



HAL
open science

Structures de décision multi-niveaux pour la planification de la production : robustesse et cohérence des décisions

Gilles Hêtreux

► **To cite this version:**

Gilles Hêtreux. Structures de décision multi-niveaux pour la planification de la production : robustesse et cohérence des décisions. Automatique / Robotique. INSA de Toulouse, 1996. Français. NNT : . tel-00139724

HAL Id: tel-00139724

<https://theses.hal.science/tel-00139724>

Submitted on 3 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Spécialité : Automatique/Informatique Industrielle (Gestion de production)

par

Gilles HÉTREUX

Ingénieur INSAT

STRUCTURES DE DÉCISION MULTI-NIVEAUX POUR LA PLANIFICATION DE LA PRODUCTION : ROBUSTESSE ET COHÉRENCE DES DÉCISIONS

Soutenue le 17 Décembre 1996, devant le jury

Mr	J. ERSCHLER	<i>Président</i>
Mr	J.P. KIEFFER	<i>Rapporteur</i>
Mr	D. NOYES	<i>Rapporteur</i>
Mr	C. LANSADE	<i>Examineur</i>
Mme	A.M. ALQUIER	<i>Examineur</i>
Mme	C. MERCÉ	<i>Directeur de thèse</i>
Mr	G. FONTAN	<i>Directeur de thèse</i>

Rapport LAAS N° 96479

Thèse préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS
7, Avenue du Colonel Roche 31077 Toulouse Cedex (France)

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du C.N.R.S. A ce titre, je remercie Monsieur le Professeur Alain COSTES, Directeur du LAAS, de m'avoir accueilli dans cet établissement et de m'avoir ainsi permis d'effectuer cette recherche.

Je remercie également Messieurs Robert VALETTE et Jean Claude HENNET, Directeur de Recherche au C.N.R.S. de m'avoir accueilli au sein de l'équipe "Systèmes de Production" dont ils ont eu successivement la responsabilité.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à ceux qui m'ont encadrés pour cette thèse, Colette MERCÉ, Professeur à l'INSA, et Gérard FONTAN, Professeur à l'INPT. J'ai particulièrement apprécié leur disponibilité, leurs conseils, leurs encouragements qui m'ont permis de mener à bien ce travail, mais certainement plus encore, leur amitié et leur sympathie qui ont contribué à rendre aussi agréables ces quelques années.

Parallèlement à cette activité de recherche, j'ai eu l'opportunité d'effectuer une activité d'enseignement à l'I.N.S.A. de Toulouse. C'est pourquoi je tiens à exprimer doublement ma reconnaissance à Colette MERCÉ avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer aussi dans cette activité, et à Monsieur Jacques ERSCHLER, Directeur du Département de Génie Electrique et Informatique de l'INSA, pour m'avoir accueilli au sein de son département et pour avoir accepté de participer au jury.

Je tiens à remercier également Messieurs Jean Paul KIEFFER, Professeur à l'IUSPIM, et Daniel NOYES, Professeur à l'ENIT, d'avoir accepté d'étudier mes travaux et d'en être les rapporteurs ainsi que pour l'intérêt et l'attention qu'ils ont accordé à cette étude. Je remercie aussi, Monsieur Christophe LANSADE, Ingénieur chez IXI, et Anne-Marie ALQUIER, Maître de Conférence à l'Université des Sciences Sociales de Toulouse pour leur participation au jury.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des membres du groupe "Systèmes de Production" ainsi qu'au personnel des services administratifs et de reproduction du LAAS. Un Merci plus particulier à Madame Eliane Dufour pour sa gentillesse et pour l'ensemble des services rendus durant ces années.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement mes amis qui m'ont apporté une aide morale bien agréable, notamment dans la phase finale de ce travail. Ces personnes se reconnaîtront, j'en suis sûr. Qu'elles veuillent trouver ici le témoignage de ma reconnaissance.

Table des matières

INTRODUCTION	13
--------------	----

- Partie A -

LES CONCEPTS

21

I LA GESTION DE PRODUCTION	21
I.1 ÉVOLUTION DES PROBLÈMES DE PRODUCTION	22
I.1.1 Vers une complexification croissante	22
I.1.2 Vers une adéquation des approches de gestion	22
I.2 SYSTÈME DE GESTION DE LA PRODUCTION	22
I.2.1 Le système de production	23
I.2.2 Le système de gestion	24
I.2.3 Structuration des décisions	25
I.3 QUELQUES APPROCHES CLASSIQUES	26
I.3.1 L'approche M.R.P. II (Manufacturing Resource Planning)	26
I.3.1.1 Structure décisionnelle hiérarchisée classique	27
I.3.1.2 Apports du système M.R.P. II	28
I.3.2 L'approche O.P.T. (Optimized Production Technology)	30
I.3.3 L'approche J.I.T. (Just In Time)	31
I.3.4 Vers une combinaison des méthodes de gestion	33
I.4 CONTEXTE DE L'ÉTUDE	34
II STRUCTURES DÉCISIONNELLES MULTI-NIVEAUX	35
II.1 PRINCIPES FONDAMENTAUX	36
II.1.1 Décomposition du système de gestion et hiérarchisation des décisions	36
II.1.2 Coordination des décisions	36
II.1.3 Structures multi-niveaux pour la planification	36
II.2 CONCEPTS D'AGRÉGATION ET DE DÉSAGRÉGATION	37
II.2.1 Motivation première : réduction de la complexité des modèles	37
II.2.2 Principe général des méthodes d'agrégation/désagrégation	37
II.2.3 Agrégation de modèle	38
II.2.3.1 Procédure générale	38

II.2.3.2	Processus d'agrégation en programmation linéaire	39
II.2.3.3	Processus de désagrégation en programmation linéaire	42
II.2.3.4	Conclusion	42
II.2.4	Modélisation agrégée	43
II.3	STRUCTURE DE DÉCISION	43
II.3.1	Agrégation des données	44
II.3.1.1	Agrégation des produits	44
II.3.1.2	Agrégation des moyens de production	45
II.3.1.3	Agrégation du travail	45
II.3.1.4	Agrégation du temps	46
II.3.1.5	Combinaisons de différentes agrégations	46
II.3.2	Niveaux de décision et modèles de décision	46
II.3.3	Horizons temporels	47
II.3.3.1	Horizon de planification, horizon de décision	47
II.3.3.2	Procédure à horizon glissant	48
II.3.4	Processus de décision	49
II.3.5	Intérêt de l'approche hiérarchisée	50
II.4	INTERACTIONS ENTRE NIVEAUX DÉCISIONNELS	51
II.4.1	Problème de la coordination des décisions	51
II.4.2	Concepts de Robustesse et de Cohérence	52
II.4.3	Mise en œuvre de ces concepts	52
II.4.3.1	Méthodes analytiques	52
II.4.3.2	Méthodes itératives	53
II.5	PRINCIPAUX TRAVAUX	53
II.5.1	Approches hiérarchisées pour la planification à moyen terme	54
II.5.1.1	Travaux en relation avec la structure proposée par HAX et MEAL	54
II.5.1.2	Faisabilité des décisions	54
II.5.1.3	Approches hiérarchisées et agrégation du temps	55
II.5.1.4	Travaux prenant en compte l'incertitude des données	56
II.5.2	Autres travaux basés sur une approche hiérarchisée	56
II.5.2.1	Travaux intégrant plusieurs fonctions	56
II.5.2.2	Travaux intégrant la planification et l'ordonnancement	57
II.6	CONCLUSION	58

- Partie B -

ROBUSTESSE ET COHÉRENCE

	61	
III	CONTEXTE D'ÉTUDE ET OBJECTIFS	61
III.1	OBJECTIFS DE LA FONCTION "PLANIFICATION"	62
III.2	PROBLÈME DE PLANIFICATION CONSIDÉRÉ	63
III.2.1	Caractéristiques générales du problème de planification	63
III.2.2	Caractéristique importante : notion de délai de fabrication	64

III.2.3	Modèle détaillé	64
III.3	APPROCHE HIÉRARCHISÉE	67
III.3.1	Agrégation du temps	67
III.3.2	Structure décisionnelle à deux niveaux	67
III.3.2.1	Variables et données agrégées	68
III.3.2.2	Variables et données détaillées	68
III.3.2.3	Relations d'agrégation/désagrégation	69
III.3.2.4	Processus de planification	70
III.3.3	Modèle de décision du niveau agrégé	72
III.3.4	Modèle de décision du niveau détaillé : modèle de désagrégation	73
III.4	DÉMARCHE DE L'ÉTUDE	74
III.4.1	Dysfonctionnements liés à la modélisation	74
III.4.2	Étude des interactions	75
IV	ROBUSTESSE DES DÉCISIONS AGRÉGÉES	77
IV.1	ÉTUDE PRÉLIMINAIRE	78
IV.1.1	Découplage des produits	78
IV.1.2	Modèle d'étude des interactions	79
IV.1.3	Etat agrégé robuste	80
IV.1.4	Réseau associé au modèle d'étude des interactions	81
IV.1.5	Analyse de la robustesse	84
IV.1.6	Caractérisation des coupes significatives	85
IV.1.6.1	Définition	85
IV.1.6.2	Analyse structurelle du réseau	85
IV.1.6.3	Analyse numérique des coupes significatives	87
IV.1.7	Conditions nécessaires et suffisantes de robustesse	89
IV.1.7.1	Expression générale des conditions de robustesse	89
IV.1.7.2	Cas particulier	91
IV.1.8	Modèle agrégé robuste	91
IV.2	CAS GÉNÉRAL	92
IV.2.1	Modèle des interactions	93
IV.2.2	Analyse de la robustesse	93
IV.2.3	Partage des ressources : approche suffisante	96
IV.2.3.1	Expression des conditions de robustesse dans l'approche suffisante	96
IV.2.3.2	Cas particulier important	97
IV.2.3.3	Conclusion	98
IV.2.4	Partage des ressources : approche nécessaire	98
IV.2.4.1	Expression des conditions de robustesse dans l'approche nécessaire	99
IV.2.4.2	Modèle du sous-niveau 2	100
IV.2.4.3	Modèle du sous-niveau 1	101
IV.3	CONCLUSION	102
	ANNEXE : CARACTÉRISATION DES COUPES SIGNIFICATIVES	103
	Propriétés structurelles des coupes significatives	103
	Propriétés numériques des coupes significatives	105
	Étude de cas particuliers	108

V	COHÉRENCE DES DÉCISIONS DÉTAILLÉES	111
V.1	DÉMARCHE DE L'ÉTUDE	112
V.1.1	État détaillé cohérent	112
V.1.2	Modèle d'étude des interactions	113
V.2	PROCESSUS STATIQUE DE DÉSAGRÉGATION	113
V.2.1	Analyse de la cohérence	113
V.2.2	Modèle de désagrégation	114
V.3	PROCESSUS DYNAMIQUE DE DÉSAGRÉGATION	115
V.3.1	Étude préliminaire	116
V.3.1.1	Modèle d'étude des interactions	116
V.3.1.2	Analyse de la cohérence	116
V.3.1.3	Expression des conditions de cohérence	119
V.3.1.4	Modèle de désagrégation	120
V.3.2	Cas général	122
V.3.2.1	Modèle d'étude des interactions	123
V.3.2.2	Analyse de la cohérence	123
V.3.2.3	Modèle de désagrégation	125
V.4	CONCLUSION	126

- Partie C -

MISE EN OEUVRE

		129
VI	EXTENSIONS ET MISE EN ŒUVRE PRATIQUE	129
VI.1	PROCESSUS COMPLET DE PLANIFICATION	130
VI.2	ÉTUDE EXPÉRIMENTALE	130
VI.2.1	Objectifs	131
VI.2.2	Mise en place de l'étude expérimentale	131
VI.2.3	Logiciel de planification	132
VI.2.4	Problèmes de planification mono-produit, multi-étapes, multi-ressources	134
VI.2.4.1	Nécessité d'une coordination des décisions dans les structures hiérarchisées	134
VI.2.4.2	Amélioration de la qualité des solutions	136
VI.2.5	Problèmes de planification multi-produits, multi-étapes, multi-ressources	137
VI.2.5.1	Caractéristiques des problèmes considérés	137
VI.2.5.2	Complexité des modèles	138
VI.2.5.3	Qualité des solutions	139
VI.2.6	Autonomie du niveau détaillé	140
VI.2.7	Conclusion	141
VI.3	PRISE EN COMPTE DES ARRIÉRÉS DE FABRICATION	142
VI.3.1	Problématique	142
VI.3.2	Analyse de la robustesse	143

VI.3.3 Analyse de la cohérence	149
VI.3.4 Processus statique de désagrégation	150
VI.3.5 Processus dynamique de désagrégation	151
VI.4 PRISE EN COMPTE EXPLICITE DE L'INCERTITUDE	153
VI.4.1 Conditions de robustesse et de cohérence	153
VI.4.2 Approche nécessaire	153
VI.4.3 Approche suffisante	154
VI.5 CONCLUSION	156
CONCLUSION	159
BIBLIOGRAPHIE	163

Liste des Figures

I.1	Quelques éléments pouvant intervenir au sein d'un système de production	23
I.2	Le système de gestion dans l'entreprise	25
I.3	Structure hiérarchique des décisions au sein de l'entreprise	26
I.4	Organisation typique d'un système de gestion	27
I.5	Processus décisionnel dans le concept <i>MRP II</i>	29
I.6	Structure schématique du produit <i>OPT</i>	30
I.7	Boucle de contrôle entre 2 opérations successives par <i>KANBAN</i>	32
II.1	Concept d'agrégation	38
II.2	Principe des méthodes d'agrégation/désagrégation	38
II.3	Procédure d'agrégation/désagrégation : Cas où le modèle agrégé découle d'une agrégation de modèle	39
II.4	Processus d'agrégation	40
II.5	Procédure d'agrégation/désagrégation : Cas où le modèle agrégé découle d'une modélisation agrégée	43
II.6	Agrégation logique (produit : <i>modèle de voiture</i> , Option : <i>couleur</i>)	45
II.7	Tâches et macro-tâche	45
II.8	Discrétisation du temps en périodes et macro-périodes	46
II.9	Structure décisionnelle multi-niveaux	47
II.10	Horizons temporels	48
II.11	Procédure à horizon glissant	48
II.12	Processus de décision entre 2 niveaux successifs	49
II.13	<i>Processus de planification</i>	50
II.14	Méthode analytique pour la robustesse et la cohérence des décisions	52
II.15	Méthode itérative pour la robustesse et la cohérence des décisions	53
III.1	Objectifs de la planification	62
III.2	Exemple de données traitées par la planification	63
III.3	Processus de fabrication d'un produit i	63
III.4	Discrétisations agrégée et détaillée de l'horizon de planification	67
III.5	Relations entre variables agrégées et détaillées	69
III.6	Structure de décision à deux niveaux	70
III.7	Processus statique de désagrégation	71
III.8	Processus dynamique de désagrégation	71
III.9	Principes du modèle d'étude des interactions	75
IV.1	Cellule élémentaire	81
IV.2	Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	81
IV.3	Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	82
IV.4	Réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	83
IV.5	Réseau équivalent $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	85

IV.6	Exemples de coupes non significatives ($J_i = 3, k = 4$)	86
IV.7	Exemples de coupes significatives ($J_i = 3, k = 4$)	86
IV.8	Réseau tel que $J_i = 2, k = 3$	88
IV.9	Réseau tel que $J_i = 2, k = 3$	89
IV.10	Réseau $\mathcal{R}_{théorique}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	95
IV.11	Coupes significatives dans le cas où les capacités sont constantes au sein d'une macro-période ($J_i = 3, k = 4$)	98
IV.12	Processus de décision au sein du niveau agrégé	99
V.1	Modèle de désagrégation et modèle d'étude des interactions	112
V.2	Réseau associé à la macro-période 1 ($J_i = 2, k = 3$)	115
V.3	Réseau associé à la macro-période 2 ($J_i = 2, k = 3$)	115
V.4	Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ ($J_i = 3, k = 8, \tau_f = 4$)	116
V.5	Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ ($J_i = 3, k = 8, \tau_f = 4$)	118
V.6	Réseau tel que ($J_i = 2, k = 3$)	121
VI.1	Processus de planification pour la macro-période t	130
VI.2	Valeurs associées aux demandes	131
VI.3	Intégration des modèles linéaires au sein du logiciel de planification	133
VI.4	Structure simplifiée du logiciel de planification	133
VI.5	Ecran visualisant un plan de production	134
VI.6	Evolution de Δ_c selon les triplets $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$	140
VI.7	Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	144
VI.8	Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)	146
VI.9	Réseau associé à la macro-période 1	148
VI.10	Réseau associé à la macro-période 2	148
VI.11	Réseau \mathcal{R}^{i,t,τ_f} associé au modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} ($J_i = 3, k = 7, \tau_f = 3$)	152
VI.12	Réseau associé à la macro-période 1	155
VI.13	Réseau associé à la macro-période 2	155

- INTRODUCTION -

Chargée d'organiser la fabrication, la gestion de production suscite un intérêt accru depuis ces vingt dernières années. Dans un contexte économique devenu austère, cette fonction tend à jouer un rôle de plus en plus déterminant pour la survie et la croissance des entreprises. Cette tâche se heurte en pratique à de nombreuses difficultés. L'évolution des techniques de production, une clientèle plus exigeante, un marché incertain contribuent à rendre la gestion particulièrement délicate à maîtriser. Cette complexité se traduit essentiellement par la nécessité de traiter un volume très important d'informations généralement hétérogènes, peu fiables ou non connues à long terme et soumises à de nombreux aléas.

Pour faciliter la prise de décision, les approches retenues conduisent généralement à décomposer la gestion de production en fonctions élémentaires et à dégager ainsi différentes classes de décisions. Diverses organisations de ces fonctions peuvent être envisagées. Une structuration de type hiérarchisée semble acceptée, aussi bien dans les mises en œuvre industrielles de Gestion de Production Assistée par Ordinateur que dans la plupart des travaux de recherche traitant de ce sujet. Dans de telles structures de gestion, les décisions sont établies par affinements successifs : les décisions élaborées dans une fonction deviennent ainsi des contraintes ou des objectifs pour la fonction inférieure. Au sommet de la hiérarchie, les données manipulées sont grossières et les horizons temporels sont longs. En bas de la hiérarchie, les données sont plus précises et les horizons temporels se raccourcissent.

De telles structures décisionnelles ne procurent pas toujours une totale satisfaction lors de leur mise en œuvre effective. En effet, des modèles spécifiques, souvent construits dans la plus parfaite indépendance, sont associés à chaque fonction. L'enchaînement prévu pour l'élaboration des décisions peut être arrêté par l'absence de solutions faisables dans une fonction trop contrainte par les exigences des fonctions supérieures. Dans ce cas, l'autonomie souhaitée a priori est réduite ou inexistante et la réactivité est alors difficile à mettre en œuvre. L'ignorance des interactions existant entre les différentes fonctions conduit de manière évidente à des dysfonctionnements importants dans le processus décisionnel.

L'étude présentée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des travaux qui formalisent et analysent les liens entre les fonctions afin de pouvoir les intégrer dans les logiques de calculs et d'aboutir à la coordination de la structure décisionnelle.

Dans ce contexte, les systèmes de décision multi-niveaux (*SDM*) sont construits autour d'une décomposition en niveaux décisionnels. Ceux-ci sont définis à partir d'une agrégation des données, d'une désagrégation des décisions et d'horizons temporels adaptés. Ces éléments reprennent les caractéristiques intéressantes des systèmes de *GPAO* classiques : décomposition (niveaux), données plus ou moins grossières (agrégation), affinement des décisions (désagrégation). Dans les *SDM*, les modèles spécifiques de chaque niveau associés à une formalisation explicite des liens entre niveaux décisionnels (agrégation des données, désagrégation des décisions) permettent une étude globale des interactions. Le but d'une telle approche est d'assurer un fonctionnement correct de la totalité du système.

A chaque niveau, l'élaboration de la décision est réalisée avec une dynamique appropriée (processus dynamique de désagrégation). Ceci permet de mettre en œuvre la réactivité du processus décisionnel dans le cadre d'une autonomie maîtrisée.

La formalisation explicite des interactions entre niveaux conduit aux concepts génériques de Robustesse et de Cohérence. La robustesse des décisions agrégées traduit le fait que toute décision élaborée au niveau supérieur de la structure garantit l'existence de solutions satisfaisant l'ensemble des contraintes du niveau inférieur. La cohérence des décisions détaillées assure que toute décision élaborée au niveau inférieur reste compatible avec l'ensemble des décisions définies par le niveau supérieur.

Ce travail s'intéresse plus particulièrement aux décisions tactiques sur un horizon à moyen terme. Il s'agit d'établir un plan de production. Celui-ci doit élaborer des décisions à caractère prévisionnel en vue de coordonner dans le temps, le travail et les moyens de production, tout en respectant les contraintes internes et externes de l'entreprise.

Un problème de production multi-produits, multi-étapes, multi-ressources sert de support à l'étude. Il permet de mettre en œuvre concepts et méthodes dans un contexte illustrant la réalité de l'entreprise.

La structure considérée possède deux niveaux décisionnels basés sur l'agrégation du temps. Le niveau supérieur élabore un plan de production agrégé sur un horizon relativement long, découpé en macro-périodes. Ces décisions agrégées sont ensuite affinées (*désagrégées*) dynamiquement sur la base de données détaillées disponibles sur un horizon plus court, discrétisé en périodes élémentaires. La nature de l'agrégation considérée est particulièrement importante dans les processus dynamiques de décision. Cette forme d'agrégation est souvent mise en œuvre mais rarement étudiée explicitement.

Cette recherche analyse les interactions entre niveaux afin d'établir des conditions analytiques de robustesse et de cohérence. Introduites sous forme de contraintes dans les modèles associés aux différents niveaux, elles assurent un fonctionnement correct de la structure décisionnelle. L'analyse s'articule autour de la détermination de conditions d'existence de solution dans un modèle d'étude appelé modèle d'étude des interactions. Ce modèle est construit de manière à rassembler l'ensemble des contraintes que doivent satisfaire les décisions (détaillées ou agrégées). La méthodologie mise en œuvre s'appuie sur une représentation par graphe de ce modèle d'étude. L'exploitation des outils de programmation linéaire et de théorie des graphes permettent alors de déterminer de manière systématique les conditions recherchées. L'aspect générique de la méthode permet d'envisager l'étude de différents contextes de production.

La présentation de ce travail s'articule autour de six chapitres :

- Chapitre I -

Ce chapitre introductif rappelle quelques notions générales relatives aux systèmes de gestion de la production et définit le cadre dans lequel s'inscrit ce travail de recherche.

Tout d'abord, les causes majeures de la complexité des problèmes de production sont mises en évidence. Ceci souligne l'intérêt du développement de systèmes de gestion plus performants.

Les éléments habituellement désignés sous les termes de *système de production* et de *système de gestion* sont précisés. Deux classifications sont présentées pour le système de production. L'une est associée à la politique de l'entreprise vis à vis des stocks, l'autre est liée aux volumes de production mis en jeu. Pour le système de gestion, une structuration hiérarchique des décisions est décrite. Celle-ci reproduit les échelons organisationnels rencontrés au sein de la plupart des entreprises et se justifie vis à vis de la variété des décisions et des objectifs émanant des différentes fonctions de gestion.

Les approches de gestion de la production les plus représentatives mises en œuvre en milieu industriel durant ces dernières années sont alors exposées. L'environnement de production pour lequel ces outils industriels sont conçus et leurs principes de fonctionnement sont précisés. Une attention particulière est accordée aux systèmes de *GPAO* construits autour d'une structure de décision multi-niveaux. Cette description permet de faire apparaître les qualités mais aussi certaines insuffisances de ces systèmes de *GPAO*.

Enfin, le cadre dans lequel se situe ce travail est introduit à partir de l'ensemble de ces éléments.

- Chapitre II -

Ce deuxième chapitre s'intéresse aux systèmes de gestion organisés autour de structures décisionnelles multi-niveaux. L'approche considérée dans ce travail se distingue des systèmes de GPAO classiques, par la prise en compte explicite de l'agrégation et de la désagrégation et par une exploitation plus importante des modèles et outils de la recherche opérationnelle.

La construction de modèles de décision analytiques et la formalisation des interactions entre niveaux permettent une analyse rigoureuse des contraintes du problème. Cette caractéristique procure à cette approche des propriétés qui pallient certaines déficiences constatées dans les systèmes de GPAO.

L'objet de ce chapitre est donc de décrire les principaux concepts caractérisant les structures décisionnelles multi-niveaux. Dans la terminologie anglo-saxonne, ce contexte d'étude est décrit par l'appellation *Hierarchical Production Planning* (ou *HPP*).

Les concepts d'agrégation et de désagrégation sont d'abord présentés. Les méthodes de combinaison et de dissection relatives aux problèmes de programmation linéaire sont exposées.

On montre alors la manière dont le concept d'agrégation est exploité dans les structures décisionnelles multi-niveaux. Les notions de niveau décisionnel et de hiérarchie sont définies. Le processus de décision mis en œuvre au sein de telles structures est expliqué. Ceci montre les couplages existant entre niveaux décisionnels pour la prise de décision.

Le problème de coordination des décisions est soulevé et conduit à définir les concepts génériques de *Robustesse* et de *Cohérence*. Ceux-ci permettent de structurer l'étude des interactions entre niveaux décisionnels. Les principales méthodes de mise en œuvre de ces propriétés sont exposées.

Enfin, ce chapitre se termine par une présentation de quelques travaux de recherche significatifs concernant l'approche *HPP* et plus généralement les structures décisionnelles multi-niveaux.

- Chapitre III -

Ce chapitre définit en détail le contexte de l'étude et les objectifs visés : construction d'une structure décisionnelle robuste, cohérente et réactive.

La problématique générale de la fonction *planification* est d'abord rappelée. Les caractéristiques du problème de production qui va permettre d'illustrer concepts et méthodes sont présentées et un modèle analytique est proposé.

La structure hiérarchisée mise en œuvre est alors décrite. Celle-ci possède deux niveaux décisionnels basés sur l'agrégation du temps. Les modèles de base associés à chacun des niveaux sont présentés. Une première analyse permet de mettre en évidence les limitations de cette modélisation vis à vis du problème de coordination des décisions.

Les méthodologies mises en œuvre pour analyser et résoudre le problème de coordination des décisions entre niveaux successifs sont enfin exposées.

- Chapitre IV -

L'objectif de ce chapitre est d'élaborer des conditions de robustesse et de construire un modèle agrégé robuste.

La complexité de l'analyse des interactions conduit à élaborer ces conditions en plusieurs phases.

La première phase s'intéresse à un contexte volontairement simplifié : la répartition de la capacité des ressources entre les opérations pour chaque période élémentaire est une donnée. Sous cette hypothèse, les produits ne sont pas couplés par les ressources et peuvent ainsi être planifiés indépendamment.

La méthodologie proposée est basée sur une formalisation des interactions entre niveaux décisionnels et mène à la construction du *modèle d'étude des interactions*. L'analyse de la faisabilité de ce modèle s'appuie sur sa représentation par graphe et sur l'utilisation de la notion de flot maximum. Elle consiste à établir des conditions d'existence de solution à ce modèle d'étude. A l'aide de cet outil, des conditions nécessaires et suffisantes de robustesse sont obtenues pour le niveau agrégé.

La deuxième phase reprend ces résultats dans le cadre du problème général pour lequel la capacité allouée à chaque opération n'est plus une donnée mais une variable du problème détaillé.

L'analyse théorique de la robustesse permet de déterminer des conditions. Mais celles-ci sont liées au partage de la capacité détaillée des ressources et ne peuvent pas être utilisées directement. Deux approches sont alors mises en œuvre pour déterminer une répartition particulière de ces capacités : une *approche suffisante* dans laquelle le partage des capacités et le plan agrégé sont résolus simultanément et une *approche nécessaire* dans laquelle le partage des capacités et le plan agrégé sont résolus séquentiellement. Cette deuxième approche s'avère être mieux adaptée pour la mise en œuvre sur un plan pratique de la notion de robustesse.

L'ensemble de ces conditions assure ainsi l'élaboration d'un plan agrégé robuste tout en conservant une complexité réduite.

- Chapitre V -

L'objectif de ce chapitre est d'établir des conditions de cohérence et de construire un modèle de désagrégation cohérent.

Afin de faciliter la présentation, l'élaboration de ces conditions est présentée en plusieurs phases.

La première phase consiste à analyser le processus statique de désagrégation. Des conditions nécessaires et suffisantes de cohérence sont établies.

La deuxième phase considère le processus dynamique de désagrégation. Une analyse préliminaire est effectuée pour un problème dans lequel les produits sont découplés vis à vis des ressources. L'exploitation des outils développés lors de l'étude de la robustesse mène à l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de cohérence. Ces résultats sont ensuite étendus au problème général. Dans ce cadre, des conditions suffisantes de cohérence sont proposées.

L'ensemble de ces conditions de robustesse et de cohérence assurent ainsi un fonctionnement correct de la structure décisionnelle et réduit notablement la complexité du problème général initial.

- Chapitre VI -

Ce dernier chapitre propose des mises en œuvre de la structure décisionnelle dans différents contextes de production ainsi que des expérimentations numériques validant les résultats présentés dans ce mémoire.

La prise en compte des arriérés de fabrication constitue une extension intéressante. Ils permettent de s'affranchir de la contrainte de "livraison à temps". Dans ce cadre, un plan de production peut toujours être proposé : les quantités de produits en retard et les délais associés peuvent être établis. Ces hypothèses de production conduisent à l'établissement de nouvelles conditions de robustesse et de cohérence qui permettent notamment de maîtriser le niveau maximum d'arriérés au sein d'une macro-période.

Les conditions de robustesse et de cohérence sont établies à partir de la connaissance des données détaillées. Dans certains cas réels, une prise en compte intégrale de ces conditions peut s'avérer difficile du fait de la méconnaissance de certaines de ces données. Deux voies pour la généralisation des travaux présentés sont alors envisagées : une *approche nécessaire* et une *approche suffisante*. L'approche nécessaire consiste à construire des conditions à partir de données détaillées résultant

d'une répartition détaillée a priori des données agrégées. L'approche suffisante considère de manière explicite, l'incertitude associée à certaines données détaillées. Dans ce cadre, la démarche proposée traite des demandes détaillées non connues mais encadrées par des bornes inférieures et supérieures déterminées.

Enfin, une mise en œuvre informatique de ces structures décisionnelles est présentée. Celle-ci est construite autour de la librairie d'optimisation *OSL* d'*IBM* et permet la génération de différentes classes de problèmes. Des résultats expérimentaux sont ainsi proposés. Ceux-ci illustrent la réduction notable des temps de calculs vis à vis d'une approche globale, tout en conservant une qualité satisfaisante des solutions obtenues.



- Partie A -

LES CONCEPTS



- Chapitre I -

LA GESTION DE PRODUCTION

RÉSUMÉ

Ce chapitre introductif se propose de rappeler quelques notions générales relatives aux systèmes de gestion de la production et, à partir de celles-ci, de définir le cadre dans lequel s'inscrit ce travail de recherche.

Tout d'abord, la section I.1 met en évidence les causes majeures de la complexité des problèmes de production et souligne l'intérêt du développement de systèmes de gestion plus performants.

La section I.2 structure les notions habituellement désignées sous les termes de "système de production" et de "système de gestion". Deux classifications sont proposées pour le système de production. L'une est associée à la politique de l'entreprise vis à vis des stocks, l'autre est liée aux volumes de production mis en jeu. Concernant le système de gestion, une structuration hiérarchique des décisions est décrite. Celle-ci reproduit les échelons organisationnels rencontrés au sein de la plupart des entreprises et se justifie vis à vis de la variété des décisions et des objectifs émanant des différentes fonctions de gestion.

La section I.3 présente les approches de gestion de la production les plus représentatives mises en oeuvre dans l'industrie durant ces dernières années. Elle précise notamment l'environnement de production pour lequel ces outils industriels sont conçus et leurs principes de fonctionnement. Une attention particulière est accordée aux systèmes de GPAO construits autour d'une structure de décision multi-niveaux. Cette description permet de faire apparaître certaines insuffisances.

A partir de l'ensemble de ces éléments, le cadre dans lequel se situe ce travail est introduit dans la section I.4.

I.1 ÉVOLUTION DES PROBLÈMES DE PRODUCTION

I.1.1 Vers une complexification croissante

Chargée d'organiser la fabrication, la Gestion de Production constitue une activité cruciale dans le fonctionnement des entreprises. Mais, depuis ces trente dernières années, ces dernières subissent de profondes transformations liées à un changement radical des stratégies et enjeux commerciaux. En effet, de nombreux facteurs tels que la mondialisation du marché, la conjoncture incertaine, le développement d'industries compétitives, ont contribué à modifier les données économiques. Au niveau de la clientèle, cette évolution se traduit par des exigences plus sévères sur le service, la qualité et le coût des produits. Cette situation oblige les entreprises à améliorer constamment leur productivité et à développer des facultés de réactivité plus fortes. Quel que soit le secteur d'activité ou la taille de l'entreprise, ces exigences engendrent au niveau de la production de nouvelles contraintes, souvent contradictoires, qui deviennent de plus en plus difficiles à appréhender avec des outils de gestion classiques.

Une des conséquences les plus marquantes est la diversification des produits (du fait principalement de la réduction de leur durée de vie et de leur personnalisation). Les difficultés ne proviennent pas de la maîtrise technique du procédé de fabrication mais essentiellement de la combinatoire induite par les multiples variantes destinées à répondre aux attentes du marché ou aux propositions des concurrents [71]. Cette modification se traduit sur le plan technique par la recherche d'une flexibilité accrue des moyens de production, autorisant la fabrication d'un nombre important de produits sur les mêmes machines. Sur le plan de la gestion, cette multiplication des produits génère une combinatoire très importante qui complexifie fortement les phases de planification, d'ordonnancement, d'évaluation des besoins en composants, d'approvisionnement, etc.

Une autre répercussion liée au contexte économique très concurrentiel concerne le client, devenu beaucoup plus exigeant en termes de qualité et de respect des délais. Là encore, ces contraintes s'avèrent délicates à maîtriser. Par exemple, fixer un délai nécessite en toute rigueur, une connaissance exhaustive de l'état du système productif. Or, l'absence de suivi strict de la production, la multiplicité et la sensibilité des facteurs concernés, font que cette connaissance reste souvent imprécise. Par ailleurs, ces délais dépendent généralement de la taille des lots à fabriquer, celle-ci étant elle-même liée à des contraintes de productivité (*lot-sizing*).

I.1.2 Vers une adéquation des approches de gestion

Ce rapide exposé permet de mettre en évidence la complexité de la fonction gestion de production. Les problèmes traités reposent autant sur des hypothèses de fonctionnement (organisation de l'atelier, contraintes de ressource, etc) que sur des règles de décisions externes à la fabrication même (stratégie commerciale, politique de l'entreprise). On comprend alors aisément les difficultés rencontrées par les responsables de production et souligne l'enjeu de l'émergence d'outils et approches destinés à gérer ces situations. L'approche considérée dans ce travail n'a évidemment pas la prétention de traiter la globalité des difficultés évoquées dans le paragraphe précédent. Cependant, elle peut contribuer à répondre à un certain nombre de questions devenues fondamentales dans la gestion de production actuelle.

I.2 SYSTÈME DE GESTION DE LA PRODUCTION

De façon classique, une unité de production est décomposée en deux systèmes distincts : le système de production dans lequel circulent les flux de matières, et le système de gestion dans lequel transitent les flux d'informations.

I.2.1 Le système de production

Sous ce terme, on désigne le *dispositif physique* utilisé pour fabriquer l'ensemble des produits proposés par l'entreprise. Il regroupe généralement de nombreux éléments [52]. La figure I.1 indique sommairement ceux qui sont rencontrés le plus fréquemment.

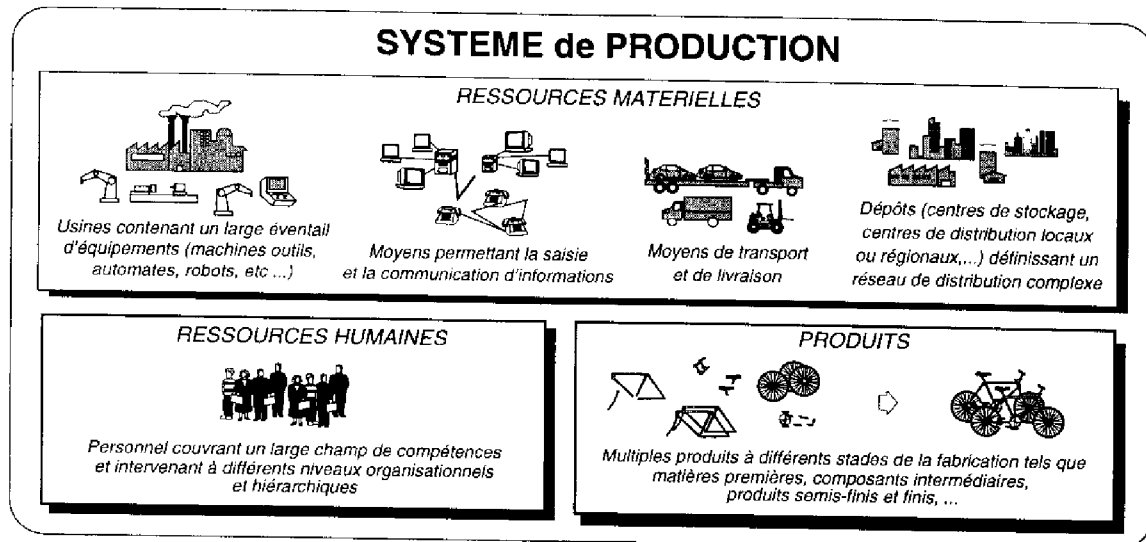


Figure I.1: Quelques éléments pouvant intervenir au sein d'un système de production

Cette figure fait apparaître que les systèmes de production peuvent être très disparates. Pour cette raison, diverses typologies sont proposées dans la littérature [47], [43]. Deux de ces classifications sont retenues pour les besoins de cette étude. Toutefois, en raison de la diversification des produits et des activités, il n'est pas rare qu'au sein d'une même entreprise, il coexiste plusieurs structures de production relevant chacune de classes différentes.

(a) Classification selon les volumes de production :

Cette première classification fait référence à la nature des produits et aux volumes de production réalisés qui influent souvent sur l'organisation du système productif [18].

- *Les systèmes à production continue :*
 Cette catégorie est généralement associée à des chaînes de production dans lesquelles toute possibilité d'attente entre deux ressources est exclue. Ce type de système concerne surtout les industries dont la production nécessite la manipulation de matières liquides ou gazeuses (telles que par exemple les industries pétrolières, chimiques, pharmaceutiques ou agro-alimentaires).
- *Les systèmes de production en grandes séries :*
 Ils font référence à des sites où les éléments fabriqués sont peu différenciés mais produits en très grandes quantités. Ces conditions particulières permettent d'intégrer des moyens de production très spécialisés et peu partagés. Ces systèmes sont peu flexibles mais permettent de réduire fortement les temps d'attente devant les ressources ainsi que les temps de transfert. Ils correspondent typiquement aux ateliers rencontrés dans l'industrie automobile ou chimique pour lesquelles les moyens de production sont organisés en lignes de production spécifiques à chaque produit.
- *Les systèmes de production en petites et moyennes séries :*
 A l'inverse de la catégorie précédente, ce sont des ateliers dans lesquels la diversité des produits ainsi que le faible volume des demandes ne permettent pas une spécialisation des moyens de production. De ce fait, les différents produits sont successivement fabriqués sur des ressources

communes, la production s'effectuant alors par lots de façon à minimiser les coûts liés à la mise en fabrication (réglages préalables, nettoyages, montages d'outils). Ces organisations correspondent à celles rencontrées dans la plupart des PME manufacturières et de sous-traitance.

- *Les systèmes de production unitaire :*

Dans ce dernier cas, la nature du produit impose une production en très faible quantité. La préoccupation principale consiste alors à coordonner dans le temps et dans l'espace les moyens nécessaires. Ce type de production utilise les techniques de l'ordonnancement de projet et est souvent associé aux industries des secteurs aéronautique, spatial, informatique, du bâtiment.

(b) Classification selon la nature de la demande :

Elle consiste à distinguer les systèmes dont la production est déclenchée par les commandes des clients, de ceux dont la production s'effectue sur une anticipation de ces demandes [16]. Dans ce dernier cas, les produits sont stockés en vue de satisfaire une commande ultérieure.

- *Les systèmes basés sur une production à la commande :*

Ils concernent principalement les entreprises proposant une grande variété de produits dont la demande est très aléatoire, ou celles qui ne définissent leurs produits qu'à partir de demandes clients précises. Les sociétés de sous-traitance sont des exemples significatifs de ce dernier cas.

- *Les systèmes basés sur une production pour stock :*

Ce type de production n'est possible que pour des entreprises dont la gamme de produits proposés est peu évolutive, et surtout dont la demande sur ces produits est suffisamment prévisible. De plus, pour être réellement intéressant, un tel type de production doit se justifier soit par un temps de fabrication par produit trop important (c'est-à-dire dépassant la durée entre la prise d'une commande et la date de livraison souhaitée), soit par des pics de demande ne nécessitant pas à eux seuls, une augmentation de la capacité de production. Par exemple, la fabrication d'automobiles ne peut s'effectuer sur demande, mais doit devancer celle-ci (*prévisions*).

1.2.2 Le système de gestion

Le rôle essentiel du système de gestion est de déterminer un ensemble de décisions assurant une organisation efficace de la production compte tenu des multiples contraintes internes ou externes à l'entreprise. Sa tâche est donc vaste et complexe. Elle va de la définition de la politique générale de l'entreprise jusqu'au contrôle et au suivi de la fabrication. Pour assurer cette maîtrise, le système de gestion doit recouvrir des fonctions très diverses telles que collecte de données techniques ou commerciales, établissement des budgets, calcul des coûts, gestion des stocks et des approvisionnements, planification et ordonnancement de la production. Qu'il soit informatisé ou non, le système de gestion est souvent structuré autour de deux principaux sous-systèmes :

- *Le sous-système d'information :*

Il est chargé de collecter et de gérer l'organisation des très nombreuses données, souvent hétérogènes (informations techniques, prévisions, objectifs, contraintes, etc). Ces informations sont relatives principalement au système de production (données internes) et à son environnement (données externes).

- *Le sous-système de décision :*

A partir de la base de données constituée par le système d'information, il doit définir les diverses décisions à mettre en oeuvre pour assurer un fonctionnement correct du système de production.

De manière générale, la qualité du système de gestion se manifeste par sa capacité à concilier des objectifs souvent contradictoires tels que, réduction des en-cours et des stocks, utilisation rationnelle des moyens de production, augmentation de la qualité de service auprès des clients, respect des

délais, etc. En outre, il doit pouvoir faire face à différents types d'aléas (pannes, absentéisme, variations de l'activité commerciale, etc).

La figure I.2 schématise les interactions existant entre le système de gestion et le système de production.

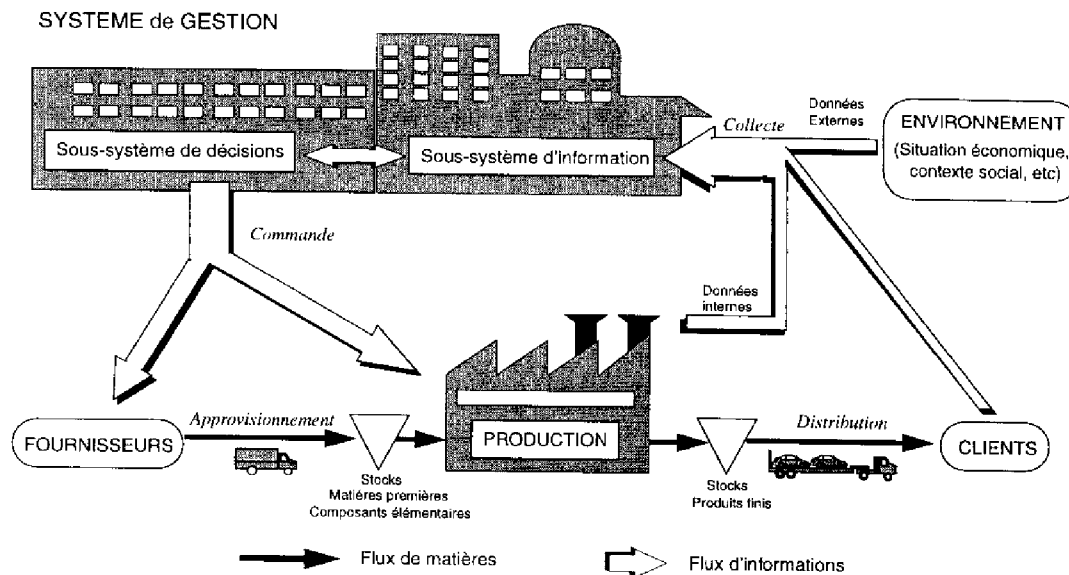


Figure I.2: Le système de gestion dans l'entreprise

I.2.3 Structuration des décisions

Le système de gestion doit maintenir un certain niveau de productivité tout en restant compatible avec les contraintes commerciales, techniques et financières. Mais, en raison des contraintes imposées par le marché et de la diversité des fonctions à assurer, celui-ci est souvent confronté à des prises de décisions possédant une forte combinatoire et surtout, incluant plusieurs problématiques différentes. C'est pourquoi les décisions de gestion sont communément structurées en trois niveaux [2] comme le montre la figure I.3.

Cette figure indique la position et les attributions de chacun des niveaux. Toute décision prise à un niveau constitue un objectif pour le niveau immédiatement inférieur (processus *top-down*). Eventuellement, un retour d'informations d'un niveau vers celui immédiatement supérieur (processus *bottom-up*) peut être nécessaire afin d'évaluer ou remettre en cause les décisions prises par celui-ci. Notons qu'en pratique, cette boucle de retour reste souvent d'une mise en oeuvre difficile de par l'organisation même des entreprises.

Cette décomposition concilie essentiellement les idées suivantes :

- On ramène la prise de décision globale à une séquence de sous-problèmes de taille plus abordable. Les objectifs, les modélisations et les caractéristiques des sous-problèmes associés à chacun des niveaux sont alors plus homogènes (niveau de détail des informations requises, forme des décisions, etc ...).
- Elle détermine pour chaque niveau la longueur relative de l'horizon sur lequel s'applique la prise de décision. La quantification de ces différents horizons reste toutefois très liée à la politique industrielle et au type de production considéré.
- Enfin, elle est en rapport direct avec l'organisation hiérarchique de la plupart des entreprises.

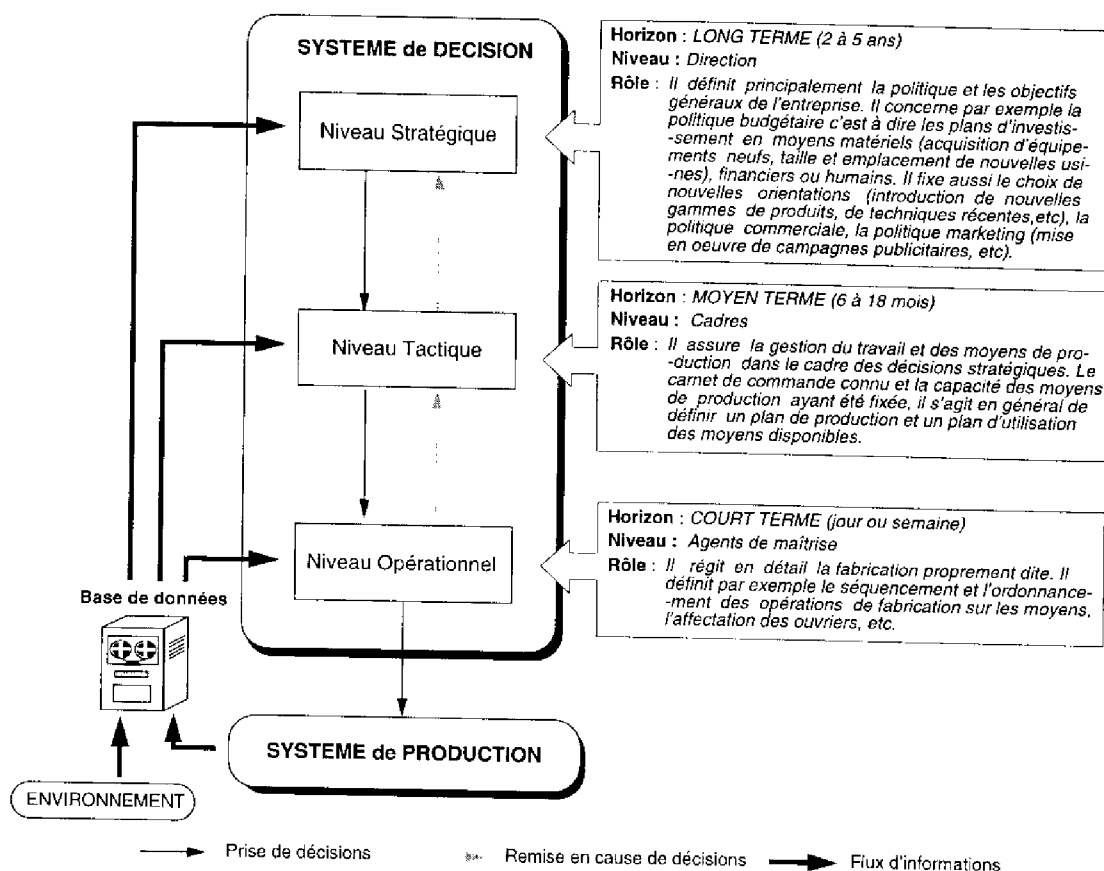


Figure I.3: Structure hiérarchique des décisions au sein de l'entreprise

La complexité des problèmes de gestion a motivé le développement de nombreux systèmes de *GPAO* (*Gestion de Production Assistée par Ordinateur*) dans le but de fournir une aide efficace aux décideurs. Toutefois, il faut noter que l'intégration globale des différentes fonctions de gestion est encore peu répandue dans ces systèmes. Ces logiciels concernent essentiellement les problématiques associées aux niveaux tactique (planification, gestion des stocks, etc) et opérationnel (ordonnancement, conduite temps réel, etc). De plus, ces fonctions sont souvent traitées de manière indépendante.

1.3 QUELQUES APPROCHES CLASSIQUES

Même si l'introduction de l'informatique a permis de faciliter le traitement des informations et de simplifier les phases purement calculatoires, elle ne résoud pas pour autant les difficultés de gestion proprement dites. Afin d'exploiter au mieux ces moyens de calculs et devant la multiplicité des problèmes rencontrés, les systèmes de *GPAO* sont dans la plupart des cas adaptés aux besoins spécifiques de chaque entreprise. Cependant, ceux-ci s'appuient généralement sur des principes analogues et cette section se propose de donner un aperçu des concepts les plus marquants mis en oeuvre lors de ces trente dernières années.

1.3.1 L'approche M.R.P. II (Manufacturing Resource Planning)

Parmi les systèmes de *GPAO* proposés sur le marché, ceux conçus autour de méthodes basées sur des structures de décisions multi-niveaux et sur une logique de "type *MRP*" sont certainement

les plus répandus et les plus utilisés. Les étapes principales de ce type d'approche sont décrites dans le paragraphe I.3.1.1. Le système *MRP II* présenté au paragraphe I.3.1.2 ne constitue en fait qu'une extension de ces systèmes classiques qui vise à pallier un certain nombre de défauts reprochés à ces derniers.

1.3.1.1 Structure décisionnelle hiérarchisée classique

Une organisation typique est schématisée sur la figure I.4 et s'articule autour de l'établissement séquentiel de différents plans :

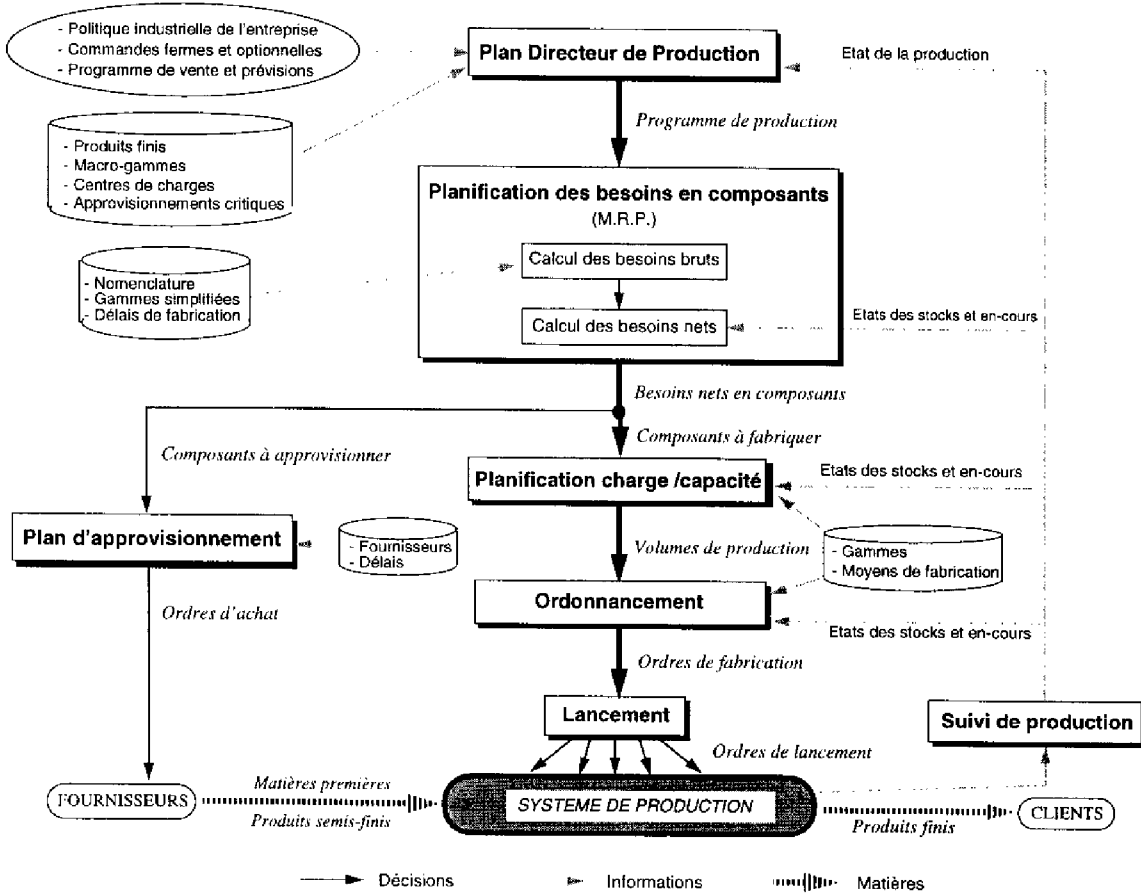


Figure I.4: Organisation typique d'un système de gestion

1. En premier lieu, le plan directeur de production (ou *PDP*) définit les types et les volumes de produits à fabriquer à partir du carnet de commandes, de données économiques fixes et de prévisions sur la demande estimées sur la base d'études de marché ou d'historiques. En pratique, la constitution du *PDP* dépend beaucoup de la nature compétitive du marché et de la politique industrielle de l'entreprise (production pour stock, sur commande, ou mixte, etc (cf §I.2.1)).
2. La planification des besoins en composants (ou *PBC*, plus connue sous le sigle *MRP* pour Material Requirement Planning) définit période par période les quantités de matières premières et de produits semi-finis nécessaires à la fabrication des produits prévus par le *PDP*. Généralement, cette planification est réalisée à capacité infinie et parfois, des procédures simples de *lot-sizing* (telle que *Economic Order Quantity*) sont intégrées.

3. De ce fait, il incombe à la planification charge/capacité et à l'ordonnancement de garantir que les ordres de fabrication puissent être exécutés et que la charge induite ne dépasse pas la capacité disponible. Lorsque cette condition n'est pas remplie, un équilibrage est effectué, soit en augmentant la capacité de production (heures supplémentaires, sous-traitance), soit en lissant la charge (avancée de certains ordres de fabrication), soit en dernier ressort en modifiant le *PDP*.
4. Le lancement constitue l'interface entre la planification et la fabrication proprement dite. Cette fonction permet de désigner et d'organiser les tâches qui doivent être lancées au niveau de l'atelier.
5. Le suivi de production permet de contrôler en temps réel le déroulement de la production. S'il apparaît des écarts trop importantes entre le prévisionnel et le réel, un nouveau cycle de planification est initié.

Des études ont montré que cette procédure classique de gestion ne donnait pas toujours entièrement satisfaction à ses utilisateurs. Des délais trop longs entraînant des retards de livraison, des stocks d'en-cours et de produit finis trop élevés sont les plus sérieux problèmes auxquels doivent faire face les entreprises. Parmi les raisons de ces imperfections, on peut signaler :

- l'augmentation du nombre de variantes de chaque produit (*cf* §I.1.1), rendant plus difficile l'élaboration de prévisions correctes, et par suite le calcul des différents plans.
- l'absence de contrôle au niveau du *PDP* et de la *PBC* pour déterminer si la capacité disponible est suffisante et si les dates de livraison peuvent être tenues (problèmes n'étant résolus qu'à partir de la planification charge/capacité).
- la non prise en compte de l'état de charge de l'atelier dans l'évaluation des paramètres nécessaires pour l'établissement des plans, comme par exemple, le délai global de fabrication d'un produit (somme des temps opératoires, de transport, d'attente, etc). Les calculs de charge n'étant pas fiables, l'utilisateur a alors tendance à anticiper les ordres de fabrication afin de garantir les dates de livraison. Mais, cette anticipation entraîne aussi une augmentation des niveaux d'en-cours et des temps moyens de fabrication.

I.3.1.2 Apports du système M.R.P. II

MRP II constitue une extension de l'approche classique décrite dans le paragraphe I.3.1.1. L'idée est d'ajuster la charge en fonction de la capacité disponible à chaque étape du processus décisionnel. Ainsi, les besoins en ressources sont examinés à chaque niveau de planification au sein desquels l'agrégation des produits, des capacités et du temps diffèrent [72], [14], [90], [89]. La figure I.5 montre les différentes phases de planification du système *MRP II*.

MRP II débute le processus de décision par l'établissement d'un budget prévisionnel. Celui-ci intègre les plans et prévisions émanant des services commerciaux, financiers et opérationnels et fournit une première base pour l'évaluation des revenus nets de l'entreprise. À partir du plan de ventes résultant et de l'évaluation des stocks à constituer, un plan de production agrégé est déterminé. Ce plan est alors analysé par le module *RRP* (pour *Resource Requirements Planning*) afin de déterminer si ces objectifs sont réalisables. Celui-ci calcule les quantités de ressources requises pour chaque période. Ces ressources peuvent être du travail, des composants, des équipements ou des fonds financiers (pour l'achat d'équipements, le paiement des employés, etc). Si l'adéquation n'est pas obtenue, l'utilisateur doit modifier sa stratégie. Ces étapes sont ainsi répétées jusqu'à ce qu'un budget prévisionnel faisable et satisfaisant soit trouvé.

Le *PDP* raisonne sur les produits finis et consiste essentiellement à désagréger le plan de production précédent en tenant compte de l'état actuel de la production (commandes clients reçus,

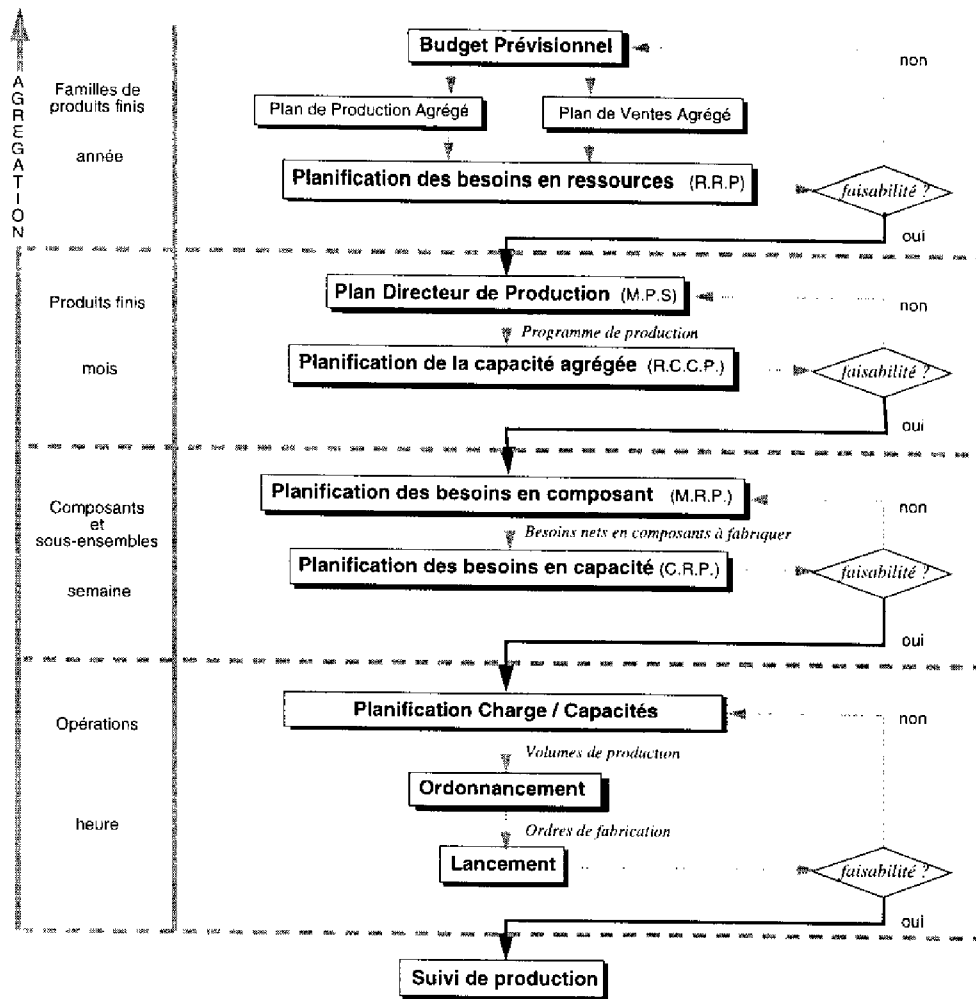


Figure I.5: Processus décisionnel dans le concept MRP II

arriérés de fabrication, stocks de produits finis, etc). Le module *RCCP* (*Rough Cut Capacity Planning*) détermine alors si les capacités sont suffisantes pour mener à bien ce *PDP*. Le *RCCP* est plus raffiné que le *RRP* (capacités observées de façon plus détaillée, discrétisation du temps plus fine, prise en compte des délais de production des diverses étapes de fabrication, etc). S'il en résulte des surcharges ou des sous-charges, l'utilisateur réagit par une action sur les capacités ou par une adaptation des quantités. Ici encore, ce processus est exécuté jusqu'à ce qu'une solution faisable et satisfaisante soit obtenue.

La *PBC* désagrège alors le *PDP* en un ensemble de plans détaillés pour chaque composant fabriqué ou assemblé. Une procédure nommée *CRP* (*short-range Capacity Requirements Planning*) vérifie si, pour chaque période de temps, les capacités nécessaires à chaque centre de fabrication sont disponibles. Comme précédemment, cette procédure constitue un niveau d'affinement supplémentaire vis à vis de *RCCP*. En effet, *CRP* travaille sur des périodes de temps plus courtes et considère des informations plus détaillées et plus nombreuses. De plus, il prend en compte des événements non planifiés (pannes sur des machines, niveaux de rebuts non prévus, ordres de fabrication prioritaires, etc) qui peuvent conduire à des écarts dans l'estimation des capacités requises entre les modules *RCCP* et *CRP*.

Enfin, les dernières étapes du processus de planification sont pour l'essentiel identiques aux systèmes de gestion classiques décrits au paragraphe I.3.1.1.

Figure I.6: Structure schématique du produit *OPT*

Cette approche se caractérise essentiellement par sa démarche d'analyse des flux au sein du système de production [44]. En effet, l'idée de base d'*OPT* est que les flots de matières et de biens,

et en conséquence les performances de l'unité de production, sont déterminés par les machines ou postes de travail fonctionnant à capacité saturée (dites machines "goulots"). C'est pourquoi cette approche s'attache principalement à analyser l'adéquation entre la capacité de l'ensemble des moyens de production et la demande en produits finis ; si cette adéquation n'est pas réalisée globalement sur toute la ligne, alors il risque de se créer des stocks générateurs de dépenses d'exploitation. La recherche de cette adéquation conduit ainsi à analyser les flux issus de chaque moyen de production et à identifier les moyens qui constituent des goulots de production. Cette analyse permet ainsi de déterminer les capacités adéquates et la taille des stocks devant chaque ressource.

L'étude du fonctionnement des goulots (et des non goulots) amène à définir des règles de gestion des flux. La philosophie d'OPT est originellement exprimée par neuf principes [16]. Une explication détaillée de ceux-ci est donnée dans [59], [28]. A titre d'exemple, on peut citer la règle "*une heure perdue sur un goulot est perdue par l'ensemble du système*". Cette règle qui n'est évidemment plus vraie sur une ressource non-goulot, indique que les éventuels gains de temps ou la fiabilité des machines doivent être prioritairement étudiés sur les goulots.

Comme MRP II, OPT est plutôt destiné à des environnements de production complexes. Bien qu'à première vue, les procédures de planification d'OPT et MRP II semblent assez différentes, celles-ci exploitent des principes de base semblables. En effet, dans l'approche MRP II, le plan agrégé de production et le PDP devant être faisables, les modules RRP et RCCP identifient d'une certaine manière les ressources goulots et conditionnent de ce fait la production en fonction de celles-ci [71]. Par contre, OPT se distingue nettement de MRP II par sa structure centralisée et détaillée de planification.

1.3.3 L'approche J.I.T. (Just In Time)

Les systèmes décrits précédemment ont été conçus pour traiter des situations complexes de planification et requièrent souvent des moyens de calcul importants. Au contraire, l'approche JIT est destinée aux industries basées sur une production à la commande (cf §I.2.1) et dont la demande en produits finis reste stable. L'idée de base est que, dans de tels contextes, l'existence de stocks importants cache très souvent des déficiences du système de production.

De façon plus générale, la philosophie JIT peut être résumée par l'objectif suivant : "*Éliminer toute source de gaspillage par une recherche permanente d'amélioration du processus de production*". Par conséquent, cette approche ne définit pas seulement un processus de gestion mais aussi des règles de conception des systèmes de production. C'est pourquoi, la mise en œuvre d'une approche JIT requiert deux types d'actions :

1. Réorganisation de la chaîne logistique et productique en vue de fournir une flexibilité et une fiabilité suffisante pour produire exactement la commande d'un client

Cette réorganisation doit chercher par exemple à :

- réduire les temps de mise en fabrication ce qui conduit à des lots plus petits et diminue les stocks de produits finis et d'en-cours ainsi que les temps de fabrication moyens.
- réduire la complexité des flux de composants en structurant le système en lignes de production qui réalisent alors toutes les opérations d'une certaine famille de produits. Les technologies de fabrication telles que FMC (*Flexible Manufacturing Cells*) et FMS (*Flexible Manufacturing Systems*) sont particulièrement adaptées à ce type d'organisation.
- intégrer le fournisseur dans le concept JIT. Celui-ci doit pouvoir fournir des petits volumes de composants (correspondant à un besoin journalier) et le plus tard possible (synchronisation du fournisseur sur la production).
- augmenter la fiabilité du processus de production par des politiques efficaces de maintenance préventive (TPM : *Total Productive Maintenance*), de contrôle qualité (TQC : *Total Quality Control*).

2. Implantation d'un système de contrôle de la production qui tire avantage de ces améliorations et fournit des procédures simples de contrôle de la production juste à temps

Un des systèmes de contrôle de la production typique de cette approche est le système *KANBAN*, développé au Japon [80]. Son principe est schématisé sur la figure I.7 :

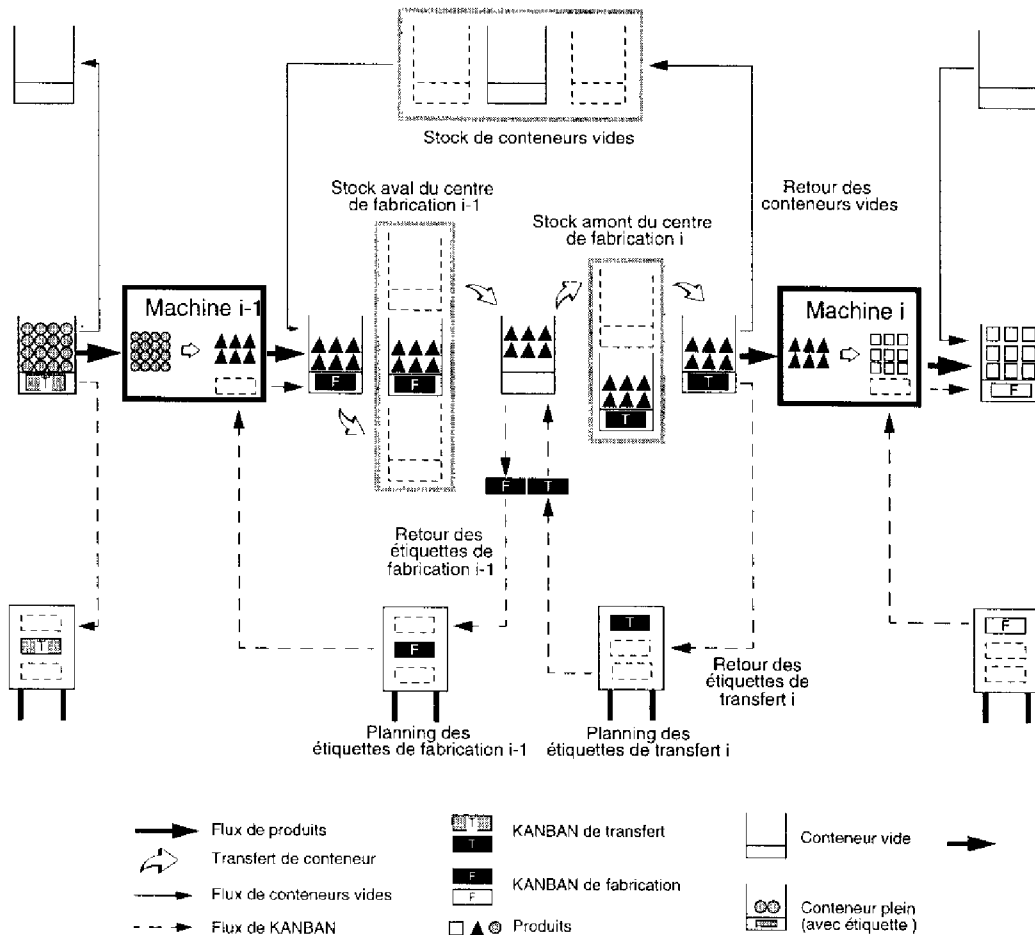


Figure I.7: Boucle de contrôle entre 2 opérations successives par *KANBAN*

KANBAN est un système à flux tiré et peut être vu comme une version simplifiée du contrôle de charge. Une fois que les responsables de production ont défini les niveaux d'en-cours pour chaque centre de fabrication (taille de lots, nombre de *KANBAN*, etc [74]), la tâche de contrôle de la production est décentralisée au niveau de l'atelier. Le processus est alors le suivant : sur une demande aval, les produits (lot correspondant à un conteneur) devant être transformés dans le centre de fabrication i sont puisés dans le stock amont de ce centre. Cette action entraîne le retour d'un conteneur vide vers le centre amont et d'une *étiquette de transfert i* vers le planning associé. Cette étiquette déclenche alors le transfert d'un lot de produits situé dans le stock aval du centre de fabrication $i-1$ vers le stock amont du centre de fabrication i . Ce transfert libère une *étiquette de fabrication $i-1$* , qui déclenche à son tour la mise en fabrication de produits dans le centre $i-1$. Ce processus se propage ainsi pour toutes les opérations de la gamme. Ce système ne requiert donc pas de procédure de planification centralisée puisque la production est déclenchée automatiquement par une demande provenant d'un client ou d'une étape de fabrication aval.

Compte tenu du processus mis en oeuvre, ce système doit intégrer des moyens suffisamment flexibles pour compenser des variations de la demande. Lorsque celles-ci sont trop importantes pour que la ligne de production contrôlée par *KANBAN* puisse y faire face, un système de planification classique est nécessaire afin d'aplanir les fluctuations [50].

Ces deux types d'actions ont pour conséquence de simplifier le problème de planification et de contrôle de la production. Si cette simplification est suffisamment réussie, les concepts sophistiqués tels que *MRP II* ou *OPT* ne sont plus nécessaires. Cependant, le concept *JIT* n'est pas une alternative aux systèmes de *GPAO* décrits précédemment, mais une amélioration continue des systèmes de fabrication menant à de meilleures performances. En effet, des résultats de simulation [64] indiquent que c'est non pas la méthode *KANBAN*, mais la réorganisation du système de production qui permet d'augmenter la productivité, et que *KANBAN* est seulement la façon (peut-être la plus appropriée ?) de tirer avantage de ce potentiel.

1.3.4 Vers une combinaison des méthodes de gestion

Cette présentation des approches de gestion de la production n'est évidemment pas exhaustive. Cependant, une question se pose déjà, à savoir : *"Quelle est parmi ces approches celle qui est la mieux adaptée pour un environnement de production donné"*. La réponse reste la plupart du temps très délicate [37], [42].

D'un côté, chaque concept de gestion de production est posé pour un certain type de situation de planification qui peut être décrit par des caractéristiques telles que nature du produit, nombre de variantes de ce produit, volumes de production, fluctuation de la demande, cycle répétitif, technologie de fabrication, etc. Mais, d'un autre côté, différents produits et différents processus de production peuvent nécessiter l'application de différentes méthodes de gestion au sein de la même entreprise. Dans ces conditions, la conception du système de gestion reste dans de nombreux cas, très dépendante du problème de production considéré [91].

En fait, les diverses classifications trouvées dans la littérature [48] sont établies autant sur l'expérience pratique et sur un raisonnement qualitatif que sur un fondement théorique. Toutefois, à partir de modèles quantitatifs, des études par simulation de ces différentes approches ont été réalisées [64], [84], [75], [73]. Mais ces comparaisons ont une vue limitée car elles ne peuvent pas couvrir en globalité la complexité des situations réelles de planification. Aussi, les études disponibles actuellement ne peuvent fournir une aide suffisante aux responsables de production quant au choix du système le mieux adapté.

Même si ces diverses méthodes apparaissent relativement différentes à première vue, il n'en demeure pas moins clair que des relations, certes complexes, existent entre elles. De ce fait, l'idée de pouvoir les combiner a émergé. En effet, ces associations peuvent permettre la conception de systèmes de gestion mieux adaptés à la diversité des contextes de production par l'exploitation des spécificités de chacune d'elles. De nombreuses études sont menées notamment pour l'introduction des principes du *JIT* dans une démarche de type *MRP* afin de permettre à cette dernière d'être plus réactive [27], [32].

La complexité et de la diversité des problèmes de production industriels rendent donc difficiles la conception et la mise en pratique de systèmes de gestion qui se voudraient "universels". Il suffit pour cela de comptabiliser le nombre important de travaux de recherche déjà réalisés à ce jour. Ceci souligne donc l'intérêt d'analyser de façon plus formelle les principes mis en oeuvre dans ces systèmes. Ainsi, une compréhension plus fine des processus de décision peut permettre une meilleure maîtrise de ces mécanismes complexes et par suite, une amélioration des possibilités et des performances des outils de gestion.

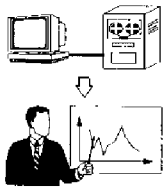
I.4 CONTEXTE DE L'ÉTUDE

Les sections précédentes ont permis de dresser un bref panorama des éléments et concepts classiques en gestion de production. L'objectif de cette dernière section est de positionner notre étude dans ce cadre.



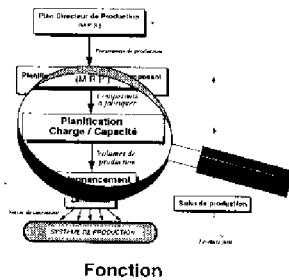
Système de Production

Selon les classifications données au paragraphe I.2.1, ce travail s'intéresse principalement à une production pour stock, en petite, moyenne ou grande série.



Système de Décision

Cette étude se focalise plus spécifiquement sur les structures décisionnelles multi-niveaux. La section I.3 a montré que cette approche largement acceptée consiste à décomposer le système de décision en fonctions élémentaires, l'ensemble s'intégrant au sein d'une structure hiérarchisée dans laquelle les décisions sont affinées successivement. Une mise en oeuvre pratique de ces principes se trouve notamment dans les systèmes de type *MRP II* (cf §I.3.1).



Fonction

La fonction considérée dans ce travail est la planification charge/capacité. Les produits à fabriquer étant définis, son rôle est essentiellement de coordonner dans le temps, la gestion du travail et l'utilisation optimale des moyens productifs disponibles. Mais, face à la complexité liée à l'établissement de ce plan, une méthode souvent adoptée consiste à décomposer le problème global en sous-problèmes. On retrouve ainsi au sein même de cette fonction, les principes associés aux structures décisionnelles multi-niveaux.



Objet de l'étude

La section I.3.1 a montré qu'une difficulté intrinsèque à ces structures multi-niveaux est de garantir que toute décision d'un niveau donné puisse être faisable par les niveaux inférieurs. C'est pourquoi l'objet de ce travail consiste principalement à analyser les interactions entre niveaux de décision. Cette étude cherche donc à mettre en oeuvre des mécanismes assurant la coordination des décisions émanant des différents niveaux afin d'obtenir un fonctionnement correct de la structure.

Le travail exposé dans la suite de ce mémoire est organisé de la manière suivante. Le chapitre II décrit de façon plus exhaustive les concepts généraux associés aux structures décisionnelles multi-niveaux. Le problème de planification et les objectifs précis visés par cette étude sont définis dans le chapitre III. L'analyse théorique des interactions entre niveaux est réalisée dans les chapitres IV et V. Enfin, le chapitre VI s'intéresse à la mise en oeuvre pratique des résultats obtenus et propose quelques extensions possibles.

- Chapitre II -

STRUCTURES DÉCISIONNELLES MULTI-NIVEAUX

RÉSUMÉ

Après avoir présenté dans le chapitre I les principaux systèmes de GPAO mis en oeuvre en milieu industriel, ce deuxième chapitre s'intéresse aux systèmes de gestion organisés autour de structures décisionnelles multi-niveaux. L'approche considérée dans ce travail se distingue des systèmes de GPAO, par une exploitation plus importante des outils de la recherche opérationnelle. La construction de modèles de décision analytiques et la formalisation des interactions entre niveaux permettent une analyse plus rigoureuse des contraintes du problème. Cette caractéristique confère à cette approche des propriétés qui pallient certaines déficiences constatées dans les systèmes de GPAO classiques.

Dans ce cadre, l'objet de ce chapitre est de décrire les principaux concepts caractérisant ces structures décisionnelles multi-niveaux.

Les concepts d'agrégation et de désagrégation sont d'abord analysés dans la section II.2. Les méthodes de combinaison et de dissection relatives aux problèmes de programmation linéaire sont exposées.

La section II.3 montre la manière dont le concept d'agrégation est exploité dans les structures décisionnelles multi-niveaux. Les notions de niveau décisionnel et de hiérarchie sont définies. Enfin, le processus de décision au sein de telles structures est commenté.

Ce dernier point montre que les décisions de chaque niveau ne peuvent pas être élaborées indépendamment. Le problème de coordination des décisions est alors abordé dans la section II.4. Ceci conduit à définir les concepts génériques de "robustesse" et de "cohérence" qui permettent de structurer l'étude des interactions. Les principales méthodes de mise en oeuvre de ces propriétés sont exposées.

Enfin, la section II.5 présente quelques travaux de recherche significatifs concernant l'approche hiérarchisée et plus généralement les structures décisionnelles multi-niveaux.

II.1 PRINCIPES FONDAMENTAUX

Cette première section présente sommairement les principales caractéristiques des structures décisionnelles multi-niveaux. Celles-ci sont reprises de façon détaillée dans les sections suivantes.

II.1.1 Décomposition du système de gestion et hiérarchisation des décisions

Le chapitre précédent a montré que la prise de décision au sein d'un système de gestion est rendue particulièrement difficile compte tenu, d'une part, du volume, de la variété et de l'incertitude caractérisant les données à traiter et, d'autre part, du nombre et de la diversité des décisions à élaborer.

Afin de pallier cette complexité, une solution qui semble acceptée aussi bien dans les outils industriels de *GPAO* que dans de nombreux travaux de recherche consiste à décomposer le problème de décision en fonctions élémentaires [43].

Diverses organisations de ces différentes fonctions sont envisageables. Une organisation de type hiérarchisée est retenue dans ce travail. Les décisions au sein de telles structures sont alors élaborées par affinements successifs : les décisions d'une fonction deviennent ainsi des contraintes ou des objectifs pour la fonction inférieure (*cf* Fig I.4 et Fig I.5). Par ailleurs, au sommet de la hiérarchie, les données manipulées sont généralement grossières et les horizons temporels sont longs. En bas de la hiérarchie, les données sont détaillées et les horizons temporels se raccourcissent. Par ce processus, une certaine autonomie peut être octroyée aux différentes fonctions, procurant ainsi une capacité de réactivité au système décisionnel global.

II.1.2 Coordination des décisions

Ces structures de décision ne procurent pas toujours entière satisfaction lors de leur mise en oeuvre effective. Une des raisons de ces imperfections est que chaque fonction est souvent étudiée et construite dans la plus parfaite indépendance. L'enchaînement prévu pour l'élaboration des décisions peut être arrêté par l'absence de solutions faisables dans une fonction trop contrainte par les exigences des fonctions supérieures. Ainsi, l'autonomie souhaitée a priori est souvent réduite ou inexistante et la réactivité devient alors très difficile à mettre en oeuvre.

Pour éviter ces dysfonctionnements, il est nécessaire d'analyser les liens pouvant exister entre certaines fonctions, afin de pouvoir les intégrer dans les logiques de calcul et d'aboutir à la coordination globale du système de décision.

II.1.3 Structures multi-niveaux pour la planification

Ce travail s'intéresse plus particulièrement aux décisions de type tactiques. Celles-ci sont généralement élaborées par la fonction planification. Afin de maîtriser la complexité de cette tâche et de procurer une certaine réactivité au processus décisionnel, de nombreux travaux de recherche (*cf* §II.5) ont montré l'intérêt d'intégrer au sein même de cette fonction, les principes associés aux structures de décision multi-niveaux. La littérature scientifique décrit ce contexte d'étude par l'appellation "Planification hiérarchisée de la Production (ou *HPP* pour "*Hierarchical Production Planning*" dans la terminologie anglo-saxonne).

L'approche *HPP* est donc basée sur les notions de niveaux décisionnels (principe de décomposition), d'horizons temporels adaptés (dynamique appropriée à chaque niveau), d'agrégation de données (utilisation de données plus ou moins grossières), de désagrégation des décisions (affinements successifs des décisions et coordination entre niveaux).

Toutefois, l'approche *HPP* se distingue des systèmes de *GPAO* multi-niveaux classiques (tels que ceux basés sur la logique *MRP*) par une formalisation importante des mécanismes propres à ces structures décisionnelles [91]. En effet, les problèmes de planification résolus à chaque niveau

sont décrits par des modèles analytiques. Les processus d'agrégation et de désagrégation s'appuient sur des méthodes mathématiques bien définies. Cette caractéristique de l'approche *HPP* autorise une étude systématique des interactions existant entre les modèles de décision. Les résultats de cette analyse peuvent alors permettre de comprendre, et par suite, de résoudre le problème de coordination des décisions soulevé au paragraphe précédent. On assure ainsi un fonctionnement correct de ces structures multi-niveaux.

II.2 CONCEPTS D'AGRÉGATION ET DE DÉSAGRÉGATION

Une caractéristique de l'approche *HPP* est l'utilisation de modèles de décisions s'appuyant sur la programmation mathématique. Un point fondamental à considérer lors de l'élaboration de tels modèles analytiques est le niveau de détail à employer pour représenter le processus considéré. En effet, celui-ci détermine en partie le classique compromis entre "*qualité de la solution désirée*" et "*charge de calcul requise*".

II.2.1 Motivation première : réduction de la complexité des modèles

L'évolution des technologies informatiques (amélioration des techniques de stockage et de manipulation de données) et des algorithmes numériques de résolution ont rendu possible le traitement aisé de certaines classes de problèmes. Cependant, la demande d'outils de gestion toujours plus performants nécessite le développement de modèles plus réalistes mais qui souvent, restent trop complexes pour les solveurs courants. Par ailleurs, l'expansion des micro-calculateurs au sein des entreprises induit des limites supplémentaires dans les capacités de calcul, se traduisant soit par la violation de contraintes logicielles (espace mémoire) soit par des temps de calcul non acceptables. Dans de telles conditions, il devient nécessaire d'utiliser des techniques permettant de réduire la complexité ou permettant d'obtenir des solutions approchées.

Deux classes importantes de méthodes ont été développées pour faciliter la résolution pratique de problèmes soit de grandes dimensions, soit avec des moyens de calcul limités :

1. les méthodes dites de décomposition :

Le principe général de ces méthodes est de décomposer le modèle initial en plusieurs sous-modèles qu'il convient de coordonner lors de la résolution. La complexité du problème initial est ainsi "répartie" entre les différents sous-problèmes générés. Ces derniers possèdent des dimensions réduites et sont donc plus simples à traiter.

2. les méthodes dites d'agrégation/désagrégation :

Les méthodes d'agrégation/désagrégation s'appuient sur la définition de nouvelles entités obtenues par agrégation. Ceci conduit ainsi à construire un nouveau modèle dit *agrégé* à partir de ces entités. La solution agrégée obtenue par la résolution de ce modèle est ensuite désagrégée pour fournir une solution au problème initial.

Dans le cadre de ce travail, on ne s'intéresse qu'aux méthodes d'agrégation/désagrégation.

II.2.2 Principe général des méthodes d'agrégation/désagrégation

Le concept d'agrégation est défini comme une forme d'abstraction [25]. Dans ce processus, des entités distinctes mais entre lesquelles une relation peut être établie, sont regroupées et représentées par une même entité dite *agrégée* (cf Fig II.1).

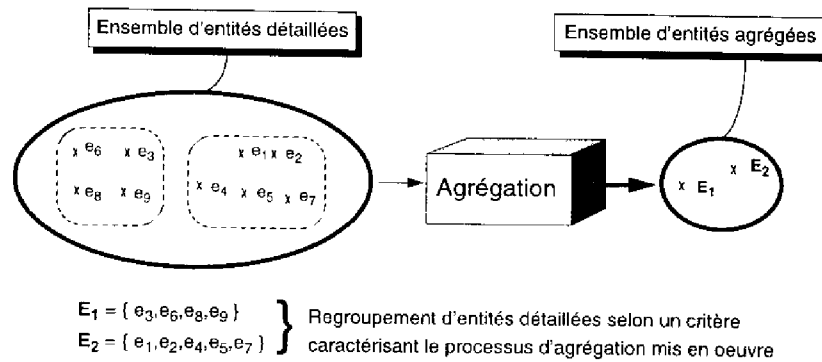


Figure II.1: Concept d'agrégation

Le concept de désagrégation peut être vu comme le processus inverse de l'agrégation.

Afin de maîtriser le problème de complexité, le principe des méthodes d'agrégation/désagrégation est de résoudre un modèle agrégé. Ses dimensions étant réduites, sa résolution peut être effectuée de manière aisée. A partir de la solution agrégée obtenue, une solution du problème initial est élaboré par un processus de désagrégation (cf Figure II.2).

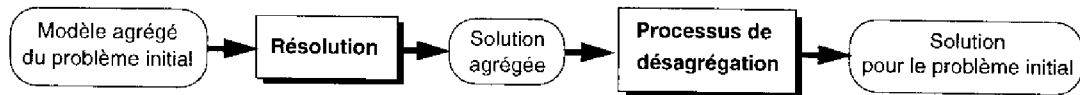


Figure II.2: Principe des méthodes d'agrégation/désagrégation

Le point de départ de ces méthodes est donc le modèle agrégé du problème initial. Dans ce cadre, deux situations peuvent se présenter :

- soit le modèle agrégé est obtenu par agrégation de modèle, c'est à dire à partir de l'agrégation d'un modèle établie à partir d'une modélisation détaillée,
- soit le modèle agrégé est obtenu directement à partir d'une modélisation agrégée.

Ces deux approches sont décrites dans la suite de cette section.

II.2.3 Agrégation de modèle

Dans ce qui suit, la procédure générale de mise en œuvre de la méthode d'agrégation/désagrégation est décrite pour le cas où le modèle agrégé résulte d'une agrégation de modèle. Dans ce cadre, quelques techniques d'analyse et de combinaison employées dans ce processus sont présentées.

II.2.3.1 Procédure générale

Le principe de cette approche repose sur la construction d'un *modèle agrégé* par agrégation des données et modèles initiaux. L'agrégation de modèle permet ainsi d'élaborer un modèle agrégé liant variables agrégées et données en combinant et en manipulant les relations liant les variables et données du modèle initial. Le modèle résultant a alors une complexité réduite et peut être résolu de façon aisée. Des solutions (approchées ou non) du problème initial peuvent ensuite être élaborées par désagrégation de cette solution agrégée [15]. Cette procédure est schématisée sur la figure II.3.

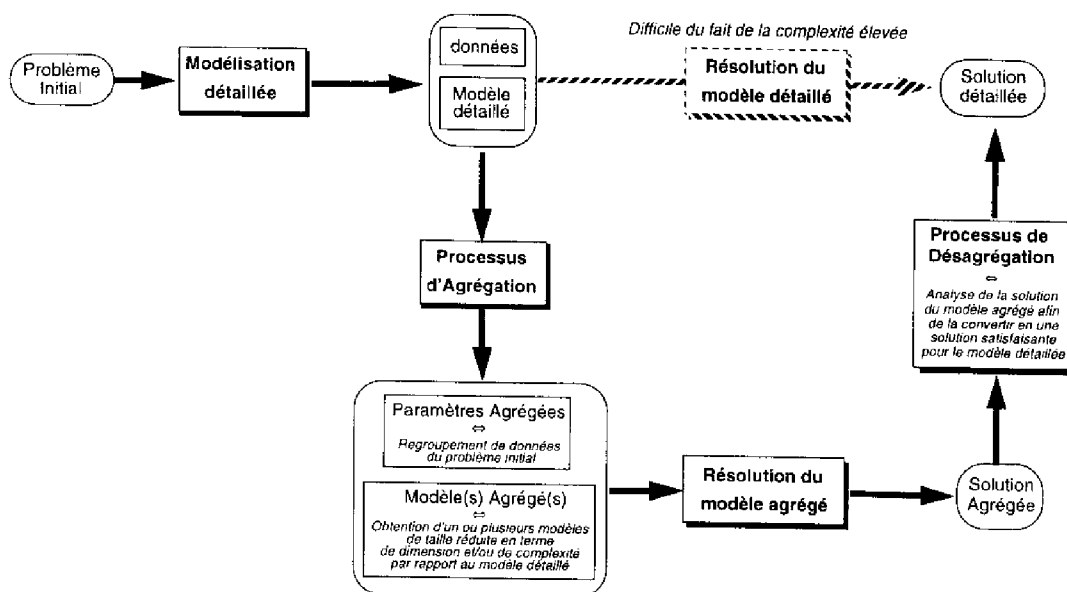


Figure II.3: Procédure d'agrégation/désagrégation : Cas où le modèle agrégé découle d'une agrégation de modèle

Il est à noter que les modèles agrégés établis par l'intermédiaire d'un processus d'agrégation restent généralement de même type et de même structure que les modèles initiaux sur lesquels ils sont basés. De plus, il existe différentes techniques permettant d'évaluer des bornes sur l'écart existant entre les solutions qui seraient obtenues par la résolution du problème initial et celles obtenues par l'utilisation d'une méthode d'agrégation/désagrégation [77]. En effet, les cas d'agrégation "parfaite" requièrent des conditions particulières, rarement rencontrées dans les problèmes courants. Aussi, la mise en œuvre de méthodes d'agrégation occasionne une perte d'information qu'il est évidemment souhaitable de minimiser afin que les solutions élaborées par désagrégation restent proches des solutions du problèmes initial. Ces bornes permettent ainsi de quantifier l'efficacité de ces méthodes vis à vis du compromis "qualité de la solution/charge de calcul".

Il existe diverses techniques pour établir le modèle agrégé d'un problème d'optimisation. Elles dépendent principalement des domaines d'application dans lesquels les outils de programmation mathématique sont utilisés et du type de problème considéré (linéaire, non-linéaire, en nombre entier, dynamique, etc). Dans ce travail, les modèles d'optimisation mis en oeuvre relèvent essentiellement de la programmation linéaire (PL) et sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \max Z = c.x \\ & \text{sous} \begin{cases} A.x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{II.1}$$

- où A : matrice de dimensions $(m \times n)$
- m : nombre de contraintes du modèle
- n : nombre de variables du modèle

Les paragraphes suivants présentent quelques méthodes classiques utilisées dans ce cadre.

II.2.3.2 Processus d'agrégation en programmation linéaire

Des procédures de classification formalisées sont depuis longtemps utilisées dans différents domaines tels que la psychologie ou la biologie. Celles-ci font appel à des méthodes classiques

d'analyse statistique (par exemple, minimisation de la variance au sein des groupes de données).

Dans le cas des méthodes d'agrégation, l'analyse inclut à la fois les techniques nécessaires au regroupement des entités et les méthodes permettant de former un modèle agrégé. La démarche complète est montrée sur la figure II.4.

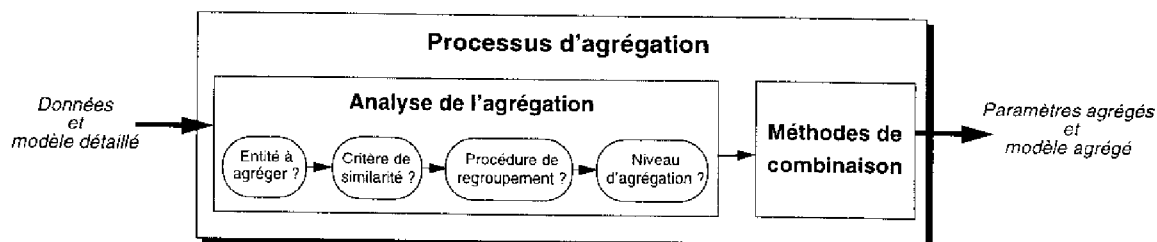


Figure II.4: Processus d'agrégation

Celle-ci se déroule en 2 étapes principales :

1. Analyse de l'agrégation

Cette première phase vise à déterminer quelles entités sont à regrouper, selon quel critère et avec quel niveau de détail.

(a) Détermination des entités à agréger

Dans certains cas, la détermination des entités à agréger peut s'avérer évidente. Par exemple, dans un problème de planification de la production où le nombre de composants élémentaires serait critique, ces derniers seraient naturellement les entités à agréger (ainsi que les variables et/ou contraintes associées).

Par contre, lorsqu'il ne ressort pas a priori d'entités "dominantes", ce choix n'est plus aussi direct. Dans ce cas, celui-ci est souvent guidé par le taux d'agrégation qu'il est nécessaire d'obtenir pour que le problème puisse être résolu, sachant que la complexité moyenne de la méthode du simplexe $O(\text{simplexe})$ est donnée par la relation empirique suivante [17] :

$$O(\text{simplexe}) = m^{2.5} \cdot n \cdot d^{0.33} \quad (\text{II.2})$$

où d est la densité de la matrice A du modèle II.1 (nombre d'éléments non-nuls de A divisé par le nombre total d'éléments de A).

Ainsi, une diminution du nombre de contraintes induit une plus grande réduction de complexité (variation quadratique) qu'une diminution de même valeur du nombre de variables.

(b) Détermination d'une mesure de similarité

Une fois cernées les entités à agréger, il est nécessaire de définir exactement les points de similarité pouvant exister entre chacun des éléments de cette entité ainsi qu'une mesure permettant de les évaluer. Généralement, une matrice triangulaire (nommée *matrice de similarité*) est construite. Par exemple, si les contraintes constituent les entités à agréger, chaque élément (i, j) de cette matrice représente la mesure de similarité entre la contrainte i et la contrainte j .

Des méthodes efficaces de mesure de similarité entre contraintes sont proposées dans [85] et [79]. Une première méthode nommée "*angle closeness*" consiste à regrouper des contraintes dont les hyperplans associés sont parallèles ou "quasi-parallèles". Une seconde méthode nommée "*spatial closeness*" vise à agréger des contraintes dont la distance avec la portion des hyperplans qui bordent le domaine d'admissibilité est minimale.

(c) *La procédure de regroupement*

Le processus de regroupement d'éléments similaires en plusieurs ensembles disjoints peut être réalisé selon différents critères. La procédure pour la détermination de groupes homogènes d'éléments de l'entité à agréger est nommée *procédure de regroupement*. Une synthèse de ces procédures peut être trouvée dans [69].

(d) *Le niveau d'agrégation à employer*

Il s'agit ici de décider du facteur de réduction à mettre en oeuvre. Sa quantification dépend très souvent de la raison pour laquelle l'agrégation est employée et constitue généralement un compromis entre la charge de calcul requise pour créer et résoudre le modèle réduit et la qualité de la solution obtenue. S'il s'agit de limitations logicielles ou de temps de calculs trop longs, cette valeur doit être évaluée de façon à obtenir un modèle en adéquation avec ces contraintes. Dans d'autres cas, le niveau d'agrégation est imposé par l'application elle-même (par exemple, pour les modèles associés aux différents niveaux décisionnels d'une entreprise).

2. Méthodes de combinaison

Après la phase d'analyse de l'agrégation, une méthode pour l'obtention des paramètres du problème réduit doit être déterminée. Les méthodes de combinaison consistent essentiellement à déterminer des "poids" qui reflètent la relative importance des paramètres dans le problème initial et à utiliser ces poids pour déduire les paramètres du problème agrégé. Ces méthodes ont été particulièrement étudiées dans [93].

Une procédure nommée "*fixed-weight combination*" génère une pondération convexe pour un groupe i de k_i éléments grâce à un vecteur g_i de dimension k dont les composantes sont non-négatives et la somme est unitaire. Par exemple, pour obtenir g_i , une procédure typique consiste à pondérer les variables de chaque groupe i par rapport à leur relative importance dans la fonction objectif. Ce vecteur est alors utilisé pour multiplier la sous-matrice A_i de paramètres associée au groupe i pour déduire les paramètres du problème agrégé. Un exemple est donné dans la suite. Si tous les éléments d'un groupe sont homogènes, les pondérations sont sensiblement égales et montrent qu'il s'agit d'une méthode de combinaison acceptable qui requiert peu de calcul.

Exemple

Considérons le problème de PL suivant :

$$\begin{aligned} & \max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 11x_4 \\ \text{sous} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 120 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons que l'analyse de l'agrégation ait déterminé que les variables x_1, x_2 et x_3 doivent être agrégées en une variable X_1 , et x_4 en X_2 . On a alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, & c_1 &= (3 \ 2 \ 5), & g_1 &= \left(\frac{3}{10} \ \frac{2}{10} \ \frac{5}{10}\right) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, & c_2 &= (11), & g_2 &= (1) \end{aligned}$$

Le calcul des termes $g_i(A_i)^T$ et $g_i(c_i)^T$ pour $i = 1, \dots, 2$ conduit finalement au modèle agrégé suivant :

$$\begin{aligned} & \max Z = 3.8X_1 + 11X_2 \\ \text{sous} & \begin{cases} 2.2X_1 + 4X_2 \leq 100 \\ 2.7X_1 + 6X_2 \leq 120 \\ X_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Une autre méthode de détermination des coefficients du modèle agrégé est nommée "*combination by dominance*". Cette méthode est une approche conservatrice qui requiert peu d'effort de calcul. En effet, elle consiste à considérer la pondération de seulement une variable de chaque groupe i . Pour un problème de maximisation, le plus grand coefficient de chaque ligne de la matrice A_i doit être choisi. Symétriquement, pour un problème de minimisation, le plus petit coefficient de chaque ligne de A_i est retenu. Le choix de tels coefficients garantit que la solution du problème agrégé fournit une borne inférieure de la valeur optimale du problème initial.

Par définition, cette méthode n'utilise pas toutes les données du problème initial. Ainsi, la perte d'information est potentiellement plus grande que dans la méthode précédente.

Exemple

Pour le problème de PL précédent (problème de maximisation), les coefficients associés à la variable X_1 seraient dans ce cas $(3 \ 3)^T$ (plus grands coefficients de chaque ligne de A_1) et évidemment $(4 \ 6)^T$ pour X_2 .
□

II.2.3.3 Processus de désagrégation en programmation linéaire

Le processus de désagrégation est la fonction inverse du processus d'agrégation décrit précédemment et tient une place tout aussi importante dans ces méthodes. Dans cette phase de désagrégation, les résultats obtenus par la résolution du modèle réduit sont utilisés pour estimer la solution du modèle initial.

De façon générale, l'analyse de la désagrégation est moins complexe puisqu'il n'est évidemment pas nécessaire de redéfinir les entités concernées et la mesure de similarité.

Les symétriques des méthodes de combinaison sont nommés "*méthodes de dissection*". Une méthode commune de dissection est analogue à la technique de "*fixed-weight combination*". Le vecteur g^k utilisé pour combiner les données peut aussi être utilisé pour désagréger les résultats du problème réduit. En effet, il semble intuitif que les poids dans ce vecteur sont identiques pour la combinaison et la dissection, mais ce n'est pas toujours vrai [76].

Une autre forme de dissection nommée "*Optimal dissection*" est définie pour des programmes linéaires généraux [93] et pour les problèmes de flots dans un réseau [94]. L'idée est de résoudre des sous-problèmes liés à la portion du problème initial qui correspond à chaque groupe. Les solutions de ces sous-problèmes sont utilisées pour déterminer les vecteurs de pondération.

II.2.3.4 Conclusion

Que ce soit pour l'agrégation ou la désagrégation, les techniques présentées ici ne sont pas les seules. En fait, celles-ci sont assez nombreuses car souvent adaptées à la problématique spécifique de chaque application. Aussi, comme le signale ZIPKIN dans [93],

... the significance of aggregation depends strongly on the context in which it occurs; the questions that might be posed concerning aggregation are as varied as the situations where linear programming is used.

Il faut noter que ces différentes techniques ne fournissent pas systématiquement de solutions acceptables dans le cadre de problèmes généraux d'optimisation. En effet, il peut exister des cas où les modèles agrégés basés notamment sur une agrégation de contraintes (et éventuellement de variables) engendrent des solutions qui ne peuvent être désagrégées. Ces considérations sont analysées dans [95] et [96]. Aussi, il est généralement nécessaire de considérer des hypothèses et/ou des contraintes supplémentaires pour améliorer les performances des modèles agrégés et assurer ainsi l'existence d'une désagrégation.

II.2.4 Modélisation agrégée

Une distinction importante doit être faite entre la notion d'agrégation de modèle décrite dans le paragraphe précédent et la notion de modélisation agrégée.

Dans le cas d'une agrégation de modèle (cf Fig II.3), l'objectif principal est de réduire la complexité du problème initial afin de pouvoir le résoudre. Pour cela, on substitue le modèle d'optimisation initial (correspondant à une certaine modélisation ou "vision" du problème initial) par un modèle de dimension réduite grâce au processus d'agrégation. La solution du modèle agrégé résultant est alors désagrégée afin d'obtenir une solution détaillée.

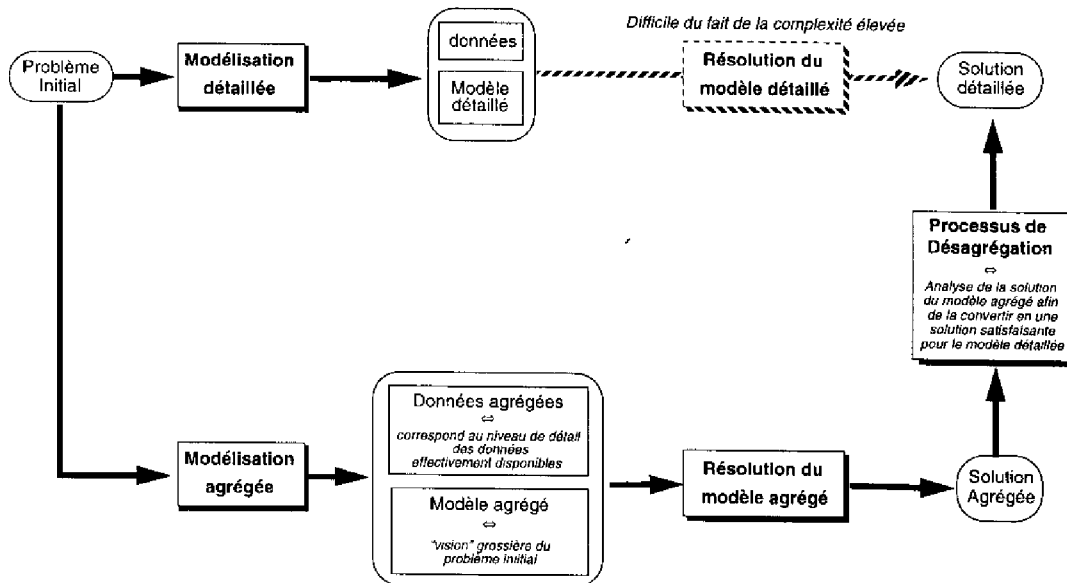


Figure II.5: Procédure d'agrégation/désagrégation : Cas où le modèle agrégé découle d'une modélisation agrégée

Dans le cas d'une modélisation agrégée (cf Fig II.5), la formalisation du problème est adaptée au niveau de détail des données effectivement disponibles et des variables que l'on désire calculer. On obtient ainsi une "vision" plus ou moins grossière du problème initial.

Avec des données et variables agrégées, la modélisation agrégée permet de construire un modèle agrégé du problème considéré. Ce même problème peut être représenté selon une modélisation détaillée par un modèle détaillé basé sur des données et des variables détaillées. Mais les modèles agrégé et détaillé ne possèdent pas a priori de liens directs. En effet, ceux-ci représentent deux "visions" distinctes d'un même problème, au contraire de l'agrégation de modèle où le modèle agrégé est lié fortement au modèle détaillé par l'intermédiaire du processus d'agrégation.

Ce point est particulièrement important car il n'existe alors aucune garantie que la solution agrégée fournie par le modèle agrégé puisse être suivie d'une désagrégation. Le plus souvent, il est nécessaire d'introduire différents mécanismes (conditions analytiques au sein de chaque modèle, méthodes itératives, etc) afin d'assurer une liaison correcte entre les deux représentations.

II.3 STRUCTURE DE DÉCISION

Le concept d'agrégation présenté dans la section précédente peut être exploité de différentes manières dans le cadre de problèmes de décision.

Une approche envisageable est de construire un modèle monolithique combinant à la fois entités détaillées et agrégées. On travaille par exemple, avec les données et variables détaillées sur les

premières périodes de l'horizon et avec les données et variables agrégées sur la fin de l'horizon. Ceci permet dans une certaine mesure de pallier les problèmes de fiabilité des données du futur lointain sans nécessiter une diminution de l'horizon de planification. Cependant, cette approche présente l'inconvénient de ne pas posséder de dynamiques de décisions différentes du fait de sa structure monolithique. Elle risque ainsi de manquer de souplesse dans un contexte perturbé où des mises à jour fréquentes peuvent être nécessaires (replanification sur l'horizon complet à chaque cycle). Par ailleurs, elle ne définit pas de centres de décision distincts et est donc moins conforme à l'organisation traditionnelle des entreprises.

Les structures de décisions multi-niveaux sont en revanche mieux adaptées à ce type de difficultés. En effet, la notion d'agrégation présente l'intérêt de permettre le traitement des données et l'élaboration des décisions avec différents niveaux de détail, correspondant aux divers échelons organisationnels de l'entreprise. Les caractéristiques de ces structures sont détaillées dans la suite de cette section.

II.3.1 Agrégation des données

Ce paragraphe précise les entités qui sont généralement agrégées en gestion de production. Il faut noter que dans ce cadre, la phase d'analyse de l'agrégation décrite au paragraphe II.2.2.2 est souvent réduite. D'une part, le facteur d'agrégation est fixé a priori par l'application elle-même puisqu'il correspond au niveau de détail avec lequel chaque niveau de décision travaille. D'autre part, les entités à agréger sont souvent déterminées de manière intuitive ou par des considérations quantitatives relatives aux éléments composant le système de production (nombre de produits ou variantes, nombre de ressources, longueur des horizons, etc). Par contre, la caractérisation des entités agrégées peut nécessiter une analyse plus fine [1].

De ce fait, on distingue souvent les regroupements de type "logique", des regroupements de type "physique" [68]. Selon le type d'agrégation retenu, l'entité agrégée est tout à fait différente. En effet :

- l'agrégation logique traduit une relation de similarité analogue à celle définie au paragraphe II.2.2.2. Elle banalise ainsi un ensemble d'entités présentant des caractéristiques communes ou ne se différenciant que par un petit nombre de caractéristiques jugées secondaires.
- l'agrégation physique définit plutôt un lien structurel ou d'appartenance. Elle regroupe donc des entités a priori hétérogènes mais pouvant être considérées comme constituant globalement un tout indissociable. Il est à noter que dans ce cas, les paramètres caractéristiques de l'objet agrégé sont souvent plus difficiles à évaluer.

L'évaluation des paramètres caractéristiques des objets agrégés n'est pas toujours directe. Certains choix dans la détermination des données agrégées peuvent avoir des répercussions significatives sur les modèles et donc sur le processus de décision.

Quelques exemples d'agrégation portant sur les matières, les moyens de production, le travail, le temps sont donnés dans les paragraphes suivants. En combinant les différents types d'agrégation, il est possible d'obtenir une modélisation plus ou moins fine de la réalité.

II.3.1.1 Agrégation des produits

Du fait de la diversification des produits, ceux-ci ne se différencient souvent que par des variantes telles que couleur, taille, conditionnement. Ces articles ont une gamme de fabrication semblable, des coûts de production et de stockage identiques. Ils peuvent donc être gérés conjointement comme des produits identiques. La figure II.6 donne un exemple de ce type d'agrégation logique dans lequel la caractéristique couleur est agrégée. Le produit agrégé a alors une réalité physique moins précise que les produits originaux.

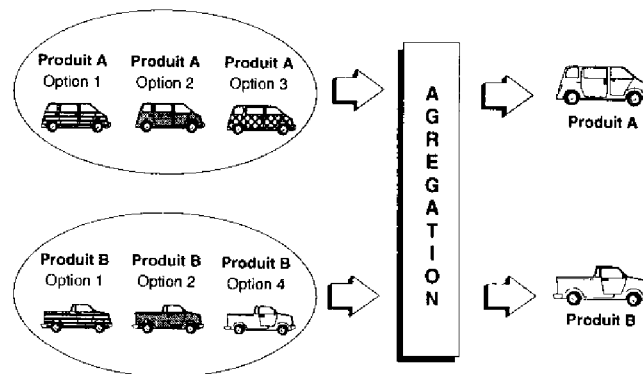


Figure II.6: Agrégation logique (produit : *modèle de voiture*, Option : *couleur*)

L'agrégation physique des matières peut être illustrée par la notion de kit. Par exemple, dans le cadre d'une production avec assemblage, tous les composants d'un même produit fini sont regroupés (assemblés ou montés) pour n'être finalement représentés que par ce produit fini (produit agrégé). La nomenclature associée fournit la liste des composants élémentaires.

II.3.1.2 Agrégation des moyens de production

L'agrégation des produits et l'agrégation des moyens de production présente un certain nombre de similitudes. En effet, dans le cas d'une agrégation logique, des machines quasi-identiques (c'est à dire, ayant un grand nombre de caractéristiques communes) sont regroupées dans une même classe et banalisées. Ceci permet de raisonner en classe de moyens en ne considérant que les caractéristiques essentielles associées à chaque classe. Le problème de l'affectation du travail aux moyens s'en trouve simplifié puisque le nombre de machines différentes à prendre en compte est diminué.

En ce qui concerne l'agrégation physique, l'atelier peut être l'objet agrégé représentant l'ensemble des machines (tours, fraiseuses, perceuses, etc) et/ou des ressources humaines (possédant individuellement des compétences différentes).

II.3.1.3 Agrégation du travail

Lorsque des types d'opérations ne se différencient que par des caractéristiques mineures, il est possible de banaliser celles-ci et de considérer alors les opérations correspondantes comme un type unique (agrégé) d'opération.

Une agrégation physique du travail consiste à représenter différentes tâches élémentaires devant se succéder par une macro-tâche dont la durée agrégée peut être établie à partir de la somme des durées élémentaires (*cf* Fig II.7).

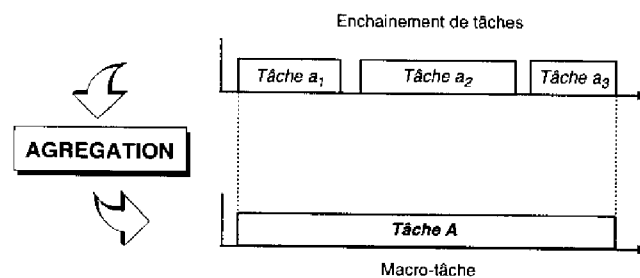


Figure II.7: Tâches et macro-tâche

II.3.1.4 Agrégation du temps

Le temps est par nature une grandeur continue. Cependant, on est amené à discrétiser le temps en intervalles appelés **périodes**. La période constitue alors l'unité de temps élémentaire. Cette discrétisation se justifie généralement pour des raisons opérationnelles (gestion calendaire) et pour faciliter la modélisation des problèmes de production. Elle constitue de fait une première forme d'agrégation du temps. Il est à noter toutefois que le passage *temps continu/temps discret* provoque une rupture au niveau des modèles associés. Cette rupture est souvent à l'origine des problèmes de synchronisation de décision existant entre ordonnancement (temps continu) et planification (temps discret).

Le degré d'agrégation dépend de la longueur choisie pour la période. A un niveau très agrégé par exemple, le mois peut représenter l'unité de référence. Si les phénomènes que l'on souhaite étudier ont une dynamique plus rapide, il convient de raisonner de manière plus précise et de choisir une période plus courte, la semaine par exemple.

L'agrégation du temps peut aussi se traduire par le regroupement dans une macro-période, d'un ensemble de périodes élémentaires consécutives (*cf* Fig II.8).

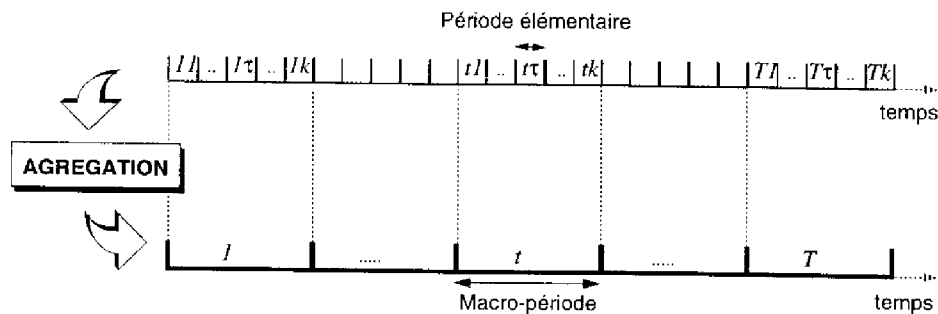


Figure II.8: Discrétisation du temps en périodes et macro-périodes

II.3.1.5 Combinaisons de différentes agrégations

De manière générale, le travail est localisé dans le temps; il utilise des moyens de production et porte sur des matières. En pratique, l'agrégation du travail est souvent combinée avec une agrégation du temps, une agrégation des moyens et éventuellement une agrégation des matières. Par exemple, une agrégation des moyens de production s'accompagne presque obligatoirement d'une agrégation du travail. La notion de **macrogamme** (version agrégée de la gamme) découle de l'agrégation physique des moyens de production et des tâches : elle spécifie en général la durée des activités agrégées à effectuer sur des moyens de production agrégés.

II.3.2 Niveaux de décision et modèles de décision

Le concept d'agrégation permet de proposer des structures basées sur une décomposition en niveaux décisionnels. A chacun de ces niveaux correspond un degré d'agrégation des données et des variables de décision. Le problème global de gestion est ainsi décomposé en sous-problèmes résolus séquentiellement par affinement successif des décisions (*cf* Fig II.9). Ainsi, dans ce processus de désagrégation (*cf* §II.2), les décisions d'un niveau n deviennent des contraintes pour le niveau $n + 1$ qui élabore un ensemble de décisions plus précises sur la base de données plus détaillées.

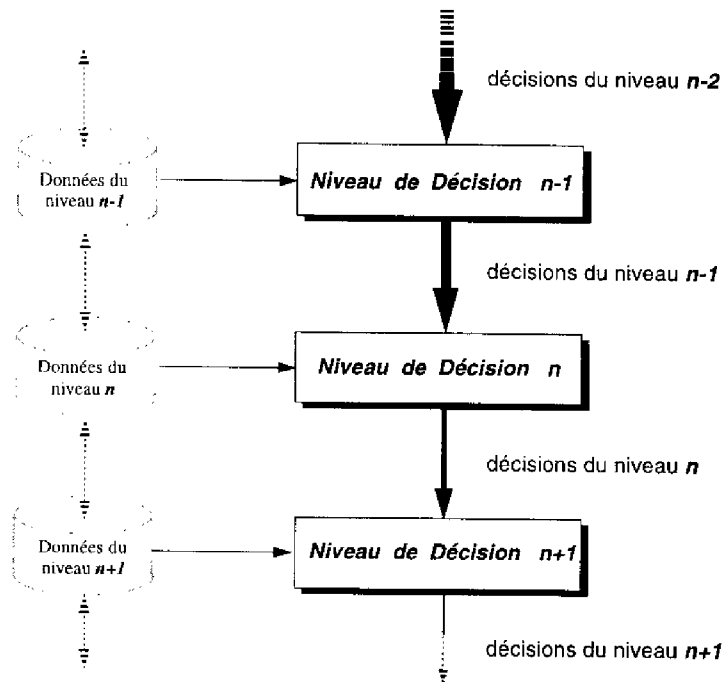


Figure II.9: Structure décisionnelle multi-niveaux

Lorsque le système de production est simple, les différentes décisions peuvent être établies de manière pragmatique par les responsables de la production en s'appuyant sur leur expérience et leur connaissance du système et/ou en s'aidant de systèmes de *GPAO*. Dans des environnements de production plus complexes, cette démarche n'est souvent pas possible. Il est alors nécessaire de décrire explicitement le fonctionnement du système considéré par un modèle mathématique.

Dans le cadre des structures multi-niveaux étudiées ici, une modélisation mathématique du problème est associée à chaque niveau de décision (*cf* Fig II.5). Celle-ci formalise le processus de fabrication compte tenu du degré de connaissance des données et des contraintes que possède le niveau considéré. Par conséquent, le modèle de décision du niveau n ne possède pas a priori de relation forte avec le modèle de décision des niveaux $n - 1$ ou $n + 1$.

II.3.3 Horizons temporels

Pour les raisons évoquées au paragraphe II.3.1.4, le temps est généralement discrétisé en *périodes* qui constituent alors l'unité de temps élémentaire. Cette discrétisation permet de localiser les phénomènes étudiés sur des intervalles de temps et non plus sur une échelle de temps continue. Les données et les décisions s'expriment alors en référence à ces périodes.

II.3.3.1 Horizon de planification, horizon de décision

Compte tenu de l'aspect prévisionnel des décisions prises au niveau tactique, l'horizon temporel considéré est souvent défini par deux caractéristiques : l'horizon de planification et l'horizon de décision (*cf* Fig II.10).

- l'horizon de planification

Il représente le nombre de périodes sur lesquelles les données sont prises en compte et pour lesquelles sont élaborées les décisions. C'est par l'intermédiaire de cet horizon que l'aspect prévisionnel est introduit. En conséquence, celui-ci doit être suffisamment long pour que

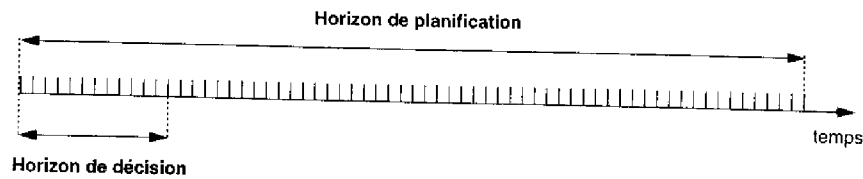


Figure II.10: Horizons temporels

l'influence des données situées au delà de cet horizon (c'est à dire non considérées) soit négligeable mais suffisamment court pour assurer la fiabilité de celles prises en compte. Le choix de la longueur de cet horizon résulte donc d'un compromis qu'il n'est pas toujours possible de définir de manière théorique.

- l'horizon de décision

Il définit le nombre de périodes sur lesquelles les décisions sont effectivement mises en oeuvre. Cet horizon correspond généralement aux premières périodes de l'horizon de planification. Les décisions correspondantes sont souvent "gelées" c'est à dire qu'elles ne peuvent être remises en cause par d'éventuelles replanifications. Ceci est nécessaire à cause de l'inertie du système de production due aux délais de production et d'approvisionnement. En conséquence, la longueur de l'horizon de décision est grandement dépendante de ces paramètres.

Afin de limiter les effets dus à la longueur finie de l'horizon et de manière à prendre en compte la nature dynamique du système de production, la prise de décision est souvent mise en oeuvre dans le cadre d'une procédure à horizon glissant.

II.3.3.2 Procédure à horizon glissant

Cette technique consiste à élaborer **périodiquement** des décisions sur un horizon de planification constant et fixé a priori. Un exemple est donné sur la figure II.11 dans lequel l'horizon de planification est de 14 périodes, l'horizon de décision de 2 périodes et la périodicité de replanification de 2 périodes.

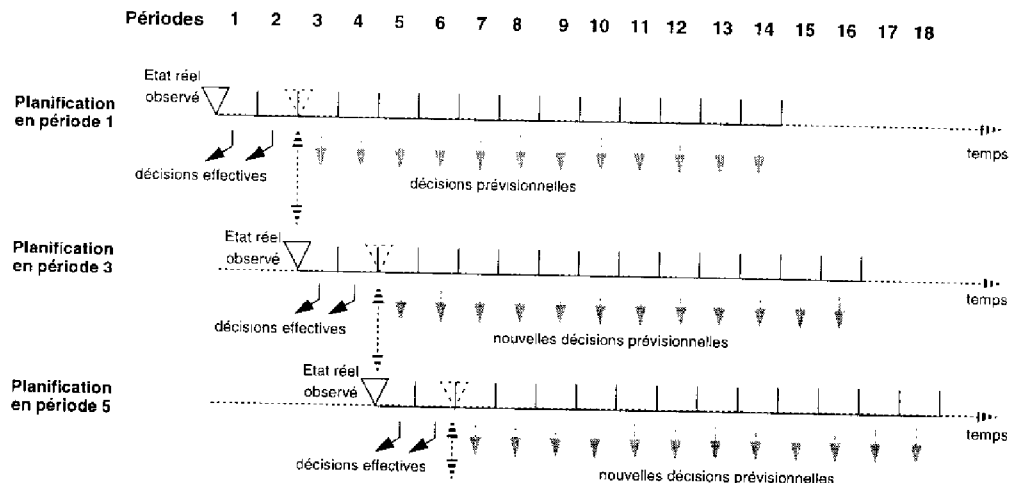


Figure II.11: Procédure à horizon glissant

Ce processus dynamique de décision permet de réactualiser les données déjà connues et d'introduire de nouvelles informations au fur et à mesure de leur disponibilité. De plus, à chaque nouveau cycle,

l'état réel du système de production peut être pris en compte. Ceci est particulièrement intéressant dans un environnement perturbé puisque le système est alors en mesure de réagir aux aléas passés. Cette technique constitue en quelque sorte une commande en boucle fermée du système de production.

Le choix de la périodicité du processus résulte souvent d'un compromis. En effet, l'existence de perturbations dans le fonctionnement du système de production et le besoin de réactualisation des données tendraient à effectuer des replanifications fréquemment afin de contrôler finement l'évolution du système (la périodicité minimale étant la longueur de l'horizon de décision). D'un autre côté, le coût du suivi de production et de traitement de l'information pousseraient à allonger cette périodicité (la périodicité maximale étant la longueur de l'horizon de planification).

II.3.4 Processus de décision

Le paragraphe II.3.1 a montré que le concept d'agrégation permet de décomposer le système en différents niveaux décisionnels au sein desquels un degré d'agrégation spécifique est utilisé. La réduction de complexité qui en résulte peut être mise à profit pour travailler avec des horizons temporels adaptés afin d'augmenter le pouvoir de prévision du système de gestion. Ainsi, plus le niveau considéré est haut dans la hiérarchie, plus l'horizon de planification peut s'allonger.

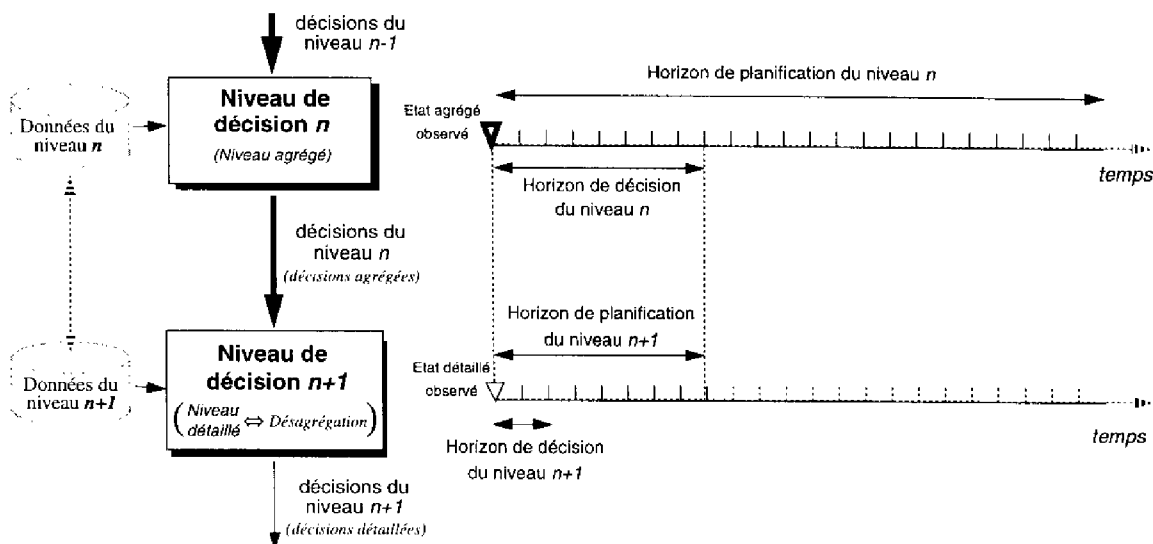


Figure II.12: Processus de décision entre 2 niveaux successifs

La figure II.12 montre les liens entre les décisions et les horizons temporels pour 2 niveaux consécutifs n et $n+1$. Localement, le niveau n constitue un niveau "agrégé" de décision et le niveau $n+1$ représente un niveau détaillé. Le processus de décision est le suivant :

- Au niveau supérieur n , le modèle élabore un ensemble de décisions (dites *agrégées*) sur l'horizon de planification correspondant à partir de l'état observé et des données associés au niveau n . Le sous-ensemble de décisions liées aux périodes de l'horizon de décision du niveau n sont alors transmises au niveau inférieur $n+1$.
- Généralement, la longueur de l'horizon de planification du niveau $n+1$ est égale à celle de l'horizon de décision du niveau n . Le modèle associé au niveau inférieur $n+1$ construit les décisions (dites *détaillées*) sur l'horizon de décision associé compte tenu, d'une part, de l'état observé et des données du niveau $n+1$ et, d'autre part, du cadre fixé par les décisions agrégées correspondant à l'horizon de planification du niveau $n+1$. Ce modèle réalise donc la désagrégation des décisions agrégées.

Une procédure à horizon glissant peut être introduite à chaque niveau. La structure décisionnelle possède alors une grande souplesse pour la réactualisation des décisions tout en limitant le volume de calcul nécessaire (replanifications partielles).

Exemple :

Un exemple classique de ce type de processus se trouve dans les travaux de HAX et MEAL [51] qui furent parmi les premiers à formaliser une telle structure de planification hiérarchisée. Celle-ci est basée sur une agrégation logique des produits. Selon leur terminologie, ils définissent successivement les notions d'article, de famille et de type. Un article est un produit fini soumis à une demande externe. Une famille correspond à un regroupement d'articles dont le processus de mise en fabrication est identique. Des économies sur le coût global de mise en fabrication peuvent être réalisées en lançant conjointement en fabrication tous les articles d'une même famille. Un type correspond à un regroupement de familles. Les familles appartenant à un même type ont un même coût de production unitaire, un même coût de stockage et une demande externe de même nature.

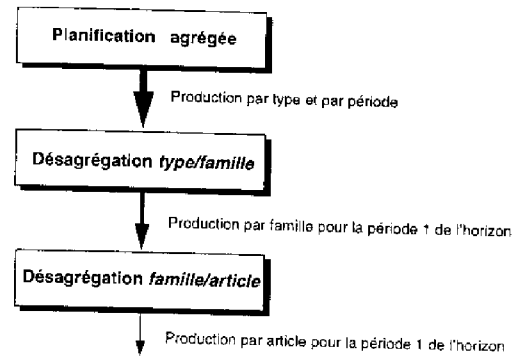


Figure II.13: Processus de planification

La planification de la production s'effectue alors en 3 étapes (cf Fig II.13). La première étape consiste à allouer la capacité de production aux différents types de produits. L'horizon de planification couvre l'année de manière à prendre en compte les fluctuations saisonnières de la demande. La planification est effectuée selon un horizon glissant avec une périodicité de planification de 1 période. La deuxième étape répartit la production agrégée associée à chaque type entre les familles qui constituent ce type. Cette désagrégation est effectuée pour la première période de l'horizon seulement, de manière à réduire le volume des données requises pour cette étape. Le mécanisme de désagrégation retenu vise à minimiser le coût total de mise en fabrication des différentes familles constituant le type considéré. Enfin, la troisième étape répartit la production associée à chaque famille entre les différents articles de cette famille. L'objectif retenu à ce niveau est d'égaliser le temps au bout duquel il y aura une rupture de stock pour un article quelconque de la famille considérée.

□

II.3.5 Intérêt de l'approche hiérarchisée

L'intérêt associé à la mise en oeuvre de telles structures combine les avantages liés au phénomène d'agrégation avec les qualités de l'affinement successif des décisions.

De nombreux travaux ont montré l'intérêt de l'agrégation pour les problèmes de décisions. Les points suivants sont principalement soulignés :

- Réduction de la complexité

Un des premiers facteurs de motivation pour l'utilisation des techniques d'agrégation/désagrégation est évidemment de réduire la complexité des modèles de décision en limitant fortement le nombre de variables, de données à traiter, de contraintes à prendre en considération. Ces techniques facilitent ainsi la mise en oeuvre de nombreuses applications industrielles dans lesquelles les modèles d'optimisation employés sont de très grandes dimensions [77]. Cette réduction de complexité se traduit naturellement par une diminution des moyens et des temps de calcul nécessaires. Aussi, dans le cadre de développement d'outils d'aide à la décision, ces techniques qui permettent d'obtenir très rapidement une solution peuvent être exploitées

pour créer un système interactif avec l'opérateur humain et en conséquence, possédant une forte capacité de réactivité.

- **Simplification et fiabilisation des prévisions**

Un point important dans les problèmes de décisions est la fiabilité des données traitées. L'utilisation des techniques d'agrégation/désagrégation facilite l'estimation de données futures. En effet, la prévision sur les données agrégées s'avère plus réaliste et plus fiable qu'une prévision sur les données détaillées (phénomènes de compensation d'erreur).

- **Elaboration de structures de décision adaptées**

En effet, l'agrégation permet d'imaginer des approches pour l'élaboration de la décision favorisant la prise en considération de la souplesse obtenue par ce phénomène d'abstraction.

La mise en œuvre de structures multi-niveaux permet d'améliorer le processus décisionnel. En effet :

- par le biais des décisions agrégées, elles assurent une vision globale du problème de gestion; par le biais des décisions détaillées, elles permettent de fournir des ordres facilement exploitables par le niveau inférieur (niveau opérationnel, par exemple).
- par le processus de désagrégation, elles permettent d'utiliser l'autonomie pouvant être accordée par le niveau supérieur au niveau inférieur.
- par l'existence d'horizons de décisions adaptés à chaque niveau, elles permettent la mise en place de processus de désagrégation dynamique assurant une forte réactivité dans l'élaboration de la décision.
- par l'existence de différents niveaux, elles peuvent s'adapter au mieux à la réalité de la prise de décision dans l'entreprise. Des objectifs différents peuvent ainsi être considérés à chaque niveau.

II.4 INTERACTIONS ENTRE NIVEAUX DÉCISIONNELS

A un niveau donné de la structure, on ne peut ignorer les répercussions de la décision retenue sur l'ensemble des décisions admissibles au niveau immédiatement inférieur. En effet, les décisions prises à un niveau déterminent le degré d'autonomie laissé au niveau immédiatement inférieur. Plus grand est l'ensemble des décisions admissibles au niveau inférieur, plus important est le degré d'autonomie alloué à ce niveau par le niveau supérieur. De ce fait, il est nécessaire que cet ensemble de solutions admissibles soit toujours non vide afin d'assurer un fonctionnement correct de ces systèmes.

II.4.1 Problème de la coordination des décisions

Le paragraphe II.3.1 a montré que chaque niveau de la structure décisionnelle résoud un problème particulier à partir d'une modélisation spécifique. De plus, le problème assigné à un niveau est traité indépendamment des contraintes associées aux autres couches. Or, lors de la résolution séquentielle des sous-problèmes de décisions, une telle approche peut conduire à des dysfonctionnements graves du système. En effet, un niveau décisionnel soumis aux décisions du niveau supérieur et à ses propres contraintes de fonctionnement peut déclarer infaisable le problème de décision qui lui est fixé.

Pour éviter ce type d'inconvénient, des mécanismes assurant la coordination des décisions entre les différents niveaux doivent être mis en place. L'analyse de ces mécanismes passe donc par une étude des interactions existant au sein de la structure décisionnelle multi-niveaux.

II.4.2 Concepts de Robustesse et de Cohérence

Pour assurer un fonctionnement correct du système de décision, deux points sont à considérer :

- 1 - La décision élaborée par le niveau supérieur doit assurer l'existence de solution au niveau inférieur,
- 2 - Toute solution élaborée par le niveau inférieur doit satisfaire la décision du niveau supérieur.

Cette double constatation permet la définition de deux concepts génériques sur lesquels est structurée l'étude des interactions entre niveaux [31], [68] : la *robustesse* et la *cohérence*.

Définition 1 : Robustesse des décisions agrégées

Une décision agrégée est dite robuste si elle assure l'existence d'au moins une décision détaillée.

De manière symétrique :

Définition 2 : Cohérence des décisions détaillées

Une décision détaillée est dite cohérente si elle est compatible avec la décision agrégée.

II.4.3 Mise en œuvre de ces concepts

On rencontre dans la littérature principalement deux approches pour assurer les propriétés de robustesse et de cohérence.

II.4.3.1 Méthodes analytiques

Lorsque les modèles mathématiques associés à deux niveaux successifs sont homogènes, il est en général possible de formaliser les relations existant entre entités agrégées et détaillées. Cette formalisation s'appuie sur une analyse fine des interactions entre niveaux. Le principe de cette analyse consiste globalement à fixer des bornes inférieures ou supérieures sur les variables de décision. Ceci peut être effectué par la recherche de conditions d'existence de solutions dans un modèle regroupant l'ensemble des contraintes à satisfaire pour coordonner les décisions entre chaque niveau. Selon le cas, cette étude permet de déduire soit des conditions de robustesse pour les décisions agrégées, soit des conditions de cohérence pour les décisions détaillées. Introduites sous forme de contraintes au sein des modèles mathématiques associés respectivement aux différents niveaux (*cf* Fig II.14), elles assurent un fonctionnement correct de la structure décisionnelle.

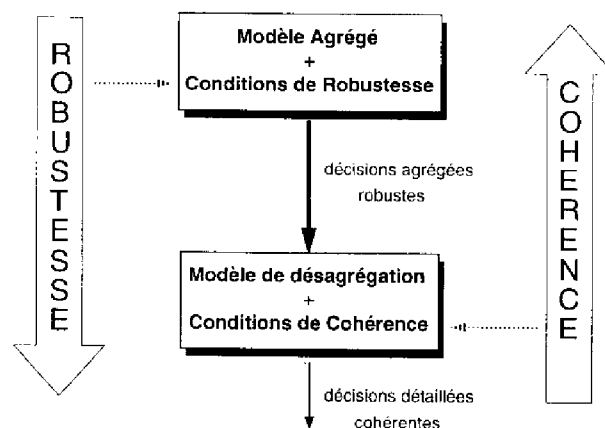


Figure II.14: Méthode analytique pour la robustesse et la cohérence des décisions

II.4.3.2 Méthodes itératives

Lorsque les modèles associés à deux niveaux sont de natures différentes (rupture de modèles : modèle continu/modèle combinatoire), l'approche analytique n'est souvent pas possible. Dans ce contexte, la robustesse et la cohérence sont assurées par le biais de procédures itératives faisant "dialoguer" les modèles associés à chaque niveau.

Cette méthode est souvent mise en oeuvre dans des approches hiérarchisées traitant conjointement les décisions tactiques à moyen terme et les décisions opérationnelles à court terme [81], [58], [33]. Dans ce type d'approche, le niveau planification fixe généralement le niveau de production par période ainsi que le niveau de la force de travail requise pour cette production. Le niveau détaillé définit à court terme l'ordonnancement et le séquençement des différents travaux à effectuer et détermine l'affectation des moyens de production (main d'oeuvre ou machine) à ces différents travaux. Afin d'assurer la coordination des décisions, le niveau supérieur est d'abord résolu; compte tenu des contraintes générées, une solution est ensuite recherchée au niveau inférieur. L'analyse de cette solution permet d'affiner et de réviser les données utilisées au niveau supérieur, qui est alors reconsidéré dans ce nouveau cadre. La procédure itérative s'arrête lorsqu'une solution détaillée satisfaisante est obtenue (cf Figure II.15).

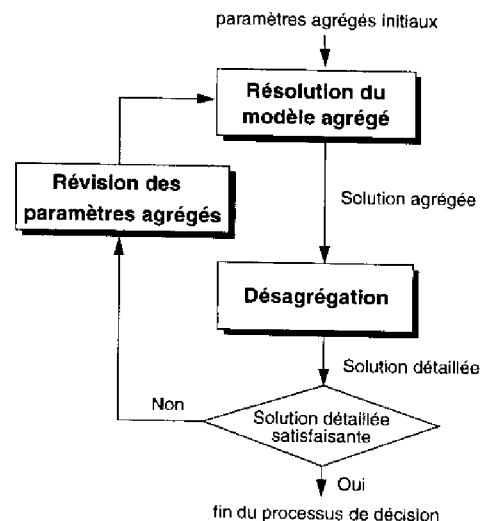


Figure II.15: Méthode itérative pour la robustesse et la cohérence des décisions

Une méthode itérative analogue peut être trouvée dans les approches dites *intégrées* [30], [66]. Dans ce type d'approche, les contraintes du niveau ordonnancement sont directement intégrées dans le modèle de planification. Ceci permet d'assurer l'existence d'au moins un ordonnancement. La procédure de décision est alors la suivante : le modèle de planification détermine les quantités à produire par période selon une séquence fixée et en minimisant un critère économique. On cherche ensuite le meilleur ordonnancement compatible avec ce plan. Si une meilleure séquence est trouvée, celle-ci est introduite au niveau du modèle de planification et un nouveau cycle est exécuté. Les auteurs montrent que la méthode converge toujours de façon satisfaisante malgré quelques oscillations.

II.5 PRINCIPAUX TRAVAUX

Depuis plus d'une vingtaine d'années, de nombreuses études ont été développées concernant les approches multi-niveaux. Ceci est notamment illustré par le travail bibliographique de BUKH qui relève plus de 180 références sur ce sujet [26]. Par ailleurs, des synthèses des travaux les plus marquants peuvent être trouvées dans [77] et [63]. Ces études proposent en général des modèles associés à chaque niveau de décision et s'efforcent de mettre en place une coordination efficace entre les différents niveaux de décision. Cette section présente sommairement quelques unes de ces contributions.

En outre, il existe une grande variété d'études associées à cette approche. Ceci est notamment souligné par la présentation conceptuelle de SCHNEWEISS [78]. Pour cette raison, cette section est décomposée en deux parties : la première concerne les travaux traitant spécifiquement de la planification à moyen terme, la deuxième regroupe des études connexes exploitant des structures multi-niveaux.

II.5.1 Approches hiérarchisées pour la planification à moyen terme

HAX et MEAL sont parmi les premiers à avoir formalisé une structure de planification hiérarchisée [51]. Cette structure comporte trois niveaux distincts d'agrégation de produit (*cf* §II.3.3). Depuis, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'approche *HPP*. Les paragraphes suivants dressent une synthèse non exhaustive de ces travaux.

II.5.1.1 Travaux en relation avec la structure proposée par HAX et MEAL

Les heuristiques de résolution proposées dans [51] sont reprises par BITRAN, HAX dans [21] et [23]. Les auteurs suggèrent des procédures de type "knapsack" permettant de résoudre de manière optimale les différents sous-problèmes. Des extensions visant à améliorer la cohérence des décisions sont proposées dans [22]. Différents processus de désagrégation y sont également comparés.

Les résultats obtenus dans le cadre d'un processus de production à une étape sont étendus par BITRAN, HAAS, HAX dans [24] à un système à 2 étapes. Une structure d'agrégation différente est définie respectivement pour les produits finis et pour les composants. Pour les produits finis, les trois niveaux d'agrégation définis dans l'exemple du paragraphe II.3.3 sont réutilisés. Pour les composants, un seul niveau d'agrégation regroupe les composants ayant mêmes coûts de production et de stockage et même facteur de productivité. Au niveau agrégé sont planifiées conjointement la production par type de produits finis et la production par type de pièces. La désagrégation s'effectue alors en 2 temps : désagrégation *type/famille* et *type de composant/composant*, puis, désagrégation *famille/article*.

Une analyse intéressante de la structure de planification proposée par HAX et MEAL est réalisée par GRAVES dans [46]. Il propose et teste une procédure permettant de décomposer un problème de planification de grande taille formulé à l'aide d'un modèle linéaire en variables mixtes. Cette décomposition conduit à 2 sous-problèmes qui correspondent aux niveaux "planification des types et détermination de la taille des lots par famille" définis par HAX et MEAL. Le couplage entre les 2 niveaux est pris en compte par une contrainte assurant la cohérence entre stocks par types et stocks par familles. Cette contrainte est relaxée (introduction de multiplicateurs de Lagrange). Les meilleures valeurs associées à ces multiplicateurs sont définies à l'aide d'une procédure itérative qui s'interprète comme un *feedback* entre les 2 sous-problèmes. A chaque itération, la procédure définit à la fois une borne inférieure de la solution optimale et une solution faisable à partir de laquelle une borne supérieure est obtenue. Les résultats expérimentaux montrent que la meilleure solution faisable obtenue par cette procédure itérative est très proche de l'optimum. Cette approche s'avère supérieure à celle proposée par HAX et MEAL notamment lorsque les coûts de mise en fabrication associés aux familles sont relativement importants.

II.5.1.2 Faisabilité des décisions

Les interactions entre les deux niveaux supérieurs de la structure proposée par HAX et MEAL sont étudiées par GABBAY dans [39]. L'auteur fournit des conditions nécessaires et suffisantes sur le plan agrégé pour qu'il existe une désagrégation faisable de ce plan. De plus, sous des hypothèses assez générales concernant la forme des coûts pris en compte au niveau agrégé, il caractérise un plan agrégé optimal ainsi qu'un mécanisme de désagrégation optimal.

Dans [38] et [40], au lieu d'associer un modèle spécifique à chaque niveau de décision, il propose le même modèle de base mais formulé avec différents niveaux de détail. Pour la planification des familles ou types, toute solution désagrégée qui satisfait les demandes sans arriérés est dite cohérente. Des conditions nécessaires et suffisantes de cohérence sont données. De plus, des conditions pour déterminer le nombre minimum de périodes (et par conséquent de données détaillées) requises pour assurer cette cohérence ("horizon de cohérence") sont proposées.

ERSCHLER, FONTAN, MERCE déduisent des conditions similaires pour la cohérence de modèles *HPP* plus généraux [31], [68].

Dans le cadre de systèmes de production avec assemblage, AXSÄTER s'intéresse à la possibilité de désagréger un plan agrégé en un plan détaillé faisable (et optimal, dans certains cas) [8], [12]. Il montre dans [8] et [11] que cette propriété du plan agrégé dépend fortement de la manière dont les produits sont agrégés. Dans le cadre d'une agrégation de produits et de machines, il présente dans [8], [10] et [12] des conditions assurant une agrégation "parfaite" pour des problèmes formulés par des modèles mathématiques linéaires et non linéaires. Cependant, les caractéristiques conduisant à une agrégation parfaite existent rarement et il est nécessaire de faire appel à des solutions approchées [9], [10]. Une formulation mathématique visant à minimiser les déviations par rapport aux conditions parfaites est déduite pour différentes situations. Par exemple, dans [13], les auteurs identifient des conditions sur les paramètres de coûts de mise en fabrication et d'attente qui garantissent qu'un groupe de produits peut être traité comme un simple produit dans le cadre de systèmes de production multi-étapes.

Dans [86], TOCZYLOWSKI considère l'agrégation simultanée des variables et des contraintes dans un problème de taille de lot linéaire, mono-étape, à capacité limitée et stocks de sécurité. L'ajout de certaines contraintes (niveau minimum pour le stock) redondantes dans le problème initial permet d'obtenir un problème agrégé dans lequel les contraintes correspondantes ne sont pas redondantes. Il montre alors que la désagrégation de la solution agrégée optimale par la résolution de plusieurs problèmes de flot dans un réseau fournit la solution optimale au problème original. [87] fournit des résultats numériques concernant la résolution d'un problème similaire par cette approche. Un exemple est donné sur un problème contenant un demi million de variables et 388 contraintes. La solution optimale de celui-ci est trouvée par la résolution d'un modèle agrégé de 48 variables et 8 contraintes dont la solution est désagrégée en déterminant un flot compatible dans un réseau associé à chaque élément agrégé. Dans [88] et [57], les auteurs considèrent des approches similaires pour l'agrégation et la résolution de problèmes d'optimisation concernant simultanément la charge et la taille de lot dans une cellule de fabrication aussi bien que la taille de lot pour une classe de systèmes de production multi-étapes.

II.5.1.3 Approches hiérarchisées et agrégation du temps

BOSKMA dans [25] s'intéresse à la planification d'une unité de production fabriquant des articles à demandes saisonnières fortement marquées. A travers un modèle hiérarchisé testé par simulation, il analyse l'influence de l'agrégation du temps pratiquée au niveau supérieur de la structure. Pour un horizon de planification fixé, il étudie notamment l'incidence sur les résultats détaillés de la longueur choisie pour la période agrégée (toutes les périodes agrégées sont alors de même longueur) et du découpage de l'horizon agrégé en périodes de longueurs différentes. Il constate que ce deuxième mode d'agrégation conduit en général à de bons résultats (simplification au niveau supérieur sans provoquer de trop graves distorsions au niveau inférieur).

Les problèmes liés à l'agrégation temporelle sont également abordés par STADLER dans [83]. Son étude concerne les problèmes relatifs à l'utilisation d'échelles de temps différentes à deux niveaux successifs d'une structure hiérarchisée. Lorsque, dans le cadre d'une procédure détaillée à horizon glissant, la fin de l'horizon détaillé ne coïncide pas avec la fin d'une période agrégée, les indicateurs habituels (stocks en fin de période - production par période) assurant le couplage entre niveaux font défaut. Une solution envisagée consiste à utiliser au niveau détaillé un horizon variable assurant la synchronisation de la fin de l'horizon avec la fin d'une période agrégée.

II.5.1.4 Travaux prenant en compte l'incertitude des données

La nature stochastique de la demande détaillée est prise en compte par ARI dans [3], [4] et [5]. Ces travaux se rapportent à une structure hiérarchisée à deux niveaux fondée sur une agrégation logique des produits et concernent plus particulièrement le processus de désagrégation du plan agrégé. Celui-ci est calculé sur la base de demandes agrégées déterministes supposées connues sur l'horizon de planification. La désagrégation s'effectue période par période. A chaque étape de désagrégation, les informations disponibles sont : les demandes détaillées (déterministes) relatives à la période en cours de désagrégation et la distribution de probabilité des demandes détaillées pour les périodes ultérieures. Les auteurs proposent alors une procédure de désagrégation basée sur un modèle de programmation dynamique qui maximise la probabilité d'obtenir une désagrégation faisable sur les périodes suivantes. Après avoir discuté les limitations imposés par la programmation dynamique pour la recherche d'une stratégie de désagrégation optimale, certaines heuristiques sont proposées.

BIRGE dans [20] étend son travail aux problèmes de programmation linéaire stochastique pour inclure un problème de production stochastique mono-produit, multi-étapes, à capacité finie. Des modèles d'agrégation/désagrégation incluant à la fois des variables aléatoires et des périodes de temps sont analysées. Des bornes a posteriori sur l'erreur sont calculées pour déterminer quand regrouper en une simple période et quand utiliser une approximation déterministe d'un problème qui était originellement multi-étapes et stochastique.

L'incertitude sur les demandes est aussi étudiée par ZÄPFEL dans [92]. Dans cette étude, il s'intéresse à une structure hiérarchisée basée sur une agrégation de produit. Au départ, les demandes détaillées de la période de planification courante sont connues, tandis que pour les périodes futures, seulement des bornes inférieures et supérieures des demandes détaillées sont connues. Par ailleurs, la demande agrégée d'un groupe de produits est supposée déterministe pour toutes les périodes de l'horizon. Au niveau agrégé, des plans de production robustes sont proposés et une désagrégation cohérente est réalisée par le niveau de planification détaillé. Deux ensembles (statiques et dynamiques) de conditions suffisantes de robustesse sont déduites ainsi que des conditions de désagrégation dynamique. En fait, ces conditions suffisantes sont une généralisation des résultats de LASSERRE et MERCE dans [65].

II.5.2 Autres travaux basés sur une approche hiérarchisée

Outre l'approche *HPP* qui concerne principalement la planification à moyen terme, de nombreux travaux ont exploité cette notion de hiérarchie pour d'autres fonctions de la gestion de production.

II.5.2.1 Travaux intégrant plusieurs fonctions

MIZRACH généralise dans [70] le concept *HPP* en définissant une hiérarchie de décision proche de celle proposée par ANTHONY (cf §I.2.3). Plusieurs combinaisons "d'agrégation parallèle" sont proposées.

MEAL dans [67] propose d'intégrer l'approche *HPP* dans un système de gestion de type *MRP*. De même, JONSSON évalue différentes méthodes de planification hiérarchisée utilisées en relation avec ce type de système [62], [11]. Les méthodes et modèles proposés sont étudiés dans le cadre d'une situation réelle correspondant à une grande entreprise suédoise. L'emploi d'une approche hiérarchisée conduit à des réductions significatives des coûts globaux de fonctionnement du système de production.

Dans [7], AXSÄTER mène une étude dont l'objectif est de mettre en oeuvre une gestion coordonnée d'un système de stockage connecté à un système de production. Les résultats théoriques présentés sont testés par simulation.

Dans [60], l'approche proposée par JAIKUMAR intègre la planification de la production, la gestion des stocks ainsi que certaines fonctions de marketing (ventes promotionnelles). Le problème global est décomposé en 2 sous-problèmes résolus séquentiellement. Le niveau supérieur définit la stratégie de marketing (montant des ventes promotionnelles), le niveau de production par produit, le niveau d'utilisation de chaque ligne de production, le niveau de la force de travail, ainsi que les plans d'approvisionnement en matières premières. Les coûts marginaux associés aux ressources employées sont évalués. Ces coûts sont utilisés au niveau inférieur qui fixe l'affectation des lignes de production aux différents produits. La coordination entre les niveaux est donc réalisée par la prise en compte de ces coûts marginaux.

A travers une étude de cas, une structure décisionnelle à 4 niveaux est proposée par GUNTHER dans [49]. Elle résoud conjointement le problème de planification de la production, le problème d'ordonnement des lots de fabrication et le problème de la distribution vers différentes zones de stockage. Cette structure est basée à la fois sur une agrégation logique des produits et sur une agrégation temporelle.

II.5.2.2 Travaux intégrant la planification et l'ordonnement

Les approches hiérarchisées ont souvent été étudiées pour construire des structures intégrant à la fois les décisions tactiques à moyen terme (planification) et les décisions opérationnelles à court terme (ordonnement des travaux). L'aspect fortement combinatoire des problèmes traités par le niveau détaillé rend difficile voire impossible une approche analytique. Ces problèmes sont, dans la plupart des cas, résolus par simulation. La cohérence peut être obtenue par itérations successives entre niveaux selon le principe présenté au paragraphe II.4.3.2.

Dans [6], ARMSTRONG et HAX implémentent une telle structure afin de gérer un atelier de type Job-Shop. Un modèle agrégé en variables mixtes alloue les travailleurs aux différents travaux et groupes de machines. La solution est testée par simulation. Lorsque celle-ci s'avère non satisfaisante, un retour vers le niveau agrégé est mis en place par l'introduction de nouvelles contraintes visant à éliminer les plans non désirés.

L'introduction d'une telle approche est également considérée par SHWIMER dans [81]. Les décisions agrégées concernent l'affectation de différentes catégories de travailleurs à des groupes de machines. L'ordonnement construit sur la base de règles de décision locales permet de réviser les paramètres agrégés (demandes en travailleurs). Différentes procédures de feed-back sont proposées.

Le cadre de l'étude proposée par SHWIMER est repris par FONTAN et IMBERT dans [58], [33]. La résolution du niveau détaillé est basée sur la méthode d'analyse sous contraintes développée par ERSCHLER dans [29].

Le problème de la coordination entre décisions agrégées et détaillées dans un environnement de type Job Shop à 1 machine et capacité variable (possibilité d'heures supplémentaires) est traité par GELDERS dans [41]. Le niveau agrégé détermine la stratégie à moyen terme concernant l'utilisation des heures supplémentaires disponibles par période en quantité limitée. Le niveau détaillé recherche un ordonnancement compatible avec la capacité fixée par le niveau supérieur, qui minimise les coûts liés à la durée de l'exécution ainsi que les coûts de retard.

Etant donné un plan d'utilisation des heures supplémentaires, les auteurs montrent que le problème d'ordonnement peut être approximé par un problème de transport au moyen duquel la capacité disponible est affecté aux différents travaux. Cette idée permet d'établir une borne inférieure pour le coût d'ordonnement associé à chaque plan agrégé. Une procédure de type *Branch and Bound* est alors proposée pour identifier le "meilleur" plan agrégé compte tenu à la fois des coûts liés à l'utilisation des heures supplémentaires et des coûts d'ordonnement.

II.6 CONCLUSION

Ce chapitre a présenté les principales caractéristiques et propriétés des structures décisionnelles multi-niveaux. Dans ce cadre, les méthodes d'agrégation/désagrégation sur lesquelles sont basées ces structures sont décrites. Concernant la détermination du modèle agrégé, une distinction est réalisée entre les notions d'agrégation de modèle et de modélisation agrégée. Cette seconde approche correspond au cas des structures considérées dans ce travail. Ainsi, il n'existe pas a priori de liens directs entre les modèles détaillé et agrégé. De ce fait, les concepts génériques de robustesse et de cohérence sont introduits afin d'assurer une coordination correcte des décisions au sein de la structure.

Ces idées générales peuvent être mises en oeuvre dans différents problèmes de gestion de production. Ceux-ci peuvent être résolus par des structures décisionnelles multi-niveaux basées sur différentes classes d'agrégation.

Les chapitres suivants se proposent d'appliquer les différents éléments présentés précédemment à un problème de planification de la production. Le problème multi-produits, multi-étapes, multi-ressources retenu paraît être représentatif des problèmes rencontrés dans l'entreprise. La structure décisionnelle multi-niveaux étudiée comporte deux niveaux décisionnels basés sur l'agrégation du temps. Ce choix est volontaire. Cette forme d'agrégation particulièrement importante dans les processus de décision dynamique est souvent mise en oeuvre mais rarement étudiée explicitement. Cette étude souhaite non seulement illustrer les concepts mais également apporter une contribution novatrice dans certains aspects de l'élaboration de la décision.

- Partie B -

ROBUSTESSE ET COHÉRENCE



- Chapitre III -

CONTEXTE D'ÉTUDE ET OBJECTIFS

RÉSUMÉ

Dans les chapitres précédents, les structures décisionnelles multi-niveaux ont été abordées à la fois sous l'aspect pratique (outils industriels de GPAO au chapitre I) et théorique (analyse des différents concepts et méthodes, exposé des principaux travaux de recherche au chapitre II). Dans les deux cas, une des difficultés majeures s'avère être la coordination des décisions au sein du système de gestion. C'est pourquoi ce point constitue le thème central de cette étude. Ce chapitre vise donc à définir de manière précise le contexte de ce travail et les objectifs visés.

Pour cela, la section III.1 rappelle la problématique générale de la fonction planification.

La section III.2 présente les caractéristiques du problème de production considéré. Un modèle analytique de ce processus de fabrication est proposé.

La section III.3 décrit la structure hiérarchisée mise en oeuvre. Celle-ci possède deux niveaux décisionnels et est construite autour d'une agrégation du temps. Les modèles de base associés à chacun des niveaux sont présentés. Une première analyse permet de mettre en évidence les limitations de cette modélisation vis à vis du problème de coordination des décisions.

Enfin, la section III.4 expose les objectifs de l'étude et les méthodologies mises en oeuvre pour analyser et résoudre le problème de coordination des décisions entre niveaux successifs.

III.1 OBJECTIFS DE LA FONCTION "PLANIFICATION"

La position centrale du niveau tactique au sein du système de gestion (*cf* Fig I.3) laisse préjuger du rôle "clef" joué par la fonction *planification*. En effet, elle doit constituer l'*interface* entre :

- d'une part, un niveau stratégique où les décisions relèvent de préoccupations financières ou commerciales à long terme, basées souvent sur des tendances ou des prévisions et dont l'action est étalée dans le temps (par exemple, lancement d'un nouveau modèle de voiture ou objectif de vente pour l'année à venir),
- et d'autre part, un niveau opérationnel pour qui, au contraire, chaque prise de décisions s'accompagne de répercussions rapidement sensibles sur la production et pour qui la contrainte temporelle devient très critique (livraison d'un véhicule pour une date fixée).

Compte tenu de l'inertie du système de production (délais d'approvisionnement, délais liés aux changements du niveau de production), toute décision de production doit être anticipée pour pouvoir être mise en oeuvre. Par exemple, le choix d'une certaine quantité de production d'un produit donné pour un mois donné ne peut être effectivement implémenté que si des décisions d'approvisionnement adéquates ont été prises suffisamment tôt. Une programmation prévisionnelle des décisions est donc nécessaire. Cette programmation effectue un arbitrage entre les différents éléments à prendre en compte.

Cette fonction est donc l'élément moteur du système de gestion et, de sa qualité dépendra très souvent le bon déroulement de la production. En effet, une planification trop simpliste se traduit souvent au niveau opérationnel par un non-respect des délais. Pire, ceci peut amener une réduction des ventes et dégrader l'image de l'entreprise, compromettant alors ses objectifs financiers et commerciaux.

La planification de production à moyen terme doit donc coordonner dans le temps la gestion du travail et l'utilisation optimale des moyens productifs disponibles en vue de la fabrication de divers produits. A ce niveau, on raisonne sur des flux ou des volumes de produits sans s'intéresser à la localisation précise dans le temps de la fabrication de ces produits. La figure III.1 schématise les questions auxquelles doivent répondre les informations fournies par le plan.

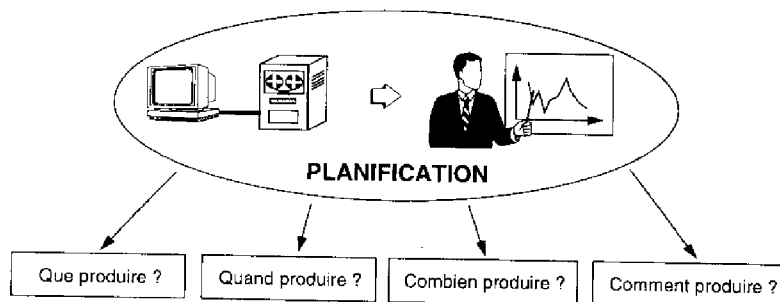


Figure III.1: Objectifs de la planification

Les chapitres précédents ont montré que les décisions s'appuient sur un certain nombre de données ou d'informations qui sont d'abord collectées par le sous-système d'informations puis analysées par le sous-système de décisions. La figure III.2 donne un aperçu des données prises en compte par la planification.

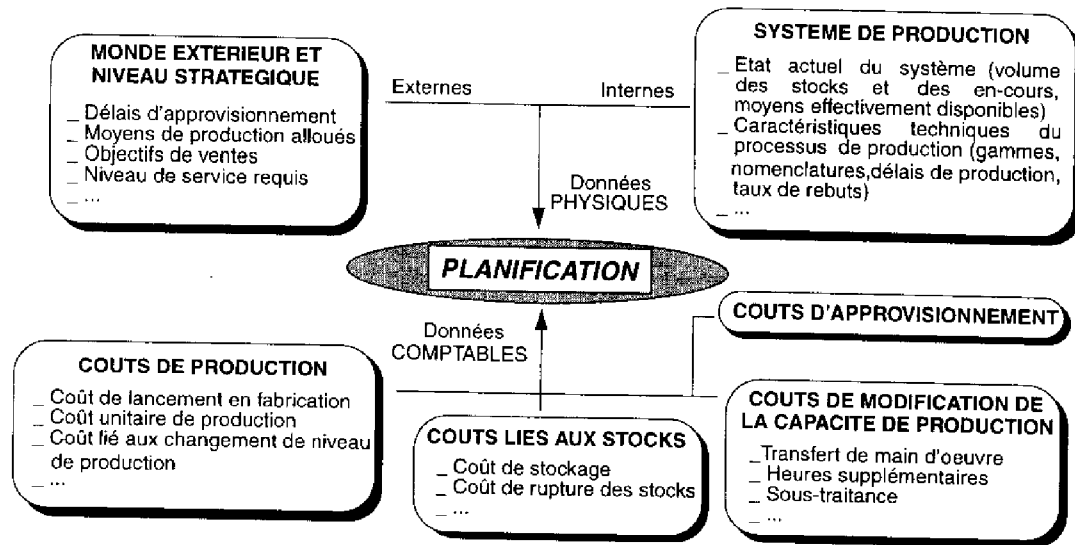


Figure III.2: Exemple de données traitées par la planification

III.2 PROBLÈME DE PLANIFICATION CONSIDÉRÉ

Cette section a pour but de présenter les caractéristiques du problème de planification considéré dans cette étude.

III.2.1 Caractéristiques générales du problème de planification

Le chapitre I a souligné les nombreux aspects couverts par la planification. En conséquence, il paraît difficile de traiter un problème s'adaptant à toute situation de production. Pour cette raison, il a été choisi de considérer un problème relativement générique dans lequel de nombreuses extensions peuvent être intégrées.

Ce travail s'intéresse donc à un problème de planification classique multi-produits, multi-étapes, multi-ressources. Le système de production considéré est de type *manufacturier* et concerne une fabrication *pour stock* en *petites, moyennes ou grandes séries*.

Dans ce contexte, on considère que :

- L'atelier peut fabriquer N produits i distincts ($i = 1, \dots, N$). La fabrication de chacun de ces produits i s'effectue selon une gamme linéaire de J_i opérations j ($j = 1, \dots, J_i$). Aucun produit n'est un composant ou un sous-élément d'un autre (pas de couplage de produits par une nomenclature). Après chaque opération, le produit en cours de fabrication est placé dans un stock intermédiaire (cf Fig III.3).

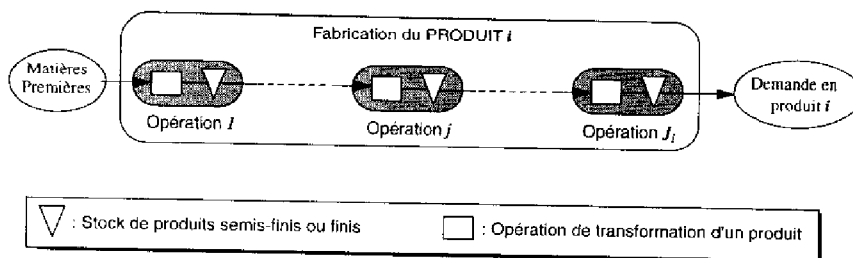


Figure III.3: Processus de fabrication d'un produit i

- Le problème est considéré sur un horizon de planification discrétisé en Θ périodes élémentaires θ ($\theta = 1, \dots, \Theta$). La détermination de la durée d'une période élémentaire n'est pas toujours directe. En effet, elle est le plus souvent imposée par des considérations opérationnelles pratiques dépendant des durées opératoires, de la structure et de l'organisation de l'entreprise.
- L'atelier comporte R ressources (machines indépendantes ou cellules, ouvriers ou équipes, etc). La capacité (exprimée en nombre d'heures, par exemple) de chaque ressource r ($r = 1, \dots, R$) est fixée pour chaque période élémentaire. Celle-ci peut être établie selon un calendrier prenant en compte par exemple, les périodes de maintenance préventive pour les machines et les pauses ou vacances des ouvriers.

On considère par ailleurs que chaque ressource r est capable d'intervenir dans l'exécution de différentes opérations élémentaire (i, j) ($j^{\text{ième}}$ opération de la gamme de fabrication du produit i). Soit O_r , l'ensemble des opérations (i, j) que peut réaliser la ressource r . En revanche, chaque opération (i, j) ne peut être réalisée que sur une ressource r spécifique. Le paramètre $w_{r,i,j}$ précise la quantité de ressource r utilisée pour effectuer l'opération élémentaire (i, j) sur une unité de produit i .

- Les capacités de stockage sont considérées comme étant infinies.
- Les demandes en produits finis sont exprimées pour chaque période élémentaire. Celles-ci résultent en général d'une combinaison de données précises et fiables (carnet de commandes, commandes fermes, etc) et de données estimées (prévisions de ventes, analyse statistique, exploitation d'historiques, etc). Notons enfin que pour satisfaire une demande, on prélève les produits finis de leur stock en début de période.

III.2.2 Caractéristique importante : notion de délai de fabrication

Afin d'affiner la modélisation du processus de production, un délai de fabrication d'une période élémentaire est associé à chaque opération. Ainsi, un produit ne peut subir qu'une seule opération de sa gamme au cours d'une période élémentaire. La prise en compte de cette notion de délai au niveau de la fonction planification est peu fréquente dans les systèmes habituellement proposés. Cette prise en considération présente deux intérêts majeurs :

1. Cela permet d'élaborer une planification plus réaliste en considérant une forme de durée opératoire dans les gammes de fabrication.
2. Dans une période élémentaire, les opérations planifiées ne sont pas soumises à des contraintes de précedence du point de vue des gammes de fabrication. Ainsi, dans une période, les opérations sont indépendantes les unes des autres; elles peuvent être ordonnancées en conséquence. La planification prépare donc la fonction *ordonnancement* en prenant en charge une partie de la combinatoire qui lui est associée. La tâche d'ordonnancement est de ce fait facilitée.

Cette modélisation permet donc d'assurer une certaine coordination entre les décisions du niveau planification et les contraintes du niveau opérationnel. En ce sens, elle se rapproche des préoccupations sur lesquelles sont basées, par exemple, les approches intégrées (cf Chapitre II).

III.2.3 Modèle détaillé

Une manière possible d'aborder la résolution de ce problème de planification consiste à formuler de façon détaillée le problème sur tout l'horizon de planification. Ceci conduit à générer un modèle monolithique de grande dimension dont l'applicabilité est assez limitée en pratique.

Les notations utilisées sont les suivantes :

DONNÉES :

- $cap_{r,\theta}$: capacité de la ressource r dans la période élémentaire θ ,
- $w_{r,i,j}$: quantité de ressource r utilisée pour effectuer l'opération élémentaire (i, j) sur une unité de produit i .
- $d_{i,\theta}$: demande en produits finis i dans la période élémentaire θ ,
- $s_{i,j,0}$: stock initial de produits i dans l'état j ,

VARIABLES DE DÉCISION :

- $x_{i,j,\theta}$: quantité de produits i subissant l'opération j dans la période élémentaire θ ,
- $s_{i,j,\theta}$: quantité de produits i dans l'état j (ayant subi l'opération j et attendant l'opération $j + 1$) en stock en fin de la période élémentaire θ ,

Plusieurs formulations du problème de planification décrit précédemment peuvent être trouvées dans la littérature [61]. Un modèle analytique classique est proposé ci-dessous :

$$\equiv \mathcal{G} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\theta=1}^{\Theta} s_{i,j,\theta}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{G}_1 : & s_{i,j,\theta} = s_{i,j,\theta-1} + x_{i,j,\theta} - x_{i,j+1,\theta} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_2 : & x_{i,J_i+1,\theta} = d_{i,\theta} & i = 1, \dots, N, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_3 : & x_{i,j+1,\theta} \leq s_{i,j,\theta-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_4 : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,\theta} \leq cap_{r,\theta} & r = 1, \dots, R, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_5 : & x_{i,j,\theta} \geq 0, s_{i,j,\theta} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \end{cases}$$

L'équation d'état \mathcal{G}_1 traduit l'évolution des stocks inter-opérateurs en fin de période. La production associée à l'opération fictive $J_i + 1$ (variable $x_{i,J_i+1,\tau}$) assure la satisfaction de la demande par la contrainte \mathcal{G}_2 . La contrainte \mathcal{G}_3 matérialise le délai de production égal à une période élémentaire. En effet, tout produit dans l'état j qui doit subir l'opération $j + 1$ (soit $x_{i,j+1,\tau}$) provient nécessairement du stock en fin de période précédente $s_{i,j,\tau-1}$. Les contraintes \mathcal{G}_5 traduisent la positivité des flux de matière (en stock ou en cours de transformation). Enfin, la contrainte \mathcal{G}_4 permet de limiter la production dans chaque période, compte tenu de la capacité de chacune des ressources.

Il faut remarquer que dans ce modèle, les produits ne sont couplés entre eux que par l'intermédiaire des contraintes \mathcal{G}_4 . Aussi, afin de rendre explicite les aspects *capacité* (1) et *partage des ressources* (2), les contraintes \mathcal{G}_4 peuvent être décomposées de la manière suivante, pour chaque ressource r :

$$\mathcal{G}_4 : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,\theta} \leq cap_{r,\theta} \quad \theta = 1, \dots, \Theta \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{G}'_4 : & x_{i,j,\theta} \leq \bar{x}_{i,j,\theta} & \forall (i,j) \in O_r, \theta = 1, \dots, \Theta & (1) \\ \mathcal{G}'_5 : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,\theta} = cap_{r,\theta} & \theta = 1, \dots, \Theta & (2) \end{cases}$$

où $\bar{x}_{i,j,\theta}$: variable auxiliaire qui définit la quantité maximale de produits i pouvant subir l'opération (i, j) dans la période θ . Cette grandeur est liée à la répartition de la capacité des ressources entre les opérations (i, j) concernées et limite la production $x_{i,j,\theta}$.

Dans ces conditions, il est possible de définir le modèle détaillé \mathcal{G}' équivalent au modèle détaillé \mathcal{G} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{G}' \equiv \\ Z &= \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\theta=1}^{\Theta} s_{i,j,\theta} \\ \text{sous} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{G}'_1 : & s_{i,j,\theta} = s_{i,j,\theta-1} + x_{i,j,\theta} - x_{i,j+1,\theta} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}'_2 : & x_{i,J_i+1,\theta} = d_{i,\theta} & i = 1, \dots, N, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}'_3 : & x_{i,j+1,\theta} \leq s_{i,j,\theta-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}'_4 : & x_{i,j,\theta} \leq \bar{x}_{i,j,\theta} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}'_5 : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,\theta} = \text{cap}_{r,\theta} & r = 1, \dots, R, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}'_6 : & x_{i,j,\theta} \geq 0, s_{i,j,\theta} \geq 0, \bar{x}_{i,j,\theta} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \end{array} \right. \end{aligned}$$

Sous cette forme, les contraintes du modèle détaillé \mathcal{G}' peuvent être considérées comme une concaténation de N modèles \mathcal{G}^i couplés par la contrainte \mathcal{G}'_5 associée à chaque ressource r . On a donc :

$$\mathcal{G}' = \left(\bigcup_{r=1}^R \mathcal{G}'_5 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{G}^i \right)$$

où le modèle \mathcal{G}^i associé au produit i est :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{G}^i \equiv \\ Z &= \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\theta=1}^{\Theta} s_{i,j,\theta} \\ \text{sous} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{G}^i_1 : & s_{i,j,\theta} = s_{i,j,\theta-1} + x_{i,j,\theta} - x_{i,j+1,\theta} & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}^i_2 : & x_{i,J_i+1,\theta} = d_{i,\theta} & \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}^i_3 : & x_{i,j+1,\theta} \leq s_{i,j,\theta-1} & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}^i_4 : & x_{i,j,\theta} \leq \bar{x}_{i,j,\theta} & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}^i_5 : & x_{i,j,\theta} \geq 0, s_{i,j,\theta} \geq 0, \bar{x}_{i,j,\theta} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cette décomposition du problème a pour but de faciliter la présentation des travaux décrits dans la suite.

La résolution de ces modèles permet de définir par période, par produit et par opération, les volumes de production de manière à satisfaire les demandes en produits finis aux dates prévues, tout en respectant les capacités des ressources. Notons toutefois, que seules les décisions associées à l'horizon de décisions sont effectivement exploitées et transmises au niveau opérationnel.

Enfin remarquons que pour cette étude, le choix de la fonction objectif n'a que peu d'importance. Le critère retenu ici n'est donc qu'un exemple. Celui-ci correspond à l'élaboration d'un *plan au plus tard*. La section I.3. a montré que cet objectif qui vise à minimiser les stocks d'en-cours et de produits finis constitue une préoccupation classique en gestion de production.

III.3 APPROCHE HIÉRARCHISÉE

Cette section présente la structure décisionnelle étudiée qui comporte deux niveaux basés sur une agrégation du temps.

III.3.1 Agrégation du temps

Ce type d'agrégation permet de discrétiser un horizon temporel selon différents pas. Considérons un horizon de planification découpé en Θ périodes dites *détaillées*. L'agrégation du temps consiste à rassembler dans une *macro-période* (appelée encore période *agrégée*) un ensemble de k périodes détaillées consécutives (cf Fig III.4).

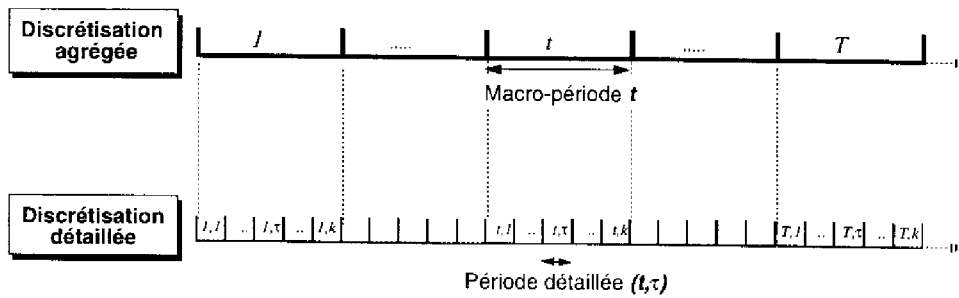


Figure III.4: Discretisations agrégée et détaillée de l'horizon de planification

Une macro-période t correspond donc à un regroupement de k périodes élémentaires notées (t, τ) avec $t = 1, \dots, T$ et $\tau = 1, \dots, k$. On obtient ainsi un horizon de planification discrétisé en T macro-périodes t telles que :

$$T = \frac{\Theta}{k} \quad (k \in \mathbf{N}) \tag{III.1}$$

Une période détaillée notée (t, τ) dans cette approche hiérarchisée correspond à la période θ du modèle \mathcal{G} telle que

$$\theta = (t - 1)k + \tau$$

La plupart des systèmes de *GPAO* ainsi que de nombreux travaux traitant des structures multi-niveaux sont basés sur une perception plus ou moins fine du temps. Toutefois, l'agrégation temporelle en tant que telle est rarement prise en considération explicitement. Une évaluation simpliste des aspects temporels conduit souvent à une mauvaise détermination des données du problème. C'est pourquoi ce travail s'intéresse spécifiquement à ce type d'agrégation qui fournit une aide importante dans la prise de décisions, notamment dans des contextes dynamiques et perturbés.

III.3.2 Structure décisionnelle à deux niveaux

Un pas de discrétisation différent est ainsi associé à chaque niveau de décision. Dans notre cas, la structure comporte deux niveaux décisionnels.

Ce paragraphe définit d'abord les notations associées aux variables et données de chaque niveau. Puis, les relations dites *d'agrégation/désagrégation* qui lient les entités agrégées et détaillées sont données. Enfin, le processus de planification associé à cette structure de décision est présenté.

III.3.2.1 Variables et données agrégées

Tous les paramètres associés au niveau agrégé sont notés en MAJUSCULES. Ainsi, par analogie avec les notations introduites pour le modèle global \mathcal{G} , on définit pour le niveau agrégé :

DONNÉES :

- $CAP_{r,t}$: capacité de la ressource r dans la macro-période t ,
- $w_{r,i,j}$: quantité de ressource r utilisée pour effectuer l'opération élémentaire (i, j) sur une unité de produit i .
- $D_{i,t}$: demande en produits i dans la macro-période t ,
- $S_{i,j,0}$: stock initial de produits i dans l'état j ,

VARIABLES DE DÉCISION :

- $X_{i,j,t}$: quantité de produits i subissant l'opération j dans la macro-période t ,
- $S_{i,j,t}$: quantité de produits i dans l'état j (ayant subi l'opération j et attendant l'opération $j + 1$) en stock en fin de la macro-période t ,

VARIABLES AUXILIAIRES :

- $\bar{X}_{i,j,t}$: variable auxiliaire qui définit la quantité maximale de produits i pouvant subir l'opération (i, j) dans la macro-période t . Cette grandeur est liée à la répartition de la capacité des ressources entre les opérations (i, j) concernées et limite la production $X_{i,j,t}$.

III.3.2.2 Variables et données détaillées

Les paramètres liés au niveau détaillé sont notés en *minuscule*. Les variables et données détaillées sont analogues à celles introduites pour le modèle global \mathcal{G} .

DONNÉES :

- $cap_{r,t,\tau}$: capacité de la ressource r dans la période élémentaire (t, τ) ,
- $w_{r,i,j}$: quantité de ressource r utilisée pour effectuer l'opération élémentaire (i, j) sur une unité de produit i .
- $d_{i,t,\tau}$: demande en produits i dans la période élémentaire (t, τ) ,
- $s_{i,j,0,k}$: stock initial de produits i dans l'état j ,

VARIABLES DE DÉCISION :

- $x_{i,j,t,\tau}$: quantité de produits i subissant l'opération j dans la période élémentaire (t, τ) ,
- $s_{i,j,t,\tau}$: quantité de produits i dans l'état j (ayant subi l'opération j et attendant l'opération $j + 1$) en stock en fin de la période élémentaire (t, τ) ,

VARIABLES AUXILIAIRES :

- $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$: variable auxiliaire qui définit la quantité maximale de produits i pouvant subir l'opération (i, j) dans la période (t, τ) . Cette grandeur est liée à la répartition de la capacité des ressources entre les opérations (i, j) concernées et limite la production $x_{i,j,t,\tau}$.

Compte tenu des découpages temporels, l'instant $(t, 0)$ peut aussi être noté $(t - 1, k)$, ce qui implique notamment que :

$$s_{i,j,t,0} = s_{i,j,t-1,k}$$

III.3.2.3 Relations d'agrégation/désagrégation

Compte-tenu du mécanisme d'agrégation temporel mis en oeuvre dans ce travail, les relations dites d'agrégation/désagrégation liant les données et les variables des deux niveaux peuvent être déduites de façon simple. On a ainsi :

- VARIABLES DE DÉCISION (cf Fig III.5)

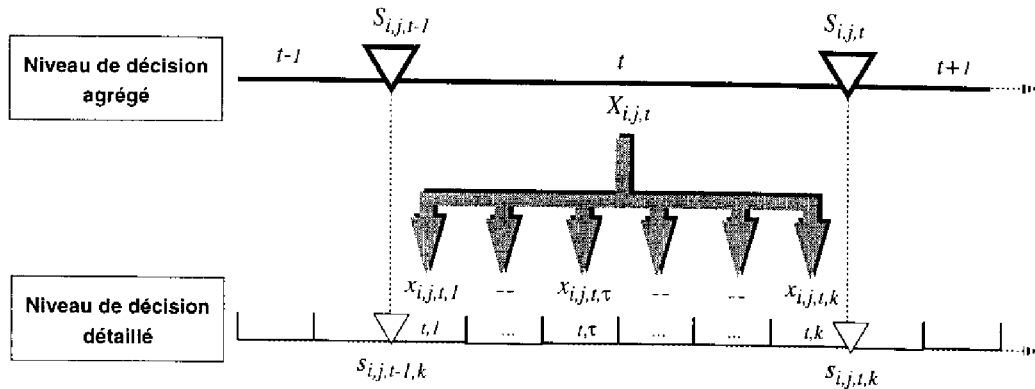


Figure III.5: Relations entre variables agrégées et détaillées

Les stocks représentent l'état du système de production à un instant donné. Les fins de macro-période $t, t = 1, \dots, T$ sont synchronisées avec les fins de périodes élémentaires $(t, k), t = 1, \dots, T$. L'état agrégé $S_{i,j,t}$ est identique à l'état détaillé $s_{i,j,t,k}$.

Basé sur le principe de désagrégation des décisions, le niveau inférieur a pour tâche de répartir la production agrégée sur l'ensemble des périodes élémentaires (t, τ) de la macro-période t . La somme des productions détaillées $x_{i,j,t,\tau}$ doit être nécessairement égale à la production agrégée $X_{i,j,t}$.

On en déduit ainsi les relations suivantes :

$$S_{i,j,t} = s_{i,j,t,k} \quad (III.2)$$

$$X_{i,j,t} = \sum_{\tau=1}^k x_{i,j,t,\tau} \quad (III.3)$$

- VARIABLES AUXILIAIRES

De façon analogue, les variables $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ et $\bar{X}_{i,j,t}$ sont liées par :

$$\bar{X}_{i,j,t} = \sum_{\tau=1}^k \bar{x}_{i,j,t,\tau} \quad (III.4)$$

- DONNÉES

Pour des raisons similaires à celles évoquées pour les variables, on a :

$$D_{i,t} = \sum_{\tau=1}^k d_{i,t,\tau} \quad (III.5)$$

$$CAP_{r,t} = \sum_{\tau=1}^k cap_{r,t,\tau} \quad (III.6)$$

$$S_{i,j,0} = s_{i,j,0,k} \quad (III.7)$$

III.3.2.4 Processus de planification

L'aspect prévisionnel de la fonction planification implique de travailler sur un horizon de planification long, alors que les décisions détaillées effectivement nécessaires à la fonction inférieure correspondent généralement aux premières périodes de cet horizon. Aussi, un des intérêts majeurs de l'agrégation du temps pour le processus de décision est de pouvoir associer à chaque niveau une discrétisation du temps et une dynamique différentes. Le processus de planification est alors conduit en deux étapes (*cf* Fig III.6) :

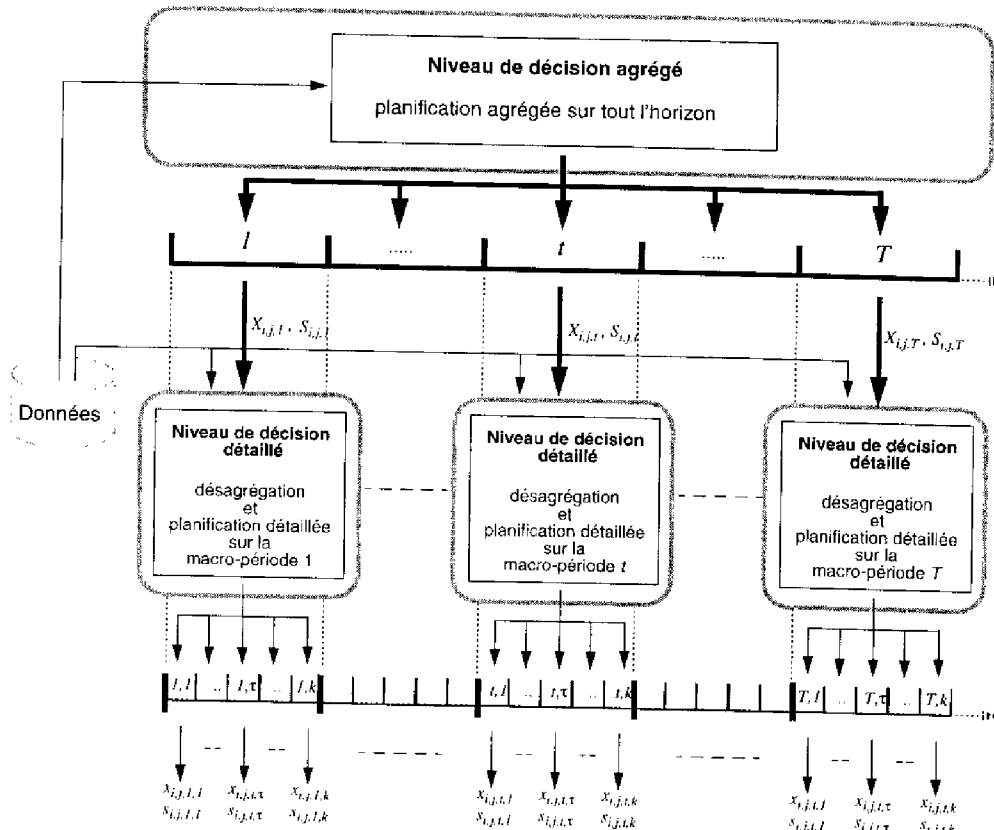


Figure III.6: Structure de décision à deux niveaux

1. Le niveau supérieur (dit niveau agrégé) a pour principal objectif de gérer l'aspect prévisionnel de la planification en prenant en compte les informations disponibles sur l'horizon de planification complet. Pour cela, il détermine pour chaque macro-période t de l'horizon de planification, le volume de production par produit et par opération pour satisfaire la demande en produits finis sur la macro-période, compte tenu de la capacité des ressources.
2. Le niveau inférieur (dit niveau détaillé) doit être en mesure d'élaborer les décisions détaillées qui seront effectivement mises en œuvre par la fonction inférieure. Celles-ci sont donc établies sur un horizon de décision détaillé très court, caractérisé par sa période de début (t, τ_d) et sa période de fin (t, τ_f). Pour cela, le niveau détaillé désagrège les décisions agrégées qui lui sont fournies pour la macro-période t . Il distribue la production agrégée sur les différentes périodes détaillées en prenant en compte les capacités et demandes détaillées. Il réalise ainsi une planification détaillée dans chaque macro-période (donc sur un horizon de planification détaillé très réduit), compatible avec les objectifs (qui tiennent compte du futur) fixés par le niveau supérieur.

Différentes politiques de désagrégation peuvent être envisagées. Elles sont associées à des fréquences de désagrégation et des longueurs d'horizon de décision détaillée plus ou moins grandes, selon que l'on souhaite favoriser la réactivité ou réduire les efforts de calcul. Dans ce cadre, on distingue deux types de processus de désagrégation :

- Processus statique de désagrégation :

Ce processus est schématisé sur la figure III.7. Celui-ci est mis en oeuvre en début de chaque macro-période et s'effectue sur un horizon de décision détaillé correspondant à une macro-période (soit $\tau_d = 1$ et $\tau_f = k$). Les horizons de planification et de décision détaillés sont donc identiques. A partir de l'état détaillé observé (stocks réels), les décisions agrégées relatives à cette macro-période sont désagrégées de manière à définir les volumes de production associés à l'ensemble des périodes élémentaires constituant la macro-période. Une désagrégation complète des décisions agrégées est donc effectuée.

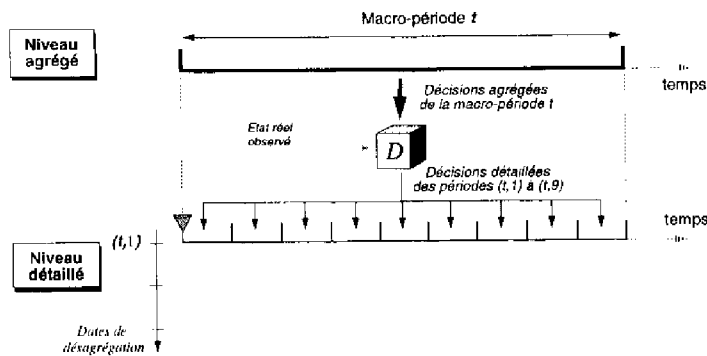


Figure III.7: Processus statique de désagrégation

- Processus dynamique de désagrégation:

La figure III.8 décrit ce processus. L'horizon de planification détaillée reste égal à une macro-période. Par contre, la désagrégation est réalisée sur un horizon de décision détaillé inférieur à une macro-période (longueur $\tau_f - \tau_d + 1$). A partir de l'état détaillé observé, on ne détermine alors que les volumes de production relatifs aux périodes élémentaires associées à l'horizon de décision détaillée. Ainsi, au sein d'une macro-période t , on élabore une suite de plans détaillés par une succession de désagrégations partielles des décisions agrégées de cette macro-période t . Ce type de processus améliore la réactivité de la structure décisionnelle par une prise en compte plus fréquente de l'état de la production.

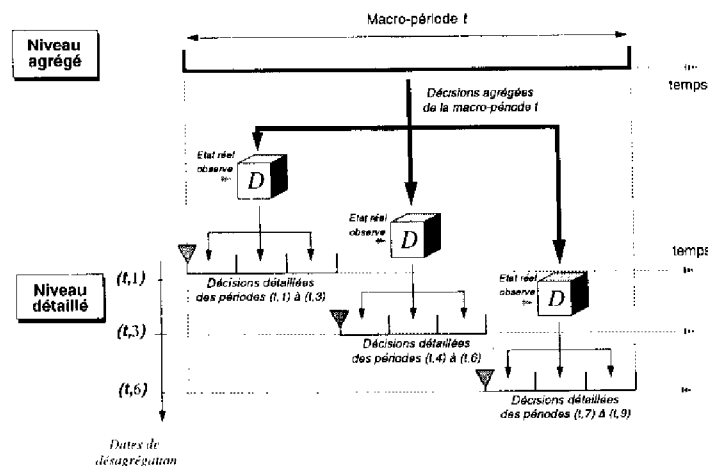


Figure III.8: Processus dynamique de désagrégation

III.3.3 Modèle de décision du niveau agrégé

Une modélisation agrégée \mathcal{A} du problème de planification considéré peut être établie à partir des variables et données définies précédemment :

$$\equiv \mathcal{A} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{A}_1 : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_2 : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} & i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_3 : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} X_{i,j,t} \leq CAP_{r,t} & r = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_4 : X_{i,j,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

La contrainte \mathcal{A}_1 est analogue à l'équation d'état \mathcal{G}_1 et traduit l'évolution des stocks inter-opérateurs en fin de macro-période. Comme pour \mathcal{G}_2 , la production associée à l'opération fictive $J_i + 1$ (variable $X_{i,J_i+1,t}$) assure la satisfaction de la demande agrégée par la contrainte \mathcal{A}_2 . La contrainte \mathcal{A}_3 matérialise la limitation de la production agrégée par la capacité agrégée des ressources et le partage de ces ressources entre les opérations (i, j) qui les utilisent. Les contraintes \mathcal{A}_4 traduisent la positivité des flux de matière (en stock ou en cours de transformation).

Enfin, le critère fait intervenir le paramètre $H_{i,j,t}$, qui pénalise les stocks agrégés et permet de construire un *plan au plus tard*. La valeur de ce paramètre agrégé est précisée dans le chapitre VI.

Sur le même principe et pour les mêmes raisons que dans le cas du modèle \mathcal{G} , la contrainte \mathcal{A}_3 peut être décomposée en deux contraintes \mathcal{A}'_3 et \mathcal{A}'_4 , conduisant ainsi au modèle agrégé équivalent \mathcal{A}' suivant :

$$\equiv \mathcal{A}' \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{A}'_1 : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}'_2 : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} & i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}'_3 : X_{i,j,t} \leq \bar{X}_{i,j,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}'_4 : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{X}_{i,j,t} = CAP_{r,t} & r = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}'_5 : X_{i,j,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0, \bar{X}_{i,j,t} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

Là encore, les contraintes du modèle agrégé \mathcal{A}' peuvent être considérées comme une concaténation de N modèles \mathcal{A}^i couplés par la contrainte \mathcal{A}'_4 associée à chaque ressource r . On a donc :

$$\mathcal{A}' = \left(\bigcup_{r=1}^R \mathcal{A}'_4 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}^i \right)$$

Le modèle \mathcal{A}^i associé au produit i correspond au regroupement des contraintes \mathcal{A}'_1 à \mathcal{A}'_3 , soit :

$$\equiv \mathcal{A}^i \equiv$$

$$Z = \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{A}_1^i : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_2^i : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} & t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_3^i : X_{i,j,t} \leq \bar{X}_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_4^i : X_{i,j,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0, \bar{X}_{i,j,t} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

III.3.4 Modèle de décision du niveau détaillé : modèle de désagrégation

Le modèle de décision détaillé $\mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f}$ doit permettre d'élaborer les décisions détaillées associées aux périodes (t, τ_d) à (t, τ_f) par désagrégation des décisions de la macro-période t .

$$\equiv \mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{D}_1^{t,\tau_d,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_2^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & i = 1, \dots, N, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_3^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_4^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_\tau} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq \text{cap}_{r,t,\tau} & r = 1, \dots, R, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_5^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \end{cases}$$

Les décisions détaillées doivent satisfaire les contraintes $\mathcal{D}_1^{t,\tau_d,\tau_f}$ à $\mathcal{D}_5^{t,\tau_d,\tau_f}$. Celles-ci sont respectivement identiques aux contraintes du modèle \mathcal{G} restreintes aux périodes élémentaires (t, τ_d) à (t, τ_f) (soit $\theta = (t-1)k + \tau_d, \dots, (t-1)k + \tau_f$).

Afin d'assurer sa fonction de désagrégation, ce modèle partiel doit évidemment être complété par des relations liant les décisions détaillées et les décisions agrégées. Ces relations sont établies dans la suite de ce travail.

Le modèle $\mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f}$ étant construit à partir du modèle \mathcal{G} , la contrainte $\mathcal{D}_4^{t,\tau_d,\tau_f}$ peut être décomposée de la même façon que \mathcal{G}_4 . Ceci conduit au modèle $\mathcal{D}'^{t,\tau_d,\tau_f}$ suivant :

$$\mathcal{D}'^{t,\tau_d,\tau_f} = \left(\bigcup_{r=1}^R \mathcal{D}'_5^{t,\tau_d,\tau_f} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f} \right)$$

où

$$\mathcal{D}'_5^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_\tau} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,t,\tau} = \text{cap}_{r,t,\tau} \quad \tau = \tau_d, \dots, \tau_f$$

et le modèle $\mathcal{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f}$ associé au produit i est :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f} \equiv \\ Z &= \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau} \\ \text{sous } \begin{cases} \mathcal{D}_1^{i,t,\tau_d,\tau_f} & : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_2^{i,t,\tau_d,\tau_f} & : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_3^{i,t,\tau_d,\tau_f} & : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_4^{i,t,\tau_d,\tau_f} & : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_5^{i,t,\tau_d,\tau_f} & : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, \bar{x}_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \end{cases} \end{aligned}$$

III.4 DÉMARCHE DE L'ÉTUDE

Cette première formulation du problème de planification permet de poser les bases de notre étude. En effet, cette section montre les limitations de cette structure de décision et présente la démarche mise en oeuvre dans les chapitres suivants pour analyser et résoudre ces difficultés.

III.4.1 Dysfonctionnements liés à la modélisation

Les limitations de cette modélisation proviennent à la fois des niveaux agrégé et détaillé.

- Le niveau agrégé :

Le modèle agrégé précédent se révèle insuffisant dans la plupart des cas. En effet, il se peut qu'aucune solution détaillée obtenue par désagrégation ne puisse être calculée. L'origine de cette difficulté est double :

1. Toutes les contraintes regroupées dans le modèle agrégé \mathcal{A} découlent de contraintes appartenant aux modèles associés au niveau détaillé. Ainsi, dans une macro-période t donnée, les contraintes \mathcal{A}_1 à \mathcal{A}_4 correspondent à une simple sommation des contraintes détaillées associées aux périodes élémentaires (t, τ) pour $\tau = 1, \dots, k$. Par exemple :

$$\left. \begin{array}{l} x_{i,J_i+1,t,1} = d_{i,t,1} \\ \vdots \\ x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} \\ \vdots \\ x_{i,J_i+1,t,k} = d_{i,t,k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \neq \end{array} \sum_{\tau=1}^k x_{i,J_i+1,t,\tau} = D_{i,t}$$

En conséquence, toute solution détaillée satisfaisant les contraintes détaillées satisfait la contrainte agrégée correspondante. La réciproque n'est évidemment pas vraie, ce qui peut engendrer des infaisabilités lors de la désagrégation.

2. Il n'existe pas au sein du modèle agrégé \mathcal{A} , de relations similaires à la contrainte \mathcal{G}_3 qui modélise le délai de fabrication. Par conséquent, la structure détaillée du processus de fabrication n'est que partiellement modélisée au niveau agrégé, ce qui peut évidemment conduire à l'élaboration de solutions non désagrégables et donc ici encore, à des risques d'infaisabilité.

- Le niveau détaillé :

Les relations d'agrégation/désagrégation (III.2) et (III.3) sont insuffisantes pour assurer la cohérence des décisions détaillées. D'une part, lorsque la période (t, τ_f) est différente de (t, k) , il n'existe pas de liens entre les états s_{i,j,t,τ_f} et $s_{i,j,t,k}$ (et donc $S_{i,j,t}$). La relation (III.2) ne peut pas être employée. D'autre part, la relation (III.3) peut faire intervenir des variables $x_{i,j,t,\tau}$ qui n'appartiennent pas à l'horizon de décision détaillé considéré.

Ces difficultés permettent d'illustrer la nuance existant entre les notions de *modélisation agrégée* et d'*agrégation de modèle*. Dans le premier cas, les modèles associés aux différents niveaux sont issus d'une modélisation spécifique qui est fonction du degré de connaissance que possèdent les différents échelons organisationnels. Comme on l'a vu, cela peut occasionner des différences dans la représentation du problème initial (par exemple, non prise en compte du délai de production au niveau agrégé). Au contraire, l'agrégation de modèle se base sur la modélisation détaillée pour construire le modèle agrégé. L'adéquation des solutions agrégées avec les contraintes du problème initial dépend alors essentiellement de la méthode de combinaison utilisée.

Donc, dans les deux cas se pose le problème de compatibilité des solutions agrégée et détaillée. Une analyse fine des relations entre les différents modèles est nécessaire. La différence essentielle est qu'avec les méthodes d'agrégation de modèle, cette analyse est réalisée *a priori* à partir du problème initial alors que dans l'approche *HPP* (qui est construite à partir de modélisations agrégée et détaillée indépendantes), celle-ci est effectuée *a posteriori* à partir d'un modèle agrégé donné. C'est précisément cette analyse qui est qualifiée d'*étude des interactions* dans la suite de ce travail.

III.4.2 Étude des interactions

Les considérations précédentes montrent clairement que pour obtenir un fonctionnement correct de notre structure décisionnelle, il est important de mettre en œuvre des mécanismes permettant d'assurer d'une part, la robustesse des décisions agrégées et d'autre part, la cohérence des décisions détaillées. Ces points constituent l'objectif principal des travaux présentés dans la suite de cette thèse.

Dans cette étude, les modèles associés à chaque niveau sont de même nature (temps discret, variables continues). Ceci rend ainsi possible une formalisation mathématique des relations existant entre entités agrégées et détaillées. Notre démarche vise alors à déduire des conditions analytiques de robustesse et de cohérence que l'on introduit ensuite sous forme de contraintes au sein des modèles correspondants (*cf* Fig II.14).

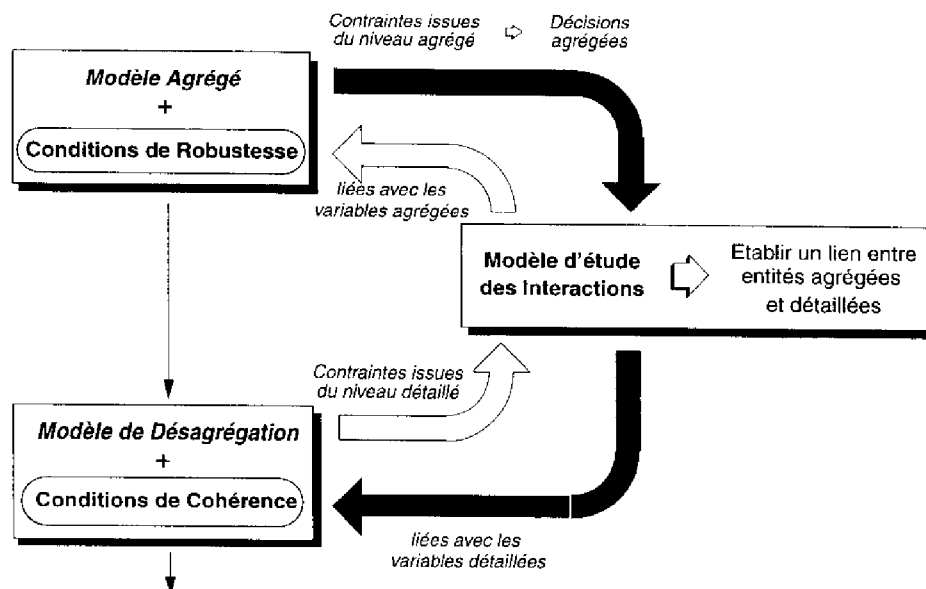


Figure III.9: Principes du modèle d'étude des interactions

L'établissement de ces conditions s'appuie sur une analyse théorique des interactions entre niveaux décisionnels. Pour cela, une méthode systématique est mise en œuvre. Elle consiste à

élaborer un modèle dit "d'étude des interactions" dont le but est de rendre explicite les liens entre entités détaillées et agrégées. La figure III.9 schématise le principe de cette approche :

- Pour assurer la robustesse du plan agrégé, il faut construire un modèle dans lequel les décisions agrégées à élaborer sont mises en relation avec les contraintes issues du niveau inférieur (flèche blanche sur la figure III.9).
- Pour assurer la cohérence de la désagrégation, il faut construire un modèle qui permette de relier les décisions détaillées à élaborer, avec les contraintes imposées par le niveau agrégé, en l'occurrence les décisions agrégées (flèche noire sur la figure III.9).

La formulation de conditions d'existence de solutions dans ces modèles d'étude des interactions permet alors d'établir selon le cas, soit des conditions de robustesse, soit des conditions de cohérence. Pour cela, une représentation par graphe de ces modèles est utilisée. La recherche de conditions d'existence dans le modèle analytique se transforme ainsi en la recherche d'un flot compatible dans le graphe correspondant.

- Chapitre IV -

ROBUSTESSE DES DÉCISIONS AGRÉGÉES

RÉSUMÉ

L'objectif du chapitre IV est de construire un modèle agrégé robuste. Mais, la complexité de l'analyse des interactions entre niveaux conduit à élaborer ce modèle en plusieurs étapes.

La section IV.1 présente d'abord l'analyse de la robustesse dans un contexte volontairement simplifié. On suppose que la répartition des capacités des ressources entre les opérations est une donnée. Sous cette hypothèse, les produits sont découplés vis à vis des ressources et peuvent ainsi être planifiés indépendamment.

La méthodologie employée est basée sur une formalisation des interactions entre niveaux décisionnels. Ceci mène à la construction d'un modèle d'étude des interactions traduisant les relations existant entre les variables agrégées et les contraintes issues du niveau détaillé. La robustesse des décisions agrégées est alors liée à l'existence d'une solution à ce modèle d'étude. Des conditions analytiques sont ainsi recherchées en s'appuyant sur la représentation par graphe de ce modèle et sur la notion de flot maximum. Cette étude conduit à l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes de robustesse.

La section IV.2 étend ces résultats dans le cadre du problème général : la capacité allouée à chaque opération n'est plus une donnée mais une variable du problème.

L'analyse théorique de la robustesse permet de déterminer des conditions suffisantes. Mais celles-ci sont liées au partage de la capacité détaillée des ressources et ne peuvent donc pas être utilisées directement. Deux approches sont alors mises en œuvre pour déterminer une répartition particulière des capacités : une approche suffisante dans laquelle le partage des capacités et le plan agrégé sont résolus simultanément et une approche nécessaire dans laquelle le partage des capacités et le plan agrégé sont traités séquentiellement.

IV.1 ÉTUDE PRÉLIMINAIRE

L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle agrégé robuste pour le problème général présenté dans la section III.2. Mais la complexité des interactions entre niveaux décisionnels rend difficile une étude globale du problème. Pour cette raison, l'analyse de la robustesse est abordée en plusieurs étapes. Cette analyse est d'abord présentée dans un contexte volontairement simplifié.

IV.1.1 Découplage des produits

Cette première phase d'analyse se place dans un contexte de production où chaque produit i peut être planifié indépendamment des autres.

Le chapitre III a montré que les contraintes \mathcal{G}_4 (resp \mathcal{A}_3) induisent un couplage entre les produits par l'intermédiaire des ressources. La décomposition de ces contraintes permet de faire apparaître explicitement d'une part, une contrainte modélisant la limitation de la production et d'autre part, une contrainte associée au partage de la capacité entre les opérations. Dans ce cadre, les variables auxiliaires $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ (resp $\bar{X}_{i,j,t}$) liées à la répartition de la capacité des ressources, ont été introduites afin de limiter la production.

Dans cette étude préliminaire, on suppose que cette répartition est une **donnée** du problème. On définit ainsi les données suivantes :

- $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$: quantité maximale de produits i pouvant subir l'opération j en période (t, τ) . Cette quantité maximale découle de la répartition des capacités détaillées des ressources r entre les opérations. Cette définition est évidemment valable pour la donnée $\bar{x}_{i,j,\theta}^*$ correspondante.
- $\bar{X}_{i,j,t}^*$: quantité maximale de produits i pouvant subir l'opération j en macro-période t . Cette quantité maximale découle de la répartition des capacités agrégées des ressources r entre les opérations.

Ces données sont liées par la relation d'agrégation/désagrégation suivante :

$$\bar{X}_{i,j,t}^* = \sum_{\tau=1}^k \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \quad (\text{IV.1})$$

Le point important est que les données $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ (resp $\bar{X}_{i,j,t}^*$) peuvent être considérées comme une instantiation des variables $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ (resp $\bar{X}_{i,j,t}$) et que dans ces conditions, les différents produits peuvent être planifiés indépendamment les uns des autres.

Le modèle détaillé \mathcal{G}^{*i} associé à ce contexte d'étude correspond au modèle \mathcal{G}^i dans lequel la variable $\bar{x}_{i,j,\theta}$ est remplacée par la donnée $\bar{x}_{i,j,\theta}^*$. La planification détaillée d'un produit i s'effectue donc selon le modèle suivant :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{G}^{*i} \equiv \\ Z &= \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\theta=1}^{\Theta} s_{i,j,\theta} \\ \text{sous } \begin{cases} \mathcal{G}_1^{*i} & : s_{i,j,\theta} = s_{i,j,\theta-1} + x_{i,j,\theta} - x_{i,j+1,\theta} & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_2^{*i} & : x_{i,J_i+1,\theta} = d_{i,\theta} & \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_3^{*i} & : x_{i,j+1,\theta} \leq s_{i,j,\theta-1} & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_4^{*i} & : x_{i,j,\theta} \leq \bar{x}_{i,j,\theta}^* & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_5^{*i} & : x_{i,j,\theta} \geq 0, s_{i,j,\theta} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \end{cases} \end{aligned}$$

De la même manière, le modèle agrégé \mathcal{A}^{*i} associé à ce contexte d'étude correspond au modèle \mathcal{A}^i dans lequel la variable $\bar{X}_{i,j,t}$ est remplacée par la donnée $\bar{X}_{i,j,t}^*$. La planification agrégée d'un produit i s'effectue donc selon le modèle suivant :

$$\equiv \mathcal{A}^{*i} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \mathcal{A}_1^{*i} : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_2^{*i} : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} & t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_3^{*i} : X_{i,j,t} \leq \bar{X}_{i,j,t}^* & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_4^{*i} : X_{i,j,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

L'analyse réalisée au paragraphe III.4.1 a montré qu'un tel modèle ne permet pas d'assurer l'existence d'une désagrégation. Il est donc nécessaire de compléter ce modèle avec des conditions garantissant la robustesse des décisions agrégées vis à vis des contraintes du niveau détaillé.

IV.1.2 Modèle d'étude des interactions

D'après la définition 1, une décision agrégée est dite robuste si elle peut être suivie d'une désagrégation faisable. Or, pour garantir l'existence d'une désagrégation, il faut et il suffit que les décisions agrégées aient été élaborées en tenant compte des contraintes du niveau détaillé.

Par conséquent, les relations existant entre *décisions agrégées* et *contraintes du niveau détaillé* peuvent être formalisées par le modèle d'étude des interactions suivant :

$$\equiv \mathcal{I}^{*i} \equiv$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1^{*i} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{*i} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{*i} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{*i} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{*i} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{*i} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{I}_7^{*i} : \sum_{\tau=1}^k x_{i,j,t,\tau} = X_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

Ce modèle est construit à partir du modèle \mathcal{G}^{*i} qui représente l'ensemble des contraintes du niveau détaillé (contraintes \mathcal{I}_1^{*i} à \mathcal{I}_5^{*i}) et des relations d'agrégation/désagrégation (III.2) et (III.3) qui lient les décisions agrégées et détaillées (contraintes \mathcal{I}_6^{*i} et \mathcal{I}_7^{*i}). Il vient alors le lemme suivant :

Lemme 1 :

Un plan agrégé $\{X_{i,j,t}, S_{i,j,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si et seulement si le modèle \mathcal{I}^{*i} admet une solution.

Preuve :

□ Découle directement de la construction du modèle d'étude des interactions \mathcal{I}^{*i} .
□

Le modèle \mathcal{I}^{*i} constitue l'outil de base de cette étude. En effet, l'analyse des interactions menée dans la suite est basée sur l'exploitation d'un tel modèle. La formulation de conditions d'existence

de solutions dans \mathcal{I}^* permet de déduire des conditions de robustesse. Celles-ci, introduites sous forme de contraintes dans le modèle \mathcal{A}^i assurent ainsi la robustesse du plan agrégé.

IV.1.3 Etat agrégé robuste

Toute décision du niveau agrégé doit être solution du modèle \mathcal{A}^* . En outre, les variables $X_{i,j,t}$ peuvent être exprimées en fonction des états $S_{i,j,t}$ par la relation suivante (somme pour $j = 1, \dots, J_i$ des équations d'état \mathcal{A}_1^*) :

$$X_{i,j,t} = \sum_{p=j}^{J_i} S_{i,p,t} - \sum_{p=j}^{J_i} S_{i,p,t-1} + D_{i,t} \quad (\text{IV.2})$$

Par conséquent, la connaissance des états agrégés $S_{i,j,t}$ est suffisante pour fixer les décisions agrégées $X_{i,j,t}$. La relation d'agrégation/désagrégation (III.3) n'apparaît donc pas indispensable et la contrainte \mathcal{I}_6^* peut être retirée du modèle d'étude des interactions.

La robustesse du plan agrégé est donc assurée, simplement par la détermination d'états agrégés $S_{i,j,t}$ compatibles avec les contraintes du modèle \mathcal{I}^* . La notion d'état agrégé robuste peut ainsi être définie de la façon suivante :

Définition 3 : Etat agrégé robuste

Un état agrégé $\{S_{i,j,t-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est dit robuste si le modèle \mathcal{I}^* réduit aux macro-périodes t à T admet une solution.

En conséquence, notre démarche pour l'analyse de la robustesse consiste à caractériser l'ensemble des états agrégés $\{S_{i,j,t-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ admissibles vis à vis des contraintes détaillées de \mathcal{I}^* relatives aux macro-périodes t à T .

Cependant, il est possible de limiter l'horizon d'étude de la robustesse à la macro-période t . En effet, supposons que l'état agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est robuste, c'est à dire satisfait les contraintes de \mathcal{I}^* , relatives aux macro-périodes $t+1$ à T . Alors, l'état agrégé $\{S_{i,j,t-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est lui-même robuste s'il satisfait les contraintes détaillées de \mathcal{I}^* relatives à la macro-période t imposant notamment d'atteindre l'état agrégé robuste $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$.

Compte tenu de la définition 3, l'état agrégé $\{S_{i,j,T} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ peut être considéré comme robuste, puisqu'il n'est contraint d'aucune manière. Ainsi, la robustesse des états agrégés successifs assure la robustesse du plan agrégé complet.

L'analyse de la robustesse peut donc être effectuée sur un modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$, correspondant à la restriction du modèle \mathcal{I}^* à la macro-période t :

$$\equiv \mathcal{I}^{*i,t} \equiv \begin{cases} \mathcal{I}_1^{*i,t} & : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{*i,t} & : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{*i,t} & : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{*i,t} & : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{*i,t} & : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{*i,t} & : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_7^{*i,t} & : s_{i,j,t,0} = S_{i,j,t-1} & j = 1, \dots, J_i \end{cases}$$

On en déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 1 :

Etant donné l'état agrégé robuste $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$, l'état agrégé $\{S_{i,j,t-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est robuste si et seulement si le modèle des interactions $\mathcal{I}^{i,t}$ admet une solution

Preuve :

Decoule directement du lemme 1 et de la définition 3.
□

L'objectif est donc d'établir des conditions sur les états $S_{i,j,t-1}$ qui assurent l'existence d'une solution dans le modèle $\mathcal{I}^{i,t}$. Pour cela, une représentation par graphe de ce problème est proposée. Cette modélisation permet d'exploiter des propriétés classiques sur les graphes en vue d'obtenir de manière plus aisée les conditions recherchées.

IV.1.4 Réseau associé au modèle d'étude des interactions

Le modèle analytique $\mathcal{I}^{i,t}$ peut être représenté sous forme d'un graphe orienté. Il doit faire apparaître l'évolution des flux de matière à la fois dans le temps (aspect dynamique) et dans la gamme de fabrication (aspect structurel). Pour cela, le temps est associé à l'axe horizontal et l'état des produits, à l'axe vertical. Une cellule élémentaire de ce graphe est donnée sur la figure IV.1. Deux types de flux et donc d'arcs apparaissent dans ce graphe :

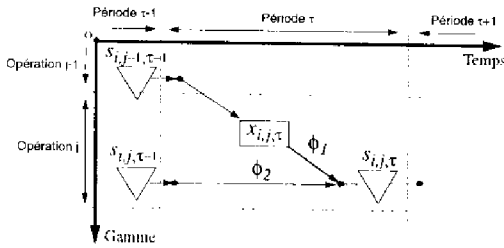


Figure IV.1: Cellule élémentaire

- un flux ϕ_1 qui représente les produits subissant une opération. Ces arcs modélisent le flux $x_{i,j,\tau}$. Ils sont caractérisés par une borne nulle et une capacité finie $\bar{x}_{i,j,\tau}^*$.
- un flux ϕ_2 qui représente les produits ne subissant aucune transformation dans la période (t, τ) . Ces arcs modélisent des flux de produit en attente dans un stock. Ils possèdent donc une borne nulle et une capacité infinie. La positivité de ce flux correspond à la contrainte $\mathcal{I}_3^{i,t}$.

En reproduisant cette cellule élémentaire pour tout $j = 1, \dots, J_i$ et tout $\tau = 1, \dots, k$ de la macro-période t , on obtient le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ montré sur la figure IV.2 sur lequel apparaissent les différents flux.

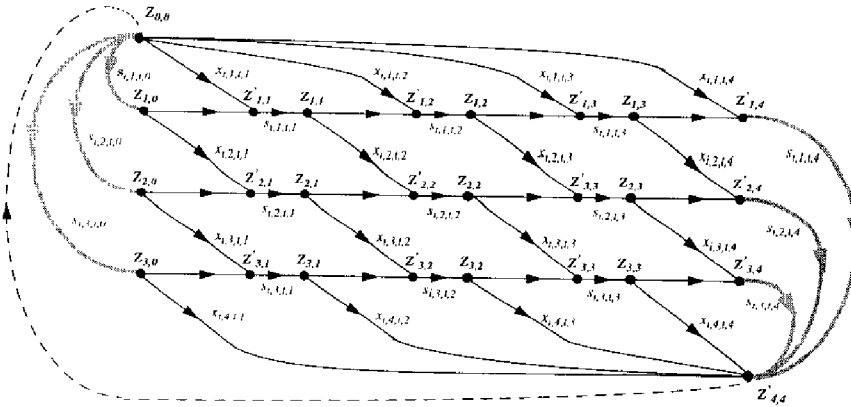


Figure IV.2: Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

Corollaire 2 :

Le modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ admet une solution si et seulement si il existe un flot compatible dans le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$.

Preuve :

Pour cela, il suffit de montrer l'équivalence entre le modèle d'étude des interactions $\mathcal{I}^{*i,t}$ et le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$. La figure IV.3 présente les bornes et les capacités associées à chaque arc ([borne,capacité]).

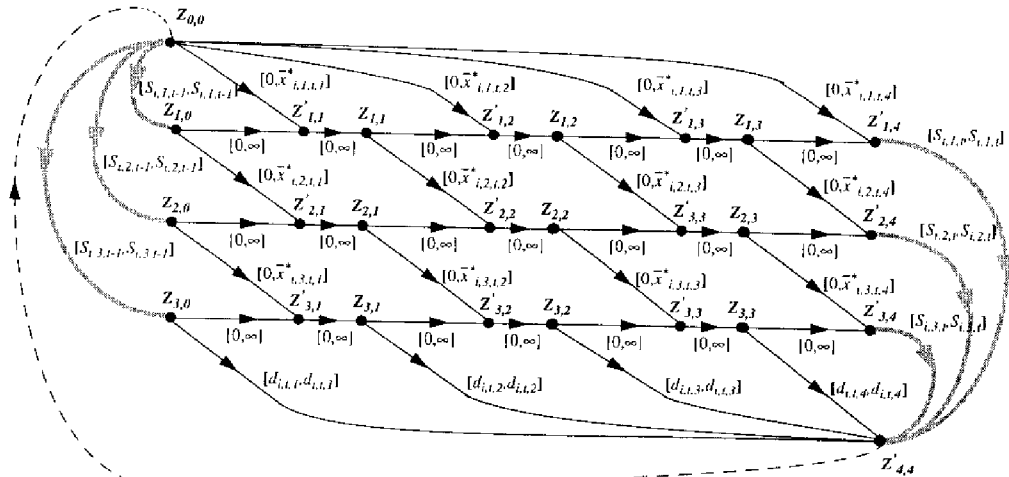


Figure IV.3: Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

Les flux associés aux arcs de $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ représentent les variables du problème $\mathcal{I}^{*i,t}$. Les bornes et capacités finies des arcs traduisent selon le cas des contraintes égalités (cas où borne=capacité) ou des contraintes inégalités (cas où borne < capacité) de $\mathcal{I}^{*i,t}$. La table IV.1 résume la correspondance entre éléments de $\mathcal{I}^{*i,t}$ et de $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$.

	Arcs	Bornes	Capacités	Flux
	$(Z_{0,0}, Z_{j,0})$	$S_{i,j,t-1}$	$S_{i,j,t-1}$	$s_{i,j,t,0}$
	$(Z'_{j,k}, Z'_{j+1,k})$	$S_{i,j,t}$	$S_{i,j,t}$	$s_{i,j,t,k}$
	$(Z'_{j,\tau}, Z_{j,\tau})$	0	∞	$s_{i,j,t,\tau}$
	$(Z_{0,0}, Z'_{j,\tau})$	0	$\bar{x}_{i,j,t,\tau}$	$x_{i,j,t,\tau}$
	$(Z_{j-1,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$	0	$\bar{x}_{i,j,t,\tau}$	$x_{i,j,t,\tau}$
	$(Z_{j,t}, Z'_{j+1,t})$	$d_{i,t,\tau}$	$d_{i,t,\tau}$	$x_{i,j+1,t,\tau}$
	$(Z_{j,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$	0	∞	$s_{i,j,t,\tau-1} - x_{i,j+1,t,\tau}$

Table IV.1: Capacités et flux associés au réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$

Les relations de conservation des flux aux sommets $Z_{j,\tau}$ et $Z'_{j,\tau}$ correspondent aux contraintes $\mathcal{I}_1^{*i,t}$. Les conditions de non négativité des flux matérialisent les contraintes $\mathcal{I}_3^{*i,t}$ et $\mathcal{I}_5^{*i,t}$. Enfin, les capacités des arcs correspondent aux contraintes $\mathcal{I}_2^{*i,t}$, $\mathcal{I}_4^{*i,t}$, $\mathcal{I}_6^{*i,t}$ et $\mathcal{I}_7^{*i,t}$.

□

Les conditions d'existence d'un flot compatible dans un tel réseau pourraient être établies par l'application du théorème de HOFFMAN (cf [45], p 170) sur tout cocycle de ce graphe. Cependant, compte tenu de sa structure très particulière, l'analyse peut être facilitée en transformant le problème d'existence d'un flot compatible dans $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ en un problème équivalent de recherche

d'un flot maximum dans un réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$. Cette transformation est obtenue selon la procédure suivante :

◇ Méthode de transformation d'un problème de flot compatible en un problème de flot maximum [19] :

Soit un graphe $G = [X, U]$ dont chaque arc est muni d'une borne inférieure de capacité b_u et d'une borne supérieure de capacité $c_u \geq b_u$. La recherche d'un flot compatible sur G peut se ramener à la recherche d'un flot maximum entre O et M sur le graphe G' construit à partir de G de la façon suivante :

- l'ensemble des sommets de G' est l'ensemble X de G auquel on rajoute un sommet source O et un sommet puits M .
- si $u = (i, j) \in U$ avec $b_u > 0$, on attribue à l'arc (i, j) dans G' une capacité $c'_{ij} = c_u - b_u$, on ajoute un arc entrant (O, j) de capacité $c'_{Oj} = b_u$, et un arc sortant (i, M) de capacité $c'_{iM} = b_u$.

Le problème de flot compatible dans G admet alors une solution si et seulement si le graphe G' admet un flot maximum de O à M saturant tous les arcs entrants de type (O, i) et tous les arcs sortants de type (j, M) .

□

Les arcs de $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ concernés par cette transformation sont du type $(Z_{0,0}, Z_{j,0})$, $(Z'_{j,k}, Z'_{j+1,k})$ et $(Z_{j_i, \tau-1}, Z'_{j_i+1, k})$. De plus, les arcs dont la borne est strictement positive dans $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ sont transformés dans $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ en arcs de capacité $c'_{ij} = 0$. Après application et simplification, on obtient finalement le réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ montré sur la figure IV.4.

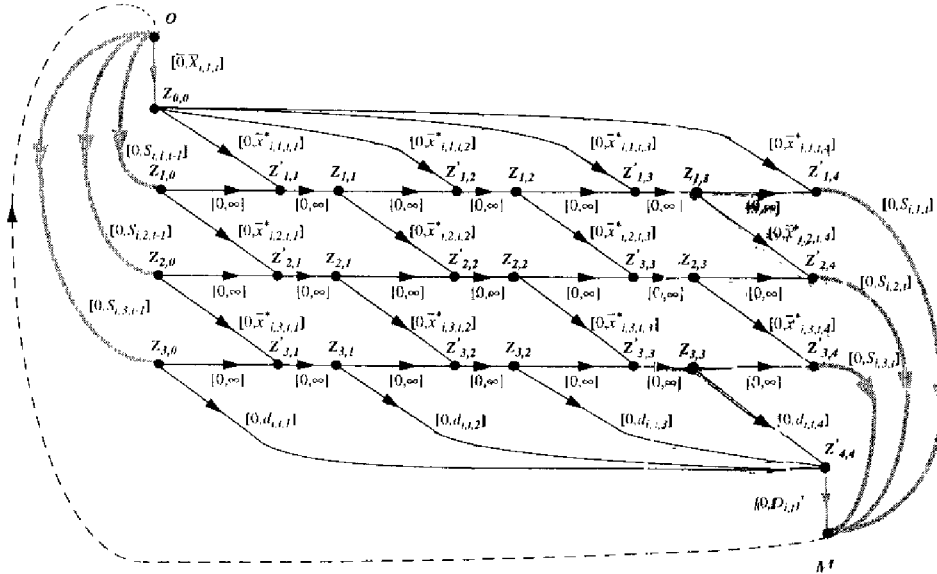


Figure IV.4: Réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{L}^{i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

Enfin, la saturation de tous les arcs entrants $\{(O, Z_{j,0}) \mid j = 0, \dots, J_i\}$ et sortants $\{(Z'_{j,k}, M) \mid j = 1, \dots, J_i + 1\}$ du réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ conduirait à un flot de valeur $f_{saturation}^{i,t}$:

$$f_{saturation}^{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} = X_{i,1,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t-1} \quad (IV.3)$$

Le problème de flot compatible dans $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ admet donc une solution si et seulement si le réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ admet un flot maximum de valeur $f_{max}^{i,t}$ égale à $f_{saturation}^{i,t}$.

IV.1.5 Analyse de la robustesse

A partir des éléments décrits dans les paragraphes précédents, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3 :

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ associé au produit i est robuste si et seulement si pour tout $t = 1, \dots, T$, le flot maximum dans chaque réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ a pour valeur $f_{saturation}^{i,t}$.

Preuve :

La robustesse des états agrégés est liée à l'existence d'une solution au modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ (corollaire 1), ou de manière équivalente, à l'existence dans $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ d'un flot compatible (corollaire 2), soit encore après transformation du problème, à l'existence dans $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ d'un flot maximum de valeur $f_{saturation}^{i,t}$. En étendant ce raisonnement pour tout $t = 1, \dots, T$, le corollaire 3 peut être établi. \square

Le réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ est uniquement constitué d'arcs dont les bornes sont nulles. Pour caractériser le flot maximum, il est possible d'exploiter la notion de coupe. Les notations utilisées sont les suivantes :

- Z : ensemble des sommets associé à un réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$,
- Y : un sous-ensemble de sommets de Z contenant le sommet source O ,
- \bar{Y} : le sous-ensemble complémentaire de Y par rapport à Z contenant le sommet puits M ,
- (Y, \bar{Y}) : une coupe de $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ désignant le sous-ensemble d'arcs ayant leur sommet origine dans Y et leur sommet extrémité dans \bar{Y} ,
- $C^{i,t}(Y, \bar{Y})$: la capacité d'une coupe (Y, \bar{Y}) de $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ correspondant à la somme des capacités des arcs qui la constituent.

L'établissement des conditions de robustesse s'appuie sur le théorème suivant :

◇ **Théorème du flot maximum et de la coupe minimale** (cf [45] p 161)

La valeur maximale d'un flot de O à M dans $G = [X, U]$ muni des capacités c_u ($u \in U$) est égale à la capacité de la coupe de capacité minimale séparant O et M . \square

Ce théorème indique que pour obtenir un flot maximum de valeur $f_{saturation}^{i,t}$ dans le réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ il faut et il suffit que la capacité $C^{i,t}(Y, \bar{Y})$ de toute coupe de ce réseau soit supérieure ou égale à la valeur $f_{saturation}^{i,t}$. D'où le lemme suivant :

Lemme 2 :

Un plan agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ associé au produit i est robuste si et seulement si pour tout $t = 1, \dots, T$, la capacité de toute coupe de chaque réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ est telle que :

$$C^{i,t}(Y, \bar{Y}) \geq D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t}$$

Preuve :

Il découle directement de la relation (IV.3), du corollaire 3, et du théorème du flot maximum et de la coupe minimale. \square

La structure très particulière des réseaux $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ permet de limiter la mise en oeuvre du lemme 2 à un sous-ensemble de coupes particulières dites "significatives"

IV.1.6 Caractérisation des coupes significatives

L'objet de ce paragraphe est de caractériser le sous-ensemble de coupes dites *significatives* à partir desquelles sont établies les conditions de robustesse par application du lemme 2.

La recherche des coupes significatives est basée sur des propriétés de nature *structurale* et *numérique*. L'ensemble de cette analyse est complexe. Aussi, afin d'alléger la présentation de ces résultats, les propriétés formelles et les démonstrations correspondantes sont placées en annexe de ce chapitre. Les paragraphes suivants se limitent à la présentation de ces propriétés et à leur exploitation.

IV.1.6.1 Définition

Définition 4 : Coupes non significatives

Une coupe (Y, \bar{Y}) est dite non significative dans deux cas :

- (a) si elle possède une capacité infinie,
- (b) si il est possible de lui associer au moins une coupe de capacité inférieure.

Une coupe dite *significative* est donc une coupe de capacité finie pour laquelle il n'est pas possible de prouver l'existence d'une coupe de capacité inférieure. L'ensemble des coupes significatives de $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ est noté $\Delta^{i,t}$.

IV.1.6.2 Analyse structurale du réseau

Les propriétés établies dans ce paragraphe sont basées sur la structure du réseau considéré. Comme tous les réseaux $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ sont de même structure, les propriétés suivantes sont valables quels que soient le produit i et la macro-période t considérés. Seule la capacité (valeur numérique) de ces coupes dépend d'un réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ particulier (capacité des arcs).

L'analyse structurale du graphe conduit à la mise en évidence de 5 propriétés (cf Annexe 1 en fin de ce chapitre). Ces dernières permettent de déduire l'expression générale de la capacité des coupes "structurellement" significatives.

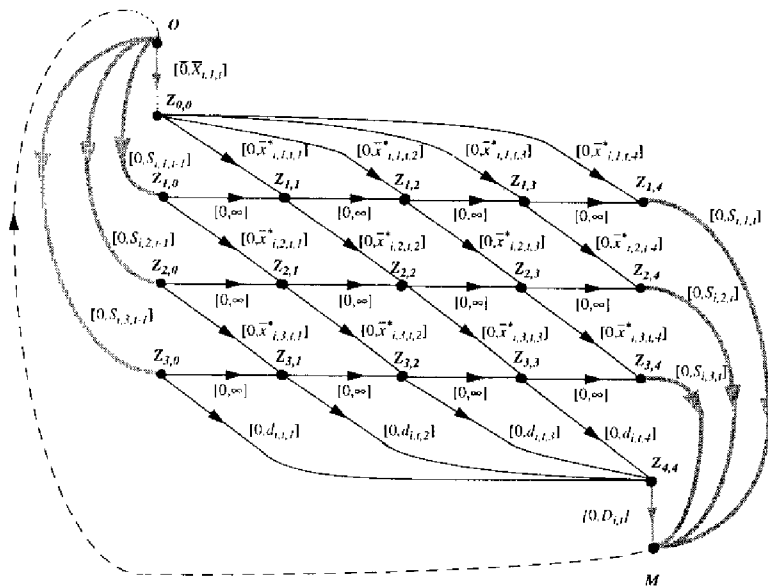


Figure IV.5: Réseau équivalent $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{L}^{i,t}$ ($J_1 = 3, k = 4$)

La **propriété 1** s'intéresse à la réduction du réseau. Elle montre que les sommets $Z_{j,\tau}$ et $Z'_{j,\tau}$ du réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$ peuvent être confondus pour la caractérisation des coupes significatives. Pour cette raison, l'analyse est conduite dans la suite sur le réseau équivalent $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ de la figure IV.5.

Afin de "visualiser" une coupe sur le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$, une ligne est utilisée pour délimiter les ensembles de sommets Y et \bar{Y} . Ainsi, tout arc orienté de Y vers \bar{Y} traversé par cette ligne appartient à la coupe (Y, \bar{Y}) .

Dans ce cadre, les propriétés 1 et 2 traitent de la "forme" des coupes significatives. La **propriété 2** montre qu'une ligne possédant un "front montant" ne correspond pas à une coupe significative (cf Fig IV.6-a). La **propriété 3** indique qu'une ligne faisant des "retours en arrière" ne représente pas une coupe significative (cf Fig IV.6-b).

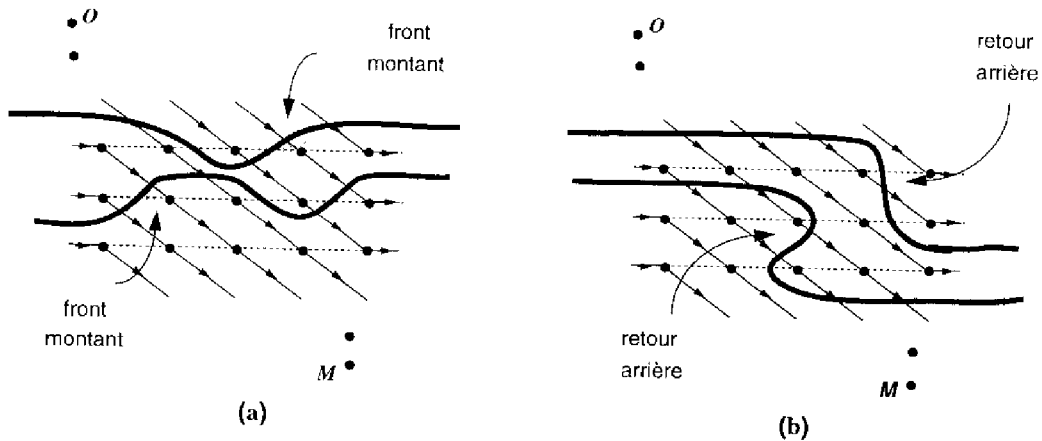


Figure IV.6: Exemples de coupes non significatives ($J_i = 3$, $k = 4$)

Une coupe significative (Y, \bar{Y}) est donc matérialisée sur le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ par une "ligne descendante monotone" (cf Fig IV.7).

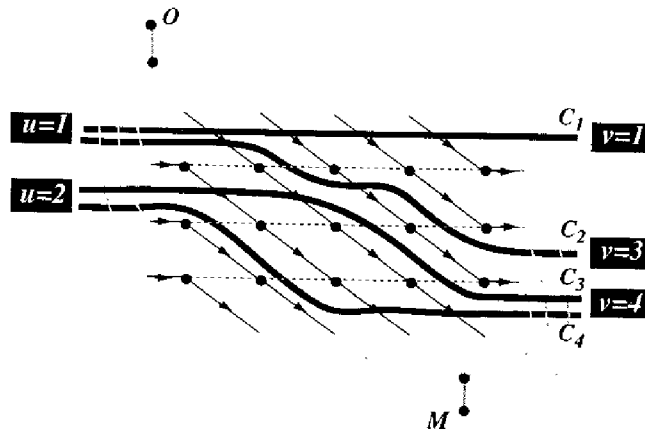


Figure IV.7: Exemples de coupes significatives ($J_i = 3$, $k = 4$)

Toute coupe (Y, \bar{Y}) du réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ peut être partitionnée en 3 sous-ensembles d'arcs :

$$(Y, \bar{Y}) = U \cup V \cup W \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U &= \{(O, Z_{j,0}) \mid (O, Z_{j,0}) \in (Y, \bar{Y})\} \\ V &= \{(Z_{j,k}, M) \mid (Z_{j,k}, M) \in (Y, \bar{Y})\} \\ W &= (Y, \bar{Y}) - U - V \end{cases}$$

La **propriété 4** et la **propriété 5** permettent de caractériser les coupes significatives. Elles montrent que toute coupe “structurellement” significative peut être caractérisée par un triplet (u, v, L) défini de la façon suivante :

- u est appelé “niveau de départ” d’une coupe $(Y, \bar{Y}) \in \Delta^{i,t}$ (à gauche sur $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$) et est égal à :

$$u = \min (j \mid (O, Z_{j,0}) \in U) \quad (1 \leq u \leq J_i)$$

- v est appelé “niveau d’arrivée” d’une coupe $(Y, \bar{Y}) \in \Delta^{i,t}$ (à droite sur $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$) et est égal à :

$$v = \max (j \mid (Z_{j,k}, M) \in V) \quad (1 \leq v \leq J_i + 1)$$

- L est une matrice de dimension $(J_i + 1) \times k$ qui localise la coupe au sein du réseau. Ces éléments $l_{j,\tau}$ sont tels que :

- $l_{j,\tau} = 1$ si l’arc de capacité $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ (ou $d_{i,t,\tau}$ si $j = J_i + 1$) appartient à W .
- $l_{j,\tau} = 0$ sinon.

Ces 3 paramètres vérifient les relations suivantes :

Propriété 4 : $u \leq v$ et $v - u \leq k$

Propriété 5 : $\begin{cases} l_{j,\tau} = 1 \Rightarrow u \leq j \leq v \text{ et } j - u + 1 \leq \tau \leq k - v + j \\ l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau-p+j} = 0 \quad \forall j \neq p \\ l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau+j-p+1} = 1 \text{ avec } j \text{ tel que } p \leq j \leq v \end{cases}$

Exemple :

Les coupes C_1 et C_2 de la figure IV.7 sont caractérisées respectivement par les triplets (u, v, L) tels que :

$$C_1 : u = 1, v = 1, L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 : u = 1, v = 3, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

La capacité d’une coupe significative caractérisée par un triplet (u, v, L) est alors exprimée par la relation suivante :

$$C^{i,t}(Y, \bar{Y}) = C^{i,t}(U) \cup C^{i,t}(W) \cup C^{i,t}(V)$$

soit encore,

$$C^{i,t}(Y, \bar{Y}) = C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \quad (\text{IV.4})$$

IV.1.6.3 Analyse numérique des coupes significatives

L’exploitation des valeurs numériques associées aux arcs du graphe permet d’affiner les caractéristiques des coupes à travers les propriétés 6 et 7 (cf Annexe 2 en fin de ce chapitre).

La **propriété 6** exploite le fait qu’à un couple (u, v) donné peuvent correspondre plusieurs matrices L vérifiant les conditions énoncées dans la propriété 5.

Exemple :

Les coupes C_3 et C_4 de la figure IV.7 sont caractérisées par des triplets (u, v, L) tels que :

$$C_3 : u = 2, v = 4, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_4 : u = 2, v = 4, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

On note $\mathcal{L}_{u,v}$, l'ensemble des matrices L associées aux coupes $(Y, \bar{Y}) \in \Delta^{i,t}$, ayant pour niveau de départ u et niveau d'arrivée v . Ces ensembles $\mathcal{L}_{u,v}$ sont identiques quel que soit le produit i et la macro-période t considérés.

La conséquence est que pour un couple (u, v) donné, chaque capacité $\mathcal{C}^{i,t}(u, v, L)$ se distingue seulement par le terme $\mathcal{C}^{i,t}(W)$ qui dépend du paramètre L . Ce terme ne fait intervenir que des données du problème (capacités et/ou demandes). Par conséquent, pour chaque couple (u, v) , il est possible d'évaluer les termes $\mathcal{C}^{i,t}(W)$ pour tout $L \in \mathcal{L}_{u,v}$ afin de déterminer celui qui possède la valeur minimale. On note alors $Q_{i,u,v,t}$ cette valeur :

$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \quad (IV.5)$$

La combinatoire importante associée à la génération des matrices L empêche évidemment une énumération explicite de toutes les coupes. Un algorithme spécifique de recherche des coupes à capacité minimale pour tout couple (u, v) est décrit dans l'annexe 2 de ce chapitre.

La propriété 6 permet de rendre les relations (IV.4) indépendantes du paramètre L . Celles-ci deviennent alors :

$$\mathcal{C}^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j,t} \quad (IV.6)$$

En conséquence, dans la suite, une coupe significative est caractérisée simplement par un couple (u, v) et le paramètre $Q_{i,u,v,t}$ correspondant. On note $Q^{i,t}$, la matrice triangulaire haute de dimension $(J_i + 1 \times J_i + 1)$ dont l'élément situé en ligne u et en colonne v est $Q_{i,u,v,t}$:

$$Q^{i,t} = \begin{pmatrix} Q_{i,1,1,t} & \dots & Q_{i,1,v,t} & \dots & Q_{i,1,J_i,t} & Q_{i,1,J_i+1,t} \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & Q_{i,u,v,t} & \dots & Q_{i,u,J_i,t} & Q_{i,u,J_i+1,t} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & Q_{i,J_i,J_i,t} & Q_{i,J_i,J_i+1,t} \\ & & & & & D_{i,t} \end{pmatrix}$$

Exemple :

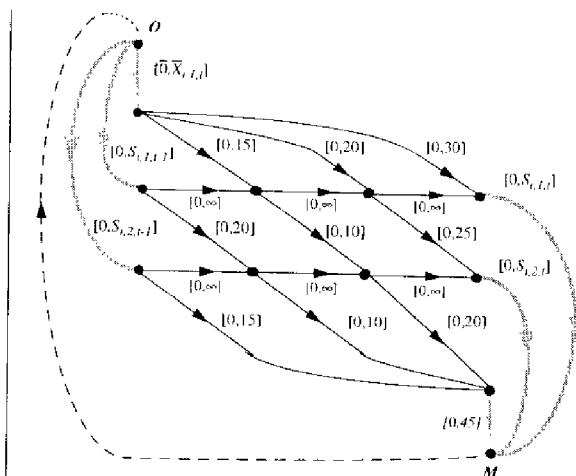


Figure IV.8: Réseau tel que $J_i = 2, k = 3$

Considérons le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ de la figure IV.8. Les matrices L associées à chaque ensemble $\mathcal{L}_{u,v}$ sont :

$$\mathcal{L}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{1,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L'application de la propriété 6 donne :

$$Q_{i,1,1,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{1,1}} (65) = 65$$

$$Q_{i,1,2,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{1,2}} (35, 40, 35) = 35$$

$$Q_{i,1,3,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{1,3}} (15, 10, 20) = 10$$

$$Q_{i,2,2,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{2,2}} (55) = 55$$

$$Q_{i,2,3,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{2,3}} (30, 40, 30) = 30$$

d'où on déduit :

$$Q^{i,t} = \begin{pmatrix} 65 & 35 & 10 \\ & 55 & 30 \\ & & 45 \end{pmatrix}$$

□

Par une analyse globale de la capacité $C^{i,t}(u, v)$, la **propriété 7** montre qu'il est éventuellement possible de réduire le nombre de couples (u, v) à considérer dans chaque ensemble $\Delta^{i,t}$. La démonstration et la mise en œuvre de la propriété 7 sont décrites dans l'annexe 2 de ce chapitre.

Exemple :

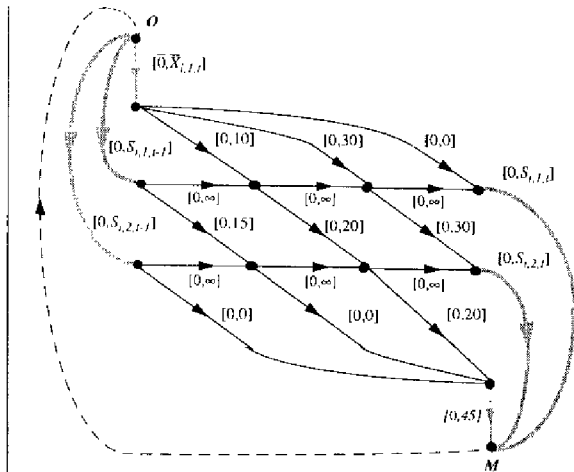


Figure IV.9: Réseau tel que $J_i = 2, k = 3$

□

Considérons le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ de la figure IV.9. L'application de la propriété 6 donne :

$$Q^{i,t} = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 10 \\ & 65 & 20 \\ & & 20 \end{pmatrix}$$

L'application de la propriété 7 donne enfin :

$$Q^{i,t} = \begin{pmatrix} 40 & - & 10 \\ & 65 & - \\ & & 20 \end{pmatrix}$$

IV.1.7 Conditions nécessaires et suffisantes de robustesse

A partir des résultats de l'analyse des coupes significatives, l'expression des conditions de robustesse peut être établie.

IV.1.7.1 Expression générale des conditions de robustesse

Théorème 1 : Conditions nécessaires et suffisantes de robustesse

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j=1, \dots, J_i, t=1, \dots, T\}$ associé au produit i est robuste si et seulement si pour tout $t = 1, \dots, T$,

$$\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} \leq Q_{i,u,v,t} - D_{i,t}$$

$$u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1, \\ \text{et } (u, v) \in \Delta^{i,t}$$

Preuve :

Les conditions de robustesse associées à un produit i et une macro-période t se déduisent du lemme 2 :

$$\begin{aligned} \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} &\geq D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} && u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1, \\ &&& \text{et } (u, v) \in \Delta^{i,t} \\ \Leftrightarrow \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} &\geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} && u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1, \\ &&& \text{et } (u, v) \in \Delta^{i,t} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

□

Ces conditions tiennent compte d'une part, des contraintes détaillées de la macro-période t par l'intermédiaire du terme $D_{i,t} - Q_{i,u,v,t}$ et d'autre part, de l'état agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ qui assure la robustesse du plan sur les macro-périodes $t + 1$ à T .

Les conditions de robustesse (IV.7) peuvent être décomposées en 2 types de relations selon la valeur de v :

- pour $v = 1, \dots, J_i$:

En exploitant la relation (IV.2), la condition (IV.6) devient :

$$X_{i,v,t} - \sum_{j=u}^{v-1} S_{i,j,t-1} \leq Q_{i,u,v,t} \quad u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i \quad \text{et } (u, v) \in \Delta^{i,t} \quad (\text{IV.8})$$

Comme $v \leq J_i$, les composantes $l_{J_i+1,\tau}$ sont nulles pour $\tau = 1, \dots, k$. Compte tenu de la relation (IV.5), le terme $Q_{i,u,v,t}$ se réduit à :

$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \subset \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$$

Ce terme ne fait intervenir que des capacités détaillées. Les relations (IV.8) limitent donc la production agrégée de manière à garantir l'existence d'une répartition détaillée de cette production compatible avec les capacités détaillées.

Enfin, lorsque $u = v$, on peut noter que les relations (IV.8) se ramènent aux contraintes de capacité agrégées \mathcal{A}_3^i .

- pour $v = J_i + 1$:

Dans ce cas, on a $X_{i,v,t} = X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t}$ et la relation peut exprimer sous la forme suivante :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,J_i+1,t} \quad u = 1, \dots, J_i \text{ et } (u, J_i + 1) \in \Delta^{i,t} \quad (\text{IV.9})$$

Ces relations définissent une valeur minimale pour les stocks agrégés en début de macro-période t qui assure que les demandes détaillées seront satisfaites aux dates prévues.

Le nombre maximum de conditions de robustesse $\mathcal{N}_{cr}^{i,t}$ pour un produit i et une macro-période t est donné par la relation suivante :

$$\mathcal{N}_{cr}^{i,t} = \frac{(J_i + 2)(J_i + 1)}{2} - 1 \quad (\text{IV.10})$$

Il est à remarquer que $\mathcal{N}_{cr}^{i,t}$ est indépendant du facteur d'agrégation k . La "combinatoire" du problème est ainsi reportée dans l'évaluation des paramètres agrégés $Q_{i,u,v,t}$. Le chapitre VI montre que le temps de calcul de ces paramètres reste dans tous les cas négligeable devant le temps de calcul lié à la résolution du problème d'optimisation. Par conséquent, la longueur de la période détaillée peut être relativement courte, autorisant ainsi une gestion très fine du processus de production.

Exemple :

En exploitant la matrice $Q^{i,t}$ associées au réseau de la figure IV.8, les conditions de robustesse sont :

$$\begin{cases} S_{i,1,t} + S_{i,2,t} - S_{i,1,t-1} - S_{i,2,t-1} \leq 20 \\ S_{i,2,t} - S_{i,1,t-1} - S_{i,2,t-1} \leq -10 \\ - S_{i,1,t-1} - S_{i,2,t-1} \leq -35 \\ S_{i,2,t} - S_{i,2,t-1} \leq 10 \\ - S_{i,2,t-1} \leq -15 \end{cases}$$

En exploitant la matrice $Q^{i,t}$ associées au réseau de la figure IV.9, les conditions de robustesse sont :

$$\begin{cases} S_{i,1,t} + S_{i,2,t} - S_{i,1,t-1} - S_{i,2,t-1} \leq 20 \\ - S_{i,1,t-1} - S_{i,2,t-1} \leq -10 \\ S_{i,2,t} - S_{i,2,t-1} \leq 45 \end{cases}$$

□

IV.1.7.2 Cas particulier

Dans la macro-période 1, les états $S_{i,j,t-1}$ correspondent aux stocks initiaux. Il s'agit donc de données du problème. Ce point peut être exploité afin de réduire le nombre de conditions de robustesse qui sont à considérer pour la macro-période 1. La **propriété 8** décrite en annexe 3 de ce chapitre montre que les conditions de robustesse deviennent dans ce cas :

$$\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,1} \leq \min_{\substack{u=1,\dots,v \\ (u,v) \in \Delta^{i,1}}} \left(Q_{i,u,v,1} - D_{i,1} + \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,0} \right) \quad v = 1, \dots, J_i \quad (\text{IV.11})$$

Le nombre maximum de conditions de robustesse $\mathcal{N}_{cr}^{i,1}$ à considérer est ainsi réduit à :

$$\mathcal{N}_{cr}^{i,1} = J_i \quad (\text{IV.12})$$

Enfin, signalons qu'un second membre négatif dans la relation (IV.11) indique que le problème n'admet pas de solution.

IV.1.8 Modèle agrégé robuste

Pour assurer la robustesse du plan agrégé, les relations (IV.7) doivent être intégrées sous forme de contraintes supplémentaires dans le modèle \mathcal{A}^{*i} . On note alors $\hat{\mathcal{A}}^{*i}$, le modèle agrégé intégrant ces relations.

$$\begin{aligned} &\equiv \hat{\mathcal{A}}^{*i} \equiv \\ &Z = \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t} \\ \text{sous } \begin{cases} \hat{\mathcal{A}}_1^{*i} : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \hat{\mathcal{A}}_2^{*i} : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} & t = 1, \dots, T \\ \hat{\mathcal{A}}_3^{*i} : \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} \leq Q_{i,u,v,t} - D_{i,t} & u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1, \\ & (u,v) \in \Delta^{i,t}, t = 1, \dots, T \\ \hat{\mathcal{A}}_4^{*i} : X_{i,j,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que la contrainte \mathcal{A}_3^* est incluse dans la contrainte $\hat{\mathcal{A}}_3^*$. Cette étude théorique montre que pour assurer une robustesse parfaite, il est nécessaire de connaître l'ensemble des données détaillées $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ et $d_{i,t,\tau}$.

Exemple :

On désire planifier un produit i sur un horizon de 2 macro-périodes. Le réseau de la figure IV.9 est associé à la macro-période 1 et celui de la figure IV.8, à la macro-période 2. Dans ces conditions, les paramètres agrégés sont :

$$\begin{cases} \bar{X}_{i,1,1}^* = 40 & \bar{X}_{i,2,1}^* = 65 & D_{i,1} = 20 \\ \bar{X}_{i,1,2}^* = 65 & \bar{X}_{i,2,2}^* = 55 & D_{i,2} = 45 \end{cases} \quad \text{et on suppose que } \begin{cases} S_{i,1,0} = 10 \\ S_{i,2,0} = 5 \end{cases}$$

La résolution de ce problème avec le modèle agrégé \mathcal{A}^* donne la solution suivante :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} = S_{i,1,2} = 0 \\ S_{i,2,1} = S_{i,2,2} = 0 \end{cases} \quad \text{impliquant que } \begin{cases} X_{i,1,1} = 10 & X_{i,1,2} = 45 \\ X_{i,2,1} = 15 & X_{i,2,2} = 45 \end{cases}$$

Cette solution ne peut pas être désagrégée : les niveaux de stocks $S_{i,1,1}$ et $S_{i,2,1}$ ne permettent pas de satisfaire les demandes détaillées $d_{i,2,1}$ à $d_{i,2,3}$. Ce plan n'est donc pas robuste.

La propriété 8 conduit pour la macro-période 1 aux conditions de robustesse suivantes :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \leq 35 \\ S_{i,2,1} \leq 50 \end{cases}$$

En supposant que les stocks soient nuls en fin d'horizon ($S_{i,1,2} = S_{i,2,2} = 0$), les conditions de robustesse associées à la macro-période 2 deviennent :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq -20 & \text{(non active)} \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 10 & \text{(non active)} \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 35 \\ S_{i,2,1} \geq -10 & \text{(non active)} \\ S_{i,2,1} \geq 15 \end{cases}$$

Grace aux conditions de robustesse de la macro-période 2, la résolution du problème avec le modèle agrégé $\hat{\mathcal{A}}^*$ donne maintenant la solution suivante :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} = 20 & S_{i,1,2} = 0 \\ S_{i,2,1} = 15 & S_{i,2,2} = 0 \end{cases} \quad \text{impliquant que } \begin{cases} X_{i,1,1} = 40 & X_{i,1,2} = 10 \\ X_{i,2,1} = 30 & X_{i,2,2} = 30 \end{cases}$$

Cette solution peut être suivie d'une désagrégation, car les niveaux de stocks $S_{i,1,1}$ et $S_{i,2,1}$ sont suffisants pour satisfaire les demandes détaillées $d_{i,2,1}$ à $d_{i,2,3}$. Ce plan est donc robuste.

□

IV.2 CAS GÉNÉRAL

On se place maintenant dans le cadre du problème général décrit dans la section III.2 : les opérations (i, j) sont couplées par l'utilisation de ressources communes.

Les conditions de robustesse établies dans la section précédente s'appuient sur une donnée fondamentale : le nombre maximal de produit i pouvant subir l'opération j dans la période (t, τ) .

Dans le cadre général considéré ici, ces grandeurs ne sont plus des données ; elle résultent de la répartition de la capacité des ressources entre les opérations utilisant ces ressources. Ces grandeurs sont fixées par le niveau détaillé et ne sont donc pas disponibles pour exprimer la robustesse du niveau agrégé.

Il est cependant possible d'obtenir des conditions de robustesse dérivées de l'étude préliminaire. L'idée de base est la suivante. Le niveau agrégé considère une répartition particulière de la capacité conduisant à des valeurs particulières de $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. Les conditions de robustesse basées sur ces valeurs particulières sont alors des conditions suffisantes de robustesse.

Ces conditions suffisantes de robustesse sont mises en œuvre dans le cadre d'une approche suffisante et d'une approche nécessaire s'appuyant sur deux traitements distincts du problème de partage des ressources.

Cette section détaille la façon dont ces principes de base sont mis en œuvre. Les variables et données sont celles définies dans les paragraphes III.3.2.1 et III.3.2.2. Le modèle détaillé \mathcal{G} et le modèle agrégé \mathcal{A} associés à ce contexte d'étude ont été présentés respectivement dans les paragraphes III.2.3 et III.3.3.

IV.2.1 Modèle des interactions

Pour garantir qu'une solution agrégée puisse être suivie d'une désagrégation, il faut et il suffit que les décisions agrégées soient élaborées en tenant compte des contraintes du niveau détaillé. Le modèle des interactions \mathcal{I} correspondant est par conséquent construit à partir du modèle global \mathcal{G} qui modélise l'ensemble des contraintes du niveau détaillé et des relations d'agrégation/désagrégation (III.2) et (III.3) qui constituent le couplage entre les variables agrégées et détaillées. Par analogie avec le lemme 1, le lemme suivant peut être établi :

Lemme 3 :

Un plan agrégé $\{X_{i,j,t}, S_{i,j,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si et seulement si le modèle \mathcal{I} admet une solution.

Preuve :

□ Découle directement de la construction du modèle d'étude des interactions \mathcal{I} .
□

La définition de l'état agrégé robuste donnée au paragraphe IV.1.3 peut être étendue au modèle \mathcal{I} . De ce fait, l'horizon d'étude de la robustesse peut être limité à une macro-période t . Par ailleurs, la relation (IV.2) montre que l'ensemble des décisions du niveau agrégé peut être défini par la seule connaissance des états $S_{i,j,t}$. L'analyse de la robustesse est donc effectuée sur le modèle \mathcal{I}^t suivant :

$$\equiv \mathcal{I}^t \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^t : & s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^t : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} \quad i = 1, \dots, N, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^t : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^t : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq cap_{r,t,\tau} \quad r = 1, \dots, R, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^t : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^t : & S_{i,j,t-1} = s_{i,j,t,0} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_7^t : & S_{i,j,t} = s_{i,j,t,k} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \end{array} \right.$$

Le modèle \mathcal{I}^t correspond donc à la restriction du modèle \mathcal{G} à la macro-période t auquel on associe les relations d'agrégation/désagrégation (III.2) relatives aux macro-périodes $t-1$ et t .

IV.2.2 Analyse de la robustesse

Afin d'utiliser les résultats obtenus dans la section précédente, l'étude s'appuie sur l'hypothèse de découplage des produits vis à vis des ressources.

Le paragraphe III.2.3 a montré que le modèle \mathcal{G} est équivalent au modèle \mathcal{G}' dans lequel apparaissent explicitement d'une part, les contraintes associées à chaque produit i et d'autre part, les

contraintes associées à chaque ressource r qui couplent les produits entre eux. Etant construit à partir du modèle \mathcal{G} , le modèle \mathcal{I} peut être défini comme la concaténation de N modèles $\mathcal{I}^{i,t}$, couplés par les contraintes $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{r,t}$ associé à chaque ressource r :

$$\mathcal{I}^t = \left(\bigcup_{r=1}^R \mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{r,t} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{I}^{i,t} \right)$$

où

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{r,t} : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,t,\tau} = \text{cap}_{r,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, k$$

et le modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ associé au produit i est :

$$\equiv \mathcal{I}^{i,t} \equiv \begin{cases} \mathcal{I}_1^{i,t} : & x_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{i,t} : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{i,t} : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{i,t} : & x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{i,t} : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, \bar{x}_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{i,t} : & s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_7^{i,t} : & s_{i,j,t,0} = S_{i,j,t-1} & j = 1, \dots, J_i \end{cases}$$

Les modèles $\mathcal{I}^{i,t}$ et $\mathcal{I}^{*i,t}$ ont donc la même structure. La différence réside dans le fait que la grandeur qui fixe le nombre maximal de produits pouvant subir une opération dans une période élémentaire est une variable dans $\mathcal{I}^{i,t}$ ($\bar{x}_{i,j,t,\tau}$) et une donnée dans $\mathcal{I}^{*i,t}$ ($\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$). Aussi, les modèles $\mathcal{I}^{*i,t}$ sont indépendants alors que les modèles $\mathcal{I}^{i,t}$ sont couplés par cette variable.

Dans ces conditions, il est possible d'associer à chaque modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ un réseau de structure identique à $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ mais dans lequel la capacité des arcs du type $(Z_{0,0}, Z'_{1,\tau})$ et $(Z_{j-1,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$ est égale à $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. La démarche d'analyse mise en oeuvre sur le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ est donc reconduite ici. Ainsi, assurer l'existence d'une solution au modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ revient à assurer l'existence d'un flot compatible dans le réseau associé. Ce dernier est transformé afin de se ramener à un problème d'existence d'un flot maximum de valeur $f_{max}^{i,t}$ égale à $f_{sature}^{i,t}$ (relation IV.3).

En application du **lemme 2**, les états $S_{i,j,t}$ sont robustes si toute coupe (Y, \bar{Y}) vérifie la relation suivante :

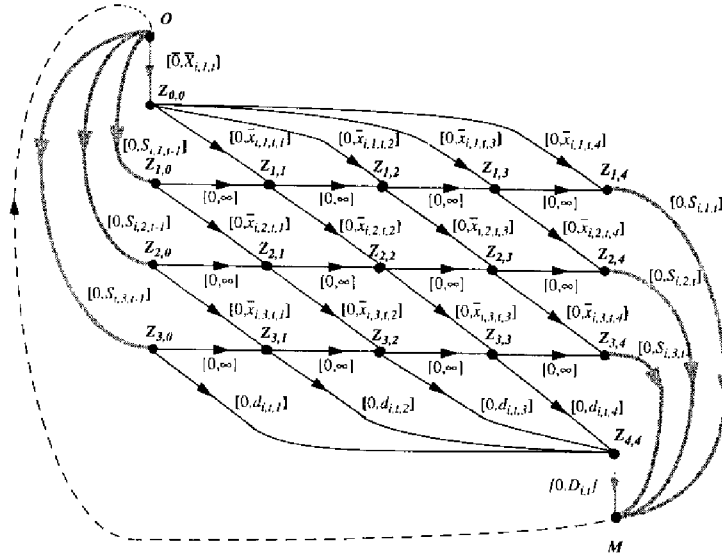
$$c^{i,t}(Y, \bar{Y}) \geq D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} \quad (\text{IV.13})$$

Les réseaux associés respectivement aux modèles $\mathcal{I}^{i,t}$ et $\mathcal{I}^{*i,t}$ possédant la même structure, les propriétés 1 à 5 déduites de l'analyse structurelle restent valables.

Ainsi, la **propriété 1** conduit au réseau $\mathcal{R}_{theorique}^{i,t}$ de la figure IV.10. L'analyse de chaque réseau $\mathcal{R}_{theorique}^{i,t}$ pris indépendamment permet de caractériser les coupes "structurellement" significatives par l'application des **propriétés 2, 3, 4** et **5**. Cette étude mène à la définition d'un triplet (u, v, L) dont les caractéristiques sont identiques à celles données au paragraphe IV.1.6.2.

La capacité de ces coupes s'exprime alors par la relation suivante :

$$c^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \quad (\text{IV.14})$$

Figure IV.10: Réseau $\mathcal{R}_{theorique}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

La mise en œuvre de la relation (IV.13) conduit alors aux conditions suivantes :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t}$$

soit encore :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} - \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \quad (IV.15)$$

Il faut noter que les conditions (IV.15) assurent la robustesse des décisions agrégées compte tenu des variables $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ qui découlent de la répartition détaillée de la capacité des ressources. Or, ces grandeurs $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ sont définies par le niveau détaillé et ne sont donc pas connues lors de la planification agrégée. De ce fait, les conditions précédentes ne peuvent pas être utilisées directement pour assurer la robustesse du plan agrégé.

Pour pallier cette difficulté, il est donc nécessaire de s'affranchir des contraintes $\mathcal{I}_4^{i,t}$ et $\mathcal{P}_I^{r,t}$ lors de la planification agrégée. Pour cela, la méthode retenue consiste à considérer au niveau agrégé une répartition particulière de la capacité, se traduisant par des valeurs particulières pour $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. Il est alors possible d'exprimer des conditions de robustesse qui garantissent l'existence d'une solution compatible avec cette répartition. Les conditions ainsi obtenues constituent des conditions suffisantes de robustesse. En effet, le fait de considérer une répartition particulière au niveau agrégé réduit a priori l'ensemble des solutions détaillées admissibles qui peuvent être obtenues par désagrégation de la solution agrégée. En d'autres termes, le niveau agrégé travaille avec une "vision" sur-contrainte du problème initial.

Deux approches sont envisagées pour effectuer le partage des ressources entre opérations : une approche suffisante et une approche nécessaire. L'approche suffisante vise à déterminer simultanément les états agrégés robustes $S_{i,j,t}$ et la répartition de la capacité des ressources (par l'intermédiaire de la variable auxiliaire $\bar{X}_{i,j,t}$). L'approche nécessaire travaille en deux étapes. Elle établit d'abord une répartition des capacités détaillées puis elle élabore un plan agrégé robuste compatible avec cette répartition.

IV.2.3 Partage des ressources : approche suffisante

Le paragraphe III.3.3. a montré que le modèle \mathcal{A} est équivalent à un modèle \mathcal{A}' dans lequel le problème de répartition de la capacité agrégée des ressources apparaît explicitement. Cette décomposition est rendue possible par l'introduction de variables auxiliaires $\bar{X}_{i,j,t}$. L'idée de l'approche suffisante est de "calquer" la répartition détaillée des capacités (de laquelle découleront les grandeurs $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$) sur le partage élaboré par le niveau agrégé (par l'intermédiaire des grandeurs $\bar{X}_{i,j,t}$). En effet, cette répartition est la seule observable depuis le niveau agrégé.

IV.2.3.1 Expression des conditions de robustesse dans l'approche suffisante

Dans chaque macro-période t , la capacité détaillée $cap_{r,t,\tau}$ de chaque période (t, τ) est répartie entre les opérations (i, j) proportionnellement au taux de partage agrégé $\bar{X}_{i,j,t}/CAP_{r,t}$ calculé par le niveau supérieur. Dans ces conditions, la répartition détaillée considérée au niveau agrégé est liée à la répartition agrégée par :

$$\bar{x}_{i,j,t,\tau} = \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} \quad \begin{array}{l} r = 1, \dots, R, (i, j) \in O_r, \\ t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \end{array} \quad (IV.16)$$

En remplaçant $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ par la relation (IV.16), les contraintes $\mathcal{I}_4^{i,t}$ deviennent :

$$\mathcal{I}_4^{i,t} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, k \quad \Rightarrow \quad x_{i,j,t,\tau} \leq \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, k$$

De même, les contraintes $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{r,t}$ modélisant le partage de la capacité deviennent :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{r,t} : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,t,\tau} &= cap_{r,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, k & \Rightarrow & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} = cap_{r,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, k \\ & & \Rightarrow & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{X}_{i,j,t} = CAP_{r,t} \end{aligned}$$

La contrainte résultante existe déjà au sein modèle agrégé puisqu'elle correspond à la contrainte \mathcal{A}'_4 . Elle devient donc inutile pour le modèle d'étude des interactions \mathcal{I}^t et peut être supprimée.

Par ailleurs, la prise en compte d'une telle répartition réduit le modèle \mathcal{I}^t à un ensemble de N modèles $\mathcal{I}^{i,t}$ indépendants dans lesquels la variable auxiliaire $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ est remplacée par la valeur définie par la relation (IV.16) :

$$\begin{aligned} & \equiv \mathcal{I}^{i,t} \equiv \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{i,t} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{i,t} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & i = 1, \dots, N, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{i,t} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{i,t} : x_{i,j,t,\tau} \leq \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{i,t} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{i,t} : S_{i,j,t-1} = s_{i,j,t,0} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_7^{i,t} : S_{i,j,t} = s_{i,j,t,k} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le réseau correspondant est identique à $\mathcal{R}_{théorique}^{i,t}$ sauf que la capacité des arcs du type $(Z_{0,0}, Z_{1,\tau})$ et $(Z_{j-1,\tau-1}, Z_{j,\tau})$ est égale à la valeur définie par la relation (IV.16).

Théorème 2 : Conditions suffisantes de robustesse

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si pour tout $i = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$,

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1, \\ L \in \mathcal{L}_{u,v} \end{array}$$

Preuve :

La capacité des coupes donnée par la relation (IV.14) devient :

$$C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

d'où on déduit par application de la relation (IV.13) et du lemme 3 :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1, \\ L \in \mathcal{L}_{u,v} \end{array} \quad (IV.17)$$

□

Les conditions de robustesse dépendent uniquement de variables agrégées et peuvent être introduites sous forme de contraintes au sein du modèle \mathcal{A} . La robustesse du niveau agrégé est donc assurée par la détermination simultanée d'états $S_{i,j,t-1}$ et $S_{i,j,t}$ et de grandeurs $\bar{X}_{i,j,t}$ compatibles avec la production $X_{i,j,t}$ nécessaire pour satisfaire les demandes $D_{i,t}$ de la macro-période t .

L'introduction des conditions (IV.17) dans le modèle agrégé \mathcal{A} augmente de façon notable le nombre de contraintes de celui-ci. En effet, la variable $\bar{X}_{i,j,t}$ intervenant dans l'expression des capacités $C^{i,t}(u, v, L)$, il n'est plus possible de réduire le nombre de conditions par les propriétés 6 et 7 déduites de l'analyse numérique des coupes. Par application des axiomes de calculs combinatoires, le nombre de contraintes $\mathcal{N}_{cr}^{i,t}$ pour un produit i et une macro-période t est donné par :

$$\mathcal{N}_{cr}^{i,t} = \left(1 + J_i + \sum_{j=2}^{J_i+1} (J_i + 2 - j) \frac{\prod_{m=0}^{j-2} (k - m)}{(j-1)!} \right)$$

IV.2.3.2 Cas particulier important

Un cas particulier intéressant en pratique est le cas où les capacités des ressources $cap_{r,t,\tau}$ et les demandes $d_{i,t,\tau}$ sont constantes quel que soit τ au sein d'une macro-période t (caractéristiques saisonnières, par exemple), c'est à dire :

$$\begin{array}{ll} \forall r = 1, \dots, R, & cap_{r,t,\tau} = cap_{r,t} \quad \tau = 1, \dots, k \\ \forall i = 1, \dots, N, & d_{i,t,\tau} = d_{i,t} \quad \tau = 1, \dots, k-1 \end{array}$$

Dans ce cadre, l'analyse des coupes significatives peut être approfondie et le nombre de coupes à considérer peut être réduit. Ainsi, la **propriété 9** (cf Annexe 3 en fin de ce chapitre) montre que les coupes (u, v, L) à considérer comprennent des arcs $(Z_{0,0}, Z_{1,\tau})$ ou $(Z_{j-1,\tau-1}, Z_{j,\tau})$ associés uniquement à un niveau j , ($j = u, \dots, v$). Un exemple de ce type de coupe est donné sur la figure IV.11.

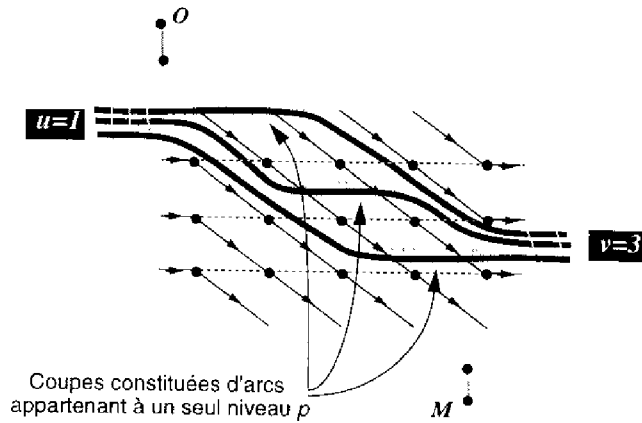


Figure IV.11: Coupes significatives dans le cas où les capacités sont constantes au sein d'une macro-période ($J_i = 3$, $k = 4$)

Ainsi, pour chaque couple (u, v) , il existe seulement $v - u + 1$ coupes significatives. Le nombre $\mathcal{N}_{cr}^{i,t}$ de conditions de robustesse générées se réduit alors à :

$$\mathcal{N}_{cr}^{i,t} = \frac{(J_i + 1)(J_i + 2)(J_i + 3)}{6} - 1$$

Les conditions de robustesse s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - \left(1 + \frac{u-v}{k}\right) \bar{X}_{i,p,t} & \begin{aligned} & u = 1, \dots, J_i, \\ & v = u, \dots, J_i + 1, \\ & p = u, \dots, v \text{ et } p \neq J_i + 1 \end{aligned} \\ \bullet \quad & \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} \geq (J_i + 1 - u) d_{i,t} & u = 1, \dots, J_i \end{aligned}$$

Il faut souligner que pour cette classe de problème, la complexité est notablement réduite par rapport au problème général.

IV.2.3.3 Conclusion

De manière générale, la complexité induite pour des problèmes de grande dimension (notamment lorsque les gammes comportent de nombreuses opérations ou lorsque une macro-période regroupe un nombre important de périodes élémentaires) rend difficile la mise en œuvre pratique de ces conditions de robustesse. Le paragraphe suivant propose une approche nécessaire pour le partage des ressources qui diminue la complexité de la démarche.

IV.2.4 Partage des ressources : approche nécessaire

Dans l'approche précédente, les états agrégés robustes $S_{i,j,t}$ et le partage de la capacité des ressources (par l'intermédiaire de $\bar{X}_{i,j,t}$) sont déterminés simultanément.

Le principe de base de l'approche présentée dans ce paragraphe est identique à celui mis en œuvre dans l'approche suffisante : il s'agit de travailler sur une répartition détaillée particulière de la capacité établie sur la base de la répartition calculée par le niveau agrégé. Mais dans l'approche nécessaire, le partage de la capacité des ressources et la détermination des états agrégés robustes sont réalisés séquentiellement.

IV.2.4.1 Expression des conditions de robustesse dans l'approche nécessaire

Dans cette approche, le niveau agrégé doit donc être décomposé en 2 sous-niveaux (cf Figure IV.12) :

- Pour chaque macro-période t , le sous-niveau 1 répartit la capacité agrégée des ressources entre les différentes opérations qui utilisent ces ressources. On en déduit les grandeurs $\{\bar{X}_{i,j,t}^*, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ qui correspondent au nombre maximum de produit i pouvant subir l'opération j dans la macro-période t . Ces paramètres sont alors exploités pour établir une répartition particulière de la capacité détaillée. Comme dans l'approche précédente, cette répartition consiste à partager la capacité $cap_{r,t,\tau}$ proportionnellement au facteur $\bar{X}_{i,j,t}^*/CAP_{r,t}$. Ceci mène alors aux données détaillées $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ suivantes :

$$\bar{x}_{i,j,t,\tau}^* = \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} \quad \begin{array}{l} r = 1, \dots, R, (i, j) \in O_r, \\ t = 1, \dots, T, \tau = 1, \dots, k \end{array} \quad (\text{IV.18})$$

Cette pré-répartition des capacités introduit donc un découplage entre les produits qui peuvent ainsi être planifiés indépendamment les uns des autres. De ce fait, on se ramène à un contexte analogue à celui de l'étude préliminaire. Il est alors possible de calculer les paramètres agrégés $Q_{i,u,v,t}$ intervenant dans les conditions de robustesse. Ces paramètres qui sont liés à la répartition définie par le sous-niveau 1 sont alors transmis au sous-niveau 2.

- Le sous-niveau 2 exploite les paramètres $Q_{i,u,v,t}$ qui lui sont transmis pour déterminer un plan agrégé robuste pour chaque produit i , compatible avec la répartition de capacité imposée.

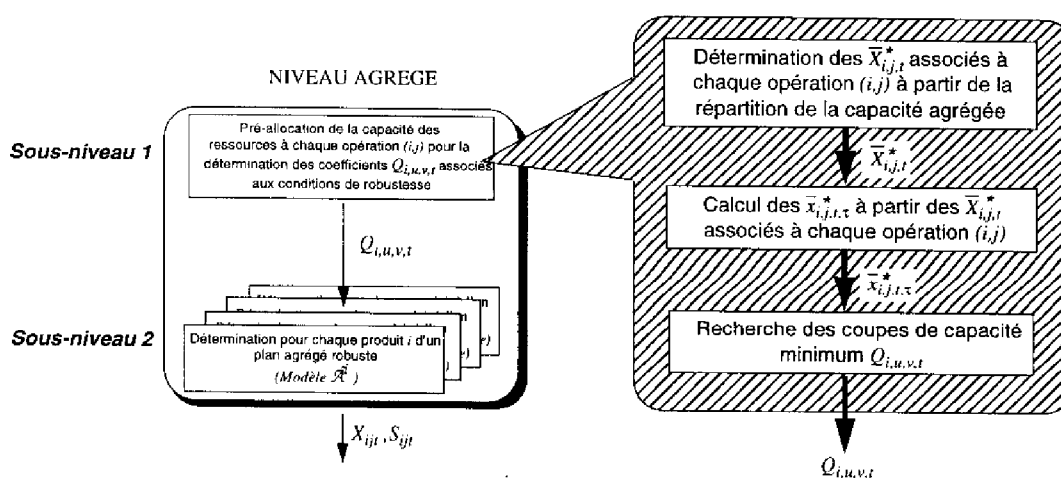


Figure IV.12: Processus de décision au sein du niveau agrégé

Dans ces conditions, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 3 : Conditions suffisantes de robustesse

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si pour tout $i = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$,

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1, \\ \forall (u, v) \in \Delta^{i,t} \end{array}$$

avec
$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right)$$

Preuve :

La capacité des coupes donnée par la relation (V.4) devient :

$$C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{CAP_{r,t}} cap_{r,t,\tau} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

La répartition étant définie au niveau agrégé, il est possible d'appliquer l'algorithme de recherche de la coupe de capacité minimum, d'où :

$$C^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

avec
$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} cap_{r,t,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{CAP_{r,t}} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right)$$

d'où on déduit par application du lemme 1 :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1 \end{array} \quad (IV.19)$$

L'application de la propriété 6 permet de réduire ces conditions à tout couple $(u, v) \in \Delta^{i,t}$.
□

IV.2.4.2 Modèle du sous-niveau 2

Au sein du sous-niveau 2, un modèle agrégé robuste est associé à chaque produit i . Ce modèle est identique au modèle \mathcal{A}^{*i} obtenu dans l'étude préliminaire et garantit l'existence d'une désagrégation au niveau inférieur.

Ce processus de planification agrégée assure une réduction notable de la complexité des modèles associés à ce niveau tout en garantissant la robustesse des décisions agrégées. Il faut cependant noter qu'une telle procédure peut, dans certains cas, conduire à une répartition de la capacité ne permettant pas de construire des plans robustes faisables, justifiant l'aspect nécessaire du partage des ressources par cette approche. En effet, la répartition fournie par le sous-niveau 1 est déterminée de façon grossière, par des procédures nécessitant peu d'effort de calcul. Aussi, la compatibilité de cette répartition avec les contraintes du niveau détaillé sera seulement déterminée par la faisabilité du modèle du sous-niveau 2 (grâce aux conditions de robustesse).

IV.2.4.3 Modèle du sous-niveau 1

Le choix de la procédure de répartition des capacités associée au premier sous-niveau présente une certaine importance. Dans ce cadre, différentes heuristiques peuvent être combinées.

- Procédures de base

La procédure la plus simple consiste à résoudre le modèle agrégé \mathcal{A} présenté dans le paragraphe III.3.3. On affecte alors à $\bar{X}_{i,j,t}^*$ la valeur des décisions $X_{i,j,t}$, soit $\bar{X}_{i,j,t}^* = X_{i,j,t}$. Les termes $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ sont ensuite calculés par la relation (IV.18). L'inconvénient est qu'une partie de la capacité agrégée $CAP_{r,t}$ peut ne pas être allouée (forme inégalité de la contrainte \mathcal{A}_3). Compte tenu de la vision trop grossière du problème par ce modèle, la totalité de la capacité peut s'avérer indispensable pour l'élaboration d'un plan robuste.

Pour pallier cette difficulté, une solution consiste à résoudre le modèle agrégé \mathcal{A}' (cf §III.3.3) dans lequel apparaît explicitement la variable $\bar{X}_{i,j,t}$. On affecte alors $\bar{X}_{i,j,t}$ à $\bar{X}_{i,j,t}^*$ et on déduit ensuite $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ par l'intermédiaire de la relation (IV.18). Cependant, cette méthode présente l'inconvénient d'affecter "l'excédent" de capacité de manière non déterministe (pas de critère sur $\bar{X}_{i,j,t}$ dans la fonction objectif).

Afin d'exploiter plus efficacement cet "excédent" de capacité, une solution peut être de le partager équitablement entre chacune des opérations qui utilisent la ressource. Dans ce cas, un modèle \mathcal{A} est résolu et la donnée $\bar{X}_{i,j,t}^*$ est alors fournie par la relation suivante :

$$\forall (i,j) \in O_r, \quad \bar{X}_{i,j,t}^* = X_{i,j,t} + w_{i,j,r} \left(\frac{CAP_{r,t} - \sum_{(i,j) \in O_r} w_{i,j,r} X_{i,j,t}}{Card(O_r)} \right) \quad (IV.20)$$

- Procédures basées sur une prise en compte partielle des contraintes détaillées

Ces heuristiques peuvent aussi être améliorées en déterminant des valeurs $X_{i,j,t}$ tenant compte dans une moindre mesure, des contraintes détaillées et notamment de la notion de délai de fabrication.

Pour cela, une méthode peut consister à ne considérer au sein du modèle \mathcal{A} qu'une portion $\alpha_{i,j,t}$ de la capacité $CAP_{r,t}$ ($\alpha_{i,j,t} = 80\%$, par exemple). Cette action surcontraint le problème et génère une solution qui anticipe la production. Cette anticipation peut d'une certaine manière compenser la non-prise en compte des délais de fabrication. Cependant, ces $\alpha_{i,j,t}$ résultent d'estimations faites a priori et une évaluation trop simpliste peut conduire à des infaisabilités.

Une approche plus analytique du problème est de considérer que les capacités et les demandes détaillées restent constantes au cours de la macro-période. On obtient ainsi des valeurs $d_{i,t}$ et $cap_{r,t}$ telles que :

$$d_{i,t} = \frac{D_{i,t}}{k} \quad \text{et} \quad cap_{r,t} = \frac{CAP_{r,t}}{k}$$

On utilise alors la deuxième formulation du modèle \mathcal{A} dans lequel on ajoute les conditions de robustesse de la propriété 9, construites à partir des données détaillées précédentes. Les décisions $X_{i,j,t}$ sont alors récupérées pour calculer les données $\bar{X}_{i,j,t}^*$ selon la relation (IV.20). Ainsi, bien que les capacités et demandes réelles ne correspondent pas aux valeurs $d_{i,t}$ et $cap_{r,t}$ utilisées, les conditions générées prennent en compte dans une certaine mesure, la notion de délai de fabrication.

Il est encore possible d'affiner cette heuristique en considérant la répartition des demandes au cours de la macro-période, mais au prix d'un effort de calcul plus important.

IV.3 CONCLUSION

Cette analyse théorique des interactions entre niveaux a permis d'exprimer sous forme de conditions analytiques des propriétés de robustesse du niveau agrégé.

Dans le cas où les produits ne sont pas couplés par les ressources, ces conditions sont des conditions nécessaires et suffisantes. Intégrées sous forme de contraintes dans le modèle agrégé, ces conditions garantissent que le plan agrégé peut être suivi d'une désagrégation au niveau inférieur.

Ces résultats sont ensuite étendus au problème général pour lequel la fabrication des produits nécessite l'utilisation de ressources communes. Des conditions suffisantes de robustesse sont ainsi établies. Celles-ci sont basées sur une répartition particulière des capacités. Selon la méthode employée pour déterminer cette répartition, les conditions de robustesse sont successivement mises en oeuvre dans le cadre d'une approche suffisante et d'une approche nécessaire. Dans les deux cas, ces conditions assurent l'existence d'au moins une désagrégation au niveau inférieur.

Pour permettre l'analyse de la robustesse dans le cas du problème général, la démarche présentée dans ce chapitre s'appuie sur une modélisation "sur-contrainte" du niveau supérieur. Le chapitre suivant montre comment les niveaux inférieurs peuvent s'affranchir de ces hypothèses d'étude et utiliser l'autonomie ainsi obtenue.

- ANNEXES AU CHAPITRE IV -
 CARACTÉRISATION DES COUPES SIGNIFICATIVES

ANNEXE 1 - Propriétés structurelles des coupes significatives

La propriété 1 s'intéresse à la réduction du réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t}$. Elle montre que l'analyse des coupes significatives peut être conduite sur le réseau équivalent $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ illustré par la figure IV.5.

Propriété 1 :

Dans une coupe (Y, \bar{Y}) significative, les sommets $Z_{j,\tau}$ et $Z'_{j,\tau}$ sont tels que :

- (a) $Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \Leftrightarrow Z'_{j,\tau} \in \bar{Y}$
 (b) $Z_{j,\tau} \in Y \Leftrightarrow Z'_{j,\tau} \in Y$

Preuve :

- (a) • Montrons que $Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z'_{j,\tau} \in \bar{Y}$ dans une coupe significative.

Supposons que $Z_{j,\tau} \in \bar{Y}$ et $Z'_{j,\tau} \in Y$. La coupe (Y, \bar{Y}) contient alors l'arc $(Z_{j\tau-1}, Z'_{j,\tau})$ de capacité infinie (cf Table IV.1). Par conséquent, $\mathcal{C}(Y, \bar{Y}) = \infty$. La coupe (Y, \bar{Y}) est non significative d'après la définition 4 et donc $Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z'_{j,\tau} \in \bar{Y}$ dans une coupe significative.

- Montrons que $Z'_{j,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y}$ dans une coupe significative.

Soit une coupe (V, \bar{V}) telle que $Z_{j,\tau} \in V$ et $Z'_{j,\tau} \in \bar{V}$.

Soit une coupe (Y, \bar{Y}) telle que $Y = V - Z_{j,\tau}$ et $\bar{Y} = \bar{V} \cup Z_{j,\tau}$ (et donc $Z_{j,\tau} \in \bar{Y}$ et $Z'_{j,\tau} \in \bar{Y}$).

Tout arc (x, y) tel que $x = Z_{j,\tau}$ possède :

- soit $x \in \bar{V}$ et donc $(x, y) \in (V, \bar{V})$ mais $(x, y) \notin (Y, \bar{Y})$,
- soit $x \in V$ et donc $(x, y) \notin (V, \bar{V})$ et $(x, y) \notin (Y, \bar{Y})$.

Par conséquent, $(Y, \bar{Y}) \subset (V, \bar{V})$ d'où il vient que $\mathcal{C}(Y, \bar{Y}) \leq \mathcal{C}(V, \bar{V})$. On déduit alors que $Z'_{j,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y}$ dans une coupe significative.

- Les deux points précédents conduisent à la propriété 1-(a).

- (b) Evident compte tenu de la propriété 1-(a).

□

Les propriétés 2 et 3 traitent de la "forme" des coupes.

Propriété 2 :

Dans une coupe (Y, \bar{Y}) significative, les sommets $Z_{j,\tau}$ sont tels que :

- (a) $Z_{j,\theta} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \quad \forall \tau \leq \theta$
 (b) $Z_{j,\theta} \in Y \Rightarrow Z_{j,\tau} \in Y \quad \forall \tau \geq \theta$

Preuve :

Si $Z_{j,\theta} \in \bar{Y}$ et $Z_{j,\theta-1} \in Y$, alors la coupe (Y, \bar{Y}) contient l'arc $(Z_{j\theta-1}, Z_{j,\theta})$ de capacité infinie (cf Propriété 1 et Table IV.1). Par conséquent, $\mathcal{C}(Y, \bar{Y}) = \infty$. Compte tenu de la définition 4, (Y, \bar{Y}) est donc non significative. On en déduit que dans une coupe significative :

- d'une part, $Z_{j,\theta} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\theta-1} \in \bar{Y}$. Par induction pour $\forall \tau \leq \theta$, on tire la propriété 2-(a).
- d'autre part, $Z_{j,\theta} \in Y \Rightarrow Z_{j,\theta+1} \in Y$. Par induction pour $\forall \tau \geq \theta$, on tire la propriété 2-(b).

□

Propriété 3 :

Dans une coupe (Y, \bar{Y}) significative, les sommets $Z_{j,\tau}$ sont tels que :

- (a) $Z_{p,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau+j-p} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq p$
 (b) $Z_{p,\tau} \in Y \Rightarrow Z_{j,\tau-p+j} \in Y \quad \forall j \leq p$

Preuve :

Soit une coupe (Y, \bar{Y}) vérifiant la propriété 2.

Soit $\theta = \max(\tau \mid Z_{j,\tau} \in \bar{Y})$ et $\mu = \max(\tau \mid Z_{j+1,\tau} \in \bar{Y})$.

Si $\theta \geq \mu$, alors il existe $A = \{Z_{j,\tau} \mid \tau = \mu, \dots, \theta\}$ avec $A \subset \bar{Y}$. Soit une coupe (V, \bar{V}) telle que :

$$V = Y \cup A \text{ et } \bar{V} = \bar{Y} - A.$$

Tout arc (x, y) tels que $y \in A$ possède :

- soit $x \in A$ (par exemple $(Z_{j,\theta-1}, Z_{j,\theta})$) et donc $(x, y) \notin (Y, \bar{Y})$ et $(x, y) \notin (V, \bar{V})$,
- soit $x \in Y$ (par exemple $(Z_{j-1,\theta}, Z_{j,\theta})$) et donc $(x, y) \in (Y, \bar{Y})$ mais $(x, y) \notin (V, \bar{V})$.

Par conséquent, $(V, \bar{V}) \subset (Y, \bar{Y})$ d'où il vient que $\mathcal{C}(V, \bar{V}) \leq \mathcal{C}(Y, \bar{Y})$ et donc que (Y, \bar{Y}) est non significative. On en déduit que dans une coupe significative :

- d'une part, $Z_{p,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{p+1,\tau+1} \in \bar{Y}$. Par induction pour $\forall j \geq p$, on tire la propriété 3-(a).
- d'autre part, $Z_{p,\tau} \in Y \Rightarrow Z_{p-1,\tau-1} \in Y$. Par induction pour $\forall j \leq p$, on tire la propriété 3-(b).

□

Les propriétés 4 et 5 permettent de caractériser les coupes. Toute coupe (Y, \bar{Y}) du réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ peut être partitionnée en 3 sous-ensembles d'arcs :

$$(Y, \bar{Y}) = U \cup V \cup W \quad \text{d'où} \quad \mathcal{C}^{i,t}(Y, \bar{Y}) = \mathcal{C}^{i,t}(U) \cup \mathcal{C}^{i,t}(V) \cup \mathcal{C}^{i,t}(W)$$

avec : $U = \{(O, Z_{j,0}) \mid (O, Z_{j,0}) \in (Y, \bar{Y})\}$
 $V = \{(Z_{j,k}, M) \mid (Z_{j,k}, M) \in (Y, \bar{Y})\}$
 $W = (Y, \bar{Y}) - U - V$

Propriété 4 :

Soit $u = \min(j \mid Z_{j,0} \in \bar{Y})$ et $v = \min(j \mid Z_{j,k} \in \bar{Y})$. Dans une coupe (Y, \bar{Y}) significative, on a :

- (a) $u \leq v$ et $v - u \leq k$
 (b) $\mathcal{C}^{i,t}(U) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1}$ et (c) $\mathcal{C}^{i,t}(V) = \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$

Preuve :

- (a) Par définition de v , $Z_{v,k} \in \bar{Y}$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne que $Z_{v,k} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq v, \forall \tau \leq k + j - v$. En particulier, $Z_{v,0} \in \bar{Y}$. Or, pour être en accord avec la définition de u , ceci implique que $u \leq v$.

Par définition de u , $Z_{u,0} \in \bar{Y}$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne que $Z_{u,0} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq u, \forall \tau \leq j - u$. En particulier, pour $\tau = k$, on a $Z_{j,k} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq k + u$. Par conséquent, pour qu'une coupe existe, il faut nécessairement que $Z_{v-1,k} \in Y$ et donc que $v - 1 < k + u$ soit encore $v \leq k + u$.

- (b) Par définition de u , $Z_{u,0} \in \bar{Y}$ et $Z_{j,0} \in Y \quad \forall j < u$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne que $Z_{u,0} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,0} \in \bar{Y} \quad \forall j > u$. Comme $O \in Y$, alors $(O, Z_{j,0}) \in U \quad \forall j \geq u$. D'après la table IV.1, l'arc $(O, Z_{j,0})$ a pour capacité $S_{i,j,t-1}$. Il vient alors la propriété 4-(a).

- (c) Par définition de v , $Z_{v,k} \in \bar{Y}$ et $Z_{j,k} \in Y \quad \forall j \leq v - 1$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne que $Z_{v,k} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,k} \in \bar{Y} \quad \forall j > v$. Comme $M \in \bar{Y}$, alors $(Z_{j,k}, M) \in V \quad \forall j \leq v - 1$. D'après la propriété 1 et la table IV.1, l'arc $(Z_{j,k}, M)$ a pour capacité $S_{i,j,t}$. Il vient alors la propriété 4-(b).

□

Propriété 5 :

Soit u et v vérifiant la propriété 4 et une matrice L de dimension $(J_i + 1 \times k)$ dont les composantes $l_{j,\tau}$ sont telles que :

- $l_{1,\tau} = 1$ lorsque un arc de type $(Z_{0,0}, Z_{1,\tau}) \in W$,
- $l_{j,\tau} = 1$, $j = 2, \dots, J_i$ lorsque un arc de type $(Z_{j-1,\tau-1}, Z_{j,\tau}) \in W$,
- $l_{J_i+1,\tau} = 1$ lorsque un arc de type $(Z_{J_i,\tau}, Z_{J_i+1,k}) \in W$,
- $l_{j,\tau} = 0$ sinon.

Dans une coupe (Y, \bar{Y}) significative, on a les relations suivantes :

$$(a) \quad l_{j,\tau} = 1 \Rightarrow u \leq j \leq v \text{ et } j - u + 1 \leq \tau \leq k - v + j,$$

$$(b) \quad l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau-p+j} = 0 \quad \forall j \neq p,$$

$$(c) \quad l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau+j-p+1} = 1 \text{ avec } j \text{ tel que } p \leq j \leq v.$$

$$(d) \quad C^{i,t}(W) = \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau}.$$

Preuve :

- (a) Par définition de u , $Z_{u,0} \in \bar{Y}$ et $Z_{u-1,0} \in Y$. Par définition de v , $Z_{v,k} \in \bar{Y}$ et $Z_{v-1,k} \in Y$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne :

- d'une part, $Z_{u,0} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq u, \forall \tau \leq j - u$ et $Z_{v,k} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\tau} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq v, \forall \tau$,

- d'autre part, $Z_{u-1,0} \in Y \Rightarrow Z_{j,\tau} \in Y \quad \forall j < u, \forall \tau$ et $Z_{v-1,k} \in Y \Rightarrow Z_{j,\tau} \in Y \quad \forall j < v, \forall \tau \geq k - v + j + 1$

En conséquence, tout arc qui n'a pas au moins une de ces extrémités telle que $u \leq j \leq v$ et $j - u + 1 \leq \tau \leq k - v + j$ possède ses deux extrémités, soit dans Y , soit dans \bar{Y} et ne peut donc appartenir à (Y, \bar{Y}) . On en déduit ainsi la propriété 5-(a).

- (b) Si $l_{p,\tau} = 1$ alors $Z_{p-1,\tau-1} \in Y$ et $Z_{p,\tau} \in \bar{Y}$.

- La combinaison des propriétés 2 et 3 donne $Z_{p,\tau} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\theta} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq p, \forall \theta \leq \tau - p + j$. Par conséquent, tout arc $(Z_{j-1,\tau-p+j-1}, Z_{j,\tau-p+j})$ tel que $j > p$ possède ces deux extrémités dans \bar{Y} et ne peut donc appartenir à W .

- La combinaison des propriétés 2 et 3 donne $Z_{p-1,\tau-1} \in Y \Rightarrow Z_{j,\theta} \in Y \quad \forall j \leq p-1, \forall \theta \geq \tau - p + j$. Par conséquent, tout arc $(Z_{j-1,\tau-p+j-1}, Z_{j,\tau-p+j})$ tel que $j < p-1$ possède ces deux extrémités dans Y et ne peut donc appartenir à W .

Ces deux points conduisent ainsi à la propriété 5-(b).

- (c) Si $l_{p,\tau} = 1$ alors $Z_{p-1,\tau-1} \in Y$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne $Z_{p-1,\tau-1} \in Y \Rightarrow Z_{j,\theta} \in Y \quad \forall j \leq p-1, \forall \theta \geq \tau - p + j$ et notamment $Z_{p-1,\tau} \in Y$.

Par définition de v , $Z_{v,k} \in \bar{Y}$. La combinaison des propriétés 2 et 3 donne $Z_{v,k} \in \bar{Y} \Rightarrow Z_{j,\mu} \in \bar{Y} \quad \forall j \geq v, \forall \mu$ et notamment $Z_{v,\tau+v-p+1} \in \bar{Y}$.

Par conséquent, il existe un j , $p \leq j \leq v$ tel que l'arc $(Z_{j-1,\tau+j-p}, Z_{j,\tau+j-p+1}) \in W$ et donc une composante $l_{j,\tau+j-p+1} = 1$.

- (d) Les propriétés 1 et 2 montrent qu'une coupe significative ne comporte aucun arc du type $(Z_{j,\tau-1}, Z_{j,\tau})$ (arcs horizontaux dans $\mathcal{R}^{i,t}$). Par conséquent, la matrice L est suffisante pour caractériser les arcs de W . L'expression de la capacité de W est alors évidente compte tenu de la définition de L .

□

ANNEXE 2 - Propriétés numériques des coupes significatives

L'analyse structurelle des coupes du réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ a permis de dégager un sous-ensemble de coupes caractérisées par un triplet (u, v, L) et dont la capacité est donnée par la relation (IV.4).

Propriété 6 :

Une coupe est "numériquement" significative si :

$$C^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

où

$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right)$$

Preuve :

Pour un couple (u, v) donné, chaque capacité $C^{i,t}(u, v, L)$ se distingue seulement par le terme $C^{i,t}(W)$ qui dépend du paramètre L . Par ailleurs, ce terme ne fait intervenir que des données du problème (capacités et/ou demandes). Par conséquent, pour chaque couple (u, v) , il est possible d'évaluer les terme $C^{i,t}(W)$ pour tout $L \in \mathcal{L}_{u,v}$ afin de déterminer celui qui possède la valeur minimale. On note cette valeur $Q_{i,u,v,t}$:

$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \quad (\text{IV.21})$$

□

La combinatoire importante associée à la génération des matrices L empêche évidemment une énumération explicite de toutes les coupes. L'algorithme de FORD & FULKERSON (cf [45] p 163) pourrait aussi être utilisé pour déterminer le flot maximum (et donc la coupe minimum) dans chaque sous-graphe délimité par u et v . Cependant, compte tenu de la structure particulière du réseau, un algorithme spécifique est mis en oeuvre pour résoudre ce problème.

◇ Algorithme de recherche de la coupe de capacité minimum pour tout couple (u, v) de tout réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$

```

pour i variant de 1 a N faire
  pour t variant de 1 a T faire
    {
      pour u variant de 1 a J_i faire
        pour v variant de u a J_i + 1 faire
           $\pi_{u,v} = 0$ 

          pour  $\tau$  variant de 1 a k faire
            pour u variant de 1 a J_i faire
               $\pi_{u,u} = \pi_{u,u} + \bar{x}_{i,u,t,\tau}^*$ 
              pour j variant de u + 1 a  $\min(J_i + 1, u + k - \tau)$  faire
                 $\pi_{u,j} = \min(\pi_{u,j-1}, \pi_{u,j} + \bar{x}_{i,j,t,\tau+j-u}^*)$ 

            pour u variant de 1 a J_i faire
              pour v variant de u a J_i + 1 faire
                 $Q_{i,u,v,t} = \pi_{u,v}$ 
    }

```

□

L'idée est de transformer le problème de recherche d'une coupe minimum en un problème de recherche d'un chemin de longueur minimum. Reprenant les principes utilisés classiquement dans les algorithmes de recherche de chemins minimaux (par exemple, algorithme de MOORE-DIJKSTRA),

la procédure est adaptée aux graphes considérés. En effet, dans le souci d'obtenir une efficacité maximale, cet algorithme tire parti de leur structure en treillis. Ceci évite la manipulation de nombreuses variables (décomposition en étapes) et la gestion de liste de sommets (connaissance implicite de la liste des successeurs de chaque sommet, recherche de la longueur minimale sans mémorisation du chemin). Ces considérations amènent à l'algorithme suivant dont la complexité peut être considérée comme négligeable devant celle du problème d'optimisation.

La propriété 6 permet donc d'écrire les relations (IV.4) sous la forme suivante :

$$C^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

Dans la suite, une coupe significative est caractérisée simplement par un couple (u, v) et le paramètre $Q_{i,u,v,t}$ correspondant. On ne se préoccupe donc plus de la définition structurelle de la coupe dans le réseau, et on s'intéresse seulement à la valeur de sa capacité .

Une analyse plus globale de la capacité $C^{i,t}(u, v)$ définie par la relation (IV.6) montre qu'il est éventuellement possible de réduire le nombre de couple (u, v) à considérer dans chaque ensemble $\Delta^{i,t}$.

Propriété 7 :

Soit deux coupes significatives $((u, v), Q_{i,u,v,t})$ et $((\alpha, \gamma), Q_{i,\alpha,\gamma,t})$, respectivement de capacité $C^{i,t}(u, v)$ et $C^{i,t}(\alpha, \gamma)$ telles que $u \geq \alpha$ et $v \leq \gamma$. La coupe $((\alpha, \gamma), Q_{i,\alpha,\gamma,t})$ est non significative si :

$$Q_{i,\alpha,\gamma,t} \geq Q_{i,u,v,t}$$

Preuve :

D'après la relation (IV.6), la capacité de chacune de ces coupes s'écrit :

$$\begin{aligned} \bullet \quad C^{i,t}(u, v) &= \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + Q_{i,u,v,t} \\ \bullet \quad C^{i,t}(\alpha, \gamma) &= \sum_{j=\alpha}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{\gamma-1} S_{i,j,t} + Q_{i,\alpha,\gamma,t} \\ &= \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + Q_{i,\alpha,\gamma,t} + \sum_{j=\alpha}^{u-1} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=v}^{\gamma-1} S_{i,j,t} \quad (\text{car } u \geq \alpha \text{ et } v \leq \gamma) \end{aligned}$$

La coupe $C^{i,t}(\alpha, \gamma)$ est non significative si $C^{i,t}(\alpha, \gamma) \geq C^{i,t}(u, v)$ soit encore si :

$$Q_{i,\alpha,\gamma,t} + \sum_{j=\alpha}^{u-1} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=v}^{\gamma-1} S_{i,j,t} \geq Q_{i,u,v,t}$$

Comme $\sum_{j=\alpha}^{u-1} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=v}^{\gamma-1} S_{i,j,t} \geq 0$, la coupe $C^{i,t}(\alpha, \gamma)$ est non significative si :

$$Q_{i,\alpha,\gamma,t} \geq Q_{i,u,v,t}$$

□

La mise en oeuvre de la propriété s'effectue en deux phases :

1. Pour u fixé et pour $v = u, \dots, J_i + 1$, on élimine tout terme $Q_{i,u,\gamma,t}$ tel que $\forall \gamma > v, Q_{i,u,\gamma,t} \geq Q_{i,u,v,t}$. Par conséquent, les termes restants pour un u donné forment une suite décroissante suivant les valeurs croissantes de v .
2. Pour v fixé et pour $u = 1, \dots, v$, on élimine tout terme $Q_{i,\alpha,v,t}$ tel que $\forall \alpha < u, Q_{i,\alpha,v,t} \geq Q_{i,u,v,t}$.

Par conséquent, les termes restant pour un v donné forment une suite décroissante suivant les valeurs décroissantes de u .

Compte tenu de cette procédure, les paramètres de la forme $Q_{i,j,j,t}$ ne peuvent en aucun cas être éliminés (ce qui est normal puisqu'ils sont associés aux contraintes de capacité $\mathcal{A}_3^i : Q_{i,j,j,t} = \bar{X}_{i,j,t}^*$).

ANNEXE 3 - Étude de cas particuliers

La propriété 8, liée à la robustesse des décisions agrégées est établie dans le cas où les produits sont découplés vis à vis des ressources.

Propriété 8 :

Dans la macro-période 1, les conditions de robustesse associées à un produit i sont :

$$\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,1} \leq \min_{\substack{u=1,\dots,v \\ (u,v) \in \Delta^{i,1}}} \left(Q_{i,u,v,1} - D_{i,1} + \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,0} \right) \quad v = 1, \dots, J_i$$

Preuve :

A partir de l'expression des conditions de robustesse donnée par le théorème 1, on déduit pour la macro-période 1 :

$$\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,1} \leq Q_{i,u,v,1} - D_{i,1} + \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,0} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \quad v = 1, \dots, J_i \\ (u, v) \in \Delta^{i,1} \end{array}$$

soit encore :

$$\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,1} \leq \min_{\substack{u=1,\dots,v \\ (u,v) \in \Delta^{i,1}}} \left(Q_{i,u,v,1} - D_{i,1} + \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,0} \right) \quad v = 1, \dots, J_i$$

□

La propriété 9 est établie dans le cadre du problème général traité par une approche suffisante vis à vis du partage des ressources.

Propriété 9 :

Lorsque les capacités et demandes détaillées sont constantes au cours d'une macro-période t , les conditions de robustesse associées à un produit i sont :

- $\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - \left(1 + \frac{u-v}{k} \right) \bar{X}_{i,p,t} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1, \\ p = u, \dots, v \text{ et } p \neq J_i + 1 \end{array}$
- $\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} \geq (J_i + 1 - u) d_{i,t} \quad u = 1, \dots, J_i$

Preuve :

Soit un réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ pour lequel $\forall j = 1, \dots, J_i, \quad \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* = \bar{x}_{i,j,t}^* \quad \forall \tau = 1, \dots, k$

Soit un couple (u, v) donné et p ($u \leq p \leq v$) le niveau tel que $\bar{x}_{i,p,t}^* = \min_{u \leq j \leq v} (\bar{x}_{i,j,t}^*)$.

Soit une coupe caractérisée par le triplet (u, v, L_j) où L_j est une matrice dont les $k - v + u$ éléments non nuls se situent sur la ligne j (coupe "horizontale"). Soit une coupe quelconque caractérisée par le triplet (u, v, L) .

Par définition de p , pour tout $\tau = 1, \dots, k$ et tout $j = 1, \dots, J_i$:

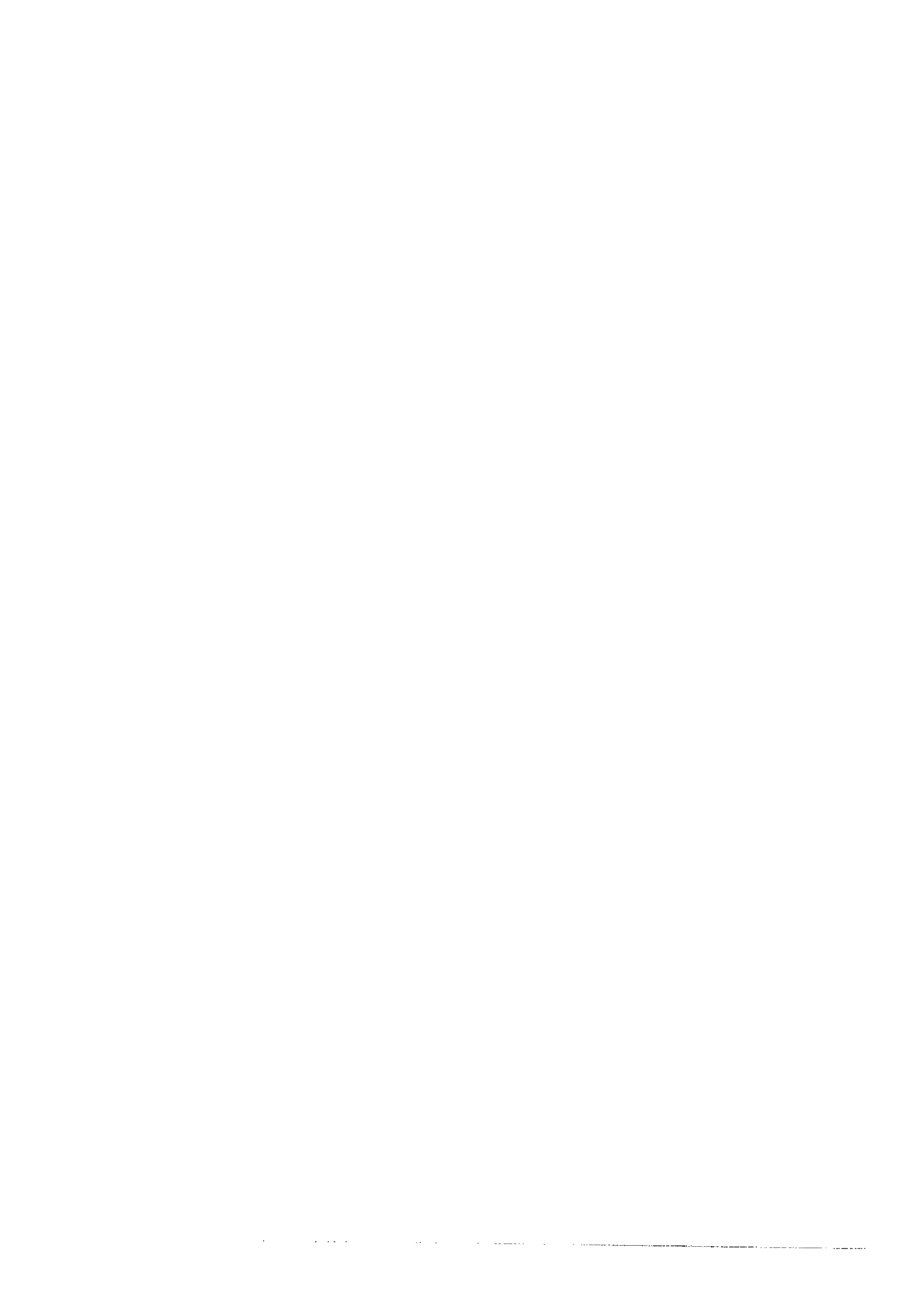
$$\begin{aligned}
 & l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t}^* \geq l_{p,\tau} \bar{x}_{i,p,t}^* \\
 & \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t}^* \geq (k - v + u) \bar{x}_{i,p,t}^* \\
 & \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t}^* \geq \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} (k - v + u) \bar{x}_{i,p,t}^* \\
 & C^{i,t}(u, v, L) \geq C^{i,t}(u, v, L_p)
 \end{aligned}$$

Toute coupe (u, v, L) est donc non significative devant une coupe (u, v, L_p) .

Dans le cas où le niveau p n'est pas connu, il faut donc considérer les $(v - u + 1)$ coupes caractérisées par les triplets (u, v, L_j) , ($u \leq j \leq v$).

La mise en œuvre de la relation (IV.13) sur cet ensemble de coupes significatives conduit aux conditions de robustesse de la propriété 9.

□



- Chapitre V -

COHÉRENCE DES DÉCISIONS DÉTAILLÉES

RÉSUMÉ

L'objectif du chapitre V est de construire un modèle de désagrégation cohérent. L'élaboration de ce modèle est présentée en plusieurs phases.

La section V.1 définit la notion d'état détaillé cohérent et pose les bases de l'analyse réalisée dans la suite.

La section V.2 présente d'abord le problème de cohérence dans le cadre d'un "processus statique de désagrégation". Des conditions nécessaires et suffisantes de cohérence sont établies dans le cadre du problème général.

La section V.3 s'intéresse à la cohérence dans le cadre d'un "processus dynamique de désagrégation". Une analyse préliminaire est effectuée pour un problème dans lequel les produits sont découplés vis à vis des ressources. L'exploitation des outils développés pour l'étude de la robustesse mène à l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes de cohérence. Ces résultats sont ensuite étendus au problème général et permettent de proposer des conditions suffisantes de cohérence.

V.1 DÉMARCHE DE L'ÉTUDE

L'objectif de ce chapitre est de construire des modèles de désagrégation cohérents. Deux types de processus de désagrégation sont considérés : un processus statique et un processus dynamique (cf §III.3.2.4). Des conditions sont établies pour assurer la cohérence des décisions de ces deux types de processus.

Les conditions de cohérence sont élaborées par une analyse analogue à celle réalisée pour la robustesse. De ce fait, un certain nombre de résultats obtenus dans le chapitre précédent sont repris dans les paragraphes suivants.

V.1.1 État détaillé cohérent

D'après la définition 2 (cf Chapitre II), les décisions du niveau détaillé sont cohérentes si elles sont compatibles avec les décisions du niveau supérieur. Plus précisément, on peut définir la notion d'état détaillé cohérent de la façon suivante :

Définition 5 : Etat détaillé cohérent

Un état détaillé $\{s_{i,j,t,\tau-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est dit cohérent si le modèle détaillé restreint aux périodes (t, τ) à (t, k) admet une solution et s'il est possible d'atteindre l'état agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ imposé par le niveau supérieur.

La démarche d'analyse mise en œuvre pour la cohérence est similaire à la démarche proposée pour l'étude de la robustesse. Elle consiste à caractériser l'ensemble des états détaillés $\{s_{i,j,t,\tau-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ admissibles vis à vis d'une part, des contraintes détaillées relatives aux périodes (t, τ) à (t, k) et d'autre part, des décisions $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ imposées par le niveau supérieur.

En supposant que l'état détaillé $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est cohérent, la cohérence de l'état détaillé $\{s_{i,j,t,\tau-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est assurée si celui-ci permet de satisfaire les contraintes du modèle détaillé restreint à la période (t, τ) et d'atteindre l'état détaillé cohérent $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i\}$.

Le modèle de désagrégation $\mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f}$ (cf III.3.4) est défini sur un horizon de décision (t, τ_d) à (t, τ_f) . Il comprend donc l'ensemble des contraintes détaillées associées à cet horizon et notamment, les équations d'état liant $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ et $\{s_{i,j,t,\tau-1} \mid j = 1, \dots, J_i\}$. Par conséquent, si l'état détaillé $\{s_{i,j,t,\tau_f} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est cohérent, alors les états $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f - 1\}$ le sont aussi.

Il est ainsi possible de limiter l'horizon d'étude de la cohérence aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) . La figure V.1 schématise ces principes.

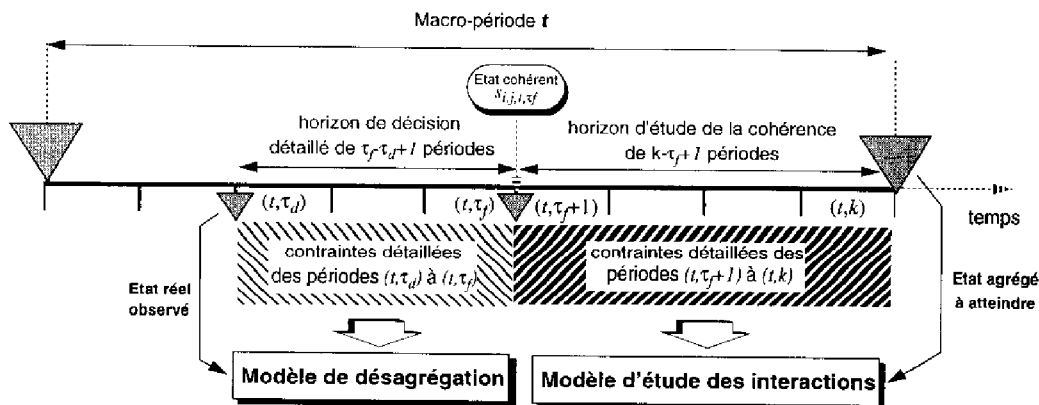


Figure V.1: Modèle de désagrégation et modèle d'étude des interactions

V.1.2 Modèle d'étude des interactions

Compte tenu de ce qui précède, l'analyse de la cohérence peut donc être réalisée sur un modèle des interactions \mathcal{I}^{t,τ_f} construit à partir du modèle \mathcal{G} réduit aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) auquel sont ajoutées les relations d'agrégation/désagrégation (III.2) de la macro-période t , nécessaires pour assurer la liaison entre décisions agrégées et détaillées.

Le modèle \mathcal{I}^{t,τ_f} est donc le suivant :

$$\begin{aligned} & \equiv \mathcal{I}^{t,\tau_f} \equiv \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{t,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{t,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & i = 1, \dots, N, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{t,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{t,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq cap_{r,t,\tau} & r = 1, \dots, R, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{t,\tau_f} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 4 :

Etant donné l'état agrégé $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$, l'état détaillé $\{s_{i,j,t,\tau_f} \mid j = 1, \dots, J_i\}$ est cohérent avec les décisions agrégées de la macro-période t si et seulement si le modèle \mathcal{I}^{t,τ_f} admet une solution.

Preuve :

| Découle directement définition 5 et de la construction du modèle d'étude des interactions.
□

Le chapitre III a montré que deux types de processus de désagrégation peuvent être mis en œuvre : un processus dit statique et un processus dit dynamique. A chacun d'eux est associé un modèle d'étude des interactions qui permet de construire le modèle de désagrégation cohérent correspondant.

V.2 PROCESSUS STATIQUE DE DÉSAGRÉGATION

On rappelle que dans ce type de processus, une désagrégation complète des décisions agrégées est réalisée en début de chaque macro-période. Ce processus définit donc les volumes de production sur un horizon de décision détaillé correspondant à une macro-période, d'où :

$$\tau_d = 1 \quad \text{et} \quad \tau_f = k \quad (\text{V.1})$$

V.2.1 Analyse de la cohérence

Avec les valeurs de τ_d et τ_f données par la relation (V.1), le modèle d'étude des interactions \mathcal{I}^{t,τ_f} se réduit au modèle $\mathcal{I}^{t,k}$ suivant:

$$\begin{aligned} & \equiv \mathcal{I}^{t,k} \equiv \\ \left\{ \mathcal{I}_1^{t,k} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \right. \end{aligned}$$

La totalité des contraintes détaillées de la macro-période t est déjà prise en compte dans le modèle de décision du niveau détaillé. C'est pourquoi la seule contrainte à respecter pour assurer la cohérence de l'état $s_{i,j,t,k}$ (et en conséquence, de la désagrégation du plan agrégé sur la macro-période t), correspond tout simplement à la relation d'agrégation/désagrégation (III.2) pour cette macro-période t .

On déduit donc que les conditions de cohérence associées au processus statique de désagrégation sont simplement égales à la contrainte $\mathcal{I}_1^{t,k}$. Ceci mène donc au théorème suivant :

Théorème 4 : Conditions nécessaires et suffisantes de cohérence

Etant donné les états agrégés robustes $\{S_{i,j,t} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k\}$ associée à un processus statique est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si et seulement si

$$s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} \quad i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i$$

Preuve :

| Evidente compte tenu de qui précède.

□

V.2.2 Modèle de désagrégation

Le modèle de désagrégation cohérent $\mathcal{D}^{t,1,k}$ associé à la macro-période t pour un horizon de décision d'une macro-période est donc :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{D}^{t,1,k} \equiv \\ Z &= \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k s_{i,j,t,\tau} \\ \text{sous } \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{D}_1^{t,1,k} : & s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k \\ \mathcal{D}_2^{t,1,k} : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & i=1,\dots,N, \tau=1,\dots,k \\ \mathcal{D}_3^{t,1,k} : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k \\ \mathcal{D}_4^{t,1,k} : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq \text{cap}_{r,t,\tau} & i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k \\ \mathcal{D}_5^{t,1,k} : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k \\ \mathcal{D}_6^{t,1,k} : & s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans ce contexte particulier de désagrégation, le problème de la cohérence s'avère donc très simple à résoudre.

Remarque :

Il faut souligner que la répartition particulière des capacités établie au niveau agrégé pour assurer la robustesse n'est pas imposée au niveau détaillé. Ce dernier possède donc une certaine autonomie vis à vis du niveau supérieur pour déterminer sa propre répartition des capacités et un plan détaillé pour chaque produit i .

□

Exemple :

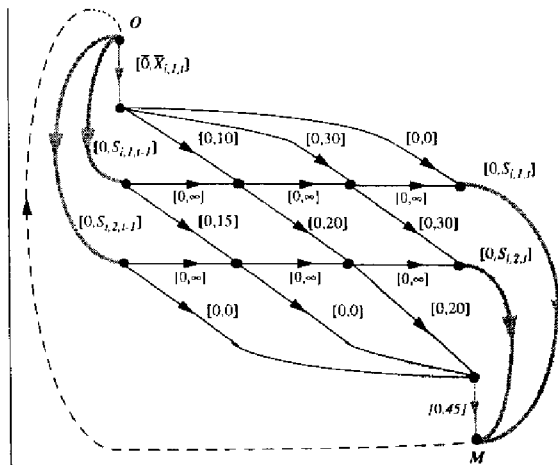


Figure V.2: Réseau associé à la macro-période 1 ($J_i = 2, k = 3$)

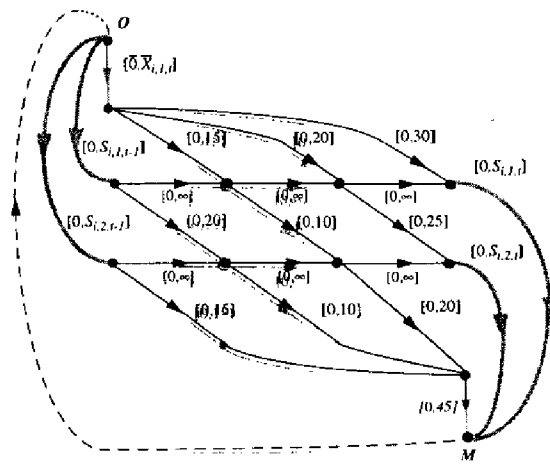


Figure V.3: Réseau associé à la macro-période 2 ($J_i = 2, k = 3$)

Pour illustrer la propriété de cohérence, le problème considéré dans l'exemple du paragraphe IV.1.8 est repris. Les figures V.2 et V.3 rappellent les caractéristiques de ce problème. Le plan agrégé robuste obtenu est le suivant :

$$\text{Avec } \begin{cases} S_{i,1,0} = 10 \\ S_{i,2,0} = 5 \end{cases}, \text{ le plan est } \begin{cases} S_{i,1,1} = 20 & S_{i,1,2} = 0 \\ S_{i,2,1} = 15 & S_{i,2,2} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} X_{i,1,1} = 40 & X_{i,1,2} = 10 \\ X_{i,2,1} = 30 & X_{i,2,2} = 30 \end{cases}$$

Dans le cadre d'un processus statique de désagrégation, un plan détaillé doit satisfaire les contraintes $\mathcal{D}_1^{t,1,k}$ à $\mathcal{D}_6^{t,1,k}$. Le plan au plus tard obtenu par la mise en œuvre du modèle $\mathcal{D}^{t,1,k}$ est, pour la macro-période 1 :

$$\begin{cases} s_{i,1,1,1} = 20 & s_{i,1,1,2} = 35 & s_{i,1,1,3} = 20 \\ s_{i,2,1,1} = 5 & s_{i,2,1,2} = 20 & s_{i,2,1,3} = 15 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{i,1,1,1} = 10 & x_{i,1,1,2} = 30 & x_{i,1,1,3} = 0 \\ x_{i,2,1,1} = 0 & x_{i,2,1,2} = 15 & x_{i,2,1,3} = 15 \end{cases}$$

et pour la macro-période 2 :

$$\begin{cases} s_{i,1,2,1} = 10 & s_{i,1,2,2} = 0 & s_{i,1,2,3} = 0 \\ s_{i,2,2,1} = 20 & s_{i,2,2,2} = 20 & s_{i,2,2,3} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{i,1,2,1} = 10 & x_{i,1,2,2} = 0 & x_{i,1,2,3} = 0 \\ x_{i,2,2,1} = 20 & x_{i,2,2,2} = 10 & x_{i,2,2,3} = 0 \end{cases}$$

Les solutions obtenues par désagrégation des macro-périodes 1 et 2 sont cohérentes puisque les demandes détaillées sont satisfaites et les états agrégés robustes sont atteints.

Cette exemple illustre que la mise en œuvre conjointe des conditions de robustesse et de cohérence assure l'élaboration d'un plan détaillé faisable sur tout l'horizon.

□

V.3 PROCESSUS DYNAMIQUE DE DÉSAGRÉGATION

Cette section se propose de montrer ce que deviennent les conditions de cohérence dans le cadre d'un processus dynamique de désagrégation. Dans ce processus, une suite de plans détaillés sont élaborés par une succession de désagrégations partielles des décisions agrégées de la macro-période t . Ces désagrégations sont donc réalisées sur un horizon de décision détaillé de longueur $\tau_f - \tau_d + 1$ inférieure à une macro-période, soit :

$$\tau_f - \tau_d < k \quad \text{et on considère que} \quad \tau_f < k$$

Notons que ce type de processus améliore la réactivité de la structure décisionnelle par une prise en compte plus fréquente de l'état de la production.

L'analyse de la cohérence est ici plus délicate que précédemment. Celle-ci est ainsi réalisée en deux étapes. La propriété de cohérence est d'abord considérée dans le cadre du problème simplifié (produits non couplés par les ressources : cf §IV.1.1). Puis les résultats obtenus sont étendus au problème général (cf §III.2). Enfin, l'analyse concerne une étape particulière de ce processus qui consiste à désagréger les décisions pour les périodes (t, τ_d) à (t, τ_f) .

V.3.1 Étude préliminaire

Dans cette première phase d'analyse, on se place dans le contexte d'étude présenté dans le paragraphe IV.1.1 : le nombre maximal de produit i pouvant subir l'opération j est une donnée. Cette valeur notée $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ constitue une instantiation de la variable $x_{i,j,t,\tau}$. La désagrégation peut donc être effectuée de manière indépendante pour chaque produit. Le modèle détaillé associé à cette étude est le modèle \mathcal{G}^{*i} décrit dans le paragraphe IV.1.1.

V.3.1.1 Modèle d'étude des interactions

Le modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ associé au produit i est construit à partir du modèle \mathcal{G}^{*i} réduit aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) et des relations d'agrégation/désagrégation (III.2) relatives à la macro-période t .

$$\equiv \mathcal{I}^{*i,t,\tau_f} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{*i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{*i,t,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{*i,t,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{*i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{*i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{*i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t}^* & j = 1, \dots, J_i \end{array} \right.$$

V.3.1.2 Analyse de la cohérence

D'après le corollaire 4, la désagrégation du plan agrégé pour la macro-période t et le produit i est cohérente si et seulement si le modèle d'étude des interactions $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ admet une solution. Comme pour l'étude de la robustesse, les conditions d'existence d'une solution au modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ sont établies à partir de sa représentation par graphe, notée $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ (cf Figure V.4).

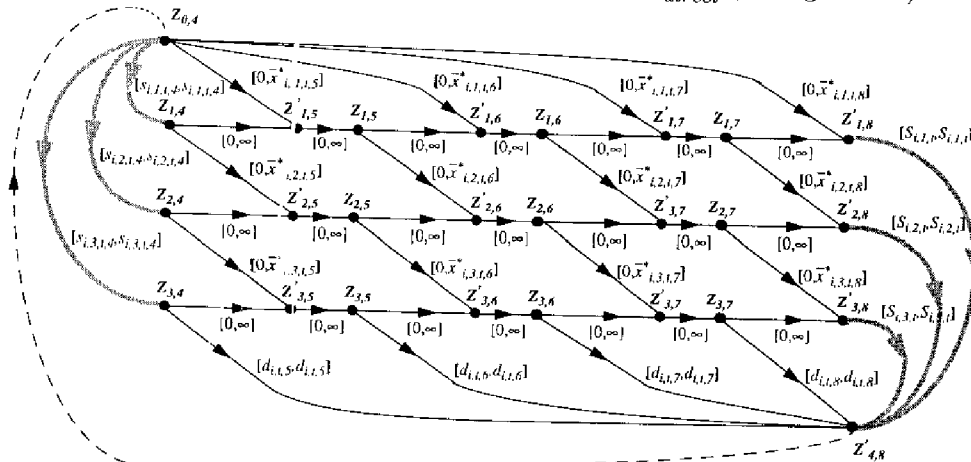


Figure V.4: Réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ ($J_i = 3, k = 8, \tau_f = 4$)

Le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ à la même structure que le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ des figures IV.2 ou IV.3 mais se limite aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) .

La démarche de construction des conditions de cohérence devient alors similaire à celle mise en oeuvre pour l'établissement des conditions de robustesse.

Corollaire 5 :

*Le modèle des interactions $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ admet une solution si et seulement s'il existe un flot compatible dans le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$.*

Preuve :

L'ensemble des commentaires figurant dans la preuve du corollaire 2 concernant les flux et les capacités associés aux arcs de $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ peuvent être reconduits ici. La table V.1 récapitule les correspondances entre éléments de $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ et $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$.

	Arcs	Bornes inf.	Bornes sup.	Flots	
	$(Z_{0,\tau_f}, Z_{j,\tau_f})$	$j = 1, \dots, J_i$	s_{i,j,t,τ_f}	s_{i,j,t,τ_f}	s_{i,j,t,τ_f}
	$(Z'_{j,k}, Z'_{j+1,k})$	$j = 1, \dots, J_i$	$S_{i,j,t}$	$S_{i,j,t}$	$s_{i,j,t,k}$
	$(Z'_{j,\tau}, Z_{j,\tau})$	$j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k - 1$	0	∞	$s_{i,j,t,\tau}$
	$(Z_{0,0}, Z'_{1,\tau})$	$\tau = \tau_f + 1, \dots, k$	0	$\bar{x}_{i,1,t,\tau}^*$	$x_{i,1,t,\tau}$
	$(Z_{j-1,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$	$j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k$	0	$\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$	$x_{i,j,t,\tau}$
	$(Z_{J_i,\tau-1}, Z'_{J_i+1,k})$	$\tau = \tau_f + 1, \dots, k$	$d_{i,t,\tau}$	$d_{i,t,\tau}$	$x_{i,J_i+1,t,\tau}$
	$(Z_{j,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$	$j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k$	0	∞	$s_{i,j,t,\tau-1} - x_{i,j+1,t,\tau}$

Table V.1: Capacités et flux associés au réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$

□

Afin d'exploiter la structure particulière du réseau, le problème de recherche d'un flot compatible dans le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ est transformé en un problème de recherche d'un flot maximum dans un réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t,\tau_f}$ (cf §IV.1.4). La saturation de tous les arcs entrants $\{(O, Z_{j,\tau_f}) \mid j = 0, \dots, J_i\}$ et sortants $\{(Z_{j,k}, M) \mid j = 1, \dots, J_i + 1\}$ du réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t,\tau_f}$ conduit à un flot de valeur $f_{saturation}^{i,t,\tau_f}$:

$$f_{saturation}^{i,t,\tau_f} = \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} = \sum_{\tau=\tau_f+1}^k x_{i,1,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t-1} \quad (V.2)$$

Ainsi, l'existence d'une solution au modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ revient à l'existence d'un flot maximum de valeur f_{max}^{i,t,τ_f} égale à $f_{saturation}^{i,t,\tau_f}$. L'application du théorème du flot maximum et de la coupe minimale conduit alors à analyser les coupes de ce réseau. Il en découle le lemme suivant :

Lemme 4 :

Etant donné l'état agrégé robuste $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f\}$ associée au produit i sur l'horizon de décision (t, t_d) à (t, τ_f) est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si et seulement si la capacité de toute coupe du réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t,\tau_f}$ est telle que :

$$C^{i,t,\tau_f}(Y, \bar{Y}) \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t}$$

Preuve :

Il découle directement du corollaire 5, de la relation (V.2) et du théorème du flot maximum et de la coupe minimale.

□

Ces réseaux sont structurellement identiques à ceux mis en œuvre pour l'étude de la robustesse. Ainsi, les propriétés obtenues au paragraphe IV.3.4. restent valides pour cette analyse. En particulier, l'application de la **propriété 1** permet de réduire le réseau $\mathcal{R}_{transf}^{i,t,\tau_f}$ au réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$ sur lequel les coupes significatives doivent être analysées (cf figure V.5) :

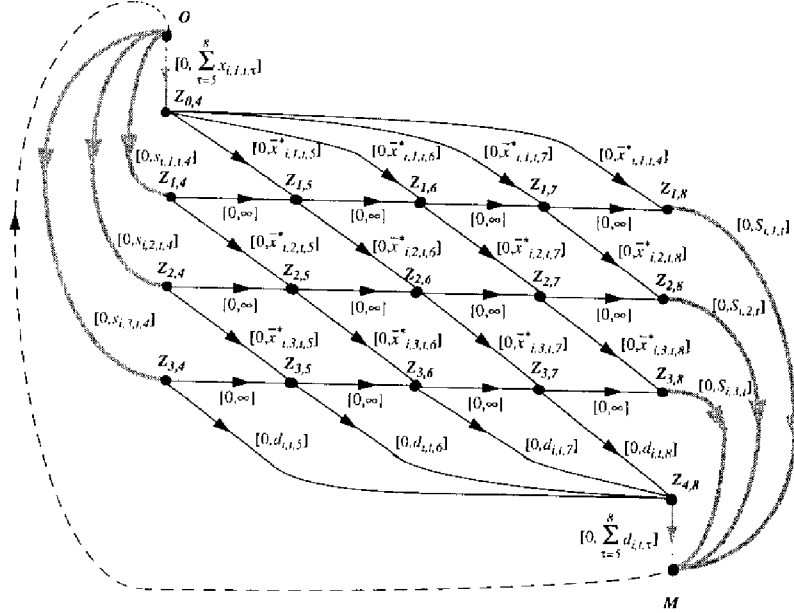


Figure V.5: Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$ associé au modèle $\mathcal{L}^{*,i,t,\tau_f}$ ($J_i = 3, k = 8, \tau_f = 4$)

Soit Δ^{i,t,τ_f} , l'ensemble des coupes (Y, \bar{Y}) significatives sur le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$. L'exploitation des **propriétés 2, 3, 4 et 5** permet de caractériser les coupes "structurellement" significatives par un triplet (u, v, L) . La définition des paramètres u, v et L est analogue à celle donnée au paragraphe IV.1.6.2. On a ainsi :

- u est appelé "niveau de départ" d'une coupe $(Y, \bar{Y}) \in \Delta^{i,t}$ (à gauche sur $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$) et est égal à :

$$u = \min (j \mid (O, Z_{j,\tau_f}) \in U) \quad (1 \leq u \leq J_i)$$

- v est appelé "niveau d'arrivée" d'une coupe $(Y, \bar{Y}) \in \Delta^{i,t}$ (à droite sur $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$) et est égal à :

$$v = \max (j \mid (Z_{j,k}, M) \in V) \quad (1 \leq v \leq J_i + 1)$$

- L est une matrice de dimension $(J_i + 1 \times k - \tau_f)$ qui localise la coupe au sein du réseau. Ces éléments $l_{j,\tau}$ sont tels que :

- $l_{j,\tau} = 1$ si l'arc de capacité $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ (ou $d_{i,t,\tau}$ si $j = J_i + 1$) appartient à W .
- $l_{j,\tau} = 0$ sinon.

Leurs caractéristiques deviennent alors :

- la **propriété 4** devient : $u \leq v$ et $v - u \leq k - \tau_f$
- la **propriété 5** devient :
$$\begin{cases} l_{j,\tau} = 1 \Rightarrow u \leq j \leq v \text{ et } j - u + 1 \leq \tau \leq k - \tau_f - v + j \\ l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau-p+j} = 0 \quad \forall j \neq p \\ l_{p,\tau} = 1 \Rightarrow l_{j,\tau+j-p+1} = 1 \text{ avec } j \text{ tel que } p \leq j \leq v \end{cases}$$

La capacité d'une coupe significative (u, v, L) est alors exprimée par la relation suivante :

$$C^{i,t,\tau_f}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \quad (V.3)$$

V.3.1.3 Expression des conditions de cohérence

L'application du lemme 4 avec la relation (V.3) donne :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t}$$

soit encore,

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} \geq \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* - \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \\ v = u, \dots, J_i + 1, \\ \forall L \in \mathcal{L}_{u,v} \end{array}$$

Le second membre de ces conditions n'est fonction que de données (capacités, demandes et états agrégés robustes). Par conséquent, il est possible d'évaluer pour un u donné, le paramètre q_{i,u,t,τ_f} qui représente la valeur maximale des seconds membres, soit :

$$q_{i,u,t,\tau_f} = \max_{v = u, \dots, J_i + 1} \left(\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \right) \quad (V.4)$$

Le calcul de q_{i,u,t,τ_f} s'effectue en deux phases :

1. On détermine d'abord pour chaque couple (u, v) , la valeur γ_{i,u,v,t,τ_f} telle que :

$$\gamma_{i,u,v,t,\tau_f} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right)$$

Pour cela, on utilise l'algorithme de recherche de la coupe de capacité minimum (cf **propriété 6**) dans lequel τ varie de $\tau_f + 1$ à k .

2. A partir de ce résultat, le paramètre q_{i,u,t,τ_f} est obtenu de façon simple par l'évaluation de :

$$q_{i,u,t,\tau_f} = \max_{v = u, \dots, J_i + 1} \left(\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \gamma_{i,u,v,t,\tau_f} \right)$$

On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème 5 : Conditions nécessaires et suffisantes de cohérence

Etant donné l'état agrégé robuste $\{S_{i,j,t} \mid j=1,\dots,J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f\}$ associée au produit i sur l'horizon de décision (t, τ_d) à (t, τ_f) est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si et seulement si :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad u=1,\dots,J_i$$

Preuve :

Les relations (V.3) et (V.4) et le lemme 4 conduisent directement à :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} \geq q_{i,u,t,\tau_f} \quad u=1,\dots,J_i$$

soit encore,

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad u=1,\dots,J_i \quad (V.5)$$

□

V.3.1.4 Modèle de désagrégation

Le modèle de désagrégation $\hat{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f}$ associé au produit i permet de réaliser une planification détaillée sur l'horizon de décision (t, τ_d) à (t, τ_f) en restant cohérent avec les décisions agrégées de la macro-période t . Ce modèle est donc construit à partir du modèle $\mathcal{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f}$ auquel est ajouté les conditions de cohérence (V.5).

$$\begin{aligned} & \equiv \hat{D}^{i,t,\tau_d,\tau_f} \equiv \\ Z &= \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau} \\ \text{sous } \left\{ \begin{array}{ll} \hat{D}_1^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} \quad j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f \\ \hat{D}_2^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} \quad \tau=\tau_d,\dots,\tau_f \\ \hat{D}_3^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} \quad j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f \\ \hat{D}_4^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \quad j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f \\ \hat{D}_5^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 \quad j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f \\ \hat{D}_6^{i,t,\tau_d,\tau_f} : & \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad u=1,\dots,J_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les conditions de cohérence fixent donc une borne inférieure sur le dernier état de l'horizon de décision en cours (état s_{i,j,t,τ_f}). Elles garantissent que jusqu'à la fin de l'horizon de planification détaillé (c'est à dire, pour toute la macro-période t), il existe une succession de plans détaillés permettant de satisfaire les demandes détaillées et d'atteindre l'état agrégé robuste $S_{i,j,t}$.

Exemple :

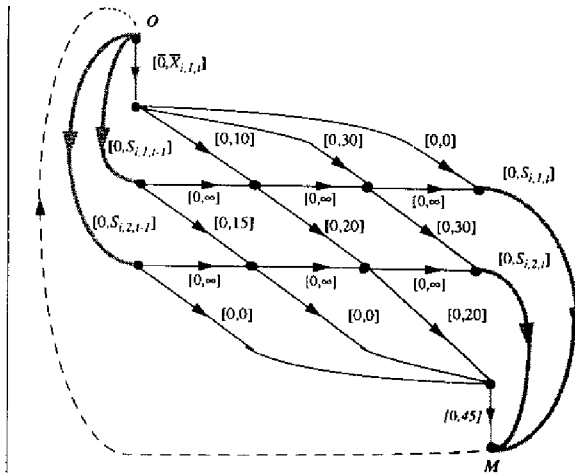


Figure V.6: Réseau tel que $(J_i = 2, k = 3)$

L'exemple traité dans le cadre du processus statique de désagrégation est repris ici. Le processus dynamique de désagrégation est mis en œuvre seulement sur la macro-période 1. On considère un horizon de décision détaillé correspondant à une période élémentaire.

La figure V.6 rappelle les paramètres associés à cette macro-période.

Les états initiaux sont :

$$S_{i,1,0} = 10, S_{i,2,0} = 5$$

Les décisions agrégées élaborées par le niveau supérieur pour la macro-période 1 sont :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} = 20, & X_{i,1,1} = 40 \\ S_{i,2,1} = 15, & X_{i,2,1} = 30 \end{cases}$$

Les conditions de cohérence relatives à chaque période élémentaire sont construites successivement à chaque étape de désagrégation.

- Désagrégation pour la période $(t, 1)$ ($\tau_d = 1, \tau_f = 1$) :

Les matrices L associées à chaque couple (u, v) sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} & \mathcal{L}_{1,2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} & \mathcal{L}_{1,3} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{L}_{2,2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} & \mathcal{L}_{2,3} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

On obtient alors les paramètres q_{i,u,t,τ_f} par la relation (V.4) :

$$\begin{cases} q_{i,1,1,1} = \max \left(35 - \min_{L \in \mathcal{L}_{1,1}} (30), 15 - \min_{L \in \mathcal{L}_{1,2}} (30, 30), 0 - \min_{L \in \mathcal{L}_{1,3}} (0) \right) = 0 \\ q_{i,2,1,1} = \max \left(15 - \min_{L \in \mathcal{L}_{2,2}} (50), 0 - \min_{L \in \mathcal{L}_{2,3}} (20, 20) \right) = -20 \end{cases}$$

On en déduit les conditions de cohérence suivantes :

$$\begin{aligned} s_{i,1,t,1} + s_{i,2,t,1} &\geq 20 + 0 & \text{soit} & & s_{i,1,t,1} + s_{i,2,t,1} &\geq 20 \\ s_{i,2,t,1} &\geq 20 - 20 & \text{soit} & & s_{i,2,t,1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Compte tenu des états initiaux, on obtient alors les décisions détaillées de la période $(1, 1)$ suivantes :

$$\begin{cases} s_{i,1,1,1} = 20, & x_{i,1,1,1} = 10 \\ s_{i,2,1,1} = 5, & x_{i,2,1,1} = 0 \end{cases}$$

On peut noter que l'on obtient une désagrégation analogue à celle définie par le processus statique.

- Désagrégation pour la période $(t, 2)$ ($\tau_d = 2, \tau_f = 2$) :

Les matrices L associées à chaque couple (u, v) sont :

$$\mathcal{L}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{L}_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{L}_{2,3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient alors les paramètres q_{i,u,t,τ_f} par la relation (V.4) :

$$\begin{cases} q_{i,1,1,2} = \max_{L \in \mathcal{L}_{1,1}} \left(35 - \min_{L \in \mathcal{L}_{1,1}} (0) \right), & 15 - \min_{L \in \mathcal{L}_{1,2}} (0) = 35 \\ q_{i,2,1,2} = \max_{L \in \mathcal{L}_{2,2}} \left(15 - \min_{L \in \mathcal{L}_{2,2}} (30) \right), & 0 - \min_{L \in \mathcal{L}_{2,3}} (0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit les conditions de cohérence suivantes :

$$s_{i,1,t,2} + s_{i,2,t,2} \geq 20 + 35 \quad \text{soit} \quad s_{i,1,t,2} + s_{i,2,t,2} \geq 55$$

$$s_{i,2,t,2} \geq 20 + 0 \quad \text{soit} \quad s_{i,2,t,2} \geq 20$$

Compte tenu des états $s_{i,1,t,1}$ et $s_{i,2,t,1}$, on obtient alors les décisions détaillées de la période $(1, 2)$ suivantes :

$$\begin{cases} s_{i,1,1,2} = 35, & x_{i,1,1,2} = 30 \\ s_{i,2,1,1} = 20, & x_{i,2,1,2} = 15 \end{cases}$$

- Désagrégation pour la période $(t, 3)$ ($\tau_d = 3, \tau_f = 3$) :

Dans ce cas, les paramètres q_{i,u,t,τ_f} sont obtenus directement :

$$\begin{cases} q_{i,1,1,2} = \max (35, 15) = 35 \\ q_{i,2,1,2} = \max (15, 0) = 15 \end{cases}$$

d'où on déduit les conditions de cohérence :

$$s_{i,1,t,3} + s_{i,2,t,3} \geq 0 + 35 \quad \text{soit} \quad s_{i,1,t,3} + s_{i,2,t,3} \geq 35$$

$$s_{i,2,t,3} \geq 0 + 15 \quad \text{soit} \quad s_{i,2,t,3} \geq 15$$

Compte tenu des états $s_{i,1,t,2}$ et $s_{i,2,t,2}$, on obtient alors les décisions détaillées de la période $(1, 2)$ suivantes :

$$\begin{cases} s_{i,1,1,3} = 20, & x_{i,1,1,3} = 0 \\ s_{i,2,1,3} = 15, & x_{i,2,1,3} = 15 \end{cases}$$

Etant placé dans les mêmes conditions (états initiaux et fonction objectif), ce processus élabore un plan détaillé identique à celui obtenu par le processus de désagrégation statique (cf V.2.2). L'avantage du processus dynamique de désagrégation est d'établir séquentiellement un plan détaillé permettant la prise en compte des états détaillés réels au fur et à mesure de l'élaboration des décisions.

□

V.3.2 Cas général

Cette section se propose d'étendre les résultats précédents au problème général décrit à la section III.2 : les produits i sont couplés par l'utilisation de ressources communes.

Les conditions de cohérence établies dans la section précédente s'appuient sur la donnée $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ qui correspond au nombre maximal de produit i pouvant subir l'opération j dans la période (t, τ) .

Dans le cadre général considéré ici, ces grandeurs ne sont plus des données ; elle résultent de la répartition de la capacité des ressources entre les opérations utilisant ces ressources. Ces grandeurs sont fixées par le niveau détaillé sur l'horizon de décision détaillé. Elles ne sont donc pas disponibles sur le reste de la macro-période t pour exprimer les conditions de cohérence.

Il est cependant possible d'obtenir des conditions de cohérence dérivées de l'étude précédente. L'idée est de considérer la répartition particulière de la capacité définie par le niveau agrégé pour assurer la robustesse. Ceci permet d'obtenir des valeurs particulières de $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. Les conditions de cohérence basées sur ces valeurs particulières sont alors des conditions suffisantes de cohérence.

Les variables et données correspondent à celles définies dans le paragraphe III.3.2.2. Le modèle détaillé \mathcal{G} et le modèle partiel de désagrégation $\mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f}$ associés à ce contexte d'étude ont été décrits respectivement dans les paragraphes III.2.3 et III.3.4.

V.3.2.1 Modèle d'étude des interactions

Le modèle des interactions \mathcal{I}^{t,τ_f} correspondant à ce contexte est construit à partir du modèle \mathcal{G} restreint aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) auquel sont ajoutées les relations d'agrégation/désagrégation (III.2). Celui-ci a été donné au paragraphe V.1.2.

V.3.2.2 Analyse de la cohérence

La difficulté majeure reste le partage des ressources entre les opérations. En utilisant la décomposition du modèle \mathcal{G}' définie au paragraphe III.2.3, les contraintes du modèle \mathcal{I}^{t,τ_f} peuvent être définies comme la concaténation de N modèles \mathcal{I}^{i,t,τ_f} couplés par la contrainte $\mathcal{P}_I^{r,t,\tau_f}$ associée à chaque ressource r , soit :

$$\mathcal{I}^{t,\tau_f} = \left(\bigcup_{r=1}^R \mathcal{P}_I^{r,t,\tau_f} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{I}^{i,t,\tau_f} \right)$$

où

$$\mathcal{P}_I^{r,t,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} \bar{x}_{i,j,t,\tau} = \text{cap}_{r,t,\tau} \quad \tau = \tau_f + 1, \dots, k$$

et le modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} associé au produit i est :

$$\begin{aligned} &\equiv \mathcal{I}^{i,t,\tau_f} \equiv \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{i,t,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{i,t,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, \bar{x}_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} a la même structure que le modèle $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$. La différence est que la donnée $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ dans $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ est une variable $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ dans \mathcal{I}^{i,t,τ_f} . Aussi, les modèles $\mathcal{I}^{*i,t,\tau_f}$ sont indépendants alors que les modèles \mathcal{I}^{i,t,τ_f} sont couplés par cette variable.

Il est possible d'associer à chaque modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} , un réseau de structure identique à $\mathcal{R}_{direct}^{i,t,\tau_f}$ mais dans lequel la capacité des arcs du type $(Z_{0,0}, Z'_{1,\tau})$ et $(Z_{j-1,\tau-1}, Z'_{j,\tau})$ est égale à $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. Ainsi, assurer l'existence d'une solution au modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} revient à assurer l'existence d'un flot compatible

dans le réseau associé. Ce dernier est transformé afin de se ramener à un problème d'existence d'un flot maximum de valeur f_{max}^{i,t,τ_f} égale à $f_{saturation}^{i,t,\tau_f}$ (relation V.2).

On déduit alors que les états $s_{i,j,t,\tau}$ sont cohérents si et seulement si toute coupe (Y, \bar{Y}) vérifie la relation suivante :

$$C^{i,t,\tau_f}(Y, \bar{Y}) \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} \quad (V.6)$$

La **propriété 1** reste valide et permet de se ramener à un réseau $\mathcal{R}_{theorique}^{i,t,\tau_f}$ de même structure que le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$, mais dans lequel la capacité des arcs du type $(Z_{0,0}, Z_{1,\tau})$ et $(Z_{j-1,\tau-1}, Z_{j,\tau})$ est égale à $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. L'application des **propriétés 2, 3, 4 et 5** permet de caractériser les coupes "structurellement" significatives par un triplet (u, v, L) dont la définition est identique à celle donnée au paragraphe IV.1.6.2.

Il en découle l'expression de la capacité :

$$C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \quad (V.7)$$

La mise en œuvre de la relation (V.5) conduit alors aux conditions suivantes :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t}$$

soit encore :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau} - \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \quad (V.8)$$

Les conditions (V.7) assurent la cohérence des décisions détaillées par rapport à une répartition détaillée de la capacité des ressources par l'intermédiaire de $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$. La difficulté est que la répartition détaillée de la capacité des ressources n'est pas connue pour les périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) , puisqu'il incombe au modèle de décision du niveau détaillé de réaliser cette tâche.

Comme pour le cas de la robustesse, la solution adoptée pour établir les conditions de cohérence consiste à considérer une répartition particulière de la capacité se traduisant par des valeurs $\bar{x}_{i,j,t,\tau}$ particulières. La répartition particulière choisie est celle déjà considérée au niveau agrégé pour assurer la robustesse. Les conditions de cohérence établies dans la suite se basent les valeurs $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ (relation (IV.18)) et constituent donc des conditions suffisantes de cohérence vis à vis du problème général. En effet, le fait de considérer une répartition particulière réduit a priori l'ensemble des états détaillés s_{i,j,t,τ_f} admissibles. Le modèle d'étude des interactions travaille donc avec une "vision" sur-contrainte du problème de désagrégation associé aux périodes $(t, \tau_f + 1)$ à (t, k) .

On en déduit ainsi le théorème suivant :

Théorème 6 : Conditions suffisantes de cohérence

Etant donné l'état agrégé robuste $\{S_{i,j,t} \mid j = 1, \dots, J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f\}$ sur l'horizon de décision (t, τ_d) à (t, τ_f) est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad u = 1, \dots, J_i$$

avec

$$q_{i,u,t,\tau_f} = \max_{v=u, \dots, J_i+1} \left(\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \text{cap}_{r,t,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{\text{CAP}_{r,t}} + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \right)$$

Preuve :

Avec la répartition $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ définie par la relation (IV.18), la relation (V.7) devient :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} \geq \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \text{cap}_{r,t,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{\text{CAP}_{r,t}} - \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau}$$

Le second membre ne comporte que des données. Il est donc possible d'évaluer celui-ci et d'en déduire la valeur maximale, soit :

$$q_{i,u,t,\tau_f} = \max_{v=u, \dots, J_i+1} \left(\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \text{cap}_{r,t,\tau} \frac{\bar{X}_{i,j,t}^*}{\text{CAP}_{r,t}} + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \right)$$

On tire alors les conditions suivantes :

$$\sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad (\text{V.9})$$

□

V.3.2.3 Modèle de désagrégation

Le modèle de désagrégation $\mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f}$ devient alors le modèle cohérent $\hat{\mathcal{D}}^{t,\tau_d,\tau_f}$:

$$\equiv \hat{\mathcal{D}}^{t,\tau_d,\tau_f} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau}$$

$$\text{sous } \begin{cases} \hat{\mathcal{D}}_1^{t,\tau_d,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \hat{\mathcal{D}}_2^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} & i = 1, \dots, N, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \hat{\mathcal{D}}_3^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \hat{\mathcal{D}}_4^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_\tau} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq \text{cap}_{r,t,\tau} & r = 1, \dots, R, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \hat{\mathcal{D}}_5^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \hat{\mathcal{D}}_6^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} + q_{i,u,t,\tau_f} & i = 1, \dots, N, u = 1, \dots, J_i \end{cases}$$

Il est à noter que la répartition détaillée des capacités des ressources considérée pour établir les conditions suffisantes de robustesse et de cohérence n'est pas imposée au niveau détaillé pour la détermination du plan sur les périodes (t, τ_d) à (t, τ_f) . Le niveau inférieur possède donc une certaine autonomie pour établir le plan détaillé.

V.4 CONCLUSION

De manière analogue à l'étude de la robustesse, l'analyse théorique des interactions entre niveaux a permis d'exprimer sous forme de conditions analytiques les propriétés de cohérence du niveau détaillé. Celui-ci ont été successivement examinés dans le cadre d'un processus statique et d'un processus dynamique de désagrégation.

Dans le cas d'un processus statique de désagrégation, les conditions obtenues sont des conditions nécessaires et suffisantes de cohérence.

Concernant le processus dynamique de désagrégation, deux cadres d'étude sont distingués. Dans le cas où les produits ne sont pas couplés par les ressources, les conditions de cohérence sont nécessaires et suffisantes. Ces résultats sont ensuite étendus au problème général pour lequel la fabrication des produits nécessite l'utilisation de ressources communes. Des conditions suffisantes de cohérence sont ainsi établies. Celles-ci sont basées sur la répartition particulière des capacités considérée au niveau agrégé.

Intégrées sous forme de contraintes dans le modèle de désagrégation correspondant, ces conditions garantissent que les décisions du plan détaillé seront compatibles avec les décisions (états agrégés robustes en fin de macro-période) élaborées par le niveau supérieur.

En outre, il faut noter que la modélisation "sur-contrainte" considérée au niveau supérieur pour assurer la robustesse est totalement relâchée lors de la désagrégation. Le niveau détaillé peut donc élaborer sa propre répartition des capacités et donc exploiter l'autonomie générée pour affiner localement le plan de production.

- Partie C -

MISE EN OEUVRE

- Chapitre VI -

EXTENSIONS ET MISE EN ŒUVRE PRATIQUE

RÉSUMÉ

Ce dernier chapitre propose des mises en œuvre de la structure décisionnelle dans différents contextes de production ainsi que des expérimentations numériques validant les résultats présentés dans ce mémoire.

La section VI.1 récapitule la structure de décision construite dans ce travail.

Une mise en œuvre informatique de ces structures décisionnelles est alors présentée dans la section VI.2. Celle-ci est construite autour de la librairie d'optimisation OSL d'IBM et permet la génération de différentes classes de problèmes. Des résultats expérimentaux sont ainsi proposés. Ceux-ci illustrent la réduction notable des temps de calcul vis à vis d'une approche globale, tout en conservant une qualité satisfaisante des solutions obtenues.

La section VI.3 concerne la prise en compte des arriérés de fabrication. Ils permettent de s'affranchir de la contrainte de "livraison à temps". Dans ce cadre, un plan de production peut toujours être proposé : les quantités de produits en retard et les délais associés peuvent être établis. Ces hypothèses de production conduisent à l'établissement de nouvelles conditions de robustesse et de cohérence qui permettent notamment de maîtriser le niveau maximum d'arriérés au sein d'une macro-période.

Afin de pallier la méconnaissance de certaines de ces données, la section VI.4 s'intéresse à la prise en compte explicite de l'incertitude dans les conditions de robustesse et de cohérence. Deux voies pour la généralisation des travaux présentés sont alors envisagées : une approche nécessaire et une approche suffisante. L'approche nécessaire consiste à construire des conditions à partir de données détaillées résultant d'une répartition détaillée a priori des données agrégées. L'approche suffisante considère de manière explicite, l'incertitude en caractérisant les données détaillées non connues par des bornes inférieures et supérieures déterminées.

VI.1 PROCESSUS COMPLET DE PLANIFICATION

Cette section reprend les éléments des chapitres IV et V. La figure VI.1 récapitule le processus complet de planification mis en œuvre dans la structure décisionnelle hiérarchisée proposée dans ce travail.

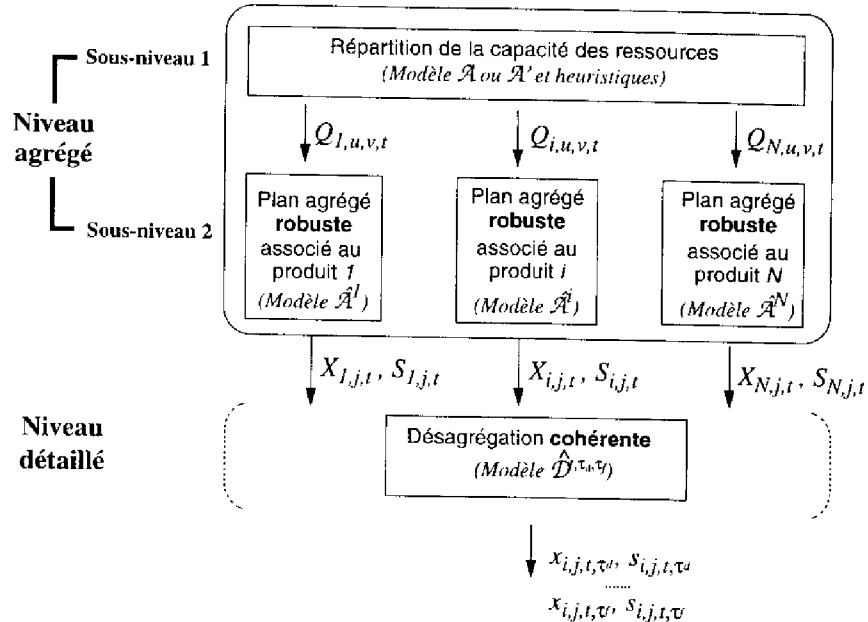


Figure VI.1: Processus de planification pour la macro-période t

Le sous-niveau 1 du niveau supérieur définit une répartition détaillée construite à partir d'une répartition agrégée. Les valeurs $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ qui en découlent sont utilisées pour déterminer les paramètres agrégés $Q_{i,u,v,t}$ intervenant dans l'expression des conditions de robustesse. Des plans agrégés robustes vis à vis de cette répartition détaillée sont alors élaborés par le sous-niveau 2.

Le niveau inférieur reçoit les plans agrégés robustes établis par le niveau supérieur. Il effectue la désagrégation de la décision agrégée de manière à contruire un plan détaillé cohérent. Il est donc chargé de déterminer les volumes de production par opération et par période élémentaire tout en respectant le plan agrégé.

Différents processus de désagrégation peuvent être envisagés. Ils sont associés à des fréquences de désagrégation plus ou moins grandes suivant que l'on souhaite favoriser la réactivité ou réduire les efforts de calcul.

Cette structure de planification se caractérise donc par une coordination des décisions tout au long du processus décisionnel. Cette propriété est obtenue par l'introduction de conditions analytiques au sein des modèles correspondants qui traduisent les propriétés de robustesse et de cohérence.

VI.2 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

Les chapitres IV et V ont posé les bases théoriques de la structure décisionnelle développée dans ce travail. Cette section se propose d'évaluer ses performances par une série d'expérimentations numériques.

VI.2.1 Objectifs

Le but de cette étude est de comparer les performances respectives de l'approche hiérarchisée et de l'approche globale classique. Les solutions élaborées par cette dernière approche constituent les plans détaillés de référence. Deux aspects sont évalués :

1. la complexité en terme de taille de modèle et de temps CPU,
2. la qualité des solutions en terme de faisabilité et d'optimalité (pour un critère fixé).

Ces expérimentations ont donc deux principaux objectifs :

- d'une part, elles visent à mettre en évidence l'action des conditions de robustesse et de cohérence sur le fonctionnement de la structure décisionnelle.
- d'autre part, elles permettent de quantifier la réduction des temps de calcul obtenue par l'utilisation d'une structure de décision basée sur un processus d'agrégation/désagrégation, mais aussi l'éventuelle augmentation de coût qui peut survenir en contre-partie.

VI.2.2 Mise en place de l'étude expérimentale

Afin d'effectuer la comparaison des deux approches dans des conditions totalement identiques, toutes les expérimentations sont réalisées dans un contexte non perturbé dans lequel les données détaillées sont supposées connues sur tout l'horizon de planification.

L'élaboration d'un plan de production nécessite l'acquisition de nombreux paramètres dont les valeurs peuvent influencer grandement sur les solutions obtenues. Afin de tenir compte de ce point dans les expérimentations, la solution adoptée consiste à résoudre plusieurs problèmes possédant des caractéristiques voisines. L'analyse des solutions obtenues permet d'en déduire un "comportement moyen". Dans cette optique, la notion de classe de problèmes est introduite.

Chaque classe regroupe des problèmes dont certains des paramètres sont générés de manière aléatoire dans des intervalles de valeurs prédéfinis. Chacun des problèmes est construit à partir d'un jeu de données comprenant :

- des paramètres définis a priori dont le rôle est généralement de fixer les dimensions du problème. Il s'agit par exemple du nombre de produits N , du nombre d'opérations J_i de chaque produit i , du nombre de ressources R , de la longueur de l'horizon de planification Θ , etc.
- des paramètres dépendant du temps qui caractérisent une situation de production particulière. Il s'agit par exemple de la capacité des ressources $cap_{r,t,\tau}$, des demandes $d_{i,t,\tau}$, des stocks initiaux $s_{i,j,1,0}$, éventuellement des coûts, etc.

Ainsi, pour une classe de problème donnée, chacun des paramètres p est une grandeur aléatoire uniforme définie par un couple (b_p, ϵ_p) où :

- b_p : valeur de base du paramètre p ,
- ϵ_p : écart autour de la valeur b_p .

Par conséquent, pour toute période (t, τ) , les valeurs générées pour un problème particulier sont comprises dans l'intervalle $[b_p - \epsilon_p, b_p + \epsilon_p]$ pour le paramètre p (cf Figure VI.2).

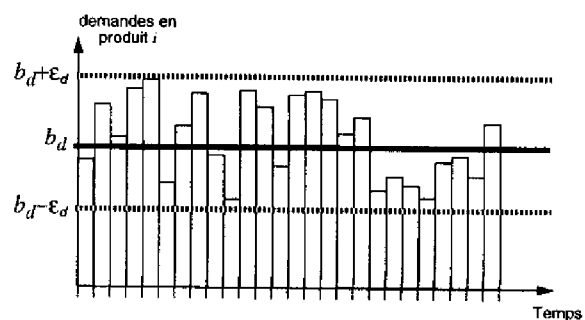


Figure VI.2: Valeurs associées aux demandes

Exemple :

- $d_{i,t,\tau} = \mathcal{U}(b_d, \epsilon_d) = \mathcal{U}(100, 50)$ indique que les demandes sont tirées aléatoirement de manière uniforme dans l'intervalle $[50, 150]$ pour tout $i = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$, $\tau = 1, \dots, k$.
- $cap_{r,t,\tau} = \mathcal{U}(b_{cap}, \epsilon_{cap}) = \mathcal{U}(200, 40)$ indique que les capacités sont tirées aléatoirement de manière uniforme dans l'intervalle $[160, 240]$ pour tout $r = 1, \dots, R$, $t = 1, \dots, T$, $\tau = 1, \dots, k$.

□

De plus, on note σ_p , l'écart relatif associé à un paramètre p :

$$\sigma_p = 100 \cdot \frac{\epsilon_p}{b_p}$$

Exemple :

□ Pour les exemples précédents, on obtient $\sigma_d = 50\%$ et $\sigma_{cap} = 20\%$.

□

- La difficulté d'un problème est mesurée vis à vis du taux de charge σ_{ch} du système de production. Ce taux de charge, délicat à définir, est pris dans ce travail comme le rapport entre la capacité requise pour satisfaire les demandes et la capacité effectivement disponible. Ce rapport est donc lié à la criticité des ressources. Compte tenu de la définition des paramètres, le taux de charge est donné par la relation suivante :

$$\sigma_{ch} = 100 \cdot \max_{r=1, \dots, R} \left(\frac{\sum_{(i,j) \in \sigma_r} w_{r,i,j} b_d}{b_{cap}} \right)$$

Exemple :

□ Avec les paramètres définis dans les exemples précédents, on obtient une charge de $\sigma_{ch} = 50\%$.

□

Chaque classe de problèmes est alors définie par un triplet $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$. Afin d'obtenir une vision représentative du comportement du système, les résultats associés à une classe donnée correspondent à la moyenne des résultats obtenus pour dix problèmes de cette classe.

VI.2.3 Logiciel de planification

Afin de réaliser cette étude expérimentale, un logiciel a été développé. Les fonctionnalités de ce logiciel sont principalement :

- la génération des données caractéristiques d'un problème de planification,
- la résolution de ce problème selon différentes approches,
- la visualisation et l'analyse des résultats.

Compte tenu des conditions d'utilisation liées au contexte "recherche", le cahier des charges retenu a fait apparaître certaines exigences qui ont conduit à développer un logiciel possédant les qualités suivantes :

- le logiciel est modulaire et extensible c'est à dire il permet d'ajouter facilement des modules (nouveaux modèles, procédures de génération de données, etc) au fur et à mesure des besoins ou de l'avancée des travaux.
- le logiciel est interactif de manière à proposer un grand nombre de possibilités pour la génération des problèmes et de faciliter l'analyse des résultats.

Ce logiciel a été développé en langage C sur station de travail RS 6000. L'intégration des différents modèles linéaires au sein du logiciel de planification est réalisée grâce à l'utilitaire EASYMODELER d'IBM. Celui-ci crée un fichier source C dont le rôle est de construire de manière

générique la matrice A et les vecteurs b et c (cf (II.1)) associés à un modèle linéaire décrit de façon littérale. Le fichier source créé est directement intégré à la compilation au sein du logiciel de planification (cf VI.3). La matrice associée à un problème particulier est ensuite générée par instanciation du modèle avec le jeu de données saisi lors de l'expérimentation.

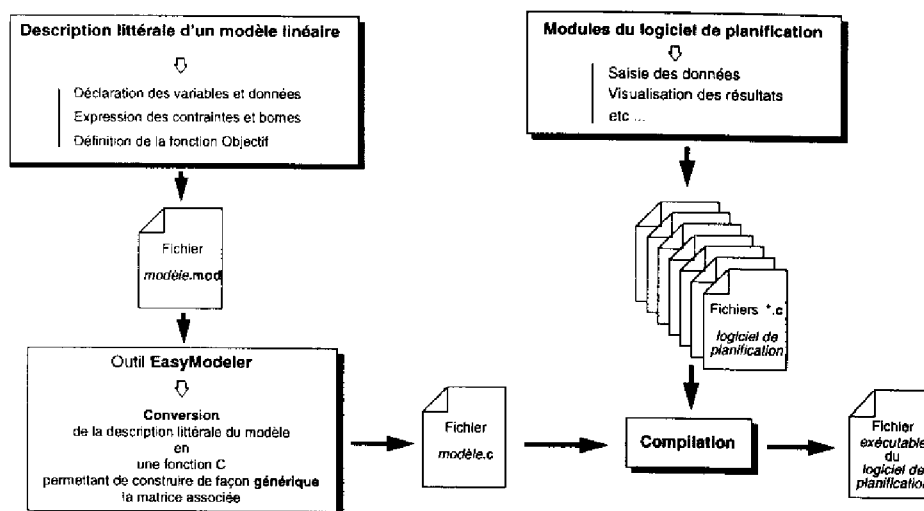


Figure VI.3: Intégration des modèles linéaires au sein du logiciel de planification

Le logiciel de planification exploite la librairie OSL (Optimization Subroutine Library) d'IBM pour la résolution des modèles de programmation linéaire. La figure VI.4 schématise la démarche d'utilisation du logiciel.

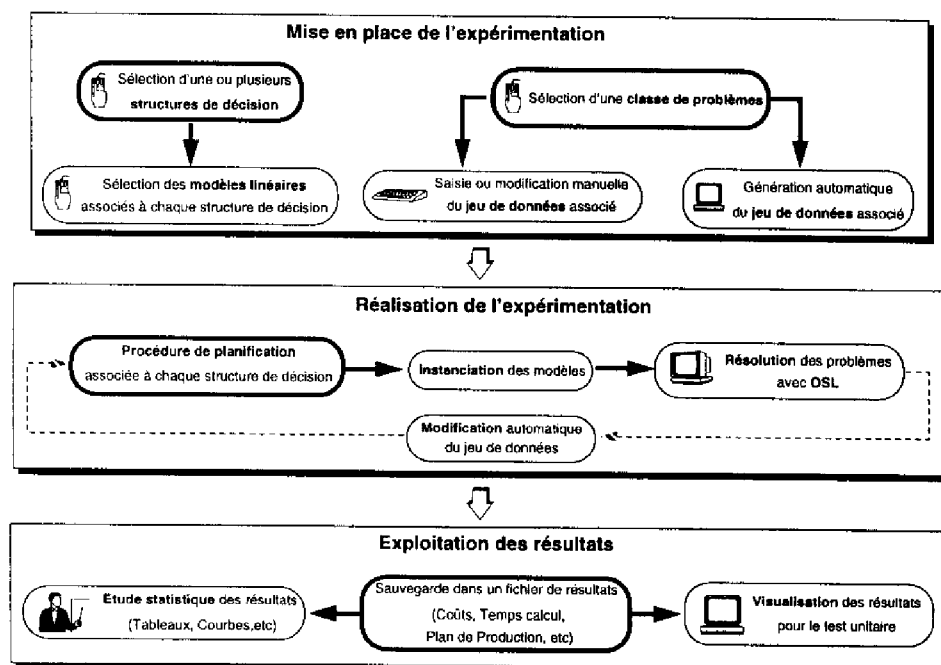


Figure VI.4: Structure simplifiée du logiciel de planification

Dans la phase d'initialisation de la simulation, l'utilisateur sélectionne la ou les structures de décisions associées à l'approche qu'il désire évaluer (approche globale, hiérarchisée, etc). Il précise ensuite les modèles qu'il souhaite associer à chacune des structures choisies (modèles avec ou sans

délai de fabrication, avec ou sans arriéré de fabrication, etc). Indépendamment des structures de décisions choisies, l'utilisateur définit le jeu de données qui doit être mis en œuvre. Pour cela, il précise la ou les classes de problèmes à considérer (triplets $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$). A partir de ces caractéristiques, le jeu de données est généré aléatoirement par le calculateur. En outre, chacune des données peut être individuellement saisie ou modifiée manuellement.

Une fois que l'ensemble des paramètres de l'expérimentation est défini, la phase de calcul est lancée. Selon la structure de décision mise en œuvre, la procédure de planification correspondante est exécutée (calcul des paramètres agrégés, transfert des décisions entre modèles de chaque niveau décisionnel, etc). Dans le cas où une analyse statistique est réalisée, un grand nombre de problèmes doit être résolu et ce processus est effectué en boucle fermée. Les paramètres de simulation évoluent alors par pas en fonction des spécifications saisies lors de la première phase.

La dernière phase concerne l'analyse des résultats. Ces derniers peuvent être exploités de deux manières. Lorsqu'ils résultent de simulations en série, ils sont d'abord stockés dans un fichier au fur et à mesure de leur élaboration. Ce fichier de résultats est ensuite traité et les facteurs caractéristiques sont mis en évidence sous forme de tableaux et de courbes (gain en temps calcul, écart de coûts, etc). S'il s'agit d'un test unitaire ou d'une mise au point, les résultats de la simulation sont directement visualisés sur écran et des informations plus exhaustives sont alors accessibles (jeu de données utilisées, plans de production obtenus, etc). La figure VI.5 montre un exemple de visualisation s'appuyant sur la représentation par graphe utilisée dans les chapitres précédents.

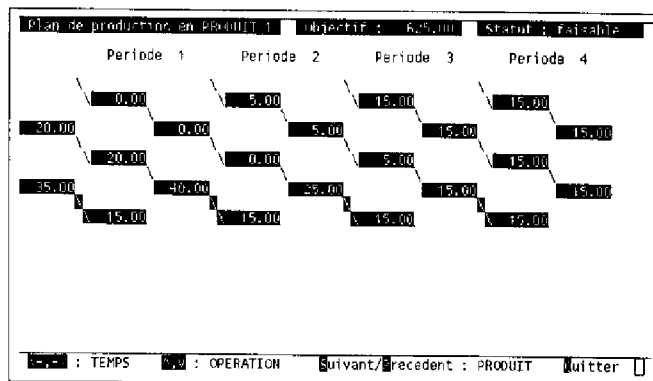


Figure VI.5: Ecran visualisant un plan de production

VI.2.4 Problèmes de planification mono-produit, multi-étapes, multi-ressources

L'étude se place d'abord dans le cas où les ressources ne sont pas partagées (contexte de l'étude préliminaire). Du fait du découplage, les problèmes considèrent un seul produit. Pour un tel contexte, les chapitres IV et V ont montré que les conditions de robustesse et de cohérence sont des conditions nécessaires et suffisantes. Une première série d'expérimentations met en évidence la nécessité d'introduire ces conditions pour assurer un fonctionnement correct de la structure décisionnelle hiérarchisée. Une deuxième série d'expérimentations vise à améliorer la qualité des solutions obtenues (valeur du critère) vis à vis de la recherche d'un *plan au plus tard*. Enfin, précisons que compte tenu de l'aspect nécessaire et suffisant des conditions, il est inutile de réaliser ces simulations pour différentes classes de problèmes.

VI.2.4.1 Nécessité d'une coordination des décisions dans les structures hiérarchisées

Ces premières expérimentations visent à valider les conditions nécessaires et suffisantes de robustesse et de cohérence établies respectivement dans les sections IV.1.7 et V.2. Pour cela, une

soixantaine de problèmes ont été générés. Chacun d'eux est résolu successivement selon :

- une approche globale. Le modèle correspondant est le modèle \mathcal{G} de la section III.2.3.
- une approche hiérarchisée non robuste mais cohérente dans laquelle est mis en œuvre un processus statique de désagrégation. Le modèle agrégé est le modèle \mathcal{A} décrit dans la section III.3.3. Le modèle de désagrégation cohérent est le modèle $\hat{\mathcal{D}}^{t,1,k}$ de la section V.2.2.
- une approche hiérarchisée robuste et cohérente dans laquelle un processus statique de désagrégation est aussi mis en œuvre. Le modèle agrégé robuste est dans ce cas le modèle $\hat{\mathcal{A}}^{*i}$ décrit dans la section IV.1.8 pour lequel la grandeur $\bar{x}_{i,j,t\tau}^*$ intervenant dans le paramètre agrégé $Q_{i,u,v,t}$ est égale à $\frac{cap_{i,t,\tau}}{w_{j,i,j}} \forall j$.

Les caractéristiques des problèmes considérés sont :

- *Système de production* :
 - $N = 1$ produit dont la gamme comprend $J_1 = 10$ opérations nécessitant une ressource différente,
 - $R = 10$ ressources ($r = 1, \dots, 10$) telles que $\begin{cases} cap_{r,t,\tau} = (100, 55) & \forall r, \forall t, \forall \tau \\ w_{r,1,r} = 1 & \forall r \end{cases}$
- *Système de décision* :
 - Planification sur un horizon discrétisé en $\Theta=72$ périodes élémentaires,
 - Objectif : Minimisation des stocks d'en-cours.
 - Paramètres du niveau détaillé :
 - Demandes $d_{1,t,\tau} = (90, 30) \quad \forall t, \forall \tau$
 - Coût unitaire de stockage = 1 (cf fonction objectif des modèles \mathcal{G} et $\hat{\mathcal{D}}^{t,1,k}$)
 - Paramètres du niveau agrégé :
 - Planification sur un horizon de $T = 4$ macro-périodes ($k = 18$ périodes).
 - Paramètres $D_{1,t}$ et $CAP_{r,t}$ correspondant aux relations (III.5) et (III.6)
 - Paramètre de coût agrégé $H_{i,j,t} = 1 \quad \forall j, \forall t$ (cf fonction objectif du modèle \mathcal{A})

La charge correspondante vaut $\sigma_{ch} = 90\%$. Ces problèmes sont pris volontairement très chargés de façon à créer quelques cas d'infaisabilité. Lorsque le problème s'avère faisable (c'est à dire que le modèle détaillé admet une solution), le processus de désagrégation est conduit sur toutes les macro-périodes de l'horizon afin d'évaluer le coût global de la solution élaborée par la structure hiérarchisée. Le tableau suivant résume les résultats obtenus vis à vis de la propriété de faisabilité :

	Approche globale	Approche hiérarchisée non robuste		Approche hiérarchisée robuste	
		Niv. Agrégé	Niv. Détaillé	Niv. Agrégé	Niv. Détaillé
Ensemble de problèmes infaisables	Infaisable	Faisable	Infaisable	Infaisable	-
Ensemble de problèmes faisables	Faisable	Faisable	Infaisable	Faisable	Faisable

Table VI.1: Influence de la coordination sur la faisabilité des solutions

Deux situations distinctes permettent de mettre en évidence l'action des conditions de robustesse sur le processus de planification :

- Dans le cas de problèmes n'admettant pas de solution, le niveau agrégé de la structure hiérarchisée non robuste a trouvé systématiquement une solution. L'infaisabilité du problème

n'est alors détectée que lors de la désagrégation. Au contraire, dans la structure hiérarchisée robuste, l'infaisabilité est détectée dès le niveau agrégé.

- Dans le cas de problèmes admettant une solution, le niveau agrégé de la structure hiérarchisée non robuste élabore une solution. Mais celle-ci ne peut jamais être suivie d'une désagrégation faisable et donc aucun plan de production ne peut être établi. Par contre, la structure hiérarchisée robuste et cohérente fournit toujours une solution. Ceci confirme ainsi l'aspect nécessaire et suffisant des conditions de robustesse et de cohérence.

Dans ce contexte d'étude, les conditions de robustesse et de cohérence garantissent donc qu'un plan de production peut être fourni par la structure de décision si ce plan existe.

VI.2.4.2 Amélioration de la qualité des solutions

Parallèlement à l'analyse de la faisabilité, ces expérimentations ont montré que l'écart de coût entre la solution élaborée par l'approche globale et celle obtenue par l'approche hiérarchisée robuste est de l'ordre de 10%. Dans cette étude, le critère agrégé utilisé pour établir un *plan au plus tard* pénalise de la même manière les stocks d'en cours sans tenir compte de l'avancement des produits ($H_{i,j,t} = 1$). Cette fonction objectif est donc analogue à celle du niveau détaillé (coût $h_{i,j,\theta}$ associé aux variables $s_{i,j,\theta}$ égal à 1).

Ce paragraphe montre que la qualité des solutions peut être notablement améliorée lorsque le critère prend en compte l'avancement des produits dans leurs gammes de fabrication.

Générer un plan au plus tard consiste à lancer la fabrication de telle manière que les produits restent le moins longtemps possible dans l'unité de production. La difficulté est que le niveau agrégé ne contrôle que les états en fin de macro-périodes. Ceux-ci fournissent une information très incomplète sur la façon dont les produits évoluent dans le système au cours de la macro-période.

Cependant, un produit en attente de l'opération de rang j induit que celui-ci a été lancé au minimum depuis $j - 1$ périodes élémentaires. Par conséquent, pour minimiser globalement les en-cours détaillés, le niveau agrégé doit pénaliser d'autant plus fortement les produits stockés que ceux-ci sont en attente d'une opération de rang j grand. Dans ces conditions, la valeur du paramètre agrégé $H_{i,j,t}$ doit être croissante suivant les valeurs de j . Dans cette étude, $H_{i,j,t}$ est choisi tel que :

$$H_{i,j,t} = j$$

Une deuxième série d'expérimentations est lancée. Les problèmes considérés possèdent les mêmes caractéristiques que ceux définis au paragraphe VI.2.4.1. Cette expérimentation vise à évaluer l'écart de coût entre les solutions élaborées par l'approche globale (valeur optimale) et respectivement l'approche hiérarchisée robuste avec $H_{i,j,t} = 1$ et l'approche hiérarchisée robuste avec $H_{i,j,t} = j$. Les écarts obtenus sont fournis par le tableau suivant :

	Approche hiérarchisée robuste avec $H_{i,j,t} = 1$	Approche hiérarchisée robuste avec $H_{i,j,t} = j$
Ensemble de problèmes avec $h_{i,j,\theta} = 1$	10, 2%	0%
Ensemble de problèmes avec $h_{i,j,\theta} = U(20, 15)$	14, 85%	0.52%

Table VI.2: Evaluation de la qualité des solutions

Ces résultats montrent donc que la structure hiérarchisée affiche de très bonnes performances tant du point de vue de la coordination des décisions (faisabilité) que de la qualité des solutions

élaborées (vis à vis de la recherche d'un plan au plus tard). Par ailleurs, il faut noter que le gain moyen en temps de calcul pour l'obtention des décisions associées à la macro-période 1 (horizon de décision détaillé) est de 20. Remarquons toutefois que ce gain varie selon la valeur du facteur d'agrégation k .

VI.2.5 Problèmes de planification multi-produits, multi-étapes, multi-ressources

Cette autre série d'expérimentations vise à évaluer les performances de l'approche hiérarchisée dans le cadre du problème général. La structure de décision mise en œuvre correspond à celle décrite dans la section VI.1 (approche nécessaire pour le partage des ressources).

VI.2.5.1 Caractéristiques des problèmes considérés

Ces expérimentations visent à valider les conditions suffisantes de robustesse établies dans la section IV.2.4.1. Un processus statique de désagrégation est utilisé et met donc en jeu les conditions nécessaires et suffisantes de cohérence établies la section V.2. Chacun des problèmes est résolu successivement selon :

- une approche globale. Le modèle correspondant est le modèle \mathcal{G} de la section III.2.3.
- une approche hiérarchisée robuste et cohérente. Le processus statique de désagrégation s'appuie sur le modèle $\hat{\mathcal{D}}^{t,1,k}$ de la section V.2.2. Le modèle agrégé robuste du sous-niveau 2 correspond au modèle $\hat{\mathcal{A}}^i$ décrit dans la section IV.1.8. La procédure de partage des ressources du sous-niveau 1 intègre le modèle agrégé \mathcal{A} de la section III.3.3 et la grandeur $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ est calculée à partir des relations (IV.18) et (IV.20).

Les caractéristiques des problèmes considérés sont :

- *Système de production* :
 - $N = 8$ produits possédant chacun une gamme comprenant $J_i = 10$ opérations,
 - $R = 10$ ressources ($r = 1, \dots, 10$) $\left\{ \begin{array}{l} cap_{r,t,\tau} \text{ dépend de } \sigma_{ch} \\ w_{r,1,\tau} = 1 \quad \forall r \end{array} \right.$
- *Système de décision* :
 - Planification sur un horizon discrétisé en $\Theta=72$ périodes élémentaires,
 - Objectif : Minimisation des stocks d'en-cours.
 - Paramètres du niveau détaillé :
 - Demandes $d_{i,t,\tau}$ dépend de σ_{ch}
 - Coût unitaire de stockage = 1 (cf fonction objectif des modèles \mathcal{G} et $\hat{\mathcal{D}}^{t,1,k}$)
 - Paramètres du niveau agrégé :
 - Planification sur un horizon de $T = 6$ macro-périodes ($k = 12$ périodes).
 - Paramètres $D_{i,t}$ et $CAP_{r,t}$ correspondant aux relations (III.5) et (III.6)
 - Paramètre de coût agrégé $H_{i,j,t} = j \quad \forall j, \forall t$ (cf fonction objectif du modèle \mathcal{A})

Pour tenir compte de l'influence de la valeurs des capacités et des demandes sur le processus de décision, différentes classes de problèmes ($\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d$) sont définies. Dans cette étude, le taux de charge σ_{ch} varie de 60% à 95%. Celui-ci permet de fixer les paramètres b_{cap} et b_d . Pour chacun de ces taux de charges, différents écarts relatifs σ_{cap} et σ_d sont combinés. Le paramètre σ_{cap} varie de 5% à 50% et σ_d de 5% à 70%. Les résultats qui suivent sont ainsi basés sur la résolution de plus de 1000 problèmes de planification.

VI.2.5.2 Complexité des modèles

La désagrégation des décisions agrégées peut être réalisée soit pour la première macro-période uniquement, soit pour l'horizon complet de planification (désagrégation complète du plan agrégé). Les résultats sont donnés dans ces deux contextes.

La Table VI.3 donne la taille (nombre de variables, nombre de contraintes) et la complexité associée à l'algorithme du Simplexe (relation (II.2)) de chaque modèle du problème de planification décrit précédemment.

	Approche globale	Approche hiérarchisée robuste et cohérente			
		Sous-niveau 1 du niveau agrégé	Sous-niveau 2 du niveau agrégé	Niveau détaillé	
				1 macro-période	T macro-périodes
Variables	12096	1488	8×126	2016	6×2016
Contraintes	12816	588	8×462	2296	6×2296
Complexité	$1.96 \cdot 10^{13}$	$1.85 \cdot 10^9$	$8 \times 4.26 \cdot 10^8$	$8.18 \cdot 10^{10}$	$6 \times 8.18 \cdot 10^{10}$

Table VI.3: Taille et complexité de chaque modèle

Ce tableau montre que les décisions associées à l'horizon de décision détaillé peuvent être obtenues par l'approche hiérarchisée avec un gain théorique en complexité égal à 225 ($1.96 \cdot 10^{13} / (1.85 \cdot 10^8 + 8 \times 4.26 \cdot 10^8 + 8.18 \cdot 10^{10})$) par rapport à l'approche globale.

Afin d'évaluer le gain en complexité obtenu en pratique, les temps CPU ont été mesurés. Ces temps correspondent à la durée totale du processus de planification. Outre la résolution des modèles linéaires, ils englobent ainsi les temps de calcul des paramètres $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$ et $Q_{i,u,v,t}$, la génération des matrices de chaque modèle à partir de données stockées sur disque, le transfert des solutions entre niveaux de décision par l'intermédiaire de fichiers, etc.

Notons Δt_G , le temps CPU pour l'approche globale et Δt_H , le temps CPU total pour l'approche hiérarchisée correspondant à la somme :

$$\Delta t_H = \underbrace{\text{Temps CPU du sous-niveau 1}}_{\substack{\text{Niveau agrégé} \\ \text{Résolution du modèle agrégé} \\ \text{Calcul de } \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \text{ et } Q_{i,u,v,t}}} + \underbrace{\text{Temps CPU du sous-niveau 2}}_{\substack{\text{Niveau agrégé} \\ \text{Résolution des } N \text{ modèles agrégés robustes}}} + \underbrace{\text{Temps CPU pour la désagrégation}}_{\substack{\text{Niveau détaillé} \\ \text{Résolution du ou des } T \text{ modèles de désagrégation cohérents}}}$$

Ainsi, le gain en temps CPU est défini par : $G_{\Delta t} = \frac{\Delta t_G}{\Delta t_H}$

La Table VI.4 donne les gains moyens. Ces valeurs sont obtenues en séparant les problèmes en deux sous-ensembles de classes correspondant respectivement à des triplets possédant de faibles valeurs ($\sigma_{ch} \leq 70\%$, $\sigma_{cap} \leq 15\%$, $\sigma_d \leq 15\%$) et des triplets possédant de fortes valeurs ($\sigma_{ch} \geq 70\%$, $\sigma_{cap} \geq 50\%$, $\sigma_d \geq 50\%$).

Désagrégation de la macro-période 1		Désagrégation des T macro-périodes	
faibles valeurs	fortes valeurs	faibles valeurs	fortes valeurs
22	16	4	3

Table VI.4: Gain moyen en temps CPU

La Table VI.5 montre la répartition moyenne du temps CPU total pour l'approche hiérarchisée sur les différentes étapes du processus de planification.

Approche globale (Δt_C)	Approche hiérarchisée robuste et cohérent (Δt_H)				
	Sous-niveau 1 du niveau agrégé	Sous-niveau 2 du niveau agrégé	Niveau détaillé 1 désagr. T désagr.		Total 1 désagr. T désagr.
1594	3.4	35	48	382	86.4 420.4

Table VI.5: Répartition de Δt_H en moyenne (en secondes)

VI.2.5.3 Qualité des solutions

Afin d'évaluer la qualité des solutions obtenues par l'approche hiérarchisée, la désagrégation est réalisée pour toutes les macro-périodes de l'horizon de planification.

VI.2.5.3.1 Faisabilité

Dans certains cas, la structure hiérarchisée peut ne pas trouver de plan agrégé robuste. Il y a principalement deux raisons :

- soit il n'existe aucune solution détaillée compatible avec une répartition constante des capacités au sein de chaque macro-période. Dans ce cas, quelle que soit la répartition élaborée par le sous-niveau 1, le sous-niveau 2 ne peut trouver de plan satisfaisant les conditions de robustesse (aspect suffisant des conditions de robustesse qui assurent l'existence d'une solution détaillée compatible avec une répartition constant des capacités).
- soit il existe des solutions détaillées avec une répartition constante des capacités mais le sous-niveau 1 choisit une répartition de capacité non satisfaisante (c'est à dire la répartition de capacité pour laquelle il existe une solution détaillé n'est pas celle définie par le sous-niveau 1).

Les expérimentations montrent que la faisabilité est assez dépendante des taux de dispersion σ_{cap} et σ_d . Les résultats sont globalement les suivants :

- $\sigma_{ch} \leq 80\%$: un plan agrégé robuste est toujours obtenu,
- $80\% \leq \sigma_{ch} \leq 90\%$: le taux de faisabilité varie dans l'intervalle [40%, 100%] selon les valeurs de σ_{cap} et σ_d ,
- $\sigma_{ch} \geq 90\%$: la structure hiérarchisée peut ne jamais trouver de solution pour les valeurs élevées de σ_{cap} et σ_d .

VI.2.5.3.2 Optimalité

Le critère retenu pour ces expérimentations est toujours la minimisation des niveaux de stocks en vue d'élaborer un plan au plus tard. Le facteur mesuré est alors l'écart de coût entre la solution obtenue par l'approche globale et celle élaborée par une approche hiérarchisée (avec $H_{i,j,t} = j$). Cet écart Δ_c est défini par :

$$\Delta_c = 100. \frac{\text{Coût optimal obtenu avec l'approche globale} - \text{Coût optimal obtenu avec l'approche hiérarchisée}}{\text{Coût optimal obtenu avec l'approche globale}}$$

L'écart Δ_c est mesuré pour différents triplets $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$. Pour un σ_{cap} donné, le facteur Δ_c est donné en fonction de σ_{ch} , chaque courbe étant paramétrée par σ_d . Le faisceau de courbe qui en résulte est représenté sur la figure VI.6 par une bande dont les bords inférieur et supérieur correspondent respectivement aux courbes paramétrées par un σ_d faible (5%) et élevé (70%).

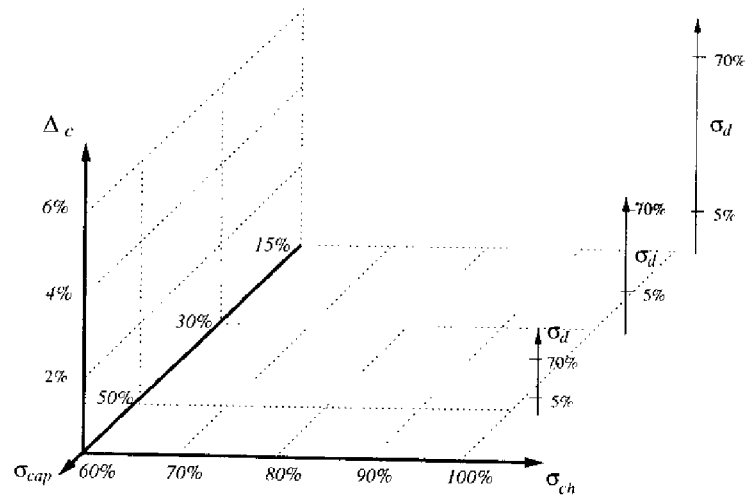


Figure VI.6: Evolution de Δ_c selon les triplets $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$

On peut remarquer que le Δ_c reste globalement satisfaisant, notamment pour des triplets $(\sigma_{ch}, \sigma_{cap}, \sigma_d)$ correspondant à des problèmes "difficiles". La raison est que ce type de problème est très contraint et donc l'ensemble des solutions admissibles est réduit. Aussi, lorsqu'une solution peut être trouvée par l'approche hiérarchisée (triplets correspondant aussi au plus fort taux d'infaisabilité), elle est généralement très proche de la solution obtenue par l'approche globale.

VI.2.6 Autonomie du niveau détaillé

L'autonomie du niveau détaillé vis à vis du niveau agrégé reste difficile à évaluer. Dans cette étude, l'idée est de matérialiser l'autonomie à partir du calcul de la réduction de coût obtenue avec l'approche hiérarchisée (grâce à l'autonomie du niveau détaillé) par rapport au coût de la solution détaillée que l'on obtiendrait si l'hypothèse de répartition constante de la capacité était conservée lors de la désagrégation.

Pour cela, la méthode employée consiste à comparer du point de vue coût la solution élaborée par l'approche hiérarchisée et celle obtenue par un modèle détaillé nommé *modèle global contraint* $\mathcal{G}_{contraint}$. Ce modèle est construit à partir du modèle détaillé \mathcal{G} auquel sont ajoutées des contraintes forçant une répartition constante de la capacité détaillée des ressources pour chaque macro-période de l'horizon. La solution résultante correspond donc à la meilleure solution qu'il est possible d'obtenir avec cette hypothèse. Il faut d'ailleurs remarquer que compte tenu de l'aspect nécessaire de l'approche pour le partage des ressources, la répartition particulière établie par le sous-niveau 1 du niveau agrégé est, a priori, différente (et donc moins bonne) que celle élaborée par le modèle $\mathcal{G}_{contraint}$.

Ces expérimentations sont de plus réalisées pour différentes valeurs du facteur d'agrégation k . En effet, plus longue est la macro-période, plus grande est l'autonomie du niveau détaillé pour élaborer le plan détaillé.

La table VI.6 donne les écarts de coût Δ_c entre l'approche globale et, respectivement, l'approche hiérarchisée et le modèle global contraint $\mathcal{G}_{contraint}$. Les problèmes possèdent les mêmes caractéristiques que ceux décrits dans le paragraphe VI.2.5.1.

		$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$	$T = 6$	$T = 9$
$\sigma_{ch} = 40\%$	<i>Approche hiérarchisée</i>	0%	0.001%	0.001%	0.002%	0.002%
	<i>Modèle</i>	0.021%	0.017%	0.019%	0.0011%	0.008%
	$\mathcal{G}_{constraint}$					
$\sigma_{ch} = 50\%$	<i>Approche hiérarchisée</i>	0.018%	0.008%	0.009%	0.016%	0.021%
	<i>Modèle</i>	0.131%	0.045%	0.033%	0.021%	0.025%
	$\mathcal{G}_{constraint}$					
$\sigma_{ch} = 70\%$	<i>Approche hiérarchisée</i>	0.027%	0.018%	0.019%	0.017%	0.014%
	<i>Modèle</i>	0.184%	0.090%	0.050%	0.020%	0.013%
	$\mathcal{G}_{constraint}$					
$\sigma_{ch} = 85\%$	<i>Approche hiérarchisée</i>	0.055%	0.027%	0.060%	0.027%	0.010%
	<i>Modèle</i>	0.071%	0.077%	0.071%	0.033%	0.012%
	$\mathcal{G}_{constraint}$					

Table VI.6: Autonomie du niveau détaillé à travers les écarts $\Delta_c(\text{hiérarchisée})$ et $\Delta_c(\mathcal{G}_{constraint})$

Ces résultats font apparaître plusieurs points intéressants.

Tout d'abord, on peut constater que dans quasiment tous les cas, les solutions élaborées par l'approche hiérarchisée sont meilleures que celles obtenues avec le modèle $\mathcal{G}_{constraint}$. Ceci montre que le niveau détaillé possède bien une certaine autonomie pour élaborer sa propre répartition de capacités.

De plus, ces résultats montrent que l'écart de coût entre les solutions de l'approche hiérarchisée et celles du modèle $\mathcal{G}_{constraint}$ augmente lorsque le nombre de macro-périodes diminue. On en déduit donc que plus la macro-période est longue, plus l'autonomie du niveau détaillé est importante.

Par ailleurs, plus la macro-période est courte, plus l'écart de coût entre les solutions de \mathcal{G} et celles de $\mathcal{G}_{constraint}$ se réduit. Ceci est dû au fait que le taux de répartition des capacités peut être modifié plus souvent, permettant ainsi au système de mieux s'adapter aux variations des capacités et des demandes. Par contre, ce point est beaucoup moins net concernant l'approche hiérarchisée. La raison est qu'en fait, deux phénomènes entrent en jeu et se compensent plus ou moins. D'une part, l'approche nécessaire pour le partage des ressources associée à une fonction objectif grossière font que "l'image" détaillée des plans agrégés robustes résultants peut être relativement éloignée des solutions détaillées optimales fournies par le modèle $\mathcal{G}_{constraint}$. Aussi, lorsque les macro-périodes sont courtes, le niveau détaillé n'a alors plus suffisamment d'autonomie pour compenser ce sur-coût.

VI.2.7 Conclusion

Deux principaux points peuvent être soulignés concernant ces résultats expérimentaux :

1. Le temps CPU est largement réduit avec l'utilisation de l'approche hiérarchisée.
2. Lorsque le taux de charge est inférieur à 80%, le nombre d'infaisabilités dues à l'approche nécessaire pour le partage des ressources (sous-niveau 1) est très faible. Par ailleurs, les plans obtenus sont dans la plupart des cas assez proches de l'optimum.

VI.3 PRISE EN COMPTE DES ARRIÉRÉS DE FABRICATION

Les conditions établies aux chapitres IV et V assurent la robustesse des décisions agrégées et la cohérence des décisions détaillées. Cependant, il existe certaines situations dans lesquelles la structure décisionnelle mise en œuvre peut ne pas trouver de plan faisable. Ce fait peut provenir soit d'une capacité insuffisante des ressources du système de production, soit de la conception même du système de décision qui s'appuie dans certains cas sur une vision sur-contrainte du problème réel afin d'assurer la robustesse et la cohérence des décisions (cf §VI.2).

Pour éviter ce type de difficulté, une solution consiste à introduire la notion d'arriérés de fabrication [61] au sein des modèles de décision. Ces derniers, assimilables à des stocks algébriques, permettent d'introduire des retards dans la satisfaction des demandes.

Cette section montre que les méthodes développées dans les chapitres précédents ainsi que les résultats obtenus peuvent être adaptés aux problèmes de planification avec arriérés de fabrication afin d'assurer la robustesse et la cohérence des décisions.

VI.3.1 Problématique

Le problème de planification considéré reste celui décrit au paragraphe III.2. La différence principale réside dans le fait qu'il n'est pas sûr qu'une solution sans retard dans la livraison des produits puisse être trouvée. L'objectif du plan est donc de déterminer les volumes de production par produits, par opérations et par périodes élémentaires, de manière à satisfaire si possible aux dates prévues, les demandes de chaque produit, compte tenu des contraintes de capacité des ressources.

Les notations associées aux arriérés de fabrication sont les suivantes :

- $a_{i,t,\tau}$: arriérés de fabrication de produits i en fin de période élémentaire (t, τ) ,
- $A_{i,t}$: arriérés de fabrication de produits i en fin de macro-période t ,

Les arriérés pouvant être assimilés à un stock algébrique, la relation d'agrégation/désagrégation liant ces variables est la suivante :

$$A_{i,t} = a_{i,t,k} \quad (\text{VI.1})$$

Le modèle analytique décrivant de manière détaillée le problème global peut être formulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \equiv \mathcal{G} \equiv \\ Z &= \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\theta=1}^{\Theta} s_{i,j,\theta} + \sum_{i=1}^N \sum_{\theta=1}^{\Theta} g_{i,t} a_{i,\theta} \\ \text{sous } \begin{cases} \mathcal{G}_1 : & s_{i,j,\theta} = s_{i,j,\theta-1} + x_{i,j,\theta} - x_{i,j+1,\theta} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_2 : & x_{i,J_i+1,\theta} = d_{i,\theta} + a_{i,\theta-1} - a_{i,\theta} & i = 1, \dots, N, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_3 : & x_{i,j+1,\theta} \leq s_{i,j,\theta-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_4 : & \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,\theta} \leq \text{cap}_{r,\theta} & r = 1, \dots, R, \theta = 1, \dots, \Theta \\ \mathcal{G}_5 : & x_{i,j,\theta} \geq 0, x_{i,J_i+1,\theta} \geq 0, s_{i,j,\theta} \geq 0, a_{i,\theta} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \theta = 1, \dots, \Theta \end{cases} \end{aligned}$$

Ce modèle est donc analogue au modèle \mathcal{G} décrit au paragraphe III.2.3, sauf la contrainte \mathcal{G}_2 qui intègre maintenant les variables détaillées d'arriérés. Le paramètre $g_{i,t}$ doit pénaliser fortement les arriérés de façon à favoriser la constitution de stocks.

Le modèle analytique associé au niveau agrégé est le suivant :

$$\equiv \mathcal{A} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t} + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T G_{i,t} A_{i,t}$$

$$\text{SOUS } \begin{cases} \mathcal{A}_1 : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_2 : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} + A_{i,t-1} - A_{i,t} & i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_3 : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} X_{i,j,t} \leq CAP_{r,t} & r = 1, \dots, R, t = 1, \dots, T \\ \mathcal{A}_4 : X_{i,j,t} \geq 0, X_{i,J_i+1,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0, A_{i,t} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \end{cases}$$

La signification des différentes contraintes reste similaire à celle associée au modèle présenté au paragraphe III.3.3. Signalons simplement que les contraintes \mathcal{A}_2 lient la demande agrégée avec les arriérés, et que les contraintes \mathcal{A}_4 assurent la positivité des variables $X_{i,J_i+1,t}$.

La méthode d'analyse des interactions utilisée dans ce nouveau contexte est en fait très semblable à celle mise en œuvre dans les chapitres IV et V. Pour cette raison, les propriétés formelles et les résultats intermédiaires ne sont pas donnés dans la suite.

De plus, cette étude se place directement dans le contexte associé au problème général. Le processus de planification considéré correspond à celui décrit à la section VI.1. Une approche nécessaire pour le partage des ressources est donc adoptée et les conditions de robustesse sont donc seulement établies pour ce cas. Les conditions de cohérence sont données à la fois pour un processus statique et pour un processus dynamique de désagrégation.

VI.3.2 Analyse de la robustesse

Compte tenu des considérations précédentes, l'analyse de la robustesse peut être menée de façon analogue à celle réalisée dans la section IV.2. La démarche conduit à traiter la robustesse pour le problème général à l'aide d'un modèle des interactions associé à un produit i et une macro-période t . En supposant que le sous-niveau 1 du niveau agrégé ait déterminé une répartition particulière $\bar{x}_{i,j,t,\tau}^*$, le modèle des interactions peut être formulé de la manière suivante :

$$\equiv \mathcal{I}^{*i,t} \equiv$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1^{*i,t} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{*i,t} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} + a_{i,t,\tau-1} - a_{i,t,\tau} & \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{*i,t} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{*i,t} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{*i,t} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, x_{i,J_i+1,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, a_{i,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{*i,t} : S_{i,j,t-1} = s_{i,j,t,0} & j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_7^{*i,t} : S_{i,j,t} = s_{i,j,t,k} & j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_8^{*i,t} : A_{i,t-1} = a_{i,t,0} \\ \mathcal{I}_9^{*i,t} : A_{i,t} = a_{i,t,k} \end{cases}$$

La recherche de condition d'existence de solutions dans ce modèle est à nouveau ramenée à la recherche d'un flot compatible dans le réseau $\mathcal{R}_{direct}^{i,t}$ associé à $\mathcal{I}^{*i,t}$. Après transformation de ce dernier et application de la **propriété 1**, le problème se ramène à l'étude du flot maximum dans le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ de la figure VI.7.

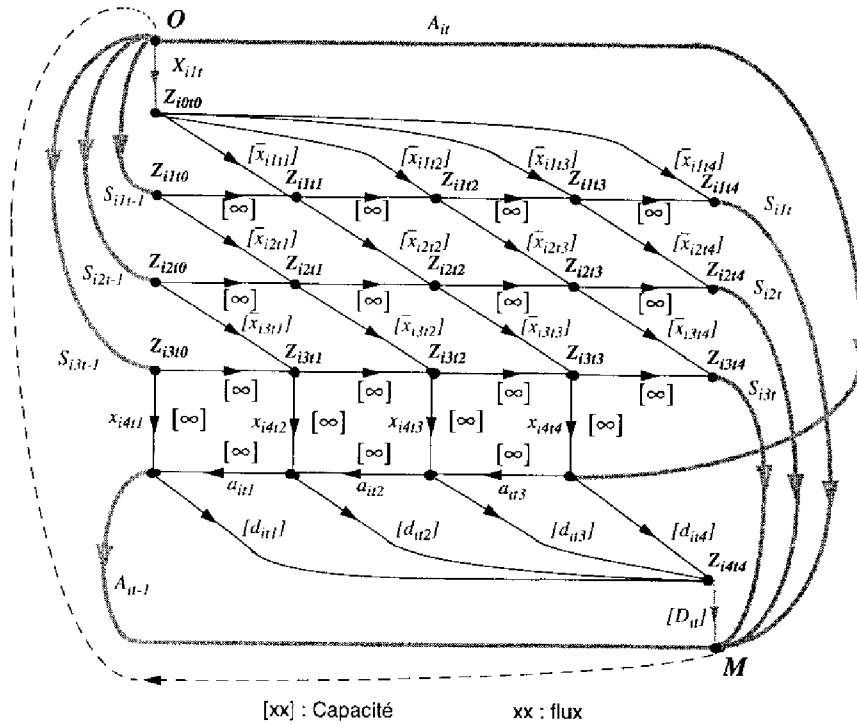


Figure VI.7: Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{I}^{*,i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

L'analyse des coupes significatives dans ce réseau conduit au théorème suivant :

Théorème 7 : Conditions suffisantes de robustesse

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t}, A_{i,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si, pour tout $i = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$,

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} \quad \begin{matrix} u = 1, \dots, J_i, v = 1, \dots, J_i \\ (u, v) \in \Delta^{i,t} \end{matrix}$$

avec
$$Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$$

Preuve :

Pour assurer l'existence de solutions au modèle $\mathcal{I}^{*,i,t}$, il faut et il suffit que la valeur $f_{max}^{i,t}$ du flot maximum dans le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ soit égale à $f_{saturation}^{i,t}$ avec :

$$f_{saturation}^{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} + A_{i,t-1} = X_{i,1,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t-1} + A_{i,t}$$

L'analyse des coupes significatives dans ce réseau permet de montrer que toute coupe possédant un niveau d'arrivée $v = J_i + 1$ est non significative. En effet, une telle coupe inclut obligatoirement un arc d'arrière dont la capacité est infinie.

Par conséquent, la capacité des coupes significatives de ce réseau est donnée par :

$$C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \quad v = 1, \dots, J_i \\ L \in \mathcal{L}_{u,v} \end{array}$$

soit encore

$$C^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t} \quad u = 1, \dots, J_i, \quad v = 1, \dots, J_i$$

$$\text{avec} \quad Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$$

d'où on déduit les conditions de robustesse suivantes par application du théorème du flot maximum et de la coupe minimum :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} \quad \begin{array}{l} u = 1, \dots, J_i, \quad v = 1, \dots, J_i \\ (u, v) \in \Delta^{i,t} \end{array} \quad (\text{VI.2})$$

□

Ces conditions de robustesse sont indépendantes de la répartition détaillée des demandes au sein de la macro-période considérée. En effet, lorsque les arriérés sont tolérés, la notion de *satisfaction des demandes aux dates prévues* ne se traduit plus par une contrainte mais seulement par un objectif qu'il est souhaitable de satisfaire au mieux. Ainsi, les variables $A_{i,t}$ et $a_{i,t,\tau}$ (qui jouent le rôle de variables d'écart dans les contraintes \mathcal{A}_2 et \mathcal{D}_2^t) sont contrôlées par l'intermédiaire de la fonction objectif.

D'après la définition donnée au paragraphe §IV.2.1., le modèle d'étude des interactions cherche à lier les variables agrégées avec les contraintes effectives issues du niveau détaillé. Or, les arriérés de fabrication ne sont pas contraints au sein de ce modèle. Il est donc naturel qu'ils n'apparaissent pas dans les conditions de robustesse.

Cependant, les conditions (VI.2) peuvent s'avérer très insuffisantes si l'on considère la qualité des solutions obtenues. Elles peuvent mener à l'élaboration de plans dans lesquelles apparaissent de nombreux arriérés qui ne sont pas nécessairement justifiés par des limitations de capacités. En effet, la non-prise en compte de la répartition détaillée des demandes au niveau agrégé se traduit par des niveaux de stocks $S_{i,j,t-1}$ insuffisants pour satisfaire aux dates prévues les demandes de la macro-période t .

C'est pourquoi il est intéressant de modifier le modèle des interactions de façon à ce que le niveau agrégé puisse contrôler la valeur des arriérés détaillés au sein d'une macro-période. Ceci peut être réalisé par l'introduction d'une variable supplémentaire notée $B_{i,t}$ qui fixe une borne supérieure pour tout arriéré détaillé en produit i dans la macro-période t . La contrainte $\mathcal{I}_{10}^{i,t}$ associée est introduite dans le modèle des interactions :

$$\mathcal{I}_{10}^{i,t} : a_{i,t,\tau} \leq B_{i,t} \quad \tau = 1, \dots, k-1$$

Dans ces conditions, le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ correspondant est donné sur la figure VI.8.

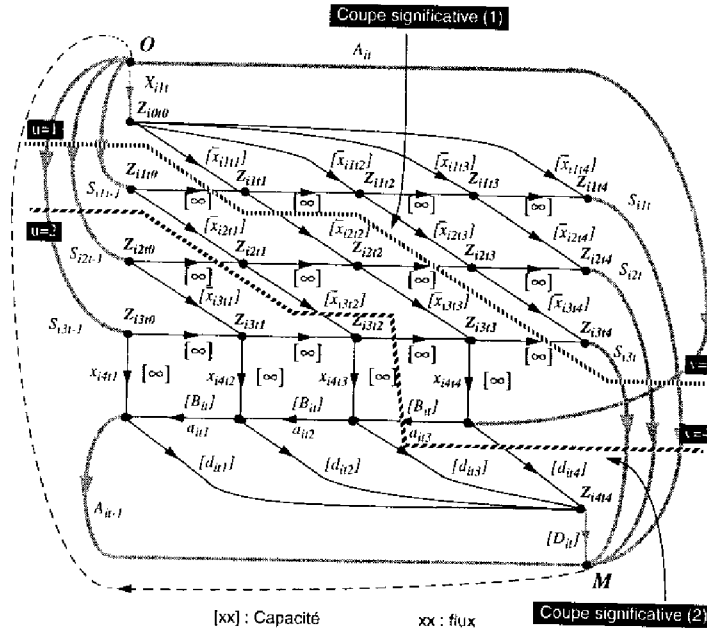


Figure VI.8: Réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ associé au modèle $\mathcal{L}^{i,t}$ ($J_i = 3, k = 4$)

L'analyse des coupes significatives dans ce réseau conduit alors aux conditions de robustesse énoncées dans le théorème suivant :

Théorème 8 : Conditions suffisantes de robustesse

Le plan agrégé $\{S_{i,j,t}, A_{i,t} \mid i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T\}$ est robuste si pour tout $i = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$,

- $u = 1, \dots, J_i, v = 1, \dots, J_i + 1, (u, v) \in \Delta^{i,t}$:

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - A_{i,t} + A_{i,t-1} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t}$$

avec $Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$
- $u = 1, \dots, J_i, v = J_i + 1, (u, v) \in \Delta^{i,t}$:

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - A_{i,t-1} + B_{i,t} \geq D_{i,t} - Q'_{i,u,v,t}$$

avec $Q'_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right)$

Preuve :

La valeur $f_{max}^{i,t}$ du flot maximum dans le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ reste égale à $f_{saturation}^{i,t}$ telle que :

$$f_{saturation}^{i,t} = D_{i,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t} + A_{i,t-1} = X_{i,1,t} + \sum_{j=1}^{J_i} S_{i,j,t-1} + A_{i,t}$$

L'analyse des coupes significatives dans ce réseau permet de distinguer plusieurs types de coupe :

- Cas où $u = 1, \dots, J_i$, $v = 1, \dots, J_i$, $L \in \mathcal{L}_{u,v}$:

$$C^{i,t}(u, v, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t}$$

soit encore,

$$C^{i,t}(u, v) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u,v,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t} \quad \text{où } Q_{i,u,v,t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$$

- Cas où $u = 1, \dots, J_i$, $v = J_i + 1$, $L \in \mathcal{L}_{u, J_i+1}$:

Dans ce cas, 3 types de coupes sont à examiner :

1. Comme il n'y a pas de borne associée à la variable $x_{i, J_i+1, t, \tau}$, la capacité des arcs correspondants dans le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t}$ est considérée comme infinie. Par conséquent, la capacité $C^{i,t}(u, J_i + 1, L)$ de toute coupe comprenant ces arcs est infinie. Ces coupes sont donc non significatives.
2. Dans le cas où $L \in \mathcal{L}_{u, J_i+1}$ est une matrice telle que $l_{J_i, \tau} = 0$ pour tout $\tau = 1, \dots, k$, la coupe correspondante ne comprend aucun arc relatif à la demande (cf coupe (1) sur Fig VI.8). La capacité de cette coupe est alors :

$$C^{i,t}(u, J_i + 1, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t}$$

$$\text{soit encore, } C^{i,t}(u, J_i + 1) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q_{i,u, J_i+1, t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t} + A_{i,t}$$

$$\text{avec } Q_{i,u, J_i+1, t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u, J_i+1}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right)$$

3. Dans le cas où $L \in \mathcal{L}_{u, J_i+1}$ est une matrice telle que $\exists \theta \leq k - 2$ tel que $l_{J_i, \tau} = 1$ pour $\tau = \theta, \dots, k - 2$, la coupe correspondante comprend au moins un arc relatif à la demande (cf coupe (2) sur Fig VI.8). La capacité de cette coupe s'exprime par :

$$C^{i,t}(u, J_i + 1, L) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + B_{i,t} + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1, \tau} d_{i,t,\tau} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

$$\text{soit encore, } C^{i,t}(u, J_i + 1) = \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + Q'_{i,u, J_i+1, t} + B_{i,t} + \sum_{j=1}^{v-1} S_{i,j,t}$$

$$\text{avec } Q'_{i,u, J_i+1, t} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u, J_i+1}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=1}^k l_{J_i+1, \tau} d_{i,t,\tau} \right)$$

Par application du théorème du flot maximum et de la coupe minimum, on déduit les conditions de robustesse suivantes :

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} + A_{i,t} - A_{i,t-1} \geq D_{i,t} - Q_{i,u,v,t} \quad \begin{matrix} u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1 \\ (u, v) \in \Delta^{i,t} \end{matrix} \quad (\text{VI.3})$$

$$\sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + B_{i,t} - A_{i,t-1} \geq D_{i,t} - Q'_{i,u, J_i+1, t} \quad \begin{matrix} u = 1, \dots, J_i, \\ (u, J_i + 1) \in \Delta^{i,t} \end{matrix} \quad (\text{VI.4})$$

□

Les conditions (VI.3) limitent la production agrégée afin d'assurer que celle-ci puisse être répartie au niveau détaillé sur les différentes périodes élémentaires.

Les conditions (VI.4) tiennent compte de la répartition détaillée des demandes (par le paramètre agrégé $Q'_{i,u,J_i+1,t}$) dans le but d'améliorer le contrôle des flux d'arriérés détaillés. En effet, elles fixent une borne inférieure pour les niveaux de stocks à la fin de la macro-période $t - 1$ afin de satisfaire du mieux possible les demandes détaillées de la macro-période t .

Le but du processus de planification est de déterminer un plan de production satisfaisant, si possible aux dates prévues, la demande de chaque produit. Ainsi, le niveau agrégé doit tenir cet objectif en établissant des solutions dans lesquelles les arriérés de fabrication sont évités dans la mesure du possible. Pour chaque produit i , le modèle de décision agrégé minimise les variables agrégées $A_{i,t}$ (flux d'arriérés entre macro-périodes) et $B_{i,t}$ (borne supérieure pour les flux d'arriérés au sein des macro-périodes). Le modèle agrégé robuste \hat{A}^i est donc :

$$\hat{A}^i \equiv \hat{A}^i \equiv Z = \min \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^T H_{i,j,t} S_{i,j,t} + \sum_{t=1}^T G_{i,t} A_{i,t} + \sum_{t=1}^T F_{i,t} B_{i,t}$$

$$\text{SOUS } \begin{cases} \hat{A}_1^i : S_{i,j,t} = S_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - X_{i,j+1,t} & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \hat{A}_2^i : X_{i,J_i+1,t} = D_{i,t} + A_{i,t-1} - A_{i,t} & t = 1, \dots, T \\ \hat{A}_3^i : X_{i,j,t} \geq 0, X_{i,J_i+1,t} \geq 0, S_{i,j,t} \geq 0, A_{i,t} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ \hat{A}_4^i : \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} - \sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} + A_{i,t} - A_{i,t-1} \geq D_{i,t} - Q'_{i,u,v,t} & u = 1, \dots, J_i, v = u, \dots, J_i + 1, \\ & t = 1, \dots, T, (u, v) \in \Delta^{i,t} \\ \hat{A}_5^i : \sum_{j=u}^{J_i} S_{i,j,t-1} + B_{i,t} - A_{i,t-1} \geq D_{i,t} - Q'_{i,u,J_i+1,t} & u = 1, \dots, J_i, t = 1, \dots, T \\ & (u, J_i + 1) \in \Delta^{i,t} \end{cases}$$

Exemple :

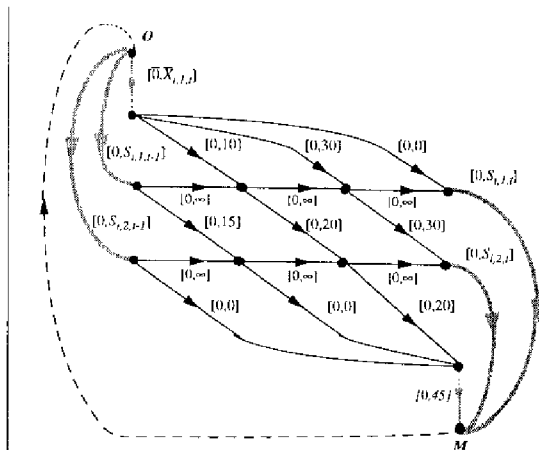


Figure VI.9: Réseau associé à la macro-période 1

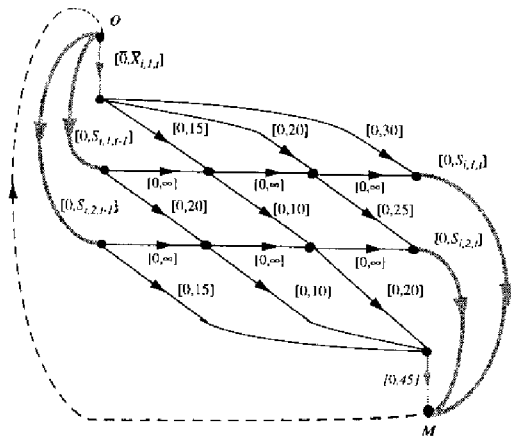


Figure VI.10: Réseau associé à la macro-période 2

Pour illustrer cette notion d'arriéré de fabrication, le problème considéré dans l'exemple du paragraphe IV.1.8 est repris. Les figures VI.9 et VI.10 rappellent les caractéristiques de ce problème. Mais, on suppose maintenant que les stocks initiaux sont :

$$\begin{cases} S_{i,1,0} = 0 \\ S_{i,2,0} = 0 \end{cases}$$

En reprenant les conditions de robustesse de l'exemple du paragraphe IV.1.7.1. (sans prise en compte des arriérés), on déduit les conditions associées à la macro-période 1 :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \leq 20 & (a) \\ S_{i,2,1} \leq 45 & (b) \\ 0 \leq -10 & (c) \end{cases}$$

En supposant que les stocks sont nuls en fin d'horizon ($S_{i,1,2} = S_{i,2,2} = 0$), les conditions de robustesse associées à la macro-période 2 deviennent :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq -20 & (\text{non active}) \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 10 & (\text{non active}) \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 35 & (d) \\ S_{i,2,1} \geq -10 & (\text{non active}) \\ S_{i,2,1} \geq 15 & (e) \end{cases}$$

Ces conditions de robustesse montrent qu'avec ces stocks initiaux, le problème n'admet pas de solution. En effet, la contrainte (c) n'est évidemment pas vraie et les contraintes (a) et (d) sont en contradiction. Par conséquent, aucun plan agrégé robuste ne peut être construit.

Par la prise en compte de la notion d'arriérés, une solution à ce problème peut être trouvée. L'application des relations (VI.3) et (VI.4) conduit à des conditions de robustesse relâchées grâce aux variables $A_{i,t}$ et $B_{i,t}$.

En tenant compte des stocks initiaux et en supposant que $A_{i,0} = 0$, les conditions de la macro-période 1 sont :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} - A_{i,1} \leq 20 & (a) \\ S_{i,2,1} - A_{i,1} \leq 45 & (b) \\ 0 - A_{i,1} \leq -10 & (c) \end{cases}$$

En supposant que les stocks sont nuls en fin d'horizon ($S_{i,1,2} = S_{i,2,2} = 0$), les conditions de robustesse associées à la macro-période 2 deviennent :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} + A_{i,2} - A_{i,1} \geq -20 & (\text{non active}) \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} + A_{i,2} - A_{i,1} \geq 10 & (\text{non active}) \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} + A_{i,2} - A_{i,1} \geq 35 & (d) \\ S_{i,2,1} + A_{i,2} - A_{i,1} \geq -10 & (\text{non active}) \\ S_{i,2,1} + A_{i,2} - A_{i,1} \geq 15 & (e) \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} + B_{i,2} - A_{i,1} \geq 25 & (f) \\ S_{i,2,1} + B_{i,2} - A_{i,1} \geq 15 & (g) \end{cases}$$

La condition (c) impose que $A_{i,1} = 10$. Les conditions (a), (d) et (f) fixent les autres variables. La résolution du problème avec le modèle agrégé \hat{A}^i donne donc maintenant la solution suivante :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} = 5 & S_{i,1,2} = 0 \\ S_{i,2,1} = 25 & S_{i,2,2} = 0 \\ A_{i,1} = 10 & A_{i,2} = 15 \\ B_{i,1} = 0 & B_{i,2} = 5 \end{cases} \quad \text{impliquant que} \quad \begin{cases} X_{i,1,1} = 45 & X_{i,1,2} = 25 \\ X_{i,2,1} = 35 & X_{i,2,2} = 30 \end{cases}$$

Un plan agrégé robuste est donc établi dans lequel le niveau maximum d'arriérés pour la macro-période 2 a pour valeur $B_{i,2} = 5$.

□

VI.3.3 Analyse de la cohérence

Comme au chapitre V, la cohérence des décisions détaillées est étudiée dans le cadre d'un processus statique de désagrégation puis d'un processus dynamique de désagrégation.

Les contraintes que doivent satisfaire les décisions détaillées sont regroupées dans le modèle de désagrégation $\mathcal{D}^{t,\tau d,\tau f}$. Celui-ci doit être complété avec les relations liant décisions agrégées et détaillées.

$$\equiv \mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau} + \sum_{i=1}^N \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} a_{i,t,\tau}$$

sous

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{D}_1^{t,\tau_d,\tau_f} : & s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_2^{t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} + a_{i,t,\tau-1} - a_{i,t,\tau} & i = 1, \dots, N, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_3^{t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_4^{t,\tau_d,\tau_f} : & \sum_{(i,j) \in O_\tau} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq \text{cap}_{r,t,\tau} & r = 1, \dots, R, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_5^{t,\tau_d,\tau_f} : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0, x_{i,J_i+1,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, a_{i,t,\tau} \geq 0 & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \end{array} \right.$$

Ce modèle ne nécessite pas de commentaire particulier, si ce n'est la présence de la contrainte $\mathcal{D}_2^{t,\tau_d,\tau_f}$ qui relie la demande détaillée et les arriérés.

Le modèle des interactions correspondant à ce problème est alors :

$$\equiv \mathcal{I}^{i,t,\tau_f} \equiv$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{i,t,\tau_f} : & s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_2^{i,t,\tau_f} : & x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} + a_{i,t,\tau-1} - a_{i,t,\tau} & \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_3^{i,t,\tau_f} : & x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_4^{i,t,\tau_f} : & x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_5^{i,t,\tau_f} : & x_{i,j,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i + 1, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_6^{i,t,\tau_f} : & s_{i,j,t,\tau} \geq 0, a_{i,t,\tau} \geq 0 & j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_f + 1, \dots, k \\ \mathcal{I}_8^{i,t,\tau_f} : & s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_{10}^{i,t,\tau_f} : & a_{i,t,k} = A_{i,t} & \end{array} \right.$$

VI.3.4 Processus statique de désagrégation

Par analogie à l'étude menée dans la section V.2, on peut montrer que le modèle des interactions se réduit au modèle $\mathcal{I}^{t,k}$ suivant :

$$\equiv \mathcal{I}^{t,k} \equiv$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{t,k} : & s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{I}_2^{t,k} : & a_{i,t,k} = A_{i,t} & i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

La totalité des contraintes détaillées de la macro-période t est déjà prise en compte dans le modèle de décision du niveau détaillé. C'est pourquoi les seules contraintes à respecter pour assurer la cohérence de l'état $s_{i,j,t,k}$ (et en conséquence, de la désagrégation du plan agrégé sur la macro-période t), correspondent tout simplement aux relations d'agrégation/désagrégation (III.2) et (VI.1) pour cette macro-période t .

Théorème 9 : Conditions nécessaires et suffisantes de cohérence

Etant donné les états agrégés robustes $\{S_{i,j,t} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=1,\dots,k\}$ associée à un processus statique est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si et seulement si

$$\begin{aligned} s_{i,j,t,k} &= S_{i,j,t} & i &= 1,\dots,N, j = 1,\dots,J_i \\ a_{i,t,k} &= A_{i,t} & i &= 1,\dots,N \end{aligned}$$

Preuve :

| Evidente compte tenu de qui précède.
□

VI.3.5 Processus dynamique de désagrégation

Une démarche analogue à celle de la section V.3 peut être utilisée pour l'étude de la cohérence. De plus, comme dans le cas des conditions de robustesse, il paraît nécessaire de contrôler les arriérés relatifs aux périodes (t, τ_f) à $(t, k-1)$. L'idée est d'utiliser une variable b_{i,t,τ_f} qui fixe un niveau maximum d'arriérés sur les périodes (t, τ_f) à $(t, k-1)$. Le modèle des interactions correspondant devient alors :

$$\equiv \mathcal{I}^{i,t,\tau_f} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{I}_1^{i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} & j = 1,\dots,J_i, \tau = \tau_f + 1,\dots,k \\ \mathcal{I}_2^{i,t,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} + a_{i,t,\tau-1} - a_{i,t,\tau} & \tau = \tau_f + 1,\dots,k \\ \mathcal{I}_3^{i,t,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} & j = 1,\dots,J_i, \tau = \tau_f + 1,\dots,k \\ \mathcal{I}_4^{i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \leq \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* & j = 1,\dots,J_i, \tau = \tau_f + 1,\dots,k \\ \mathcal{I}_6^{i,t,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, x_{i,J_i+1,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, a_{i,t,\tau} \geq 0 & j = 1,\dots,J_i, \tau = \tau_f + 1,\dots,k \\ \mathcal{I}_8^{i,t,\tau_f} : s_{i,j,t,k} = S_{i,j,t} & j = 1,\dots,J_i \\ \mathcal{I}_{10}^{i,t,\tau_f} : a_{i,t,k} = A_{i,t} & \\ \mathcal{I}_{11}^{i,t,\tau_f} : a_{i,t,\tau} \leq b_{i,t,\tau_f} & \tau = \tau_f + 1,\dots,k \end{array} \right.$$

Le réseau $\mathcal{R}_{analyse}^{i,t,\tau_f}$ associé à ce modèle est donné par la figure VI.11. L'analyse des coupes significatives conduit aux conditions de cohérence données dans le théorème suivant :

Théorème 10 : Conditions suffisantes de cohérence

Etant donné les états agrégés robustes $\{S_{i,j,t} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i\}$, la désagrégation $\{s_{i,j,t,\tau} \mid i=1,\dots,N, j=1,\dots,J_i, \tau=\tau_d,\dots,\tau_f\}$ associée à un processus dynamique est cohérente avec les décisions agrégées de la macro-période t si

$$\begin{aligned} \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - a_{i,t,\tau_f} &\geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} - A_{i,t} + q_{i,u,t,\tau_f} & u &= 1,\dots,J_i \\ \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - a_{i,t,\tau_f} &\geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau} - b_{i,t,\tau_f} - q'_{i,u,t,\tau_f} & u &= 1,\dots,J_i \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{i,u,t,\tau_f} = \max_{v=u,\dots,J_i+1} \left(\sum_{j=v}^{J_i} S_{i,j,t} - \min_{L \in \mathcal{L}_{u,v}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* \right) \right) \\ q'_{i,u,t,\tau_f} = \min_{L \in \mathcal{L}_{u,J_i+1}} \left(\sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{j,\tau} \bar{x}_{i,j,t,\tau}^* + \sum_{\tau=\tau_f+1}^k l_{J_i+1,\tau} d_{i,t,\tau} \right) \end{array} \right.$$

Preuve :

Selon la méthode présentée à la section V.1 et compte tenu des remarques de la démonstration du théorème 9 concernant le niveau $J_i + 1$, l'analyse des coupes significatives dans ce réseau conduit pour chaque produit i aux conditions de cohérence énoncées dans le théorème. \square

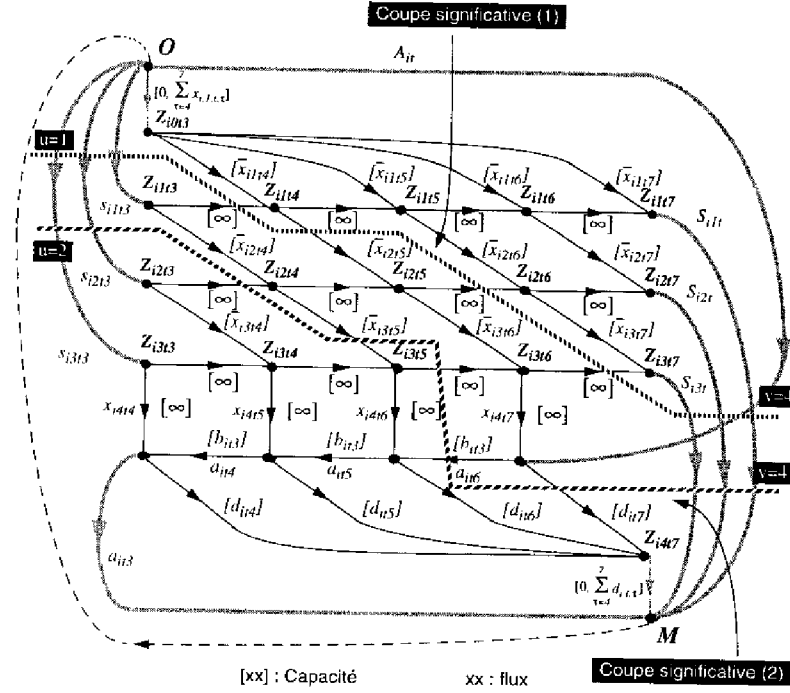


Figure VI.11: Réseau \mathcal{R}^{i,t,τ_f} associé au modèle \mathcal{I}^{i,t,τ_f} ($J_i = 3, k = 7, \tau_f = 3$)

Afin de limiter les arriérés relatifs aux périodes (t, τ_f) à (t, k) , il faut minimiser la variable b_{i,t,τ_f} lors de la désagrégation. Le modèle de désagrégation correspondant est alors :

$$\equiv \mathcal{D}^{t,\tau_d,\tau_f} \equiv$$

$$Z = \min \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} s_{i,j,t,\tau} + \sum_{i=1}^N \sum_{\tau=\tau_d}^{\tau_f} a_{i,t,\tau} + \sum_{i=1}^N b_{i,t,\tau_f}$$

SOUS

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1^{t,\tau_d,\tau_f} : s_{i,j,t,\tau} = s_{i,j,t,\tau-1} + x_{i,j,t,\tau} - x_{i,j+1,t,\tau} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_2^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,J_i+1,t,\tau} = d_{i,t,\tau} + a_{i,t,\tau-1} - a_{i,t,\tau} \quad i = 1, \dots, N, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_3^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j+1,t,\tau} \leq s_{i,j,t,\tau-1} \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_4^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{(i,j) \in O_r} w_{r,i,j} x_{i,j,t,\tau} \leq cap_{r,t,\tau} \quad \tau = 1, \dots, R, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_5^{t,\tau_d,\tau_f} : x_{i,j,t,\tau} \geq 0, x_{i,J_i+1,t,\tau} \geq 0, s_{i,j,t,\tau} \geq 0, a_{i,t,\tau} \geq 0 \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J_i, \tau = \tau_d, \dots, \tau_f \\ \mathcal{D}_6^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - a_{i,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau_f} - A_{i,t} + q_{i,u,t,\tau_f} \quad u = 1, \dots, J_i \\ \mathcal{D}_7^{t,\tau_d,\tau_f} : \sum_{j=u}^{J_i} s_{i,j,t,\tau_f} - a_{i,t,\tau_f} \geq \sum_{\tau=\tau_f+1}^k d_{i,t,\tau_f} - b_{i,t,\tau_f} - q'_{i,u,t,\tau_f} \quad u = 1, \dots, J_i \end{array} \right.$$

VI.4 PRISE EN COMPTE EXPLICITE DE L'INCERTITUDE

Les conditions établies assurent la robustesse et la cohérence à partir de la connaissance des données détaillées. Cette hypothèse a permis de mener l'analyse théorique des interactions entre niveaux de décision.

Cependant, dans certains cas, une prise en compte intégrale de ces conditions peut s'avérer difficile du fait d'une méconnaissance a priori de certaines données détaillées.

Dans ce contexte, deux voies de mise en œuvre de ces résultats peuvent être envisagées : une approche nécessaire et une approche suffisante. L'approche nécessaire consiste à construire des conditions à partir de données détaillées résultant d'une répartition détaillée a priori des données agrégées. L'approche suffisante considère de manière explicite, l'incertitude associée à certaines données détaillées. Ce travail propose une démarche correspondant à des demandes détaillées non connues mais encadrées par des bornes inférieures et supérieures déterminées.

VI.4.1 Conditions de robustesse et de cohérence

Les chapitres précédents ont montré que pour assurer la robustesse ou la cohérence "parfaite", il est nécessaire de connaître l'ensemble des données détaillées, notamment les demandes $d_{i,t,\tau}$ et les capacités $cap_{r,t,\tau}$. Ces données sont généralement disponibles pour un futur proche. Par contre, elles demeurent souvent imprécises, non fiables ou inconnues pour un futur plus lointain. Dans ce cas, des données agrégées sont fournies. L'objectif de ce paragraphe est de montrer comment à partir des données agrégées, l'incertitude sur les données détaillées peut être prise en compte pour assurer la robustesse et la cohérence des décisions.

Puisque les données détaillées ne sont pas disponibles, l'idée est de les construire a priori à partir de données agrégées que l'on peut considérer comme fiables. Dans ce travail, seule l'incertitude sur les demandes en produits et les capacités des ressources est abordée. On note ainsi :

- $\widehat{d}_{i,t,\tau}$: estimation de la demande en produit i pour la période (t, τ) , évaluée à partir de la demande agrégée $D_{i,t}$.
- $\widehat{cap}_{r,t,\tau}$: estimation de la capacité de la ressource r pour la période (t, τ) évaluée à partir de la capacité agrégée $CAP_{r,t}$.

Ainsi, les conditions sont établies avec des données détaillées précises et fiables en début d'horizon et avec des données détaillées estimées sur le reste de l'horizon. Dans ce cas, les conditions de robustesse et de cohérence conservent la même expression mais les données $d_{i,t,\tau}$ et $cap_{r,t,\tau}$ non connues sont remplacées respectivement par les données estimées $\widehat{d}_{i,t,\tau}$ et $\widehat{cap}_{r,t,\tau}$.

La suite propose différentes approches pour évaluer ces grandeurs.

VI.4.2 Approche nécessaire

Les données relatives aux premières périodes de l'horizon sont généralement connues et les conditions de robustesse et de cohérence peuvent alors être établies directement. Concernant les informations associées aux autres périodes de l'horizon, on suppose que seules des données agrégées sont disponibles.

Une approche nécessaire peut consister à ne retenir que les conditions de robustesse et de cohérence correspondant aux données connues. Cependant, cette approche simpliste peut conduire dans certains cas à de nombreux arriérés. En effet, le niveau agrégé raisonne comme si la totalité de la demande agrégée $D_{i,t}$ était située en fin de la macro-période t . Ceci permettrait d'exploiter la totalité de la capacité de la macro-période t . Le stock agrégé $S_{i,j,t-1}$ serait dans ces conditions notablement sous-évalué, les demandes détaillées pouvant s'exprimer dès les premières périodes détaillées.

Pour réduire cet effet, une solution consiste à considérer que les données agrégées sont réparties dans la macro-période suivant un profil pouvant être obtenu à partir d'une expertise. Un des profils de base est de répartir uniformément la donnée agrégée dans la macro-période. On peut donc écrire que :

$$\widehat{d}_{i,t,\tau} = \frac{D_{i,t}}{k} \quad \text{et} \quad \widehat{cap}_{r,t,\tau} = \frac{CAP_{r,t}}{k}$$

La considération de ce type de répartition permet de prendre en compte une forme de la réalité de la production à l'intérieur de la macro-période. Les stocks agrégés $S_{i,j,t-1}$ sont alors d'autant plus proches des besoins que l'expertise a permis de proposer un profil se rapprochant de la répartition réelle des grandeurs concernées.

VI.4.3 Approche suffisante

Dans ce cas, on s'intéresse au problème de planification considérant les demandes agrégées ($D_{i,t}$) connues et les demandes détaillées ($d_{i,t,\tau}$) non connues mais bornées inférieurement ($\underline{d}_{i,t,\tau}$) et supérieurement ($\bar{d}_{i,j,\tau}$), avec :

$$\sum_{\tau=1}^k \underline{d}_{i,t,\tau} \leq D_{i,t} \quad \text{et} \quad \sum_{\tau=1}^k \bar{d}_{i,t,\tau} \geq D_{i,t}$$

Des conditions de robustesse et de cohérence suffisantes peuvent être établies à partir des conditions proposées dans les paragraphes précédents 3.2 et 3.3. Les demandes $d_{i,t,\tau}$, $\tau = 1, \dots, k$ sont alors remplacées par les valeurs $\widehat{d}_{it\tau}$, $\tau = 1, \dots, k$ calculées en se basant sur un *profil au plus tôt* de la répartition des demandes dans une macro-période. Ce profil suppose les demandes égales à leur borne supérieure dans les premières périodes élémentaires, puis égales à leur borne inférieure dans les dernières périodes de la macro-période considérée de manière à respecter globalement la demande agrégée correspondante.

Le calcul de ce profil au plus tôt est précisé ci-dessous :

$$\widehat{d}_{i,t,\tau} = \min \left(\bar{d}_{i,t,\tau}, D_{it} - \sum_{l=\tau+1}^k \underline{d}_{i,t,l} - \sum_{l=1}^{\tau-1} \widehat{d}_{i,t,l} \right) \quad \text{pour } \tau \text{ variant de } 1 \text{ à } k$$

Dans ce cadre, le plan agrégé robuste est élaboré à partir de conditions suffisantes de robustesse *sur-évaluant* le plan agrégé vis à vis des demandes détaillées réelles. Ceci revient à constituer des stocks de sécurité à chaque fin de macro-période. Le processus de désagrégation dynamique permet de prendre en compte les valeurs réelles des demandes détaillées dès qu'elles sont disponibles. Ainsi, il est possible d'utiliser, lors de l'élaboration de la décision détaillée, l'autonomie accordée par le niveau supérieur.

Exemple :

Pour illustrer cette notion d'incertitude sur les données (ici, sur les demandes), le problème considéré dans l'exemple du paragraphe IV.1.8 est repris. Les figures VI.12 et VI.13 rappellent les caractéristiques de ce problème.

On suppose que les demandes détaillées sont connues pour la macro-période 1. En revanche, celles-ci sont inconnues pour la macro-période 2, mais bornées par :

$$\begin{cases} d_{i,2,1} = 10, & d_{i,2,2} = 10, & d_{i,2,3} = 10 \\ \bar{d}_{i,2,1} = 20, & \bar{d}_{i,2,2} = 20, & \bar{d}_{i,2,3} = 20 \end{cases} \quad \text{sachant que } D_{i,2} = 45$$

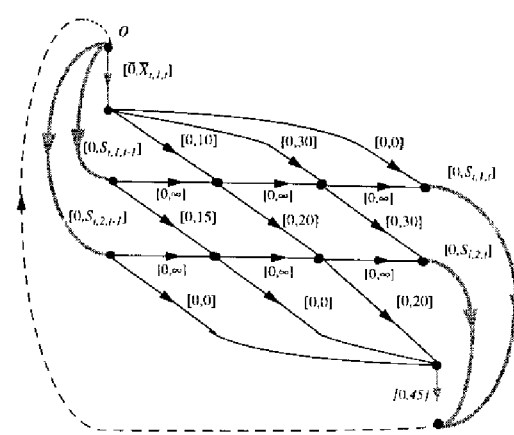
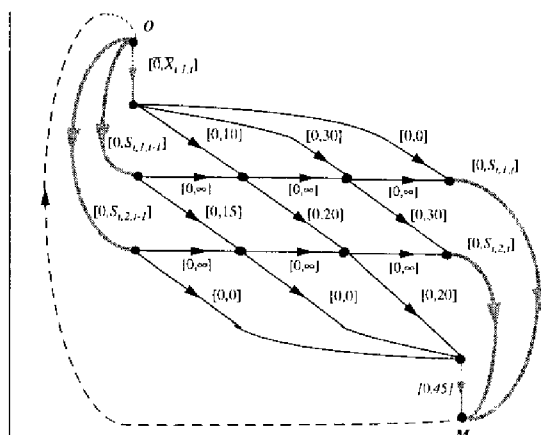


Figure VI.12: Réseau associé à la macro-période 1

Figure VI.13: Réseau associé à la macro-période 2

En supposant que les stocks initiaux sont $S_{i,1,0} = 10$ et $S_{i,2,0} = 5$, on déduit les conditions associées à la macro-période 1 :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \leq 35 & (a) \\ S_{i,2,1} \leq 50 & (b) \end{cases}$$

Le profil de demandes pour la macro-période 2 est :

$$\hat{d}_{i,2,1} = 20, \quad \hat{d}_{i,2,2} = 15, \quad \hat{d}_{i,2,3} = 10 \quad \text{d'où} \quad Q^{i,2} = \begin{pmatrix} 65 & 35 & 10 \\ & 55 & 25 \\ & & 45 \end{pmatrix}$$

En supposant que les stocks sont nuls en fin d'horizon ($S_{i,1,2} = S_{i,2,2} = 0$), les conditions de robustesse associées à la macro-période 2 deviennent :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq -20 & \text{(non active)} \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 10 & \text{(non active)} \\ S_{i,1,1} + S_{i,2,1} \geq 35 & (c) \\ S_{i,2,1} \geq -10 & \text{(non active)} \\ S_{i,2,1} \geq 20 & (d) \end{cases}$$

La contrainte (d) induit que $S_{i,2,1} = 20$ et la contrainte (c) implique que $S_{i,1,1} = 15$. Un plan agrégé robuste est donc :

$$\begin{cases} S_{i,1,1} = 15 & S_{i,1,2} = 0 \\ S_{i,2,1} = 20 & S_{i,2,2} = 0 \end{cases} \quad \text{impliquant que} \quad \begin{cases} X_{i,1,1} = 40 & X_{i,1,2} = 10 \\ X_{i,2,1} = 35 & X_{i,2,2} = 25 \end{cases}$$

Ce plan agrégé peut être suivi d'une désagrégation quelles que soient les demandes détaillées réelles vérifiant les bornes inférieures et supérieures et la valeur de la demande agrégée. Par exemple, si les demandes effectives sont les suivantes (correspondent à celles utilisées dans les exemples précédents) :

$$d_{i,2,1} = 15, \quad d_{i,2,2} = 10, \quad d_{i,2,3} = 20$$

un processus statique de désagrégation des décisions de la macro-période 2 donne le plan détaillé :

$$\begin{cases} s_{i,1,2,1} = 15 & s_{i,1,2,2} = 0 & s_{i,1,2,3} = 0 \\ s_{i,2,2,1} = 20 & s_{i,2,2,2} = 20 & s_{i,2,2,3} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{i,1,2,1} = 10 & x_{i,1,2,2} = 0 & x_{i,1,2,3} = 0 \\ x_{i,2,2,1} = 15 & x_{i,2,2,2} = 10 & x_{i,2,2,3} = 0 \end{cases}$$

□

VI.5 CONCLUSION

Ce dernier chapitre permet de montrer la manière dont les résultats théoriques des chapitres IV et V peuvent être exploités.

Pour cela, des expérimentations numériques sont réalisées et des mises en œuvre de la structure décisionnelle sont proposées pour différents contextes de production.

Les résultats expérimentaux illustrent une réduction notable des temps de calcul vis à vis d'une approche globale, et ceci, en conservant une qualité satisfaisante des solutions obtenues.

La prise en compte des arriérés de fabrication souligne l'aspect générique de la méthodologie développée pour l'analyse des interactions entre niveaux. Ces arriérés permettent de s'affranchir de la contrainte de "livraison à temps".

Enfin, la prise en compte explicite de l'incertitude dans les conditions de robustesse et de cohérence permet de montrer une façon dont ces conditions peuvent être adaptées aux informations ou données effectivement disponibles.

Ces derniers points mettent en évidence l'applicabilité et le potentiel de cette approche lorsque celle-ci est confrontée à des contextes de production complexes correspondant aux préoccupations classiques rencontrées en milieu industriel.

- CONCLUSION -



La gestion et la planification de la production se heurtent à de nombreuses difficultés liées au grand nombre de données à prendre en compte, à la nature incertaine de ces données, et au caractère dynamique du système de production. La résolution de ces problèmes peut être facilitée par la mise en œuvre de structures décisionnelles multi-niveaux. Les niveaux décisionnels sont définis à partir d'une agrégation de données, d'une désagrégation des décisions et d'horizons temporels adaptés. A chaque niveau, l'élaboration de la décision est réalisée par affinements successifs avec une dynamique appropriée. Ceci offre des avantages importants au plan de la réactivité comme au plan de l'autonomie décisionnelle.

Cependant, ces structures décisionnelles multi-niveaux ne procurent pas toujours une totale satisfaction lors de leur mise en œuvre effective. En effet, l'ignorance des interactions existant entre les niveaux de la structure conduit souvent à des dysfonctionnements importants dans le processus décisionnel.

L'étude réalisée dans cette thèse s'est focalisée sur la formalisation et l'analyse des liens existant entre niveaux afin d'aboutir à la coordination globale des décisions au sein de la structure. Cette formalisation explicite des interactions conduit aux concepts génériques de Robustesse des décisions agrégées et de Cohérence des décisions détaillées. Structurée autour de ces deux concepts, l'analyse des interactions entre niveaux vise à établir des conditions analytiques. Introduites sous forme de contraintes dans les modèles correspondants, elles assurent un fonctionnement correct de la structure décisionnelle.

La présentation de ce travail s'est efforcée de mettre en évidence les méthodes d'analyse des interactions sur un problème général de planification de la production. Cette méthode s'articule autour de la détermination de conditions d'existence de solution à un modèle d'étude appelé "modèle d'étude des interactions". L'exploitation des outils de programmation linéaire et de théorie des graphes permet alors de déterminer de manière systématique les conditions recherchées.

Dans ce travail, cette méthode d'analyse est mise en œuvre dans le cadre d'un problème de planification multi-produits, multi-étapes, multi-ressources dans lequel une notion de délai de fabrication est introduite. Ce problème est résolu au travers d'une structure de décisions à deux niveaux basés sur une agrégation du temps. Le niveau supérieur élabore un plan agrégé qui est désagrégé par le niveau inférieur. Le processus de désagrégation est soit statique soit dynamique. Un ensemble de résultats théoriques ont ainsi été établis, notamment :

- Dans le cas de problèmes où les ressources ne sont pas partagées entre les opérations, des conditions nécessaires et suffisantes de robustesse sont obtenues. De plus, des conditions nécessaires et suffisantes de cohérence sont établies, aussi bien pour le processus statique de désagrégation que pour le processus dynamique.
- Dans le cas de problèmes à ressources partagées, des conditions suffisantes de robustesse sont proposées. Celles-ci sont successivement mises en œuvre dans une approche suffisante puis dans une approche nécessaire associée au partage des ressources. Cette deuxième approche permet de réduire notablement le nombre de conditions à prendre en compte. Concernant la cohérence, des conditions nécessaires et suffisantes sont déduites pour le processus statique de désagrégation. Des conditions suffisantes de cohérence sont enfin obtenues pour le processus dynamique de désagrégation.

L'ensemble de ces conditions permet de construire une structure décisionnelle à la fois robuste et cohérente. Ces propriétés garantissent une coordination globale des décisions émanant de chaque niveau de la structure. Le processus de planification peut donc être mené à son terme sans risque de dysfonctionnement dans l'enchaînement des décisions. Le temps est un élément fondamental dans les problèmes d'élaboration de décisions dynamiques. Ce travail a étudié explicitement l'agrégation du temps et ses conséquences dans une structure élémentaire de décision.

Ces développements d'abord théoriques ont ensuite été poursuivis par des approches prenant en considération un souci de mise en œuvre.

La notion d'arriérés de fabrication est introduite. Cette prise en compte permet à la structure décisionnelle de toujours fournir une solution. L'application systématique de la méthode d'analyse développée dans ce travail facilite l'élaboration de conditions suffisantes de robustesse et de cohérence. Le modèle d'étude des interactions assure une vision formelle des interactions entre les niveaux de décisions. Il permet de faire émerger des relations et donc de propager des contraintes liant des grandeurs n'apparaissant pas naturellement dans les modèles initiaux mais découlant par exemple de politiques de gestion (arriérés de fabrication, retard de livraison, etc).

Afin de prendre en compte la forme des données effectivement disponibles pour la planification, l'incertitude est considérée de manière explicite. Ceci conduit à constituer des stocks de sécurité dont le niveau est fixé en fonction du profil au plus tôt de la répartition des demandes.

Des expérimentations numériques ont permis d'évaluer les performances de l'approche hiérarchisée vis à vis de l'approche globale. Celles-ci montrent qu'une réduction notable des temps de calcul est obtenue tout en conservant des solutions très satisfaisantes du point de vue de l'optimalité et de la faisabilité.

L'aspect générique de la méthode a permis d'envisager de nombreuses variantes du problème qui n'ont pas été présentées dans ce mémoire. On peut citer par exemple, la non-prise en compte de la notion de délai de fabrication ou au contraire la prise en compte de délais supérieurs à une période élémentaire. Le cas où des capacités sont associées aux stocks, a aussi été étudié.

Cependant, afin d'enrichir encore ce travail de recherche, un certain nombre d'extensions ou de prolongements sont envisageables. En particulier :

- Directement liées aux caractéristiques du système de production, des extensions peuvent être envisagées telles que la prise en compte d'opérations nécessitant plusieurs ressources simultanément, la prise en compte de bornes minimales pour la production ou les stocks, etc.
- En se rapportant toujours au modèle hiérarchisé étudié, il peut être intéressant de faire une étude expérimentale dans un univers incertain de façon à analyser le comportement et de proposer des stratégies de fonctionnement.
- Enfin, cette analyse des interactions pourrait être reprise dans un cadre plus large, en particulier en traitant d'autres types d'agrégation telles que, par exemple, celle du travail qui est étroitement liée au facteur temps.
- Dans la même optique, il peut être intéressant de coupler ce niveau planification avec un niveau ordonnancement de façon à évaluer l'apport de cette approche sur la suite du processus de décision.

Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive et de nombreux travaux peuvent encore être réalisés afin de faciliter la conception d'un système de gestion performant.

Pour terminer, il paraît clair qu'assurer Robustesse et Cohérence est une préoccupation fondamentale dans les structures décisionnelles distribuées. Cela reste un problème délicat mais prometteur qui mérite encore des développements au plan théorique comme au plan pratique.

- BIBLIOGRAPHIE -



Bibliographie

- [1] ALDANONDO M., 1992
Modélisation des données pour la planification et l'ordonnancement de la production : Mécanismes d'agrégation et de désagrégation;
Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1992.
- [2] ANTHONY R.N., 1965
Planning and control systems : a framework for analysis;
Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1965.
- [3] ARI E.A., AXSÄTER S., 1985
Disaggregating under uncertainty ;
Research Report n° 23, Lulea University of Technology, Sweden, 1985.
- [4] ARI E.A., 1986
Multi-level approaches to production and inventory control ;
Licentiate thesis, Lulea University of Technology, 1986.
- [5] ARI E.A., AXSÄTER S., JONSSON H., 1988
Disaggregation under uncertainty in hierarchical production planning;
European Journal of Operational Research, Vol. 35, pp 182-186, 1988.
- [6] ARMSTRONG R., HAX A., 1977
Design of a Naval Tender Job Shop,
In Applied Mathematical Programming, Bradley S., Hax A. and Maganti T. (eds.), Addison - Wesley, Reading, Mass. 1977.
- [7] AXSÄTER S., 1976
Coordinating control of Production - Inventory systems
International Journal of Production Research, Vol. 14, n 6, 1976.
- [8] AXSÄTER S., 1981
Aggregation of product data for hierarchical production planning;
Operations Research, Vol. 29, n 4, pp 744-756, 1981.
- [9] AXSÄTER S., 1982
Feasibility of aggregate production plans;
Research Report n° 78, Department of Production Economics, Linköping Institute of Technology, Janvier 1982.
- [10] AXSÄTER S., JONSSON H., THORSTENSON A., 1983
Approximate aggregation of product data;
Engineering Cost and Production Economics, Vol 7, n° 2, pp 119-126, 1983.

- [11] AXSÄTER S., JONSSON H., 1984
Aggregation and disaggregation in hierarchical production planning;
European Journal of Operational Research, Vol. 17, n° 3, 1984.
- [12] AXSÄTER S., 1986
On the feasibility of aggregate production plans;
Operations Research, Vol. 34, pp 796-800, 1986.
- [13] AXSÄTER S., NUTTLE H.L.W., 1986
Aggregating items in multi-level lot-sizing;
In "Multi-stage production planning and inventory control" (Lecture Notes in Economics and Mathematical systems 266), S. Axsäter, C. Schneeweiss and E. Silver (eds). Springer Verlag, New York, 1986.
- [14] BAGLIN G., 1992
La M.R.P.;
Encyclopédie du management, Collection Vuibert, 1992.
- [15] BALAS E., 1965
Solution of large-scale transportation problems through aggregation,
Operations Research, Vol 13, pp82-93, 1965.
- [16] BARANGER P., 1987
Gestion de la production;
Collection Vuibert Entreprise, 1987.
- [17] BAZARAA M.S., JARVIS J.J., SHERALI H.D., 1990
Linear programming and Network flows,
2nd edition, John Wiley, New York.
- [18] BENASSY J., 1987
Gestion de la production;
Collection Hermès, 1987.
- [19] BERGE C., GHOUILA-HOURI A., 1962
Programmes, jeux et réseau de transport,
Dunod (Paris), 1962.
- [20] BIRGE J.R., 1984
Aggregation bounds in stochastic production problems;
In Proceedings of the 11th IFIP Conference on Systems, Modeling and Optimization, Springer Verlag, Berlin, pp 672-683.
- [21] BITRAN G.R., HAX A.C., 1977
On the design of hierarchical production planning systems;
Decision Science, vol 8, n°1, January 1977, pp.28-54.
- [22] BITRAN G.R., HAAS E.A., HAX A.C., 1981
Hierarchical production planning: a single stage system;
Operation research, vol 29, n°4, pp 717-743. August 1981.
- [23] BITRAN G.R., HAX A.C., 1981
Disaggregation and resource allocation using convex knapsack problems with bounded variables;
Management Science, vol 27, n°4, April 1981, pp 431-441.

- [24] BITRAN G.R., HAAS E.A., HAX A.C., 1982
Hierarchical production planning: a two-stage system;
Operation research, Vol 30, n°2, pp.232-251, March-April 1982.
- [25] BOSKMA, 1982
Aggregation and the design of models for medium term planning of production;
European Journal of Operational Research, n°10, January 1982, pp.244-249.
- [26] BUKH P.N.D., 1992
A bibliography of hierarchical production planning techniques, methodology, and applications,
Working Paper, Aarhus University, 1992.
- [27] CAMPAGNE J.P., LEGAIT A. 1994
Mise en oeuvre d'une GPAO réactive: ébauche d'une méthodologie d'approche;
Revue d'automatique et de productique appliquées, vol 7, n°6, pp 687-702, 1994.
- [28] COHEN O., 1988
The Drum-Buffer-Rope (DBR) approach to logistics;
A. Rolstadas (ed), Computer Aided Production Management, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York, 290-301.
- [29] ERSCHLER J., 1976
Analyse sous contraintes et aide à la décision pour certains problèmes d'ordonnancement,
Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1976.
- [30] DAUZERE-PERES S., 1992
Planification et ordonnancement de la production : une approche intégrée cohérente,
Thèse de Docteur de 3ième cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992.
- [31] ERSCHLER J., FONTAN G., MERCE C., 1985
Consistency of the disaggregation process in Hierarchical Planning;
Operation Research, vol 14, n°3, May June 1985.
- [32] FLAPPER S.D.P., MILTENBURG G.J., WIJNGAARD J., 1991
Embedding JIT into MRP;
International Journal of Production Research, vol 29, n°2, 1991.
- [33] FONTAN G., IMBERT S., 1985
Interaction between the two levels of decision making in a job shop;
Seventh European Congress on Operations Research, Bologna, Italie, 16-20 Juin 1985.
- [34] FONTAN G., HETREUX G., MERCE C., 1994
Planification hiérarchisée de la production : Agrégation du temps et Robustesse,
11th International conference on Analysis and Optimisation of Systems, (DES94), Sophia Antipolis, 15-17 Juin 1994.
- [35] FONTAN G., HETREUX G., MERCE C., 1994
Consistency of decisions in multi-level production planning : Analysis and implementation,
IEEE International conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC94), San Antonio (U.S.A), 2-5 Octobre 1994.
- [36] FONTAN G., HETREUX G., MERCE C., 1995
Multi-stage, multi-product planning : a hierrarchical approach using time aggregation,

- International conference on Engineering and Production Management (*IEPM95*), Marrakech (Maroc), 4-7 Avril 1995.
- [37] FOX R.E., 1982
MRP, KANBAN or OPT : What is the best ?;
Inventories and Production Magazine, p17-25, Jul-Aug 1982.
- [38] GABBAY H., 1975
Some issues in hierarchical planning
Technical report, Operation research center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1975.
- [39] GABBAY H., 1975
A hierarchical approach to production planning
Technical report n°120, Operation research center, Massachusetts Institute of Technology, 1975.
- [40] GABBAY H., 1979
Optimal aggregation and disaggregation in hierarchical planning
In "Disaggregation problems in manufacturing and service organisations", L.P. Ritzman et al. (eds). Martinus Nijhof, Boston, pp 95-106, 1979.
- [41] GELDERS L.F., 1974
Coordinating aggregate and detailed scheduling in the one-machine job shop : theory,
Operations Research, Vol 22, n° 1, 1974.
- [42] GELDERS L.F., VAN WASSENHOVE L.N., 1985
Capacity planning in MRP, JIT and OPT: a critique;
Proceedings of 1985 IFIP Engineering cost and production economic, Singapore, pp201-209, march 1985.
- [43] GIARD V., 1988
Gestion de la production;
2^{ème} édition, Gestion Economica 1988.
- [44] GOLDRATT M.E., 1988
Computerized shop floor scheduling;
International Journal of Production Research, 26/3 ,443-455, 1988.
- [45] GONDRAN M., MINOUX M., 1979
Graphe et algorithmes;
Collection de la direction des études et recherches d'Electricité De France, Eyrolles, 1979.
- [46] GRAVES S., 1982
Using Lagrangean technics to solve hierarchical production planning problems
Management Science, vol 28, n° 3, 1982.
- [47] GROOVER M.P., 1981
Automation et systèmes de production;
Vol 1, Hermès, 1981.
- [48] GRÜNWARD H., STRIEKWOLD P.E.T., WEEDA P.J., 1989
A framework for quantitative comparison of production control concepts;
International Journal of Production Research 27/2,281-294, 1989.

- [49] GUNTHER H.O., 1986
The design of an hierarchical model for production planning and scheduling
in Multi-stage production planning and inventory control, Axsäter S., Schneeweiss Ch and Silver E. (eds.), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [50] HALL R.W., 1981
Driving the Productivity Machine: Production Planning and Control in Japan
American Production and Inventory Society, Falls Church, VA, 1981.
- [51] HAX A.C., MEAL H.C., 1975
Hierarchical integration of production planning and scheduling
in M. Geisler (editor); TIMS Studies in Management Science, vol 1, Logistics, North Holland, American Elsevier, New York 1975.
- [52] HAX A.C., CANDEA D., 1983
Production and Inventory Management
Prentice Hall, Inc., 1983.
- [53] HERRMANN J.W., MEMRA A., MINIS I., PROTH J.M., 1994
Hierarchical production planning with part, Spatial and Time Aggregation.
Proceedings of the Fourth International Conference on C.I.M. and Automation Technology, pp. 430-435, 1994.
- [54] HETREUX G., FONTAN G., MERCE C., 1995
Etude de processus décisionnels en planification hiérarchisée,
5ème Congrès International de Génie Industriel (GI'5), Grenoble, 1995.
- [55] HETREUX G., MERCE C., FONTAN G., 1996
Multi-stage, multi-product planning : a hierarchical approach using time aggregation,
Journal of Decision Systems, Vol 5, n° 1-2, pp 35-50, 1996.
- [56] HETREUX G., FONTAN G., MERCE C., 1996
Multi-level planning : Robustness of decisions with production backlogs,
IMACS/IEEE SMC Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA96), Lille, 9-12 Juillet 1996.
- [57] HINDI K.S., TOCZYLOWSKI E., 1988
Aggregation and disaggregation of end items in a class of multi-stage production systems,
International Journal of Advanced Manufacturing Technics, pp 45-54, 1988.
- [58] IMBERT S., 1986
Interaction entre deux niveaux de décisions en planification de la production,
Thèse de Docteur de 3ième cycle, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1986.
- [59] JACOBS F., 1984
OPT uncovered, Many production planning and scheduling concept can be applied with or without the software,
Industrial Engineering, 16/10, 32-41, 1984.
- [60] JAIKUMAR R., 1974
An operational optimization procedure for production scheduling ;
Journal of Computer and Operations Research, vol 1, n° 2, pp 191-200, August 1974.

- [61] JOHNSON A.J., MONTGOMERY D.C., 1974
Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control,
Wiley, New York, 1974.
- [62] JONSSON H., 1983
Simulation studies of hierarchical systems in production and inventory control,
Ph. D Thesis, Linköping Studies in Science and Technology, n° 91, 1983.
- [63] KISTNER K.P., STEVEN M., 1990
Application of Operations Research in Hierarchical Production Planning,
"Modern Production concepts Theory and Applications", G. Fanel, G. Zäpfel (eds) Springer
Verlag 1990.
- [64] KRAJEWSKI L.J., KING B.E., RITZMAN L.P., WONG D.S., 1987
Kanban, MRP and shaping the production environment,
Management Science, Vol 33, pp 39-57, 1974.
- [65] LASSERRE J.B., MERCÉ C., 1990
Robust hierarchical production planning under uncertainty,
Annals of Operations Research, vol 26, pp 73-87, 1990.
- [66] LASSERRE J.B., 1992
An integrated model for job shop planning and scheduling,
Management Science, vol 38, n° 8, August 1992.
- [67] MEAL H.C., WACHTER M.H., WHYBAYRK D.C., 1987
Material Requirements Planning in Hierarchical Production Planning systems,
International Journal of Production Research, 25/7, 947-956, 1987.
- [68] MERCE C., 1987
Cohérence des décisions en planification hiérarchisée,
Thèse d'État. Université Paul Sabatier, Toulouse, Juillet 1987.
- [69] MILLIGAN G.W., COOPER M.C., 1987
Methodology review: Clustering methods,
Applied Psychology Measurement, Vol 11, n° 4, pp 329-354, 1987.
- [70] MIZRACH M., 1985
Dynamic models of detailed and aggregate production network,
Technical report ORC 85-10, Operations Research Center, University of California, Berkeley,
1985.
- [71] MOLET H., 1989
La nouvelle gestion de production,
Collection "Technologies de pointe", Hermès 1989.
- [72] ORLICKY J.A., 1975
Material Requirement Planning,
New York, Mc Graw-Hill Book Co., 1975.
- [73] OVRIN P., 1990
*The performance of manufacturing planning and control methods in different production
facilities: a literature survey*,
Paper presented at the Sixth International Working Seminar on Production Economics,
Igls, 1990.

- [74] PARIS J.L., PIERREVAL H., TAUTOU L., 1996
Une approche pour la configuration de systèmes KANBAN multi-produits par algorithme évolutionniste,
Proceedings du 5^{ème} Congrès de Génie Industriel (GI'5), Grenoble, p113-122, 2-4 Avril 1996.
- [75] REES L.P., HUANG P.Y., Taylor III B.W., 1989
A comparative analysis of an MRP lot-for-lot system and a kanban system for a multi-stage production operation,
International Journal of Production Research, 27/8, 1427-1443, 1989.
- [76] ROGERS D.F., 1986
Aggregation theory in optimization and Markovian theory : A survey and an analysis of aggregation in Markov chains
Ph.D. Dissertation, Krannert Graduate School of Management, Purdue University, West Lafayette, Ind., 1986.
- [77] ROGERS D.F., PLANTE R.D., WONG R.T., EVANS J.R., 1991
Aggregation and disaggregation techniques and methodology in optimization ;
Operations Research, vol. 39, n 4, July - August 1991.
- [78] SCHNEEWEIS C., 1995
Hierarchical structure in organisations : A conceptual framework,
European Journal of Operational Research 81, pp. 4 - 31, 1995. Special Issue on Hierarchical Planning.
- [79] SHETTY C.M., TAYLOR R.W., 1987
Solving large scale linear programs by aggregation,
Computational Operations Research, Vol 14, pp385-393, 1987.
- [80] SHIGEO SHINGO, 1983
Maitrise de la Production et Méthode Kanban,
Les Editions d'Organisation, 1983.
- [81] SHWIMER J., 1972
Interaction between aggregate and detailed scheduling in a job shop,
Ph. D. Thesis, M.I.T., 1972.
- [82] SPEARMAN M.L., WOODRUFF D.L., HOPP W.J., 1990
CONWIP: A pull alternative to Kanban,
International Journal of Production Research, 28/5, 879-894, 1990.
- [83] STADLER H., 1985
Critical design aspects of hierarchical production planning system ;
EURO VII Conference, Bologne 1985.
- [84] STRIEKWOLD P.E.T., 1988
A quantitative comparison of production and inventory control concept,
Dissertation , University of Twente, Netherlands, 1990.
- [85] TAYLOR R.W., 1983
Aggregate programming in large scale linear systems
Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Thechnology, Atlanta.

- [86] TOCZYLOWSKI E., 1986
An aggregation of items in the single stage lot size scheduling problem,
Large Scale Systems, Vol 10, pp. 157-164, 1986.
- [87] TOCZYLOWSKI E., 1986
On aggregation in a two-dimensional cutting stock scheduling problem,
Large Scale Systems, Vol 10, pp. 165-174, 1986.
- [88] TOCZYLOWSKI E., 1987
Optimization of simultaneous loading and lot-size scheduling in a functional manufacturing cell,
In proceedings of the 3rd International Conference on Production Management Systems,
A. Kusiak (ed.), North-Holland, Amsterdam, August 1987.
- [89] VOLLMAN T.E., BERRY W.L., WHYBARK D.C., 1988
Manufacturing Planning and Control Systems,
Dow Jones Irwin, Homewood, II, 1988.
- [90] WIGHT O., 1984
MRP II - Unlocking America's Productivity Potential,
Oliver Wight Limited Publications, Essex Junction, VT , 1984.
- [91] ZÄPFEL G. MISSBAUER H., 1993
New concepts for production planning and control,
European Journal of Operational Research, n° 67, pp 297-320, 1993.
- [92] ZÄPFEL G. GFRERER H., 1995
Hierarchical model for production planning in the case of uncertain demand,
European Journal of Operational Research, n° 86, pp 142-161, 1995.
- [93] ZIPKIN P.H., 1977
Aggregation in linear programming,
Ph.D. Dissertation, School of Organization and Management, Yale University, New Haven,
Conn., 1977.
- [94] ZIPKIN P.H., 1980
Bounds for aggregating nodes in network problems,
Mathematical Programming, Vol 19, pp 155-177.
- [95] ZIPKIN P.H., 1980
Bounds on the effect of aggregating variables in linear programs,
Operations Research, Vol 28, pp 403-418.
- [96] ZIPKIN P.H., 1980
Bounds for row aggregation in linear programming,
Operations Research, Vol 28, pp 903-918.

Thèse de Mr Gilles HÉTREUX

STRUCTURES DE DÉCISION MULTI-NIVEAUX POUR LA PLANIFICATION DE LA PRODUCTION : ROBUSTESSE ET COHÉRENCE DES DÉCISION

Résumé : Chargée d'organiser la fabrication, la gestion de la production est une tâche complexe qui tend à jouer un rôle de plus en plus déterminant pour le bon fonctionnement des entreprises. Afin de faciliter l'établissement du plan de production, cette étude s'intéresse à la mise en oeuvre de structures décisionnelles multi-niveaux. Les niveaux décisionnels sont définis à partir d'une agrégation de données, d'une désagrégation des décisions et d'horizon temporels adaptés. A chaque niveau, l'élaboration de la décision est réalisée par affinements successifs avec une dynamique appropriée. Cependant, l'ignorance des interactions entre niveaux conduit souvent à des dysfonctionnements importants dans le processus décisionnel. Pour cette raison, ce travail est centré sur la formalisation et l'analyse des interactions entre niveaux afin d'aboutir à la coordination globale des décisions au sein de la structure. Les concepts génériques de robustesse des décisions agrégées et de cohérence des décisions détaillées sont introduits et caractérisés. La mise en oeuvre de ces deux concepts est réalisée par l'établissement de conditions analytiques destinées à être introduites sous forme de contraintes au sein des modèles mathématiques de chaque niveau. La détermination de conditions d'existence de solution dans un modèle d'étude traduisant les interactions entre entités détaillées et agrégées, l'exploitation des outils de programmation linéaire et de théorie des graphes permettent de construire de manière systématique les conditions recherchées. Cette méthodologie est mise en oeuvre dans le cadre d'un problème de production multi-produits, multi-étapes, multi-ressources. La structure élémentaire considérée comporte deux niveaux de décision basés sur l'agrégation du temps. Ce type d'agrégation, associé à un processus dynamique de désagrégation, offre des avantages importants au plan de la réactivité comme au plan de l'autonomie décisionnelle. Les développements d'abord théoriques sont poursuivis par des approches prenant en considération un souci de mise en oeuvre. Dans ce cadre, la notion d'arriérés de fabrication est introduite ainsi que la prise en compte explicite de l'incertitude des données.

Mots clefs : Planification de la production, Structures de décision multi-niveaux, Agrégation du temps, Coordination des décisions, Analyse des interactions entre niveaux, Robustesse des décisions agrégées, Cohérence des décisions détaillées, Réactivité et Autonomie.

MULTI-LEVEL DECISIONAL STRUCTURES IN PRODUCTION PLANNING : ROBUSTNESS AND CONSISTENCY OF DECISIONS

Abstract : Production planning is an important and complex function in production management. In order to facilitate the determination of production plans, this study is concerned with multi-level decisional structures. Levels of decisions are based on an aggregation of data, a disaggregation of decisions and suitable temporal horizons. In each level, the decisions are obtained by successive refinements with an appropriate dynamic. However, the ignorance of interactions between levels often leads to an unsatisfactory behaviour of the structure. For this reason, this work focuses on the formalization and the analysis of interactions between levels in order to achieve a global coordination of decisions within the structure. The generic concepts of robustness and consistency are introduced and characterized. The method consists to establish analytical conditions, introduced as additional constraints within the mathematical models of each level. A study model for interactions between levels is analysed (linear programming and graph theory) and the required conditions are deduced by a generic approach. This methodology is implemented for a multi-product, multi-stage, multi-resource planning problem. For the considered elementary structure, two levels based on time aggregation are defined. This kind of aggregation, associated with a dynamic disaggregation process offers advantages for reactivity and autonomy. These theoretical results are extended in approaches taking into account implementation considerations. In this framework, production backlogs are introduced and data uncertainty is explicitly taken into account.

Keywords : Production planning, Multi-level structures, Time aggregation, Coordination of decisions, Interactions analysis, Robustness of aggregate decisions, Consistency of detailed decisions, Reactivity and Autonomy.