



**HAL**  
open science

# Modélisation par la méthode des équations intégrales de frontière de phénomènes de conduction surfacique sur les isolateurs pollués

Jean-Louis Rasolonjanahary

► **To cite this version:**

Jean-Louis Rasolonjanahary. Modélisation par la méthode des équations intégrales de frontière de phénomènes de conduction surfacique sur les isolateurs pollués. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 1992. Français. NNT: . tel-00139487

**HAL Id: tel-00139487**

**<https://theses.hal.science/tel-00139487>**

Submitted on 30 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

présentée devant

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : GENIE ELECTRIQUE

par

Jean-Louis Rafenomanana RASOLONJANAHARY

Ingénieur ECL

MODELISATION PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES  
DE FRONTIERE DE PHENOMENES DE CONDUCTION  
SURFACIQUE SUR LES ISOLATEURS POLLUES

Soutenue le 25 mai 1992 devant la Commission d'Examen

Jury

MM. Ph. Auriol	Professeur, Ecole Centrale de Lyon - <i>Président</i>
C. Hureau	Professeur, Université Paul Sabatier Toulouse - <i>Rapporteur</i>
L. Krähenbühl	Chargé de Recherche CNRS, Ecole Centrale de Lyon
Ph. Mirabel	Professeur, Université Louis Pasteur Strasbourg
A. Nicolas	Professeur, Ecole Centrale de Lyon
J.C. Vérité	Ingénieur-Chercheur, EDF/DER Clamart - <i>Rapporteur</i>
S. Vitet	Ingénieur-Chercheur, EDF/DER Clamart

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon avec le soutien financier d'Electricité de France.

J'adresse mes sincères remerciements aux personnes qui ont fait partie du jury de cette thèse :

- Monsieur Ph. AURIOL, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury et pour son accueil au Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon,

- Monsieur C. HURAU, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse et Monsieur J.C. VERITE, Ingénieur-Chercheur à l'EDF/DER Clamart, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail,

- Monsieur A. NICOLAS, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon et Directeur du Département d'Electrotechnique qui a dirigé ce travail,

- Monsieur L. KRAHENBUHL, Chargé de Recherche CNRS, qui m'a constamment accordé des aides et des conseils tout le long de ce travail,

- Monsieur S. VITET, Ingénieur-Chercheur à l'EDF/DER Clamart, qui a suivi de très près ce travail et qui m'a aidé du début jusqu'à la fin,

- Monsieur Ph. MIRABEL, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie également Monsieur J.F. MAITRE, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon pour ses suggestions.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur A. BEROUAL, ATER et Monsieur F. BURET, Maître de Conférence à l'Ecole Centrale de Lyon, pour leurs aides et leurs suggestions.

Que les chercheurs et les techniciens du Laboratoire qui m'ont aidé soient assurés de mon amicale reconnaissance.

Un remerciement spécial à l'Electricité de France pour son soutien financier.

## ABSTRACT

The dielectric withstand capabilities of insulating materials is related to their surface electric field and potential distributions. These distributions, in the presence of polluting layers, are quite different from these encountered in classical electrostatics. This work is concerned with the application of boundary integral equations method to the calculation of electric fields and potential for cases of polluted insulators subjected to power frequency voltages.

In chapter 1, we shall discuss polluted insulator surface conduction phenomena followed by a presentation of the governing equations for electric fields and potential distributions.

Numerical methods have been developed to resolve such distribution problems. Chapter 2 addresses such methods and reviews the method of Boundary Integral Equations.

Chapter 3 concentrates on the application of the Boundary Integral Equations Method to contaminated insulators. The enabling equations, their numerical resolutions and calculation of the various local and global parameters are treated in this chapter. The result is a numerical surface conduction model called "Module pollution".

In chapter 4, the model is validated and some results of this validation are presented.

We shall finalize by presenting application examples and possible extensions/developments to the numerical model in chapter 5.

## TABLE DES MATIERES

<b>RESUME .....</b>	<b>4</b>
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>5</b>
<b>CHAPITRE I LA CONDUCTION SURFACIQUE - EQUATIONS.....</b>	<b>8</b>
I-1 Introduction .....	8
I-2 La conduction surfacique sur les isolateurs pollués .....	8
I-3 Equations.....	10
I-4 Conditions aux interfaces.....	12
I-4-1 Interfaces conducteur-isolant .....	13
I-4-2 Interfaces isolant-isolant .....	14
I-5 La conduction pure .....	16
I-6 Conclusion.....	17
<b>CHAPITRE II METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DE CHAMP ET DE POTENTIEL POUR LES ISOLATEURS POLLUES .....</b>	<b>18</b>
II-1 Introduction .....	18
II-2 Méthodes des différences finies .....	18
II-3 Méthodes des éléments finis.....	24
II-4 Méthodes de charges équivalentes .....	27
II-5 Méthodes des éléments frontières .....	30
II-6 Commentaires sur ces différentes méthodes .....	33
II-7 Méthode des équations intégrales de frontière .....	33
II-8 Conclusion .....	35
<b>CHAPITRE III MODELISATION DE LA CONDUCTION SURFACIQUE PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE .....</b>	<b>37</b>
III-1 Introduction .....	37
III-2 Application de la méthode des équations intégrales de frontière .....	37

III-3 Choix des variables et conditions aux interfaces "classiques" .....	39
III-4 Condition d'interface polluée .....	40
III-5 Ensemble des équations à résoudre.....	42
III-6 Commentaires.....	42
III-7 Discrétisation numérique.....	43
III-7-1 Découpage en éléments finis.....	43
III-7-2 Discrétisation des équations .....	44
III-8 Calcul des différentes grandeurs .....	46
III-9 Conclusion.....	49
<b>CHAPITRE IV VALIDATION ET EXEMPLES.....</b>	<b>50</b>
IV-1 Introduction .....	50
IV-2 Validation analytique .....	50
IV-2-1 Solution analytique .....	51
IV-2-2 Valeurs du potentiel .....	54
IV-2-3 Module de $\Psi$ .....	58
IV-2-4 Module du champ tangentiel.....	59
IV-2-5 Valeurs des courants.....	63
IV-2-6 Conclusion.....	67
IV-3 Validation expérimentale .....	67
IV-3-1 Appareillage utilisé.....	68
IV-3-2 Etalonnage .....	69
IV-3-3 Mesures préliminaires .....	70
IV-3-4 Validation en potentiel.....	74
IV-3-5 Validation en champ électrique.....	76
IV-3-6 Conclusion.....	76
IV-3-7 Compléments .....	78
IV-3-8 Quelques exemples .....	81
IV-4 Conclusion.....	82
<b>CHAPITRE V APPLICATIONS ET EXTENSIONS.....</b>	<b>84</b>
V-1 Introduction.....	84
V-2 Conception et choix des matériels d'isolation .....	84
V-3 Validation et interprétation d'essais de vieillissement accéléré.....	87
V-4 Application à l'étude des conséquences thermiques .....	88
V-5 Calcul de la tension de contournement .....	90

V-6 Calcul de potentiel sous surtension de manoeuvre.....	92
V-7 Etude des dispositifs anti-effluves .....	95
V-8 Conclusion .....	96
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>97</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>98</b>
<b>ANNEXE 1.....</b>	<b>103</b>
<b>ANNEXE 2.....</b>	<b>105</b>
<b>ANNEXE 3.....</b>	<b>107</b>
<b>ANNEXE 4.....</b>	<b>108</b>

## RESUME

La tenue diélectrique des matériels d'isolation est tributaire des répartitions du champ et du potentiel à leurs surfaces. Ces répartitions en présence de la conduction surfacique sont différentes des répartitions électrostatiques. Ce travail consiste en l'application de la méthode des équations intégrales de frontière (MEIF) pour le calcul des distributions du champ et du potentiel électriques dans le cas des isolateurs pollués soumis à une tension alternative à fréquence industrielle.

Dans le chapitre 1, nous parlerons de phénomènes de conduction surfacique sur les isolateurs pollués avant de voir les équations et les conditions qui gouvernent les distributions du champ et du potentiel électriques.

Pour calculer ces répartitions, des méthodes numériques ont été développées. Le chapitre 2 porte sur les principales méthodes numériques utilisées jusqu'à nos jours suivies d'un rappel de la méthode des équations intégrales de frontière.

Le chapitre 3 est consacré à l'application de la MEIF aux isolateurs pollués. On y reporte l'ensemble des équations à résoudre, leurs traitements numériques ainsi que le calcul des différentes grandeurs locales et globales. On aboutit ainsi à un modèle numérique de la conduction surfacique appelé "module pollution".

Le chapitre 4 porte sur la validation du modèle avec la présentation de quelques résultats. Nous terminerons par la présentation d'exemples d'application et l'évocation de possibles extensions du modèle numérique : ceci fait l'objet du chapitre 5.

## INTRODUCTION

Les isolateurs des lignes et de postes du réseau de transport d'énergie électrique sont le siège de dépôts de pollution. Le type de pollution est très variable et dépend en grande partie de la localisation géographique de l'isolateur : des poussières et des particules solides (conductrices ou non) pour les régions industrielles, le pollen et les poussières d'engrais pour les régions agricoles. Pour les régions urbaines ce sont les appareils de chauffage des habitations et les véhicules automobiles qui engendrent la pollution et pour les régions côtières ce sont principalement les embruns marins qui couvrent les isolateurs. Aucune région n'est donc exempte de pollution [1]. Lorsqu'il y a humidification de la pollution par la pluie, le brouillard ou la rosée, il y a formation d'un film électriquement conducteur, qui permet la circulation d'un courant de fuite. Des assèchements locaux de la couche de pollution apparaissent suite à ce passage de courant. Lorsqu'une zone sèche apparaît, la tension initialement appliquée aux bornes de l'isolateur se trouve donc reportée aux extrémités de celle-ci. La répartition de potentiel à la surface de l'isolateur est fortement modifiée et des arcs locaux sont susceptibles de s'amorcer. Ces arcs peuvent s'allonger jusqu'au contournement de l'isolateur, ce qui entraîne un court-circuit et une interruption du transport d'énergie électrique. En outre, les amorçages d'arcs peuvent engendrer des dégradations de l'isolateur. En face des difficultés causées par la pollution, plusieurs méthodes de lutte sont utilisées : le lavage ou le graissage des isolateurs, par exemple. Cependant ces opérations sont coûteuses. Par conséquent, la meilleure solution consiste à déterminer un isolement qui permet d'éviter les contournements, en particulier par le choix d'isolateur ayant une bonne tenue sous pollution.

Dans ce cadre, divers modèles mathématiques de contournement ont été développés [2-5]. La plupart de ces modèles sont basés sur le modèle simple d'Obenaüs qui consiste à mettre en série avec un arc de longueur  $x$  une résistance qui simule la couche de pollution. Cependant, le traitement mathématique de ces différents modèles nécessite l'utilisation d'hypothèses simplificatrices : géométrie unidimensionnelle, résistivité uniforme, par exemple. Aussi ne permettent-ils simplement que de dégager les grandes lignes du comportement des isolateurs sous pollution. Lorsqu'il s'agit d'évaluer les performances de différents isolateurs, il est indispensable de réaliser des essais.

Les premiers essais dits sous pollution naturelle consistent à installer divers isolateurs dans différents sites de pollution et d'observer leur comportement. On peut par exemple, comparer les temps au bout desquels les isolateurs sont contournés, mesurer les courants circulant à la surface des isolateurs, ... La durée que nécessitent ces essais constitue toutefois le principal inconvénient. On s'est donc orienté parallèlement vers des essais sous pollution artificielle. Ces essais peuvent être classés en trois catégories principales [6] : la méthode du brouillard propre ou de la couche solide, la méthode du brouillard salin et la méthode de la pollution liquide. Ces différentes méthodes sont fondées sur la simulation de la couche de pollution naturelle par des solutions déposées sur l'isolateur et dont la conductivité électrique est réglée par la quantité de sel (NaCl) contenue. Suivant la méthode employée, le degré de pollution est caractérisé par la densité équivalente de sel déposé en  $\text{mg}/\text{cm}^2$  ou par la salinité du brouillard en  $\text{g}/\text{l}$  ou encore par la conductivité de la couche en  $\mu\text{S}$ . Ces essais en laboratoire consistent à trouver une relation entre le degré de pollution et la tension de contournement. Comme les essais sur site, les essais en laboratoire posent de problèmes pratiques : reproductibilité, durée et coût des essais, etc.

La simulation numérique, largement utilisée dans d'autres domaines des sciences de l'ingénieur en général et de l'électrotechnique en particulier, offre une alternative intéressante aux essais, ou tout au moins un moyen complémentaire d'investigation, intéressant par sa souplesse et sa rapidité.

La simulation numérique nécessite l'utilisation d'un code de calcul. Le Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon développe depuis un certain nombre d'années un code de calcul de champ électromagnétique tridimensionnel basé sur les équations intégrales de frontière : PHI3D. Ce code est composé de plusieurs modules qui traitent la magnétostatique linéaire, la magnétodynamique à très faible épaisseur de peau, la conduction électrique volumique et l'électrostatique. La réalisation de ces différents modules nécessite la modélisation des phénomènes physiques. L'objet de notre travail consiste à modéliser la conduction surfacique sur les isolateurs pollués et à établir un module "pollution" qui permet d'étudier le comportement d'isolateurs sous pollution.

## CHAPITRE I

### LA CONDUCTION SURFACIQUE - EQUATIONS

#### I-1 Introduction

Parmi les nombreuses causes pouvant conduire à un déclenchement des ouvrages électriques (et ainsi parfois à une interruption de la distribution d'énergie électrique) le phénomène de pollution apparait comme très important [7]. Ce phénomène a pour origine le dépôt de pollution à la surface des isolateurs, suivi d'une humidification. Le dépôt humidifié favorise la circulation d'un courant de fuite à la surface des isolateurs. L'échauffement ainsi créé peut entraîner l'évaporation de l'eau contenue dans le dépôt de pollution. La répartition du potentiel est donc fortement modifiée et des amorçages d'arcs peuvent apparaître. Dans un premier temps, nous regarderons le phénomène de conduction surfacique, ensuite nous présenterons les équations et les conditions qui gouvernent la répartition de potentiel pour un isolateur pollué.

#### I-2 La conduction surfacique sur les isolateurs pollués

Lorsqu'un isolateur est propre ou recouvert d'une couche de pollution sèche, un très faible courant de fuite capacitif circule. Ceci est dû aux très faibles valeurs des conductivités volumiques de l'air, de l'isolant solide et de la couche de pollution. On obtient ainsi une répartition électrostatique du potentiel électrique.

Lorsque la couche est humidifiée, elle devient le siège d'un courant de conduction de valeur relativement importante et la répartition du potentiel électrique diffère de la répartition électrostatique. Cette circulation de courant à travers la couche de pollution est appelée conduction surfacique.

Le phénomène de conduction surfacique est dû à la conductibilité superficielle. Celle-ci est attribuée à la présence d'une couche mince d'eau ayant été rendue plus ou moins conductrice par la dissolution de substances provenant de la couche de pollution.

En absence de pollution, la dissolution de substance provenant de l'isolant lui-même peut engendrer cette conductibilité superficielle [8]. Ce phénomène reste toutefois marginal.

La conductibilité superficielle est mesurée par l'inverse de la résistance  $\rho_s$  qu'offre un carré "plan" pris à la surface de l'isolant lorsque la longueur du trajet de courant est égale à la largeur d'écoulement. Cette résistance  $\rho_s$  est communément appelée résistivité superficielle ou résistivité surfacique et son inverse, notée  $\sigma_s$ , conductivité surfacique. C'est cette dernière grandeur que nous allons utiliser dans la suite pour caractériser la couche de pollution à la surface d'un isolateur.

Plusieurs facteurs influent sur la conductivité surfacique, en particulier l'humidité et la température. L'échauffement de la couche dû à la circulation d'un courant de fuite modifie la conductivité de deux façons : l'accroissement de la température entraîne une augmentation de sa valeur (cas des électrolytes [9]) et l'évaporation de l'eau entraîne sa diminution [10]. Cette modification va influencer à son tour sur le courant, et ainsi de suite. Finalement des zones sèches de très faible conductivité surfacique apparaissent. En dehors de la présence de pollution, des couches semi-conductrices peuvent être appliquées volontairement à la surface pour avoir certains effets (réduction de la valeur du champ électrique, échauffement,...) : on retrouve là aussi le phénomène de conduction surfacique.

### I-3 Equations

La tenue diélectrique des matériels d'isolation est tributaire des répartitions du champ et du potentiel à leurs surfaces. Ces répartitions en présence de la conduction surfacique sont différentes des répartitions électrostatiques. Nous allons considérer les équations et les conditions qui gouvernent ces répartitions en prenant en compte la couche de pollution. Nous prenons comme hypothèses :

- les isolants qui entrent en jeu ici (air, porcelaine,...) possèdent une permittivité de valeur constante, une résistivité volumique nulle et une densité volumique de charge libre nulle,

- les couches de pollution, lorsqu'elles existent, sont d'épaisseur très faible devant les dimensions de l'isolateur,

- la tension appliquée aux bornes de l'isolateur est alternative sinusoïdale à fréquence industrielle.

Les équations qui gouvernent la répartition du potentiel, dans un milieu donné, dérivent des équations de Maxwell. Celles-ci sont formées par quatre équations aux dérivées partielles qui lient les phénomènes magnétiques caractérisés par le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  aux phénomènes électriques caractérisés par le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le déplacement électrique  $\mathbf{D}$ . Ces quatre équations sont

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \rho : \text{densité volumique de charge} \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \mathbf{J} : \text{densité de courant} \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

Outre ces quatre équations, nous avons les relations constitutives qui lient  $\mathbf{D}$  à  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  à  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \epsilon : \text{permittivité absolue du milieu} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mu : \text{perméabilité absolue} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ [A/m}^2\text{]} \quad \sigma : \text{conductivité volumique} \quad (1.7)$$

Dans le cas des couches minces où l'on utilise la conductivité surfacique  $\sigma_s$ , l'équation (1.7) se transforme en une relation qui lie la densité de courant de surface  $\mathbf{J}_s$  au champ tangentiel  $\mathbf{E}_t$  :

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s \mathbf{E}_t \text{ [A/m]} \quad (1.8)$$

Lorsque l'on applique une différence de potentiel alternative, la dérivation des grandeurs électriques par rapport au temps revient à les multiplier par la quantité  $j\omega$  où  $j$  est l'unité imaginaire et  $\omega$  la pulsation de la source. En tenant compte des relations constitutives, les équations (1.1) à (1.3) deviennent :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (1.9)$$

$$\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \rho \quad (1.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (1.11)$$

Comme le champ magnétique est faible, dans les équipements haute tension qui nous intéressent, nous pouvons négliger le second membre de l'équation (1.9), ce qui nous donne :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (1.12)$$

Nous pouvons donc découpler les équations (1.10) et (1.12), qui gouvernent les grandeurs électriques de celles qui gèrent les grandeurs magnétiques. Si nous avons à calculer le champ magnétique ultérieurement nous utiliserons l'équation (1.11) après résolution de ces deux équations. Pour la suite, nous nous intéresserons davantage aux phénomènes électriques.

L'équation (1.10) n'est autre que la forme locale du théorème de Gauss qui traduit la conservation de charge. L'équation (1.12) nous permet de dire que le champ  $\mathbf{E}$  dérive d'un potentiel  $V$

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V \quad (1.13)$$

Pour une couche mince présente à la surface de l'isolateur, le champ tangentiel  $E_t$  est donné par :

$$E_t = - \text{grad}_s V \quad (1.13')$$

où  $\text{grad}_s$  représente l'opérateur gradient surfacique. Dans la suite, les opérateurs surfaciques sont caractérisés par l'indice  $s$ .

L'introduction de la relation (1.13) dans l'équation (1.10) nous donne

$$\text{div}(-\varepsilon \text{grad} V) = \rho \quad (1.14)$$

Nous obtenons l'équation qui gouverne la répartition du potentiel dans un milieu de permittivité absolue  $\varepsilon$  avec une densité volumique de charge  $\rho$ .

Avec les hypothèses que nous utilisons, nous obtenons l'équation de Laplace (1.15) qui gouverne la répartition du potentiel dans les matériaux isolants utilisés, à savoir la porcelaine, le verre et l'air.

$$\Delta V = 0 \quad (1.15)$$

Notons que cette équation gouverne aussi la répartition du potentiel dans les matériaux conducteurs tels que les électrodes car ceux-ci sont des volumes équipotentiels.

#### **I-4 Conditions aux interfaces**

Nous avons à résoudre l'équation (1.15) dans deux régions de propriétés physiques différentes (isolant solide, air) et présentant une ou plusieurs interfaces communes. En plus des interfaces isolant-isolant, nous avons aussi des interfaces conducteur-isolant. Nous allons donc voir les différentes conditions d'interface nécessaires pour avoir un problème bien défini.

#### I-4-1 Interfaces conducteur-isolant

Pour un point situé sur ces interfaces, nous avons la valeur du potentiel  $V_1$  pris du côté de l'isolant qui doit être égale à la valeur  $V_2$  du potentiel du côté conducteur :

- dans le cas des électrodes sous tension ou liées à la masse,  $V_2$  est connu,
- dans le cas des conducteurs à potentiel flottant  $V_2$  fait parti des inconnues du problème.

Nous allons établir l'équation qui prend en compte cette équipotentielle dans le cadre de nos hypothèses. Pour cela, nous partons de l'équation (1.3). En prenant la divergence de cette équation nous obtenons :

$$\operatorname{div}(\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) = 0 \quad (1.16)$$

puisque la divergence d'un rotationnel est nulle. Cette équation n'est autre qu'une traduction de loi de conservation du courant. Nous intégrons sur le volume  $\mathcal{V}_e$  occupé par l'équipotentielle :

$$\int_{\mathcal{V}_e} (\operatorname{div}(\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D})) d\mathcal{V} = 0 \quad (1.17)$$

En utilisant le théorème de la divergence, nous obtenons :

$$\int_{\delta_e} (\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) d\delta = 0 \quad (1.18)$$

où  $\delta_e$  est la surface de l'équipotentielle. Le premier terme de cette intégrale est la somme algébrique de courant de conduction qui entre ou sort de l'équipotentielle. Lorsque l'équipotentielle et la couche de pollution ont une frontière commune  $\Gamma_e$  (courbe), celui-ci devient :

$$\int_{\delta_e} (\mathbf{J}) d\delta = - \int_{\Gamma_e} \sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma$$

où  $\nu$  désigne la normale extérieure à  $\delta_e$ . Ce qui nous donne pour l'équation (1.18) :

$$-\int_{\Gamma_e} \sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega \int_{\delta_e} (\mathbf{D}_n) d\delta = 0 \quad (1.18')$$

Lorsque l'équipotentielle n'a aucun contact avec la couche de pollution, l'équation (1.18') se réduit à :

$$\int_{\delta_e} (\mathbf{D}_n) d\delta = 0 \quad (1.18'')$$

#### I-4-2 Interfaces isolant-isolant

Pour un point appartenant à ces interfaces, nous avons deux conditions. La première est que la valeur  $V_1$  du potentiel vu du côté de l'air est égale à la valeur  $V_2$  du potentiel vu du côté isolant solide. Pour avoir la seconde condition, nous utiliserons le fait que nous sommes en présence de conduction surfacique. Le cas de l'interface sans pollution se traite alors en prenant une conductivité surfacique nulle.

Nous intégrons l'équation (1.16) sur un petit cylindre de surface  $\Delta S$  et de hauteur  $h$  contenant un partie de l'interface (fig. 1.1).

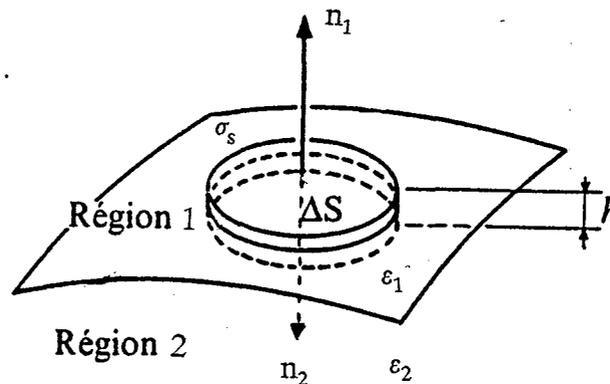


Fig. 1.1 Domaine d'intégration.

Ceci nous donne après utilisation du théorème de la divergence :

$$\int_S (\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}) \, dS = 0 \quad (1.19)$$

où  $S$  représente la surface totale du petit cylindre.

En supposant que  $h$  est négligeable devant le rayon de  $\Delta S$  et  $\Delta S$  suffisamment petit pour qu'on puisse y considérer  $\mathbf{D}$  comme constant, l'intégrale du deuxième terme de l'équation (1.19) donne :

$$j\omega(\mathbf{D}_{n1} + \mathbf{D}_{n2})\Delta S$$

où  $\mathbf{D}_{n1}$  et  $\mathbf{D}_{n2}$  sont les composantes normales du déplacement électrique  $\mathbf{D}$  de part et d'autre de l'interface.

Pour l'intégrale du premier terme, nous avons :

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{J}) \, dV = \int_{\Delta S} \operatorname{div}(\mathbf{J}) \, h dS$$

Comme l'épaisseur  $h$  est très petite, on peut supposer que la densité de courant  $\mathbf{J}$  est uniforme sur  $h$  et on peut introduire la densité de courant surfacique  $\mathbf{J}_s (= \mathbf{J} * h)$  qui n'a qu'une seule composante qui est tangentielle et qu'on peut considérer comme constante sur  $\Delta S$ , nous avons :

$$\int_{\Delta S} \operatorname{div}(\mathbf{J}) \, h dS = \operatorname{div}_s(\mathbf{J}_s)\Delta S$$

En définitive, nous obtenons après simplification par  $\Delta S$  pour un point de l'interface isolant solide-air

$$\operatorname{div}_s(\mathbf{J}_s) + j\omega(\mathbf{D}_{n1} + \mathbf{D}_{n2}) = 0 \quad (1.20)$$

L'utilisation des relations constitutives nous permet de remplacer

$$\mathbf{J}_s \text{ par } -\sigma_s \operatorname{grad}_s V,$$

$$\mathbf{D}_{n1} \text{ par } \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n1}},$$

$$\mathbf{D}_{n2} \text{ par } \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n2}},$$

où  $\sigma_s$  est la conductivité surfacique de la couche de pollution,  $\varepsilon_0$  la permittivité absolue du vide,  $\varepsilon_{r1}$  la permittivité relative de l'air et  $\varepsilon_{r2}$  la permittivité relative de l'isolant. Ainsi l'équation (1.20) devient

$$\text{div}_s(-\sigma_s \mathbf{grad}_s V) + j\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_{r1} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n1}} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n2}}) = 0 \quad (1.21)$$

Cette équation lie les deux valeurs de la dérivée normale de V en un point de l'interface à ses variations tangentielles. Lorsque l'interface est sans pollution, nous obtenons la condition classique de la continuité de la composante normale du déplacement électrique :

$$\varepsilon_{r1} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n1}} + \varepsilon_{r2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n2}} = 0 \quad (1.22)$$

Nous retrouvons les équations et les conditions d'interfaces qui gouvernent l'électrostatique, avec une forme particulière de la condition d'interface au niveau de la couche polluée.

### I-5 La conduction pure

Lorsque la pollution est continue d'une électrode à l'autre avec une conductivité surfacique assez forte pour qu'on puisse négliger les courants de déplacement, la répartition du potentiel peut être déduite de l'équation (1.20) dans laquelle on néglige le second terme. Nous obtenons alors :

$$\text{div}_s(-\sigma_s \mathbf{grad}_s V) = 0 \quad (1.23)$$

La recherche de la répartition du potentiel se ramène alors à la résolution d'un problème bidimensionnel sur une géométrie 3D.

## **I-6 Conclusion**

L'utilisation de la conductivité surfacique pour caractériser la couche de pollution présente un double intérêt : elle permet de ramener la résolution d'équation dans un volume de faible épaisseur à une résolution sur une surface. D'autre part, la conductivité surfacique est utilisée pour spécifier le degré de pollution dans une des méthodes d'essai sous pollution artificielle.

En présence de pollution, la répartition du potentiel pour un isolateur soumis à une tension alternative à fréquence industrielle est différente de la répartition électrostatique. L'ensemble des équations à résoudre devient des équations avec des inconnues complexes. En absence de pollution, la répartition sous tension alternative à fréquence industrielle n'est autre que répartition électrostatique classique.

## CHAPITRE II

### METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DE CHAMP

### ET DE POTENTIEL POUR LES ISOLATEURS POLLUES

#### II-1 Introduction

La présence d'une couche de faible épaisseur, isolante ou conductrice, à la surface d'un isolateur peut avoir une influence significative sur la distribution du potentiel de celui-ci [11]. Pour quantifier cette influence, des méthodes de calcul ont été développées. Ces méthodes peuvent être classées en deux groupes : les méthodes numériques et les méthodes analogiques. Ces dernières ne sont plus utilisées de nos jours car elles sont peu commodes et inadéquates pour les problèmes à trois dimensions vraies [12]. Les méthodes numériques sont essentiellement de type différences finies, éléments finis, charges équivalentes et éléments frontières. Nous exposerons l'utilisation de ces différentes méthodes pour prendre en compte la présence d'une couche et nous terminerons ce chapitre par la présentation de la méthode des équations intégrales de frontière.

#### II-2 Méthodes des différences finies

L'utilisation des méthodes des différences finies nécessite le maillage du domaine étudié, formé ici par l'air et l'isolant solide. Souvent, un maillage rectangulaire est utilisé et on prend comme inconnue les valeurs du potentiel aux

différents noeuds du maillage. Un exemple d'élément de maillage est présenté sur la figure 2.1. L'isolant solide étant de volume fini, le maillage de celui-ci ne crée pas de difficulté. Pour l'air environnant, un problème se pose, du fait que celui-ci est généralement non borné. On délimite alors le domaine étudié par une frontière sur laquelle on impose généralement une condition de type Cauchy ( $a \frac{\partial V}{\partial n} + bV = c$ , où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes ou des fonctions des coordonnées); la méthode des différences finies ne peut pas prendre en compte un domaine qui s'étend à l'infini.

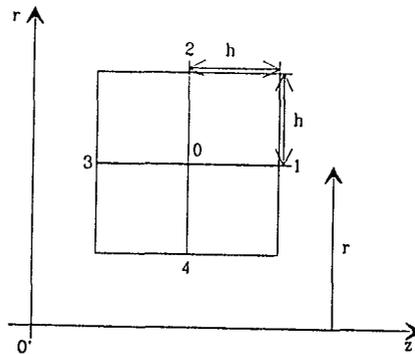


Fig. 2.1. Élément de maillage rectangulaire.

Avant de présenter les différentes variantes de cette méthode, nous allons d'abord introduire les développements en série et le théorème de Gauss sous forme intégrale. Le développement en série est utilisé pour approximer les équations aux dérivées partielles en général tandis que le théorème de Gauss est surtout utilisé en électrostatique.

Au voisinage d'un point  $O$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , une fonction régulière  $V$  ainsi que ses dérivées, peut être développée en série du type [13] :

$$V(x,y,z) = V(x_0,y_0,z_0) + \sum_{1+m+n=1}^N a_{lmn} (x-x_0)^l (y-y_0)^m (z-z_0)^n \quad (2.1)$$

où  $N$  est l'ordre du développement limité et  $a_{lmn}$  les dérivées partielles de  $V$  au point  $O$ .

La forme intégrale du théorème de Gauss indique que le flux du déplacement électrique  $\mathbf{D}$  à travers une frontière fermée est égale à la somme algébrique des charges contenues à l'intérieur. L'utilisation de ce théorème avec le contour en pointillé de la figure 2.1 donne une équation linéaire qui lie la valeur du potentiel au noeud  $O$  à celles des noeuds voisins (1,2,3,4). Cette équation dépend du type de formulation choisie (axisymétrique, plan,...). La valeur du champ électrique est approximée par le rapport de la différence de potentiel entre deux noeuds à leur distance (développement limité d'ordre 1); c'est à dire pour la frontière AB, on a

$$E_n = \frac{V_1 - V_0}{h} \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une formulation axisymétrique cette équation s'écrit

$$rV_1 + \left(r + \frac{h}{2}\right)V_2 + rV_3 + \left(r - \frac{h}{2}\right)V_4 = 4rV_0 \quad (2.3)$$

Seeger [14], qui travaille en axisymétrique utilise cette équation. Lorsque le contour de l'isolateur coupe un élément du maillage suivant un contour différent des cotés du maillage (fig. 2.2), l'équation utilisée tient compte de la valeur du potentiel aux points d'intersection. Cette équation est :

$$\frac{2r}{a(a+h)} V_A + \frac{2r+h}{b(b+h)} V_B + \frac{2r}{h(a+h)} V_3 + \frac{2r-b}{h(a+h)} V_4 = \left[ \frac{2r}{ah} + \frac{2r+h-b}{bh} \right] V_0 \quad (2.4)$$

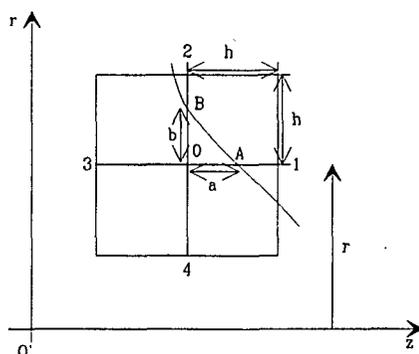


Fig. 2.2. Maillage coupé par un contour.

Lorsque le contour est pollué (fig. 2.3), le calcul de la valeur de potentiel au point A se fait de la manière suivante : on calcule la chute de potentiel entre un point  $P_0$  de l'électrode de potentiel connu et le point A. Le calcul de cette chute de potentiel se fait en intégrant le champ tangentiel entre A et le point  $P_0$ . On exprime le champ tangentiel  $E_t$  en un point de la couche en fonction du courant total I, de la conductivité surfacique  $\sigma_s$  et de la distance r de ce point à l'axe de l'isolateur. Ce champ tangentiel est donné par

$$E_t = \frac{I}{2\pi r \sigma_s} \quad (2.5)$$

Le potentiel du point A s'obtient donc à partir de la relation :

$$V(A) = V(P_0) - \frac{I}{2\pi\sigma_s} \int_{P_0}^A \frac{dl}{r} \quad (2.6)$$

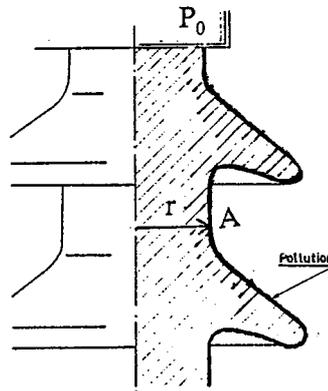


Fig. 2.3. Contour pollué.

On introduit ensuite cette valeur de  $V(A)$  ( $= V_A$ ) dans l'équation (2.4). Le calcul du courant I exige que la couche de pollution soit continue d'une électrode à l'autre. L'assemblage des différentes équations obtenues pour les différents noeuds du maillage permet d'avoir un système d'équations linéaires qui, après résolution, fournit les valeurs nodales de potentiel.

Asenjo et Morales utilisent un élément de maillage rectangulaire [15]. Celui-ci est divisé en huit triangles possédant un sommet commun O (fig. 2.4). A l'interface de

deux triangles ils mettent une couche d'épaisseur  $\delta_i$ . La forme du maillage est ajustée afin d'épouser le contour de l'isolateur. Les triangle et les couches sont caractérisés par leurs permittivités  $\epsilon_i$  et leurs conductivités volumiques  $\sigma_i$ . Ils calculent ensuite le flux du vecteur  $(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)E$  (second membre de l'équation (1.11)) à travers le contour en pointillé entourant le point O. Ceci donne une équation qui lie la valeur  $V_0$  du potentiel au point O à celles des huit noeuds voisins qui l'entourent.

$$V_0 = \frac{\sum_{i=1}^{i=8} c_i V_i}{\sum_{i=1}^{i=8} c_i} \quad (2.7)$$

les coefficients  $c_i$  sont fonctions de la coordonnée radiale du point O, des différentes permittivités et de conductivités, ainsi que des caractéristiques géométriques du maillage [15]. Habituellement, le nombre de couche de pollution se réduit à deux.

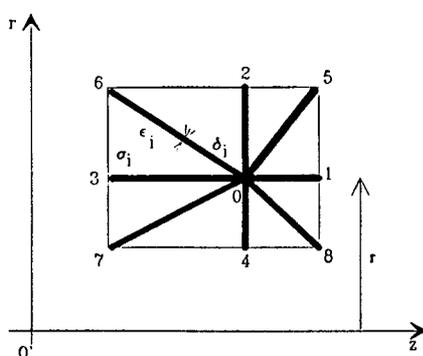


Fig. 2.4. Eléments du maillage.

Molinari et co résolvent des équations semblables aux équations (1.15) et (1.21) [16]. Ils utilisent une généralisation de la méthode des différences finies sur des maillages non rectangulaires. L'idée développée consiste à écrire les valeurs du potentiel ( $V_1, V_2, \dots, V_M$ ) en M noeuds voisins du noeud O à l'aide d'un développement limité d'ordre N (N étant choisi supérieur ou égal à 2 et M est égale à

$N(N+3)/2$ ). On obtient ainsi un système linéaire qui donne les valeurs du potentiel aux  $M$  noeuds voisins de  $O$  en fonction de la valeur  $V_0$  du potentiel en  $O$  et des différentes dérivées partielles calculées en ce point. L'inversion du système linéaire ainsi obtenu permet d'avoir les différentes dérivées partielles (termes  $a_{lmn}$  de (2.1)) en fonction de  $(V_1-V_0)$ ,  $(V_2-V_0)$ , ...,  $(V_M-V_0)$ . En remplaçant les dérivées partielles intervenant dans l'équation de Laplace (ou de Poisson) par leur expression en fonction des valeurs de potentiel, on obtient une équation linéaire qui ne fait intervenir que  $V_0, V_1, V_2, \dots, V_M$ .

Tout ce qui vient d'être dit est valable pour un noeud intérieur à une région donnée. Pour un noeud  $O$  appartenant à un bord (limite du domaine d'étude), on utilise  $M-1$  noeuds voisins de  $O$ . Lorsque la condition est de type Cauchy, on calcule la valeur de  $\frac{\partial V}{\partial n}$  à l'aide de (2.1). On obtient comme précédemment un système linéaire dont l'inversion permet d'avoir les différentes dérivées partielles en  $O$  en fonction de  $(V_1-V_0)$ ,  $(V_2-V_0), \dots, (V_{M-1}-V_0)$  et  $\frac{\partial V}{\partial n}$ . On substitue les dérivées partielles intervenant dans l'équation de Laplace par leur expression, on obtient ainsi une équation linéaire qui ne fait intervenir que  $V_0, V_1, \dots, V_{M-1}$  et  $\frac{\partial V}{\partial n}$ . En utilisant la condition de bord, on obtient une équation linéaire qui lie  $V_0, V_1, \dots, V_{M-1}$ .

Lorsque le noeud  $O$  appartient à l'interface polluée de deux régions, on utilise un développement dans chaque région. On obtient deux systèmes linéaires qu'on complète par les expressions donnant les dérivées tangentielles en fonction des dérivées partielles en  $O$ , les dérivées tangentielles étant calculées à l'aide de l'équation (2.1). L'inversion de ces systèmes linéaires fournit les différentes dérivées partielles en  $O$  en fonction des valeurs du potentiel et des dérivées tangentielles. La substitution des dérivées partielles, intervenant dans l'équation de Laplace, par leur expression conduit à deux équations (une par région) liant les valeurs du potentiel en  $O$  à celles des noeuds voisins et des dérivées tangentielles. L'utilisation de la

condition d'interface (équation qui lie les deux dérivées normales dans chaque région aux dérivées tangentielles) donne une troisième équation. On calcule les deux dérivées normales en utilisant le développement (2.1) et on remplace les dérivées partielles par leurs expressions. En éliminant les dérivées tangentielles entre les trois équations, on obtient une relation entre les valeurs du potentiel en O et celles des noeuds voisins dans les deux régions.

L'arrangement des différentes équations ainsi obtenues donne un système linéaire ayant pour inconnues les valeurs nodales du potentiel.

### II-3 Méthodes des éléments finis

Comme dans le cas des différences finies, l'utilisation des éléments finis nécessite d'une part, la subdivision du domaine étudié en de petits éléments, et d'autre part, la limitation de celui-ci par une frontière où l'on suppose connue la valeur du potentiel. La résolution de l'équation de Laplace revient à minimiser une fonctionnelle, correspondant à l'énergie électrostatique emmagasinée dans l'espace, par rapport aux valeurs du potentiel aux noeuds des éléments du maillage. Pour prendre en compte la pollution, on ajoute à la fonctionnelle un terme de dissipation relative à la couche polluée. Kato et co [17] utilisent la conductivité surfacique, la fonctionnelle à minimiser s'écrit alors :

$$F = \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma}{2} (\mathbf{grad} V)^2 d\mathcal{V} + j\omega \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon}{2} (\mathbf{grad} V)^2 d\mathcal{V} + \int_{\delta} \frac{\sigma_s}{2} (\mathbf{grad}_s V)^2 d\delta \quad (2.8)$$

Le premier terme est relatif à la conduction volumique de l'isolant de volume  $\mathcal{V}$ . Le dernier terme concerne la surface polluée  $\delta$  de conductivité surfacique  $\sigma_s$ . Si on ne tient pas compte de la conductivité volumique, cette équation devient

$$F = j\omega \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon}{2} (\mathbf{grad} V)^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_s}{2} (\mathbf{grad}_s V)^2 d\mathcal{S} \quad (2.8')$$

Pour Brauer et co [18] qui travaillent avec la conductivité volumique pour caractériser la pollution, la fonctionnelle est :

$$F = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d\mathcal{V} + \frac{1}{j\omega} \int_{\mathcal{V}_p} (\sigma E^2) d\mathcal{V}_p - \int_{\mathcal{V}} (V\rho/2) d\mathcal{V} \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{V}_p$  désigne le volume occupé par la pollution. Le dernier terme correspond à la présence d'une densité volumique de charge libre  $\rho$ . Si on ne prend pas en compte le dernier terme, la fonctionnelle peut s'écrire :

$$F = j\omega \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon}{2} (\mathbf{grad} V)^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}_p} \frac{\sigma}{2} (\mathbf{grad} V)^2 d\mathcal{V}_p \quad (2.9')$$

Pour terminer sur l'utilisation des méthodes des éléments finis, nous présentons la méthode utilisée par Andersen [19]. C'est une méthode hybride utilisant à la fois les éléments finis et les réseaux de capacités et de résistances. Ce dernier part des deux constatations suivantes :

- la minimisation de l'énergie électrostatique conduit à une relation linéaire entre la valeur du potentiel d'un noeud donné et celles des autres noeuds qui l'entourent :

$$V_0 = \sum_{n=1}^6 k_n V_n \quad (2.10)$$

- si on remplace l'élément de maillage triangulaire (fig. 2.5) par un réseau de capacités (fig. 2.6) et si on utilise la loi de Kirchhoff (la somme algébrique des intensités des courants qui passent par un noeud est nulle), on obtient une autre relation linéaire liant la valeur du potentiel au noeud O et celles de ces voisins immédiats :

$$j\omega \sum_{n=1}^6 (V_n - V_0) C_n = 0 \quad (2.11)$$

où  $C_n$  est la capacité qui lie le noeud O au noeud n. Ce qui donne par identification :

$$C_n = k_n \sum_{i=1}^6 C_i \quad (2.12)$$

Pour trouver la somme des capacités, on met un potentiel fictif de 1 V au noeud O et 0 V aux noeuds voisins. En calculant l'énergie emmagasinée dans les six triangles (d'épaisseur unité pour les géométries planes et sur un angle de 1 radian pour les géométries axisymétriques) et en l'égalisant avec la somme d'énergie emmagasinée dans les six capacités, on obtient la somme des six capacités. L'utilisation de l'équation (2.12) donne la valeur de chaque capacité.

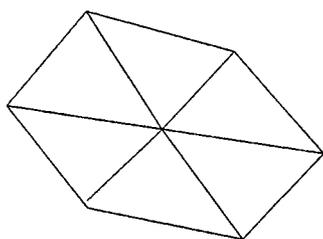


Fig. 2.5. Maillage utilisé.

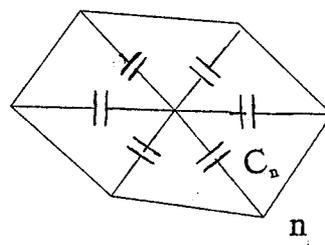


Fig. 2.6. Réseau de capacités.

Lorsqu'il y a présence de pollution, on calcule la résistance  $R_n$  entre deux noeuds liés par la couche de pollution et on la met en parallèle avec la capacité  $C_n$  précédente. En utilisant de nouveau la loi de Kirchhoff, on obtient une relation linéaire complexe (2.13) entre la valeur du potentiel au noeud O et celles de ces voisins immédiats. Après arrangement, on obtient un système d'équations linéaires complexes :

$$\sum_{n=1}^6 (V_n - V_0) (1/R_n + j\omega C_n) = 0 \quad (2.13)$$

## II-4 Méthodes de charges équivalentes

En troisième lieu, il y a les méthodes utilisant des charges équivalentes [20,21]. Celles-ci consistent à chercher une distribution de charges discrètes, à valeurs complexes inconnues, dont le type et la position sont choisis. Pour un ensemble de charges  $Q(j)$  donné, les expressions du potentiel et du champ en un point  $i$  sont données respectivement par :

$$V_i = \sum_j P(i,j)Q(j) \quad (2.14)$$

et

$$E_i = \sum_j F(i,j)Q(j) \quad (2.15)$$

où  $P(i,j)$  et  $F(i,j)$  sont des coefficients qui dépendent du type de charge et de la distance entre les points  $i$  et  $j$ . Les  $Q(j)$  peuvent être des charges ponctuelles, des densités linéiques de charges réparties sur des segments de droite ou des anneaux.

Pour les électrodes, les charges sont placées à l'intérieur de leurs contours. Pour les frontières isolant-isolant, des charges sont placées de part et d'autre des frontières (fig. 2.7). Le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  de l'interface électrode-air est calculé en fonction des charges appartenant à l'électrode et l'isolant solide. Le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  de l'interface isolant solide-air est calculé en fonction des charges appartenant à l'électrode et l'air. Ces charges recréent par leurs effets la valeur du potentiel en un certain nombre de points, dits de collocation, appartenant aux contours des électrodes et vérifient l'équation de conservation de charge pour les points de collocation appartenant aux interfaces isolant-isolant.

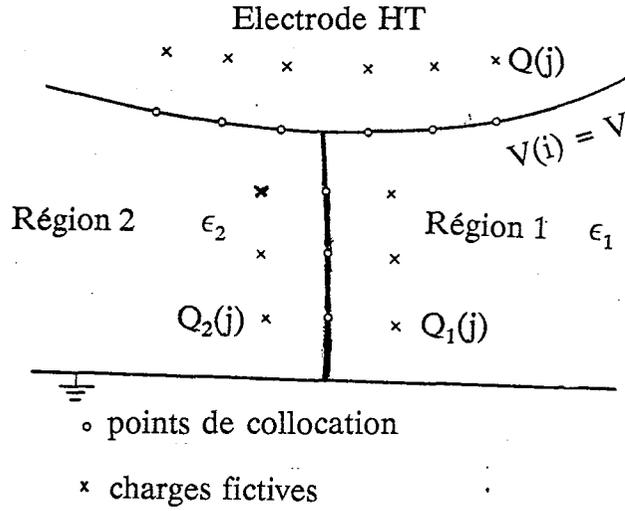


Fig. 2.7. Disposition des charges et des points de collocation.

L'équation de conservation de charge pour un point de collocation  $i$  appartenant à la couche de pollution s'écrit :

$$\epsilon_1 E_{n1}(i) - \epsilon_2 E_{n2}(i) = \frac{1}{j\omega S(i)} \left[ \frac{V(i-1) - V(i)}{R(i)} - \frac{V(i) - V(i+1)}{R(i+1)} \right] \quad (2.16)$$

$S(i)$  représente la surface correspondant au point  $i$ ,  $R(i)$  la résistance électrique entre le point  $(i-1)$  de potentiel  $V(i-1)$  et le point  $i$  de potentiel  $V(i)$ . La résistance  $R(i)$  s'exprime ici en fonction de la conductivité surfacique de la couche.  $E_{n1}(i)$  et  $E_{n2}(i)$  sont les champs électriques normaux à l'interface air-isolant solide. Ils sont fonction des différentes charges.

Takuma et co [20] écrivent pour un point de collocation  $i$  appartenant à l'électrode

$$\sum_j P(i,j)Q(j) + \sum_j P(i,j)Q_2(j) = V(i) \quad (2.17)$$

*(interface électrode-air)*

$$\sum_j P(i,j)(Q_j) + \sum_j P(i,j)Q_1(j) = V(i) \quad (2.18)$$

*(interface électrode-isolant solide)*

$$\sum_j P(i,j)Q_1(j) = \sum_j P(i,j)Q_2(j) \quad (2.19)$$

(interface air-isolant solide)

L'équation de conservation de charge donne ici après remplacement de  $E_{n1}(i)$ ,  $E_{n2}(i)$ ,  $V(i-1)$ ,  $V(i)$  et  $V(i+1)$  par leurs expressions en fonctions des  $Q(j)$ ,  $Q_1(j)$  et  $Q_2(j)$  :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1[\sum F_n(i,j)Q(j) + \sum F_n(i,j)Q_2(j)] - \varepsilon_2[\sum F_n(i,j)Q(j) + \sum F_n(i,j)Q_1(j)] \\ & + \frac{1}{j\omega S(i)} \left[ \frac{\sum P(i-1,j)Q(j) + \sum P(i-1,j)Q_1(j)}{R(i)} + \frac{\sum P(i+1,j)Q(j) + \sum P(i+1,j)Q_1(j)}{R(i+1)} \right. \\ & \left. - \left[ \frac{1}{R(i)} + \frac{1}{R(i+1)} \right] [\sum P(i,j)Q(j) + \sum P(i,j)Q_1(j)] \right] = 0 \quad (2.20) \end{aligned}$$

L'écriture de ces différentes équations pour les différents points de collocation donne un ensemble d'équations linéaires à valeurs complexes dont la résolution fournit les valeurs des différentes  $Q(j)$ ,  $Q_1(j)$  et  $Q_2(j)$ . Celles-ci permettent ensuite de calculer la valeur du potentiel ou du champ en n'importe quel point.

Un second procédé a été proposée par Abdel-Salam et co [21]. Celui-ci consiste à minimiser par rapport à la partie réelle ( $\Re$ ) et la partie imaginaire ( $\Im$ ) des charges fictives utilisées, la somme des carrés des erreurs  $\delta_{ij}$  définis par :

$$\delta_{11} = \Re [V(i) - V] \quad \text{et} \quad \delta_{12} = \Im [V(i)]$$

pour les points de collocation situés sur l'électrode, avec  $V$  valeur du potentiel de l'électrode.

$$\delta_{21} = \Re [V_1(i) - V_2(i)] \quad \text{et} \quad \delta_{22} = \Im [V_1(i) - V_2(i)]$$

pour les points de collocation situés sur l'interface air-isolant solide, avec  $V_1(i)$  valeur du potentiel au point  $i$  calculée à partir des charges appartenant à l'électrode et l'isolant solide et  $V_2(i)$  valeur du potentiel calculée à partir des charges appartenant à l'électrode et à l'air.

Quant à  $\delta_{31}$  et  $\delta_{32}$  leur expressions sont assez compliquées mais elles représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du premier membre de l'équation (2.20).

A partir de ces erreurs, ils construisent la fonction  $f$  définie par

$$f = \sum_1^{n_1} (\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2) + \sum_1^n (\delta_{21}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{31}^2 + \delta_{32}^2) \quad (2.21)$$

avec  $n_1$  le nombre de points de collocation situés sur l'électrode et  $n$  le nombre de points de collocation situés sur l'interface air-isolant solide.

## II-5 Méthodes des éléments frontières

Les méthodes des éléments frontières, comme son nom l'indique, consiste à résoudre le problème aux frontières des différents milieux. On peut les classer en deux groupes : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Pour les méthodes directes, on travaille directement avec les grandeurs intéressantes (potentiel, champ) alors que pour les méthodes indirectes on travaille avec les charges, après calcul de celles-ci on calcule les valeurs du potentiel et du champ. Dans cette partie, nous présenterons les méthodes indirectes qui sont utilisées jusqu'à maintenant pour le calcul de champ et de potentiel avec la prise en compte de la couche conductrice.

On cherche une distribution de charges, localisées sur les différentes interfaces, et qui vérifie les conditions aux interfaces en électrostatique pure. La traduction de ces conditions pour un point  $P$  appartenant à l'électrode de potentiel connu  $V_s$  est [22] :

$$V_s(P) = \int_{\delta} \frac{\rho(M)G}{\epsilon_0} d\delta \quad (2.22)$$

-  $\rho(M)$  est la densité surfacique de charge en un point  $M$  d'une interface,

- $G$  est égale à  $1/4\pi r$  où  $r$  est la distance entre le point  $P$  et le point  $M$ ,
- $\epsilon_0$  est la permittivité absolue du vide.

Pour un point  $P$  appartenant à l'interface entre deux diélectriques, on a :

$$\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2} \rho(P) = (\epsilon_2 - \epsilon_3) \int_{\delta} \rho(M) \frac{\partial G}{\partial n} d\delta \quad (2.23)$$

où

- $n$  est la normale intérieure en  $M$  à la surface  $\delta$ ,
- $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  sont les permittivités relatives des deux milieux en contact.

Pour prendre en compte la présence d'une couche  $l$  comprise entre deux milieux  $k$  et  $m$ , Olsen procède comme suit [11] :

on utilise une couche d'épaisseur  $\Delta t$  (fig. 2.8), possédant une conductivité  $\sigma_1$  et une permittivité relative  $\epsilon_1$ . Chaque face de la couche possède une distribution de charge. On approxime ensuite les différents contours par des petits segments (formulation axisymétrique) sur lesquels la valeur de la densité surfacique est supposée constante. On écrit alors l'équation (2.23) pour les deux faces en prenant comme inconnue la somme et la différence des charges sur les deux faces.

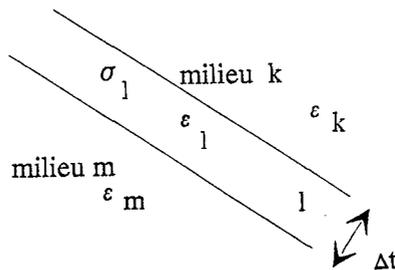


Fig. 2.8. Couche d'épaisseur  $\Delta t$ .

Après écriture de la forme discrétisée de l'équation (2.23) calculée pour les points milieux de chaque segment approchant les frontières, on obtient un système

linéaire dont la résolution fournit les valeurs de charges de chaque élément. On peut alors calculer le champ et le potentiel en tout point. Une extension de cette méthode pour des configuration 3D est proposée dans [23].

Une deuxième façon de prendre en compte la couche est proposée dans [24]. Elle consiste à faire un calcul en deux temps : d'abord sans tenir compte de la couche (électrostatique pure) en utilisant les équations (2.22) et (2.23). En utilisant la même discrétisation que précédemment, on obtient donc les charges  $Q_i$  portées par chaque élément  $i$  de discrétisation. On calcule alors l'énergie électrostatique  $W_e$  emmagasinée dans le système, soit :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \epsilon_1 E^2 d\mathcal{V} \quad (2.24)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume du système. Cette énergie peut encore s'écrire :

$$W_e = \frac{1}{2} QV \quad (2.25)$$

avec  $V$  la tension appliquée. Sous forme discrétisée, on a alors :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i \quad (2.26)$$

où  $V_i$  représente la valeur du potentiel au point milieu de l'élément  $i$  de charge  $Q_i$ .

Le fait d'ajouter une couche de permittivité  $\epsilon_2$  crée une variation de l'énergie électrostatique égale à :

$$\Delta W_e = - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \epsilon_2 E^2 dv \quad (2.27)$$

où  $\mathcal{V}$  représente le volume occupé par la couche. Comme la tension appliquée ne change pas, cette variation peut s'écrire encore :

$$\Delta W_e = - \frac{1}{2} \Delta Q V \quad (2.28)$$

En utilisant les équations (2.25) et (2.28), on aura :

$$\Delta Q = \frac{\Delta W_e}{W_e} Q \quad (2.29)$$

avec cette relation, on calcule les variations  $\Delta Q_i$  des charges  $Q_i$  dues à la présence de la couche. Avec cette nouvelle répartition de charge ( $Q_i + \Delta Q_i$ ), on calcule la nouvelle répartition du potentiel et du champ.

Dans cette dernière méthode la couche est considérée comme un diélectrique. Dans le cas d'une couche conductrice on remplace  $j\omega/\epsilon_0$  par la conductivité surfacique de la couche  $\sigma_s$ .

## II-6 Commentaires sur ces différentes méthodes

Pour les deux premiers groupes de méthodes, la répartition du potentiel se calcule directement. Cependant, ils présentent l'inconvénient d'utiliser des nombres d'inconnues élevés lorsque l'on veut travailler sur des configurations 3D, de plus, ils nécessitent la limitation du domaine étudié.

Les méthodes de simulation de charges posent le problème de localisation des charges fictives utilisées, par contre, elles conviennent pour la modélisation des configurations complexes [12] qui peuvent être le voisinage de l'isolateur.

Les méthodes des éléments frontières nous semblent présenter des avantages par rapport aux précédentes. Cependant, leur aspect indirect peut être un inconvénient. Nous allons considérer une méthode directe des éléments frontières appelée méthode des équations intégrales de frontière (MEIF).

## II-7 Méthode des équations intégrales de frontière

Résoudre l'équation (1.15) revient à inverser l'opérateur laplacien. Cette inversion se fait en utilisant la méthode de l'identité de Green. On transforme l'équation de Laplace en une équation intégrale qui lie la valeur du potentiel  $V(P)$  en

un point P à l'intérieur du domaine  $\Omega$  à la valeur du potentiel V et sa dérivée normale  $\frac{\partial V}{\partial n}$  sur l'ensemble des points de sa frontière  $\partial\Omega$ .

### II-7-1 Fonction de Green de l'équation de Laplace

Le potentiel  $u^*(P)$  créé en un point P appartenant à un domaine  $\Omega$  par une charge unitaire placée en un point M est solution de l'équation :

$$\Delta u^*(P) = \delta(M,P) \quad (2.30)$$

avec  $\delta(M,P)$  défini par

$$\delta(M,P) = 1 \quad \text{si } P = M$$

$$\delta(M,P) = 0 \quad \text{si } P \neq M$$

C'est la solution de l'équation (2.30) qu'on appelle fonction de Green  $G (= G(M,P))$  de l'équation de Laplace. Sa valeur est :

$$\frac{1}{4\pi r} \quad \text{en 3D}$$

et

$$-\frac{1}{2\pi} \text{Log } r \quad \text{en 2D}$$

où r est la distance entre les deux points M et P ( $r = PM$ ).

### II-7-2 Méthode de l'identité de Green

Pour deux fonctions scalaires u et v définies dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , la seconde identité de Green s'écrit :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds \quad (2.31)$$

avec  $n$  normale extérieure en un point  $M$  de  $\partial\Omega$ .

En identifiant  $u$  au potentiel  $V$  inconnu dans le domaine  $\Omega$  et  $v$  à la fonction de Green du laplacien, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (V \Delta G - G \Delta V) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right] ds \quad (2.32)$$

Comme  $\Delta V = 0$  (1.15), cette identité devient :

$$\int_{\Omega} (V \Delta G) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right] ds \quad (2.33)$$

Cette équation est valable pour tout point  $P$  de  $\Omega$ . Si on fait tendre le point  $P$  vers un point  $M$  appartenant à la frontière  $\partial\Omega$ , le membre de gauche de (2.33) devient [25] :

$$\lim_{P \rightarrow M} \int_{\Omega} (V \Delta G) d\Omega = c V(M) \quad (2.34)$$

avec  $c = A/4\pi$  où  $A$  désigne l'angle solide sous lequel le point  $M$  voit la frontière  $\partial\Omega$ . Ce qui nous donne une équation qui lie entre elles les valeurs du potentiel et de sa dérivée normale à la surface d'un domaine :

$$cV(M) = - \int_{\partial\Omega} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right] ds \quad (2.35)$$

## II-8 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre les principales méthodes numériques de calcul de champ et de potentiel électriques sur les isolateurs avec prise en compte de la présence d'une couche conductrice à leurs surfaces. La diversité de ces méthodes confirment l'importance du rôle que joue une couche conductrice sur le comportement électrique des isolateurs.

Pour les matériaux qu'on peut supposer électriquement linéaires, homogènes et isotropes tels que les porcelaines, les verres ou l'air, les méthodes des éléments frontières semblent présenter des avantages, vu la réduction des nombres d'inconnues en jeu et la prise en compte des domaines infinis. L'utilisation de la MEIF qui est une méthode directe, apportera probablement d'autres avantages comme nous allons le voir au chapitre suivant.

## CHAPITRE III

### MODELISATION DE LA CONDUCTION SURFACIQUE

#### PAR LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE

##### III-1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre 1 l'ensemble des équations et des conditions qui gouvernent les répartitions du potentiel et du champ pour un isolateur pollué. Après un rappel concernant l'utilisation de la MEIF pour résoudre l'équation de Laplace (chap. 2) nous allons appliquer cette méthode à un isolateur pollué. Ceci va nous conduire à établir des équations que l'on résout aux frontières des différents milieux. Le traitement par ordinateur de ces différentes équations nous amène à approximer les différentes variables et discrétiser les différentes équations. Ce qui nous fournit un système d'équations linéaires dont la résolution permet d'avoir les différentes répartitions. Nous allons donc détailler ces différentes étapes et nous terminerons par le calcul des grandeurs qui nous semblent utiles.

##### III-2 Application de la méthode des équations intégrales de frontière

Appliquer la MEIF pour le calcul de champ et de potentiel sur un isolateur pollué revient à écrire l'équation intégrale (2.35) sur les frontières des différentes régions qui composent l'isolateur. Nous allons l'appliquer sur l'isolateur pollué "modèle" (fig. 3.1) soumis à une tension de valeur efficace  $V_0$  et de pulsation  $\omega$ .

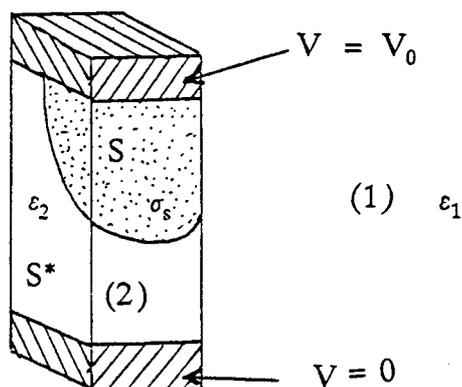


Fig. 3.1. Isolateur pollué "modèle".

Le domaine de calcul est composé de deux régions :

- la région 1 formée par l'air de permittivité relative  $\epsilon_{r1}$  égale à 1 (domaine  $\Omega_1$  de frontière  $S_1$ ),
- la région 2 formée par l'isolant solide de permittivité relative  $\epsilon_{r2}$  (domaine  $\Omega_2$  de frontière  $S_2$ ).

La frontière entre les deux régions comporte deux types d'interfaces :

- l'interface polluée  $S$  avec une conductivité surfacique  $\sigma_s$ ,
- l'interface propre  $S^*$ .

L'écriture de l'équation (2.35) pour les deux régions nous donne :

- pour l'air

$$cV_1 = - \int_{S_1} \left[ V_1 \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial V_1}{\partial n_1} \right] ds \quad (3.1)$$

- pour l'isolant solide (domaine  $\Omega_2$  de frontière  $S_2$ )

$$cV_2 = - \int_{S_2} \left[ V_2 \frac{\partial G}{\partial n_2} - G \frac{\partial V_2}{\partial n_2} \right] ds \quad (3.2)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont les normales extérieures des régions 1 et 2.

### III-3 Choix des variables et conditions aux interfaces "classiques"

Aux deux équations précédentes, il faut associer les différentes conditions d'interfaces données dans le chapitre 1. Pour cela, nous commençons par les conditions d'interfaces classiques qui sont celles de l'électrostatique. Celles -ci sont :

- l'égalité des valeurs du potentiel vu des deux régions

$$V_1 = V_2$$

pour la suite, nous appellerons  $V$  leur valeur commune.

- la continuité de la composante normale du déplacement électrique  $\mathbf{D}$  (1.22).

Les équations (3.1) et (3.2) avec la première condition ci-dessus montrent que nous avons trois variables inconnues :  $V$ ,  $\frac{\partial V}{\partial n_1}$  et  $\frac{\partial V}{\partial n_2}$ . Les deux dernières ne sont pas continues à travers l'interface. En suivant la manière proposée dans [26], nous pouvons réduire le nombre d'inconnues pour les interfaces classiques. Cela consiste à introduire la variable  $\Psi$  définie comme le rapport entre la composante normale  $D_n$  du déplacement électrique et la permittivité absolue du vide  $\epsilon_0$ , et à prendre comme inconnue cette variable définie dans la région de référence. La région de référence est, pour une interface diélectrique-diélectrique, la région de plus faible permittivité. Pour une frontière de conditions aux limites imposées, c'est la région adjacente qui est prise comme région de référence. En utilisant cette variable  $\Psi$ , on vérifie implicitement la condition (1.22).

Avec  $\Psi_1 = \epsilon_{r1} \frac{\partial V}{\partial n_1}$  et  $\Psi_2 = \epsilon_{r2} \frac{\partial V}{\partial n_2}$ , cette condition (1.22) s'écrit :

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 0 \quad (3.3)$$

les équations (3.1) et (3.2) deviennent alors

$$cV = - \int_{S_1} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} G \Psi_1 \right] ds \quad (3.1')$$

$$cV = - \int_{S_2} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{1}{\epsilon_{r2}} G \Psi_2 \right] ds \quad (3.2')$$

Pour un point de l'interface classique, il ne nous reste plus que deux variables inconnues :  $V$  et  $\Psi_1$  égale à  $-\Psi_2$ .

#### III-4 Condition d'interface polluée

En utilisant  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ , l'équation (1.21) devient :

$$\text{div}_s(-\sigma_s \text{grad}_s V) + j\omega\epsilon_0(\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (3.4)$$

Pour avoir une réduction du nombre d'inconnues comme dans le cas précédent, on peut être tenté d'exprimer  $\Psi_2$  en fonction de  $V$  et de  $\Psi_1$ . Cependant, pour une raison que nous développerons dans la partie discrétisation, nous utiliserons une nouvelle variable  $\Theta$  liée à  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  par la relation (3.5) :

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Theta \quad (3.5)$$

l'équation (3.4) s'écrit alors

$$\text{div}_s(-\sigma_s \text{grad}_s V) + j\omega\epsilon_0\Theta = 0 \quad (3.6)$$

Sous cette forme, l'équation (3.6) n'est pas prête à une résolution compatible avec les équations intégrales de frontière. Pour cela, nous utilisons la méthode des résidus pondérés [27] :

nous avons à résoudre, l'équation (3.6) sur la surface polluée  $S$ . Nous la multiplions par une fonction test  $w$  et nous l'intégrerons sur la surface  $S$  tout en tenant compte des conditions aux bords de  $S$ . Dans le cas de l'isolateur pollué modèle, celle-ci est limitée par deux types de contours (fig. 3.2):  $\Gamma_1$  interface avec des électrodes et  $\Gamma_2$  interface avec des surfaces non polluées. Ce qui nous conduit à adjoindre les conditions aux limites suivantes à l'équation (3.6) :

$$V = V_0 \quad \text{pour } \Gamma_1 \quad (3.7)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour } \Gamma_2 \quad (3.8)$$

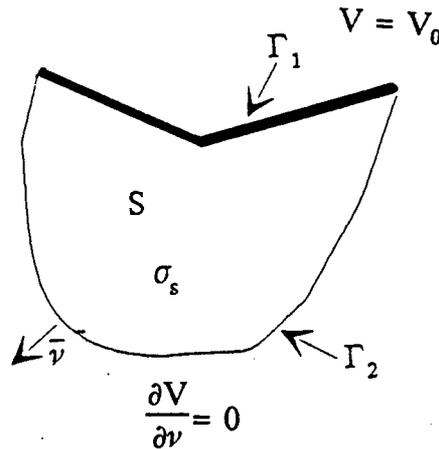


Fig. 3.2. Conditions aux bords de la surface polluée  $S$ .

ce qui nous donne :

$$\int_S \sigma_s \mathbf{grad}_s w \mathbf{grad}_s V \, dS - \int_{\Gamma_1} \sigma_s w \frac{\partial V}{\partial \nu} \, d\Gamma + j\omega\epsilon_0 \int_S w \Theta \, dS = 0 \quad (3.9)$$

Cette équation nous sert de condition d'interface pour la partie polluée. Précisons que dans le cas d'une couche polluée isolée, le contour  $\Gamma_1$  n'existe pas et que dans le cas d'un isolateur complètement pollué, le contour  $\Gamma_2$  n'existe pas.

### III-5 Ensemble des équations à résoudre

Nous avons, pour un point appartenant à l'interface classique, deux variables inconnues :  $V$  et  $\Psi_1$ ; dans ce qui va suivre  $\Psi_1$  sera remplacé par  $\Psi$ . Pour un point appartenant à l'interface polluée, nous en avons trois :  $V$ ,  $\Psi$  et  $\Theta$ . Le remplacement de  $\Psi_2$  en fonction de  $\Psi$  et  $\Theta$  dans (3.2') nous donne :

$$cV = - \int_{S_2} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} G \Psi - \frac{1}{\epsilon_{r2}} G \Theta \right] ds \quad (3.10)$$

Lorsqu'il y a un conducteur à potentiel flottant (cas des chaînes d'isolateurs), la transformation de l'équation (1.18') avec l'utilisation de la variable définie dans la région de référence donne :

$$- \int_{\Gamma} \sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega\epsilon_0 \int_{\delta_e} \Psi_e d\delta = 0 \quad (3.11)$$

En définitive, l'ensemble des équations à résoudre est formé par (3.1'), (3.9), (3.10) et (3.11) lorsqu'il y a une équipotentielle. L'équation (3.10) montre que la présence d'une couche de conductivité  $\sigma_s$  se traduit par la présence d'une densité surfacique de charge  $-\epsilon_0\Theta$ .

### III-6 Commentaires

Comme la variable  $\frac{\partial V}{\partial n}$ ,  $\Psi$  dépend de la normale au point considéré, ceci pose un problème pour les points anguleux, résolu par exemple dans [28].

L'utilisation de  $\Psi$  permet d'avoir, directement après résolution, la valeur de la composante normale du champ électrique du côté air.

Le choix de  $\Theta$  à la place de  $\Psi_2$  entraîne une réduction du nombre d'inconnues, en effet  $\Psi_2$  dépend de la normale contrairement à  $\Theta$ .

### III-7 Discrétisation numérique

L'ordinateur ne sait pas résoudre directement les équations citées ci-dessus. Cela nous conduit à faire une discrétisation numérique permettant de transformer l'ensemble des équations à résoudre en un système linéaire que l'ordinateur sait résoudre.

#### III-7-1 Découpage en éléments finis

On divise les différentes frontières de chaque domaine en de petits éléments; dans notre cas, ce sont des rectangles curvilignes à huit noeuds (fig. 3.3). Au niveau de chaque élément nous utiliserons des coordonnées locales (u,v). Les grandeurs physiques et géométriques sont approximées sur ces éléments par des polynômes  $\alpha_i(u,v)$  de degré deux en u et v (i variant de 1 à 8) :

$$x = \sum \alpha_i x_i \quad (3.12.a)$$

$$y = \sum \alpha_i y_i \quad (3.12.b)$$

$$z = \sum \alpha_i z_i \quad (3.12.c)$$

$$V = \sum \alpha_i V_i \quad (3.12.d)$$

$$\Psi = \sum \alpha_i \Psi_i \quad (3.12.e)$$

$$\Theta = \sum \alpha_i \Theta_i \quad (3.12.f)$$

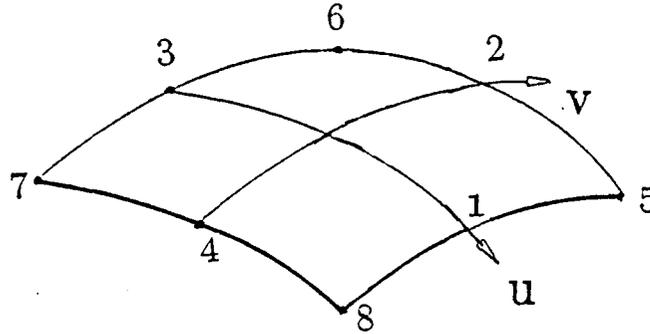


Fig. 3.3 Élément de discrétisation.

Les polynômes  $\alpha_i$  sont indépendants entre eux et de plus, le polynôme  $\alpha_i$  prend la valeur 1 au noeud  $i$  et 0 aux autres noeuds. Leurs expressions sont données par exemple dans [26].

### III-7-2 Discrétisation des équations

Les équations intégrales de frontière sont écrites en chaque noeud des divers éléments des différentes surfaces de chaque région. On approxime les grandeurs physiques à l'aide des fonctions d'interpolation et on décompose le calcul des intégrales de surface [(3.1'), (3.9), (3.10) et (3.11)] sur tous les éléments finis de la région considérée. Ce qui nous donne pour les équations (3.1') et (3.10) :

$$c_i V_i = \sum_e \sum_j \left[ a_{ej} V_{ej} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} b_{ej} \Psi_{ej} \right] \quad (3.13)$$

$$c_i V_i = \sum_e \sum_j \left[ a_{ej} V_{ej} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} b_{ej} \Psi_{ej} - \frac{1}{\epsilon_{r2}} b_{ej} \Theta_{ej} \right] \quad (3.14)$$

où

$$a_{ej} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \alpha_j(u,v) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds \quad (3.15)$$

et

$$b_{ej} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_e} \alpha_j(u,v) \frac{1}{r} ds \quad (3.16)$$

avec

- $j$  l'indice de la fonction d'interpolation,
- $e$  le numéro de l'élément d'intégration,
- $S_e$  la surface de l'élément  $e$ ,
- $\alpha_j$  la fonction d'interpolation,
- $\mathbf{n}$  la normale extérieure unitaire
- $\mathbf{r}$  le vecteur PM où P désigne le noeud d'intégration et M le point variable de l'intégration.

Les noyaux des intégrales (3.15) et (3.16) présentent une singularité lorsque  $r$  s'annule. Cependant les deux intégrales de surface (3.13) et (3.14) sont convergentes. Les algorithmes de calcul numérique de ces intégrales existent dans le logiciel PHI3D [28].

Pour l'équation (3.9), nous avons :

$$\sum_e \sum_i V_i \left( \int_{S_e} \sigma_s \mathbf{grad}_s w \mathbf{grad}_s \alpha_i dS - \int_{\Gamma_{1e}} \sigma_s w \frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu} d\Gamma \right) + j\omega \epsilon_0 \sum_e \sum_j \Theta_j \int_{S_e} \sigma_s w \alpha_j dS = 0 \quad (3.17)$$

avec

- $S_e$  la surface de l'élément  $e$ ,
- $\Gamma_{1e}$  le contour de l'élément  $e$  appartenant à un électrode.

Pour  $w$ , nous prenons les polynômes d'interpolation  $\alpha_i$ .

Quant à l'équation (3.11), elle donne :

$$-\sum_e \sum_i V_i \int_{\Gamma_e} \sigma_s \frac{\partial \alpha_i}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega \epsilon_0 \sum_e \sum_j \Psi_j \int_{S_e} (\alpha_j) dS = 0 \quad (3.18)$$

L'assemblage de ces différentes équations donne un système linéaire complexe dont la matrice est non symétrique. Sa résolution se fait en utilisant la méthode de Gauss.

*Remarque à propos de l'inconnue  $\Theta$*

Le remplacement de  $\Psi_2$  en fonction de son expression tirée de l'équation (3.4) conduit à la discrétisation du terme  $\text{div}_s(-\sigma_s \mathbf{grad}_s V)$ . Lorsqu'on interpole  $V$  à partir des valeurs nodales ce terme présente une discontinuité qui engendre de fausses solutions après résolution. C'est la raison fondamentale qui nous a conduit à introduire la variable  $\Theta$ .

### III-8 Calcul des différentes grandeurs

Après résolution du système linéaire complexe, nous obtenons les valeurs nodales de  $V$ ,  $\Psi$  et  $\Theta$  qui nous manquent. En utilisant les fonctions d'interpolation nous obtenons les valeurs de  $V$ ,  $\Psi$  et de  $\Theta$  en tout point des différentes surfaces des isolateurs. Il nous faut maintenant calculer les différentes grandeurs intéressantes pour un isolateur pollué. Ces grandeurs peuvent être locales comme le champ tangentiel, la densité surfacique de courant, la densité de puissance thermique, le champ total,... ou globale comme la valeur du courant de fuite.

*a) Champ tangentiel  $E_t$*

Le champ tangentiel  $E_t$  est défini par la relation

$$E_t = - \mathbf{grad}_s V \quad (3.19)$$

En utilisant les coordonnées locales (u,v) et les vecteurs de base locale  $\mathbf{e}_u$  et  $\mathbf{e}_v$ , le champ tangent s'écrit [29] :

$$\mathbf{E}_t = - \left[ \left( g^{uu} \frac{\partial V}{\partial u} + g^{uv} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \mathbf{e}_u + \left( g^{vu} \frac{\partial V}{\partial u} + g^{vv} \frac{\partial V}{\partial v} \right) \mathbf{e}_v \right] \quad (3.20)$$

$g^{uu}$ ,  $g^{uv}$ ,  $g^{vu}$  et  $g^{vv}$  sont les composantes du tenseur métrique deux fois contravariant. Les vecteurs  $\mathbf{e}_u$  et  $\mathbf{e}_v$  sont donnés par :

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

où  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sont les vecteurs de base du repère global. L'introduction des expressions de  $\mathbf{e}_u$  et  $\mathbf{e}_v$  dans (3.20) donne la valeur du champ tangent. Les dérivées en u et v sont directement calculées à partir des fonctions d'interpolation.

*b) Densité surfacique de courant  $\mathbf{J}_s$*

La densité surfacique de courant  $\mathbf{J}_s$  est donnée par la relation

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s \mathbf{E}_t \quad (3.21)$$

*c) Densité de puissance thermique p*

Cette densité p est donnée par le produit de la conductivité surfacique  $\sigma_s$  et le carré du module du champ tangentiel :

$$p = \sigma_s ||\mathbf{E}_t||^2 \quad (3.22)$$

*d) Champ électrique normal  $\mathbf{E}_n$*

Pour les interfaces isolateur-air, la valeur du champ électrique normal coté air est donnée par  $\Psi$  :

$$\mathbf{E}_n = \Psi \quad (3.23)$$

e) *Module du champ électrique total E*

Ce module du champ total est calculé suivant la relation

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} \quad (3.24)$$

f) *Courant de fuite I*

Le courant de fuite est le courant qui sort de l'électrode sous tension. Il est composé de deux parties : le courant de conduction  $I_C$  qui entre dans la couche conductrice par conduction et le courant capacitif  $I_D$ . Déterminer  $I_C$  revient à intégrer le vecteur  $\mathbf{J}_L$  ( $= -\sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu}$  : densité linéique de courant) le long de l'interface appartenant à l'électrode sous tension et la couche polluée (fig. 3.4). Trouver  $I_D$  revient à calculer le flux du vecteur  $\Psi$  à travers la surface fermée  $S_E$  entourant l'électrode sous tension.

Nous avons alors

$$I_C = - \int_{\Gamma_1} \sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma \quad (3.25)$$

et

$$I_D = \int_{S_E} \frac{\partial D}{\partial t} dS = j\omega\epsilon_0 \int_{S_E} \Psi dS \quad (3.26)$$

Ce qui nous donne pour I

$$I = I_C + I_D = - \int_{\Gamma_1} \sigma_s \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega\epsilon_0 \int_{S_E} \Psi dS \quad (3.27)$$

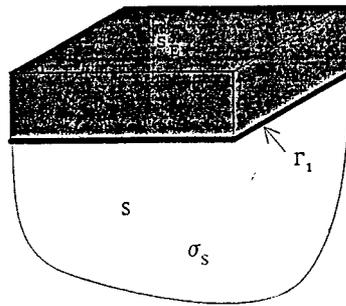


Fig. 3.4. Frontières de calcul des divers courants.

### III-9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce troisième chapitre un modèle numérique de conduction surfacique sur les isolateurs pollués basé sur la méthode des équations intégrales de frontière (MEIF). L'utilisation de la méthode des résidus pondérés nous a conduit à utiliser la méthode des éléments finis (MEF) pour l'interface polluée de l'isolateur. Les deux méthodes utilisent le même maillage au niveau de la surface polluée. Le calcul des différentes grandeurs locales et globales présentées nous servira pour la validation du module. Parmi ces grandeurs locales, nous avons la densité de puissance thermique qui interviendra dans l'étude des conséquences thermiques de la circulation d'un courant de fuite.

## CHAPITRE IV

### VALIDATION ET EXEMPLES

#### IV-1 Introduction

Nous disposons d'un modèle numérique qui permet non seulement d'avoir la répartition du potentiel et du champ à la surface d'un isolateur pollué mais aussi d'autres grandeurs qui jouent des rôles importants. Nous allons maintenant procéder à la validation de ce modèle qui sera à la fois analytique et expérimentale.

Pour la partie analytique nous comparons nos résultats avec des solutions théoriques connues. Ces comparaisons sont faites pour les valeurs complexes du potentiel, pour les modules de  $\Psi$  et du champ tangentiel; pour ces deux derniers, les modules sont beaucoup plus parlants que les valeurs complexes.

Pour la validation expérimentale, nous comparons les résultats de nos calculs à ceux mesurés au laboratoire et à des résultats rencontrés dans la littérature. Ces comparaisons sont faites pour les valeurs du potentiel, du champ et des courants de fuite. Après cette validation, nous présenterons quelques exemples de calcul.

#### IV-2 Validation analytique

Cette validation analytique consiste à comparer les résultats fournis par notre modèle à ceux donnés par une solution analytique 2D [19]. La configuration utilisée est un isolant de permittivité relative  $\epsilon_r$ , de très faible épaisseur  $a$ , limité par deux électrodes (fig. 4.1.). La différence de potentiel appliquée entre les deux électrodes

est de valeur efficace  $V_0$  et de pulsation  $\omega$ . Le long de la ligne OA de longueur  $l$  ( $l \gg a$ ), il y a une couche de conductivité surfacique  $\sigma_s$ .

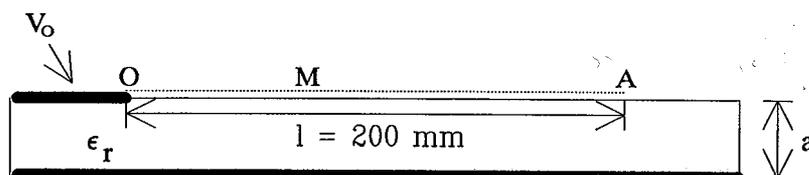


Fig. 4.1. Géométrie 2D.

#### IV-2-1 Solution analytique

Pour établir la relation qui donne la répartition de potentiel le long de la ligne OA, nous utiliserons la conservation de courant pour un point M de la couche conductrice. En prenant comme origine le point O, un point M de OA est caractérisé par son abscisse  $x$ .

Pour un segment de longueur  $dx$  partant du point M, nous avons trois courants (fig. 4.2.) : le courant de conduction  $J_x$  qui entre en  $x$ , le courant de conduction  $J_{x+dx}$  qui sort en  $(x+dx)$  et le courant capacitif  $I_c(x)$  qui sort de  $dx$ .

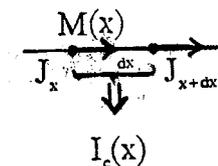


Fig. 4.2. Différents courants au point M.

$$J_x = -\sigma_s \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$J_{x+dx} = -\sigma_s \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx \right)$$

$$I_c(x) = \frac{\partial D}{\partial t} dx$$

La conservation du courant en M nous permet d'écrire

$$J_x + I_c(x) = J_{x+dx} \quad (4.1)$$

Le courant capacitif  $I_c(x)$  est égal à  $j\omega\epsilon_r\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} dx$ , où  $n$  est la normale orientée vers l'intérieur de l'isolant et  $j^2$  égale à -1. Ce qui nous donne :

$$j\omega\epsilon_r\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = -\sigma_s \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Comme l'épaisseur de l'isolant est très faible nous pouvons remplacer  $\frac{\partial V}{\partial n}$  par  $-\frac{V}{a}$  avec  $V$ , valeur du potentiel en M. L'équation (4.2) devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{j\omega\epsilon_r\epsilon_0}{\sigma_s} \frac{V}{a} = 0 \quad (4.3)$$

A cette équation, nous ajoutons les deux conditions aux limites

$$V = V_0 \quad \text{pour } x = 0$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 1$$

La résolution de l'équation (4.3) avec les deux conditions aux limites ci-dessus nous donne la valeur  $V(x)$  du potentiel en un point M d'abscisse  $x$  :

$$V(x) = V_0 \frac{\cosh[(1+j)k(1-x)]}{\cosh[(1+j)kl]} \quad (4.4)$$

$$\text{avec } k = \sqrt{\frac{\omega\epsilon_0\epsilon_r}{2\sigma_s a}}$$

A partir de cette solution analytique, nous calculons toutes les autres grandeurs qui nous servent pour les comparaisons. Les différentes valeurs numériques utilisées pour le calcul de la solution analytique sont :

$$V_0 = 100 \text{ Volts}$$

$$\omega = 100\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\epsilon_r = 4$$

$$\epsilon_0 = 10^{-9} / 36\pi \text{ Fm}^{-1}$$

$$a = 5 \text{ mm}$$

$$l = 200 \text{ mm}$$

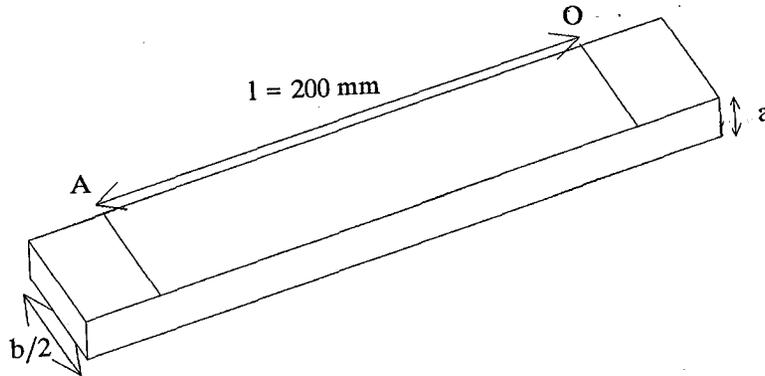
Pour une conductivité tendant vers 0 ou nulle, ce calcul ne s'applique plus : on le vérifie pour  $\sigma_s = 0$  en utilisant la solution exacte donnée par la transformation conforme [13] :

$$V(x) = \frac{2}{\pi} V_0 \text{Arcsin}\left[\exp\left(-\frac{\pi x}{2a}\right)\right] \quad (4.5)$$

qui montre que la décroissance du potentiel dans la direction  $x$  n'est plus liée à la longueur de l'isolant, mais à son épaisseur  $a$ . On ne peut plus écrire l'expression simple du type  $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{V}{a}$ .

Les valeurs de conductivités surfaciques utilisées pour la validation sont  $\sigma_s = 100 \mu\text{S}$ ,  $\sigma_s = 1 \mu\text{S}$  et  $\sigma_s = 0.001 \mu\text{S}$ . Le choix de deux premières valeurs est dicté par le fait que les valeurs généralement rencontrées dans la nature sont comprises entre  $1.25 \mu\text{S}$  et  $80 \mu\text{S}$  [30]. D'autre part, sous l'influence de l'humidité, un isolateur propre peut avoir une conductivité surfacique de  $0.001 \mu\text{S}$  [31], ce qui nous conduit à prendre la troisième valeur. Les comparaisons sont faites pour les valeurs de potentiel, de champ normal, de champ tangentiel et des valeurs de courants de fuite (capacitif et de conduction).

Pour pouvoir traiter ce problème par notre modèle, nous ajoutons une largeur  $b$  de 60 mm, ce qui nous donne une géométrie 3D (fig. 4.3). Les valeurs des différentes grandeurs sont calculées le long de OA.



$$b = 60 \text{ mm}$$

Fig. 4.3. Géométrie 3D.

#### IV-2-2 Valeurs du potentiel

Comme les valeurs du potentiel sont de type complexe, nous ferons les comparaisons entre ses parties réelles et ses parties imaginaires.

La partie réelle de  $V$  est donnée par :

$$\Re(V) = \frac{\cosh[k(2l-x)]\cos(kx) + \cosh(kx)\cos[k(2l-x)]}{2[\cosh^2(kl) - \sin^2(kl)]} V_0 \quad (4.6)$$

La partie imaginaire est donnée par :

$$\Im(V) = - \frac{\sinh[k(2l-x)]\sin(kx) + \sinh(kx)\sin[k(2l-x)]}{2[\cosh^2(kl) - \sin^2(kl)]} V_0 \quad (4.7)$$

Les résultats de comparaisons sont portés sur les figures 4.4 à 4.6.

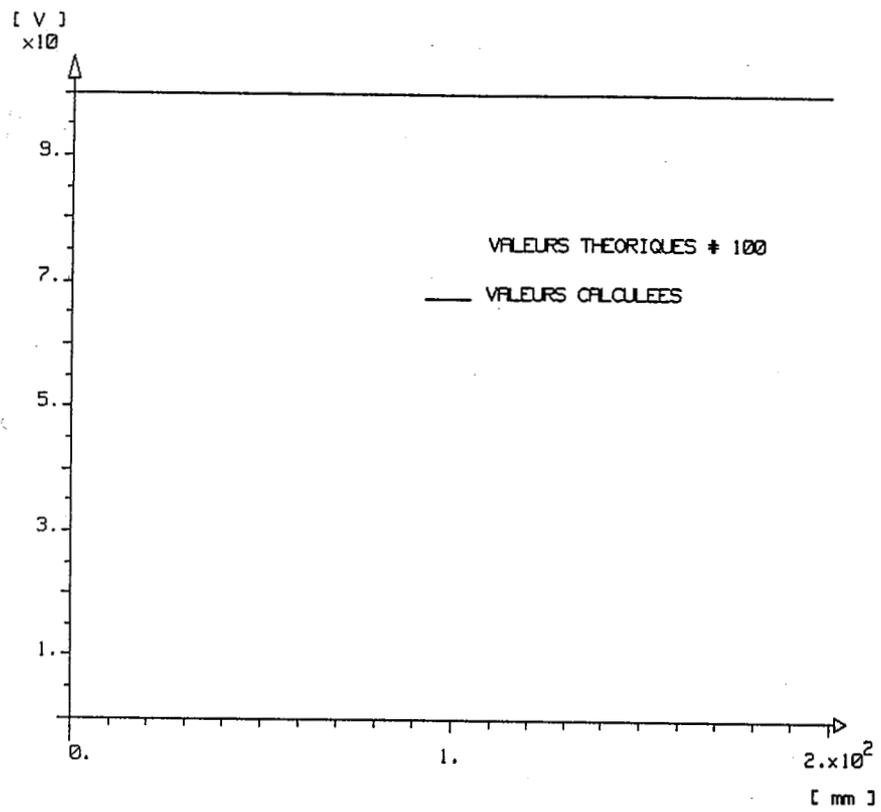
Répartition du potentiel ( $\sigma_s = 100 \mu\text{S}$ )

Fig. 4.4.a. Partie réelle.

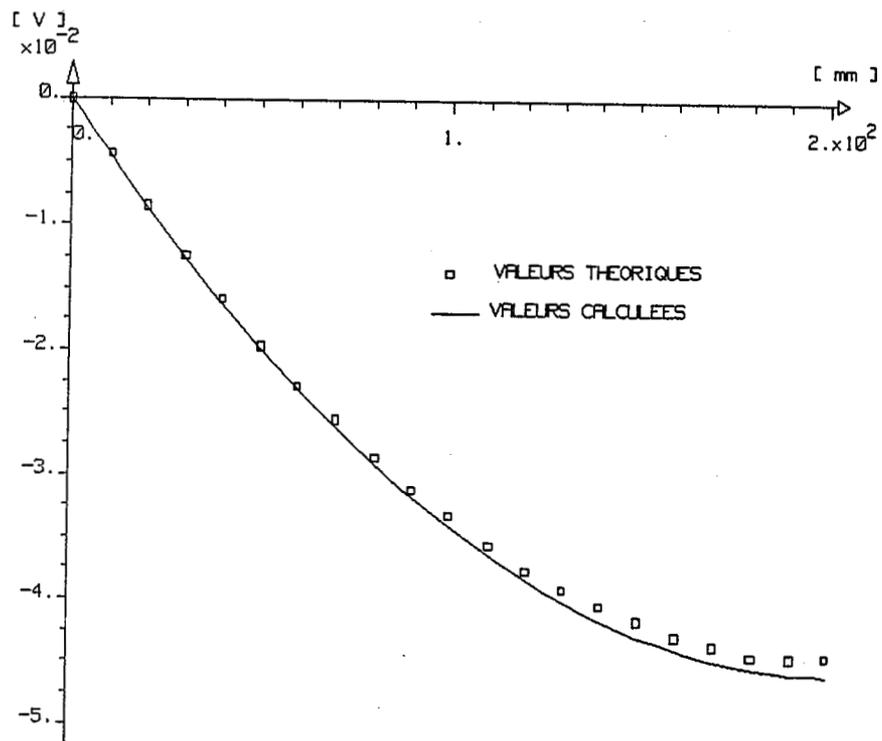


Fig. 4.4.b. Partie imaginaire.

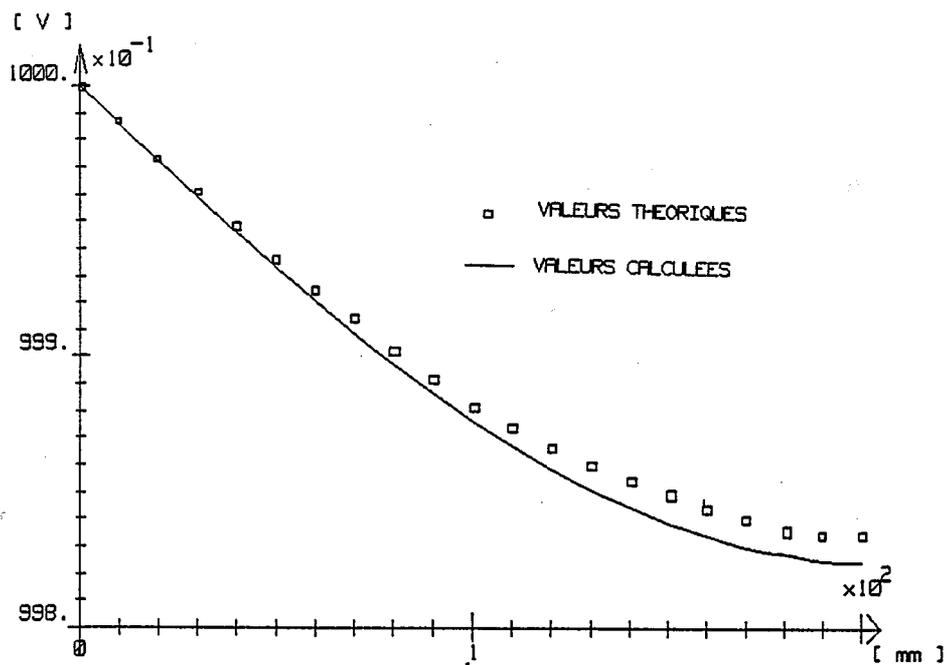
Répartition du potentiel ( $\sigma_s = 1 \mu\text{S}$ )

Fig. 4.5.a. Partie réelle.

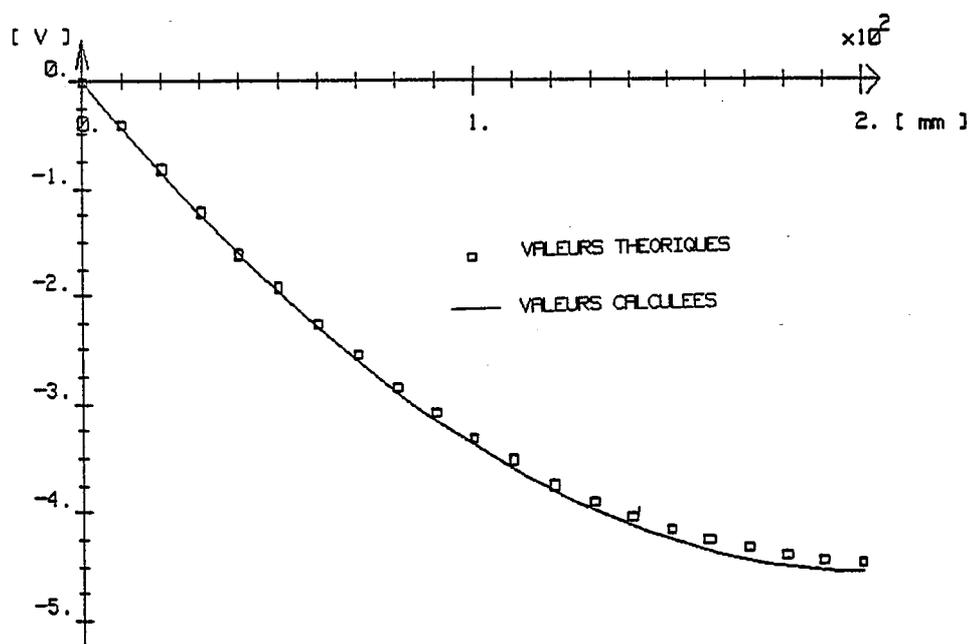


Fig. 4.5.b. Partie imaginaire.

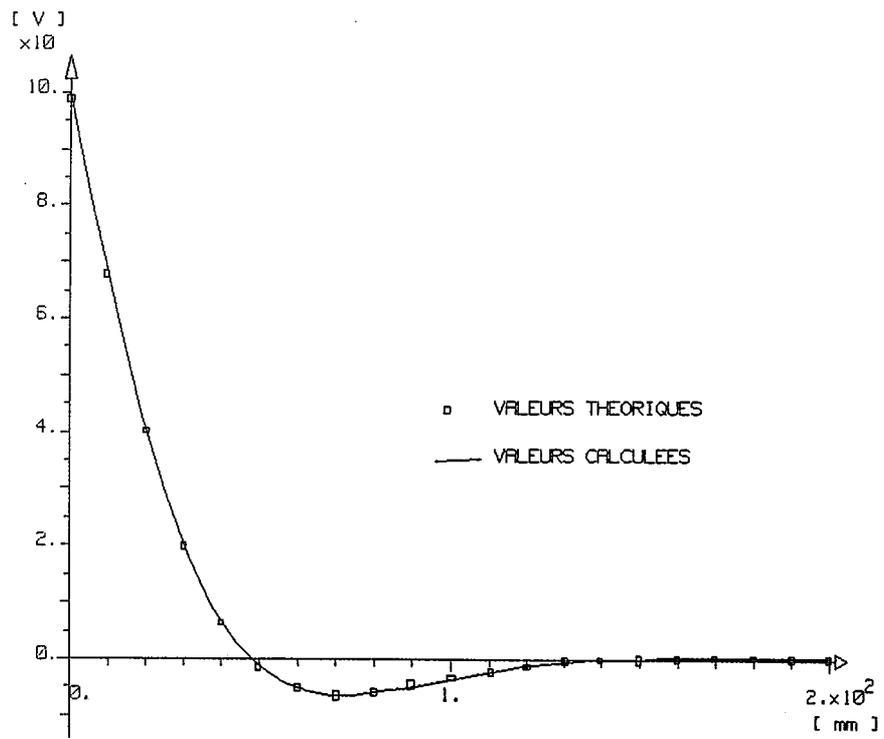
Répartition du potentiel ( $\sigma_s = 0.001 \mu\text{S}$ )

Fig. 4.6.a. Partie réelle.

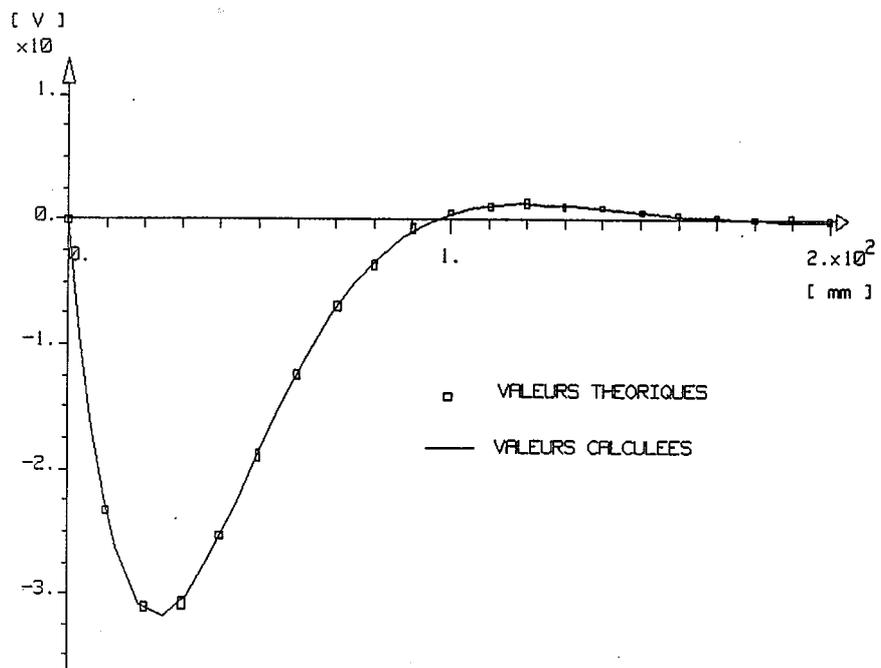


Fig. 4.6.b. Partie imaginaire.

Par ailleurs, nous avons fait des comparaisons pour des valeurs de conductivités comprises entre  $10^{-4} \mu\text{S}$  et  $10^3 \mu\text{S}$  [32]. Pour les valeurs de potentiel, on constate une bonne coïncidence entre les valeurs données par la solution analytique et celles calculées. D'autre part, un calcul effectué pour  $\sigma_s$  égale à 0.01 S nous amène à conclure que le modèle n'est plus valable pour  $\sigma_s \geq 0.01$  S. Toutefois cette valeur ne fait plus partie de celles qu'on rencontre généralement dans la nature.

Lorsque  $\sigma_s \geq 1 \mu\text{S}$ , tout en restant inférieure  $10^3 \mu\text{S}$ , on tend vers l'équipotentielle. Lorsque  $\sigma_s \ll 1 \mu\text{S}$  on tend vers la solution donnée par l'équation (4.5). Ceci est illustré par le tableau 4.1.

Tableau 4.1

x (mm)	$V(x)/V_0$ ( $\sigma_s = 10^{-11}$ S)	$V(x)/V_0$ ( $\sigma_s = 0$ S)	$V(x)/V_0$ analytique(4.5)
0	1	1	1
0.46	0.84	0.67	0.66
0.93	0.71	0.53	0.53
1.87	0.50	0.37	0.37
3.75	0.26	0.20	0.199
7.5	0.08	0.06	0.06

#### IV-2-3 Module de $\Psi$

Par définition  $\Psi$  est égal à  $\epsilon_r \frac{\partial V}{\partial n}$  ( $\epsilon_r$  étant la permittivité relative de l'isolant).

Comme l'isolant est de très faible épaisseur, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V(x)}{a}$$

Ce qui nous donne en utilisant l'expression de  $V(x)$  :

$$\Psi = \frac{V_0 \cosh[(1+j)k(1-x)]}{a \cosh[(1+j)kl]} \quad (4.8)$$

et en calculant son module nous obtenons :

$$\Psi = \frac{\epsilon_r V_0}{a} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \sinh^2 \alpha}{\cos^2 \beta + \sinh^2 \beta}} \quad (4.9)$$

avec  $\alpha = k(1-x)$  et  $\beta = kl$ .

#### IV-2-4 Module du champ tangentiel

Le champ tangentiel est donné par la relation  $E_t = - \frac{\partial V}{\partial x}$ . En utilisant l'expression de  $V(x)$ , nous obtenons :

$$E_t = (1+j)kV_0 \frac{\sinh[(1+j)k(1-x)]}{\cosh[(1+j)kl]} \quad (4.10)$$

Le calcul de son module nous donne :

$$E_t = V_0 \sqrt{\frac{\omega \epsilon_r \epsilon_0}{\sigma_s a}} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \sinh^2 \alpha}{\cos^2 \beta + \sinh^2 \beta}} \quad (4.11)$$

avec  $\alpha = k(1-x)$  et  $\beta = kl$ . Les comparaisons sont présentées sur les figures 4.7 à 4.9.

$$\sigma_s = 100 \mu\text{S}$$

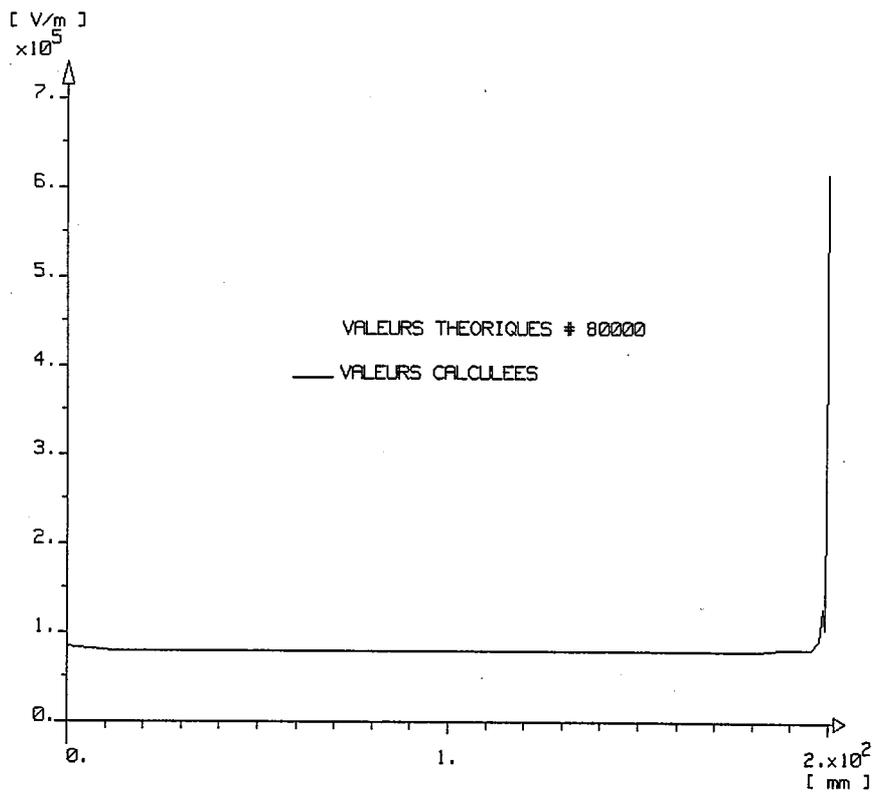
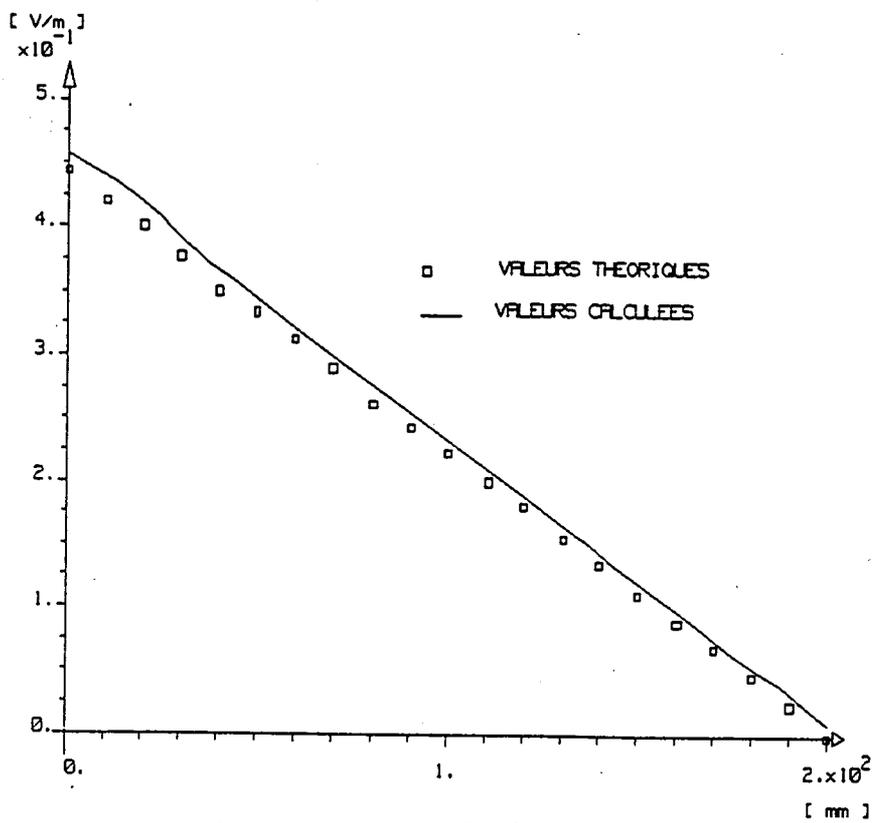
Fig. 4.7.a. Module de  $\Psi$ .

Fig. 4.7.b. Module du champ tangent.

$$\sigma_s = 1 \mu\text{S}$$

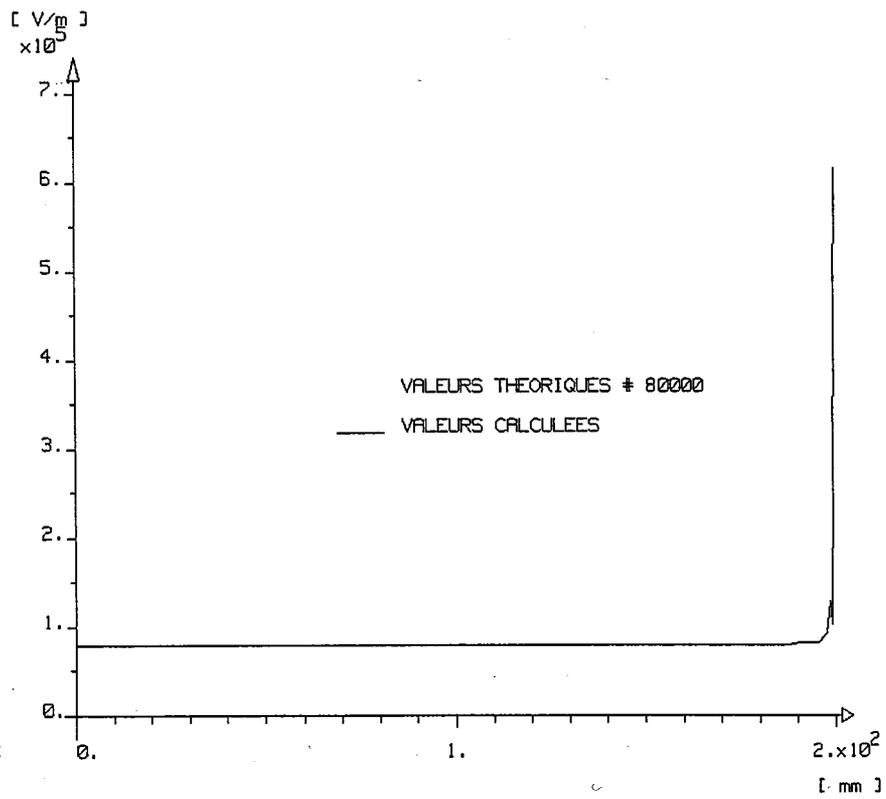
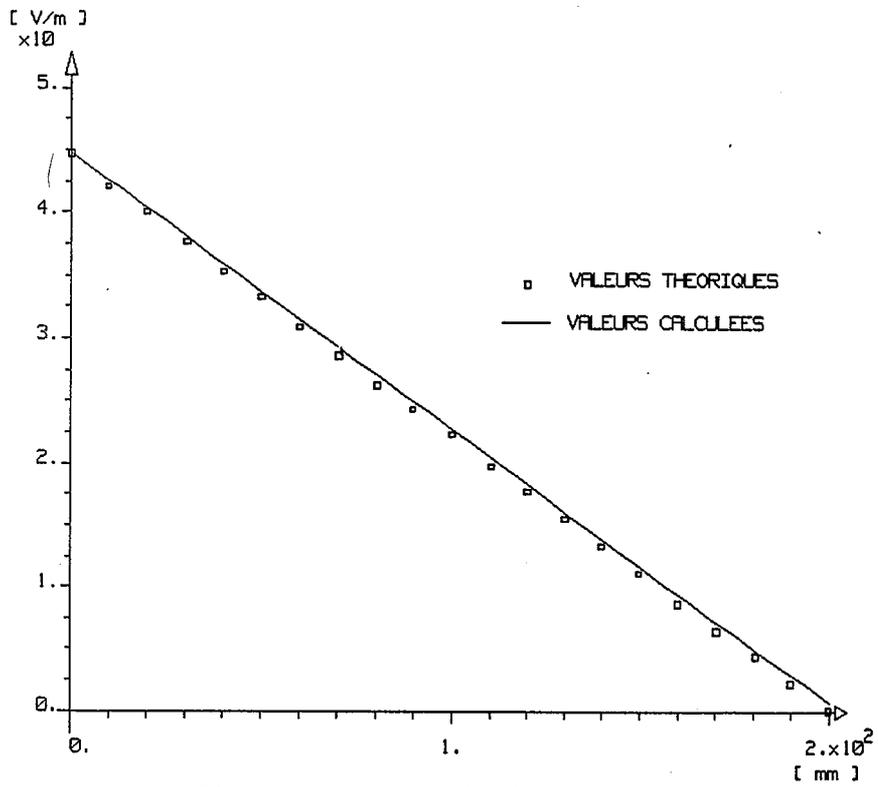
Fig. 4.8.a. Module de  $\Psi$ .

Fig. 4.8.b. Module du champ tangent.

$$\sigma_s = 0.001 \mu\text{S}$$

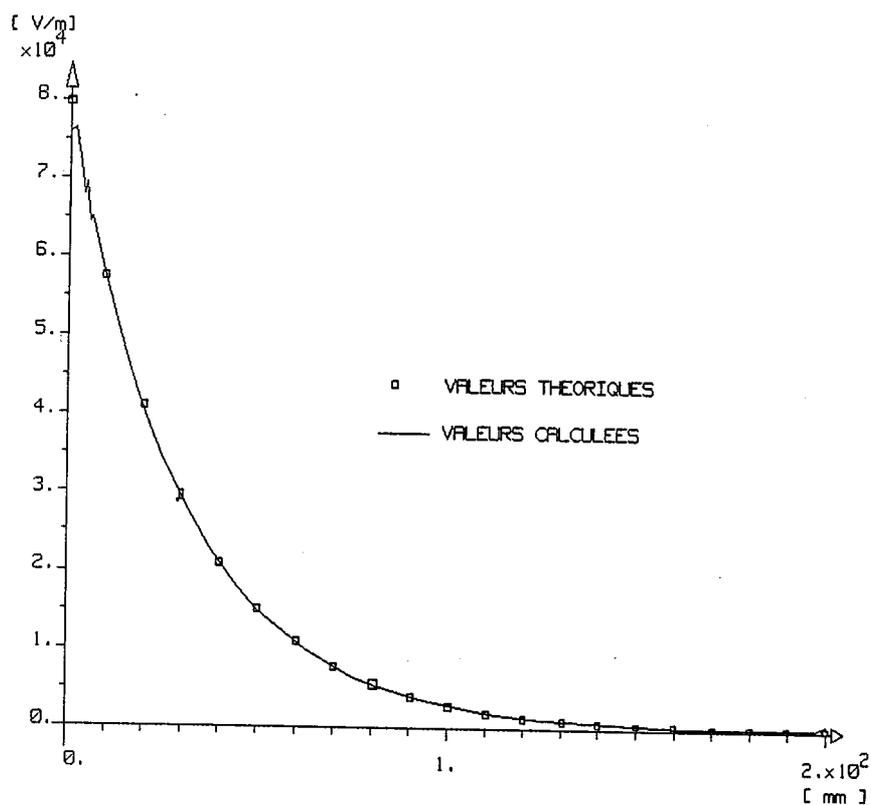
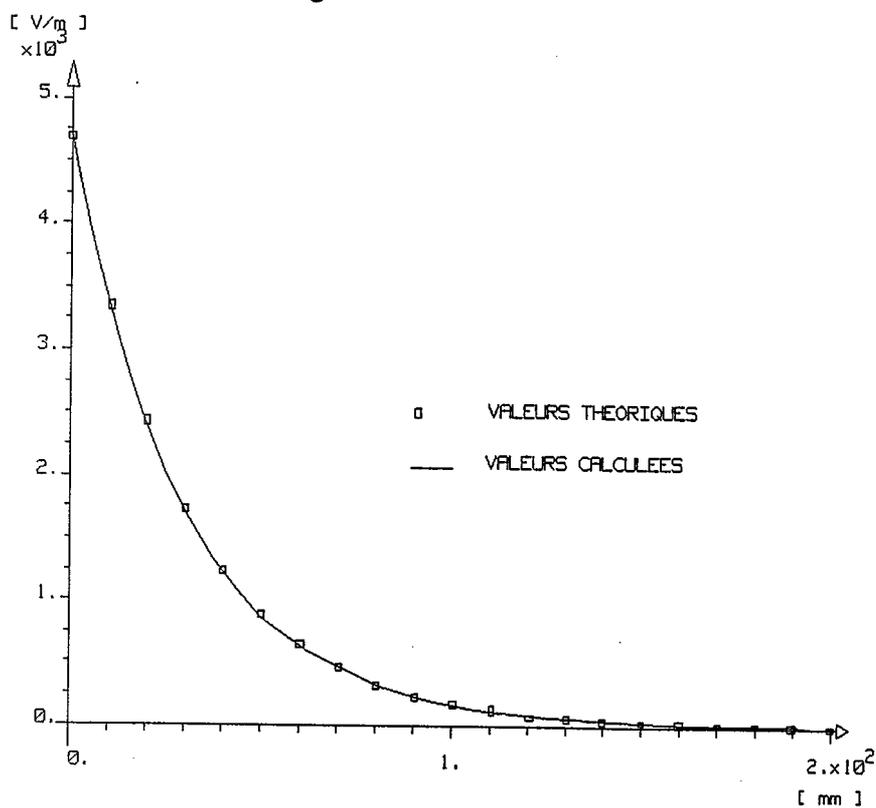
Fig. 4.9.a. Module de  $\Psi$ .

Fig. 4.9.b. Module du champ tangent.

Nous constatons que pour les trois valeurs de conductivité surfacique, il y a une bonne concordance entre les valeurs théoriques et calculées du champ tangent. Pour un point d'abscisse  $x$  donnée, le module du champ tangent décroît lorsque la conductivité surfacique croît : plus  $\sigma_s$  augmente, plus on tend vers l'équipotentielle et le champ tangentiel tend vers zéro.

Quant au module de  $\Psi$ , on peut dire que lorsque  $\sigma_s$  prend la valeur  $10^{-3} \mu\text{S}$ , les valeurs calculées coïncident avec les valeurs théoriques. Lorsque  $\sigma_s$  est égale à  $1 \mu\text{S}$  ou à  $100 \mu\text{S}$ , on note une concordance des deux résultats sauf au point A (point de contact entre la couche de pollution et une surface propre). Cette divergence provient du fait que la couche se comporte comme une équipotentielle (fig. 4.4.a et 4.5.a), on retrouve ici un phénomène analogue à la présence d'une singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  sur un conducteur présentant une arête saillante [13].

#### IV-2-5 Valeurs des courants

Comme nous l'avons dit précédemment, nous allons faire deux comparaisons : d'une part entre les valeurs de courant de conduction (théorique et calculée) et, d'autre part, entre les valeurs de courant capacitif (théorique et calculée). Les valeurs de conductivités surfaciques utilisées sont comprises entre  $10^{-4} \mu\text{S}$  et  $100 \mu\text{S}$ .

##### a) Calcul du courant de conduction théorique $J_c$

Le courant de conduction est égal au produit de la valeur du champ tangentiel  $E_t$ , à la jonction électrode sous tension-couche polluée ( $x = 0$ ), par la valeur de la conductivité surfacique et la largeur  $b$  de l'électrode, ce qui nous donne :

$$J_c = \sigma_s b k V_0 \frac{\sinh[(1+j)kl]}{\cosh[(1+j)kl]} \quad (4.12)$$

Le calcul de la partie réelle  $I_R$  et de la partie imaginaire  $I_I$  nous donne

$$I_R = bV_0 \sqrt{\frac{\omega \epsilon_r \epsilon_0 \sigma_s}{2a} \frac{\cosh(kl)\sinh(kl) - \cos(kl)\sin(kl)}{\cos^2(kl) + \sinh^2(kl)}} \quad (4.13)$$

et

$$I_I = bV_0 \sqrt{\frac{\omega \epsilon_r \epsilon_0 \sigma_s}{2a} \frac{\cosh(kl)\sinh(kl) + \cos(kl)\sin(kl)}{\cos^2(kl) + \sinh^2(kl)}} \quad (4.14)$$

b) Calcul du courant capacitif théorique  $J_C$

Pour avoir ce courant, on intègre la quantité  $\frac{\partial D}{\partial t}$  à travers la surface  $S_E$  de l'électrode de potentiel  $V_0$  :

$$J_D = \int_{S_E} \frac{\partial D}{\partial t} dS \quad (4.15)$$

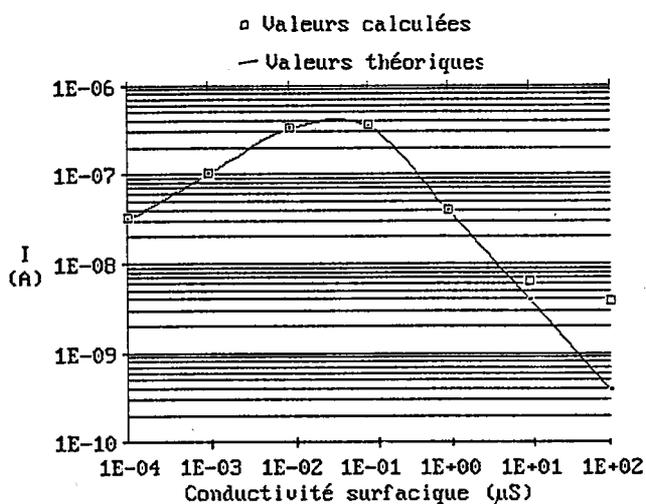
$$= j\omega \epsilon_r \epsilon_0 E_n S_E \quad (4.16)$$

comme l'épaisseur  $a$  de l'isolant est très petite devant les autres dimensions, on peut écrire que le champ normal  $E_n$  est égal à  $V_0/a$ , ce qui nous donne en définitif

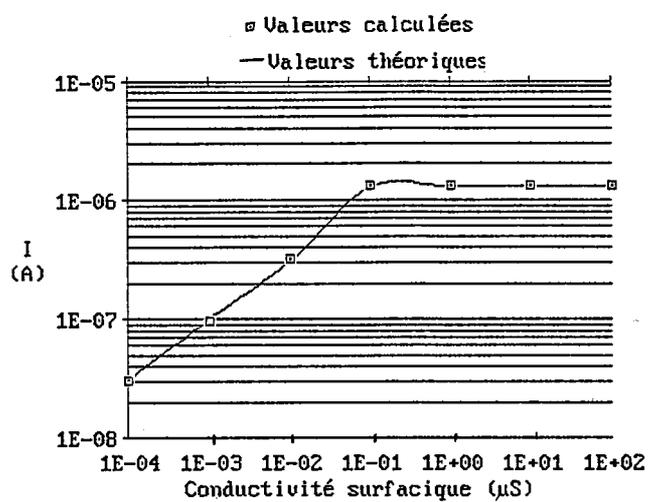
$$J_D = j\omega \epsilon_r \epsilon_0 \frac{V_0}{a} S_E \quad (4.17)$$

Les résultats de ces comparaisons sont portés sur les figures 4.10.

Comparaison des courants

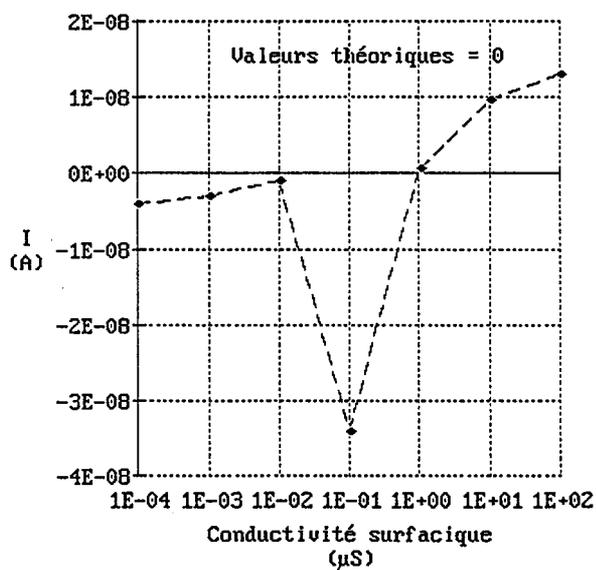


Partie réelle

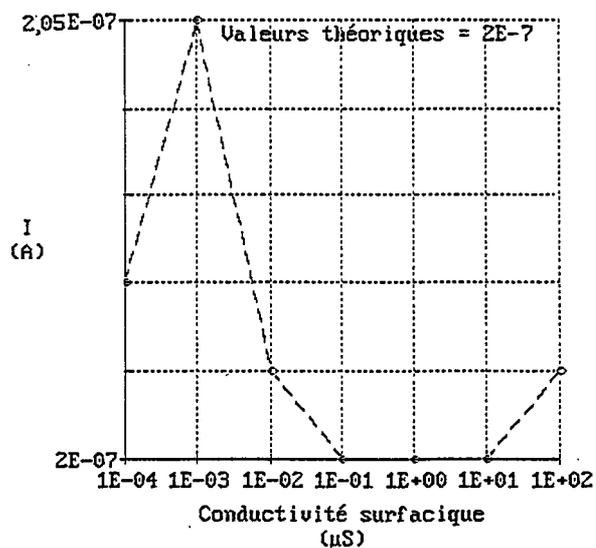


Partie imaginaire

Fig. 4.10.a. Courant de conduction.



Partie réelle



Partie imaginaire

Fig. 4.10.b. Courant capacitif.

Comme les parties réelles des courants capacitifs sont négligeables devant les parties imaginaires, on peut considérer qu'on a une bonne coïncidence entre les valeurs analytiques et celles données par le modèle.

Pour les courants de conduction leurs parties imaginaires tendent vers  $13 \cdot 10^{-7}$  A lorsque  $\sigma_s \geq 1 \mu\text{S}$ . Cette limite s'explique par le fait que la couche se comporte comme une équipotentielle avec l'électrode supérieure. On a approximativement un système capacitif, la tension et le courant sont uniformes le long de la couche. Il ressort de la loi de conservation de courant que le courant de conduction qui entre dans la couche polluée sort sous forme de courant capacitif. D'où la valeur limite du courant de conduction :

$$I_{\text{lim}} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \frac{V_0 b l}{a} = j 1.33 \cdot 10^{-6} \text{ A} \quad (4.18)$$

Par suite, on peut calculer le courant de conduction  $I(x)$  qui décroît linéairement en fonction de  $x$  le long de la couche conductrice (fig. 4.11). On en déduit l'asymptote pour la partie réelle du même courant en calculant la perte par effet Joule  $P$  dans la couche

$$P = \int_0^l \frac{I^2(x)}{\sigma_s b} dx = \frac{I^2(0)}{3\sigma_s b} \quad (4.19)$$

d'où la partie réelle de  $I$  :

$$\frac{P}{V_0} = \frac{.039 \cdot 10^{-12}}{\sigma_s} \quad (4.20)$$

Lorsque  $\sigma_s \leq 10^{-2} \mu\text{S}$ , les calculs des courants de conduction montrent que la partie réelle et la partie imaginaire tendent vers la même valeur : ce qui peut s'interpréter comme si la puissance active dissipée au niveau de la couche et la puissance réactive tendent vers la même valeur. On retrouve ici un phénomène semblable à ce qui se passe dans le cas de chauffage par induction [29], à savoir que

lorsque l'épaisseur de peau tend vers zéro la puissance active et la puissance réactive tendent vers la même valeur. Pour nous, l'épaisseur qui intervient ici est la quantité  $\frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_0}$ . Cette grandeur apparait lorsqu'on divise l'équation (3.9) par  $\omega\epsilon_0$ .

#### IV-2-6 Conclusion

Les différents calculs faits sur cette géométrie simple nous ont permis de cerner le domaine de validité du modèle ( $\sigma_s \leq 10^{-3}$  S). Cet ensemble de valeur de conductivité surfacique englobe celles qu'on rencontre souvent.

Dans les différents calculs effectués, on a retrouvé les valeurs données par la solution analytique lorsque celle-ci est valable (en dehors de la singularité pour le champ normal). Lorsque la valeur de la conductivité surfacique est très faible, on tend vers la solution électrostatique. Il nous reste à confirmer ces résultats par une validation expérimentale.

#### IV-3 Validation expérimentale

Nous présenterons dans cette partie les résultats de validation que nous avons effectué au Laboratoire d'Electrotechnique de Lyon. Comme le titre indique, cette validation consiste à comparer les résultats de calcul aux mesures. Les grandeurs que nous allons comparer sont les valeurs du potentiel et du champ. Dans un premier temps, nous parlerons des différents appareils qui nous ont permis de faire les mesures. Parmi ces appareils, il y a une chaîne de mesure de champ et de potentiel dont nous possédons très peu d'information. Un étalonnage s'impose donc pour pouvoir l'utiliser. Nous exposerons cet étalonnage dans un deuxième temps.

Pour simuler la pollution, nous utilisons une peinture semi-conductrice fabriquée par la société PROTAVIC (résine C110 + durcisseur C24). La nécessité

des valeurs de conductivité surfacique qui vont nous servir dans les calculs nous amènent à faire des mesures préliminaires de résistances. Nous présenterons en détail ces mesures préliminaires avant de passer à la validation expérimentale proprement dite.

#### IV-3-1 Appareillage utilisé

L'appareillage de mesure est composé d'un générateur basses fréquences (GBF), d'un amplificateur de tension (A), d'un convertisseur électro-optique (CEO) associé à un capteur et d'un oscilloscope (O) (fig. 4.11).

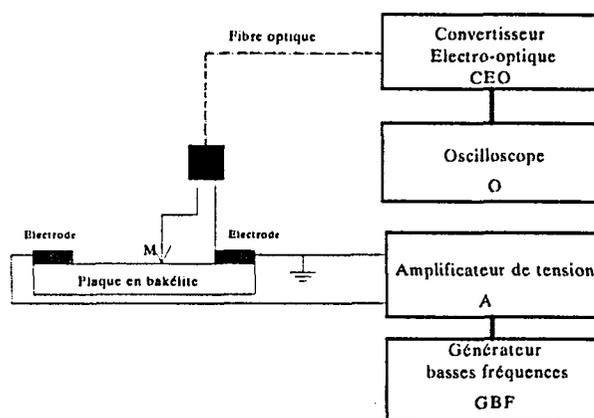


Fig. 4.11. Appareillage utilisé.

Le générateur GBF permet d'avoir une tension de valeur efficace et de fréquence connues. L'amplificateur A sert à amplifier la tension fournie par le générateur GBF. La tension fournie par l'amplificateur A est ensuite appliquée aux bornes des électrodes de l'isolateur.

Les mesures du champ et du potentiel sont effectuées à l'aide d'un capteur optique SUMITOMO utilisant l'effet Pockels (modulation de la lumière par un champ électrique [33]). Celui-ci est lié au convertisseur par l'intermédiaire de deux

fibres optiques. Deux fils, qui interviennent dans les mesures du potentiel, sont connectés à ce capteur optique. Le convertisseur CEO convertit, la lumière modulée au niveau du capteur, en un signal électrique qui est fourni à son tour à l'oscilloscope O. Ceci permet, après un étalonnage préalable, de lire directement sur oscilloscope la valeur de la différence de potentiel qui existe entre deux points.

Ce capteur est de forme parallélépipédique de dimension 22mm\*14mm\*14mm. Pour la mesure de champ suivant une direction donnée, on dessoude les deux fils utilisés pour les mesures de tension et on oriente le capteur dans cette direction : la plus grande dimension du capteur est placée suivant la direction choisie.

Pour les mesures de résistances qui servent à calculer les valeurs des conductivités surfaciques, nous nous sommes servis d'un impédancemètre vectoriel HP4284A. Celui-ci permet d'avoir les valeurs de résistance et de capacité en parallèle équivalent à un circuit donné.

#### **IV-3-2 Etalonnage**

L'étalonnage en potentiel consiste à appliquer une tension alternative de valeur efficace et de fréquence connues aux bornes des deux fils du capteur et de tracer ensuite les valeurs lues à l'oscilloscope en fonction de la tension appliquée. Nous avons utilisé deux valeurs de fréquences pour l'étalonnage en tension :  $f_1$  égale à 50 Hz et  $f_2$  égale à 5000 Hz.

L'étalonnage en champ consiste à immerger le capteur dans un champ électrique uniforme alternatif créé entre deux plateaux circulaires. Ceux-ci sont alimentés à l'aide d'un transformateur élévateur 220 V/10 kV. Comme précédemment, on trace les valeurs lues à l'oscilloscope en fonction de la valeur du champ appliqué, celle-ci étant égale au rapport de la tension appliquée entre les deux plaques à leur distance. Les résultats de ces étalonnages sont présentés à l'annexe 1.

### IV-3-3 Mesures préliminaires

Pour cette validation expérimentale nous avons utilisé deux géométries. La première est une plaque plane en bakélite munie de deux électrodes en cuivre (fig. 4.12). Elle nous servira pour les mesures de potentiel. Le second est une tête d'isolateur que nous utiliserons pour les mesures de champ.

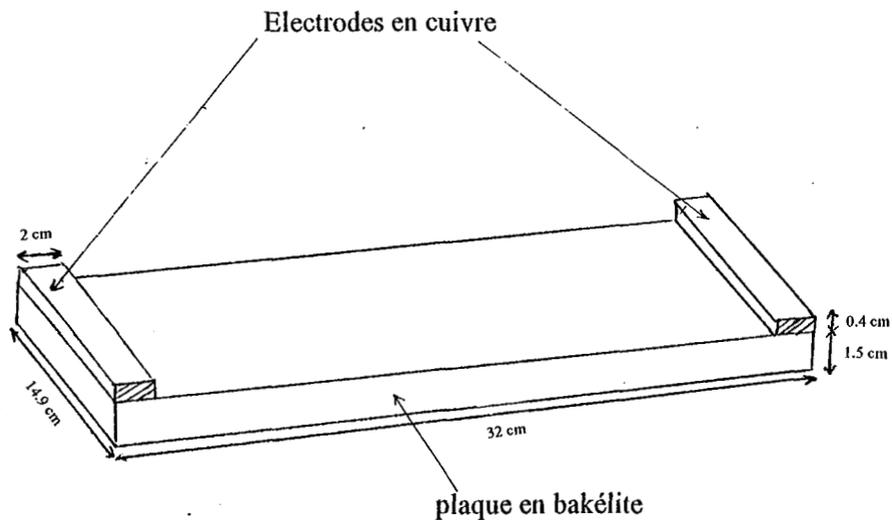


Fig. 4.12. Plaque plane avec les données géométriques.

Le choix de la plaque a été effectué pour avoir une couche de peinture (de pollution) uniforme, l'application de la peinture ayant été réalisée à l'aide d'un pinceau. En effet, nous pensons qu'il est beaucoup plus facile de faire une couche "uniforme" sur une surface plane que sur une surface gauche. D'autre part, la mesure de la conductivité surfacique de la couche de peinture est moins délicate sur une surface plane que sur une surface gauche. Dans l'hypothèse d'une couche uniforme,

la valeur de la conductivité surfacique s'exprime en fonction de la résistance R de la peinture étalée entre les deux électrodes, de la longueur l de la couche et de sa largeur b par la relation

$$\sigma_s = \frac{l}{b R}$$

La mesure de la résistance R nous a donné 19.231 k $\Omega$ . Avec l égale à 30 cm et b à 14.9 cm, nous obtenons une conductivité surfacique de 104  $\mu$ S. Vu la très forte valeur de cette conductivité, on doit trouver une répartition linéaire de potentiel. Ce qui est contredit par les résultats de mesure de potentiel. Cet écart s'explique par le fait que la couche est loin d'être uniforme le long de la plaque. Devant ce problème, nous sommes conduits à mesurer la conductivité surfacique tous les deux centimètres à partir d'une des deux électrodes et nous injectons ensuite ces valeurs dans nos calculs. Cette mesure "locale" de conductivité s'effectue en collant parallèlement aux deux électrodes deux feuilles en aluminium distantes de e égal à 2 cm (fig. 4.13) et de mesurer la résistance R entre les deux feuilles. Connaissant R nous calculons la conductivité surfacique suivant la relation

$$\sigma_s = \frac{e}{b R}$$

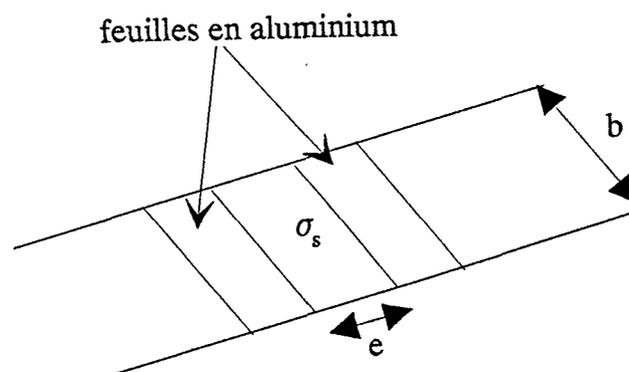


Fig. 4.13. Mesure "locale" de la conductivité surfacique.

Les valeurs de conductivité obtenues sont données sur la figure 4.14.

VALEURS DES CONDUCTIVITES SURFACIQUES

0 - 2 cm:	$2.94E-5$ S
2 - 4 cm:	$5.5E-5$ S.
4 - 6 cm:	$5.75E-5$ S.
6 - 8 cm:	$4.94E-5$ S.
8 - 10cm:	$6.30E-5$ S.
10- 12cm:	$5.18E-5$ S.
12- 14cm:	$3.39E-5$ S.
14-16cm:	$4.26E-5$ S.
16-18cm:	$5.92E-5$ S.
18-20cm:	$8.23E-5$ S.
20-22cm:	$1.03E-4$ S
22-24cm:	$6.17E-5$ S.
24-26cm:	$3.33E-5$ S.
26-28cm:	$1.17E-5$ S.
28-30cm:	$1.61E-5$ S.

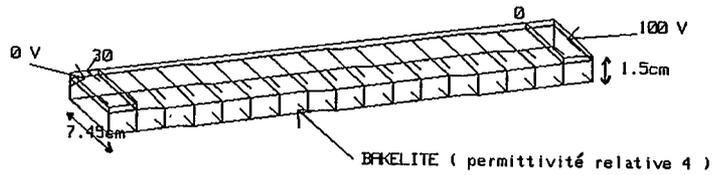


Fig. 4.14. Valeurs des conductivités surfaciques.

Pour les mesures de champ, nous utiliserons une tête d'isolateur (fig. 4.15). Les dimensions de la tête d'isolateur sont donnés dans [34]. Nous avons mis partiellement une couche de peinture sur la surface de l'isolateur. Nous supposons que la répartition de la couche est axisymétrique.

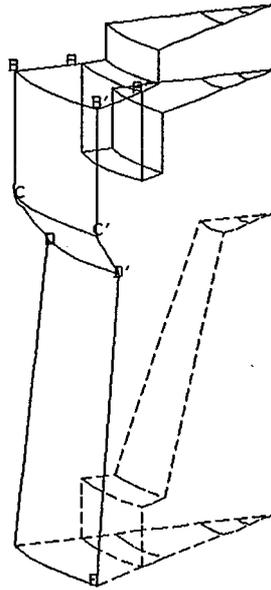


Fig. 4.15. Tête d'isolateur (1/12).

Les parties polluées sont représentées par :

- AA'B'B ( $\sigma_{s1} = 1.18 \mu S$ )

- BB'C'C ( $\sigma_{s2} = 0.335 \mu S$ )

- CC'D'D ( $\sigma_{s3} = 1.09 \mu S$ )

Ces différentes valeurs sont obtenues de la façon suivante :

- pour la partie AA'B'B, nous avons un disque creux de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$ . La mesure de la résistance  $R_1$  entre les deux circonférences de rayon  $r_1$  et  $r_2$ , permet d'avoir la valeur de  $\sigma_{s1}$  suivant la relation

$$\sigma_{s1} = \frac{1}{2\pi R_1} \text{Log} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

- pour la partie BB'C'C, nous avons un cylindre de rayon  $r_2$  et de hauteur  $h$ . La mesure de la résistance  $R_2$  de ce cylindre nous donne  $\sigma_{s2}$  :

$$\sigma_{s2} = \frac{1}{2\pi R_2} \frac{h}{r_2}$$

- pour la partie CC'D'D, nous pouvons l'approximer par une partie de la surface latérale d'un cône tronqué de rayons  $r_2$  et  $r_3$  avec une hauteur  $d$ . La mesure de sa résistance  $R_3$  nous fournit  $\sigma_{s3}$  :

$$\sigma_{s3} = \frac{1}{2\pi R_3 \cos(\alpha)} \text{Log} \left( \frac{r_2}{r_3} \right)$$

Les détails de ces différents calculs ainsi que les valeurs numériques utilisées sont présentés à l'annexe 2.

Nous avons maintenant les différentes valeurs de conductivités surfaciques qui nous permettent de passer à la validation expérimentale proprement dite.

#### IV-3-4 Validation en potentiel

Nous commençons d'abord par les mesures de potentiel que nous avons effectuées le long de la ligne médiane AB de la plaque (fig. 4.14). Une tension de valeur efficace de 100 V de fréquence  $f_1$  égale à 50 Hz est appliquée entre les électrodes de la plaque P, avec une des deux électrodes prise comme référence. Pour avoir la valeur du potentiel en un point M, on met un des deux fils en ce point tandis que l'autre fil est relié à l'électrode de référence. Le résultat est reporté sur la figure 4.15.a.

Afin de voir l'influence des conductivités surfaciques nous avons utilisé une autre valeur de fréquence  $f_2$  égale à  $100f_1$ . Le calcul avec cette fréquence correspond à un calcul à la fréquence de 50 Hz utilisant des conductivités 100 fois plus faibles. En effet dans l'équation (3.9), si l'on multiplie la fréquence (ou la pulsation) et la conductivité surfacique par le même nombre, la valeur de l'équation reste inchangée. On peut donc voir l'influence de la conductivité surfacique sur un isolateur donné pour une fréquence fixée en faisant varier la fréquence et en fixant la conductivité surfacique (annexe 3). La comparaison est présentée sur la figure 4.15.b.

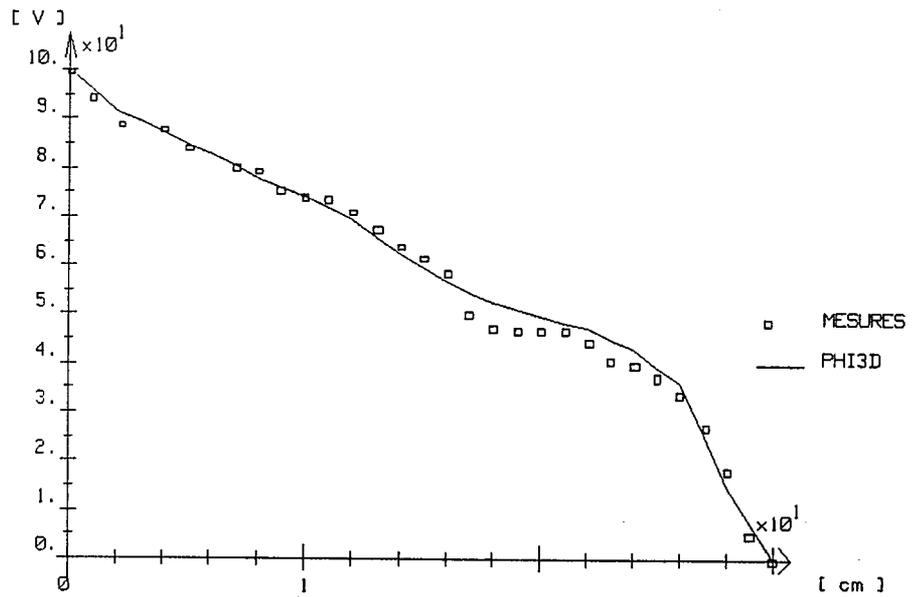


Fig. 4.15.a. Evolution du potentiel le long de AB ( $f = 50$  Hz).

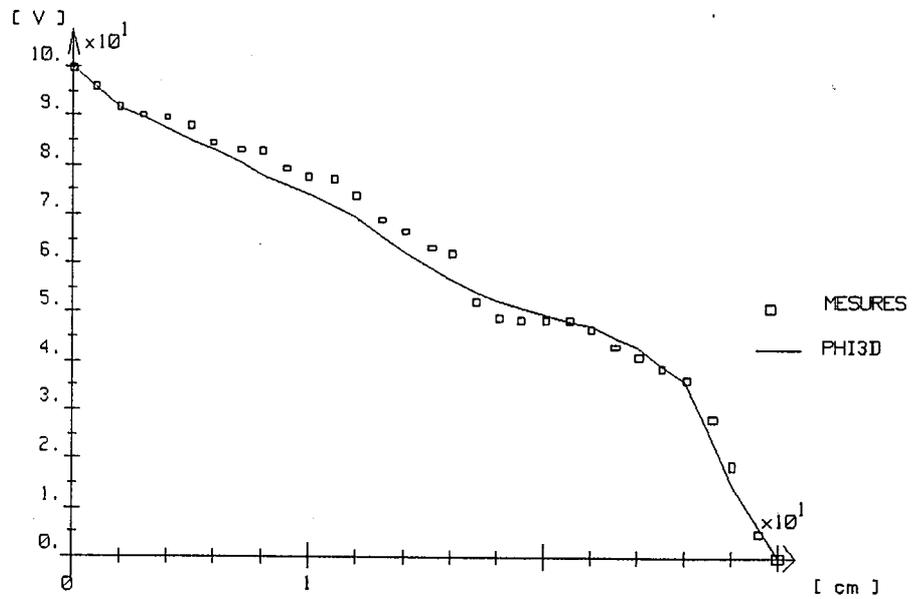


Fig. 4.15.b Evolution du potentiel le long de AB ( $f = 5000$  Hz).

On constate que les deux courbes sont pratiquement identiques. On explique cela par la faiblesse de la valeur de tension appliquée. Ceci donne un champ électrique faible et donc un courant de déplacement négligeable par rapport au courant de conduction. Ce dernier dépend des conductivités surfaciques et il gouverne la répartition du potentiel. Et comme on a les mêmes conductivités, on a des courbes identiques.

#### **IV-3-5 Validation en champ électrique**

Nous avons utilisé 1/12 de la géométrie car nous sommes dans un cas axisymétrique. La tension appliquée est de 5000 V<sub>eff</sub>. Le champ normal est mesuré le long d'une "ligne" parallèle à B'E et située à 11 mm de celle-ci tandis que le champ tangentiel est mesuré le long d'une ligne parallèle à D'E et située à 7 mm de celle-ci (fig. 4.15). La comparaison des mesures et des calculs est portée sur la figure 4.18.a pour le champ normal et sur la figure 4.18.b pour le champ tangentiel. On peut dire que pour le champ tangentiel, la mesure et le calcul fournissent des résultats assez proches par contre pour le champ normal, il y a une divergence notable. Cette divergence provient probablement de la non uniformité du champ normal.

#### **IV-3-6 Conclusion**

Les résultats de validation expérimentale présentés, hormis la comparaison des valeurs du champ normal, montrent que le modèle numérique développé ici donne des résultats fiables pour les répartitions des grandeurs électriques. La divergence constatée sur la comparaison des valeurs du champ normal montrent la difficulté de faire des mesures de champs électriques. Les valeurs de conductivités surfaciques utilisées sont dans les limites fixées par la validation analytique.

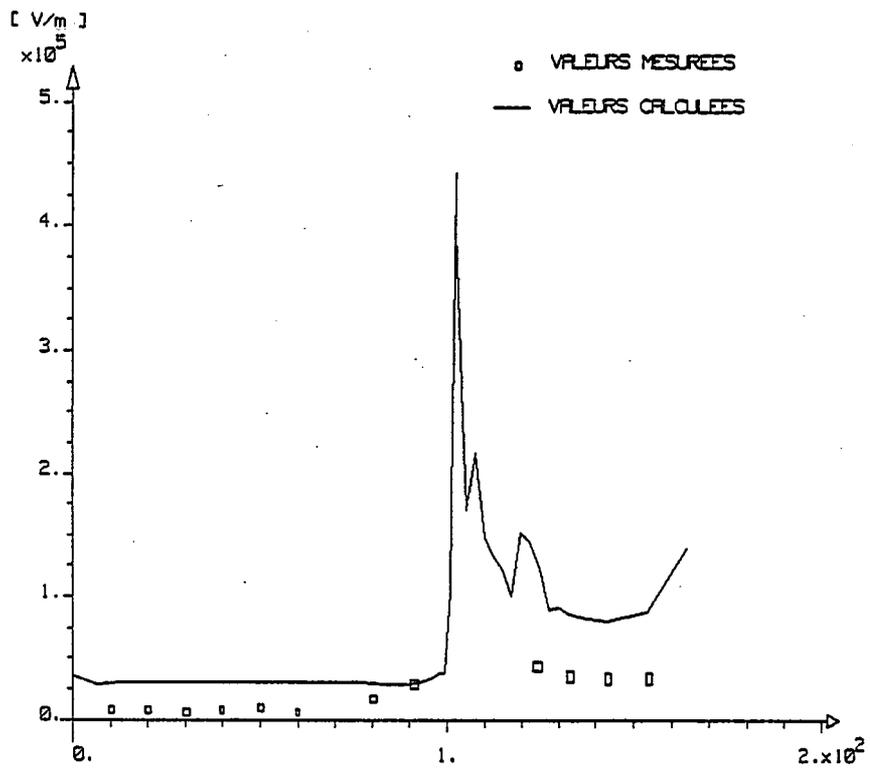


Fig. 4.18.a. Comparaison des valeurs du champ normal.

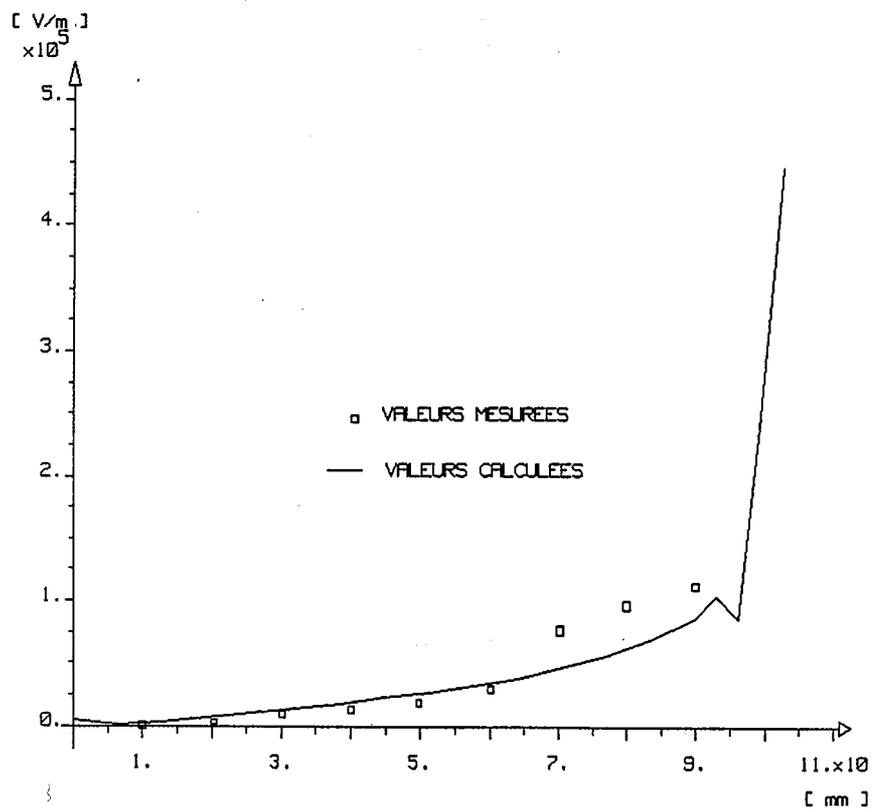


Fig. 4.18.b. Comparaison des valeurs du champ tangent.

#### IV-3-6 Compléments

Nous consacrons cette partie aux comparaisons de nos calculs avec des résultats trouvés dans la littérature. Nous les présenterons ici plus à titre d'illustration que pour validation. Celles-ci portent soit sur les valeurs de courant de fuite, soit sur les valeurs de potentiel, soit sur la direction du champ.

##### a) Valeurs du courant de fuite

Les mesures ont été faites par Huang [34], au Centre de Recherche EDF de Clamart, sur la tête d'isolateur utilisée précédemment (fig. 4.15). Celle-ci est soumise à une pollution artificielle de type du brouillard salin. Pour avoir la valeur de la conductivité surfacique, on lui applique une tension et on mesure la valeur du courant de fuite. A partir de ces deux grandeurs et de la géométrie de l'isolateur, on calcule la conductivité surfacique de la couche de pollution simulée par le brouillard salin. Après, on injecte cette valeur dans le calcul pour retrouver la valeur du courant de fuite. La comparaison entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées est reportée sur le tableau 4.2.

Tableau 4.2. Comparaison des valeurs de courant de fuite.

$V_0(V_{rms})$	$\sigma_s(\mu S)$	Courant mesuré(mA)	Courant calculé(mA)
830	1.077	2.12	2.13
1070	1.03	2.62	2.64
600	3.54	5.02	5.07
1000	3.81	9.05	9.11

## b) Valeurs du potentiel

L'isolateur utilisé ici est de type support [17]. Les valeurs du potentiel sont mesurées le long d'une génératrice et la méthode de mesure utilisée est celle de la cuve électrolytique. Nos calculs ont été effectués sur la géométrie représentée sur la figure 4.16. Comme précédemment, nous avons pris le 1/12 de la géométrie totale car nous avons ici une configuration axisymétrique. La partie AA'B'B est couverte d'une couche semi-conductrice de conductivité surfacique de  $0.014 \mu\text{S}$  et la fréquence utilisée est de 50 Hz. L'évolution des valeurs du potentiel mesurées et calculées le long de la génératrice (A'B'C) est reportée sur la figure 4.17.

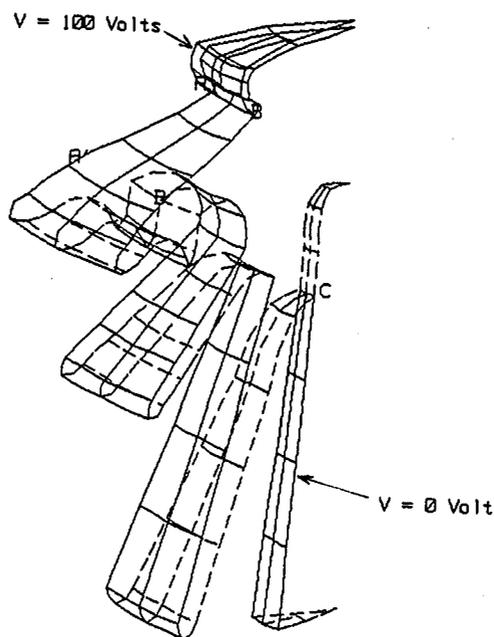


Fig. 4.16. Géométrie utilisée pour l'isolateur support.

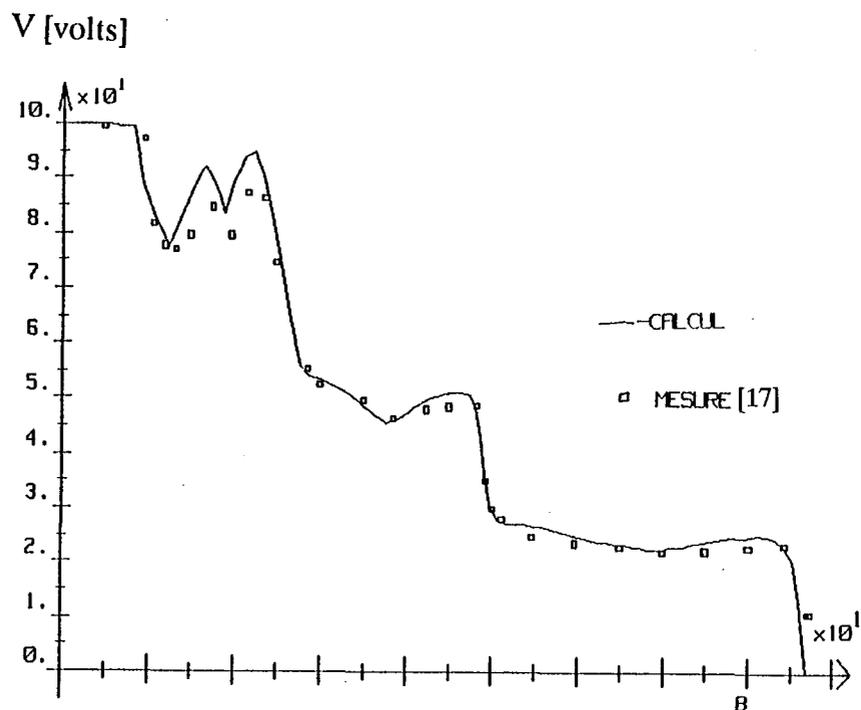


Fig. 4.17. Valeurs du potentiel le long d'une génératrice.

### c) Direction du champ électrique

Nous présentons ici un résultat relatif au champ, celui-ci a été trouvé dans [35]. La mesure porte sur la direction du champ par rapport à l'axe de l'isolateur à une distance  $d$  égale à 12 cm de celui-ci. Comme nous n'avons pas la valeur précise de la conductivité de la couche de pollution, nous nous contentons d'une comparaison à sec ( $\sigma_s = 0$  S). La géométrie utilisée avec la comparaison sont présentées sur la figure 4.19.

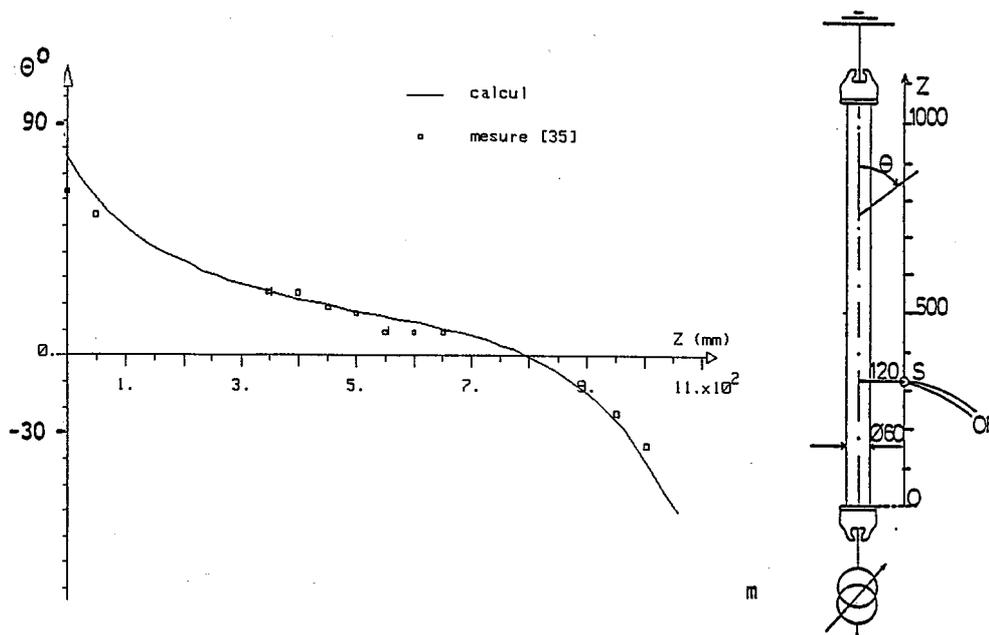


Fig. 4.19. Direction du champ.

#### IV-3-7 Quelques exemples

Avant de fermer ce chapitre, nous donnerons deux exemples de calcul effectués par le modèle numérique. Ceux-ci ont été choisis en ayant en vue des futures applications ou extensions.

Le premier montre l'influence de la présence d'une couche conductrice sur la répartition de potentiel à la surface de l'isolateur. Les calculs ont été fait sur l'isolateur support cité précédemment (fig.4.16) et les résultats sont présentés sur la figure 4.20. Ils correspondent aux cas suivants :

- électrostatique pure (a),
- la partie ABB'A' avec  $\sigma_s = 0.014 \mu\text{S}$  (b),
- pollution totale uniforme :  $\sigma_s = 0.014 \mu\text{S}$  (c),
- pollution totale uniforme :  $\sigma_s = 50 \mu\text{S}$  (d)(forte valeur de conductivité),
- calcul en conduction pure (e).

Les cas (a), (c) et (d) mettent en évidence l'influence de la valeur de la conductivité surfacique sur la répartition du potentiel. Plus la valeur de la conductivité est grande, plus la répartition de potentiel se linéarise.

Les cas (b) et (c) montrent l'influence de la distribution de la pollution sur la répartition du potentiel.

Les cas (d) et (e) montrent que dans le cas d'une répartition totale et uniforme d'une couche de pollution de forte valeur de conductivité, le calcul en conduction pure permet de gagner du temps lorsqu'on n'est intéressé que par les valeurs du potentiel.

Le second montre l'évolution du potentiel en fonction du temps. La configuration choisie est celle qui a été utilisée pour la validation analytique (fig. 4.3). Les calculs sont faits avec une conductivité surfacique de  $5.10^{-9}$  S et les résultats sont présentés sur la figure 4.21. On note la présence de déphasage entre les valeurs du potentiel en différents points de la ligne de fuite malgré la faible valeur de la conductivité surfacique.

#### **IV-4 Conclusion**

La validation analytique et la validation expérimentale utilisées ici ont joué des rôles complémentaires. La première nous a permis de connaître l'ensemble des valeurs de conductivité surfacique qu'on peut utiliser dans les calculs. Cet ensemble englobe les valeurs de conductivités surfaciques naturelles. La deuxième renforce la fiabilité du modèle numérique.

Les deux exemples simples présentés ne font que révéler la capacité de ce modèle numérique. Nous appelons module pollution le logiciel basé sur ce modèle.

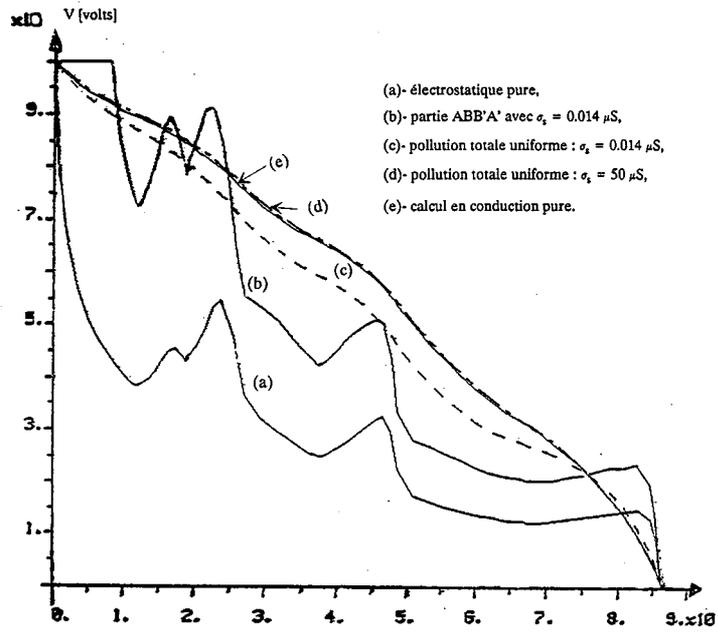


Fig. 4.20. Influence de la pollution (valeur, répartition).

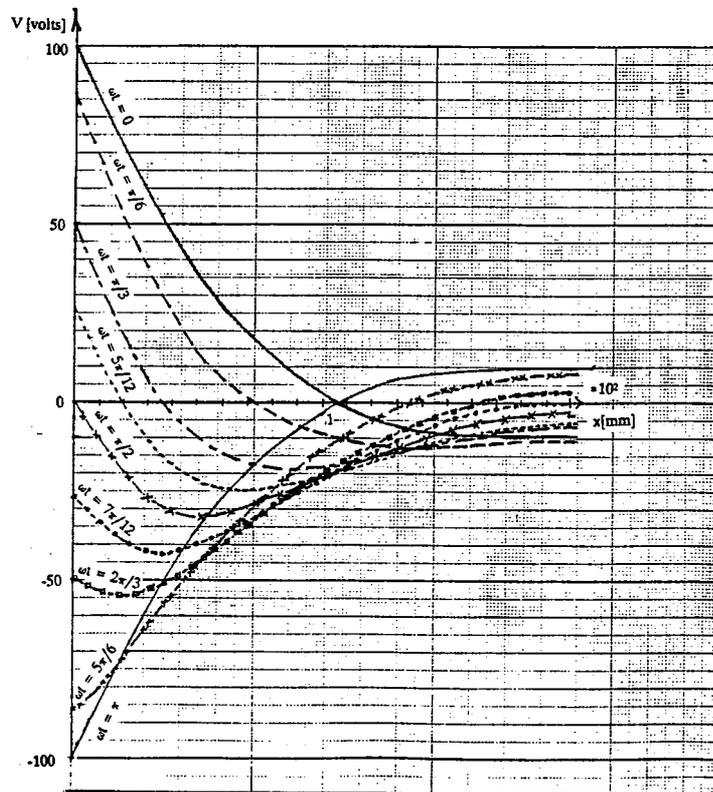


Fig. 4.21. Evolution en fonction du temps.

## **CHAPITRE V**

### **APPLICATIONS ET EXTENSIONS**

#### **V-1 Introduction**

Le module "pollution" fournit les répartitions du champ et du potentiel électriques à la surface des isolateurs pour des configurations tridimensionnelles (géométrie, répartition de pollution). Nous allons examiner maintenant comment on peut exploiter ces différentes répartitions en commençant par des applications concrètes du module. Ensuite nous envisagerons les possibles extensions du module. Ces extensions portent sur les conséquences thermiques dues à la circulation d'un courant de fuite à travers la couche de pollution et dont les conséquences sont principalement des apparitions de zones sèches et des amorçages d'arc. Nous terminerons par d'autres extensions qui nous paraissent intéressantes.

#### **V-2 Conception et choix des matériels d'isolation**

Parmi les facteurs qui entrent en jeu dans le choix des isolateurs dans les ouvrages électriques, la tenue sous pollution est un facteur déterminant. La Commission Electrotechnique Internationale a proposé, dans sa publication CEI-815 [36], plusieurs règles générales simples qui devraient être une aide pour le choix des isolateurs. Ces règles ont été établies sur la base de l'expérience en service et de nombreux résultats d'essais dans des conditions de pollution naturelle ou artificielle. Elles sont essentiellement fondées sur la spécification d'une ligne de fuite minimale

et de quelques paramètres caractérisant le profil des isolateurs. Deux exemples de profil avec leurs paramètres caractéristiques sont présentés sur les figures 5.1.

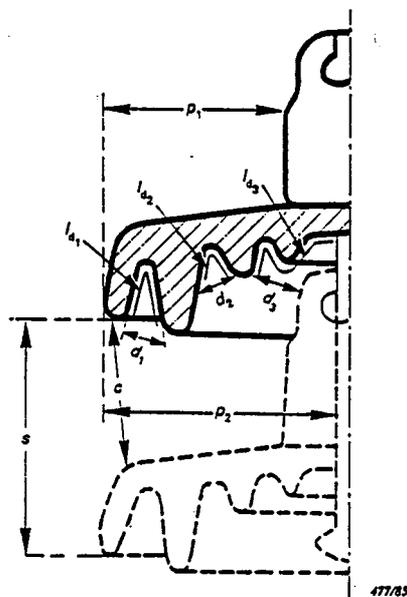


Fig. 5.1.a. Isolateur à capot et tige.

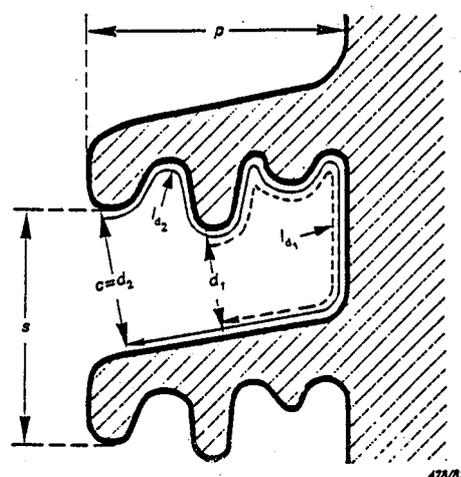


Fig. 5.1.b. Ailettes à ondulations.

Bien qu'on dispose de ces règles, il est intéressant de valider ce guide CEI-815 à l'aide d'un logiciel de calcul de champ et d'étudier l'influence des paramètres non pris en compte dans ce guide. Ceci a fait l'objet d'un travail dans le cadre d'un DEA [37] et dont les principaux résultats sont :

- la validation globale de ce guide, c'est à dire qu'on a retrouvé les recommandations de la CEI concernant le choix des isolateurs,

- la mise en évidence de l'importance de certains paramètres géométriques relatifs aux nervures :  $W$  et  $D$  (fig. 5.2).

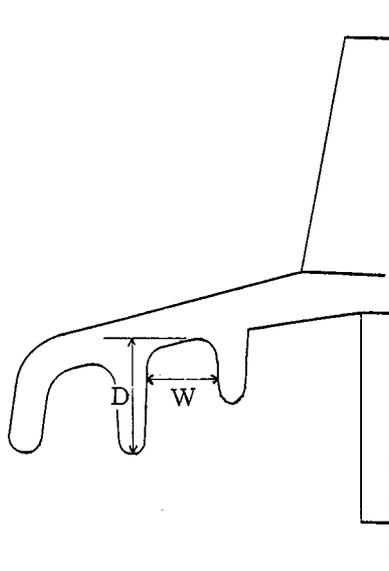


Fig. 5.2. Paramètres géométriques d'une nervure.

Toujours dans le cadre de ce DEA, l'étude de l'influence du nombre de nervure à longueur de ligne de fuite constante a été effectuée pour un isolateur de type capot-tige. L'évolution de la répartition de potentiel (pour une répartition de pollution donnée) en fonction du nombre de nervure est reportée en annexe 4. La variation du nombre de nervure à longueur de ligne de fuite constante entraîne une modification de  $W$  ou de  $D$ . Ce qui peut conduire à une diminution de la ligne de fuite effective de l'isolateur et peut donc être néfaste pour sa performance. La solution consiste donc à trouver un compromis entre le nombre de nervures et les valeurs de  $W$  et de  $D$ . Des calculs effectués avec le module pollution a montré que ce compromis dépend du type et de la distribution de la pollution. D'où l'intérêt d'avoir un code de calcul de champ pouvant prendre en compte la pollution.

Pour finir ce paragraphe, ajoutons que le module pollution permet d'affiner ou de compléter le guide CEI-815 en étudiant l'influence des pièces de garde ou l'influence de la hauteur d'une colonne de poste par exemple.

### V-3 Validation et interprétation d'essais de vieillissement accéléré

Les isolateurs à enveloppe synthétique utilisés sur les réseaux électriques peuvent se dégrader au cours du temps sous l'effet des contraintes climatiques, électriques et de pollution auxquelles ils sont soumis en service. Ces contraintes climatiques sont entre autre la pluie et le rayonnement solaire. EDF a donc mis au point un essai dit de vieillissement accéléré pour valider la conception des matériels à isolation synthétique avant leur utilisation en réseau [38]. Cet essai est réalisé dans une enceinte climatique, adaptée au matériel du réseau MT 20 kV français, et dont les dimensions ne permettent pas d'appliquer une tension supérieure à  $24 / \sqrt{3}$  kV. Durant ce type d'essai, la tension est appliquée en permanence et les contraintes climatiques et de pollution sont appliquées, alternativement ou simultanément, selon un cycle journalier qui dure 5000 heures. L'expérience acquise par EDF montre qu'un essai de 5000 heures permet de représenter au moins 10 ans de service sur le réseau. La représentativité de l'essai a été établie en comparant les types et les formes des dégradations observées en laboratoire et au cours d'essais en conditions naturelles : pour un type d'isolateur donné, les dégradations s'initient et se développent de manière identique au cours des deux essais.

Cette essai de vieillissement accéléré est utilisé pour l'étude et la qualification d'isolateurs MT (et plus généralement de matériel MT à enveloppe synthétique) mais aussi pour du matériel à enveloppe synthétique destiné à des réseaux de tension supérieure à 20 kV. Dans ce cas, l'isolateur est représenté en essai par une maquette 20 kV. L'utilisation du code de calcul PHI3D a permis d'étudier la représentativité de cette maquette.

La méthode retenue pour l'étude de la représentativité consiste à comparer les résultats de calculs effectués sur la maquette et sur l'isolateur HT en réseau (prise en compte de son environnement : pièces de garde, ...) selon les critères suivants [39] :

- comparaison qualitative des répartitions du champ et du potentiel dans un plan de coupe passant par l'axe des isolateurs,
- comparaison quantitative de ces mêmes répartitions sur plusieurs lignes droites définies dans la partie la plus contrainte des isolateurs,
- comparaison quantitative des valeurs de champ maximal.

Ces critères ont aussi été définis en fonction de la localisation et des types des principaux défauts rencontrés sur des isolateurs composites au cours d'essais de vieillissement accéléré.

Les résultats de calcul effectué pour la maquette et l'isolateur HT ont montré que les valeurs du champ moyen (différence de potentiel entre les deux extrémités de la ligne divisée par la longueur de la ligne) calculées, soit à travers la première ailette (coté potentiel), soit à la surface supérieure de cette ailette sont de même ordre de grandeur. L'utilisation d'un code de calcul a permis de confirmer les résultats expérimentaux : la maquette MT est bien représentative de l'isolateur HT en réseau.

Le code de calcul utilisé jusqu'à maintenant ne permet pas de prendre en compte les valeurs de conductivité surfacique de la couche de pollution. L'utilisation du module pollution permet de combler cette lacune et de faire une étude paramétrique par la suite.

#### **V-4 Application à l'étude des conséquences thermiques**

L'énergie dissipée par le passage d'un courant de fuite à travers la couche de pollution humide se traduit par la perte de la quantité d'eau contenue dans la couche. Par conséquent, il y a variation de la conductivité surfacique de la couche qui engendre l'apparition des bandes sèches (zones de très faible conductivité surfacique). C'est la présence de ces bandes sèches qui est à l'origine des amorçages d'arc qui peuvent conduire au contournement des isolateurs. Comment peut-on, avec

le module pollution, localiser l'apparition de ces bandes et de prévoir l'amorçage d'arc?

L'idée qui vient à l'esprit, est d'utiliser la répartition de la densité de puissance thermique ( $\sigma_s ||E||^2$ ). On peut assimiler en première approximation les zones de fortes densités de puissance thermique aux zones d'apparition des bandes sèches. Comme la largeur initiale de ces bandes est de quelques millimètres [40,41,42], on choisira des zones de quelques millimètres de largeur entourant les maxima de densité de puissance thermique. On peut donc faire un deuxième calcul en remplaçant ces zones de très fortes valeurs de densité de puissance thermique par des zones de très faibles valeurs de conductivité surfacique ou par des surfaces propres ( $\sigma_s = 0$ ). Pour trouver les zones propices à l'amorçage d'arc, on peut procéder de deux façons :

- soit on utilise la répartition du module du champ électrique et on cherche les endroits où le module de champ est proche de la valeur du champ disruptif de l'air,
- soit on utilise la valeur du champ moyen à travers les bandes sèches. On calcule donc la chute de potentiel aux bornes des bandes sèches et on divise cette valeur par leur largeur. On compare ensuite la valeur de ce champ moyen ainsi obtenu à la valeur du champ disruptif de l'air.

Une fois amorcé, un arc peut évoluer de différentes façons [1] :

- soit il s'éteint,
- soit il se déplace latéralement pour trouver une position plus stable correspondant à une plus faible longueur d'arc,
- soit il s'allonge pour provoquer le contournement.

C'est ce dernier qui pose des problèmes aux réseaux de transport d'énergie électrique.

L'allongement de l'arc dépend de nombreux paramètres, en particulier de la largeur de la bande sèche et de la tension appliquée. Lorsqu'il s'agit de prévoir cet

allongement, il faut utiliser un critère de contournement. Ce que nous développerons dans le paragraphe suivant.

### V-5 Calcul de la tension de contournement

Une caractéristique importante des isolateurs est leur tenue au contournement. Elle est caractérisée par la tension de contournement  $V_c$ , la connaissance de cette valeur étant un des buts des divers modèles mathématiques de contournement. Parmi ces modèles, il y a celui proposé par Claverie-Porcheron [43] qui fournit la valeur de tension de contournement sous tension alternative. Cette valeur dépend de la résistance en série avec l'arc et la valeur de cette résistance peut être calculée de deux façons, soit par considérations géométriques, celle-ci est moins précise du fait qu'elle ne tient pas compte des lignes de courant, soit expérimentalement. Nous allons présenter ici une façon de déterminer cette résistance tout en évitant le recours à l'expérimentation. Mais avant cela nous considérons d'abord le critère de contournement de Claverie-Porcheron.

Dans leur modèle, ces auteurs prennent un arc de longueur  $x$  en série avec une résistance  $R(x)$ . L'écriture de la loi d'Ohm donne

$$V = \frac{100x}{\sqrt{I}} + R(x)I \quad (5.1)$$

En plus de cette équation, ils associent le critère de réamorçage d'arc donné par

$$V = \frac{800x}{\sqrt{I}} \quad (5.2)$$

La tension de contournement s'obtient en écrivant que ces deux courbes sont tangentes. Ce qui se ramène à chercher la valeur de  $x$  telle que

$$\frac{d(x^2R(x))}{dx} = 0 \quad (5.3)$$

La valeur  $x_c$  qui vérifie cette équation représente la longueur d'arc critique. C'est la plus grande longueur d'arc qu'il est possible d'observer en régime permanent. A partir de cette longueur d'arc critique, on a la tension  $V_c$  et le courant  $I_c$  de contournement qui sont donnés par les relations [43] :

$$V_c = 90(x_c^2 R(x_c))^{1/3} \quad (5.4)$$

et

$$I_c = \left( \frac{700x_c}{R(x_c)} \right)^{2/3} \quad (5.5)$$

Pour trouver cette valeur  $x_c$ , on peut procéder pas à pas. C'est à dire, on part d'une valeur initiale de  $x$  qui peut être la longueur de la bande sèche, on calcule la valeur de  $x^2 R(x)$  pour des valeurs croissantes de  $x$  jusqu'à trouver son maximum. Mais pour cela, nous avons besoin de la valeur de  $R(x)$ . On pourrait la calculer comme suit en supposant que :

- l'arc n'est en contact qu'avec deux points de l'isolateur (courant d'arc constant) et que ces deux points on la même valeur de potentiel (condition aux limites supplémentaire),

- la couche de pollution est en contact avec au moins une des deux électrodes (pour qu'on puisse calculer la valeur du courant de conduction  $I$ ).

Pour une valeur de  $x$ , on calcule la nouvelle répartition de potentiel en tenant compte de la condition aux limites supplémentaire. Avec cette nouvelle répartition de potentiel, on peut calculer la puissance dissipée par effet Joule  $P_J$  à travers la couche de pollution  $S$ . Celle-ci est donnée par

$$P_J = \int_S \sigma_s ||\text{grad}_s V||^2 dS \quad (5.6)$$

Une deuxième façon d'écrire cette puissance est d'utiliser la résistance  $R(x)$  en série avec l'arc :

$$P_J = R(x)I^2 \quad (5.6')$$

où  $I$  est le module du courant de conduction entrant ou sortant par une des deux électrodes. En égalisant ces deux expressions, on obtient :

$$R(x) = \frac{\int \sigma_s ||\text{grad}_s V||^2 dS}{I^2} \quad (5.7)$$

Contrairement à l'utilisation de facteur de forme, cette manière de calculer la résistance tient compte de lignes de courant.

On a maintenant tous les éléments qui permettent de tracer la courbe  $x^2R(x)$  et de trouver la valeur  $x_c$  qui la rend maximale. La tension  $V_c$  et le courant  $I_c$  de contournement s'obtiennent en utilisant les équations (5.4) et (5.5).

#### V-6 Calcul de potentiel sous surtension de manoeuvre

En dehors des tensions à fréquence industrielle, les isolateurs peuvent être soumis à des tensions transitoires de type manoeuvre [44]. L'étude du comportement des isolateurs pollués soumis à ce type de tension a fait l'objet d'un certain nombre de publications [44-47]. Contrairement au contournement sous tension à fréquence industrielle, le contournement sous surtension de manoeuvre se fait sans création de zones sèches : le temps d'application de la surtension est beaucoup plus court que le temps d'apparition d'une zone sèche.

La surtension de manoeuvre fait partie d'un ensemble qu'on appelle choc normal et dont l'équation en fonction du temps est [48] :

$$U(t) = U_0 \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau_q}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right] \quad (5.8)$$

Le schéma de ce choc normal est donné sur la figure 5.3.

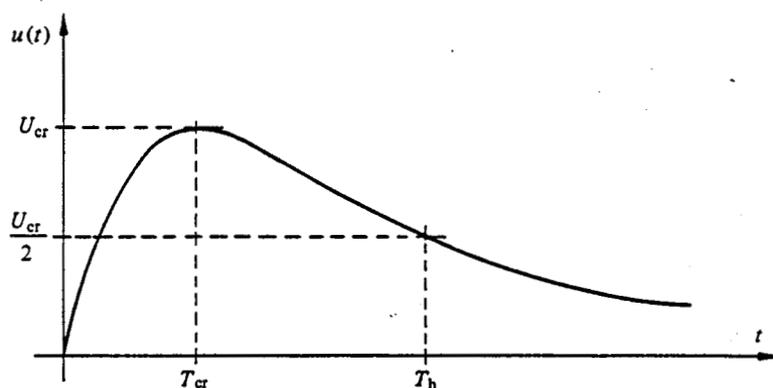


Fig. 5.3: Choc normal.

Ces principaux paramètres sont :

- la durée jusqu'à la crête,  $T_{cr}$  est égale à :

$$T_{cr} = \frac{\tau_q}{\delta - 1} \ln \delta \quad (5.9)$$

où  $\delta$  est égal à  $\frac{\tau_q}{\tau_f}$ ,

- la valeur de crête, atteinte par le choc, est calculée à partir de :

$$U_{cr} = U_0 (\delta^{1/(1-\delta)} - \delta^{\delta/(1-\delta)}) \quad (5.10)$$

- la durée jusqu'à la mi-amplitude  $T_h$  vaut :

$$T_h = \tau_q \ln \frac{2U_0}{U_{cr}} \quad (5.11)$$

L'idée de pouvoir utiliser le module pollution pour un choc normal vient des deux constats suivants :

- si on applique une tension alternative aux bornes de l'isolateur, le module pollution permet d'avoir la répartition du potentiel pour un temps  $t$  donné,

- la fonction  $U(t)$  définie par (5.8) peut être décomposée en série de Fourier. On utilise la courbe  $U(t)$  pour  $t$  compris entre les instants 0 et  $T$ ,  $T$  étant choisi supérieur ou égal à  $T_h$ . On prolonge cette courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère (fig. 5.4) et on la considère comme périodique de  $2T$ .

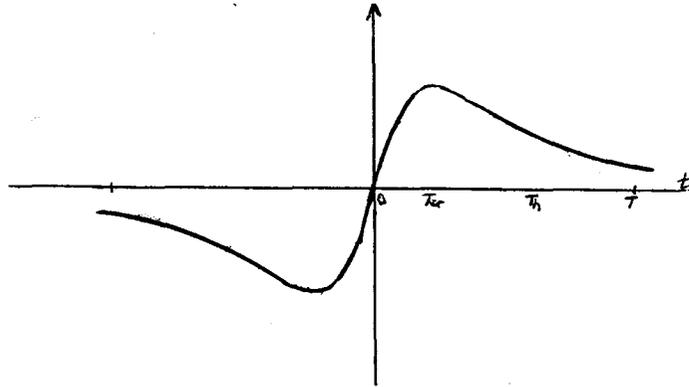


Fig. 5.4. Prolongement de  $U(t)$ .

La décomposition en série de Fourier permet d'approximer la courbe  $U(t)$  par une somme de fonctions sinusoïdales d'amplitude  $U_k$  et de fréquence  $k/2T$

$$U(t) \approx \sum_{k=1}^{k=N} U_k \sin(2k\pi ft) \quad (5.12)$$

où  $N$  est le nombre de termes utilisés.

Après obtention de cette décomposition spectrale, on effectue le calcul pour chaque composante ( $U_k$ ,  $\omega_k = 2k\pi f$ ) et on stocke les résultats sur  $N$  fichiers différents. Ce qui permet d'avoir par superposition, les répartitions du potentiel et du champ pour un instant donné. Si on connaît l'instant de contournement, la connaissance de ces répartitions à cet instant pourrait aider à la compréhension du phénomène de contournement des isolateurs soumis à cette surtension. Ce procédé n'exige pas des calculs pas à pas. En outre, les éléments des matrices des systèmes linéaires correspondant à chaque composante sont identiques à quelques termes près.

### V-7 Etude des dispositifs anti-effluves

Les enroulements des stators des grandes machines électriques tournantes, dont les tensions nominales vont de 5 à 24 kV, sont constitués par des barres ou bobines comprenant des conducteurs en cuivre entourés d'une isolation micacée. Lorsque la tension est appliquée sur les conducteurs, il apparaît un gradient de potentiel élevé, notamment à l'extrémité de l'électrode de mise à la terre, et il se produit à cet endroit des effluves, ou des décharges, pouvant détruire les isolations et par conséquent la machine [49]. Celui-ci est soumis à des gradients de l'ordre de 2,5 kV/mm (gradient entre le cuivre et le fer). Pour lutter contre ces inconvénients, on pose sur les barres ou les bobines, à l'extrémité de l'électrode HT et recouvrant celle-ci sur une distance suffisante, un revêtement semi-conducteur (fig. 5.4). Le rôle de ce revêtement est de réduire régulièrement le champ électrique et d'éviter les effluves.

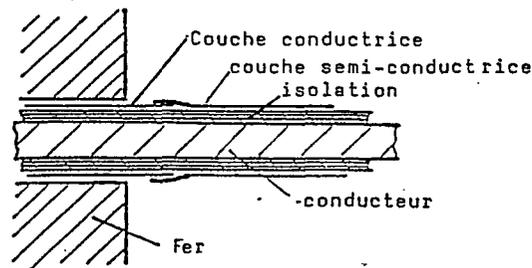


Fig. 5.4. Schéma d'une tête de bobine.

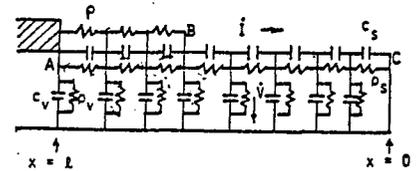


Fig. 5.5. modèle réseau.

Nous retrouvons ici un phénomène semblable à la présence de couche polluée sur les isolateurs. Jusqu'à maintenant, pour résoudre ce problème, on utilisait les modèles réseaux qui consiste à remplacer la tête de bobine par un réseau de

capacités et de résistances (fig. 5.5) [50]. Les résistances simulent ici les couches semi-conductrices et les capacités simulent les isolants. L'utilisation du module pollution permet de choisir en première approximation la résistivité surfacique de la couche à appliquer. Généralement, la résistivité utilisée est non linéaire, c'est à dire qu'elle varie avec la tension ou le champ. Une méthode d'approche pour prendre en compte cette non-linéarité est de procéder par itérations, c'est à dire que l'on fait un premier calcul avec les valeurs de résistivités initiales, puis on corrige les valeurs des résistivités en fonction des valeurs de la tension et on recommence le calcul jusqu'à ce qu'on ait une réduction linéaire de la tension.

## **V-8 Conclusion**

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques applications du module et ses possibles extensions. Ces quelques applications nous ont montré comment le module pollution peut devenir une aide précieuse dans la conception et le choix du matériel d'isolation. Les extensions que nous avons présentées nécessitent quelques développements. Parmi ces extensions, nous avons la détermination de la tension de contournement qui est un des objectifs de divers modèles mathématiques de contournement ou des différents types d'essai.

## CONCLUSION GENERALE

La présence de couche de pollution à la surface d'un isolateur modifie complètement ses répartitions du champ et du potentiel électriques. Un modèle numérique basé sur la méthode des équations intégrales de frontière a été développé afin de prendre en compte la présence de cette couche, caractérisée par sa conductivité surfacique. Ce modèle a été validé analytiquement et expérimentalement. Les résultats de ces différentes validations ont montré que pour les valeurs de conductivités surfaciques généralement rencontrées dans la nature le modèle donne des résultats fiables.

Ce modèle présente des avantages importants par rapport aux différents modèles existants au point de vue du nombre d'inconnues mise en jeu, du type d'inconnue (valeurs du potentiel et du champ normal), de la prise en compte des domaines infinis, des configurations 3D ainsi que de la non uniformité de la couche de pollution.

Le module pollution fondé sur ce modèle sera une aide précieuse pour la conception et le choix des matériels d'isolations. Il permettra la réduction du coût et des délais lors de la conception d'un système d'isolation et il contribuera aussi à la compréhension des phénomènes physiques concernant le comportement sous pollution des isolations externes. La réalisation des extensions suggérées élargira le domaine d'application de ce module.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Le Roy, Gary, Hutzler, Lalot, Dubanton, *Les propriétés diélectriques de l'air et les très hautes tensions*, chapitre 15, Eyrolles, 1984.
- [2] F. A. M. Rizk, *Mathematical models for pollution flashover*, *Electra*, n°78, may 1981, p.71-103.
- [3] S. Gopal, Y.N. Rao, *Flashover phenomena of polluted insulators*, I.E.E. Proceedings, vol. 131, part C, n°4, july 1984, p.140-143.
- [4] S. Flazi, *Etude du contournement électrique des isolateurs HT pollués, critère d'élongation de la décharge et dynamique du phénomène*, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1987.
- [5] G. Zhicheng, Z. Renyu, *Calculation of flashover voltage of polluted insulators under DC and AC voltages*, Proceedings second international conference on properties and applications of dielectric materials, Beijing, China, september 12-16, 1988, p. 229-232.
- [6] Publication CEI-507, *Essais sous pollution artificielle des isolateurs pour haute-tension destinés aux reseaux à courant alternatif*, novembre 1988.
- [7] A. Cimador, *La pollution et le dimensionnement des isolateurs en régions polluées*, Journées d'études S.E.E., 21-22 mars 1990.
- [8] R. Jouaust, *Diélectriques solides*, Editions de la revue d'optique, 1949.
- [9] R. Wilkins, *Flashover voltage of high-voltage insulators with uniform surface pollution film*, Proceedings I.E.E., vol. 116, n°3, 1969, p.457-465.

- [10] A. S. Maikopar, K. P. Morozov, *The "moist-discharge" characteristics of unevenly fouled insulators*, Electric Technology USSR, n°3, 1968, p.131-139.
- [11] R. G. Olsen, *Integral equation for electrostatic problem with thin dielectric or conducting layers*, I.E.E.E. trans. EI, vol. 21, n°4, august 1986, p.565-573.
- [12] M. D.R. Beasley, J.H. Pickles, L. Beretta, G. d'Amico, M. Fanelli, G. Giuseppetti, M. Morin, J.P. Grégoire, G. Gallet, *Etude comparative de trois méthodes de calcul automatique du champ électrostatique*, RGE, tome 88, vol. 1, janvier 1979, p.7-18.
- [13] E. Durand, *Electrostatique*, tome 2, Masson et C<sup>ie</sup>, 1964.
- [14] J. A. Seeger, *Calculation of electric fields near insulator boundaries by finite differences*, Proceedings of the 1st Iranian Congress of Electrical Engineering, Shiraz, May 12-16, 1974, p.278-287.
- [15] E. Asenjo S., N. Morales O., *Low frequency complex fields in polluted insulator*, I.E.E.E. trans. EI, vol. 17, n°3, june 1982, p.278-287.
- [16] G. Molinari, G. Sciutto, A. Viviani, *Experimental results and computer simulation of electric fields around insulating structures under AC and DC conditions*, 3<sup>rd</sup> I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper n°12-17.
- [17] S. Kato, H. Kokai, Y. Nakajima, T. Kouno, *Finite element method for calculation of potential distribution to the porcelain insulator with semiconducting surface layer*, 3<sup>rd</sup> I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper n°12-11.
- [18] J. R. Brauer, H. Kalfaian, H. Moreines, *Dynamic electric fields computed by finite elements*, I.E.E.E. trans. IA, vol. 25, n°6, november/december 1989, p.1088-1092.
- [19] O. W. Andersen, *Finite element solution of complex potential electric fields*, I.E.E.E. trans. PAS, vol. 96, v°4, july/august 1977, p.1156-1161.

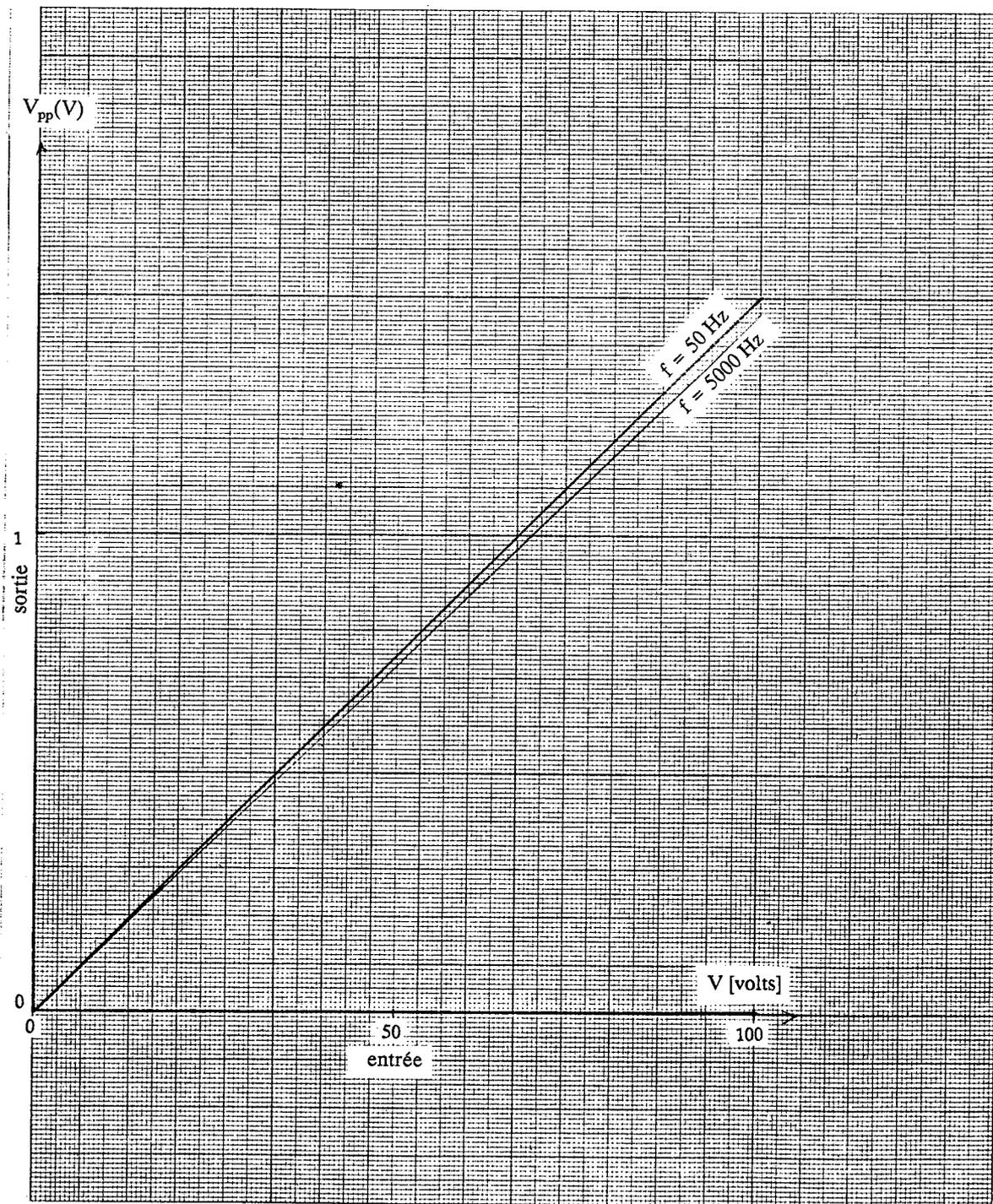
- [20] T. Takuma, T. Kawamoto, *Field calculation including surface resistance by charge simulating method*, 3<sup>rd</sup> I.S.H.V.E., Milan 28-31 august 1979, paper n°12-01.
- [21] M. Abdel-Salam, E. K. Stanek, *Optimizing fields stress on high-voltage insulators*, I.E.E.E. trans. EI, vol. 22, n°1, february 1987, p.47-56.
- [22] J. Daffe, R. G. Olsen, *An integral equation method for solving rotationnally symmetric electrostatic problems in conducting and dielectric material*, I.E.E.E. trans. EI, vol. 98, n° 5, sept/oct. 1979, p.1609-1616.
- [23] B.L. Qin, G.Z. Chen, Q. Qiao, J.N. Sheng, *Efficient computation of electric fields in high voltage equipement*, I.E.E.E. trans. MAG, vol. 26, n°2, march 1990, p.387-390.
- [24] A. Majid, O. Tonnesen, *Boundary element solution of the surface pollution on the voltage distribution of a HV Insulators*, NORD-IS, june 13-15, 1988, paper n°13.
- [25] M. Dubois, *Application de la théorie des distributions à la formulation intégrale de problèmes aux limites*, chapitre 1, CETIM, Senlis, 1979.
- [26] B. Ancelle, *Emploi de la méthode des équations integrales de frontière et mise en oeuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques*, Thèse de doctorat, Grenoble, 1979.
- [27] G. Dhatt, G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris, 1981.
- [28] L. Nicolas, L. Krähenbühl, *PHI3D a graphic interactive package for 3D fields computations*, Conference Betech 86, MIT, Cambridge USA.
- [29] Q. S. Huang, *Applications nouvelles de la méthode des équations integrales de frontière en électrotechnique*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1987.

- [30] Groupe de travail 04 du comité d'Etudes n°33, *Comparaison critique de méthodes d'essais sous pollution artificielle*, ELECTRA, n°64, may 1979, p.117-136.
- [31] L. Youwei, W. Zun, Z. Jianchao, C. Weijiang, *Computation of mixed field with surface charge method*, 7<sup>th</sup> I.S.H.V.E., Dresden 26-30 august 1991, paper n°11-07.
- [32] J.L. Rasolonjanahary, L. Krähenbühl, *Modélisation 3D de la conduction surfacique sur les isolateurs pollués*, Rapport annuel n°1, Contrat M73L12/1E3717, 21 décembre 1989.
- [33] Y. Hamasaki, T. Miyamoto, Y. Kuhara, M. Katoh, K. Tada, S. Takeuchi, T. Nakahara, *Optical Fiber sensor for measurements of electric field intensity and voltage (OPSEF)*, Fiber and Integrated Optics, vol. 3, n° 4, 1981, p.383-389.
- [34] Q. S. Huang, *Premiers essais de validations du module "surface conductrice" du logiciel PHI3D*, Document de travail EDF-HM/73-289-QS/TPLD, 31 octobre 1987.
- [35] J. Haugaard, O. Tonnesen, *Electric field measurements around a polluted insulator*, NORD-IS 90, june 18-20, paper n° 5.4.
- [36] Guide CEI-815, *Guide pour le choix des isolateurs sous pollution*, 1986.
- [37] K. Ben Driss, *Etude des paramètres relatifs au profil d'un isolateur sous pollution à l'aide du logiciel de calcul de champs tridimensionnels PHI3D*, rapport de DEA Génie Electrique, ECL/INPG, Septembre 1991.
- [38] A. Cimador, *Essai de vieillissement accéléré pour isolateurs en matériaux synthétiques*, Journées d'études S.E.E., 21-22 mars 1990.
- [39] S. Vitet, S. Wanser, L. Krähenbühl, K. Ben Driss, *Etude de la représentativité d'un essai de vieillissement accéléré par calcul de champs tridimensionnel*, Journées d'études S.E.E., 20-21 mars 1991, Gif-sur-Yvette.

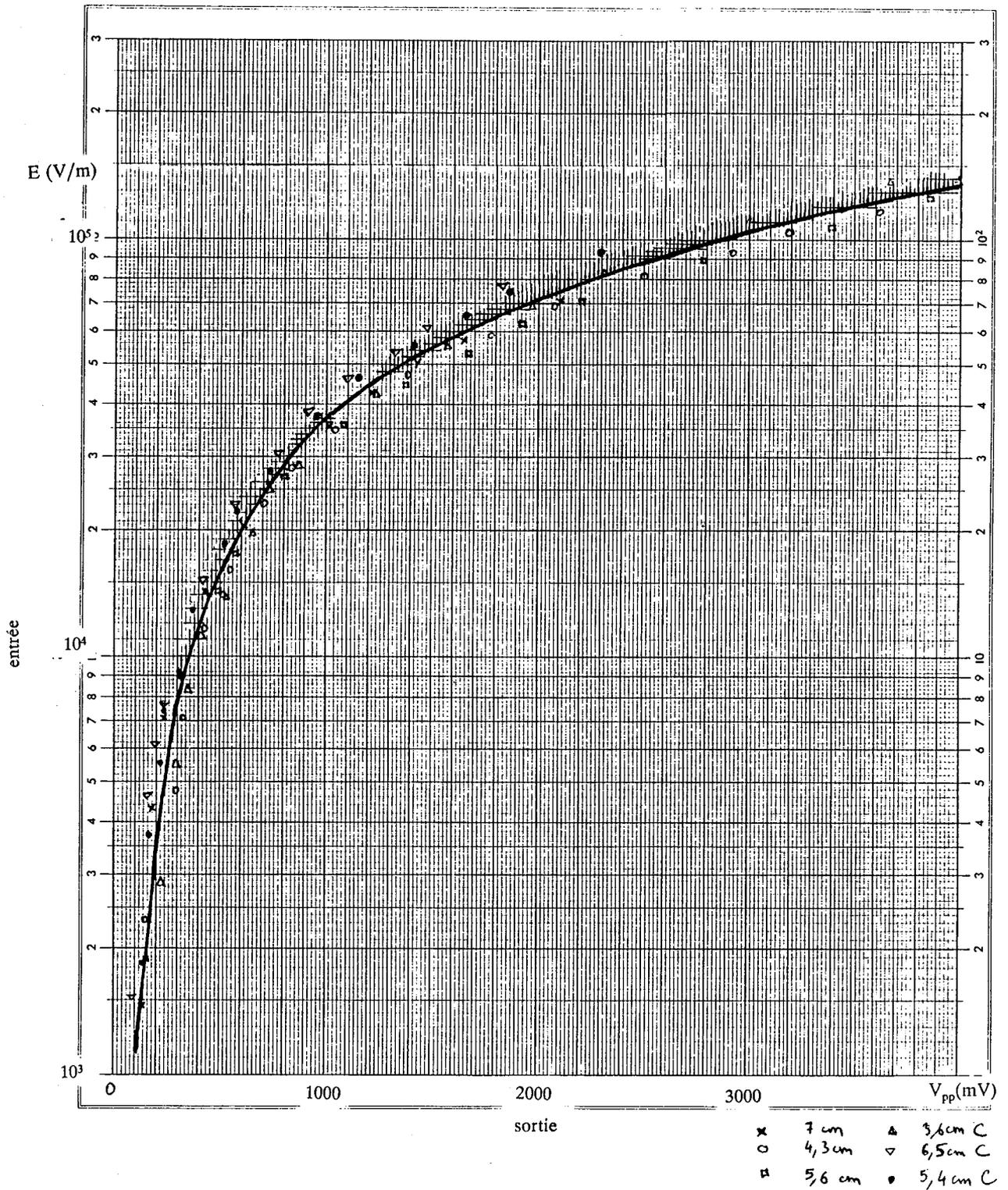
- [40] D.R. Goulsbra, *The prediction of impulse flashover of polluted insulations*, Proceedings of the 1st Iranian Congress of Electrical Engineering, Shiraz, May 12-16, 1974, p.263-277.
- [41] M. Kawai, *Insulation for power frequency voltage*, Transmission line reference book 345 kV and above, p.296-326.
- [42] C. Texier, B. Kouadri, *Model of formation of dry band on an NaCl-polluted insulation*, I.E.E. Proceedings, vol. 113, pt. A, n°5, july 1986.
- [43] P. Claverie, Y. Porcheron, *Le phénomène de pollution des isolateurs et l'isolement des ouvrages en régions polluées*, RGE, tome 82, vol. 3, mars 1973, p.166-183.
- [44] C.H.A. Ely, W.J. Robert, *Switching impulse flashover of air gaps and insulators in an artificially polluted atmosphere*, Proceedings I.E.E., vol. 115, n°11, November 1968, p.1667-1671.
- [45] E. Garbagnati, G. Marrone, A. Porrino, D. Perin, A. Pignini, *Switching impulse performance of post insulators in polluted conditions*, 5<sup>th</sup> I.S.H.V.E., Braunschweig, 24-28 august 1987, paper n°51-09.
- [46] B.S. Nagabushana, K.N. Srinivasan, C.S. Lakshminarasimha, *Lighining and switching surge flashover characteristics of a string of 10 disc insulators under polluted conditions*, 5<sup>th</sup> I.S.H.V.E., Braunschweig, 24-28 august 1987, paper n°51-10.
- [47] E. Lemke, M. Zhirh, *Switching impulse flashover model for long insulators under contaminated condition*, 7<sup>th</sup> I.S.H.V.E., Dresden 26-30 august 1991, paper n°43-22.
- [48] M. Aguet, M. Ianoz, *Haute tension*, Dunod, 1987.
- [49] B. Jeger, *Mesures contre l'effluve dans des machines à Haute tension*, Notice ISOLA, 1983.
- [50] H.K. Xie, X.S. Ma, K.C. Kao, *Computation of electric fields and study of optimal corona supression for bushing-type insulators*, I.E.E.E. trans. EI, vol. 21, n° 1, february 1986, p.41-51.

ANNEXE 1

Courbe d'étalonnage en potentiel



Courbe d'étalonnage en champ



## ANNEXE 2

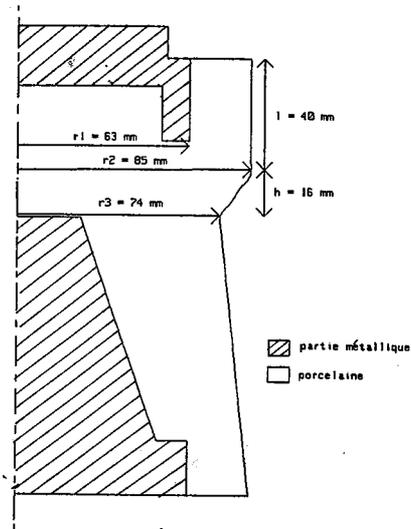
Coupe dans un plan diamétral de la tête d'isolateur

Fig. A.2.1.

Calcul des conductivités surfaciques

Calcul de  $\sigma_{s1}$

La résistance du disque creux de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$  (fig. A.2.2.a) est donnée par :

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_{s1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\text{d'où } \sigma_{s1} = \frac{1}{2\pi R_1} \text{Log} \left[ \frac{r_2}{r_1} \right]$$

avec  $R_1 = 40.2 \text{ K}\Omega$ ,

on a  $\sigma_{s1} = 1.18 \text{ }\mu\text{S}$ .

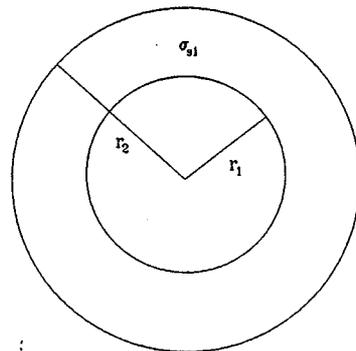


Fig. A.2.2.a

Calcul de  $\sigma_{s2}$

La résistance  $R_2$  du cylindre creux de rayon  $r_2$  et de hauteur  $l$  (fig. A.2.2.b) est donnée par :

$$R_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_{s2}} \frac{l}{r_2}$$

$$\text{d'où } \sigma_{s2} = \frac{1}{2\pi R_2} \frac{l}{r_2}$$

avec  $R_2 = 234.3 \text{ K}\Omega$ ,

on a  $\sigma_{s2} = 0.335 \text{ }\mu\text{S}$ .

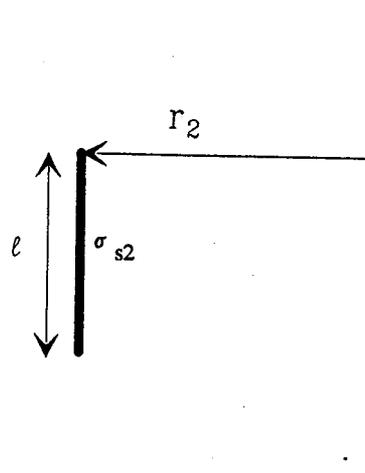


Fig. A.2.2.b.

Calcul de  $\sigma_{s3}$

La résistance  $R_3$  du cône tronqué de petit rayon  $r_3$ , de grand rayon  $r_2$  et de hauteur  $h$  (fig. A.2.2.c) est donnée par :

$$R_3 = \frac{1}{2\pi\cos(\alpha)\sigma_{s3}} \int_{r_3}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\text{d'où } \sigma_{s3} = \frac{1}{2\pi R_3 \cos(\alpha)} \text{Log} \left[ \frac{r_2}{r_3} \right]$$

avec  $R_3 = 35.7 \text{ K}\Omega$ ,

on a  $\sigma_{s2} = 1.09 \text{ }\mu\text{S}$ .

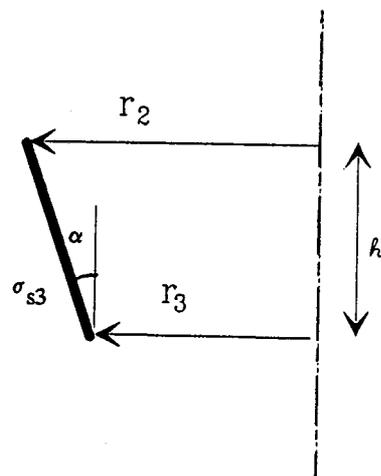


Fig. A.2.2.c.

## ANNEXE 3

Les équations qui gouvernent la répartition du potentiel pour un isolateur soumis à une tension sinusoïdale de fréquence  $\omega_1$  et présentant une partie polluée de conductivité surfacique  $\sigma_{s1}$  sont :

$$cV = - \int_{S_1} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} G \Psi \right] ds \quad (3.1')$$

$$cV = - \int_{S_2} \left[ V \frac{\partial G}{\partial n} + \frac{1}{\epsilon_{r2}} G \Psi - \frac{1}{\epsilon_{r2}} G \Theta \right] ds \quad (3.10)$$

$$\int_S \sigma_{s1} \mathbf{grad}_s w \mathbf{grad}_s V dS - \int_{\Gamma_1} \sigma_{s1} w \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega_1 \epsilon_0 \int_S w \Theta dS = 0 \quad (3.9)$$

Lorsque le même isolateur est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega_2$  égale à  $k\omega_1$ , il n'y a que l'équation qui gouverne l'interface polluée (3.9) qui change et devient :

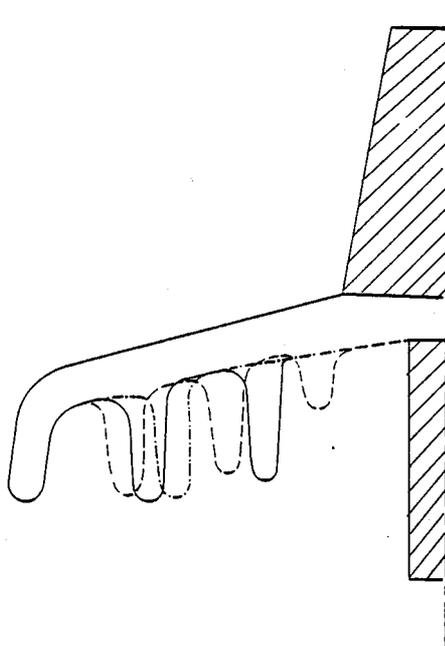
$$\int_S \sigma_{s1} \mathbf{grad}_s w \mathbf{grad}_s V dS - \int_{\Gamma_1} \sigma_{s1} w \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + jk\omega_1 \epsilon_0 \int_S w \Theta dS = 0 \quad (3.9')$$

En divisant par  $k$ , on obtient :

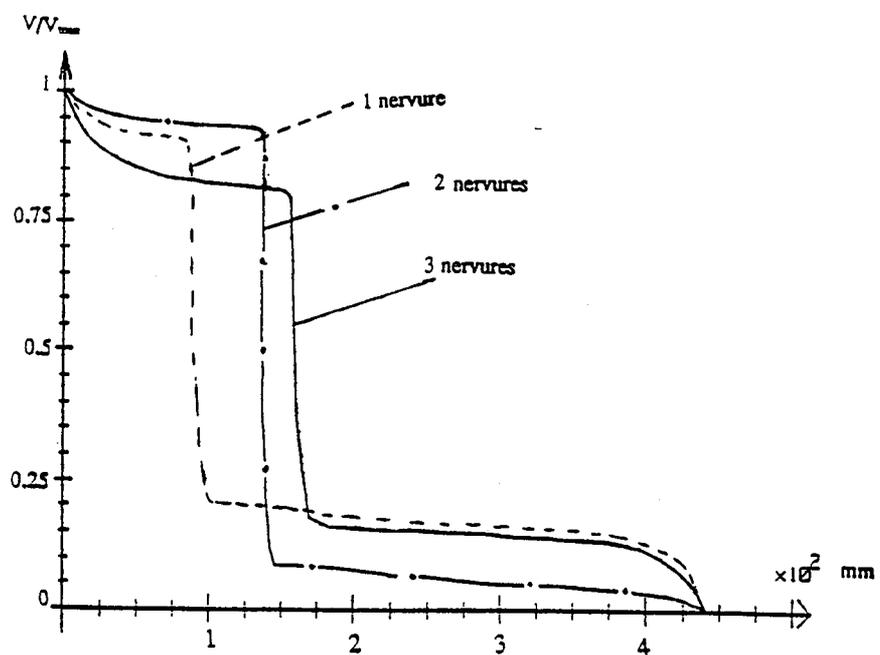
$$\int_S \frac{\sigma_{s1}}{k} \mathbf{grad}_s w \mathbf{grad}_s V dS - \int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_{s1}}{k} w \frac{\partial V}{\partial \nu} d\Gamma + j\omega_1 \epsilon_0 \int_S w \Theta dS = 0 \quad (3.9'')$$

Ceci correspond à l'équation d'interface polluée de conductivité surfacique  $\frac{\sigma_{s1}}{k}$  d'un isolateur soumis à une tension de fréquence  $\omega_1$ . Autrement dit, si on veut voir expérimentalement l'influence de la conductivité surfacique sur la répartition du potentiel, il suffit de faire varier la fréquence d'alimentation.

## ANNEXE 4



Profil utilisé pour l'étude de l'influence du nombre de nervure



Evolution du potentiel le long de la ligne de fuite

## RESUME

La tenue diélectrique des matériels d'isolation est tributaire des répartitions du champ et du potentiel à leurs surfaces. Ces répartitions en présence de la conduction surfacique sont différentes des répartitions électrostatiques. Ce travail consiste en l'application de la méthode des équations intégrales de frontière (MEIF) pour le calcul des distributions du champ et du potentiel électriques dans le cas des isolateurs pollués soumis à une tension alternative à fréquence industrielle.

Dans le chapitre 1, nous parlerons de phénomènes de conduction surfacique sur les isolateurs pollués avant de voir les équations et les conditions qui gouvernent les distributions du champ et du potentiel électriques.

Pour calculer ces répartitions, des méthodes numériques ont été développées. Le chapitre 2 porte sur les principales méthodes numériques utilisées jusqu'à nos jours suivies d'un rappel de la méthode des équations intégrales de frontière.

Le chapitre 3 est consacré à l'application de la MEIF aux isolateurs pollués. On y reporte l'ensemble des équations à résoudre, leurs traitements numériques ainsi que le calcul des différentes grandeurs locales et globales. On aboutit ainsi à un modèle numérique de la conduction surfacique appelé "module pollution".

Le chapitre 4 porte sur la validation du modèle avec la présentation de quelques résultats. Nous terminerons par la présentation d'exemples d'application et l'évocation de possibles extensions du modèle numérique : ceci fait l'objet du chapitre 5.