



**HAL**  
open science

# Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières destiné à l'électromagnétisme

Bidjan Haghi-Ashtiani

► **To cite this version:**

Bidjan Haghi-Ashtiani. Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières destiné à l'électromagnétisme. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 1998. Français. NNT: . tel-00139486

**HAL Id: tel-00139486**

**<https://theses.hal.science/tel-00139486>**

Submitted on 30 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée devant

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR**  
(Arrêté du 30/03/1992)

**Spécialité: Génie Electrique**

Préparée au sein de

**L'ÉCOLE DOCTORALE  
ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE  
DE LYON**

par :

**Bidjan HAGHI-ASHTIANI**

---

**Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative  
pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières  
destiné à l'électromagnétisme**

---

*Soutenue le 7 Mai 1998 devant la commission d'examen :*

Messieurs :

<b>B. BANDELIER</b>	Professeur à l'Université de Cergy-Neuville	<b>Rapporteur</b>
<b>J.L. COULOMB</b>	Professeur à l'I.N.P. de Grenoble	<b>Président et Rapporteur</b>
<b>L. KRÄHENBÜHL</b>	Directeur de Recherche à l'E.C.L.	<b>Examineur</b>
<b>L. NICOLAS</b>	Chargé de recherche à l'E.C.L.	<b>Examineur</b>
<b>G. TANNEAU</b>	Docteur - EDF (DER - ERMEL), Clamart	<b>Examineur</b>

## REMERCIEMENTS

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur A. NICOLAS, directeur du CEGELY et à Monsieur le Professeur Ph. AURIOL, directeur de la formation doctorale, qui m'ont accueilli au Centre de Génie Électrique de Lyon et permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions.

Je remercie mon directeur de thèse Monsieur L. KRÄHENBÜHL, directeur de recherche au CNRS, pour ses conseils éclairés et sa grande disponibilité. Monsieur L. KRÄHENBÜHL a su, par sa grande compétence scientifique et ses qualités humaines de simplicité et d'amitié, me motiver pour surmonter les difficultés et mener à terme ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur B. BANDELIER pour le soutien qu'il m'a apporté durant cette thèse, et qui a bien voulu me faire l'honneur d'être rapporteur sur mon travail.

Je remercie Monsieur le professeur J.L. COULOMB d'avoir aussi accepté d'examiner ce travail, et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Je remercie Monsieur L. NICOLAS, chargé de recherche, et Monsieur G. TANNEAU, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer au jury.

Je remercie chaleureusement mes camarades chercheurs et tout le personnel du laboratoire et les gens et amis qui m'ont aidé à mener à bien ce travail, et tout spécialement mes parents pour leur soutien permanent pendant toutes ces longues années d'études.

*Cette thèse est dédiée à ma fille Tina.*

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>0-1</b>
<b>1. Résolution numérique des équations de Maxwell en statique</b>	<b>1-1</b>
<b>1.1 Introduction</b>	<b>1-1</b>
<b>1.2 Équations de Maxwell</b>	<b>1-1</b>
1.2.1 Équations d'interface	1-1
1.2.2 Équations en potentiel scalaire : Poisson et Laplace	1-2
<b>1.3 Généralités sur les formulations destinées aux méthodes numériques</b>	<b>1-2</b>
1.3.1 La méthode des différences finies	1-2
1.3.2 La méthode des éléments finis	1-3
1.3.3 Électrostatique : la méthode des charges équivalentes	1-3
1.3.4 Magnétostatique : courants ampériens et charges magnétiques	1-4
<b>1.4 La méthode des équations intégrales de frontière</b>	<b>1-6</b>
1.4.1 Relation intégrale issue de l'identité de Green	1-6
1.4.2 L'équation intégrale de frontière	1-7
1.4.3 Angle solide de l'équation intégrale, et problème ouvert	1-8
1.4.4 Problème à plusieurs milieux, interfaces	1-9
<b>1.5 Discussion</b>	<b>1-10</b>
<b>2. Implantation numérique de la méthode intégrale</b>	<b>2-1</b>
<b>2.1 Introduction</b>	<b>2-1</b>
<b>2.2 Discrétisation</b>	<b>2-1</b>
2.2.1 Choix du type d'éléments de frontière	2-1
2.2.2 Choix de l'ordre des polynômes d'interpolation	2-2
2.2.3 Fonctions d'interpolation	2-3
2.2.4 Point d'observation sur un élément	2-4
2.2.5 Prise en compte de symétries, antisymétries, périodicités et bipériodicités	2-4
<b>2.3 Assemblage</b>	<b>2-5</b>
2.3.1 Points d'observation particuliers	2-6
2.3.2 Conditions aux limites	2-7
2.3.3 Résolution	2-7
<b>2.4 Exploitation des résultats</b>	<b>2-7</b>
2.4.1 Lissage du champ normal	2-7
2.4.2 Calculs hors des surfaces : méthode	2-9
<b>2.5 Validation, exemples</b>	<b>2-10</b>
2.5.1 Validation à l'aide de résultats analytiques	2-10
2.5.2 Exemple d'exploitation de résultats dans une « coupe »	2-12
<b>2.6 Discussion</b>	<b>2-14</b>

<b>3. Calcul des noyaux des équations intégrales de frontière</b>	<b>3-1</b>
<b>3.1 Introduction</b>	<b>3-1</b>
<b>3.2 Méthodes tirées des références.</b>	<b>3-1</b>
3.2.1 Brebbia, Pina et Fernandes [ 33 ]	3-1
3.2.2 Igarashi et Honma [ 34 ]	3-2
3.2.3 Ken Hayami [ 35 ]	3-4
3.2.4 Koizumi et Utamura [ 36 ]	3-4
3.2.5 Kisu et Tawahara [ 37 ]	3-5
3.2.6 Enokizono et Todaka [ 39 ]	3-6
3.2.7 Enokizono et Todaka [ 40 ]	3-6
3.2.8 N. Ghosh et S. Mukherjee [ 41 ]	3-7
3.2.9 N. Ghosh, H. Rajiyah, S. Ghosh et S. Mukherjee [ 42 ]	3-7
3.2.10 V. Sladek et J. Sladek [ 43 ]	3-7
3.2.11 L. Jun, G. Beer et J.L. Meek [ 44 ]	3-7
<b>3.3 Méthode choisie.</b>	<b>3-7</b>
3.3.1 Intégrale $I_1$	3-8
3.3.2 Calcul de l'intégrale d'angle solide $I_2$	3-10
<b>4. Estimateur d'erreur locale</b>	<b>4-1</b>
<b>4.1 Principe</b>	<b>4-1</b>
4.1.1 Représentations discrète et intégrale de V	4-2
4.1.2 Exemples de comportement	4-2
4.1.3 Estimateur d'erreur	4-5
<b>4.2 Mise en oeuvre pratique</b>	<b>4-6</b>
4.2.1 Définition d'une valeur par élément : $\hat{E}$	4-6
4.2.2 Vérification du lien entre $\hat{E}$ , $E(u,v)$ et l'erreur réelle	4-6
<b>4.3 Conclusion</b>	<b>4-7</b>
<b>5. Maillage adaptatif et résolution itérative</b>	<b>5-1</b>
<b>5.1 Introduction</b>	<b>5-1</b>
<b>5.2 Algorithme de maillage adaptatif</b>	<b>5-1</b>
5.2.1 Division des éléments	5-2
5.2.2 Maillage non conforme	5-3
5.2.3 Exemple	5-3
5.2.4 Un obstacle : le temps de calcul	5-3
<b>5.3 Méthodes de résolution</b>	<b>5-3</b>
5.3.1 Temps de calcul	5-5
5.3.2 État de l'art	5-5
5.3.3 Affinage de maillage et résolutions « locales »	5-6
5.3.4 Exemples de maillages adaptés avec résolutions locales	5-6
5.3.5 Amélioration de la solution en fin d'affinage de maillage	5-8
<b>5.4 Conclusion</b>	<b>5-12</b>
<b>Conclusion générale</b>	<b>6-1</b>
<b>Annexe</b>	<b>6-3</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>6-8</b>

## Introduction générale

Des techniques numériques pour modéliser les phénomènes électromagnétiques en tenant compte précisément des géométries des dispositifs, et des propriétés des matériaux, sont développées maintenant depuis plus de 20 ans. Les solutions analytiques n'existent en effet que pour de rares cas, particulièrement simples.

Ces techniques sont les différences finies, éléments finis, ou équations intégrales. Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients vis à vis du type de problème à résoudre. Les méthodes de différences finies ou d'éléments finis sont adaptées aux problèmes linéaires et non-linéaires, alors que les méthodes intégrales ne sont efficaces que pour résoudre des problèmes linéaires, ou linéarisés.

Il existe différents types de méthodes intégrales (charges équivalentes pour l'électrostatique, courants ampériens pour la magnétostatique, et plusieurs variantes de méthodes intégrales de frontière). Une partie des recherches menées au Centre de Génie Électrique de Lyon s'appuie sur la méthode des équations intégrales de frontière, et en particulier sur le logiciel Phi3d, développé sur place à partir de 1985. Notre travail, prospectif, est consacré à ces méthodes intégrales de frontière : il s'agit de trouver des moyens pour diminuer les temps de calcul, trop souvent prohibitifs, tout en garantissant aux résultats une précision suffisante.

Les méthodes intégrales de frontière ne sont en effet « économiques » qu'en apparence : d'un côté il est vrai que seules les frontières sont discrétisées; les nombres d'éléments et d'inconnues obtenus sont donc considérablement plus faibles qu'avec les méthodes d'éléments finis. Mais, d'un autre côté, les matrices obtenues sont pleines, ou de très grande largeur de bande; elles ne sont pas symétriques et, le plus souvent, ne se prêtent pas aux méthodes de résolution itératives efficaces des éléments finis. On est alors amené à les résoudre par la méthode de Gauss, dont le temps d'exécution croît comme le cube du nombre des inconnues.

Ainsi le calcul d'un gros dispositif est-il forcément très long, car le nombre des coefficients à assembler est important, et le temps de résolution considérable. L'utilisateur de ces méthodes est alors souvent conduit, pour accélérer la résolution, à simplifier excessivement la description géométrique, et à utiliser une discrétisation insuffisante. Les résultats obtenus sont alors fréquemment de médiocre qualité, si ce n'est carrément faux, avec toutes les conséquences qu'on peut imaginer, dans la mesure où l'utilisateur ne dispose pas d'outils de contrôle de la qualité des résultats.

Si l'on met au point un tel outil de contrôle, et c'est l'un des objectifs de ce travail, alors il apparaît logique de l'utiliser de façon itérative pour construire, à partir d'un maillage initial minimum de la structure étudiée, un « meilleur » maillage, suivant des critères de précision locaux ou globaux à préciser. Depuis quelques années sont ainsi apparues, en particulier en lien avec les méthodes d'éléments finis, des techniques dites de « maillage adaptatif ». Ces algorithmes comprennent alors en général une boucle : modification du maillage - nouvel assemblage - résolution - contrôle de précision.

L'application de ce type d'algorithme à la méthode intégrale est possible, mais très coûteux en raison des temps de calcul élevés nécessaires à chaque étape pour l'inversion de la matrice. Nous proposons dans ce travail une méthode de résolution approchée très économique en temps de calcul, qui s'avère suffisamment précise pour mener à bien le processus itératif de maillage adaptatif : durant cette phase en effet, l'exactitude de la solution n'a pas d'importance; seule compte la pertinence des décisions prises quant au découpage d'éléments. Cependant, il s'avère que la solution provisoire obtenue en fin de maillage représente déjà une bonne approximation de la solution exacte; il semble de ce fait que des méthodes itératives classiques permettent d'atteindre cette solution exacte à coût raisonnable, contrairement à ce qui se passe lorsqu'on met en oeuvre une telle résolution itérative sans connaissance a priori de la solution. Nous proposons et testons à titre d'exemple une méthode itérative fondée sur une subdivision du maillage en domaines : on résout successivement le système d'équations intégrales (assemblé une seule fois) pour chacun des domaines, les autres étant considérés comme des conditions aux limites, et on répète plusieurs fois ce balayage des domaines. Chacune de ces itérations permet de répercuter sur les domaines voisins l'amélioration de solution apportée à l'étape précédente.

Pour mener à bien ce travail prospectif, il nous fallait disposer d'un module de calcul par équations intégrales, plus simple à manipuler que ce qui existe par exemple dans le logiciel Phi3d développé dans notre laboratoire d'accueil. De plus, il a semblé intéressant de profiter de ce travail pour tenter de simplifier l'assemblage de la matrice, et améliorer la vitesse et la précision de cet assemblage. Nous avons donc développé un programme de calcul par équations intégrales pour l'électrostatique tridimensionnelle, qui s'appuie sur Phi3d pour les entrées-sorties, mais utilise des maillages en triangles du premier ordre au lieu des quadrangles d'ordre 2 de Phi3d. Dans ce cadre, une attention particulière, basée sur une large bibliographie, a été apportée au traitement des intégrales singulières ou quasi singulières qui apparaissent toujours dans les méthodes intégrales. Nous les traitons en combinant méthodes analytiques et numériques.

---

# 1. Résolution numérique des équations de Maxwell en statique

## 1.1 Introduction.

Dans ce chapitre nous allons d'abord rappeler brièvement les équations de Maxwell en électrostatique et magnétostatique, ce qu'on trouve dans de nombreux ouvrages; ensuite nous présenterons des méthodes numériques appliquées à la résolution des équations en électromagnétisme. Les principales méthodes sont les méthodes d'éléments finis (FEM), de différences finies (FDM), de charges équivalentes (CEM) et d'équations intégrales de frontière (BEM) (dont une variante est la méthode des courants ampériens et les charges magnétiques (ACM)).

## 1.2 Équations de Maxwell.

Le fonctionnement de tout système électromagnétique est régi par les équations de Maxwell. En statique, on obtient pour les grandeurs électriques et magnétiques l'ensemble des équations dans la forme différentielle suivante:

Équations du couplage électromagnétique :

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \mathbf{E} - \text{Champ électrique [V/m]} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \mathbf{H} - \text{Champ magnétique [A/m]} \quad (1-2)$$

Équations de conservation:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \mathbf{D} - \text{Déplacement [C/m}^2\text{]} \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} - \text{Induction magnétique [T]} \quad (1-4)$$

Équations phénoménologiques, présentant les propriétés des matériaux:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-6)$$

Les équations (1-1) à (1-6) sont valables dans un milieu continu, c'est-à-dire dans lequel les propriétés  $\mu$ ,  $\epsilon$  varient de manière continue dans l'espace.

### 1.2.1 Équations d'interface

À la frontière de deux milieux de propriétés différentes les équations dites d'interface, en absence de charge et courant superficiels s'écrivent:

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 \quad (1-7)$$

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_2 \quad (1-8)$$

où  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  représentent les normales à la frontière dans les milieux 1 et 2. Elles indiquent la conservation de la composante normale des inductions magnétique  $\mathbf{B}$  et électrique  $\mathbf{D}$ , et la conservation des composantes tangentielles des champs magnétique  $\mathbf{H}$  et électrique  $\mathbf{E}$ .



### 1.2.2 Équations en potentiel scalaire : Poisson et Laplace

De l'équation (1-1) et de l'identité  $\nabla_x(\nabla u) = 0$  on déduit que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1-9)$$

Également pour le champ magnétique dans une région simplement connexe sans courant :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \nabla \varphi \quad (1-10)$$

$\mathbf{H}$  : Champ total

$\mathbf{H}_0$  : Champ de Biot et Savart

$\nabla \varphi$  : Champ réduit

La combinaison des équations (1-3) et (1-6) s'écrit :

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = \rho \quad (1-11)$$

Comme  $\mathbf{E}$  dérive du potentiel  $V$ , on a :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla V \cdot \nabla \varepsilon \quad (1-12)$$

Si  $\varepsilon$  est constant dans la région considérée, on obtient dans cette région l'équation de Poisson:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1-13)$$

et en absence de charges, l'équation de Laplace:

$$\Delta V = 0 \quad (1-14)$$

De même en magnétostatique on obtient pour une région à perméabilité constante:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1-15)$$

où  $\varphi$  est le potentiel scalaire réduit défini en (1-10).

### 1.3 Généralités sur les formulations destinées aux méthodes numériques

L'application de méthodes numériques est indispensable à la résolution des équations de Maxwell sauf dans les cas rares où leur solution analytique peut être obtenue. Les méthodes numériques principales peuvent être divisées en deux groupes [ 1 ] :

1. Les méthodes de différences finies et d'éléments finis qui résolvent les équations par une discrétisation de l'espace;
2. Les méthodes des charges équivalentes, équations intégrales de frontière et courants superficiels équivalents qui transforment le problème en une recherche des sources équivalentes du champ; ce sont alors ces sources qui sont discrétisées.

Nous rappelons brièvement ci-dessous les caractéristiques de chacune de ces méthodes.

#### 1.3.1 La méthode des différences finies

Dans la méthode des différences finies on discrétise le domaine et on cherche la solution approchée de la fonction pour ces points. Considérons l'équation de Laplace à résoudre par cette méthode, la forme analytique de cette équation est:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1-16)$$

En discrétisant le domaine avec des pas égaux à  $h$  et  $k$  en direction de  $x$  et  $y$  respectivement, et en considérant que  $h$  et  $k$  sont petits par rapport à la dimension du domaine

	$h$	$M_{i,j+1}$	
	$M_{i-1,j}$	$M_{i,j}$	$k M_{i+1,j}$
		$M_{i,j-1}$	

la dérivée partielle en direction de l'axe  $x$  est:

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] \quad (1-17)$$

Dans ce cas l'équation de Laplace dans sa forme discrétisée en différences finies est :

$$\frac{1}{h^2} (\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}) + \frac{1}{k^2} (\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}) = 0 \quad (1-18)$$

$\tilde{u}$  est la valeur discrétisée de  $u$ .

En posant les conditions aux limites on peut avoir une solution de  $u$  dans le domaine discrétisé.

C'est la méthode la plus ancienne. Elle ne s'adapte pas très bien à la modélisation des systèmes de forme complexe, et est toujours gênée par la nécessité de prendre en compte les conditions d'interfaces [ 2 ] [ 21 ].

En basse fréquence elle est petit à petit supplantée par les méthodes d'éléments finis, mais elle demeure très employée dans tous les problèmes d'évolution, pour la discrétisation de la variable « temps ». En particulier dans les problèmes d'évolution où intervient l'équation de diffusion (calcul des champs induits), la quasi totalité des autres méthodes, et en particulier les éléments finis [ 3 ], font appel aux différences finies pour le temps [ 4 ] [ 5 ].

### 1.3.2 La méthode des éléments finis.

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur une formulation intégrale des équations aux dérivées partielles. Cette formulation peut être de type variationnel, où l'on écrit une équivalence entre la solution du problème différentiel et la fonction qui optimise une fonctionnelle (qui est en général une fonction de Lagrange du système), ou bien obtenue par un principe de "résidus pondérés", comme la méthode de Galerkin. ([ 6 ], [ 7 ], [ 8 ], [ 9 ], [ 10 ], [ 11 ]).

La difficulté essentielle, tout particulièrement pour les modélisations en 3D, réside dans la manipulation du nombre considérable de données qu'elle implique en entrée, et de la quantité importante de résultats numériques que sa mise en oeuvre oblige à traiter.

### 1.3.3 Electrostatique : la méthode des charges équivalentes.

Dans cette méthode, la densité de charge surfacique réelle sur les conducteurs, continue, est remplacée par des charges fictives  $q_j$  discrètes placées en des positions prédéterminées à l'intérieur de chacun des conducteurs (voir Figure 1-1). Ces charges sont calculées en écrivant l'égalité du potentiel superposé des charges fictives en des points des conducteurs, et des potentiels réels connus de ces conducteurs [ 11 ], [ 12 ].

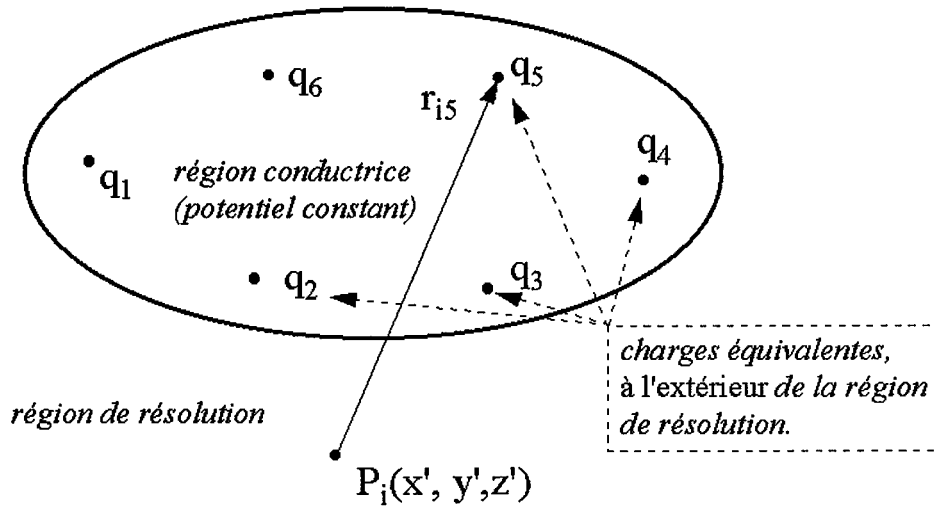


Figure 1-1: méthode des charges équivalentes

Le potentiel superposé en un point  $P_i$  est :

$$V(P_i) = \sum_{j=1}^n g_{ij} \cdot q_j \quad (1-19)$$

où  $g_{ij}$  est le coefficient du potentiel en  $P_i$  associé à une charge fictive  $q_j$ . Dans l'espace 3D ordinaire,  $g_{ij}$  correspond au potentiel d'une charge unitaire, il vaut :

$$g_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (1-20)$$

Dans un système bidimensionnel plan, les charges fictives deviennent des lignes chargées infinies; leur contribution élémentaire s'écrit :

$$g_{ij} = -\frac{\ln r_{ij}}{2\pi\epsilon} \quad (1-21)$$

Les valeurs  $q_j$  des  $N$  charges fictives sont déterminées en écrivant  $N$  équations (1-19), pour  $N$  points  $P_i$  distincts situés à la surface des conducteurs (le terme de gauche de l'équation est ainsi connu).

### 1.3.4 Magnétostatique : la méthode des courants ampériens et charges magnétiques.

Cette méthode permet le calcul direct de l'induction ou du champ magnétique à l'aide de courants ampériens ou de charges magnétiques fictives. On remplace les matériaux perméables par ces courants ou charges, avec des valeurs telles que les discontinuités réelles de l'induction ou du champ magnétique soient exactement reproduites. Cela conduit à une équation intégrale de surface pour l'induction ou pour le champ [ 13 ], [ 14 ], [ 15 ].

L'équation intégrale pour l'induction est obtenue en partant de la continuité du champ magnétique tangentiel entre deux milieux  $v$  et  $m$  de perméabilités différentes:

$$(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_v = (\mathbf{H} \times \mathbf{n})_m \quad (1-22)$$

qui conduit à une discontinuité connue de l'induction tangentielle. Cette discontinuité permet à ces auteurs de définir une densité fictive équivalente de courant superficiel, qu'ils appellent courant ampérien  $\mathbf{K}$  :

$$\mu_0 \mathbf{K} = (\mathbf{B} \times \mathbf{n})_v - (\mathbf{B} \times \mathbf{n})_m \quad (1-23)$$

Compte tenu des conditions de passage (1-22), il vient :

$$\mathbf{K} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0} (\mathbf{B} \times \mathbf{n})_v \quad (1-24)$$

On peut alors exprimer l'induction à partir de la loi de Biot et Savart dans le vide, en prenant en compte l'effet des courants source  $\mathbf{J}$  et de la distribution fictive de courants superficiels  $\mathbf{K}$  :

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_w \frac{(\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x})) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (1-25)$$

$w$  est le volume contenant tous ces courants ( $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$ ).

En substituant  $\mathbf{K}$  par sa valeur en fonction de  $\mathbf{B}$  et en séparant en intégrales de volume pour les courants source et de surface pour les courants ampériens, on obtient (cette séparation n'est faite que pour faciliter la lecture; en fait, il s'agit dans les deux cas d'intégrales au sens des distributions, le terme source pouvant aussi contenir des courants superficiels ou même linéiques) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{w^j} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{w}^j(\mathbf{x}) + \frac{\mu_r - 1}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{n} \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} ds(\mathbf{x}) \quad (1-26)$$

$w^j$  est le volume contenant les sources

$S$  est l'ensemble des interfaces entre matériaux de différentes perméabilités

A partir du moment où le point  $y$  parcourt la surface  $S$  de circulation des courants ampériens, cette expression devient une équation intégrale pour  $\mathbf{B}$ . Elle permettra de déterminer l'induction, dans un premier temps sur la surface  $S$ , puis en tout autre point.

On peut obtenir le même type d'équation pour  $\mathbf{H}$ , en partant de la continuité de l'induction normale, et de la discontinuité correspondante du champ magnétique normal, qui permet cette fois-ci de définir une densité superficielle de charges magnétiques fictives  $R$ :

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})_v = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})_m \quad (1-27)$$

$$R = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})_v - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})_m \quad (1-28)$$

$$R = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})_v \quad (1-29)$$

Le champ généré par ces charges magnétiques fictives (qui se calcule comme le champ électrostatique d'une densité de charges électriques) s'ajoute au champ de Biot et Savart des courants source pour donner le champ total, à l'aide d'une expression intégrale comparable à (1-26) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{w^j} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} d\mathbf{w}^j(\mathbf{x}) + \frac{\mu_r - 1}{4\pi\mu_r} \int_s \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} ds(\mathbf{x}) \quad (1-30)$$

Les avantages de cette méthode ([ 13 ], [ 14 ], [ 15 ]) sont:

- Pas de discrétisation de l'espace, mais seulement de la matière aimantée.
- Calcul direct de  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{H}$
- Dimension réduite des systèmes à résoudre, donc temps de calcul faible.

## 1.4 La méthode des équations intégrales de frontière

Il y a deux expressions classiques de l'équation intégrale de frontière en potentiel : la formulation dite globale, et celle qui est issue de la seconde identité de Green [ 16 ], [ 17 ].

En électrostatique, la formulation globale consiste à exprimer le champ induit par les matériaux polarisés comme étant le champ des dipôles induits, puis à transformer l'intégrale volumique correspondante en intégrale surfacique à l'aide d'une intégration par parties. Cette transformation n'est possible que dans le cas de milieux à susceptibilité constante ; on obtient une équation intégrale sur le potentiel électrostatique:

$$\left(1 + \sum_i^N \frac{\Omega_i}{4\pi} \chi_i\right) V(P) = V_0(P) - \sum_j^N \chi_j \int_{s_j} V(Q) \frac{\partial G_p(Q)}{\partial n} ds \quad (1-31)$$

dans laquelle  $V_0$  est le potentiel des sources imposées et  $\chi$  la susceptibilité.

Cette équation intégrale est comparable à l'équation en champ que nous avons présentée au paragraphe précédent (« charges magnétiques fictives »). Le potentiel induit est cette fois-ci représenté par une densité surfacique de dipôles normaux. La présence de conducteurs électrostatiques (surfaces équipotentielles) peut être prise en compte à l'aide du terme  $V_0$  : on introduit pour cela sur ces surfaces une densité de charge inconnue a priori.

Dans la suite nous allons développer, à l'aide de la seconde identité de Green, la méthode des équations intégrales de frontière en l'appliquant à la solution de l'équation type Poisson:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-32)$$

ou Laplace:

$$\Delta V = 0 \quad (1-33)$$

### 1.4.1 Relation intégrale issue de l'identité de Green

Nous considérons une région d'étude (volume  $v$ ) bornée par la surface formée  $S$ , un point d'observation  $P$  est fixé en  $X = x', Y = y', Z = z'$  (Figure 1-2)

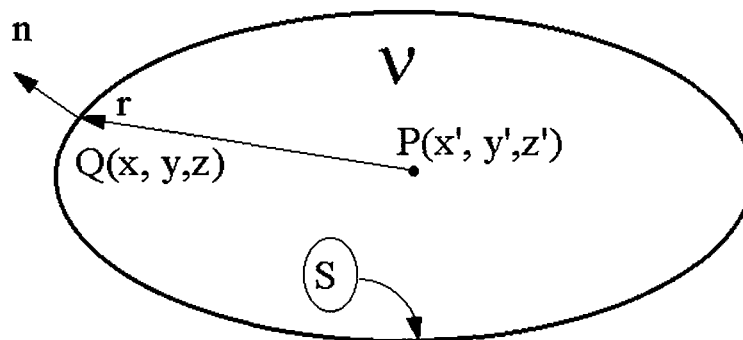


Figure 1-2: méthode intégrale de frontière

L'idée est de trouver une expression pour le potentiel  $V$  en un point d'observation, en utilisant une intégration surfacique au lieu d'une intégration volumique.

Le vecteur  $r$  est:

$$r = [(x'-x), (y'-y), (z'-z)] \quad (1-34)$$

La seconde identité de Green pour des fonctions scalaires  $V$  et  $G$  s'écrit :

$$\int_v (V\Delta G - G\Delta V)dv = \int_s (V\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial V}{\partial n})ds \quad (1-35)$$

Choisissons pour  $G$  « la fonction de Green »

$$G = \frac{1}{r} \quad (1-36)$$

qui a les propriétés suivantes:

$$\Delta G \equiv 0 \quad \forall r \neq 0 \quad \int_v \Delta G dv = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ contient } r = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1-37)$$

c'est-à-dire que le laplacien de  $G$  est une distribution de Dirac volumique. On obtient:

$$\Omega V(x', y', z') = - \int_v G\Delta V dv + \int_s (G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n})ds \quad (1-38)$$

et même, si  $V$  obéit à l'équation de Laplace dans tout le volume:

$$\Omega V(x', y', z') = \int_s (G\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial G}{\partial n})ds \quad (1-39)$$

où :

$$\Omega = \int_s \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (\text{angle solide}) \quad (1-40)$$

$$\Omega = \begin{cases} -4\pi & \text{si } r = 0 \text{ est en } v \\ 0 & \text{si } r = 0 \text{ est en dehors de } v \\ -4\pi < \Omega < 0 & \text{si } r = 0 \text{ est sur } s \end{cases} \quad (1-41)$$

#### 1.4.2 L'équation intégrale de frontière

Cette relation (1-38) permet, à partir de la connaissance des sources dans le volume (contribution de l'intégrale de volume) et des conditions aux limites ( $V$  et sa dérivée normale) sur la surface  $S$  limitant le volume étudié, de déterminer le potentiel partout dans ce volume.

Mais cette relation est également vraie sur la surface, et même en dehors du volume (dans ce dernier cas, le terme de gauche est nul) : pour chaque point d'observation, qui définit aussi bien le point correspondant au potentiel dans le membre de gauche, que l'origine du vecteur rayon dans les fonctions de Green de l'intégrand du membre de droite, on définit par (1-38) une relation intégrale de frontière entre les fonctions scalaires potentiel et dérivée normale sur  $S$ .

Cette relation explicite le fait que, si l'équation de Laplace (ou de Poisson) est vérifiée dans tout le volume, alors on ne peut plus fixer les deux conditions aux limites de façon indépendante. On montre [ 16 ] que l'équation intégrale de frontière (1-39), valable sur l'ensemble de la surface  $S$  du volume est équivalente à l'équation de Laplace valable dans tout ce volume.

Comme c'était le cas pour (1-26), il y a donc deux utilisations possibles de l'expression (1-39) : en tant qu'équation, elle permet de résoudre un problème de Laplace bien posé (pour un volume donné et connaissant l'une des conditions aux limites, trouver l'autre); elle permet aussi, une fois ce problème de conditions aux limites résolu, de calculer le potentiel à l'intérieur de ce volume, en dehors de ses surfaces limites. Il s'agit alors d'un simple calcul dont toutes les données sont connues, non de la résolution d'une équation.

### 1.4.3 Angle solide de l'équation intégrale, et problème ouvert.

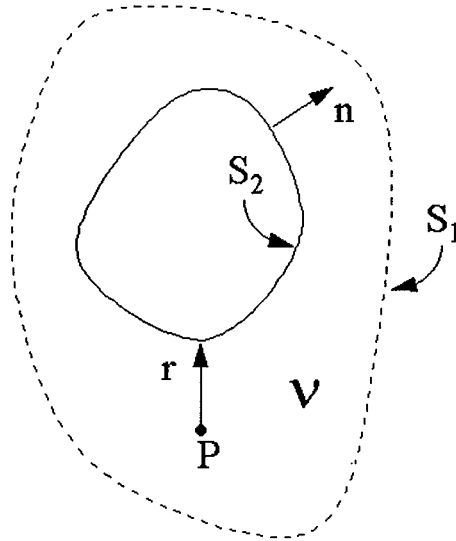


Figure 1-3: prise en compte d'une région ouverte ( $S_1$  tend vers l'infini)

Nous considérons (Figure 1-3) que la région  $V_1$  est bordée par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , l'équation (1-39) s'écrit sous la forme:

$$(\Omega_1 + \Omega_2)V(x', y', z') = \int_{s_1} (G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n}) ds_1 - \int_{s_2} (G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n}) ds_2 \quad (1-42)$$

Si la surface  $S_1$  s'éloigne vers l'infini alors que les sources du champ restent proches de  $S_2$ , les intégrales surfaciques sur  $S_1$  tendent vers 0. Par contre, l'angle solide sous lequel le point d'observation (situé sur  $S_2$  ou dans son voisinage) voit  $S_1$  est indépendant de l'éloignement de  $S_1$ . L'équation intégrale devient donc [ 48 ] pour le problème extérieur :

$$(-4\pi + \Omega_2)V = - \int_{s_2} (G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n}) ds_2 \quad (1-43)$$

alors que l'équation de Laplace résolue dans le volume intérieur à  $S_2$  aurait conduit à une équation intégrale quasiment identique:

$$\Omega_2 V = - \int_{s_2} (G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n}) ds_2 \quad (1-44)$$

mais dont la solution sur  $S_2$  peut être très différente.

En résumé, la résolution d'un problème ouvert sur l'infini est quasi implicite avec cette méthode. Par rapport au problème intérieur concernant la même géométrie, une petite modification de l'équation (1-43), portant sur le seul coefficient angulaire, suffit.

#### 1.4.4 Problème à plusieurs milieux, interfaces.

Dans le problème de Laplace comme nous venons de l'aborder, l'équation de Laplace est résolue dans un volume donné, à la surface duquel une condition aux limites est fixée en chaque point.

Les problèmes d'électrostatique ou de magnétostatique se posent souvent différemment : chaque milieu diélectrique ou permittif correspond à un volume dans lequel l'équation de Laplace est valable pour le potentiel considéré (potentiel électrostatique, ou potentiel magnétique réduit), mais il n'y a pas pour chacun de ces volumes de condition aux limites fixant  $V$  ou sa dérivée sur toute sa frontière. Tout au plus trouve-t-on en électrostatique des parties de frontières à potentiel fixé (elles correspondent aux surfaces des conducteurs électrostatiques).

Par contre, ces différents volumes se touchent, formant des interfaces sur lesquels il existe des conditions particulières, appelées conditions d'interface. Par exemple en électrostatique, pour deux diélectriques traités respectivement à l'aide des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et une interface  $S_{12}$  entre eux (dépourvue de charges de surface, Figure 1-4) on aura :

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_1 &\equiv 0 \text{ dans le diélectrique 1} \\ \Delta V_2 &\equiv 0 \text{ dans le diélectrique 2} \\ V_1 &\equiv V_2 \\ \varepsilon_1 \nabla V_1 \cdot \mathbf{n}_1 &\equiv -\varepsilon_2 \nabla V_2 \cdot \mathbf{n}_2 \end{aligned} \right\} \text{ sur } S_{12} \quad (1-45)$$

Une condition aux limites sur  $\{S_1 - S_{12}\}$  et sur  $\{S_2 - S_{12}\}$

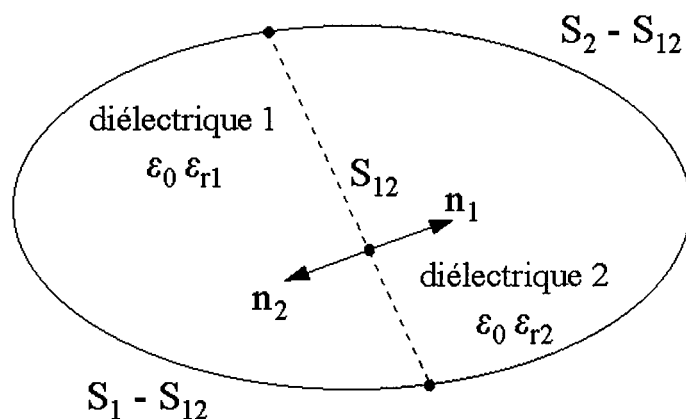


Figure 1-4: prise en compte d'une interface entre diélectriques

On peut réduire ce système à deux équations seulement : le choix judicieux des inconnues permet en effet de prendre en compte implicitement les conditions d'interface [ 18 ]. Pour cela, on peut par exemple pour chaque interface définir une « région de référence »  $i$  (qui peut être par exemple celle qui a la plus faible permittivité) et définir l'inconnue auxiliaire:

$$\nabla^2 V = \varepsilon_{ri} \nabla V \cdot \mathbf{n}_i \quad (1-46)$$



On aura alors:

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} = \frac{V'}{\varepsilon_{r1}} \text{ et } \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = -\frac{V'}{\varepsilon_{r2}} \text{ soit en général } \frac{\partial V_j}{\partial n_j} = \pm \frac{V'}{\varepsilon_{rj}} \quad (1-47)$$

(le signe positif étant choisi lorsque  $j = i$ , région de référence pour cette interface), et l'équation intégrale devient dans toute région  $j$ :

$$\Omega'_j V = \int_{s_j} (\pm G \frac{V'}{\varepsilon_{rj}} - V \frac{\partial G}{\partial n_j}) ds_j \quad (1-48)$$

en notant  $\Omega'$  le facteur angulaire éventuellement corrigé dans le cas d'une région  $j$  extérieure.

### 1.5 Discussion

Les méthodes d'éléments finis et de différences finies sont des méthodes applicables aux problèmes linéaires et non linéaires; par contre, elles sont moins adéquates pour traiter des problèmes ouverts, elles sont moins utilisées pour résoudre des problèmes en trois dimensions [ 19 ], [ 20 ].

Les méthodes intégrales peuvent être appliquées à des problèmes ouverts ou fermés, mais elles ne sont pas appropriées aux problèmes non linéaires [ 6 ], [ 21 ], [ 22 ], [ 23 ], [ 24 ]. L'un des avantages de ces méthodes est qu'on ne discrétise que les frontières, ce qui fait diminuer considérablement l'espace mémoire nécessaire au stockage des données, mais le système matriciel à résoudre est plein, non symétrique et mal conditionné.

Au contraire, les matrices issues des éléments finis sont des matrices creuse dont on peut ne stocker que les éléments non nuls, ce qui fait gagner en espace mémoire pour les stocker. Pour résoudre le système obtenu en BEM les méthodes itératives classiques, très utilisées et efficaces pour la résolution des systèmes issus de la méthode des éléments finis, sont rarement utilisables, et il faut alors recourir aux méthodes directes de résolution, comme la triangulation de Gauss. Le temps de résolution croît alors comme le cube du nombre des inconnues, devenant prohibitif en particulier dès que l'ordinateur ne parvient plus à stocker la matrice complète en mémoire vive (16 MO pour 2000 inconnues, 100MO pour 5000 inconnues, 400MO pour 10 000 inconnues, etc. ...).

Pour pallier cette faiblesse des méthodes intégrales, nous proposons au Chapitre 5 une méthode itérative de résolution, qui devrait diminuer considérablement le temps de résolution du système.

## 2. Implantation numérique de la méthode intégrale

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons implanter numériquement la méthode intégrale de frontière décrite au chapitre précédent. Nous allons discrétiser l'équation pour la mettre sous forme matricielle. Nous parlerons du choix des éléments finis, en particulier de l'ordre de ces éléments et du choix des fonctions d'interpolation. Nous présenterons ensuite la méthode des images qui permet, en prenant en compte les symétries, antisymétries, périodicités et bipériodicités, de diminuer le nombre des inconnues.

### 2.2 Discrétisation

Résoudre numériquement l'équation (1-46) consiste à discrétiser la frontière  $S$  en éléments de frontière  $S_e$  et à construire un système linéaire à résoudre. Cela nous permet d'écrire l'équation (1-46) sous la forme discrétisée suivante :

$$\Omega_P V(P) = \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \left[ \int_{S_e} \left( \pm G_P \frac{V'_e}{\epsilon_r} - V_e \frac{\partial G_P}{\partial n} \right) ds_e \right] \quad (2-1)$$

où  $P$  est le point d'observation,  $e$  est le numéro d'élément,  $e_{\text{tot}}$  est le nombre total des éléments utilisés pour discrétiser la surface  $S$  de la région considérée. Rappelons (voir §1.4.4.) que  $V'_e$  est la grandeur, continue aux interfaces entre diélectriques, liée à la dérivée normale du potentiel :

$$V'_e = \mp \frac{D_n}{\epsilon_0} = \mp \epsilon_r E_n = \pm \epsilon_r \frac{\partial V}{\partial n} \quad (2-2)$$

le signe supérieur étant choisi si le calcul en cours concerne la région de référence associée à l'interface considérée, le signe inférieur étant pris dans le cas contraire.

Pour arriver au système linéaire à résoudre, il reste à choisir le type d'éléments finis à utiliser et celui de la discrétisation des fonctions physiques  $V$  et  $V'$ , à préciser la méthode de calcul des intégrales élémentaires, et la méthode permettant d'obtenir un système linéaire comptant autant d'équations indépendantes que d'inconnues. Nous abordons aussi dans ce chapitre les techniques de prise en compte de différents types de symétries.

#### 2.2.1 Choix du type d'éléments de frontière

Il y a différents choix possibles pour les éléments de frontière, en particulier : éléments quadrilatéraux, éléments triangulaires, de différents ordres dans chaque cas.

Comme l'un des buts de notre travail était de trouver des maillages adaptés au problème à résoudre, on doit être capable d'affiner le maillage dans certains endroits et pas dans les autres : les mailleurs en quadrilatères ne satisfont pas ce but, car l'affinage de maillage en un endroit se propage ailleurs, dans des endroits où ce ne serait pas nécessaire. Par contre, les maillages en triangles se prêtent bien au maillage adaptatif. Ce travail a donc été basé sur des maillages en triangles.

### 2.2.2 Choix de l'ordre des polynômes d'interpolation

Le calcul des intégrales élémentaires de l'expression 2-1 rend nécessaire une représentation numérique de la surface de chaque élément, ainsi que de la valeur des fonctions physiques  $V$  et  $V'$  en chaque point de cet élément numérisé. On utilise pour cela les techniques classiques d'éléments finis.

Chaque triangle de surface va être représenté à l'aide de 2 paramètres  $u$  et  $v$ , qui vont varier entre deux bornes prédéfinies (0 et 1 par exemple). A chaque couple de valeurs  $(u,v)$  sera ainsi associé un point  $[X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)]$  de la facette, ainsi qu'une valeur de chaque fonction physique, à l'aide d'une représentation polynomiale faisant intervenir les valeurs en certains points caractéristiques de la facette, appelés noeuds (par exemple, les trois sommets d'une facette triangulaire):

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_e(u,v) &= \sum_j N_j(u,v) \cdot V_{e,j} \\
 \tilde{V}'_e(u,v) &= \sum_k N_k(u,v) \cdot V'_{e,k} \\
 \tilde{X}(u,v) &= \sum_i N_i(u,v) X_{e,i} \\
 \tilde{Y}(u,v) &= \sum_i N_i(u,v) Y_{e,i} \\
 \tilde{Z}(u,v) &= \sum_i N_i(u,v) Z_{e,i}
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

Avec cette représentation, l'expression 2-1 prend la forme discrétisée générale :

$$\Omega_P V(P) = \sum_{e=1}^{e_{tot}} \left[ \pm \sum_i \frac{1}{\varepsilon_r} V'_{ei} \int_{s_e} N_i G_P ds - \sum_j V_{ej} \int_{s_e} N_j \frac{\partial G_P}{\partial n} ds \right] \tag{2-4}$$

Différents choix sont possibles pour le degré des polynômes d'interpolation, qui vont être utilisés pour l'approximation de la géométrie, et pour la discrétisation des fonctions physiques  $V$  et  $V'$ . Dans une étude complète [ 26 ], Hoole conseille de choisir l'ordre de  $V$  un degré plus élevé que celui de  $V'$ . Nous verrons dans la suite que l'une des difficultés rencontrée en méthode intégrale est l'existence d'intégrands singuliers, qui sont plus simples à gérer pour des fonctions d'interpolation d'ordre minimal, car on peut alors faire appel, au moins partiellement, à de l'intégration analytique. Nous avons de ce fait choisi l'ordre un pour  $V$  et l'ordre zéro pour  $V'$ , c'est-à-dire qu'il y a une valeur pour  $V$  sur chaque sommet de triangle, et une valeur de sa dérivée normale  $V'$  par triangle (constant par élément), ce qui est un choix cohérent.

Le choix de l'ordre zéro pour  $V'$  nous permet en plus de calculer sa valeur pour des points anguleux et arêtes, sans avoir à gérer les discontinuités de façon spéciale. Par contre, cela s'avère à l'usage assez coûteux, car il y a statistiquement environ deux fois plus de triangles que de noeuds. Cette discrétisation « à l'ordre 0 » est donc plutôt luxueuse en nombre de degrés de liberté.

En ce qui concerne l'interpolation de la géométrie, nous utiliserons les mêmes polynômes que pour le potentiel; les surfaces seront ainsi discrétisées en facettes triangulaires planes.

### 2.2.3 Fonctions d'interpolation

Les polynômes d'interpolation sont décrits et exposés en détail dans [ 27 ]. Les fonctions d'interpolation d'ordre 1, que nous utilisons donc pour la géométrie et pour le potentiel, sont :

$$\begin{cases} N_1(u,v) = u \\ N_2(u,v) = v \\ N_3(u,v) = 1 - u - v \end{cases} \quad (2-5)$$

Un élément d'ordre un est montré en Figure 2-1.

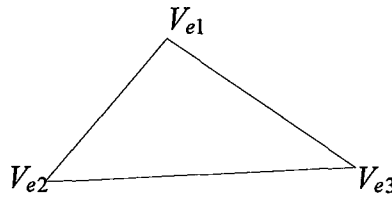


Figure 2-1 : élément fini d'ordre 1

Avec les triangles d'ordre 1 utilisés pour la représentation géométrique et pour le potentiel, et les valeurs de  $V'$  constantes par élément, nous obtenons la forme particulière suivante de l'expression 2-1, qui fait apparaître les 4 intégrales élémentaires que nous aurons à calculer numériquement :

$$\Omega_P V(P) = \pm \sum_{e=1}^{e_{tot}} \left[ \frac{1}{\varepsilon_r} V'_e \int_{s_e} G_P ds_e - V_{e1} \int_{s_e} N_1 \frac{\partial G_P}{\partial n} ds_e - V_{e2} \int_{s_e} N_2 \frac{\partial G_P}{\partial n} ds_e - V_{e3} \int_{s_e} N_3 \frac{\partial G_P}{\partial n} ds_e \right] \quad (2-6)$$

En notant  $a_{P,e}$  et  $b_{P,e,j}$  ces intégrales élémentaires :

$$a_{P,e} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \int_{s_e} G_P ds_e \quad (2-7)$$

$$b_{P,e,j} = - \int_{s_e} N_j \frac{\partial G_P}{\partial n} ds_e \quad (2-8)$$

l'expression (2-4) prend enfin la forme linéaire suivante :

$$\Omega_P V(P) = \sum_{e=1}^{e_{tot}} \left[ V'_e a_{P,e} + \sum_{j=1}^3 V_{ej} b_{P,e,j} \right] \quad (2-9)$$

$V_{e1}, V_{e2}$  et  $V_{e3}$  sont les potentiels respectivement aux sommets 1, 2 et 3 de l'élément e.

### 2.2.4 Point d'observation sur un élément

Le point P particulier qui intervient dans les expressions successives de 2-1 est appelé "point d'observation". Suivant la distance entre ce point et l'élément d'intégration e, il faut choisir la méthode la plus adaptée pour calculer les coefficients intégraux a et b. En effet, si la méthode de discrétisation utilisée est empruntée aux méthodes d'éléments finis, les intégrales à calculer sont pour leur part très différentes de ce qu'on trouve dans cette méthode, et plus "difficiles". Par exemple, si le point P appartient à l'élément e, l'intégrant des expressions 2-7 ou 2-8 tend vers l'infini lorsque le point d'intégration tend vers P, alors que l'intégrale reste bien finie.

Il est important de traiter ce cas avec une grande précision numérique, car nous verrons qu'il intervient aux étapes importantes de la méthode intégrale : lors de l'assemblage du système linéaire, puis aussi dans l'étape d'évaluation de précision de la solution. Les méthodes numériques développées pour résoudre cette difficulté sont exposées en détail au chapitre 3.

### 2.2.5 Prise en compte de symétries, antisymétries, périodicités et bipériodicités

Nous considérons ici des domaines possédant une symétrie (symétrie géométrique et du potentiel, lignes de champ parallèles à ce plan), une antisymétrie (plan à potentiel nul, ou symétrie géométrique associée à un potentiel de signe opposé pour deux points symétriques), une périodicité axiale (la forme géométrique et le potentiel se présentent périodiquement autour d'un axe) ou une bipériodicité (périodicité dont la figure répétitive est elle-même symétrique par rapport à un plan passant par l'axe).

Dans tous ces cas, il est possible de diminuer la taille du domaine à discrétiser, et en conséquence de diminuer la taille du système linéaire à construire et à résoudre. Les méthodes mises en oeuvre étant très différentes de celles qui sont utilisées dans une méthode d'éléments finis, nous les présentons ici de façon détaillée.

Le principe de base est celui de la méthode des images, bien connue pour les calculs en électrostatique. Une partie de l'objet étudié contient toute l'information, géométrique et physique. Seule cette partie est décrite et discrétisée.

C'est cependant l'ensemble de l'objet qui intervient dans l'expression intégrale (2-1) : sa géométrie complète est donc virtuellement reconstituée, chaque élément de la surface étant complété par toutes ses images par les différentes symétries ou rotations nécessaires, et l'intégration superficielle est entièrement calculée; cela est nécessaire car les éléments image d'un élément donné sont "vus" sous des angles et à des distances différentes par le point d'observation P.

Le calcul pour un point d'observation donné est donc plutôt un peu plus long que ce qu'il serait en ayant une description complète et redondante de l'objet. Cependant, la quantité d'information à stocker est diminuée d'un facteur 2 par symétrie, ce qui est déjà avantageux. Cependant, l'avantage essentiel apparaît lorsqu'il s'agit de déterminer les potentiels et dérivées superficiels en résolvant un système d'équations construit à partir de (2-1) : si chaque ligne du système est aussi longue à construire, il faut par contre en construire  $2^{N_s}$  fois moins pour  $N_s$  symétries. La matrice obtenue compte ainsi  $2^{2N_s}$  fois moins de coefficients, et son inversion est fortement accélérée (facteur  $2^{3N_s}$  pour une inversion de Gauss).

Imaginons à titre d'exemple une géométrie où deux éléments p et n sont symétriques par rapport à un plan; dans ce cas, le système complet à résoudre en développant les termes correspondant à ces éléments s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
\cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} & \cdots & \cdots & b_{1p1} & b_{1p2} & b_{1p3} & \cdots & b_{1n1} & b_{1n2} & b_{1n3} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & a_{kp} & \cdots & a_{kn} & \cdots & \cdots & b_{kp1} & b_{kp2} & b_{kp3} & \cdots & b_{kn1} & b_{kn2} & b_{kn3} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\cdot \\
V'_p \\
\cdot \\
V'_n \\
\cdot \\
- \\
\cdot \\
V_{p1} \\
V_{p2} \\
V_{p3} \\
\cdot \\
V_{n1} \\
V_{n2} \\
V_{n3} \\
\cdot
\end{bmatrix}
= [0] \quad (2-10)$$

Comme il y a une symétrie,  $V'_p = V'_n$  et également  $V_{p1} = V_{n1}$ ,  $V_{p2} = V_{n2}$ ,  $V_{p3} = V_{n3}$ . En mettant ensemble dans ce système les termes qui sont égaux :

$$\begin{bmatrix}
\cdots & a_{1p} + a_{1n} & \cdots & \cdots & b_{1p1} + b_{1n1} & b_{1p2} + b_{1n2} & b_{1p3} + b_{1n3} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & a_{kp} + a_{kn} & \cdots & \cdots & b_{kp1} + b_{kn1} & b_{kp2} + b_{kn2} & b_{kp3} + b_{kn3} & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\cdot \\
V'_p \\
\cdot \\
- \\
\cdot \\
V_{p1} \\
V_{p2} \\
V_{p3} \\
\cdot
\end{bmatrix}
= [0] \quad (2-11)$$

Lorsqu'il y a une antisymétrie au lieu d'une symétrie, il faut soustraire les termes correspondant. Dans le programme que nous avons réalisé, nous avons introduit l'effet des symétries, antisymétries, périodicités et bipériodicités, l'éventuelle inversion étant prise en compte dans le calcul par un coefficient de signe  $f$  :

$$\sum_{e=1}^{e_{tot}} \left[ V'_e \left( \sum_{k=1}^{sym} f_k \cdot a_{iek} \right) + \sum_{j=1}^3 V_{ej} \left( \sum_{k=1}^{sym} f_k b_{iekj} \right) \right] = 0 \quad (2-12)$$

$$f_k = \pm 1$$

### 2.3 Assemblage

Nous avons montré au chapitre 1 dans le principe que l'équation de Laplace vérifiée dans tout un volume est équivalente à l'équation intégrale écrite sur toute la surface de ce volume. Nous souhaitons donc maintenant résoudre numériquement l'équation intégrale à la place de l'équation de Laplace. Dans ce but, nous venons de montrer comment écrire numériquement l'expression intégrale (2-1). Il faut maintenant choisir un nombre fini de points test, sur cette surface, de façon à établir le système linéaire qui donne la solution approchée des équations intégrales : en effet, si les points d'observation P se trouvent sur la

surface (élément  $e_{\text{obs}}$ ), le terme de gauche de (2-9) peut être lui aussi directement exprimé à partir des valeurs nodales du potentiel :

$$\Omega \left[ \tilde{P}_{e_{\text{obs}}} (u, v) \right] \cdot \tilde{V} \left[ \tilde{P}_{e_{\text{obs}}} (u, v) \right] = \Omega_{P_{e_{\text{obs}}}} \cdot \sum_{i=1}^3 V_{e,i} \cdot N_i (u, v) \quad (2-13)$$

avec des valeurs particulières très simples si P est un noeud, ou si P est le centre de gravité de l'élément de surface triangulaire considéré :

$$\begin{aligned} \tilde{V} \left[ \tilde{P}_e (0,0) \right] &= V_{e,1} \\ \tilde{V} \left[ \tilde{P}_e (1,0) \right] &= V_{e,2} \quad \tilde{V} \left[ G_e \right] = \frac{1}{3} (V_{e,1} + V_{e,2} + V_{e,3}) \\ \tilde{V} \left[ \tilde{P}_e (0,1) \right] &= V_{e,3} \end{aligned}$$

On peut ainsi construire un système linéaire en choisissant judicieusement un ensemble de points  $P_{e_{\text{obs}}}$  :

$$\Omega_{P_{e_{\text{obs}}}} \cdot \sum_{i=1}^3 V_{e_{\text{obs}},i} \cdot N_i (u, v) = \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \left[ V'_e a_{P,e} + \sum_{j=1}^3 V_{e,j} b_{P,e,j} \right] \quad (2-14)$$

On peut noter en passant qu'aucun calcul particulier n'est à réaliser pour déterminer l'angle solide  $\Omega_p$ , si ce n'est une sommation de l'ensemble des coefficients angulaires b, à mesure qu'ils sont calculés [ 16 ]:

$$\Omega \left[ P_{e_{\text{obs}}} (u, v) \right] = \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \sum_{j=1}^3 b_{P,e,j} \quad (2-15)$$

Ce coefficient sera donc fortement dominant par rapport aux autres coefficients du potentiel; il se trouvera réparti sur les trois termes correspondant à l'élément de frontière sur lequel se trouve le point d'observation, ou même sur un seul terme si ce point est l'un des noeuds du maillage.

Pour aboutir à un système linéaire régulier et bien conditionné, il faut d'une part écrire autant d'équations (2-9) qu'il y a de coefficients V ou V' inconnus, d'autre part répartir les points d'observation associés, le mieux possible, sur tous les éléments de la surface, de façon à ce que la partie "potentiel" de la matrice soit à diagonale dominante.

### 2.3.1 Points d'observation particuliers : noeuds du maillage, centres de gravité des éléments

Pour obtenir cette répartition adéquate, nous utilisons un algorithme simple qui tient compte des conditions aux limites et du maillage : les coefficients du potentiel étant associés aux noeuds, et ceux de sa dérivée normale aux éléments, nous avons écrit une équation en chaque noeud où V est inconnu, et une en chaque centre de gravité des éléments pour lesquels la dérivée normale est inconnue.

Lorsqu'il s'agit d'une surface pour laquelle l'une des conditions aux limites est fixée, on est donc conduit à écrire des équations ou bien aux centres de gravité des éléments (condition de Dirichlet), ou bien aux noeuds du maillage (condition de Neuman).

Pour les interfaces, là où les deux grandeurs sont inconnues, ce nécessaire équilibre entre nombres d'inconnues et d'équations conduit à écrire des équations à la fois aux noeuds et

aux centres de gravité. Cependant, une telle interface touche deux « régions de calcul » : il est donc possible en chaque point d'écrire deux équations intégrales indépendantes, une pour chacune de ces régions.

Une façon simple d'équilibrer inconnues et équations consistera donc dans le cas des interfaces à poser les équations intégrales aux centres de gravité sur une face (et dans la région de calcul associée), et aux noeuds du maillage sur l'autre. Il y a là un choix arbitraire à faire (sur quelle face écrire les équations aux noeuds ?); l'expérience du logiciel Phi3d a jusqu'ici montré que des résultats globalement plus précis étaient obtenus en écrivant les équations associées à la dérivée normale dans la région ouverte à l'infini, si une telle région existait.

Quelques expériences ont été menées avec notre logiciel, qui montrent que le comportement est comparable (en particulier pour des perméabilités relatives élevées de la région intérieure), malgré les choix très différents relatifs à la discrétisation de la grandeur normale.

### 2.3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites interviennent une première fois, comme nous venons de le voir au paragraphe précédent, pour décider des points d'observation qui vont servir à construire le système d'équations intégrales.

Elles interviennent une seconde fois pendant l'assemblage du système linéaire : tous les termes connus du vecteur  $(V, V')$  sont en effet immédiatement multipliés par les coefficients correspondants de la matrice et rejetés au second membre R (terme source). On obtient ainsi un système modifié :

$$A'.X'=R \quad (2-16)$$

où A' est une matrice carrée qui correspond aux coefficients des inconnues, et X' est le vecteur des inconnues restantes.

### 2.3.3 Résolution

Comme la matrice A' est une matrice pleine et non symétrique, nous avons utilisé la méthode directe de Gauss pour résoudre le système. Cependant, une partie du présent travail est consacrée à la recherche de méthodes plus performantes au niveau des temps de calcul : c'est l'objet du chapitre 5.

## 2.4 Exploitation des résultats

La résolution numérique de l'équation intégrale nous fournit directement les valeurs du potentiel électrique V (dans notre cas, une valeur par noeud) et du champ normal V' (dans notre cas, une valeur par triangle) sur les surfaces qui ont servi à cette résolution.

Le résultat brut pour la grandeur V' (dérivée normale du potentiel) est constant par facette : si on souhaite une exploitation en tant que grandeur nodale (visualisation plus agréable à l'oeil), il est nécessaire de transformer ce résultat à l'aide d'un « lissage » : nous présentons ci-dessous la technique que nous utilisons dans ce but.

On peut aussi souhaiter connaître la répartition du potentiel ou du champ électrique en dehors des surfaces ayant servi à la résolution du problème. Nous expliquons donc à la suite les méthodes à mettre en oeuvre dans ce but.

### 2.4.1 Lissage du champ normal

A partir d'un résultat donné comme constant par facette, il s'agit ici de déterminer la meilleure représentation nodale de ce même résultat. Nous proposons d'obtenir cette représentation nodale optimale en minimisant son écart quadratique par rapport à la



représentation constante par facette, à l'aide d'un classique développement de type « éléments finis ». Si  $V'_e$  est la valeur de  $\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$  par élément (donnée) et  $V'_n$  sa valeur par noeud (à déterminer) il faut minimiser l'intégrale sur tous les éléments de la différence entre la valeur interpolée de  $V'_n$  (c'est-à-dire  $\sum_{n=1}^3 V'_n \cdot N_n$ ) et  $V'_e$ , élevé au carré :

$$\int_s \left[ \left( \sum_{n=1}^3 V'_n \cdot N_n \right) - V'_e \right]^2 ds \quad (2-17)$$

Pour la minimiser, il faut annuler sa dérivée par rapport à  $V'_n$  :

$$2 \int_s \sum_{i=1}^3 \left[ \left( \sum_{n=1}^3 V'_n \cdot N_n \right) - V'_e \right] N_i ds = 0 \quad (2-18)$$

$$\int_s \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 V'_n \cdot N_n \cdot N_i = \int_s \sum_{i=1}^3 V'_e \cdot N_i \quad (2-19)$$

Dans ce cas le système élémentaire à calculer (puis à assembler pour tous les éléments) sera :

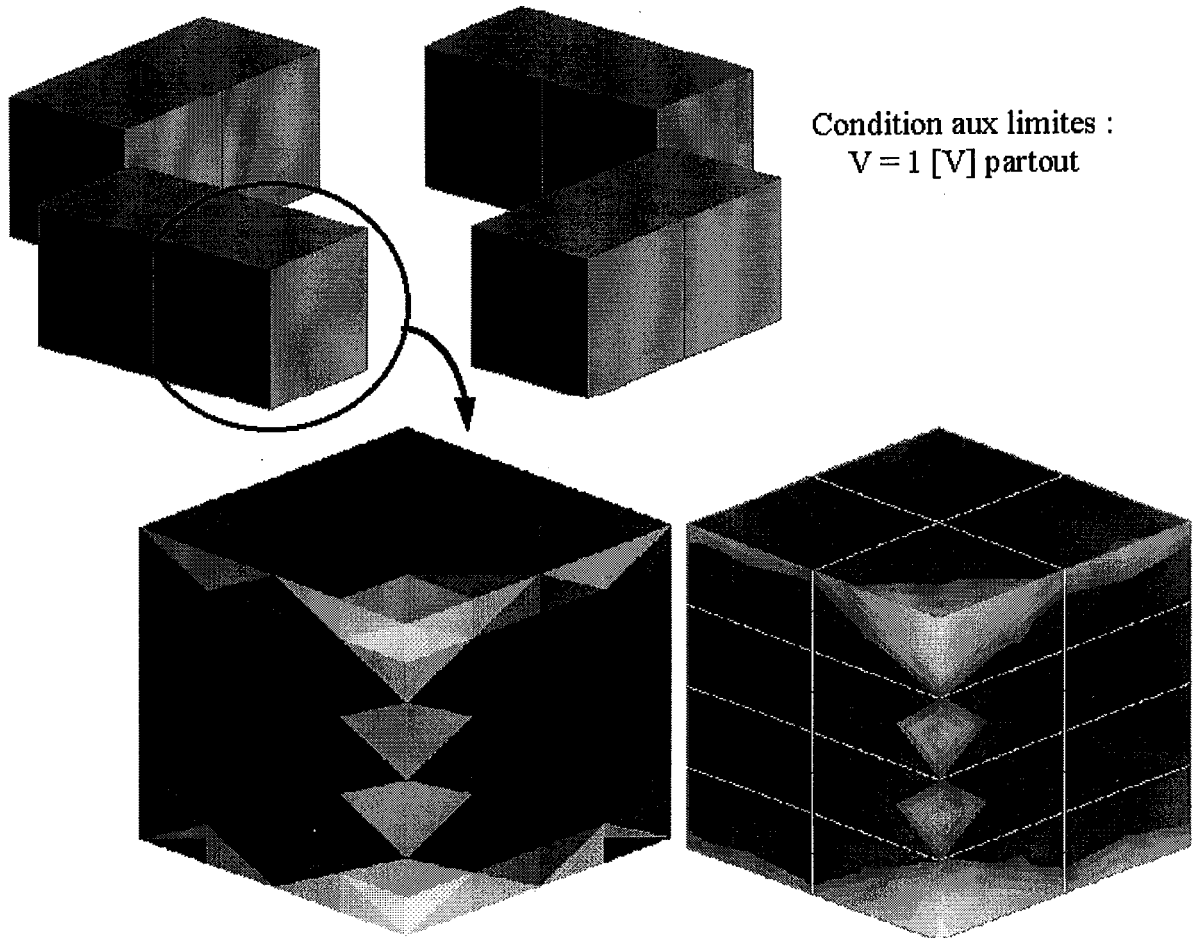
$$\begin{bmatrix} \int_{s_e} N_1 \cdot N_1 ds & \int_{s_e} N_1 \cdot N_2 ds & \int_{s_e} N_1 \cdot N_3 ds \\ \int_{s_e} N_2 \cdot N_1 ds & \int_{s_e} N_2 \cdot N_2 ds & \int_{s_e} N_2 \cdot N_3 ds \\ \int_{s_e} N_3 \cdot N_1 ds & \int_{s_e} N_3 \cdot N_2 ds & \int_{s_e} N_3 \cdot N_3 ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{s_e} N_1 V'_e ds \\ \int_{s_e} N_2 V'_e ds \\ \int_{s_e} N_3 V'_e ds \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Les termes de cette matrice sont en fait liés uniquement à la surface de l'élément, ainsi nous avons :

$$S_e * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 24 & 24 \\ 1 & 1 & 1 \\ 24 & 12 & 24 \\ 1 & 1 & 1 \\ 24 & 24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{bmatrix} = S_e V'_e \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

$S_e$  est la surface d'élément e.  $V'_1, V'_2, V'_3$ , sont les valeurs du champ normal aux sommets 1, 2, et 3 de l'élément e.

La frontière de chaque région de calcul étant constituée de plusieurs « surfaces » (entendre par là un sous-ensemble « lisse » de cette frontière, sans arête ni pointe), nous avons appliqué cette technique surface par surface, c'est-à-dire nous avons fait l'assemblage et la résolution du système indépendamment pour chacune des surfaces. Cela permet de prendre en compte les éventuelles discontinuités de la grandeur  $V'$  sur les arêtes de la frontière ( $V'$  étant définie par rapport à la normale à la frontière, elle est en principe discontinue au passage d'une arête). La Figure 2-2 donne un exemple de lissage du champ normal sur une partie de structure parallélépipédique.



*Figure 2-2 : exemple de lissage de  $V$  par moindres carrés.  
 A gauche: grandeur par triangle. A droite : grandeur nodale.  
 Noter la discontinuité au passage de l'arête supérieure.*

#### 2.4.2 Calculs hors des surfaces : méthode

Après résolution du système d'équations intégrales de frontière pour le maillage donné, on peut calculer la répartition du potentiel en n'importe quel point des régions de calcul, à partir de la solution, à l'aide de l'expression 1-39 et de sa forme discrète 2-9 :

$$\Omega_P V(P) = \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \left[ V_e' a_{P,e} + \sum_{j=1}^3 V_{ej} b_{P,e,j} \right] \quad (2-22)$$

Une méthode classique d'exploitation des résultats « en dehors des surfaces de résolution consiste à calculer en une fois sur une « coupe » du dispositif étudié, qu'on munit à cette occasion d'un « maillage » qui servira de support à la visualisation du résultat.

Avec cette technique, il se produit fréquemment que des points d'observation se retrouvent très proches des surfaces de résolution : les méthodes précises de calcul des intégrales élémentaires, utilisées pour l'assemblage de la matrice, sont donc également utilisées ici avec profit.

Le champ électrique peut aussi être calculé par intégration directe de la solution surfacique, en prenant le gradient de l'expression intégrale du potentiel :

$$\Omega_P \text{grad}[V(P)] + V(P) \text{grad}(\Omega_P) = \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \left[ V'_e \text{grad}(a_{P,e}) + \sum_{j=1}^3 V_{ej} \text{grad}(b_{P,e,j}) \right] \quad (2-23)$$

ce qui donne :

$$-\text{grad}[V(P)] = \frac{1}{\Omega_P} \left\{ V(P) \text{grad}(\Omega_P) - \sum_{e=1}^{e_{\text{tot}}} \left[ V'_e \text{grad}(a_{P,e}) + \sum_{j=1}^3 V_{ej} \text{grad}(b_{P,e,j}) \right] \right\} \quad (2-24)$$

Théoriquement, le gradient de l'angle solide sous lequel le point P voit la surface du domaine de calcul est nul, et le terme en gradient de cet angle n'a pas à être pris en compte. Cependant, on constate que, lorsque l'intégration numérique n'est plus parfaite (point d'observation très proche de la frontière), le calcul du champ gagne beaucoup en précision lorsqu'on prend en compte ce terme. Ce calcul complémentaire ne coûtant presque rien (il résulte de la sommation de termes élémentaires calculés dans le membre de droite), il est réalisé systématiquement.

## 2.5 Validation, exemples

### 2.5.1 Validation à l'aide de résultats analytiques

La précision de la méthode intégrale peut être testée à l'aide de configurations pour lesquelles une solution analytique est connue. Le condensateur plan constitue toujours le premier test; nous proposons ci-dessous (Figure 2-3) un cas légèrement plus complexe, constitué d'un condensateur torique à section carrée.

Nous l'avons résolu analytiquement et à l'aide des deux programmes d'équations intégrales disponibles (notre programme et Phi3d). La résolution numérique a été réalisée successivement à l'aide d'une description complète de la géométrie, puis en prenant en compte 2 symétries du dispositif, de façon à valider aussi la prise en compte de ces symétries.

La comparaison en absolu (Figure 2-4) de l'évolution du potentiel sur un rayon montre une parfaite corrélation entre les résultats numériques (notre programme et Phi3d) et analytiques.

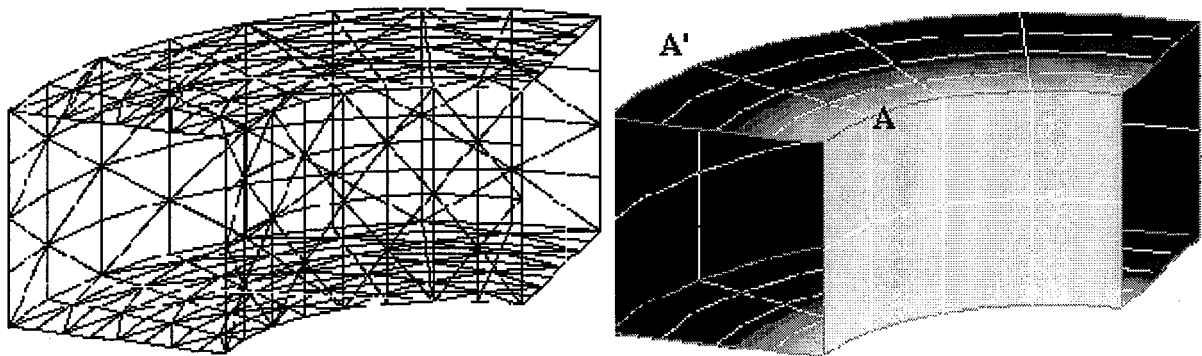
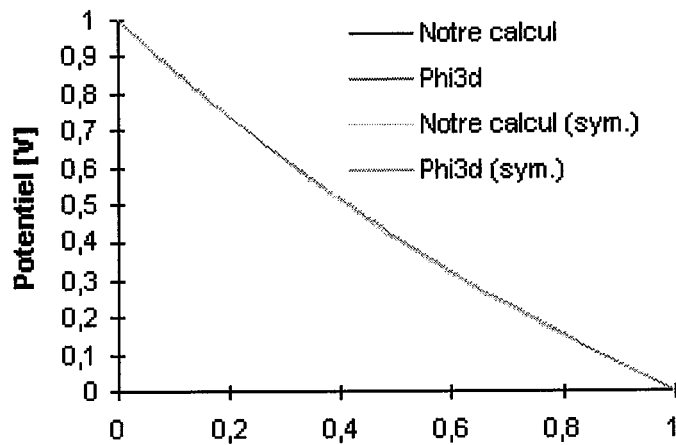


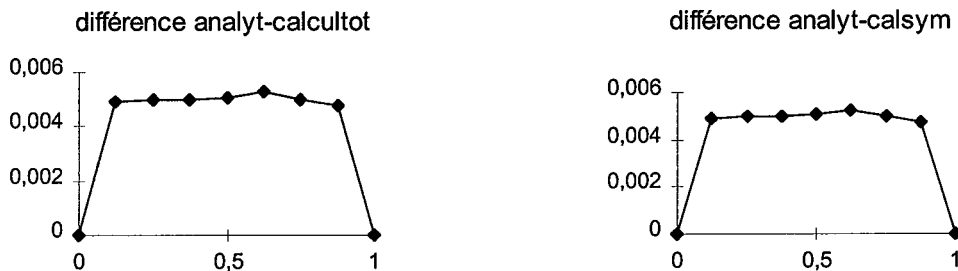
Figure 2-3 : condensateur torique (maillage et solution en potentiel Différence de potentiel : 1V



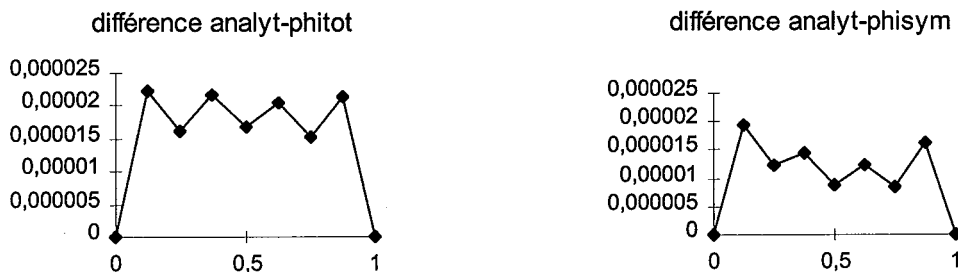
**Figure 2-4 : évolutions du potentiel sur la ligne AA'**

Par contre, lorsqu'on s'intéresse à l'écart entre résultats on voit apparaître une erreur relative très inférieure pour Phi3d (Figure 2-6, erreur de l'ordre de  $10^{-5}$ ), par rapport à notre nouveau programme (Figure 2-5, erreur de l'ordre de 0,5%). Or, les méthodes d'intégration que nous utilisons sont en principe beaucoup plus précises que celles de Phi3d.

La raison de l'écart supérieur constaté semble tenir au type des éléments de maillage utilisés par chaque programme : Phi3d utilise des éléments finis du second ordre, qui permettent une description assez précise de la courbure des électrodes (à l'aide de segments de paraboles). Nous utilisons pour notre part des facettes triangulaires planes. Nos résultats ne correspondent donc pas exactement au tore du calcul analytique.

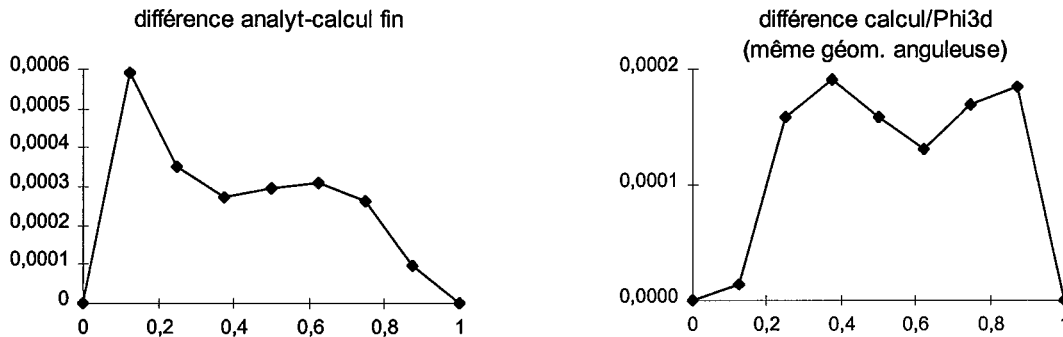


**Figure 2-5 : Erreur (notre calcul) sur la ligne AA' - Sans puis avec symétries.**



**Figure 2-6 : Erreur (logiciel Phi3d) sur la ligne AA' - Sans puis avec symétries.**

Pour nous en assurer, nous avons d'une part résolu le même problème en maillant plus finement dans la direction de variation angulaire, ce qui atténue l'effet de facettes; l'erreur est immédiatement réduite (Figure 2-7, gauche) d'un facteur 10. D'autre part, nous avons également calculé avec Phi3d la géométrie anguleuse prise en compte par notre programme (même figure, à droite), l'écart de résultats descend cette fois-ci en dessous de 0,02%. Il est difficile d'espérer mieux avec une géométrie conduisant à une répartition non uniforme du champ normal sur les électrodes.

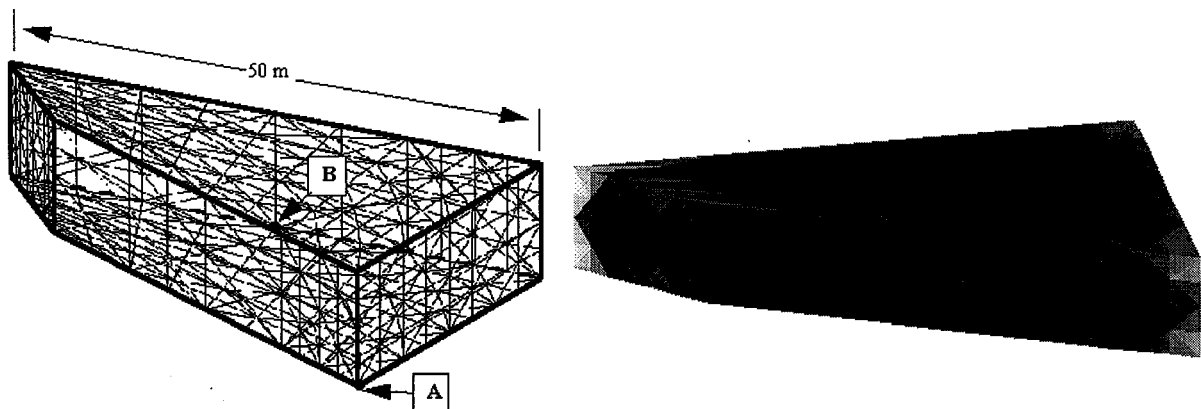


**Figure 2-7 :**  
 - Erreur après réduction des facettes par remaillage (à gauche) / solution analytique  
 - Écart avec la même géométrie (à facettes) / résultat Phi3d.

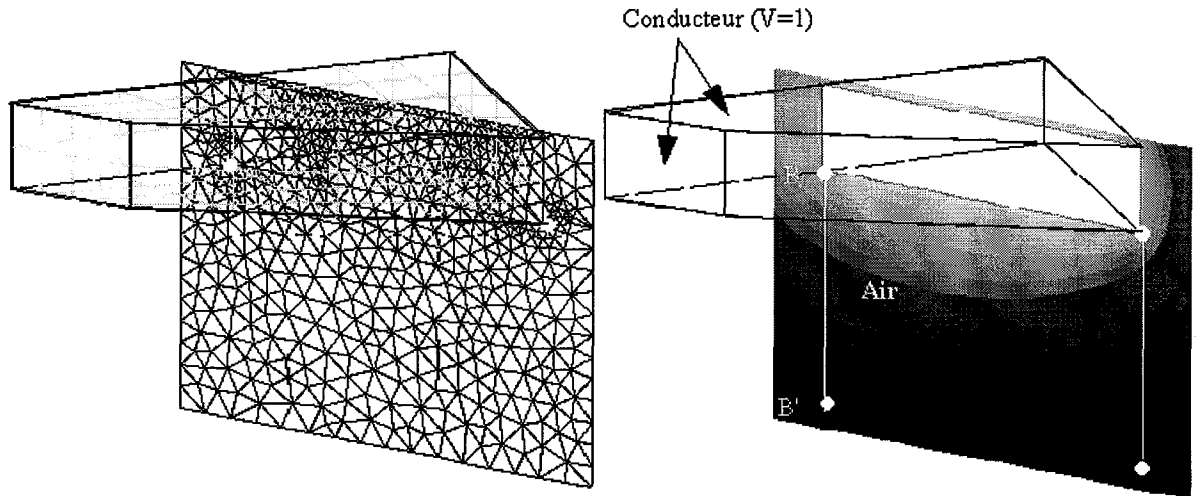
### 2.5.2 Exemple d'exploitation de résultats dans une « coupe »

On a résolu le problème d'électrostatique défini à la Figure 2-8; il s'agit d'un conducteur électrostatique au potentiel 1V, placé dans l'espace infini.

La résolution de l'équation intégrale à l'aide du maillage surfacique donne dans un premier temps une approximation de la répartition  $V'$  (proportionnelle à la densité surfacique de charge, même Figure). Dans un second temps, on définit un second maillage d'une coupe du dispositif (Figure 2-9), aux noeuds duquel on calcule le potentiel à l'aide de (2-22), qu'on peut alors représenter par interpolation linéaire sur les triangles du maillage.

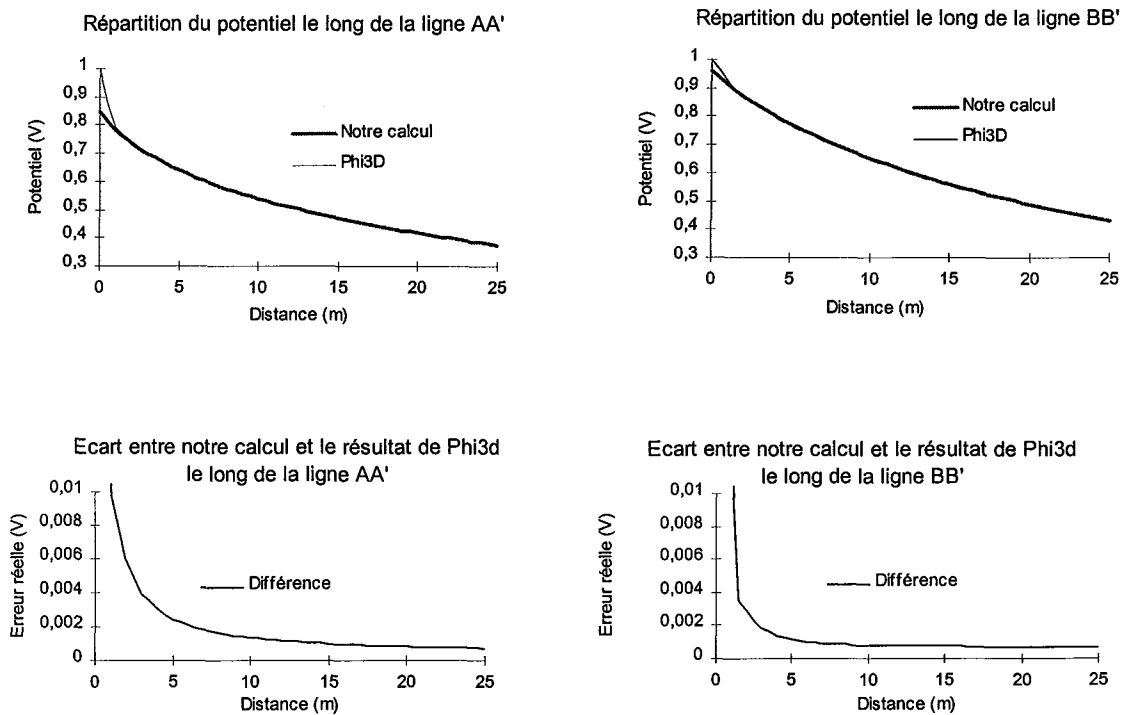


**Figure 2-8 :** Maillage du dispositif étudié et répartition obtenue pour  $V'$



**Figure 2-9 : Maillage de la coupe et répartition du potentiel**

On peut aussi extraire interactivement, de ce calcul de coupe, des valeurs en des points précis, ou le long d'une ligne. A titre de validation, nous comparons ces derniers résultats avec ceux obtenus par le logiciel Phi3d (Figure 2-10). La corrélation est parfaite, sauf au point de départ de chacune des lignes de calcul, qui se trouve sur la surface du dispositif. Le potentiel étant fixé en ce point par les conditions aux limites (1V), il apparaît que notre calcul est erroné.



**Figure 2-10 : Potentiel le long de deux lignes de la coupe - Comparaison avec Phi3d**

## **2.6 Discussion**

En réalité, on fait ici apparaître volontairement une particularité de la méthode intégrale, déjà soulignée au chapitre 1 : cette méthode résout exactement l'équation de Laplace, mais ne fait qu'approcher au mieux les conditions aux limites. Ainsi, le calcul intégral du potentiel sur le dispositif ne redonnera-t-il exactement la valeur fixée (1V) qu'aux seuls points d'observation, utilisés lors de la résolution de l'équation (dans notre exemple, les centres de gravité des triangles du maillage surfacique de la Figure 2-8). Il est donc naturel qu'apparaisse une erreur aux points A et B. Nous verrons dans la suite comment tirer profit de cette propriété de la méthode.

Le logiciel Phi3d contourne pour sa part cette apparente difficulté en attribuant automatiquement le potentiel imposé par les conditions aux limites aux noeuds de la coupe qui se trouvent être en même temps des points de la surface d'un conducteur.

### 3. Calcul des noyaux des équations intégrales de frontière

#### 3.1 Introduction

Durant les dix dernières années, de nombreuses études ont été menées pour calculer les noyaux des équations intégrales de frontière.

Une difficulté apparaît au moment du calcul numérique de ces noyaux, lorsque le point d'observation est très proche de (ou même sur) l'élément d'intégration. Dans ce cas, l'intégration de Gauss donne le plus souvent des résultats imprécis, surtout quand un faible nombre de points d'intégration est utilisé.

Dans ce chapitre, nous présentons les différentes méthodes qui ont été proposées pour le calcul précis et rapide de ces noyaux, ainsi que notre méthode pour les calculer.

Les intégrales à calculer d'après l'équation (2-6) sont les suivantes:

$$I_1 = \int_s G ds$$
$$\text{et } I_{2,i} = \int_s N_i \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (3-1)$$
$$\text{avec : } G = \frac{1}{r}$$

où  $r$  (1-19) est la distance entre le point source et le point d'observation,  $s$  est la surface formée par les éléments  $s_e$ .

La méthode la plus sûre pour les calculs est le calcul analytique de ces intégrales. C'est possible pour  $I_1$ , mais cela demande beaucoup d'étapes de calculs (comparé à la méthode numérique de Gauss), et est difficile à programmer. De plus, comme nous avons discrétisé le potentiel  $V$ , à l'ordre un, nous sommes obligés de calculer les intégrales élémentaires de l'angle solide par une méthode numérique. Le calcul analytique de  $I_2$  est cependant possible à l'ordre 0 (fonction de pondération constante); cela nous aide à vérifier la précision de la méthode numérique, en remarquant que:

$$I_2 = \sum_i I_{2,i} \quad (3-2)$$

En pratique, nous utilisons le calcul analytique de  $I_1$  pour les points « proches » de l'élément d'intégration, et celui de  $I_2$  comme complément à la méthode numérique, comme il est détaillé à la fin de ce chapitre. Les méthodes de calcul analytique de  $I_1$  et  $I_2$  sont présentées en annexe.

#### 3.2 Méthodes tirées des références.

##### 3.2.1 Brebbia , Pina et Fernandes [ 33 ]

Ils ont proposé une méthode numérique pour calculer les intégrales du type :

$$I(f,y) = \int_S \frac{1}{r(x,y)} f(x) \quad (3-3)$$



où  $f$  est une fonction continue de  $x$  dans l'espace  $R^3$  et  $r(x,y) = |x,y|$  est la distance entre le point source  $x$  et le point d'observation  $y$ ,  $S$  est la surface dans  $R^3$  qui est formée par les éléments  $S_e$ .

$$S = \sum_{e=1}^E S_e \tag{3-4}$$

$$I(f,y) = \sum_{e=1}^E I_e(f,y) \tag{3-5}$$

$$I_e(f,y) = \int_S \frac{1}{r(x,y)} f(x) \tag{3-6}$$

Si  $y$  n'est pas sur  $\Omega_e$ , le calcul de l'intégrale (3-6) peut être réalisé par la méthode de quadrature de Gauss. Si le point est sur  $\Omega_e$  l'intégrand devient singulier (car  $x \rightarrow y$ ); les auteurs ont réussi à contourner cette difficulté pour des frontières divisées en éléments triangulaires ou carrés, lorsque le point d'observation est situé sur un sommet ou au milieu d'un côté de l'élément.

D'après les tests que nous avons réalisés, la méthode de Brebbia donne des résultats imprécis pour des triangles « très » déformés (un angle très aigu ou un angle très plat).

### 3.2.2 Igarashi et Honma [ 34 ]

Les auteurs ont proposé deux méthodes pour le calcul précis du potentiel et de sa dérivée par la méthode intégrale de frontière.

La première méthode résout le problème de la quasi singularité dans la solution fondamentale en référant le potentiel et sa dérivée au point de frontière situé le plus proche du point de calcul dans le domaine.

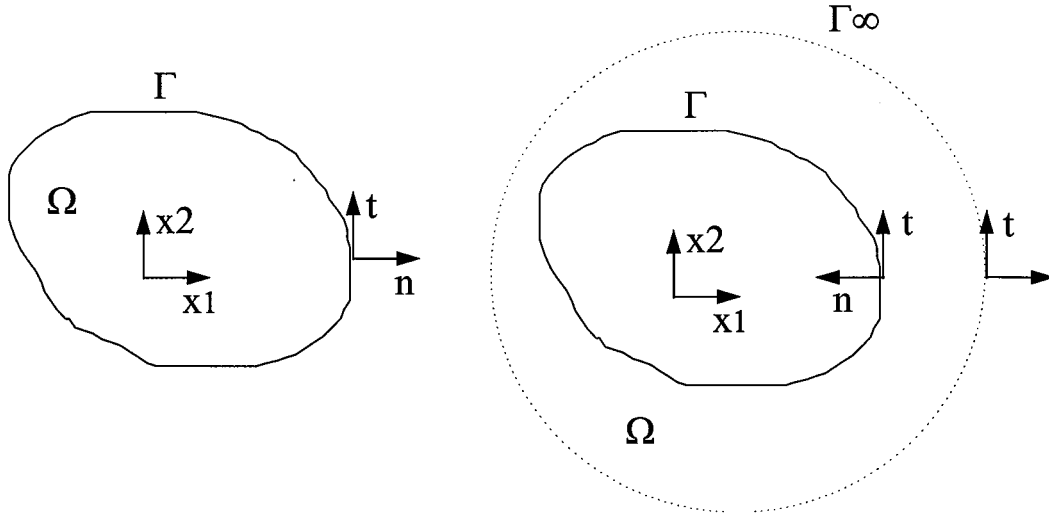
En considérant de l'équation de Green:

$$\int_v (V\Delta G - G\Delta V)dv = \int_s (V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n})ds \tag{3-7}$$

l'expression du potentiel en un point  $r = (x_1, x_2)$  prend la forme suivante:

$$V(r) = \int_{\Gamma} \left[ G(r',r) \frac{\partial V(r')}{\partial n'} - V(r') \frac{\partial G(r',r)}{\partial n'} \right] d\Gamma' \tag{3-8}$$

et en utilisant la fonction  $V_k(r';r^*)$ ,  $k=0,1,2$  pour des points  $r'$  et  $r^* \in \Omega \cup \Gamma$



**Figure 3-1 :**

$$\begin{aligned}
 V_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*) &= V(\mathbf{r}^*) \\
 V_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*) &= V_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*) + (x'_i - x^*_i) \frac{\partial V(\mathbf{r}^*)}{\partial x_i} \\
 V_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*) &= V_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}^*) + \frac{1}{2} (x'_i - x^*_i)(x'_j - x^*_j) \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}^*)}{\partial x_j \partial x_i}
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

les équations (3-9) sont le développement de Taylor du potentiel  $V$  en  $\mathbf{r}^*$ . Les auteurs introduisent une correspondance :

$$[V(\mathbf{r}') - V_0(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0), G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \rightarrow (V, G) \tag{3-10}$$

en substituant (3-10) dans (3-8) :

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} \left[ G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \{V(\mathbf{r}') - V_0(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0)\} \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'} \right] d\Gamma' + (1 - \eta)V(\mathbf{r}_0) \tag{3-11}$$

$\eta$  est une constante qui prend la valeur 0 ou 1 selon les cas, intérieur ou extérieur. Étant donné que la différence  $V(\mathbf{r}') - V_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$  varie comme  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|$ , la quasi singularité de  $\frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'}$  est levée.

Les auteurs utilisent des équations de même type que (3-11) pour régulariser les équations pour les dérivées du potentiel.

Dans la seconde méthode, un système d'équations couplées pour un potentiel inconnu et sa dérivée dans un point de calcul est résolu pour améliorer la précision.

En remplaçant le point de référence  $\mathbf{r}_0$  par le point  $\mathbf{r}$  dans l'équation (3-10) on obtient :

$$0 = \int_{\Gamma} (G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - \{V(\mathbf{r}') - V_0(\mathbf{r}'; \mathbf{r})\} \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'}) d\Gamma' - \eta V(\mathbf{r}) \tag{3-12}$$

à partir de là et  $V_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$  on obtient :

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} (G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \frac{\partial V(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} - V(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'}) d\Gamma' / (\eta - \int \frac{\partial G(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}'} d\Gamma') \tag{3-13}$$

Comme la fonction  $V_1(r',r)$  comprend 3 inconnues, le potentiel et les dérivées du premier ordre, l'application du théorème de Green nous amène à un système d'équations couplées pour les inconnues.

Les deux méthodes améliorent la précision du calcul, l'avantage de la seconde méthode est qu'il n'est pas nécessaire de trouver des points de frontière de référence. Ils ont appliqué leur méthode en 2D, ils précisent qu'elle est applicable pour les cas 3D.

### 3.2.3 Ken Hayami [ 35 ]

Pour résoudre des équations de type (3-8), ils proposent des transformations qui donnent des résultats précis là où le point d'observation est proche de l'élément. La méthode s'intitule « projection et transformation angulaire radiale » (Projection and Angular Radial transformation PART); la transformation est:

$$r(\rho) = \log\sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (3-14)$$

où  $\rho$  est la coordonnée radiale du système polaire et  $d$  l'azimut du point dans le système cartésien, cette application permet l'utilisation de la méthode standard de Gauss Legendre pour les calculs.

Ils proposent aussi deux transformations radiales de type exponentiel : (« single exponential radial transformation ») avec:

$$\rho(r) = \rho_{\max}(\theta)[1 + \tanh(r)]/2 \quad (3-15)$$

et transformation double exponentielle radiale (« double exponential radial transformation DE ») avec :

$$\rho(r) = \rho_{\max}(\theta)\left\{1 + \tanh\left[\frac{\pi}{2}\sinh(r)\right]\right\}/2 \quad (3-16)$$

Les deux sont transformations de  $[0, \rho_{\max}(\theta)]$  vers  $r: [-\infty, +\infty]$

Les auteurs ont calculé analytiquement les intégrales  $\frac{\rho}{r}, \frac{\rho}{r^2}, \frac{\rho}{r^3}, \frac{\rho}{r^4}, \frac{\rho}{r^5}$  pour estimer les erreurs numériques résiduelles. Les transformations exponentielles donnent les résultats plus précis, mais elles n'ont pas la rapidité de la méthode PART.

### 3.2.4 Koizumi et Utamura [ 36 ]

Pour le calcul des équations de type

$$\begin{cases} V_i = \int \frac{\partial V_b}{\partial n} G d\Gamma - \int V_b \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \\ \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} = \int \frac{\partial V_b}{\partial n} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} d\Gamma - \int V_b \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial x_\alpha} \end{cases} \quad (3-17)$$

où  $V_i$  et  $\frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha}$  sont le potentiel et son gradient au point d'observation,  $V_b$  et  $\frac{\partial V_b}{\partial n}$  sont les valeurs du potentiel et du champ sur la frontière. Ils ont proposé une méthode basée sur la transformation du système de coordonnées cartésiennes dans un système polaire dont l'origine est le point  $(\xi_1, \eta_1)$ , qui est le point de la frontière le plus proche du point d'observation. Ensuite, l'élément de la frontière, représenté dans un espace isoparamétrique, est divisé en quatre triangles. L'intégration numérique sur chacun de ces triangles est:

$$\int f(x, y, z) = \int f(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int f(\rho, \theta) J(\rho, \theta) \rho d\theta d\rho \quad (3-18)$$

où J est le Jacobien de la transformation du système des coordonnées globales (X,Y,Z) en coordonnées locales du système isoparamétrique( $\xi, \eta$ ). Les auteurs ont présenté un tableau des coordonnées locales des points d'intégration en chaque région. La combinaison de cette formulation avec l'intégration de Gauss-Legendre donne une intégration déterminable, car aucun point de l'intégration ne coïncide avec l'origine du système de coordonnées. Ensuite, une procédure de correction de l'intégration numérique est appliquée. Si le résultat des équations (3-17) est noté  $\tilde{V}_i$  et  $\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_\alpha}$  respectivement, on peut les représenter à l'aide de leurs

valeurs exactes et les termes d'erreur sous la forme suivante:

$$\tilde{V}_i = V_i + \sum_m E_m^q \frac{\partial V_b^m}{\partial h} + \sum_m E_m^p V_b^m \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} + \sum_m \frac{\partial E_m^q}{\partial x_\alpha} \frac{\partial V_b^m}{\partial h} + \sum_m \frac{\partial E_m^p}{\partial x_\alpha} V_b^m \quad (3-20)$$

où  $V_b^m$  et  $\frac{\partial V_b^m}{\partial h}$  représentent les valeurs du potentiel et du champ sur la frontière,  $E_m^q$  et

$E_m^p$  sont les erreurs d'approximation des intégrations numériques. Les indices p et q correspondent au second terme dans les équations (3-17).

Dans l'application de la méthode en première partie, ils trouvent que l'erreur numérique et le temps CPU ont divisé d'un facteur 100 par rapport à la quadrature « double exponentielle ». L'intérêt de la division d'élément en quatre triangles réside dans le choix de l'image du point d'observation sur l'élément comme origine du système polaire permettant qu'ainsi aucun point d'intégration ne coïncide avec ce point.

### 3.2.5 Kisu et Tawahara [ 37 ]

Pour résoudre des équations du type

$$C(P)V(P) = \int \left[ G(P,Q) \frac{\partial V(Q)}{\partial h} - \frac{\partial G(P,Q)}{\partial h} V(Q) \right] ds(Q) \quad (3-21)$$

$$V(p) = \int \left[ G(p,Q) \frac{\partial V(Q)}{\partial h} - \frac{\partial G(p,Q)}{\partial h} V(Q) \right] ds(Q) \quad (3-22)$$

où P et Q sont des points de frontière et p un point à l'intérieur du domaine, les auteurs proposent une méthode basée sur la diminution du degré de singularité  $1/r^2$  (le terme  $\frac{\partial G}{\partial h}$ ) en une singularité en  $1/r$  à l'aide des équations basées sur les valeurs relatives. Si le potentiel est constant vers un point de la région, le champ induit sera nul en ce point. Dans ce cas nous obtenons :

$$C(P)V = \int_s -\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n} V ds(Q) \quad (3-23)$$

$$V = \int_s -\frac{\partial G(p,Q)}{\partial n} V ds(Q) \quad (3-24)$$

où  $V$  est une valeur constante du potentiel (dans l'équation (3-24),  $P$  est le point le plus proche de la frontière au point intérieur  $p$ ). Si on soustrait les équations (3-23) et (3-24) aux équations (3-21) et (3-22) on obtient :

$$0 = \int_s \left[ G(P, Q) \frac{\partial V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} (V(Q) - V(P)) \right] ds(Q) \quad (3-25)$$

$$V(p) = \int_s \left[ G(p, Q) \frac{\partial V(Q)}{\partial n} - \frac{\partial G(p, Q)}{\partial n} (V(Q) - V(P)) \right] ds(Q) + V(P) \quad (3-26)$$

On voit apparaître les valeurs relatives du potentiel  $V(Q)-V(P)$  et  $V(p)-V(P)$  dans ces équations. Comme la fonction potentiel  $u$  est continue, les valeurs relatives doivent satisfaire cette condition quand  $Q$  ou  $P$  s'approche de  $p$  :

$$V(Q) - V(P) \rightarrow O(r) \quad (Q \rightarrow P) \quad (3-27)$$

$$V(Q) - V(p) \rightarrow O(r) \quad (p, Q \rightarrow P) \quad (3-28)$$

où  $r$  est la distance entre  $P$  et  $Q$  ou  $p$ . A partir des équations (3-25) et (3-26), la singularité du deuxième terme a diminué d'un degré (cette méthode ressemble à celle de Igarashi et Honma [ 34 ]). A partir de là, ils ont proposé de résoudre cette équation par l'une des méthodes présentées pour résoudre la singularité restante en  $\frac{1}{r}$  par la méthode de Higashimachi, de Li de Sato ou de Gauss.

### 3.2.6 Enokizono et Todaka [ 39 ]

Pour résoudre des équations de type (3-21) comme il est proposé dans [ 16 ] les auteurs proposent de calculer  $C_i$  par la somme :

$$C_i = - \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (3-29)$$

Théoriquement, si le potentiel est uniforme,  $C_i$  est égale à 1 ou zéro selon les cas extérieur ou intérieur, les auteurs prouvent qu'en remplaçant  $C(p)$  de l'équation (3-20) par  $C_i$ , les erreurs sur  $V$  et sa dérivée diminuent.

En 2D pour  $G$  et  $\frac{\partial G}{\partial n}$  nous avons:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3-30)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (3-31)$$

### 3.2.7 Enokizono et Todaka [ 40 ]

Ils ont appliqué la méthode EIF pour le calcul en 3D des courants de Foucault. L'avantage de leur formulation réside dans le fait que les équations différentielles pour le potentiel vecteur peuvent être analysées sans le potentiel scalaire électrique, ce qui simplifie le calcul simultané des équations. En utilisant des méthodes d'intégration révisées, ils ont corrigé l'erreur numérique de la solution; l'approximation de cette erreur en 3D est donnée par

$$\frac{(\bar{U}_i - U_i)}{\bar{U}_i} = 1 + \sum_{j=1}^{n_e} \iint_{s_j} \frac{\partial G}{\partial n} ds \quad (3-32)$$

où  $G = \frac{1}{4\pi r}$  et  $\bar{U}$  est la solution exacte de la composante axiale du potentiel magnétique vectoriel et du potentiel électrique.

### 3.2.8 N. Ghosh et S. Mukherjee [ 41 ]

Ils ont proposé une nouvelle formulation intégrale pour l'élasticité, qui a une singularité plus faible que les formulations standards. Cette formulation est tirée du théorème de Stokes, et conduit seulement à une singularité en  $\frac{1}{r}$ , alors que la singularité est en  $\frac{1}{r^2}$  pour les formulations standards en 3D.

### 3.2.9 N. Ghosh, H. Rajiyah, S. Ghosh et S. Mukherjee [ 42 ]

Les auteurs proposent quant à eux une nouvelle formulation en 2D avec seulement une singularité logarithmique, alors que les singularités sont de type logarithmique et  $\frac{1}{r}$  dans la formulation classique.

### 3.2.10 V. Sladek et J. Sladek [ 43 ]

Ils ont proposé un nouveau traitement numérique des formulations proposées par Ghosh et Mukherjee [ 42 ]. Ce nouveau développement présente deux avantages: l'expression des noyaux en coordonnées globales cartésienne et la réduction du nombre d'inconnues.

### 3.2.11 L. Jun , G. Beer et J.L. Meek [ 44 ]

Ils ont proposé une méthode adaptative pour le calcul des intégrales en  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{r^2}$ ,  $\frac{1}{r^3}$ , qui est basée sur une distribution des points de Gauss adaptée au calcul précis de ces intégrants en 1D et 2D. Par la suite, ils ont proposé deux méthodes en double exponentielle sous le nom « double exponential quadrature » et «  $\delta_{op}$  method » [ 45 ]. Dans la première méthode, il suffit de remplacer dans la quadrature de Gauss les coordonnées et les poids des points d'intégration par des valeurs adaptées. Dans la seconde méthode, ils cherchent un  $\delta$  optimum, puis combinent la méthode de Gauss et «  $\delta_{op}$  method ».

On trouve d'autres travaux comme [ 46 ], [ 47 ] et [ 48 ].

## 3.3 Méthode choisie.

Dans les méthodes présentées les auteurs ont proposé de diminuer la singularité d'un degré: singularité de  $\frac{1}{r^2}$  à une singularité  $\frac{1}{r}$  et celle ci en une singularité logarithmique. Ils ont proposé des méthodes comme le changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires pour éliminer la singularité ou le changement de variable de type exponentiel pour résoudre le problème de singularité. Certains ont proposé des méthodes de correction pour minimiser les erreurs.

Nous n'avons pas appliqué ces méthodes directement dans notre calcul mais nous avons essayé de calculer les termes élémentaires d'une nouvelle façon. Avec notre choix de facettes planes, quand le point d'observation est sur la frontière, l'intégrale de l'angle solide est égale à zéro pour les éléments touchant ce point d'observation, et pour le calcul de l'intégrale  $\int_r^l ds$  nous avons utilisé la méthode analytique que nous avons programmée pour avoir des résultats beaucoup plus précis.

Pour calculer les intégrales de type (3-1) nous avons réalisé un code qui permet leur calcul analytique (Annexe I), mais ces calculs analytiques sont beaucoup plus coûteux en temps de calcul par rapport aux méthodes numériques telles que celle de Gauss.

Dans la suite nous présentons les calculs des intégrales  $I_1$  et  $I_2$ .

### 3.3.1 Intégrale $I_1$ .

Le calcul de l'intégrale  $I_1$  par la méthode de Gauss quand le point d'observation est loin de l'élément donne des résultats précis, mais il devient imprécis quand le point d'observation est près de l'élément d'intégration, dans ce cas nous l'avons calculé par la méthode analytique. Pour choisir l'une ou l'autre des deux méthodes analytique ou numérique pour optimiser le temps de calcul et la précision de calcul nous avons utilisé le critère suivant :

Imaginons qu'on veut calculer cette intégrale avec le point d'observation P pour le triangle ABC. Nous avons défini les paramètres tels qu'ils sont montrés dans la Figure 3-2 :

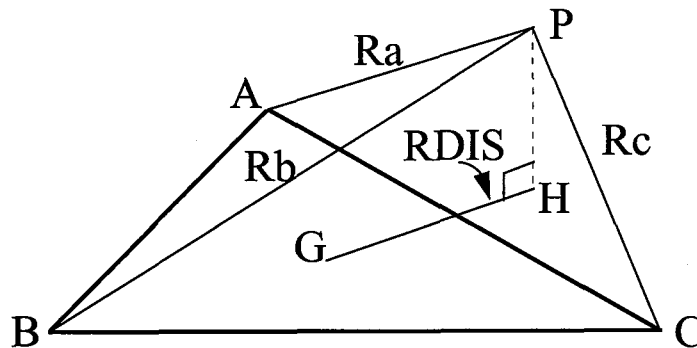


Figure 3-2 : définition de la distance relative à l'élément.

$$PE = \frac{AB + BC + CA}{2}$$

G : centre de gravité

R : rayon du cercle circonscrit

$$R = \frac{AB * BC * CA}{\sqrt{4 * PE * (PE - AB) * (PE - BC) * (PE - CA)}} \quad (3-33)$$

$$COM = \frac{AB + BC + CA}{3}$$

$$PCOM = \frac{R_a + R_b + R_c}{3}$$

RDIS : distance entre le centre de gravité et la projection de P

PH : Distance entre le point d'observation et le plan de l'élément

Nous considérons que le point d'observation est loin de l'élément si :

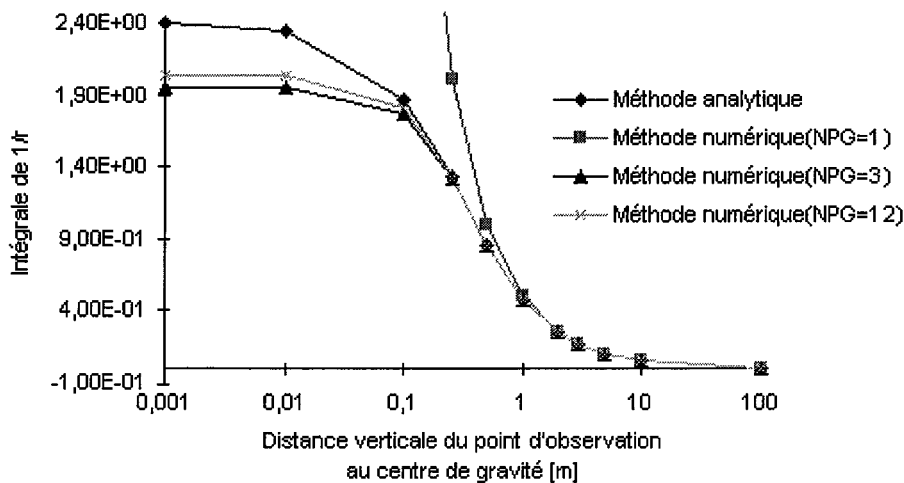
$$PH > COM \text{ ou } RDIS > 1.3R \text{ ou } 2.2 * COM / PCOM < 1 \quad (3-34)$$

Dans ce cas nous calculons  $I_1$  par la méthode numérique. Dans les autres cas nous le calculons par la méthode analytique.

Le choix des valeurs des coefficients (2.2 et 1.3) est obtenu après différents tests, en comparant les résultats numériques obtenus avec les résultats analytiques. Nous avons trouvé que la zone de sécurité définie par ces coefficients donne les résultats avec une bonne précision. Nous avons aussi tenu compte du temps de calcul optimal pour fixer ces coefficients.

On voit que la zone « sûre » pour le calcul numérique de  $I_1$  est à l'extérieur d'un cylindre dont l'axe, perpendiculaire au plan de l'élément, passe par le barycentre de l'élément et dont le rayon est 1,3 fois celui du rayon de cercle circonscrit et dont la hauteur est égale à la moyenne des côtés du triangle.

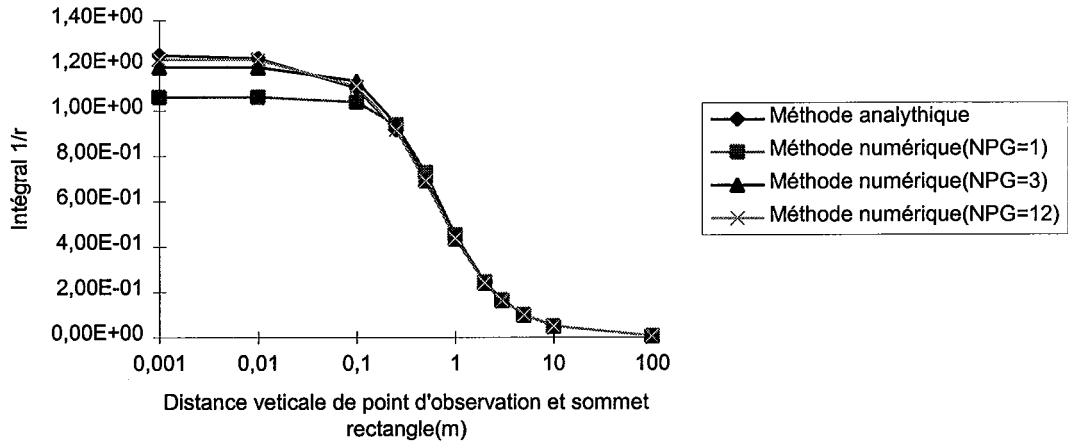
Pour justifier le choix de l'une des méthodes nous avons calculé cette intégrale pour un triangle rectangle (dont les côtés de l'angle droit sont égaux à un). Le point d'observation s'approche de la surface du triangle suivant une ligne perpendiculaire à cette surface. Dans la Figure 3-3 il s'approche du centre de gravité du triangle; dans la Figure 3-4, il s'approche du sommet rectangle; dans chacune des figures nous avons exploité les courbes avec la méthode analytique et la méthode de Gauss, avec un, trois et douze points d'intégration. Dans cet exemple,  $PH \approx 2$  est la limite pour le choix de l'une des méthodes numérique ou analytique. Pour ce point l'erreur relative de calcul numérique est inférieure à 0,008%.



**Figure 3-3 : comparaison de différents calculs de l'intégrale de  $1/r$  (au dessus du centre de gravité de l'élément)**



### Comparaison de différents calculs d'intégrale 1/r



**Figure 3-4 : comparaison de différents calculs de l'intégrale de 1/r (au dessus du sommet de l'élément)**

### 3.3.2 Calcul de l'intégrale d'angle solide ( $I_2$ )

Pour calculer l'intégrale d'angle solide  $I_2$ , le calcul numérique est obligatoire car nous sommes à l'ordre un.

$$\int \frac{\partial G}{\partial n} ds_e = \int_{s_e} N_1 \frac{\partial G}{\partial n} ds_e + \int_{s_e} N_2 \frac{\partial G}{\partial n} ds_e + \int_{s_e} N_3 \frac{\partial G}{\partial n} ds_e \quad (3-35)$$

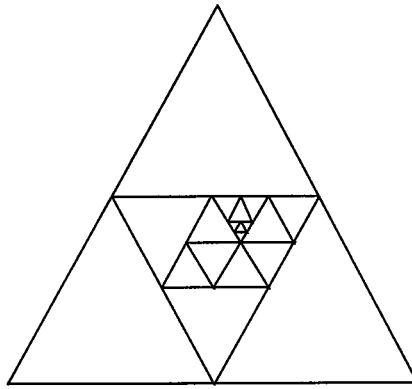
Mais le calcul numérique de cette intégrale sans précaution, pour des points d'observation proches de l'élément d'intégration, donne des résultats imprécis.

Pour diminuer l'erreur, nous proposons de diviser le triangle de telle façon que la distance relative entre le point d'observation et les sous triangles augmente, et si nécessaire, de diviser encore les sous triangles, jusqu'à ce que la distance relative entre chacun des sous triangles et le point d'observation devienne suffisamment grande.

Pour un triangle très proche du point d'observation, on ne peut continuer la division jusqu'à l'infini. On remarquera cependant que, si on divise dix fois de suite un sous triangle,

les trois fonctions d'interpolation correspondant aux trois sommets varient seulement de  $\frac{1}{2^{10}}$  :

elles peuvent être raisonnablement considérées comme constantes, ce qui nous permet de calculer analytiquement l'intégrale correspondante sur ces derniers sous-triangles, et d'arrêter la procédure de division. Dans ce cas notre méthode est une combinaison des méthodes numérique et analytique. L'intérêt de notre méthode réside dans le fait que nous ne divisons pas tous les sous triangles à chaque étape. On vérifie pour chaque sous triangle que le point d'observation est à l'intérieur de sa zone de division pour diviser le triangle correspondant. Dans la Figure 3-5 on montre la façon dont un triangle a été divisé, bien sûr le point d'observation est très proche du triangle le plus petit.



**Figure 3-5 : subdivisions d'un élément, 5 étapes**

Comme on voit sur la Figure 3-5, pour diviser un triangle en sous triangles, nous avons relié les points milieu de chaque côté, ce qui nous donne 4 sous triangles.

Nous considérons que le point d'observation est loin du triangle lorsque :

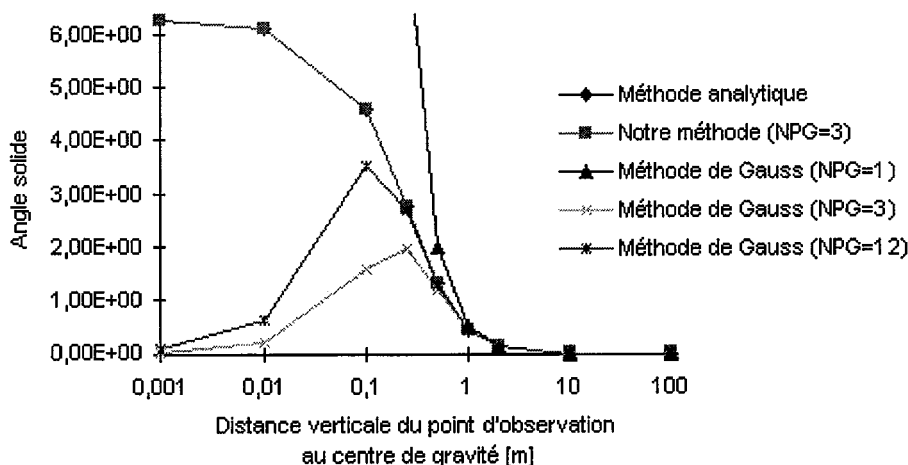
$$2.2 * COM / PCOM < 1 \text{ ou } PH > COM \text{ ou } RDIS > R \quad (3-36)$$

Dans ce cas nous calculons  $I_2$  par la méthode de Gauss, sinon nous appliquons la méthode numérique - analytique (notre méthode).

Pour le calcul de l'intégrale  $I_1$ , nous n'avons pas utilisé la méthode de division que nous avons utilisée pour le calcul de l'intégrale  $I_2$ , en raison du temps de calcul prohibitif pour des points d'observation proches de l'élément. L'application de la méthode de division pour le calcul de l'intégrale  $I_2$  est nécessaire car celle-ci doit être calculée à l'ordre un.

Dans les Figure 3-6 et Figure 3-8, nous avons calculé l'angle solide pour un triangle rectangle (dont les cotés de l'angle droit sont égaux à un), le point d'observation s'approche du centre de gravité et du sommet rectangle du triangle respectivement.

Les Figure 3-7 et Figure 3-9 montrent l'erreur réelle de notre méthode pour des calculs présentés dans les Figure 3-6 et Figure 3-8. On remarque que pour le point à la distance de .001 l'erreur change sa tendance de croissance; la raison est qu'avec le critère choisi pour ce calcul, à cette distance pour certains sous triangles on fait le calcul analytiquement, ce qui améliore le résultat. Bien sûr pour avoir le poids de cette intégrale dans les sommets des éléments nous sommes obligés de calculer numériquement l'intégrale  $I_2$  pour la majorité des sous-triangles.



**Figure 3-6 : comparaison de méthodes. Précision vers le centre de gravité de l'élément.**

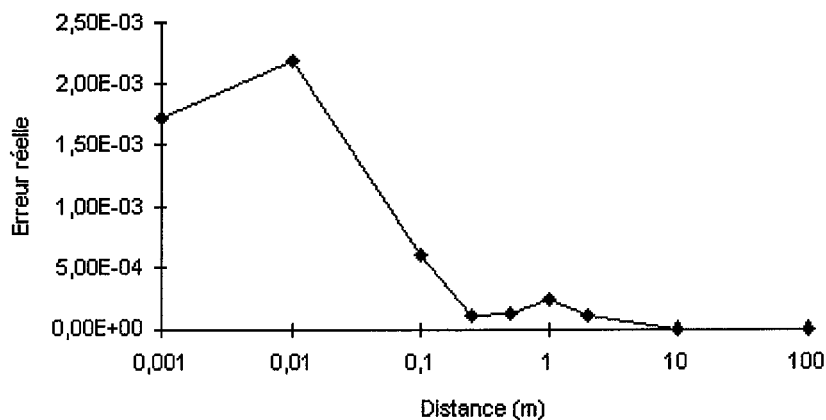


Figure 3-7 : erreur réelle de notre méthode vers le centre de gravité de l'élément.

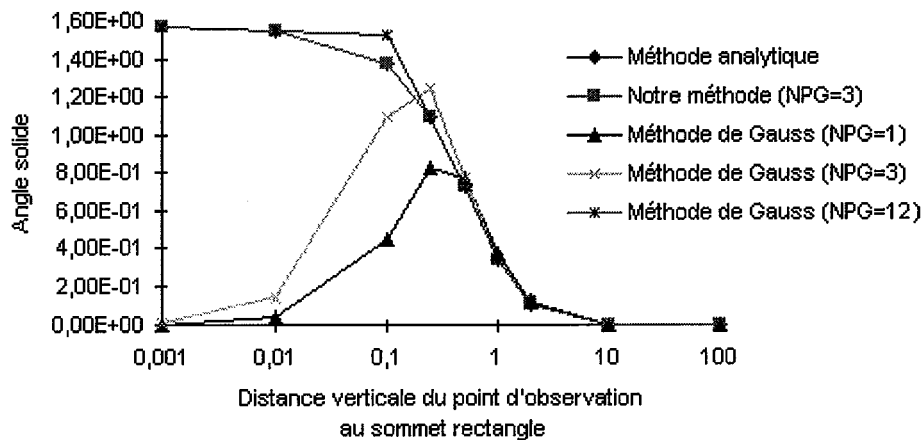


Figure 3-8 : comparaison de méthodes. Précision vers un noeud de l'élément.

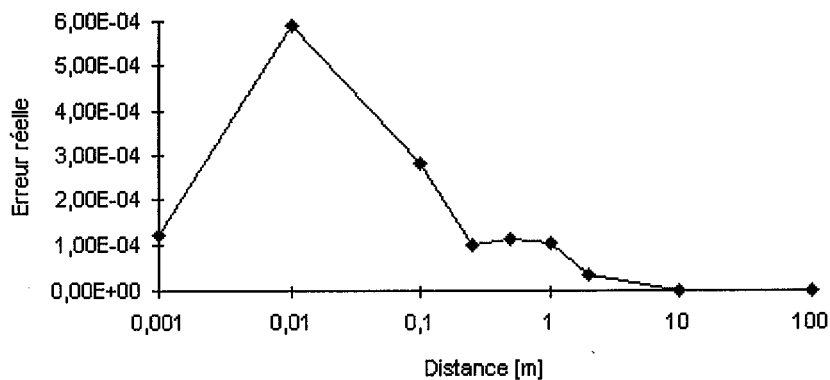


Figure 3-9 : erreur réelle de notre méthode vers un noeud de l'élément.

## 4. Estimateur d'erreur locale

### 4.1 Principe

Dans les dernières années, le maillage adaptatif en éléments finis a fait l'objet de nombreux travaux, sans équivalent pour la méthode des équations intégrales de frontières.

Le maillage adaptatif repose généralement sur une estimation locale ou/et éventuellement globale de l'erreur de la solution. Pour les éléments finis et selon [ 28 ], on peut séparer les estimateurs d'erreur en deux catégories, basées respectivement sur le calcul direct de l'erreur et sur le principe des équations variationnelles complémentaires. Pour la première, on procède au calcul de résidus et pour la deuxième, c'est un problème complémentaire qui est résolu pour estimer les zones à remailler.

Les mêmes auteurs proposent ensuite une autre méthode basée sur les conditions inter élément, c'est-à-dire sur le respect des continuités de la composante normale du vecteur d'induction et de la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface des éléments. La méthode des éléments finis assure, *par exemple*, la continuité de la composante normale de l'induction, mais pas celle de la composante tangentielle du champ. En reconstituant B à partir des valeurs calculées de H, on obtient de ce fait une valeur estimée différente de la valeur obtenue directement par le calcul en éléments finis; l'écart quadratique moyen obtenu sur un élément :

$$\eta = \int_{\Omega} |B_{\text{cal}} - B_{\text{est}}|^2 d\Omega \quad (4-1)$$

où  $B_{\text{est}}$  est une valeur estimée de B et  $B_{\text{cal}}$  sa valeur calculée, donne un critère pour déterminer les éléments à remailler. La démarche pour calculer  $B_{\text{est}}$  est :

- calcul de  $H_{t_{\text{est}}}$  à partir d'une moyenne de  $H_{t_-}$  et  $H_{t_+}$  (les signes - et + correspondent au champ  $H_t$  de part et d'autre d'une interface) :

$$H_{t_{\text{est}}} = (1 - \theta) \cdot H_{t_+} + \theta H_{t_-} \quad 0 < \theta < 1 \quad (4-2)$$

où  $\theta = K_+ / (K_+ + K_-)$ ;  $K_+ = \sqrt{s_+} / \mu_+$  ,  $K_- = \sqrt{s_-} / \mu_-$  ;  
s est la surface de l'élément.

- calcul de  $B_{\text{est}}$  à l'aide de la valeur tangentielle obtenue :  $B_{t_{\text{est}}} = \mu_+ \cdot H_{t_{\text{est}}}$ .

En équation intégrale de frontière, les auteurs [ 29 ] proposent un estimateur d'erreur qui est basé sur une expression locale approchée de l'équation de Laplace, qui permet de repérer les éléments à affiner.

Dans ce chapitre nous allons définir et mettre en oeuvre un estimateur d'erreur qui nous permettra de connaître les éléments de maillage à diviser, pour avoir une bonne solution du problème étudié. Cela est fait après résolution en comparant les valeurs du potentiel recalculées sur un élément par formulation intégrale d'une part, et calculées par interpolation du potentiel des noeuds de l'élément d'autre part. L'écart entre ces deux valeurs donne une estimation de l'erreur sur cet élément. Dans la suite nous présentons ce principe.

#### 4.1.1 Représentations discrète et intégrale de V

Nous avons vu au chapitre 1 quelle est la forme générale de l'équation intégrale que nous résolvons (1-48) :

$$\Omega_j V = \int_{s_j} (\pm G \frac{V'}{\epsilon_{rj}} - V \frac{\partial G}{\partial n_j}) ds_j \quad (4-3)$$

Nous avons vu que nous ne résolvons cette équation que de façon approchée. La solution approximative obtenue pour les distributions V et V' (marquées par le symbole ~) n'obéit donc pas exactement à cette équation; nous pouvons expliciter cela à l'aide des deux expressions approchées du potentiel :

- d'une part l'expression discrétisée à l'aide des valeurs nodales du potentiel :

$$\tilde{V}_e[P(u, v)] = \sum_j N_j(u, v) \cdot V_{e,j} \quad (4-4)$$

- d'autre part l'expression intégrale issue des expressions discrétisées de V et V', et de l'équation intégrale résolue :

$$V_{\oint_s}(P) = \frac{1}{\Omega_s(P)} \cdot \sum_e \int_{S_e} \left( \pm \tilde{V}'_e[Q(u, v)] \cdot G_P[Q(u, v)] - \tilde{V}_e[Q(u, v)] \cdot \frac{\partial G_P}{\partial n} \Big|_Q \right) ds \quad (4-5)$$

L'assemblage tel qu'il est décrit au §2.2 revient à faire tendre le plus possible le potentiel discrétisé en surface vers sa valeur intégrale :

$$\tilde{V}(P) \rightarrow V_{\oint_s}(P) \quad (4-6)$$

et pour cela à écrire l'égalité des deux expressions :

$$\tilde{V}(P_i) = V_{\oint_s}(P_i) \quad (4-7)$$

aux N points d'observation  $P_i$  choisis (bien répartis sur S). Sauf hasard contraire, on n'aura donc pas cette égalité aux points  $P_j$  qui ne sont pas des points de collocation retenus pour la résolution du système :

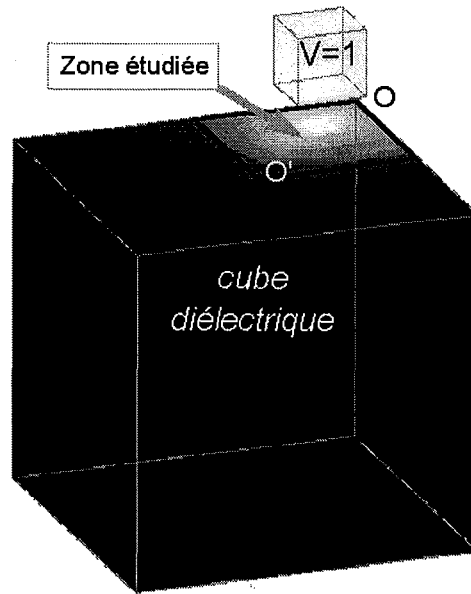
$$\tilde{V}(P_j) \neq V_{\oint_s}(P_j) \quad (4-8)$$

On peut illustrer les comportements de ces deux valeurs approchées du potentiel en représentant leurs variations respectives sur un exemple simple.

#### 4.1.2 Exemples de comportement

Pour illustrer ces deux expressions du potentiel nous avons proposé la géométrie suivante (Figure 4-1).

Le cube supérieur est un conducteur avec le potentiel fixé à 1 volt, le cube inférieur est un diélectrique, le tout est dans l'air. Il y a dans ce cas deux régions de calcul : la région extérieure (l'air) et l'intérieur du diélectrique. Nous avons porté notre étude sur une partie de la surface supérieure du diélectrique (là où l'influence du cube conducteur est maximale).



**Figure 4-1 : géométrie support de nos exemples**

Afin de disposer d'une référence pour évaluer les résultats, nous avons calculé la solution « exacte » pour le potentiel sur la surface d'étude, dans le cas d'une permittivité relative unité dans le cube diélectrique. Pour cela, nous avons résolu le problème en ne tenant compte que du cube conducteur, avec un maillage fin de ce cube (ce qui est précis puisque le cube diélectrique se comporte comme l'air); puis nous avons calculé le potentiel résultant sur la surface du cube diélectrique en appliquant la procédure normale de calcul dans une coupe (suivant le §2.4.2.).

Nous avons ensuite résolu le même problème, mais en tenant compte dès le départ du diélectrique, avec un maillage fin pour le conducteur et grossier pour le diélectrique.

A partir de cette solution, nous avons recalculé les valeurs de trois expressions du potentiel sur notre surface d'étude (surface du diélectrique en dessous du cube conducteur), sur un maillage très fin qui sert de support à la représentation graphique de leurs variations :

- par interpolation à partir des valeurs nodales du potentiel (en se référant au maillage ayant servi à la résolution)
- par intégration, en utilisant la surface de la région diélectrique;
- par intégration, en utilisant la surface de la région extérieure.

La répartition de potentiel obtenue dans chaque cas est montrée en Figure 4-2. On peut vérifier l'égalité des potentiels interpolé et intégral aux points de collocation (noeuds du maillage de résolution d'un côté, centres de gravité des éléments de l'autre).

Sur la Figure 4-3, nous avons recalculé le même exemple mais avec un maillage de résolution plus fin; on voit que dans ce cas l'écart entre les trois valeurs du potentiel a diminué, et qu'elles se sont approchées de la solution exacte, ce qui montre l'effet de la finesse du maillage dans les résultats du calcul, mais aussi qu'il y a peut-être un certain lien entre l'erreur de la méthode (écart entre la valeur interpolée du potentiel et sa valeur exacte) et l'écart entre les valeurs interpolées et intégrales du potentiel.

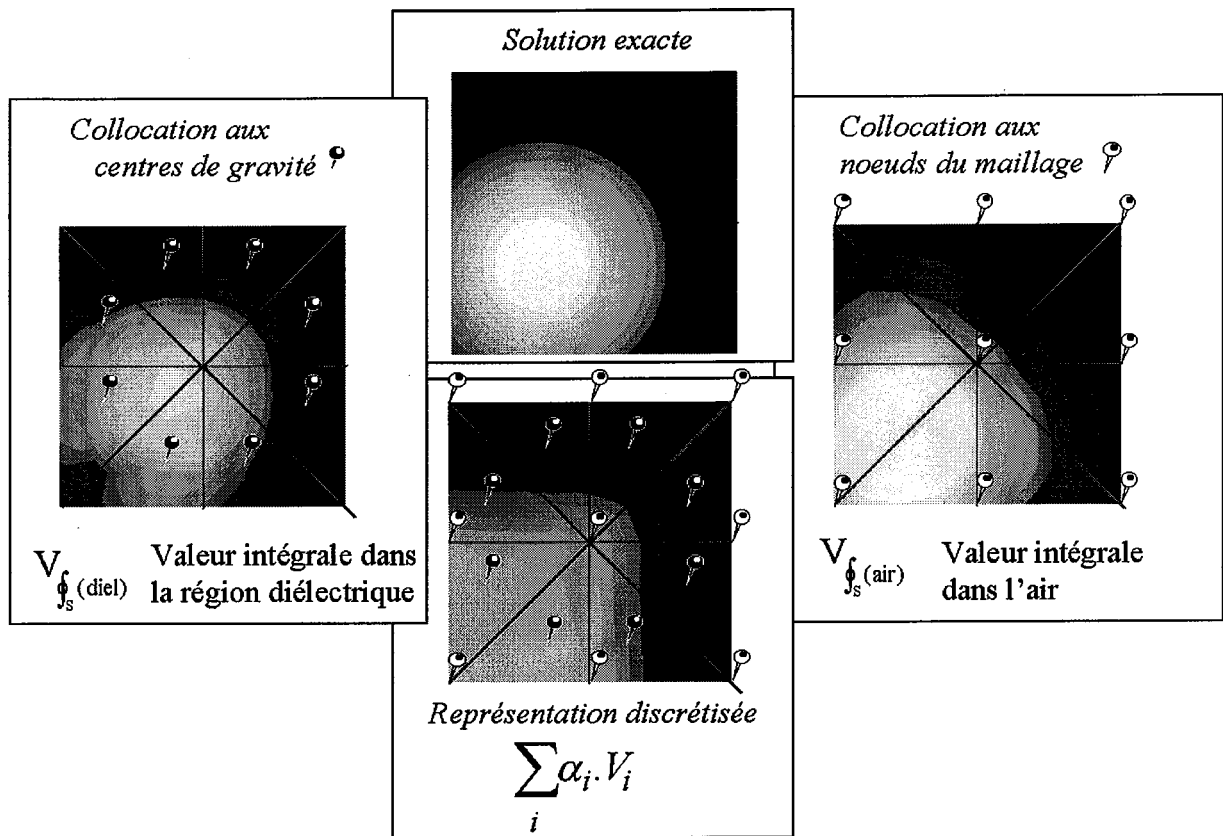


Figure 4-2 : répartitions des 4 expressions du potentiel (exacte, interpolée, intégrale interne, intégrale externe).

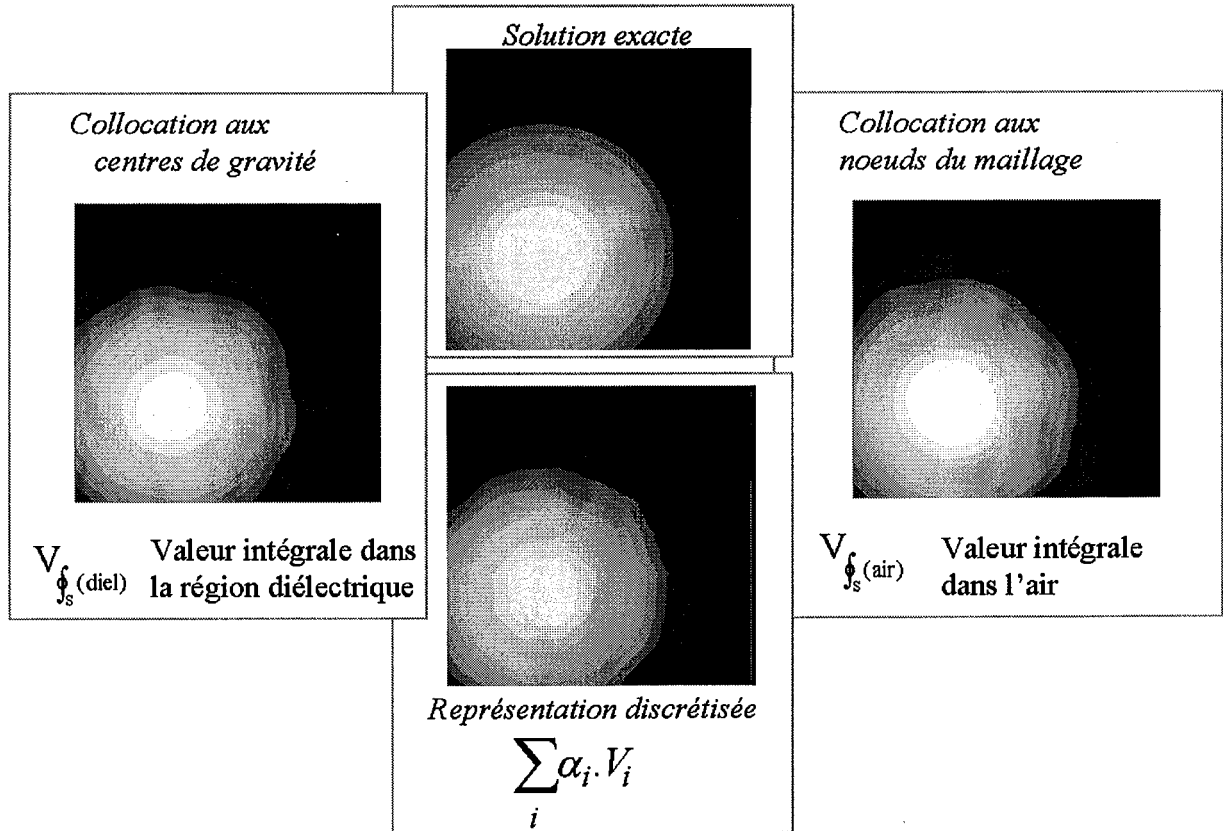


Figure 4-3 : répartitions des 4 expressions du potentiel pour un maillage affiné.

### 4.1.3 Estimateur d'erreur

On en vient donc à l'idée de définir un estimateur d'erreur basé sur cet écart :

$$E(u, v) = \left| V_{\oint_s} (u, v) - V_{disc} (u, v) \right| \frac{100}{V_{\max} - V_{\min}} \quad (4-9)$$

Nous l'avons ici défini comme un pourcentage, normalisé par rapport à l'écart maximum de potentiel présent dans le dispositif. Notons qu'il y aura deux valeurs possibles sur les interfaces diélectriques (puisque l'on dispose de deux valeurs différentes pour la valeur intégrale du potentiel, une par région de calcul touchant la surface considérée).

Nous avons représenté en Figure 4-4 la répartition obtenue pour  $E(u, v)$  sur notre zone d'étude, pour trois maillages successifs, de plus en plus fins, de la structure étudiée, ainsi que l'évolution du potentiel discrétisé, sur la ligne  $OO'$ , pour ces mêmes maillages. Nous avons parallèlement calculé l'évolution du maximum et de la moyenne de cet estimateur d'erreur (Tableau 4-1).

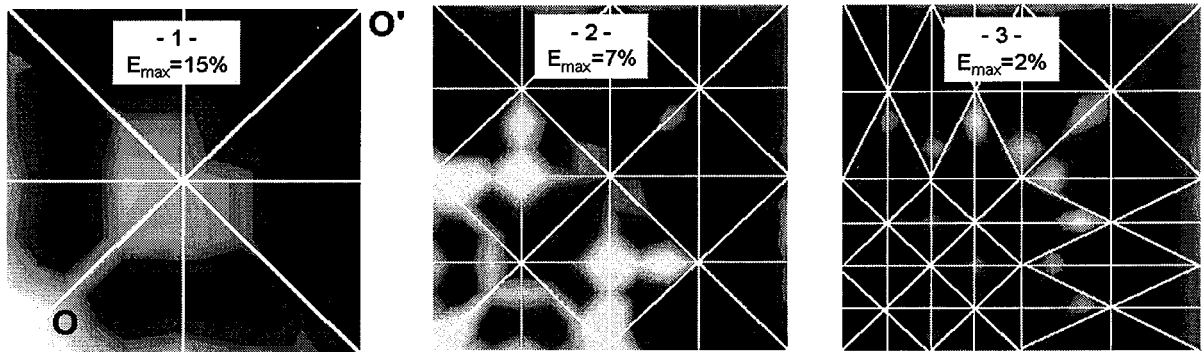


Figure 4-4 : répartition de  $E(u, v)$  pour trois maillages successifs de la zone d'étude.

	Maximum de $E_s$	Moyenne de $E_s$
1 - Maillage initial	15%	7%
2 - Premier affinage	7%	1,2%
3 - Second affinage	2%	0,5%

Tableau 4-1 : évolution de  $E_s$  en fonction de la finesse du maillage

Cet exemple démontre, par une démarche numérique expérimentale, qu'il existe bien un lien entre  $E(u, v)$  et l'erreur réelle locale; ce lien est indirect, l'estimateur et l'erreur réelle n'étant bien entendu pas confondus ou proportionnels point par point. Il semble simplement que les oscillations de ces deux grandeurs autour de 0 sont « comparables ».

Nous allons examiner maintenant (§4.2) de quelle manière  $E$  peut être en pratique utilisé comme estimateur d'erreur locale.



## 4.2 Mise en oeuvre pratique

Un calcul de répartition de  $E(u,v)$  sur les éléments du maillage de résolution comme en Figure 4-4 peut être réalisé de temps en temps, pour illustrer le fonctionnement de la méthode intégrale. Mais un tel calcul est coûteux, puisqu'il nécessite de réaliser une intégrale surfacique complète pour chaque valeur cherchée, donc un grand nombre de fois pour chaque élément du maillage de résolution.

Si l'on souhaite utiliser  $E$  comme estimateur d'erreur avant remaillage éventuel, il faut éviter que cela représente un coût prohibitif; il est donc exclu de procéder de cette façon pour déterminer la valeur maximale de  $E$ , sa moyenne ou son écart type sur chacun des éléments. Nous avons donc cherché un moyen d'estimer la valeur maximale de  $E$  par élément en faisant le moins possible de calculs.

### 4.2.1 Définition d'une valeur par élément, $\hat{E}$

La seule donnée certaine concernant la valeur de  $E$  sur chaque élément est qu'elle est nulle aux points de collocation, c'est-à-dire aux 3 noeuds de l'élément lorsque la collocation est réalisée en ces trois noeuds, au centre de gravité dans le cas complémentaire.

Conformément à la logique confirmée par différents tests, il a alors semblé que les oscillations de  $E$  sur chaque élément sont telles que sa valeur extrême est atteinte près de l'un des noeuds du maillage lorsque la collocation est réalisée au centre de gravité, et réciproquement. Nous allons donc définir un estimateur de la valeur maximale de  $E(u,v)$  sur l'élément, défini comme étant sa valeur au centre de gravité si la collocation a été réalisée aux noeuds, ou sa valeur extrême aux noeuds si la collocation a été réalisée au centre de gravité. Le travail numérique à réaliser sur l'ensemble du maillage est alors du même ordre que celui de l'assemblage de la matrice complète.

Il nous faut maintenant vérifier que cet estimateur de  $E$  nous donne une information en cohérence avec ses valeurs extrêmes réelles, ainsi qu'avec l'erreur réelle.

### 4.2.2 Vérification du lien entre $\hat{E}$ , $E(u,v)$ et l'erreur réelle

Pour les trois maillages déjà utilisés de notre zone d'étude, nous avons représenté graphiquement (Figure 4-5) la corrélation entre les valeurs extrêmes de  $E(u,v)$  sur chaque élément et notre estimateur. Le lien statistique apparaît ainsi évident.

Nous avons procédé de même entre les valeurs maximales de  $E(u,v)$ , et les valeurs réelles maximales de l'erreur (Figure 4-6).

Nous avons sur cette figure distingué les points représentatifs de chacun des trois maillages successifs. Si on les prend indépendamment, on constate que l'erreur réelle y est assez uniforme, comprise entre 1,5 et 15% pour le premier maillage, entre 0,8 et 8% pour le second, entre 0,2 et 2% pour le dernier, avec une dispersion inférieure à 5 dans la très grande majorité des cas. Notre indicateur ayant une dispersion du même ordre, on perd toute corrélation entre estimateur d'erreur et erreur réelle. Pour un maillage de qualité uniforme au départ, notre indicateur conduira ainsi dans un premier temps à une discrimination aléatoire, et ne pourra donc être utilisé efficacement que si le gain de précision espéré est supérieur au pouvoir de séparation de l'indicateur, qui peut être estimé à un facteur 3 à 5 environ, dans le pire des cas.

En effet, le coefficient de corrélation linéaire est au contraire élevé lorsque le problème résolu fait apparaître une certaine disparité dans la précision, comme cela apparaît en prenant l'ensemble des points de la figure : on pourra ainsi avec une bonne probabilité repérer les

éléments à découper lorsque l'erreur y est beaucoup plus forte que le seuil souhaité, et conduire ainsi par étape ce découpage pour obtenir une précision relativement uniforme.

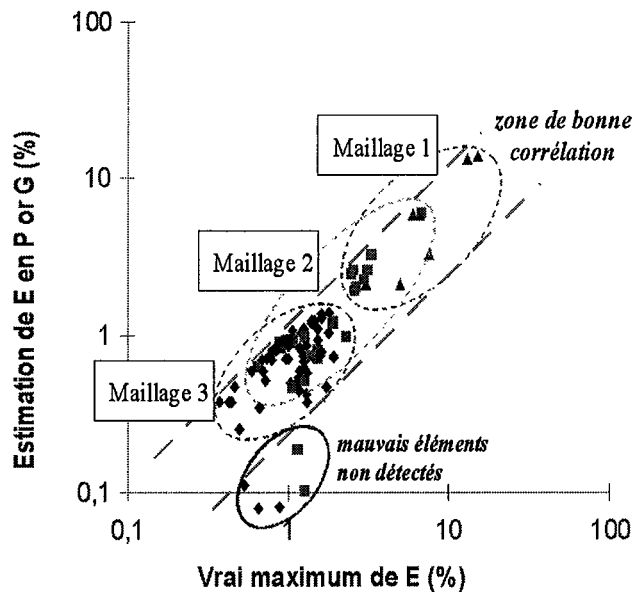


Figure 4-5 : lien entre l'estimateur rapide et l'estimateur réel

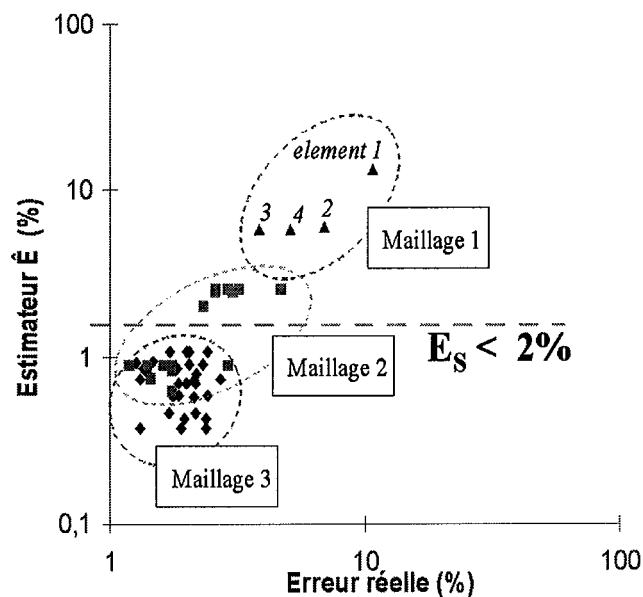


Figure 4-6 : lien entre l'estimateur rapide et l'erreur réelle

### 4.3 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre présenté un estimateur de l'erreur locale commise lors d'une résolution par méthode intégrale. Les propriétés de cet indicateur ont été présentées à l'aide de quelques expérimentations numériques simples. Il est destiné à être utilisé pour réaliser du maillage adaptatif, et c'est donc dans ce cadre là que nous présenterons, au chapitre suivant, des exemples complémentaires de mise en oeuvre.

## 5. Maillage adaptatif et résolution itérative

### 5.1 Introduction

Parmi les progrès réalisés ces dernières années en méthode d'éléments finis, on peut citer sans hésiter les techniques liées au contrôle de précision de ces méthodes, et en particulier aux techniques de maillage adaptatif. Les méthodes intégrales ont pris un certain retard en ce domaine, pratiquement aucune étude n'ayant été publiée sur ce sujet jusqu'en 1996.

L'utilisation industrielle fiable de ces méthodes est pourtant en partie liée à l'existence d'outils permettant à un utilisateur peu averti d'obtenir des résultats dont il maîtrise l'ordre de grandeur de l'erreur, qu'elle concerne des valeurs locales ou des grandeurs globales.

Il est en effet difficile de viser juste entre un maillage insuffisant, qui permet d'économiser du temps de calcul mais conduit à des résultats parfois totalement erronés, et un maillage partout très fin, qui à terme condamne aussi la méthode en raison des temps de résolution prohibitifs auxquels il conduit. De plus, même un utilisateur expérimenté ne peut, sans outil objectif d'aide, réaliser un maillage partout adapté à la précision qu'il recherche.

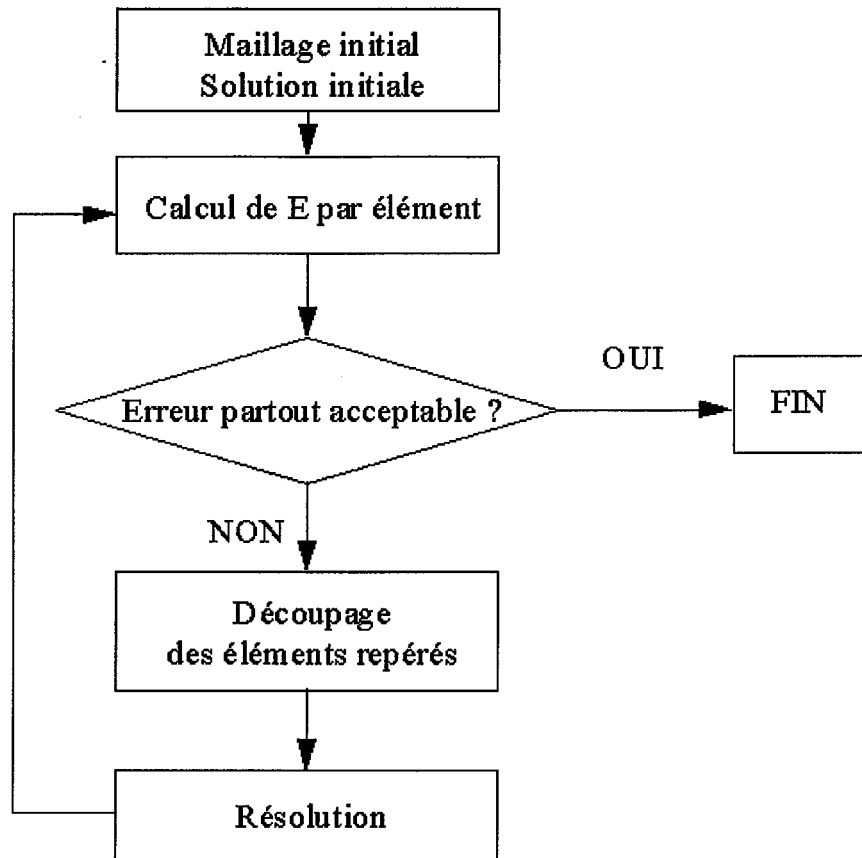
A partir de l'estimateur d'erreur locale défini et testé au chapitre précédent, nous proposons dans ce chapitre un algorithme qui permet, à partir d'un niveau d'erreur acceptable fixé par l'utilisateur et d'un premier maillage minimum (suffisant juste à décrire la géométrie), d'obtenir par étapes un maillage « idéal ».

Appliquée telle qu'elle, cette méthode conduirait à des temps de calcul élevés, car à chaque étape de maillage doit être associée une résolution complète de la structure. Nous proposons donc d'associer à ces étapes de maillage adaptatif une méthode de résolution approchée qui garantisse simultanément des temps de calcul raisonnables. En rendant inutile la résolution complète du dispositif remaillé, même pour le maillage final grâce à un affinage itératif de la solution, ce type de méthode devrait permettre à terme de repousser les limites d'utilisation des méthodes intégrales.

### 5.2 Algorithme de maillage adaptatif

L'algorithme de maillage adaptatif que nous proposons est présenté en Figure 5-1. Le point de départ est un maillage grossier, à l'aide duquel une résolution initiale est réalisée. L'estimateur d'erreur défini au chapitre précédent est alors calculé pour chaque élément et comparé à une valeur seuil définie par l'utilisateur. Lorsque ce seuil est dépassé, l'élément est divisé en sous-éléments.

Le nouveau problème ainsi défini est alors à son tour résolu et un processus identique est recommencé, autant de fois que nécessaire. Des critères d'arrêt complémentaires peuvent bien entendu être définis, portant sur le nombre maximum d'étapes réalisables, sur un nombre limite d'éléments ou d'inconnues, sur une limite inférieure pour la taille des nouveaux triangles générés, sur le temps de calcul acceptable, etc.

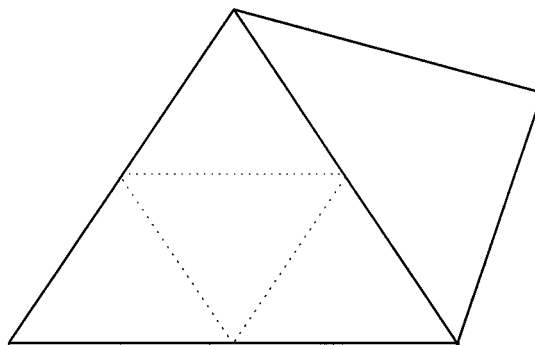


*Figure 5-1 : algorithme de maillage adaptatif basé sur l'estimateur d'erreur locale  $\hat{E}$ .*

### 5.2.1 Division des éléments

La subdivision des éléments repérés à partir de l'estimateur d'erreur ne pose pas de problème particulier en elle-même; dans notre cas, nous avons des éléments triangulaires que nous divisons en 4.

Cependant, une fois cette opération réalisée pour l'ensemble du maillage, on obtient un maillage « non conforme » en un certain nombre de noeuds : c'est le cas chaque fois que, pour deux éléments voisins du maillage d'origine (c'est-à-dire ayant un coté commun), un seul est divisé (Figure 5-2).



*Figure 5-2 : apparition d'une non conformité après division d'un élément.*

Si l'on souhaite supprimer ces non-conformités, il est en principe possible de le faire, mais cela nécessite de subdiviser des triangles supplémentaires (suivant le cas, en 2 ou 4 sous-triangles), et peut conduire de proche en proche à une « propagation » importante de la zone d'affinage du maillage.

### 5.2.2 Maillage non conforme

Une autre possibilité consiste à accepter de réaliser nos calculs avec un maillage non conforme. Il nous faut alors vérifier qu'il ne risque pas de se produire une difficulté algorithmique ou physique, qui conduirait à des résultats erronés.

En ce qui concerne les algorithmes, il s'avère qu'aucune précaution particulière n'est à prendre : on continue à attribuer une inconnue de type potentiel par noeud et une inconnue de type « dérivée normale » par élément; les équations correspondantes sont écrites avec pour centre le noeud ou le centre de gravité correspondant.

Du côté « physique », cela conduit à une discontinuité de la valeur interpolée  $\tilde{v}$  du potentiel de part et d'autre de l'arête qui aura été divisée seulement d'un côté. Cela n'empêche en aucune façon de réaliser correctement les intégrations du potentiel surfacique, puisque cette intégration est réalisée élément par élément, et que le potentiel interpolé reste bien continu sur chaque élément. La valeur intégrale  $V_{\int}$  du potentiel reste pour sa part continue.

On voit ainsi apparaître sur ce segment et pour une région de calcul donnée, trois valeurs distinctes du potentiel (2 valeurs interpolées, une valeur intégrale), dont deux sont connues après résolution sans calcul complémentaire : de ce fait, cet inconvénient apparent d'avoir un  $\tilde{v}$  discontinu contient son propre remède, l'importance de cette discontinuité étant un bon critère pour accepter ou non la non-conformité (en utilisant par exemple le même « seuil » de rejet que pour l'adaptation du maillage).

### 5.2.3 Exemple

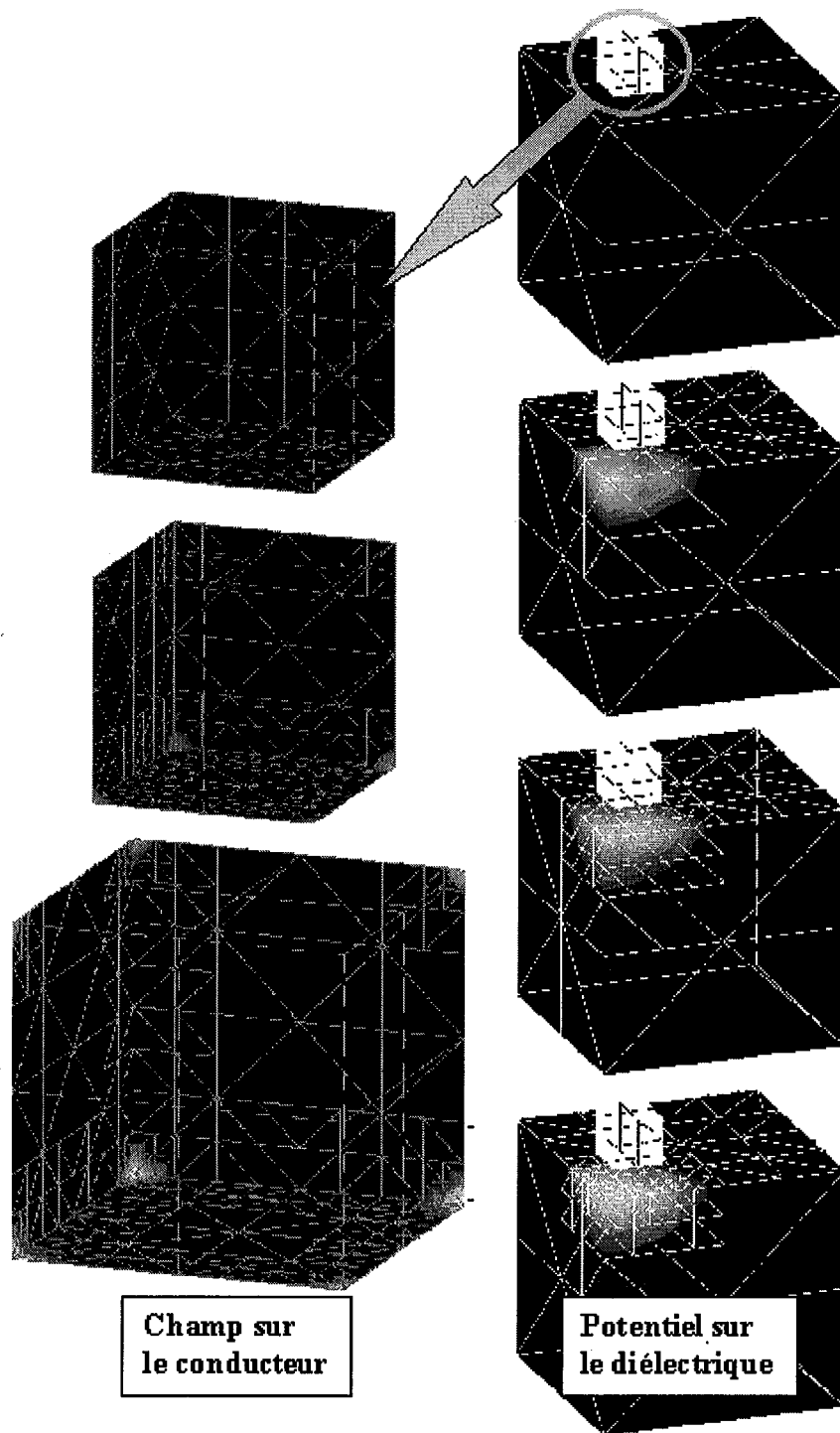
*Voir Figure 5-3.*

### 5.2.4 Un obstacle : le temps de calcul

Pour chaque pas de ce processus de maillage adaptatif, une étape est très lourde en temps de calcul : la résolution de la matrice. Nous faisons donc ci-dessous le point de cette question. À côté de travaux très récents qui semblent avoir ouvert de nouvelles possibilités pour les méthodes classiques, nous proposons ci-dessous (§5.3) une voie originale, directement liée à notre algorithme de maillage adaptatif.

## 5.3 Méthodes de résolution

L'un des intérêts que présente la méthode des équations intégrales de frontière par rapport à la méthode des éléments finis est qu'en équations intégrales, on ne discrétise que la frontière, ce qui donne moins d'éléments et moins d'inconnues. Ainsi, en équations intégrales, des problèmes test classiques peuvent être réalisés avec quelques centaines d'inconnues, des résultats industriellement intéressants peuvent être obtenus avec quelques milliers d'inconnues, les plus gros systèmes traités à ce jour au Cegely ou par nos partenaires dépassant à peine 10 000 inconnues. On se situe normalement entre 1 et 2 ordres de grandeur au-dessus avec les méthodes d'éléments finis.



**Figure 5-3 : 3 étapes de maillage adaptatif**

*Cube diélectrique  $\epsilon_r = 100$*

Par contre, l'un des inconvénients des méthodes intégrales est de conduire, tout au moins pour les dispositifs où intervient la matrice de raideur extérieure (c'est-à-dire l'influence de l'espace infini sur le dispositif étudié) à un système à résoudre dense et non symétrique. Les méthodes itératives de résolution comme le gradient conjugué ou bi-conjugué, très efficaces pour les systèmes issus des éléments finis, n'ont pas donné de résultat utilisable pour les méthodes intégrales (du moins jusqu'en 1996, nous y reviendrons).

### 5.3.1 Temps de calcul

Or le nombre d'opérations nécessaires pour résoudre un système linéaire avec les méthodes itératives évolue comme  $n^2$ , où  $n$  est le nombre des inconnues. Pour les méthodes directes, ce nombre évolue comme  $n^3$ . On constate généralement que les méthodes itératives sont avantageuses au-delà de quelques centaines d'inconnues; même en mettant ces méthodes à égalité pour  $n=1000$ , on voit déjà apparaître un temps de résolution 100 fois plus faible en faveur des méthodes itératives pour 10 000 inconnues.

Un autre argument en faveur des méthodes itératives est lié, pour la méthode intégrale, au rapport entre les temps de calcul nécessaires respectivement pour la construction de la matrice (assemblage) et pour la résolution. L'assemblage de la matrice conduit à calculer successivement pour chaque région, l'influence de chaque élément sur l'ensemble des coefficients inconnus, eux-mêmes repérés à partir de leurs éléments d'appartenance : il en résulte un temps d'assemblage lié à la somme des carrés des nombres d'éléments par région de calcul, soit une évolution plutôt liée au carré qu'au cube du nombre des inconnues. Il existe ainsi un nombre d'inconnues au-delà duquel le temps d'inversion de la matrice par méthode directe devient prépondérant par rapport au temps d'assemblage. Cette limite est généralement située entre 1000 et 2000 inconnues; pour 10 000 inconnues, le temps de calcul ne dépend quasiment plus que du temps de résolution de la matrice, et c'est donc fondamentalement à ce niveau que se situe la limite pour la complexité des dispositifs simulés par méthode intégrale.

### 5.3.2 État de l'art

Un progrès considérable serait donc de trouver une méthode itérative qui permette de résoudre les systèmes issus des méthodes intégrales.

Bien entendu, des études ont été menées en ce sens, même si peu ont été publiées puisqu'elles ont généralement échoué. Soulignons à ce propos que, si les équations intégrales sont en majorité utilisées par les mécaniciens, ceux-ci sont peu concernés par cette problématique, car les formes géométriques et équations concernées conduisent assez facilement à des matrices fortement lacunaires et bien conditionnées.

En ce qui concerne le Cegely, nous utilisons depuis longtemps des méthodes itératives très simples et parfaitement efficaces pour résoudre la matrice issue de problèmes de Neuman (où seule la variable potentiel est inconnue, ce qui conduit à un système à diagonale très dominante), mais c'est le seul cas que nous avons rencontré où une telle méthode fonctionne systématiquement. Une étude complète avait été réalisée au Cegely en 1988 [ 30 ], avec des tests de la plupart des méthodes connues; aucune de ces méthodes n'avait permis de faire mieux que la méthode directe de Gauss sur des exemples typiques d'électrostatique ou de magnétostatique.

La seule étude prometteuse est celle, très récemment publiée, de Salonen [ 31 ]; mais ses résultats, ont été obtenus pour une formulation de la magnétostatique très différente de la notre (formulation intégrale volumique où l'inconnue est le champ, discrétisé en éléments d'arêtes). D'un autre côté, les conclusions divergentes de plusieurs auteurs quant à l'efficacité de la méthode de transformation dite des ondelettes (par exemple [ 31 ], [ 32 ]) montrent aussi que les matrices denses non symétriques ne se comportent pas toutes de la même manière, et qu'une méthode efficace pour une formulation donnée d'un problème physique précis ne s'applique pas forcément à une autre formulation du même problème, ou au même type de formulation d'un problème physique différent. L'application de ces méthodes à nos matrices demandera donc un gros travail d'adaptation, à mener dans le cadre d'une collaboration avec des spécialistes de l'analyse numérique.

Dans ce travail, nous avons abordé ce problème d'une façon radicalement différente, en lien direct avec le processus de maillage adaptatif.

### 5.3.3 Affinage de maillage et résolutions « locales »

A chaque nouvelle étape du maillage adaptatif (Figure 5-1), une nouvelle solution de l'équation intégrale doit être trouvée. A chaque fois, une partie du maillage ayant été subdivisée, le système à résoudre est un peu plus gros, ce qui conduit rapidement à des temps de calcul trop importants.

La théorie de la méthode intégrale montre qu'une modification même très localisée du maillage conduira fatalement à une modification globale de la solution. On peut cependant remarquer que les zones dont le maillage n'est pas affiné à une étape donnée sont celles pour lesquelles la solution trouvée est déjà assez précise. Nous avons donc testé, avec succès, une méthode approchée qui consiste à ne recalculer la solution que sur les parties du maillage qui viennent d'être modifiées, les autres parties étant prises en compte comme des conditions aux limites.

Si le système d'équations intégrales complet après affinage du maillage se présente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

où  $X_1$  correspond aux inconnues du potentiel et du champ pour les nouveaux noeuds et triangles (maillage affiné) et  $X_2$  aux valeurs du potentiel et du champ pour les noeuds et les triangles de la partie du maillage qui n'a pas été modifié, alors on peut trouver une solution approchée pour les nouveaux noeuds en écrivant :

$$AX_1 = E - BX_2 \quad (5-2)$$

Le gain en temps de calcul est évidemment considérable. Après quelques itérations, les divisions de maillage se concentrent en effet sur quelques zones très localisées, conduisant à un nombre de nouvelles inconnues  $M$  peu important en comparaison du nombre total  $N$ . Par rapport à la résolution complète qui doit théoriquement être faite, on gagne ainsi sur deux tableaux:

- le temps d'assemblage est réduit d'un facteur  $M/N$ , car on n'a à assembler que les  $M$  lignes de la matrice complète  $N \times N$ , correspondant aux sous-matrices  $A$ ,  $B$  et  $E$ .
- le temps de résolution par méthode directe est réduit d'un facteur  $(M/N)^3$ , car la matrice  $A$  à inverser a pour taille  $M \times M$  au lieu de  $N \times N$  pour la matrice complète.

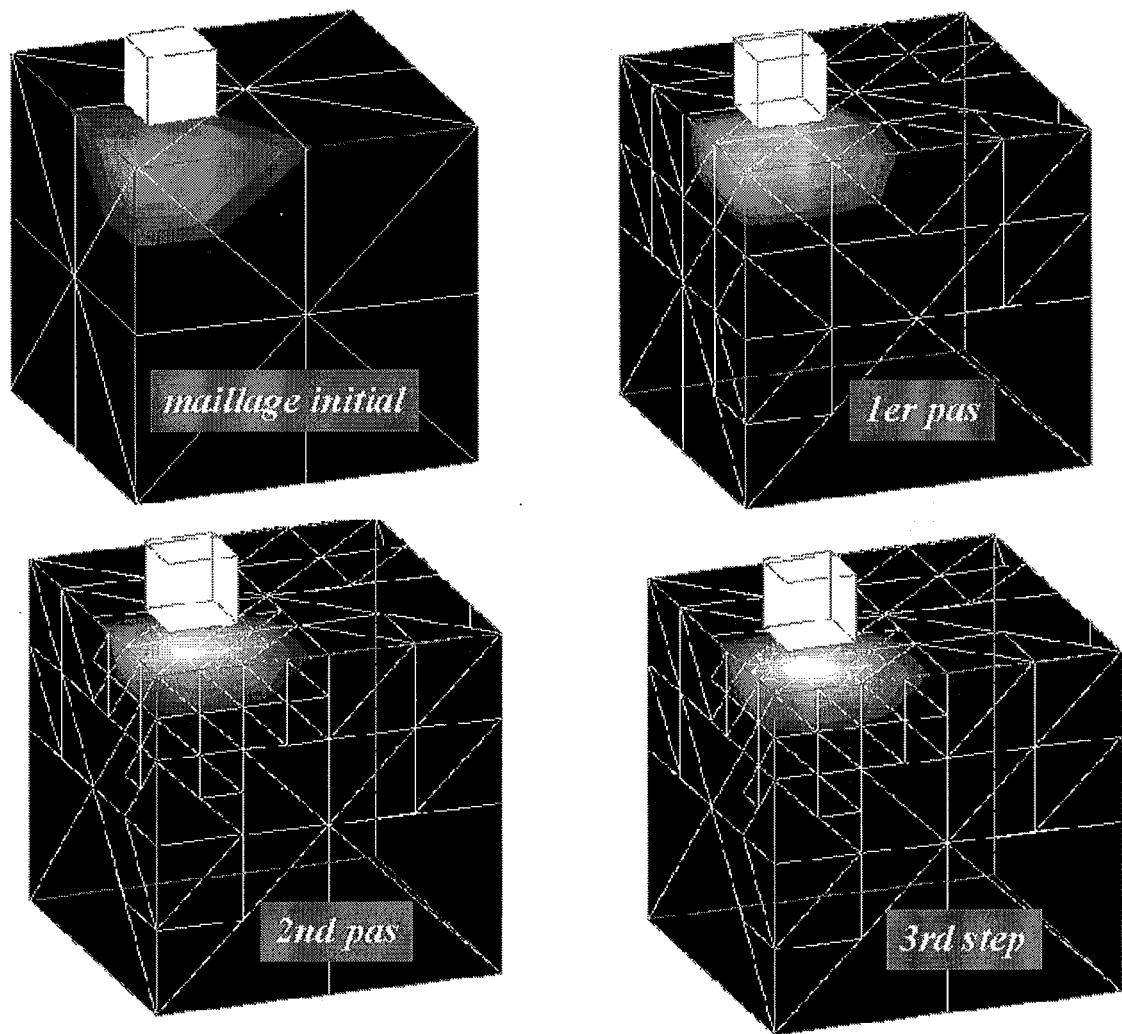
### 5.3.4 Exemples de maillages adaptés avec résolutions locales

Nous présentons ici deux exemples de tests de cette méthode de résolution locale. La configuration géométrique et les conditions aux limites sont celles des deux cubes déjà utilisés par ailleurs dans ce mémoire.

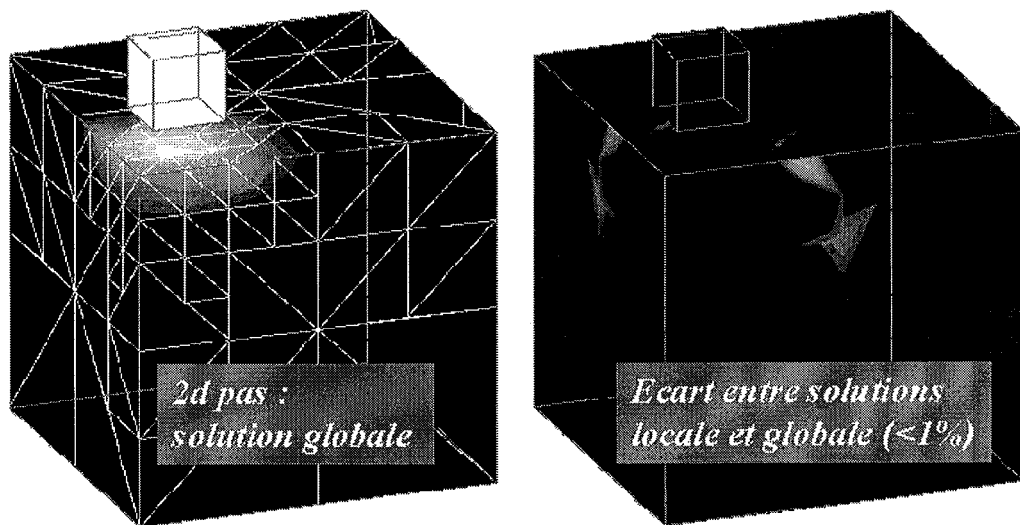
Le premier exemple est celui qui a servi aux tests de l'estimateur d'erreur, il est donc identique à celui du §5.2.3, mais avec une permittivité relative égale à 1, l'algorithme d'affinage n'étant ici utilisé que sur le cube diélectrique inférieur.

La Figure 5-4 montre le maillage de départ, et la suite de maillages et solutions approchées obtenus. La solution approchée de l'étape 2 est comparée à la solution globale pour le même maillage (Figure 5-5) : l'écart est partout inférieur à 1% de l'échelle des potentiels, qui va ici de 0 à 1V.





*Figure 5-4 : Itérations de maillage adaptatif avec résolutions locales.  $Eps-r = 1$*



*Figure 5-5 : Comparaison solution locale - solution globale (étape 2 de la Figure 5-4)*

Le second exemple reprend exactement le cas traité en résolution globale au §5.2.3. On constate cette fois-ci (Figure 5-6) que le premier maillage conduit à une estimation assez fautive du potentiel du cube diélectrique, du moins par rapport à l'échelle de variation de ce potentiel sur ce cube : la valeur élevée de la permittivité conduit à une valeur presque constante du potentiel électrique, dont la variation totale sur le cube diélectrique n'excède pas 0,04V, soit 4% de l'échelle globale de l'exemple précédent.

Ainsi, la valeur de potentiel obtenue par résolution locale est incorrecte dans l'absolu; par contre, les variations relatives entre deux points du diélectrique restent précises. On peut pour s'en convaincre rechercher la corrélation, noeud par noeud, entre les valeurs du potentiel obtenues par chacune des deux méthodes de résolution (Figure 5-7). Le coefficient de corrélation linéaire est quasiment égal à 1, et on voit que l'erreur résulte d'un simple décalage. La même étude menée sur les valeurs du champ sur l'ensemble des éléments des surfaces des deux cubes montre bien que, malgré ce décalage, la solution obtenue par résolutions locales est très proche de la solution exacte (Figure 5-8).

On verra dans la suite (5.3.5) qu'il est possible, sans recourir à une résolution globale, d'améliorer la solution obtenue finalement par une suite de résolutions locales. La précision de la solution locale n'a donc pas forcément une grande importance, dans la mesure cependant où elle reste suffisante pour garantir un fonctionnement correct de l'estimateur d'erreur. Dans les exemples que nous avons traités (qui ne sont pas tous rapportés ici), ce sont bien (dans la grande majorité des cas) les mêmes éléments qui ont été divisés lors du maillage adaptatif, qu'on ait recours à des résolutions globales ou locales. On peut encore illustrer cela sur une figure comparant les variations de l'estimateur d'erreur, à la fin de la même étape de maillage adaptatif, pour les deux types de résolution (Figure 5-9).

### 5.3.5 Amélioration de la solution en fin d'affinage de maillage, sans résolution globale

Cette méthode permet de faire progresser le maillage adaptatif à un coût raisonnable. Cependant, on ne peut avoir une pleine confiance dans la solution approchée obtenue à la dernière étape. En même temps, cette dernière étape peut avoir généré un nombre d'éléments tel qu'une résolution globale peut s'avérer très coûteuse, voire impossible.

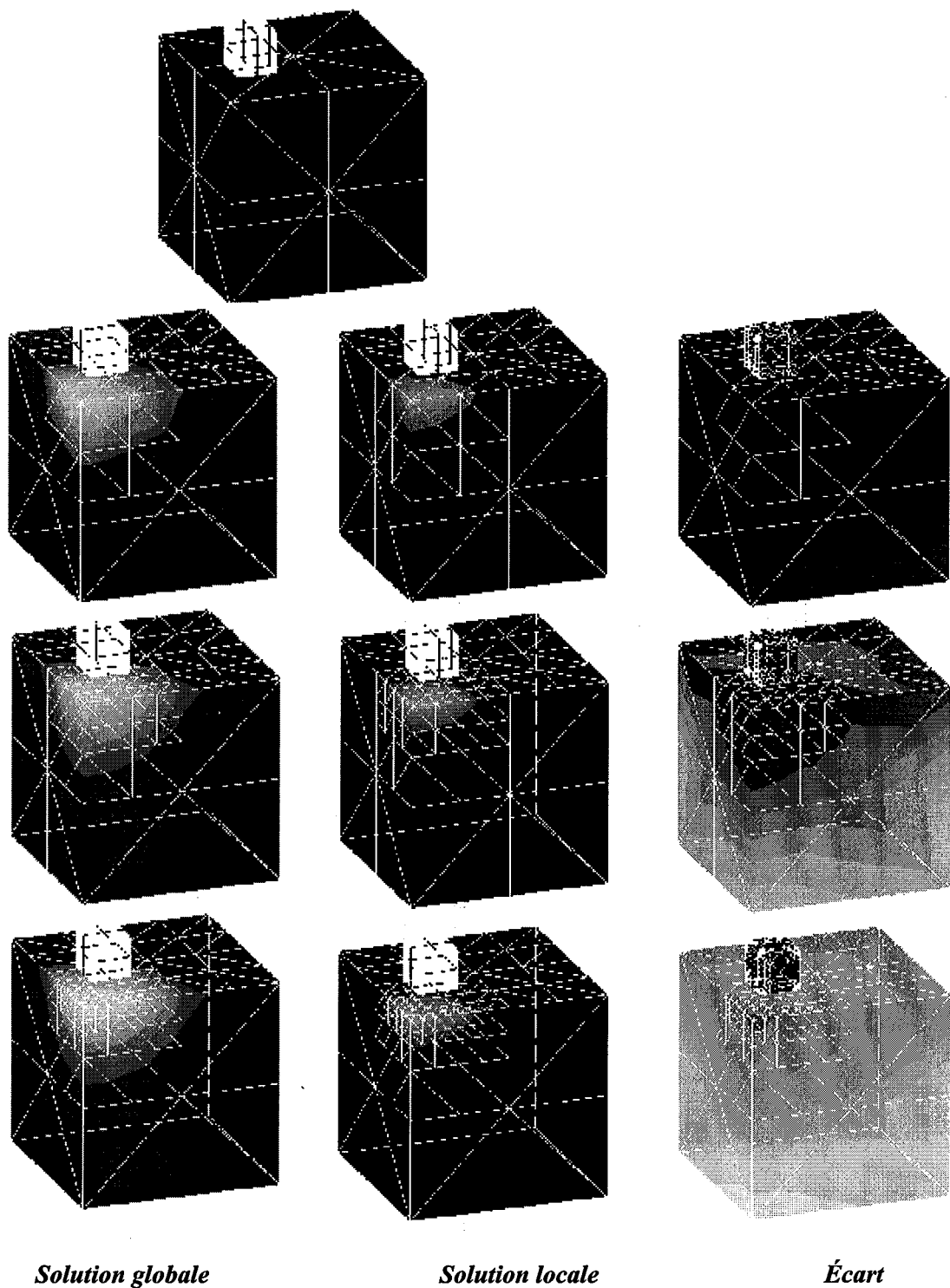
Nous avons donc testé un algorithme qui doit permettre, en partant de la solution approchée obtenue, de s'approcher par itérations de la solution exacte du système linéaire. L'idée de base est de séparer le maillage final en  $M$  zones de proximité, par exemple en utilisant l'ordre de création des nouveaux éléments pendant le processus de maillage adaptatif, puis de résoudre successivement sur chacune de ces zones, les autres étant considérées en tant que conditions aux limites. En répétant plusieurs fois ce balayage du maillage, on va ainsi propager aux zones les moins remaillées l'amélioration apportée par l'affinage du maillage; cet effet va à son tour se répercuter sur les parties remaillées, etc.

Par rapport à une résolution globale réalisée sur le dernier maillage, cette méthode présente plusieurs avantages:

- chaque sous-système à résoudre a une matrice  $M^2$  fois plus petite que la matrice globale, ce qui permet de repousser très loin la taille limite des problèmes à résoudre, habituellement fixée par la mémoire vive disponible sur les calculateurs.

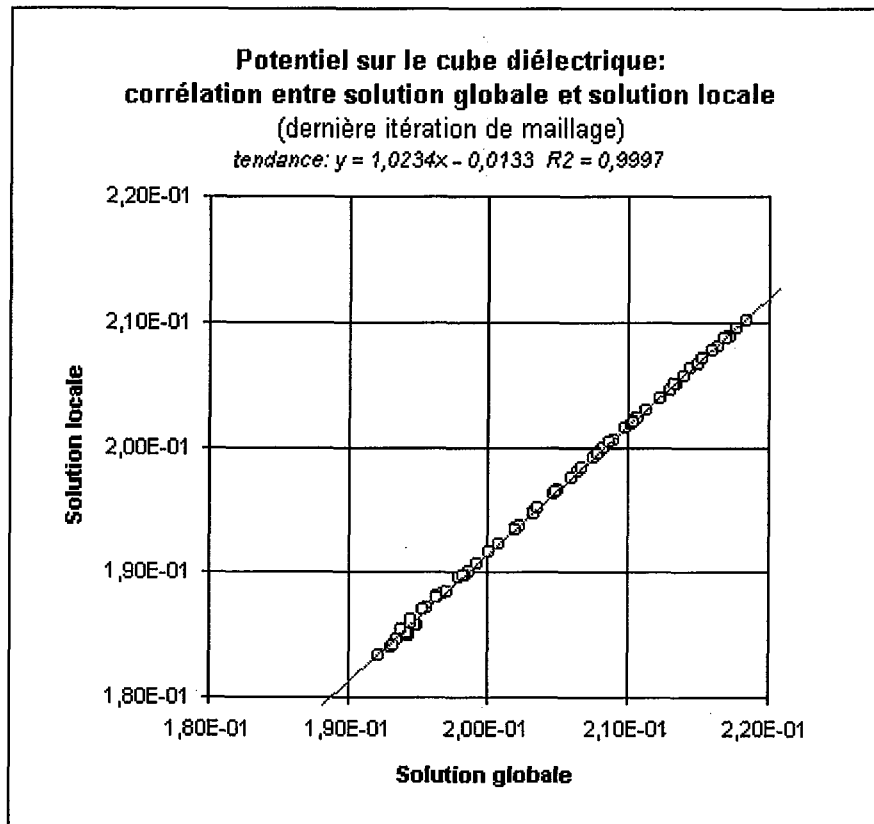
- le temps de résolution pour un balayage peut être réduit d'un facteur qui peut atteindre  $M^2$  par rapport à la résolution directe du système complet. Or, le point de départ de cette méthode itérative étant déjà une solution approchée correcte, il est probable qu'une bonne convergence sera atteinte en moins de  $M^2$  étapes.

- la convergence peut être contrôlée, par exemple en surveillant l'évolution de la norme de la solution.

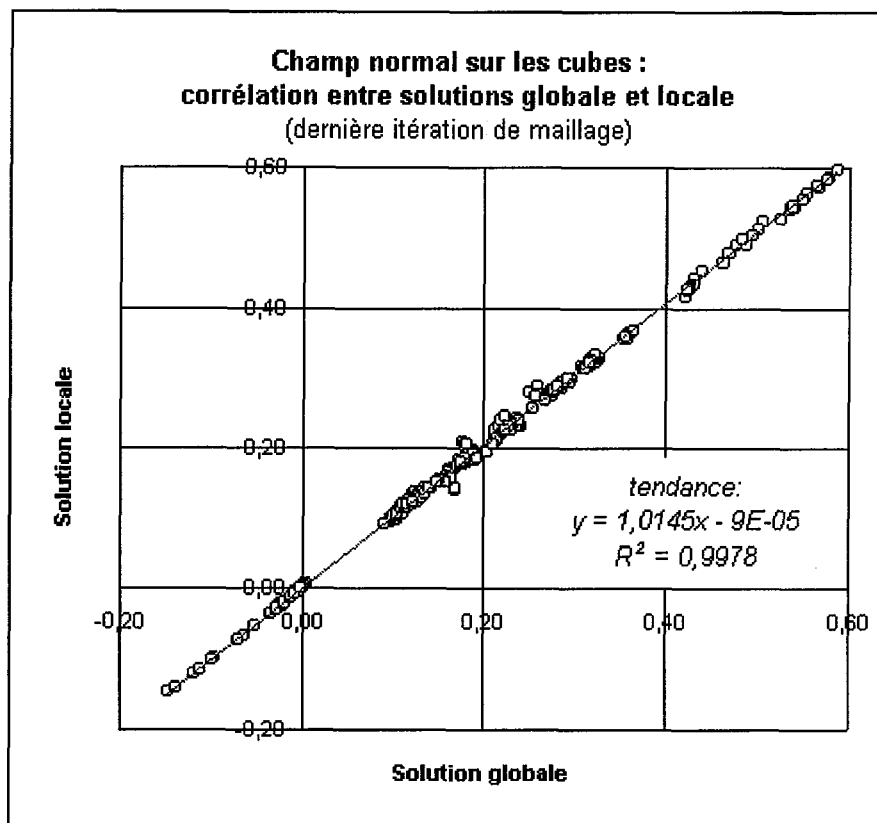


**Figure 5-6 : comparaison entre les solutions obtenues par résolutions globale et locale**  
 Même échelle de couleurs dans les deux cas : 0,183 à 0,220

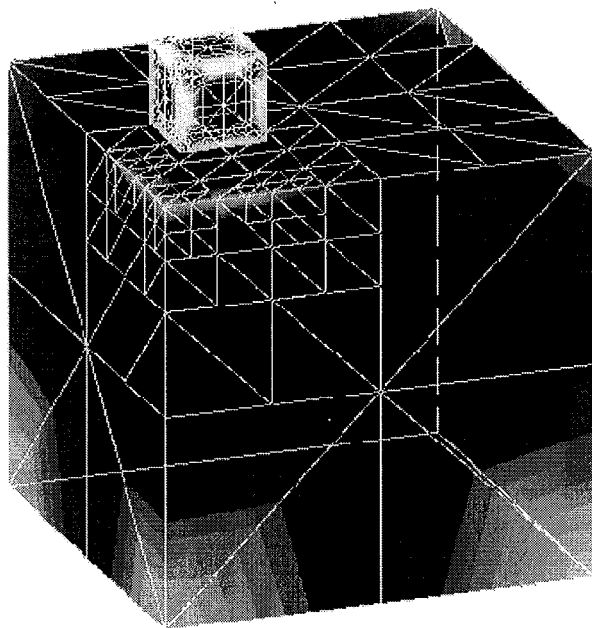
*Écarts correspondants (échelle de 0,007 à 0,0093).*  
*Eps-r = 100*



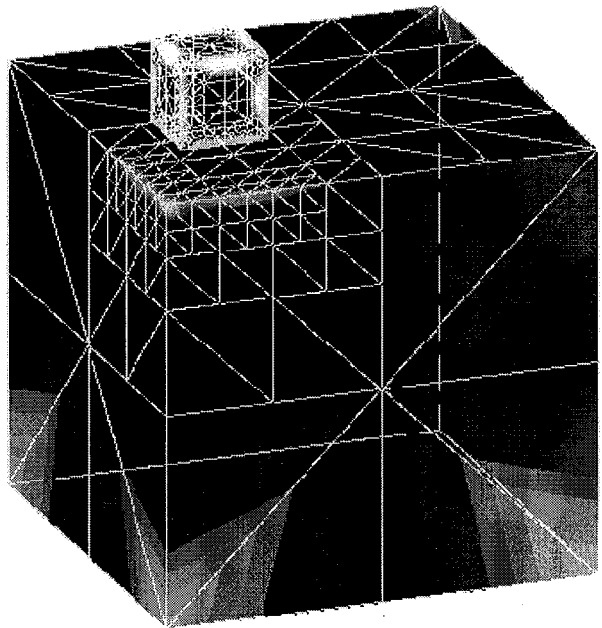
*Figure 5-7*



*Figure 5-8*



*Résolutions globales*



*Résolutions locales*

**Figure 5-9 : Valeur absolue de l'estimateur d'erreur après la 3ème étape de la Figure 5-6.  
Échelle des couleurs : 0 à 0,04V (valeurs extrêmes du potentiel : 0 à 1V)**

Nous pouvons analyser le fonctionnement de cette méthode, par exemple pour deux zones (d'inconnues X et Y respectivement). Le système matriciel, pour la (n+1)-ième étape, a dans un premier temps la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

où on cherche X en considérant Y comme connu, puis :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

où on cherche cette fois-ci Y à partir des valeurs de X trouvées précédemment. On a donc :

$$X_{n+1} = A^{-1}(E - BY_n) \quad (5-5)$$

$$Y_{n+1} = D^{-1}(F - CX_{n+1}) \quad (5-6)$$

Si on note X et Y les solutions exactes, l'évolution de l'erreur de calcul peut être évaluée :

$$X_{n+1} - X = -A^{-1}B(Y_n - Y) \quad (5-7)$$

soit :

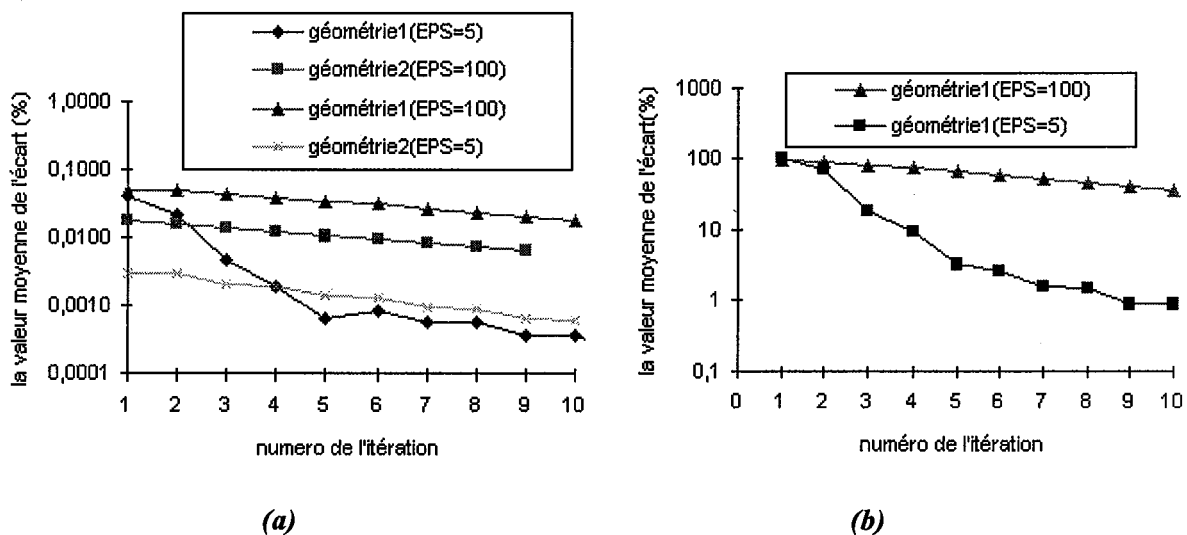
$$Y_{n+1} - Y = D^{-1}CA^{-1}B(Y_n - Y) \quad (5-8)$$

et donc, après n itérations :

$$Y_{n+1} - Y = (D^{-1}CA^{-1}B)^n(Y_1 - Y) \quad (5-9)$$

L'évolution de l'erreur dépend ainsi des caractéristiques de la matrice  $D^{-1}CA^{-1}B$  ; l'erreur diminuera si ses valeurs propres sont toutes inférieures à 1. Si la séparation en zones du maillage est bien réalisée par proximité géométrique et si les lignes de la matrice (points de collocation) sont définies en correspondance avec les bonnes colonnes (inconnue associée à un point de collocation donné), alors les sous-matrices A et D seront à diagonales fortement dominantes, contrairement à B et C, ce qui semble bien garantir que la condition sur les valeurs propres de  $D^{-1}CA^{-1}B$  sera satisfaite. Cela ne fait que traduire le fait que, si l'effet d'une source surfacique (densité de charge ou de dipôle) est bien ressenti dans tout l'espace, cet effet décroît néanmoins avec la distance.

Dans les différents tests que nous avons réalisés, cette méthode d'amélioration de solution a toujours convergé, le module de l'erreur suivant en plus comme prévu une série géométrique décroissante (Figure 5-10).



**Figure 5-10 : exemples de courbes de convergence de la méthode de résolution itérative par blocs:**  
 (a) en commençant à partir de la solution approximative obtenue en fin de maillage adaptatif  
 (b) en commençant avec toutes les valeurs initialisées à zéro

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de maillage adaptatif. Nous avons montré qu'on peut résoudre localement dans une zone remaillée. Il est évident que le système local a une dimension plus petite que le système global à résoudre, ce qui réduit le temps de calcul nécessaire. La comparaison de la solution locale avec la solution globale montre la fiabilité de cette solution locale.

Nous avons présenté également une méthode itérative basée sur une suite de résolutions locales portant sur des zones différentes. Cette résolution itérative permet d'améliorer la solution obtenue par la série de résolutions locales. Nous avons montré que les caractéristiques de ce système itératif lui confèrent probablement des propriétés systématiques de convergence.

## Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons réalisé un logiciel basé sur la méthode des équations intégrale de frontière, qui permet de résoudre des problèmes tridimensionnels d'électrostatique, ou par analogie, tout problème décrit par l'équation de Laplace. Les résultats obtenus (potentiel et champ normal sur les surfaces) ont été comparés à des résultats analytiques et à des résultats fournis par d'autres logiciels; ils sont de qualité comparable.

Les méthodes utilisées pour calculer les termes élémentaires de la matrice s'appuient d'une part sur des méthodes de Gauss classiques, car elles sont les plus rapides lorsque la distance relative entre le point d'intégration et l'élément d'intégration est grande; d'autre part sur des résultats analytiques ou semi-analytiques dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque l'intégrant est singulier ou quasi-singulier. Ces techniques performantes permettent d'utiliser la méthode intégrale - après résolution - pour recalculer le potentiel, y compris très près des surfaces ou même en tout point de celles-ci, avec une précision qui peut être considérée comme parfaite. C'est là un progrès important par rapport à des logiciels plus anciens (comme Phi3d par exemple).

Cette précision de calcul de l'expression intégrale du potentiel sur les surfaces a permis d'étudier en détail sur des exemples ses oscillations par rapport à l'expression discrétisée du même potentiel. La comparaison avec la solution exacte, par ailleurs disponible, a permis de montrer qu'il existe un lien statistique assez fort entre l'erreur de la solution discrète, et un estimateur lié à l'écart entre les expressions discrète et intégrale du potentiel. Cet estimateur d'erreur nous a alors permis de réaliser du maillage adaptatif. Les algorithmes utilisés pour la méthode intégrale étant compatibles avec des maillages non conformes, le remaillage est extrêmement simple à réaliser, les éléments voisins d'un élément découpé n'ayant pas à être obligatoirement modifiés.

On peut ainsi disposer d'une solution dont la précision est approximativement connue, en utilisant un nombre d'éléments optimal. Mais l'intérêt de cette procédure va beaucoup plus loin : on a en effet pu montrer qu'il n'est pas indispensable de résoudre entièrement et exactement le problème à chaque étape du maillage, et qu'une économie importante en temps de calcul peut donc être ainsi obtenue. Finalement, en fin de procédure d'adaptation du maillage, on a montré qu'il est possible, à partir de la solution approximative connue, de converger vers la solution exacte (exacte par rapport au système d'équations intégrales discrétisées ainsi construit) par une méthode itérative simple : on devrait ainsi pouvoir s'affranchir de l'un des plus gros obstacles au développement des méthodes intégrales, qui est le recours souvent inévitable à une méthode très lourde pour la résolution du système linéaire obtenu.

Un certain nombre de points restent bien sûr à préciser, à améliorer ou à vérifier.

Par exemple, il existe une relation directe entre le temps nécessaire à l'assemblage d'une équation et la précision de calcul des termes élémentaires de la matrice. Il serait intéressant d'étudier l'influence de cette précision de calcul sur la précision du résultat final, de façon à optimiser la vitesse de calcul pendant l'assemblage.

De même, durant la phase de maillage adaptatif, seulement une partie des termes est à recalculer; lorsqu'il y a des interfaces, on pourrait même utiliser une partie de l'assemblage réalisé avant résolution, pour calculer l'estimateur d'erreur, dans la région contiguë, après cette résolution. Des gains substantiels en temps de calcul pourraient donc être obtenus, au prix d'une gestion rigoureuse des données.

La validation du code, sur l'exemple du condensateur cylindrique, a montré l'intérêt qu'il y a à disposer d'éléments finis surfaciques curvilignes. Nous les avons abandonnés dans ce travail de façon à obtenir des résultats sûrs quant à la valeur intégrale du potentiel sur les surfaces. Il sera important de voir à quel prix ils peuvent être réintroduits.

Toute l'étude de l'estimateur d'erreur et de sa pertinence a été menée sur quelques exemples peut-être simplistes. Il va falloir multiplier les tests, et vérifier en particulier avec beaucoup de soin ce qu'il advient des quelques éléments imprécis qui ne sont pas détectés lors d'une itération : le seront-ils systématiquement à l'étape suivante (ou au moins avec la même probabilité que n'importe quel autre mauvais élément) ?

Les non-conformités du maillage obtenu ne sont a priori pas gênantes. On pourrait même envisager de les utiliser comme estimateur d'erreur complémentaire, ou estimateur « plus rapide » que celui fondé sur la valeur intégrale du potentiel, en utilisant pour cela le saut entre les deux valeurs interpolées du potentiel sur les arêtes non-conformes. Pour les cas où les post-processeurs ne sauraient pas gérer de tels maillages, il serait utile de tester des algorithmes de mise en conformité, a posteriori, de ces maillages.

Enfin, il faudra tester la méthode itérative d'affinage de solution sur plus de deux zones de maillage, et essayer d'autres méthodes itératives, en les faisant travailler à partir de la solution approximative connue.

Pour ne pas multiplier les difficultés, les idées essayées au cours de ce travail l'ont été sur la formulation intégrale la plus simple, qui concerne l'équation de Laplace, associée aux conditions aux limites également les plus simples (potentiel ou dérivée normale connue, ou conditions d'interfaces classiques). Il sera nécessaire de vérifier si elles peuvent être mises en oeuvre également dans d'autres cas, par exemple avec des interfaces plus complexes (courants de Foucault à faible pénétration, coques minces), ou avec des fonctions de Green différentes, correspondant par exemple à des propagations d'ondes.

---



## Annexe

### A.1. Calcul analytique de l'intégrale de $1/r$ sur un triangle [49]

Cette intégrale est celle de l'un des noyaux de la méthode intégrale de frontière, elle est calculée pour un triangle OBA rectangle (Fig. A-1) de la façon suivante:

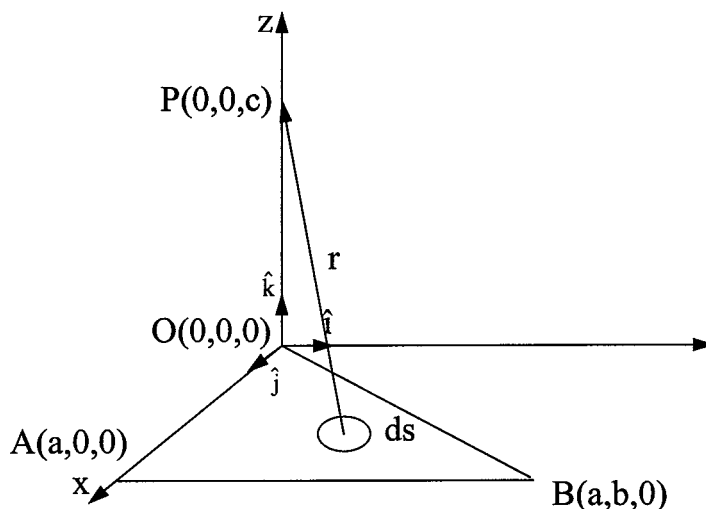


Figure A-1

$$\begin{aligned}
 \int_{s_{OAB}} \frac{ds}{r} &= \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=xb/a} \frac{dydx}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}} \\
 &= \int_{x=0}^{x=a} \ln(y + \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}) \Big|_{y=0}^{y=xb/a} dx \\
 &= \int_{x=0}^{x=a} \left[ \ln\left(\frac{xb}{a} + \sqrt{\frac{x^2 b^2}{a^2} + c^2 + x^2}\right) - \ln \sqrt{c^2 + x^2} \right] dx \\
 &= \underbrace{\int_0^a \ln\left[\frac{xb}{a} + \sqrt{x^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) + c^2}\right] dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^a \ln \sqrt{c^2 + x^2} dx}_{I_2}
 \end{aligned}$$

#### A.1.1 Calcul de l'intégrale $I_1$

Si  $\frac{b}{a} = k$  et  $\frac{b^2}{a^2} + 1 = h^2$  alors

$$I_1 = \int_0^a \ln[kx + \sqrt{x^2 h^2 + c^2}] dx$$

et cette intégrale peut être calculée par une intégration par parties :

$$\begin{array}{ccc} \text{dérivée} & & \text{intégrale} \\ \frac{1}{kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2}} \left[ k + \frac{h^2x}{\sqrt{h^2x^2 + c^2}} \right] & \rightarrow & \ln(kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2}) \\ 1 & \rightarrow & x \\ I_1 = x \ln(kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2}) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{xdx}{kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2}} \left[ k + \frac{h^2x}{\sqrt{h^2x^2 + c^2}} \right] & & \\ & & I_3 \end{array}$$

$$I_1 = a \ln(ka + \sqrt{h^2a^2 + c^2}) - I_3$$

Il est montré que:

$$\int \frac{xdx}{kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2}} \left[ k + \frac{h^2x}{\sqrt{h^2x^2 + c^2}} \right] dx = x - 2c \tan^{-1} \frac{x}{kx + \sqrt{h^2x^2 + c^2} + c}$$

alors :

$$I_3 = a - 2c \tan^{-1} \frac{a}{ka + \sqrt{c^2 + h^2a^2} + c}$$

En remplaçant  $I_3$  par sa nouvelle expression,  $I_1$  devient:

$$I_1 = a \ln(ka + \sqrt{h^2a^2 + c^2}) - a + 2c \tan^{-1} \frac{a}{ka + \sqrt{c^2 + h^2a^2} + c}$$

Comme :

$$h^2a^2 = \left( \frac{b^2}{a^2} + 1 \right) a^2 = b^2 + a^2 \quad \text{et} \quad ka = \frac{b}{a} a = b$$

nous avons:

$$I_1 = a \ln(b + \sqrt{b^2 + a^2 + c^2}) - a + 2c \tan^{-1} \frac{a}{b + \sqrt{c^2 + b^2 + a^2} + c}$$

### A.1.2 Calcul de l'intégrale $I_2$ et résultat global

Pour faire l'intégration par parties nous avons :

$$\begin{array}{ccc} \text{dérivée} & & \text{intégrale} \\ \frac{x}{c^2 + x^2} & & \ln \sqrt{c^2 + x^2} \\ 1 & & x \end{array}$$

dans ce cas :

$$I_2 = x \ln \sqrt{c^2 + x^2} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{c^2 + x^2} dx$$

$$I_2 = x \ln \sqrt{c^2 + x^2} \Big|_0^a - \left( x - c \tan^{-1} \frac{x}{c} \right)$$

$$I_2 = a \ln \sqrt{c^2 + a^2} - a + c \tan^{-1} \frac{a}{c}$$

Si nous considérons :

$$D_{abc} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{et} \quad D_{ac} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

nous avons :

$$\int \frac{ds}{r} = a \ln \frac{b + D_{abc}}{D_{ac}} + c \left( 2 \tan^{-1} \frac{a}{b + D_{abc} + c} - \tan^{-1} \frac{a}{c} \right)$$

Après simplification du second terme du deuxième membre à l'aide des formulations trigonométriques on a :

$$\int \frac{ds}{r} = a \ln \frac{b + D_{abc}}{D_{ac}} - c \tan^{-1} \left( \frac{ab}{D_{ac} + cD_{abc}} \right)$$

Pour le calcul de cette intégrale sur un triangle quelconque, on peut utiliser la décomposition des triangles proposée pour le calcul de l'angle solide.

## A.2. Calcul de l'intégrale de l'angle solide sur un triangle

### A.2.1 Calcul de l'intégrale de l'angle solide sur un triangle rectangle

Nous allons montrer comment on peut calculer analytiquement cette intégrale sur un triangle rectangle. Ensuite, ce calcul est généralisé pour un triangle quelconque.

L'intégrale à calculer sur un triangle OBC (Fig. A-2) s'écrit :

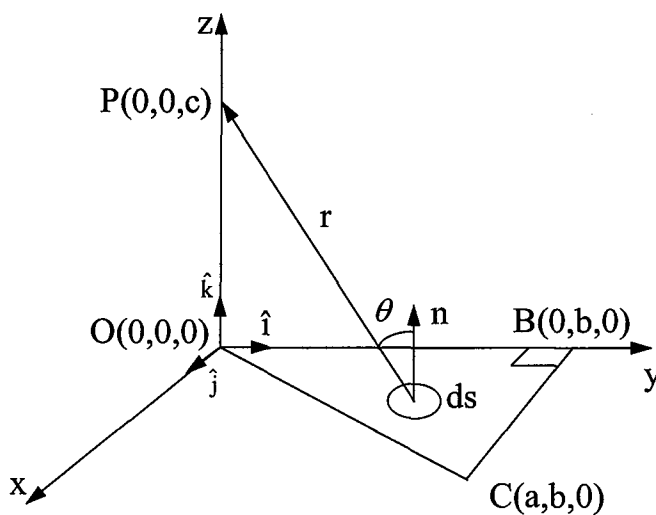


Figure A-2

$$\Omega = \int_s d\Omega = \int_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} ds = \int_s \frac{\cos(\theta)}{r^2} ds \text{ avec :}$$

$$\mathbf{r} = -x\hat{i} - y\hat{j} + c\hat{k} \quad , \quad \mathbf{n} = \hat{k} ,$$

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}||\mathbf{n}|} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}} .$$

Dans ce cas l'intégrale à calculer aura la forme suivante:

$$\Omega = \int_s \frac{\cos(\theta)}{r^2} ds = \int_0^a \int_0^{\frac{bx}{a}} \frac{c}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^3}} dx dy$$

En sachant que 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\Omega = \int_0^a \frac{cy}{(x^2 + c^2)\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)}} \Big|_0^{\frac{xb}{a}} dx$$

$$\Omega = \int_0^a \frac{\frac{cbx}{a}}{(x^2 + c^2)\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + c^2}} dx$$

Puisque

$$\int_0^a \frac{\alpha x}{(x^2 + c^2)\sqrt{\beta x^2 + c^2}} dx = \frac{\alpha \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{\beta x^2 + c^2}}{c\sqrt{\beta - 1}}\right)}{c\sqrt{\beta - 1}}$$

$$\Omega = \frac{\frac{cb}{a}}{c\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} - 1}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + c^2}}{c\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} - 1}} \Big|_0^a$$

$$\Omega = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\frac{cb}{a}}\right) - \tan^{-1} \frac{a}{b} \quad \text{on obtient finalement :}$$

$$\Omega = \tan^{-1}\left(\frac{a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{cb}\right) - \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

**A.2.2 Triangle quelconque, point d'observation à la verticale d'un sommet**

Comme la surface de chaque triangle peut être définie par la somme de deux triangles rectangle, il est possible de généraliser le calcul précédent pour un triangle quelconque où la projection du point d'observation est un sommet du triangle.

Dans la Figure A-3 nous voulons calculer cette intégrale sur le triangle OBA :

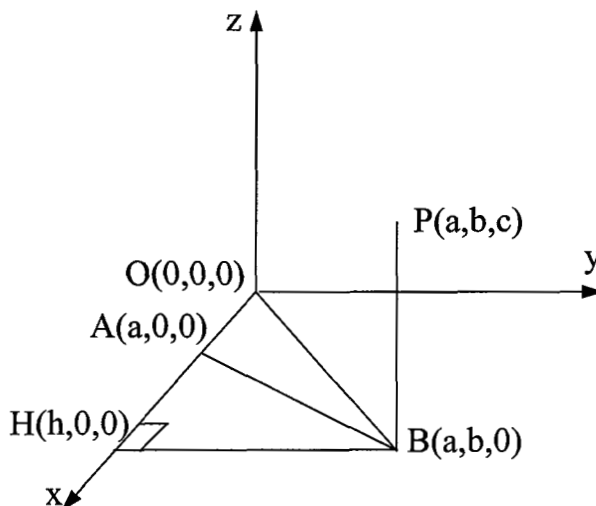


Figure A-3

Dans ce cas :

$$\Omega = \int_{S_{AOB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \int_{S_{HOB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \int_{S_{HAB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

### A.2.3 Triangle quelconque et point d'observation quelconque

Dans le cas où la projection du point d'observation ne se trouve pas sur un sommet, l'intégrale de l'angle solide peut être déterminée par la somme des intégrales de six triangles (maximum).

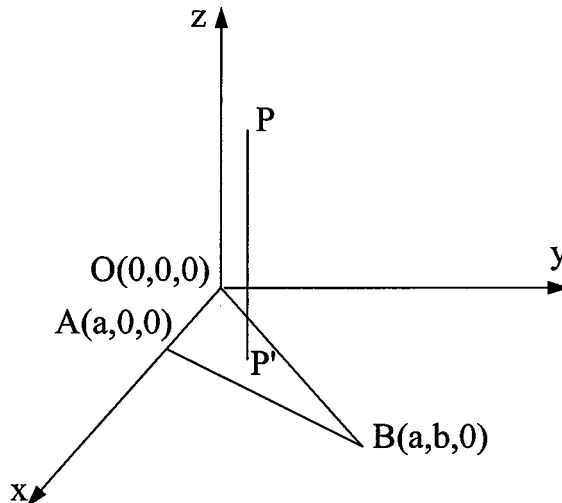


Figure A-4

Soit  $P'$  la projection du point  $P$  dans le plan du triangle (Fig. A-4), l'intégrale de l'angle solide pour le triangle OAB peut être calculée par :

$$\Omega = \int_{S_{AOB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \int_{S_{P'OB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \int_{S_{P'OA}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \int_{S_{P'AB}} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Le calcul de chacune des intégrales sur  $P'AB$ ,  $P'OB$  et  $P'OA$  est obtenu par la somme de deux intégrales. Dans ce cas,  $\Omega$  est calculé par la somme de six intégrales. Selon les cas le nombre des intégrales à calculer est différent.

## Références bibliographiques

- [ 1 ] D. Beatovic, P.L. Levin, S. Sadovic, R. Hutnak : « A Galerkin formulation of the boundary element method for two dimensions and axi-symmetric problems in electrostatics », Proc. de la 7ème conférence ISH, Technische Universität Dresden, 26-30 août 1991, pp. 51-54.
- [ 2 ] J.R. Freeman : « TRIDIF : A Triangular Mesh Diffusion Code », Journal of computational Physics n° 41, pp. 142-153, 1981.
- [ ] J.C. Sabonnadière : « Méthodes de calcul numérique en électrotechnique ; application aux machines électriques », journées d'études S.E.E., 5 nov.1981, Gif-sur-Yvette.
- [ 4 ] G. Rideau : « Calcul des différences finies », Dunod, Paris, 1963.
- [ 5 ] D. Euvrard : « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Différences finies, éléments finis, méthodes de singularités », 2<sup>ème</sup> édition, Masson, 1993.
- [ 6 ] Dhatt, G. Touzout : « Une présentation de la méthode des éléments finis », collection Université de Compiègne, 2<sup>de</sup> édition, Compiègne, 1981.
- [ 7 ] Y. Saito, K. Takahashi, S. Hayano : « Finite element solution of open boundary magnetic field problems », IEEE T-Mag. 23 n° 5, pp. 3569-3571, sept. 1987.
- [ 8 ] J.R. Cardoso : « A maxwell's second equation approach to the finite element method applied to magnetic field determination », Int. J. Elect. Eng. Educ., vol. 24, pp. 259-272, 1987.
- [ 9 ] C.A. Magele, K. Preis, W. Renhart : « Some improvements in nonlinear 3D magnetostatics », IEEE T-Mag. 26 n° 2, pp. 375-378, mars 1990.
- [ 10 ] K. Preis, I. Bardi, O. Biro, C. Magele, W. Renhart, K.R. Richter, G. Vrisk : « Numerical analysis of 3D magnetostatic fields », IEEE T-Mag. 27 n° 5, pp. 3798-3803, sept. 1991.
- [ 11 ] A. Bossavit : « Introduction aux formulations variationnelles en électromagnétisme », note interne EDF/DER, HI-70/6284, service IMA, département MMN.
- [ 12 ] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiss : « A Charge simulation method for the calculation of high voltage fields », IEEE Power Engineering Society Winter Meeting, New York, January 27-February 1, 1974.
- [ 13 ] G. O'Mahony : « Equation des courants superficiels équivalents et tracé de champ », comptes rendus de l' Académie des Sciences, Paris, tome 295, série II, juillet 1982.
- [ 14 ] J.B. Ayasse, G. Caplain, J.P. Lebacque : « Calcul numérique des champs magnétiques par les courants ampériens et les charges magnétiques », Institut de Recherche des Transports (I.R.T. Arcueil). Copies disponibles au Cegely.
- [ 15 ] G. O'Mahony : « Ferromagnétisme et diamagnétisme expliqués par les courants moléculaires ». Copies disponibles au Cegely.
- [ 16 ] L. Krähenbühl : « La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrostatique, et sa formulation axisymétrique », thèse de docteur-ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, n° 83-13, décembre 1983.

- [ 17 ] A. Nicolas : « Application de la méthode des équations intégrales de frontière à la modélisation des phénomènes d'induction », thèse d'état, Ecole Centrale de Lyon, n° 83-26, juin 1983.
- [ 18 ] B. Ancelle : « Emploi de la méthode des équations intégrales de frontière et mise en oeuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques », thèse d'état, Grenoble, décembre 1979.
- [ 19 ] J. Daffe, R.G. Olsen : « An integral equation technique for solving rotationally symmetric electrostatic problems in conducting and dielectric material », IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS 98 n° 5, pp. 1609-1616, sept.-oct. 1979.
- [ 20 ] R.G. Olsen : « Integral equations for electrostatic problems with thin dielectric or conducting layers », IEEE Trans. on Electrical Insulation, vol. EI-21 n° 4, pp. 565-573, août 1986.
- [ 21 ] R. Parraud : « Mesures et calculs comparatifs du champ électrique sur des isolateurs haute tension », Electra n° 141, pp. 68-76, avril 1992.
- [ 22 ] Z. Ren, F. Bouillaut, A. Razek, J.C. Vérité : « Comparison of different boundary integral formulations when coupled with finite elements in three dimensions », Proc. IEE vol.135, part A, n° 8, nov. 1988.
- [ 23 ] M.D.R. Beasley, J.H. Pickles, M. Fanelli, G. Giuseppetti, G. Gallet, M. Morin : « Comparative study of three methods for computing electric fields », Proc. IEE vol. 126, n° 1, janvier 1979.
- [ 24 ] P. P. Silvester, D. Omeragic : « A comparative experimental study of differentiation methods on finite elements », Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials 4, pp. 123-136, Elsevier, 1993.
- [ 25 ] L. Krähenbühl, A. Nicolas, L. Nicolas : « A graphic interactive package for boundary integral equations », IEEE T-Mag. 21 n° 6, pp. 2555-2558, nov. 1985.
- [ 26 ] S. Rathajeevan, H. Hoole : « Computer-aided analysis and design of electromagnetic devices », Elsevier, New-York, 1989.
- [ 27 ] G. Bedrosian *et al.* : « Shape functions and Gaussian integration formulas for 2D and 3D finite element analysis », rapport interne, Engineering System Laboratory, GE Corporate Research and Development, Schenectady, N.Y. 12301.
- [ 28 ] S.Y. Hahn, C. Calmels, G. Meunier, J.L. Coulomb : « A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation », IEEE T-Mag 24 n°1, janvier 1988, pp. 315-317.
- [ 29 ] H. Tsuboi, T. Asahara, F. Kobayashi, T. Misaki : « Adaptive triangular mesh generation for boundary element method in three-dimensional electrostatic problems », Compumag'97, Rio, Brésil, novembre 1997.
- [ 30 ] J. L. Rasolonjanahary : « Recherche de méthodes de résolution des gros systèmes linéaires produits par Phi3d », DEA de Génie Electrique, ECL, INPG, 1988.
- [ 31 ] J. Salonen, A. Koski, F. Cameron, K. Forsman, L. Kettunen : « Solving dense nonsymmetric linear systems arising from integral formulations », IEEE T-Mag 32 n°3, Part I, pp. 1377-1380.
- [ 32 ] Yilong Lu, Zhonggui Xiang : « Wavelet transforms for fast solutions of electromagnetic problems », Compumag Rio, nov. 1997, papier PE3-14 (Actes pp. 501-502).

- [ 33 ] H. L. G. Pina, J. L. M. Fernandez, C. A. Brebbia : « Some numerical integration formulae over triangles and squares with a  $1/R$  singularity », *Appl. Math. Modelling*, Vol. 5, p. 209 et suivantes, juin 1981.
- [ 34 ] H. Igarashi, T. Honma : « Strategies for the accurate computation of potential derivatives in boundary element method : Application to Two-Dimensional Problems », *J. of Computational Physics* n° 119, pp. 244-251, 1995.
- [ 35 ] K. Hayami : « High precision numerical integration methods for 3-D boundary element analysis », *IEEE T-Mag.* 26 n° 2, mars 1990.
- [ 36 ] M. Koizumi, M. Utamura : « A polar coordinate integration scheme with a hierarchical correction procedure to improve numerical accuracy on the boundary element method », *Computational Mechanics* 7, pp. 183-194, Springer Verlag, 1991.
- [ 37 ] H. Kisu, T. Kawahara : « Boundary element analysis system based on a formulation with relative quantity », *Boundary Element X*, vol.1, pp.111-121, Springer Verlag, 1988.
- [ 38 ] T. Higashimachi, N. Okamoto, Y. Ezawa, T. Aizawa, A.Ito : « Interactive structural analysis system using the advanced boundary element method », *Proc. of the 5th Int. Conf. on Boundary Elements*, Hiroshima Japan, pp. 847-856, nov. 1983. Springer Verlag.
- [ 39 ] M. Enokizono, T. Todaka : « Boundary element analysis using revised integration », *Electrical Engineering in Japan*, vol. 106, n° 3, 1986.
- [ 40 ] M. Enokizono, T. Todaka : « Boundary element analysis for the three-dimensional eddy current problem », *IEEE T-Mag.* 26, n° 2, pp. 446-449, mars 1990.
- [ 41 ] N. Ghosh, S. Mukherjee : « A new boundary element method formulation for three dimensional problems in linear elasticity », *Acta Mechanica* 67, pp. 107-119, 1987.
- [ 42 ] N. Ghosh, H. Rajiyah, S. Ghosh, S.Mukherjee : « A new boundary element method formulation for linear elasticity », *ASME Jour. Appl. Mech.*, vol. 53, pp. 69-76, 1986.
- [ 43 ] V. Sladek, J. Sladek : « On a new BEM formulation for 3D problems in linear elasticity », *Engineering Analysis with Boundary Elements* 9, pp. 273-275, 1992, Elsevier Science Publisher Ltd.
- [ 44 ] L. Jun, G. Beer, J.L. Meek : « Efficient evaluation of integrals of order  $1/r$ ,  $1/r^2$ ,  $1/r^3$  using Gauss quadrature », *Eng. Analysis*, vol. 2 n° 3, 1985.
- [ 45 ] L. Jun, G. Beer, J.L. Meek : « The Application of Double Exponential Formulas in Boundary Element Method », *Proc. de la 7<sup>ème</sup> Int. Conf. on Boundary Elements*, Italy, 1985, Springer Verlag.
- [ 46 ] A. Nicolet : « Boundary elements and singular integrals in 3D magnetostatics », *Engineering Analysis with Boundary Elements* 13, pp. 193-200, Elsevier, 1994.
- [ 47 ] J.V. Cox, T.A. Shugar : « A recursive integration technique for boundary element methods in elastostatics », *AMD-Vol.72*, pp. 133-153, The winter meeting of ASME.
- [ 48 ] J.A. De Vasconcelos : « Optimisation de forme des structures électromagnétiques », thèse de doctorat n° 94-32, Ecole Centrale de Lyon, juillet 1994.
- [ 49 ] E. Greifenstein : « Calcul analytique du champ de Biot et Savart d'inducteurs carrés à section carrée », rapport de DEA, ECL - INPG, 1988.



- **Titre**

**Méthodes d'assemblage rapide et de résolution itérative pour un solveur adaptatif en équations intégrales de frontières destiné à l'électromagnétisme.**

- **Résumé**

Dans ce travail nous avons ouvert des voies nouvelles pour la méthode des équations intégrales de frontière appliquée à la résolution des problèmes tridimensionnels de l'électromagnétisme en basse fréquence. Elles permettent de réaliser un maillage adaptatif associé à des résolutions approchées, locales, du système intégral. Dans le premier chapitre nous discutons brièvement les différentes méthodes numériques appliquées à l'électromagnétisme. Le deuxième chapitre est consacré à la méthode des équations intégrale de frontière. Nous y justifions nos choix particuliers (type et ordre des éléments discrétisant les frontières) et décrivons les algorithmes réalisés, par exemple pour la prise en compte des symétries ou périodicités des systèmes étudiés. Dans le troisième chapitre, nos méthodes de calcul des intégrales élémentaires, combinant l'analytique et le numérique, sont décrites et validées. Dans le chapitre quatre, nous présentons un estimateur d'erreur basé sur l'écart entre la valeur interpolée du potentiel et sa valeur calculée par la méthode intégrale elle-même. Pour finir, nous utilisons dans le chapitre cinq cet estimateur d'erreur pour réaliser automatiquement un maillage adapté à chaque problème traité, en autorisant aussi un maillage « non-conforme ». Une méthode de résolution locale permet un gain important en temps de calcul pendant cette phase de maillage adaptatif. Le maillage final est séparé en domaines, ce qui permet d'améliorer le résultat final par itérations entre ces domaines, et sans recourir à une résolution globale, très coûteuse pour des problèmes de grande taille.

- **Mots clés**

modélisation numérique, tridimensionnel, équations intégrales de frontière, estimation d'erreur, maillage adaptatif, résolution itérative, solveur rapide, électromagnétisme, électrostatique.

*Title : Fast assembling and iterative resolution methods for an adaptive BIEM solver for electromagnetics.*

*Abstract : In this work we have opened up new and innovative possibilities for BIEM as applied to the resolution of three-dimensional problems in low frequency electromagnetics. These possibilities enable an adaptive meshing to be established, associated with local, approaching resolutions of the integral system. In the first chapter, we will briefly discuss digital methods applied to electromagnetism. The second chapter is devoted to BIEM, where our specific choices are justified (the type and order of elements rendering the boundaries discreet), with a description of the algorithms used, e.g. for taking account of symmetries or periodicities of the system studied. In the third chapter, our calculation methods for elementary integrals, combining the analytical and the digital, are described and validated. In chapter four, we present an error estimator, based on the deviation between the interpolated potential value and its value as calculated by the integral method itself. To conclude we use this error estimator in chapter five to automatically produce a meshing suited to each problem to be solved, authorizing also a « non-conform » meshing. A local resolution method offers a significant gain in time during this phase of adaptive meshing. The final meshing is separated into fields, thereby improving the final result by iteration between these fields, and without requiring global resolution, which is extremely costly for large size problems.*