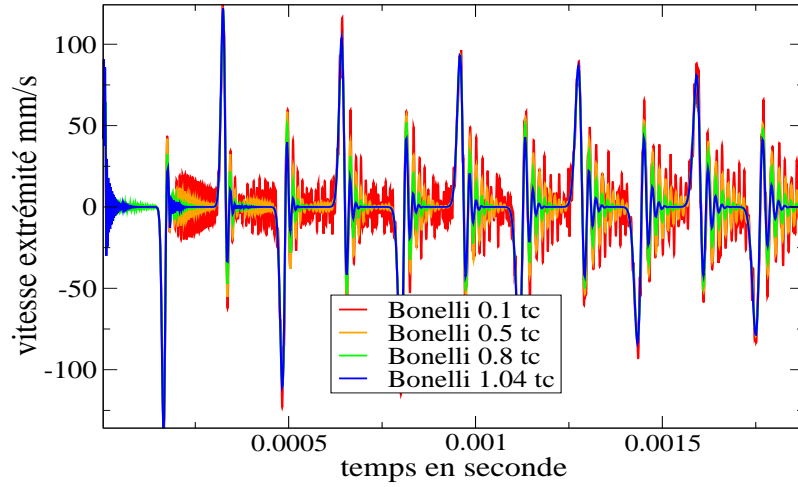


FIG. 3.9 – vitesse de l'extrémité libre : influence du pas de temps sur l'amortissement

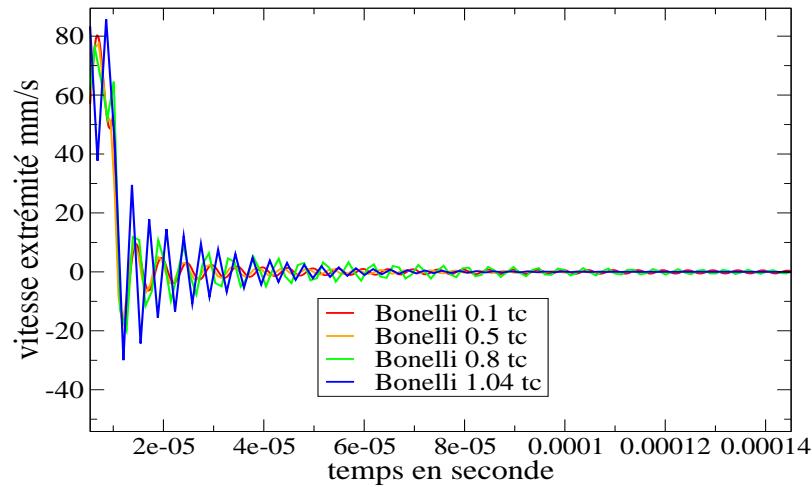


FIG. 3.10 – vitesse de l'extrémité libre à l'origine de temps : influence du pas de temps sur l'amortissement

pour un pas de temps identique au pas de temps critique, mais dans ce cas la solution est instable, il n'est donc pas possible d'utiliser le pas critique. De plus lorsque l'on modélise un problème non linéaire, la limite de stabilité, tend à diminuer par rapport à la limite théorique. Ainsi pour des pas de temps de l'ordre d'une fraction du pas critique (0.6 par exemple) on obtient des résultats fortement bruités par rapport à la solution théorique, le bruitage s'empirant fortement à mesure de l'avancement temporel.

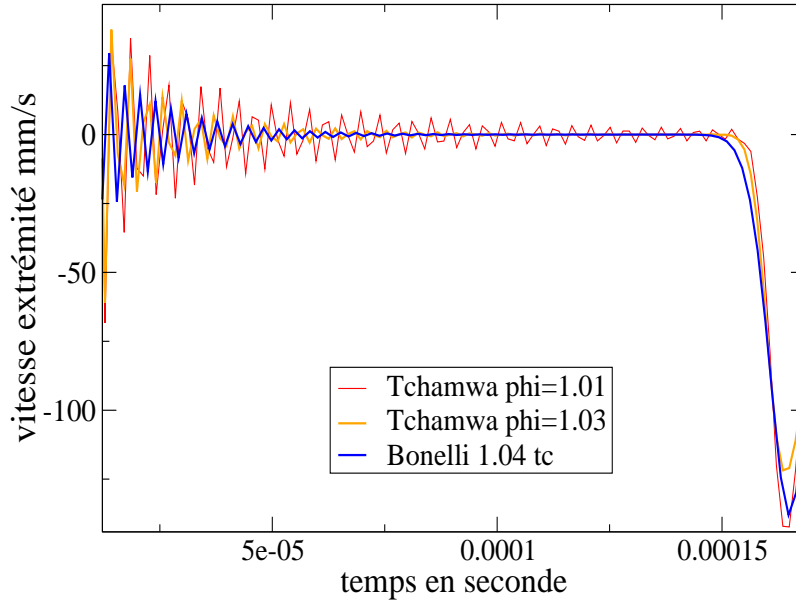
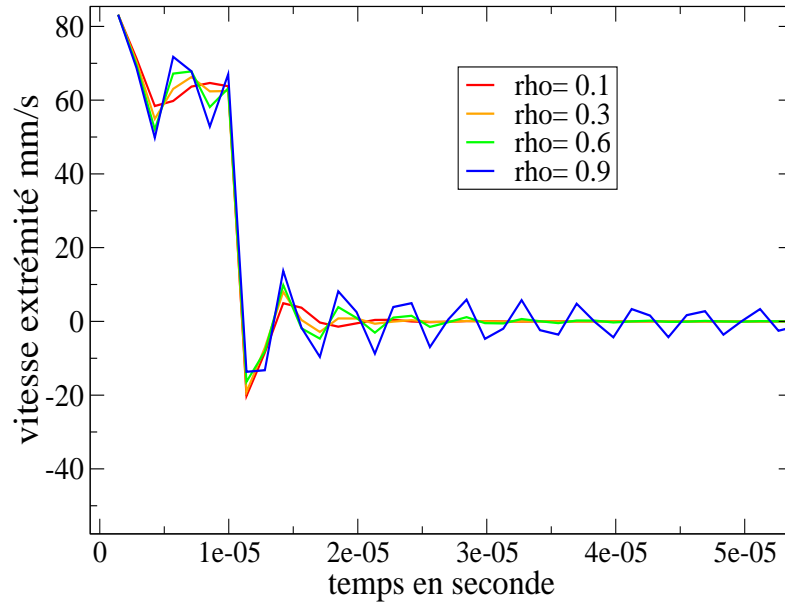


FIG. 3.11 – vitesse de l'extrémité libre : comparaison Bonelli Tchamwa près de la zone de chargement

Une solution est d'utiliser les algorithmes de Galerkin-discontinu. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au cas d'une méthode explicite, pour des raisons de temps de calcul, en pensant que dans le cas d'une recherche de précision dans les hautes fréquences, il nous fallait inévitablement utiliser un pas de temps d'un ordre de grandeur proche du pas critique. Dans ce cas, une solution implicite est en général beaucoup plus coûteuse qu'une solution explicite d'où le choix proposé.

Au regard des premiers résultats obtenus, les comparaisons CFD et DGE apportent les commentaires suivants :

- pour un pas de temps très faible ($0.01 h_{critique}$) les résultats sont identiques, alors que près du pas critique, DGE donne initialement des résultats proches de la solution théorique du problème continu, contrairement à CFD.
- au cours du temps, CFD introduit continuellement des fréquences numériques, ce qui est mis en avant pour justifier l'atténuation intrinsèque qu'introduit DGE pour les hautes fréquences. DGE fonctionne donc très correctement pour les premiers temps de calcul (ex : 1000 pas de temps critique), par contre pour des temps plus importants, on voit de nouveau apparaître des fréquences numériques que l'on peut qualifier de parasites car non conformes à la solution théorique initiale. Néanmoins, la solution obtenue est proche de la solution exacte du problème discrétisé en temps, avec un filtrage visible.
- DGE sans atténuation (c'est-à-dire avec un rayon spectral proche de 1) n'est pas stable ! L'atténuation est donc inévitable. Cependant, on peut noter que l'importance de l'atténuation semble décroître à mesure que l'on s'éloigne de discontinuités brusques. De plus

FIG. 3.12 – vitesse de l’extrémité libre : influence du rayon spectral ρ

l’influence du paramètre “rayon spectral” est dans la pratique assez faible.

- l’atténuation, ajustable via le paramètre “rayon spectral”, n’est pas réglable sur une large gamme, contrairement au modèle de Tchamwa par exemple.
- Tout comme l’algorithme de Tchamwa, l’amortissement dépend fortement du pas de temps retenu par rapport au pas de temps critique.
- DGE nécessite des temps de calcul largement plus importants que CFD, par exemple d’un facteur 3 par rapport à CFD.

Il semble donc que DGE soit performant pour la modélisation d’un phénomène sur un temps relativement court. Par rapport au modèle de Tchamwa ou CFD, les résultats sont plus précis bien qu’utilisant une atténuation plus faible. En revanche, les temps de calcul sont plus importants.

Néanmoins, le modèle DGE de Bonelli, tel que nous l’avons implanté, ne semble pas “la” solution pour une modélisation sur une longue période : dans tous les cas, il y a détérioration des résultats par rapport à la solution théorique du problème continu en temps et en espace.

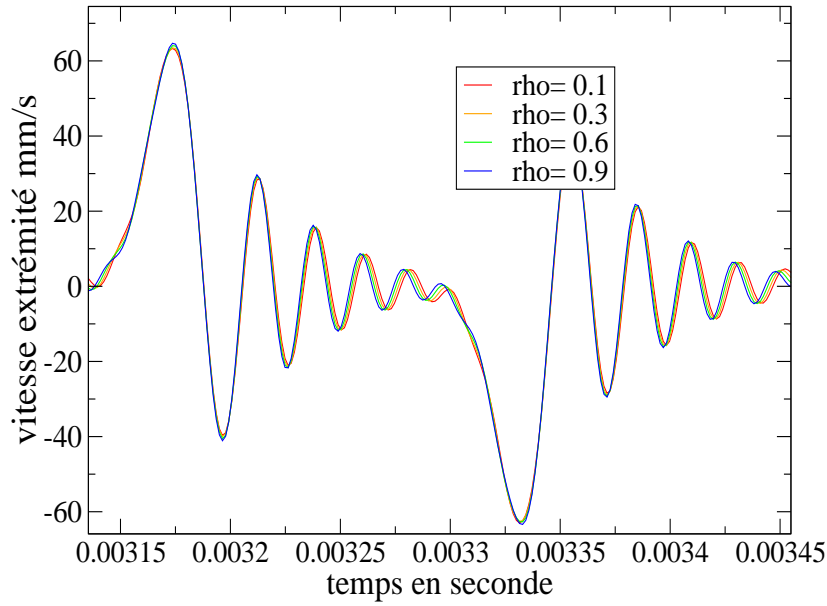


FIG. 3.13 – vitesse de l'extrémité libre : influence du rayon spectral ρ après une vingtaine d'aller/retours

3.3 Conclusion

Cette partie bibliographique illustrée de quelques exemples numériques 1D a permis de mettre en place les bases sur lesquelles repose cette étude. La discrétisation spatiale sera assurée par la Méthode des Eléments Finis (*MEF*) et la discrétisation temporelle sera assurée par la Méthode des Différences Finies (*MDF*) ou la *MEF*.

Les caractéristiques de la *MDF*, à travers le schéma de Newmark, ont été expliquées en détail au lecteur de manière à ce que la compréhension de la prochaine partie soit facilitée. Nous avons ainsi pu définir des notions comme la stabilité d'un schéma, son ordre de précision et son caractère dissipatif lié à la perte d'énergie totale. Dans cette étude, nous nous intéressons quasi-exclusivement aux schémas explicites qui ont la qualité de permettre des calculs avec de faibles pas de temps. Ils évitent ainsi une perte d'informations qui pourraient intervenir lorsque de grands pas de temps sont appliqués. Les schémas implicites, avantageux en temps de calcul pour de grands pas de temps, perdent ici leurs avantages et justifient l'emploi de leurs homologues explicites. Nous nous sommes intéressés de plus près au schéma explicite des Différences Finies Centrées (CFD) car c'est le seul schéma explicite implanté dans de nombreux codes de calculs industriels.

Nous avons également choisi de présenter le schéma de Runge-Kutta d'une précision d'ordre 4-5 pour connaître sa capacité à reproduire le phénomène physique et répondre ainsi à la question suivante : *si la réponse numérique est calculée avec un ordre de précision plus élevé, le bruit numérique précédemment identifié est-il toujours présent ?*

Un paragraphe concernant l'amortissement a ensuite montré plusieurs méthodes permettant de lutter efficacement contre les oscillations numériques parasites engendrées par le modèle numérique.

Le *bulk-viscosity* basé sur l'ajout d'un terme de pression au tenseur de contrainte permet d'obtenir de bons résultats en terme d'amortissement. Cette méthode introduite par [Von Neuman et Richtmeyer(1950)] est la méthode de prédilection pour les codes de calculs industriels. Elle est même par défaut pour tous les calculs dynamiques dans le code LS-Dyna[®].

Récemment, de nouveaux schémas d'intégration temporelle amortissants sont apparus. Le schéma de Tchamwa a fait l'objet de la thèse de [Soive(2003)]. Ce dernier a montré plusieurs avantages à mettre au crédit de ce schéma à un pas : un amortissement efficace des oscillations parasites, comparé aux autres schémas d'intégration temporelle qu'il a testés, et un paramètre d'amortissement réglable sur une large plage, ce qui est fait un très bon candidat pour un contrôle de l'amortissement au cours du calcul.

Enfin, une nouvelle méthode de discrétisation temporelle basée sur la *MEF* et plus particulièrement sur les travaux de [Bonelli et al.(2001)] a été présentée. Le fait d'utiliser une discrétisation temporelle de type *MEF* nous semble plus convaincant pour représenter un problème de dynamique où la discrétisation spatiale est également assurée par la *MEF*. L'utilisation de la même méthode (*MEF*) pour représenter le temps et l'espace peut se justifier par la dualité espace - temps apparaissant dans l'équation des ondes de d'Alembert. De plus, l'utilisation du schéma de Bonelli dans le cadre d'une discrétisation spatiale de type *MEF* n'a fait l'objet d'aucun travail, à notre connaissance. Pour ces raisons, ces premières investigations nous permettront d'évaluer l'efficacité de telles méthodes.

En définitif, nous étudierons plus particulièrement l'efficacité des schémas de Runge-Kutta (précision élevée), de Tchamwa (amortissement efficace), de Bonelli (intégration temporelle de type *MEF*) comparés aux méthodes approuvées du Bulk-viscosity (présent dans tous les codes de calculs dynamiques) et de CFD (schéma explicite que l'on peut qualifier de base en dynamique). D'autres schémas seront évalués ponctuellement sur le cas 1D pour permettre au lecteur d'obtenir des informations comparatives.

Chapitre 4

Utilisation des outils d'amortissement en 1D

Contents

4.1	Introduction	56
4.2	Barre 1D libre-encastree	57
4.2.1	Solutions theoriques	57
4.2.2	Mise en donnees du probleme	63
4.2.3	Reponse numerique	64
4.2.4	Influence du pas de temps	72
4.2.5	Influence du maillage	77
4.2.6	Influence des conditions aux limites	82
4.2.7	Influence du chargement	84
4.2.8	Influence de la matrice masse	86
4.2.9	Conclusion	91
4.3	Pilotage de l'amortissement du schema de Tchamwa	93
4.3.1	Introduction	93
4.3.2	Amortissement cible ou evolutif	93
4.3.3	Amortissement pilote	96
4.3.4	Amortissement pilote sur un maillage aleatoire 1D	105
4.3.5	Conclusion	110
4.4	Conclusion	112

4.1 Introduction

Dans l'industrie automobile, l'aéronautique et le milieu universitaire, de nombreuses études sont menées dans l'objectif d'une meilleure compréhension des phénomènes dynamiques. L'utilisation de codes de calcul comme Abaqus[©] ou LS-Dyna[©], pour citer deux codes classiques, associée à des développements d'essais expérimentaux ont permis d'appréhender certains phénomènes et d'en déduire des lois de comportement dynamique pour un grand nombre de matériaux et dans des sollicitations toutes aussi variées. On pense naturellement aux essais expérimentaux aux Barres d'Hopkinson, outils indispensables pour tout laboratoire étudiant des lois en dynamique rapide. La compréhension des phénomènes repose sur ces essais expérimentaux qui permettent ainsi d'alimenter en données les futurs développements numériques. Parallèlement à cela, les modélisations numériques de cas-tests améliorent également cette compréhension du phénomène. Un va-et-vient entre l'expérimental et le numérique est nécessaire pour une compréhension globale du phénomène mais aussi des problèmes qui sont engendrés.

Nous nous proposons pour commencer d'étudier numériquement le comportement dynamique d'une structure simple : un cas-test 1D. La résolution de ce problème en dynamique rapide par l'outil informatique impose, classiquement, une discrétisation spatiale de la structure réalisée par la *MEF*. La discrétisation temporelle du phénomène sera réalisée par la *MDF* ou par la *MEF*. Ces discrétisations, qui n'existent que numériquement, vont être à l'origine d'erreurs purement numériques. Les méthodes amortissantes énoncées au §3.1.2 seront alors étudiées sur leur efficacité respective à traiter au mieux ces erreurs. Nous étudierons notamment l'influence de plusieurs paramètres comme celui du pas de temps, du maillage, des conditions aux limites du chargement ou encore de la matrice masse.

Enfin, une nouvelle méthode de pilotage de l'amortissement sera étudiée pour accroître l'efficacité d'un amortissement utilisé continûment. Une étude des paramètres sera menée puis le pilotage sera testé sur des maillages 1D non-homogènes.

4.2 Barre 1D libre-encastrée

Description géométrique du problème

Nous débutons l'étude par un cas se voulant résolument simple. Il ne représente pas totalement la réalité expérimentale car mono-dimensionnel et ne prenant pas en compte tous les effets d'inertie, mais il est suffisamment représentatif pour se poser des questions essentielles face à un problème de dynamique. Outre l'existence d'une littérature importante sur ce cas 1D, il est le seul pour lequel une solution théorique existe.

Considérons alors une barre élastique de longueur $L = 200 \text{ mm}$ encastrée à une extrémité. Elle est soumise à un chargement axial sur une courte période à l'autre extrémité (cf. FIG. 4.1), la forme du chargement étant décrite par la suite.

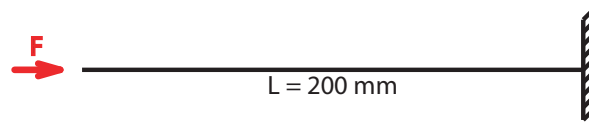


FIG. 4.1 – Description du problème

La barre possède les caractéristiques matérielles suivantes : $E = 200 \text{ GPa}$, $\rho = 5.0 \cdot 10^{-8} \text{ ton.mm}^{-3}$, $S = 10 \text{ mm}^2$. La célérité de l'onde élastique dans le solide est alors calculée comme ceci $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ mm.s}^{-1}$ et le temps mis par l'onde pour parcourir un A/R dans la barre est de $t_{A/R} = \frac{2L}{c} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Nous laissons l'onde se propager sur une vingtaine d'allers-retours, ce qui équivaut à une distance totale de plus de 8 m . Les valeurs des caractéristiques mécaniques ne sont pas courantes dans un cadre expérimental. Elles ont été choisies arbitrairement de manière à *normer* les résultats.

4.2.1 Solutions théoriques

[Soive(2003)] différencie deux types de solution théorique :

1. la *solution du système continu* obtenue par superposition modale ou en utilisant un schéma de type CFD avec un pas de temps $h \rightarrow h_c$.
2. la *solution du système discret* obtenue en utilisant un schéma d'intégration temporelle de haute précision ou en utilisant un schéma de type CFD avec un pas de temps $h \rightarrow 0$.

Nous rappelons succinctement la *solution semi-analytique du système continu* par superposition modale puis la *solution approchée du système discret*.

Solution semi-analytique du système continu

Echelon de force :

Ce cas-test 1D présente l'avantage d'obtenir assez aisément une *solution semi-analytique continue* en temps et en espace. [Géradin et Rixen(1993)] obtiennent une solution en déplacement pour un chargement de type échelon de force par superposition modale. Le déplacement

u de la barre soumise à un échelon de force en fonction de la localisation x et du temps t s'écrit ainsi :

$$u(x, t) = \frac{F_0 x}{ES} - \frac{8F_0 L}{\pi^2 ES} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} \sin \left((2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \cos \left((2i-1) \frac{\pi c}{2L} t \right) \right\} \quad (4.1)$$

avec F_0 l'amplitude de l'échelon de force, S la section de la barre, E son module d'Young, L la longueur de la barre et i le nombre de modes.

Grâce au logiciel Scilab[®], nous déterminons l'évolution du déplacement de trois points situés à 0mm , 66mm et 134mm du point de chargement de la barre en utilisant un échelon de force $F_0 = 10\text{N}$ et une sommation tronquée à la première et aux 10 premières valeurs. Les résultats sont présentés sur la FIG. 4.2.

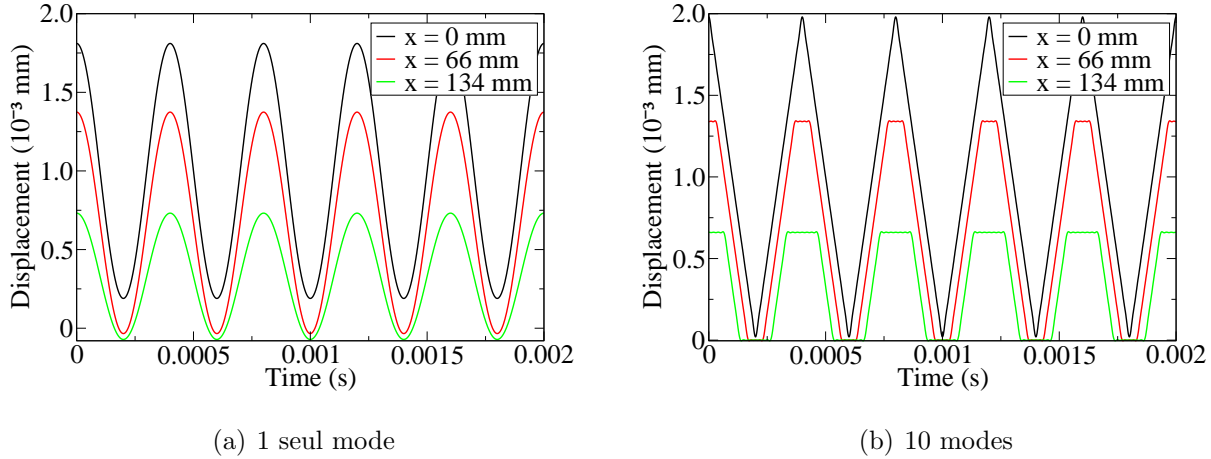


FIG. 4.2 – Solution semi-analytique en déplacement obtenue par superposition modale (échelon)

Les FIG. 4.2(a) et 4.2(b) montrent la dépendance du résultat au nombre de modes utilisés pour la résolution. 10 modes seulement permettent d'obtenir un résultat en déplacement tout à fait convenable.

On peut également s'interroger sur les résultats en contraintes d'une telle solution. Pour cela, nous dérivons l'équation des déplacements précédente de cette manière :

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

On obtient la solution semi-analytique continue en contrainte suivante :

$$\sigma(x, t) = \frac{F_0}{S} - \frac{8F_0 L}{\pi^2 S} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi(-1)^{i-1}}{2L(2i-1)} \cos \left((2i-1) \frac{\pi x}{2L} \right) \cos \left((2i-1) \frac{\pi c}{2L} t \right) \right\} \quad (4.2)$$

Grâce au logiciel Scilab[®], nous déterminons l'évolution de la contrainte dans un élément situé à 66mm de la barre par rapport à l'extrémité libre. On utilise un échelon de force

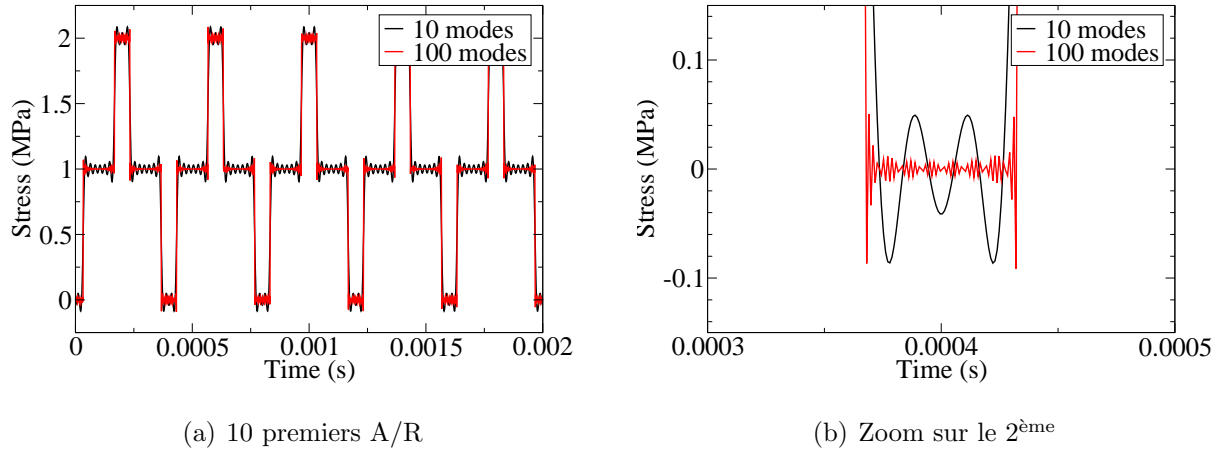


FIG. 4.3 – Solution semi-analytique en contrainte obtenue par superposition modale (échelon)

$F_0 = 10N$ et une sommation tronquée aux 10 et 100 premières valeurs. Les résultats sont présentés sur la FIG. 4.3.

A contrario de la solution en déplacement, on constate sur la FIG. 4.3 que 10 modes ne suffisent pas pour représenter la solution théorique que l'on imagine en forme de créneaux. Avec 100 modes, des oscillations sont toujours présentes. Il faut alors utiliser un nombre de modes i tendant vers l'infini pour que les courbes résultats tendent à décrire une suite de créneaux.

Conclusion

On considère la solution définie par [Géradin et Rixen(1993)] à l'EQ. 4.2, lorsque $i \rightarrow \infty$, comme *théorie élémentaire* qui sera la solution "référence" pour nos calculs 1D. On souligne aussi le fait que les phénomènes inertiels sont négligés en 1D (ν inexistant) : le signal est donc non dispersif, c'est-à-dire que les composantes fréquentielles de l'onde voyagent toutes à la même vitesse.

Solution approchée du système discret

Si l'on considère le problème discret en espace et en temps, on peut également obtenir une solution approchée de ce système discret. Une des méthodes consiste à utiliser un schéma d'ordre de précision élevé, comme celui de Runge-Kutta 4-5, détaillé au §2.3.4.

Il faut pour cela résoudre l'équation différentielle discrétisée suivante :

$$M\ddot{U} + KU = F$$

avec M et K , respectivement matrice masse et matrice de rigidité dont la taille dépend du nombre d'éléments dans la barre. La matrice masse "naturelle" est la matrice masse consistante M_c résultant de l'assemblage des différents éléments. Il est également possible de choisir une matrice masse diagonale M_d pour permettre une diminution de l'espace de stockage ainsi qu'une diminution des temps de calculs.

La matrice masse consistante est définie ci-après et on se base sur [Géradin et Rixen(1993)] pour définir la matrice masse diagonale :

$$M_c = \frac{L_{elt} S \rho}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad M_d = \frac{L_{elt} S \rho}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice K s'écrit comme ceci :

$$K = \frac{SE}{L_{elt}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

où L_{elt} est la longueur d'un élément, S est la section de la barre, ρ sa masse volumique et E son module d'Young.

Nous étudions les solutions de deux types de chargement :

1. un échelon de force
2. un créneau de force

Echelon de force :

La barre représentée à la FIG. 4.1 est alors discrétisée par 100 éléments linéaires de même longueur $L_{elt} = 2mm$. Les matrices M et K sont en général des matrices bandes dans les codes de calculs. Ici par simplicité, nous considérons un stockage plein ce qui aboutit à des matrices de taille 100×100 . Grâce au logiciel Scilab[®], on peut calculer le déplacement des noeuds de la barre situés à $0mm$, $66mm$ et $134mm$ du chargement et soumise à un échelon de force identique à celui énoncé précédemment.

Les observations de la FIG. 4.4(a) sont comparables à celles de la FIG. 4.2(b), à savoir des créneaux réguliers de forme triangulaire.

Créneau de force :

On peut également déterminer la solution en déplacement d'une barre soumise à un créneau de force, correspondant à un type de chargement pouvant être observé lors d'essai aux barres d'Hopkinson. On choisit alors un chargement d'une durée suffisamment courte (cf. FIG. 4.5) de manière à ce que les A/R de l'onde soient observés distinctement et sans superposition. Dans notre cas, la durée totale du chargement est $t_{load} = 4.5 \cdot 10^{-5}s$, la durée de montée en charge et celle de sa descente sont $t_{rise} = 0.9 \cdot 10^{-6}s$, soit 2% de t_{load} .

On observe sur la FIG. 4.4(b) des créneaux réguliers avec néanmoins de petites irrégularités qui s'amplifient depuis l'instant du chargement brutal.

Conclusion :

On constate grâce à cette courte étude que la solution théorique du système discret *en déplacement* est relativement proche de la solution théorique du système continu.

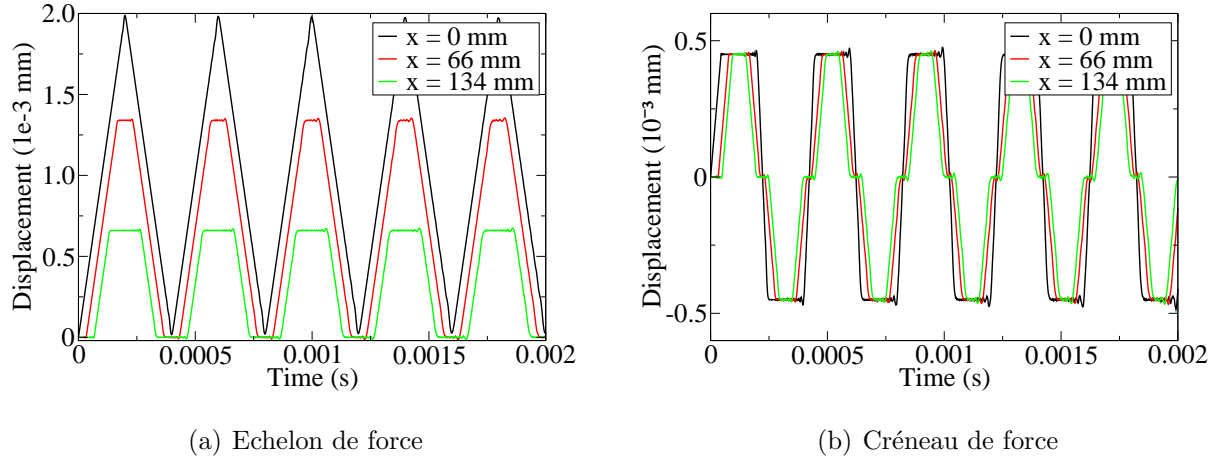


FIG. 4.4 – Solution en déplacement de l'équation différentielle discrétisée

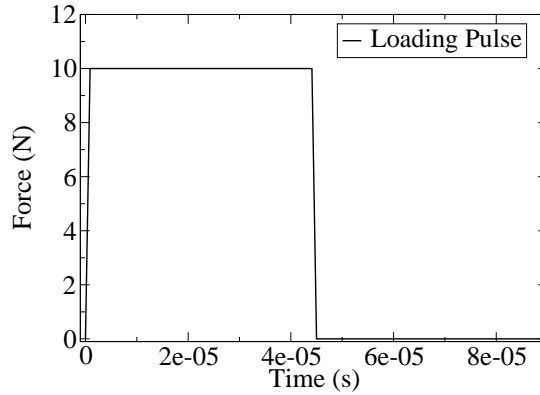


FIG. 4.5 – Chargement en créneau de force

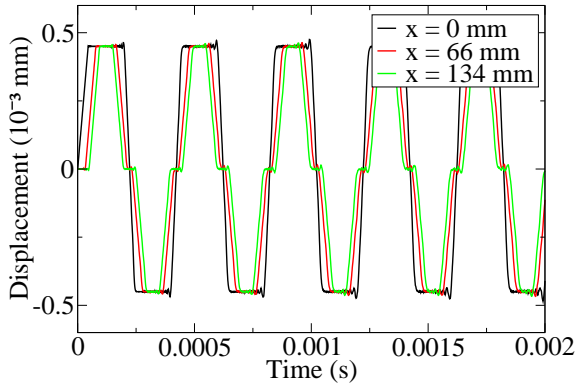
Influence de la matrice masse

Créneau de force :

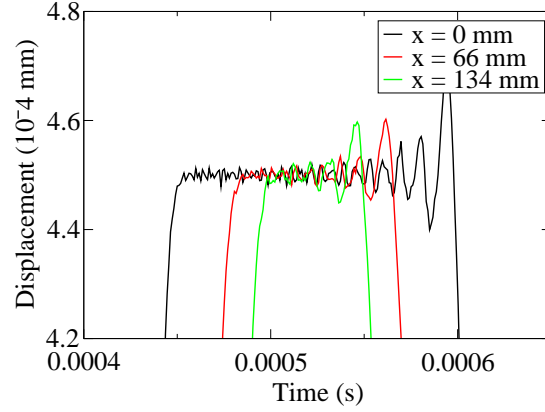
Une première interrogation intervient à la suite de ce premier calcul du problème discret : *quelle va être l'influence de la matrice masse sur les résultats du calcul ?* En effet, nous avons deux matrices masse bien différentes l'une de l'autre et il serait surprenant d'obtenir les mêmes résultats. Nous reprenons ainsi l'exemple du créneau de force exposé précédemment, utilisons les matrices masse M_c et M_d et regardons les résultats sur la FIG. 4.6.

On observe nettement grâce aux zooms des FIG. 4.6(a) et 4.6(c) les différents résultats entre l'utilisation d'une matrice masse consistante et d'une matrice masse diagonale. :

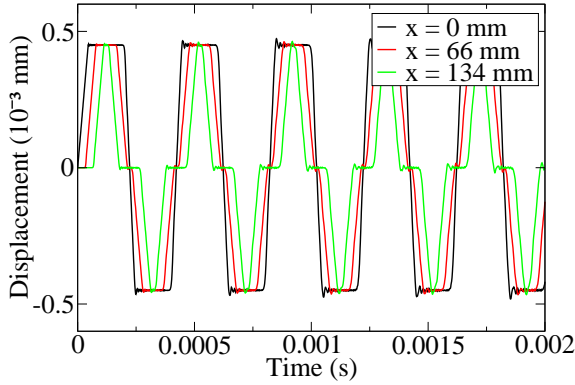
- pour la matrice masse consistante, l'amplitude des oscillations parasites va en augmentant depuis l'instant du chargement brutal,
- pour la matrice masse diagonale, l'amplitude des oscillations parasites va en diminuant depuis l'instant du chargement brutal.



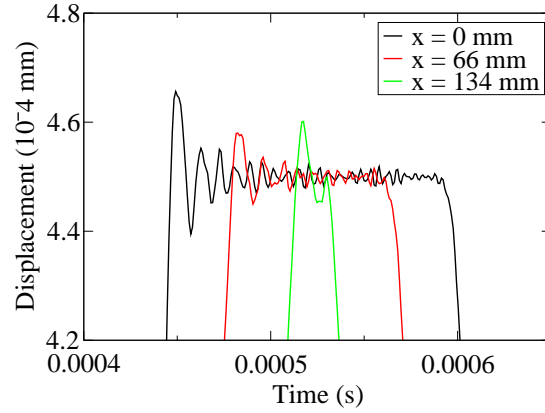
(a) Matrice masse consistante



(b) Zoom de 4.6(a)



(c) Matrice masse diagonale



(d) Zoom de 4.6(c)

FIG. 4.6 – Solution en déplacement de l'équation différentielle discrétisée pour M_c et M_d Conclusion :

Le choix de la matrice masse (consistante ou diagonale) au moment de la mise en données d'un code de calcul n'a pas l'air, à première vue, primordial. Pourtant, les résultats peuvent être considérablement différents. [Belytschko(1983)] note que, dans quelques problèmes, les matrices masse diagonales peuvent introduire des erreurs substantielles. Pour augmenter l'exactitude des résultats, différentes méthodes de construction de matrices masse sont présentées et évaluées par [Schreyer(1983)] sur des les schémas classiques de Newmark. On peut également citer les travaux de [Shun-Cheng et Zhu-Ping(1998)] qui proposent une méthode itérative qui utilise la matrice masse consistante pour des problèmes axi-symétriques d'impacts à haute vitesse.

Il sera intéressant de connaître la sensibilité des schémas temporels explicites présentés dans ce mémoire pour différentes matrices masse (cf. §4.2.8).

Conclusion

L'étude de ce problème *discret en espace* et *discret en temps* va constituer l'essentiel de notre étude. Le logiciel Herezh++ [Rio(2006)] développé au [LG2M(2006)] sera utilisé, par la suite, à la place de Scilab[®], qui nous a permis d'obtenir ces solutions *théoriques*. De plus, pour éviter une possible confusion dans l'utilisation de la matrice masse, nous choisirons une matrice masse diagonale pour la quasi totalité de cette partie car elle est plus utilisée dans les codes de calcul spécifiques à la dynamique. En effet, elle permet de réaliser les calculs avec un pas de temps h plus grand que si on utilise une matrice masse consistante, elle prend moins de place de stockage et elle est plus facile à inverser. Une dernière partie concernera l'influence de la matrice masse pour différents schémas d'intégration temporelle.

4.2.2 Mise en données du problème

Pas de temps et chargement appliqué

La description géométrique présentée au §4.2 constitue le support à analyser. Le pas de temps critique étant de $h_c = 1.0 \cdot 10^{-6}s$, nous choisissons un pas de temps de calcul à $h = 9.0 \cdot 10^{-7}s$ correspondant à 90% de h_c et relativement proche de h comme préconisé par [Rio et al.(2005)]. Le *chargement référence* utilisé pour cette étude est le même que celui présenté à la FIG. 4.5, à savoir :

- une montée en charge effectuée en 1 pas de temps
- un maintien en charge effectué durant 48 pas de temps
- une descente de charge effectuée en 1 pas de temps

Méthodes d'amortissement analysées

Pour cette étude, nous considérons et étudions quatre types de méthodes pour obtenir la solution d'un problème discrétisé en espace par la MEF :

1. les schémas numériques explicites conservatifs avec le schéma DFC et celui de Runge-Kutta,
2. les schémas numériques explicites amortissants avec les schémas :
 - discrétisés temporellement par la *MDF* : Tchamwa-Wielgosz, Chung-Lee,
 - discrétisés temporellement par la *MEF* : Bonelli,
3. les schémas numériques implicites avec le schéma de Newmark des accélérations moyennes et celui de Hilber-Hughes-Taylor,
4. le bulk-viscosity.

Sorties : contrainte et énergie totale du système

Pour les comparaisons, nous choisissons de nous intéresser à l'évolution de la contrainte dans un élément "référence" situé à 67 mm de l'extrémité libre de la barre et à la variation d'énergie totale du système au cours du temps.

Dans notre cas sans viscosité matérielle, la contrainte dans un élément étant calculée à partir des champs nodaux, les résultats en contrainte montreront un comportement similaire aux résultats en vitesse. Nous les comparons à une solution issue de la *théorie élémentaire*

décrite au paragraphe précédent et représentée sur la FIG. 4.7(a). Nos investigations nous ont poussés à préférer la contrainte à la place du déplacement car elle permet d'observer plus nettement les différences entre les schémas d'intégration temporelle. Nous aurions également pu choisir les accélérations nodales caractérisant encore plus fortement ces différences mais la contrainte est une observable qui nous semble plus *parlante*.

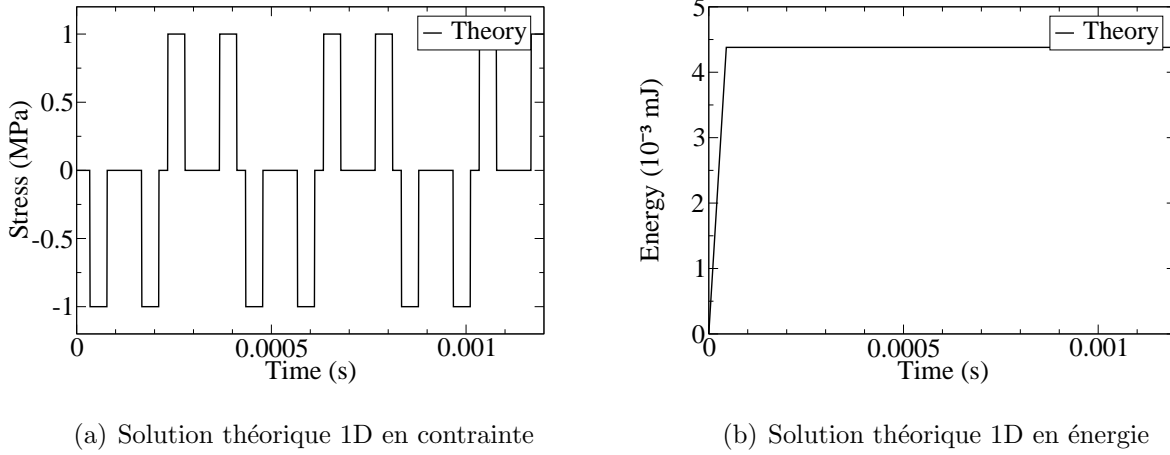


FIG. 4.7 – Solutions théoriques 1D

La variation d'énergie totale du système au cours du temps sera, quant à elle, comparée à une solution théorique représentée sur la FIG. 4.7(b). Le calcul énergétique ne présentant pas d'intérêt majeur est reporté en Annexe (cf. §A.1). L'évolution de l'énergie totale du système a été préférée à l'évolution de l'énergie élastique et de l'énergie cinétique qui la composent. Dans notre cas-test, à chaque réflexion d'onde sur un encastrement et respectivement, sur un bord libre, l'énergie élastique double et s'annule (cf. FIG. 4.8(a)). Le phénomène opposé se produit pour l'énergie cinétique (cf. FIG. 4.8(b)). La FIG. 4.8 représente l'évolution des énergies élastiques et cinétiques pour le schéma CFD, de Tchamwa ($\varphi = 1.03$) et le Bulk-viscosity ($C_1 = 0.06$).

De plus on constate qu'entre chacun de ses *pics*, les énergies élastique et cinétique évoluent de la même manière :

- elles restent constantes pour le CFD,
- elles diminuent pour le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity.

L'utilisation de l'énergie totale, qui est la somme de ces deux énergies, est choisie pour ces raisons car elle permet d'obtenir des courbes plus régulières, i.e. sans l'apparition des *pics* (voir plus loin).

4.2.3 Réponse numérique

Schémas numériques explicites conservatifs

La première possibilité offerte à l'utilisateur d'un code de calcul est de n'appliquer aucun amortissement pour éliminer les oscillations numériques. Le schéma de CFD, d'une précision d'ordre 2 et celui de Runge-Kutta d'ordre 4-5 donnent les résultats présentés sur la FIG. 4.9

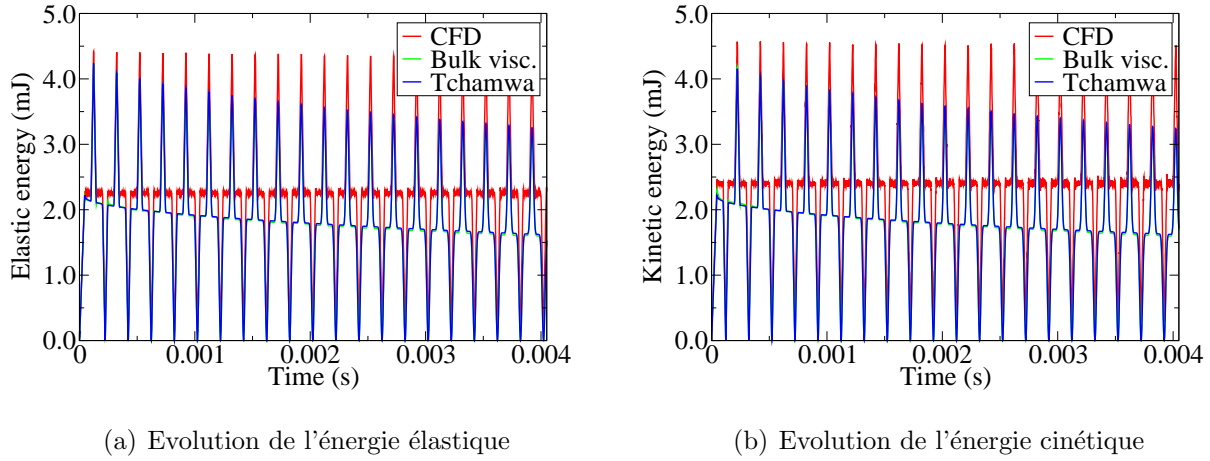


FIG. 4.8 – Evolution des énergies pour le CFD et différentes méthodes amortissantes

Observations :

Contraintes : L'observation de la contrainte dans l'élément "référence" laisse apparaître des oscillations pour les deux schémas (cf. FIG. 4.9(a) et 4.9(b)) qui ne parviennent pas à reproduire la solution issue de la *théorie élémentaire* (écart de l'ordre de 30% au maximum) et qui s'amplifie au cours du temps (écart de l'ordre de 55% au maximum après 19 A/R, cf. FIG. 4.9(c)).

Déphasage : Aucun déphasage n'est observé lors du 19^{ème} A/R, soit après 4000 pas de temps de calcul, équivalent à une propagation d'environ $8m$.

Energie : Les deux schémas étant conservatifs, on observe une conservation de l'énergie totale durant tout le calcul même si le niveau énergétique est différent par rapport à la solution "théorique". Le schéma de Runge-Kutta permet tout de même un meilleur calcul avec un écart de 0.3% par rapport au schéma DFC qui est de 1.8%.

Bilan :

L'utilisation de schéma conservatifs pour représenter le phénomène dynamique met en évidence des oscillations purement numériques en contrainte qui ne sont pas amorties. Ces schémas, même s'ils sont de haute précision (ordre 4-5 pour Runge-Kutta), ne permettent pas d'approcher la *solution théorique en contrainte du système continu*. En revanche, l'évolution de l'énergie totale du système reste cohérente avec la *solution théorique* précédemment calculée.

Schémas numériques explicites amortissants

Les résultats obtenus par le schéma de Tchamwa avec un paramètre d'amortissement $\varphi = 1.03$, le schéma de Chung-Lee avec le paramètre d'amortissement habituel $\beta = 1.037$ et le schéma de Bonelli le paramètre $\rho_b = 0.9$ ($k_{max} = 2$ et $nb_pt_int = 2$) sont présentés aux FIG. 4.10 et comparés à la solution issue de la *théorie élémentaire*.

Observations :

Contrainte : Le schéma de Tchamwa pour un paramètre $\varphi = 1.03$ élimine rapidement les oscillations numériques parasites et ceci après seulement 2 A/R. Mais après 19

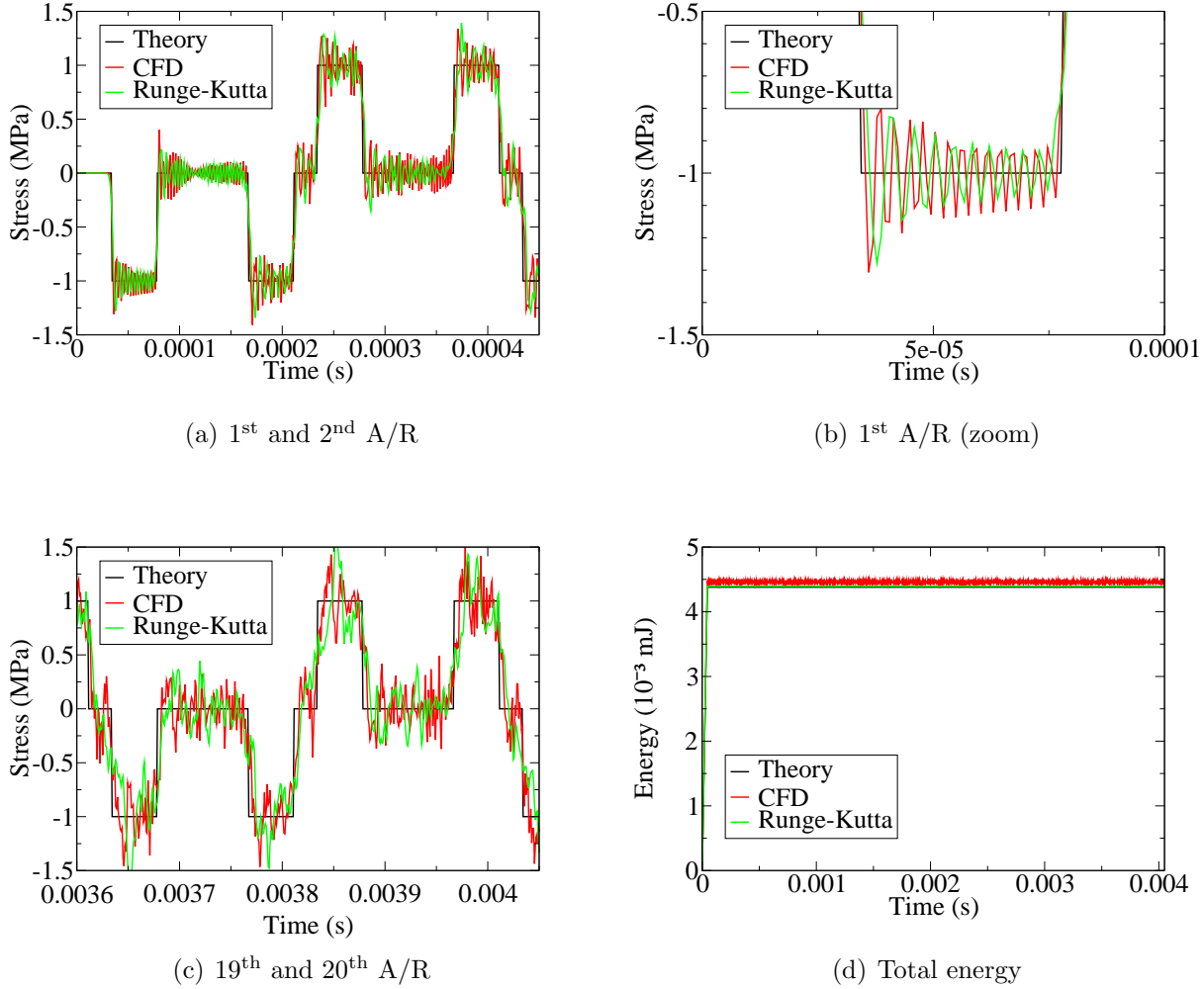


FIG. 4.9 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas conservatifs

A/R, soit $8m$ de propagation, l'amortissement est tellement important que le créneau de contrainte n'atteint plus la valeur théorique d' $1N$: un écart de 3% est observé. Le schéma de Chung-Lee n'affiche pas le même résultat : un *overshoot*, qui lui est caractéristique (cf. [Grolleau et al.(2004)]), est observé après chaque passage d'onde et des oscillations réapparaissent créant un écart maximal de l'ordre de 25% après 19 A/R par rapport à la solution issue de la *théorie élémentaire*. Le schéma de Bonelli n'est pas aussi efficace pour amortir les oscillations parasites. Néanmoins, au deuxième A/R, il est parvenu à les amortir complètement, excepté 2-3 oscillations. Après 19 A/R, l'amortissement trop faible de ce schéma laisse réapparaître les oscillations numériques.

Déphasage : Aucun déphasage n'est observé après 19 A/R pour les trois schémas amortissants étudiés et ceci quelque soit la valeur du paramètre d'amortissement (calculs non présentés ici).

Energie : L'énergie totale du système a chuté de 17% en 20 A/R pour un schéma de Tchamwa ($\varphi = 1.03$) et seulement de 5% pour le schéma de Chung-Lee et celui de Bonelli.

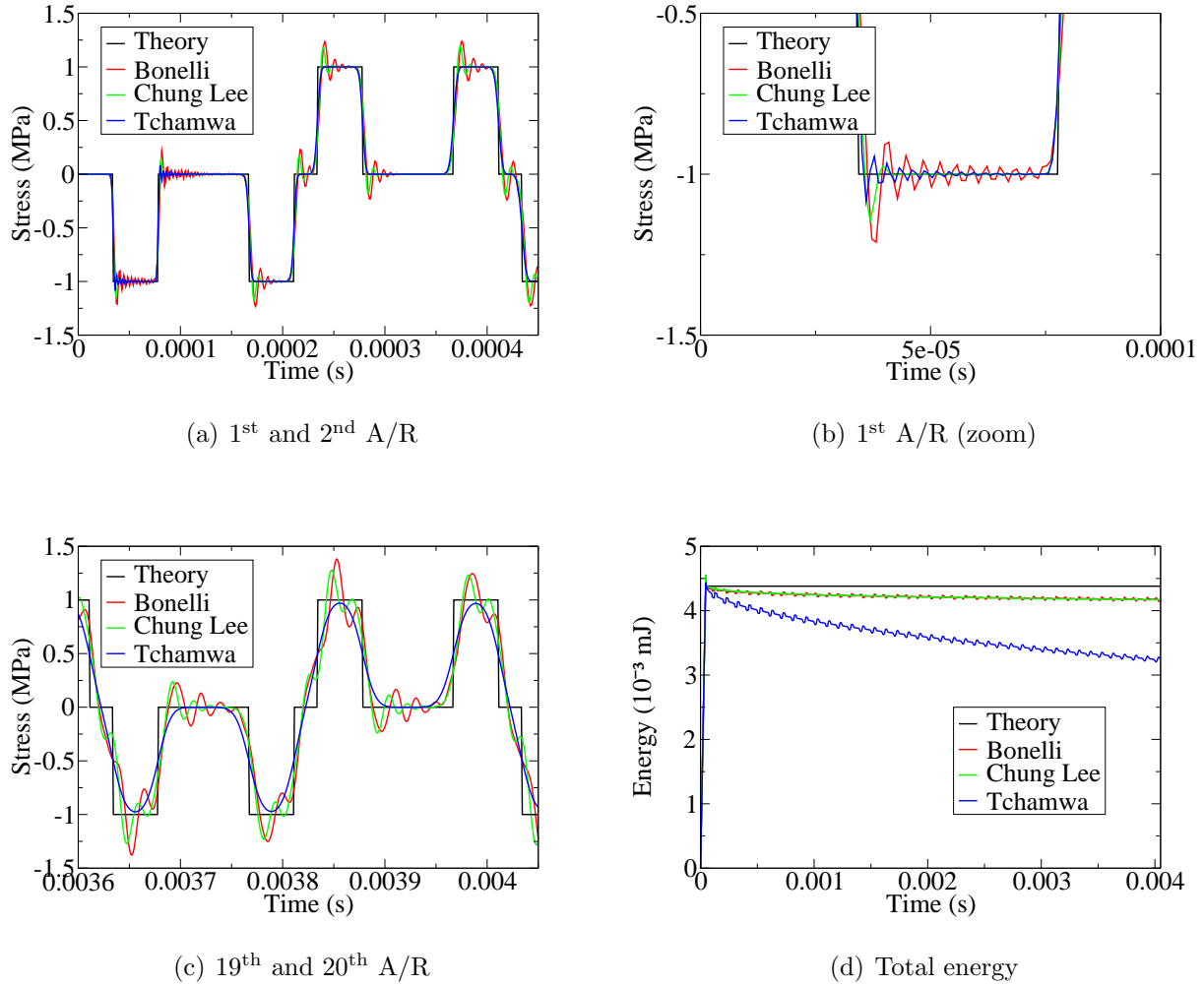


FIG. 4.10 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas amortissants

Bilan :

Les méthodes amortissantes présentées dans ce mémoire montrent toutes une efficacité à amortir les hautes fréquences numériques (en contrainte). Pour le schéma de Tchamwa, on peut les amortir rapidement en utilisant un paramètre d'amortissement important mais cela entraîne une baisse continue de l'énergie et finalement une baisse du signal de contrainte (écart de 5% après 8m de propagation). De plus l'utilisation d'un paramètre d'amortissement important entraîne une diminution de la précision des calculs (3.1.3). Pour le schéma de Chung-Lee, en utilisant pourtant son paramètre d'amortissement maximal (cf. étude de consistance de [Chung et Lee(1994)]), des oscillations sont réapparues après seulement 8m de propagation. Il en est de même pour le schéma de Bonelli qui, quelque soit la valeur du paramètre d'amortissement utilisé (cf. §3.2), n'est pas aussi efficace que le schéma de Tchamwa.

Finalement, les algorithmes temporels amortissants qui sont décrits comme agissant sur les plus hautes fréquences du système [Tchamwa(1997)] agissent également sur toutes les fréquences et continûment [Rio et al.(2005)].

Schémas implicites

De nombreuses études font intervenir les schémas implicites, permettant d'utiliser des pas de temps de calcul supérieurs au pas de temps critique. Dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement à des phénomènes de dynamique rapide où l'on n'envisage que des pas de temps de calcul très faibles pour *capter* l'ensemble du signal. Dans le cas d'un modèle implicite, le fait d'utiliser un pas de temps h supérieur au pas de temps critique h_c induit automatiquement un filtrage des fréquences supérieures à $\frac{2}{h}$. De plus, la précision des schémas de Newmark est d'ordre 2 tout comme CFD. Donc l'utilisation d'un grand pas de temps détériore la précision (cf. §2.3.2). Enfin l'implicite implique une robustesse plus faible que CFD : une singularité de l'opérateur tangent (cas d'une résolution de Newton-Raphson) est vite arrivée. En résumé, la présentation des résultats des schémas implicites nous permet une comparaison avec leurs homologues explicites en sachant que les schémas implicites ne sont pas les meilleurs *outils* pour ce genre de calculs. Nous choisissons d'utiliser un pas de temps h identique à celui utilisé pour les schémas explicites. Les résultats obtenus par le schéma de Newmark des accélérations moyennes avec les paramètres $\gamma = 0.5$ et $\beta = 0.25$ et le schéma de HHT avec le paramètre d'amortissement $\alpha_{hht} = -0.05$ et les paramètres temporels $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_{hht} = 0.55$ et $\beta = \frac{(1-\alpha_{hht})^2}{4} = 0.275625$ sont présentés aux FIG. 4.11 et comparés à la solution issue de la *théorie élémentaire*.

Observations :

Contrainte : Des oscillations très nettes sont observées sur le signal de contrainte pour ces schémas implicites (cf. FIG. 4.11(a) et 4.11(b)). L'utilisation d'un amortissement de type HHT permet une réduction des oscillations sans pour autant complètement les éliminer (cf. FIG. 4.11(c)). Après 19 A/R, le signal devient *chaotique* avec l'utilisation ou non d'un amortissement.

Déphasage : Malgré les oscillations résiduelles au bout des 19 A/R, aucun déphasage ne peut être noté.

Energie : Comme pour les schémas explicites, on peut observer le rôle conservatif du schéma de Newmark qui conserve l'énergie et le rôle dissipatif du schéma de HHT qui dissipe l'énergie dans le but d'amortir les hautes fréquences.

Bilan :

Malgré l'utilisation d'un amortissement ($\alpha_{hht} = -0.05$), il est impossible d'éliminer les oscillations pour approcher la solution en contrainte issue de la *théorie élémentaire*. L'amortissement est trop faible et cela se traduit par une baisse faible d'énergie. Dans le cas présent, le paramètre α_{hht} devrait être augmenté significativement pour parvenir à un amortissement similaire.

Il est important de souligner également que les calculs ont été effectués avec un pas de temps $h = 90\% h_c$, comme pour les schémas explicites. Un des avantages de ces schémas implicites est la possibilité d'utiliser des plus grands pas de temps diminuant ainsi les temps de calcul. Nous étudierons l'influence du pas de temps sur les schémas temporels et méthodes amortissantes au §4.2.4.

Bulk-viscosity

Les résultats obtenus par le bulk-viscosity avec le paramètre quadratique usuel $C_0 = 1.5$ et le paramètre linéaire $C_1 = 0.06$ et $C_1 = 0.03$ sont présentés aux FIG. 4.12 et comparés

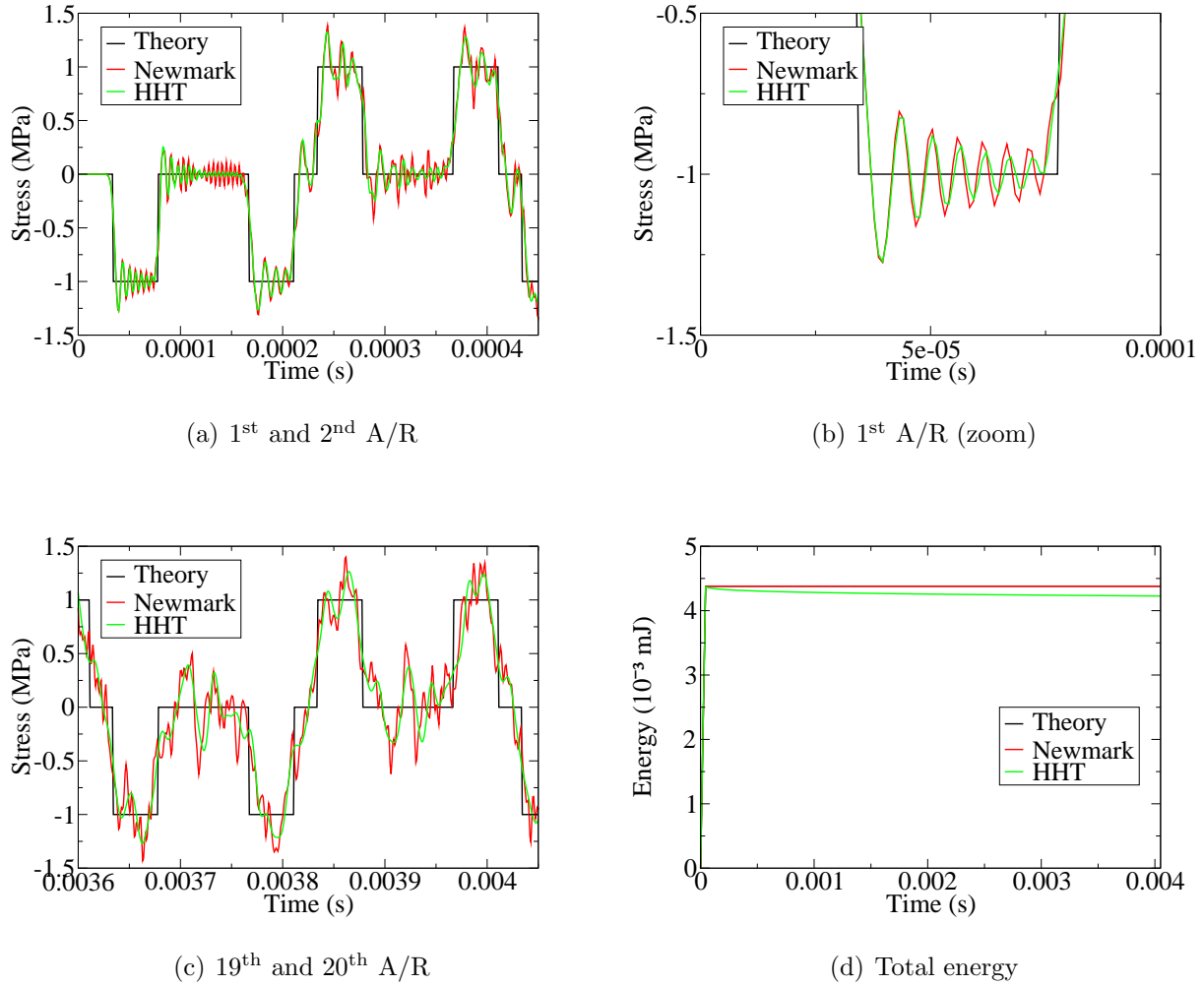


FIG. 4.11 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas implicites

aux solutions "théoriques".

Observations :

Contrainte : Grâce aux FIG. 4.12(a) et 4.12(b), on constate le réel pouvoir amortissant du bulk-viscosity dès le début du calcul. Avec son paramètre linéaire habituel $C_1 = 0.06$, il élimine les oscillations numériques au cours du premier A/R mais n'empêche pas une *érosion* du signal après 19 A/R de l'ordre de 4%, comme le schéma d'intégration temporelle de Tchamwa-Wielgosz.

Déphasage : Malgré l'*érosion* du signal, on ne constate pas de déphasage particulier après une propagation de 19 A/R.

Energie : Comme pour les schémas amortissants, le bulk-viscosity amortit les hautes fréquences numériques en dissipant de l'énergie. Après 19 A/R et pour un paramètre usuel $C_1 = 0.06$, 15% de l'énergie totale du système a été dissipée pour éliminer les hautes fréquences.

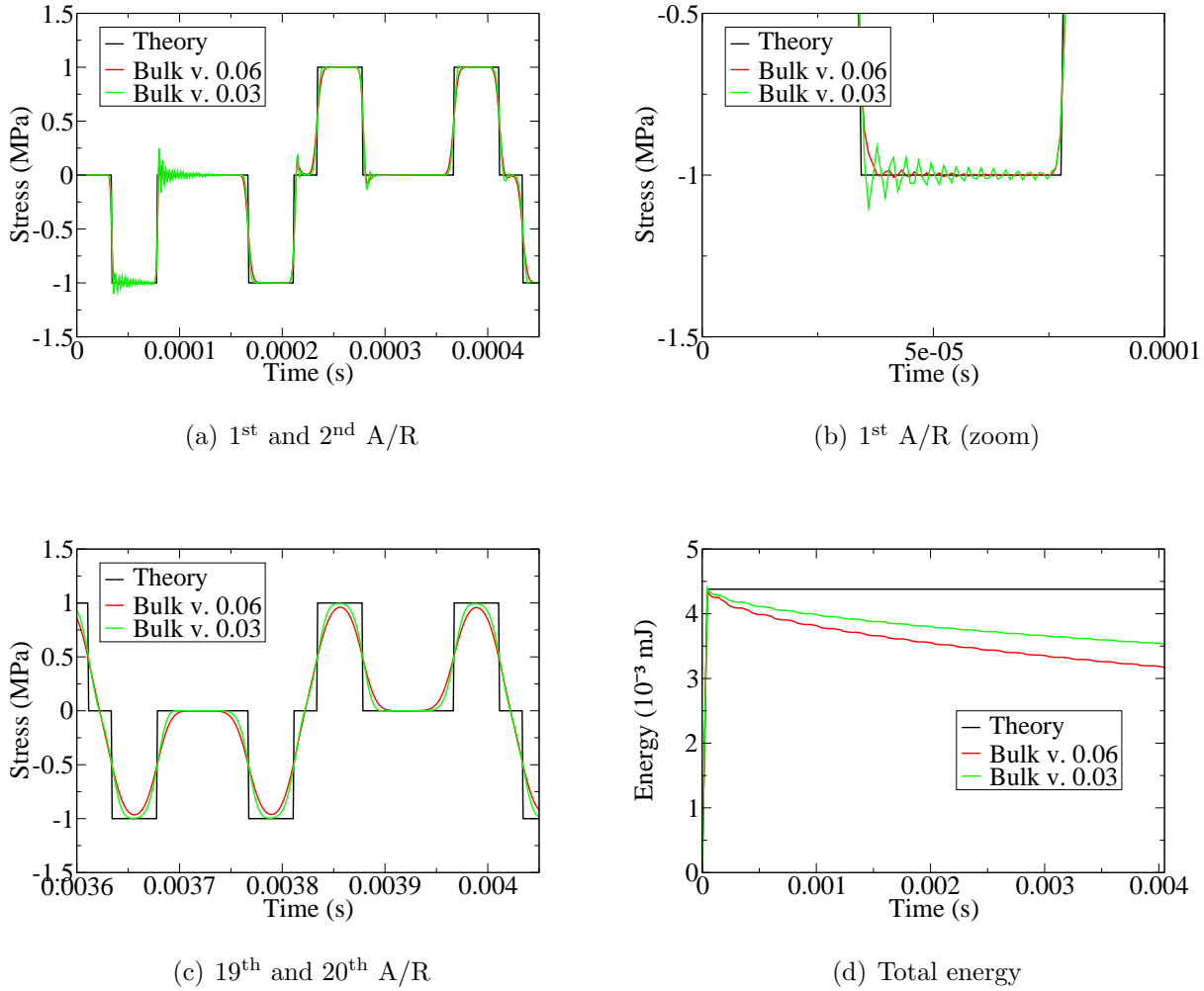


FIG. 4.12 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le bulk-viscosity

Bilan :

Le bulk-viscosity qui ajoute un terme de pression à la partie sphérique du tenseur des contraintes, offre les mêmes résultats en terme d'amortissement que le schéma d'intégration temporelle de Tchamwa-Wielgosz. On constate ainsi que malgré un bon amortissement des oscillations numériques au début du calcul, la perte d'énergie est inexorable pour la suite du calcul qui ne nécessite plus autant d'amortissement.

Conclusion

Tout d'abord, on peut noter que le schéma de Bonelli, discrétisé temporellement par la *MEF* (cf. §3.2), ne permet pas d'amortir aussi efficacement les hautes fréquences numériques parasites que les schémas explicites discrétisés temporellement par la *MDF*. Ensuite, en considérant uniquement les schémas explicites (*MDF*) et le bulk-viscosity, on remarque une réelle efficacité des différentes méthodes amortissantes qui parviennent rapidement à amortir les oscillations numériques parasites en contrainte. On constate également une ré-

ponse numérique similaire entre le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le Bulk-viscosity. Pour le vérifier, nous les comparons sur les FIG. 4.13 en affectant un paramètre $\varphi = 1.0332$ pour le schéma de Tchamwa et un paramètre $C_1 = 0.06$ pour le bulk-viscosity. On peut constater quasiment les mêmes résultats, pour la contrainte et pour l'énergie, hormis un over-shoot pour le Bulk-viscosity lors du premier A/R.

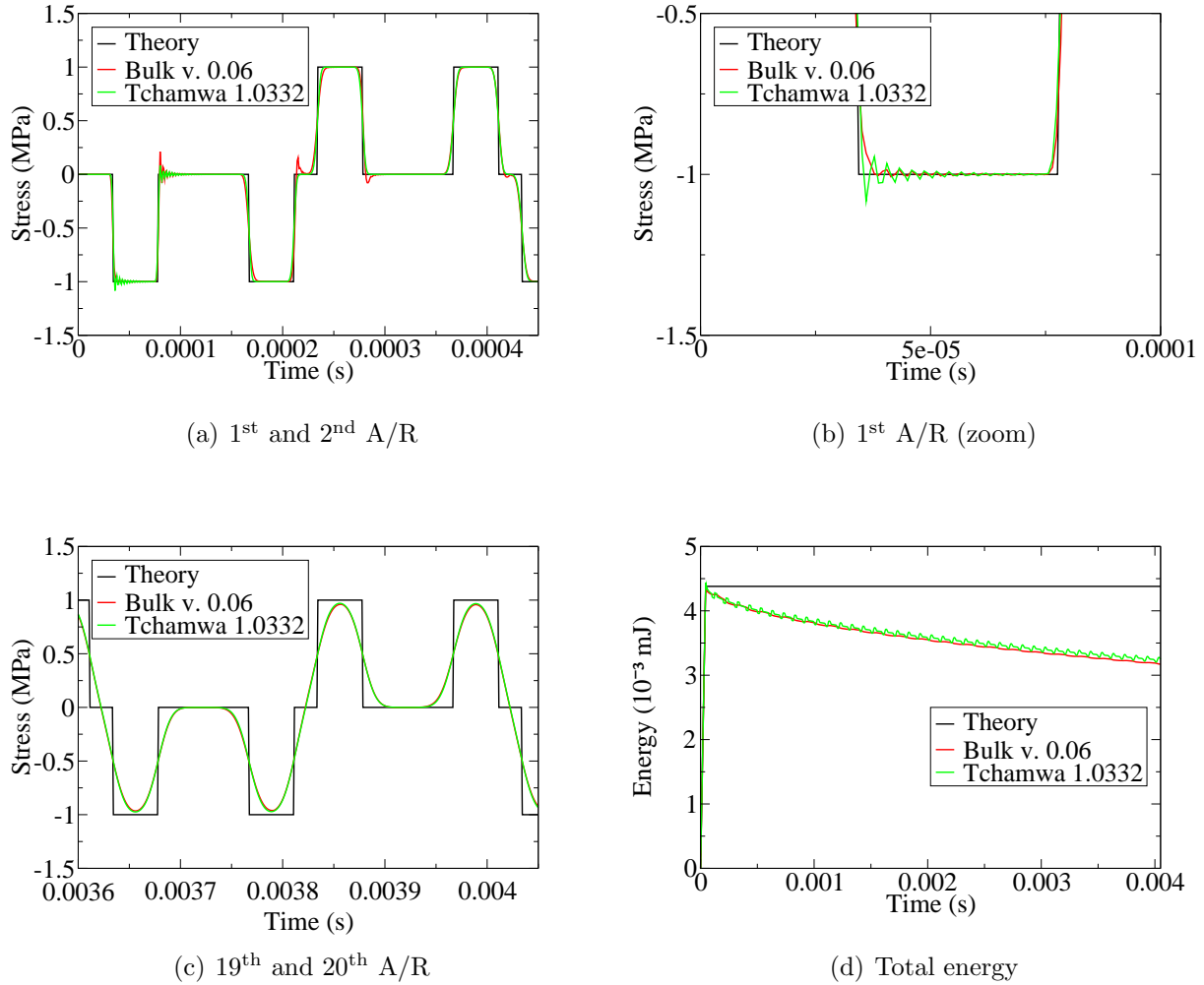


FIG. 4.13 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le bulk-viscosity

Même si ces deux méthodes permettent d'éliminer rapidement les oscillations numériques parasites, il existe pourtant une limitation quant à leur utilisation. Les signaux numériques en contrainte deviennent rapidement très amortis, voire trop et s'éloignent progressivement de la *solution théorique du système continu* car ils dissipent continûment de l'énergie. On constate des écarts de l'ordre de 4% après seulement 8m de propagation, soit par exemple, un aller retour dans une barre d'Hopkinson. Si l'on souhaite *coller* à la *solution théorique* du système continu grâce à ces outils, il est nécessaire de pouvoir régler l'amortissement au cours du calcul. Il est nécessaire alors d'amortir fortement les oscillations parasites au début du calcul, lorsqu'est appliqué le chargement, puis de diminuer voire même de supprimer l'amortissement

pour éviter que le signal ne se *détérior*e trop. Les développements concernant le réglage du paramètre d'amortissement au cours du temps sera évoquée au §4.3.

Avant cela, intéressons-nous plus particulièrement à la mise en donnée de ce cas-test pouvant influencer les résultats. Nous étudierons successivement l'influence :

- du pas de temps,
- du maillage,
- des conditions aux limites,
- du chargement et
- de la matrice masse.

4.2.4 Influence du pas de temps

Dans le précédent paragraphe, nous avons pu observer le comportement amortissant similaire entre le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le Bulk-Viscosity. Or, lors de l'étude analytique de ces deux méthodes amortissantes (cf. §3.1.2), rien ne laissait présager que l'on obtienne des résultats si proches. En effet, le Bulk-Viscosity agit sur les efforts intérieurs et on peut le considérer comme un ajout d'une loi de comportement visqueuse (cf. EQ. 3.12) alors que le schéma de Tchamwa-Wielgosz agit comme une perturbation des quantités d'accélération du schéma temporel (cf. EQ. 3.28). En toute logique, le schéma d'intégration temporelle devrait être sensible au pas de temps utilisé. Les FIG. 4.14 et 4.15 montrent respectivement le schéma de Tchamwa ($\varphi = 1.03$) et le bulk-viscosity ($C_1 = 0.06$) pour des valeurs $\frac{h}{h_c}$ de 0.9, 0.1 et 0.01.

Nous nous intéressons également à l'influence que peut avoir le pas de temps de calcul sur les résultats issus du schéma explicite (discretisé temporellement par la *MEF*) de Bonelli avec $\rho_b = 0.9$. Nous étudierons les résultats pour les mêmes valeurs de $\frac{h}{h_c}$.

Enfin, nous avons étudié précédemment les schémas implicites de Newmark et de HHT en utilisant des ratios $\frac{h}{h_c} = 0.9$. Cependant, ces schémas peuvent être utilisés avec des ratios $\frac{h}{h_c} > 1$ (ce qui fait leur principal intérêt et qui est impossible pour des schémas explicites pour des causes de stabilité), entraînant ainsi une diminution du nombre d'incrément effectués. Nous évaluons leur efficacité dans des conditions qui leur sont plus favorables, c'est-à-dire avec un ratio $\frac{h}{h_c} = 2$. Nous choisissons de limiter ce ration à 2 pour capter l'ensemble du signal et éviter un filtrage des fréquences supérieures à $\frac{2}{h}$.

Schéma de Tchamwa-Wielgosz

Observations :

Contrainte : Le pas de temps a indéniablement une influence sur le schéma de Tchamwa-Wielgosz. On constate, à première vue, un amortissement plus faible lorsque l'on diminue le ratio $\frac{h}{h_c}$: de plus fortes oscillations sont présentes au début du calcul (cf. FIG. 4.14(a) et 4.14(b)) et demeurent après 19 A/R (cf. FIG. 4.14(c)). De plus, on remarque plus précisément sur la FIG. 4.14(b) que les oscillations pour les faibles ratios ont une période plus grande que celle pour le ratio $\frac{h}{h_c} = 0.9$.

Energie : Cet amortissement plus faible se confirme par une baisse de l'énergie totale du système moins importante lorsque le ratio $\frac{h}{h_c}$ est faible (cf. FIG. 4.14(d)).

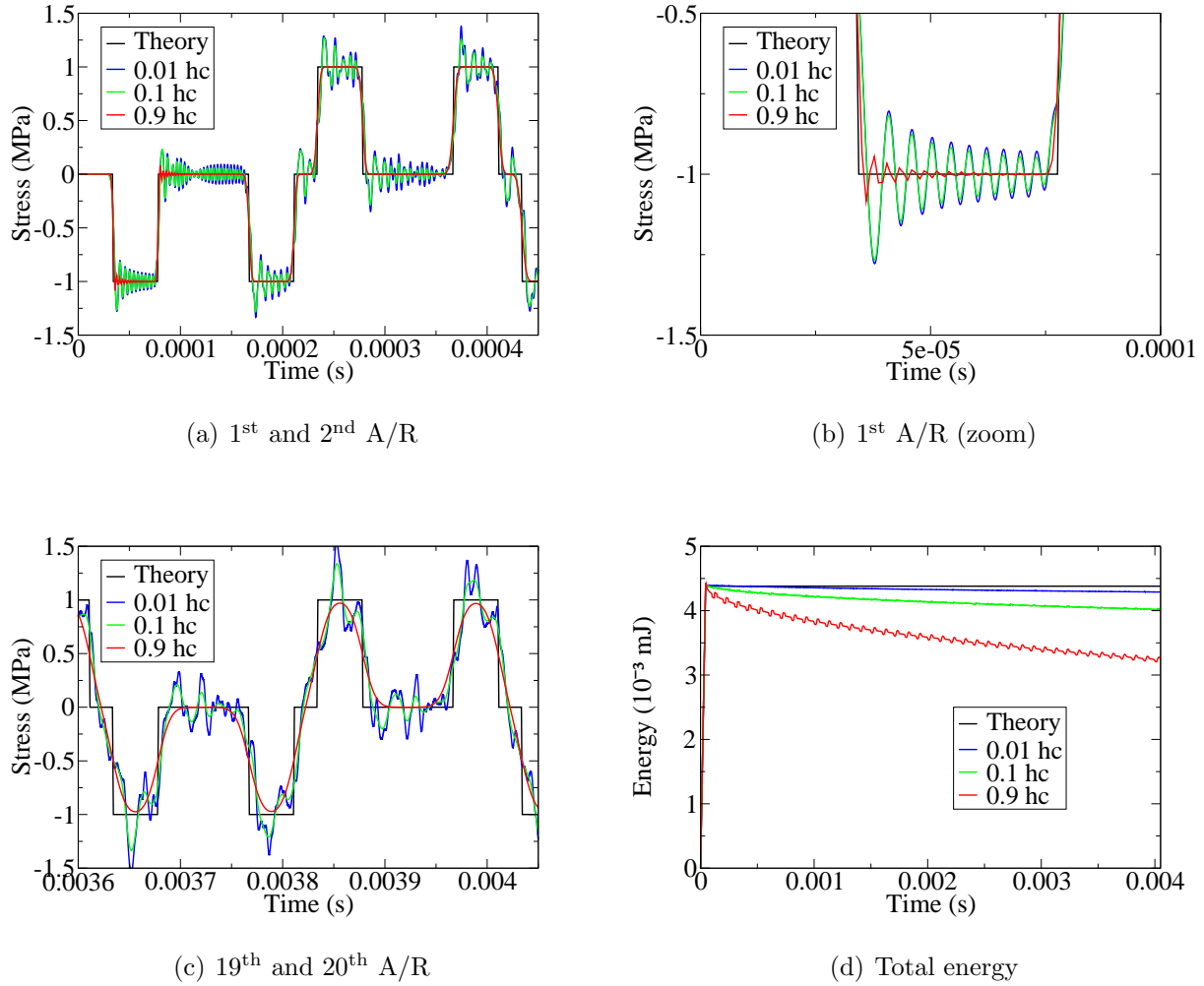


FIG. 4.14 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01

Bilan :

Cette étude montre les précautions à prendre lorsque l'on utilise le schéma de Tchamwa-Wielgosz : l'amortissement obtenu dépend du pas de temps de calcul, engendrant ainsi des résultats différents. On peut également souligner le fait que de très faibles différences sont observées entre les signaux aux ratios $\frac{h}{h_c} = 0.1$ et $\frac{h}{h_c} = 0.01$. Les oscillations visualisées ont une fréquence trop faible pour être traitées par les méthodes amortissantes. A. Soive considère que lorsqu'on diminue le pas de temps de calcul, les résultats obtenus tendent vers la *solution théorique du système discret*, système discret dépendant du choix de la matrice masse (cf. § 4.2.1). Ainsi, l'utilisation d'une méthode amortissante pour de faibles pas de temps de calcul ne permettra pas de retrouver la *solution théorique du système continu* ([Soive(2003)]).

NB : D'autres calculs ont été menés sur d'autres schémas d'intégration temporelle (HHT, Chung-Lee) et ont démontré la même influence du pas de temps.

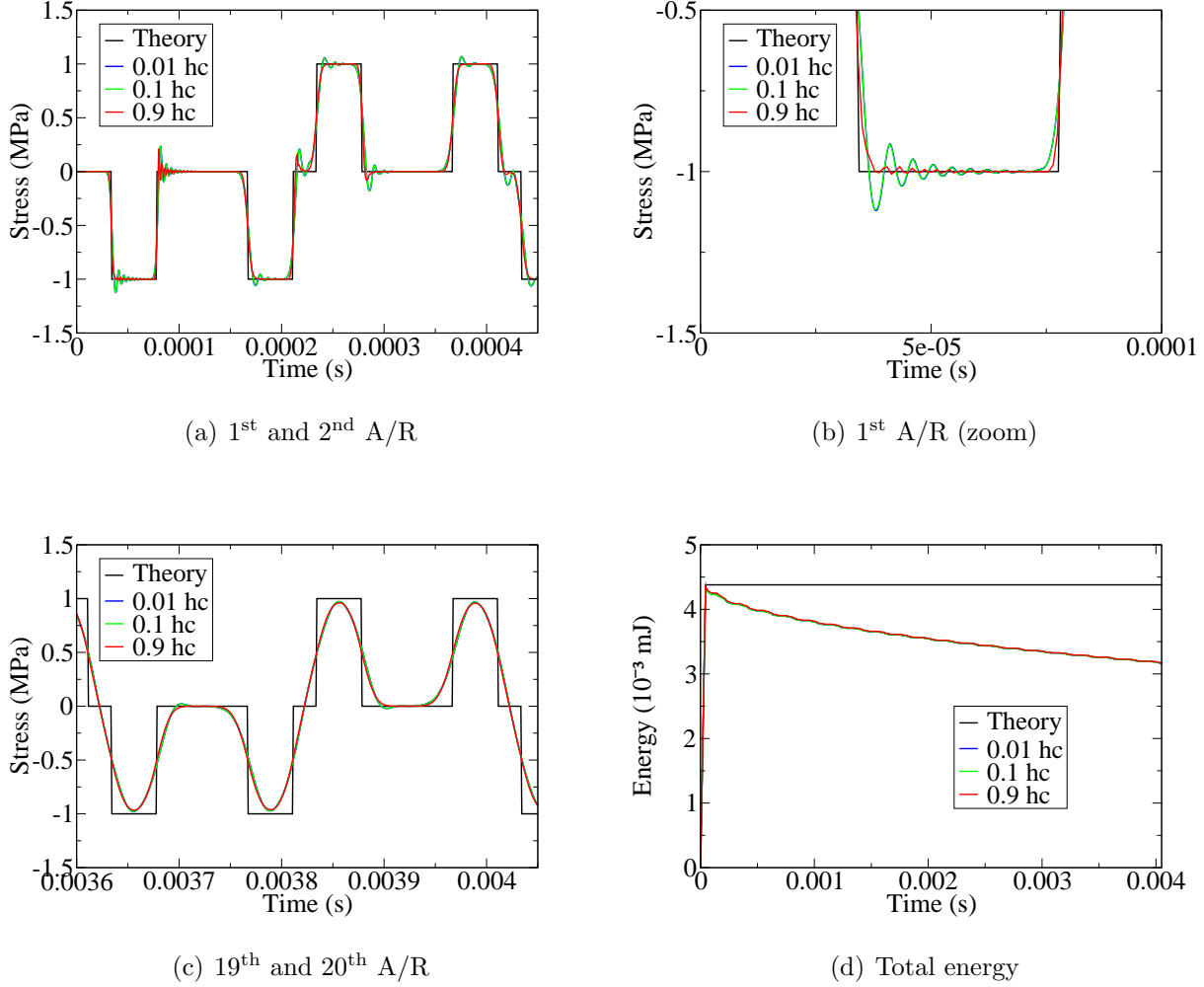
Bulk-viscosity

FIG. 4.15 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01

Observations :

Contrainte : La méthode amortissante du Bulk-viscosity utilisant le schéma CFD ne se trouve que très peu modifiée (FIG. 4.15). Les principales différences sont observées au tout début du calcul (FIG. 4.15(a) et 4.15(b)) avec un amortissement moins efficace (écart maximal en contrainte de 10%) pour les ratios plus faibles $\frac{h}{h_c} = 0.1$ et $\frac{h}{h_c} = 0.01$. En ce qui concerne le signal de contrainte après 19 A/R (FIG. 4.15(c)), l'affaiblissement du signal (de l'ordre de 4%) est similaire quelque soit le ratio utilisé.

Energie : L'évolution de l'énergie au cours du temps (cf. FIG. 4.15(d)) corrobore les observations en contraintes. Au début du calcul, la baisse d'énergie est très légèrement moins importante pour les faibles ratios et ensuite, l'énergie évolue sensiblement de la même façon, quelque soit le ratio utilisé.

Bilan :

L'étude montre la faible dépendance du bulk-viscosity au pas de temps utilisé. Il donne sensiblement les mêmes résultats, ce qui constitue un avantage important vis à vis de ses concurrents, les schémas d'intégration temporelle amortissants.

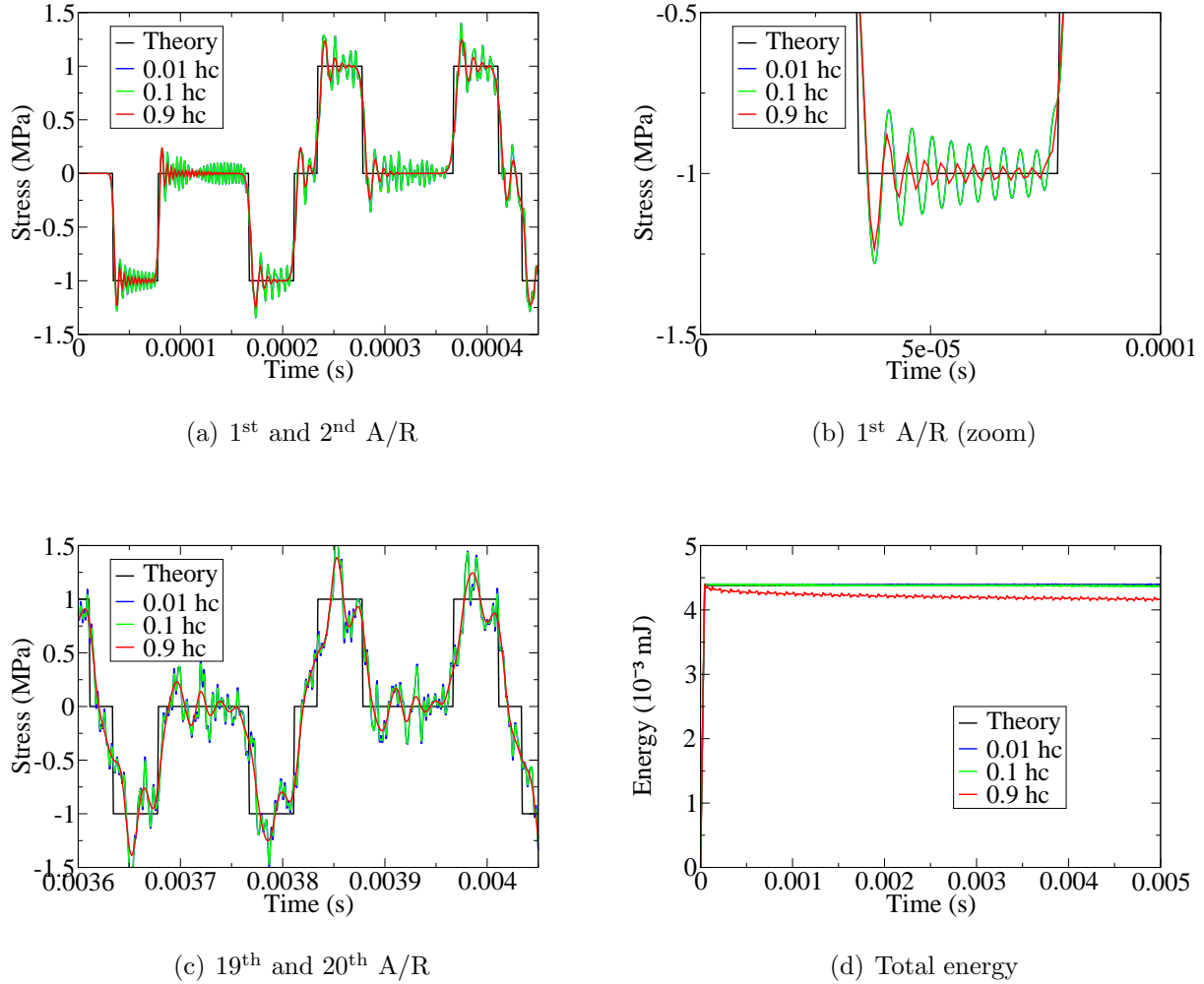
Schéma de Bonelli

FIG. 4.16 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour pour le schéma de Bonelli pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01

Observations :

Contrainte : Comme pour le schéma de Tchamwa, on constate une influence indéniable du pas de temps sur le schéma de Bonelli. Lorsque le ratio $\frac{h}{h_c}$ diminue, l'amortissement est nettement moins performant et les oscillations sont très importantes. On note également sur la FIG. 4.16(b) qu'aucune différence n'est observée entre un ratio de 0.1 et un ratio de 0.01 confirmant les résultats du §???. Après 19 A/R, pour un pas de temps $h = 0.1h_c$ et

$h = 0.01h_c$, les oscillations parasites de hautes fréquences sont toujours présentes comme pour un schéma CFD (quelque soit le pas de temps).

Energie : Le faible amortissement des hautes fréquences observé sur les courbes de contrainte est constaté sur la FIG. 4.16(d) traitant de l'énergie. Une baisse de 5% est notée lorsque le ratio est égal à 0.9 mais pour les autres ratios, l'énergie reste quasi-constante et la baisse est très largement inférieure à 1%.

Bilan :

Finalement, le schéma explicite de Bonelli n'échappe pas non plus à l'influence provoquée par un changement du pas de temps : l'amortissement est moins important lorsque le pas de temps de calcul diminue. On note également les résultats identiques entre un ratio $\frac{h}{h_c}$ égal à 0.1 et 0.01.

Schémas implicites

L'une des particularités des schémas implicites est leur utilisation pour des pas de temps de calcul supérieurs aux pas de temps critique défini par la CFD. Bien que leur utilisation soit en dehors du cadre de notre étude, nous proposons ici de connaître le comportement du schéma HHT sur notre cas test 1D pour un ratio $\frac{h}{h_c} = 2.0$.

Observations :

Contrainte et énergie : Les oscillations observées sur les FIG. 4.17(a) et 4.17(b) pour un ratio de 2.0 sont de plus faible amplitude et de plus faible fréquence que pour un ratio de 0.9. Après 19 A/R, le signal devient aussi perturbé pour un ratio de 2.0 que pour 0.9. La baisse d'énergie est plus marquée pour un pas de temps de calcul plus important.

Bilan :

Les mêmes conclusions sont formulées pour les schémas implicites amortissants que pour leurs homologues explicites : "l'amortissement est plus important lorsque le pas de temps augmente". Cette affirmation est à nuancer par le fait qu'utiliser un pas de temps supérieur h au pas de temps critique h_c induit automatiquement un filtrage des fréquences supérieures à $\frac{1}{h}$.

Conclusion

A travers ces trois exemples de méthodes amortissantes (explicites, implicites et bulk-viscosity), on constate une dépendance au pas de temps de l'amortissement pour les schémas d'intégration temporelle. Or, dans de nombreux cas industriels, le maillage d'une pièce complexe implique différentes tailles d'éléments. De ce fait, le pas de temps critique, étant lié à la taille du plus petit élément, devrait modifier en conséquence l'efficacité de l'amortissement (cf. §4.2.5). Cet "effet" ne semble pas affecter le bulk-viscosity qui reste la seule méthode d'amortissement des oscillations parasites utilisée dans les codes de calcul commerciaux (Abaqus® et LS-Dyna®). D'autre part, l'utilisation de schémas implicites avec un pas de temps de calcul plus important ne permet pas d'obtenir des résultats plus convaincants, les oscillations parasites sont toujours présentes.

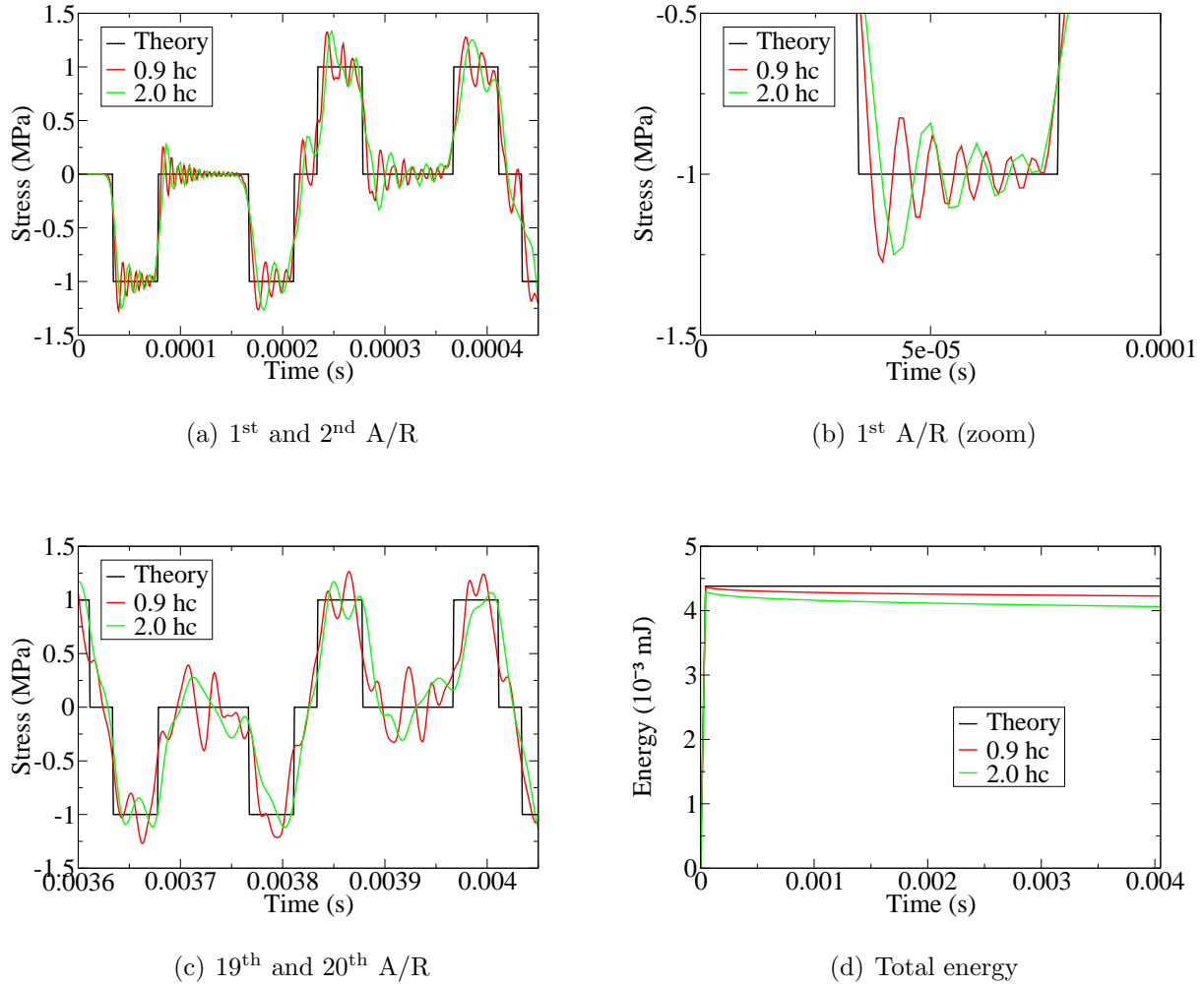


FIG. 4.17 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma implicite de HHT pour $\frac{h}{h_c} = 2.0$

4.2.5 Influence du maillage

Nous désirons connaître l'influence que peut avoir le maillage sur les schémas d'intégration temporelle et le bulk-viscosity. Pour cela, nous utilisons comme maillage *référence*, le maillage régulier d'une barre de longueur $L = 200\text{mm}$ avec 100 éléments de longueur $L_{elt} = 2\text{mm}$. Deux nouveaux maillages sont générés à partir du maillage *référence* en déplaçant chacun des noeuds de manière aléatoire. La longueur moyenne de l'élément reste donc égale à $\bar{L}_{elt} = 2\text{mm}$. Les conditions restrictives suivantes s'imposent :

- le noeud se trouvant à l'extrémité encastrée de la barre doit être fixe,
- les éléments ne doivent pas se chevaucher,
- les deux maillages générés doivent avoir des tailles d'éléments bien différentes.

Un exécutable Perl[®] est développé pour l'occasion et permet de modifier la position de chaque noeud individuellement par la formule suivante :

$$X_{new} = X_{old} + \alpha_1 \frac{\bar{L}_{elt}}{2} (1 - \alpha_2)$$

avec respectivement, X_{new} et X_{old} la nouvelle et l'ancienne position du noeud, $\alpha_1 \in [0, 1]$ le facteur d'éloignement des noeuds, α_2 un nombre aléatoire sur l'intervalle $[0, \bar{L}_{elt}]$.

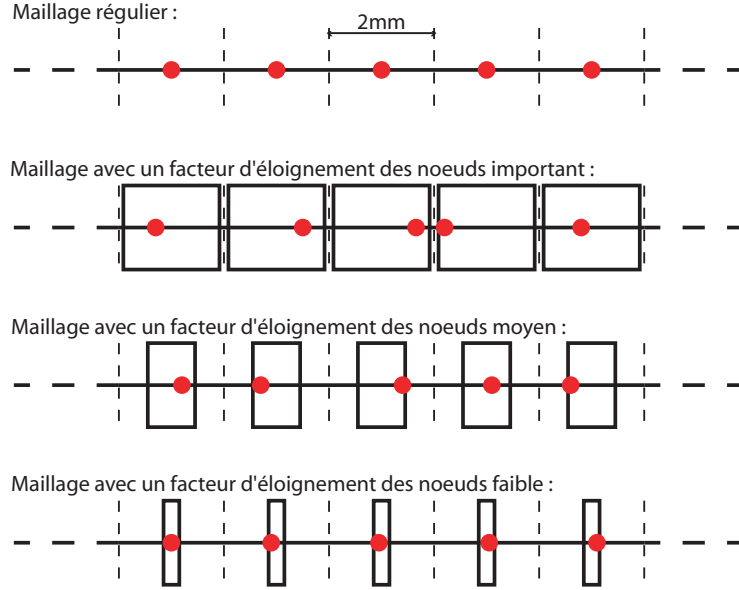


FIG. 4.18 – Maillages aléatoires

Grâce au facteur α_1 , on peut, ainsi, fixer une fenêtre correspondant à l'écart maximal du déplacement de chaque noeud appartenant à la barre. Elle est de la taille $[-\alpha_1 \frac{\bar{L}_{elt}}{2}, +\alpha_1 \frac{\bar{L}_{elt}}{2}]$. Le paramètre α_2 permet de positionner aléatoirement chaque noeud dans la fenêtre correspondante. La FIG. 4.18 illustre les propos précédents.

Deux maillages sont réalisés par cette technique.

1. Le premier maillage est composé de noeuds qui ont faiblement été déplacés. Ses caractéristiques sont les suivantes :
 - Longueur du plus petit élément : $L_1 \simeq 1.62mm$
 - Pas de temps critique $h_c = 0.81 \cdot 10^{-6}s$
 - Pas de temps de calcul $h = 0.9 h_c = 0.729 \cdot 10^{-6}s$.
2. Le second maillage est composé de noeuds qui ont fortement été déplacés. Ses caractéristiques sont les suivantes :
 - Longueur du plus petit élément : $L_2 \simeq 0.33mm$
 - Pas de temps critique $h_c = 0.165 \cdot 10^{-6}s$
 - Pas de temps de calcul $h = 0.9 h_c = 0.1485 \cdot 10^{-6}s$.

Nous nous proposons de comparer les résultats obtenus avec le schéma de Tchamwa-Wielgosz ($\varphi = 1.03$), le bulk-viscosity ($C_1 = 0.06$) et le schéma de Bonelli ($\rho_b = 0.9$).

Schéma de Tchamwa-Wielgosz

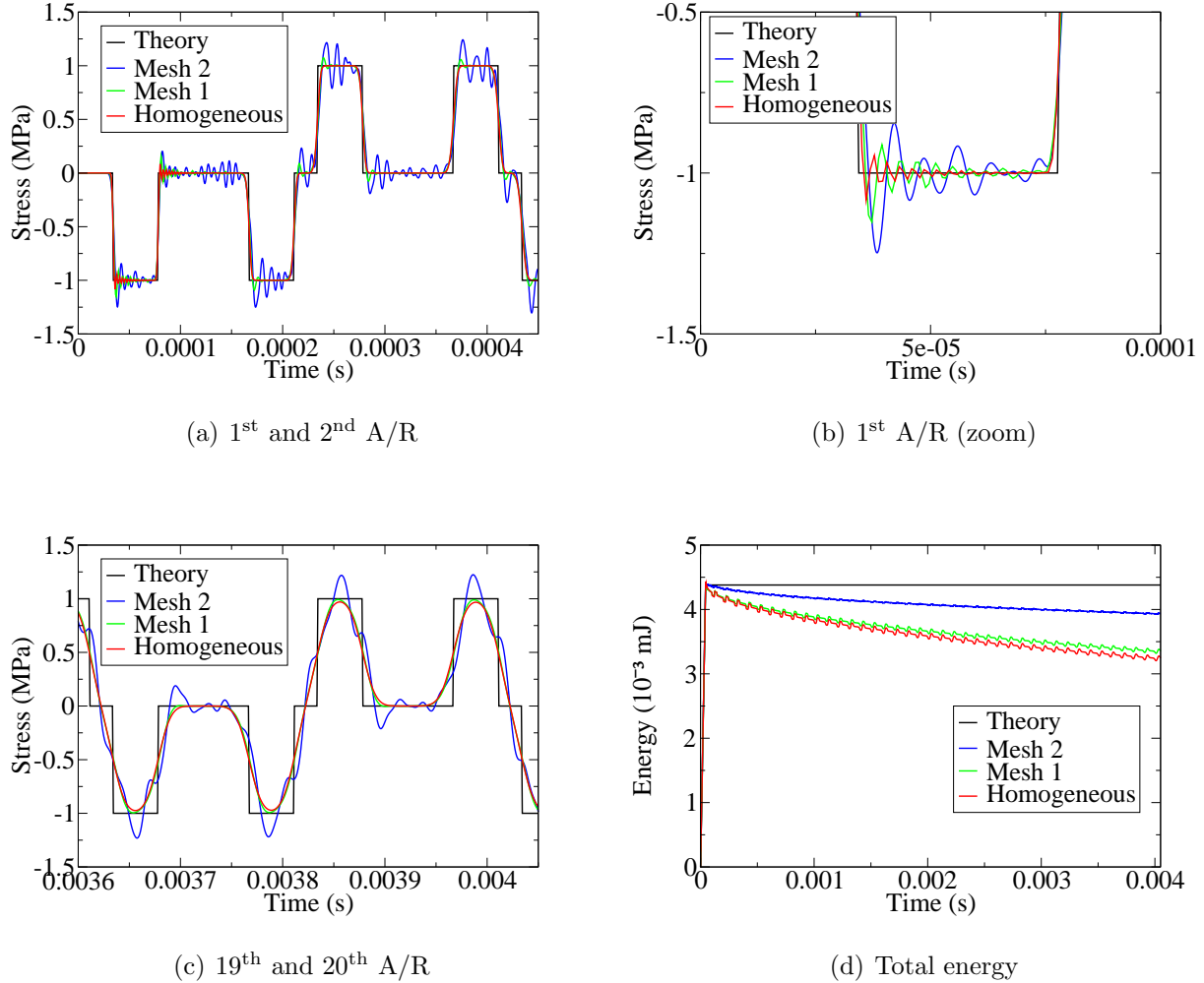


FIG. 4.19 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa pour différents maillages

Observations :

Contrainte : On constate sur les FIG. 4.19(a) et 4.19(b) que des oscillations parasites apparaissent dès le début du calcul. Ceci est d'autant plus vrai que le maillage est perturbé (23% d'écart maximal en contrainte pour le second maillage). De plus, le second maillage ne parvient pas à éliminer les oscillations après 19 A/R (cf. FIG. 4.19(c)) et on observe aisément un signal oscillant autour de la solution théorique avec un écart maximal de l'ordre de 20%.

Energie : Les observations précédentes en contrainte sont confirmées par une baisse de l'énergie moins importante de 50% au bout de 20 A/R pour le maillage très perturbé par rapport au maillage régulier (cf. FIG. 4.19(d)).

Bilan :

Le schéma de Tchamwa-Wielgosz connaît des difficultés à reproduire la même efficacité

en amortissement lorsque le maillage est perturbé. En effet, le pas de temps critique étant calculé sur la taille du plus petit élément, le pas de temps de calcul est réduit en conséquence.

Bulk-viscosity

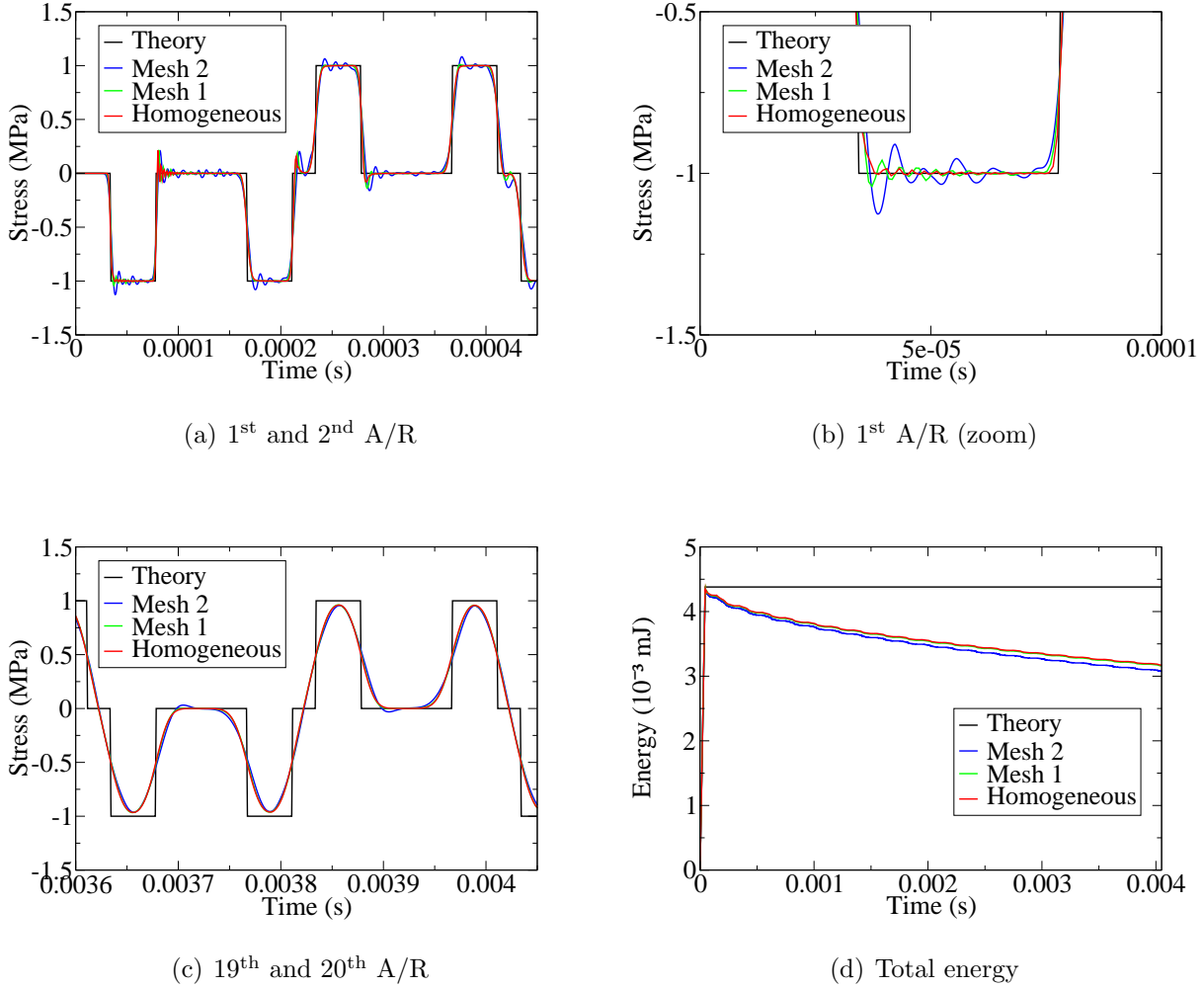


FIG. 4.20 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour différents maillages

Observations :

Contrainte et énergie : Comme pour l'étude de l'influence du pas de temps sur l'amortissement, on constate :

- des oscillations dès le début du calcul pour les maillages aux noeuds fortement déplacés (cf. FIG. 4.20(a) et 4.20(b)),
- des signaux de contraintes quasi-identiques quelque soit le maillage après 19 A/R (cf. FIG. 4.20(c)) ,
- une baisse d'énergie totale du système quasi-équivalente quelque soit le maillage utilisé, hormis au début du calcul (cf. FIG. 4.20(d)).

Bilan :

Le bulk-viscosity amortit tout aussi bien les oscillations parasites avec un maillage régulier ou non.

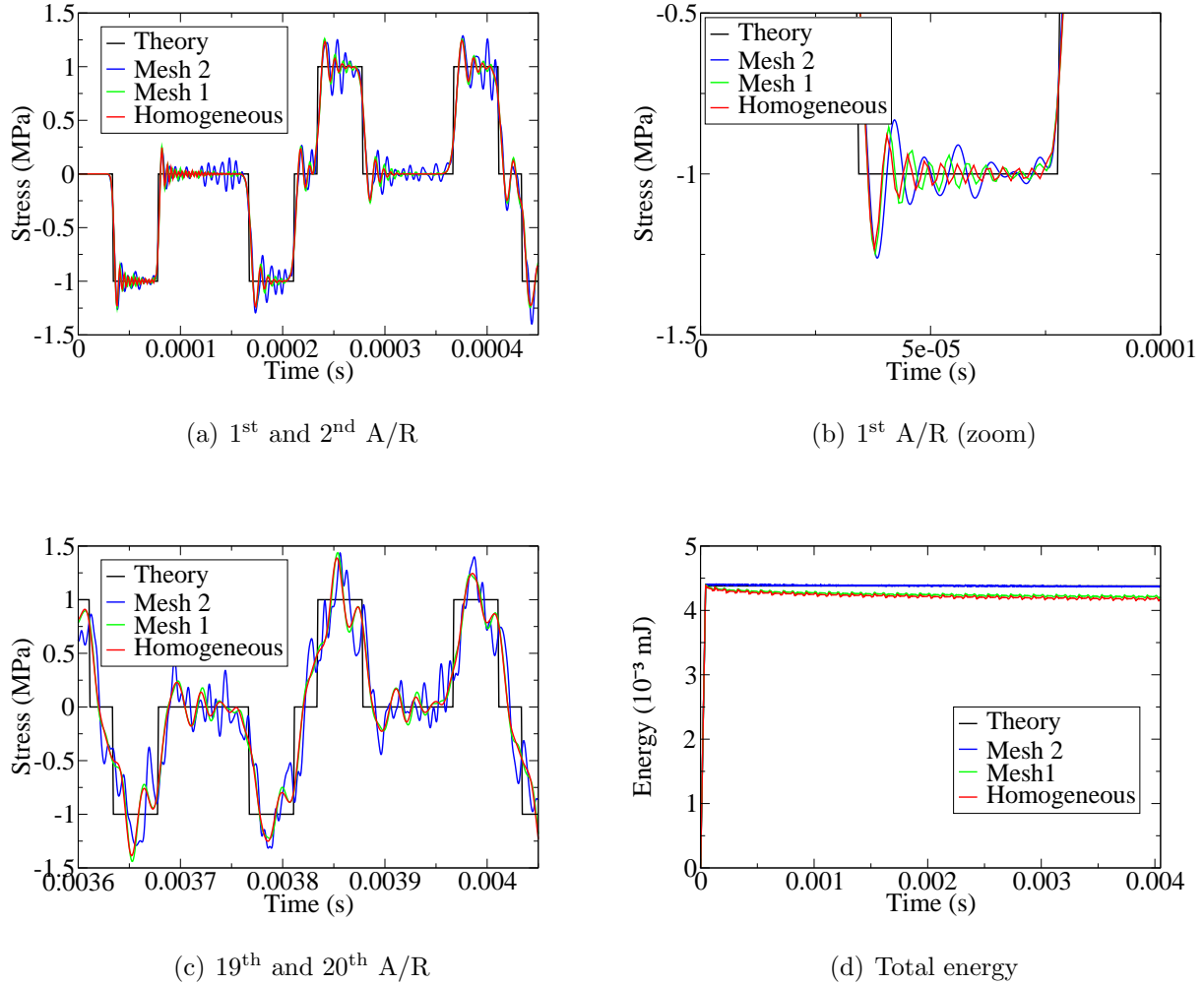
Schéma de Bonelli

FIG. 4.21 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Bonelli pour différents maillages

Observations :

Contrainte et énergie : Lorsque l'on utilise un maillage fortement perturbé, le schéma de Bonelli ne permet pas d'amortir les hautes fréquences numériques d'une manière aussi efficace que pour un maillage homogène (cf. FIG. 4.21(a) et 4.21(b)). Après 19 A/R, on constate le même effet qu'au début du calcul (cf. 4.21(c)). Ceci se confirme par une baisse moins importante de l'énergie pour le maillage fortement perturbé (cf. FIG. 4.21(d)).

Bilan :

Le schéma de Bonelli, comme celui de Tchamwa connaît des difficultés à obtenir le même amortissement pour des maillages homogènes ou fortement perturbés car l'amortissement réalisé via la discrétisation temporelle dépend complètement du pas de temps utilisé et finalement de la forme du maillage sur lequel il est appliqué.

Conclusion

Concernant l'utilisation d'un maillage régulier ou non (à longueur moyenne d'élément $\bar{L}_{elt} = 2mm$ identique), on observe un net avantage du Bulk-viscosity par rapport au schémas d'intégration temporelle. En effet, le bulk-viscosity est très peu sensible à la discrétisation spatiale, ce qui en fait un avantage indéniable lors d'études de structures à la géométrie compliquée ne permettant pas une discrétisation régulière. En revanche, les schémas d'intégration temporelle sont très sensibles au maillage (cf. TAB. 4.1).

Maillage	homogène	faiblement perturbé	fortement perturbé
$\frac{L_{max}}{L_{min}}$	1	1.44	11.49
Tchamwa	73.5%	76.2%	89.7%
Bulk-viscosity	72.8%	72.5%	70.6%
Bonelli	95.5%	96.3%	99.8%

TAB. 4.1 – Energie totale restante après 19 A/R pour différents maillages

Des solutions peuvent être envisagées pour contrecarrer la sensibilité au maillage des schémas temporels amortissants. On peut éventuellement augmenter le paramètre d'amortissement φ pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz lorsque l'on utilise un maillage irrégulier, cela impliquant inévitablement une baisse de la précision. On pourrait également envisager de fixer un paramètre d'amortissement φ propre à chaque élément. Des développements dans ce sens seront présentés au §4.3.

4.2.6 Influence des conditions aux limites

Il est également intéressant de s'interroger sur l'influence des conditions aux limites (l'extrémité encastree et l'extrémité libre) dans le cas d'une discrétisation spatiale. Pour cela, nous réalisons le même essai que précédemment en utilisant deux géométries (cf. FIG. 4.22) :

1. une barre *longue*, mesurant 2600mm et comportant 1300 éléments
2. une barre *courte*, mesurant 200mm et comportant 100 éléments

On utilise un schéma de Différences Finies Centrées sans amortissement de manière à ce que l'on observe nettement les oscillations parasites sur les courbes. On compare l'évolution de la contrainte d'un élément situé à 150mm de l'encastrement dans cette barre *longue* avec celle d'un noeud situé également à 150mm de l'encastrement dans la barre *courte*.

Observations :

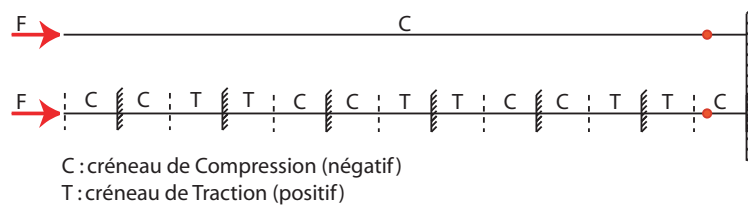


FIG. 4.22 – Géométries utilisées

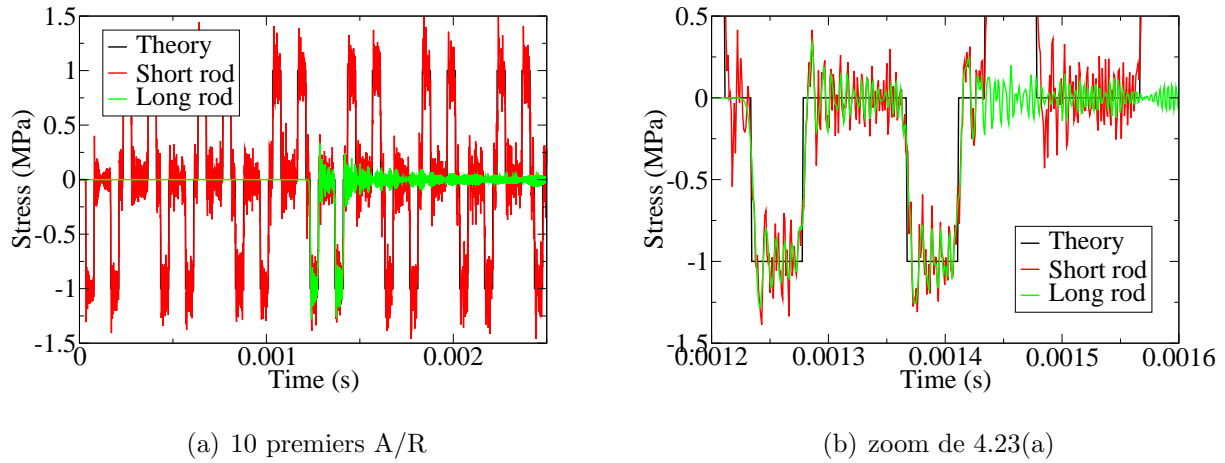


FIG. 4.23 – Influence de la condition d'encastrement

On visualise sur la FIG. 4.23 le nombre d'encastrements et de bords libres que rencontre l'onde au cours de sa propagation : aucun pour la barre "longue" et 6 encastrements et 6 bords libres pour la barre "courte". Ces conditions aux limites influencent nettement la réponse numérique. Les oscillations observées sur la FIG. 4.23(b) montrent que l'onde est plus *perturbée* (oscillations plus hautes en fréquences) lorsqu'elle rencontre 6 encastrements et 6 bords libres.

Bilan :

Cette étude montre l'importance relative de la condition limite dans la propagation de l'onde. La condition d'encastrement agit en quelque sorte comme *perturbatrice* dans l'évolution de l'onde puisque des oscillations parasites sont présentes en plus grand nombre pour la barre courte.

On peut alors s'interroger sur l'incidence de la présence de plus d'oscillations numériques dans le cas d'une barre courte pour les méthodes amortissantes. Nous choisissons d'étudier le schéma de Tchamwa en particulier.

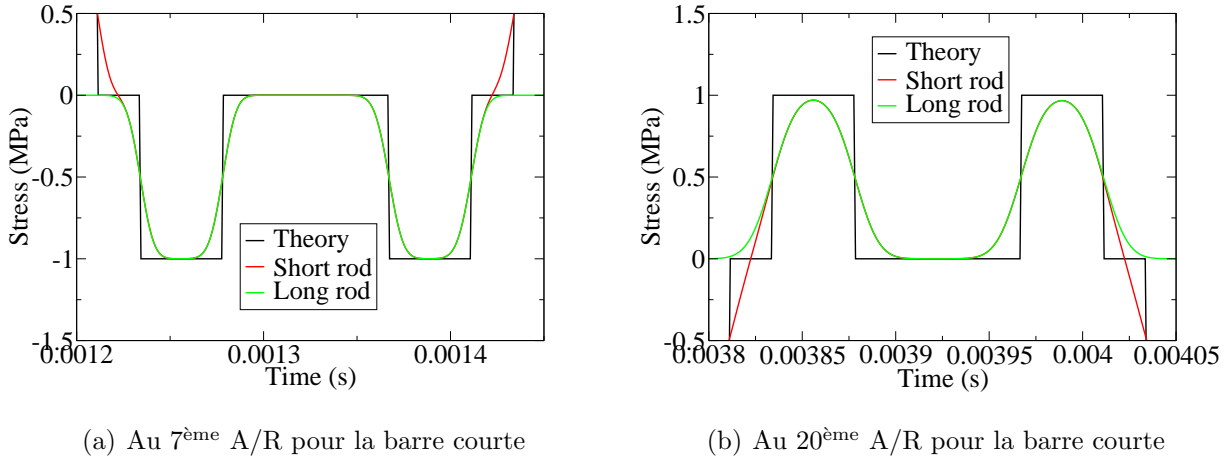


FIG. 4.24 – Influence de la condition d'encastrement

Observations :

On remarque sur la FIG. 4.24 qu'après 7 A/R et même 20 A/R, les résultats entre une barre courte de une barre longue sont identiques.

Bilan :

Cela signifie que les conditions d'encastrement et de bord libre ne modifie en rien l'amortissement des oscillations numériques parasites. L'amortissement est principalement lié au nombre de fois que le schéma temporel amortissant a été utilisé et n'est pas perturbé par quelques oscillations apparaissant aux extrémités de la barre.

4.2.7 Influence du chargement

Mise en place du nouveau chargement

L'utilisation d'un chargement de type créneau dont la montée en charge et sa descente correspondent chacun à un pas de temps engendre l'excitation d'un large spectre de fréquences. Nous avons ainsi pu juger de l'efficacité de plusieurs méthodes amortissantes. [Soive(2003)] pose la question de la validité de ce chargement *impulsionnel* et propose, pour diminuer l'importance des hautes fréquences numériques, d'adapter ce type de chargement en lissant les discontinuités. Un nouveau chargement (dénommé *créneau lissé*) est proposé et comparé au *créneau référence* étudié précédemment. Les rampes de chargement et déchargement effectuées en 1 pas de temps pour le *chargement référence* sont remplacées par des rampes d'équation 4.3 effectuées en 18 pas de temps.

$$F(t) = \frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18h} t \right) \right] \quad (4.3)$$

où $F_0 = 10 \text{ N}$ est l'effort maximal. Le *chargement lissé* est donc le suivant :

- une montée en charge lissée et effectuée en 18 pas de temps
- un maintien en charge effectué durant 14 pas de temps
- une descente de charge lissée et effectuée en 18 pas de temps

La FIG. 4.25 présente les deux types de chargement étudiés ainsi que les fréquences excitées par chaque chargement. L'avantage de ce chargement *créneau lissé* est une plus faible sollicitation des hautes fréquences (cf. 4.25(b)).

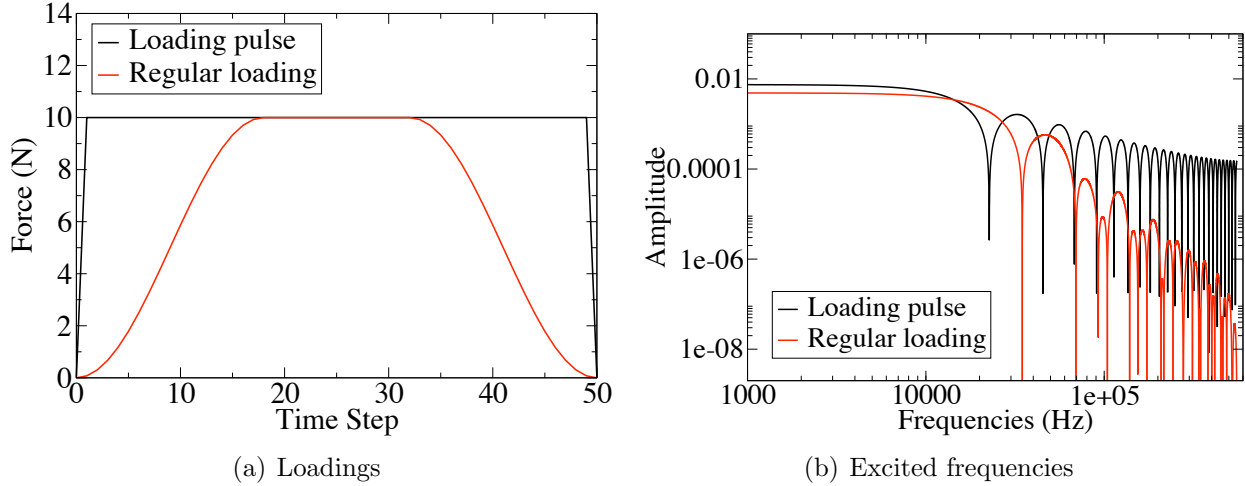


FIG. 4.25 – Chargements étudiés

Nous comparerons les résultats en contrainte pour le CFD à différentes méthodes amortissantes : bulk viscosity ($C_1 = 0.06$), Tchamwa ($\varphi = 1.03$) et Bonelli ($\rho_b = 0.9$). Nous utiliserons une solution théorique en contrainte basée sur la même approche que pour le *créneau référence*, à savoir une suite périodique de *créniaux lissés*. La variation d'énergie totale du système au cours du temps sera, elle aussi, comparée à une solution théorique dont le calcul énergétique figure en Annexe (cf. §A.2).

Résultats pour les schémas CFD, de Tchmawa-Wielgosz, de Bonelli et le Bulk-viscosity

Observations :

Contrainte : Sur les FIG. 4.26(a) et 4.26(b), on n'observe aucune oscillation parasite. Ainsi les schémas CFD, Tchamwa-Wielgosz et le Bulk-viscosity fournissent le même résultat. En revanche, après 19 A/R (cf. FIG. 4.26(c)), des oscillations sont apparues engendrant un écart maximal en contrainte de 11% entre le schéma CFD et la solution théorique. Ces oscillations ont été complètement amorties par les méthodes amortissantes et entraînent un affaiblissement du signal de contrainte de l'ordre de 19%.

Energie : La baisse d'énergie (cf. FIG. 4.26(d)) s'effectue de manière plus régulière que pour le chargement de type *créneau référence*. En effet, les hautes fréquences apparaissent régulièrement lorsque l'on utilise un *créneau lissé*, alors qu'elles sont déjà présentes au début du calcul du fait de la discontinuité de chargement. L'amortissement ciblant les hautes fréquences, il dépend donc de la quantité de hautes fréquences à amortir.

Conclusion

Finalement, le *chargement lissé* permet d'éviter l'apparition d'oscillations parasites au début du calcul mais connaît les mêmes inconvénients que le *chargement référence*, à savoir une

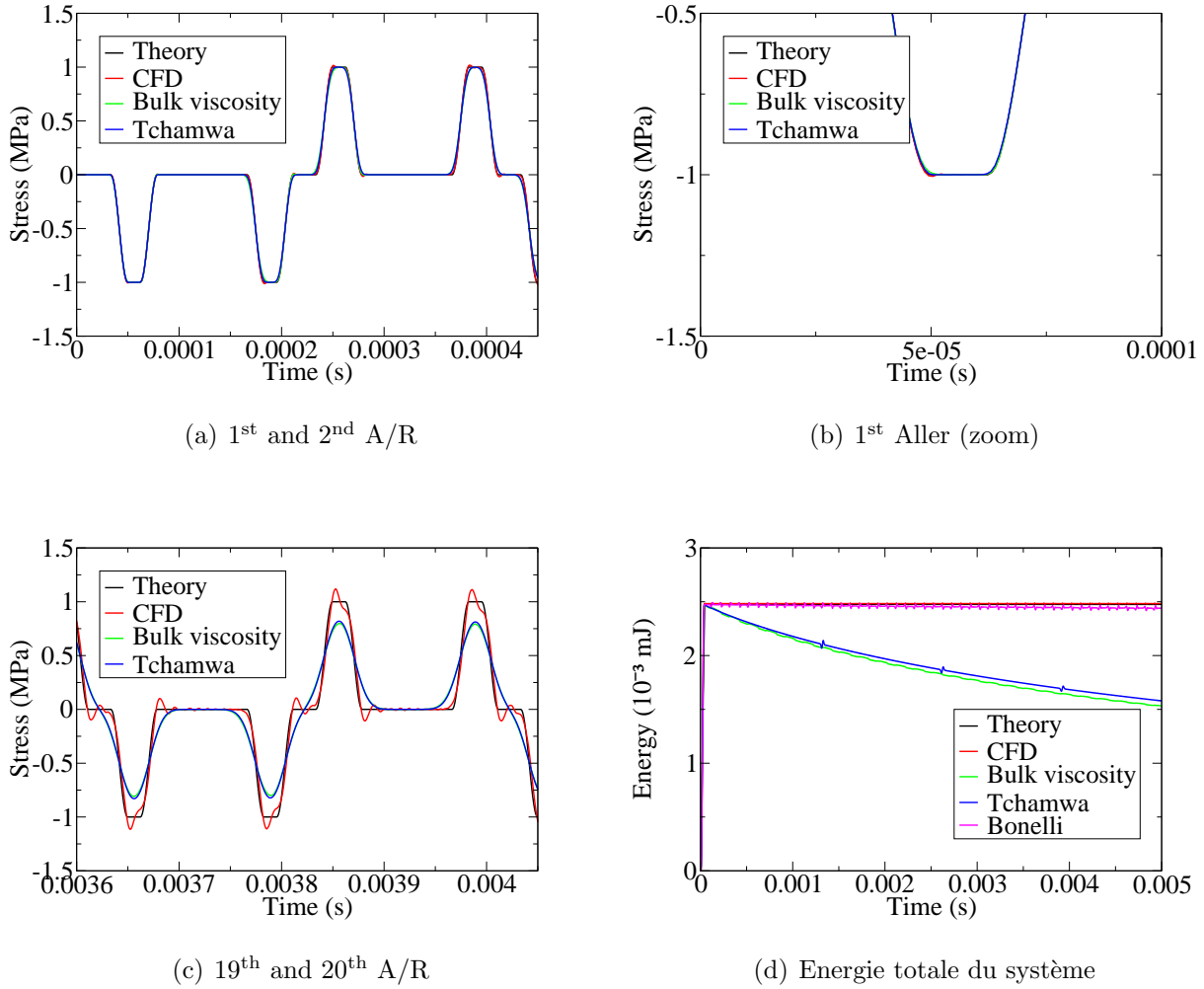


FIG. 4.26 – Regular loading : évolution de la contrainte et de l'énergie

apparition progressive d'oscillations hautes fréquences lorsqu'aucune méthode amortissante n'est utilisée et dans les bonnes proportions. Une réflexion sera menée sur la manière de régler l'amortissement au cours du calcul dans un prochain paragraphe (cf. §4.3).

4.2.8 Influence de la matrice masse

Comme nous l'avons vu précédemment au §4.2.1 traitant de la réponse numérique du système discret, les résultats observés en contrainte n'ont pas du tout la même forme suivant le choix de la matrice masse. En effet, on rappelle pour mémoire que :

- pour la matrice masse consistante, l'amplitude des oscillations parasites va en augmentant depuis l'instant de chargement brutal,
- pour la matrice masse diagonale, l'amplitude des oscillations parasites va en diminuant depuis l'instant de chargement brutal.

[Schreyer(1983)] a étudié notamment l'influence de la matrice masse consistante et diagonale sur les schémas d'intégration temporelle de Newmark. Nous nous proposons dans cette

partie d'étudier leur influence sur les schémas de CFD, de Tchamwa-Wielgosz, de Bonelli et du Bulk-viscosity.

Schéma de CFD

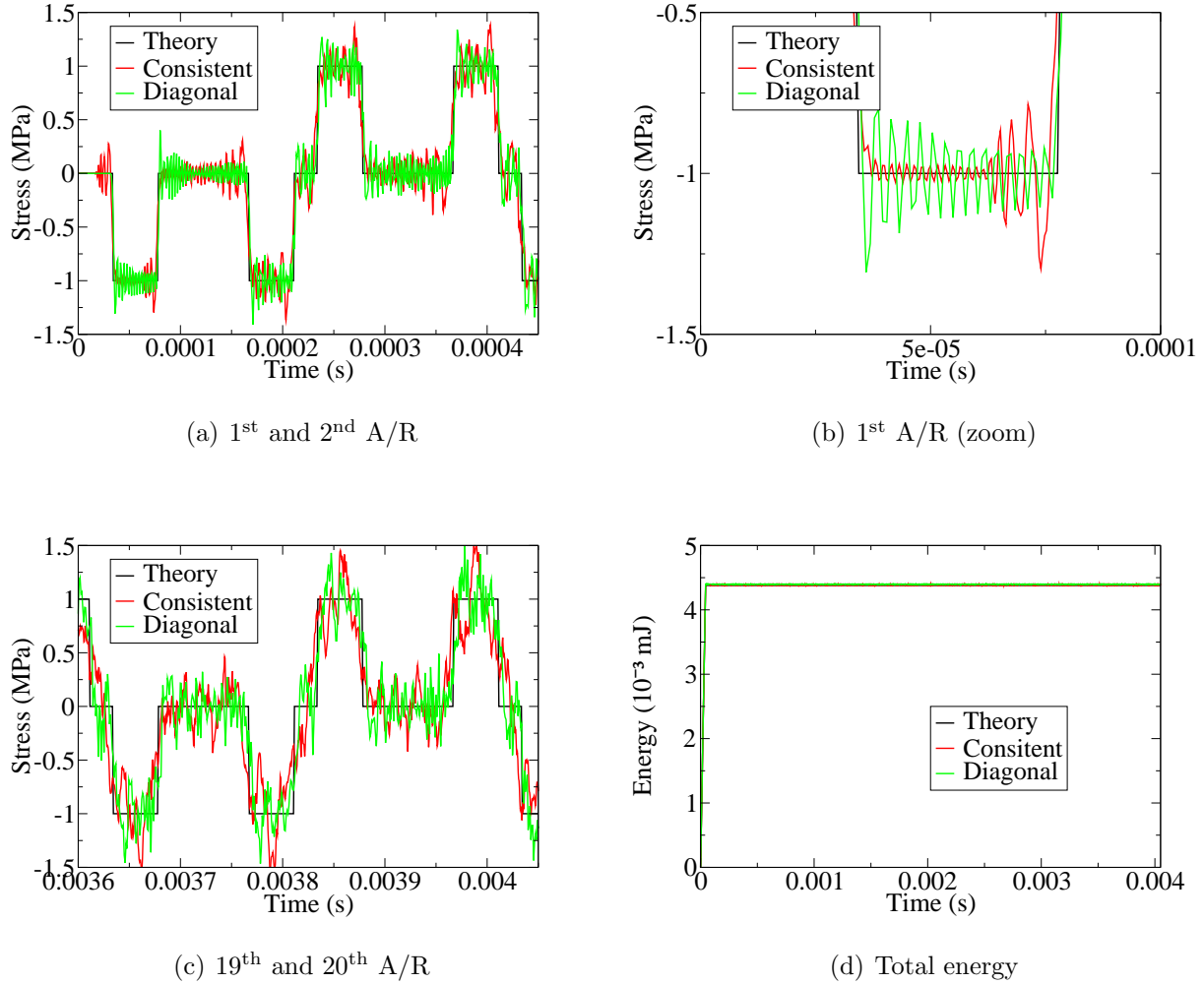


FIG. 4.27 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de CFD pour différentes matrices masse

Observations :

On observe sur les FIG. 4.27 les différences en contrainte quand on utilise une matrice masse diagonale ou consistante.

- pour la matrice masse consistante, l'amplitude des oscillations va en augmentant depuis l'instant du chargement, ce qui est conforme avec la *solution théorique du système discrétisé* obtenue précédemment. On constate également sur la FIG. 4.27(b) que deux types d'oscillations peuvent être observées : des oscillations de faible amplitude et de fortes fréquences ($> 580 \text{ kHz}$) suivies de 3-4 oscillations de fortes amplitude et de fréquences s'affaiblissant progressivement (de 390 kHz à 190 kHz). Après 19 A/R, le signal

est très bruité pour les deux matrices masses et il est quasi impossible de statuer sur ces résultats.

- pour la matrice masse diagonale, utilisée jusqu'à présent, un seul type d'oscillation est observé sur la FIG. 4.27(b) : des oscillations de fortes amplitude et de fréquences moyennes (de l'ordre de 300 kHz).

L'énergie totale reste stable pour les deux matrices masse consistante et diagonale.

Bilan :

Comme évoqué au §4.2.1, les résultats en contrainte sont fonction de la matrice masse utilisée. Regardons le comportement amortissant des différentes méthodes étudiées (schéma de Tchamwa, Bonelli et Bulk-viscosity) pour chacune des matrices masse.

Schéma de Tchamwa

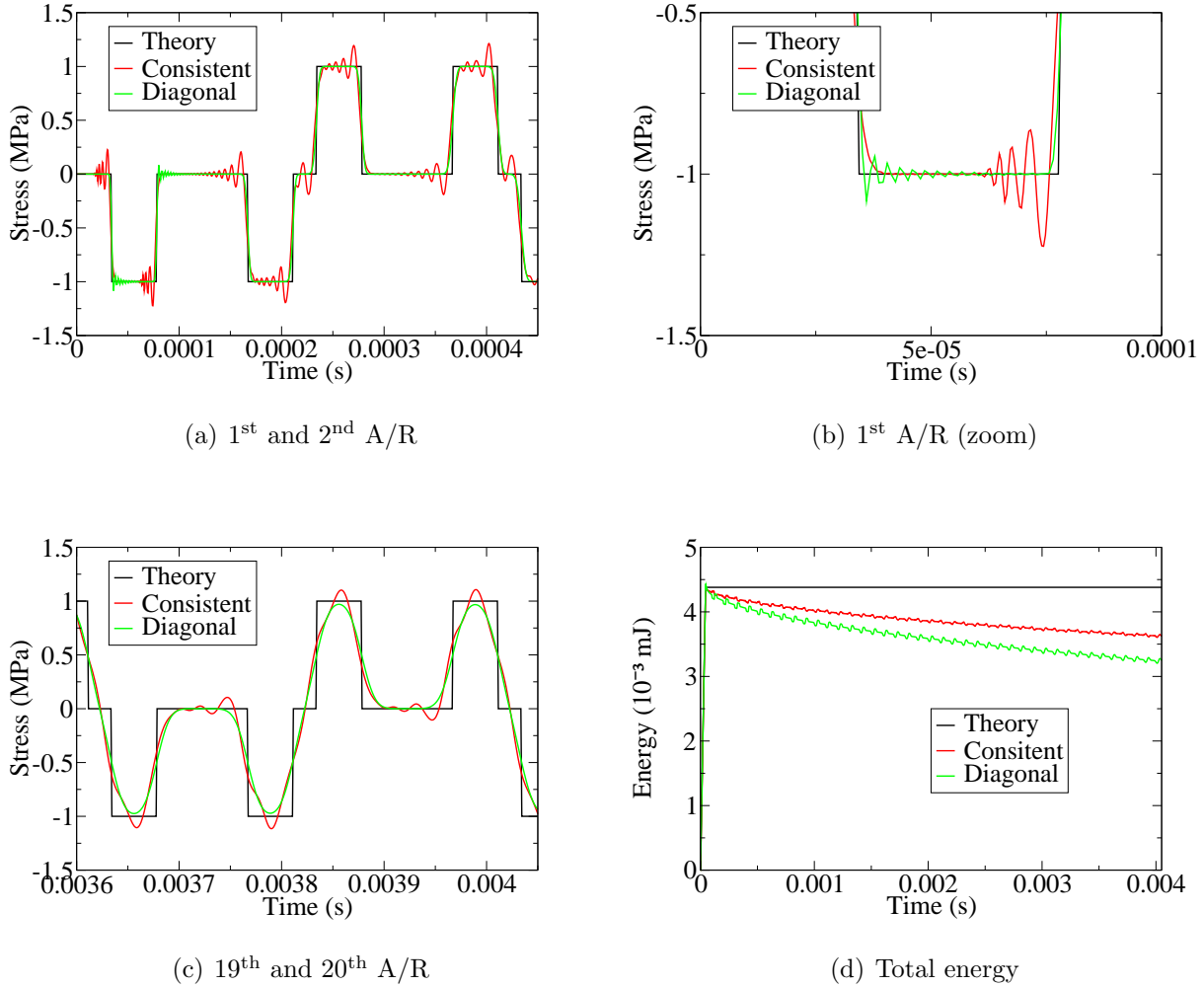


FIG. 4.28 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa pour différentes matrices masse

Observations :

L'utilisation d'un amortissement permet, quelque soit la matrice masse, de filtrer les hautes fréquences numériques. Ainsi, pour la matrice masse diagonale, toutes les oscillations sont atténuées en fonction de leur propre amplitude et pour la matrice masse consistante, seules, les oscillations de faible amplitude et de hautes fréquences ont été filtrées. Il subsiste les 3-4 oscillations d'amplitude croissante et de faibles fréquences. Après 19 A/R, ces oscillations demeurent mais ont été fortement modifiées : elles sont de faible amplitude et de très faibles fréquences.

On constate également sur la FIG. 4.28(d) un amortissement moindre lorsque l'on utilise une matrice masse consistante, justifiant sans doute la présence des oscillations résiduelles après 19 A/R (cf. FIG. 4.28(c)).

Bilan :

L'amortissement du schéma de Tchamwa dépend donc de la matrice masse utilisée pour le calcul. En effet, il ne lui est pas possible d'amortir efficacement les 3-4 oscillations de plus faibles fréquences qui demeurent tout au long du calcul.

Schéma de BonelliObservations :

Malgré un amortissement plus faible déjà observé dans les paragraphes précédents, le schéma de Bonelli se comporte de la même manière que celui de Tchamwa. Il permet de réduire considérablement les oscillations parasites avec l'utilisation d'une matrice masse diagonale et d'amortir complètement les premières oscillations parasites avec l'utilisation d'une matrice masse consistante. Il ne parvient pas non plus à éliminer efficacement les 3-4 oscillations de plus faibles fréquences qui demeurent tout au long du calcul.

La baisse de l'énergie est également plus importante pour une matrice masse diagonale.

Bilan :

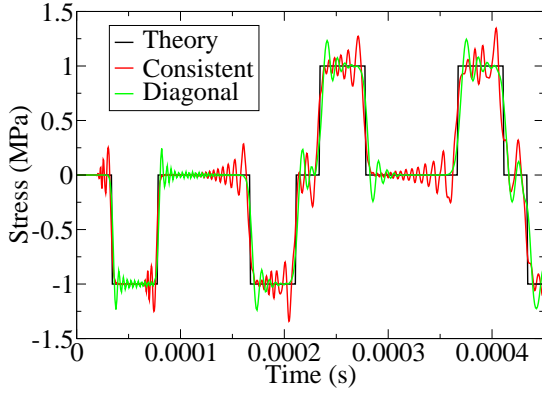
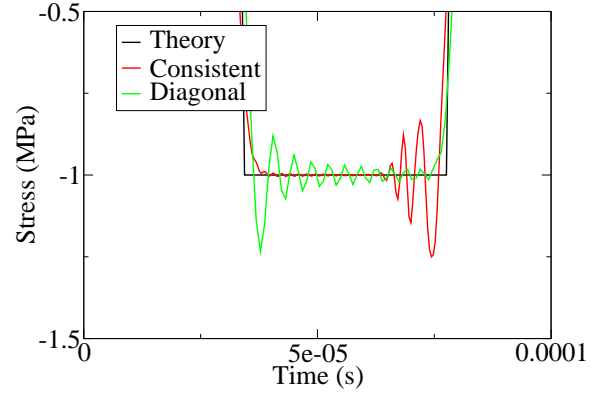
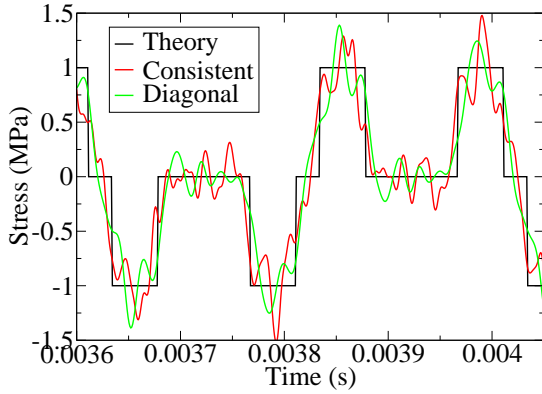
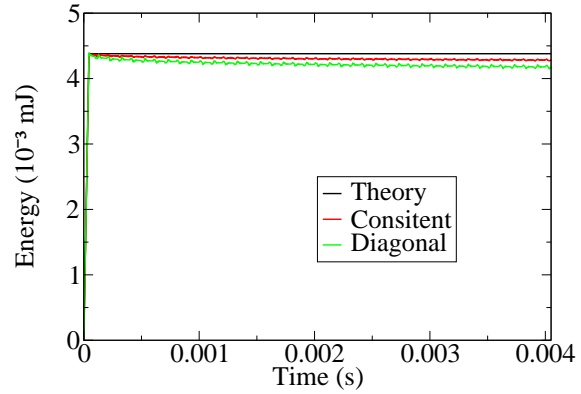
L'amortissement du schéma de Bonelli dépend aussi de la matrice masse utilisée pour le calcul.

Bulk-viscosityObservations :

Sur les FIG. 4.30(a) et 4.30(b), on constate les mêmes évolutions que pour le schéma de Tchamwa. Seules, les 3-4 oscillations de faibles fréquences sont présentes au premier A/R. En revanche, le Bulk-viscosity est parvenu à les amortir considérablement après 19 A/R (cf. FIG. 4.30(c)) montrant ainsi un amortissement plus efficace. Ceci se traduit également par une baisse de l'énergie totale dans le cas d'une matrice masse consistante quasi-identique à celle du cas d'une matrice masse diagonale (cf. FIG. 4.30(d)).

Bilan :

Comme pour les schémas d'intégration temporelle amortissants, le Bulk-viscosity ne parvient pas à amortir dès le début du calcul les 3-4 oscillations de *faibles* fréquences issues d'un calcul avec utilisation d'une matrice masse consistante. En revanche, il permet une réduction

(a) 1st and 2nd A/R(b) 1st A/R (zoom)(c) 19th and 20th A/R

(d) Total energy

FIG. 4.29 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Bonelli pour différentes matrices masse

plus rapide de l'amplitude de ces 3-4 oscillations assurant ainsi, à terme, un amortissement complet et quasi-identique des oscillations parasites, quelque soit la matrice masse utilisée.

Conclusion

Les remarques formulées au §4.2.1 concernant le choix de la matrice masse pour un calcul étaient fondées. On note des résultats différents pour un calcul effectué à partir d'une matrice masse consistante ou d'une matrice masse diagonale et ceci, quelque soit le schéma d'intégration temporelle utilisé. On relève également que les méthodes amortissantes ne se comporte pas de la même manière dans chacun des deux cas étudiés. Les schémas amortissent moins efficacement les oscillations parasites lorsqu'on fait intervenir une matrice masse consistante dans le calcul. Le Bulk-viscosity amortit aussi régulièrement quelque soit la matrice, même si les 3-4 oscillations caractéristiques d'une matrice masse consistante sont plus longues à amortir.

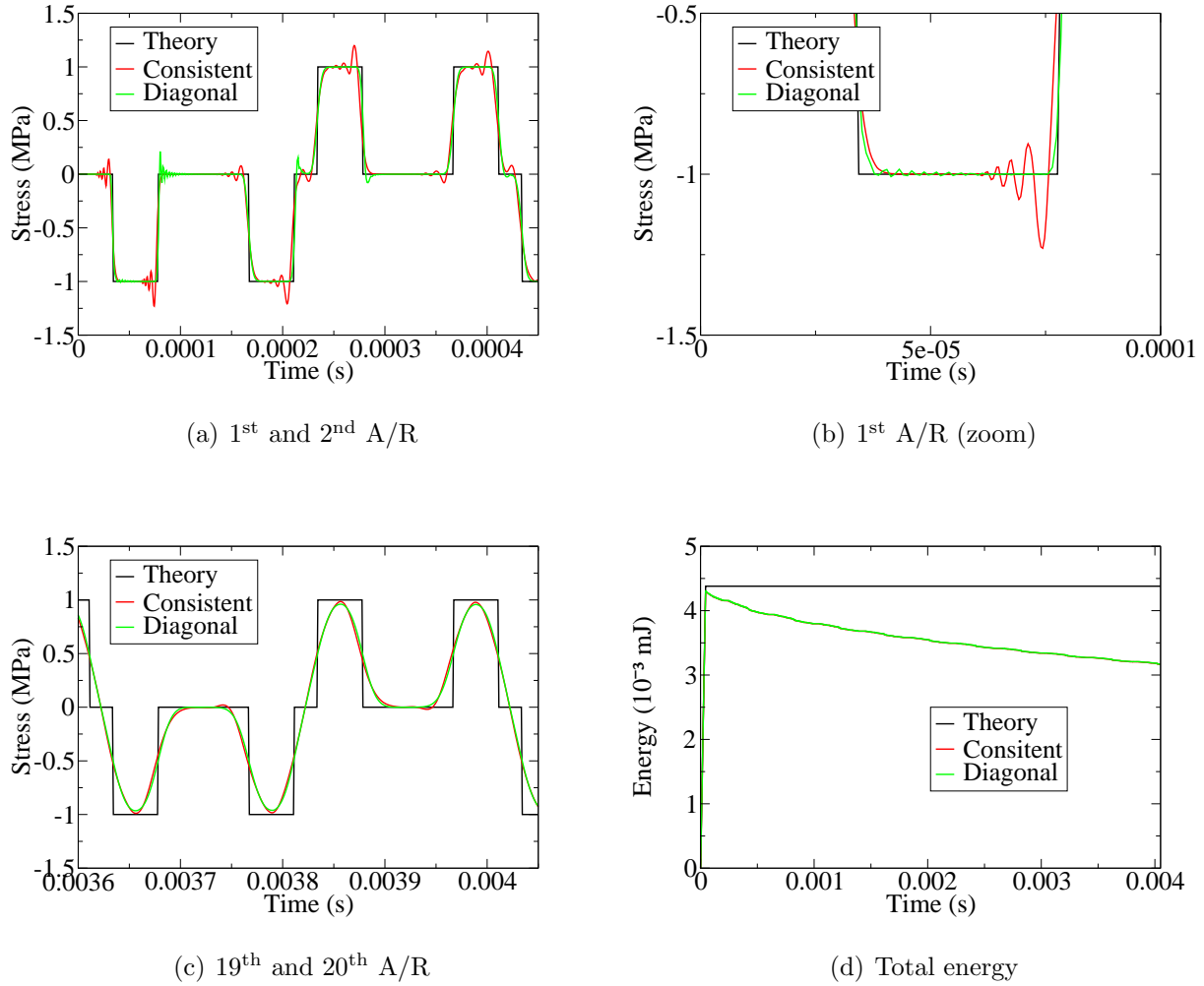


FIG. 4.30 – Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour différentes matrices masse

4.2.9 Conclusion

Les principales conclusions que l'on peut extraire de cette étude 1D sont les suivantes :

- Les schémas conservatifs d'ordre élevé, type Runge Kutta, ne permettent pas de s'affranchir des oscillations numériques parasites ; un amortissement est nécessaire pour lutter efficacement contre, montrant l'intérêt des méthodes dissipatives comme le bulk-viscosity ou le schéma explicite de Tchamwa.
- L'amortissement des schémas d'intégration temporelle dépend du pas de temps de calcul choisi et est donc limité en quelque sorte par la taille du plus petit élément de la structure. Le bulk-viscosity qui amortit les hautes fréquences numériques par l'ajout d'un terme de pression au tenseur des contraintes n'est pas concerné par cette limitation : son amortissement reste équivalent quelque soit le maillage utilisé.
- Les conditions aux limites du domaine spatial vont avoir une influence limitée sur la propagation de l'onde dans la barre. Chaque *discontinuité* géométrique va perturber très légèrement l'onde et générer de nouvelles oscillations numériques. L'utilisation d'un

schéma amortissant permet alors de s'affranchir complètement de ce problème.

- L'utilisation d'un chargement diminuant la proportion de hautes fréquences, comme préconisée dans la thèse de [Soive(2003)] permet dans un premier temps d'éviter l'apparition d'oscillations numériques parasites au début du calcul. Malgré l'introduction d'un signal *propre* au départ, cela n'empêche pourtant pas leur apparition progressive, après quelques milliers d'incrémentes.
- Le choix de la matrice masse conditionne le problème à étudier et entraîne des différences notables sur l'amortissement des hautes fréquences numériques. Même si [Schreyer(1983)] et [Krenk(2001)] notent qu'il est possible de diminuer ce phénomène dispersif lié au choix de la matrice masse en utilisant une matrice masse résultant de la combinaison des matrices masse consistante et diagonale, la plupart des logiciels de calcul n'utilisent pas cette possibilité. A contrario des schémas amortissants dont l'amortissement dépend du choix de la matrice masse, le Bulk-viscosity amortit les oscillations parasites aussi régulièrement pour une matrice masse consistante ou diagonale.

On a également pu constater que les méthodes amortissantes n'étaient pas parfaites pour s'approcher au plus près de la solution issue de la *théorie élémentaire*. En effet, pour amortir rapidement les hautes fréquences numériques au début du calcul, il est nécessaire d'utiliser une valeur importante du paramètre d'amortissement ($\varphi = 1.03$ pour Tchamwa et $C_1 = 0.06$ pour le Bulk-viscosity). Mais l'utilisation d'une valeur élevée du paramètre d'amortissement entraîne inexorablement une baisse continue du signal de contrainte qui s'éloigne alors de la solution 1D. Pour permettre un amortissement efficace au début du calcul et éviter ensuite le phénomène de trop forte atténuation, il est donc nécessaire de pouvoir régler l'amortissement au cours du calcul.

Nous nous proposons, dans la prochaine partie, d'étudier une nouvelle méthode assurant un pilotage de l'amortissement au cours du calcul. Cette méthode a été uniquement développée pour le schéma de Tchamwa mais elle aurait très bien pu être développée pour le Bulk-viscosity.

4.3 Pilotage de l'amortissement du schéma de Tchamwa

4.3.1 Introduction

Le schéma d'intégration temporelle de Tchamwa-Wielgosz développé à l'Ecole Centrale de Nantes, fait partie des schémas explicites amortissants qui ont suscité l'intérêt du [LG2M(2006)] dans l'amortissement des oscillations hautes fréquences depuis la thèse de [Soive(2003)]. Son étude en 1D a montré son efficacité amortissante mais a également fait apparaître ses limites d'utilisation. En effet, le paramètre d'amortissement doit être choisi suffisamment grand pour amortir les oscillations rapidement au début du calcul mais pas trop grand pour éviter une atténuation non-physique du signal au bout d'un certain temps. L'objectif de ce paragraphe est d'améliorer l'amortissement de manière à le cibler uniquement sur les moments durant lesquels les hautes fréquences sont présentes. Nous utiliserons le cas 1D, déjà présenté au §4.2, pour ces développements pour des raisons de facilité d'analyse des résultats. Nous rappelons les caractéristiques principales de ce cas 1D.

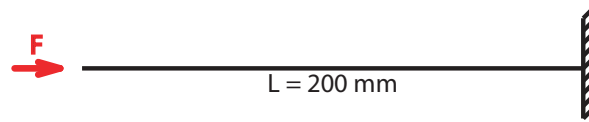


FIG. 4.31 – Description du problème

- Longueur $L = 200\text{mm}$, Section $S = 10\text{mm}$
- Module d'Young $E = 200\text{ GPa}$, Masse volumique $\rho = 5.0 \cdot 10^{-8} \text{ ton.mm}^{-3}$
- Célérité de l'onde $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2.0 \cdot 10^6 \text{ mm.s}^{-1}$, temps d'un A/R $t_{A/R} = \frac{2L}{c} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
- Pas de temps critique $h_c = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, Pas de temps de calcul $h = 90\% h_c = 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

4.3.2 Amortissement ciblé ou évolutif

Amortissement ciblé

Pour améliorer la compréhension du phénomène *d'apparition* et de *disparition* (ou plutôt d'amortissement) des hautes fréquences numériques, nous décidons tout d'abord d'utiliser une méthode d'amortissement en deux phases distinctes :

1. Phase 1 : Application d'un amortissement avec l'utilisation du paramètre $\varphi = 1.03$, pendant les premiers instants du calcul,
2. Phase 2 : Suppression de l'amortissement avec l'utilisation du paramètre $\varphi = 1.00$ (équivalent au schéma de CFD sans amortissement dans notre cas), jusqu'à la fin du calcul.

En effet, nous avons constaté, lors de l'étude du schéma de Tchamwa appliqué au cas 1D, que les oscillations parasites avaient complètement disparu après un certain nombre de pas de temps, posant la question naturelle de l'utilité de l'application d'un amortissement une fois que toutes les oscillations numériques ont disparu. Nous choisissons arbitrairement de fixer le temps d'arrêt de l'amortissement à $t_{amorti} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

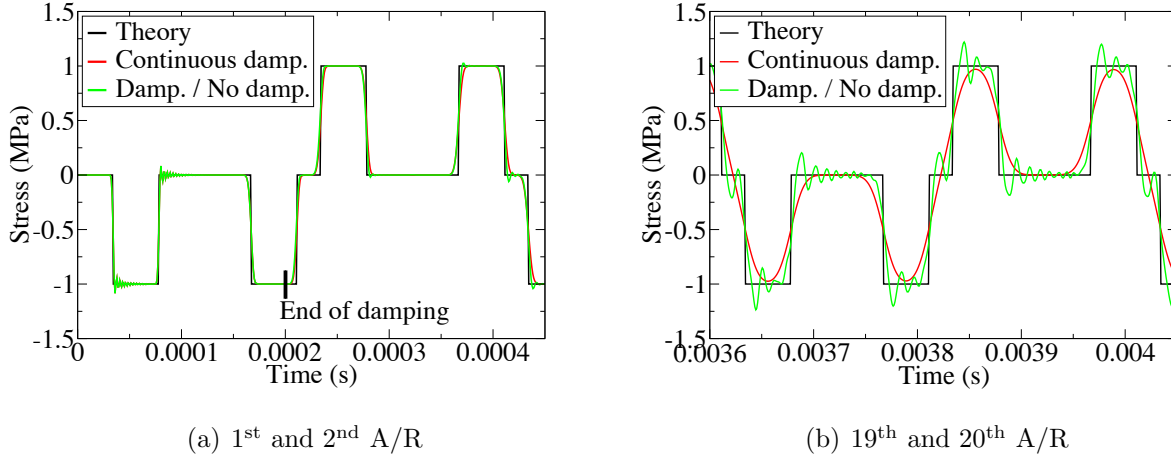


FIG. 4.32 – Evolution de la contrainte pour un amortissement ciblé sur le début du calcul

Observations :

On constate sur la FIG. 4.32(a) que les oscillations parasites ont disparu après avoir appliqué un amortissement ($\varphi = 1.03$) pendant $t_{amorti} = 2.0 \cdot 10^{-4} s$. Ensuite, si l'on supprime l'amortissement ($\varphi = 1.00$), après 19 A/R, des oscillations sont réapparues (cf. FIG. 4.32(b)). Il est intéressant de comparer ce signal de contrainte à l'amortissement ciblé à des signaux à l'amortissement permanent ou sans amortissement. On constate alors que le résultat de l'amortissement ciblé se situe exactement entre ces deux signaux en terme d'oscillations. L'évolution de l'énergie au cours du temps, non représentée ici confirme ce résultat.

Bilan :

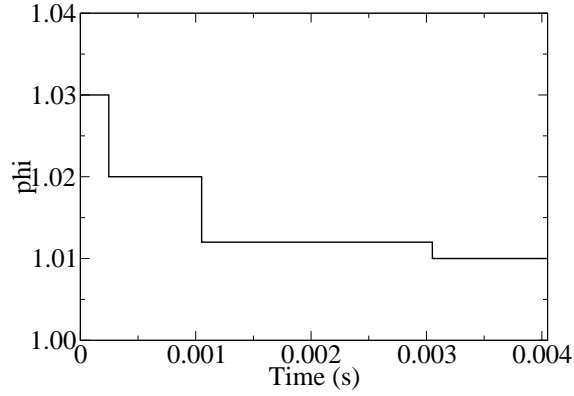
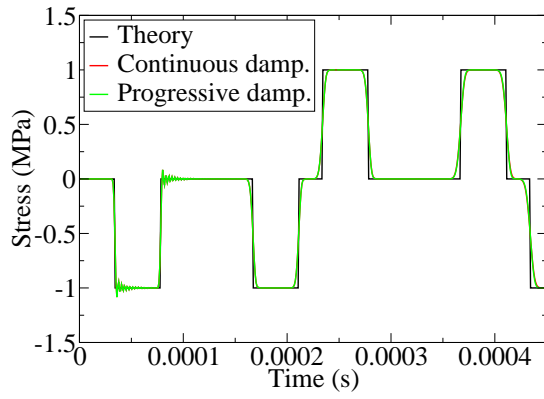
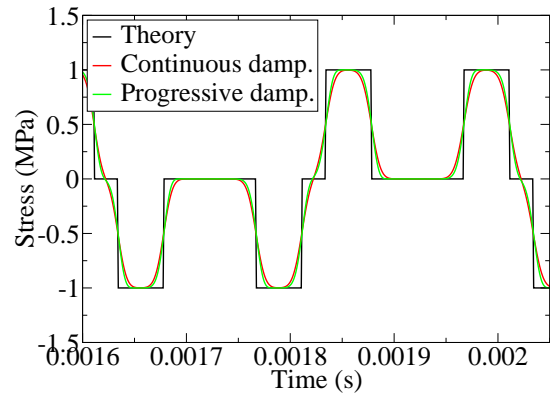
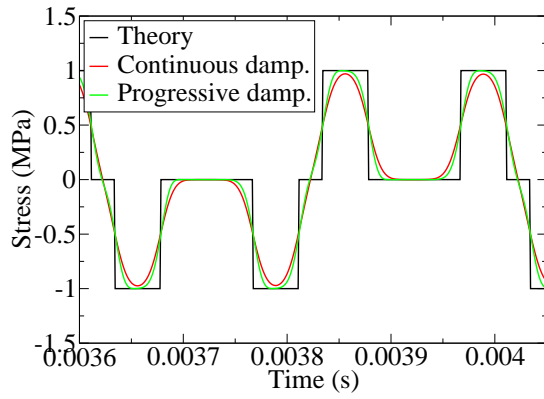
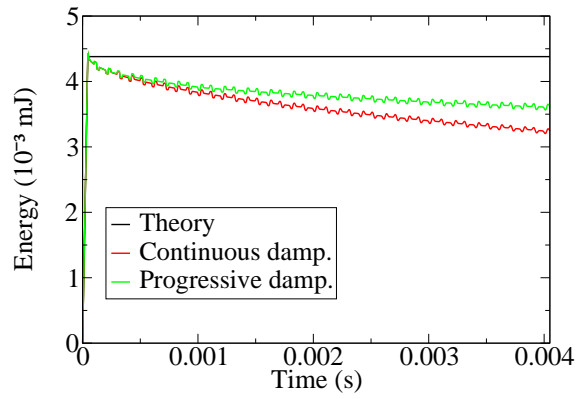
En conclusion, on constate que supprimer les oscillations au début du calcul n'est pas suffisant pour empêcher leur réapparition par la suite. Il est donc nécessaire d'appliquer un amortissement en permanence mais adapté à la quantité de hautes fréquences du système à l'instant t .

Amortissement évolutif

Pour contrecarrer la réapparition des oscillations parasites, nous décidons d'appliquer un paramètre d'amortissement évolutif au cours du calcul. Le changement de valeur du paramètre d'amortissement se fera *manuellement* et sera basé sur les observations du signal de contrainte. La valeur numérique en contrainte du créneau se déplaçant dans la barre est $\sigma_0 = 1N$. Grâce à l'observation de la contrainte au cours du temps, nous décidons de baisser arbitrairement le paramètre d'amortissement φ à chaque fois que le niveau de contrainte du créneau $\sigma_{creneau}$ passera sous la valeur numérique σ_0 . Nous représentons sur la FIG. 4.33 l'évolution du paramètre φ au cours du calcul, déduite par cette méthode.

Observations :

L'utilisation d'un paramètre $\varphi = 1.03$ a permis d'éliminer rapidement les oscillations parasites comme le montre la FIG. 4.34(a). Ensuite, le maintien d'un paramètre d'amortissement minimum a évité la réapparition de ces oscillations numériques (cf. FIG. 4.34(b)). La baisse progressive de φ a également permis de limiter l'amortissement trop important du signal.

FIG. 4.33 – Evolution de φ sur 20 A/R(a) 1st and 2nd A/R(b) 9th and 10th A/R(c) 19th and 20th A/R

(d) énergie totale du système pour les 20 A/R

FIG. 4.34 – Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif

Après 19 A/R, le niveau de contrainte du créneau est encore à $\sigma = 1N$ alors qu'en utilisant un amortissement permanent et fixe à $\varphi = 1.03$, le niveau de contrainte après 19 A/R n'est plus que de $\sigma = 0.96N$ (cf. FIG. 4.34(c)). La baisse d'énergie liée à l'amortissement est donc moins importante en utilisant un *pilotage manuel* du paramètre d'amortissement (cf. FIG. 4.34(d)).

Bilan :

Cette étape *manuelle* nous a permis de confirmer nos hypothèses concernant l'efficacité d'un amortissement permanent et adapté pour amortir les oscillations parasites dans la durée. Une étape *automatique* faisant appel à un amortissement piloté est nécessaire pour étendre le domaine d'application de cette méthode.

Conclusion

A travers ces deux études (amortissement ciblé et évolutif), on peut analyser plusieurs phénomènes :

- L'amortissement est nécessaire durant tout le calcul si l'on ne veut pas que les oscillations numériques réapparaissent. Les améliorations à suivre devront prendre obligatoirement en considération cet aspect.
- L'amortissement doit être évolutif si l'on désire limiter la dégradation du signal. En effet, l'amortissement qui agit comme une perturbation des quantités d'accélération aux noeuds (cf. définition du schéma de Tchamwa-Wielgosz §3.1.3) affecte sans discontinuer le signal en *l'érodant* de manière significative. Il faudrait donc amortir le phénomène plus judicieusement en ne ciblant que les hautes fréquences, et ceci, tout au long du calcul. Cela passe par la mise en place d'outils supplémentaires développés par la suite.

4.3.3 Amortissement piloté

Introduction

Le paragraphe précédent nous a permis d'orienter les améliorations à apporter au schéma d'intégration temporelle de Tchamwa-Wielgosz. Il est nécessaire, tout d'abord, de pouvoir gérer l'amortissement de chaque noeud d'une manière indépendante et ceci en fonction de *l'état* dans lequel se trouve chaque noeud : perturbé par des oscillations parasites ou subissant le passage d'une onde "physique". Un vecteur d'amortissement (φ) adapté à chaque noeud de la structure est alors défini. Ensuite, un pilotage de l'amortissement φ_i de chaque noeud i de la structure est nécessaire pour ne filtrer que les hautes fréquences numériques parasites. Pour cela, une fonction $\varphi_i = f(\text{observable})$ doit permettre à chaque *ddl* de connaître la valeur de son amortissement en fonction d'une observable que l'on choisira pour sa capacité à piloter l'amortissement.

Amortissement en fonction de chaque *ddl*

La première amélioration apportée au schéma d'intégration temporelle de Tchamwa-Wielgosz est l'utilisation d'un amortissement adapté à chaque *ddl* de la structure.

Initialement, le paramètre d'amortissement φ était le même pour tous les *ddl* de la structure, comme l'indique l'EQ. 4.4.

$$\begin{aligned} [M] (\ddot{q}_{n+1}) &= (\mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})) - (\mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})) \\ (\dot{q}_{n+1}) &= (\dot{q}_n) + h (\ddot{q}_n) \\ (q_{n+1}) &= (q_n) + h (\dot{q}_n) + h^2 \varphi (\ddot{q}_n) \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec la notation (...) représentant un vecteur et [...] représentant une matrice. Dorénavant, chaque *ddl* aura son propre amortissement grâce à la définition d'un nouveau vecteur (φ), indiqué sur l'EQ. 4.5.

$$\begin{aligned} [M] (\ddot{q}_{n+1}) &= (\mathcal{R}_{ext}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})) - (\mathcal{R}_{int}(\dot{q}_{n+1}, q_{n+1})) \\ (\dot{q}_{n+1}) &= (\dot{q}_n) + h (\ddot{q}_n) \\ (q_{n+1}) &= (q_n) + h (\dot{q}_n) + h^2 (\varphi) (\ddot{q}_n) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cette amélioration ne diffère de la formule initiale que lorsqu'une fonction $\varphi_i = f(observable)$ est définie car il est évident que les deux équations présentées auparavant sont équivalentes dans le cas contraire.

Utilisation de l'observable : accélérations nodales

Nous avons vu précédemment que les oscillations numériques se produisent particulièrement sur la vitesse nodale ou la contrainte. L'accélération semble donc naturellement indiquée pour détecter les périodes de fortes évolutions de la contrainte ou de la vitesse et donc les périodes où la filtration doit être appliquée. Utilisons le même chargement que le précédent : un créneau de force appliqué au noeud libre de la barre. Observons grâce à la FIG. 4.35 l'évolution de l'accélération nodale d'un noeud situé à l'extrémité libre de la barre.

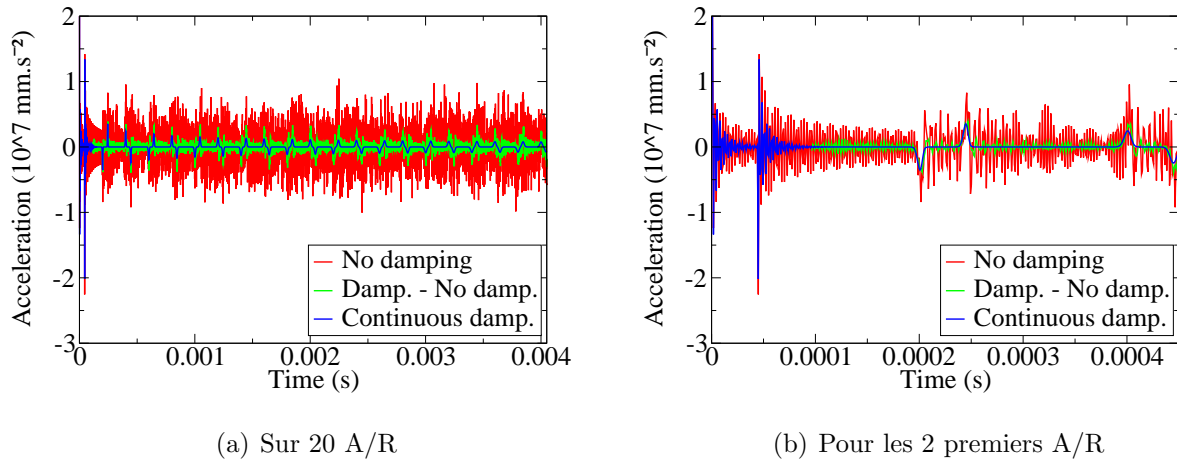


FIG. 4.35 – Evolution de l'accélération nodale pour le noeud libre

Observations :

On constate pour le schéma CFD (sans amortissement) qu'à chaque passage de l'onde, la valeur absolue de l'accélération du noeud libre est comprise dans l'intervalle

$[5.0 \cdot 10^6 ; 1.0 \cdot 10^7]mm.s^{-2}$. Or cette valeur est sensiblement la même lors de la présence d'oscillations numériques : $[2.0 \cdot 10^6 ; 8.0 \cdot 10^6]mm.s^{-2}$. En revanche, lorsque l'on regarde le signal issu du schéma de Tchamwa-Wielgosz ($\varphi = 1.03$), l'accélération nodale atteint rapidement une valeur nulle pour la période durant laquelle ont lieu les oscillations parasites.

Interprétation :

Malgré des accélérations sensiblement identiques lors du passage de l'onde ou de la présence d'oscillations parasites, le schéma amortissant parvient à éliminer les accélérations nodales issues des oscillations numériques et à laisser passer l'onde. Cela provient du fait que l'énergie contenue dans les oscillations parasites est beaucoup plus faible que celle contenue dans l'onde traversant la barre. Ainsi, le schéma amortissant qui dissipe constamment de l'énergie, aussi bien celle des oscillations parasites que celle de l'onde *physique*, parvient à annuler les accélérations nodales de faible énergie.

Si l'on se place dans le cas d'un amortissement actionné au début du calcul puis complètement relâché par la suite (cf. §4.3.2), les oscillations parasites éliminées durant la première phase d'amortissement réapparaissent comme on peut le voir sur la FIG. 4.35(b).

Bilan :

L'utilisation des accélérations nodales comme observable permettant le pilotage de l'amortissement est rendu difficile du fait de l'égalité des niveaux d'accélérations lors du passage de l'onde et lors de la présence d'oscillations parasites.

Utilisation de l'observable : vitesse moyenne sur quelques pas de temps

Sur les FIG. 4.35, on peut constater une différence de comportement entre les accélérations dues au passage de l'onde et celle dues aux oscillations parasites. Dans le premier cas, les accélérations évoluent constamment à la hausse pendant environ 20 h . En revanche, dans le second cas, l'accélération oscille d'un pas de temps à l'autre entre une valeur positive et une valeur négative. Si l'on calcule l'intégrale de l'accélération nodale (par la méthode des trapèzes) sur un petit nombre de pas de temps n , ce qui correspond en fait à une vitesse moyenne, il est possible de mettre en évidence le passage de l'onde et le différencier des oscillations. La nouvelle variable V_{moy} est définie ainsi :

$$V_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\gamma_{t_r} + \gamma_{t_r+h}}{2} \right) h \quad (4.6)$$

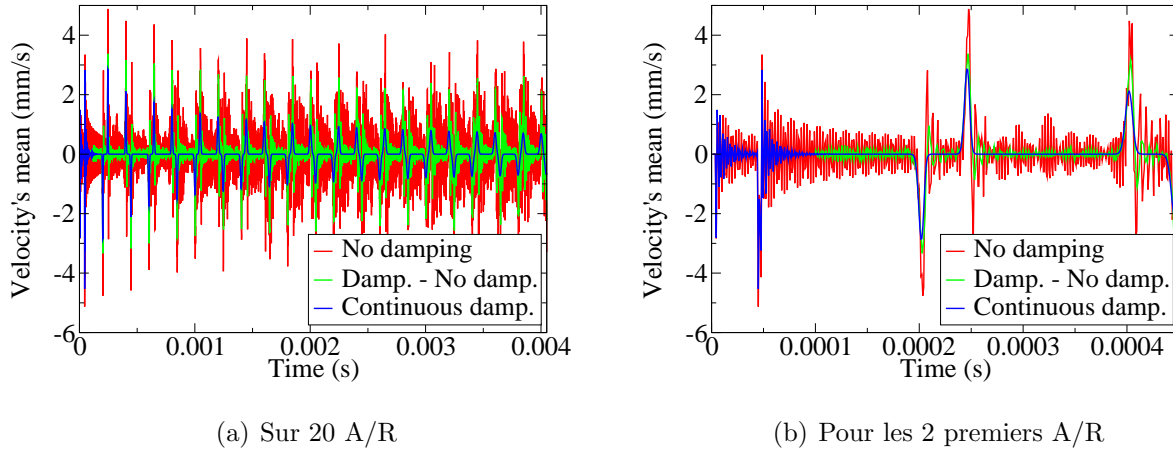
Sur les FIG. 4.36, on peut observer, pour le noeud libre, l'évolution de l'intégrale de l'accélération nodale sur 4 pas de temps, que l'on qualifiera de vitesse moyenne pour la suite du mémoire.

Observations :

On observe aisément sur les FIG. 4.36 le passage de l'onde matérialisé par un niveau plus élevé pour vitesse moyenne (aussi bien pour le schéma DFC que celui de Tchamwa). L'écart entre le niveau de vitesse moyenne pour le passage de l'onde et pour les oscillations parasites n'est certes pas très important (entre 2 à 3 fois plus élevé), mais il devrait néanmoins permettre un pilotage de l'amortissement.

Bilan :

L'observable décrite au dessus devrait permettre un pilotage efficace de l'amortissement car elle permet de bien différencier le passage de l'onde de celui d'oscillations numériques.

FIG. 4.36 – Evolution de la vitesse moyenne V_{moy} pour le noeud libre

Pilotage de l'amortissement par les vitesses moyennes et les accélérations

Le pilotage de l'amortissement est intégré dans le code de calcul Herezh[©] développé au [LG2M(2006)]. L'amortissement φ_i de chaque *ddl* i évolue en fonction de l'intégrale de la vitesse moyenne et l'accélération nodale de la manière suivante :

1. Si la vitesse moyenne est en dessous d'une certaine valeur val_{min} , on se trouve en présence d'oscillations parasites et un fort amortissement doit être appliqué. Cet amortissement sera également proportionnel au niveau de l'accélération du noeud .
2. En revanche, si cette vitesse moyenne est située au dessus d'une certaine valeur val_{max} , on se trouve en présence de l'onde et un amortissement le plus faible possible doit être appliqué.
3. Si V_{moy} est située entre les valeurs val_{min} et val_{max} , une courbe $\varphi_i = f(\gamma_i)$ est définie par l'utilisateur et permet de piloter le paramètre d'amortissement nodal φ_i en fonction du niveau de l'accélération nodale γ_i .

Les FIG. 4.37 résument d'une manière graphique comment est appliqué le pilotage de l'amortissement en fonction de différents cas.

L'utilisateur possède ainsi plusieurs paramètres pour mettre en place le pilotage :

- un paramètre φ qui indique la valeur maximale de l'amortissement utilisé pour le calcul
- un paramètre n qui indique le nombre de pas de temps h sur lesquels est effectuée le calcul de la vitesse moyenne
- un paramètre val_{min} qui indique la valeur de la vitesse moyenne au dessous de laquelle l'amortissement appliqué est maximale et proportionnel à l'accélération nodale
- un paramètre val_{max} qui indique la valeur de la vitesse moyenne au dessus de laquelle l'amortissement est nul
- les paramètres réglant la courbe $\varphi_i = f(\gamma_i)$. Dans notre cas, nous n'utiliserons que deux paramètres a et b définissant une courbe décomposée en trois parties comme le montre la FIG. 4.37(b)

Finalement on peut résumer l'évolution de l'amortissement en fonction de la vitesse moyenne et de l'accélération nodale par la FIG. 4.38.

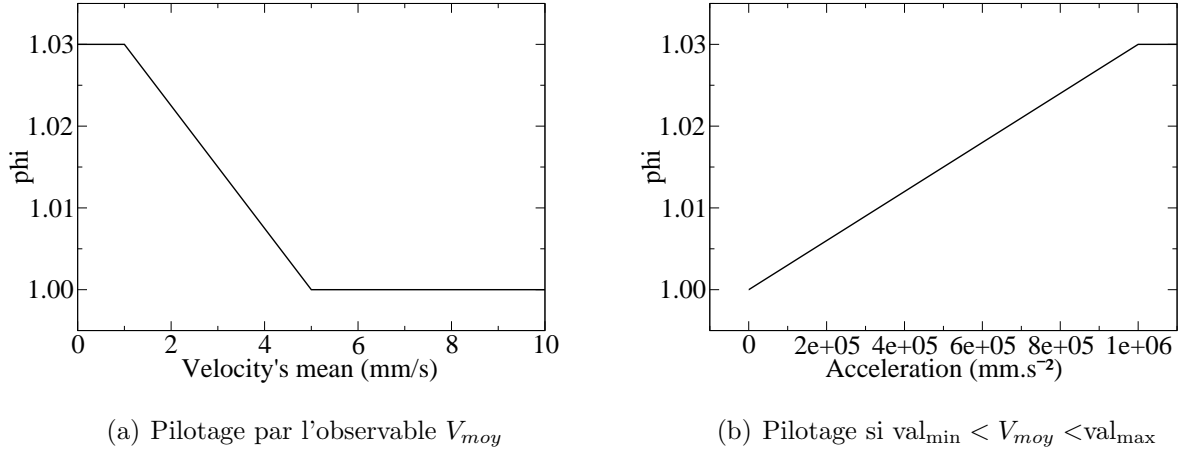


FIG. 4.37 – Pilotage de l'amortissement

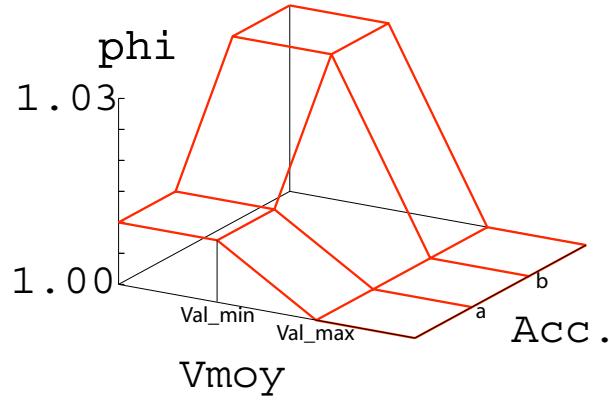


FIG. 4.38 – Evolution de l'amortissement en fonction des paramètres

Résultats

La description géométrique définie au §4.2 est utilisée pour discuter de l'efficacité du pilotage. Après plusieurs calculs effectués en faisant varier les paramètres du pilotage, nous présentons sur la FIG. 4.41 les meilleurs résultats obtenus grâce aux paramètres suivants : $\varphi = 1.03$, $val_{min} = 2$, $val_{max} = 3$, $a = 100$ et $b = 1.5 \cdot 10^6$.

Observations :

Sur la FIG. 4.41, nous présentons les résultats en contrainte dans un élément situé à $67mm$ du point d'impact pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz avec les paramètres $\varphi = 1.03$, $\varphi = 1.015$ et avec pilotage automatique. Sur la FIG. 4.39(a) et surtout la FIG. 4.39(b), nous constatons que les oscillations parasites sont filtrées lorsqu'est utilisé l'amortissement piloté. Quelques détails sont néanmoins à remarquer :

- l'amortissement obtenu par pilotage est aussi important qu'un amortissement continûment appliqué de $\varphi = 1.03$ sur la première oscillation du premier créneau, i.e. au tout début du passage de l'onde.
- il connaît des difficultés à amortir totalement les oscillations car après 20 oscillations

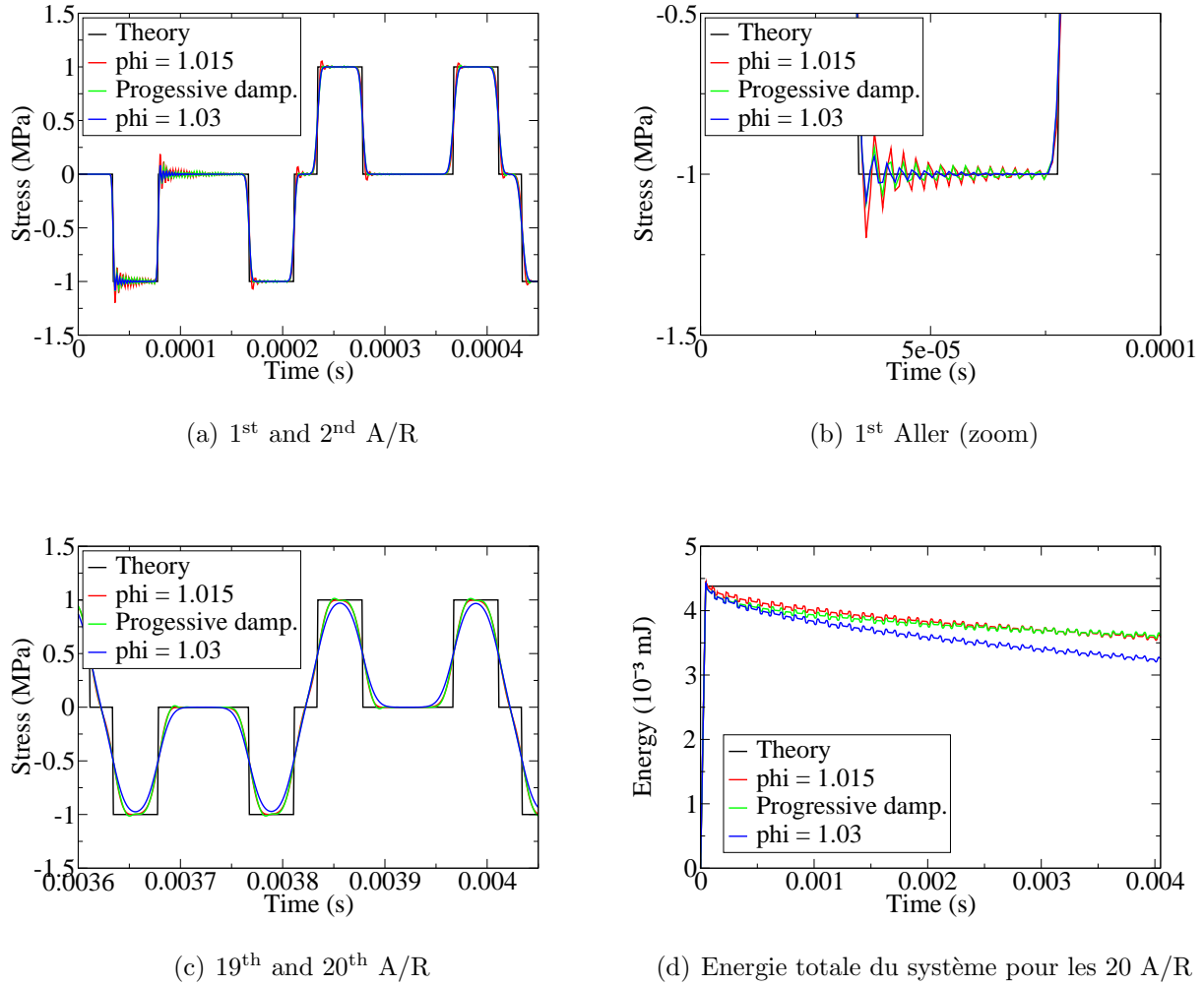


FIG. 4.39 – Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif

sur le premier créneau, il est identique à un amortissement constamment appliqué de $\varphi = 1.015$.

Après 19 A/R (cf. FIG. 4.39(c)), le signal s'est moins dégradé que celui de $\varphi = 1.03$ et reste du même ordre que celui de $\varphi = 1.015$. Concernant l'énergie totale du système, elle décroît rapidement au début du calcul pour φ piloté de manière à amortir rapidement les hautes fréquences numériques. Puis la baisse énergétique est contrôlée grâce au pilotage de φ pour empêcher une atténuation trop forte du signal. Elle reste néanmoins inférieure de 1.7% par rapport à $\varphi = 1.015$ après 20 A/R.

Bilan :

Ce pilotage de l'amortissement permet ainsi d'amortir les hautes fréquences numériques sans *éroder* trop fortement le signal après quelques milliers de pas de temps. On peut s'en rendre compte en laissant le calcul se poursuivre et en observant les résultats en contrainte et en énergie après 10ms, soit après une propagation de 20m ou 10000 h. La FIG. 4.42 présente les résultats en contrainte et en énergie.

Grâce à la FIG. 4.42, on constate une nette amélioration de la perte d'énergie au cours

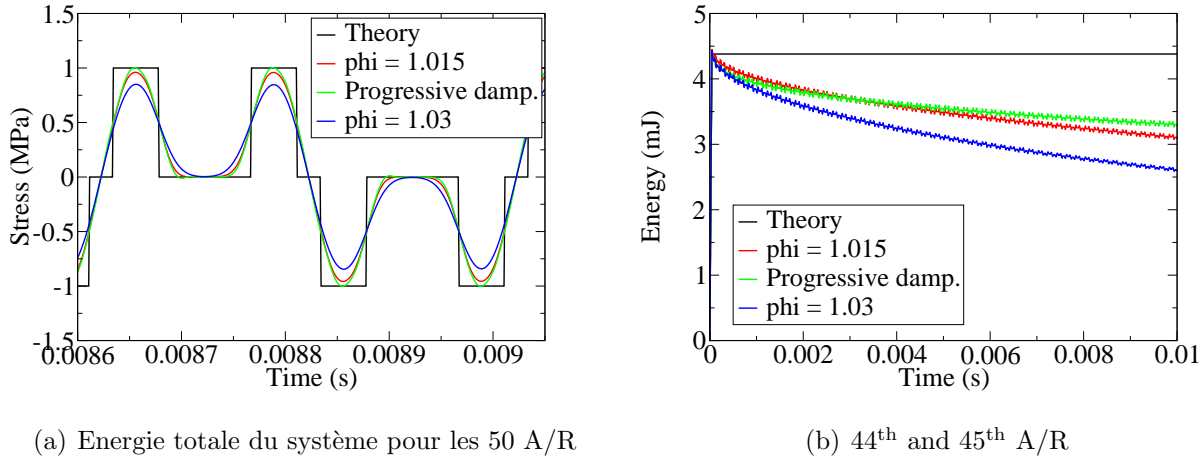


FIG. 4.40 – Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif

d'un calcul utilisant un pilotage de l'amortissement. Le tableau 4.2 montre les résultats pour un schéma de Tchamwa Wielgosz utilisant un paramètre $\varphi = 1.03$, $\varphi = 1.015$ et $\varphi = \text{piloté}$.

Nombre d'A/R	$\varphi = 1.03$	$\varphi = 1.015$	$\varphi = \text{piloté}$
10	80.9%	86.3%	85.4%
20	73.0%	80.9%	81.3%
50	58.8%	69.9%	74.4%

TAB. 4.2 – Evolution de l'énergie restante pour plusieurs paramètres d'amortissement

La diminution de l'énergie totale du système se fait de manière plus progressive pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz piloté.

Influence et détermination des paramètres φ , n , val_{\min} , val_{\max} , a et b

Le paramètre φ concerne l'amortissement maximal appliqué sur la structure. Suite à l'étude du schéma de Tchamwa-Wielgosz au §3.1.3, il est prudent de ne pas affecter à φ une valeur trop importante, ceci pour éviter de diminuer la précision du calcul. [Soive(2003)] préconise un $\varphi_{\max} = 1.03$ que nous adopterons.

Le paramètre n concerne le nombre de pas de temps utilisés pour calculer la moyenne des accélérations. Ce paramètre n doit faire en sorte que la moyenne des accélérations issues des oscillations numériques tende le plus possible vers 0 et que la moyenne des accélérations issues de l'onde soit le plus différent possible de 0 de manière à faire ressortir l'onde des oscillations parasites. Fixé arbitrairement à 4, comme dans le cas précédent, il peut être choisi comme le nombre de pas de temps de la période maximale des oscillations numériques.

Les paramètres val_{\min} et val_{\max} concernent les bornes de filtrage des vitesses moyennes. Ces bornes sont déterminées grâce à la FIG. 4.36(b).

val_{\min} peut être choisi comme l'amplitude maximale d'une oscillation parasite pour le schéma de DFC lors du premier Aller. Les vitesses moyennes situées sous cette valeur seront

amorties le plus fortement possible et en fonction de l'accélération nodale de chaque noeud. On peut observer sur la FIG. 4.41(a) l'influence de ce paramètre qui reste limitée si on utilise une valeur restant cohérente avec les vitesses moyennes observées (sur un intervalle $[0; 5]$). Ici les valeurs testées pour val_{\min} sont : 0.1, 2.0 et 4.0 (avec 2.0 la valeur qui nous permet d'obtenir les meilleurs résultats).

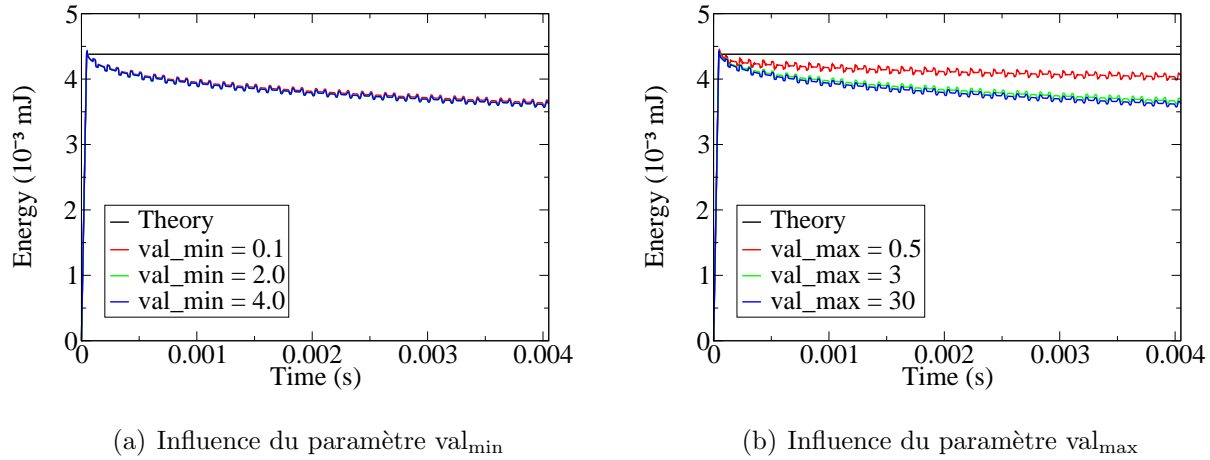


FIG. 4.41 – Energie totale

val_{\max} peut être choisi comme l'amplitude maximale de l'onde pour le schéma de DFC lors du premier Aller. Les vitesses moyennes situées au dessus de cette valeur ne seront jamais amorties. On peut observer sur la FIG. 4.41(b), l'influence non négligeable de ce paramètre si on utilise une valeur de val_{\max} étant égale à 0.5, 3.0 ou 30.0 (avec 3.0 la valeur qui nous permet d'obtenir les meilleurs résultats). On constate que prendre une valeur trop basse pour val_{\max} (en l'occurrence 0.5) ne permet pas d'effectuer un amortissement efficace. En revanche, à partir d'une certaine valeur, la perte d'énergie totale n'évolue guère, que l'on prenne des valeurs val_{\max} à 3.0 ou 30.0. De plus on constate sur les FIG. 4.42(a) et 4.42(b) que le paramètre val_{\max} permet de régler l'intensité de l'amortissement tout au long du calcul. Lorsque le paramètre est trop faible ($\text{val}_{\max} = 0.5$), un *overshoot* apparut au début du calcul persistera après 20 A/R.

Les paramètres a et b concernent les bornes de filtrage des accélérations dans le cas où la vitesse moyenne est inférieure à val_{\max} précédemment définie. Dans ce cas, l'amortissement appliqué sera proportionnel à l'accélération nodale. Ces deux paramètres sont extrêmement importants car ils vont permettre de régler le problème de réapparition des oscillations parasites au cours du calcul.

a entraîne très peu d'influence lorsque la valeur choisie est suffisamment basse. Sur la FIG. 4.43(a) on teste les valeurs de 0, $1.0 \cdot 10^2$, $1.0 \cdot 10^5$ et $1.0 \cdot 10^6$ pour a . On constate qu'entre 0 et $1.0 \cdot 10^5$, aucune différence n'est observée. En revanche, lorsque l'on se rapproche de la valeur b fixée arbitrairement à $1.5 \cdot 10^5$, la perte d'énergie totale est moins importante traduisant une moins bonne efficacité au bout de 50 A/R. En définitive, il faut choisir le paramètre a suffisamment bas pour n'observer aucune influence sur les résultats.

b est très sensible suivant la valeur qu'on lui affecte et pas forcément évident à déterminer. La FIG. 4.43(b) montre son influence lorsqu'on lui affecte la valeur $1.0 \cdot 10^5$, $1.5 \cdot 10^6$,

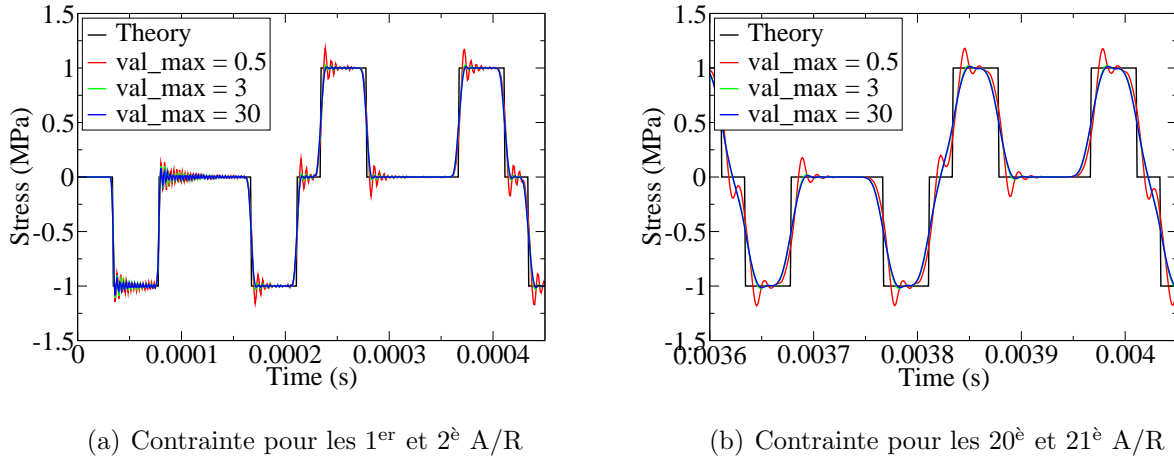
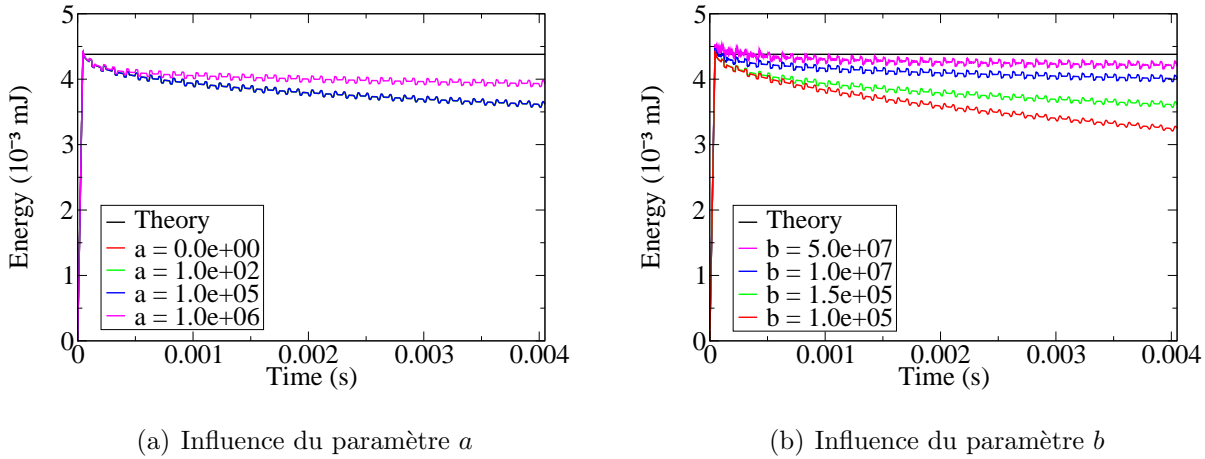
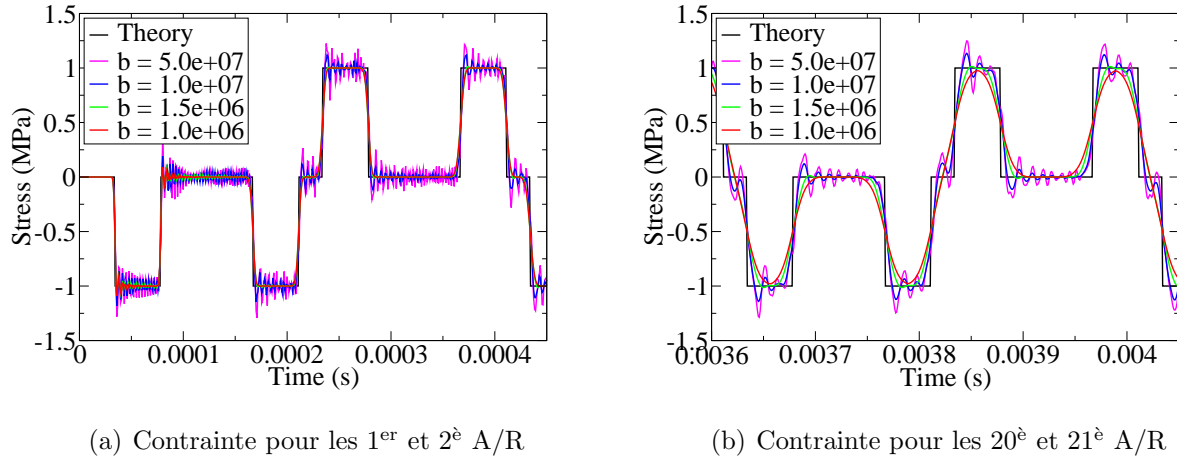
FIG. 4.42 – Influence du paramètre val_{max} 

FIG. 4.43 – Energie totale

$1.0 \cdot 10^7$ ou $5.0 \cdot 10^7$. On constate que les résultats des valeurs $b = 1.0 \cdot 10^5$ et $b = 1.5 \cdot 10^6$ sont confondues et évitent l'apparition des oscillations parasites (cf. FIG. 4.44(a) et 4.44(b)). En revanche lorsque le paramètre b est choisi trop haut (en l'occurrence $1.0 \cdot 10^7$ puis $5.0 \cdot 10^7$), l'amortissement est moins efficace, c'est-à-dire que la perte d'énergie est moins importante et les oscillations parasites sont présentes comme le montrent les figures traitant de l'évolution de la contrainte.

Finalement, à la question *Quelle est la valeur des paramètres qu'il faut choisir ?*, on peut répondre ceci :

- $\varphi = 1.03$ au maximum, pour éviter une perte de précision du calcul
- n doit être de l'ordre de grandeur du nombre de pas de temps de la période des oscillations parasites caractéristiques.
- val_{min} peut être choisi comme l'amplitude maximale d'une oscillation parasite pour le schéma de DFC lors du premier Aller (en début de chargement).

FIG. 4.44 – Influence du paramètre b

- val_{\max} peut être choisi comme l'amplitude maximale de l'onde pour le schéma de DFC lors du premier Aller
- a peut être choisi égal à 0
- b est le paramètre le plus difficile à déterminer et doit être de l'ordre de grandeur des accélérations provenant des oscillations parasites

4.3.4 Amortissement piloté sur un maillage aléatoire 1D

L'étude du pilotage de l'amortissement a été menée jusqu'à présent sur un maillage homogène d'une barre 1D pour permettre de déterminer les différents paramètres du pilotage. Poursuivons l'étude en analysant les résultats obtenus sur un maillage aléatoire de cette barre 1D. En effet, nous indiquions au §4.2.5 qu'une solution pour diminuer la sensibilité au maillage pouvait être l'utilisation d'un amortissement propre à chaque noeud de la structure en fonction de son *état bruité ou non*. Pour cela, reprenons les maillages aléatoires faiblement et fortement perturbés détaillés au §4.2.5, pour lesquels la taille de maille moyenne (Longueur de la barre / Nombre d'éléments) reste la même. Nous rappelons leurs principales caractéristiques dimensionnelles :

1. Maillage faiblement perturbé :
 - Longueur du plus petit élément : $L_1 \simeq 1.62mm$
 - Pas de temps critique $h_c = 0.81 \cdot 10^{-6}s$
 - Pas de temps de calcul $h = 0.9 h_c = 0.729 \cdot 10^{-6}s$.
2. Maillage fortement perturbé :
 - Longueur du plus petit élément : $L_2 \simeq 0.33mm$
 - Pas de temps critique $h_c = 0.165 \cdot 10^{-6}s$
 - Pas de temps de calcul $h = 0.9 h_c = 0.1485 \cdot 10^{-6}s$.

Maillage faiblement perturbé

Pour commencer, appliquons la méthodologie précédente nous permettant la détermination des paramètres de pilotage. Pour cela, utilisons les courbes traitant de l'évolution de la vitesse moyenne effectuée sur 4 pas de temps ($n = 4$) à la FIG. 4.45 et celle de l'accélération à la FIG. 4.46. Ces valeurs nodales sont issues du noeud se situant à l'extrémité libre de la barre et étant de surcroît le noeud auquel la plus petite masse est rattachée.

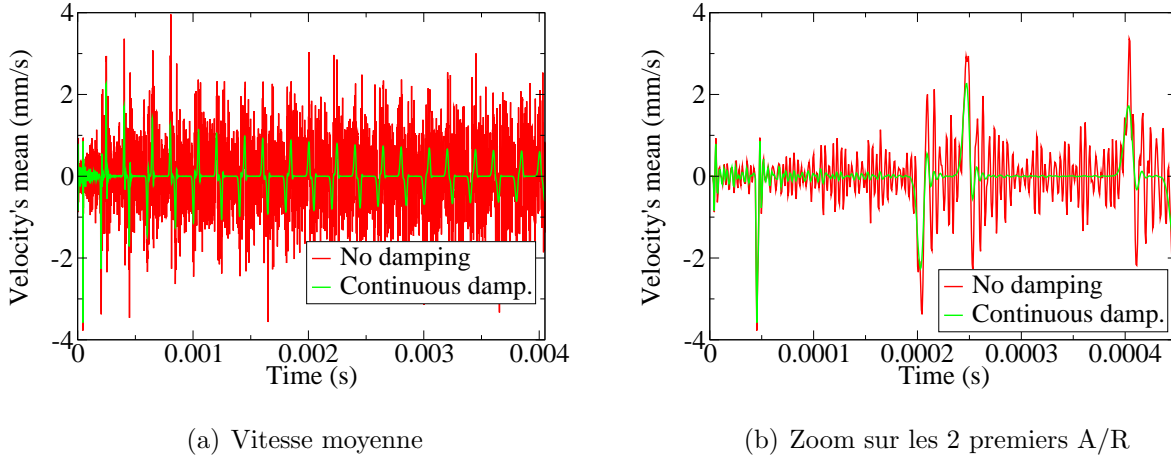


FIG. 4.45 – Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage faiblement perturbé

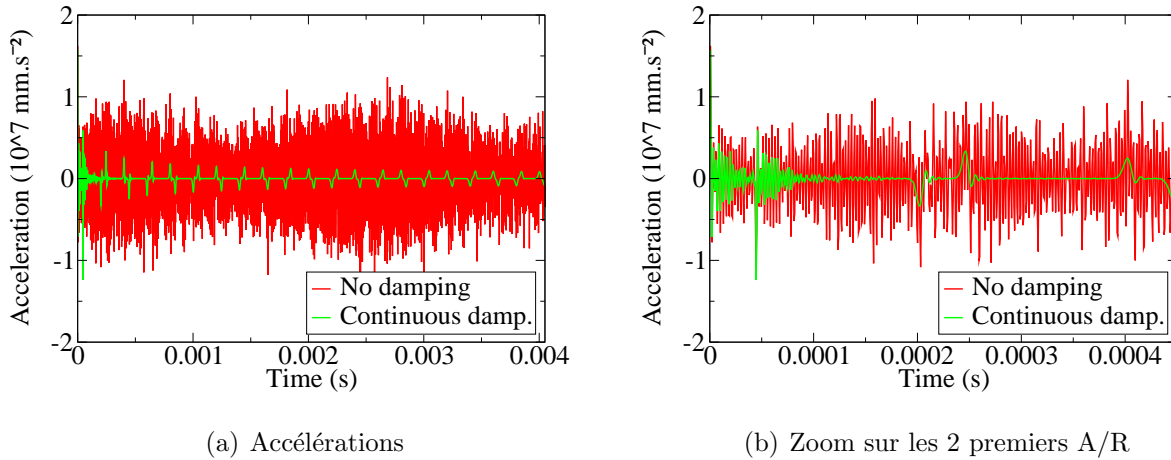


FIG. 4.46 – Evolution des accélérations pour le maillage faiblement perturbé

On constate finalement que les deux observables sont du même ordre de grandeur que celles du maillage homogène : les vitesses moyennes sont comprises dans l'intervalle $[-4; 4]$ et les accélérations dans l'intervalle $[-1.5 \cdot 10^7; 1.5 \cdot 10^7]$. On distingue bien le passage de l'onde à la présence d'oscillations parasites sur les premiers A/R. Pour ces raisons, nous décidons d'utiliser les paramètres du pilotage déterminés précédemment pour ensuite les comparer

aux méthodes traditionnelles de DFC et de Tchamwa-Wielgosz ($\varphi = 1.03$). Les résultats sont présentés sur la FIG. 4.47.

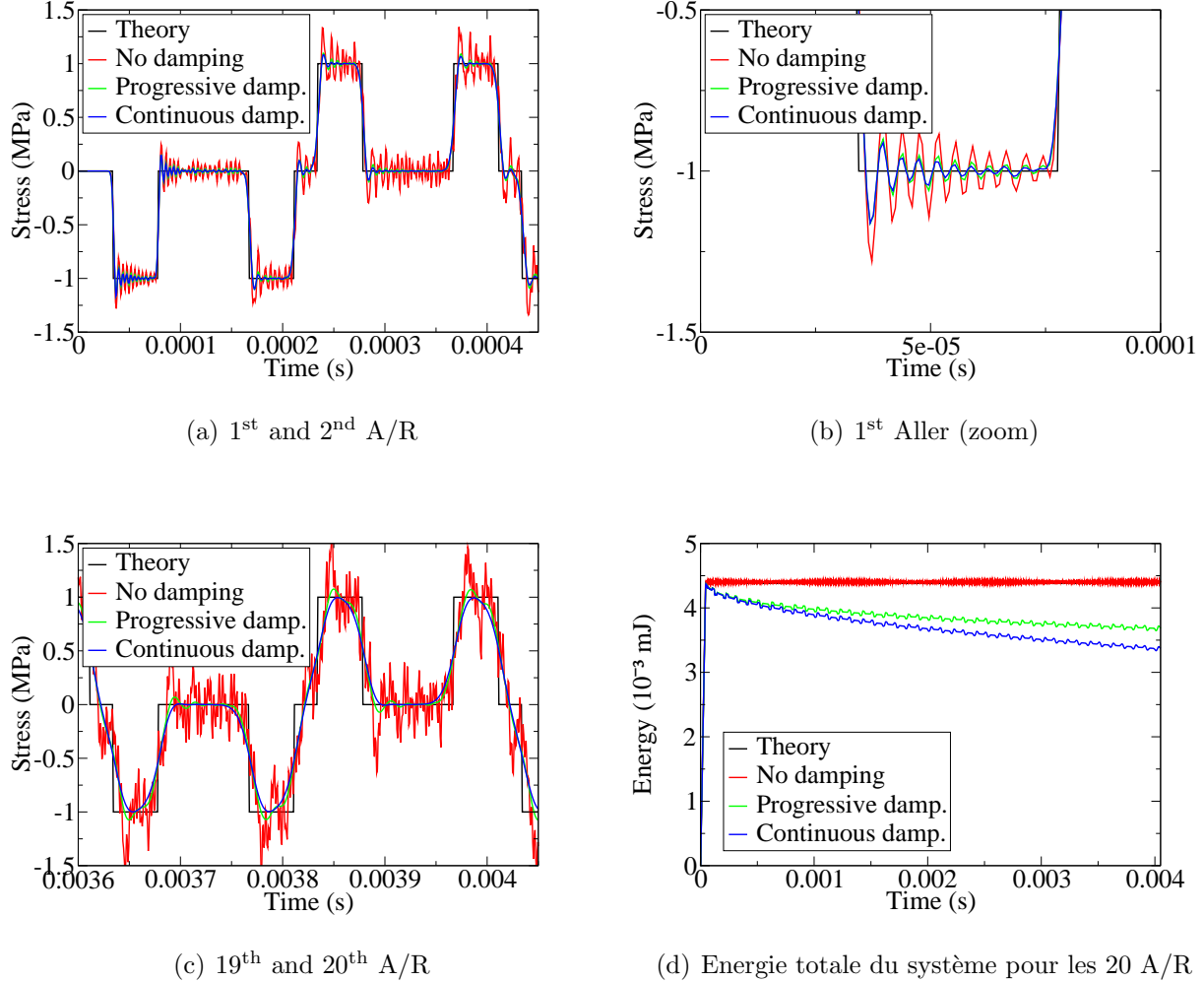


FIG. 4.47 – Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif

Sur la FIG. 4.47(b), on observe l'amortissement quasi-similaire entre le schéma de Tchamwa-Wielgosz piloté et celui à amortissement constant ($\varphi = 1.03$) pour le début du calcul. Au bout de 20 A/R (cf. FIG. 4.47(c)), les résultats en contrainte du schéma à amortissement piloté laisse apparaître des oscillations de faible amplitude et de fréquence 10 fois moins importante que pour les oscillations parasites. Le schéma à amortissement non piloté permet d'obtenir des résultats plus amortis où aucune de ces oscillations de faible fréquence n'apparaît. L'évolution de l'amortissement peut être observé grâce à la FIG. 4.47(d) décrivant l'évolution de l'énergie totale du système au cours du temps. Sur cette dernière figure, on remarque l'amortissement important, au tout début du calcul, du schéma à amortissement piloté puis le *relâchement* de l'amortissement au fur et à mesure ce qui évite une perte d'énergie trop importante.

Le TAB. 4.3 compare les principaux résultats obtenus en utilisant un maillage homogène ou faiblement perturbé. On montre clairement que l'amortissement piloté sur le maillage

perturbé est moins efficace que sur le maillage homogène tout au long du calcul. On constate aussi que les *over-shoot* de contrainte observés lors du passage de l'onde sont plus importants pour un maillage perturbé, confirmant une efficacité moindre de l'amortissement des hautes fréquences numériques.

Observable	Maillage homogène	Maillage faiblement perturbé
Energie après 2 A/R	4.096mJ	4.129mJ
Ecart avec la théorie	(92.3%)	(93.0%)
Energie après 20 A/R	3.616mJ	3.686mJ
Ecart avec la théorie	(81.5%)	(83.1%)
Energie après 50 A/R	3.302mJ	3.339mJ
Ecart avec la théorie	(74.4%)	(75.2%)
Contrainte après 2 A/R	1.0139MPa	1.0901MPa
Ecart avec la théorie	(1.39%)	(9.01%)
Contrainte après 20 A/R	1.018MPa	1.0710MPa
Ecart avec la théorie	(1.38%)	(7.10%)

TAB. 4.3 – Comparaison maillage homogène / maillage faiblement perturbé

Bilan :

Une des conclusions énoncées au §4.2.5 traitant de l'influence du maillage était la diminution de l'efficacité de l'amortissement pour des maillages perturbés. Il est donc normal de retrouver ce phénomène lors de cette étude sur l'amortissement piloté. Malgré cet effet, on parvient à obtenir des résultats avec un amortissement piloté tout à fait conformes à nos attentes assurant un amortissement important au début du calcul puis maîtrisé par la suite. Il sera intéressant d'observer si on arrive aux mêmes conclusions avec un maillage fortement perturbé.

Maillage fortement perturbé

Comme pour le cas précédent, observons sur les FIG. 4.48 et 4.49 les observables au noeud libre de la barre (noeud 1) permettant de piloter l'amortissement. On remarque tout d'abord sur la FIG. 4.48 que la vitesse moyenne ne permet plus de distinguer le passage de l'onde de la présence d'oscillations numériques parasites. En effet, la masse du noeud à l'extrémité libre étant faible devant celle de son voisin, le noeud auquel est rattachée la masse la plus faible aura une tendance évidente à osciller sans arrêt comme le montre la FIG. 4.49.

En revanche, si on observe l'évolution de la vitesse moyenne calculée au noeud auquel est rattachée la masse la plus importante (noeud 79), on peut observer sur la FIG. 4.50 que ce noeud oscille sur une fréquence plus basse que celui situé à l'extrémité libre de la barre. Il est aussi relativement plus facile de déduire du graphe le passage de l'onde.

Ainsi, le comportement des noeuds du maillage va dépendre énormément de la masse qui leur est affectée. Il est alors intéressant de connaître quelle va être l'influence de ce comportement nodal sur les résultats de calcul d'un amortissement piloté en utilisant les mêmes paramètres de pilotage. La FIG. 4.51 montrent les résultats.

On remarque sur les FIG. 4.51(a) et 4.51(b) que, dès le début du calcul, des oscillations d'une fréquence plus faible que celles issues des oscillations parasites sont observées quelque

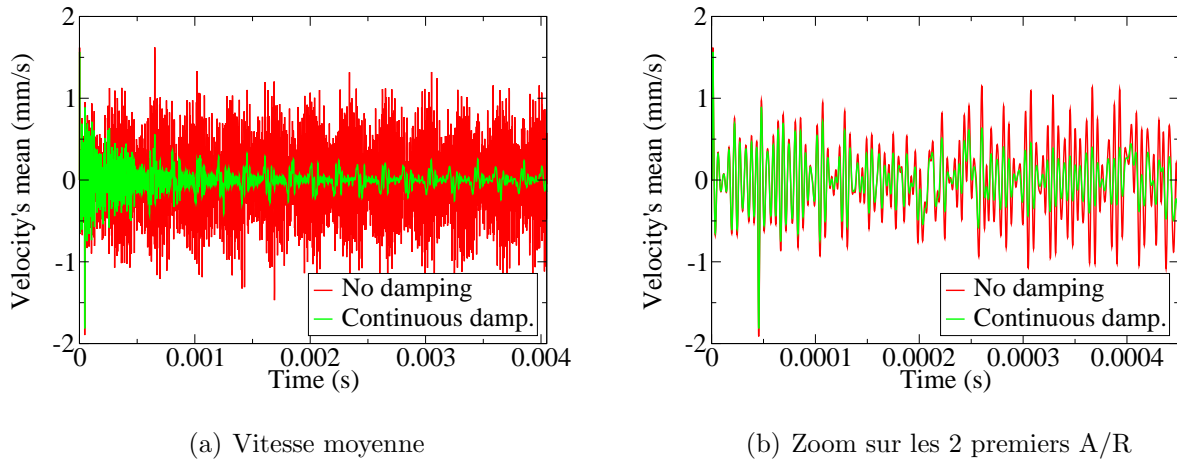


FIG. 4.48 – Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage fortement perturbé (noeud 1)

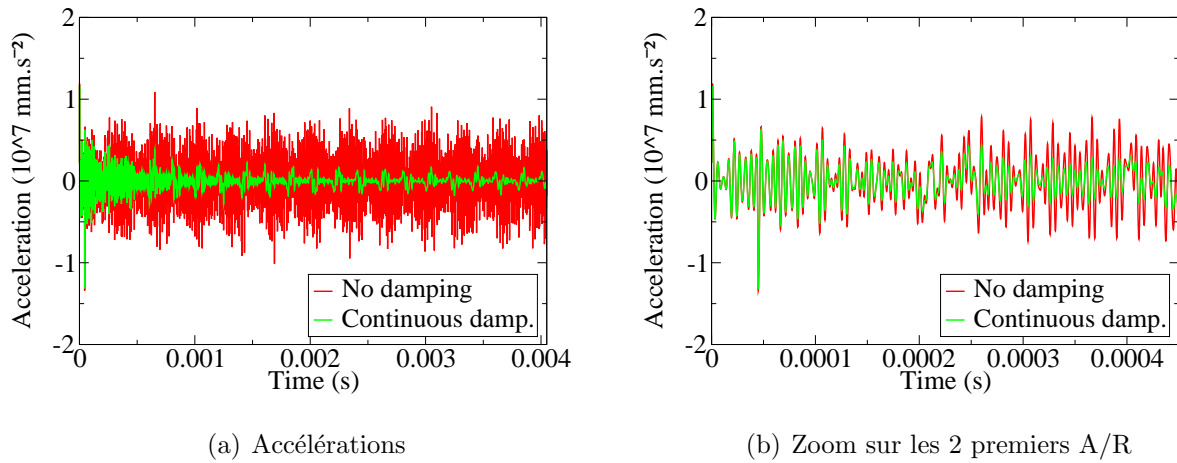


FIG. 4.49 – Evolution des accélérations pour le maillage fortement perturbé (noeud 1)

soit la méthode d'amortissement utilisée (pilotage ou non). Après 20 A/R dans la barre, les méthodes amortissantes ont permis de diminuer l'amplitude des oscillations observées au début du calcul avec un amortissement légèrement supérieur lorsque le pilotage n'est pas appliqué (cf. FIG. 4.51(c)). Cela se concrétise par une perte d'énergie moins importante pour un amortissement piloté.

Bilan :

Outre les conclusions obtenues précédemment, à savoir, la diminution de l'efficacité de l'amortissement pour des maillages perturbés, on peut également conclure que l'amortissement piloté permet :

- un amortissement important au début du calcul et comparable à un amortissement constant ($\varphi = 1.03$),
- un amortissement modéré par la suite évitant ainsi une importante perte d'énergie,

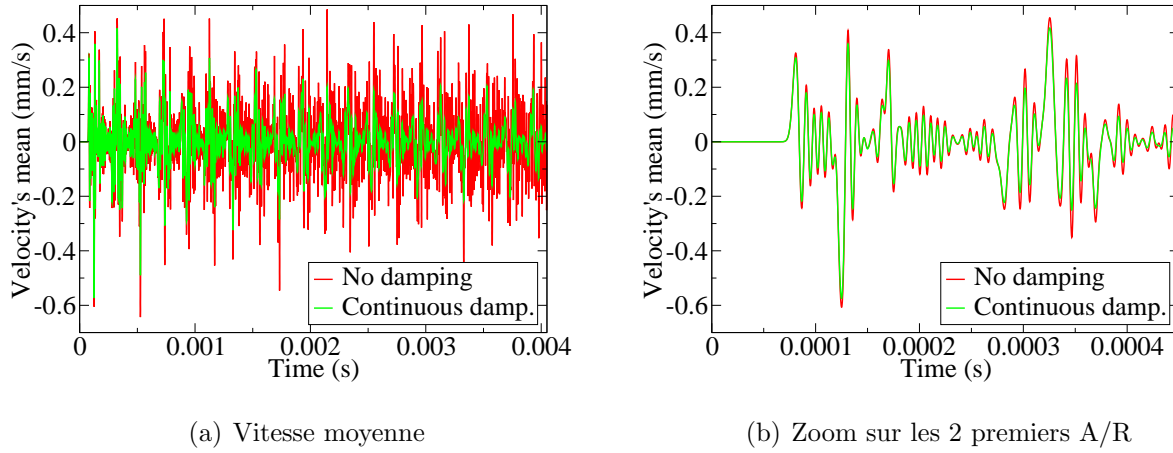


FIG. 4.50 – Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage fortement perturbé (noeud 79)

et ceci, quelque soit le maillage aléatoire utilisé.

4.3.5 Conclusion

A l'issue du paragraphe traitant de l'étude de l'amortissement sur un cas 1D, nous avons constaté que l'utilisation d'un amortissement important permettait de filtrer efficacement les hautes fréquences numériques au début du calcul mais *dégradait* fortement le signal après seulement 4000 pas de temps et 8m de propagation d'onde dans notre cas.

Pour éviter une dégradation trop importante du signal, une nouvelle méthode qui permet de piloter l'amortissement a été développée. Le paramètre d'amortissement devient propre à chaque noeud de la structure et est fonction de l'évolution de l'accélération nodale. Une étude de ses cinq paramètres nous a ensuite permis de connaître les ordres de grandeurs à utiliser pour chacun d'eux. On a notamment pu relever la sensibilité au paramètre b qui correspond à la valeur de l'accélération nodale au-dessus de laquelle un amortissement maximal et proportionnel à la vitesse moyenne est appliqué.

La méthode de pilotage de l'amortissement a ensuite été confrontée à des maillages aléatoires. On a ainsi pu montrer qu'elle assurait, au final, un amortissement maximal des hautes fréquences numériques au début du calcul puis un amortissement plus modéré de manière à ne pas trop *dégrader* le signal.

L'exemple de cette barre mono-dimensionnelle nous a permis de nous familiariser avec l'utilisation de méthodes amortissantes et de faire ressortir certaines propriétés importantes évoquées au paragraphe 4.2. Nous avons également développé une nouvelle méthode permettant le pilotage de l'amortissement. Cependant, les études de problèmes industriels 1D restent réduites car occultant tous les phénomènes inertiels que l'on peut rencontrer dans la *réalité*.

En effet, des études sur la simulation numérique du comportement dynamique des barres d'Hopkinson sont de plus en plus nombreuses aujourd'hui et font inévitablement intervenir ces phénomènes inertiels. On peut notamment citer les travaux de [Gavrus et al.(2003)] et [Govender et al.(2006)], entre autres. De plus, ces phénomènes inertiels deviennent prépon-

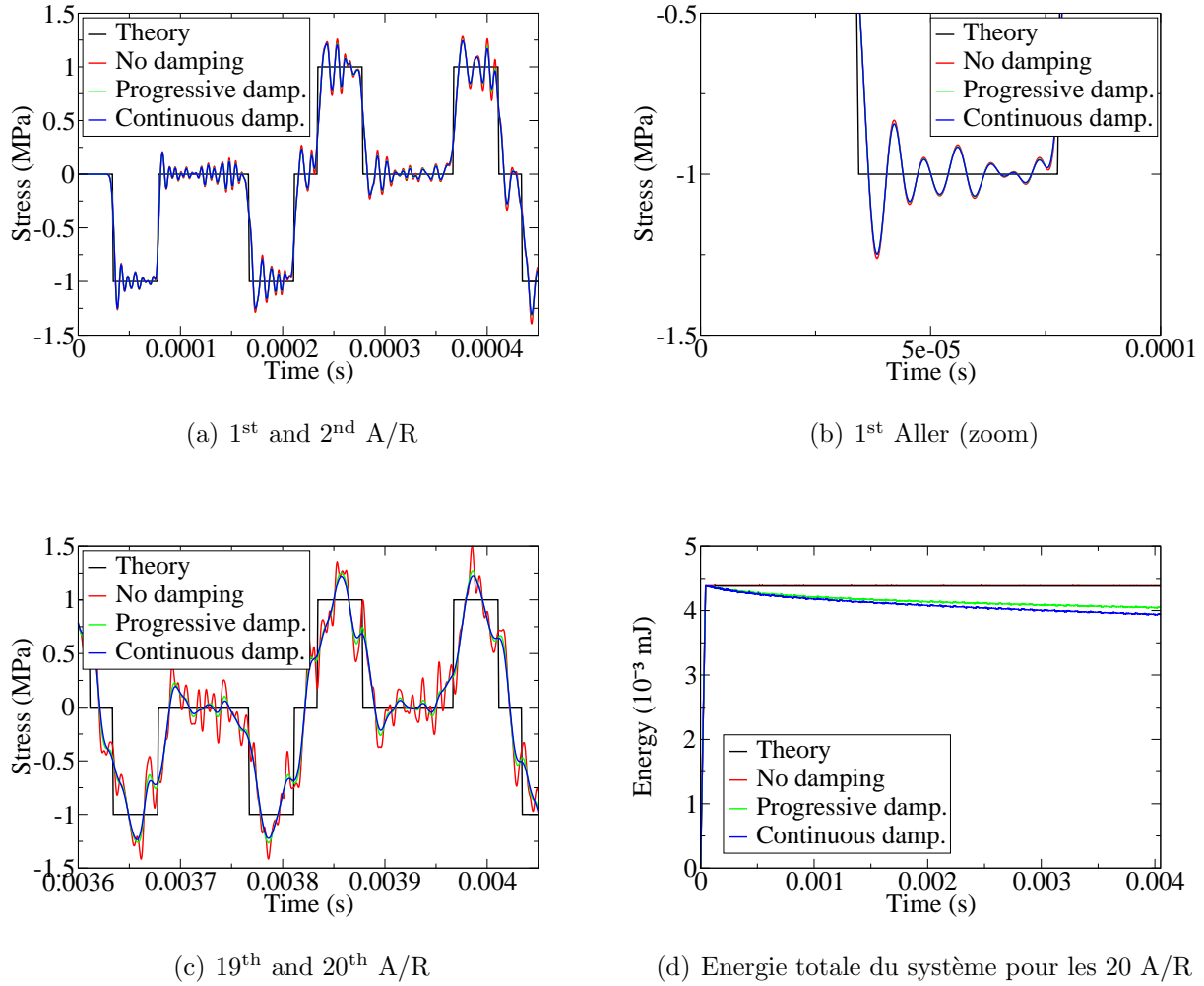


FIG. 4.51 – Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif

dérants lorsque les diamètres des barres deviennent importants par rapport à leur longueur. [Merle et Zhao(2006)] étudient notamment les corrections à apporter pour prendre en compte la distribution non uniforme des contraintes pour des diamètres supérieurs à 100mm. Pour observer les conséquences engendrées par la prise en compte de l'inertie, nous étudierons dans la prochaine partie la propagation d'onde dans des cas 2D axi-symétriques. Nous traiterons ainsi de l'efficacité des méthodes amortissantes précédemment définies.

4.4 Conclusion

L'étude menée sur le cas 1D a été riche en enseignements en ce qui concerne les méthodes amortissantes. D'une manière générale, nous avons pu observer l'efficacité du schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity à amortir rapidement les oscillations parasites. Les schémas de Chung-Lee (reconnaissable grâce à son *over-soot*) et de Bonelli permettent, dans une moindre mesure, le filtrage de ces oscillations numériques. En revanche l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé de type Runge-Kutta ne permet pas de s'affranchir des hautes fréquences numériques.

Ensuite, si on s'intéresse plus en détails aux particularités de ces méthodes, on constate que :

1. L'amortissement du Bulk-viscosity reste identique quelque soit le pas de temps de calcul utilisé. Ce n'est pas le cas des différents schémas d'intégration temporelle étudiés (Tchamwa, Bonelli). Cette non-dépendance au pas de temps est un atout pour le Bulk-viscosity qui ne sera pas sensible au taille de maille utilisée.
2. L'influence des conditions limites sur les résultats restent limitée dans la mesure où les perturbations engendrées par un encastrement ou un bord libre n'engendrent pas suffisamment d'oscillations pour modifier l'amortissement.
3. L'utilisation d'un chargement lissé et générateur de fréquences moins élevées ne permet pas non plus à terme de se passer d'un amortissement, les oscillations parasites apparaissant progressivement.
4. Le choix de la matrice masse conditionne complètement le problème numérique à analyser. En utilisant un pas de temps de calcul très faible ($0.01 h_c$), A. Soive notait que les résultats tendaient vers la solution théorique du système discrétisé. Nous compléterons ceci en remarquant que ces résultats tendent vers la solution théorique du système discrétisé, système dépendant du choix de la matrice masse.

De ces différentes observations est née l'idée de piloter l'amortissement de Tchamwa qui s'avérait très efficace au début du calcul mais *catastrophique* à terme car dégradant le signal. Une méthode pilotage basée sur les accélérations nodales et sur les vitesses moyennes nodales calculées sur quelques pas de temps a été proposée puis l'algorithme a été implanté dans le code de calcul Herezh++. Une étude de ses paramètres a permis de déterminer des valeurs adaptées au problème. Des essais sur des maillages aux tailles de maille aléatoires a montré l'avantage de cette méthode qui assure un amortissement très efficace au début du calcul puis régule l'amortissement au fur et à mesure de manière à ne cibler l'amortissement que sur les oscillations parasites.

Cette étude 1D a servi de base de travail à la compréhension à l'amortissement. Des solutions théoriques ont pu être calculées par la méthode de superposition modale, ce qui a facilité les comparaisons avec les méthodes numériques. Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons à des problèmes 3D axi-symétriques qui vont naturellement introduire des phénomènes de *dispersion*.

Chapitre 5

Etude sur un cas 3D axi-symétrique

Contents

5.1	Introduction	114
5.2	Barre 3D axi-symétrique libre-encastree	115
5.2.1	Solutions théoriques	115
5.2.2	Mise en données du problème	119
5.2.3	Calcul correspondant à un cas mono-dimensionnel ($\nu = 0$)	120
5.2.4	Calcul avec prise en compte des phénomènes inertiels ($\nu \neq 0$)	123
5.2.5	Conclusion	131

5.1 Introduction

La propagation d'un crâneau de force dans une barre 3D axi-symétrique va engendrer des phénomènes inertiels inexistant dans le cas 1D. Un phénomène de dispersion d'onde due à cette inertie radiale entraîne une célérité des ondes différente de celle du cas 1D ($c \neq c_0$) et fonction du nombre d'onde k . [Bacon(2000)] note que les composantes spectrales à hautes fréquences se propagent moins rapidement que les composantes spectrales à basses fréquences. Hormis la dispersion introduite par les caractéristiques physiques (géométrie, conditions aux limites, propriétés du matériau), [Schreyer(1983)] indique qu'elle provient à la fois :

- de la discrétisation temporelle, et plus exactement du schéma d'intégration utilisé et
- de la discrétisation spatiale et notamment du choix de la matrice masse.

Il souligne également que dans la plupart des applications, la solution numérique finale des équations différentielles ne fait apparaître qu'une dispersion globale. Pour les cas traités dans ce chapitre, les résultats numériques montreront simultanément une dispersion issue des deux discrétisations temporelle et spatiale.

Dans une première partie, nous utiliserons le cas test 1D précédemment défini que nous modéliserons en 3D axi-symétrique. Nous aborderons, dans un premier temps, quelques notions théoriques issues des travaux de [Love(1934)] et [Davies(1948)] pour visualiser les effets inertiels en obtenant une solution *analytique*. Nous évaluerons ensuite l'efficacité des méthodes amortissantes lorsque les aspects inertiels sont pris en compte et regarderons l'influence du coefficient de Poisson ν et du pas de temps de calcul h sur les différentes méthodes.

La deuxième et troisième parties concerneront des études applicatives pour les méthodes d'amortissement, à savoir un essai d'impact axial de type *barres d'Hopkinson* sur une barre en aluminium puis un essai d'impact transversal sur une tôle de construction navale grâce au dispositif développé au LG2M.

5.2 Barre 3D axi-symétrique libre-encastrée

Description géométrique du problème

Nous considérons une barre élastique libre - encastrée aux mêmes caractéristiques dimensionnelles et matérielles que précédemment. Elle est, cette fois-ci, maillée en trois dimensions axi-symétrique(cf. FIG. 5.1). Nous rappelons les données suivantes :

- Longueur $L = 200mm$ et section $S = 10mm^2$
- Module d'Young $E = 200GPa$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Masse volumique $\rho = 5.0 \cdot 10^{-8} ton.mm^{-3}$
- Célérité de l'onde $c = 2.0 \cdot 10^6 mm.s^{-1}$

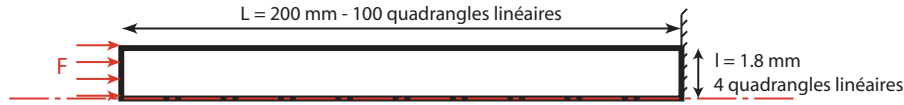


FIG. 5.1 – Description du problème

5.2.1 Solutions théoriques

Théorie élémentaire

La *théorie élémentaire*, qui nous a permis de déterminer des solutions 1D en déplacement, en contrainte et en énergie, est basée sur l'équation différentielle suivante :

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

avec E le module d'Young, S la section de la barre, ρ la masse volumique, u le déplacement, x la position et t le temps.

Cette équation permet d'obtenir une solution en déplacement pour une barre *libre-encastrée* proposée par [Géradin et Rixen(1993)] (cf. EQ. 4.1) ou pour une barre *libre-libre* proposée par [Timoshenko(1929)] et reprise par [Davies(1948)] (cf. EQ. 5.2).

$$u(x, t) = \frac{F_0 t^2}{2\rho S L} + \frac{2F_0 L}{\pi^2 E S} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^i}{i^2} \left(\cos \frac{i\pi x}{L} \right) \left(1 - \cos \frac{i\pi c t}{L} \right) \right\} \quad (5.2)$$

avec F_0 l'échelon de force imposé et c la célérité de l'onde.

On obtient l'évolution de la contrainte dans la barre en dérivant le déplacement longitudinal comme ceci :

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\sigma(x, t) = -\frac{2F_0 L}{\pi^2 S} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^i}{i} \frac{\pi}{L} \left(\sin \frac{i\pi x}{L} \right) \left(1 - \cos \frac{i\pi c_0 t}{L} \right) \right\} \quad (5.3)$$

Pour le cas tri-dimensionnel, les effets d'inertie vont générer des vitesses transversales des noeuds de la structure et la *théorie élémentaire*, pratique pour sa simplicité, n'est pas

suffisant pour décrire la propagation des ondes dans la barre. [Davies(1948)] et [Doyle(1997)] proposent plusieurs méthodes pour améliorer la représentation de la propagation en 3D dans une barre.

Théorie des barres de Love

[Love(1934)] (cité par [Davies(1948)]) a reformulé l'équation différentielle précédente (EQ. 5.2) en tenant compte de l'inertie radiale :

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} = 0 \quad (5.4)$$

avec ν le coefficient de Poisson et J le moment polaire qui équivaut à $J = \frac{1}{2}\pi a^4$ où a est le rayon de la barre.

Cette équation correspond à l'équation de la *théorie des barres de Love* (*Love's rod theory* dans le texte) qui est détaillée par [Doyle(1997)]. L'amélioration provient de l'ajout des vitesses transversales dans le calcul de l'énergie cinétique en supposant que leur effet soit négligeable sur l'énergie de déformation. Il s'agit d'une méthode permettant de ne représenter qu'un seul mode de déformation axial.

Faisant suite aux travaux de [Bancroft(1941)], [Davies(1948)] étudie d'abord la vitesse de phase c d'ondes sinusoïdales de longueur d'onde λ . Quand la barre est de section circulaire de rayon a , et en négligeant les termes de puissance 4 et 5 en $\frac{a}{\lambda}$, l'équation issue de [Love(1934)] devient :

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\pi^2 \nu^2 a^2}{\lambda^2} \right)$$

La célérité des ondes en 3D axi-symétrique dépend du coefficient de Poisson ν , du rayon de la barre a et de la longueur d'onde λ et sera obligatoirement inférieure à c_0 la célérité de l'onde dans un espace 1D.

[Davies(1948)] calcule ensuite une solution en déplacement (déplacement longitudinal) de l'EQ. 5.4 pour une barre de longueur L , de section S et de moment d'inertie J soumise à un échelon de contrainte de compression $-\sigma_0$ au point $x = L$ alors que l'autre extrémité est libre :

$$u(x, t) = \frac{\sigma_0 t^2}{2L\rho} + \frac{\sigma_0 H^2}{L\rho} + \left\{ \frac{2\sigma_0 L}{\pi^2 E} \times \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^i}{i^2} \left(\cos \frac{i\pi x}{L} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + i^2 \psi^2} \cos \frac{i\pi c_0 t}{L\sqrt{1 + i^2 \psi^2}} \right) \right] \right\} \quad (5.5)$$

avec

$$H^2 = \frac{\nu^2 J}{c_0^2 S} \quad \text{et} \quad \psi^2 = \frac{\pi^2 \nu^2 a^2}{2L^2}$$

On obtient l'évolution de la contrainte dans la barre en dérivant le déplacement longitudinal comme ceci :

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$\sigma(x, t) = - \left\{ \frac{2\sigma_0 L}{\pi^2} \times \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^i}{i} \frac{\pi}{L} \left(\sin \frac{i\pi x}{L} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + i^2 \psi^2} \cos \frac{i\pi c_0 t}{L \sqrt{1 + i^2 \psi^2}} \right) \right] \right\} \quad (5.6)$$

On remarque tout d'abord qu'en fixant le coefficient de Poisson $\nu = 0$, i.e. sans prise en compte de l'inertie radiale, l'équation de Davies (cf. 5.6) devient l'équation solution mono-dimensionnelle de Love (cf. EQ. 5.3).

Grâce au logiciel Scilab®, nous traçons sur la FIG. 5.2 l'évolution de la contrainte $\sigma(x, t)$ repérée à l'EQ. 5.6, pour des coefficients $\nu = 0.0$ et $\nu = 0.3$ d'un point situé au tiers de la barre. Nous choisissons de représenter la solution en utilisant une sommation tronquée au 100 ou 1000 premières valeurs de i .

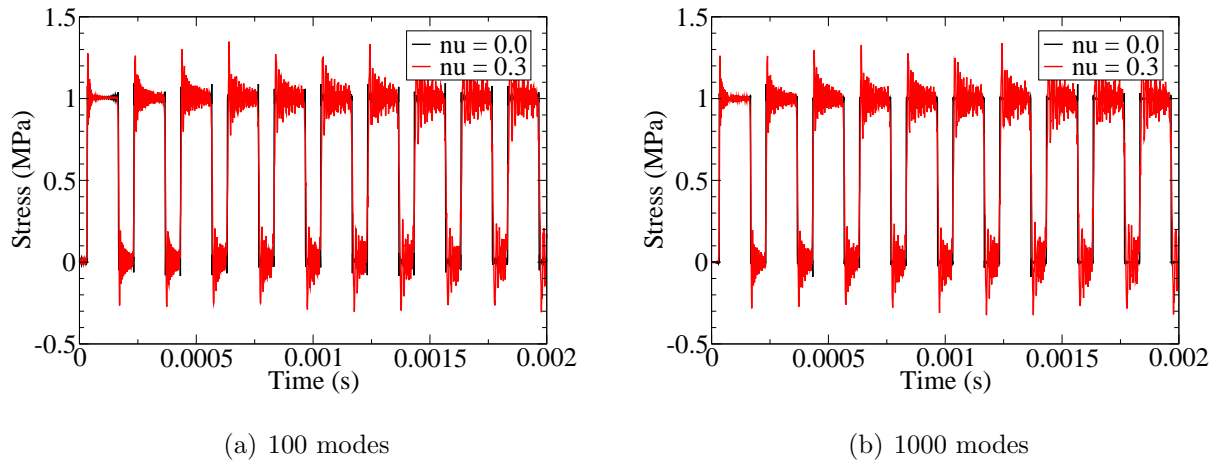


FIG. 5.2 – Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre

On constate qu'à partir d'un certain nombre de modes propres utilisés pour la résolution, les résultats sont sensiblement identiques. Pour 100 modes propres, comme pour 1000, on remarque que la solution de Love qui ne prend pas en compte les effets inertiels, on retrouve la solution de la *théorie élémentaire* 1D. En revanche, lorsque l'on utilise la solution de Davies qui prend en compte ces effets avec un coefficient de Poisson ν fixé arbitrairement à 0.3, des oscillations apparaissent. On peut également observer de plus près ces oscillations lors du 1^{er} et du 5^{ème} A/R sur la FIG. 5.3 :

Des oscillations régulières sont observées lors du 1^{er} A/R sur la FIG. 5.3(a). Pour [Lataillade(2001)], ces oscillations observées ne sont issues que de la prise en compte de l'inertie radiale car seul, le terme s'y référant a été ajouté à l'équation 5.4. Au fur et à mesure de la propagation de l'onde dans la barre, le signal de contrainte devient perturbé (cf. FIG. 5.3(b)) montrant ainsi la dispersivité de l'onde. Cette dispersivité dépend également du rapport $\frac{L}{S}$ avec L la longueur de la barre et S sa section. Les résultats précédents ont été obtenus pour $\frac{L}{S} = 20$. Observons les résultats pour $\frac{L}{S} = 5$ sur la FIG. 5.4.

Les oscillations observées sur la FIG. 5.3 pour un rapport $\frac{L}{S} = 20$ se sont considérablement amplifiées lorsque la barre est moins élancée, i.e. $\frac{L}{S} = 5$ (cf. FIG. 5.4). Ces oscillations traduisent une augmentation des phénomènes inertiels.

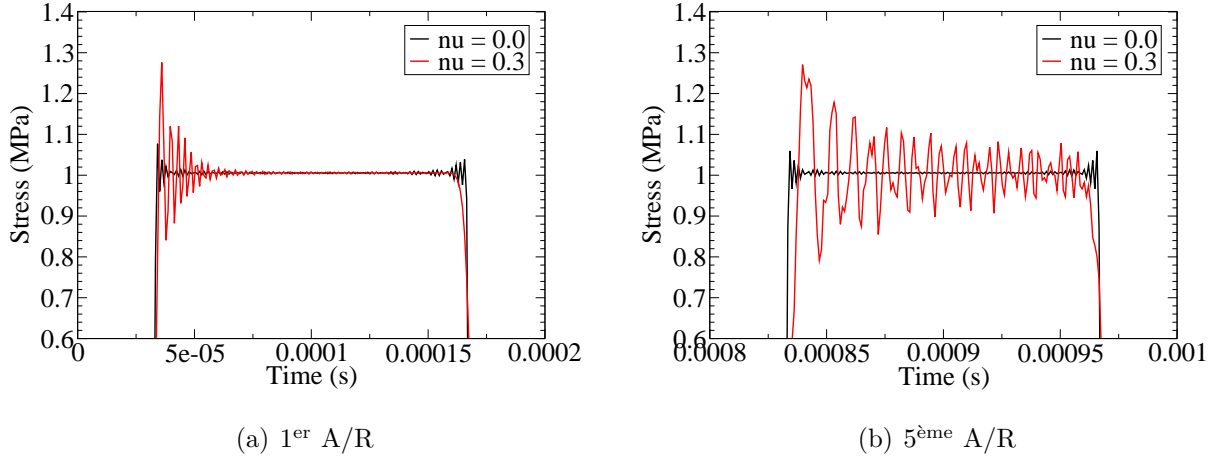


FIG. 5.3 – Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre (100 modes)

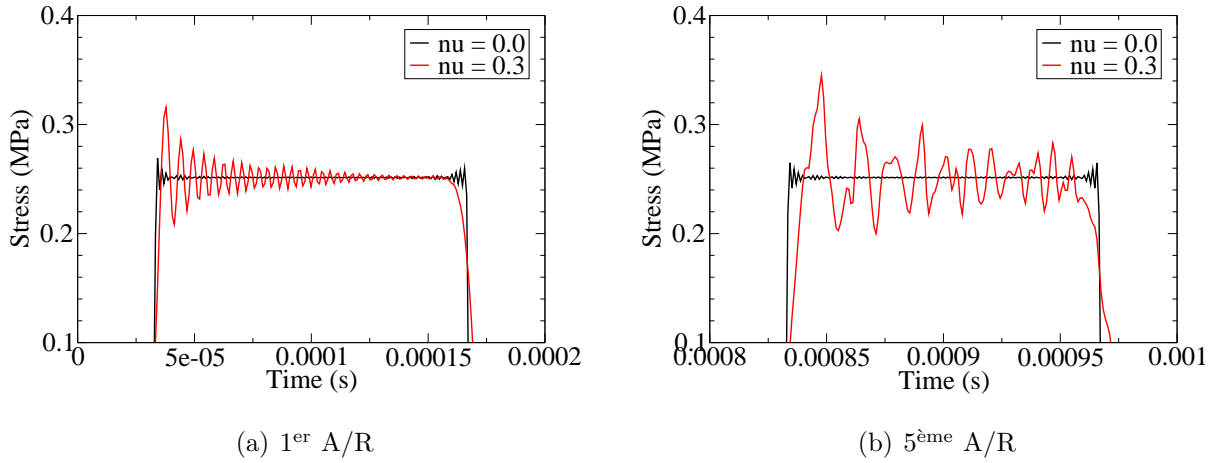


FIG. 5.4 – Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre (100 modes)

Cette méthode présentée par Davies permet d'obtenir les contraintes longitudinales. Elle reste néanmoins limitée et ne permet pas de calculer les contraintes radiales qui pourraient s'avérer intéressante dans la compréhension des phénomènes.

Développements d'autres théories

D'autres théories citées par [Doyle(1997)] ont été développées pour la prise en compte de plusieurs modes de déformations. Elles permettent également de mieux évaluer les relations de dispersion dans les barres. On peut citer :

- la *théorie des barres de Mindlin-Herrmann* représentant les déformations axiales et transverses

- la *théorie à trois modes (de déformation)* représentant les déformations axiales et transverses ainsi que les rotations en flexion

[Doyle(1997)] reste néanmoins réservé quant à l'utilisation de ces méthodes pour décrire le comportement des ondes dans les structures complexes, le nombre de degrés de liberté augmentant avec le nombre de modes de déformation choisis. Il considère que la *théorie des barres de Love* (à un seul mode de déformation) est suffisante pour approcher raisonnablement un comportement longitudinal, les théories utilisant plusieurs modes de déformation amélioreraient seulement le comportement du premier mode de déformation.

De nombreux travaux sur la propagation des ondes dans les barres d'Hopkinson se basent sur l'équation de [Pochhammer(1876)] et [Chree(1889)] que [Doyle(1997)] nomme la *théorie générale et exacte*. On peut notamment citer les avancées récentes de Zhao et Gary qui ont généralisé l'équation pour tenir compte des effets visco-élastiques ([Zhao et Gary(1995)] [Zhao et al.(1996)]) et qui ont proposé une méthode de séparation des ondes ([Zhao et Gary(1996)], [Othman et al.(2001)] et [Bussac et al.(2002)]).

Conclusion

Finalement, grâce aux développements de Davies effectués à partir de la théorie des barres de Love, nous avons pu visualiser les effets inertiels sur les résultats en contrainte pour une barre *libre-libre* : des oscillations caractéristiques de l'inertie et de différentes fréquences apparaissent suivant le nombre de modes utilisés pour représenter la réponse théorique. Dans le cas d'une barre *libre-encastree*, celui que nous étudions, la littérature ne fait pas apparaître de solution à ce problème, à notre connaissance. Pour ces raisons, nous utiliserons les observations effectuées sur la barre *libre-libre* pour commenter et analyser les résultats. De plus, nous inclurons dans chaque graphe la solution issue de la *théorie élémentaire* de manière à faciliter la lecture des courbes et les observations en découlant en sachant bien que cette solution n'est en aucun cas la solution du problème 3D axi-symétrique (sauf pour un important *élancement* $\frac{L}{S}$ de la barre).

5.2.2 Mise en données du problème

Pas de temps appliqué

La description géométrique présentée au paragraphe §5.2 constituera le support à analyser. [Benson(1998)] propose plusieurs méthodes pour calculer le pas de temps critique h_c pour des éléments quadrangles. A ce jour, le logiciel Herezh++ [Rio(2006)] calcule le pas de temps critique comme le temps que met l'onde à parcourir l'arête de l'élément la plus petite de toute la structure. Les dimensions de l'élément le plus petit de la structure étant $S_{lment} = L \times l = 2mm \times 0.89mm$, nous obtenons un pas de temps critique $h_c = 4.46 \cdot 10^{-7}s$. Pour des questions de stabilité et de performance du calcul (de futurs développements d'Herezh++ sont en cours pour un meilleur calcul de h_c), nous choisissons un pas de temps égal à 40% de h_c .

Chargement appliqué et matrice masse utilisée

Le chargement utilisé est le *créneau référence* qui engendre des hautes fréquences en quantité suffisante pour observer l'amortissement de chaque méthode. Pour appliquer le même

chargement que dans le cas 1D, nous avons recours à une force linéique de $1.0Nm^{-1}$ appliquée sur l'arête des éléments situés sur le bord libre de la barre. La force linéique qui est ensuite répartie aux noeuds respecte le fait qu'un noeud représente une circonférence où est attaché un volume de matière qui dépend du rayon où il se trouve.

Auparavant dans le cas 1D, le choix d'une matrice masse diagonale avait été fait pour des raisons de facilité d'inversion et surtout d'augmentation du pas de temps critique comparé à la matrice masse consistante. Or l'utilisation d'une matrice diagonale pour les cas 3D axi-symétriques pose de nombreux problèmes pour affecter les masses nodales proportionnellement sur le rayon (cf. [Hughes(1987)] et [Batoz et Dhett(1990)]). Pour ne pas introduire d'approximations supplémentaires, nous choisirons d'utiliser une matrice masse consistante pour toute l'étude 3D axi-symétrique avec les conséquences que cela peut comporter (cf. §4.2.1). Nous n'oublierons notamment pas le fait que la dispersion des ondes est liée à la forme de la matrice masse (cf. [Schreyer(1983)] page 282).

Méthodes d'amortissement analysées

Nous nous focaliserons sur les schémas explicites et pour ces raisons, nous n'étudions que trois des quatre méthodes déjà énoncées précédemment pour obtenir la solution, à savoir :

1. les schémas numériques explicites conservatifs avec le schéma CFD et celui de Runge-Kutta,
2. le schéma numérique explicite amortissant (*MDF*) de Tchamwa-Wielgosz et le schéma explicite amortissant (*MEF*) de Bonelli,
3. le bulk-viscosity.

Sorties : contrainte et énergie totale du système

Les comparaisons se feront sur l'évolution des grandeurs suivantes :

1. Les contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} au point d'intégration de deux éléments situés à $67mm$ de l'extrémité libre de la barre :
 - l'élément 134 situé à $0.19mm$ de l'axe central de la barre,
 - l'élément 133 situé à $1.59mm$ de l'axe central de la barre.
2. L'énergie totale du système qui vaut $E_T = 4.438 \cdot 10^{-3}J$, en reprenant les développements du §4.2.3.

5.2.3 Calcul correspondant à un cas mono-dimensionnel ($\nu = 0$)

L'équation de [Love(1934)] (cf. EQ. 5.4) prend en compte les effets d'inertie radiale par le terme :

$$\nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}$$

Ce terme fait apparaître le coefficient de Poisson ν qui, lorsqu'il prend la valeur nulle, permet donc de retrouver l'équation de la *théorie élémentaire* et une célérité des ondes c indépendante du nombre d'onde k (où $k = \lambda/2\pi$). Nous constaterons donc des résultats non dispersifs car la célérité des ondes sera constante $c = c_0$. Dans un premier temps, nous regardons l'efficacité de l'amortissement pour un cas 3D axi-symétrique sans prise en compte de l'amortissement ($\nu = 0$). Sur tous les calculs se référant à cette partie, on a vérifié que :

- les contraintes de cisaillement σ_{xy} et transverses σ_{yy} (non présentées ici) sont nulles, confirmant bien la non prise en compte des effets inertiels,
- les contraintes axiales σ_{xx} observées dans les deux éléments à la même distance du point d'impact sont identiques, ce qui confirme que le chargement appliqué est réparti uniformément sur la section et est adapté à notre maillage 3D axi-symétrique.

Schémas numériques conservatifs : CFD et Runge Kutta

Observons sur les FIG. 5.5 l'évolution de la contrainte et de l'énergie pour les schémas d'intégration temporelle non amortissants de CFD et Runge-Kutta.

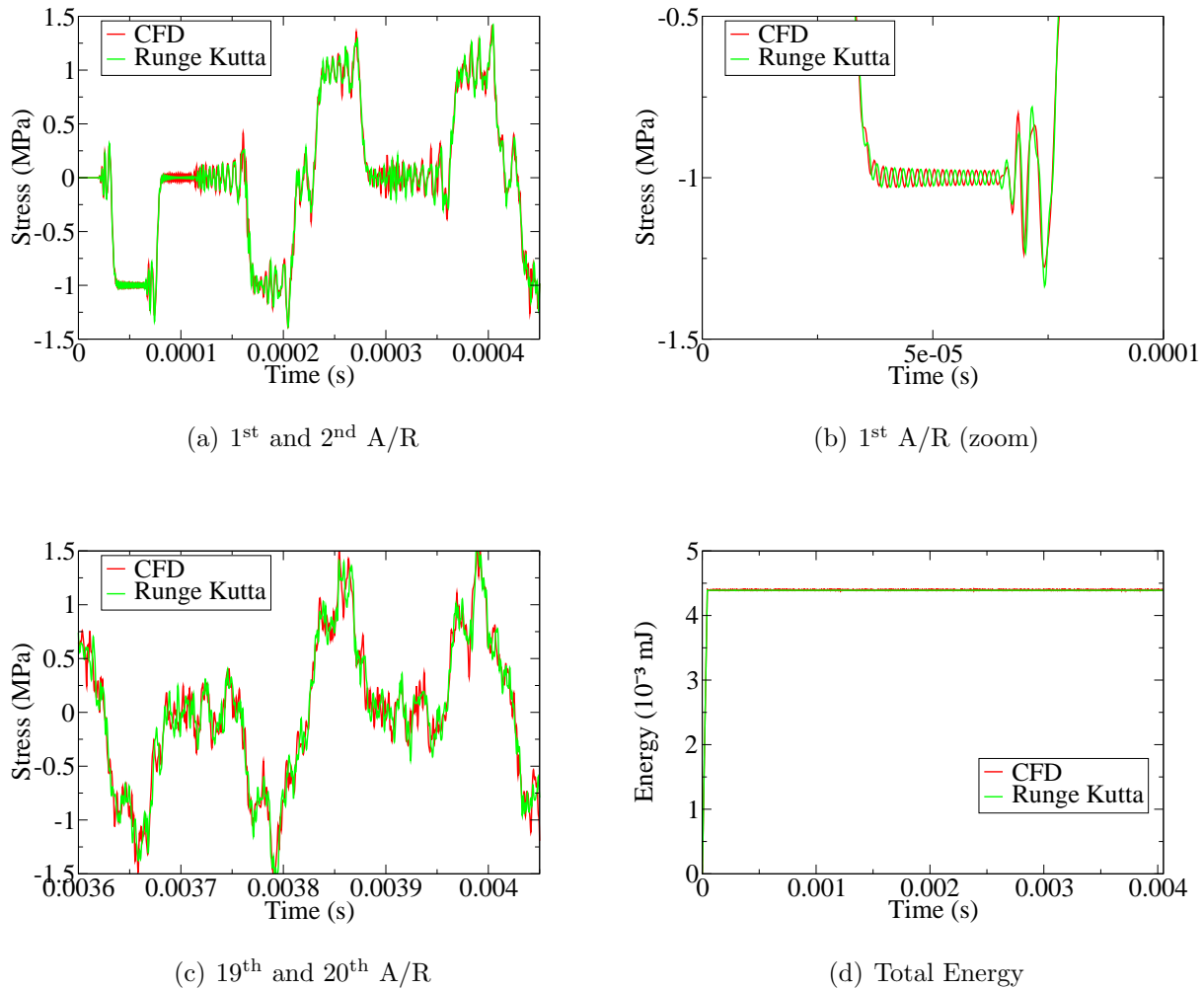


FIG. 5.5 – Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour CFD et Runge Kutta ($\nu = 0$)

On constate tout d'abord la présence d'oscillations caractéristiques de l'utilisation d'une matrice masse consistante (cf. 4.2.8) : leur amplitude va en augmentant depuis l'instant du chargement brutal. On remarque également la présence des deux types d'oscillations :

1. les oscillations de faible amplitude et de haute fréquence ($> 500 \text{ kHz}$),

2. les oscillations (au nombre de trois) de forte amplitude et aux fréquences d'oscillation plus faibles que les premières (comprise entre 190 kHz et 390 kHz).

Ces deux types d'oscillations sont numériques et parasites et ne devraient pas avoir d'existence du fait de la non dispersivité des résultats ($\nu = 0 \Rightarrow c = c_0$). Elles sont également présentes dans le cas 1D. Après 19 A/R (cf. FIG. 5.5(c)), le signal s'est dégradé d'une manière analogue au cas 1D. Ces schémas non dissipatifs assurent une conservation de l'énergie (cf. FIG. 5.5(d)).

Méthodes numériques amortissantes : schéma de Tchamwa et de Bonelli et Bulk-viscosity

Nous observons le caractère amortissant des schémas de Bonelli ($\rho_b = 0.9$) et de Tchamwa ($\varphi = 1.03$) et du bulk viscosity ($C_0 = 0.06$) sur la FIG. 5.6.

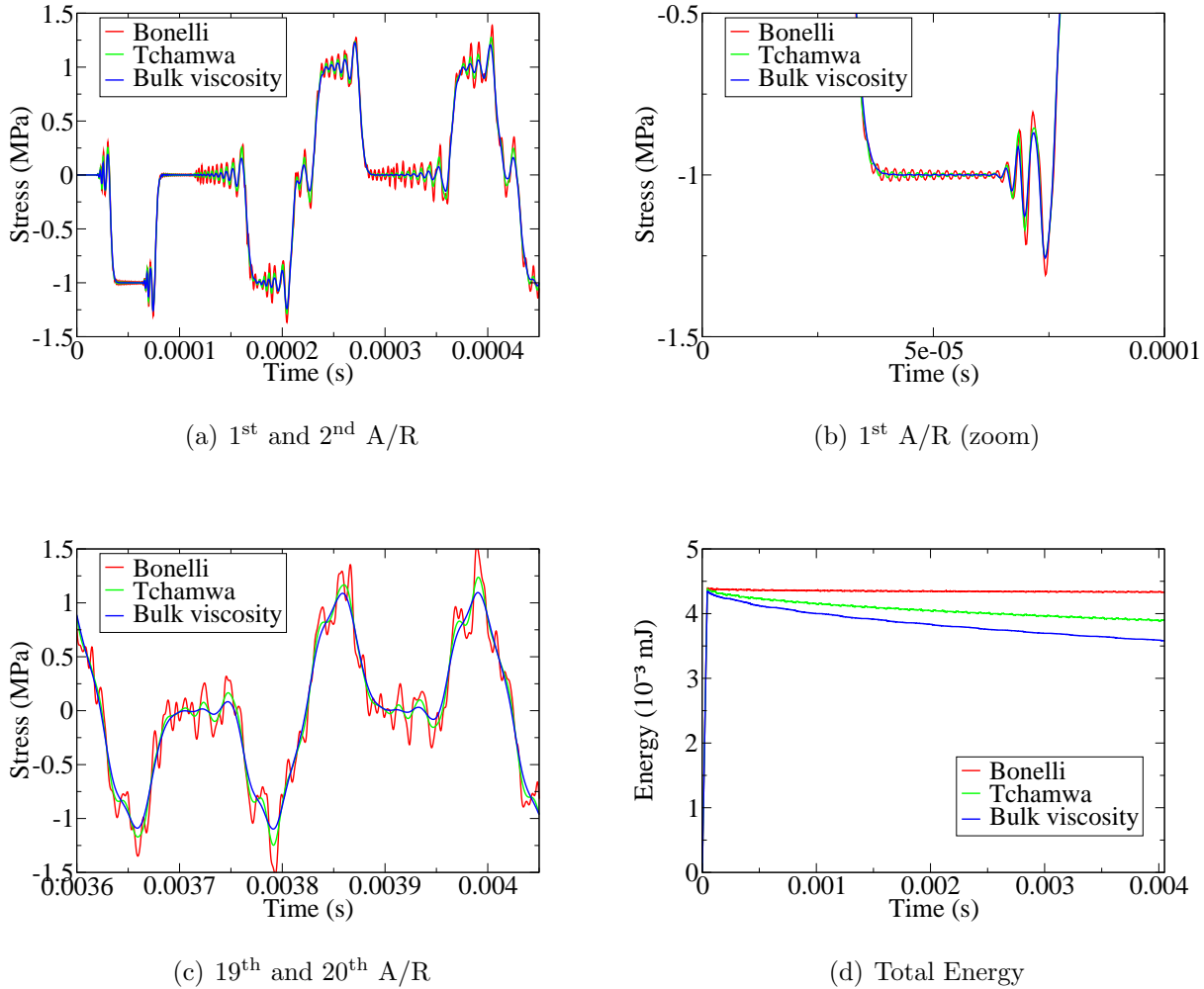


FIG. 5.6 – Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0$)

On constate sur les FIG. 5.6(a) et 5.6(b) la présence des deux types d'oscillations présentées au paragraphe précédent. A contrario du schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity, le schéma

de Bonelli ne parvient pas à amortir les premières oscillations. Du fait d'une faible fréquence d'oscillation pour trois d'entre elles, les trois méthodes amortissantes ont une efficacité toute relative à les filtrer. En effet, ces trois oscillations *basses fréquences* (relativement) demeurent après 19 A/R (cf. FIG. 5.6(c)), même si elles ont été considérablement amorties. On remarque aussi que l'amortissement est plus important pour le bulk viscosity (cf. FIG. 5.6(d)).

Conclusion

La non prise en compte des effets inertiels en fixant le paramètre $\nu = 0$ permet à ce cas 3D axi-symétrique de retrouver les résultats présentés pour le cas 1D avec utilisation d'une matrice masse consistante au § 4.2.8. Continuons nos investigations en 3D axi-symétrique en prenant compte cette fois-ci des effets inertiels ($\nu \neq 0$).

5.2.4 Calcul avec prise en compte des phénomènes inertiels ($\nu \neq 0$)

L'ajout du terme des effets inertiels dans l'équation des barres de Love (en considérant $\nu = 0.3$) va entraîner des modifications des contraintes transverses σ_{yy} et de cisaillement σ_{xy} . Avant de regarder de plus près ces modifications, intéressons-nous aux contraintes axiales σ_{xx} .

Influence du rayon sur la contrainte axiale

La FIG. 5.7 montre la contrainte axiale σ_{xx} obtenue pour le schéma CFD pour les points d'intégration des éléments 133 (situé à un rayon de 1.59 mm par rapport l'axe de la barre) et 134 (situé à un rayon de 0.19 mm par rapport l'axe de la barre).

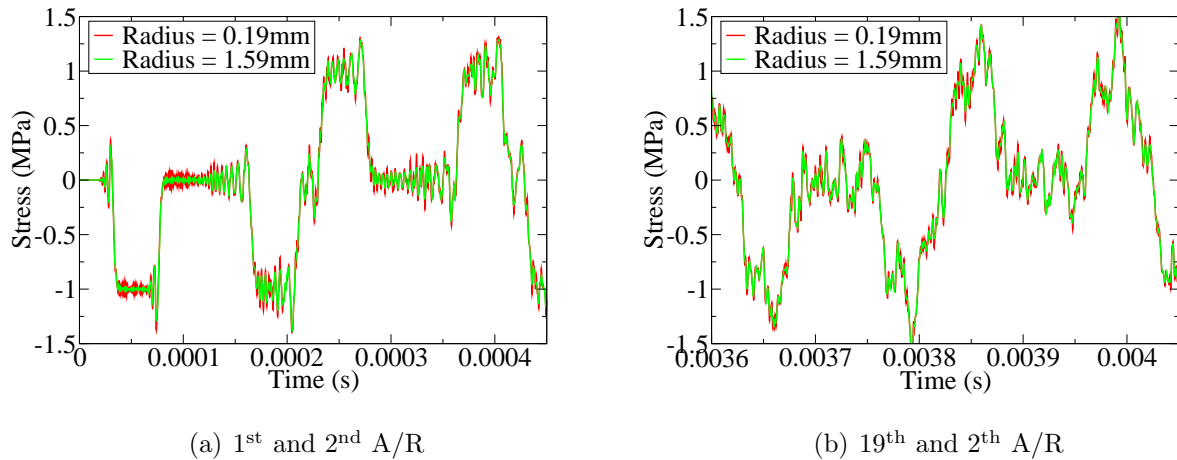


FIG. 5.7 – Evolution de σ_{xx} pour le schéma CFD pour les éléments 133 et 134 ($\nu = 0.3$)

On constate grâce à ces graphes que les signaux obtenus sont sensiblement identiques. Certes, les oscillations observées ont une amplitude légèrement plus grande pour l'élément situé près de l'axe de la barre du fait de la prise en compte des effets inertiels, mais les

contraintes axiales pour ces deux éléments suivent tout tout de même une évolution identique. En effet, [Follansbee et Franz(1983)] considère que les résultats dans une section sont identiques lorsque la longueur de la barre $L > 20\phi$ avec ϕ , le diamètre de la barre.

Schémas numériques conservatifs : CFD et Runge Kutta

Les FIG. 5.8 montrent l'évolution de la contrainte σ_{xx} au point d'intégration de l'élément le plus proche de l'axe central pour les schémas non amortissants CFD et Runge Kutta.

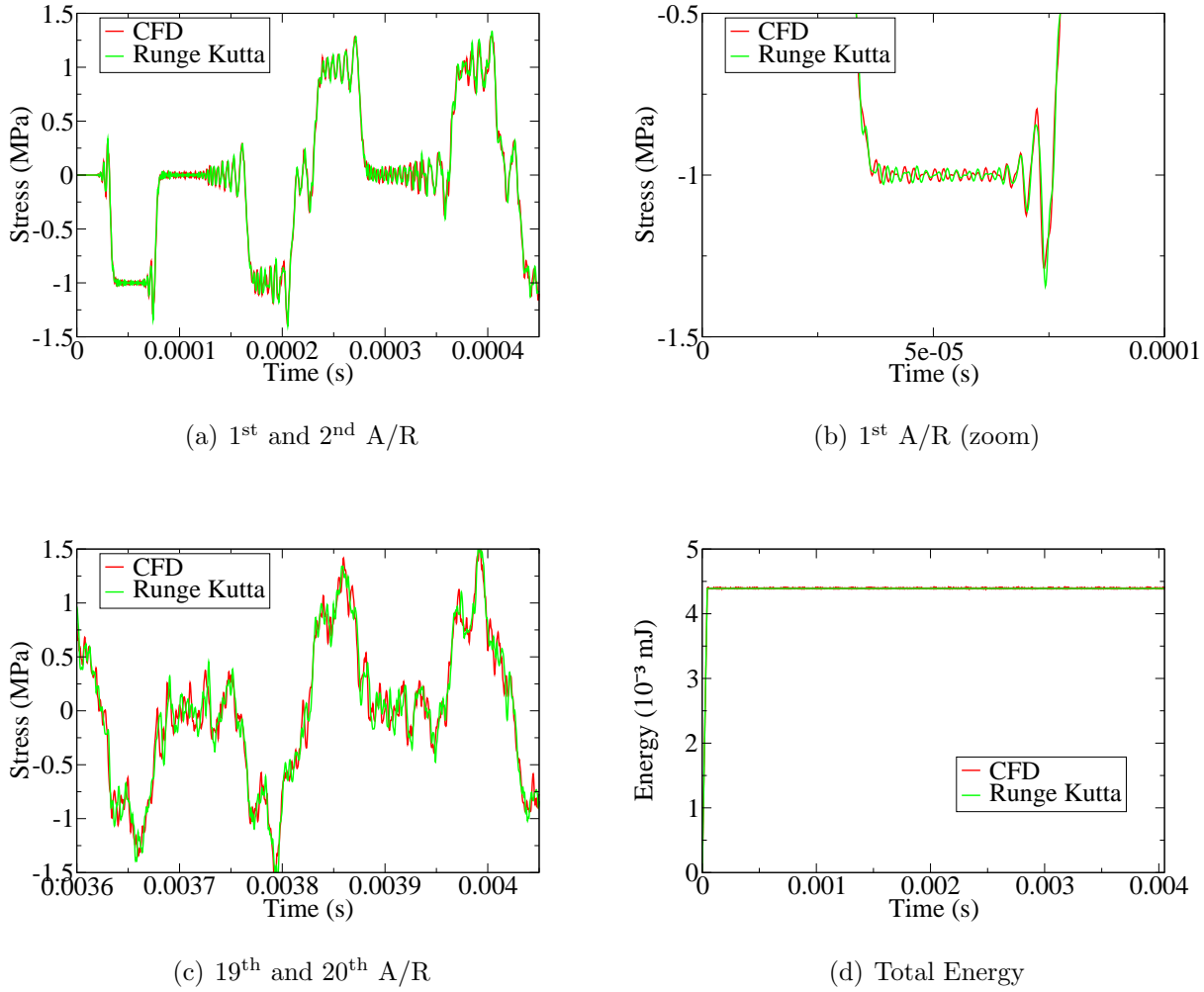


FIG. 5.8 – Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour CFD et Runge Kutta ($\nu = 0.3$)

Les résultats observés sur les FIG. 5.8 sont quasiment les mêmes que ceux obtenus sans prise en compte des effets inertiels (cf. FIG. 5.5). On retrouve les oscillations issues de la matrice masse choisie :

- des oscillations parasites hautes fréquences de faible amplitude et
- trois oscillations parasites aux fréquences plus basses et de forte amplitude.

On peut alors affirmer que dans notre cas *barre libre - encastrée, 3D axi-symétrique*, la valeur du coefficient de Poisson n'a qu'une faible influence sur les résultats en contraintes axiales

en ce qui concerne les deux méthodes conservatives CFD et Runge-Kutta.

Méthodes numériques amortissantes : schéma de Tchamwa et Bulk viscosity

Du fait de la faible influence du coefficient de Poisson sur les résultats de la contrainte axiale pour les schémas non amortissants, il devrait être logique de retrouver une certaine concordance entre les courbes de la FIG. 5.6 et celles de la FIG. 5.9 représentant l'évolution de la contrainte axiale lorsque l'on affecte la valeur 0.3 à ν .

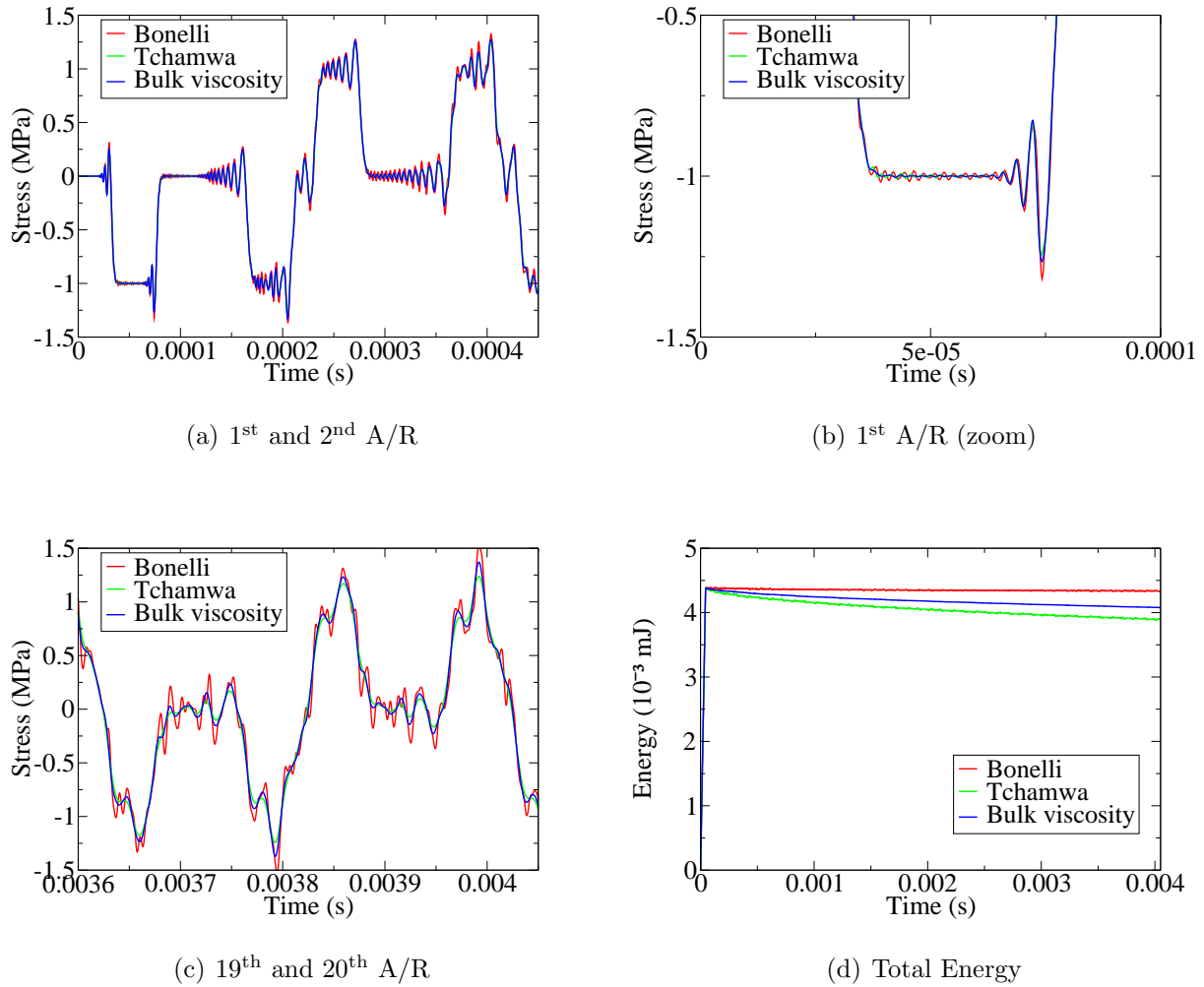


FIG. 5.9 – Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)

Concernant l'évolution des contraintes, on retrouve quasiment la même évolution pour un coefficient de Poisson nul ou égal à 0.3. Pour le Bulk-viscosity, une différence notable est observée sur la FIG. 5.9(c) montrant l'évolution de la contrainte axiale pour le 19 et 20^{ème} A/R. Les oscillations parasites sont moins amorties qu'avec le schéma de Tchamwa lorsqu'un coefficient $\nu = 0.3$ est imposé. Cela se traduit par une baisse de l'énergie totale moins importante que pour le schéma de Tchamwa alors que ce n'était pas le cas lorsque l'on

avait fixé ν à 0. Le schéma de Bonelli amortit identiquement que sans la prise en compte des phénomènes inertiels.

Bilan

Finalement, les contraintes axiales σ_{xx} d'une barre 3D axi-symétrique ne diffère pas de celles observées en 1D quelque soit le schéma d'intégration temporelle ou la méthode amortissante utilisé. Intéressons-nous aux contraintes transverses et de cisaillement qui étaient inexistantes dans le cas 1D.

Evolution de la contrainte transversale σ_{yy} : CFD, Bonelli, Tchamwa et Bulk-viscosity

Considérons maintenant l'évolution de la contrainte transverse σ_{yy} dans la barre. Nous comparons le schéma conservatif CFD aux méthodes dissipatives de Bonelli, de Tchamwa et du Bulk-viscosity. Les résultats sont affichés sur la FIG. 5.10.

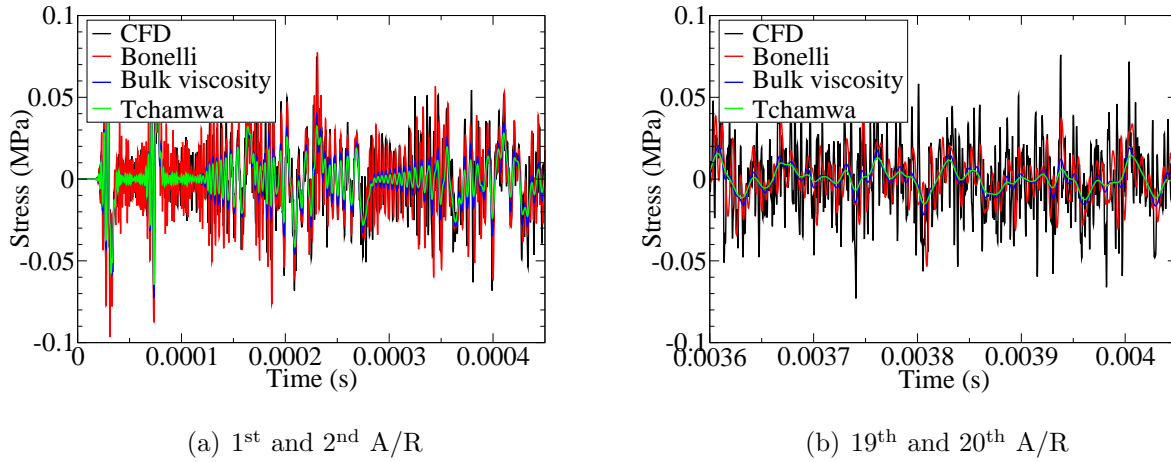


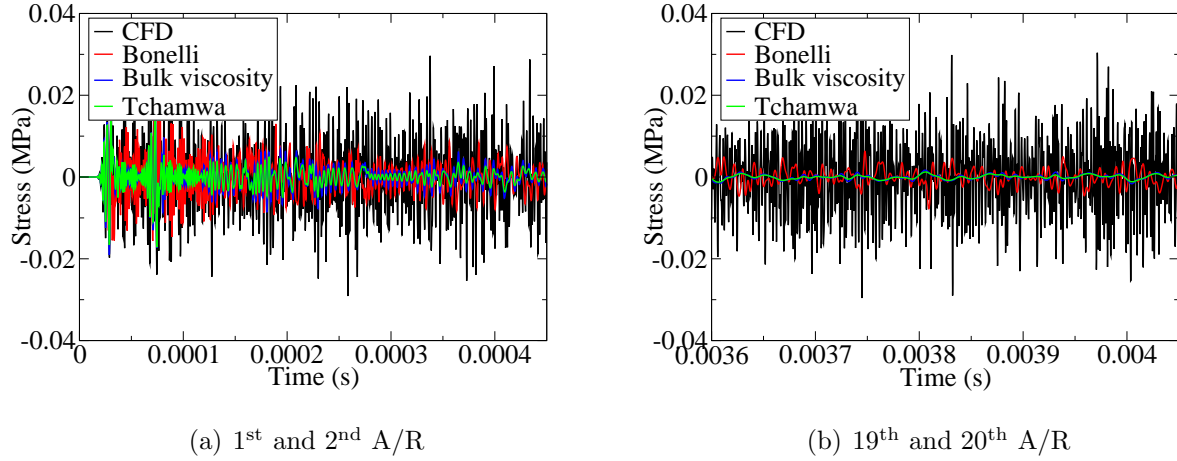
FIG. 5.10 – Evolution de σ_{yy} pour CFD, Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)

On constate tout d'abord que σ_{yy} est plus de 10 fois inférieure à σ_{xx} . Sur les deux premiers A/R, le signal issu du schéma de Bonelli (qui amortit moins que les deux autres méthodes) peut être comparé à celui de CFD. Les deux autres méthodes numériques amortissent l'amplitude des oscillations hautes fréquences qui composent principalement ce signal. Après 20 A/R, le schéma de Bonelli a assuré un amortissement existant mais faible des oscillations hautes fréquences, comparé au schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity qui les ont considérablement amorties.

Evolution de la contrainte de cisaillement σ_{xy} : CFD, Tchamwa et Bulk viscosity

Après avoir visualisé les effets des méthodes amortissantes sur les contraintes transverses, intéressons-nous aux contraintes de cisaillement repérées sur la FIG. 5.11.

Les contraintes de cisaillement σ_{xy} du schéma de CFD sont inférieures de 50 fois par rapport aux contraintes axiales. On remarque que les méthodes d'amortissement permettent de réduire considérablement les oscillations numériques hautes fréquences. Comparé au schéma CFD,

FIG. 5.11 – Evolution de σ_{xy} pour CFD, Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)

après 20 A/R, l'amplitude maximale de ces oscillations a chuté de 10 fois pour le schéma de Tchamwa et le Bulk-Viscosity et de 3 fois pour le schéma de Bonelli.

Bilan

Finalement, on constate que les signaux issus des contraintes transverses σ_{yy} et de cisaillement σ_{xy} sont composés de très hautes fréquences. Il semble logique que les méthodes amortissantes, dont le rôle est l'amortissement de telles fréquences, agissent principalement sur ces contraintes.

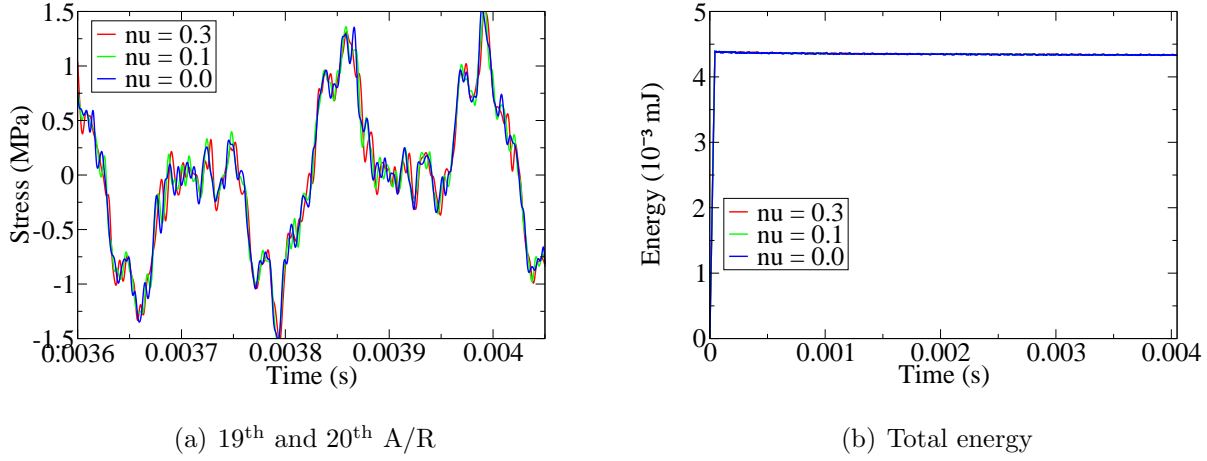
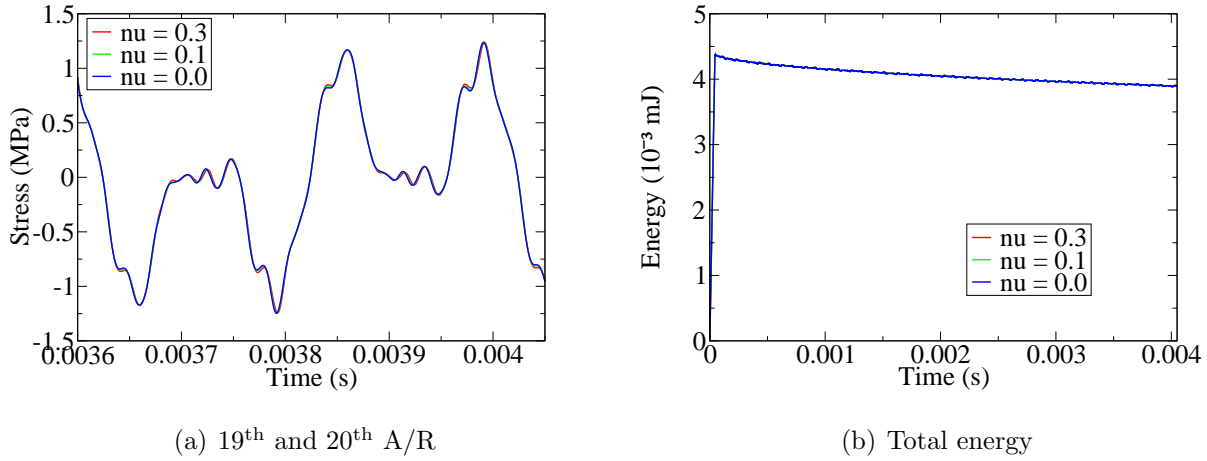
Influence du coefficient de Poisson ν sur les méthodes amortissantes

Suite au fait que le Bulk-viscosity n'offre pas le même amortissement que les autres méthodes lorsque sont pris en compte les phénomènes inertiels ($\nu \neq 0$), nous décidons d'étudier l'influence du coefficient de Poisson sur les schémas de Bonelli (cf. FIG. 5.12), de Tchamwa (cf. FIG. 5.13) et sur le Bulk-viscosity (cf. FIG. 5.14).

Le schéma de Bonelli n'offre pas les mêmes résultats en terme de contrainte pour plusieurs valeurs de ν . En effet, les oscillations observées sur la FIG. 5.12(a) après 19 A/R ne sont pas complètement identiques même si elles sont de même amplitude, ce qui traduit un amortissement semblable. Ainsi, l'évolution de l'énergie est identique quelque soit la valeur de ν (cf. FIG. 5.12(b)).

Le schéma de Tchamwa montre les mêmes résultats en contrainte et en énergie pour les valeurs de ν égale à 0, 0.1 et 0.3. L'amortissement des hautes fréquences numériques ne dépend pas de la valeur de ν (cf. FIG. 5.13).

On remarque finalement que, seul, le Bulk-viscosity est très sensible à ν : plus le coefficient est important, moins l'amortissement des hautes fréquences est efficace. En effet, l'amortissement du Bulk-viscosity est fonction du taux de dilatation volumique I_D dont le calcul dépend du coefficient de Poisson ν . Pour ces raisons, la dépendance de ν ne semble pas concerner les schémas de Bonelli et de Tchamwa.

FIG. 5.12 – Influence du coefficient de Poisson ν pour le schéma de BonelliFIG. 5.13 – Influence du coefficient de Poisson ν pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz

Influence du pas de temps de calcul h

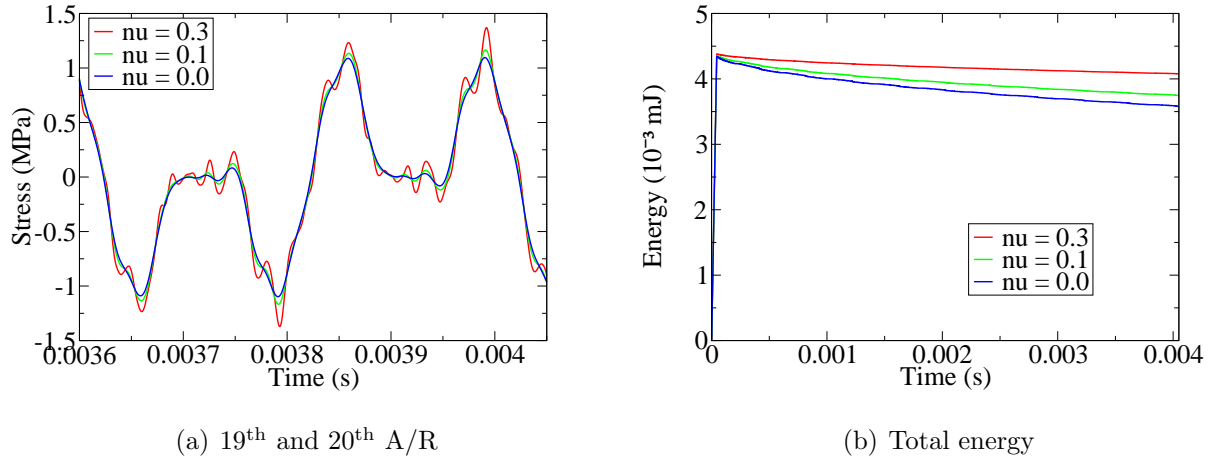
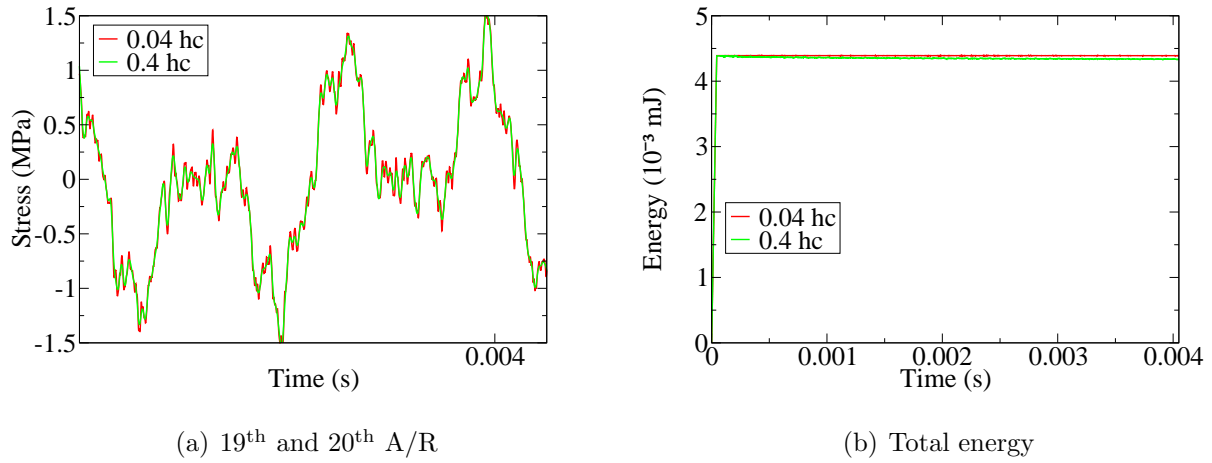
Comme pour le cas 1D, nous regardons l'influence que joue le pas de temps de calcul sur l'amortissement sur les FIG. 5.17 et 5.16.

Le schéma de Bonelli amortit moins les oscillations parasites lorsque le pas de temps h diminue devant le pas de temps critique h_c (cf. FIG. 5.15).

Le schéma temporel de Tchamwa connaît les mêmes difficultés à amortir les hautes fréquences numériques en 2D axi-symétrique qu'en 1D (cf. FIG. 5.16).

Le Bulk-viscosity ne connaît pas de dépendance au pas de temps pour son amortissement (cf. FIG. 5.17). Finalement, les conclusions sont les mêmes que pour le cas 1D : l'amortissement des schémas temporels dépend considérablement de h . Ainsi plus le pas de temps diminuera, moins l'amortissement des oscillations parasites sera efficace.

Le calcul du pas de temps critique étant étroitement lié à la taille des éléments, ceci

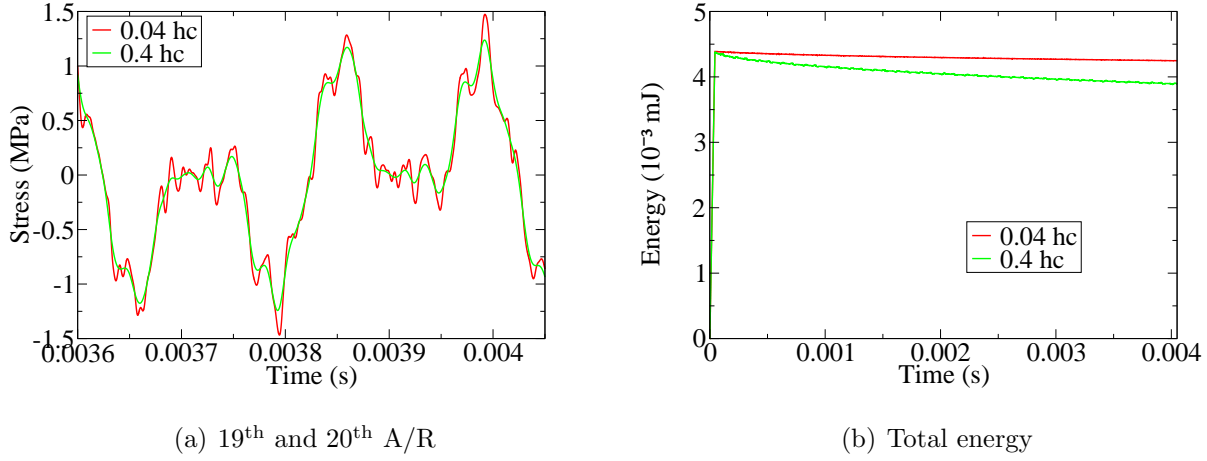
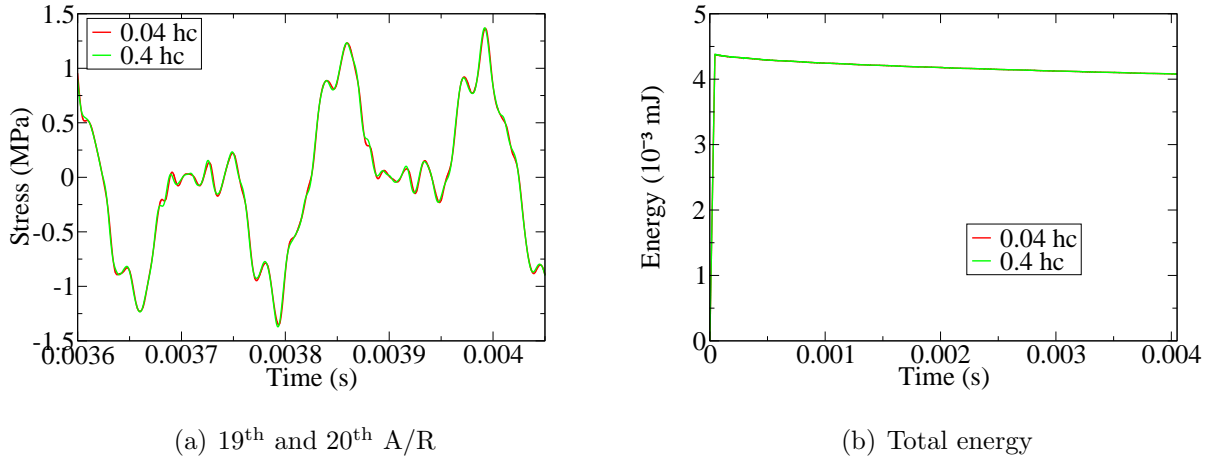
FIG. 5.14 – Influence du coefficient de Poisson ν pour le Bulk-viscosityFIG. 5.15 – Influence du pas de temps h pour le schéma de Bonelli

implique que l'utilisation d'un maillage faisant intervenir des éléments dont la taille est très différente les uns des autres ne permettra pas un amortissement efficace des oscillations parasites.

Conclusion

Cette étude d'une barre 3D axi-symétrique chargée de manière homogène sur sa section a permis de mettre en valeur différents points :

- Le chargement homogène sur la section associé à une géométrie où la longueur de la barre est très importante devant son diamètre assure une propagation globalement axiale ([Follansbee et Franz(1983)]) et la variation des contraintes dans la section est faible. L'utilisation d'un chargement non homogène sur la section ne permet pas de faire apparaître des phénomènes inertiels plus importants car le front d'onde se déplaçant dans

FIG. 5.16 – Influence du pas de temps h pour le schéma de Tchamwa-WielgoszFIG. 5.17 – Influence du pas de temps h pour le bulk-viscosity

la barre tend à devenir *plat*. Pour ce faire, il faudrait utiliser des barres de plus gros diamètre comme celle étudiées par [Merle et Zhao(2006)].

- La contrainte axiale laisse apparaître des oscillations hautes fréquences pouvant être filtrées par une méthode amortissantes et des oscillations de plus basses fréquences (dépendant du choix d'une matrice masse consistante) qui se propagent tout au long du calcul.
- Les contraintes transverse et de cisaillement sont fortement bruitées pas des oscillations parasites qu'une méthode amortissante parvient à réduire considérablement.
- L'amortissement réalisé par le bulk viscosity est sensible au coefficient de Poisson.
- L'amortissement réalisé par un schéma d'intégration temporelle (Tchamwa et Bonelli) est sensible au pas de temps de calcul utilisé (et donc à la discrétisation spatiale).

5.2.5 Conclusion

La simulation de la propagation d'une onde dans une barre 3D axi-symétrique grâce à une discrétisation temporelle réalisée par la *MDF* ou par la *MEF* et à la discrétisation spatiale réalisée par la *MEF* nous a permis de mettre en valeur l'amortissement pour les différentes méthodes étudiées.

On retrouve exactement les résultats 1D dans le cas où le coefficient de Poisson $\nu = 0$.

On a également pu constater une dépendance du Bulk-viscosity au coefficient de Poisson ν et une dépendance des schémas d'intégration temporelle amortissants au pas de temps de calcul h (comme pour le cas 1D) en ce qui concerne l'amortissement des hautes fréquences.

Les prochains paragraphes seront consacrés à l'utilisation des méthodes amortissantes sur des cas pratiques permettant ainsi d'évaluer leur efficacité sur des cas *plus réels*. Dans un premier temps, nous étudierons le comportement dynamique d'une barre en aluminium impactée par une barre projectile suivant le dispositif des barres d'Hopkinson. Ensuite, nous évaluerons les résultats de ces méthodes sur l'impact transversal d'une tôle en acier de construction navale grâce au dispositif d'arbalète développé au [LG2M(2006)].

Chapitre 6

Applications

Contents

6.1	Essai d'impact axial sur une barre en aluminium	134
6.1.1	Résultats expérimentaux	134
6.1.2	Résultats numériques pour une modélisation 1D	135
6.1.3	Résultats numériques pour une modélisation 3D axi-symétrique . .	140
6.1.4	Conclusion	143
6.2	Essai d'impact transversal sur une tôle en acier	144
6.2.1	Résultats expérimentaux	144
6.2.2	Résultats numériques	144
6.2.3	Conclusion	148
6.3	Conclusion	149

6.1 Essai d'impact axial sur une barre en aluminium

Après l'étude sur un cas 3D axi-symétrique où les valeurs numériques étaient choisies de manière à normer les paramètres, nous nous intéressons à un cas d'impact réalisé expérimentalement.

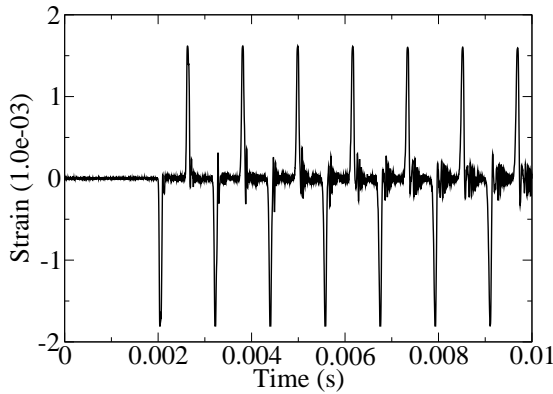
Il s'agit d'une barre en aluminium *libre-libre* de longueur $L_{barre} = 2991mm$, de diamètre $\phi = 40mm$ placée dans un dispositif de barres d'Hopkinson et qui est impactée par une barre projectile en aluminium de même diamètre mais plus courte $L_{projectile} = 150mm$. Les caractéristiques matériaux sont les suivantes : célérité : $c_0 = 5140m.s^{-1}$, masse volumique : $\rho = 2820kg.m^{-3}$ et $\nu = 0.3$.

6.1.1 Résultats expérimentaux

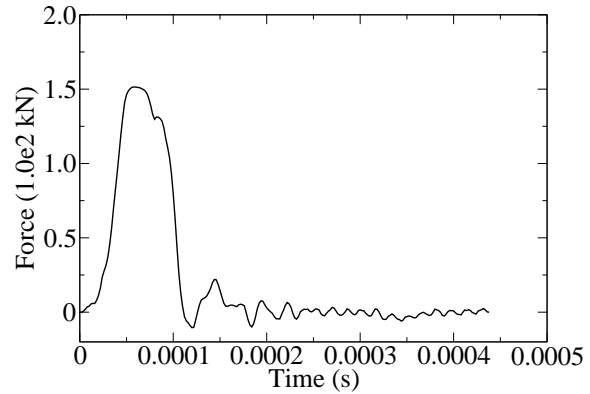
La durée de chargement t_{load} dépend de la longueur du projectile et du temps que met l'onde pour effectuer 1 A/R. Elle est évaluée comme ceci :

$$t_{load} = \frac{2 L_{projectile}}{c_0} = 1.167 \cdot 10^{-4} s$$

Au milieu de la barre, à une distance $d_{jauge} = 1507mm$ de l'extrémité libre impactée, est placée une jauge de déformation. Cette jauge permet l'enregistrement de la déformation axiale avec une fréquence d'échantillonnage de $f_{echantillon} = 500kHz$. Du fait d'une longueur L_{barre} très supérieure au diamètre ϕ , on peut considérer la propagation dans cette barre comme 1D. Ainsi, la déformation ϵ mesurée par la jauge peut être facilement reliée à la contrainte σ par le module d'Young E . On représente sur la FIG. 6.1(a) l'évolution de la déformation en fonction du temps enregistrée au milieu de la barre.



(a) Evolution de la déformation relevée expérimentalement



(b) Détermination d'un chargement

FIG. 6.1 – Déformation et détermination d'un chargement en découlant

A partir de ces données expérimentales, il est possible de déterminer le chargement engendré par le projectile. En effet, si on considère que la dispersion est nulle, au vu des dimensions géométriques, on peut remonter à l'évolution de la force d'impact F au cours du temps à

partir de $F = \sigma S$, où $S = \frac{\pi\phi^2}{4}$ est la section. On obtient ainsi une courbe de chargement en fonction du temps repérée à la FIG. 6.1(b).

Les résultats issus d'un essai expérimental de barres d'Hopkinson sur une barre en aluminium nous ont permis d'approcher la forme du chargement généré par une barre projectile. Connaissant le chargement, nous pouvons dès à présent simuler numériquement le comportement dynamique de cette barre et évaluer l'efficacité des méthodes amortissantes. Nous utiliserons, pour ce faire, des modélisations 1D et 3D axi-symétrique.

6.1.2 Résultats numériques pour une modélisation 1D

Dans un premier temps, le comportement dynamique de la barre est simulé en 1D, négligeant ainsi les phénomènes inertiels.

Le maillage 1D utilisé est composé de 250 éléments d'une longueur de $L_{elt} = 11.964mm$. Le pas de temps critique est alors de $h_c = 2.32763 \cdot 10^{-6}s$. Nous choisissons un pas de temps de calcul proche du pas de temps critique et correspondant à 90% de h_c au sens CFD.

Des sorties en contrainte sont effectuées au point d'intégration du 125^{ème} élément, soit à une distance de l'impact de $d_{sortie} = 1489.52mm$.

L'énergie totale du système est également observée pour connaître l'amortissement pour chaque méthode.

Résultats pour les schémas CFD, de Tchamwa et de Bonelli et pour le Bulk-viscosity

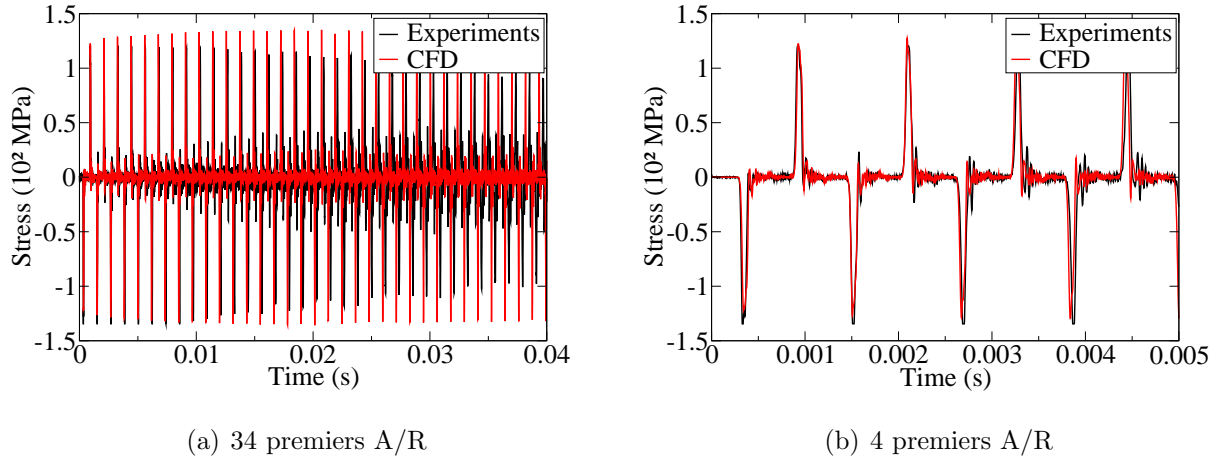


FIG. 6.2 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma CFD

On constate tout d'abord sur la FIG. 6.2(a) que le signal numérique bien que globalement proche du signal expérimental, présente un léger décalage de phase. Le but ici n'est pas d'obtenir quelque chose de parfaitement identique mais plutôt de comparer l'efficacité des différentes méthodes amortissantes. En effet, de nombreux éléments expérimentaux sont négligés comme le frottement de la barre dans les paliers, le contact entre la barre projectile et la barre de mesure ou encore les différentes erreurs de mesure.

Ensuite, il est important de noter l'évolution décroissante des pics sur le signal de mesure expérimental. Cet effet de dissipation n'est pas vérifié dans tous les essais aux barres d'Hopkinson et il pourrait s'agir de l'influence du contact entre la barre et les paliers notamment, contact qui n'est pas pris en compte dans la simulation numérique.

Hormis ces effets de déphasage et de dissipation concernant l'expérimental, on parvient à reproduire assez fidèlement ce signal avec un schéma CFD (cf. FIG. 6.2(b)). Des oscillations identiques sont observées entre chaque pic.

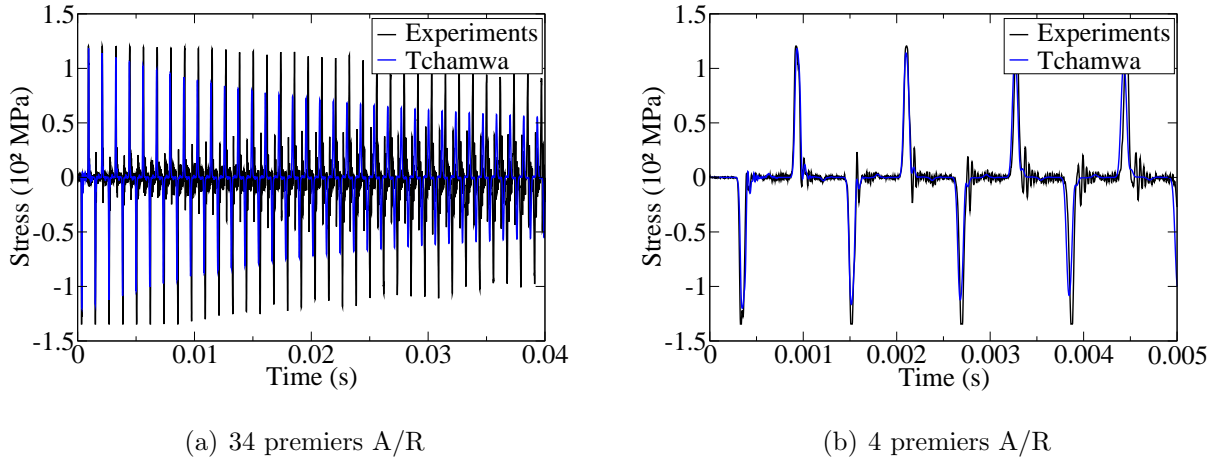


FIG. 6.3 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma de Tchamwa

Les résultats obtenus par le schéma de Tchamwa avec un paramètre $\varphi = 1.03$ (cf. FIG. 6.3) font apparaître une dissipation des hautes fréquences numériques. En effet, l'amplitude des pics décroît plus rapidement que celle des pics expérimentaux. Les oscillations observées entre chaque pic sont également filtrées.

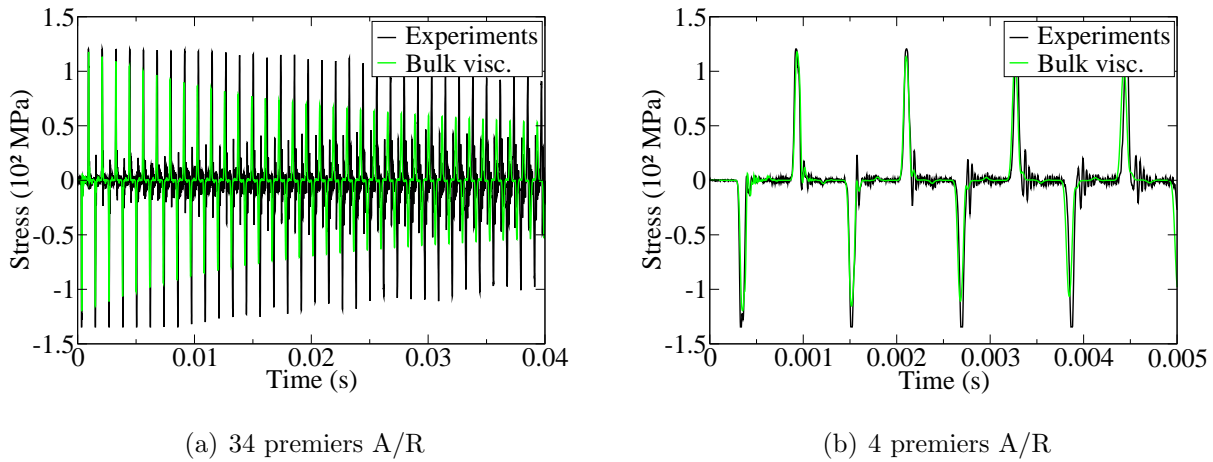


FIG. 6.4 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le Bulk-viscosity

Concernant le Bulk-viscosity avec un paramètre $C_1 = 0.06$, on remarque le même amortissement que le schéma de Tchamwa :

- amortissement de l'amplitude des pics
- amortissement des oscillations entre chaque pic

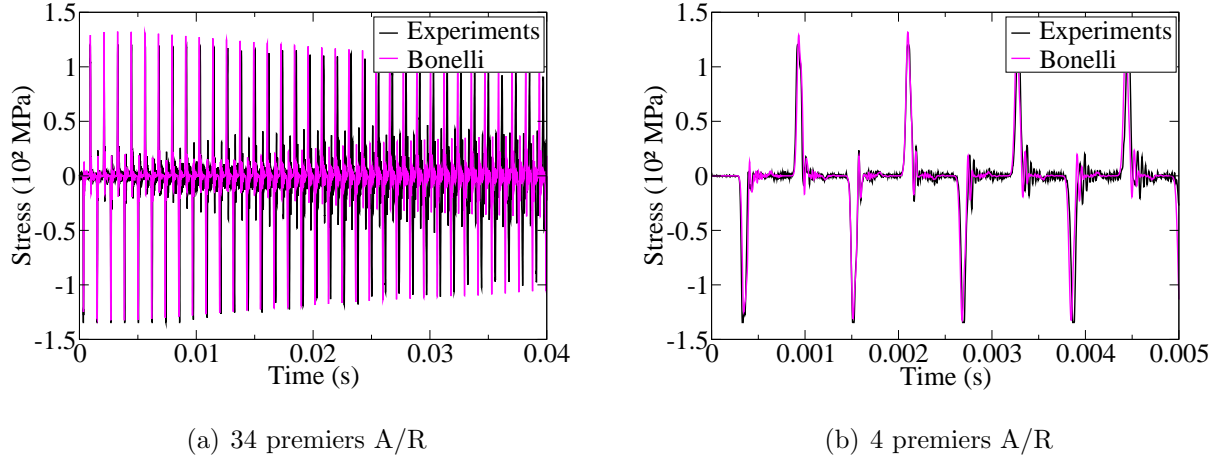


FIG. 6.5 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Bonelli

Le schéma de Bonelli avec un paramètre $\rho_b = 0.9$ observé sur la FIG. 6.5 dissipe moins d'énergie (cf. §4.2.3). On remarque également que le schéma de Bonelli permet d'obtenir une amplitude des pics la plus proche de la solution expérimentale, comparé aux autres schémas qui dissipent trop d'énergie. Le filtrage des hautes fréquences est un peu moins efficace mais reste correct pour obtenir des résultats se rapprochant de la solution expérimentale.

On peut également comparer les schémas entre eux en fonction de l'énergie dissipée. La FIG. 6.6 confirme les observations en contrainte à savoir un amortissement très important du schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity qui ont dissipé 60% de l'énergie totale du système en 19000 pas de temps de calcul, soit une propagation de $200m$.

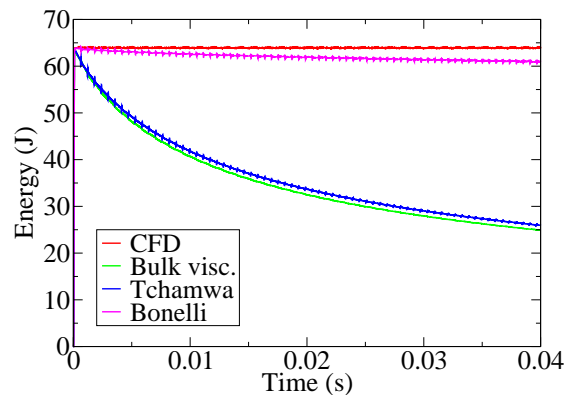


FIG. 6.6 – Evolution de l'énergie pour les différentes méthodes numériques

Finalement, la modélisation 1D du phénomène nous permet d'obtenir un premier résultat intéressant concernant les différents schémas et méthodes amortissantes utilisés. On montre l'efficacité de ces méthodes qui parviennent à amortir toutes les oscillations numériques.

Résultats pour le schéma de Tchamwa avec pilotage de l'amortissement

La méthode développée au §4.3 est évaluée sur cet exemple de barre en aluminium. Nous utilisons la même méthodologie pour déterminer les constantes :

- Le nombre de valeurs de l'accélération sur lesquelles sont effectuées le calcul de la moyenne est $n = 4$.
- Le paramètre d'amortissement maximal reste $\varphi = 1.03$.
- La borne inférieure de la vitesse moyenne val_{\min} en dessous de laquelle l'amortissement est maximal et fonction de l'accélération nodale. L'amplitude maximale *d'une oscillation parasite* pour le schéma de CFD lors du premier Aller peut être visualisée sur la FIG. 6.7(a). Elle est fixée à $\text{val}_{\min} = 250$.
- La borne supérieure de la moyenne de l'accélération val_{\max} au dessus de laquelle l'amortissement est nul. Cette borne est fixée en fonction de l'amplitude maximale *de l'onde* pour le schéma de CFD lors du premier Aller. Grâce à la FIG. 6.7(a), elle est fixée à $\text{val}_{\min} = 1000$.
- La borne inférieure de l'accélération a que l'on fixe à $a = 0$.
- La borne supérieure de l'accélération b est très sensible. Nous choisissons ce paramètre de l'ordre de l'accélération caractéristique *des oscillations parasites* (cf. FIG. 6.7(b)). Il prendra la valeur de $2.0 \cdot 10^{-08}$ et nous évaluerons également les résultats lorsque b prendra la valeur de $5.0 \cdot 10^{-08}$ (augmentation de $b \Rightarrow$ amortissement plus faible).

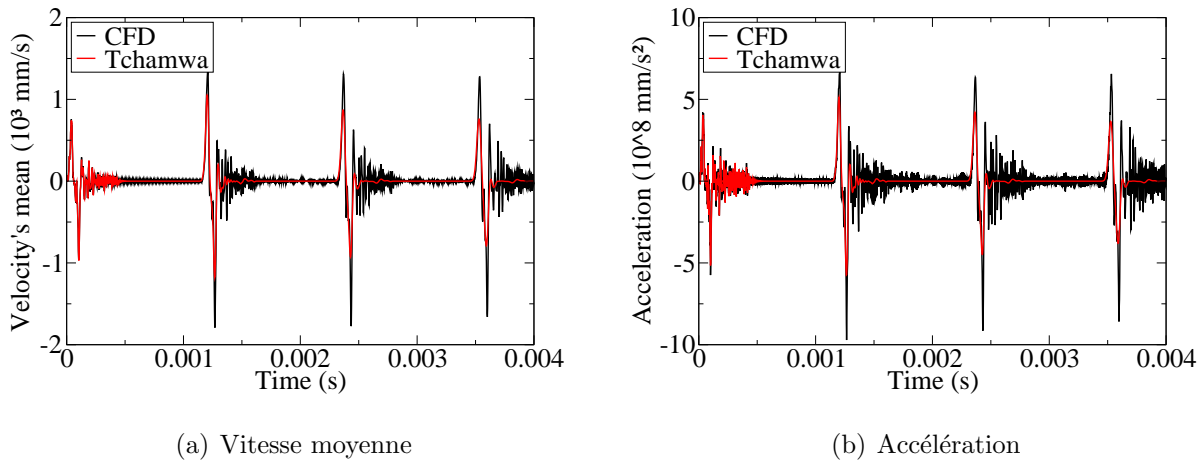


FIG. 6.7 – Evolution de la vitesse moyenne et de l'accélération

Les FIG. 6.8 et 6.9 permet d'observer les résultats en contrainte pour les schémas de Tchamwa avec :

- un amortissement permanent $\varphi = 1.03$, repéré "Continuous damp. 1"
- un amortissement piloté, avec $b = 2.0 \cdot 10^{-08}$, repéré "Progressive damp. 1"
- un amortissement permanent $\varphi = 1.01$, repéré "Continuous damp. 2"

- un amortissement piloté, avec $b = 5.0 \cdot 10^{-08}$, repéré "Progressive damp. 2"

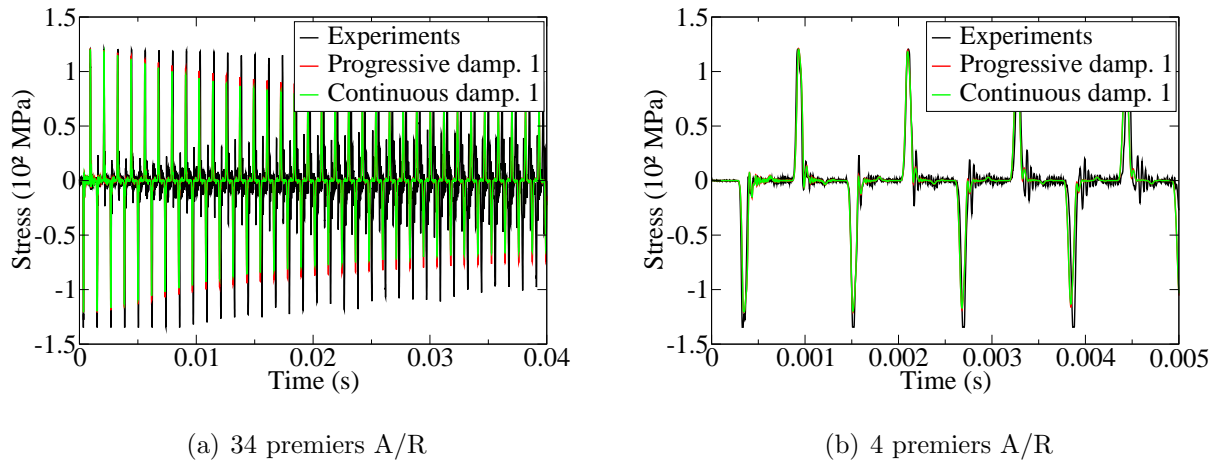


FIG. 6.8 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Tchemwa piloté

Avec un paramètre d'amortissement $\varphi = 1.03$ (cf. FIG. 6.8), on avait constaté que l'amortissement du signal était trop important, diminuant ainsi l'amplitude en contrainte de l'onde qui se propageait dans la barre. En utilisant le pilotage du schéma de manière à amortir fortement les oscillations parasites au début du calcul, cela permet de limiter l'amortissement de l'amplitude de l'onde.

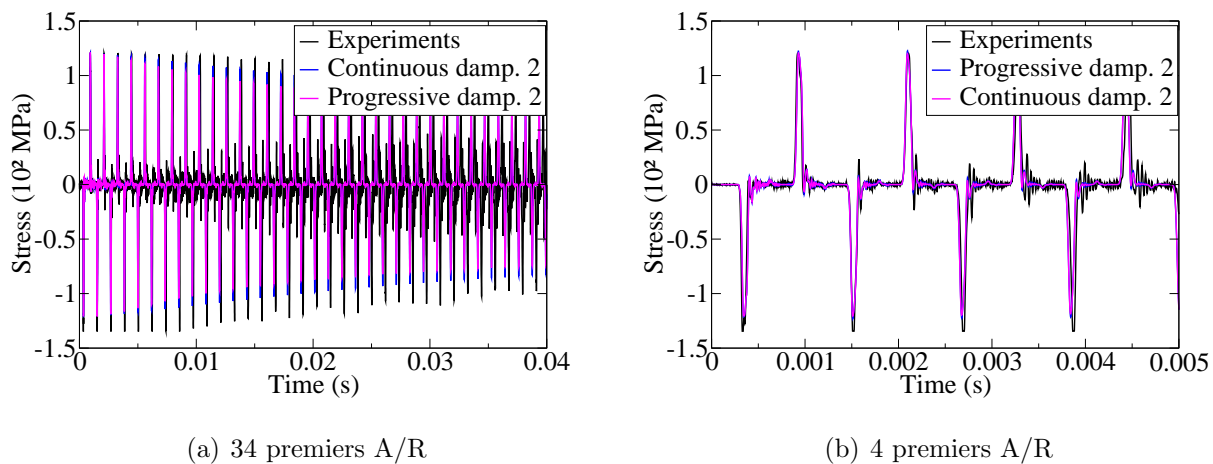


FIG. 6.9 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Tchemwa piloté

L'amortissement étant trop important avec un paramètre constant $\varphi = 1.03$, il est possible de diminuer ce paramètre. On observe les résultats avec un paramètre constant $\varphi = 1.01$ sur la FIG. 6.9. On peut comparer le signal obtenu avec celui issu du pilotage de l'amortissement où l'on a conservé le paramètre d'amortissement $\varphi = 1.03$ mais on a modifié le paramètre $b = 5.0 \cdot 10^{-08}$ en l'augmentant de manière à limiter l'amortissement de certaines accélérations nodales. On remarque un comportement quasi similaire pour ces deux signaux au début du

calcul mais au fur et à mesure, le signal issu d'un amortissement permanent dissipe plus d'énergie et l'amplitude en contrainte diminue.

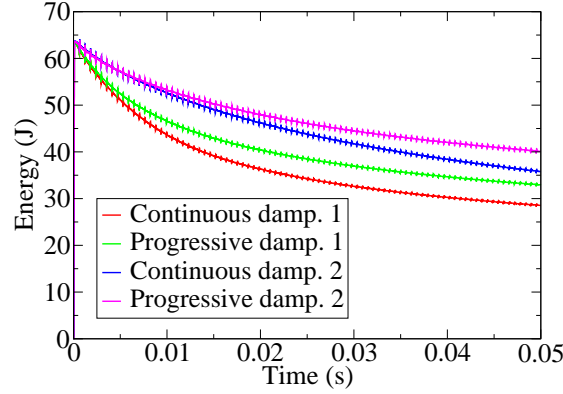


FIG. 6.10 – Evolution de l'énergie pour les schémas de Tchamwa pilotés

L'évolution de l'amortissement peut également être observée sur la FIG. 6.10. Cette courbe met en valeur l'avantage d'un schéma de Tchamwa piloté qui limite la dissipation de l'énergie au cours du calcul.

Conclusion

Les différentes méthodes amortissantes utilisées sur un exemple issu d'un essai expérimental montrent leur efficacité à amortir les hautes fréquences numériques. Le schéma de Bonelli, qui est très proche du schéma CFD pour les impulsions permet, malgré son faible amortissement, de se rapprocher des amplitudes expérimentales. On note également un amortissement trop important du schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity. Il n'agit pas seulement sur les hautes fréquences et *rogne* continûment l'amplitude de l'onde se propageant dans la barre. L'utilisation d'une méthode servant à piloter l'amortissement assure un amortissement efficace des hautes fréquences introduites lors du chargement et *régule* ensuite l'amortissement pour éviter la ré-apparition de ces hautes fréquences. La méthodologie pour déterminer les paramètres de pilotage développée au §4.3 a permis d'obtenir un jeu de paramètres valides.

6.1.3 Résultats numériques pour une modélisation 3D axi-symétrique

Dans un second temps, le comportement dynamique de la barre est simulé en 3D axi-symétrique, prenant en compte les phénomènes inertiels.

Le maillage 3D est composé de 250×4 éléments axi-symétriques d'une longueur de $L_{elt} = 11.964mm$ et d'une largeur $l_{elt} = 5mm$. Le pas de temps critique calculé par Herezh est alors de $h_c = 9.7276 \cdot 10^{-7}s$. Pour des raisons de stabilité, nous choisissons un pas de temps de calcul correspondant à 40% de h_c au sens CFD.

Des sorties en contrainte sont effectuées aux points d'intégration du 501^{ème} élément, soit à une distance de l'impact de $d_{sortie} = 1497.47mm$ et une distance de l'axe de la barre de $3.94mm$.

Résultats pour les schémas CFD, de Tchamwa et de Bonelli et pour le Bulk-viscosity

Comme pour le cas 1D, nous observons les contraintes axiales σ_{xx} dans la barre pour les schémas CFD, de Tchamwa et de Bonelli et pour le Bulk-viscosity.

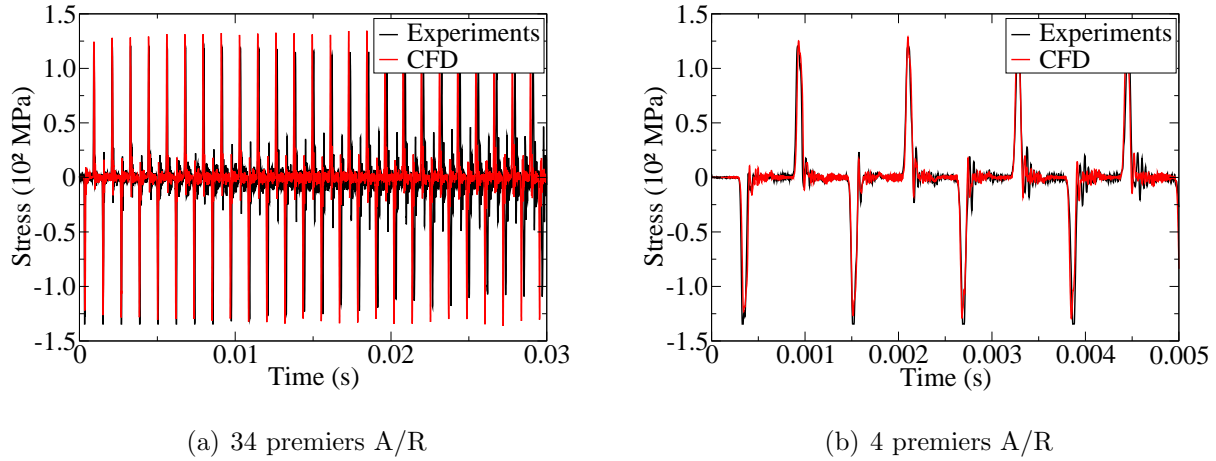


FIG. 6.11 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma CFD

Le schéma CFD (cf. FIG. 6.11) pour un problème 3D axi-symétrique offre quasiment les mêmes résultats que pour le cas 1D. Le caractère conservatif de ce schéma assure une conservation de l'amplitude des pics tout au long du calcul. Des oscillations hautes fréquences sont également observées entre chaque pic.

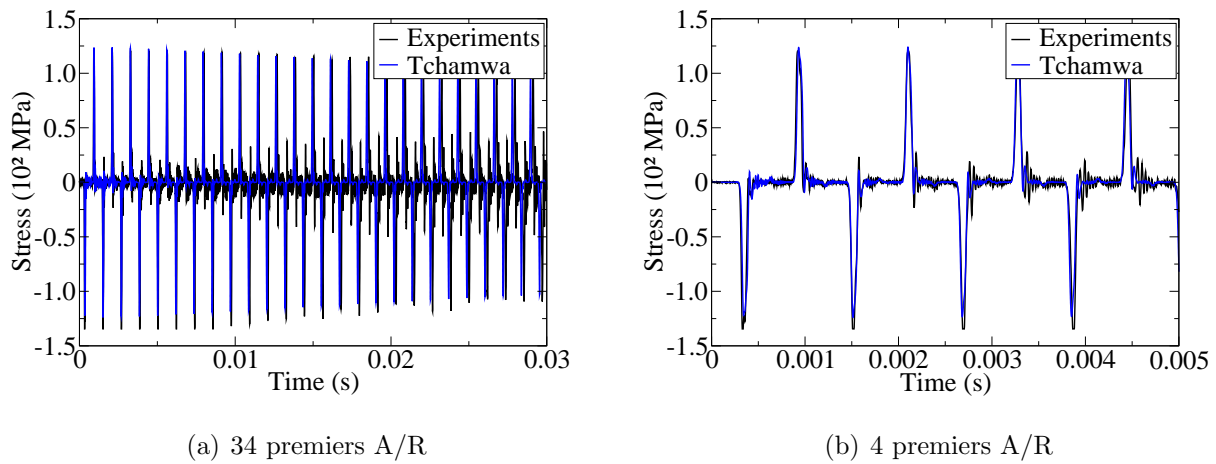


FIG. 6.12 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma de Tchamwa

En 3D axi-symétrique, le schéma de Tchamwa dissipe moins d'énergie pour amortir les hautes fréquences numériques. Cela se traduit par une baisse de l'amplitude des pics moins

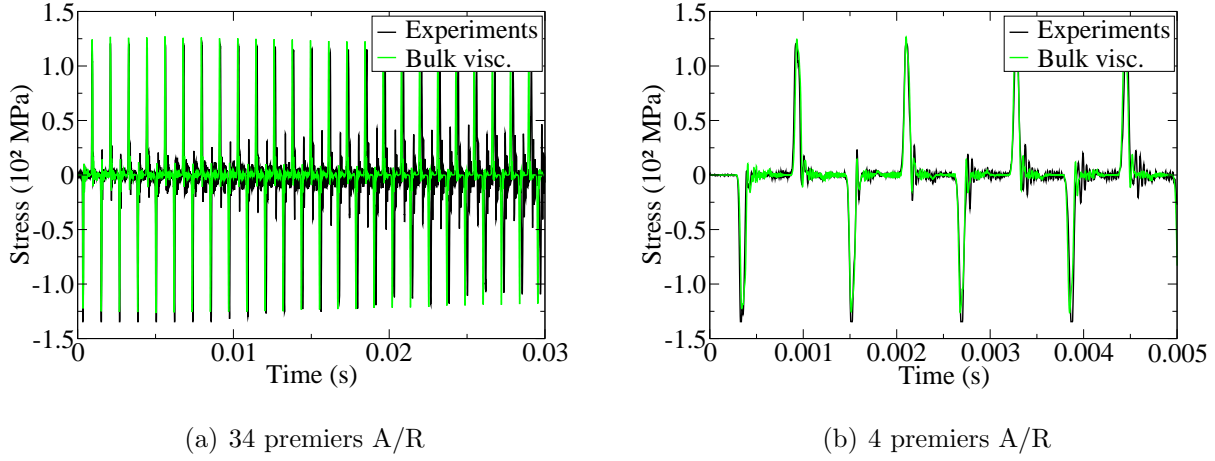


FIG. 6.13 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le Bulk-viscosity

importante que dans le cas 1D et se rapprochant plus des résultats expérimentaux (cf. FIG. 6.12).

Le même phénomène que pour le schéma de Tchamwa est observé pour le Bulk-viscosity : la baisse de l'amplitude des pics est moins importante. Les oscillations hautes fréquences observées entre les pics sont tout de même amorties.

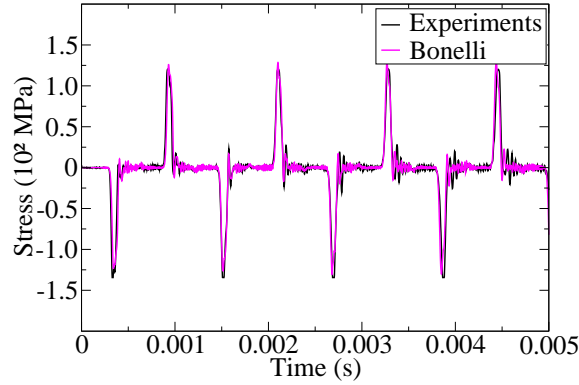


FIG. 6.14 – Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Bonelli pour les 4 premiers A/R

Nous ne présentons que les résultats pour les 4 premiers A/R pour le schéma de Bonelli. Les coûts de calcul étant prohibitifs comparés aux autres méthodes, seule la première partie du calcul est présentée. Cela n'entrave en rien les conclusions sur ce cas 3D. On peut ainsi observer une filtration des hautes fréquences entre chaque pic comparé au schéma CFD malgré un amortissement faible.

L'évolution de l'énergie pour chaque méthode est présentée sur la FIG. 6.15. Les baisses d'énergie pour chaque méthode est moins importante que dans le cas 1D. Elle reste nettement

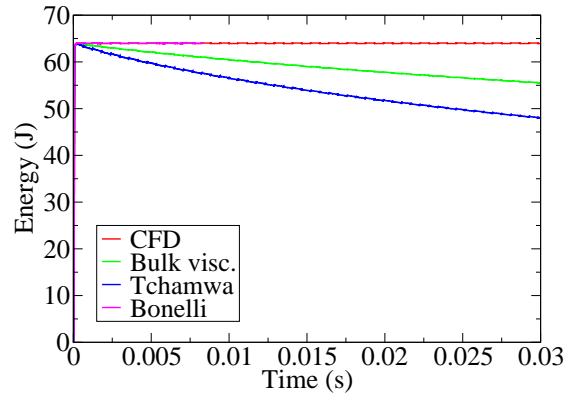


FIG. 6.15 – Evolution de l'énergie pour les différentes méthodes numériques

plus importante pour le schéma de Tchamwa comparé au Bulk-viscosity alors que ces baisses étaient quasi-identiques en 1D. Le schéma de Bonelli dissipe aussi moins d'énergie.

Conclusion

Finalement, cet essai 3D axi-symétrique conforte certaines conclusions du §5.2 :

- L'amortissement est moins important en 3D qu'en 1D.
- Le schéma de Tchamwa amortit plus que le Bulk-viscosity en 3D, alors qu'ils avaient un amortissement sensiblement identique en 1D.

6.1.4 Conclusion

L'utilisation d'un essai aux barres d'Hopkinson nous a permis d'obtenir l'évolution de la contrainte au cours du temps dans la barre impactée. Grâce à ces données, nous avons pu déterminer un chargement expérimental que l'on peut appliquer à notre modèle numérique. Cet exemple nous permet donc de confronter les méthodes à des considérations expérimentales (géométrie, matériau, chargement).

Finalement, les principales conclusions que l'on peut tirer de ceci sont les suivantes :

- La modélisation 1D du problème met en évidence un amortissement des oscillations parasites mais également un amortissement continu du signal qui se *dégrade* au fur et à mesure. L'utilisation d'un pilotage de l'amortissement permet alors de réduire la dissipation d'énergie.
- La modélisation 3D axi-symétrique du problème met en évidence un amortissement des oscillations parasites ainsi qu'une baisse énergétique moins importante traduisant un plus faible amortissement au total.
- Les différentes méthodes amortissantes utilisées montrent en 1D et 3D leur efficacité à filtrer les hautes fréquences numériques.

Intéressons-nous maintenant à un cas mettant en jeu des effets de flexion en lieu et place des effets de traction / compression étudiés jusqu'à présent. Nous étudierons pour cela le comportement dynamique d'une tôle impactée transversalement.

6.2 Essai d'impact transversal sur une tôle en acier

Le laboratoire LG2M a développé depuis 1998 un dispositif d'impact grâce aux travaux de thèse de [Couty(1999)]. Cette machine a connu un certain nombre d'améliorations qui permettent aujourd'hui de réaliser des essais plus fiables sur des tôles de différentes géométries, avec diverses conditions d'encastrement et des projectiles présentant différentes caractéristiques (masse, géométrie). Les récents travaux de S. Umiastowski ont permis le développement d'un projectile inspiré du *Sensing Block System* de S. Tanimura ([Chuman et al.(1997)], [Tanimura(1984)] et [Tanimura et al.(2001)]). Le lecteur pourra se reporter à l'étude détaillée de ce projectile dans la thèse de [Umiastowski(2005)]. La principale particularité de ce projectile instrumenté est de pouvoir déterminer l'évolution de la force de contact au cours de l'impact. L'obtention de cette force va nous permettre d'appliquer un chargement *physique* à l'échantillon de tôle pour observer l'efficacité des méthodes amortissantes.

Le but de cette étude est donc de déterminer numériquement la capacité des méthodes amortissantes à filtrer les hautes fréquences numériques pour un exemple d'application totalement issu de l'expérimentation (chargement, dimensions, caractéristiques matérielles).

6.2.1 Résultats expérimentaux

Pour cette étude, nous reprenons un essai réalisé dans le cadre de la thèse de S. Umiastowski durant lequel, il a été possible de déterminer la force de contact grâce au projectile étagé. Les dimensions de la tôle sont les suivantes : longueur $L = 224mm$, largeur $l = 15mm$, épaisseur $ep = 4mm$. Des mors viennent serrer la tôle à chaque extrémité de manière à représenter le plus possible un encastrement. Le projectile d'une masse de $m = 960g$ percute la tôle en son centre comme le montre la FIG. 6.16. L'échantillon de tôle se déforme principalement en flexion et on peut observer une flèche résiduelle de l'ordre de plusieurs dizaines de millimètres, soulignant le fait que l'essai fait intervenir de la plasticité.

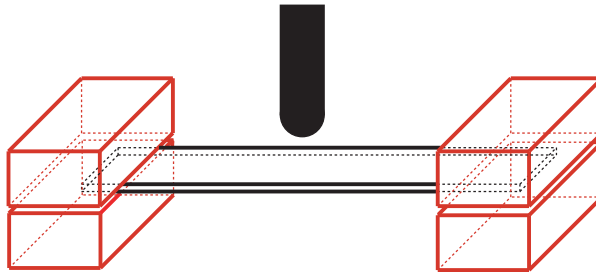


FIG. 6.16 – Impact transversal d'une tôle par le dispositif du LG2M

L'évolution de la force mesurée par le projectile est représentée sur la FIG. 6.17. Cette force obtenue expérimentalement va nous permettre de définir numériquement un chargement *physique* adéquat s'affranchissant de tout problème de contact.

6.2.2 Résultats numériques

Une tôle aux mêmes dimensions géométriques que celles de l'essai expérimental est modélisée en trois dimensions et maillée par des éléments briques linéaires au $\frac{1}{4}$. La demi-longueur

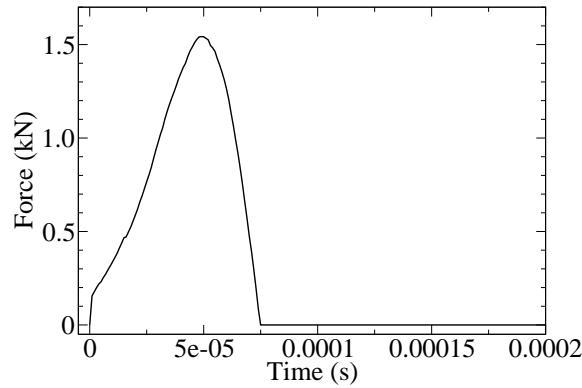


FIG. 6.17 – Force mesurée par le projectile étagée

est décomposée de 40 éléments, la demi-largeur de 4 et l'épaisseur de 10 éléments permettant de représenter au mieux la flexion.

Les caractéristiques matérielles sont les suivantes :

- Module Young $E = 190GPa$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.29$
- Densité $\rho = 7.8 \cdot 10^{-9} ton.m^{-3}$

[Soive(2003)] montrait dans sa thèse que les lois élastiques étaient les plus contraignantes en terme de présence d'oscillations numériques parasites. Pour ces raisons, nous choisissons d'utiliser une loi de type élastique plaçant ainsi les différentes méthodes dans la situation la plus défavorable.

Les conditions limites appliquées à notre tôle sont un encastrement de tous les noeuds situés à l'extrémité libre de la tôle. La plaque étant maillée au $\frac{1}{4}$, des conditions de symétries ad hoc sont utilisées pour les noeuds en question.

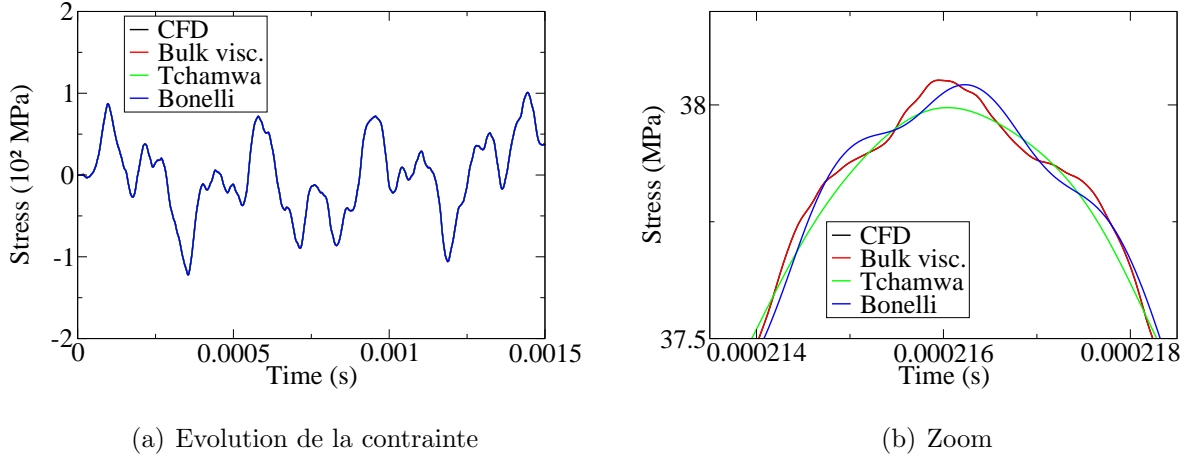
Un chargement en pression est appliqué sur la face de un seul élément au centre de l'échantillon où la surface de de l'élément mesure $S_{elt} = 5.11mm^2$.

Différentes méthodes amortissantes sont évaluées sur cet exemple d'application pour connaître leur efficacité à amortir les hautes fréquences numériques d'un cas *plus physique* que les cas tests 1D et 3D.

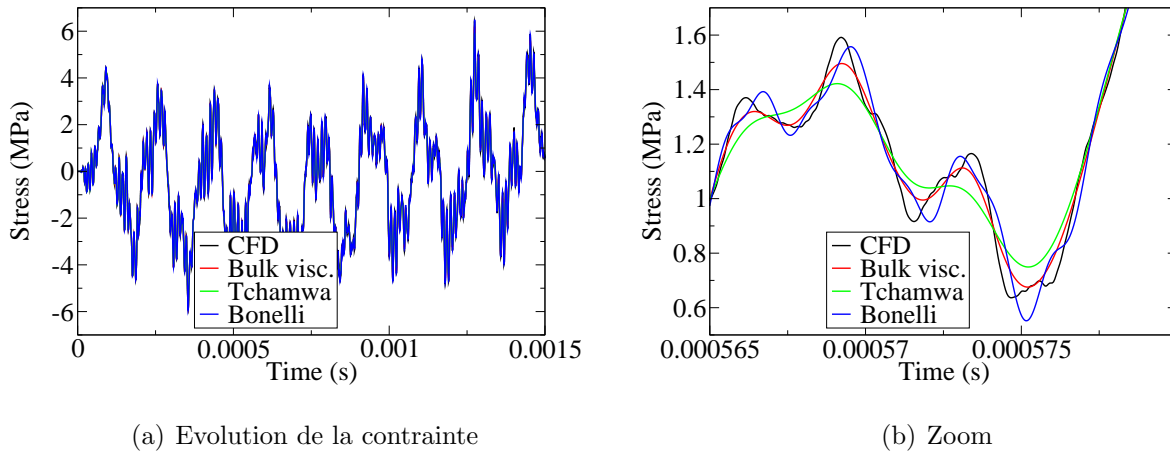
Résultats pour les schémas CFD, de Tchamwa et de Bonelli et pour le Bulk-viscosity

Les résultats en contraintes axiales σ_{xx} sont présentés sur la FIG. 6.18. On peut visualiser que de très faibles différences sont observées entre les différentes méthodes amortissantes. Un zoom important permet de s'en rendre compte.

Lors des précédentes études en 3D axi-symétriques, on s'était aperçu que l'amortissement des hautes fréquences numériques était très peu visible sur les contraintes axiales. On constate que c'est également le cas en 3D. Les résultats en contraintes transverses σ_{yy} sont présentés sur la FIG. 6.19. On remarque que de faibles différences sont également observées pour σ_{yy} .

FIG. 6.18 – Evolution de la contrainte σ_{xx} pour les méthodes amortissantes

En regardant de plus près grâce au zoom, on observe un amortissement des hautes fréquences numériques du schéma de Tchamwa et du Bulk-viscosity, principalement, qui a pour effet de diminuer l'amplitude du signal. Le schéma de Bonelli n'assure pas un amortissement aussi important pour qu'il puisse être remarqué.

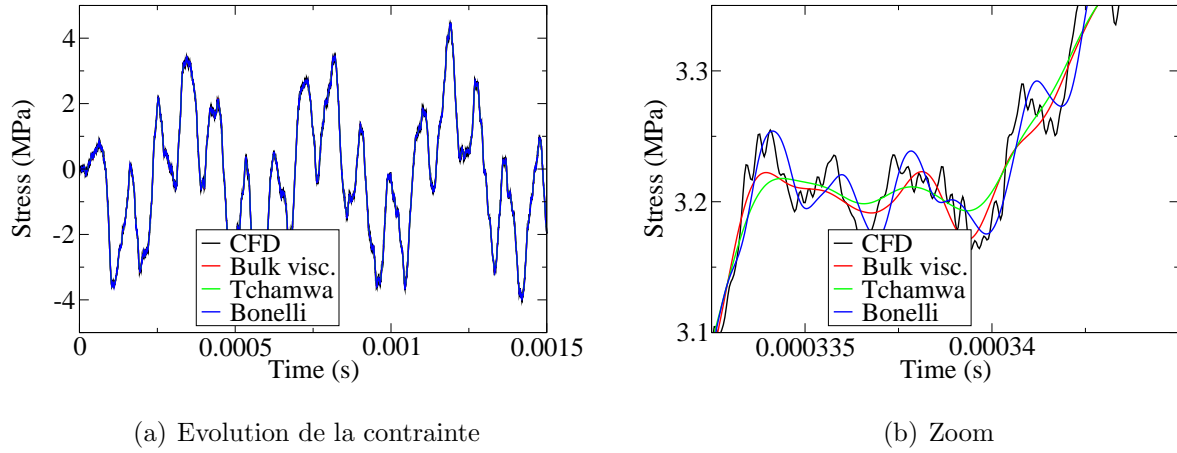
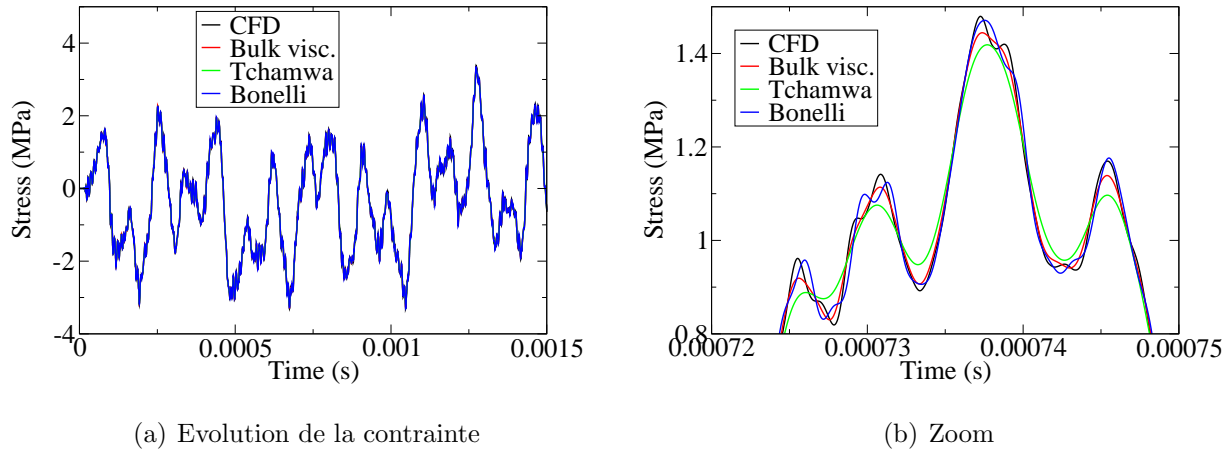
FIG. 6.19 – Evolution de la contrainte σ_{yy} pour les méthodes amortissantes

Comme pour le cas 3D axi-symétrique, on remarque plus facilement les effets de l'amortissement sur les hautes fréquences numériques. Regardons la contrainte dans l'épaisseur σ_{zz} sur la FIG. 6.20 pour savoir si l'amortissement peut être visible.

L'amortissement pratiqué par le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity est également visible sur le signal de contrainte dans l'épaisseur. Enfin, observons la contrainte de cisaillement

σ_{xy} qui nous avait permis de visualiser l'amortissement pour le cas 3D axi-symétrique.

L'amortissement observé en 3D apparaît globalement très inférieur à celui observé en 3D

FIG. 6.20 – Evolution de la contrainte σ_{zz} pour les méthodes amortissantesFIG. 6.21 – Evolution de la contrainte σ_{xy} pour les méthodes amortissantes

car le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity filtre spécifiquement les hautes fréquences entraînant une diminution quasi insensible de l'amplitude globale du signal de contrainte. En effet, le mode de sollicitation introduit ici un ensemble d'ondes physiques de flexion, de plus basses fréquences, qui ne doivent pas être filtrées.

A travers ces quelques figures permettant de visualiser l'amortissement des différentes méthodes amortissantes, on constate que l'amortissement reste faible comparé aux exemples 3D axi-symétriques et plus encore, comparé aux exemples 1D. Si l'on observe l'évolution de l'énergie au cours des calculs, on confirme sur la FIG. 6.22 que les niveaux d'énergie sont quasi-identiques et que le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity dissipe une faible quantité d'énergie pour amortir les hautes fréquences numériques.

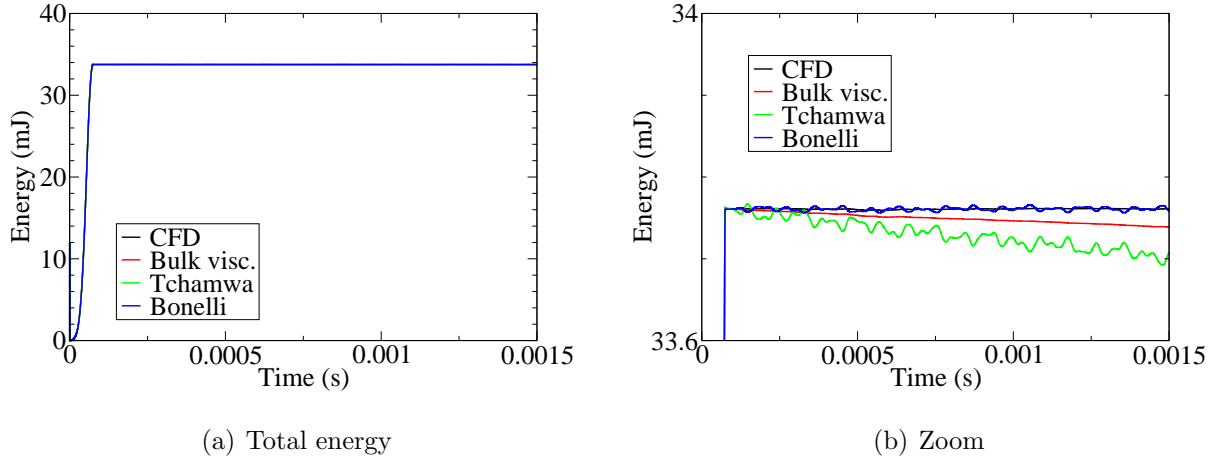


FIG. 6.22 – Evolution de l'énergie totale pour les méthodes amortissantes

6.2.3 Conclusion

En conclusion, on peut dire que cette étude nous a permis de confronter les méthodes amortissantes à un problème plus complexe et riche en fréquences physique que les cas-tests 1D et 3D axi-symétriques présentés au début de ce mémoire. En effet, un chargement issu d'une mesure expérimentale a été appliqué sur un échantillon de tôle aux caractéristiques mécaniques bien précises. Pour le moment, une loi de type élastique, plus contraignante en terme d'oscillations parasites, a été étudiée. On a montré qu'un faible amortissement était appliqué au cours du calcul et qu'il pouvait être observé principalement sur les contraintes transverses et de cisaillement.

De prochains développements viseront à utiliser une loi de type *elasto-visco-hystérésis*, dont les paramètres matériaux ont été déterminés par [Couty(1999)], pour pouvoir comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux.

6.3 Conclusion

Après avoir exposé succinctement différentes solutions théoriques et notamment la théorie des barres de [Love(1934)] permettant la prise en compte des phénomènes de contraction, nous nous sommes intéressés à l'amortissement des oscillations numériques parasites dans ce cadre 3D axi-symétrique. On remarque globalement que ces oscillations ne sont pas uniquement présentes pour la contrainte axiale, mais apparaissent également pour les contraintes transverses et de cisaillement. Si l'on s'intéresse en détails aux résultats des différentes méthodes amortissantes, voici les conclusions que l'on peut tirer :

1. Les oscillations numériques parasites observées sur σ_{xx} sont filtrées par les différentes méthodes avec un amortissement plus important pour le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity. On remarque cependant une efficacité moindre de chaque méthode amortissante pour ce cas 3D, comparé au cas 1D.
2. Les signaux des contraintes σ_{yy} et σ_{xy} laissent apparaître de très hautes fréquences numériques qui sont filtrées efficacement par toutes les méthodes.
3. L'amortissement du Bulk-viscosity est très sensible au coefficient de Poisson : l'amortissement diminuant lorsque le coefficient de Poisson augmente. Ceci s'explique par la formulation de l'amortissement du Bulk-viscosity qui est fonction du taux de dilatation volumique I_D .
4. Comme lors du cas test 1D, l'amortissement des schémas d'intégration reste sensible au pas de temps de calcul utilisé. On en déduit que l'amortissement sera d'autant plus efficace que le maillage sera homogène et le pas de temps proche du pas de temps critique.
5. La géométrie *élancée* de la barre (longueur \gg diamètre) ne permet pas d'obtenir des valeurs importantes pour les contraintes transverses et de cisaillement. L'étude de l'amortissement est réduite à la propagation d'un front d'onde homogène dans la section. Cette limitation n'est pas dérangeante dans la mesure où de nombreux cas traitent de la propagation d'onde dans des barres, notamment pour le dispositif d'Hopkinson.

C'est pour ces raisons que nous poursuivons notre étude en utilisant les données expérimentales issues d'un essai aux barres d'Hopkinson sur une barre en aluminium. Cette application permet ainsi d'utiliser une géométrie, des caractéristiques matérielles et un chargement cohérents et réels, comparé à nos exemples 1D et 3D axi-symétrique. Deux modélisations 1D et 3D axi-symétrique du problème ont permis de conforter les remarques tirées de l'étude précédente des cas tests. Il est important de noter à nouveau l'amortissement plus important dans un cas 1D que dans un cas 3D. On constate également que le schéma de Bonelli qui amortit moins que le schéma de Tchamwa et le Bulk-viscosity permet d'approcher plus fidèlement les résultats expérimentaux en 1D. Les oscillations parasites sont filtrées et la dégradation du signal reste tout à fait convenable. En 3D, du fait de la baisse générale de l'amortissement, les résultats ont tendance à se *tasser* et finalement à se rapprocher de l'expérimental.

Les méthodes amortissantes n'ont pour l'instant été étudiées que sur des propagations d'ondes de compression. Nous utilisons un essai expérimental de la thèse de S. Umiastowski simulant le comportement d'une tôle de construction navale soumise à un impact transversal et générateur d'ondes de flexion. Une loi élastique plus contraignante en terme d'apparition de hautes fréquences numériques est utilisée pour modéliser ce phénomène. L'utilisation

d'un maillage 3D de la tôle engendre une plus faible dissipation d'énergie par les méthodes amortissantes. On peut expliquer ceci par une évolution régulière de la contrainte σ_{xx} ne laissant pas apparaître de très hautes fréquences pour ce problème d'impact transversal. De ce fait, les écarts entre les schémas conservatifs comme celui de CFD et les méthodes dissipatives sont minimales. Pour observer les effets de l'amortissement, il faut s'intéresser aux contraintes transverses σ_{yy} et σ_{zz} et de cisaillement σ_{xy} par exemple. Le signal oscillant du schéma CFD est lissé par les différentes méthodes avec un lissage plus important pour le schéma de Tchamwa puis pour le Bulk-viscosity.

Chapitre 7

Conclusion

Bilan

L'étude des schémas amortissants en dynamique rapide a débuté au laboratoire [LG2M(2006)] avec les travaux de thèse de [Soive(2003)].

Nous avons rappelé que ce sujet a déjà motivé de nombreuses études depuis les années 80, cependant aucune solution définitive n'existant à ce jour, le sujet reste ouvert. L'apparition des fréquences numériques peut directement diminuer la confiance que l'on peut accorder aux résultats numériques obtenus particulièrement avec les méthodes explicites.

Utilisant différentes discrétisations temporelles explicites de la famille de la Méthode des Différences Finies (*MDF*), Anthony Soive avait notamment rappelé la mise en évidence de l'apparition et l'amplification de perturbations numériques, le phénomène de réflexion d'ondes numériques à l'interface des éléments et l'importance de la forme du chargement et il avait conclu que l'apparition de perturbations numériques et donc d'erreurs était essentiellement due à la relation étroite entre la géométrie de la discrétisation spatiale et la forme du chargement imposé. Les conclusions d'A. Soive ont constitué le point de départ de nos investigations.

Ainsi, deux nouveaux schémas d'intégration temporelle sont venus étayer notre étude : le schéma explicite et conservatif de Runge-Kutta d'ordre de précision 4-5 basé sur une discrétisation *MDF* du temps et le schéma explicite et dissipatif de Bonelli d'ordre de précision 3 basé sur une discrétisation *MEF* (Méthode des Eléments Finis) du temps. La particularité de ce dernier schéma appartenant à la famille des méthodes de Galerkin-discontinu, réside dans le fait qu'il inclut par essence la possibilité d'avoir des discontinuités en position ou en vitesse. De plus, dans le cadre de la mécanique, très peu de travaux ont été publiés sur de telles méthodes explicites contrairement aux cas implicites.

Ces deux nouvelles méthodes de discrétisation temporelle ont alors été comparées aux schémas de CFD de Tchamwa et au Bulk-viscosity sur des exemples 1D, 2D et 3D.

Tout d'abord, les travaux ont concerné un cas 1D, cas se voulant résolument simple pour assurer une compréhension facilitée des phénomènes (absence de dispersion) et pour pouvoir effectuer des comparaisons à partir d'une solution semi-analytique déterminée par superposition modale.

On a pu remarquer que l'utilisation du schéma de Runge-Kutta avec une précision d'ordre 4-5 ne permet pas de s'affranchir des oscillations numériques parasites. Une méthode d'amortissement est nécessaire pour pouvoir *filtrer* les hautes fréquences numériques, à défaut de *compléter* par des hautes fréquences, le modèle imparfait de la discrétisation temporelle.

Conformément aux résultats existants sur les schémas classiques nous avons pu ensuite constater le rôle important de la matrice masse qui conditionne le problème. En effet, suivant le choix de la matrice masse, des oscillations parasites différentes (amplitude et fréquence) sont générées et l'amortissement pratiqué par les différentes méthodes amortissantes sera conditionné par ce choix. On peut relever notamment un amortissement moins efficace de tous les schémas d'intégration temporelle amortissants pour une matrice masse consistante.

La valeur du pas de temps choisi pour le calcul implique aussi des conséquences sur l'amortissement. Ainsi, l'utilisation d'un pas de temps très faible devant le pas de temps critique (au sens CFD) entraîne une diminution conséquente de l'amortissement qui ne parvient plus à filtrer la totalité des hautes fréquences numériques. Ce résultat est original dans le cas d'un modèle de Galerkin-discontinu explicite. En revanche, le Bulk-viscosity n'est pas du

tout perturbé par le changement de taille du pas de temps et fournit les mêmes résultats ce qui fait de lui une très bonne méthode amortissante pour filtrer les hautes fréquences sur des maillages aux tailles de mailles aléatoires.

A. Soive, dans ses conclusions relevait l'importance de la forme du chargement pour éviter *d'introduire* des fréquences numériques ou plutôt *éviter de rendre impossible* la reproduction du chargement par le modèle imparfait.

Néanmoins, l'utilisation d'un tel chargement ne permet pas de s'affranchir du problème d'apparition progressive d'oscillations parasites : un amortissement doit être appliqué constamment. Or, l'utilisation d'un amortissement en permanence durant le calcul engendre une *érosion* progressive du signal de contrainte. Pour assurer un amortissement efficace des oscillations parasites et éviter une érosion du signal de contrainte, une méthode du pilotage de l'amortissement a été développée pour le schéma de Tchamwa.

Un algorithme a alors été défini puis implanté dans le code de calcul Herezh ++. L'amortissement qui était initialement affecté globalement à toute la structure au travers d'un unique paramètre φ constant a tout d'abord été individualisé pour chaque *ddl*. L'amortissement appliqué à chaque noeud est ensuite déterminé en fonction de deux valeurs nodales : l'accélération et la vitesse moyenne calculée sur quelques de pas de temps. L'amortissement est ainsi piloté par 6 paramètres qui ont fait l'objet d'une étude de sensibilité conduisant à une méthodologie de détermination de leur valeur. Le pilotage étudié sur des maillages homogènes ou non répond globalement à nos attentes : les oscillations parasites sont amorties rapidement, ne réapparaissent pas au cours du calcul et le signal de contrainte conserve une forme acceptable et moins dégradée comparée à un amortissement constant et continu.

A la suite de cette étude 1D, nous avons abordé les phénomènes inertiels rencontrés lors d'une propagation d'onde dans une barre maillée en 2D axi-symétrique. L'étude de la solution issue de la Théorie des barres de Love nous a permis d'appréhender des phénomènes inertiels en remarquant notamment la présence d'oscillations.

L'étude numérique a montré une diminution de la capacité à filtrer rapidement les hautes fréquences numériques de la contrainte axiale pour les différentes méthodes (comparé au cas 1D). Concernant les contraintes transverses et de cisaillement, on observe de très hautes fréquences numériques qui sont filtrées efficacement par toutes les méthodes.

Cependant on note une sensibilité de l'amortissement du Bulk-viscosity au coefficient de Poisson. Ce dernier connaît plus de difficultés à amortir les oscillations parasites quand le coefficient de Poisson augmente.

La dépendance de l'amortissement des schémas d'intégration temporelle amortissants au pas de temps est également présente pour des cas 2D, ce qui les rend moins compétitifs que le Bulk-viscosity pour des problèmes où la taille de maille évolue fortement sur une structure à analyser.

Deux exemples d'application ont ensuite été présentés pour évaluer l'efficacité des différentes méthodes.

Le premier d'entre eux est basé sur les données expérimentales obtenues lors d'un essai aux barres d'Hopkinson. Cet exemple dont les données sont *plus physiques* que notre cas test nous permet de confirmer en 1D et en 2D les conclusions établies auparavant.

Le second concerne l'impact transversal d'une tôle de construction navale réalisé par le dispositif du LG2M. Une loi de type élastique, très contraignante pour l'apparition d'oscillations parasites, est appliquée sur maillage 3D.

Des ondes de flexions de fréquences faibles par rapport à la fréquence caractéristique du maillage sont principalement observées et permettent de se rendre compte d'une dissipation globalement très faible de l'énergie. Ce résultat confirme bien le caractère ciblé du filtrage sur les très hautes fréquences numériques dans le cas d'un chargement et d'une structure complexe réels.

L'amortissement pratiqué par les différentes méthodes est en particulier observés sur les contraintes transverses et de cisaillement.

Perspectives

Au terme de cette thèse, plusieurs perspectives sont envisageables, certaines de l'ordre du détail d'autres plus conséquentes :

Tout d'abord, l'étude menée en 2D axi-symétrique a fait intervenir une géométrie *élancée* d'une barre. Cela implique la propagation d'un front d'onde homogène sur la section, réduisant considérablement les phénomènes inertiels. Il sera donc intéressant d'étudier ces phénomènes sur des barres à plus forte section comme celles utilisées par [Merle et Zhao(2006)]. Ceci conduit notamment à remplacer l'utilisation de la solution de la théorie des barre de Love par une solution issue de l'équation de Pochhammer Chree, équation matérialisant plus exactement les phénomènes de dispersion. En effet, notons que nous ne disposons pas à ce jour, à notre connaissance de solution exacte (c'est-à-dire sans approximation), analytique ou même semi-analytique dans le domaine 3D, ce qui pose évidemment un problème majeur de validation.

Ensuite, la méthode de pilotage de l'amortissement a été réalisée sur le schéma de Tchamwa et utilisée sur des exemples 1D. Définie pour appliquer un amortissement pour chaque *ddl* de la structure, il sera intéressant d'observer son comportement pour des exemples 2D et 3D. Enfin, une méthode de pilotage basée sur les mêmes principes que celle de Tchamwa pourra être développée pour le Bulk-viscosity permettant ainsi de réduire l'énergie dissipée au cours du temps.

L'étude de la méthode de Galerkin-discontinu qui n'a peut être pas montré son avantage dans cette étude mérite également d'être exploré plus profondément. En effet, cette méthode permet d'appréhender l'espace et le temps de manière cohérente et quasi-symétrique c'est-à-dire sous une même forme variationnelle intégrale. Or cette symétrie espace-temps, que l'on retrouve explicitement dans les modèles plus globaux de fonction d'onde, est a priori clairement pertinente pour un traitement adéquate des phénomènes de dynamique rapide. Dans le cadre explicite, d'une manière analogue aux études implicites, il est alors envisageable d'utiliser une discrétisation plus riche. Remarquons également, que si l'amortissement intrinsèque du schéma n'est pas suffisant, il est toujours possible de le coupler avec du Bulk-viscosity. Enfin, le modèle de Bonelli a permis de retenir un pas de temps légèrement supérieur au pas de temps critique CFD h_c , ceci dans le cadre d'une correction utilisant simplement la matrice masse. Peut-être est-il envisageable, sur le même principe d'un nombre de corrections finies, d'utiliser une correction plus complexe (par exemple analogue au gradient conjugué préconditionné, ou utilisant une matrice de raideur simplifiée) permettant d'obtenir un pas de temps stable de l'ordre de quelques pas de temps critiques CFD. Ainsi, tout en étant explicite, le schéma exploiterait mieux le niveau de précision du troisième ordre, et améliorerait sans doute sa capacité de filtrage.

L'influence des différents traitement du contact doit également être étudiée, ce qui constitue à lui seul un vaste domaine ! En particulier, peut-on attendre du filtrage des hautes fréquences une atténuation efficace des perturbations engendrées par l'accostage discontinu des points de contact. Des études sont actuellement en cours au laboratoire dans ce sens.

L'influence de comportements matériels complexes constitue un autre large domaine d'investigation. Les aspects dissipatifs (visqueux ou plastiques) doivent vraisemblablement améliorer la régularité de la réponse. Par contre les aspects "grandes déformations" par les non-linéarités induites peuvent fortement altérer la stabilité du schéma d'avancement temporel. Il en est de même pour les grandes transformations géométriques. Cependant, les applications actuellement réalisées (utilisation d'une loi d'élasto-visco-hystérésis, gonflage de structure souples ...) montrent des comportements "intuitivement corrects" ce qui est encourageant, mais il reste à effectuer une étude systématique sur le sujet.

Annexe A

Calcul énergétique pour une barre libre - encastree 1D

A.1 Chargement de type créneau

Dans notre système purement élastique, $E_{\text{totale}} = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{élastique}}$.

A.1.1 Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

avec m la masse (*ton*) de la barre qui a été perturbée et v la vitesse particulière ($m.s^{-1}$). Pour chaque pas de temps h , la longueur de la barre perturbée est λ et la masse de la barre perturbée est égale à :

$$m = \lambda S \rho = c h S \rho$$

avec S la section de la barre (mm^2), ρ la masse volumique ($ton.mm^{-3}$) et c la célérité ($m.s^{-1}$).

Soit l'équation dérivant de l'équation des ondes suivante :

$$\sigma(t) = \rho c v(t) \Leftrightarrow v(t) = \frac{\sigma(t)}{\rho c} = \frac{F(t)}{\rho c S}$$

avec $\sigma(t)$ la contrainte (MPa) et $F(t)$ l'effort appliqué (N). Si on intègre l'expression de l'énergie cinétique sur un volume \mathcal{V} , on obtient pour un élément de matière dm :

$$E_c = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} v^2 dm$$

Pour le chargement de type créneau, trois phases distinctes sont observées :

une phase de montée en charge en 1 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = \frac{F_0}{h} t \Leftrightarrow F(x) = \frac{F_0}{h c} x$

La vitesse en découplant est égale à : $v(x) = \frac{F(x)}{\rho c S} = \frac{F_0 x}{\rho h c^2 S}$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{c1} = \int_0^\lambda \frac{1}{2} v^2(x) \rho S dx = \frac{F^2 h}{6 \rho S c} \quad (\text{A.1})$$

une phase de maintien pendant 48 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = F_0 \Leftrightarrow F(x) = F_0$

La vitesse en découplant est égale à : $v(x) = \frac{F(x)}{\rho c S} = \frac{F_0}{\rho c S}$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{c2} = \int_\lambda^{49\lambda} \frac{1}{2} v^2(x) \rho S dx = \frac{24 F^2 h}{\rho S c} \quad (\text{A.2})$$

une phase de retour à zéro en 1 h

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{c3} = \int_{49\lambda}^{50\lambda} \frac{1}{2} v^2(x) \rho S dx = \frac{F^2 h}{6 \rho S c} \quad (\text{A.3})$$

A partir des équations A.1, A.2 et A.3, et après application numérique, on obtient l'énergie cinétique totale du système : $E_c = 2.219 \cdot 10^{-3} mJ$.

A.1.2 Energie de déformation élastique

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV = \int_V \frac{1}{2} \frac{F^2(x)}{E S^2} dV$$

avec σ la contrainte dans la barre sollicitée, ϵ est la déformation de la barre, $F(x)$ la force appliquée et V le volume de la barre intégré.

Pour le chargement de type créneau, trois phases distinctes sont observées :

une phase de montée en charge en 1 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = \frac{F_0}{h} t \Leftrightarrow F(x) = \frac{F_0 x}{h c}$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_1 = \int_0^\lambda \frac{F_0^2 x^2}{2 E S^2 h^2 c^2} \rho S dx = \frac{F_0^2 h}{6 \rho S c} \quad (\text{A.4})$$

une phase de maintien pendant 48 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = F_0 \Leftrightarrow F(x) = F_0$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_2 = \int_{\lambda}^{49\lambda} \frac{F_0^2}{2 E S^2} \rho S dx = \frac{24 F_0^2 h}{\rho S c} \quad (\text{A.5})$$

une phase de retour à zéro en 1 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = -\frac{F_0}{h} t \Leftrightarrow F(x) = -\frac{F_0 x}{h c}$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_3 = \int_0^{\lambda} \frac{F_0^2 x^2}{2 E S^2 h^2 c^2} \rho S dx = \frac{F_0^2 h}{6 \rho S c} \quad (\text{A.6})$$

A partir des équations A.4, A.5 et A.6, et après application numérique, on obtient une énergie élastique totale du système : $W = 2.219 \cdot 10^{-3} mJ$.

A.1.3 Energie totale

L'énergie totale du système étant la somme des deux énergies calculées précédemment, on obtient $E_T = 4.438 \cdot 10^{-3} mJ$, lorsque le chargement est terminé.

A.2 Chargement de type créneau lissé

Dans notre système purement élastique, $E_{\text{totale}} = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{élastique}}$.

A.2.1 Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \int_V \frac{1}{2} v^2 dm$$

Pour le chargement de type *créneau lissé*, trois phases distinctes sont observées :

une phase de montée en charge en 18 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = \frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} t \right) \right]$

Mais également : $F(x) = \frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

La vitesse en découplant : $v(x) = \frac{F_0}{2 \rho c S} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

L'énergie cinétique est égale à :

$$\begin{aligned}
 E_{c1} &= \int_0^{\lambda=18hc} \frac{1}{2} v^2(x) \rho S \, dx \\
 &= \int_0^{18hc} \frac{1}{2} \left\{ \frac{F_0}{2 S \rho c} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi x}{18 h c} \right) \right] \right\}^2 \rho S \, dx \\
 &= \alpha \int_0^{18hc} \left[1 - 2 \cos \left(\frac{\pi x}{18 h c} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi x}{18 h c} \right) \right] \, dx
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

avec : $\alpha = \frac{F_0^2 \rho S}{8 S^2 \rho^2 c^2}$

$$\begin{aligned}
 E_{c1} &= \alpha \left\{ [x]_0^{18hc} + 0 + \int_0^{18hc} \cos^2 \frac{\pi x}{18hc} \, dx \right\} \\
 &= \alpha \left\{ 18 h c + \frac{1}{2} \int_0^{18hc} \left(1 + \cos \frac{2 \pi x}{18 h c} \right) \, dx \right\} \\
 &= \alpha \left\{ 18 h c + \frac{1}{2} (0 + [x]_0^{18hc}) \right\} \\
 &= \alpha \left\{ \frac{3}{2} 18 h c \right\} \\
 &= \frac{27 F_0^2 h}{8 S \rho c}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

une phase de maintien pendant 14 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = F_0$

Mais également : $F(x) = F_0$

La vitesse en découplant : $v(x) = \frac{F_0}{\rho c S}$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{c2} = \int_{18\lambda}^{32\lambda} \frac{1}{2} v^2(x) \rho S \, dx = \frac{7 F^2 h}{\rho S c} \tag{A.9}$$

une phase de retour à zéro en en 18 h

La force appliquée est égale à : $F(t) = -\frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} t \right) \right]$

Mais également : $F(x) = -\frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

La vitesse en découplant : $v(x) = -\frac{F_0}{2 \rho c S} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

L'énergie cinétique est égale à :

$$E_{c3} = \int_{32\lambda}^{50\lambda} \frac{1}{2} v^2(x) \rho S \, dx = \frac{27 F_0^2 h}{8 S \rho c} \tag{A.10}$$

A partir des équations A.8, A.9 et A.10, et après application numérique, on obtient l'énergie cinétique totale du système : $E_c = 1.2375 \cdot 10^{-3} mJ$.

A.2.2 Energie de déformation élastique

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \frac{F^2(x)}{E S^2} \, dV$$

avec σ la contrainte dans la barre sollicitée, ϵ est la déformation de la barre, $F(x)$ la force appliquée et \mathcal{V} le volume de la barre intégré.

Pour le chargement de type créneau, trois phases distinctes sont observées :

une phase de montée en charge en $18 h$

La force appliquée est égale à : $F(t) = \frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} t \right) \right]$

Mais également : $F(x) = \frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_1 = \int_0^{18\lambda} \frac{F^2(x)}{2 E S^2} \rho S \, dx = \frac{27 F_0^2 h}{8 \rho S c} \quad (\text{A.11})$$

une phase de maintien pendant $14 h$

La force appliquée est égale à : $F(t) = F_0 \Leftrightarrow F(x) = F_0$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_2 = \int_{18\lambda}^{32\lambda} \frac{F^2(x)}{2 E S^2} \rho S \, dx = \frac{7 F_0^2 h}{\rho S c} \quad (\text{A.12})$$

une phase de retour à zéro en $18 h$

La force appliquée est égale à : $F(t) = -\frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} t \right) \right]$

Mais également : $F(x) = -\frac{F_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{18 h} \frac{x}{c} \right) \right]$

L'énergie élastique est égale à :

$$W_3 = \int_{32\lambda}^{50\lambda} \frac{F^2(x)}{2 E S^2} \rho S \, dx = \frac{27 F_0^2 h}{8 \rho S c} \quad (\text{A.13})$$

A partir des équations A.4, A.5 et A.6, et après application numérique, on obtient une énergie élastique totale du système : $W = 1.2375 \cdot 10^{-3} mJ$.

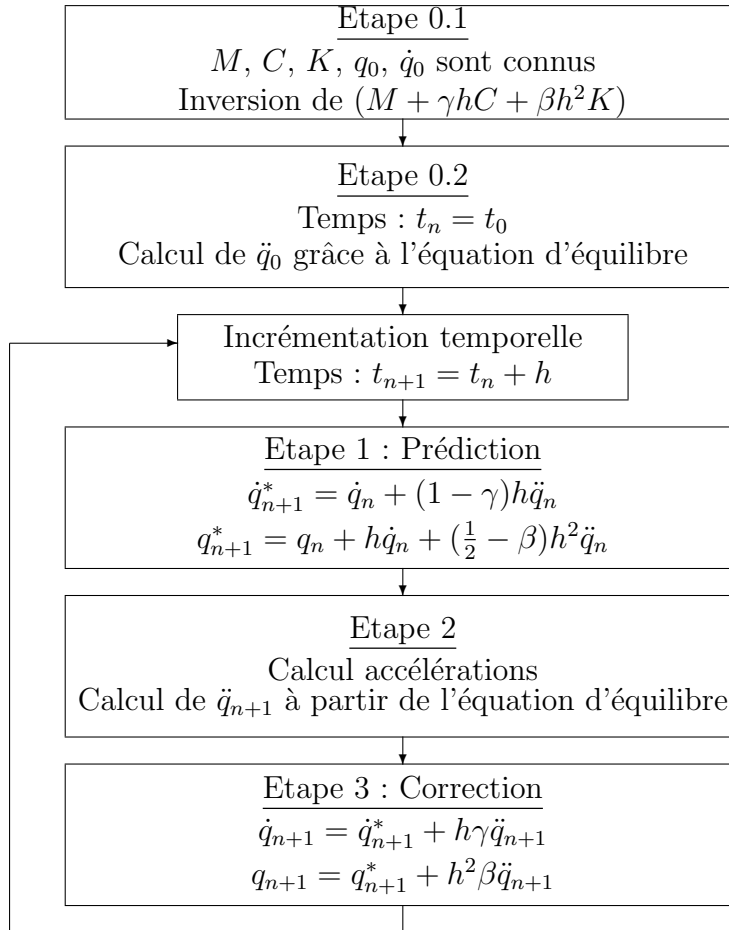
A.2.3 Energie totale

L'énergie totale du système étant la somme des deux énergies calculées précédemment, on obtient $E_T = 2.475 \cdot 10^{-3} mJ$, lorsque le chargement est terminé.

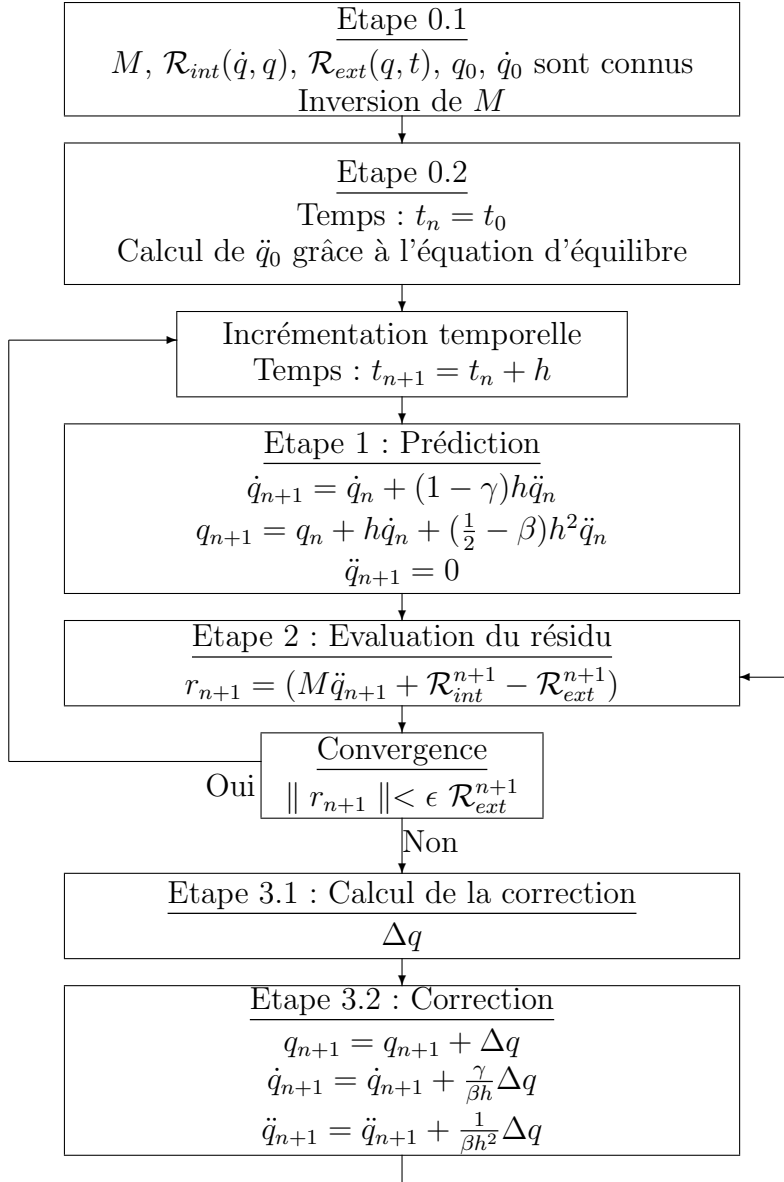
Annexe B

Algorithme implicite de Newmark

B.1 Systèmes linéaires



B.2 Systèmes non linéaires



Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer aux travaux de [Géradin et Rixen(1993)].

Bibliographie

- [Abaqus(2002)] Abaqus, *ABAQUS/Explicit User's Manual*, vol. 6.3, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2002.
- [Armero(2006)] Armero, F., 2006, Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for finite strain multiplicative plasticity, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Bacon(2000)] Bacon, C., Habilitation à diriger des recherches, 2000.
- [Bancroft(1941)] Bancroft, D., 1941, The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars, *Physical Review*, 29, 588–593.
- [Batoz et Dhatt(1990)] Batoz, J., et G. Dhatt, *Modélisation des structures par éléments finis*, vol. 1 : Solides élastiques, Hermès, iSBN 2-86601-243-7, 1990.
- [Belytschko(1983)] Belytschko, T., *Computational methods for transient analysis*, vol. 1 of *Mechanics and mathematical methods*, chapter An overview of semidiscretization and time integration procedures, 1–65, Elsevier Science, 1983.
- [Bénabès(2003)] Bénabès, J., Mémoire de dea : étude du comportement mécanique d'un acier de construction navale sur machine hydraulique rapide : résultats expérimentaux et numériques, 2003.
- [Benson(1998)] Benson, D., 1998, Stable time step estimation for multi-material eulerian hydrocodes, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167, 191–205.
- [Bonelli et al.(2001)] Bonelli, A., O. S. Bursi, et M. Mancuso, 2001, Explicit predictor-multicorrector time discontinuous galerkin methods for linear dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, 246, (4), 625–652.
- [Bonelli et Bursi(2002)] Bonelli, A., et O. S. Bursi, 2002, Explicit predictor-multicorrector time discontinuous galerkin methods for non-linear dynamics, *Journal of Sound and Vibration*, 256, (4), 695–724.

- [Bussac et al.(2002)] Bussac, M., P. Collet, G. Gary, et R. Othman, 2002, An optimisation method for separating and rebuilding one-dimensional dispersive waves from multi-point measurements. application to elastic or viscoelastic bars, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50, 321–349, pII : S0022-5096(01)00057-6.
- [Chien et al.(2003)] Chien, C., C. Yang, et J. Tang, 2003, Three-dimensional transient elastodynamic analysis by a space and time-discontinuous galerkin finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 561–580.
- [Chree(1889)] Chree, C., 1889, The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 14, 250–369.
- [Chuman et al.(1997)] Chuman, Y., K. Mimura, K. Kaizu, et S. Tanimura, 1997, A sensing block method for measuring impact force generated at a contact part, *International Journal of Impact Engineering*, 19, (2), 165–174, pII : S0734-743X(96)00019-X.
- [Chung et Hulbert(1993)] Chung, J., et G. Hulbert, 1993, A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- α method, *Journal of Applied Mechanics*, 60, 371–375.
- [Chung et Lee(1994)] Chung, J., et J. Lee, 1994, A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 3961–3976.
- [Couty(1999)] Couty, N., *Simulation par éléments finis et étude expérimentale de choc*, Ph.D. thesis, Université de Bretagne Sud, 1999.
- [Curnier(1993)] Curnier, A., *Méthodes numériques en mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires Romandes, iISBN 2-88074-247-1, 1993.
- [Davies(1948)] Davies, R., 1948, A critical study of the hopkinson pressure bar, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A240, 375–457.
- [Dhatt et Touzot(1984)] Dhatt, G., et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S. A. Editeur, deuxième édition édition, iISBN 2.224-00924-0, 1984.
- [Doyle(1997)] Doyle, J., *Wave propagation in structures*, Mechanical Engineering Series, Springer Verlag, iISBN 0-387-94940-2, 1997.
- [Engeln-Müllges et Uhlig(1996)] Engeln-Müllges, G., et F. Uhlig, *Numerical Algorithms with C*, Springer-Verlag, iISBN 3-540-60530-4, 1996.

- [Fanget(2005)] Fanget, A., Introduction à la description et à la modélisation numérique des ondes de choc et isentropiques, in *Mécanismes et mécanique du comportement, de la dégradation et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques*, 1–18, MECAMAT, Aussois, janvier 2005.
- [Follansbee et Franz(1983)] Follansbee, P., et C. Franz, 1983, Wave propagation in the split hopkinson pressure bar, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 105, 61–66.
- [Gavrus et al.(2003)] Gavrus, A., P. Caestecker, E. Ragneau, et B. Davoodi, 2003, Analysis of the dynamic shpb test using the finite element simulation, *Journal de Physique IV*, 110, 353–358.
- [Géradin et Rixen(1993)] Géradin, M., et D. Rixen, *Théorie des vibrations*, Masson, iSBN 2-225-83952-2, 1993.
- [Govender et al.(2006)] Govender, R., T. Cloete, et G. Nurick, 2006, A numerical investigation of dispersion in hopkinson pressure bar experiments, *Journal de Physique IV*, 134, 521–526.
- [Grolleau et al.(2004)] Grolleau, V., A. Soive, et G. Rio, 2004, Une comparaison des schémas d'intégration temporelle explicites de chung-lee et tchamwa-wielgosz, *Comptes Rendus de Mécanique*, 332, 927–932.
- [Hallquist(1998)] Hallquist, O., *LS-Dyna3D theoretical manual*, Livermore Software Technology, 1998.
- [Hilber et al.(1977)] Hilber, H., T. Hughes, et R. Taylor, 1977, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 5, 283–292.
- [Hopkinson(1914)] Hopkinson, B., 1914, A method of measuring the pressure in the deformation of high explosives by impact of bullets, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A213, 437–452.
- [Houbolt(1950)] Houbolt, J., 1950, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *Journal of Aeronautical Sciences*, 17, 540–550.
- [Hughes(1983)] Hughes, T., *Computational methods for transient analysis*, vol. 1 of *Mechanics and mathematical methods*, chapter Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior, 67–154, Elsevier Science, 1983.
- [Hughes(1987)] Hughes, T., *The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis*, Dover Publications Inc., New York, 1987.

- [Kolsky(1949)] Kolsky, H., An investigation of the mechanical properties of material at a very high rate of loading, in *Proceedings of the Physical Society of London*, vol. B62, 676–701, 1949.
- [Krenk(2001)] Krenk, S., 2001, Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 975–987.
- [Landshoff(1955)] Landshoff, R., A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks, technical report, Los Alamos National Laboratory, 1955.
- [Lataillade(2001)] Lataillade, J., *Essais mécaniques et lois de comportement*, chapter 9- Essais dynamiques, 249–318, Mécanique et ingénierie des matériaux, Hermès science publication, iSBN 2746202050, 2001.
- [LG2M(2006)] LG2M, [http ://web.univ-ubs.fr/lg2m](http://web.univ-ubs.fr/lg2m), 2006.
- [Li et al.(2003)] Li, X., D. Yao, et R. W. Lewis, 2003, A discontinuous galerkin finite element method for dynamic and wave propagation problems in non-linear solids and saturated porous media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57, 1775–1800.
- [Li et Wiberg(1996)] Li, X. D., et N.-E. Wiberg, 1996, Structural dynamic analysis by a time-discontinuous galerkin finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 2131–2152.
- [LMM(2006)] LMM, [http ://www.st-cyr.terre.defense.gouv.fr](http://www.st-cyr.terre.defense.gouv.fr), 2006.
- [Love(1934)] Love, A., *Mathematical theory of elasticity*, University Press, Cambridge, 1934.
- [Mahéo(2002)] Mahéo, L., Mémoire de dea : impact sur tôle précontrainte, 2002.
- [Maillard(2001)] Maillard, S., Mémoire de dea : impact d’un projectile sur une tôle mince : résultats expérimentaux et numériques, 2001.
- [Merle et Zhao(2006)] Merle, R., et H. Zhao, 2006, On the errors associated with the use of large diameter shpb, correction for radially non-uniform distribution of stress and particle velocity in shpb testing, *International Journal of Impact Engineering*, 32, 1964–1980.
- [Morquecho(2004)] Morquecho, L., Mémoire de dea : instrumentation d’un projectile pour la mesure d’une force de contact, 2004.
- [Nême(2000)] Nême, A., *Cours d’Alain Nême*, chapter Calculs numériques en dynamique, 168–197, ENSIETA, 2000.

- [Newmark(1959)] Newmark, N., 1959, A method of computation for structural dynamics, *Journal of Engineering Mechanics Div. ASCE*, 67–94.
- [Noels(2004)] Noels, L., *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures*, Ph.D. thesis, Université de Liège, 2004.
- [Othman et al.(2001)] Othman, R., M. Bussac, P. Collet, et G. Gary, 2001, Séparation et reconstruction des ondes dans les barres élastiques et viscoélastiques à partir de mesures redondantes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b*, 369–376, pII : S1620-7742(01)01344-5.
- [Pochhammer(1876)] Pochhammer, L., 1876, Über die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrentzen isotropen kreiszyylinder, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 81, 324–336.
- [Press et al.(2002)] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, et B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, second edition édition, iSBN 0-521-43108-5, 2002.
- [Rio et al.(2005)] Rio, G., A. Soive, et V. Grolleau, 2005, Comparative study of numerical explicit time integration algorithms, *Advances in Engineering Software*, 35, 252–265.
- [Rio(2006)] Rio, G., *Herezh++ : logiciel éléments finis pour les grandes transformations des solides*, Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux, dépôt APP (Agence pour la Protection des Programmes) - Certification IDDN.FR.010.0106078.000.R.P.2006.035.20600, 2006.
- [Schreyer(1983)] Schreyer, H., *Computational methods for transient analysis*, vol. 1 of *Mechanics and mathematical methods*, chapter Dispersion of semidiscretized and fully discretized systems, 267–299, Elsevier Science, 1983.
- [Shun-Cheng et Zhu-Ping(1998)] Shun-Cheng, S., et D. Zhu-Ping, 1998, Iterative method using consistent mass matrix in axisymetrical finite element analysis of hypervelocity impact, *International Journal of Impact Engineering*, 21, (10), 817–825.
- [Simo et Tarnow(1992)] Simo, J., et N. Tarnow, The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, in *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, vol. 43, 757–792, 1992.
- [Soive(2003)] Soive, A., *Apports à la méthode des éléments finis appliqués aux calculs de structures en dynamique rapide et amortissement numérique*, Ph.D. thesis, Université de Bretagne Sud, 2003.

- [Tamma et al.(1997)] Tamma, K., X. Zhou, et R. Valasutean, 1997, Computational algorithms for transient analysis : the burden of weight and consequences towards formalizing discrete numerically assigned [dna] algorithmic markers : Wp-family, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 149, 153–188.
- [Tamma et al.(2000)] Tamma, K., X. Zhou, et D. Sha, 2000, The time dimension : a theory towards the evolution, classification characterization and design of computational algorithms for transient/dynamic applications, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 7, (2), 67–286.
- [Tanimura et al.(2001)] Tanimura, S., T. Umeda, W. Zhu, et K. Mimura, Evaluation of accuracy in measurement of dynamic load by using load sensing block method, in *Fourth International Symposium on Impact Engineering (ISIE/4)*, vol. I, 77–82, Kumamoto, Japan, 2001.
- [Tanimura(1984)] Tanimura, S., 1984, A new method for measuring impulsive force at contact parts, *Experimental Mechanics*, 24, 271–276.
- [Tchamwa(1997)] Tchamwa, B., *Contributions à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non linéaire des structures*, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1997.
- [Timoshenko(1929)] Timoshenko, S., *Vibration problems in engineering*, van Nostrand, New York, 1929.
- [Troufflard et al.(2005)] Troufflard, J., J. Cadou, et G. Rio, Numerical and experimental study of inflatable lifejackets, in *2nd International Conference on textile composites and inflatables structures*, Stuttgart, Octobre 2005.
- [Umiastowski(2005)] Umiastowski, S., *Etude du comportement à l'impact basse vitesse d'une tôle de construction navale*, Ph.D. thesis, Université de Bretagne Sud - Ecoles Spéciales Militaires de Coëtquidan, décembre 2005.
- [Von Neuman et Richtmeyer(1950)] Von Neuman, J., et R. Richtmeyer, 1950, A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks, *Journal of Applied Physics*, 21, 232–237.
- [Watts et Shampine(2005)] Watts, H. A., et L. F. Shampine, Rkf45 runge-kutta-fehlberg ode solver, technical report, Albuquerque, New Mexico, 2005.
- [Wood et al.(1981)] Wood, W., M. Bossak, et O. Zienkiewicz, 1981, An alpha modification of newmark's method, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 15, 1562–1566.

- [Wright(2002)] Wright, W., *General linear methods with inherent Runge-Kutta stability*, Ph.D. thesis, University of Auckland, 2002.
- [Zhai(1996)] Zhai, W., 1996, Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 4199–4214.
- [Zhao et al.(1996)] Zhao, H., G. Gary, et J. Klepaczko, 1996, On the use of a viscoelastic split hopkinson pressure bar, *International Journal of Impact Engineering*, 19, (4), 319–330.
- [Zhao et Gary(1995)] Zhao, H., et G. Gary, 1995, A three dimensional longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43, 1335–1348.
- [Zhao et Gary(1996)] Zhao, H., et G. Gary, 1996, A new method for the separation waves. application to the sphb technique for an unlimited duration of measurement, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45, (7), 1185–1202.

Liste des tableaux

2.1	Ordre de précision du schéma de Newmark suivant la valeur de β et γ	18
2.2	Caractéristiques des schémas temporels de la famille de Newmark	20
3.1	Comparaison des temps d'exécution en seconde : algorithme CFD classique et celui proposé par Bonelli, $h = 0.9h_{critique}$, r= ratio par rapport à CFD . . .	44
4.1	Energie totale restante après 19 A/R pour différents maillages	82
4.2	Evolution de l'énergie restante pour plusieurs paramètres d'amortissement .	102
4.3	Comparaison maillage homogène / maillage faiblement perturbé	108

Table des figures

2.1	Phénomène continu en espace et en temps	8
2.2	Phénomène continu en espace et en temps - Mesure discrète en espace et en temps	8
2.3	Phénomène et mesure discret en espace et en temps	9
2.4	Stabilité du schéma de Newmark	17
2.5	Algorithme de CFD selon [Géradin et Rixen(1993)]	23
2.6	Algorithme de CFD selon [Nême(2000)]	24
2.7	Algorithme de CFD implanté dans Herezh++	24
2.8	Description géométrique	25
2.9	Comparaison CFD - Théorie	25
3.1	Comparaison Bulk-viscosity - Théorie	33
3.2	Comparaison Tchamwa - Théorie	38
3.3	Comparaison du modèle de Bonelli et du modèle CFD classique pour différent pas de temps	45
3.4	Agrandissement sur la comparaison du modèle de Bonelli et du modèle CFD classique pour différent pas de temps	46
3.5	évolution de l'énergie cinétique	46
3.6	Influence du nombre de points d'intégration	47
3.7	Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : premiers aller/retours	48
3.8	Evolution de l'extrémité libre en fonction du temps : après 20 aller/retours	48
3.9	vitesse de l'extrémité libre : influence du pas de temps sur l'amortissement	49
3.10	vitesse de l'extrémité libre à l'origine de temps : influence du pas de temps sur l'amortissement	49
3.11	vitesse de l'extrémité libre : comparaison Bonelli Tchamwa près de la zone de chargement	50
3.12	vitesse de l'extrémité libre : influence du rayon spectral ρ	51
3.13	vitesse de l'extrémité libre : influence du rayon spectral ρ après une vingtaine d'aller/retours	52
4.1	Description du problème	57
4.2	Solution semi-analytique en déplacement obtenue par superposition modale (échelon)	58
4.3	Solution semi-analytique en contrainte obtenue par superposition modale (échelon)	59
4.4	Solution en déplacement de l'équation différentielle discrétisée	61
4.5	Chargement en créneau de force	61
4.6	Solution en déplacement de l'équation différentielle discrétisée pour M_c et M_d	62
4.7	Solutions théoriques 1D	64

4.8	Evolution des énergies pour le CFD et différentes méthodes amortissantes	65
4.9	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas conservatifs	66
4.10	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas amortissants	67
4.11	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour des schémas implicites	69
4.12	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le bulk-viscosity	70
4.13	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz et le bulk-viscosity	71
4.14	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour pour le schéma de Tchamwa pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01	73
4.15	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01	74
4.16	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour pour le schéma de Bonelli pour $\frac{h}{h_c} = 0.9, 0.1$ et 0.01	75
4.17	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma implicite de HHT pour $\frac{h}{h_c} = 2.0$	77
4.18	Maillages aléatoires	78
4.19	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa pour différents maillages	79
4.20	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour différents maillages	80
4.21	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Bonelli pour différents maillages	81
4.22	Géométries utilisées	83
4.23	Influence de la condition d'encastrement	83
4.24	Influence de la condition d'encastrement	84
4.25	Chargements étudiés	85
4.26	Regular loading : évolution de la contrainte et de l'énergie	86
4.27	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de CFD pour différentes matrices masse	87
4.28	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Tchamwa pour différentes matrices masse	88
4.29	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le schéma de Bonelli pour différentes matrices masse	90
4.30	Evolution de la contrainte et de l'énergie pour le Bulk-viscosity pour différentes matrices masse	91
4.31	Description du problème	93
4.32	Evolution de la contrainte pour un amortissement ciblé sur le début du calcul	94
4.33	Evolution de φ sur $20 A/R$	95
4.34	Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif	95
4.35	Evolution de l'accélération nodale pour le noeud libre	97
4.36	Evolution de la vitesse moyenne V_{moy} pour le noeud libre	99
4.37	Pilotage de l'amortissement	100
4.38	Evolution de l'amortissement en fonction des paramètres	100
4.39	Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif	101
4.40	Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif	102
4.41	Energie totale	103

4.42	Influence du paramètre val_{max}	104
4.43	Energie totale	104
4.44	Influence du paramètre b	105
4.45	Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage faiblement perturbé	106
4.46	Evolution des accélérations pour le maillage faiblement perturbé	106
4.47	Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif	107
4.48	Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage fortement perturbé (noeud 1)	109
4.49	Evolution des accélérations pour le maillage fortement perturbé (noeud 1)	109
4.50	Evolution de la vitesse moyenne pour le maillage fortement perturbé (noeud 79)	110
4.51	Evolution de la contrainte et de l'énergie lors d'un amortissement évolutif	111
5.1	Description du problème	115
5.2	Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre	117
5.3	Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre (100 modes)	118
5.4	Solution semi-analytique en contrainte pour une barre 3D axi-symétrique libre-libre (100 modes)	118
5.5	Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour CFD et Runge Kutta ($\nu = 0$)	121
5.6	Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0$)	122
5.7	Evolution de σ_{xx} pour le schéma CFD pour les éléments 133 et 134 ($\nu = 0.3$)	123
5.8	Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour CFD et Runge Kutta ($\nu = 0.3$)	124
5.9	Evolution de σ_{xx} et de l'énergie pour Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)	125
5.10	Evolution de σ_{yy} pour CFD, Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)	126
5.11	Evolution de σ_{xy} pour CFD, Tchamwa et le bulk viscosity ($\nu = 0.3$)	127
5.12	Influence du coefficient de Poisson ν pour le schéma de Bonelli	128
5.13	Influence du coefficient de Poisson ν pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz	128
5.14	Influence du coefficient de Poisson ν pour le Bulk-viscosity	129
5.15	Influence du pas de temps h pour le schéma de Bonelli	129
5.16	Influence du pas de temps h pour le schéma de Tchamwa-Wielgosz	130
5.17	Influence du pas de temps h pour le bulk-viscosity	130
6.1	Déformation et détermination d'un chargement en découlant	134
6.2	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma CFD	135
6.3	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma de Tchamwa	136
6.4	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le Bulk-viscosity	136
6.5	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Bonelli	137
6.6	Evolution de l'énergie pour les différentes méthodes numériques	137
6.7	Evolution de la vitesse moyenne et de l'accélération	138
6.8	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Tchamwa piloté	139
6.9	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Tchamwa piloté	139
6.10	Evolution de l'énergie pour les schémas de Tchamwa pilotés	140
6.11	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma CFD	141
6.12	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma de Tchamwa	141
6.13	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le Bulk-viscosity	142
6.14	Evolution de la contrainte en expérimental et pour le schéma Bonelli pour les 4 premiers A/R	142

6.15	Evolution de l'énergie pour les différentes méthodes numériques	143
6.16	Impact transversal d'une tôle par le dispositif du LG2M	144
6.17	Force mesurée par le projectile étagée	145
6.18	Evolution de la contrainte σ_{xx} pour les méthodes amortissantes	146
6.19	Evolution de la contrainte σ_{yy} pour les méthodes amortissantes	146
6.20	Evolution de la contrainte σ_{zz} pour les méthodes amortissantes	147
6.21	Evolution de la contrainte σ_{xy} pour les méthodes amortissantes	147
6.22	Evolution de l'énergie totale pour les méthodes amortissantes	148

Résumé

Cette étude aborde différents schémas d'intégration temporelle utilisés en calcul dynamique, et leur capacité à dissiper les hautes fréquences numériques introduites par les discrétisation temporelle et spatiale.

La discrétisation temporelle d'un problème de dynamique peut être réalisée par la Méthode des Différences Finies (MDF) ou par la Méthode des Éléments Finis (MEF) et plus particulièrement la méthode de Galerkin-Discontinu (DG). Les résultats sont alors perturbés par des oscillations parasites d'origine purement numérique et issues des discrétisations temporelle et spatiale. Des méthodes existantes permettent de les amortir en dissipant de l'énergie. Les schémas explicites amortissants de Tchamwa - Wielgosz et de Bonelli, issus respectivement de la discrétisation MDF et MEF sont tout d'abord comparés au traditionnel Bulk-viscosity et au schéma de Runge-Kutta d'ordre de précision 4-5 sur des cas 1D et 3D.

On constate alors, grâce au cas 1D, le rôle important de la matrice masse qui conditionne le problème et l'influence du pas de temps sur l'amortissement de tous les schémas d'intégration temporelle. On remarque également que l'utilisation d'un schéma d'une précision élevée ne permet pas de s'affranchir des oscillations parasites.

L'étude est ensuite menée sur un cas 3D axi-symétrique pour lequel est calculée une solution semi-analytique grâce à la théorie des barres de Love. On remarque un amortissement plus faible des oscillations parasites et la dépendance de l'amortissement du Bulk-viscosity au coefficient de Poisson. L'amortissement pour ces exemples est observable plus nettement sur les contraintes transverse et de cisaillement qui sont pourvues de plus hautes fréquences que la contrainte axiale.

L'utilisation des méthodes amortissantes sur des cas expérimentaux 3D comme un essai aux Barres de Hopkinson et un impact transversal sur une tôle de construction navale est enfin étudiée. L'amortissement est alors évalué sur des exemples réels complexes. On constate finalement le caractère ciblé de l'amortissement qui n'agit que sur les très hautes fréquences numériques.

Un algorithme de pilotage de l'amortissement pour le schéma de Tchamwa - Wielgosz est également développé de manière à obtenir une efficacité amortissante optimale tout au long des calculs sans pour autant observer une baisse trop importante de l'énergie. Le pilotage qui permet d'individualiser l'amortissement pour chaque *dll* de la structure est déterminé en fonction de deux valeurs nodales : l'accélération et la vitesse moyenne. L'algorithme est implanté dans le code de calcul universitaire Herezh++ puis étudié pour des cas 1D au maillage homogène ou non. Les résultats obtenus montrent une réelle efficacité à filtrer les hautes fréquences numériques au début du calcul et une baisse importante de la dégradation du signal de contrainte.

Des conclusions de cette étude, citons tout d'abord que l'utilisation des méthodes amortissantes s'avère très efficace pour filtrer les oscillations parasites mais en dissipant, dans certains cas, trop d'énergie, ce qui a motivé le développement d'un pilotage original de l'amortissement. Une seconde innovation de ce travail réside dans l'étude d'un schéma explicite issu d'une discrétisation temporelle de type MEF permettant d'aboutir, pour un faible coût numérique, à des résultats se rapprochant de la solution théorique du système discrétisé spatialement.

Mots-clés

Dynamique des structures, schémas d'intégration temporelle, éléments finis espace-temps, amortissement numérique, bulk-viscosity.

Abstract

This phd-thesis deals with several time integration algorithms which are used in dynamic computation. The study focuses on their vibration damping properties in order to dissipate spurious oscillations generated by the use of space and time discretizations.

The recent Tchamwa-Wielgosz's explicite scheme and the Bonelli's one are compared to the classical Bulk-viscosity method and the Runge-Kutta scheme (with a 4-5 order accuracy) for one-dimensional and three-dimensional problems.

We notice the effects of the mass matrix (diagonal or consistent) and the time step size on the damping efficiency for each numerical scheme in a one-dimensional problem. We also note that the use of a high-order accuracy scheme can't prevent the apparition of spurious oscillations.

The study goes on with an axisymmetric three-dimensional problem for which we use a Love's rods numerical solution. We note that the damping of spurious oscillations is less important in three-dimensional problems than in one-dimensional problems. We also remark the influence of Poisson's ratio on numerical damping when the bulk-viscosity method is used. Finally, numerical damping can be observed more easily on radial and shear stresses than on axial stresses because they are composed of the highest frequencies and consequently are more damped.

The use of damping methods for three-dimensional problems, which come from experiments (Split Hopkinson Pressure Bar test and transverse impact of a steel plate), is finally studied. Therefore, damping is estimated for experimental and complex examples. Finally, we note the damping efficiency on very high-frequencies.

A damping control algorithm is developed for the Tchamwa-Wielgosz's scheme in order to obtain a damping efficiency during the whole simulation process with an energy control. Damping is realised for each degree-of-freedom of the problem and two nodal variables control the algorithm : acceleration and velocity mean. The algorithm is implemented in the HEREZH++ finite element code which is developed in C++. The results for one-dimensional problems with regular or irregular meshes show a damping efficiency at the beginning of the calculation and an energy drop less important than when a continuous damping is used.

This study showed the efficiency of the damping methods to filter spurious oscillations. However, numerical damping excessively attains low-frequency modes. Thus, a new method which controls numerical damping has been developed. The second innovation deals with the study of an explicite time integration algorithm, which belongs to the Finite Element Method. This third order accuracy algorithm can approximate the theoretical solution of a discrete space for a low computational cost.

Keywords

Structural dynamics, time integration schemes, time - space finite elements, numerical damping, bulk-viscosity.