



**HAL**  
open science

# Abstraction temporelle et interprétation quantitative/qualitative de processus à dynamiques multiples. Application aux processus biologiques

Laurent Ayrolles

► **To cite this version:**

Laurent Ayrolles. Abstraction temporelle et interprétation quantitative/qualitative de processus à dynamiques multiples. Application aux processus biologiques. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1996. Français. NNT: . tel-00139748

**HAL Id: tel-00139748**

**<https://theses.hal.science/tel-00139748>**

Submitted on 3 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 1996

# THÈSE

présentée par

**Laurent AYROLLES**

en vue de l'obtention du  
**Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse**

Spécialité : Automatique

**ABSTRACTION TEMPORELLE  
ET INTERPRÉTATION QUANTITATIVE/QUALITATIVE  
DE PROCESSUS À DYNAMIQUES MULTIPLES  
APPLICATION AUX PROCESSUS BIOLOGIQUES**

Soutenance le 22.01.96, devant le jury composé de :

M. Joseph AGUILAR-MARTIN  
Mme Sylviane GENTIL  
M. Peter STRUSS  
M. François ARLABOSSE  
M. Patrick BOURSEAU  
M. Boutaïb DAHHOU  
M. Robert FAIVRE  
M. François GUERRIN  
M. André TITLI

Directeur de Thèse  
Rapporteur  
Rapporteur

Rapport LAAS N° 96034

Thèse préparée à l'Unité de Biométrie et d'Intelligence Artificielle, Institut National de la Recherche Agronomique (UBIA-INRA), Chemin de Borde-Rouge, BP27, 31326 Castanet-Tolosan Cedex, cofinancée par FRAGMENTEC-COGNITECH, Tour Fiat, Cedex 16, 92084, Paris-La Défense, en collaboration avec le Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), 7 Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex

Le travail de recherche ayant conduit à cette thèse s'est déroulé à l'Unité de Biométrie et d'Intelligence Artificielle de l'INRA (Centre de Recherches de Toulouse), et a été co-encadré par Robert Faivre et François Guerrin.

Il a bénéficié de la collaboration du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (L.A.A.S.-C.N.R.S.) en la personne de Joseph Aguilar-Martin, qui a en outre assuré la direction de la thèse.

La bourse de thèse a été cofinancée par l'INRA et Framentec-Cognitech.

# Remerciements

En premier lieu, je me dois de remercier Joseph Aguilar-Martin qui m'a accordé sa confiance en acceptant d'encadrer cette thèse. Ses conseils et ses encouragements m'ont toujours été d'un précieux secours.

Bruno Goffinet m'a accueilli au sein de l'Unité de Biométrie et d'Intelligence Artificielle de l'INRA de Toulouse. Il a mis à ma disposition les moyens nécessaires à l'excellent déroulement de mon travail. Pour cela, je lui exprime toute ma reconnaissance.

En plus de son concours financier, François Arlabosse de la société Framentec-Cognitech (Paris) a toujours montré beaucoup d'enthousiasme pour ce que je lui exposais. Son soutien permanent a été d'une grande importance pour moi. Qu'il en soit ici remercié.

Au duo de choc, Robert Faivre - François Guerrin, qui a assumé la lourde charge d'orienter ma recherche sur les sentiers du Raisonnement Qualitatif parsemés de Statistiques, j'adresse mes plus vifs remerciements. La bonne humeur communicative dont ils sont incapables de se défaire a toujours facilité mes avancées.

Louise Travé-Massuyès ne saurait être oubliée : elle a su me prodiguer de judicieux conseils chaque fois qu'elle en a eu l'occasion.

Je remercie Mme Sylviane Gentil et M. Peter Struss d'avoir pris le temps de lire cet imposant manuscrit et d'avoir accepté de rapporter mes travaux. Je suis fier de les compter dans mon jury de soutenance. Je tiens également à exprimer ma gratitude à MM. Patrick Bourseau, Boutaïb Dahhou et André Titli pour me faire l'honneur de participer à ce jury.

Je n'oublie pas d'associer à mes résultats Serge Rambal et Philippe Debaeke, dont l'expertise m'a bien aidé dans la compréhension des processus biologiques auxquels j'ai accordé les faveurs de Paradise.

Dans l'Unité de Biométrie-IA, l'ambiance familiale dont j'ai profité pendant trois ans doit énormément à Maïté Tabes et Monique Falières. Leur dynamisme a transformé de simples pauses café en de véritables petites fêtes. Le bureau des thésards a quant à lui bénéficié de la présence d'un piètre joueur de mah-jong mais d'un excellent compagnon en la personne d'Ahmed Rebaï. D'une manière générale, j'ai eu du plaisir à travailler dans ce laboratoire, grâce à tous ceux qui le rendent vivant. Merci à tous.



*A Christine.*

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1. Le concept d'échelle de temps</b>	<b>8</b>
1.1 Introduction .....	9
1.2 Raisonner selon les échelles de temps en sciences de l'environnement : pourquoi et comment ? .....	11
1.2.1 Une nécessité liée au domaine environnemental .....	11
1.2.2 Abstraction selon l'échelle de temps .....	12
1.2.3 Hiérarchisation selon l'échelle de temps .....	13
1.2.4 En résumé : où faut-il essayer d'apporter des solutions ? .....	16
1.3 Echelles de temps en Automatique : les perturbations singulières .....	17
1.3.1 Généralités .....	17
1.3.2 Les différents axes de la méthode des perturbations singulières .....	17
1.3.3 Un exemple d'application de la méthode aux sciences de l'environnement ....	19
1.3.4 Les idées à retenir et les limites de la théorie des perturbations singulières ....	20
1.4 Echelles de temps en Traitement du Signal .....	22
1.4.1 L'échelle selon Fourier .....	22
1.4.2 Fourier à court terme et spectres instantanés .....	26
1.4.3 Décompositions atomiques .....	26
1.4.4 Les ondelettes : principales idées .....	28
1.4.5 Ondelettes : les limites et les idées qu'il faut en retenir .....	31
1.5 Raisonnement Qualitatif et abstraction temporelle : la contribution de l'IA .....	33
1.5.1 Le Raisonnement Qualitatif .....	33
1.5.2 Le RQ dans les systèmes environnementaux .....	36
1.5.3 Les hiérarchies d'échelles de temps en RQ .....	37
1.5.4 De l'abstraction temporelle en Physique Qualitative .....	43
1.5.5 Autres approches d'IA pour raisonner avec l'abstraction temporelle .....	45
1.6 Conclusion : nos axes de recherche .....	51

<b>Chapitre 2. Représentation d'une évolution à différents niveaux d'abstraction</b>	<b>55</b>
2.1 Introduction .....	56
2.2 Une nouvelle notion de granularité temporelle .....	57
2.2.1 Définitions .....	57
2.2.2 Changements de granularité d'un processus sur un même domaine .....	59
2.2.3 Simulation de plusieurs processus représentés à différentes granularités .....	62
2.2.4 Bilan .....	66
2.3 Représentation triangulaire .....	67
2.3.1 Définitions et hypothèses .....	68
2.3.2 Représentation triangulaire.....	74
2.3.3 Algorithmes de segmentation de la série initiale en série d'épisodes triangulaires.....	75
2.3.4 Résumé et conclusion sur la représentation triangulaire .....	86
2.4 Représentations trapézoïdales .....	87
2.4.1 Episodes trapézoïdaux : construction et interprétation.....	88
2.4.2 Représentation trapézoïdale à partir de la représentation triangulaire (représentation à l'étape zéro).....	93
2.4.3 Procédure d'abstraction successive de représentations trapézoïdales .....	93
2.4.4 Le regroupement de trois épisodes trapézoïdaux en un seul - Une nouvelle interprétation des types .....	95
2.5 Discussion sur les représentations géométriques .....	100
2.5.1 Problèmes de construction.....	100
2.5.2 Avantages et inconvénients des représentations par épisodes.....	101
2.6 Décomposition de dynamiques imbriquées .....	104
2.6.1 Les évolutions composantes et leur construction .....	104
2.6.2 Comparaison avec Fourier, le filtrage et les ondelettes.....	109
2.6.3 Intérêt et utilisation .....	112
2.7 Conclusion .....	113
<b>Chapitre 3. Outils d'interprétation</b>	<b>115</b>
3.1 Introduction .....	116
3.2 Granularité, échelle et vitesse .....	117
3.2.1 Calculs et significations de la granularité.....	117
3.2.2 Correspondance avec la notion d'échelle de temps.....	119
3.2.3 Expression de la vitesse : vitesses moyennes et indice de fluctuation .....	119
3.3 La structure des granularités .....	122
3.3.1 Généralités .....	122
3.3.2 Construction et lecture de la structure des granularités.....	123
3.3.3 Aide à la décision pour le choix de la fréquence d'échantillonnage du	

processus .....	123
3.3.4 Aide à la décomposition de dynamiques imbriquées : détection de phénomènes réguliers .....	126
3.3.5 Facilité et limites d'interprétation de la structure .....	128
3.4 Interprétation symbolique/numérique d'une représentation .....	128
3.4.1 Préambule : signification fonctionnelle des types symboliques d'épisodes....	129
3.4.2 Interprétation et comparaison d'épisodes pris individuellement .....	131
3.4.3 Codage symbolique/numérique de comportements standards en Automatique .....	135
3.4.4 Détection de comportements standards, de récurrences et de séquences particulières dans une chaîne symbolique .....	138
3.4.5 Modification des comportements au cours de l'abstraction .....	142
3.4.6 Facilité et limites d'interprétation des chaînes .....	145
3.5 Interprétation spectrale d'une représentation .....	146
3.5.1 Présentation des spectres .....	146
3.5.2 Spectres des types .....	147
3.5.3 Spectres des granularités et des variations d'amplitude .....	148
3.5.4 Un test statistique pour le spectre des granularités (ou des variations d'amplitude) exprimé en nombre d'épisodes .....	149
3.5.5 Modification des spectres au cours de l'abstraction .....	151
3.5.6 Facilité et limites d'interprétation des spectres .....	153
3.6 Conclusion : utilisation combinée des outils d'interprétation .....	153
<b>Chapitre 4. Interprétation de processus biologiques</b> .....	<b>156</b>
4.1 Introduction .....	157
4.2 PARADISE (Process AbstRaction AnD Interpretation SystEm) .....	157
4.2.1 Présentation et couplage avec le générateur de systèmes experts G2 .....	157
4.2.2 Entrées du système .....	159
4.2.3 Sorties .....	159
4.2.4 La base de connaissances de PARADISE dans G2 .....	161
4.3 Décomposition des dynamiques imbriquées : le proie-prédateur avec chasseurs .	167
4.3.1 Présentation .....	167
4.3.2 Décomposition et comparaison avec Fourier .....	168
4.3.3 Interprétations comportementales .....	174
4.3.4 Cas d'un processus irrégulier .....	176
4.3.5 Conclusion .....	182
4.4 Un modèle de croissance de culture : EPIC .....	184
4.4.1 Présentation du modèle et du processus analysé par la procédure d'abstraction successive .....	184

4.4.2 Analyse visuelle des résultats de l'abstraction successive de <i>etr1</i> .....	186
4.4.3 Analyse de la structure des granularités .....	190
4.4.4 Utilisation des chaînes symboliques.....	194
4.4.5 Analyse des spectres.....	198
4.5 Conclusion .....	201
<b>Conclusion générale</b>	<b>204</b>
<b>Annexe I : Théorie des perturbations singulières</b>	<b>209</b>
I.1 Séparation d'un système à deux échelles de temps .....	209
I.2 Séparation d'un système hiérarchisé selon l'échelle de temps .....	212
<b>Annexe II: Théorie des ondelettes</b>	<b>214</b>
II.1 Préambule : fonctions de base à échelle variable .....	214
II.2 Fonctions d'échelle.....	215
II.3 Ondelettes .....	216
II.4 Relations de reconstruction et de décomposition du signal .....	217
II.5 Algorithmes pyramidaux de reconstruction et de décomposition .....	218
<b>Références bibliographiques</b>	<b>220</b>

# Introduction générale

Une caractéristique des systèmes dynamiques complexes, qu'ils soient physiques ou naturels, est la présence de processus évoluant à différentes échelles de temps (dynamiques multiples) et souvent de façon non-linéaire. Notre objectif est de concevoir un système capable d'aider l'utilisateur dans la modélisation, la simulation et l'interprétation des aspects dynamiques de tels processus.

Nous nous plaçons dans la situation où les évolutions de chaque processus étudié sont des séries de mesures, ou des résultats de la simulation de modèles numériques. Dans le premier cas, l'utilisateur aura pour objectif une compréhension des comportements du processus, et leur modélisation et simulation. Dans le second cas, il s'agira de valider un modèle et d'y apporter des améliorations éventuelles.

Pour accomplir ces tâches lorsque l'on a affaire à des processus à dynamiques multiples, plusieurs difficultés apparaissent. L'une d'entre elles est qu'il peut être délicat d'assigner une échelle de temps unique à la représentation d'un processus, lorsque il fluctue de façon irrégulière. Cette échelle, valable pour un mode de fluctuation "rapide" par exemple, devient caduque pour des variations plus "lentes". Puisqu'il y a de bonnes chances pour qu'elle conditionne également le pas de simulation, elle risque de se trouver mal adaptée à une prédiction efficace. Il faut donc être capable de prendre en compte la façon dont le processus fluctue au cours du temps, et ceci de manière automatique.

L'intérêt de l'utilisateur réside également dans le choix d'une échelle de temps adéquate. Il peut fixer ses besoins en matière de précision (pas de temps entre deux points) et de durée d'étude. Lorsque l'on dispose de données sur le processus, il est encore plus efficace de

choisir une échelle *a fortiori*, c'est-à-dire selon les comportements du processus. Ceci nécessite alors une interprétation comportementale de la courbe d'évolution du processus.

Ces besoins apparaissent avec acuité dans les sciences de l'environnement où les systèmes étudiés sont d'une complexité telle qu'ils ne peuvent de toute manière être mesurés, modélisés et interprétés que d'une façon partielle et imprécise. Ils font intervenir des processus exhibant des fluctuations variables dans le temps et pouvant très bien avoir des comportements différents selon qu'on les considère sur un temps plus ou moins long (pensons à la croissance d'un arbre dont l'étude peut être multiple : à l'échelle de la journée, d'une saison, d'une année, d'un siècle, ...). De plus, la validité des mesures et modèles numériques les décrivant sont toujours sujets à caution, puisqu'ils s'appuient obligatoirement sur des hypothèses simplificatrices.

Ces considérations nous amènent à articuler notre recherche autour de deux axes. Un premier axe, développé dans le chapitre 2, concerne la représentation de l'évolution d'un processus à toutes les échelles de temps possibles. Nous introduisons d'abord une notion de *granularité temporelle*, exprimant le niveau de détail d'une représentation de manière plus souple qu'une échelle de temps définie sous forme d'ordre de grandeur. Cette granularité autorise la représentation et la simulation des processus, quelles que soient leur fréquence d'échantillonnage initiale (ou leur pas de simulation) et leur durée d'étude. La représentation de l'évolution d'un processus à tous les niveaux d'abstraction possibles est ensuite obtenue grâce à la mise au point d'une méthode d'abstraction temporelle automatique, basée sur l'aspect plus ou moins fluctuant de l'évolution.

Le fait que les systèmes biologiques font intervenir des connaissances imprécises, difficiles ou impossibles à mesurer nous a ensuite conduits à employer une approche quantitative et qualitative pour la représentation d'une évolution numérique. Elle permet de ne fonder son raisonnement que sur des enveloppes, voire des symboles, plus significatifs et suffisamment pertinents pour la tâche à accomplir.

Le deuxième axe est l'interprétation comportementale de cette évolution représentée à différents niveaux d'abstraction, et l'étude des relations entre les caractéristiques comportementales décelées et le choix d'une "bonne" granularité de représentation. Pour ce faire, nous développons dans le chapitre 3 un certain nombre d'outils graphiques, symboliques et statistiques permettant d'identifier et d'interpréter automatiquement les principales caractéristiques dynamiques du processus à n'importe quel niveau d'abstraction. Une fonctionnalité supplémentaire permet d'identifier et de dissocier des dynamiques imbriquées (composantes fréquentielles locales dans le temps) dans l'évolution initiale.

Des exemples d'interprétations sont donnés dans le chapitre 4 pour deux modèles simulant des processus biologiques : le modèle proie-prédateur avec chasseurs et un modèle de croissance de cultures. Les analyses sont confrontées à la connaissance experte d'un agronome pour la validation de la méthode.

Ce travail a conduit à la conception du logiciel PARADISE (Process AbstRaction AnD Interpretation SystEm) qui est également présenté au sein du chapitre 4.

Au préalable, nous faisons un tour, forcément incomplet mais assez diversifié, des techniques de représentation et de raisonnement sur l'échelle de temps. Après examen de quelques articles ayant trait à la prise en compte des échelles de temps dans les sciences environnementales, des méthodes de raisonnement sur les échelles sont évaluées. Il s'agit des perturbations singulières en Automatique, de diverses techniques de Traitement du Signal, enfin de quelques aspects du raisonnement temporel en Intelligence Artificielle.





# **Chapitre 1**

## **Le concept d'échelle de temps**



## 1.1 Introduction

Raisonnement à différentes échelles de temps est une façon courante d'appréhender la complexité des phénomènes dynamiques qui nous entourent. La notion d'échelle de temps est pratique pour donner l'ordre de grandeur de la durée d'un phénomène, pour comparer approximativement la vitesse de deux phénomènes, ou encore pour passer du court-terme au long-terme. Elle relève communément d'une abstraction de l'information temporelle réelle (durée, vitesse, court/long-terme) en une hiérarchie d'ordres de grandeur : par exemple, 1 seconde, 1 heure, 1 jour, 1 mois, 1 an, 1 décennie, etc. Connaître l'échelle de temps à laquelle il faut représenter un phénomène est un pré-requis à une bonne modélisation et une simulation efficace de ce phénomène.

Cependant, l'utilisation du même terme d'échelle pour signifier trois idées différentes traduit un certain vague. Doit-on comprendre que le phénomène est achevé au bout d'un certain temps, approximé par l'échelle ? Ou bien qu'il est périodique et entièrement défini sur une durée égale à sa période et fixée par l'échelle ? Ou encore, qu'il "varie significativement" sur une durée égale à l'échelle ? En fait, c'est le contexte qui, d'habitude, dissipe le doute. Intuitivement, on peut s'entendre sur une définition qui serait *la durée sur laquelle les variations d'un phénomène sont correctement représentées*. Cela signifie que si l'on étudie un phénomène à l'échelle de la journée, on estime qu'on peut en savoir assez sur lui en un ou deux jours. Mais cela est subjectif et guidé par la connaissance du phénomène.

Le problème est que dans les systèmes naturels, la complexité des phénomènes, ou leur méconnaissance, peut rendre difficile une estimation de l'échelle de temps à laquelle ils doivent être représentés (sous forme de courbe d'évolution temporelle). A quelle échelle étudier les variations de population d'une espèce sur un territoire, en tenant compte des phénomènes de compétition, des variations climatiques, et d'événements exceptionnels potentiels (feu de forêt) ? On pourrait penser que la périodicité évidente de certains de ces phénomènes (jour/nuit, saisons) facilite la détermination de l'échelle adéquate. Mais leur interconnexion avec d'autres phénomènes de périodicité différente, ou non périodiques, rend cette détermination hasardeuse. Par exemple, peut-on dire à quelle échelle se déroule la croissance d'une plante : sur la journée, sur une saison, sur l'année ? Elle peut être étudiée sur les trois échelles... *Il apparaît donc particulièrement crucial pour de tels phénomènes de pouvoir être représentés à différentes échelles de temps.*

Un corollaire à cette constatation est le besoin de *prendre en compte la localité temporelle dans la notion d'échelle de temps*. En effet, puisqu'on ne fait pas d'hypothèse quant à certaines propriétés de périodicité, on n'en fait pas non plus sur le caractère "régulier" des fluctuations : le phénomène peut être fortement agité sur un intervalle, puis plus stable, puis légèrement agité, etc. L'échelle de la représentation doit pouvoir s'adapter

à chaque “phase” de fluctuation. Ceci implique une *détermination automatique des échelles de représentation possibles*, qui peut par exemple être reliée à une *abstraction automatique selon l'échelle*.

Les contraintes de localité temporelle et d'objectivité remettent en cause une définition sous la forme d'ordres de grandeur hiérarchisés, trop rigide et pouvant masquer des échelles intermédiaires importantes. Egalement, de par la disparité possible des durées d'étude des phénomènes interagissant, l'échelle de temps devrait être *relative à ces durées*.

Ces considérations sont précisées et justifiées dans la première partie de ce chapitre (1.2), qui passe en revue quelques travaux relevant des “sciences environnementales” et incluant la représentation de l'échelle de temps.

La formalisation du concept d'échelle de temps est abordée par plusieurs disciplines. Nous étudierons d'abord comment, en Automatique, la théorie des perturbations singulières prend spécifiquement en compte cette notion (1.3). A partir d'un modèle analytique comportant deux variables qu'on sait “rapide” et “lente”, cette théorie permet d'obtenir les approximations des deux sous-systèmes correspondant à l'échelle rapide et lente. Malgré l'intérêt des approximations introduites pour la modélisation et la simulation de phénomènes ayant des échelles différentes, cette méthode ne permet cependant pas de déterminer les échelles à retenir.

A cause de la proximité entre les notions d'échelle de temps et de *fréquence*, les relations temps/fréquence établies par diverses méthodes de Traitement du Signal sont ensuite examinées (1.4). Parmi ces méthodes, la théorie des ondelettes cerne particulièrement bien la localisation temporelle et fréquentielle que nous aimerions intégrer à notre représentation. Elle est donc succinctement présentée et discutée.

Enfin, la contribution de l'Intelligence Artificielle est analysée (1.5). Le Raisonnement Qualitatif s'avère fort attrayant car, indépendamment du problème de l'échelle de temps, il met à notre disposition des formalismes permettant la prise en compte de l'imprécision ou de l'incertitude inhérente à un phénomène mal connu. Il est donc approprié à la représentation de phénomènes naturels complexes que l'on sait difficiles à modéliser numériquement. Capable de simplifier une représentation en éliminant les détails superflus, il peut intégrer l'abstraction temporelle par échelle de temps, comme plusieurs approches de modélisation/simulation le montreront. Nous finirons avec quelques travaux présentant le raisonnement temporel associé à une notion de *granularité temporelle* qui explicite mieux le principe de *simplification par niveau de détail* que le terme “d'échelle de temps”.

## 1.2 Raisonner selon les échelles de temps en sciences de l'environnement : pourquoi et comment ?

### 1.2.1 Une nécessité liée au domaine environnemental

#### *Le choix de la bonne échelle*

Les systèmes naturels sont complexes dans le sens où ils font intervenir de nombreuses espèces animales ou végétales, et une quantité de mécanismes physiques, chimiques et biologiques agissant en interdépendance, et ceci à plusieurs niveaux.

Au niveau spatial tout d'abord, un même mécanisme relationnel ne peut être étudié de la même manière selon qu'on le limite à quelques centimètres carrés (e.g. : le mécanisme d'ouverture d'un stomate de la feuille du chêne), à quelques mètres carrés (la croissance du chêne, déjà très complexe), ou à des dimensions plus vastes (la forêt de chênes sur une île au milieu d'un lac pollué par des rejets industriels). Choisir au préalable le bon facteur d'échelle spatiale est donc primordial et conditionne la façon dont est menée l'étude.

Au niveau temporel, il en est de même. Par exemple, étudier l'évolution d'un réseau trophique (chaîne alimentaire) dans un écosystème aquatique nécessite une précision variable [KER89] : les taux de consommation de phosphate sont traditionnellement exprimés avec une échelle variant de la seconde à plusieurs minutes, la multiplication des bactéries se mesure sur quelques heures, la croissance du phytoplancton sur quelques jours, la population de prédateurs invertébrés en mois, et la dynamique des populations de poissons en années.

Citons également l'exemple des réponses physiologiques de la plante aux changements atmosphériques [PIE93] : au niveau de la feuille, la transpiration varie en réponse à la sécheresse de l'atmosphère sur une échelle de quelques secondes à quelques heures. La réaction de la canopée entière évolue à plusieurs échelles : la réponse au rayonnement et à l'humidité de l'air est diurne, mais change rapidement selon la couverture nuageuse, les masses d'air en présence, etc. La réponse des stomates à l'humidité du sol est plus lente (de quelques jours à quelques semaines).

Selon l'échelle choisie, certains mécanismes doivent donc être représentés comme très fluctuants, peu fluctuants, voire constants. Cela suppose que selon l'étude à réaliser, l'on connaît l'échelle correcte pour représenter ou simuler chaque mécanisme, que les échelles sont distinctes en ordres de grandeur, et qu'elles sont valables à n'importe quel moment de l'étude (c'est-à-dire que la dynamique de chaque mécanisme considéré est *régulière*). Evidemment, il est pénalisant en temps de simulation, en quantité de données pertinentes stockées et surtout pour la compréhension du mécanisme de se "tromper" d'échelle de temps.

### *Nécessité de l'abstraction et de la hiérarchisation*

Ce problème se pose dans d'autres domaines des sciences de la vie ou de la matière (pensons à l'étude d'un phénomène physiologique dans le corps humain, à l'étude de la formation de l'univers, à celle d'une réaction nucléaire...). Mais il est incontournable dans les sciences de l'environnement, pour une raison autre que la pertinence de la représentation vis-à-vis de l'étude à réaliser : il est *impossible d'être exhaustif dans la spécification, et encore moins dans la quantification des mécanismes interagissants* [SCH81].

Pour constituer un modèle valide, il faut donc laisser de côté certains mécanismes, ou bien les hiérarchiser selon certains critères dont les plus évidents sont les facteurs d'échelle, temporelle ou spatiale. Le fait de simplifier ainsi le modèle lui confère une meilleure robustesse bien qu'il perde en précision. Notons qu'une littérature abondante existe sur l'organisation hiérarchique d'un système naturel [ALL82][O'NE86][MUL92], et que nous ne nous aventurerons pas à en faire le tour.

Lorsque l'on néglige de représenter certains mécanismes selon leur échelle de temps, il s'agit d'une *abstraction selon l'échelle de temps*. Si l'on organise le système en groupant les phénomènes se déroulant à la même échelle, on réalise une *hiérarchisation selon l'échelle de temps*.

Nous allons voir quelques exemples d'application de ces deux techniques et, le cas échéant, le raisonnement temporel qui y est attaché.

#### 1.2.2 Abstraction selon l'échelle de temps

Pour un modèle numérique standard (i.e. un ensemble d'équations différentielles), les équations sont sélectionnées selon l'échelle de temps des mécanismes sur lesquels on porte son attention.

Schaffer [SCH81] présente et discute cette méthode. Il ne fait apparaître que les équations représentant la dynamique des espèces (i.e. des mécanismes) dont l'échelle de temps est celle de l'étude. Les autres espèces sont ignorées. Toute la difficulté est alors d'estimer l'importance des espèces et des interactions omises. En prenant l'exemple d'un modèle de compétition classique [MAC72], l'auteur démontre que plus l'échelle de temps d'une espèce non représentée est "rapide" (i.e. petite), meilleure est l'approximation.

Ces considérations présentent deux inconvénients importants. D'abord, il est nécessaire de connaître à l'avance (ou du moins d'estimer) les échelles de temps des mécanismes laissés de côté pour justifier le fait qu'ils le soient. Ensuite, l'analyse des conséquences de l'omission de ces mécanismes sur le comportement du système (en particulier sa stabilité) est conduite à partir d'approximations linéaires au voisinage de l'équilibre, ce qui est une restriction forte.

### 1.2.3 Hiérarchisation selon l'échelle de temps

La hiérarchisation est un peu différente de l'abstraction et est plus répandue : elle vise à regrouper les mécanismes en classes selon leur échelle de temps, pour raisonner ensuite à partir de ces classes. Nous évoquons ici quelques exemples de hiérarchisation selon l'échelle temporelle et éventuellement selon l'échelle spatiale.

#### *Modélisation hiérarchisée d'un écosystème*

Pour décrire un écosystème aquatique composé d'organismes vivants, Pahl-Wostl [PAH93a] le structure en composants, chacun caractérisé par une échelle spatio-temporelle unique. Pour décrire les interactions entre les organismes, elle fait ensuite une distinction fonctionnelle entre les "phénomènes", agissant au niveau du système global (inter-composants), et les "processus", agissant au sein d'un composant. Les caractéristiques spatio-temporelles d'un organisme sont déterminées à partir de son poids, et permettent de le classer dans un composant de l'organisation. Il est à relever que cette détermination semble peu adaptable à n'importe quel système dynamique et devra donc se faire d'une autre manière dans une autre situation.

L'auteur généralise ensuite son étude à n'importe quel écosystème [PAH93b]. L'échelle de temps correspondant à un organisme est égale à son temps de réponse, identifié grâce au temps de génération (âge de la première reproduction). Sur l'ensemble du système, elle peut s'étaler entre un jour et plusieurs années. Elle est supposée connue, mais est variable au cours du temps, ce qui permet à l'organisation globale d'évoluer (les organismes peuvent changer de composant spatio-temporel; e.g. la feuille d'un arbre possède un temps de génération lié au stade de croissance de l'arbre). Cette flexibilité est un point positif, puisque l'hypothèse de régularité de l'évolution d'un organisme n'est plus nécessaire. Mais en contrepartie, la structuration en composants spatio-temporels est plus difficile à réaliser, et le choix des échelles appropriées devient arbitraire.

Pahl-Wostl reconnaît également qu'une échelle de temps unique n'est pas adaptée aux organismes complexes (e.g. un arbre). Elle trace alors comme perspective de les décomposer en modules fonctionnels insérables ensuite chacun dans un composant spatio-temporel. Remarquons que cette tâche semble à elle seule fort complexe et difficile à valider. Peut-être serait-il plus facile de représenter l'évolution globale de l'arbre, mais à des échelles différentes.

Une fois constituée la hiérarchie des mécanismes, la façon dont ils interagissent est décrite. Il s'agit d'évaluer la réponse d'un mécanisme du système (dont on connaît l'échelle de temps, c'est à dire le temps de réponse) à une variation externe somme d'un échelon unitaire et d'une sinusoïde. Si la variation externe se produit à une échelle très inférieure à



celle du mécanisme (fréquence élevée), sa dynamique n'est pas perçue et sa valeur moyenne seule est considérée. Si elle se produit à une échelle beaucoup plus lente que celle du système (basse fréquence), alors le système la suit et reste dans un état stable. Enfin, c'est lorsque les échelles de la variation externe et du système sont similaires que son effet sera le plus marqué.

Cette répartition des situations par *ordres de grandeur* (très inférieur, très supérieur, du même ordre) et les conclusions sur la représentation (respectivement : dynamique non représentée, dynamique considérée constante, dynamique représentée telle quelle) sont caractéristiques de la façon dont on appréhende l'influence réciproque de deux mécanismes d'échelles différentes. Nous l'avons déjà introduite lors de l'abstraction selon l'échelle; nous la retrouverons plus loin et la reprendrons dans notre formalisme, pour la simulation de plusieurs processus évoluant à échelles de temps multiples (cf. 2.1).

#### *Modélisation hiérarchisée du long-terme passé*

Certaines disciplines nécessitent la prise en compte des données du long-terme passé (historiques), pour comprendre une évolution générale jusqu'au présent et augmenter la qualité de la prédiction. C'est le cas de la géologie, de l'archéologie, et de nombreux sous-domaines de l'écologie dont l'écologie de paysage. Par exemple, pour évaluer l'influence au cours du temps des changements climatiques, des interactions biologiques des activités humaines sur les paysages naturels, Delcourt [DEL88] les intègre dans une hiérarchie d'échelles temporelles et spatiales emboîtées :

- une micro-échelle (1 à 500 ans,  $1\text{m}^2$  à  $10^6\text{m}^2$ ) pour les perturbations soudaines (feu) et les variations climatiques allant de la saison au siècle, auxquelles sont sensibles les populations végétales et animales;

- une méso-échelle (500 à 10000 ans,  $10^6$  à  $10^{10}\text{m}^2$ ) pour divers événements de la dernière ère interglaciaire (l'Holocène), les migrations d'espèces, la transformation des paysages naturels en cultures...;

- une macro-échelle (10000 ans à 1 million d'années,  $10^{10}$  à  $10^{12}\text{m}^2$ ) où figurent l'apparition et la disparition des espèces, les migrations sur une partie de continent ;

- une mega-échelle (1 million à 4.6 milliards d'années et toute surface supérieure à  $10^{12}\text{m}^2$ ) où la configuration des plaques tectoniques et les évolutions liées sont représentées.

#### *Simulation hiérarchisée d'un écosystème*

Pour modéliser les interactions entre la structure de la végétation et les processus agissant au sein d'un écosystème, Lauenroth *et al.* [LAU93] rassemblent plusieurs modèles existants en un seul. Chaque modèle d'origine prend en compte un ensemble de mécanismes d'échelles diverses, et est simulé à un pas de temps unique (jour, mois ou année) : les processus sol/plante sont simulés avec un pas de temps de un jour (pour l'eau)

ou un mois (pour les nutriments minéraux); la structure de la végétation est simulée avec un pas de temps de un an.

La simulation du modèle résultant nécessite donc une communication de l'information. Elle se fait par agrégation de valeurs pour passer d'une échelle fine à une échelle plus grossière, et par répartition saisonnière pour aller d'une échelle grossière à une échelle fine.

#### *Modélisation hiérarchisée d'un seul mécanisme*

Les exemples cités jusque là sont des modèles où cohabitent plusieurs mécanismes, chaque mécanisme étant représenté à une échelle (1 minute, 1 semaine, etc.), ou un intervalle d'échelles assez proches (de 1 à 5 minutes, de 1 à 2 semaines, etc.), c'est-à-dire *du même ordre de grandeur*. Ici se présente le cas de mécanismes dont la représentation est proposée sur un intervalle d'échelles couvrant *plusieurs ordres de grandeur*. Il met l'accent sur un problème crucial : pour éviter tout *a priori*, ne doit-on pas représenter un mécanisme à toutes les échelles possibles ?

Prenons un exemple en biologie végétale. Un premier mécanisme est celui du stockage des ressources par une plante [CHA90]. Il peut être étudié à n'importe quelle échelle de temps, de la journée à la durée de vie de la plante, selon l'échelle des mécanismes influents, eux-mêmes représentés à toutes les échelles (Fig. 1.1).

C'est ce type de représentation multi-niveaux que nous désirons mettre en place, mais sans faire intervenir l'expertise pour déterminer les échelles de temps, c'est-à-dire sans imposer une hiérarchie d'ordres de grandeur.

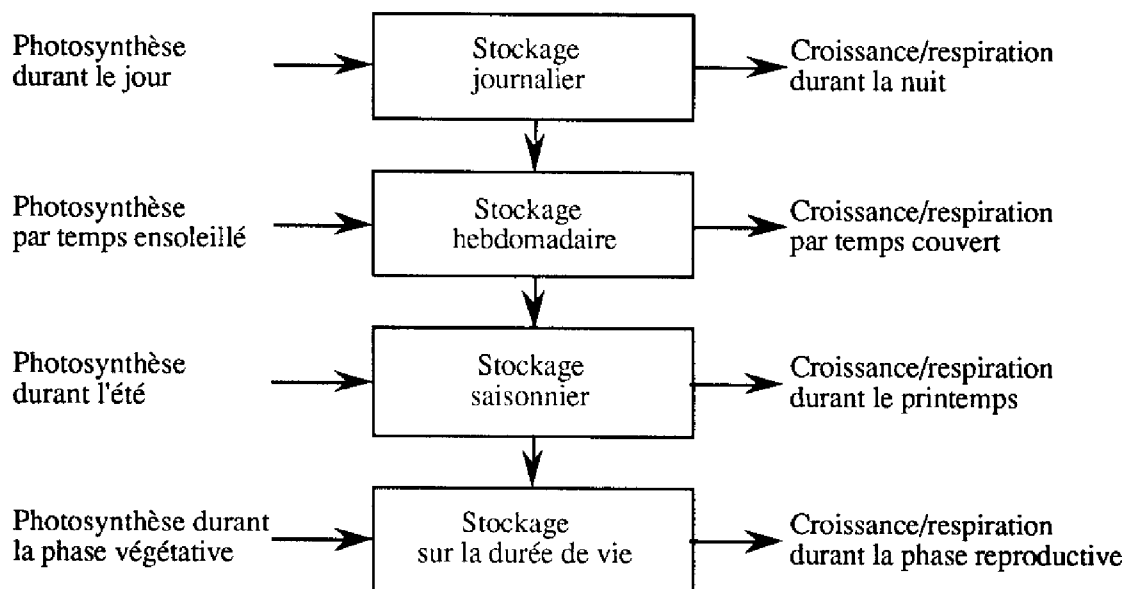


Fig. 1.1 : Le mécanisme du stockage des ressources par une plante vu à différentes échelles de temps. Une flèche entrante indique un apport, une flèche sortante une consommation.

Un deuxième mécanisme est la réponse photosynthétique à une augmentation de la concentration de CO<sub>2</sub>. En effet, un des problèmes majeurs abordés depuis quelques années par les écologues est la prédiction des réponses des écosystèmes terrestres à un accroissement de la concentration atmosphérique de CO<sub>2</sub> (doublement d'ici 2030 par exemple). Bien que l'on ne sache actuellement pas grand-chose de la réaction des écosystèmes à ce "changement global", on sait que le raisonnement sur les échelles de temps est essentiel pour l'extrapolation à long-terme des comportements observés sur le court-terme (les seuls pour lesquels on dispose de données).

En effet, on sait par expertise que les réponses à des taux élevés de CO<sub>2</sub> ne se produisent pas à une seule échelle de temps [MOO91] : la photosynthèse d'une feuille est modifiée en quelques secondes. Puis une accoutumance se produit en quelques jours, et enfin une adaptation complète est observée au bout de deux à trois semaines. L'adaptation de tout l'écosystème est plus lente, et varie entre une et trois saisons. Ce n'est encore pas une échelle suffisante, car la combinaison avec d'autres facteurs devrait (c'est une supposition) provoquer une modification de la composition de l'écosystème sur des échelles allant de plusieurs semaines à des décennies. Enfin, la sélection des génotypes les mieux adaptés aux nouvelles conditions devrait se produire sur des échelles de quelques décennies à quelques siècles !

On voit bien ici la nécessité de pouvoir représenter ce seul mécanisme selon plusieurs points de vue, aussi valides les uns que les autres mais adaptés à des études différentes.

#### 1.2.4 En résumé : où faut-il essayer d'apporter des solutions ?

Au cours de cette petite analyse bibliographique, on a pu se rendre compte de deux problèmes : en premier lieu, toute la difficulté réside dans le fait que le plus souvent, à cause de l'irrégularité d'un mécanisme, c'est un *intervalle* d'échelles de temps qui doit y être attaché. Le plus souvent, on trouve une échelle unique pour un mécanisme. Lorsque ce n'est pas le cas, l'intervalle d'échelles est supposé connu, par expertise.

Pourtant, dans cet intervalle, certaines échelles seront pertinentes pour une étude, d'autres moins : cela dépend du contexte (les autres mécanismes) et de ce que l'on veut étudier (sur quelle période, avec quelle précision ?). Assigner arbitrairement et *a priori* une ou plusieurs échelles à un mécanisme n'est pas optimal, et peut être une tâche ardue.

Comme on l'a vu, il serait donc utile de pouvoir représenter l'évolution dynamique du mécanisme à plusieurs échelles de temps, fournissant ainsi plusieurs points de vue sur le mécanisme. Ensuite, il faudrait aider l'utilisateur à choisir ces échelles sur un critère objectif, en lui donnant la possibilité de justifier son choix.

Une fois choisies les échelles adéquates pour chaque mécanisme, les simuler ensemble se fera selon la technique classique : à l'échelle d'un mécanisme, on considère un

mécanisme à échelle plus fine comme instantané, et un mécanisme à échelle plus grossière comme constant. Cette technique sera détaillée et adaptée dans le paragraphe 2.1.

Le second problème qui apparaît est le suivant : un mécanisme est une combinaison de sous-mécanismes imbriqués, dont les échelles sont elles aussi variables. Pour faire apparaître l'influence de chaque sous-mécanisme, il faudrait être capable de décomposer l'évolution du mécanisme, là aussi de façon non arbitraire. Or, la séparation en modules fonctionnels que l'on peut trouver à cet effet est également une affaire d'expertise. L'appuyer par un critère objectif (l'échelle de temps) la rendrait plus valide.

### **1.3 Echelles de temps en Automatique : les perturbations singulières**

#### **1.3.1 Généralités**

La simplification de modèles par réduction d'ordre (de dimension) et par séparation d'échelles de temps est à l'origine d'une littérature abondante en Automatique, avec le développement de la méthode des perturbations singulières [SAK84]. Le but de cette méthode était en premier lieu de baser la commande d'un système dynamique (linéaire ou non) sur des modèles d'ordre réduit ne tenant pas compte des petits paramètres parasites de fréquence élevée (d'échelle fine). Elle s'est ensuite montrée adaptée aux tâches de modélisation et d'analyse de systèmes (contrôlabilité, stabilité, etc.), et pour la conception de contrôleurs.

Le principe de base est de séparer un système présentant deux échelles de temps différentes connues en deux sous-systèmes : un lent et un rapide. Ainsi, si l'on juge que la dynamique rapide est négligeable, le contrôle du sous-système lent (représentant le système réduit) est suffisant.

Bien sûr, nous n'avons pas ici l'intention de contrôler un écosystème. Néanmoins, cette technique intéressante est brièvement présentée pour montrer comment, à partir d'un modèle analytique que l'on sait comporter deux dynamiques différentes, on peut isoler la lente de la rapide.

#### **1.3.2 Les différents axes de la méthode des perturbations singulières**

Une description des techniques employées pour la séparation des sous-systèmes lent et rapide est regroupée en Annexe I. Ici, nous n'en précisons que les fondements et les résultats.

### *Modèle singulièrement perturbé*

Dans le cas général, on considère le modèle sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles non-linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, t), & x(t_0) = x^0 \\ \dot{z} = G(x, z, t), & z(t_0) = z^0 \end{cases}$$

où  $x$  (de dimension  $n$ ) est "lent" et  $z$  (de dimension  $m$ ) contient des dynamiques transitoires "rapides" surimposées à un état "quasi-stable" lentement variable. On suppose que  $x$  et  $z$  sont connus.

On a donc :

$$\|\dot{z}\| \gg \|\dot{x}\|.$$

Pour faire apparaître explicitement cette différence d'échelle, on introduit  $g = \varepsilon G$  (avec  $\varepsilon$  positif et petit). Les fonctions  $f$  et  $g$  sont alors du même ordre de grandeur. Le paramètre d'échelle  $\varepsilon$  est le rapport des vitesses des phénomènes lent et rapide : plus  $\varepsilon$  est petit et plus importante est la séparation des échelles. Le modèle standard d'un système singulièrement perturbé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, t), & x(t_0) = x^0 \\ \varepsilon \dot{z} = g(x, z, t), & z(t_0) = z^0 \end{cases} \quad (1)$$

dont une version linéarisée est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

C'est lors de la modélisation qu'il faut donc être capable de séparer les variables lentes des rapides, pour le système entier. Si le système entier est hiérarchisable en sous-systèmes, les variables lentes et rapides de chaque sous-système servent à connaître les variables lentes et rapides pour le système entier. On peut ainsi construire un système multi-échelles. Encore faut-il que l'interconnexion des sous-systèmes ait un effet négligeable sur les dynamiques, ce qui n'est pas vraiment facile à vérifier pour les systèmes complexes que nous considérons.

### *Système à deux échelles de temps*

Une fois le système à deux échelles écrit sous la forme (1), on cherche à le séparer en deux sous-systèmes correspondant chacun à une échelle. Dans un système linéaire, il s'agira de mettre (2) sous la forme d'un système bloc-triangular. Si les matrices de la diagonale ont des valeurs propres nettement séparées (la plus grande valeur propre de l'une est plus petite que la plus petite de l'autre), alors on peut conclure que le système présente deux échelles de temps pouvant être dissociées. Un point intéressant est qu'il n'y a pas nécessairement une différence d'ordre de grandeur entre ces échelles.

La séparation des sous-systèmes lent et rapide consiste alors à exprimer le système selon un point de vue, lent ou rapide, et à faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Prendre  $\varepsilon = 0$  revient à poser que

la variable rapide a atteint son régime permanent, et ne présente donc plus de dynamique rapide. La réduction du modèle consiste ensuite à négliger le sous-système transitoire rapide, en considérant que son influence décroît rapidement dans un intervalle initial, après quoi la réponse du système est essentiellement due au sous-système lent.

Cette réduction est aussi applicable aux systèmes non-linéaires, et aux systèmes discrets.

#### *Séparation dans un système complexe hiérarchisé selon l'échelle de temps*

Dans le cas de systèmes comportant quelques centaines ou milliers de variables d'état, la modélisation n'est possible qu'en réalisant des séparations en sous-systèmes. Il sera d'autant plus facile de contrôler le système entier que ces sous-systèmes seront indépendants, c'est-à-dire que leur connexion sera faible. Lorsque l'importance de leur connexion peut être rattachée à leur échelle de temps, il est possible de les isoler.

En l'occurrence, on considère que le système est formé de  $N$  sous-systèmes "locaux" en interaction faible selon l'échelle de temps rapide et forte à l'échelle lente. Il suffit donc de les décomposer selon l'échelle rapide. Avec le modèle "global" lent, cela fait  $N+1$  sous-systèmes hiérarchisés en deux niveaux d'échelles. Si le système lent peut ensuite lui-même être séparé en deux ensembles de sous-systèmes d'échelles différentes, une hiérarchie à trois niveaux apparaît. Et ainsi de suite...

#### 1.3.3 Un exemple d'application de la méthode aux sciences de l'environnement

Lakin et Van Den Driessche [LAK77] étudient la présence de différentes échelles de temps dans un modèle de dynamique des populations. Il s'agit d'une généralisation de l'équation logistique, dans laquelle l'espèce modélisée est connectée à son écosystème par un niveau trophique défini par une ressource renouvelable. Le modèle comprend donc deux processus dynamiques : la disponibilité de la ressource et la densité de la population considérée. Les auteurs partent de la connaissance selon laquelle la ressource s'ajuste "rapidement" à la demande, et intervient dans la variation "lente" de la densité de population à travers le paramètre  $\varepsilon$  (tel que  $0 < \varepsilon \ll 1$ ) représentant le rapport des vitesses lente et rapide. Ces vitesses sont donc supposés distinctes en ordre de grandeur.

Une approche par perturbations singulières peut alors être appliquée à ce modèle pour le découpler asymptotiquement en deux sous-modèles décrivant chacun les dynamiques des deux processus à une vitesse. A l'échelle rapide (selon la variable de temps rapide  $\tau = t/\varepsilon$ ), la densité de population est approximée par une constante, et la variation de la ressource est exponentielle. A l'échelle lente (selon la variable de temps lente  $t = \varepsilon\tau$ ), la densité de population est exponentielle, et l'ajustement de la ressource intervient dans un terme transitoire avant de disparaître rapidement.

Pour prouver la validité de ces approximations, elles sont regroupées dans un modèle unique "composite", dont la simulation (avec  $\varepsilon = 0.01$ ) est comparée à celle du modèle

original singulièrement perturbé, et ceci quel que soit  $t$  (c'est-à-dire à court et long-terme). Les auteurs concluent à la validité du découplage pour ce modèle simple, convenant à la description de la consommation d'herbe d'un herbivore, ou à celle de l'azote par un arbre.

Un modèle plus général est ensuite étudié, dans lequel la consommation de la ressource n'est plus forcément proportionnelle à la densité de population. Les approximations asymptotiques obtenues ci-dessus pour le modèle logistique ne sont que légèrement modifiées, bien que devant être établies à partir d'équations différentielles non linéaires. Testé sur un modèle de compétition de drosophiles, le découplage produit des résultats satisfaisants.

Enfin, les auteurs introduisent un troisième processus beaucoup plus lent : l'augmentation du maximum de densité de population de l'espèce, prenant place sur une longue échelle de temps (à long-terme). Le découplage aboutit alors à considérer qu'aux échelles rapides ( $t$  et  $\tau$ ), les deux processus les plus rapides (la densité de population et  $a$  *fortiori* l'ajustement de la ressource) ne sont pas affectés par les variations du processus le plus lent. Par contre, à l'échelle lente ( $T = \varepsilon t = \varepsilon^2 \tau$ ), leurs équations doivent faire intervenir un terme supplémentaire du deuxième ordre. La comparaison de la simulation du modèle composite (comportant les trois processus découplés avec  $\varepsilon = 0.01$ ) et du modèle original produit là encore des résultats assez probants à la fois sur le court, moyen et long-terme. Les valeurs des trois processus approximées par la méthode des perturbations singulières sont très précises, et démontrent la capacité de cette méthode à intégrer à la fois les effets à court et long-terme.

#### 1.3.4 Les idées à retenir et les limites de la théorie des perturbations singulières

##### *Idées*

Le principe de séparation des sous-systèmes est à remarquer : il consiste à se placer à une échelle, et à envisager toutes les autres dynamiques selon cette échelle. En l'occurrence, on tend à différencier les autres dynamiques en ordre de grandeur, puisqu'on prend  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour les isoler (c'est à dire : la dynamique lente a une vitesse proche de 0 ou/et la rapide a une vitesse tendant vers l'infini). Considérer la dynamique lente comme constante du point de vue de la rapide se justifie alors analytiquement.

On retrouve alors ici *de façon analytique* le raisonnement plus ou moins empirique noté chez les écologues modélisant la façon dont plusieurs mécanismes évoluant à des échelles diverses doivent interagir.

Egalement, la hiérarchisation selon l'échelle de temps trouve ici un cadre formel solide proche de l'intuition et facile à manipuler. Ce cadre fait défaut au domaine des sciences environnementales où on a pu remarquer une formalisation beaucoup plus liée à

l'application, et donc manquant de généralité. Par contre, on retrouvera le principe de séparation successive lent/rapide dans la décomposition en ondelettes (cf. Annexe II).

### *Limites*

Cependant, la théorie présentée ici ne peut servir qu'une fois que le modèle analytique est disponible, et lorsque l'on sait que les échelles de temps des variables sont différentes. Actuellement, la détermination des hiérarchies d'échelles dans un modèle général est un problème ouvert. Il est résolu pour la plupart des systèmes invariants linéaires [DELE83][COD81][YOU82], mais c'est une tâche bien plus complexe pour le cadre général non-linéaire dans lequel entrent la majorité des phénomènes naturels. D'ailleurs, il n'est pas abordé dans l'article cité pour l'application environnementale [LAK77].

L'expertise de l'utilisateur est donc indispensable avant d'appliquer cette méthode : il s'agira de détecter les dynamiques différentes, et d'en déduire les variables lentes et rapides. Ce n'est pas évident dans les systèmes complexes environnementaux où, comme on l'a déjà évoqué, les mécanismes fortement non-linéaires présentent différents types d'évolution, donc différentes échelles de temps selon l'intervalle de temps considéré. En l'occurrence, l'exemple d'application à la biologie décrit précédemment (cf. 1.3.3) est une simplification de la réalité : il ne considère que des processus bien réguliers. Cela suppose qu'ils sont décrits d'une façon suffisamment réaliste sous cette forme, et que l'on peut faire abstraction de tous les autres processus (autres espèces, ressources supplémentaires, processus de niveaux trophiques plus hauts, variabilité spatiale, retards, etc.).

De plus, la méthode des perturbations singulières fait une analogie entre échelle rapide et court-terme, c'est à dire qu'une dynamique rapide est considérée comme transitoire. Or, nous pouvons avoir affaire à un mécanisme rapide sur toute la durée d'étude, ou qui redevient rapide après un passage lent (dynamique irrégulière). Notons également que l'écologiste a souvent une bonne idée du comportement d'un mécanisme lorsqu'il est proche de l'équilibre, mais sa phase transitoire, si elle existe, est difficile à isoler : la notion d'*instant initial* n'a pas une signification aussi claire pour un processus écologique que pour un processus physique.

### *Position de notre travail*

C'est donc en amont de l'application de la méthode des perturbations singulières que nous nous proposons d'aider l'utilisateur : comment détecter les variables lentes et rapides, et quand modifier éventuellement cette dissociation selon l'intervalle d'étude ? Ce sont ces tâches qui nécessitent la définition d'outils génériques. Une fois ceci réalisé, obtenir une formulation analytique du modèle n'est pas le plus difficile.



## 1.4 Echelles de temps en Traitement du Signal

Par habitude et tradition, les sciences environnementales enregistrent beaucoup de séries de données, ou font intervenir des modèles de simulation dont les résultats doivent être interprétés. Le Traitement du Signal offre un cadre méthodique attractif pour l'étude que nous désirons réaliser. Découplé de tout besoin de modélisation analytique, il s'avère de la première utilité pour tout ce qui nécessite l'extraction de l'information contenue dans un simple jeu de données (observations, mesures ou résultats de simulation).

De plus, la représentation du signal se fait couramment dans le domaine temporel ou/et fréquentiel. Par là même, elle s'insère dans la problématique de l'échelle de temps : n'y a-t'il pas un lien direct entre mécanisme rapide et haute-fréquence, dynamique lente et basse-fréquence ? L'*analyse de Fourier*, qui fait correspondre temps et fréquence, est donc incontournable dans le contexte d'échelle de temps. Elle a cependant le défaut de ne pas concilier la localisation temporelle et fréquentielle. Pour nous qui essayons de traiter des mécanismes dont la dynamique — donc la fréquence — n'est pas régulière dans le temps, et qui en plus accordons de l'importance à une datation précise des événements temporels et fréquentiels, c'est pour le moins fâcheux. Comme ce n'est pas un inconvénient nouveau, nous verrons des versions locales de l'analyse de Fourier.

Enfin, une théorie mathématique récente, la *théorie des ondelettes*, résoud le problème de la localisation temporelle et fréquentielle en étant basée sur une notion de dilatation apparentée à l'échelle de temps. Nous essaierons de faire ressortir la proximité de nos objectifs et de ceux poursuivis par cette théorie et par l'*analyse multi-résolution* qui en découle.

Dans toute cette partie, le terme "signal" recouvrira les termes jusqu'ici employés de "mécanisme" ou "évolution d'un processus", pour désigner une séquence chronologique de valeurs réelles issues d'observations, de mesures, ou constituant des résultats de simulation.

### 1.4.1 L'échelle selon Fourier

#### *Transformation de Fourier*

Une représentation fréquentielle fournit un complément indispensable à la représentation temporelle que l'on a généralement d'un phénomène écologique. L'analyse de Fourier permet de décrire un signal quelconque dans le domaine temporel ou fréquentiel. Dans le domaine fréquentiel, la représentation du signal permet de connaître l'amplitude de chaque fréquence qu'il contient.

On considère le signal décrivant un des phénomènes auxquels on peut avoir affaire. Soit  $X(t)$  sa représentation temporelle (résultats de simulation, séquence de mesures ou d'observations numériques). Alors la transformation de Fourier de ce signal est :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i2\pi\nu t} dt$$

où  $\nu$  est la variable de fréquence. Il ressort de cette définition que le calcul d'une seule valeur fréquentielle  $F(\nu)$  du signal nécessite la connaissance de toutes ses valeurs temporelles. La transformation inverse de Fourier est :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t} d\nu,$$

qui signifie en substance qu'une seule valeur temporelle du signal est une superposition infinie d'exponentielles complexes, c'est à dire d'oscillations harmoniques combinaisons linéaires de fonctions sinus et cosinus, parfaitement délocalisées dans le temps.

### *Echelle de temps*

Le spectre de fréquences du signal  $X(t)$  est le tracé de sa transformée de Fourier  $F(\nu)$ . Il décrit l'importance relative des harmoniques présentes à chaque fréquence. L'importance d'une harmonique traduit en retour la "vitesse" d'évolution du signal temporel, et se rattache par là à l'échelle de temps : la présence d'une harmonique à haute-fréquence signifie une rapidité de fluctuation du signal temporel, qui doit donc être analysée à échelle de temps fine. Inversement, la présence d'une basse-fréquence traduit une allure générale, une variation globale qui sera de façon adéquate représentée à une échelle de temps plus grossière.

Par exemple, sur la figure 1.2, on a tracé les signaux :

$$X(t) = \sin(5t),$$

$$Y(t) = \sin(5t) + \sin(20t) \text{ et}$$

$$Z(t) = \sin(5t) + \sin(20t) + \sin(50t)$$

et leur spectre de fréquences. Le dernier signal, le plus rapide, est celui qui contient la fréquence la plus élevée.

Cette relation temps-fréquence permet de définir une notion d'échelle de temps selon Fourier, qui serait l'inverse de la plus grande fréquence non-nulle du spectre :

$$\text{échelle} = \frac{1}{\max(\omega/2\pi)}$$

En reprenant l'exemple de la figure 1.2, on aurait ainsi l'échelle de  $X(t)$  égale à 1.26, l'échelle de  $Y(t)$  égale à 0.31, et l'échelle de  $Z(t)$  égale à 0.13. Ainsi, on spécifie la rapidité de l'évolution du signal dans le temps : plus l'échelle est petite, plus la valeur de la fréquence maximale est importante, et plus le signal est agité. On peut remarquer également que cette définition est équivalente à la spécification de la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas idéal.

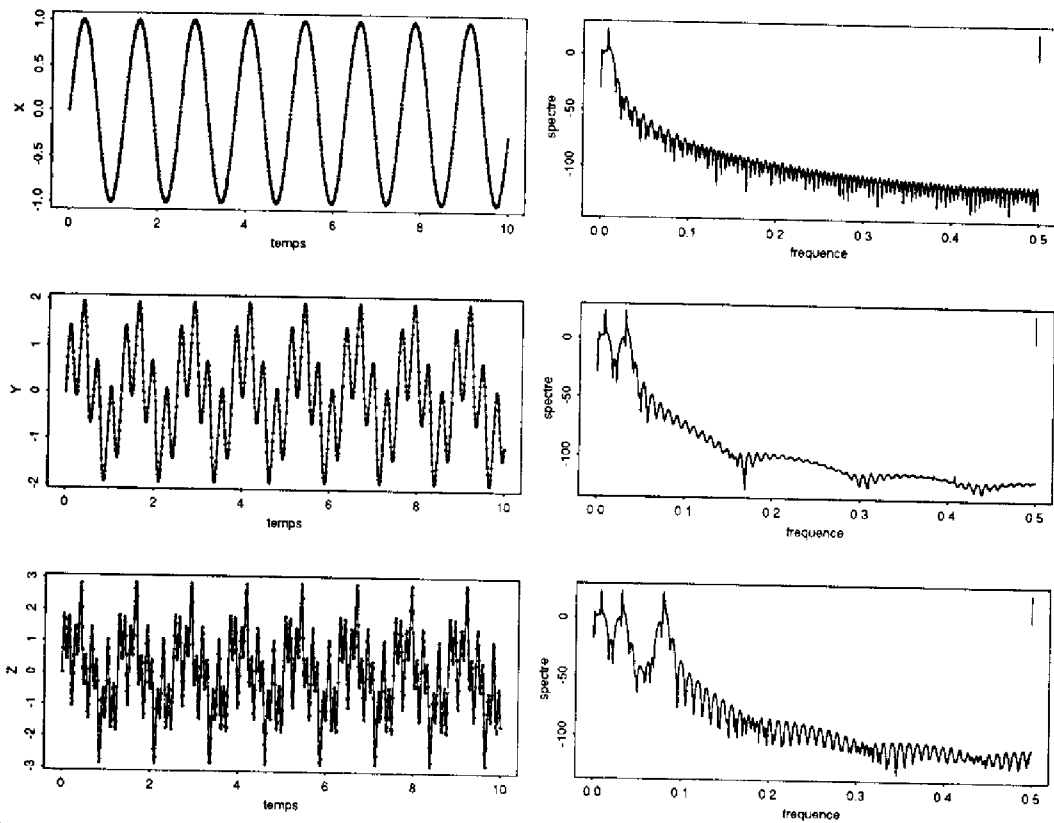


Fig. 1.2 : Trois exemples de spectres de fréquences. A gauche figurent les représentations temporelles, à droite leur spectre de fréquences (plus exactement le périodogramme), où les ordonnées sont en dB et les abscisses indiquent la fréquence/100.

*Limites : impossibilité de la localisation temporelle et fréquentielle*

On entend par “localisation” non pas la possibilité de déterminer une date ou une fréquence, mais la capacité de borner à volonté un intervalle de temps ou de fréquences.

Les fonctions harmoniques sont par définition globales. Il n’est pas possible d’y inclure une notion d’événement local, car la fréquence d’un signal n’est pas la fréquence de ses fonctions harmoniques. Si par exemple, on considère le cas d’un signal transitoire nul en dehors d’un intervalle temporel, cette nullité est rendue dans sa transformée de Fourier par la superposition d’une infinité d’ondes virtuelles, qui interféreraient de telle sorte qu’elles s’annulent mutuellement. L’interprétation diffère donc de la situation physique où le signal n’existe pas.

Supposons que l’on ait une limitation simultanée en temps (sur une durée  $T$ ) et en fréquence (sur une bande  $B$ ) pour le signal  $X(t)$ . Alors :

$$X(t) = \int_{-B/2}^{B/2} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = 0 \text{ pour } |t| > T/2.$$

Il en est de même des dérivées  $n$ -ièmes de  $X(t)$ :

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} = \int_{-B/2}^{B/2} (i2\pi v)^n F(v) e^{i2\pi vt} dv = 0 \text{ pour } |t| > T/2.$$

Si l'on cherche à connaître la valeur du signal à la date  $s$  appartenant à l'intervalle où le signal existe, on peut écrire :

$$X(s) = \int_{-B/2}^{B/2} F(v) e^{i2\pi v(s-t)} e^{i2\pi vt} dv, \quad |s| < T/2, \quad |t| > T/2.$$

Or, on a le développement en série de MacLaurin suivant :

$$e^{i2\pi v(s-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i2\pi(s-t)]^n}{n!} v^n.$$

On aboutit donc à :

$$x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-t)^n}{n!} \int_{-B/2}^{B/2} (i2\pi v)^n F(v) e^{i2\pi vt} dv = 0,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le signal est supposé non nul sur  $[-T/2; T/2]$ .

Un signal ne peut donc pas être *de support arbitrairement réduit à la fois en temps et en fréquence*. Par exemple, une impulsion brève occupe un large spectre de fréquences; inversement, un filtre à bande de fréquences étroite a un long temps de réponse. C'est la dualité de Fourier, qui trouve sa forme mathématique la plus simple dans l'inégalité d'Heisenberg-Gabor :

$$\Delta t \cdot \Delta v \geq \frac{1}{4\pi},$$

où  $\Delta t$  représente la durée du signal et  $\Delta v$  sa bande spectrale.

Il convient donc de se méfier de la définition de l'échelle de temps selon Fourier que nous avons proposé intuitivement. Elle ne peut être valide que pour des mécanismes parfaitement réguliers, comme ceux pris en exemples dans la figure 1.2, où la rapidité (la fréquence) du signal est constante sur une durée infinie. Ce n'était donc qu'*en partie* à cause du caractère plus ou moins agité du mécanisme que l'on pouvait y associer une échelle de temps précise.

Dans notre cas, nous voulons disposer d'une notion d'échelle de temps adaptable à n'importe quel phénomène naturel, en particulier présentant des discontinuités éventuelles. Or, un comportement discontinu ne peut à l'évidence pas être représenté selon Fourier (sauf par une somme infinie d'harmoniques couvrant toutes les fréquences). Nous allons voir certaines approches, qui pourraient être utiles puisqu'elles essaient de caractériser la fréquence locale d'un signal.

### 1.4.2 Fourier à court terme et spectres instantanés

#### *Sonagramme et spectrogramme*

L'idée de ces travaux est de remplacer l'analyse de Fourier globale par une succession d'analyses spectrales locales relatives à une fenêtre d'observation glissante [FLA93]. Le premier appareil réalisant cette opération fut le sonographe, qui codait au cours du temps la puissance de sortie d'une batterie de filtres passe-bande en parallèle :

$$S_X(t, \nu) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(n)H(n - \nu)e^{i2\pi n t} dn \right|^2$$

où  $F(\nu)$  est la transformée de Fourier du signal  $X(t)$  analysé et  $H(\nu)$  le gain complexe du filtre d'analyse avant changement de fréquence (qui permettait de balayer tout le spectre par translation). Une situation plus évoluée est celle où la réponse de chacun des filtres peut dépendre de la fréquence analysée. Dans ces deux cas, une interprétation duale est possible dans le domaine temporel, faisant intervenir la réponse impulsionnelle des filtres. Par là, la notion d'analyse locale dans le temps devient explicite : l'horizon temporel est fixé par la durée de cette réponse impulsionnelle.

La démarche de calcul est donc "observation à court-terme d'un signal à travers une fenêtre + analyse spectrale locale". Avec cette analyse, il est possible de prendre en compte les non-linéarités du signal, en s'arrangeant pour les faire coïncider avec les limites de la fenêtre d'analyse.

#### *Limitations*

Cependant, les mêmes compromis que pour l'analyse de Fourier "globale" sont à faire en termes de résolutions antagonistes : la résolution temporelle est d'autant meilleure que la fenêtre est de courte durée, mais la résolution en fréquence est dégradée d'autant puisque l'analyse de Fourier est réduite à cette fenêtre. Inversement l'analyse par banc de filtres, permettant une localisation fréquentielle d'autant plus précise que les filtres sont sélectifs (donc à réponse impulsionnelle longue), est dégradée temporellement d'autant.

### 1.4.3 Décompositions atomiques

#### *Décomposition*

L'idée de départ est de décomposer un signal sur une famille de signaux élémentaires (*atomes*) dont il est une superposition naturelle. On désire que chaque atome soit bien localisé en temps et en fréquence, et on veut pouvoir déduire chacun des atomes à partir de n'importe quel autre, par un groupe de transformations.

Tout l'art de la décomposition provient du choix de ces atomes. Puisqu'on s'intéresse à la dualité temps-fréquence, une représentation du plan portant ces deux dimensions, et sa décomposition en atomes (par *pavage*) permettront de mieux cerner les possibilités de localisation conjointe.

### Gabor

Le premier, Gabor prit comme atome temps-fréquence le signal gaussien, le plus concentré en temps et en fréquence. Tout signal devait alors pouvoir s'écrire :

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_X[n,m] g_{nm}(t)$$

où les  $g_{nm}(t)$  sont les atomes, obtenus à partir d'une gaussienne par une translation de maille  $(nt_0, mv_0)$ , et où les  $G_X[n,m]$  sont les coefficients correspondants. Dans le plan temps-fréquence, chaque signal élémentaire est associé à une aire minimum (Fig. 1.3). Si le maillage est trop lâche, de l'information est perdue. Inversement, s'il est trop serré, il y aura redondance. De plus, si l'aire minimum est imposée, alors le maillage est connu *a priori* et on peut voir l'échantillonnage de Gabor comme intermédiaire entre l'échantillonnage de type Shannon (temporel) et celui de type Fourier (fréquentiel).

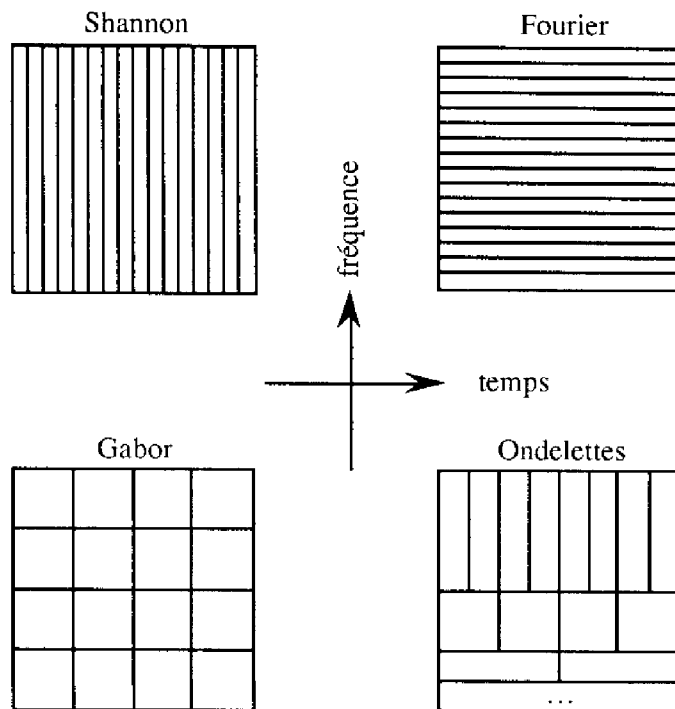


Fig. 1.3 : Discretisations d'un signal en termes de pavages du plan temps-fréquence (d'après [FLA93]) : échantillonnage temporel (Shannon), ou fréquentiel (Fourier); maillage rectangulaire (Gabor) ou dyadique (ondelettes). Quelle que soit leur forme, l'aire des différentes cellules d'information est la même.

Mais cette décomposition n'était pas facilitée par la définition conjointe d'une base orthogonale, qui aurait permis d'obtenir les coefficients  $G_X[n,m]$  par simple projection. Finalement, on démontra qu'à un tel maillage rectangulaire de densité minimum ne pouvait être associée aucune base construite sur des fonctions bien localisées en temps et en fréquence; ce fut la fin de la décomposition de Gabor.

### *Ondelettes*

Le concept d'*ondelette* fut introduit par J. Morlet et A. Grossman dans le cadre de la physique quantique [MOR82][GRO84]. L'idée initiale est celle d'une représentation continue, mais obtenue par projection du signal sur une famille de fonctions à moyenne nulle, appelées ondelettes, et déduites d'une fonction élémentaire, l'*ondelette-mère*, par translations et dilatations. Par l'idée de dilatation on se place en fait dans une perspective *temps-échelle*.

La famille des ondelettes se comporte comme une base continue, ce qui autorise l'existence d'une transformée en ondelettes inverse. Egalement, le pavage du plan temps-fréquence de façon dyadique (Fig. 1.3) rend possible l'existence de bases orthonormées. La découverte de ces bases, dotées de nombreuses propriétés intéressantes et associées à des structures de calcul efficaces est à l'origine d'une bouillonnante activité [MAL89][CHU92][DAU92][MEY93]. Exposons les principales idées, puis la théorie de cette puissante technique de représentation.

#### 1.4.4 Les ondelettes : principales idées

##### *Que sont les ondelettes ?*

Les ondelettes sont des fonctions mathématiques qui segmentent le signal en composants fréquentiels, et ensuite étudient chaque composant à une résolution correspondant à son échelle [GRA95]. Ces fonctions sont contenues dans des domaines finis, ce qui autorise la localisation temporelle.

La procédure d'analyse d'un signal par les ondelettes consiste d'abord à choisir l'ondelette-mère qui sert de fonction prototype (Fig. 1.4 et 1.5). En dilatant et translatant cette ondelette, on génère sa *famille*. Les dilatations possibles sont des changements d'échelle de temps selon les puissances de 2, qui modifient la largeur et la fréquence de l'ondelette. L'indice de translation est un nombre entier.

La famille des ondelettes correspondant à une ondelette-mère constitue une base orthogonale, la *base d'ondelettes*. C'est selon cette base que le signal est décomposé en atomes temps-fréquence. L'intérêt particulier des ondelettes réside dans le fait que les dilatations et les transformations conservent la forme : une fois qu'on connaît les propriétés de l'ondelette-mère, on connaît les propriétés de la base entière.

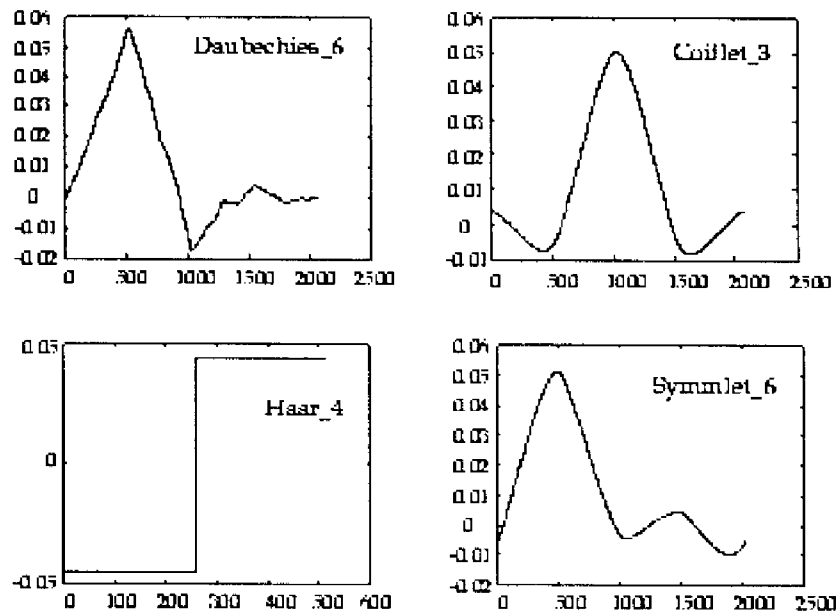


Fig. 1.4 : Quelques familles d'ondelettes. Le chiffre indique le nombre de moments nuls (lié au nombre de coefficients d'ondelette) pour la sous-classe dessinée.

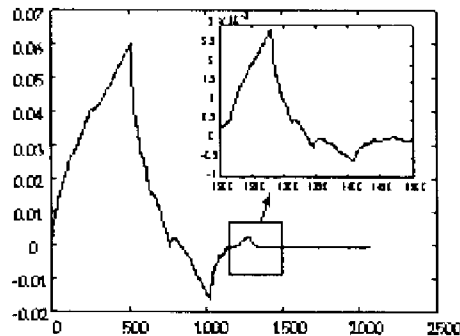


Fig. 1.5 : La structure fractale de l'ondelette-mère de Daubechies.

L'analyse temporelle est effectuée à partir d'une version contractée (haute-fréquence), l'analyse fréquentielle à partir d'une version dilatée (basse-fréquence) de l'ondelette-mère. A basse-fréquence, la résolution fréquentielle est grande, mais la localisation temporelle est médiocre du fait de la dilatation de l'ondelette analysante. Inversement, à haute-fréquence, la contraction de l'ondelette favorise la résolution temporelle, mais au détriment de la résolution fréquentielle. Le compromis temps-fréquence est bien sûr toujours présent, mais il prend une forme locale dépendante de la fréquence.

Le signal original étant exprimé comme une combinaison linéaire d'ondelettes de la base, seuls les *coefficients d'ondelettes* correspondants sont nécessaires au traitement des données.



La difficulté du traitement consiste donc d'abord à choisir la base d'ondelettes la plus adaptée au signal étudié, et ensuite à fixer le nombre de coefficients d'ondelettes que l'on s'autorise (troncature). Moins il y a de coefficients considérés, plus le signal est *abstrait*.

L'annexe II présente de façon simplifiée la théorie des ondelettes. Il est conseillé de s'y reporter si l'on veut comprendre le principe de leur fonctionnement.

### *Ondelettes vs. Fourier*

La transformée de Fourier et la transformée en ondelettes sont toutes deux des rotations dans l'espace des fonctions d'un domaine vers un autre domaine. Pour la transformée de Fourier, ce nouveau domaine contient les fonctions de base sinus et cosinus, pour la transformée en ondelettes, il contient les fonctions de base plus compliquées que sont les ondelettes.

Une autre similarité est — évidemment — la localisation en fréquence. Les spectres de fréquence (Fig. 1.2) sont donc utilisables dans le cadre des ondelettes.

En matière de différences, la plus intéressante est le fait que les ondelettes individuelles sont localisées dans le temps. Elles sont donc adaptées aux cas où le signal contient des discontinuités et des pics importants.

Sur la figure 1.3, on voit la différence de pavage temps-fréquence entre Fourier et les ondelettes. Plus intéressant, le pavage "intermédiaire" selon Gabor est assimilable au pavage pour une décomposition de Fourier à court-terme. La "fonction de fenêtrage" est alors une fonction échelon tronquant temporellement la fonction sinus ou cosinus sur une fenêtre particulière. Mais *une seule fenêtre* est utilisée pour *toutes les fréquences*. La résolution (l'échelle) de l'analyse est donc la même en tout point du plan temps-fréquence.

Par contre, le pavage pour la transformée en ondelettes montre que les fenêtres varient. Ainsi, pour isoler une discontinuité (par exemple), on dispose de fonctions de base très petites en temps (et bien sûr haute-fréquence). En même temps, pour en faire une analyse fréquentielle détaillée, on a des fonctions de base très étendues temporellement (donc basse-fréquence). Le fait de trouver ces deux types de fonctions dans la même base d'ondelettes est le grand avantage de cette théorie. On peut alors parler de *résolution multi-échelles*, dans le sens où on peut faire varier la fenêtre temporelle ou la largeur de bande à volonté (contrairement au cas de Fourier à court-terme, et *a fortiori* de Fourier).

Il faut également comprendre que les transformées en ondelettes n'ont pas un ensemble unique de fonctions de base comme la transformée de Fourier, mais une infinité.

### *Applications*

Une application immédiate est le filtrage du bruit [DON93]. En utilisant les ondelettes pour la décomposition, on effectue un filtrage qui d'une part lisse le signal, et d'autre part

en produit des détails (cf. Annexe II). Alors, si ces détails sont négligeables (inférieurs à un seuil), ils sont éliminés. En appliquant la transformation inverse, le signal est reconstitué, sans bruit. Comme les portions pointues du signal n'ont pas été lissées, le signal résultant conserve les détails importants.

Egalement, les ondelettes ont été utilisées pour la détection de comportements récurrents à plusieurs échelles de temps, dans une application de l'astrophysique. Ayant remarqué que les caractéristiques statistiques de la luminosité émanant d'une source astronomique de rayons-X étaient les mêmes à différentes résolutions temporelles (de 2ms à 10h), Scargle [SCA93] réalisa un outil à base d'ondelettes appelé "scalogramme". Cet outil mesurait la moyenne des carrés des coefficients d'ondelette à une échelle. En traçant ces valeurs en fonction de l'échelle, il obtint l'équivalent du spectre de puissance de Fourier en fonction de la fréquence. Certaines relations entre les différentes échelles de temps y furent alors visibles (oscillations quasi-périodiques, bruit à très basse fréquence).

#### *Echelle, ondelettes, abstraction et raisonnement qualitatif : même esprit*

Les ondelettes relèvent plus de l'*analyse d'échelle* que de l'analyse fréquentielle : on prend une fonction, on la translate et on change son échelle; appliquée au signal, on en tire une approximation. On reprend la fonction, on la translate et on change son échelle à nouveau; on en tire une nouvelle approximation. Et ainsi de suite... Il apparaît derrière cette analyse l'idée d'être *moins sensible au bruit*, puisqu'on mesure les fluctuations moyennes du signal à différentes échelles. C'est la même idée qui prévaut dans le raisonnement qualitatif, et à tout ce qui relève de l'abstraction en général : s'affranchir des détails non-significatifs pour ne retenir que les événements importants. Changer d'échelle permet de voir les choses sous un angle différent, de prendre du recul et d'en tirer ainsi une connaissance plus profonde.

#### 1.4.5 Ondelettes : les limites et les idées qu'il faut en retenir

##### *Choix de la base*

Il faut une certaine expertise dans l'utilisation des ondelettes. En particulier, le choix de la fonction d'échelle  $\phi$  et d'une famille (d'une base) d'ondelettes peut ne pas être une mince affaire. L'ondelette de Haar, qui est la plus simple, présente l'inconvénient d'être discontinue et ne peut donc représenter de façon "lisse" de simples fonctions linéaires. Les ondelettes B-splines, quant à elles, ont une meilleure continuité (elles sont plus "douces"), et peuvent donc représenter toute fonction continue. Mais leur utilisation est coûteuse en calculs, la relation de décomposition étant constituée d'une infinité de termes. Il faut alors être capable d'en réaliser une troncature pertinente de façon arbitraire, ce qui n'est pas évident.

Il y a de toute façon un compromis à faire entre la “douceur” et la taille du support pour le choix de l’ondelette-mère : plus le support est court et moins l’ondelette est douce. Un jeu de règles *ad-hoc* (à l’aide d’un *banc d’ondelettes* par exemple) doit être développé pour choisir “la bonne” ondelette-mère.

Le choix d’une fonction de base sera bien adapté au signal à traiter si très peu de termes de la décomposition suffisent à le représenter. Alors, l’information du signal aura été compressée. La meilleure fonction de base, trouvée parmi une infinité de disponibles, doit donc respecter certaines contraintes [WIC92] :

- facilité de calcul des produits scalaires avec les autres fonctions de base;
- facilité de superposition des fonctions de base;
- bonnes localisations temporelle et fréquentielle;
- indépendance, de telle manière qu’il n’y ait pas trop d’éléments de la base pour représenter une même portion du signal (pour éviter la redondance).

Par exemple, Daubechies [DAU88] a développé des bases spécifiques performantes pour représenter un comportement polynomial. Mais l’application des ondelettes à des signaux représentant des processus environnementaux est plus délicate. Ce serait le sujet d’une thèse entière que d’évaluer l’applicabilité et les performances des ondelettes à ce domaine. En matière d’élimination du bruit (provenant du manque de fiabilité des mesures par exemple), d’analyse de processus non-linéaires, ou encore de stockage compressé de données, il est certain que les améliorations seraient sensibles.

### *Seuillage*

Les coefficients d’ondelette correspondent au détail extrait du signal lors de sa décomposition (cf. Annexe II). Quand ces détails sont petits, ils peuvent être omis sans affecter l’aspect général. Ce seuillage est purement arbitraire, et sa détermination est empirique. Plusieurs méthodes existent, plus ou moins “dures” [VID95]. Là aussi, il faut choisir la bonne par essais successifs. De plus, la valeur du seuillage est difficile à relier au *comportement* du signal étudié : ce n’est pas parce qu’on assigne à 0 par exemple les coefficients inférieurs à 0.5 que l’on sait quelle est la plus “petite” ondelette (la plus contractée, donnant la plus petite échelle de temps) : ce sont deux choses différentes.

Egalement, des fluctuations supprimées en tant que bruit peuvent très bien être importantes pour l’interprétation. Il faut alors remplacer un seuillage identique sur tout le signal par un seuillage dynamique, en faisant intervenir l’expertise.

### *Que faire après cela ?*

Il y a une grande part de subjectivité dans une utilisation performante des ondelettes. Elles permettent d’obtenir autant de représentations que l’on veut d’un signal, à toutes les échelles de temps, mais elles laissent entièrement à l’utilisateur le soin de détecter, *de*

*manière seulement visuelle*, l'échelle des comportements intéressants. Sans chercher à rivaliser le moins du monde avec cette théorie, nous aimerions également avoir un moyen de représenter un signal à n'importe quelle échelle de temps, qui, *en plus*, serait adapté à une analyse automatique des comportements dynamiques. Ainsi, le choix d'une ou de plusieurs représentations serait justifié par des motifs objectifs.

## 1.5 Raisonnement Qualitatif et abstraction temporelle : la contribution de l'Intelligence Artificielle

### 1.5.1 Le Raisonnement Qualitatif

Le Raisonnement Qualitatif (RQ) [WEL90] est une branche de l'Intelligence Artificielle qui se propose de développer des concepts et techniques permettant de décrire *qualitativement* le comportement des systèmes dynamiques, c'est-à-dire en termes non numériques. Principalement destiné à la résolution de problèmes d'ingénierie, il vise à fournir une aide à l'utilisateur pour la modélisation des systèmes et l'automatisation de tâches telles que la conception, la simulation, l'interprétation, la détection de fautes ou le diagnostic. Il recouvre maintenant de nombreux terrains d'application, y compris l'étude de systèmes biologiques ou écologiques.

#### *Un raisonnement nécessaire et suffisant*

La motivation principale du RQ est de représenter et d'expliquer le fonctionnement de systèmes complexes dont les équations sont mal connues, ou peu fiables faute de validation possible.

La description du comportement d'un système (pour le modéliser, et pour l'interpréter) fait alors intervenir des notions qualitatives copiant celles employées dans le raisonnement humain : ordres de grandeur, sens d'évolution, zones et points de fonctionnement particuliers. La notion de causalité entre les variables d'un système peut aussi être prise en compte dans un modèle qualitatif, alors qu'elle l'est difficilement dans un modèle numérique. Citons à cet égard Dubois et Gentil [DUB94] : "Une modélisation purement quantitative et exhaustive de toutes les situations possibles [d'un procédé physique] est pratiquement infaisable. Le raisonnement qualitatif est envisagé pour proposer des méthodes de simulation ou de diagnostic à un niveau de précision adéquat".

Le RQ apporte certaines solutions dans les cas où il y a *nécessité* de manipuler des grandeurs imprécises. Il est de plus fondé sur une notion de *pertinence du raisonnement* : lorsque raisonner sur des symboles est suffisant, une modélisation trop précise est inutile.

Elle peut même prêter à confusion, ne distinguant pas l'information importante de la superflue. La représentation des variables est ainsi guidée par le principe selon lequel les distinctions de valeur doivent être pertinentes pour le type de raisonnement effectué [FOR84].

De même, les données numériques de capteurs ou les résultats de la simulation numérique d'un système complexe sont difficilement interprétables par un non-expert. Leur transcription en valeurs symboliques ou qualitatives permet de manipuler la connaissance avec un niveau d'*abstraction* plus élevé, donc plus simple. Pour un expert chargé de la conduite d'une installation industrielle automatisée moderne, il est également difficile d'interpréter la formidable quantité d'informations de nature numérique et symbolique qui lui est fournie. Le RQ s'insère alors naturellement dans un système d'aide à la décision capable de traiter l'information non-numérique, de la mettre en relation avec les connaissances numériques pour accomplir les tâches principales de la supervision : surveillance, prédiction et diagnostic.

#### *Les trois axes abordés par le RQ*

La *modélisation* met en jeu divers formalismes manipulant des connaissances imprécises ou incomplètes : ordres de grandeur absolus ou relatifs [MAV88][RAI89], algèbres qualitatives [DOR89], modélisation causale, abstraction de modèles numériques statiques ou dynamiques, etc....

La *simulation* doit produire le comportement du système selon ses modes de fonctionnement, à partir de sa description structurelle. Deux approches majeures peuvent être distinguées : la recherche des comportements qualitatifs les plus probables [BOU93], ou celle de tous les comportements possibles (envisionnement ou arbre de comportements) [DEK84][KUI86][FOR84][LEY91]. Dans les deux cas, plusieurs différences importantes apparaissent par rapport à la simulation numérique : les équations différentielles, les valeurs des paramètres ou les entrées sont mal connues, ou sont connues sous une forme non-numérique; un ensemble de trajectoires est généré au lieu d'une seule; leur niveau d'abstraction élevé permet d'en dégager les distinctions de comportement qualitativement importantes pour toute une classe d'expérimentations. Cela est dû au fait que les manipulations effectuées sont principalement symboliques.

Le revers de la médaille est qu'une simulation *complète* (générant la totalité des comportements qualitatifs satisfaisant une description du système et un état initial) n'est pas *saine*, c'est à dire qu'elle peut engendrer des situations physiquement impossibles. La présence de ces comportements entraîne une explosion combinatoire dès que le système est un tant soit peu complexe. Si l'on se contente d'une simulation *correcte* (prédisant un nombre restreint de comportements possibles), l'explosion combinatoire est endiguée, mais l'exhaustivité de la liste des comportements possibles n'est plus assurée.

Les travaux les plus récents consistent, pour pallier ces inconvénients, à introduire de l'information numérique sous forme d'intervalles [KAY93][BOU94]. Cette redirection du RQ ne doit pas être vue comme une marche arrière, mais bien comme une avancée vers la constitution de systèmes de raisonnement hybrides, capables d'utiliser l'information numérique si elle est disponible et de s'en affranchir lorsque cela est nécessaire et/ou suffisant. Nous conserverons à l'esprit cette démarche, particulièrement adaptée à la connaissance et aux besoins environnementaux comme nous le verrons au 1.5.2.

Enfin, l'*interprétation* qualitative à partir d'informations numériques permet d'acquérir un certain niveau d'abstraction symbolique à partir duquel un raisonnement peut être envisagé. On peut segmenter une évolution numérique en épisodes [CHE90a][CHE90b] et raisonner sur ces épisodes. C'est cette approche que nous avons développée et adaptée à nos préoccupations; nous nous y attarderons donc plus loin.

Une autre approche consiste à interpréter et classer une série de simulations numériques pour en déduire les comportements qualitatifs d'un système. Accomplir cette tâche automatiquement signifie en premier lieu la détermination des paramètres qualitativement importants du système, et ensuite, à partir de leur évolution, la déduction d'une connaissance de haut-niveau sur le comportement global du système. La représentation des comportements se fait principalement dans l'espace de phase.

Par exemple, Yip [YIP88] bâtit successivement un "portrait" de systèmes non-linéaires particuliers, représentant qualitativement leur comportement global. Un jeu de simulations représentatives est d'abord sélectionné, qui sert à établir un ensemble de paramètres caractéristiques. A partir de ces paramètres et d'une connaissance profonde du système (qu'il faut avoir *a priori*), des contraintes sur la structure du portrait recherché sont mises en évidence, et de nouvelles conditions initiales à essayer sont proposées pour la simulation, etc.

Dans le même ordre d'idée, relevons les travaux de Sacks qui cherche à construire et à analyser qualitativement les comportements possibles d'un système non-linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre. Dans le système PLR (Piecewise Linear Reasoner) [SAC90], différentes conditions initiales du système sont testées, et chaque solution est traduite qualitativement par le biais de systèmes linéaires par morceaux : chaque région linéaire produit une partie du diagramme de phase global, dans lequel une trajectoire conduit à un comportement possible du système. D'abord, une approximation linéaire par morceaux est établie, avec le moins de régions linéaires possibles. Ensuite, ce modèle est affiné par étapes en une série de modèles de précision croissante, en découpant les régions de linéarité. A chaque étape, le diagramme de phase est comparé avec celui de l'étape précédente. Lorsqu'aucune nouvelle propriété qualitative n'apparaît plus, l'affinement est arrêté. L'ensemble des transitions entre régions de l'espace de phase compose un graphe complet mais qui n'est pas sain.

### 1.5.2 Le RQ dans les systèmes environnementaux

#### *Intérêt du RQ et complémentarité avec la connaissance quantitative*

Malgré le récent intérêt pour l'utilisation du RQ dans les systèmes environnementaux, il faut bien avouer que ce domaine présente peu d'applications [TRA96]. Pourtant, la complexité intrinsèque des systèmes, et donc leur méconnaissance, en fait un terrain particulièrement favorable à l'utilisation de formalismes capables d'intégrer l'imprécision et le manque d'informations. On pourra citer d'autres raisons de recourir à ces techniques : d'abord, les mesures et observations sont très incertaines (problèmes d'échelle et de représentativité) et de nombreuses variables sont difficiles, voire impossibles à mesurer. C'est le côté *nécessaire* du RQ qui est alors sollicité. Mais il est aussi *suffisant* : les méthodes classiques génèrent des modèles trop complexes pour être validés de façon certaine, et dont la pertinence est fortement sujette à caution. Une bonne partie de la connaissance des écologues s'exprime sous forme schématique ou en termes qualitatifs (grand, moyen, rapide, plus tard, etc.) Le domaine environnemental comporte par conséquent clairement des tâches susceptibles d'être traitées par le RQ.

Si la connaissance disponible sur ces systèmes est en partie qualitative, tout complément quantitatif disponible et fiable est évidemment à intégrer. De même, il est préférable pour certaines grandeurs d'être accessibles sous une forme numérique. En particulier, même si un mécanisme dynamique n'est représenté qu'en des termes qualitatifs, son évolution fait le plus souvent appel à une datation explicite. Le rythme périodique (jour/nuit et saison) d'un bon nombre de mécanismes naturels y est pour beaucoup.

#### *Quelques approches*

Les approches qualitatives en sciences de l'environnement s'axent autour de deux grandes tâches : l'analyse de systèmes et leur supervision.

L'*analyse de systèmes* en général, a pour but une meilleure compréhension des mécanismes et la constitution de modèles valides. Elle fait donc intervenir la modélisation, la simulation et l'interprétation, et ceci de façon itérative pour le perfectionnement successif des modèles.

L'analyse causale, basée sur le formalisme des graphes orientés (signés ou non), s'avère particulièrement bien adaptée à la représentation d'un mécanisme naturel décrit verbalement par un expert. Elle autorise la prédiction et l'interprétation du fonctionnement statique, à partir de connaissances hybrides (observations symboliques, mesures quantitatives) [GUE91]. L'analyse de boucles de Puccia et Levins [PUC85] est proche du formalisme des graphes orientés signés, mais se prête en plus à une analyse de la stabilité, primordiale pour l'analyse d'un système naturel. Ce formalisme se heurte malheureusement

à l'ambiguïté de l'algèbre des signes, qui ne peut inférer le signe d'une influence résultant de deux influences de signes différents.

Plusieurs approches en écophysiologie et écologie végétales illustrent l'emploi potentiel des modélisation et simulation qualitatives causales. Les travaux de Hunt & Cooke s'attaquent à la photosynthèse [HUN92] : le formalisme QRP ("Qualitative Representation for Plants") permet de prédire à partir de spécifications initiales le comportement qualitatif d'une plante au niveau cellulaire. Ce niveau est modélisé par un ensemble de relations qualitatives entre variables, se rapprochant d'un graphe orienté. Schmoldt [SCHM91] propose quant à lui un modèle de simulation qualitative des processus écophysiologiques de l'arbre (A-P-S pour "Atmosphere-Plant-Soil"). Il est également basé sur un graphe d'influences causales entre variables caractérisées par une valeur et un taux de changement qualitatifs (flous).

Citons dans les approches non causales (basées sur une représentation du type équations différentielles), l'analyse qualitative du modèle proie-prédateur (non-linéaire) [YAN94], un grand classique de la modélisation des systèmes naturels que nous traiterons à notre façon au chapitre 4. Cette analyse passe par une simulation générant un envisionnement (cf. 1.5.1), dont les résultats sont comparés avec des spécifications comportementales données. Des propriétés telles que la non-négativité et la périodicité des comportements sont ainsi mises en évidence.

La *supervision* a pour objectifs principaux l'évaluation de situation et le diagnostic, ces problèmes faisant appel (entre autres) aux sous-tâches précédentes de l'analyse de systèmes pour la constitution des modèles du comportement "correct". Entrent dans ce cadre plusieurs approches destinées à l'évaluation d'impact sur l'environnement. La simulation "linguistique" de Câmara *et al.* [CAM87] reprend le formalisme de graphe orienté signé, et est réalisée à l'aide de règles. Elle permet d'évaluer l'impact de pollutions, d'aménagement, etc. En géoprospective, Djerroud [DJE93] simule causalement l'évolution possible de sites naturels de stockage de déchets radioactifs sur des centaines de milliers d'années.

### 1.5.3 Les hiérarchies d'échelles de temps en RQ

Après avoir énuméré quelques approches qualitatives pour des problèmes liés à l'application environnementale, voyons maintenant trois démarches représentatives de la manière dont est intégré le concept d'échelle de temps dans le RQ. Notons que deux d'entre elles se réfèrent à des systèmes biologiques.

Les travaux explicités développent le raisonnement à plusieurs niveaux d'abstraction, en allant de l'aval vers l'amont : le premier auteur montre comment simuler des mécanismes à plusieurs niveaux, sans indiquer comment doivent être déterminés ces niveaux (et les modèles correspondants); le second les détermine en faisant le lien avec le niveau désiré par



l'utilisateur, sans justifier le choix de ce niveau; le dernier automatise en plus le choix du niveau d'abstraction désiré à partir des échelles des mécanismes, mais en supposant ces échelles connues et fixes.

Il ne restera plus alors à l'utilisateur qu'à sélectionner le mieux possible — encore plus en amont — les *bonnes* échelles des mécanismes en reliant leur comportement à ses désirs. C'est là que nous porterons notre effort.

#### *Modélisation et simulation à plusieurs niveaux d'abstraction*

Lorsqu'il traite un système complexe, le simulateur qualitatif QSIM [KUI86] est rapidement mis en échec par le nombre prohibitif d'états à considérer (explosion combinatoire). Une méthode pour se tirer d'affaire est alors de hiérarchiser le système global en mécanismes individuels interagissants, plus faciles à simuler, en prenant par exemple comme critère de séparation l'*échelle de temps* [KUI87].

A partir de l'exemple de la régulation des concentrations d'eau et de sodium par le rein humain, l'auteur définit informellement l'échelle comme "le temps que met un mécanisme pour répondre aux variations de manière significative". La régulation de l'eau est le mécanisme "rapide", et évolue à l'échelle de la minute, tandis que la régulation du sodium est le mécanisme "lent", car il évolue à l'échelle de l'heure ou du jour. La notion de vitesse est ici liée au fait qu'en temps que régulations, ces deux mécanismes peuvent être considérés comme achevés après que les variables correspondantes (les quantités d'eau et de sodium) aient atteint leur équilibre. Les échelles de temps sont dites "largement séparées", c'est à dire que le mécanisme rapide est entièrement achevé dans un délai trop court pour que le lent puisse varier "significativement".

A partir de là, il est possible d'approximer leur évolution coordonnée en établissant le concept d'abstraction temporelle suivant : "un mécanisme voit un autre mécanisme plus rapide comme *instantané*, et un plus lent comme *constant*". La communication de l'information entre les échelles se fait à travers les variables communes aux mécanismes. On retrouve le raisonnement que l'on avait déjà relevé dans les approches numériques des sciences de l'environnement (cf. 1.2.3) et dans la méthode des perturbations singulières (cf. 1.3.2).

La hiérarchie est explicitement fournie au simulateur en entrée. Une simulation se déroule comme suit (Fig. 1.6):

- 1- le mécanisme le plus rapide  $M_1$  est simulé jusqu'à son équilibre;
- 2- les états finaux des variables communes à  $M_1$  et au mécanisme immédiatement plus lent  $M_2$  sont pris comme états initiaux de la simulation de  $M_2$  (flèche 1);
- 3-  $M_2$  est à son tour simulé. Son état final est propagé en retour à  $M_1$  via des contraintes fonctionnelles qualitatives (flèche 2), afin de mettre à jour son état d'équilibre;

4- de façon similaire, les variables communes à  $M_1$ ,  $M_2$  et au troisième mécanisme immédiatement plus lent  $M_3$  définissent l'état initial de  $M_3$  (flèche 3), etc.

Cet algorithme permet ainsi au simulateur de se focaliser sur une échelle particulière. Il nécessite la connaissance des conditions initiales du système, et des contraintes qualitatives sur les variables communes et non communes aux différents mécanismes.

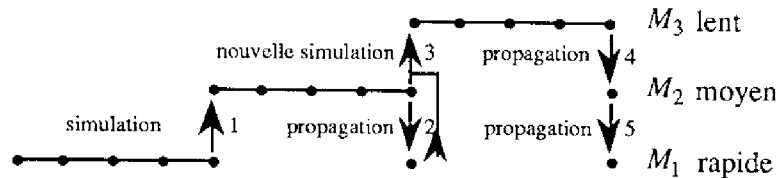


Fig. 1.6 : Simulation qualitative avec abstraction par échelle de temps (selon [KUI87]).

Une fonctionnalité supplémentaire permet de communiquer l'information lorsqu'un seul mécanisme est affecté par une perturbation externe, c'est à dire lorsqu'une variable non commune est atteinte : la perturbation se propage aux autres variables du même mécanisme, dont certaines sont communes à d'autres mécanismes. QSIM transmet ensuite la perturbation à ces autres mécanismes en "décalant" les contraintes de monotonie dans lesquelles les variables communes apparaissent. Ainsi, l'état d'équilibre de ces mécanismes est ajusté.

Cette approche est efficace lorsqu'il s'agit de prédire le comportement de processus de régulation, stables et agissant à des échelles très différentes, ce qui évite un traitement explicite du temps. Cependant, il faut envisager le cas où les processus sont moins simples, i.e. sont tels que les notions d'équilibre et de vitesse ne sont pas aussi faciles à définir. Comment alors choisir leurs échelles de temps ? En outre, aucune méthode ne permet de relier l'intérêt de l'utilisateur à un niveau d'abstraction particulier (rapide, moyen ou lent ?).

#### *Sélection automatique d'un modèle pertinent pour un niveau d'abstraction désiré*

Comme Kuipers, Iwasaki [IWA90] cherche à réduire la complexité inhérente à la simulation qualitative de systèmes complexes. Mais au lieu de pré-définir arbitrairement les différents niveaux d'abstraction possibles (rapide, moyen, lent chez Kuipers), l'auteur rend possible la génération du modèle au niveau approprié aux besoins de l'utilisateur. Par ailleurs, la cohérence de la description globale du système est censée être maintenue en rendant explicites les relations entre les différents niveaux.

Un modèle est un jeu d'équations produites automatiquement à partir d'une description structurelle du système, traduisible en un ensemble de processus. Selon la théorie QPT (Qualitative Process Theory, [FOR84]), un processus est défini comme "quelque chose qui agit au cours du temps et peut causer des changements sur les variables du système"; il est actif ou inactif, selon le niveau d'abstraction considéré. Chaque niveau (chaque modèle) est

caractérisé par une *granularité temporelle*  $T_M$  définie comme “l’unité de temps telle que tout changement intervenant sur une période plus courte est considéré instantané”. Par exemple,  $T_M = n$  signifie que le modèle  $M$  ignore toute durée inférieure à  $10^n$  secondes. Inversement, toute variation sur une période beaucoup plus longue (en ordre de grandeur) sera ignorée, le processus étant donc considéré constant. Cette partition des échelles de temps, toujours subjective, est néanmoins plus formelle que la notion d’échelles “largement séparées” de Kuipers.

L’utilisateur exprime ses besoins par le choix d’une granularité désirée  $n_0$  pour le modèle abstrait et le choix d’un “domaine” égal à la durée sur laquelle le comportement doit être prédit. Un ensemble de *granularités quantitatives* (toujours des ordres de grandeur) doit également être spécifié afin de fixer le degré de précision des variables prédites. Une fois ces paramètres fixés, un modèle est sélectionné de la façon suivante :

1- à partir des granularités quantitatives des variables, la granularité temporelle de chaque processus est déterminée (Fig. 1.7);

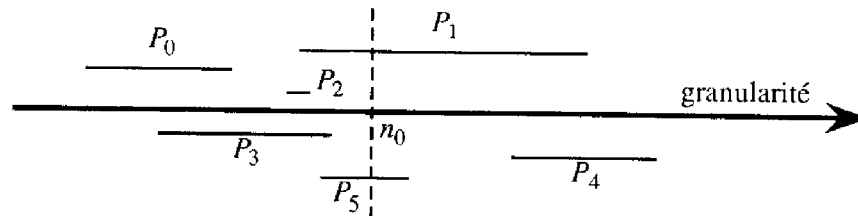


Fig. 1.7 : Un exemple de système où les processus ont une granularité exprimée sous forme d’intervalles.  $P_4$  est ignoré,  $P_0$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont considérés instantanés,  $P_1$  et  $P_5$  simulés tels quels.

2- le domaine et la granularité temporelle  $n_0$  désirés indiquent quels processus sélectionner dans le modèle : ceux dont la granularité est beaucoup plus grande (dénommés “lents”) sont ignorés, ceux dont la granularité est beaucoup plus petite (dénommés “rapides”) sont traités comme instantanés, et les autres sont laissés tels quels;

3- les processus non ignorés sont dits “actifs”, et leurs équations sont traduites en un modèle qualitatif compréhensible par un simulateur de type QSIM pour prédire le comportement.

La seconde partie du travail d’Iwasaki, plus originale, concerne l’inférence d’une explication cohérente du comportement global à partir des résultats de la simulation de plusieurs modèles (chaque besoin prédictif a pu conduire à une granularité  $n_0$  différente, et donc à un modèle différent). Deux techniques de raisonnement à plusieurs niveaux sont proposées :

— quand un processus de granularité faible (modèle fin) cause de rapides changements sur une variable évoluant à long-terme dans une direction générale déterminée par un processus de forte granularité (modèle grossier), le comportement de cette variable dans le

modèle fin est interprété par rapport à son comportement dans le modèle grossier (technique similaire à l'utilisation de coordonnées locales en raisonnement spatial; Fig. 1.8);

— quand un changement causé par un processus à long-terme (de forte granularité) invalide une hypothèse de fonctionnement d'un processus à court-terme, cela doit être détecté dans le premier et communiqué au deuxième pour mise à jour.

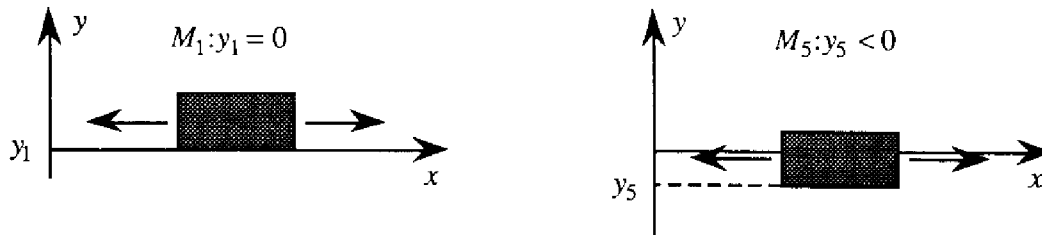


Fig. 1.8 : Exemple d'un bloc glissant horizontalement sur une surface plane. Le déplacement vertical ( $y$ ) est prédit constant et égal à 0 dans un modèle  $M_1$  à granularité 1 (court-terme). Dans un modèle  $M_5$  à granularité 5 (long-terme), le bloc s'enfonce par usure de la surface plane, donc  $dy/dt < 0$ . Le comportement du modèle global  $M$  "composé" de  $M_1$  et  $M_5$  n'est cohérent que si l'on considère que  $y_1$  est le déplacement vertical du bloc *par rapport* à  $y_5$ . Le déplacement vertical global du bloc est donc  $y_1 + y_5$ .

Ces deux "précautions" semblent malheureusement introduites pour traiter des applications spécifiques (comme celle de la figure 1.8), sans engendrer ou faire partie d'une technique générale pour l'élimination des conclusions conflictuelles.

Notons également que la notion de vitesse employée (rapide/lent) est sujette à controverse, puisque les vitesses de différentes variables peuvent ne pas être exprimées dans la même unité, et donc se trouver difficilement comparables. Plus gênant encore est le fait que, comme chez Kuipers, la granularité (ou un intervalle réduit de granularités) de chaque processus est supposée connue (pour être plus juste, elle est calculée à partir des granularités quantitatives des variables, qui sont supposées connues et fixes au cours du temps). De plus, aucun critère ni aucune stratégie n'est disponible pour le changement automatique de la description d'un processus, i.e. pour décider quand et pourquoi modifier la granularité désirée  $n_0$ . L'utilisateur doit spécifier lui-même l'échelle désirée selon ses besoins, ce qui n'est pas toujours évident et devrait être guidé *a posteriori* par le comportement des processus. Ces deux problèmes restent entiers comme chez Kuipers.

#### *Sélection automatique d'un modèle pertinent pour une question prédictive*

Le but reste ici de ne considérer dans un modèle complexe que ce qui est nécessaire à la prédiction d'un comportement demandé par l'utilisateur. Le logiciel de modélisation automatique bâti par Rickel et Porter [RIC94] est basé sur un modèle de système complexe sous la forme d'un graphe d'influences. Chaque arc entre deux variables porte, outre le type de l'influence, l'échelle de temps à laquelle cette influence est active. Le logiciel identifie des *chemins d'influences* entre les conditions comportementales en entrée (états et

comportements initiaux) et les *variables intéressantes* dont le comportement est à prédire. A partir de ces chemins, il sélectionne l'échelle de temps qui est la plus pertinente pour la prédiction. Détaillons un peu cette approche.

Il faut d'abord disposer du graphe d'influences du système. Une influence entre une variable cause et une variable effet peut être de deux sortes [FOR84] :

— différentielle si la spécification de la *valeur* de la variable cause fournit la vitesse de changement de la variable effet. L'influence est alors qualifiée par l'échelle de temps minimale nécessaire pour provoquer un changement significatif (en deçà, i.e. à une échelle plus rapide, les effets sont supposés négligeables);

— fonctionnelle, si il faut que la valeur de la variable cause *change* pour que la valeur de la variable effet change aussi. L'influence est considérée comme instantanée, à n'importe quelle échelle de temps.

Une variable d'entrée ne peut provoquer le changement d'une variable intéressante que si le *chemin d'influences* les reliant contient une influence différentielle, ou bien si la variable d'entrée varie (auquel cas un chemin d'influences fonctionnelles suffit à propager la variation). Si l'une de ces conditions est vérifiée, le chemin est un *chemin d'influences différentielles*.

A partir de ces conditions de changements et d'une échelle pertinente à laquelle représenter le modèle, le système de modélisation est capable de sélectionner les processus qui doivent être modélisés avec leur dynamique, et ceux qui doivent être considérés comme instantanés. Tout ceci n'est pas nouveau par rapport aux travaux précédemment cités.

Ce qui l'est un peu plus est l'institution de critères pour le choix automatique de l'échelle pertinente du modèle vis-à-vis des variables intéressantes (i.e. la granularité désirée  $n_0$  chez Iwasaki) : si à cette échelle, toutes les variables intéressantes sont significativement influencées par (au moins) une variable d'entrée, alors cette échelle est pertinente. Sa sélection est donc accomplie comme suit :

- 1- prendre l'échelle la plus rapide;
- 2- chercher toutes les variables intéressantes pouvant être atteintes à cette échelle (i.e. via des influences actives à cette échelle) à partir d'une variable d'entrée;
- 3- si toutes les variables intéressantes sont atteignables par un chemin d'influences différentielles, cette échelle est adéquate;
- 4- sinon, prendre l'échelle immédiatement plus lente et revenir en 2.

Malgré des aspects fort originaux concernant le fait que le "bon" niveau d'abstraction du modèle n'est plus supposé connu, et que l'application traitée par ces auteurs fait partie du domaine qui nous préoccupe, il faut bien avouer que ces travaux sont également basés sur une bonne connaissance *a priori* des mécanismes et de leurs interactions. Le graphe d'influences de départ — et par conséquent les échelles des processus — sont obtenus par

expertise (on y retrouve la notion contestable de “changement significatif”). Si cela paraît faisable lorsqu’on se préoccupe de phénomènes bien réguliers, périodiques, et facilement distinguables comme c’est le cas ici, c’est insuffisant dans un cadre plus général. Comme dans l’article de Kuipers, la définition des échelles comme ordres de grandeur peut masquer en plus les éventuels phénomènes se déroulant entre deux échelles successives.

Il est également regrettable que Rickel & Porter n’expliquent pas comment peuvent être combinées les prédictions à différentes échelles. Ils reconnaissent d’ailleurs qu’une seule échelle de temps n’est pas toujours suffisante pour répondre à l’attente de l’utilisateur, auquel cas il faudra bien associer différentes conclusions. De plus, les interactions les plus importantes entre les conditions comportementales en entrée et une variable intéressante peuvent ne pas prendre place *uniquement* à l’échelle pertinente la plus rapide possible. Ce qu’il faudrait, c’est pouvoir les analyser à différentes échelles.

#### 1.5.4 De l’abstraction temporelle en Physique Qualitative

Légèrement en marge de ces approches et plus proche de celles qui seront citées dans la partie suivante, Struss [STRU93] ne base pas son formalisme sur une hiérarchisation d’échelles de temps pour la modélisation/simulation d’un système à différents niveaux de détail. Il cherche plutôt à intégrer différentes transformations relevant de “l’abstraction temporelle” dans une théorie générale multi-modèles qu’il a développée par ailleurs (cette théorie est basée sur une description des comportements d’un système par un ensemble de relations logiques entre les variables). En premier lieu, une abstraction est définie le plus généralement possible comme une transformation surjective et non injective, appliquée à une représentation.

Différents types d’abstraction sont énumérés, ayant tous en commun une “perte d’information temporelle”, mais se différenciant selon les propriétés temporelles conservées, affaiblies ou perdues. En résumant une ontologie temporelle au triplet  $(T, (A, d), <)$  (où “ $T$ ” est un ensemble d’instances temporelles, “ $d$ ” une métrique définie sur ces instances, “ $A$ ” une structure d’opérateurs algébriques et “ $<$ ” une relation d’ordre), l’auteur distingue :

- la transformation de l’ensemble des instances  $T$ , par exemple l’échantillonnage d’un processus continu;
- la perte de propriétés métriques, par exemple la perte de la notion de *durée* par transformation d’une fonction continue en ensemble d’états qualitatifs (cf. simulation qualitative et envisionnement);
- le remplacement d’une métrique par une autre, par exemple la considération de “points de vue” permettant de changer selon l’ordre de grandeur une évolution dynamique en évolution instantanée ou constante (cf. 1.5.3);

- la modification de tout le triplet, en remplaçant par exemple une représentation basée sur les instants par une représentation basée sur des intervalles de temps;
- la perte de (presque) tout, si l'on ne raisonne que sur l'occurrence d'événements (passage par un seuil, ouverture d'un interrupteur, etc.).

L'auteur imagine ensuite plusieurs façons d'intégrer l'abstraction temporelle à son formalisme logique. Un premier essai consiste simplement à considérer le temps comme une variable parmi les autres. Alors une même relation entre variables peut correspondre à plusieurs comportements possibles, ce qui n'est pas souhaitable. Un second essai permet de mettre en évidence le lien entre abstraction temporelle et abstraction comportementale : deux comportements, définis sur un même domaine temporel et un même domaine de valeurs possibles, et auxquels on applique une même transformation, n'ont pas forcément le même domaine temporel abstrait à l'arrivée. L'abstraction ne peut donc pas s'appuyer sur une transformation des domaines de représentation, mais sur une transformation des comportements.

Pour transformer plusieurs comportements en un seul comportement abstrait, le domaine de valeurs de chaque variable est alors considéré comme un ensemble de fonctions du temps. En groupant les fonctions de même domaine temporel en une seule, puis en remplaçant un intervalle de temps par un instant pour chaque fonction restante, enfin en passant des domaines temporels restants au domaine abstrait désiré, on surmonte cet obstacle. Ainsi, la théorie de description relationnelle des comportements d'un système proposée par Struss se prête à certaines des transformations réunies sous le terme "d'abstraction temporelle".

L'auteur finit par des considérations plus proches de nos préoccupations : il cherche à formaliser l'interaction de processus représentés avec des vitesses et granularités temporelles différentes. Il considère deux processus, un lent et un rapide, respectivement décrits par les représentations temporelles  $(T_l, d_l, <_l)$  et  $(T_r, d_r, <_r)$ . Les vitesses doivent être nettement séparées, puisqu'on désire exprimer que le processus rapide est actif avant que le lent n'exhibe le moindre changement. Comme d'habitude, ce qui est influencé par le processus lent est considéré constant par le processus rapide, et les effets du processus rapide sont intégrés par le lent comme des changements instantanés. Une abstraction est décrite dans le formalisme comme une restriction à la granularité grossière de la description comportementale à la granularité fine : on aura  $T_l \subset T_r$ .

Ces travaux posent ensuite plusieurs questions intéressantes concernant ce mode de raisonnement; elles permettent ainsi de mettre le doigt sur certaines de ses limites. D'abord, si l'on suppose que le processus rapide est achevé avant que le lent n'ait eu le temps de varier (ce qui correspond déjà à une classe particulière de processus), comment est-il possible de spécifier la durée de ce processus rapide ? Il faudra pour cela définir un seuil

quantifiant ses effets sur le lent. Ensuite, il faudra définir un seuil (temporel ou de valeur) au-delà duquel une variation du processus lent ne pourra plus être considérée comme insignifiante. Enfin, les propriétés de continuité des processus en jeu peuvent être affectées par un changement de granularité, et une étude plus poussée devrait mettre en évidence les problèmes de représentation que cela peut poser.

### 1.5.5 Autres approches d'IA pour raisonner avec l'abstraction temporelle

L'abstraction temporelle est un thème naturel du RQ, qui cherche entre autres à simplifier les systèmes en en éliminant une certaine part de précision, de quelque nature qu'elle soit. Mais c'est également un thème vivace dans la communauté IA impliquée dans le *raisonnement temporel*, qui cherche des outils théoriques intégrables à tous les niveaux de l'ingénierie (modélisation, simulation, interprétation). Voici quelques approches fort instructives par des auteurs détachés de toute considération explicitement qualitative, mais qui proposent une gestion du temps abstrait intégrable au RQ.

Ces techniques de raisonnement temporel sont citées d'une part pour les définitions de la *granularité* qu'elles proposent, d'autre part pour souligner *a posteriori* la position de notre approche par rapport à celles de la littérature, et son adaptabilité aux types de raisonnement existant. Les travaux énumérés fournissent certains moyens de raisonner sur plusieurs niveaux d'abstraction, une fois que ceux-ci sont connus. Ils n'indiquent pas comment les déterminer. Ce raisonnement sur plusieurs niveaux n'est pas encore automatisé dans notre logiciel, mais fait partie des perspectives réalistes pour prolonger notre formalisme (comme nous essaierons de le démontrer à la fin de ce mémoire).

#### *La granularité*

Jerry Hobbs [HOB85] introduisit le premier le concept de granularité, comme "moyen de construire des théories logiques simples à partir de plus complexes". A partir d'un ensemble de prédicats *pertinents* à une granularité, il détermine une relation transitive d'*indiscernabilité* : "x et y sont indiscernables si aucun prédicat pertinent ne les discerne". Cette relation permet l'*abstraction d'une théorie complexe globale en une théorie locale* mieux gérable car plus grossière, et reliée à une granularité. Ce qui occupe un intervalle de temps dans la théorie complexe occupe un instant à la fin de cet intervalle dans la théorie plus simple. Le problème est que les prédicats pertinents sont supposés connus à l'avance par l'utilisateur, alors que leur détermination peut être ardue.

Il introduit alors une relation d'indiscernabilité plus souple, construite seulement à partir de prédicats *partiels* pertinents (ceux que l'on connaît): "pour discerner x et y, il suffit de trouver un prédicat partiel pertinent qui est vrai pour l'un et faux pour l'autre". Seulement, cette relation n'est pas transitive, et ne peut donc pas être utilisée pour la simplification. Il y



a en effet toujours des éléments indiscernables dans la granularité grossière : ceux dont les prédicats pertinents ne sont pas connus. Par un processus d'*idéalisation*, Hobbs contourne cet obstacle et rend tous les éléments de la théorie simplifiée discernables. Cette théorie n'est plus reliée à la théorie complexe, mais est suffisante pour le raisonnement.

L'approche de Hobbs est donc de considérer une granularité floue (c'est-à-dire aux frontières modulables), ce qui est différent de l'approche consistant à évaluer la vérité des prédicats selon différents points de vue (idée dont nous serons plus proches).

La communication entre les théories locales, i.e. le changement de point de vue, se fait par des *axiomes d'articulation*. L'auteur souligne donc que les granularités doivent être connues *a priori*. Le raisonnement entier de la simplification est donc ainsi structuré: dans une situation complexe, déterminer une granularité adéquate, puis sélectionner la théorie locale correspondante, enfin l'appliquer à la résolution du problème. Si il faut changer de perspective, les axiomes d'articulation permettent de passer d'une théorie locale à une autre. Les travaux de RQ cités dans la partie précédente (1.5.3) couvrent en majorité la seconde étape et le processus d'articulation entre granularités. Notre ambition est d'apporter notre contribution à la première étape.

#### *Raisonner à différentes granularités : le principe des "points de vue"*

Le but fixé par Maïm [MAÏ91] est de *comparer* des événements temporels (prenant place sur des instants ou des intervalles) à différentes granularités et de mesurer la *distance temporelle* entre eux. Choisir une granularité  $G$  signifie que tout intervalle temporel plus petit que  $G$  est considéré comme un instant. Supposons que l'on veuille calculer la distance temporelle entre deux intervalles connus. Deux approches sont envisageables:

— A une granularité égale ou supérieure à la taille de l'intervalle le plus grand, les deux événements sont vus comme des instants, et la distance entre eux peut être déterminée. C'est le point de vue *projection vers le haut*. Un événement se déroulant sur un intervalle (donc ayant une durée) est alors considéré comme instantané (Fig. 1.9).

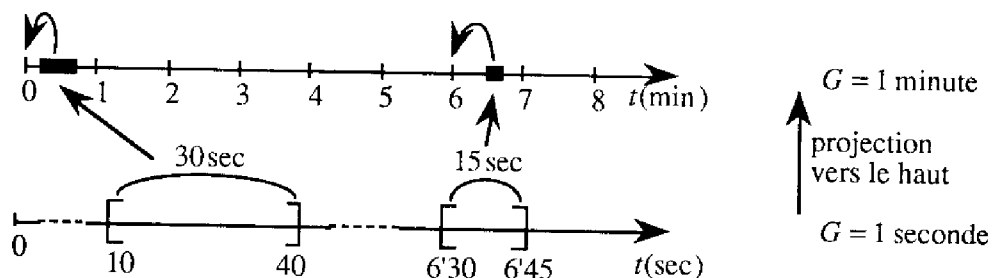


Fig. 1.9 : Exemple de projection vers le haut. A la granularité  $G = 1$  minute, la distance entre les deux intervalles de temps est  $d = 6$  minutes. Il y a perte en précision.

— La seconde solution est de chercher la distance entre deux instants de référence, appelés instants de début et de fin, et inclus chacun dans un des deux intervalles alors appelés *domaines de valeurs possibles*. Selon leur position, cette distance ne sera pas identique, d'où un intervalle de valeurs possibles. Un domaine est associé aux instants de début et de fin, donc une granularité fine est associée à une granularité grossière. C'est le point de vue *projection vers le bas* (Fig. 1.10).

La projection vers le haut a deux inconvénients importants (en plus de la précision évidemment moindre) : la possibilité de perdre de l'information lors de la comparaison de deux événements, puisqu'ils peuvent se trouver projetés au même point dans la granularité grossière; la possibilité de perdre de l'information lors de la mesure de la distance (Fig. 1.11).

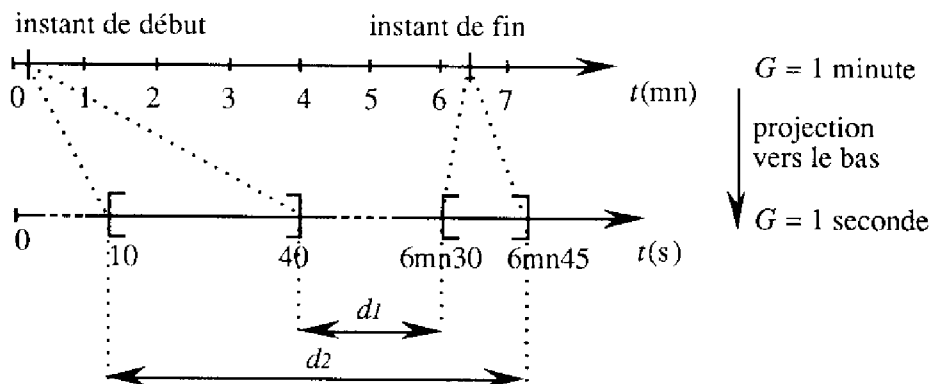


Fig. 1.10 : Exemple de projection vers le bas. Il y a perte en précision, mais on peut raisonner sur les intervalles : ici, la distance entre l'instant de début et de fin est comprise entre  $d_1$  et  $d_2$ .

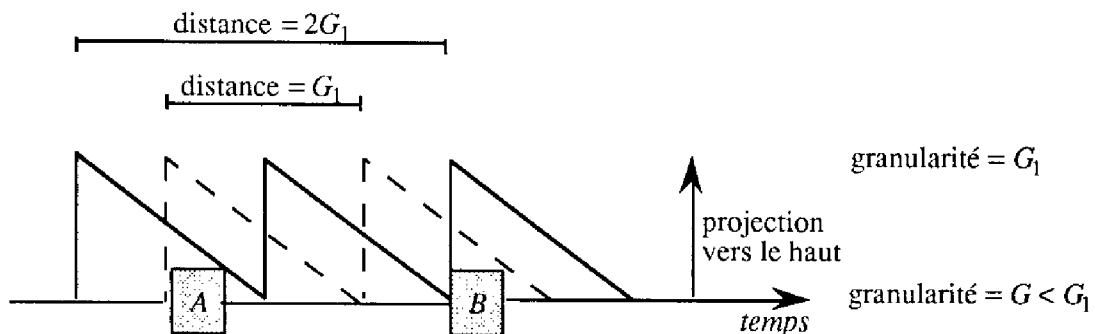


Fig. 1.11 : Un exemple pour lequel le choix de projection vers le haut (pointillés ou trait plein) aboutit à une mesure de la distance allant du simple au double. Il y a perte en précision et perte d'information.

Un système de raisonnement temporel employant la projection vers le bas nécessite un raisonnement sur les domaines, donc sur les intervalles. Maïm propose un langage orienté-objet, le CRL (Common Representation Language) facilitant ce raisonnement. Il se sert du calcul d'événements de Kowalski et Sergot [KOW86] pour fournir, à partir d'un historique d'événements donné, l'intervalle sur lequel un état est vrai. Cet intervalle débute et se termine par un événement. Prenons le cas où l'événement de début n'est pas donné comme

un instant mais comme un intervalle. Le début  $t_1$  de l'intervalle sur lequel l'état considéré est vrai est donc lui-même un intervalle. D'un autre côté, si l'événement terminant cet état est donné comme un instant, la fin  $t_2$  de l'intervalle recherché sera exprimée par un instant.

Dans le CRL, un événement possède un attribut temporel qui peut donc être, au choix, un instant ou un intervalle ayant lui-même un attribut de début et un attribut de fin. On peut facilement généraliser ce mécanisme de récursivité en considérant que les événements temporels sont des cas particuliers de valeurs numériques, ou "nombres", qui sont définis comme des endroits de référence, point ou intervalle selon la granularité. Ces nombres peuvent donc aussi avoir des attributs de début et de fin. Si le nombre  $N$  est un point, ses attributs seront confondus avec sa valeur; si  $N$  est un intervalle, ils auront une valeur distincte. Les attributs de début et de fin d'un nombre sont eux-mêmes du type nombre, donc ont eux-mêmes la possibilité d'être initialisés et terminés par un événement (point ou intervalle), et ainsi de suite...

Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux endroits de référence. La seule modification apportée aux définitions du calcul d'événements de Kowalski est le remplacement de la relation  $N_1 < N_2$  par  $\max(N_1) < \min(N_2)$ , puisque  $N_1$  et  $N_2$  peuvent être des intervalles ( $\max(N)$  et  $\min(N)$  représentent les bornes de  $N$ ). Ceci garantit la disjonction des intervalles en question.

On l'aura compris, les projections vers le haut ou vers le bas figurent des changements d'échelle (de granularité) applicables au traitement d'un processus. Une projection vers le haut conduit à un point de vue grossier, une projection vers le bas à un affinement de la représentation. Les implications de ces projections sur le comportement d'une variable visible des deux points de vue peuvent être analysées de cette manière, en particulier les implications sur les *durées* des événements et les *distances temporelles* entre deux événements affectant cette variable.

### *Représentation granulaire du temps*

Pour représenter le temps selon différents niveaux de détail, Euzénat [EUZ93] définit des entités temporelles, les granularités, qu'il dispose dans différents espaces organisés hiérarchiquement. La hiérarchie considérée est une suite linéaire d'ordres de grandeur. Une représentation symbolique du temps (dont l'*objet* primitif est l'instant, l'intervalle, ou les deux) permet de représenter des *relations* symboliques (*avant*, *après*, etc.) sans tenir compte du niveau de détail, et est interprétable intuitivement. La représentation numérique (instant = nombre réel et intervalle = segment de  $R$ ) est un modèle des représentations symboliques. Ces dernières peuvent donc être employées sous chacune des granularités.

L'auteur développe d'abord la façon de représenter une expression temporelle (faisant intervenir des objets en relation) sous une granularité  $g$ . La granularité est définie comme

la taille du plus petit événement pertinent. Les conséquences de cette représentation sont exposées : dans la représentation numérique, toute expression temporelle pourra être exprimée en fonction de cette granularité, sans besoin de subdivisions dans le temps. L'ensemble des instants peut alors devenir isomorphe à  $N$  et non plus à  $R$ . Dans les représentations symboliques, une conséquence est qu'un intervalle sous une certaine granularité peut être vu comme un instant sous une granularité plus grossière. La réciproque est possible : il faut pouvoir considérer un instant comme un intervalle (affinement de la granularité). La granularité est donc un moyen d'unifier instants et intervalles.

Ensuite, les rapports entre granularités sont détaillés, afin de pouvoir faire circuler les données introduites à un niveau dans tous les autres. Cette préoccupation est à rattacher au problème de la "combinaison des conclusions issues de différents modèles abstraits" que l'on a trouvé chez Iwasaki [IWA90]. La circulation est *ascendante* (abstraction) ou *descendante* (affinement). Les granularités utilisées sont ordonnées de manière stricte; il existe une granularité minimale, ainsi qu'une mesure du rapport entre une granularité et la granularité minimale.

Le maintien de la cohérence entre différents niveaux se fait par la définition d'*opérateurs de conversion* de granularité. Ces opérateurs sont symboliques ou numériques, et permettent d'utiliser une même expression temporelle sous différentes granularités en conservant son interprétation : " $\uparrow$ " indique la montée (vers une granularité plus grossière), " $\downarrow$ " la descente (vers une granularité plus fine), " $\rightarrow$ " l'une, l'autre ou l'identité, et " $\cdot$ " effectue une composition d'opérateurs.

On désire que ces opérateurs vérifient des propriétés suffisantes pour maintenir les interprétations classiques :

— Pour les représentations numériques, il s'agit d'abord de la propriété de *non-croisement* (si  $x > y$  à  $g$ , alors  $x > y$  à  $g'$ ). La *réciprocité* ( $g \uparrow g' \cdot g' \downarrow g x = g \downarrow g'' \cdot g'' \uparrow g x = x$ ) est par contre impossible car elle est contradictoire avec la perte d'information lors de la montée (des entités distinctes deviennent indiscernables) ou lors de la descente (position incertaine) (cf. les travaux de Maïm [MAÏ91] précédemment cités). De même la *transitivité générale* ( $g \rightarrow g' \cdot g' \rightarrow g'' x = g \rightarrow g'' x$ ) est impossible car elle implique la réciprocité. On désire par contre absolument que la *transitivité cumulée* soit vérifiée, car elle garantit l'indépendance des résultats vis-à-vis des étapes subies pour monter ou descendre ( $g \uparrow g' \cdot g' \uparrow g'' x = g \uparrow g'' x$  et vice-versa). La *conservation descendante* ( $g \uparrow g' \cdot g' \downarrow g x = x$ ) est enfin également possible.

— Pour les conversions des représentations symboliques, ce sont les relations temporelles qui doivent vérifier certaines propriétés, conditionnées par celles des expressions temporelles. On veut pouvoir répondre à la question :

“A la granularité  $g$ , les expressions  $x$  (représentée à  $g'$ ) et  $y$  (représentée à  $g''$ ) sont-elles en relation  $\rho$  ?”

Une relation entre expressions (*avant, pendant, etc.*) ne peut pas toujours être conservée après un changement de granularité. Par contre, si on examine la conversion des relations ( $g \rightarrow g'\rho$ ), on peut établir certaines propriétés : *distributivité entre conversion et réciprocity, commutativité* de la composition des relations par rapport à un changement de granularité...

L'ensemble de ces propriétés permet donc de faire circuler les représentations classiques du temps d'une granularité à une autre (moyennant certaines transformations) en conservant la cohérence entre les modèles. A partir de là, l'auteur présente concrètement les possibilités de définir les opérateurs vérifiant un maximum de propriétés pour réaliser :

- la conversion ascendante symbolique (conversion des relations entre instants ou entre intervalles) qui n'est pas toujours possible et fait perdre de la précision;
- la conversion ascendante numérique (conversion d'instant et d'intervalles) qui fait simplement disparaître certaines expressions et transforme certains intervalles en instants;
- la conversion descendante symbolique, qui peut amener la contradiction de la relation d'égalité et pose de gros problèmes d'ambiguïté;
- la conversion descendante numérique, qui est naturellement encore pire, mais peut être facilitée par l'introduction d'une connaissance non-temporelle liée au domaine, ou bien par l'explicitation de l'imprécision (en passant par exemple par la gestion de quadruplets “début au plus tôt, début au plus tard, fin au plus tôt, fin au plus tard”).

Les travaux d'Euzénat formalisent assez complètement tout le raisonnement que l'on peut mener à partir de représentations à différentes granularités. Nous tâcherons de placer notre approche de telle manière que cette formalisation puisse y être appliquée sans mal.

L'auteur trace comme une des perspectives de développement l'identification automatique préalable des *événements* pouvant se dérouler dans la même *histoire* (séquence d'événements), à différentes granularités, et pouvant être changés de granularité à volonté. C'est à partir de cette tâche que nous essaierons de définir la granularité d'une représentation temporelle, afin qu'elle ne soit pas uniquement basée sur la subjectivité de l'utilisateur, mais aussi sur les événements eux-mêmes. Ainsi elle reflétera le comportement intrinsèque du processus étudié.

## 1.6 Conclusion : nos axes de recherche

### *But général*

Nous avons mis en évidence un manque relatif de travaux en amont de la modélisation/simulation de systèmes à différents niveaux d'abstraction. Les approches décrites partent toujours d'un système global complexe, composé de mécanismes dont on connaît la "bonne" échelle, fixée à partir de la connaissance *a priori* d'un "changement significatif".

Remettant en question l'arbitraire de cette démarche, nous nous fixons pour but principal la définition d'un cadre de représentation et la conception d'outils de raisonnement adaptés à la détermination *des* échelles de temps. Ces échelles devront bien sûr être pertinentes pour les objectifs de l'utilisateur, mais aussi dépendre du comportement dynamique du mécanisme. Nous leur laissons donc la liberté d'être *multiples* pour un même mécanisme (représentation à différents niveaux d'abstraction), mais surtout *locales dans le temps*, i.e. variables selon l'intervalle considéré de la représentation totale. Ainsi, la prise en considération de mécanismes non "réguliers" (périodiques, arrivant à un équilibre, etc.) et de leurs non-linéarités, courantes dans notre domaine d'application, sera également possible.

### *Une grandeur souple et comparable pour l'échelle*

Les échelles des mécanismes considérés sont le plus souvent exprimées sous la forme d'ordres de grandeur. Or, nous pensons que cette hiérarchisation stricte peut conduire à masquer des dynamiques intermédiaires dignes d'intérêt. Nous choisirons donc une notion d'échelle de temps plus *souple* donc plus précise, représentée par un nombre réel.

Egalement, plutôt que de prendre une grandeur absolue, nous lui préférerons une notion *relative et adimensionnelle*, plus proche de l'idée de *fréquence d'événements* que de celle de *durée d'événements*. Cette relativité permettra une généralité de la notion de niveau de détail d'une représentation, qui autorisera la comparaison de mécanismes de nature différente d'une manière plus homogène.

### *Une représentation hybride quantitative/qualitative*

La première partie du problème consiste à définir un cadre formel pour la représentation d'un mécanisme à différentes échelles de temps. L'intérêt de ce cadre résidera dans le calcul automatique de ces différentes échelles de temps, à partir du comportement du mécanisme et d'une spécification minimale de l'utilisateur. Leur valeur numérique réelle permettra de les déterminer avec exactitude et non pas à un facteur 10 près comme chez Iwasaki [IWA90] par exemple.

Conjointement à la précision numérique que nous privilégions pour la mesure du temps et de l'échelle, une représentation qualitative des *formes* des mécanismes est employée. Nous avons vu que le domaine des sciences environnementales est parfaitement adapté à ce

type de raisonnement qui permet d'éliminer les problèmes de qualité d'information et de pertinence de la description (cf. 1.5.2). Plus précisément, nous mettrons en place un formalisme permettant à une évolution temporelle d'être représentée sous une forme purement qualitative (symbolique), tout en laissant disponible une part d'information numérique. Ainsi, différents degrés de précision seront accessibles pour une analyse plus ou moins pointue.

*Un choix d'échelle justifié par l'interprétation du comportement des mécanismes*

La deuxième partie de nos travaux se situe dans le cadre de l'interprétation qualitative/quantitative d'évolutions dynamiques exprimées numériquement. Une relation est établie entre le comportement local des phénomènes et le niveau de détail auquel ils peuvent ou doivent être représentés. Elle permet de justifier le choix d'une ou de plusieurs représentations (utilisant le formalisme introduit ci-dessus) et d'évaluer les gains et pertes d'informations liés à un choix d'échelle différent. Inversement, les contraintes comportementales que l'utilisateur désirerait modéliser conduiront à isoler la ou les échelles les faisant apparaître dans la représentation.

Nous avons trouvé une quantité conséquente de travaux exposant les techniques de simulation à plusieurs échelles, faisant l'hypothèse d'un modèle global exact et figé, mais pas intégralement pertinent. L'interprétation à différentes échelles (des résultats de simulation, comme d'éventuelles séries de mesures ou d'observations), fait le lien entre simulation et modélisation. Grâce à cette interprétation, la modélisation pourrait être améliorée, et la simulation être plus efficace. Par exemple, la modélisation serait simplifiée en considérant certains mécanismes constants, en les approximant par une évolution périodique, ou sinusoïdale, etc. La simulation serait meilleure en adaptant le pas de temps à l'intérêt de l'utilisateur pour une phase particulière, ou encore en modifiant la durée sur laquelle porte l'étude, selon les phénomènes observés.

Enfin, cette interprétation est uniquement basée sur la représentation temporelle du mécanisme. En effet, nous ne supposons pas la connaissance du modèle analytique du système, qui conditionne l'emploi de la représentation dans l'espace de phase que l'on a observé dans les approches de type interprétatif.

*Nos travaux ont donc pour objectif la réalisation d'un système d'interprétation de courbes d'évolution de processus, basé sur un formalisme qualitatif/quantitatif permettant la représentation de chaque processus à différents niveaux d'abstraction.*

*Une approche à l'origine de nos travaux : la représentation d'évolutions de processus de Cheung et Stephanopoulos*

Cheung et Stephanopoulos définissent dans [CHE90a] un cadre de représentation particulièrement attractif pour nos préoccupations. En effet, ils proposent une description

quantitative et qualitative d'une courbe d'évolution de processus, sous la forme d'une séquence d'*épisodes triangulaires*. Ces épisodes sont séparés par des "instants singuliers" (instants d'extrema ou de points d'inflexion du processus), et sont constitués selon des critères de tendance et de courbure qualitatives. Ils forment ainsi la représentation hybride quantitative/qualitative dont nous avons besoin.

A partir de la représentation d'une évolution dynamique sous forme de séquence de triangles, les auteurs introduisent dans [CHE90b] une procédure d'abstraction successive basée sur *l'échelle de temps*. Groupant d'abord les épisodes triangulaires deux par deux dans des épisodes trapézoïdaux, ils obtiennent une représentation sous forme de séquence de trapèzes. L'échelle de temps de cette représentation est alors définie comme *la durée du plus petit intervalle entre deux points d'inflexion*. A partir de là, l'abstraction automatique est possible en regroupant récursivement les épisodes trapézoïdaux trois par trois selon leur durée. Ceci autorise la détermination automatique des niveaux de détail possibles pour la représentation du processus, détermination qui est également l'un de nos objectifs.

Nous avons bien entendu repris ces techniques originales dans le chapitre suivant, où elles sont décrites en détail. Il semble malheureusement à la lecture de leur article que Cheung et Stephanopoulos n'aient pas cherché à implémenter leurs concepts, et par là même à les spécifier de manière plus réaliste. En effet, ils ne décrivent pas la façon dont les triangles sont obtenus à partir d'une courbe. Ensuite, ils ne présentent qu'un exemple d'abstraction successive d'une évolution extrêmement simple. Lorsque nous avons cherché à mettre en oeuvre leurs idées, nous nous sommes rendu compte du nombre de situations possibles dans lesquelles les trapèzes présentés par Cheung et Stephanopoulos étaient impropres à la représentation, et leur technique de concaténation de trapèzes inapplicable.

On trouve également dans cet article [CHE90b] la définition de deux graphiques fort intéressants : le premier, appelé "structure qualitative des échelles de temps" regroupe simultanément toutes les représentations temporelles du processus, en ne conservant que les dates de début et de fin d'épisodes. Les auteurs s'en servent pour déterminer les représentations les "plus stables" en regard des abstractions réalisées, mais ne montrent pas à quoi cette "stabilité" peut servir. Le deuxième outil graphique est le "spectre qualitatif des échelles" qui représente la distribution des durées d'épisodes triangulaires dans la représentation formée par la séquence de triangles. Seule une comparaison théorique avec un spectre de fréquences classique est proposée, sans qu'une application réelle montre l'intérêt de cette construction.

Les potentialités d'utilisation de ces deux graphiques sont très peu développées; seules quelques idées sont lancées quant à leur intérêt en matière de représentation. En particulier, les auteurs ne montrent pas quelle capacité interprétative ils peuvent avoir au sujet du comportement du processus, et quel raisonnement automatique peut y être



basé. C'est donc ici qu'intervient la majeure partie de notre apport à cette théorie prometteuse de la représentation.

## **Chapitre 2**

### **Représentation d'une évolution à différents niveaux d'abstraction**

## 2.1 Introduction

Ce chapitre décrit la première partie de nos travaux, concernant la *représentation temporelle* de la courbe d'évolution d'un processus dynamique.

La première partie présente une notion de granularité temporelle respectant le cahier des charges que nous nous sommes fixés pour la formalisation de "l'échelle de temps", à l'issue de la synthèse bibliographique du chapitre 1 : caractère adimensionnel et relatif permettant la simulation "homogène" de plusieurs processus à différents niveaux d'abstraction, et caractère temporellement local permettant une variabilité selon la régularité des fluctuations.

Ensuite, nous mettons en place un formalisme pour la représentation quantitative et qualitative d'une courbe d'évolution spécifiée par une série chronologique quelconque de valeurs numériques. La partie qualitative de ce formalisme réside dans la prise en compte de seulement trois valeurs symboliques possibles pour la tendance et la courbure du processus étudié. Une part d'information numérique est également disponible par l'utilisation d'enveloppes géométriques triangulaires (*épisodes triangulaires*) contenant tous les points du processus. Les algorithmes permettant d'obtenir cette représentation (appelée *représentation triangulaire*) à partir de la série de points initiale sont exposés de manière détaillée.

Le regroupement des épisodes triangulaires en épisodes trapézoïdaux, puis le regroupement successif de ces épisodes trapézoïdaux conduit à obtenir un ensemble de représentations de plus en plus abstraites. Cette procédure d'abstraction est réalisée automatiquement sur le seul critère (objectif) de la durée des épisodes. Ainsi, il n'y a pas nécessité de spécifier arbitrairement les échelles de temps possibles pour la représentation du processus. Ici aussi, l'algorithme d'abstraction successive est donné. Une discussion sur les principaux choix de construction réalisés intervient ensuite.

Bien que l'idée d'enveloppe géométrique soit issue de leurs travaux, Cheung et Stephanopoulos [CHE90a et b] n'ont pas semblé avoir défini de manière réaliste toutes les formes d'épisodes possibles et l'interprétation qui pouvait y être attachée. De même, si le principe du regroupement des épisodes trapézoïdaux leur est dû, les modes de construction d'épisodes triangulaires et trapézoïdaux nous sont propres. Enfin, l'implémentation des notions qu'ils ont proposées n'a visiblement pas été réalisée.

L'essentiel de notre méthode est pour notre part décrit dans [AYR94].

Une dernière partie présente une technique de décomposition locale des fréquences exprimées par les épisodes trapézoïdaux : la *décomposition des dynamiques imbriquées*. Cette technique s'apparente à une décomposition de Fourier locale, et s'avère proche des idées relevées dans la décomposition en ondelettes. Elle permet en parallèle avec

l'abstraction successive (et donc à moindre coût) une dissociation des fluctuations les plus rapides (à la fréquence la plus haute localement) de la tendance générale du processus.

## 2.2 Une nouvelle notion de granularité temporelle

### 2.2.1 Définitions

Déterminer objectivement l'échelle à laquelle une représentation est valide nécessite des définitions indépendantes du contexte. On part de données issues d'une simulation, d'observations numériques ou de mesures. Ces données sont caractérisées par leur fréquence d'échantillonnage et par la durée sur laquelle elles ont été acquises. On suppose une indépendance totale entre ces deux paramètres choisis par l'utilisateur et le comportement dynamique des mécanismes représentés par ces données : l'utilisateur ne possède pas de connaissance experte pour attribuer ces valeurs. Par défaut, il prendra un pas d'échantillonnage le plus petit possible, et un domaine le plus grand possible, en se limitant à une dimension des vecteurs de valeurs raisonnable pour les moyens informatiques dont il dispose.

On définit alors les termes suivants :

— un *système* est un ensemble de variables  $X$  dont les évolutions sont observées ou simulées.

— l'*état qualitatif* d'une variable  $X$  à l'instant  $t_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) est le triplet :

$$S(X, t_i) = \langle x_i, \text{dir}(x_i), \text{ddir}(x_i) \rangle$$

où  $x_i$  est la valeur *numérique*,  $\text{dir}(x_i)$  la tendance *qualitative* et  $\text{ddir}(x_i)$  la courbure *qualitative* de  $X$  à  $t = t_i$ . La tendance et la courbure prennent leurs valeurs dans l'ensemble des quatre éléments symboliques  $\{\text{inc}, \text{std}, \text{dec}, ?\}$ . Ces valeurs sont issues de [KUI86] et signifient respectivement *croissant (increasing)*, *stable (steady)*, *décroissant (decreasing)* et *inconnu (?)*. L'état du système est l'ensemble des états de chacune des variables.

— un *processus* désigne la séquence des états de  $X$  sur  $t_0, \dots, t_n$  :

$$X_{t_0, \dots, t_n} = \{S(X, t_0), \dots, S(X, t_n)\}$$

Ce terme de *processus* remplacera dans la suite du texte ce que nous désignons jusqu'ici par *mécanisme*. Par abus de langage, nous ne ferons pas la différence entre la *variable*  $X$  et son évolution. On parlera donc de l'*évolution du processus*, bien que à proprement parler, ce soit un pléonasme.

— le *domaine temporel*  $\Delta = [t_0, t_n]$  est la durée sur laquelle le processus est observé ou simulé. Notons qu'Iwasaki [IWA90] prenait déjà en compte cette information.

— un *intervalle de temps* est toute subdivision du domaine :  $\delta_{ij} = [t_i, t_j[$  tel que  $t_i < t_j$ .

— la *granularité temporelle* d'un intervalle de temps par rapport au domaine est :

$$G(\delta_{ij}) = \frac{t_j - t_i}{t_n - t_0} = \frac{|\delta_{ij}|}{|\Delta|}$$

où  $|\cdot|$  signifie la durée. On a donc  $0 < G(\delta_{ij}) \leq 1$ ; la granularité prend la valeur 1 lorsque l'abstraction est maximale ( $\delta_{ij} = \Delta$ ). Il n'y a alors que deux points dans la représentation.

Un processus est représenté sur une séquence d'intervalles de temps. Leurs granularités sont alors un moyen utilisé pour caractériser le niveau de détail de la représentation. L'abstraction correspond à une augmentation de la granularité (retrait de points), l'affinement à une diminution de la granularité (ajout de points).

De fait, le domaine et la granularité correspondent à deux aspects complémentaires de la notion d'échelle de temps rencontrés dans les sciences de l'environnement (cf. 1.2) : l'échelle comme une période de référence (échelle de la journée, échelle de la vie humaine, échelle géologique), et l'échelle comme période relative et sans dimension (comme les échelles cartographiques).

Notre définition de la granularité est consistante avec la notion de temps relatif puisque des granularités telles que 1 seconde/1 heure  $\approx$  1 jour/10 ans  $\approx$  1 an/36 siècles permettent d'exprimer qu'une seconde dans la vie d'une bactérie est approximativement aussi longue (ou courte, selon le point de vue) qu'un jour dans la vie d'un chien ou qu'une année pour une population animale ou un écosystème. La subjectivité de la notion de durée ou de vitesse des processus disparaît à travers cette relativité, qui concourt ainsi à une intégration plus facile au sein du même modèle de processus ayant des dynamiques très dissemblables : elle permet de traiter "sur un même pied d'égalité" le niveau de détail de n'importe quel processus, quels que soient ses intervalles de temps et son domaine.

Un autre point positif lié à cette notion est le fait qu'elle permet de passer directement d'une prédiction à court-terme à une prédiction à long-terme en conservant le même niveau de détail. Dans ce cas, le domaine change; si l'on est capable de déterminer le "bon" niveau de détail pour la simulation d'un processus à court-terme, alors on devrait pouvoir déterminer le "bon" pas de temps correspondant au même niveau de détail pour la simulation à long-terme. Cet aspect n'a pas été étudié; nous avons préféré dans un premier temps examiner les mécanismes de changement de granularité (sur un domaine constant) plutôt que d'évaluer les conséquences d'une granularité fixe sur différents domaines.

Enfin, on prendra garde à ne pas assimiler la granularité temporelle à une fréquence d'échantillonnage, même si indiscutablement, ces notions sont proches. Par exemple, une fréquence d'échantillonnage d'un point par jour (indépendante du domaine) peut correspondre à une infinité de granularités différentes : un point par jour pendant 10 jours fixe une granularité 1/10, alors qu'un point par jour pendant 100 jours (granularité 1/100) fournit 10 fois plus d'informations...

Nous allons voir d'abord comment les changements de granularité possibles peuvent être représentés sur l'évolution d'un processus, puis, comment plusieurs processus représentés avec des granularités différentes peuvent être simulés ensemble, à différents niveaux d'abstraction [AYR93a].

### 2.2.2 Changements de granularité d'un processus sur un même domaine

#### *Hypothèse et notations*

On se place dans le cas où le processus est représenté par une série de points séparés par des intervalles de temps constants (la simulation — ou l'enregistrement de mesures ou d'observations — a été réalisée à pas constant). Alors, la granularité de tous les intervalles de temps est la même, et vaut :

$$\forall i = 0, \dots, n-1, G([t_i, t_{i+1}[) = \frac{1}{n}.$$

Par abus de langage, on l'appelle dans ce cas *granularité du processus*. On la note  $G(\delta^X)$  pour le processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$ . Comme nous allons le voir, les situations possibles lors de l'affinement ou de l'abstraction ne font pas intervenir la durée des pas de temps. Ces situations sont donc valides même si la représentation est à granularité variable sur le domaine.

Changer la granularité de la représentation, en conservant le même domaine, correspond à changer les intervalles de temps du processus. Le domaine  $\Delta$  correspondant aux deux granularités est dénoté  $[t_0, t_n]$  pour  $G(\delta^X)$  et  $[t'_0, t'_n]$  pour  $G'(\delta^X)$ . Le processus est donc représenté par  $n+1$  points à  $G(\delta^X)$  et par  $n'+1$  points à  $G'(\delta^X)$ . Comme les granularités sont constantes, on aura :

$$t'_{i'n'/n} = t_i.$$

De façon similaire,  $x$  et  $x'$  dénotent les valeurs du processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  décrit à  $G(\delta^X)$  et  $G'(\delta^X)$ , respectivement, avec :

$$x'_{i'n'/n} = x_i.$$

#### *Affinement de granularité sur tout le domaine*

De nouveaux états de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  doivent être découverts entre deux états consécutifs connus, et ceci pour tous les états. Exactement, aller de  $G(\delta^X) = 1/n$  à  $G'(\delta^X) = 1/n'$  avec  $n' > n$  implique de passer de  $(n+1)$  à  $(n'+1)$  états, en prenant en compte  $(n' - c)$  nouveaux états, si  $c$  est le plus grand facteur commun de  $n$  et  $n'$ . Cela signifie également la perte de  $(n - c)$  états.

Détaillons le cas le plus simple, c'est-à-dire l'affinement de  $G(\delta^X)$  à  $G'(\delta^X) = G(\delta^X)/2$  (un seul état à découvrir entre deux connus). Il suffit de l'étudier entre deux états quelconques  $S(X, t_i)$  et  $S(X, t_{i+1})$ ; on pourra ensuite le généraliser à tout le domaine.

On a :  $t'_{2i} = t_i$  et  $x'_{2i} = x_i$ . Seule la connaissance de  $S(X, t_i)$  est utilisable, puisque l'état suivant  $S(X, t_{i+1})$  précise ce qu'il se passe après  $t_{i+1}$ , ce qui ne nous intéresse pas. On cherche à déterminer les états  $S(X, t'_{2i})$  et  $S(X, t'_{2i+1})$ . L'instant du point créé ( $x'_{2i+1}, t'_{2i+1}$ ) est déjà connu par le fait que  $G'(\delta^X) = G(\delta^X)/2$  : il est tel que  $t'_{2i+1} = (t_i + t_{i+1})/2$ .

La tendance en un instant quelconque est calculée par utilisation des règles d'accroissements suivantes entre deux points successifs :

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \text{dir}(x_i) = \begin{cases} \text{dec} & \text{si } x_{i+1} < x_i \\ \text{std} & \text{si } x_{i+1} = x_i \\ \text{inc} & \text{si } x_{i+1} > x_i \end{cases}$$

La courbure  $\text{ddir}(x_i)$  est quant à elle définie à partir des accroissements relatifs (i.e. des pentes) entre trois points consécutifs :

$$\forall i = 1, \dots, n-1, \text{ddir}(x_i) = \begin{cases} \text{dec} & \text{si } x_{i+1} + x_{i-1} < 2x_i \\ \text{std} & \text{si } x_{i+1} + x_{i-1} = 2x_i \\ \text{inc} & \text{si } x_{i+1} + x_{i-1} > 2x_i \end{cases}$$

Cette définition sera reprise, généralisée et discutée au 2.3.2.

La courbure en  $t_i$  n'intervient pas dans l'affinement entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ . Elle est donc par défaut notée "?". Le tableau 2.1 présente les diverses possibilités pour  $S(X, t'_{2i})$  et  $S(X, t'_{2i+1})$ , illustrées par la figure 2.1.

A $G(\delta^X)$	A $G'(\delta^X) = G(\delta^X)/2$	
$S(X, t_i)$	$S(X, t'_{2i})$	$S(X, t'_{2i+1})$
$\langle x_i, \text{inc}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{std}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{std}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{std} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{inc} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{inc} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{inc} \rangle$
$\langle x_i, \text{std}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{std}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{std}, \text{std} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{inc} \rangle$
$\langle x_i, \text{dec}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i}, \text{inc}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{std}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$ $\langle x'_{2i}, \text{dec}, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{dec} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{std} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{dec}, \text{inc} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{std}, \text{inc} \rangle$ $\langle x'_{2i+1}, \text{inc}, \text{inc} \rangle$

Tab. 2.1: Succession d'états possibles lors de l'affinement : un exemple simple

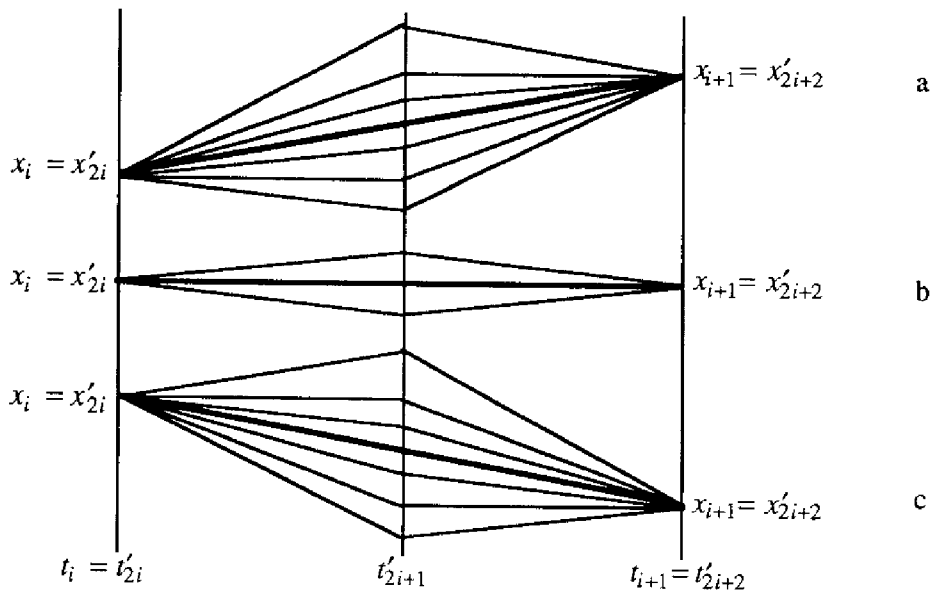


Fig. 2.1 : Succession d'états lors de l'affinement d'un processus : un exemple simple. Les différentes possibilités sont obtenues selon la tendance en  $t_i$  : (a)  $dir(x_i) = inc$ ; (b)  $dir(x_i) = std$ ; (c)  $dir(x_i) = dec$ .

En l'absence de connaissance supplémentaire, on se retrouve donc avec 7 choix possibles. Evidemment, la simulation subit une explosion combinatoire rapide... Et c'est encore pire si le passage de  $G(\delta^X)$  à  $G'(\delta^X)$  nécessite la détermination de plus d'un état entre deux états connus ( $G'(\delta^X) = G(\delta^X)/3$ ,  $G(\delta^X)/5$ ,  $G(\delta^X)/7$ ,  $G(\delta^X)/11$ ).

*Abstraction : passage d'une granularité fine (faible) à une plus grossière (plus forte)*

Certains états du processus sont perdus. Aller de  $G'(\delta^X) = 1/n'$  à  $G(\delta^X) = 1/n$  oblige à trouver  $(n - c)$  états et à en perdre  $(n' - c)$ . Toujours dans le cas le plus simple, c'est à dire en passant de  $G'(\delta^X)$  à  $G(\delta^X) = 2G'(\delta^X)$ , les situations possibles sont recensées en inversant le tableau 2.1. Le tableau 2.2 montre ainsi ce qu'il peut être dérivé pour  $S(X, t_i)$  à partir de  $S(X, t'_{2i})$  et  $S(X, t'_{2i+1})$ .

Il y a deux cas signalés comme qualitativement indéterminés pour la tendance de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  en  $t_0$ . Ce sont les seuls qui nécessitent la connaissance numérique de  $x'_{2i+2} = x_{i+1}$  pour être précisés. Dans tous les autres cas, la valeur de  $dir(x_i)$  suffit pour prédire si  $x_{i+1}$  sera supérieur, inférieur ou égal à  $x_i$ . Comme pour l'affinement, la situation se complique si l'on passe de  $G'(\delta^X)$  à  $G(\delta^X) = 3G'(\delta^X)$ ,  $5G'(\delta^X)$ ,  $7G'(\delta^X)$ ,  $11G'(\delta^X)$ , etc., bien que le principe reste le même : on aura de plus en plus besoin des valeurs numériques.

Nous verrons dans la partie suivante (2.3) comment le concept d'épisode triangulaire, accompagné d'hypothèses simples sur l'évolution du processus, permet de dissiper l'incertitude au sujet de l'affinement. Du moins pourrions-nous affiner le processus de



$G(\delta^X)$  en  $G'(\delta^X) = G(\delta^X)/2$  et  $G''(\delta^X) = G(\delta^X)/4$ . Le résultat obtenu pourra alors être abstrait sans que l'on se heurte aux deux cas indéterminés du tableau 2.2 (cf. 2.4).

A $G'(\delta^X)$		A $G(\delta^X) = 2G'(\delta^X)$
$S(X, t'_{2i})$	$S(X, t'_{2i+1})$	$S(X, t_i)$
$\langle x'_{2i}, inc, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, dec, dec \rangle$	$\langle x_i, ?, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, inc, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, std, dec \rangle$	$\langle x_i, inc, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, inc, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, inc, dec \rangle$	$\langle x_i, inc, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, inc, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, inc, std \rangle$	$\langle x_i, inc, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, inc, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, inc, inc \rangle$	$\langle x_i, inc, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, std, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, inc, inc \rangle$	$\langle x_i, inc, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, std, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, std, std \rangle$	$\langle x_i, std, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, std, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, dec, dec \rangle$	$\langle x_i, dec, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, dec, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, dec, dec \rangle$	$\langle x_i, dec, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, dec, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, dec, std \rangle$	$\langle x_i, dec, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, dec, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, dec, inc \rangle$	$\langle x_i, dec, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, dec, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, std, inc \rangle$	$\langle x_i, dec, ? \rangle$
$\langle x'_{2i}, dec, ? \rangle$	$\langle x'_{2i+1}, inc, inc \rangle$	$\langle x_i, ?, ? \rangle$

Tab. 2.2 : Détermination de l'état résultant de l'abstraction, à partir de l'exemple du tableau 2.1.

### 2.2.3 Simulation de plusieurs processus représentés à différentes granularités

#### *Hypothèses*

Soient  $N$  processus à simuler ensemble simultanément. Nous considérons d'abord que cette simulation se fait à pas constant. Les processus sont donc représentés à granularité constante. Cependant, comme les techniques décrites ici prennent la durée des pas en compte, nous verrons à la fin de cette partie comment elles sont utilisées dans le cas où l'on veut simuler (à pas variable) deux processus représentés à granularité variable.

Egalement, si les  $N$  processus sont simulés ensemble sur des domaines différents (chaque domaine étant rattaché à un processus), le raisonnement ne vaut que sur le plus petit des  $N$  domaines. La granularité des processus ayant un domaine plus long est alors ajustée au domaine le plus court (voir sur la figure 2.2 un exemple avec  $N = 2$  processus).

Pour la simulation au-delà de l'instant de fin du domaine le plus court, on ne considère que les  $N-1$  processus restants, et la même manipulation est réalisée.

#### *Approximations*

Trois processus représentés chacun à une granularité particulière sont suffisants pour illustrer la façon dont ils peuvent être simulés ensemble. Soient  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  un processus décrit à la granularité  $G(\delta^Y)$ , et deux processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  décrits sur le même domaine  $\Delta$ , aux granularités vérifiant  $G(\delta^Z) < G(\delta^Y) < G(\delta^X)$ .

Une simulation efficace de ces trois processus nécessite de comparer deux d'entre eux au troisième, pris comme référence. Si on prend  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  comme référence, la simulation de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  à la granularité  $G(\delta^Y)$  se fait par le biais des approximations générales suivantes :

- un processus voit, à chacun de ses pas de temps, un processus de granularité supérieure comme constant;
- un processus voit, à chacun de ses instants, un processus de granularité inférieure comme instantané;

Le tableau 2.3 présente les trois points de vue possibles.

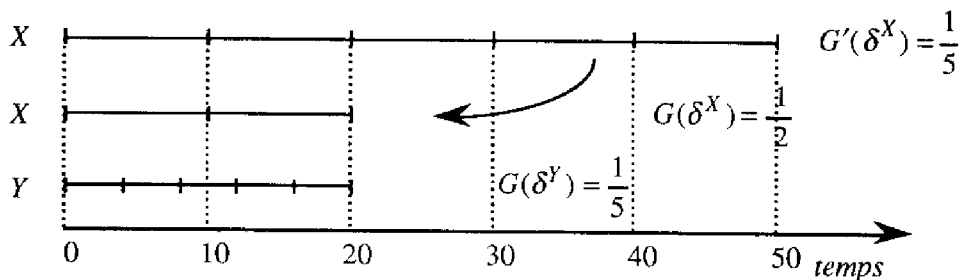


Fig. 2.2 : Un exemple d'ajustement de la granularité d'un processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  au domaine plus court d'un processus  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ . Ces deux processus sont représentés au même niveau de détail sur deux domaines différents, mais ne peuvent être simulés ensemble sur plus de la durée du domaine le plus court. Le processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  est donc tronqué pour la simulation sur  $[0, 20[$ , et sa granularité devient  $G(\delta^X) = 1/2 > 1/5 = G(\delta^Y)$ .

	$X_{t_0, \dots, t_n}$	$Y_{t_0, \dots, t_p}$	$Z_{t_0, \dots, t_q}$
Du point de vue de $X_{t_0, \dots, t_n}$	$\{S(X, t_0), \dots, S(X, t_n)\}$	instantané à chaque instant	instantané à chaque instant
Du point de vue de $Y_{t_0, \dots, t_p}$	constant à chaque pas	$\{S(Y, t_0), \dots, S(Y, t_p)\}$	instantané à chaque instant
Du point de vue de $Z_{t_0, \dots, t_q}$	constant à chaque pas	constant à chaque pas	$\{S(Z, t_0), \dots, S(Z, t_q)\}$

Tab. 2.3 : Approximations pour la simulation de trois processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$ ,  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  et  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  à chacune de leur granularité (chacun de leur point de vue).

#### *Simulation de processus représentés à différentes granularités constantes*

La simulation de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et de  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  peut donc être réalisée du point de vue de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  de la manière suivante (Fig. 2.3) :

- l'évolution continue de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  est transformée en une évolution en escalier à chaque pas de temps de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ ;
- l'évolution de  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  est ignorée entre deux points de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ , comme si elle était trop rapide pour être vue; cela correspond à un lissage.

Ces approximations et les transformations qui en résultent sont de facture courante; nous les avons retrouvées dans le domaine environnemental [PAH93b], dans la méthode des perturbations singulières [SAK84] et dans la littérature qualitative traitant de modélisation

et de simulation à différentes échelles de temps (cf. 1.5.3). Ainsi, notre notion de granularité s'adapte sans mal à la simulation de processus représentés à différents niveaux de détail.

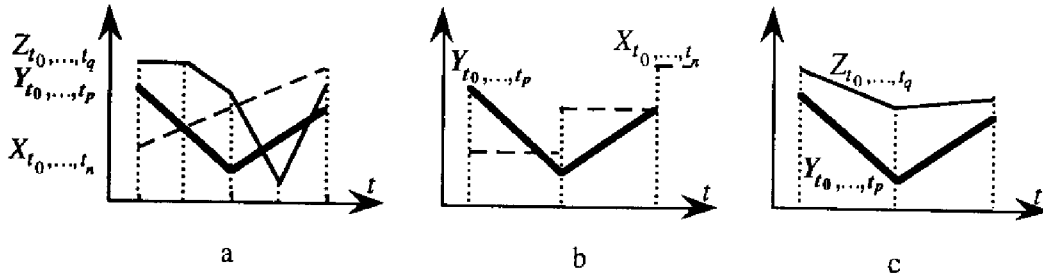


Fig. 2.3 : Simulation de deux processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  du point de vue d'un troisième  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ . (a) Représentation originale de chaque processus, à leur granularité  $G(\delta^X) = 1$ ,  $G(\delta^Y) = 1/2$  et  $G(\delta^Z) = 1/4$ . A la granularité intermédiaire  $G(\delta^Y)$ ,  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  est simulé tel quel mais (b) :  $X_{t_0, \dots, t_n}$  est simulé sous forme d'évolution en escalier et (c) :  $Z_{t_0, \dots, t_q}$  est lissé.

### Simulation de processus représentés à granularité variable

La simulation de deux processus représentés à granularité variable sur le même domaine ne change absolument rien aux principes qui ont été énoncés, mis à part le fait qu'il faut comparer les granularités de chacun des processus sur chaque intervalle de temps (un intervalle de temps sépare deux instants consécutifs, qu'ils fassent partie de la représentation de l'un ou de l'autre processus).

Prenons l'exemple de la figure 2.4. Jusqu'à  $t$ , les granularités de chaque intervalle vérifient  $G(\delta^Y) > G(\delta^X)$ , au-delà c'est le contraire. Pour la simulation du point de vue de  $X_{t_0, \dots, t_n}$ , l'évolution de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  est transformée en escalier jusqu'à  $t$ , après quoi elle est lissée. Du point de vue de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ , c'est exactement l'inverse.

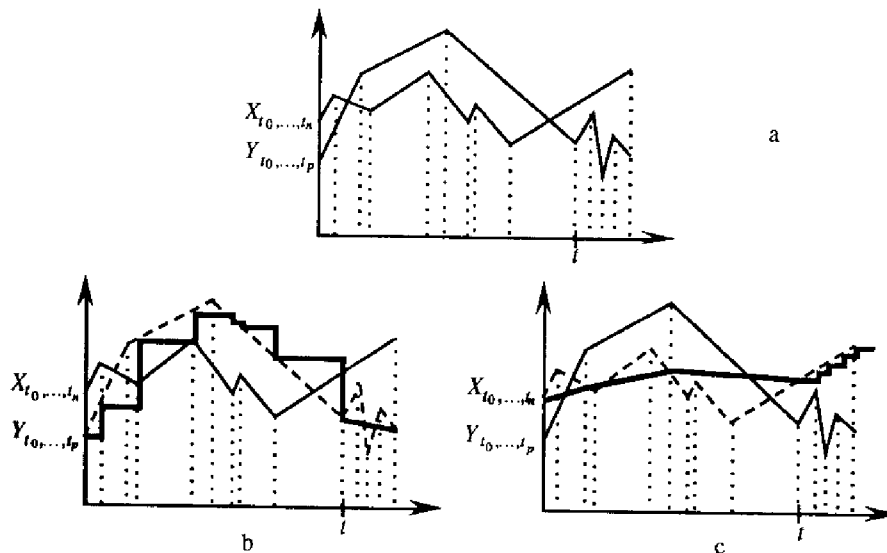


Fig. 2.4 : Simulation de deux processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et  $Y_{t_0, \dots, t_p}$  représentés avec des granularités variables. (a) Les représentations originales des deux processus; (b) simulation selon le point de vue de  $X_{t_0, \dots, t_n}$ ; (c) simulation selon le point de vue de  $Y_{t_0, \dots, t_p}$ .

*Un exemple d'utilisation en écologie : les réponses de la plante à la variabilité des ressources en eau [voir AYR93b]*

Nous allons montrer comment utiliser ce formalisme à travers un exemple pris dans le domaine de l'écologie terrestre. Il donne les stratégies possibles pour la simulation de trois processus (en relation les uns avec les autres) observés à des granularités constantes différentes sur le même domaine temporel.

Parmi les nombreux mécanismes prenant part à la résistance de la plante à la sécheresse, trois agissent ensemble pour amortir la variabilité de la disponibilité de l'eau (Fig. 2.5) :

— la réponse de l'indice foliaire permet à la plante de supporter les variations de basse-fréquence telles que les changements dans les précipitations annuelles moyennes. Elle peut par exemple être observée ou simulée avec un pas de temps d'une année. Sur un domaine également d'une année, sa granularité sera donc  $G(\delta^X) = 1$ .

— la réponse du système racinaire amortit les oscillations de fréquence moyenne, par exemple les changements dans la distribution saisonnière des précipitations annuelles. En prenant un pas de temps d'un mois sur le même domaine temporel (1 an), on a une granularité  $G(\delta^Y) = 1/12$  pour ce processus.

— finalement, l'activité stomatale permet à la plante d'optimiser l'utilisation journalière de l'eau, en prenant en compte la variabilité de son micro-climat. Une simulation ou observation adéquate nécessite un pas de temps de 1 jour. En gardant toujours le même domaine, le processus de l'activité stomatale sera par conséquent représenté à la granularité  $G(\delta^Z) = 1/365$ .

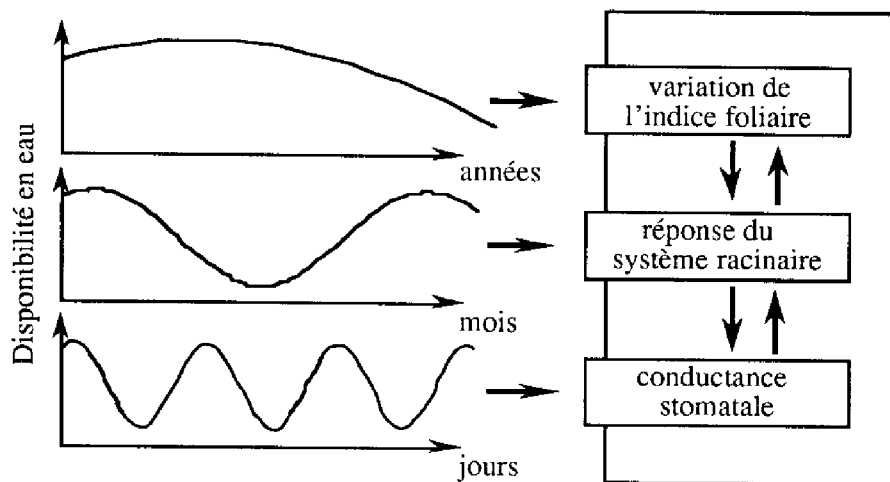


Fig. 2.5 : Une idée informelle des variations de la disponibilité en eau à différentes échelles de temps (années, mois, jours) et les processus chargés de répondre à ces variations. N.B. : L'amplitude de la disponibilité en eau n'est pas à la même échelle sur les trois représentations.

Tout changement de l'indice foliaire induit un changement dans le système racinaire; le nouvel équilibre fonctionnel de la plante est alors contrôlé par les hydrates de carbone et l'azote, par voie hormonale. Toute variation dans le déficit hydrique du sol produit une variation de la fermeture des stomates; l'état hydrique de la plante, ou bien un éventuel effet régulateur des phytohormones, peuvent indiquer un stress au niveau des racines. Ainsi, les trois mécanismes sont hiérarchiquement en relation, comme le montre la figure 2.5. La plante dispose donc d'une stratégie pour gérer au mieux la balance hydrique, sous n'importe quelle condition.

Pour simuler ces trois mécanismes, notre formalisme s'utilisera comme suit :

— à la granularité la plus forte (à  $G(\delta^X) = 1$ , c'est-à-dire du point de vue de la réponse de l'indice foliaire), nous considérerons la réponse du système racinaire et l'activité stomatale comme instantanées;

— à la granularité intermédiaire (à  $G(\delta^Y) = 1/12$ , c'est-à-dire du point de vue de la réponse du système racinaire), la réponse de l'indice foliaire est supposée constante sur chaque mois, et l'activité stomatale instantanée. C'est la situation représentée par la figure 2.3);

— finalement, à la granularité la plus fine (à  $G(\delta^Z) = 1/365$ , c'est-à-dire du point de vue de l'activité stomatale), les réponses de l'indice foliaire et du système racinaire seront toutes deux prises comme constantes sur chaque pas de temps de un jour.

Les trois processus peuvent par conséquent être simulés à n'importe quelle granularité temporelle déterminée par les besoins de l'écologiste. Encore faut-il que ces besoins soient bien cernés...

#### 2.2.4 Bilan

##### *Granularité*

Notre définition de la granularité temporelle se montre adaptable aux approximations classiques nécessitées par la simulation de processus à différents niveaux d'abstraction. Elle a l'avantage de rendre comparables les niveaux de détail des représentations de processus quelconques, sans se soucier de la durée séparant deux points consécutifs, ni de la durée globale de l'étude. Elle s'accompagne d'une souplesse que n'ont pas les définitions employant les ordres de grandeur :

— sa localité (elle est définie sur chaque intervalle) lui confère une adaptabilité aux fluctuations, ce que ne peut pas faire une définition fixe de l'échelle de temps. Par exemple, un processus commençant par beaucoup fluctuer serait représenté dans la littérature classique à l'échelle 1 seconde par exemple. S'il se stabilise par la suite, et qu'une échelle d'1 heure serait suffisante, l'échelle 1 seconde devient une précision non pertinente.

— le fait qu'elle soit mesurée par un nombre réel assure une bonne précision : si on peut dire que le processus débutant par une phase agitée est suffisamment bien représenté avec une échelle de 3 secondes, l'ordre de grandeur 1 seconde fournit trois fois trop de points.

### *Le choix d'une représentation*

Cependant, le problème — principal — de l'assignation arbitraire subsiste. Nous avons indiqué comment simuler plusieurs processus à différentes granularités (i.e. différents *niveaux d'abstraction*, ou *points de vue*), sans préciser comment peut être déterminé le point de vue à adopter. Lorsque l'utilisateur ne sait pas bien comment fluctuent les processus, justement à cause des irrégularités de leurs fluctuations, de leur non-périodicité, de leur dépendance de facteurs complexes (par exemple, les aléas climatiques dans le cas des systèmes naturels), ce problème n'est pas trivial.

Il se décompose en deux sous-problèmes, que nous avons déjà évoqués au 1.6, mais que nous pouvons reformuler maintenant en termes de granularités :

1- Comment trouver toutes les granularités auxquelles un processus peut être représenté, et comment le représenter à ces granularités, de la façon la moins arbitraire possible ? Pour être objectif, il faudra fixer au départ la granularité la plus fine possible et chercher toutes les plus grossières (et les représentations associées) en se basant uniquement sur des critères comportementaux. Cet aspect "représentation" fait l'objet de la suite du chapitre 2.

2- parmi toutes ces représentations, lesquelles choisir ? Une interprétation devra être réalisée pour chacune d'entre elles, afin d'en extraire les principales caractéristiques comportementales. Egalement, une interprétation des représentations prises dans leur ensemble pourra dégager d'intéressantes informations sur la façon dont les différentes régions de l'évolution se comportent au cours de l'abstraction (où, comment et pourquoi disparaissent-elles ?). Cet aspect "interprétation" devra conduire au choix justifié d'une ou de plusieurs granularités de représentation.

A partir de ces choix, nous montrerons comment la fréquence d'échantillonnage d'un processus peut être modifiée au mieux. Egalement, nous essaierons de montrer comment l'interprétation peut aider la modélisation d'un système complexe et ainsi intervenir dans la boucle modélisation / simulation / interprétation. Tout ceci fait l'objet du chapitre 3.

## **2.3 Représentation triangulaire**

Un processus ne fluctue pas nécessairement de la même façon au cours du temps. Imaginons la courbe délivrée par un sismographe : à peu près stable en période normale, elle exhibe de fortes fluctuations pendant un tremblement de terre. De même si l'on analyse l'évolution des précipitations à Toulouse au cours d'une année : la courbe présente un

aspect plus fluctuant au mois de Mars qu'en Juillet. Une séquence de granularités variables et non-arbitraires doit donc décrire l'évolution d'un processus.

D'autre part, une des façons de visualiser qualitativement une évolution revient à ne s'intéresser qu'à sa *forme*. Si néanmoins on désire conserver un degré de précision numérique, un bon compromis consiste à bâtir une *enveloppe* de la série de points initiale. Cela peut être une seule enveloppe pour toute l'évolution (à chaque instant correspond un intervalle de valeurs possibles du processus), ou bien une succession d'enveloppes (à chaque instant correspond une seule valeur, ou un intervalle de valeurs possibles du processus).

Reprenant l'idée de Cheung & Stephanopoulos [CHE90], nous allons transformer la série de points initiale en une séquence d'enveloppes géométriques appelées *épisodes triangulaires* et définies par la succession d'instant singuliers observés sur le processus. Un épisode est construit entre deux instants singuliers, où le comportement du processus conserve les mêmes caractéristiques.

Ces épisodes ont une durée variable, selon le caractère plus ou moins fluctuant de l'évolution du processus. Le nombre de formes possibles étant limité, leur traduction en termes de comportement qualitatif fournit une base à l'interprétation.

Après la définition des instants singuliers, des épisodes triangulaires et de la représentation du processus qui en résulte, nous décrivons en détail les algorithmes permettant de passer de la représentation initiale par points à la représentation par épisodes. L'algorithme général détecte la présence des instants singuliers et construit les épisodes. Il fait intervenir deux autres algorithmes : le premier détermine l'emplacement et la nature des instants singuliers dans un intervalle de temps entre deux points consécutifs; le second réalise un affinement du processus pour la création de nouveaux instants singuliers lorsque c'est nécessaire.

### 2.3.1 Hypothèses et définitions

#### *Représentation initiale*

Rappelons (cf. 2.2.1) que nous nous fixons pour entrée du système d'analyse une série chronologique de points  $(x_i, t_i)$  correspondant à un processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$ , avec  $S(X, t_i) = \langle x_i, ?, ? \rangle$ . Le pas de temps séparant deux instants consécutifs est quelconque (il peut être variable). Cette série, ainsi que trois hypothèses sur l'allure du processus continu dont nous avons un échantillon, constitueront les seules informations à notre disposition.

### Assignation des tendances et courbures

Déterminons l'état qualitatif de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  en chacun de ses points.

L'état à  $t = 0$  est  $S(X, t_0) = \langle x_0, \text{dir}(x_0), ? \rangle$ ; l'état à  $t = t_n$  est  $S(X, t_n) = \langle x_n, ?, ? \rangle$ .

On a déjà vu (cf. 2.2.2) qu'aux autres instants  $t_i$ , les tendances  $\text{dir}(x_i)$  sont assignées par l'utilisation des règles d'accroissements suivantes entre deux points successifs :

$$\forall i = 0, \dots, n-1, \text{dir}(x_i) = \begin{cases} \text{dec} & \text{si } x_{i+1} < x_i \\ \text{std} & \text{si } x_{i+1} = x_i \\ \text{inc} & \text{si } x_{i+1} > x_i \end{cases}$$

De façon similaire, les courbures  $\text{ddir}(x_i)$  sont définies à partir des accroissements relatifs (i.e. des pentes) entre trois points successifs. Les durées des intervalles de temps sont explicites, puisque l'on se place dans le cas d'un échantillonnage (ou d'une série de mesures...) à pas quelconque. Même si d'aventure le pas d'échantillonnage est constant, nous verrons qu'il peut se produire au cours du traitement diverses opérations qui modifient la durée des intervalles entre deux points consécutifs. On aura donc dans tous les cas :

$$\forall i = 1, \dots, n-1, \text{ddir}(x_i) = \begin{cases} \text{dec} & \text{si } \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} < \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} - \varepsilon \\ \text{std} & \text{si } \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \pm \varepsilon \\ \text{inc} & \text{si } \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} > \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon \end{cases}$$

où  $\varepsilon$  est un seuil numérique d'alignement, en-deça duquel la différence des pentes est considérée insignifiante et prise égale à 0. Par défaut, ce seuil est choisi égal à la précision des valeurs numériques considérées. Toute connaissance supplémentaire au sujet du processus peut éventuellement être prise en considération pour le choix de ce seuil. Une imprécision des observations ou des données simulées peut ainsi être tolérée sans gêner pour autant la construction de la représentation triangulaire.

La définition d'un tel seuil est absente du calcul des tendances. En effet, si l'on traite des résultats de simulation, on suppose l'absence de bruit. Si l'on part de mesures ou d'observations, on considère une précision intégrant le bruit. Par exemple, si la mesure est donnée avec 3 décimales, on considère qu'il s'agit de la bonne précision :  $5.421 < 5.422$ . Si l'on désire intégrer un bruit (justifié par une connaissance supplémentaire du processus étudié), alors on ne prendra que deux décimales, auquel cas on aura :  $5.421 = 5.422 = 5.42$ .

Nous pouvons ici formuler deux des trois hypothèses indispensables à la construction de la représentation triangulaire visée. "L'affinement du processus" est la recherche de points inconnus entre deux points connus.



La première hypothèse est celle selon laquelle *les tendance et courbure assignées à chaque point de la série initiale sont correctes et ne pourront être remises en cause lors d'un affinement*. La seconde hypothèse précise qu'*un point de changement de direction ou de direction std ne pourra être créé au cours d'un affinement*.

Ces hypothèses sont nécessaires (mais non suffisantes) si l'on veut éviter une explosion combinatoire due à l'indécision en affinant le processus. Elles permettent de supprimer quatre des sept possibilités d'affinement dans les cas recensés sur la figure 2.1 où  $dir(x_i) = inc$  ou  $dir(x_i) = dec$ , et deux des trois possibilités dans le cas où  $dir(x_i) = std$ .

### *Dtp*

La considération (arbitraire) servant de base à notre formalisme de représentation est la suivante : le caractère plus ou moins fluctuant d'un processus est lié à la présence de points de dérivée première ou seconde nulle. Ces points seront donc pour nous les seuls significatifs d'un *changement de comportement*.

Par suite, on appelle l'instant  $t_i$  "instant singulier" (*dtp* pour "distinguished time-point") lorsque :

... —  $t_i$  est un instant d'extremum local, c'est à dire respectant la condition :

(1)  $dir(x_{i-1}) \neq dir(x_i)$  et  $dir(x_{i-1}) \neq std$  et  $dir(x_i) \neq std$ , ou bien

... —  $t_i$  est un instant de changement de courbure (de point d'inflexion), c'est à dire respectant la condition :

(2)  $ddir(x_{i-1}) \neq ddir(x_{i+1})$  et  $ddir(x_{i-1}) \neq std$  et  $ddir(x_{i+1}) \neq std$ .

On prendra garde à ne pas confondre les notions de "stabilité" ( $dir(x_i) = std$ ) et de "changement de tendance" (par exemple :  $dir(x_{i-1}) = inc$  et  $dir(x_i) = dec$  signifie la présence d'un changement de tendance en  $t_i$ , appelé "extremum local"). Le fait que  $t_i$  soit appelé "extremum local" n'implique donc pas que l'on ait  $dir(x_i) = std$ , de par le mode de calcul des tendances. La tendance s'évalue entre deux points ( $dir(x_i) = std$  signifierait que  $x_i = x_{i+1}$ ), alors qu'un changement de tendance est instantané.

L'ensemble des *dtp* du processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  est noté  $DTP(X)$  et contient, par convention, au moins  $t_0$  (comme point de départ) et jamais  $t_n$  (dont les tendance et courbure sont inconnues). Si les *dtp* sont indicés de 0 à  $m$ , les points de la représentation du processus le sont de 0 à  $2(m+1)$  (nous le verrons plus loin) et vérifient :

$$DTP(X) = \{t_0\} \cup \{t_i \mid i \in [1, \dots, 2m+1]\} \text{ et (1) ou (2) est vérifiée}.$$

### *Episode triangulaire*

Un *épisode triangulaire* (Fig. 2.6) délimite l'intervalle de temps ouvert existant entre deux *dtp* consécutifs, i.e.  $]t_i, t_k[$  est un épisode triangulaire si :

$t_i, t_k \in DTP(X)$ ,  $t_i < t_k$ , et  $\exists t_j \in DTP(X)$  tel que :  $t_i < t_j < t_k$ .

Il correspond donc à un intervalle de l'évolution où le comportement qualitatif du processus est *identique*. On dira que le comportement qualitatif est identique s'il n'y a pas deux points de tendance opposée (*inc* et *dec* ou *dec* et *inc*) et si tous les points ont même courbure. L'épisode triangulaire débutant au *dtp*  $t_i$  est noté  $T(X, t_i)$ .

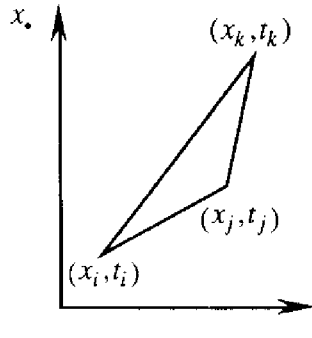


Fig. 2.6 : Un épisode triangulaire  $T(X, t_i)$

Lorsque l'on cherche toutes les formes possibles d'épisodes triangulaires, on s'aperçoit que la tendance en un *dtp* quelconque  $t_i$ , et les tendance et courbure à l'instant suivant  $t_j$  sont suffisantes pour déterminer 8 types de forme qualitative (Tab. 2.4). Parmi ces 8 types, 4 possèdent un côté horizontal et sont des cas particuliers des 4 autres. On dénommera les types généraux  $A, B, C$  et  $D$  et les cas particuliers  $A^*, B^*, C^*$  et  $D^*$ .

$dir(x_j) \rightarrow$ $ddir(x_j) \downarrow$	<i>dec</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>
<i>dec</i>	$dir(x_i) = std$ $D$ $D^*$	$B^*$	$B$
<i>std</i>	$C$	$C^*$	$A$ $A^*$ $dir(x_i) = std$
<i>inc</i>	$C$	$C^*$	$A$ $A^*$ $dir(x_i) = std$

Tab. 2.4 : Selon la tendance en  $t_i$  et les tendance et courbure en  $t_j$ , 11 formes d'épisodes sont possibles, mais on inclura chacun des 3 épisodes "plats" (tels que  $ddir(x_j) = std$ ) dans un épisode non-plat. Il y a donc 8 formes d'épisodes triangulaires possibles. La distinction entre  $D$  et  $D^*$ , et  $A$  et  $A^*$  se fait selon la valeur de  $dir(x_i)$ .

Remarque :

On pourrait imaginer qu'une suite de points alignés soit simplement représentée par un segment de droite, pour éviter la perte d'information inhérente à la représentation par triangle. Cependant, pour conserver un jeu limité de types d'épisodes, on préférera faire en sorte que ces points alignés forment un côté de triangle. Les portions linéaires (épisodes "plats") seront donc intégrées aux portions voisines pour former un épisode "non-plat", c'est-à-dire à courbure différente de *std* (Tab. 2.4).

#### *Interprétation des épisodes triangulaires*

Exprimons les notions de sens courant traduites par les types d'épisodes : *A* (ou *A\**) représente une croissance accélérée, *B* (ou *B\**) une croissance ralentie, *C* (ou *C\**) une décroissance ralentie, et *D* (ou *D\**) une décroissance accélérée.

Les types particuliers (notés avec "\*"), s'ils ne sont que des cas limites des types généraux, permettent de distinguer les points de pente nulle. Ils revêtent un caractère comportemental important, puisqu'ils signifient la présence d'un point de stabilité. Cette distinction permet en outre de différencier les épisodes de tendance *strictement* décroissante (*D*) des épisodes de tendance décroissante *ou stable* (*D\**), ce qui apporte plus d'information pour l'interprétation.

#### *Transition entre épisodes triangulaires*

Formulons maintenant la troisième et dernière hypothèse :

*Hypothèse de continuité : Le processus ne présente pas de discontinuité de classe C1 (discontinuité de pente: cf. Fig. 2.7), c'est à dire de changement de courbure sans passage par la valeur std.*

Outre le fait que la prise en compte de ces discontinuités compliquerait singulièrement l'analyse et l'interprétation, il faut noter qu'elles sont rarement observées. On suppose donc que le processus ne peut présenter deux points consécutifs affectés de courbures opposées (*dec* et *inc* ou *inc* et *dec*). Cela signifie que si la série initiale de points exhibe de telles discontinuités, la recherche automatique des *dtp* s'applique sans problème mais produit un résultat sans discontinuité de pente.

Cette dernière hypothèse supprime une des trois dernières possibilités pour la localisation du point créé au cours d'un affinement (cf. Fig. 2.1). Les deux possibilités restantes sont intégrables dans un seul épisode triangulaire. L'explosion combinatoire est ainsi impossible.



Fig. 2.7 : Discontinuités de classe C1.

Une conséquence de cette hypothèse est que seules les séquences d'épisodes triangulaires suivantes sont possibles (Fig. 2.8 a) :

- $AB, A^*B, AB^*, A^*B^*, BA, B^*A, BA^*, B^*A^*$  (phases de croissance)
- $CD, C^*D, CD^*, C^*D^*, DC, D^*C, DC^*, D^*C^*$  (phases de décroissance)
- $BD, B^*D, BD^*, B^*D^*$  (phases contenant un maximum)
- $CA, C^*A, CA^*, C^*A^*$  (phases contenant un minimum).

$AB, BA, CD, DC$  et leurs cas particuliers (avec “\*”) sont des séquences de deux épisodes de même tendance et contenant un point d’inflexion;  $BD, CA$  et leurs cas particuliers sont des séquences de deux épisodes de même courbure et contenant un extremum. Ces dernières séquences signifient que la tendance du processus change de façon continue de *inc* à *dec* ou de *dec* à *inc* avec une valeur instantanée nulle au point de jonction. Cette valeur instantanée nulle n’indique pas la stabilité en ce point (*std*) ni la présence d’une discontinuité de pente (qui aurait été présente entre  $B$  et  $C$  par exemple). Par contre, la séquence  $B^*D^*$  implique la stabilité du processus entre trois points (cf. Tab. 2.4).

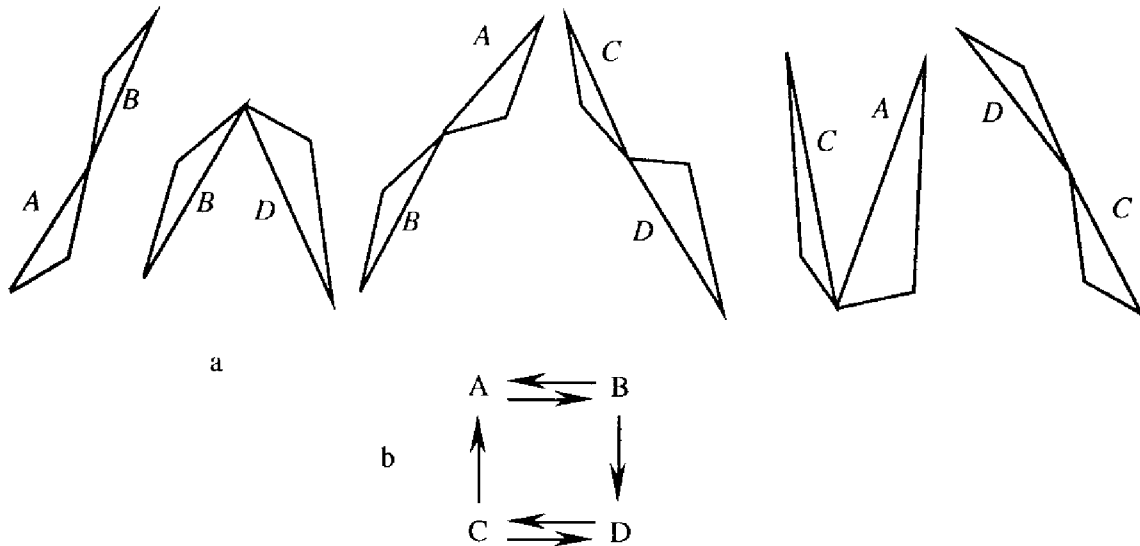


Fig. 2.8 : Transitions possibles entre épisodes triangulaires : (a) séquences possibles de deux épisodes; (b) graphes correspondant.

Par suite, on peut dresser le tableau des tendances et courbures en chacun des trois points d’un épisode (Tab. 2.5).

Lorsqu’il y a plusieurs possibilités, l’hypothèse de continuité fixe le choix en fonction des transitions possibles. Par exemple, pour un type  $D$  (décroissance accélérée) :

—  $ddir(x_i) = std$  si l’épisode précédent est de type  $C$  (décroissance ralentie;  $(x_i, t_i)$  est un point d’inflexion)

—  $ddir(x_i) = dec$  si l’épisode précédent est de type  $B$  (croissance ralentie;  $(x_i, t_i)$  est un extremum);

ou encore, pour un type  $C$  (décroissance ralentie) :

- $dir(x_k) = dec$  si l'épisode suivant est de type  $D$  (décroissance accélérée) ou
- $dir(x_k) = std$  si l'épisode suivant est de type  $D^*$  (décroissance accélérée) ou  $A^*$  (croissance accélérée) ou
- $dir(x_k) = inc$  si l'épisode suivant est de type  $A$  (croissance accélérée).

Type	A	B	C	D	A*	B*	C*	D*
$dir(x_i)$	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>std</i>
$ddir(x_i)$	{ <i>std, inc</i> }	<i>std</i>	<i>std</i>	{ <i>std, dec</i> }	{ <i>std, inc</i> }	<i>std</i>	<i>std</i>	{ <i>std, dec</i> }
$dir(x_j)$	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>std</i>	<i>std</i>	<i>dec</i>
$ddir(x_j)$	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>
$dir(x_k)$	<i>inc</i>	{ <i>dec, std, inc</i> }	{ <i>dec, std, inc</i> }	<i>dec</i>	<i>inc</i>	{ <i>dec, std, inc</i> }	{ <i>dec, std, inc</i> }	<i>dec</i>
$ddir(x_k)$	<i>std</i>	{ <i>std, dec</i> }	{ <i>std, inc</i> }	<i>std</i>	<i>std</i>	{ <i>std, dec</i> }	{ <i>std, inc</i> }	<i>std</i>

Tab. 2.5 : Tendances et courbures possibles en chacun des trois points  $(x_i, t_i)$ ,  $(x_j, t_j)$  et  $(x_k, t_k)$  d'un épisode triangulaire  $T(X, t_i)$ .

### 2.3.2 Représentation triangulaire

Les tendances et courbures étant calculées sur la série initiale, il va de soi que le choix du pas est important : un pas de temps de simulation (ou un intervalle entre deux observations) trop grand masquera d'éventuelles fluctuations. Par contre, un pas de temps le plus petit possible permettra de n'oublier que peu de changements de direction ou de courbure. Ce pas de temps de simulation fait partie des entrées du système, et notre objectif n'est pas de le déterminer de manière automatique. Par contre, nous verrons au chapitre suivant (section 3.3) comment définir des règles de choix de la *fréquence d'échantillonnage* de la série initiale, en se basant sur les interprétations obtenues avec un pas de simulation donné.

#### *Résultat de la segmentation*

Notre intention est de parvenir à une représentation suivant au mieux les fluctuations du processus. On segmente donc la série de points initiale en une série d'épisodes triangulaires, appelée *représentation triangulaire* du processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$  (Fig. 2.9) et notée  $T(X_{t_0, \dots, t_n})$  telle que :

$$T(X_{t_0, \dots, t_n}) = \{T(X, t_0), \dots, T(X, t_m)\},$$

où  $t_0, \dots, t_m$  sont les *dtp* de la série initiale, et donc où  $t_m$  est le premier point du dernier épisode.

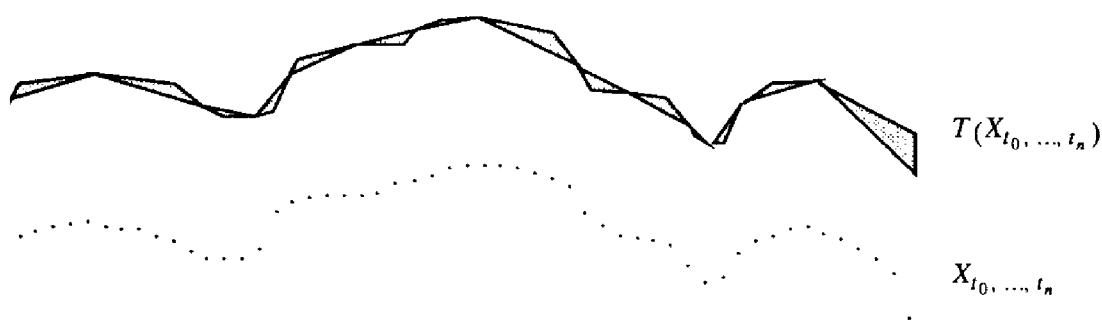


Fig. 2.9 : Un exemple de série de points initiale représentant le processus  $X_{t_0, \dots, t_n}$ , et la représentation triangulaire correspondante  $T(X_{t_0, \dots, t_n})$ .

### 2.3.3 Algorithmes de segmentation de la série initiale en série d'épisodes triangulaires

Nous présentons ici trois algorithmes implémentés pour l'obtention de la représentation triangulaire telle que nous venons de la définir, à partir d'une série de points quelconque. Le premier est l'algorithme "général"; il gère la construction des triangles sur toute l'évolution. Il fait appel à deux algorithmes "auxiliaires", chargés des tâches locales, à savoir à chaque itération :

- la recherche et la reconnaissance des *ntp* sur un intervalle entre 3 points consécutifs;
- l'affinement sur un intervalle entre 2 points consécutifs.

Nous définissons d'abord une notion simplificatrice d'*opposé*, après quoi les modalités générales de la segmentation sont exposées. Ensuite viennent les paragraphes décrivant en détail cette segmentation : élimination préliminaire des points inutiles, algorithme général, algorithme de recherche et reconnaissance de *ntp*, algorithme d'affinement d'un pas, et enfin abstraction pour comportement uniforme.

#### *Notion d'opposé*

Afin de faciliter l'écriture des algorithmes, nous utiliserons un opérateur "*opp*" pour définir une notion de *tendance ou courbure opposée*, et par suite une notion d'*épisode opposé*. L'existence de cet opérateur découle de la symétrie de l'espace de quantités des tendances et courbures par rapport à *std*. Précisons que cet opérateur ne s'applique pas aux valeurs (numériques) du processus.

Les tableaux 2.6 et 2.7 spécifient l'effet de cet opérateur sur les valeurs qualitatives des tendances et courbures ainsi que sur les types d'épisodes. L'étoile ("*\**") se conserve par passage à l'opposé, puisque  $opp(std) = std$ .

On donne à l'opérateur *opp* la propriété suivante : un triplet de types et/ou de valeurs qualitatives  $(a,b,c)$  a pour opposé le triplet composé des opposés de chaque élément formant ce triplet :

$\forall a, b, c \in \{A, B, C, D, inc, dec, std\}, opp(a,b,c) = (opp(a), opp(b), opp(c))$

Par exemple, on pourra avoir :

$opp(B,C,dec) = (C,B,inc)$ .

Il n'y a pas d'interprétation de cette formulation, qui n'est introduite que pour faciliter l'expression des différents cas de figure se produisant au cours des algorithmes. Néanmoins, lorsque  $a, b$  et  $c$  sont des types, le triplet  $(a, b, c)$  désigne une séquence d'épisodes triangulaires. On s'autorise alors l'oubli des parenthèses :

$opp(C,A^*,B) = BD * C$ .

$dir(x_i)$	$opp(dir(x_i))$
$ddir(x_i)$	$opp(ddir(x_i))$
$dec$	$inc$
$std$	$std$
$inc$	$dec$

 $\Rightarrow$ 

$T(X, t_i)$	$opp(T(X, t_i))$
$A$	$D$
$B$	$C$
$C$	$B$
$D$	$A$

Tab. 2.6 : Opposés de tendances et courbures. Tab. 2.7 : Opposés de types d'épisodes.

### Modalités

Segmenter la série de points initiale en épisodes triangulaires nécessite en premier lieu de détecter tous les  $dtp$ , points d'inflexion et changements de tendance. Pour cela, nous disposons de la suite des  $S(X, t_i)$ , c'est-à-dire la série de points initiale, auxquels ont été assignées les tendances et courbures.

Le seul cas possible de création de nouveaux points se présente lorsqu'un point d'inflexion est détecté entre deux points appartenant à la série initiale. Cette détection se fait par l'observation d'un changement de courbure entre  $dec$  et  $inc$  ou entre  $inc$  et  $dec$  (cf. 2.3.1). La création du ou des nouveaux points se fait par affinement du processus sur le pas de temps concerné.

Rappelons (cf. 2.3.1) qu'en aucun cas un point de changement de direction ne peut être créé; seuls ceux présents dans la série initiale sont détectés.

Inversement à la situation de création de nouveaux points, on peut réaliser une *abstraction pour comportement uniforme* : une suite de points auxquels ont été assignées des tendances et courbures identiques est abstraite pour faire partie d'un même épisode triangulaire. Seuls les points extrêmes de cette suite sont conservés, le troisième point du triangle (permettant d'envelopper tous les points du processus entre les points extrêmes) étant éventuellement créé.

Ces situations sont détaillées dans ce qui suit. On indicera les instants de façon chronologique sans présumer de la durée les séparant. Le retrait ou l'ajout d'un point implique une mise à jour des indices des instants postérieurs.

*Elimination préliminaire des points "inutiles"*

Lorsque plusieurs points se trouvent alignés, seuls les deux extrêmes sont conservés, les points intermédiaires ne fournissant aucun renseignement (qualitatif) supplémentaire. Tous les points auxquels a été assignée une courbure *std* sont donc retirés. Parmi ceux-ci, il peut cependant y avoir des points d'inflexion; ils seront dans ce cas détectés comme *ntp* et re-crées au cours d'un affinement. A la suite de ce pré-traitement, il n'y a déjà plus obligatoirement égalité des intervalles de temps.

*Algorithme général*

L'algorithme consiste à tester itérativement ( $i = 0, \dots, n - 2$ ) la présence d'un *ntp* dans les intervalles de temps de la forme  $]t_i, t_{i+2}[$ . Ce test se fait par comparaison des tendances et courbures (cf. 2.3.1), de façon successive. Ensuite,

— si le test est positif, on affine la partie gauche  $]t_i, t_{i+1}[$  ou droite  $]t_{i+1}, t_{i+2}[$  selon l'endroit où il se trouve;

— s'il n'y a pas de *ntp*, on passe à l'intervalle suivant :  $]t_{i+1}, t_{i+3}[$ ,  $]t_{i+2}, t_{i+4}[$ , etc. Notons que l'intervalle  $]t_{i+1}, t_{i+2}[$  est examiné 2 fois. Sinon, l'instant  $t_{i+2}$  ne serait pas testé.

Lorsqu'un *ntp* est trouvé, il finit un épisode triangulaire et la recherche se poursuit à partir de lui. L'algorithme général est donné ci-dessous :

Nombre de points de la série initiale :  $n + 1$ ;  
 Nombre de *ntp* trouvés :  $m + 1$ ;  
 Nombre de points de la représentation triangulaire :  $2(m + 1) + 1$ .

Entrée:  $X_{t_0, \dots, t_n} = \{S(X, t_0), S(X, t_1), \dots, S(X, t_n)\}$

$t_0$  est le premier *ntp*;  $i = 0$ ;

Tant qu'il reste au moins 3 points à examiner

  Tester l'existence de *ntp* sur  $]t_i, t_{i+2}[$

    s'il n'y a pas de *ntp* alors

$j = 0$

      tant qu'il n'y a pas de *ntp* et qu'il reste au moins 3 points à examiner

$j = j + 1$

        Tester l'existence de *ntp* dans  $]t_{i+j}, t_{i+j+2}[$

      fin tant que

      si le *ntp* est dans  $]t_{i+j}, t_{i+j+1}[$  alors

        affiner  $]t_{i+j}, t_{i+j+1}[$

      sinon si  $ntp = t_{i+j+1}$  alors



```

construire l'épisode jusqu'à  $t_{i+j+1}$ 
     $i = i + j + 1$ 
    sinon si le  $ntp$  est dans  $]t_{i+j+1}, t_{i+j+2}[$  alors
        affiner  $]t_{i+j+1}, t_{i+j+2}[$ 
    sinon si le  $ntp$  est dans  $]t_i, t_{i+1}[$ 
        alors affiner  $]t_i, t_{i+1}[$ 
    sinon si  $ntp = t_{i+1}$ 
        alors affiner  $]t_i, t_{i+1}[$ 
        /* Ce cas ne peut se produire */
        /* qu'au démarrage */
    sinon si le  $ntp$  est dans  $]t_{i+1}, t_{i+2}[$ 
        alors affiner  $]t_{i+1}, t_{i+2}[$ 
Fin tant que

```

Algorithme 1 : Algorithme général de segmentation d'une série de points en série d'épisodes triangulaires.

Le test d'existence de  $ntp$  dans un intervalle entre 3 points  $]t_i, t_{i+2}[$  et l'affinement d'un intervalle entre 2 points  $]t_i, t_{i+1}[$  constituent deux algorithmes particuliers décrits ci-après.

*Recherche et reconnaissance de  $ntp$  dans un intervalle entre 3 points  $]t_i, t_{i+2}[$*

Les seules connaissances dont nous disposons en entrée sont les tendances et courbures aux 3 points. Seuls des tests comparatifs sur ces tendances et courbures peuvent donc être effectués pour détecter et reconnaître un  $ntp$  dans 72 cas possibles ! (Fig. 2.10). Rappelons que les points ayant comme courbure *std* ont été retirés. Egalement, cette recherche ne fait pas de différence entre le cas où  $t_i$  est un  $ntp$  et celui où il ne l'est pas.

L'algorithme (algorithme 2) est présenté ci-dessous :

```

Entrée :  $S(X, t_i), S(X, t_{i+1}), S(X, t_{i+2})$ 

Si  $ddir(x_i) = opp(ddir(x_{i+1}))$  alors
    il y a un  $ntp$  = point d'inflexion entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ 
    identifier les types d'épisodes avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$ 
sinon si  $dir(x_i) = opp(dir(x_{i+1}))$  alors
    il y a un  $ntp$  = extremum en  $t_{i+1}$ 
    identifier les types d'épisodes avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$ 
sinon si  $ddir(x_{i+1}) = opp(ddir(x_{i+2}))$  alors
    il y a un  $ntp$  = point d'inflexion entre  $t_{i+1}$  et  $t_{i+2}$ 
    identifier les types d'épisodes avant  $t_{i+1}$  et après  $t_{i+2}$ 
sinon si  $dir(x_{i+1}) = std$  alors
    il n'y a pas de  $ntp$  entre  $t_{i+1}$  et  $t_{i+2}$  mais création d'un  $ntp$ 

```

identifier les types d'épisodes avant  $t_{i+1}$  et après  $t_{i+2}$   
 sinon il n'y a pas de *dtp* entre  $t_i$  et  $t_{i+2}$   
 Fin si

Algorithme 2 : Recherche et identification de *dtp* dans un intervalle de deux pas  $]t_i, t_{i+2}[$ .

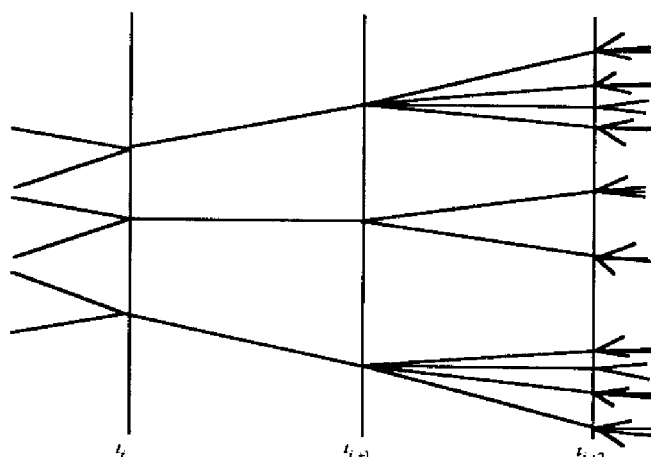


Fig. 2.10 : Combinaisons possibles de tendances et courbures en 3 points consécutifs.

Quelques remarques explicatives :

a/ Appelons respectivement  $T(X, t_{<i})$  et  $T(X, t_{>i+1})$  les épisodes avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$ . L'identification des types de  $T(X, t_{<i})$  et de  $T(X, t_{>i+1})$  se fait selon le raisonnement suivant :

— type de  $T(X, t_{<i})$  : la connaissance de  $dir(x_{i-1})$  et de  $ddir(x_i)$  suffit. En effet,  $(x_{i-1}, t_{i-1})$  fera partie de  $T(X, t_{<i})$ , dont la tendance sera donc  $dir(x_{i-1})$ . La courbure avant  $t_i$  ne peut être différente de celle en  $t_i$  car alors, un point d'inflexion aurait été détecté avant de s'interroger sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$ . Le tableau 2.8, tiré du tableau 2.5 donne le type de  $T(X, t_{<i})$  en fonction des connaissances requises.

$\downarrow ddir(x_i) \quad dir(x_{i-1}) \rightarrow$	<i>dec</i>	<i>inc</i>
<i>dec</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
<i>inc</i>	<i>C</i>	<i>A</i>

Tab. 2.8 : Identification du type de  $T(X, t_{<i})$  en fonction de la tendance et de la courbure requises.

— type de  $T(X, t_{>i+1})$  :  $dir(x_{i+1})$  et  $ddir(x_{i+1})$  déterminent par définition ce qu'il se passe après  $t_{i+1}$ . Le tableau 2.9, également tiré du tableau 2.5, donne le type de  $T(X, t_{>i+1})$  en fonction des connaissances requises.

La courbure *std* n'apparaît pas pour les raisons évoquées en début de paragraphe (élimination préliminaire des points "inutiles"). La tendance *std* ne peut avoir été affectée

au point  $(x_{i-1}, t_{i-1})$  (le cas aurait été traité deux boucles auparavant par l'algorithme général).

$dir(x_{i+1}) \rightarrow$ $\downarrow ddir(x_{i+1})$	<i>dec</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>
<i>dec</i>	<i>D</i>	<i>B*</i>	<i>B</i>
<i>inc</i>	<i>C</i>	<i>C*</i>	<i>A</i>

Tab. 2.9 : Identification du type de  $T(X, t_{>i+1})$  en fonction de la tendance et de la courbure requises.

b/ La dernière création de *dtp* citée dans l'algorithme 2 (si  $dir(x_{i+1}) = std$ ) correspond au cas particulier où la direction ne change pas en un instant mais sur un intervalle entre deux instants consécutifs (plateau); il s'agit alors d'un extremum non observé (Fig. 2.11).

*Algorithme d'affinement d'un intervalle de la forme  $]t_i, t_{i+1}[$*

L'affinement de  $]t_i, t_{i+1}[$  est effectué lorsqu'un point d'inflexion y est détecté. Il se fait dans tous les cas grâce à :

— la connaissance des tendances et courbures avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$ , qui servent à identifier les types des épisodes avant  $t_i$  (soit  $T(X, t_{<i})$ ) et après  $t_{i+1}$  (soit  $T(X, t_{>i+1})$ );

$dir(x_i) = std$      $dir(x_{i+1}) = dec$   
 $ddir(x_i) = dec$      $ddir(x_{i+1}) = dec$

$dir(x_i) = std$      $dir(x_{i+1}) = inc$   
 $ddir(x_i) = inc$      $ddir(x_{i+1}) = inc$

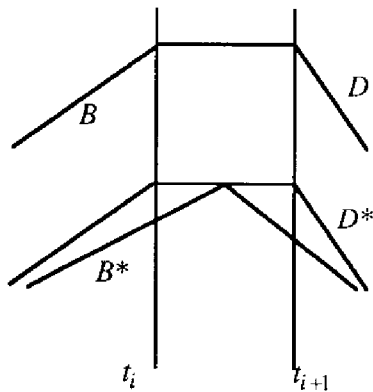


Fig. 2.11 : Le cas particulier de l'affinement pour un changement de direction sur un plateau.

— la connaissance de  $dir(x_i)$ .

Les points à considérer sont donc  $(x_{i-1}, t_{i-1})$ ,  $(x_i, t_i)$  et  $(x_{i+1}, t_{i+1})$ . Les connaissances qu'on en tire sont regroupées en un triplet (type de  $T(X, t_{<i})$ , type de  $T(X, t_{>i+1})$ ,  $dir(x_i)$ ). On parlera dans la suite "d'affinement du triplet (type de  $T(X, t_{<i})$ , type de  $T(X, t_{>i+1})$ ,  $dir(x_i)$ )".

Il va de soi que l'on suppose toujours :

- le respect de l’hypothèse de continuité (cf. 2.3.1); elle impose les successions possibles de 4 épisodes triangulaires (Fig. 2.12);
- l’absence de point d’inflexion entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$ , puisque le contraire aurait donné lieu à un affinement avant que l’on cherche à affiner  $]t_i, t_{i+1}[$ ;
- l’absence de courbures *std*;
- $dir(x_{i-1}) \neq std$ , puisque cela aurait été détecté et traité deux boucles auparavant par l’algorithme général.

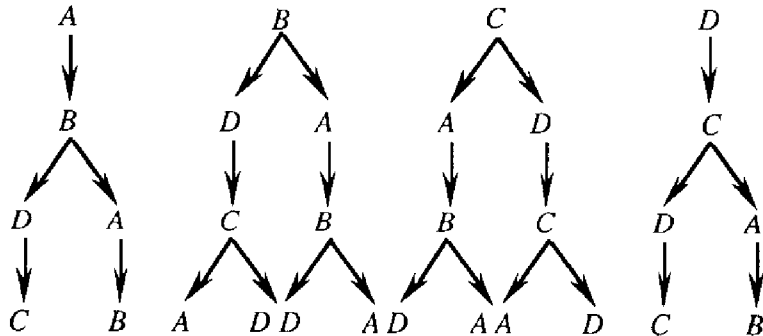


Fig. 2.12 : Arbres de possibilités de succession de quatre épisodes triangulaires.

Les courbures en jeu vérifient alors :  $ddir(x_{i-1}) = ddir(x_i) = opp(ddir(x_{i+1}))$ . Les seules combinaisons possibles de courbures à étudier sont par conséquent :

- $(ddir(x_{i-1}), ddir(x_i), ddir(x_{i+1})) = (dec, dec, inc)$ , et
- $(ddir(x_{i-1}), ddir(x_i), ddir(x_{i+1})) = (inc, inc, dec)$ .

Quant aux tendances, les combinaisons possibles sont exprimées dans le tableau 2.10.

$dir(x_{i-1})$	$dir(x_i)$	$dir(x_{i+1})$	$dir(x_{i-1})$	$dir(x_i)$	$dir(x_{i+1})$
<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>
<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>std</i>
<i>dec</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>dec</i>
<i>dec</i>	<i>std</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>
<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>
<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>std</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>std</i>
<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>dec</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>	<i>inc</i>

Tab. 2.10 : Combinaisons de tendances possibles sur 3 points consécutifs

Les types d’épisodes avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$  ont été précédemment identifiés (Tab. 2.8 et 2.9). Grâce à l’hypothèse de continuité des pentes du processus, l’affinement entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  pour la détection du point d’inflexion et la construction des épisodes se fait *de manière unique*. Les différents affinements possibles sont représentés par les figures 2.13 et 2.14.

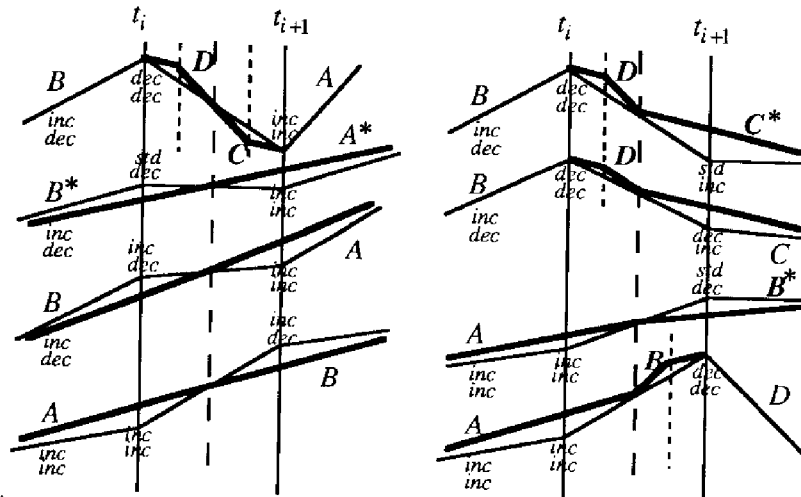


Fig. 2.13 : Affinements possibles et construction des épisodes triangulaires pour  $\text{dir}(x_{i-1}) = \text{inc}$ . Les traits et types en gras résultent de l'affinement; les types indiqués avant  $t_i$  et après  $t_{i+1}$  sont ceux de  $T(X, t_{<i})$  et  $T(X, t_{>i+1})$ .

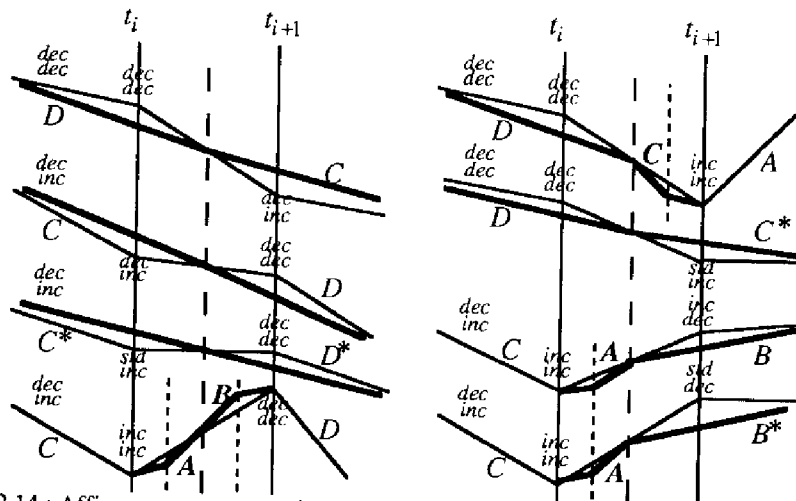


Fig. 2.14 : Affinement et construction des épisodes triangulaires lorsque  $\text{dir}(x_{i-1}) = \text{dec}$ .

Les 72 cas de la figure 2.10 se ramènent à 28 si l'on ne s'intéresse qu'à un intervalle de la forme  $]t_i, t_{i+1}[$ , sans tendance *std* avant  $t_i$ . Ce résultat de 28 s'obtient également en multipliant le nombre de combinaisons de courbures possibles (2) par le nombre de combinaisons de tendances possibles (14, cf. Tab. 2.10). Sur ces 28 cas, 12 sont des cas sans changement de courbure. Il ne reste donc que les 16 cas des figures 2.13 et 2.14 nécessitant un affinement.

L'introduction de nouveaux points permet d'établir la séquence de deux à quatre types symboliques représentant les épisodes triangulaires construits. On désigne dans le tableau 2.11 cette séquence résultant de l'affinement du triplet  $(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$  par l'expression :  $\text{AFF}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$ .

L'implémentation du nombre de cas listés dans le tableau 2.11 peut être facilitée si l'on fait quelques observations simplificatrices. En examinant ce tableau, on s'aperçoit qu'il y a une opposition symétrique entre la moitié supérieure ( $T(X, t_{<i}) = A$  ou  $B$ ) et la moitié inférieure ( $T(X, t_{<i}) = C$  ou  $D$ ). Toute la partie inférieure est l'opposée de la partie supérieure, ce qui nous aide à simplifier l'algorithme de calcul des affinements :

$$\forall \text{dir}(x_i) \in \{\text{dec}, \text{std}, \text{inc}\}, \forall T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}) \in \{A, B, C, D\},$$

$$\text{AFF}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i)) = \text{opp}(\text{AFF}(\text{opp}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))))$$

Si on sait par exemple que  $\text{AFF}(C, B, \text{inc}) = CAB$ , alors l'affinement du triplet opposé  $(B, C, \text{dec})$  sera  $\text{AFF}(B, C, \text{dec}) = \text{opp}(\text{AFF}(\text{opp}(B, C, \text{dec}))) = \text{opp}(\text{AFF}(C, B, \text{inc})) = BDC$ .

Par suite, il suffit de programmer les affinements pour  $T(X, t_{<i}) = A$  ou  $B$ .

$T(X, t_{<i})$	$T(X, t_{>i+1})$	$\text{dir}(x_i)$	$\text{AFF}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$	
A	B	inc	AB	
	B*		AB*	
	D		ABD	
B	A	dec	BDCA	
		std	B*A*	
		inc	BA	
C	B*	inc	CAB*	
			B	CAB
			D	CD
D	C*	dec	C*D*	
			C	CABD
			A	DCA
D	C	dec	DC*	
			A	DC
			C	

Tab. 2.11 : Séquences de types désignées par  $\text{AFF}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$  et résultant de l'affinement du triplet  $(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$  (cf. Fig. 2.12 et 2.13).

Parmi ces derniers, certains sont semblables. Ils n'introduisent aucun épisode supplémentaire, ou bien introduisent le même. Pour les rassembler, définissons une seconde notion simplificatrice, le "corps" de l'affinement, désignant le ou les épisodes rajoutés entre  $T(X, t_{<i})$  et  $T(X, t_{>i+1})$  pour obtenir la séquence résultante :

$$\text{AFF}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i))$$

$$= T(X, t_{<i}) \text{CORPS}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), \text{dir}(x_i)) T(X, t_{>i+1})$$

Par exemple,  $\text{AFF}(B, A, \text{dec}) = BDC A$  où  $\text{CORPS}(B, A, \text{dec}) = DC$ .

Les égalités suivantes rassemblent ces cas semblables :

$$\text{CORPS}(A, B, \text{inc}) = \text{CORPS}(A, B^*, \text{inc}) = \text{CORPS}(B, A, \text{inc}) = \emptyset ;$$

$$\text{CORPS}(B, C, \text{dec}) = \text{CORPS}(B, C^*, \text{dec}) = D ;$$

$$CORPS(B, A, std) = CORPS(B, D, std) = \emptyset^*.$$

“ $\emptyset$ ” rend compte du fait qu’aucun affinement n’est réalisé; “ $\emptyset^*$ ” fait de même en spécifiant que  $T(X, t_{<i})$  et  $T(X, t_{>i+1})$  sont assortis d’un côté horizontal dans la séquence résultante. Rappelons que le cas particulier du triplet  $(B, D, std)$  n’apparaît pas dans le tableau 2.11 puisqu’il ne fait pas intervenir un point d’inflexion, mais doit être tout de même affiné comme il en a déjà été question lors de la description de l’algorithme général (Fig. 2.11).

Aux cas semblables d’affinement sont ajoutés les cas uniques :

$$CORPS(A, D, inc) = B \text{ et } CORPS(B, A, dec) = DC.$$

L’algorithme d’affinement peut alors être écrit ci-dessous (algorithme 3) :

Entrée :  $T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}) \in \{A, B, B^*, C, C^*, D\}$   
 $dir(x_i) \in \{dec, std, inc\}$   
calcul des CORPS

$sv\_T(X, t_{<i}) = T(X, t_{<i})$   
 $sv\_T(X, t_{>i+1}) = T(X, t_{>i+1})$  /\* Sauvegarde des entrées \*/  
 $sv\_dir(x_i) = dir(x_i)$

si  $T(X, t_{<i}) \in \{C, D\}$  alors  
 $T(X, t_{<i}) = opp(T(X, t_{<i}))$   
 $T(X, t_{>i+1}) = opp(T(X, t_{>i+1}))$  /\* Symétrie du tableau \*/  
 $dir(x_i) = opp(dir(x_i))$

Rajouter un point intermédiaire  $t'_{2i+1}$  entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$   
si  $CORPS(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), dir(x_i)) = D$  alors  
rajouter un point entre  $t_i$  et  $t'_{2i+1}$   
si  $CORPS(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), dir(x_i)) = B$  alors  
rajouter un point entre  $t'_{2i+1}$  et  $t_{i+1}$   
si  $CORPS(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), dir(x_i)) = DC$  alors  
rajouter un point entre  $t_i$  et  $t'_{2i+1}$   
rajouter un point entre  $t'_{2i+1}$  et  $t_{i+1}$

si  $T(X, t_{<i}) \in \{C, D\}$  alors  
 $AFF(sv\_T(X, t_{<i}), sv\_T(X, t_{>i+1}), sv\_dir(x_i))$   
 $= sv\_T(X, t_{<i}) \text{ opp}(CORPS(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), dir(x_i))) \text{ sv\_T}(X, t_{>i+1})$

sinon  
 $AFF(sv\_T(X, t_{<i}), sv\_T(X, t_{>i+1}), sv\_dir(x_i))$   
 $= sv\_T(X, t_{<i}) \text{ CORPS}(T(X, t_{<i}), T(X, t_{>i+1}), dir(x_i)) \text{ sv\_T}(X, t_{>i+1})$

Algorithme 3 : Affinement d’un intervalle de la forme  $]t_i, t_{i+1}[$ .

Calcul des points intermédiaires (cf. Fig. 2.15) :

- entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  :  $(x'_{2i+1}, t'_{2i+1})$  tel que  $t'_{2i+1} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}$  et  $x'_{2i+1} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$  ;
- entre  $t_i$  et  $t'_{2i+1}$  :  $(x''_{4i+1}, t''_{4i+1})$  tel que  $t''_{4i+1} = \frac{t'_{2i+1} + t_i}{2}$  et  $x''_{4i+1} = \frac{\frac{x'_{2i+1} + x_i}{2} + x_i}{2}$  ;
- entre  $t'_{2i+1}$  et  $t_{i+1}$  :  $(x''_{4i+3}, t''_{4i+3})$  tel que  $t''_{4i+3} = \frac{t_{i+1} + t'_{2i+1}}{2}$  et  $x''_{4i+3} = \frac{\frac{x_{i+1} + x'_{2i+1}}{2} + x_{i+1}}{2}$ .

En  $t''_{4i+1}$ , la valeur  $x''_{4i+1}$  du point intermédiaire doit nécessairement être comprise entre  $x_i$  et  $(x'_{2i+1} + x_i)/2$ . Le fait de prendre exactement la valeur moyenne entre ces deux valeurs limites est purement arbitraire et peut être aisément modifié (par exemple, par une pondération tenant compte de la durée ou de l'aspect des épisodes adjacents). Il en est de même pour le calcul de  $x''_{4i+3}$ .

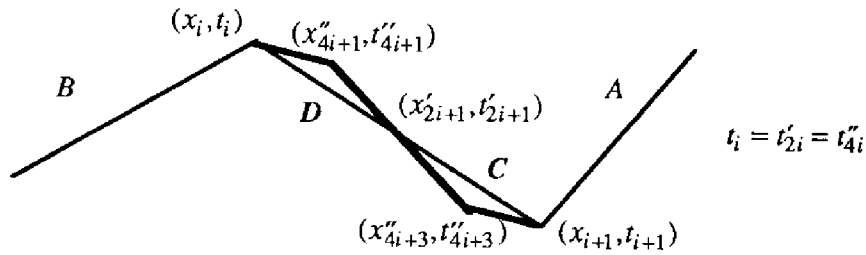


Fig. 2.15 : Exemple de création de 3 points pour  $AFF(B, A, dec) = BDCA$ .

#### Abstraction pour comportement uniforme

A l'inverse de ce qui précède, il peut arriver que le processus conserve un comportement qualitativement inchangé en tendance et courbure sur un intervalle plus important que  $]t_i, t_{i+2}[$ , sans pour autant que ses valeurs soient alignées. Comme cela apparaît dans l'algorithme général, lorsqu'aucun  $ntp$  n'est repéré dans l'intervalle testé, la recherche se poursuit itérativement sur les intervalles suivants. Soit  $t_i$  l'instant à partir duquel l'épisode doit être construit ( $t_i$  est un  $ntp$ ). S'il n'y a pas de  $ntp$  dans  $]t_i, t_{i+2}[$ , la recherche se poursuit sur  $]t_{i+1}, t_{i+3}[$ , etc. Soit  $t_j$  le  $ntp$  finalement détecté.

Alors (cf. Fig. 2.16) :

- la base du triangle construit est formée par le segment entre les points  $(x_i, t_i)$  et  $(x_j, t_j)$  ;
- l'un des côtés a pour pente celle du segment entre  $(x_i, t_i)$  et  $(x_{i+1}, t_{i+1})$  ;
- l'autre a pour pente celle du segment entre  $(x_{j-1}, t_{j-1})$  et  $(x_j, t_j)$ .

Cette construction constitue un premier type d'abstraction appelé *abstraction pour comportement uniforme*. Elle est réalisée de telle manière que l'épisode triangulaire



résultant soit une enveloppe de l'évolution de départ, ceci afin de ne perdre que le minimum d'information concernant le comportement connu du processus entre  $t_i$  et  $t_j$ .

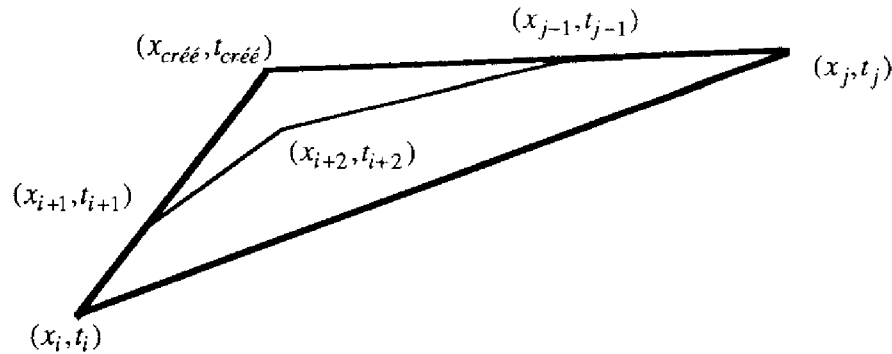


Fig. 2.16 : Abstraction pour comportement uniforme.

Calcul du point  $(x_{créé}, t_{créé})$  :

$$\text{pente du segment entre } (x_i, t_i) \text{ et } (x_{i+1}, t_{i+1}) = a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i};$$

$$\text{pente du segment entre } (x_{j-1}, t_{j-1}) \text{ et } (x_j, t_j) = b_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}.$$

$$\text{On a : } a_i = \frac{x_{créé} - x_i}{t_{créé} - t_i} \text{ et } b_j = \frac{x_j - x_{créé}}{t_j - t_{créé}}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$t_{créé} = \frac{(x_j - x_i) + t_i \cdot a_i - t_j \cdot b_j}{a_i - b_j} \text{ et } x_{créé} = (t_{créé} - t_i) \cdot a_i + x_i.$$

Résumons le mécanisme d'abstraction pour comportement uniforme :

- Avant abstraction :  $n$  pas de temps,  $n+1$  points
- Après abstraction : 2 pas de temps, 3 points
- Disparition de  $n-1$  points
- Création de 1 point.

### 2.3.4 Résumé et conclusion sur la représentation triangulaire

A partir d'une série de points représentant l'évolution du processus à pas constant sur toute la durée d'observation, la représentation triangulaire obtenue fait apparaître tous les  $dt_p$ . Elle permet une représentation synthétique du comportement, mettant en évidence les fluctuations plus ou moins régulières du processus. Elle est constituée d'épisodes dont chacun condense plusieurs informations primordiales, à savoir :

- tendance du processus;
- courbure;

— durée pendant laquelle cette tendance et cette courbure sont valides.

Le processus est contenu dans l'enveloppe constituée par la série de triangles. En effet, chaque point de la série initiale se trouve ou bien à l'intérieur d'un triangle (dans le cas de l'*abstraction pour comportement uniforme*), ou bien sur un côté de triangle (dans tous les autres cas). Chaque épisode préserve ainsi une part de l'information numérique originale.

Pour parvenir à ce résultat, l'abstraction et l'affinement sont simultanément utilisés.

a/ Abstraction.

Deux types de situations permettent de supprimer les points "qualitativement inutiles" :

— Lorsque plusieurs points sont alignés ( $ddir(x_i) = std$ ), seuls les points extrêmes sont conservés.

— Lorsque plusieurs points consécutifs sont affectés des mêmes tendances et courbures, ils sont abstraits en un seul épisode (*abstraction pour comportement uniforme*).

b/ Affinement.

Inversement, quatre types de situations conduisent à créer de nouveaux points :

— lorsqu'un point d'inflexion est détecté entre deux points de la série initiale;

— si besoin est, pour compléter l'épisode triangulaire après cette détection;

— lorsqu'un comportement stable ( $dir(x) = std$ ) dure sur au moins un intervalle  $]t_i, t_{i+1}[$  entre un changement de tendance de *dec* à *inc* ou de *inc* à *dec* (plateau);

— dans le cas où, au début de l'évolution,  $dir(x_1) \neq dir(x_0)$ .

Il y a alors affinement par interpolation.

Chaque changement de comportement qualitatif du processus représenté avec le pas de temps initial est donc connu. Même si l'on affine sur certaines parties "pertinentes" de son évolution, cette "pertinence" est liée à ce pas de temps initial et au choix du seuil numérique d'alignement  $\varepsilon$  (cf. 2.3.1). Cela ne veut pas dire que d'autres parties de l'évolution du processus n'auraient pas mérité un affinement... on est incapable de le dire, et surtout de le détecter avec ce pas de temps.

## 2.4 Représentations trapézoïdales

Nous disposons d'une représentation sous forme de succession d'épisodes géométriques triangulaires. Jusqu'à présent, nous n'avons perdu aucune information sur le comportement qualitatif du processus. Les abstractions réalisées (*élimination de points inutiles* et *abstraction pour comportement uniforme*) n'ont en effet fait perdre ni tendance, ni courbure qualitative de la représentation du processus.

Dans cette section, nous explicitons une procédure d'abstraction *qualitative*, dans le sens où elle s'accompagne d'une perte d'information qualitative. L'intérêt de la manipulation réside dans le fait que cette abstraction est réalisée *par étapes* et de façon *non-arbitraire*. Ainsi, différents niveaux de détail de la représentation sont mis en évidence automatiquement, sur le seul critère de la durée des comportements.

Préalablement à l'abstraction qualitative, une représentation trapézoïdale du processus est construite à partir de sa représentation triangulaire. Elle est appelée *représentation trapézoïdale à l'étape zéro*. Ensuite, par des constructions géométriques simples, une abstraction par étapes de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro conduit à l'ensemble des niveaux de détail possibles et aux représentations correspondantes du processus (appelées *représentations trapézoïdales abstraites*).

La représentation triangulaire est la plus fine de toutes les représentations par épisodes dont on disposera *in fine*. On pourra parler d'affinement d'une représentation trapézoïdale à l'étape zéro pour signifier le passage à la représentation triangulaire, et d'affinement d'une représentation trapézoïdale abstraite pour parler du passage à l'étape inférieure.

#### 2.4.1 Episodes trapézoïdaux : construction et interprétation

##### *Pourquoi un nouvel épisode ?*

Nous voulons regrouper géométriquement les épisodes constituant une représentation triangulaire. Or, regrouper plusieurs triangles ne peut conduire à la construction d'un nouveau triangle de type recensé (ayant les caractéristiques qualitatives possibles que l'on a présentées dans le tableau 2.4). Par contre, le regroupement de plusieurs trapèzes (supposés convexes) conduit à la construction d'un nouveau trapèze de type connu. D'où la récursivité de ces regroupements et la possibilité de construire successivement des représentations de plus en plus abstraites.

##### *Episode trapézoïdal*

Un épisode trapézoïdal est la réunion géométrique de deux épisodes triangulaires consécutifs (Fig. 2.17). Il représente donc un intervalle où l'évolution du processus a même tendance *ou bien* même courbure, tandis qu'un épisode triangulaire est un intervalle où l'évolution a même tendance *et* même courbure. Un épisode trapézoïdal se commence et se termine par un *dtp*; outre ces extrêmes, il contient au moins un *dtp*, extremum ou point d'inflexion.

Il n'y a pas de perte d'information comportementale qualitative (tendance ou courbure) en passant des épisodes triangulaires aux trapézoïdaux. Seul le point de jonction (*dtp*) entre les deux triangles est perdu. Le regroupement de deux épisodes triangulaires en un épisode trapézoïdal est donc une *abstraction quantitative* : il implique le remplacement de 5 points par 4, sur le même intervalle de temps.

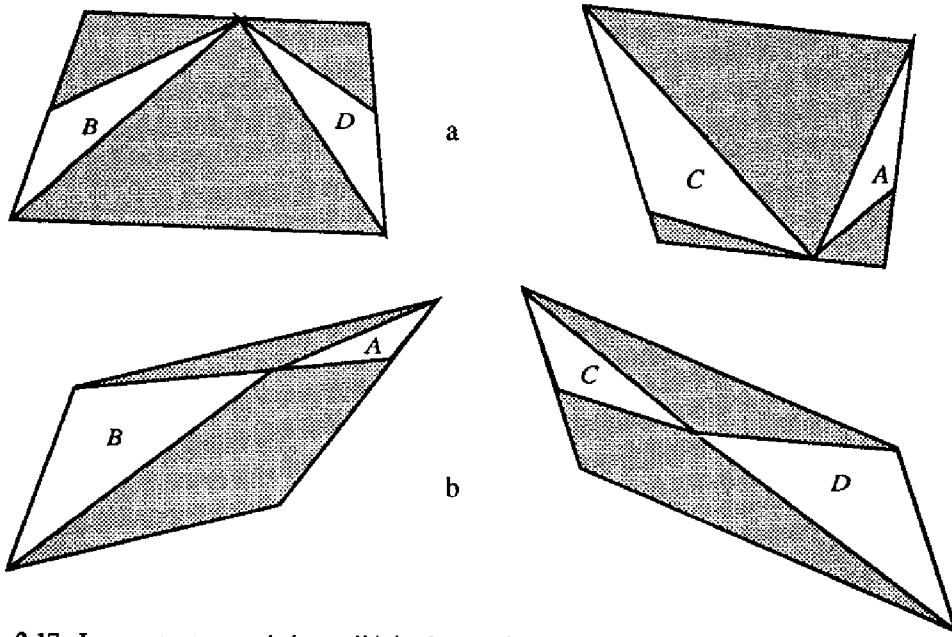


Fig. 2.17 : Les quatre types généraux d'épisodes trapézoïdaux possibles : (a) *BD* et *CA*; (b) *BA* et *CD*.

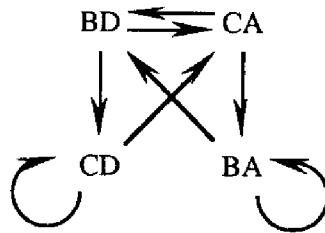


Fig. 2.18 : Graphe des transitions possibles entre épisodes trapézoïdaux de type général.

Selon l'hypothèse de continuité (cf. 2.3.1), toutes les associations de deux triangles consécutifs ne sont pas permises. Seuls les couples suivants sont possibles :

— *CA* et *BD* (Fig. 2.17a) sont des intervalles de l'évolution où le processus a une courbure constante, et subit un changement de direction (extremum). *CA* contient un minimum local, *BD* un maximum local;

— *BA* et *CD* (Fig. 2.17b) sont des intervalles sur lesquels le processus a la même tendance, et subit un changement de courbure (point d'inflexion). *BA* est une phase de croissance, *CD* une phase de décroissance.

Un épisode trapézoïdal est noté :  $Z(X, t_i)$  lorsqu'il débute en  $t_i$ . Ainsi, par définition, nous aurons pour les types *CA* et *BD* :

$$\forall t_j, t_k \in Z(X, t_i), ddir(x_j) = ddir(x_k)$$

et pour les types *BA* et *CD* :

$$\forall t_j, t_k \in Z(X, t_i), dir(x_j) = dir(x_k).$$

Sous la même hypothèse de continuité, les transitions possibles entre épisodes trapézoïdaux sont présentées avec le graphe de la figure 2.18. Tout type particulier (avec “\*”) peut également être trouvé.

Un épisode trapézoïdal permet des interprétations telles que : “le processus garde une tendance croissante entre les instants  $t_i$  et  $t_j$ ”, ou encore : “il conserve une courbure négative entre les instants  $t_i$  et  $t_j$ ”. Ces deux renseignements ne peuvent être déduits ensemble sur le même intervalle, mais nous avons pour cela la représentation triangulaire. En ce sens, le niveau d’interprétation fourni par la représentation trapézoïdale est plus grossier que celui issu de la représentation triangulaire. L’interprétation d’une représentation trapézoïdale est donc une *abstraction de l’interprétation* que l’on peut faire à partir de l’évolution triangulaire.

Remarque :

Le regroupement de deux épisodes triangulaires en un épisode trapézoïdal aurait pu être choisi différemment, avec  $AB$  et  $DC$  au lieu de  $BA$  et  $CD$ . Cependant, à cause de l’hypothèse de continuité, le type  $A$  contraint le type suivant, et le type  $C$  contraint le type précédent. Seuls les deux types  $AB$  et  $DC$  auraient alors été possibles, ce qui aurait été moins informatif puisqu’ils sont tous deux des portions de tendance identique et incluant un point d’inflexion. Avec le choix retenu, la description du comportement est plus riche.

#### *Construction des épisodes trapézoïdaux*

Pour la construction des épisodes trapézoïdaux, nous imposons des contraintes sur les points extrêmes, les courbures et les côtés.

Soient  $T(X, t_i)$  et  $T(X, t_j)$  deux épisodes triangulaires consécutifs, définis par les points  $(P_1, P_2, P_3)$  et  $(P_3, P_4, P_5)$  respectivement. Ils sont associés pour former l’épisode trapézoïdal  $Z(X, t'_i)$ , défini par les quatre points  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  (Fig. 2.19). On impose pour la construction de  $Z(X, t'_i)$  les sept contraintes suivantes :

1.  $Q_1 \equiv P_1$
2.  $Q_4 \equiv P_5$
3.  $\vec{Q_1Q_2} = \alpha \vec{P_1P_2}$
4.  $ddir(Q_2) = ddir(P_2)$
5.  $\vec{Q_3Q_4} = \beta \vec{P_4P_5}$
6.  $ddir(Q_3) = ddir(P_4)$
7.  $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$  tels que  $\forall P_i, P_i \in Z(X, t'_i)$

$\alpha$  et  $\beta$  sont donc des scalaires tels que tous les points des triangles originaux soient contenus dans le trapèze résultant.

Divers cas de construction sont possibles (Fig. 2.20 et 2.21). Ils sont plus nombreux pour les types  $CD$  et  $BA$  que pour les types  $BD$  et  $CA$ , puisque pour  $BD$  et  $CA$ , un des côtés

parallèles est imposé. Le calcul du ou des points créés se fait toujours de manière analogue à celle précisée au paragraphe 2.3.3. (*abstraction pour comportement uniforme*).

Pour certains  $CD$  et  $BA$  (Fig. 2.21 : cas où apparaît une verticale pointillée), le premier côté du premier triangle ou le dernier côté du dernier triangle ne peut être employé pour fixer un côté non-parallèle du trapèze résultant. On a donc toute latitude pour fixer ce côté, du moment que l'ordonnancement chronologique des points est respecté. Le choix retenu (arbitraire) est de le prendre tel que le point créé en son extrémité ait la même date que le point de jonction entre les deux triangles. Ainsi, cette date n'est pas à calculer.

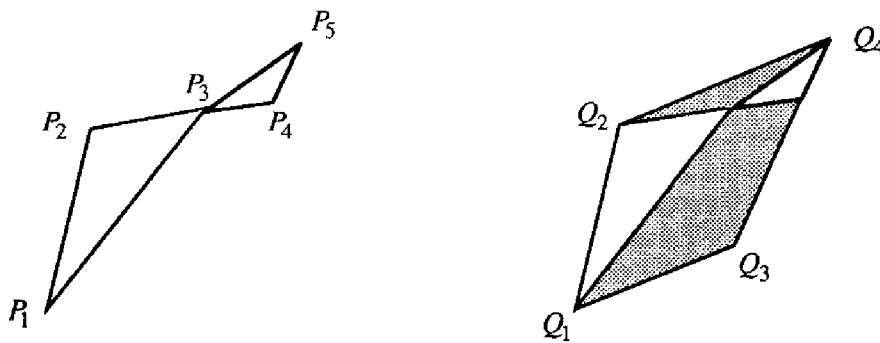


Fig. 2.19 : Construction d'un épisode trapézoïdal  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  à partir de deux épisodes triangulaires  $P_1P_2P_3$  et  $P_3P_4P_5$ . Les premier et dernier points  $P_1$  et  $P_5$ , les tendances et les courbures sont conservées.

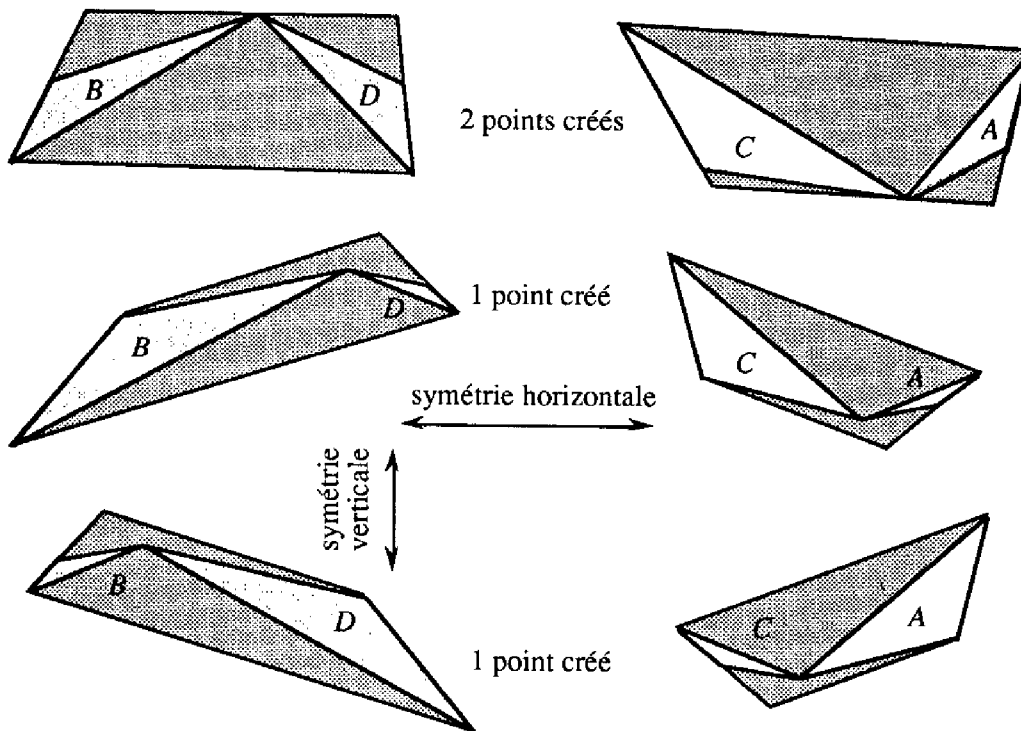


Fig. 2.20 : Construction des épisodes de type  $BD$  et  $CA$ .

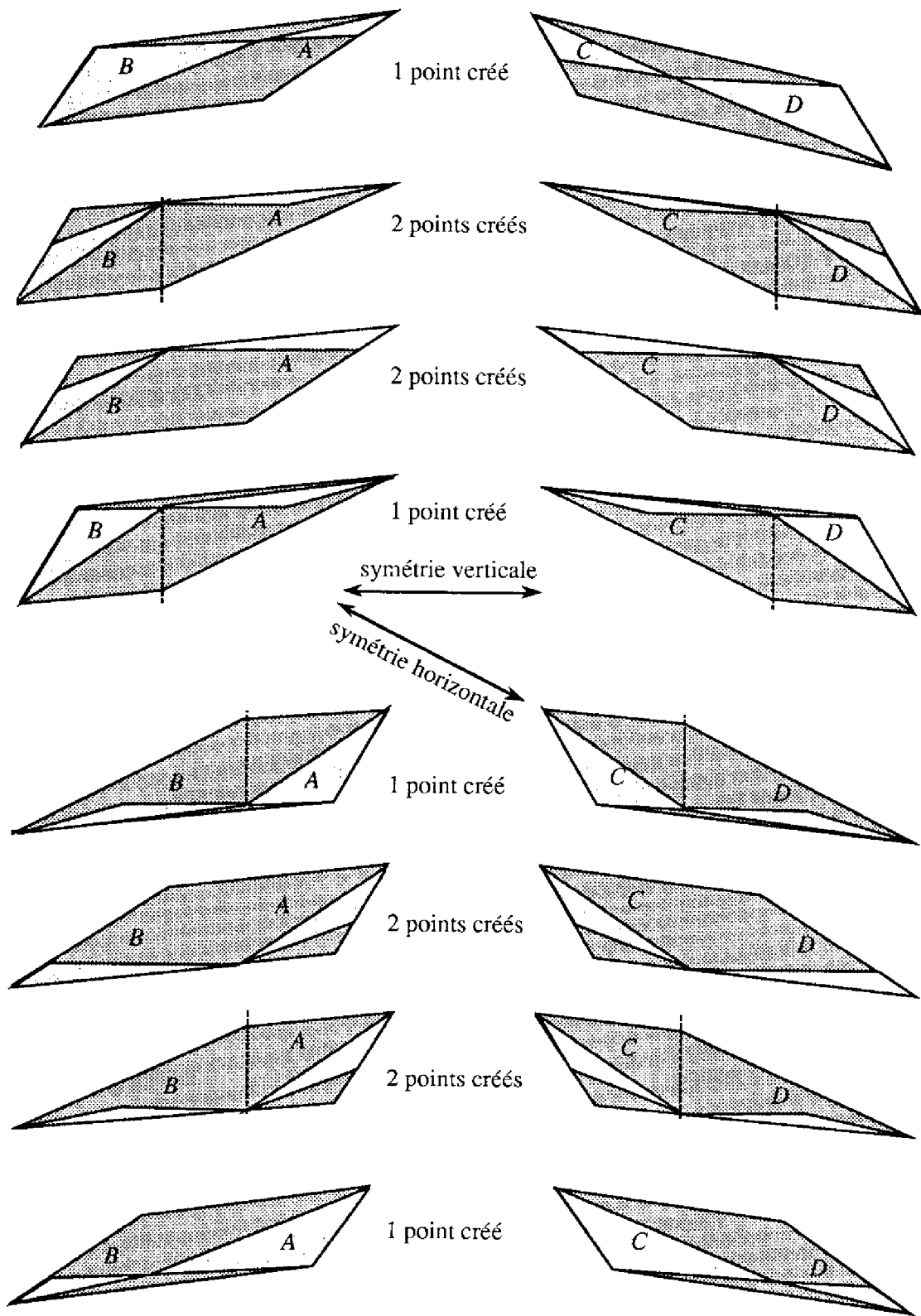


Fig. 2.21 : Construction des épisodes de type BA et CD.

### 2.4.2 Représentation trapézoïdale à partir de la représentation triangulaire (représentation trapézoïdale à l'étape zéro)

Transformer chaque paire d'épisodes triangulaires en un épisode trapézoïdal aboutit à l'élaboration d'une série d'épisodes trapézoïdaux appelée *représentation trapézoïdale à l'étape zéro* (i.e. non-abstraite) du processus et notée :

$$Z^0(X_{t_0, \dots, t_n}) = \{Z(X, t_0), \dots, Z(X, t_i)\},$$

où  $Z(X, t_i)$  dénote un épisode trapézoïdal débutant à l'instant  $t_i$ .

Chaque trapèze contenant tous les points des deux triangles dont il est issu, la représentation trapézoïdale à l'étape zéro est toujours une enveloppe du processus initial.

Il faut noter que  $t_0$  n'est pas forcément le même instant que celui de la représentation triangulaire. En effet, un trapèze ne peut débuter que par un triangle  $B$  ou  $C$ , et s'achever par un  $A$  ou  $D$  (Fig. 2.17). Il peut donc se produire que les premier et/ou dernier épisodes triangulaires ne soient pas utilisés pour la construction des trapèzes. Ils sont cependant conservés; ils peuvent avoir un intérêt pour l'interprétation, surtout dans le cas où ils occupent une part non-négligeable du domaine temporel.

Un exemple de représentation trapézoïdale à l'étape zéro est donné figure 2.22.

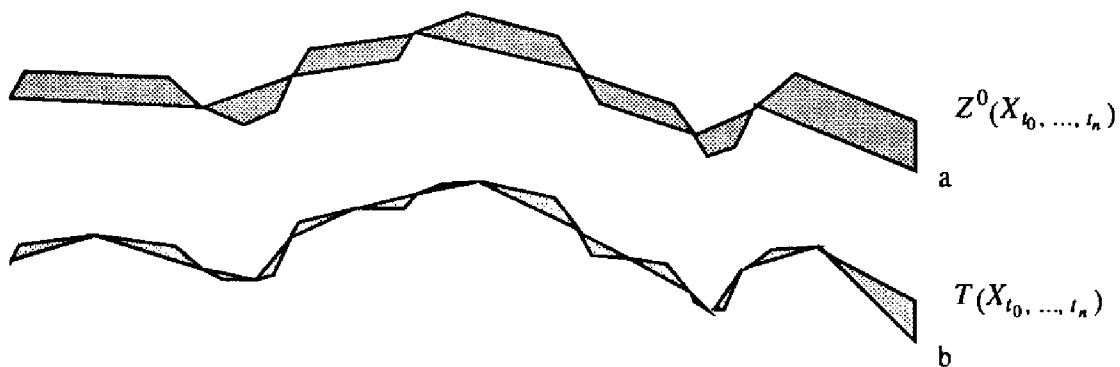


Fig. 2.22 : La représentation trapézoïdale à l'étape zéro (a) issue d'une représentation triangulaire (b) du processus de la figure 2.9.

### 2.4.3 Procédure d'abstraction successive de représentations trapézoïdales

#### *Principe et résultat*

Le principe régissant l'abstraction est le suivant :

*Chaque étape de l'abstraction successive d'une évolution trapézoïdale consiste à regrouper chacun des épisodes de durée minimale avec ses deux voisins. Chaque groupement de trois épisodes trapézoïdaux produit un nouvel épisode trapézoïdal.*



La représentation à l'étape d'abstraction  $s$  est notée  $Z^s(X_{t_0}, \dots, t_n)$ .

Lorsqu'une étape  $s$  est achevée, on obtient une nouvelle représentation trapézoïdale  $Z^s(X_{t_0}, \dots, t_n)$ . Tous les épisodes qui la composent ont une durée supérieure à la durée des épisodes minimaux de l'étape précédente  $s-1$ . Cela signifie que les distinctions de comportement exprimés par les épisodes (changement de direction ou de courbure) dont la durée est inférieure à la nouvelle durée minimale (à  $s$ ) ne sont plus considérés comme pertinents pour la représentation. Le niveau de détail de la représentation change ainsi à chaque étape, et la procédure fournit à l'utilisateur toutes les représentations du même processus (Fig. 2.23).

Remarque :

Pour éviter toute confusion, on parle de "regroupement d'épisodes" plutôt que "d'abstraction d'épisodes". En effet, "l'épisode abstrait", pourrait être compris comme l'épisode de durée minimale, ou bien comme l'épisode résultant (du regroupement de l'épisode de durée minimale avec ses voisins), ce qui n'est pas la même chose...

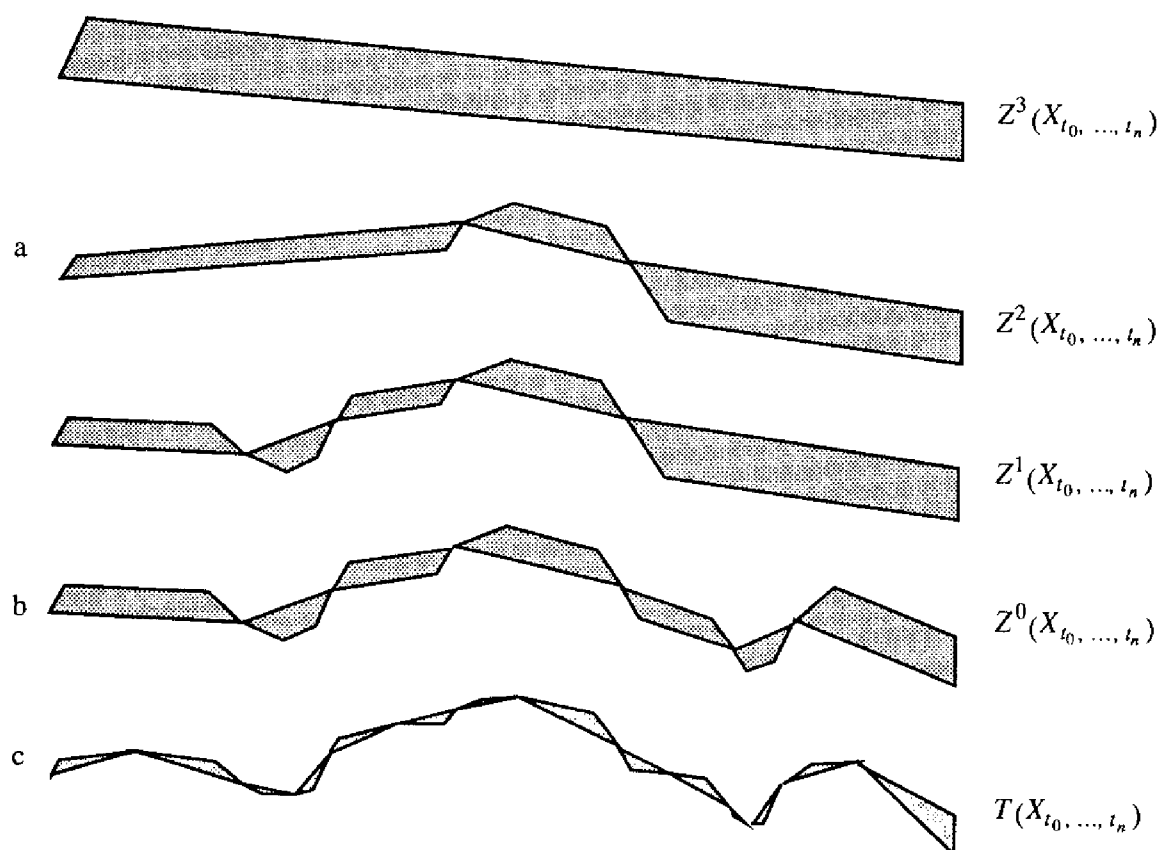


Fig. 2.23 : Les représentations trapézoïdales abstraites ( $s=1, 2, 3$ ) (a), la représentation trapézoïdale à l'étape zéro (b) et la représentation triangulaire (c) du processus de la figure 2.9.

*Algorithme d'abstraction successive de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro*

Il faut au moins trois épisodes trapézoïdaux pour démarrer l'abstraction, qui s'achève également lorsqu'il reste moins de trois épisodes (Algorithme 4).

Entrée :  $Z^0(X_{t_0}, \dots, t_n) = \{Z(X, t_0), \dots, Z(X, t_l)\}$  /\* il y a  $l+1$  épisodes \*/

$s = 0$

Tant que  $l+1 \geq 3$

Trouver les épisodes  $Z(X, t_i) \in Z^s(X_{t_0}, \dots, t_n)$  tels que :

$\forall Z(X, t_j) \in Z^s(X_{t_0}, \dots, t_n), t_{i+1} - t_i \leq t_{j+1} - t_j$

$s = s + 1$

Pour chaque  $Z(X, t_i)$

regrouper  $Z(X, t_{i-1}), Z(X, t_i)$  et  $Z(X, t_{i+1})$  pour former  $Z'(X, t_{i-1})$

$Z^s(X_{t_0}, \dots, t_n) = \{Z^{s-1}(X_{t_0}, \dots, t_n)$  jusqu' à  $t_{i-1}, Z'(X, t_{i-1}),$

$Z^{s-1}(X_{t_0}, \dots, t_n)$  à partir de  $t_{i+2}\}$

$l = l - 2$  /\* trois épisodes sont remplacés par un seul \*/

Fin pour

Fin tant que

Algorithme 4 : Abstraction successive de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro.

*Remarque :*

Si plusieurs épisodes de durée minimale sont adjacents ou partagent le même voisin, celui de gauche (le premier puisqu'on procède de gauche à droite) est regroupé avec ses voisins. Une autre alternative n'aurait que peu d'incidence sur l'interprétation résultante.

#### 2.4.4 Le regroupement de trois épisodes trapézoïdaux en un seul - Une nouvelle interprétation des types

*Pertes qualitatives et quantitatives*

Le regroupement de trois épisodes en un seul est la partie centrale de l'abstraction successive. Chaque fois que trois épisodes sont regroupés, quatre tendances et courbures sur six disparaissent. Ici interviennent donc les premières pertes d'information comportementale qualitative (Fig. 2.24).

*Construction de l'épisode résultant d'un regroupement*

Le regroupement de trois trapèzes successifs est soumis à des contraintes comportementales du même type que lors de la construction d'un trapèze à partir de deux

triangles (cf. 2.4.1) : conservation des points extrémaux, des tendances et des courbures pour les côtés droit et gauche.

Les arbres de la figure 2.25 donnent les regroupements possibles de trois épisodes trapézoïdaux. Ils sont au nombre de 16, dont 8 sont les opposés des 8 autres. Il suffit donc de construire le trapèze résultant, pour les 8 cas de l'un des deux arbres, par exemple :

- |          |          |
|----------|----------|
| — CABABA | — CDCABA |
| — CABABD | — CDCABD |
| — CABDCA | — CDCDCA |
| — CABDCD | — CDCDCD |

Une symétrie des formes par rapport à un axe horizontal conduit à la construction des 8 autres cas (Fig. 2.26).

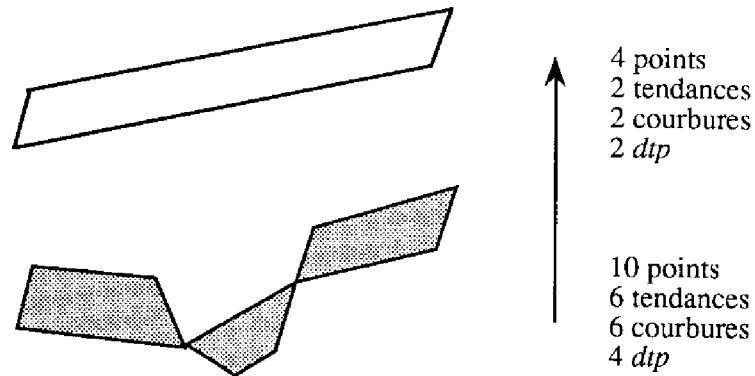
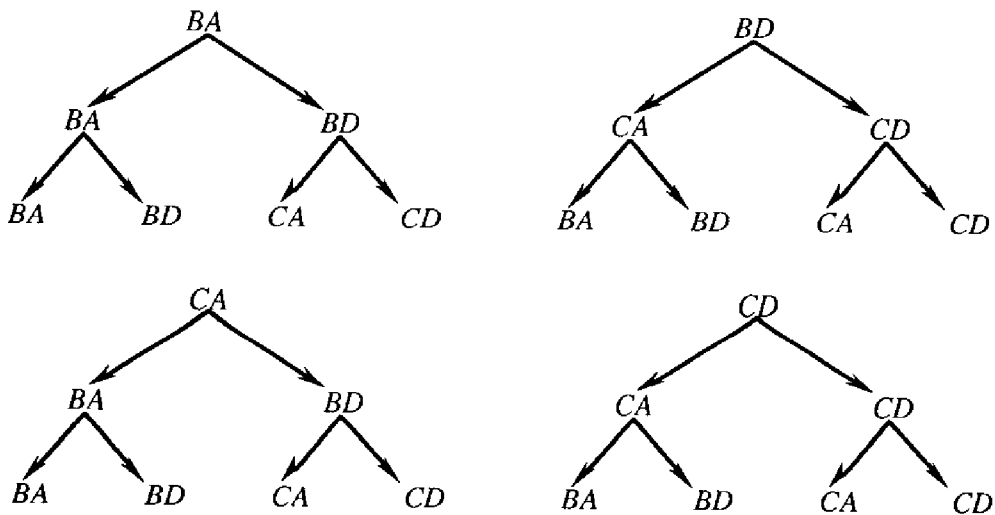


Fig. 2.24: Un exemple de regroupement de trois épisodes en un seul et les pertes quantitatives et qualitatives associées.



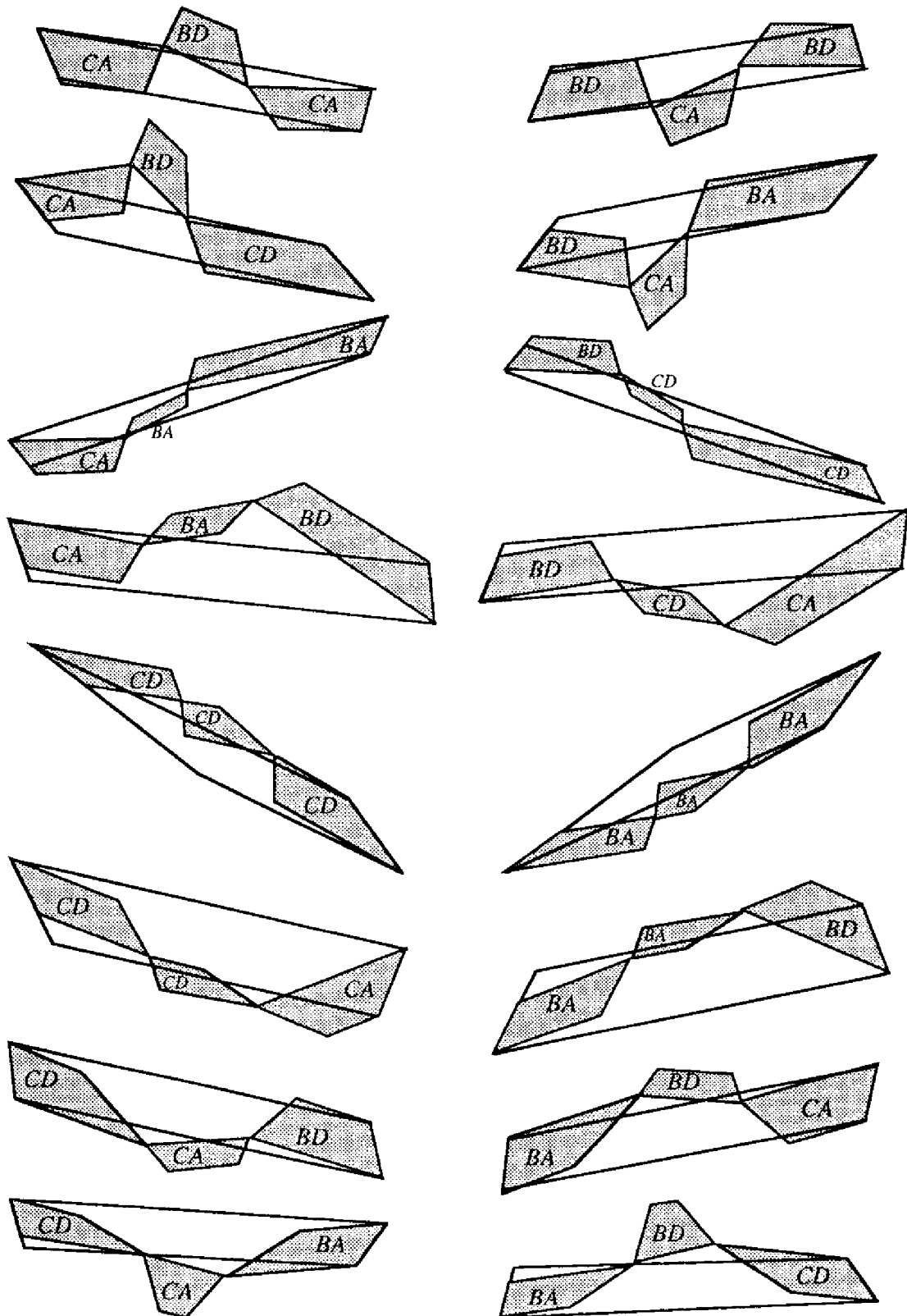


Fig. 2.26 : Construction des regroupements de trois épisodes trapézoïdaux en un seul. Les cas de la colonne de droite peuvent se déduire de ceux de gauche par une symétrie par rapport à un axe horizontal.

La procédure d'abstraction est la suivante :

1/ si les deux points extrêmes peuvent être joints sans empêcher la construction des trois autres côtés en respectant les contraintes (les deux côtés extrêmes expriment des directions opposées), ils sont reliés. Ce segment forme ainsi l'un des côtés parallèles du trapèze. L'autre est tracé à partir du point précédant le point de fin (Fig. 2.27);

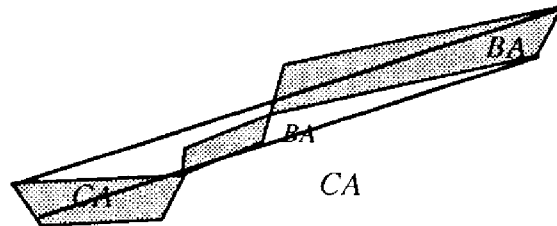


Fig. 2.27: Abstraction lorsque les deux points extrêmes peuvent être reliés.

2/ sinon, le point de début est relié au point précédant le point de fin, et forme l'un des deux côtés parallèles; l'autre est obtenu à partir du point de fin et complète le trapèze (Fig. 2.28).

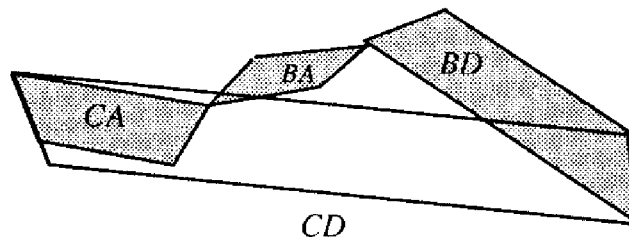


Fig. 2.28 : Abstraction lorsque les deux points extrêmes ne peuvent pas être reliés.

Le choix du point précédant le point de fin comme troisième point est purement arbitraire, et se justifie par la simplicité du calcul du trapèze résultant. On aurait pu tout aussi bien prendre le point suivant le point de début comme second point du trapèze résultant, ou encore créer les second et troisième points à partir de calculs de surface, de distance, etc.... La différence de résultat n'aurait en tout cas pas eu d'impact sur l'interprétation.

Le type du trapèze résultant d'un regroupement est noté avec la première lettre du type du premier épisode, et la dernière du type du troisième (puisque'on conserve les tendance et courbure à gauche et à droite). Par exemple, le regroupement des types  $CD$ ,  $CA$ ,  $BD$  produit un épisode de type  $CD$ .

### *Interprétation*

On voit qu'à ce stade, une représentation trapézoïdale abstraite *n'est plus une enveloppe du processus initial*. Il est en effet en général impossible de conserver les points des trois trapèzes tout en satisfaisant les contraintes comportementales et en obtenant un trapèze de type recensé. Nous avons donc choisi de favoriser l'information qualitative plutôt que les valeurs numériques.

Un trapèze résultant d'un regroupement doit être interprété comme un intervalle de temps sur lequel les caractéristiques du processus (i.e. les valeurs, tendances et courbures) ne sont connues qu'au voisinage des bornes. Mis à part ceci, l'interprétation des types d'épisodes faisant partie d'une représentation abstraite est la suivante :

— un trapèze de type *CA* ou *BD* contient un nombre impair d'extrema, et un nombre pair de points d'inflexion; il représente la forme d'une phase contenant un extremum ;

— un trapèze de type *BA* ou *CD* contient un nombre pair d'extrema, et un nombre impair de points d'inflexion. Par conséquent, un trapèze de type *CD* peut très bien avoir un comportement globalement croissant, et un *BA* un comportement globalement décroissant. L'interprétation précédemment valable pour les épisodes de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro (*CD* est une phase de décroissance, *BA* une phase de croissance) n'est plus systématique (Fig. 2.29a). Il faut à présent distinguer les cas où un changement de tendance se produit et les cas où il n'y en a pas :

a/ s'il n'y a pas de changement de tendance dans le trapèze résultant (Fig. 2.21), alors l'interprétation est la même que dans la représentation à l'étape zéro;

b/ sinon, un *CD* sera interprété comme ayant la même forme qu'une séquence {*CABD*} et un *BA* comme ayant la même forme qu'une séquence {*BDCA*} (Fig. 2.29b). En effet par exemple, *C* indique qu'il y a une décroissance au début de l'épisode. Si, sur l'épisode *CD*, on constate une croissance globale, cela signifie la présence d'un "double comportement" que l'on peut caractériser de manière unique en affinant le comportement qualitatif *CD* en *CA* et *BD*. En revanche, on ne sait rien de l'instant de jonction entre *CA* et *BD*.

Seuls les *types* des épisodes *CD* et *BA* concernés peuvent ainsi être remplacés par d'autres *types* d'épisodes fictifs dont la forme est équivalente : nous n'avons aucune connaissance sur la durée de ces épisodes équivalents. On ne pourra alors raisonner que sur la somme de leurs durées (par exemple, la somme des durées des *CA* et *BD* fictifs est égale à la durée du *CD* réel).

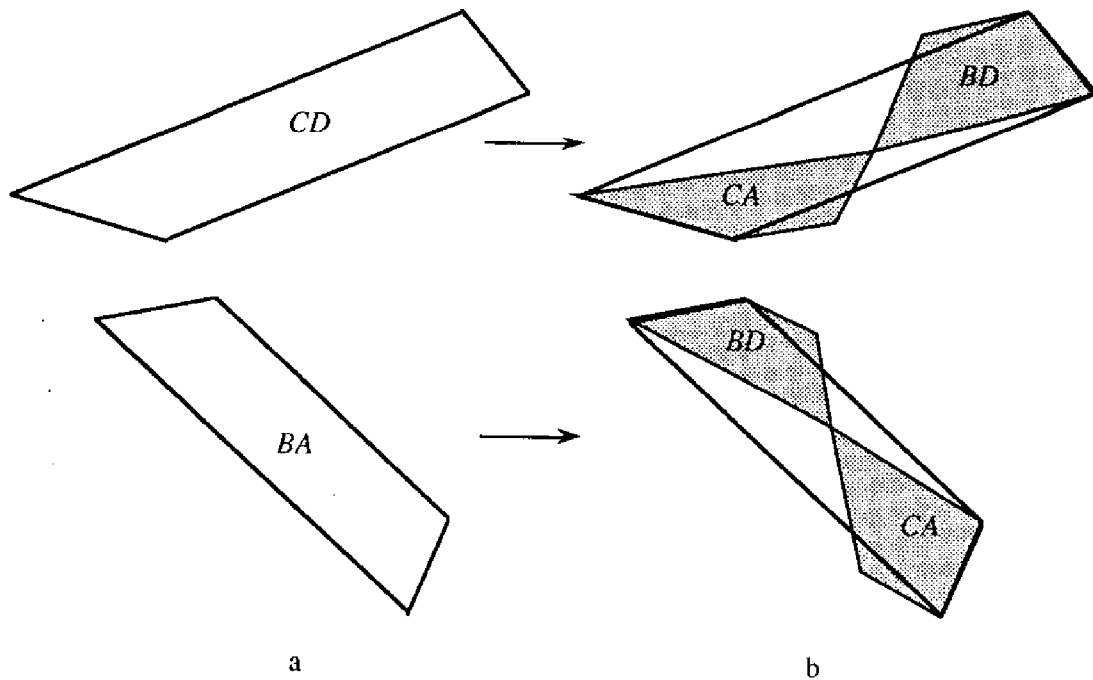


Fig. 2.29 : (a) Episodes  $CD$  globalement croissant et  $BA$  décroissant; (b) Exemple d'épisodes fictifs  $CABD$  et  $BDCA$  les remplaçant pour l'interprétation des formes de comportement. Ces épisodes  $CABD$  et  $BDCA$  n'ont aucune réalité et seul leur type et la somme de leurs durées peuvent être utilisés (on ne connaît pas leur durée respective).

## 2.5 Discussion sur les représentations géométriques

### 2.5.1. Problèmes de construction

Plusieurs points particuliers doivent être signalés au sujet de la construction des diverses représentations trapézoïdales.

#### *Points extrêmes de la série initiale*

Le regroupement d'un bloc de trois épisodes trapézoïdaux en un seul conserve le premier et le dernier point du bloc. Ceci implique que les deux points extrêmes de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro sont maintenus dans toutes les représentations abstraites. Tout particulièrement dans les dernières, ces points peuvent avoir une influence excessive sur l'aspect global, en intervenant sur la forme du ou des quelques épisodes restants. Seul l'utilisateur peut décider si cette influence est excessive, attendu que cela dépend en grande partie de la nature du processus et de la qualité des données.

### *Episodes extrêmes des représentation trapézoïdales*

La nécessité de disposer d'un épisode trapézoïdal de chaque côté de l'épisode de durée minimale nous conduit à envisager le cas où l'épisode de durée minimale est au début ou à la fin de la représentation trapézoïdale. On peut alors adapter la procédure de deux manières :

(1) En construisant l'épisode trapézoïdal manquant au début et/ou à la fin de l'évolution. Cela peut être accompli à l'aide d'un éventuel épisode triangulaire laissé de côté lors de la construction de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro (cf. 2.4.1). Il n'y a alors que deux points à rajouter par extrapolation pour compléter l'épisode trapézoïdal manquant.

Si aucun épisode triangulaire n'est disponible, trois points sont extrapolés avant  $t_0$  ou au-delà de  $t_n$ . C'est la solution idéale; un inconvénient est cependant le fait que la procédure d'abstraction successive doit être réinitialisée à partir de la nouvelle représentation trapézoïdale à l'étape zéro contenant le ou les épisode(s) extrapolé(s). Mais surtout, l'extrapolation peut ne pas être simple à réaliser.

(2) En recherchant l'épisode de durée immédiatement supérieure. Il s'agit de la solution actuellement implémentée. Ici à nouveau, un épisode extrémal qui reste jusqu'aux ultimes représentations peut avoir une importance trop grande sur l'aspect de ces représentations. Il faut cependant remarquer qu'un tel épisode peut être regroupé au cours de l'abstraction, si son voisin se trouve être l'épisode minimal à un moment. Ce problème n'est donc pas systématiquement rémanent pour les abstractions ultérieures.

### *Episode triangulaire ne participant pas à la construction d'un épisode trapézoïdal*

Enfin, la situation dans laquelle un épisode triangulaire extrémal n'est pas intégrable dans un épisode trapézoïdal (cf. 2.4.1) amène les mêmes réflexions. S'il est de durée négligeable, il ne sera pas plus gênant que le seul point extrémal correspondant (cf. ci-dessus : *Points extrêmes de la série initiale*).

Lorsqu'il occupe par contre une part non-négligeable du domaine, il fournit une information importante sur la forme de comportement globale, mais il doit être regroupé avec ses voisins lorsque sa durée se trouve être minimale; une extrapolation des points précédant  $t_0$  ou suivant  $t_n$  doit alors être réalisée pour compléter l'épisode trapézoïdal. Si cela s'avère irréalisable, les mêmes remarques que précédemment s'appliquent au sujet de l'influence de cet épisode triangulaire sur l'aspect global des représentations.

## 2.5.2 Avantages et inconvénients des représentations par épisodes

Pour en finir avec cet exposé concernant l'aspect "représentation" de notre travail, dressons une liste des avantages et inconvénients liés à la méthode utilisée.



### *Facilité de visualisation des comportements*

L'évolution du processus est segmentée en épisodes triangulaires ou trapézoïdaux, chacun exprimant un (type de) comportement élémentaire en termes de tendance et courbure qualitatives. Le caractère géométrique simple des épisodes autorise une visualisation rapide de la *forme* des comportements :

— D'abord, les représentations triangulaire et trapézoïdale à l'étape zéro constituent des représentations simplifiées de la série de points initiale.

— L'abstraction successive permet ensuite de visualiser des comportements difficiles à déceler dans les représentations par points, triangulaire et trapézoïdale à l'étape zéro. Un comportement (représenté par un ou plusieurs trapèzes) peut apparaître au fil des abstractions. Cela signifie qu'il y avait au départ trop de petites fluctuations, ou de bruit, pour avoir un aperçu clair de ce comportement. Une fois ces petites fluctuations éliminées par l'abstraction, un point de vue plus grossier met en évidence le phénomène "intéressant". Rappelons à ce sujet que le regroupement d'épisodes trapézoïdaux ne conserve pas toutes les valeurs numériques du processus. Seules la forme et la durée du comportement qualitatif exprimé par les épisodes sont entièrement fiables. Egalement, on pourra chiffrer le niveau de détail nécessaire à l'observation de ce comportement : s'il apparaît à une étape  $s$ , alors le niveau de détail est lié à la durée minimale d'un épisode à  $s$ .

— Inversement à la détection visuelle d'un phénomène, la *disparition* d'épisodes à une étape  $s$  signifie qu'on a atteint un niveau de détail trop grossier pour que les phénomènes correspondants puissent être observés. Leur durée est donc inférieure à la durée minimale représentée à  $s$ .

Des exemples d'interprétations visuelles sont décrits dans le chapitre 4. Nous y illustrons ces trois aspects de la visualisation de comportements au cours de l'abstraction.

### *Localisation temporelle et fréquentielle*

Avec le principe d'épisode triangulaire ou trapézoïdal, la *localisation temporelle* d'un phénomène (en termes de date de début et de fin) est aussi précise et plus aisée que sur la série de points initiale. Notons que, comme dans la littérature Traitement du Signal (cf. 1.4), *localisation temporelle* ne veut pas dire que l'on considère un seul instant, mais un intervalle temporel borné.

Chaque épisode est un morceau d'oscillation. Si on constitue une évolution en répétant ce morceau d'oscillation, on construit un signal ne contenant qu'une seule fréquence (Fig. 2.30). Ainsi, d'un certain point de vue, il est possible sur n'importe quelle représentation de rattacher une forme de comportement (un type d'épisode) à une fréquence. Ceci caractérise

la possibilité de *localisation fréquentielle*, à savoir la possibilité de considérer une bande de fréquences délimitée pour un épisode.

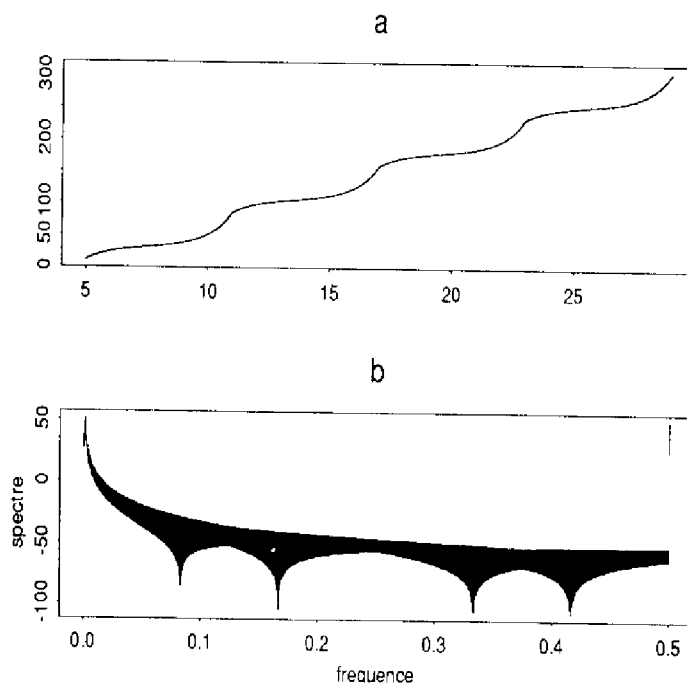


Fig. 2.30 : (a) Une évolution formée par la répétition du même épisode de type *BA*; (b) son spectre de fréquences.

#### *Robustesse vis-à-vis de la représentation initiale*

Le caractère temporellement local précisé ci-dessus a son revers. En effet, par construction, la segmentation et les abstractions successives sont entièrement liées aux points de la série initiale. C'est leur valeur qui sert à déterminer les *dtp*, dont un certain nombre est ensuite conservé jusqu'à la fin (les points séparant les épisodes trapézoïdaux sont toujours des *dtp*). Alors, que l'on prenne une série de points initiale légèrement différente et l'ensemble des représentations sera modifié. Il s'agit là d'un manque de robustesse et d'une sensibilité au bruit pour le moins gênants. Il faut donc connaître jusqu'à quel point les représentations obtenues sont dignes de confiance, et pour cela, il faut évaluer l'influence de la série initiale. Nous prendrons donc différentes séries de points, et nous comparerons ensuite les représentations obtenues.

La modification de la série de points initiale pourra se faire de deux façons :

- par la suppression d'un ou des deux points extrémaux;
- par l'échantillonnage de la série de points initiale à des fréquences différentes : on prendra seulement un point sur deux ou un sur trois, etc. en partant du premier point, ou du second, etc.

Une aide pour la justification d'un choix particulier sera fournie par un outil d'interprétation, appelé "structure des granularités", et présenté au chapitre suivant. Cet outil, combiné à la simple comparaison visuelle des représentations obtenues pour les différentes séries de points initiales, permettra de juger de la confiance que l'on peut avoir dans les représentations obtenues. Ainsi, une certaine mesure de la robustesse sera disponible.

## 2.6 Décomposition de dynamiques imbriquées

Plaçons-nous dans le cas où l'évolution du processus n'est pas affine. Il est toujours possible de considérer que cette évolution est composée de fluctuations "rapides", imbriquées dans des fluctuations "lentes". C'est l'objet de la transformée de Fourier (cf. 1.4.1) que de dissocier ces composantes, en basant la "rapidité" des fluctuations sur leur *fréquence*.

Nous présentons ici une technique purement géométrique permettant une séparation du même type, mais de façon *locale*, le critère de rapidité des fluctuations étant ici leur *durée*. Ainsi, les composantes résultantes ne contiennent pas une fréquence unique mais sont formées d'une séquence de fréquences locales. Néanmoins, chacune de ces composantes imbriquées caractérise d'une certaine manière *une façon de fluctuer* du processus : la plus rapide, et la tendance globale lente sous-tendue.

### 2.6.1 Les évolutions composantes et leur construction

#### *Les évolutions composantes*

La traduction de la notion de rapidité des fluctuations en termes d'épisodes est immédiate : il suffit de considérer que les épisodes trapézoïdaux à l'étape zéro constituent la composante à fluctuation rapide, imbriquée dans une composante à fluctuation plus lente. La première composante est appelée *évolution imbriquée*, la seconde *évolution squelette*. C'est alors en parallèle avec l'abstraction successive de la représentation à l'étape zéro que la décomposition est réalisée.

L'évolution squelette constitue à son tour une série de *points* qui n'est autre qu'un échantillon des *dtp*. Il est possible de la segmenter et de l'abstraire successivement, voire de la décomposer. On disposera alors des représentations à différents niveaux d'abstraction du processus "tendance globale du processus initial". Et ainsi de suite...

#### *Construction*

Pour chaque bloc de trois épisodes trapézoïdaux regroupés en un seul, les constructions suivantes sont effectuées (Fig. 2.31) :

— l'évolution squelette est une trace de la variation d'amplitude globale subie par le processus entre les deux points extrêmes du bloc. On ne conserve donc des trois épisodes que deux ou trois points. Ce sont toujours des points du processus (i.e. de la série initiale);

— l'évolution imbriquée est constituée des trois épisodes du bloc, redressés à l'horizontale. Les points extrêmes de chaque épisode formant le bloc sont donc mis à zéro.

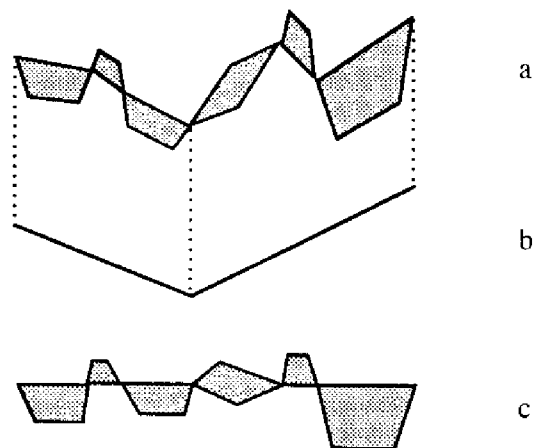


Fig. 2.31 : Décomposition de deux blocs de la représentation à l'étape zéro (a) en trois points de l'évolution squelette (b) et deux blocs de l'évolution imbriquée (c).

Les épisodes de l'évolution imbriquée sont construits par rotation. Les dates sont toutes conservées pour maintenir la forme de chaque type d'épisode trapézoïdal.

Si la construction de l'évolution imbriquée obéit au même principe dans tous les cas de figure possibles, il n'en est pas tout à fait de même pour l'évolution squelette. La figure 2.31 reprend la situation la plus simple où trois épisodes "originaux" (c'est-à-dire déjà présents dans la représentation à l'étape zéro) sont regroupés en un épisode résultant. Mais il peut se produire d'autres cas où les épisodes originaux sont regroupés avec un ou deux épisodes résultant de regroupements antérieurs (pour lesquels il y a déjà des segments de l'évolution squelette). Ce sont les cas où :

- deux épisodes originaux sont regroupés avec un épisode résultant situé à leur droite ou à leur gauche;
- deux épisodes originaux sont regroupés avec un épisode résultant situé entre eux;
- un épisode original est regroupé avec deux résultants à sa droite ou à sa gauche;
- un épisode original est regroupé avec deux résultants à sa droite et à sa gauche.

Dans toutes les situations, la construction de l'évolution squelette est différenciée selon les "tendances globales" exprimées par les épisodes voisins de l'épisode de durée minimale. La tendance globale d'un épisode est donnée par le signe de la différence entre les valeurs

de ses points extrêmes. Si ces tendances sont les mêmes pour les voisins de l'épisode minimal, alors — comme sur la figure 2.31 — seuls les deux points extrêmes du bloc sont conservés. Par contre, lorsque ces tendances globales sont différentes, alors on conserve en plus un des deux points extrêmes de l'épisode de durée minimale. Ceci permet de conserver la rupture de la tendance globale de l'évolution. Les figures 2.32 à 2.35 fournissent quelques exemples de situations possibles et l'évolution squelette correspondante.

Ainsi toutes les tendances globales de l'évolution du processus sont mises en valeur par l'évolution squelette, alors que le reste des fluctuations est traduit par l'évolution imbriquée.

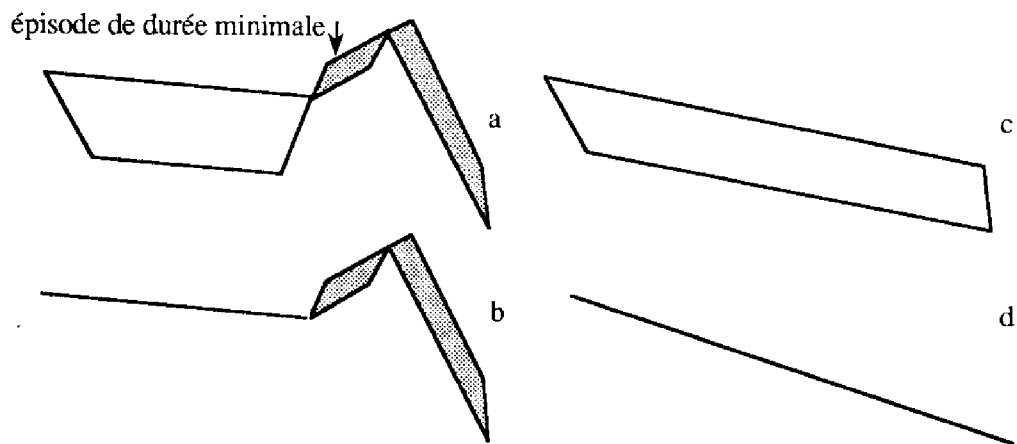


Fig. 2.32 : Construction d'un morceau d'évolution squelette à partir de deux épisodes originaux et d'un épisode résultant situé à leur gauche. Les "tendances globales" de part et d'autre de l'épisode minimal sont décroissantes. (a) Trois épisodes de  $Z^s(X_{t_0}, \dots, t_s)$  à regrouper; les deux épisodes grisés sont originaux, le troisième résulte d'un regroupement à une étape antérieure à  $s$ ; (b) la partie correspondante de l'évolution squelette; (c) épisode de  $Z^{s+1}(X_{t_0}, \dots, t_s)$  résultant du regroupement; (d) la partie correspondante de l'évolution squelette.

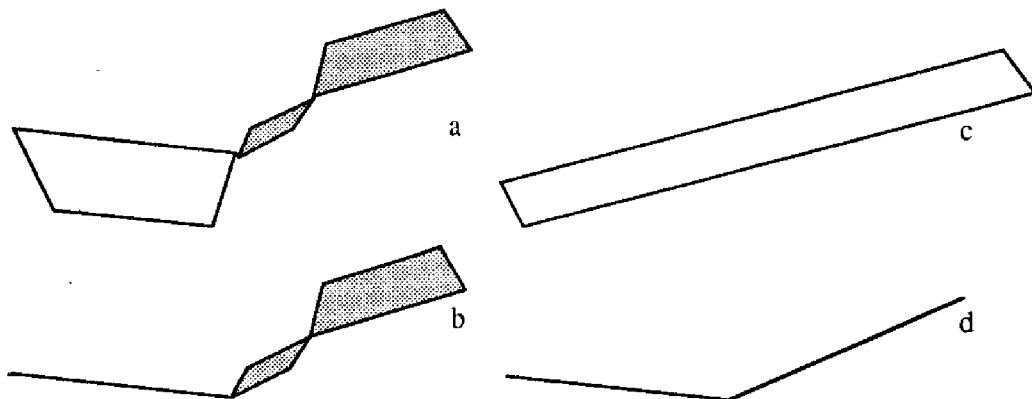


Fig. 2.33 : Construction d'un morceau d'évolution squelette à partir de deux épisodes originaux et d'un épisode résultant situé à leur gauche. Les tendances globales de part et d'autre de l'épisode minimal sont opposées. Le point de début de cet épisode minimal est alors conservé. Les descriptions de a, b, c et d sont les mêmes que pour la figure 2.32.

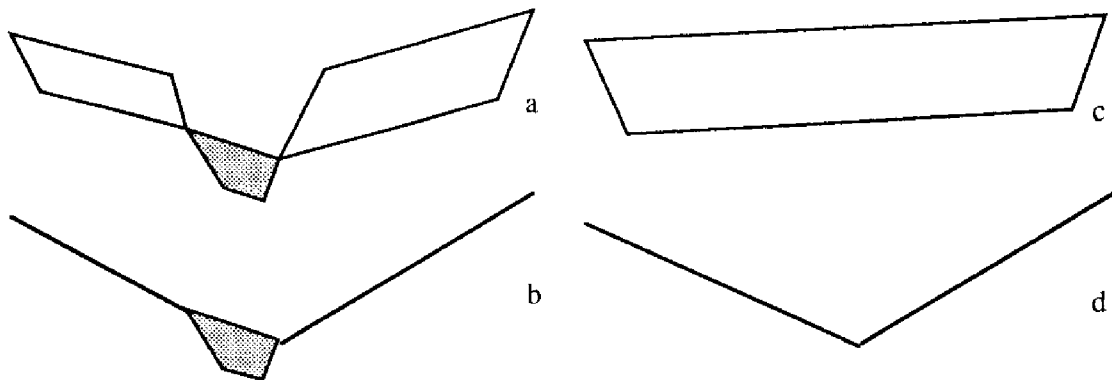


Fig. 2.34 : Construction d'un morceau d'évolution squelette à partir d'un épisode original (grisé) et de deux épisodes résultant de regroupements antérieurs, situés à sa gauche et sa droite, et de tendances globales opposées (non grisés). Les descriptions de a, b, c et d sont les mêmes que pour la figure 2.32.

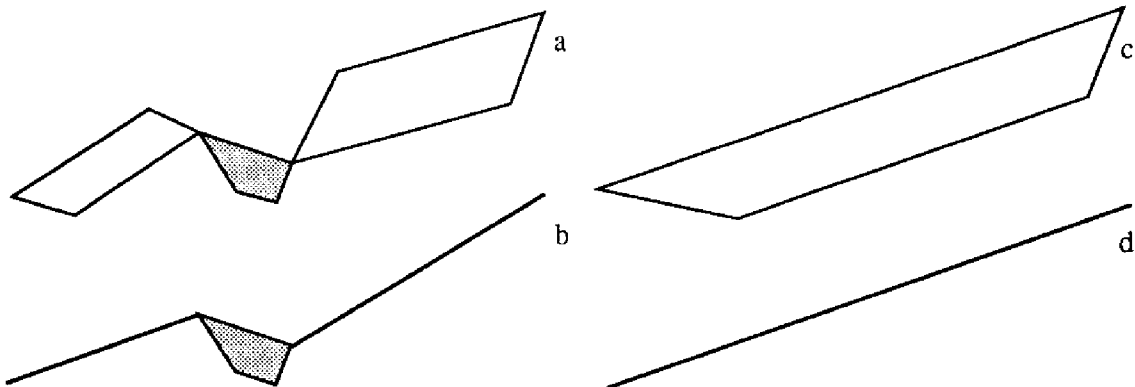


Fig. 2.35 : Construction d'un morceau d'évolution squelette à partir d'un épisode original (grisé) et de deux épisodes résultant de regroupements antérieurs, situés à sa gauche et sa droite, et de tendances globales identiques (non grisés). Les descriptions de a, b, c et d sont les mêmes que pour la figure 2.32.

#### *Remarques sur les constructions réalisées*

Bien qu'elle soit censée retranscrire les variations quantitatives du processus, la construction de l'évolution squelette a ses limites. Elle peut effectivement omettre de saisir un point "quantitativement important" (par exemple un pic). Un telle situation (Fig. 2.36a) se produit si le pic est représenté par un épisode de durée minimale. Il est alors perdu à cause de sa durée trop courte. Il en est de même s'il n'est pas de durée minimale mais voisin d'un épisode de durée minimale (Fig. 2.36b). Ainsi, quelle que soit sa durée, un phénomène quantitativement remarquable représenté par *moins de trois* épisodes trapézoïdaux à l'étape zéro sera éliminé de l'évolution squelette. C'est cette limite de trois épisodes qui sépare les représentations d'une fluctuation "rapide" (imbriquée) et d'une fluctuation "lente" (squelette).

Cette précision doit être gardée en mémoire pour comprendre la non-représentation de points quantitativement importants. Notons néanmoins que divers outils classiques existent pour pallier ce problème de pics... (fonctions splines par exemple).

Quant à l'évolution imbriquée, elle garde la trace de la *variation d'amplitude quantitative* subie par le processus au cours de ses fluctuations "rapides". Mais elle ne peut pas fournir la valeur numérique du processus.

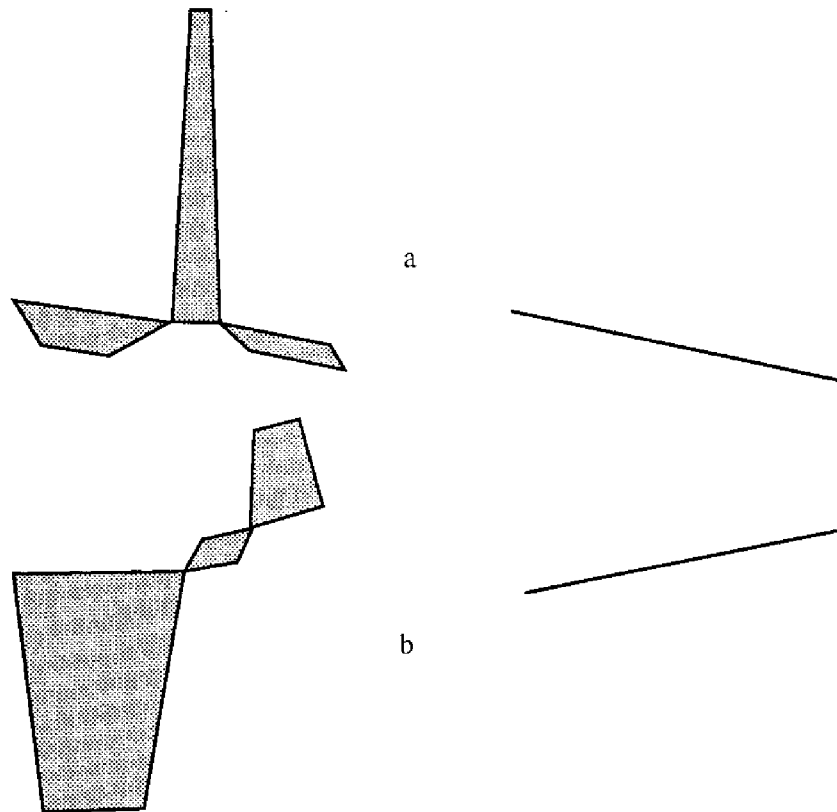


Fig. 2.36 : Deux cas délicats de perte d'information quantitative "importante" dans l'évolution squelette. A gauche figurent deux blocs de la représentation à l'étape zéro. Dans le premier cas (a), l'épisode minimal est perdu à cause de sa durée. Dans le second (b), c'est un épisode non-minimal qui disparaît à cause de son voisinage avec un épisode minimal.

#### *Une notion différente de celle de l'abstraction*

On pourrait se demander pourquoi la représentation trapézoïdale à une étape  $s$  ne peut pas exprimer la même forme d'évolution que l'évolution squelette extraite jusqu'à cette étape.

La première raison en est le fait que le regroupement de trois épisodes en un seul ne tient pas compte des mêmes points que la construction de l'évolution squelette pour ces épisodes. Lors du regroupement, seuls les deux points extrêmes du bloc formé par les trois épisodes sont conservés, éventuellement avec l'avant-dernier point. L'évolution squelette considère un point de l'épisode minimal en plus des deux extrêmes s'il y a changement de direction globale. Par conséquent, des fluctuations autour d'une valeur nulle et les mêmes (en terme d'indice) fluctuations autour d'une moyenne variable (Fig. 2.37) subissent exactement la même procédure d'abstraction mais produisent des évolutions squelette différentes.

La deuxième raison, moins liée au mode de construction (arbitraire donc discutable), est liée au fait que la méthode d'abstraction est basée sur les *dtp* présents dans la série de points initiale. Il n'est pas possible d'y distinguer plusieurs "niveaux" de *dtp*, chacun d'eux étant relié à une évolution composante (Fig. 2.38).

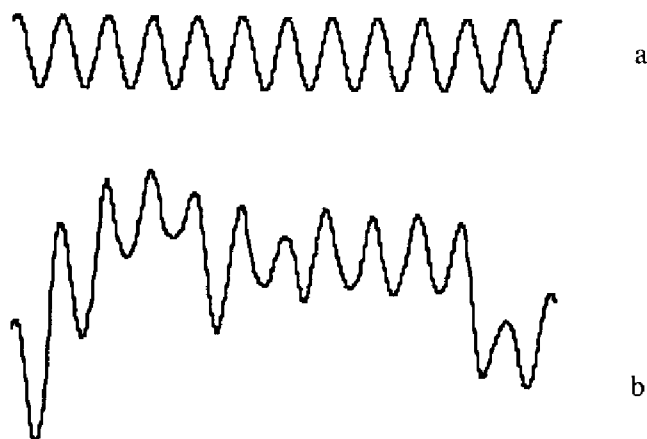


Fig. 2.37 : Analyse de sinusoides : (a) une évolution dont la valeur moyenne est nulle; (b) une sinusoides exhibant les mêmes fluctuations avec une valeur moyenne variable. Les deux représentations trapézoïdales à l'étape zéro auront le même nombre d'épisodes trapézoïdaux, et ces épisodes seront de même durée. La procédure d'abstraction se fera donc de la même façon.

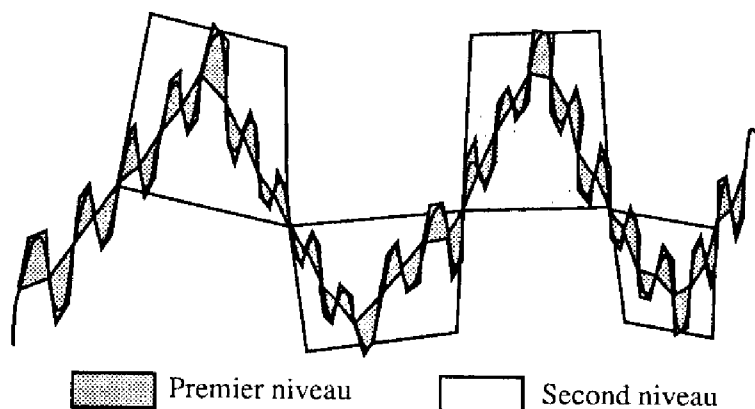


Fig. 2.38 : L'impossible distinction *a priori* entre deux niveaux de *dtp*, ou entre les deux niveaux d'épisodes trapézoïdaux correspondants. Le premier niveau est le seul pris en considération; le second apparaît lorsque l'on construit la représentation trapézoïdale de l'évolution squelette. C'est ce second niveau qui exprime la même forme d'évolution que l'évolution squelette, alors que l'abstraction complète du premier niveau conduirait à une croissance globale de type BA.

## 2.6.2 Comparaison avec Fourier, le filtrage et les ondelettes

### *Fourier*

Contrairement aux composantes obtenues par une décomposition de Fourier (cf. 1.4.1), les évolutions imbriquée et squelette ne comprennent pas une seule fréquence mais doivent être vues comme une succession de fréquences locales indépendantes (d'où d'ailleurs le fait qu'il n'y ait que deux évolutions composantes). Elles permettent de saisir les "irrégularités"



du processus — variation brutale, différence de fluctuation sur une partie du domaine, etc. — en en séparant la variation d'amplitude pure de la tendance générale, c'est à dire la fréquence la plus haute de toutes les autres.

### Filtrage

On peut voir l'évolution imbriquée comme la composante la plus fluctuante *filtrée* de la représentation à l'étape zéro. Il faut alors relier cette composante au résultat de l'application d'un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure serait juste inférieure à la fréquence "exprimée" par le dernier épisode original regroupé avec deux autres : une fois cet épisode disparu, tous les épisodes de la représentation à l'étape zéro ont disparu et l'évolution imbriquée est terminée (Fig. 2.39).

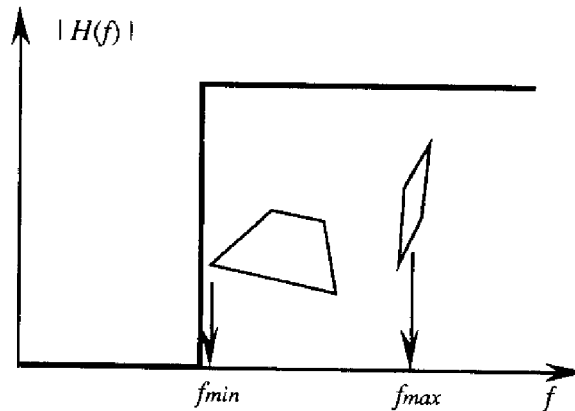


Fig. 2.39 : Un filtre (idéal) passe-haut de fonction de transfert  $|H(f)|$  permettant d'obtenir l'évolution imbriquée. La fréquence est notée  $f$ . L'épisode se référant à la fréquence  $f_{min}$  est le dernier de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro à être regroupé avec deux autres. Celui qui est relié à la fréquence  $f_{max}$  est le premier épisode de cette représentation à disparaître.

L'évolution squelette peut inversement être comparée au résultat d'un lissage, ou d'un filtrage de type passe-bas par un filtre dont la fréquence de coupure est juste inférieure à la fréquence "exprimée" par le dernier épisode original regroupé avec deux autres (Fig. 2.40).

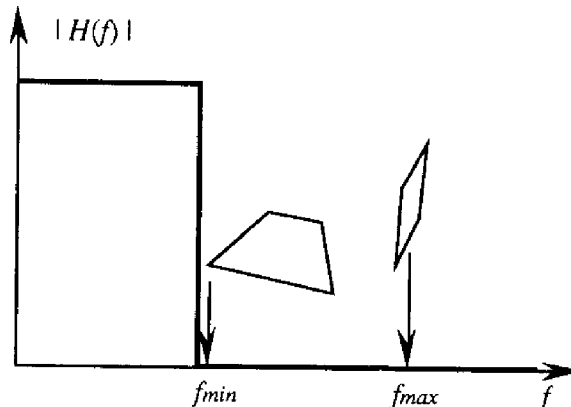


Fig. 2.40 : Un filtre (idéal) passe-bas permettant d'obtenir l'évolution squelette.

Cependant, un obstacle majeur s'élève à la réalisation du filtre passe-bas : la tendance globale représentée par l'évolution squelette peut très bien exprimer localement une fréquence supérieure à la fréquence "minimale"  $f_{min}$ . Alors, elle sera éliminée par le filtre, ce que l'on ne désire évidemment pas. De même, le filtre passe-haut conserve cette tendance globale, alors qu'on veut l'éliminer ! Tout ceci est dû au caractère *temporellement global* des filtres, incapables de modifier leur fréquence de coupure selon la durée des épisodes à filtrer, c'est à dire selon l'intervalle du domaine traité. Notre technique de décomposition réalise par contre automatiquement cette distinction.

Différents lisseurs et filtres linéaires seront présentés et testés au chapitre 4 sur un processus à fluctuations irrégulières tiré d'un modèle écologique.

### *Ondelettes*

La localité à la fois temporelle et fréquentielle que le filtrage fréquentiel ne peut intégrer est par contre le principal intérêt des ondelettes (cf. 1.4.4). On peut alors rapprocher de nos travaux certaines propriétés des ondelettes.

D'abord, nos épisodes trapézoïdaux peuvent être reliés aux *atomes* temps-fréquence résultant de la décomposition en ondelettes. Un atome est une fonction à partir de laquelle on peut construire n'importe quelle autre fonction, d'amplitude ou de support temporel variable. De même, chaque type d'épisode peut être vu comme un atome, ou une "forme de base" : il peut être dilaté, tourné, est localisé en temps et en fréquence (cf. 2.5.2 et Annexe II). A l'étape zéro, un type *BD* (par exemple), quelles que soient son amplitude et sa durée, conserve les mêmes caractéristiques : un extremum, pas de point d'inflexion, comportement sous-jacent identique, délimitation de la fréquence. A une étape ultérieure, l'interprétation comportementale est la même; en considérant que l'épisode est de la même *forme*, on sous-entend que l'épisode contient toujours un extremum et pas de point d'inflexion (c'est une représentation du processus qui contient moins de *dtp* que la représentation "réelle", i.e. à l'étape zéro). On conserve également la localisation fréquentielle, mais avec une bande de fréquence plus basse. Ceci correspond donc à la dilatation d'une ondelette-mère.

A partir de la notion de localisation temporelle et fréquentielle, l'analyse multi-résolution par les ondelettes consiste à faire varier la fenêtre temporelle ou la largeur de la bande de fréquence de l'ondelette-mère à volonté. En réalisant l'abstraction des représentations trapézoïdales, on effectue des changements d'échelle temporelle, mais on reste à une seule fréquence pour chaque épisode. En parallèle, la décomposition des dynamiques imbriquées propose une décomposition fréquentielle. Les deux aspects sont donc traités.

La décomposition en ondelettes produit de façon récursive une séparation du signal en deux parties : une lisse, et une représentant les détails. La partie lisse est elle-même

décomposée en une partie plus lisse et une partie figurant les détails. Le lissage fait perdre en résolution temporelle et gagner en résolution fréquentielle (le principe d'incertitude d'Heisenberg est respecté). Notre décomposition fait un peu de même : l'évolution squelette est un premier niveau de lissage de l'évolution initiale, l'évolution imbriquée un premier niveau de détail. En traitant à son tour la série de points formant l'évolution squelette, on en extrait une nouvelle évolution squelette donnant un second niveau de lissage, et une nouvelle évolution imbriquée retenant un second niveau de détail.

Il reste que la localisation fréquentielle ne peut pas être aussi bonne qu'avec une ondelette, puisqu'on n'a qu'un morceau d'oscillation non périodique. Pour ce qui est de la localisation temporelle par contre, elle est assez efficace pour appréhender les discontinuités de la tendance globale lissée (comme on le verra sur l'exemple de la partie 4.3), chose que ne peuvent pas réaliser les filtres / lisseurs les plus courants.

### 2.6.3 Intérêt et utilisation

Nous avons vu lors de la construction que l'évolution squelette conservait une trace de certains points du processus, en particulier des points de changement de direction de la tendance globale. En plus, la décomposition des dynamiques imbriquées est utilisée pour plusieurs tâches interprétatives :

— Elle permet de mettre en évidence des influences entre les rythmes de fluctuation de différents processus. Soient  $X_{t_0, \dots, t_n}$  et  $Y_{t'_0, \dots, t'_n}$  deux de ces processus. On ne traite qu'un processus à la fois ( $X_{t_0, \dots, t_n}$  par exemple); chacune de ses composantes est placée en regard de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro de  $Y_{t'_0, \dots, t'_n}$ . Sur une partie déterminable du domaine, on met en évidence l'influence de  $Y_{t'_0, \dots, t'_n}$  sur  $X_{t_0, \dots, t_n}$  lorsque la *vitesse de fluctuation* de  $Y_{t'_0, \dots, t'_n}$  s'avère proche de celle d'une composante de  $X_{t_0, \dots, t_n}$  (nous verrons au paragraphe 3.2.3 comment caractériser simplement la vitesse de fluctuation locale de deux processus).

— On peut également déterminer avec précision la limite de durée (d'épisode) représentée entre les composantes fréquentielles. Il s'agit de la durée du dernier épisode original à être abstrait avec ses voisins. Après cette abstraction, la représentation trapézoïdale est à un niveau de détail auquel aucune fluctuation rapide n'est plus présente. Il s'agit donc également du niveau de détail de l'évolution squelette. Celui de l'évolution imbriquée est quant à lui le même que celui de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro.

— Enfin, et c'est évident, la décomposition des dynamiques imbriquées peut viser à éliminer le bruit, si les fluctuations haute-fréquence sont considérées comme parasites.

C'est notamment un des terrains d'application favoris de la décomposition en ondelettes (cf. 1.4.4).

Un exemple d'utilisation sera développé au chapitre 4, accompagné d'une comparaison avec les techniques classiques visant à atteindre les mêmes buts.

## 2.7 Conclusion

Nous disposons maintenant d'un ensemble de représentations d'un même processus. A partir de la représentation par points, une segmentation en épisodes a produit la représentation triangulaire. En rassemblant les triangles en trapèzes, la représentation trapézoïdale à l'étape zéro a ensuite été établie. Le regroupement successif d'épisodes selon leur durée permet enfin d'effectuer une abstraction temporelle automatique de l'évolution du processus. Les différents niveaux d'abstraction, et la représentation du processus à chacun de ces niveaux, sont issus de cette méthode.

En complément, la décomposition des dynamiques imbriquées permet de séparer les fluctuations les plus rapides du reste des fluctuations. Elle se démarque en cela des techniques habituelles de lissage ou de filtrage fréquentiel, pour se rapprocher de la décomposition en ondelettes. Nous compléterons l'évaluation de cette décomposition avec un exemple, dans le chapitre 4.

Il nous faut maintenant montrer qu'à l'aide de ces représentations, il est possible de relier un phénomène comportemental "intéressant" pour l'utilisateur à un niveau d'abstraction. Pour cela, le simple aspect visuel des épisodes dans une représentation est déjà instructif. Cependant, on a mis en évidence la sensibilité du traitement à la série de points initiale. Pour pouvoir acquérir une certaine confiance dans les représentations et les informations que l'on en tire, il faut tester différentes séries de points et comparer les représentations elles-mêmes, mais surtout la façon dont elles sont petit à petit abstraites. Si malgré le fait que l'on change la série initiale, les représentations à niveau d'abstraction comparable restent ou deviennent proches (en nombre d'épisodes, en dates des *dtp* conservés, etc.), alors il y a tout lieu de penser que les informations retirées des représentations sont fiables. Si l'on change la série initiale en modifiant la fréquence d'échantillonnage du processus, alors on peut en plus établir un lien entre cette fréquence d'échantillonnage et les informations comportementales tirées des représentations. Ainsi on saura que pour observer tel comportement, il suffit de conserver seulement tant de points de la série initiale.

Un outil doit donc être défini pour permettre la comparaison de deux ensembles de représentations du même processus, abstraites du début à la fin. On ne s'attachera qu'aux dates des *dtp*, témoignant de la manière dont l'abstraction se déroule.

L'interprétation comportementale visuelle des représentations abstraites se heurte néanmoins à certaines limites : d'une part, on peut mal distinguer le nombre et la forme des épisodes, d'autre part on n'a pas d'information sur les caractéristiques générales des épisodes dans la représentation.

Pour combler la première lacune, un outil construit à partir des types symboliques des épisodes devra permettre de détecter automatiquement des comportements selon leur forme, c'est-à-dire selon le type des épisodes qui les composent. Les interprétations issues de cet outil seront temporellement locales et extraites à chaque niveau d'abstraction.

Inversement, divers spectres d'épisodes caractériseront de manière plus générale (sans localisation temporelle) les comportements présents dans chaque représentation, en étudiant la distribution statistique des épisodes (nombre, forme, durée ou variation d'amplitude majoritaire).

Ces trois outils seront complémentaires et devront être combinés pour relier efficacement un phénomène comportemental (global ou local) "intéressant" pour l'utilisateur à un niveau de détail de la représentation et à une fréquence d'échantillonnage. Ainsi le choix de ce niveau de détail sera justifié par l'intérêt de l'utilisateur *et* par les fluctuations du processus quelles qu'elles soient, et nous aurons atteint notre objectif.

# **Chapitre 3**

## **Outils d'interprétation**

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un certain nombre d'outils d'interprétation automatique basés sur les épisodes géométriques. Certains sont implémentés et leur utilité sera démontrée au chapitre suivant sur quelques exemples. D'autres sont des pistes possibles que nous n'avons pas testées "en situation réelle", mais sont dotés d'une capacité expressive potentielle.

Dans un premier temps, le vocabulaire courant utilisé pour décrire la "vitesse" ou "l'échelle de temps" d'un processus dynamique est traduit en termes de granularité temporelle et adapté à la représentation par épisodes. Ceci met en évidence la capacité descriptive de la notion de granularité.

Un premier outil graphique est ensuite défini : la *structure des granularités*. Regroupant l'ensemble des représentations trapézoïdales obtenues par l'abstraction successive, elle permet d'observer la façon dont la procédure d'abstraction elle-même s'est déroulée. Selon son aspect, une régularité (temporellement locale) des fluctuations peut être établie, auquel cas on aura tout intérêt à décomposer les dynamiques imbriquées (cf. 2.6). C'est également à partir de la structure des granularités que nous formulons des règles de décision pour le choix d'une granularité minimale. En particulier, ce choix dépend de la confiance que l'on peut avoir dans les représentations (cf. 2.5.2). Par la comparaison de structures construites (pour le même processus) à partir de différentes séries de points initiales, on peut évaluer la robustesse de la procédure d'abstraction.

Pour dépister une granularité minimale "intéressante", l'utilisateur a à sa disposition deux classes d'outils complémentaires. La première permet d'étudier une représentation en se focalisant sur des caractéristiques *locales dans le temps*. Quelques idées sont proposées pour l'analyse et la comparaison d'épisodes pris individuellement. Plus utilisée, la détection de comportements symboliques particuliers (codés à l'aide d'une séquence de types) est effectuée : les comportements oscillatoires, périodiques, récurrents, etc. sont traduits en séquences de symboles et recherchés par "mise en correspondance de motifs" (en anglais : "pattern-matching") dans une *chaîne symbolique* décrivant la forme du processus.

La deuxième classe d'outils est de nature à produire des informations globales (non datées) sur le comportement du processus. Plusieurs *spectres d'épisodes* sont construits dans ce but; leur interprétation conduit à cerner statistiquement le comportement du processus en se focalisant sur sa forme, ses caractéristiques de durée ou ses variations d'amplitude.

Rendons une fois encore à César ce qui lui revient, une "structure qualitative des échelles", ainsi qu'un "spectre qualitatif des échelles" apparaissaient déjà dans les travaux de Cheung & Stephanopoulos [CHE90b]. Les auteurs introduisaient ces outils uniquement dans un but de *représentation*, sans qu'un quelconque *raisonnement* y soit attaché. Nous

essayons, pour notre part, d'en établir l'utilité pour la détermination de caractéristiques comportementales intéressantes. A partir de là, nous démontrons qu'ils peuvent intervenir dans la sélection de granularités minimales pertinentes et dans l'aide à la modélisation/simulation. Ces outils sont présentés et appliqués dans [AYR95a], et un peu plus détaillés dans [AYR95b].

### 3.2 Granularité, échelle et vitesse

*Vitesse et échelle de temps* sont des termes constamment présents dans la littérature liée à l'abstraction temporelle de processus dynamiques. Nous avons en effet relevé l'utilisation de comparatifs tels que "plus rapide" ou "plus lent" dans la description de la dynamique des processus. Cependant, ces processus étaient chaque fois :

- comparables à des systèmes du premier ordre (avec atteinte d'un équilibre au bout d'un certain temps fixant l'échelle);
- ou bien périodiques (avec une période constante et distinguable en ordre de grandeur déterminant l'échelle de temps);
- ou encore indéfiniment variables avec la même tendance et ainsi considérés comme "plus lents" que les autres (type "dérive lente").

Nous avons fait plusieurs reproches au sujet du manque de souplesse inhérent à la distinction par ordres de grandeur. De même, comment retrouver l'idée intuitive d'échelle de temps pour un phénomène qui fluctue beaucoup sur une portion du domaine, puis devient quasi-stable sur la suivante, pour ensuite recommencer à osciller ? Comment lui attribuer une vitesse, comparable à la vitesse des autres processus agissant sur le même système, évoluant différemment, échantillonnés à des fréquences et sur des domaines différents et plus ou moins abstraits ?

La notion de granularité temporelle que nous avons définie et mise en œuvre au chapitre précédent (cf. 2.2) permet de caractériser et de raisonner *objectivement* sur plusieurs processus. Essayons de formaliser à partir d'elle les notions fondamentales mais vagues d'échelle de temps et de vitesse.

#### 3.2.1 Calculs et significations de la granularité

Sur un domaine temporel déterminé, la granularité d'un intervalle mesure un niveau de détail temporellement *local*. Nous n'avons jusqu'à présent précisé la valeur des granularités que pour une série de points, par exemple la série de points initiale (cf. 2.2.1). Elles font alors intervenir la durée séparant deux points consécutifs. Pour constituer de la même façon



une mesure du niveau de détail local dans les représentations triangulaire et trapézoïdales, les granularités font maintenant intervenir la *durée des épisodes*.

Par abus de langage, on parlera de la *granularité d'un épisode* pour désigner la granularité de l'intervalle couvert par cet épisode. La granularité d'un épisode  $T(X, t_i)$  est notée  $G_i$ . Celle d'un épisode  $Z(X, t_i)$  appartenant à la représentation à l'étape  $s$  est notée  $G_i^{(s)}$ . Nous avons ainsi :

$$\forall T(X, t_i) \in T(X_{t_0, \dots, t_n}), G(T(X, t_i)) = G_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{|\Delta|}, \text{ et}$$

$$\forall Z(X, t_i) \in Z^s(X_{t_0, \dots, t_n}), G(Z(X, t_i)) = G_i^{(s)} = \frac{t_{i+1} - t_i}{|\Delta|},$$

où, pour mémoire,  $\Delta$  est le domaine temporel sur lequel le processus est analysé, et  $t_{i+1}$  est l'instant de fin de l'épisode débutant à  $t_i$ .

Dans la représentation triangulaire, et par construction, une granularité est au moins égale à la moitié de la granularité minimale initiale (la granularité de l'intervalle le plus court de la série de points initiale). En effet, l'affinement maximal d'un intervalle entre deux points consécutifs conduit à créer deux triangles dans cet intervalle (cf. Fig. 2.15 par exemple).

Dans une représentation trapézoïdale, une granularité est au moins égale à la granularité minimale initiale, puisqu'un épisode trapézoïdal groupe deux épisodes triangulaires.

La *granularité minimale d'une représentation trapézoïdale* désignera la plus petite granularité d'un épisode de cette représentation. A chaque étape d'abstraction  $s$ , cette granularité minimale fixe le niveau de détail *global* de la représentation. On la note  $G^{(s)}$ . Ce sont les épisodes ayant cette granularité qui sont abstraits pour obtenir la représentation à l'étape  $s+1$ .

Il est donc intéressant de noter que la granularité minimale de la représentation trapézoïdale à l'étape zéro est *au moins égale* à la granularité minimale de départ. Si un affinement entre les deux points les plus proches de la série initiale a été effectué, la représentation trapézoïdale à l'étape zéro aura une granularité minimale égale. L'étape zéro de l'abstraction récursive est alors une représentation du processus au même niveau de détail que la série initiale.

La granularité d'un épisode résultant d'un regroupement d'épisodes est égale à la somme des granularités de chacun des épisodes ayant servi à le construire. L'abstraction successive modifie donc la séquence des granularités présentes dans chaque représentation. Cette modification peut être représentée sous la forme d'une arborescence (Fig. 3.1). La somme des granularités à chaque étape de l'abstraction est constante et vaut 1 si tous les épisodes triangulaires ont été inclus dans un épisode trapézoïdal lors de la construction de  $Z^0(X_{t_0, \dots, t_n})$ .

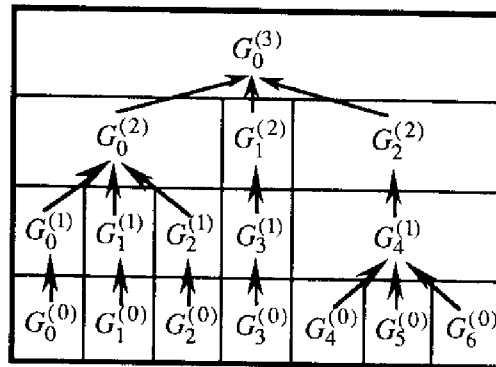


Fig. 3.1 : Exemple d'arborescence constituée par les granularités des épisodes trapézoïdaux au cours de l'abstraction successive du processus de la figure 2.9. La granularité d'un épisode résultant d'un regroupement de trois épisodes est égale à la somme des trois granularités correspondantes.

### 3.2.2 Correspondance avec la notion d'échelle de temps

On entend communément par "échelle de temps de représentation" *la durée sur laquelle les variations locales d'un phénomène sont correctement représentées* (cf. 1.1). Par exemple, une représentation sera "à échelle fine" si elle laisse apparaître des "petites" variations locales.

La définition de la granularité du processus représenté par une série de points (cf. 2.2.1) ne permettait pas de délimiter aisément une variation locale dans le temps. Maintenant, nous disposons avec les épisodes d'une base de représentation temporellement précise. En considérant qu'il y a variation locale lorsqu'il y a changement de comportement du processus (changement de tendance ou de courbure), l'échelle de temps correspond à la durée minimale d'un épisode trapézoïdal (ou de deux épisodes triangulaires consécutifs). Pour une représentation trapézoïdale à l'étape  $s$ , l'échelle de temps est donc donnée par le produit  $|\Delta| \cdot G^{(s)}$ .

### 3.2.3 Expression de la vitesse : vitesses moyennes et indice de fluctuation

On ne peut à notre sens comparer la vitesse d'évolution de deux grandeurs que si elles sont exprimées dans la même unité. Lorsque la comparaison des évolutions de deux processus  $X(t_0, \dots, t_n)$  et  $Y(t_0, \dots, t_m)$  exprimés avec une unité différente engendre une conclusion "X est plus rapide que Y", cela doit-il vouloir dire que X arrive à l'équilibre en un temps plus court que Y ? Ou bien que X fluctue plus vite que Y ? Ou encore que X augmente plus vite que Y ? Il apparaît donc nécessaire de raisonner sur une notion sans dimension, comme la granularité.

A l'aide des représentations triangulaire ou trapézoïdales, nous pouvons définir plusieurs types de vitesse.

*Vitesse moyenne d'accroissement sur un épisode*

$$\forall T(X, t_i) \in T(X_{t_0, \dots, t_n}), V_{T(X, t_i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{[t_i, t_{i+1}[}$$

$$\forall Z(X, t_i) \in Z(X_{t_0, \dots, t_n}), V_{Z(X, t_i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{[t_i, t_{i+1}[}$$

Il s'agit simplement de la pente du segment joignant les points extrêmes d'un épisode. Elle ne donne aucun renseignement sur la façon dont le processus change de valeur dans l'épisode, mais simplement le temps qui lui est nécessaire pour subir cette variation d'amplitude. Cette vitesse moyenne d'accroissement peut être étendue sur un intervalle quelconque ce qui conduit à définir une vitesse moyenne d'accroissement sur un intervalle :

*Vitesse moyenne d'accroissement sur un intervalle*

$$\forall [t_i, t_j] \subseteq \Delta, V_{[t_i, t_j]} = \frac{x_j - x_i}{t_j - t_i} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{[t_i, t_j]}$$

*Indice de fluctuation*

En pratique, c'est celui dont nous nous servons le plus souvent pour caractériser la "rapidité" des fluctuations. Il est évalué sur un intervalle comportant au moins deux épisodes :

$$\forall T(X, t_i), T(X, t_j) \text{ ou } Z(X, t_i), Z(X, t_j) \text{ tels que } t_j > t_{i+1},$$

$$FI_{[t_i, t_j]}^X = \frac{j-i}{t_j - t_i} = \frac{\text{nombre d'épisodes dans } [t_i, t_j]}{\text{durée de } [t_i, t_j]}$$

Cet indice est exprimé en nombre d'épisodes par unité de temps. Il s'agit d'une dimension commune à n'importe quel processus, autorisant dès lors les comparaisons. Notons cependant qu'on doit comparer deux représentations triangulaires ou deux représentations trapézoïdales, et non pas une représentation triangulaire et une trapézoïdale.

L'utilisation la plus courante de cet indice est la comparaison des vitesses de fluctuation de plusieurs processus, sur un même intervalle ou sur des intervalles différents. Une hiérarchie d'indices de fluctuation peut être établie. Par exemple (Fig. 3.2), avec les représentations triangulaires de trois processus  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sur un même intervalle  $[t_i, t_j]$ , on a :

$$FI_{[t_i, t_j]}^X = \frac{12}{t_j - t_i}; \quad FI_{[t_i, t_j]}^Y = \frac{4}{t_j - t_i}; \quad FI_{[t_i, t_j]}^Z = \frac{2}{t_j - t_i}.$$

Sur cet intervalle,  $X$  fluctue plus vite que  $Y$ , qui fluctue lui-même plus vite que  $Z$ . Notons qu'un épisode de  $Z$  est plus court que les épisodes de  $Y$ . Sur l'intervalle couvert par cet épisode, la hiérarchie aurait été différente.

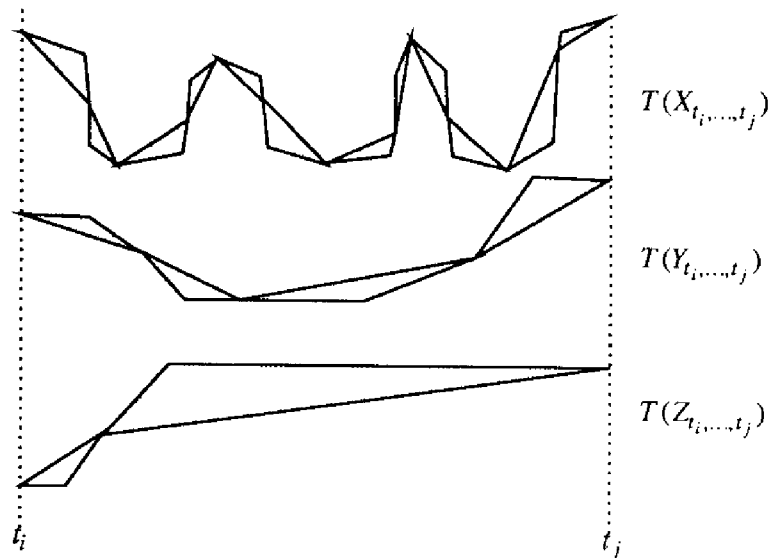


Fig. 3.2 : Trois processus  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  pouvant être hiérarchisés selon leur indice de fluctuation sur  $[t_i, t_j]$ .

Par conséquent, les évolutions n'ont pas besoin d'être du même type (périodiques, etc.) pour pouvoir être ordonnées selon leur indice de fluctuation. Les mécanismes "rapides" selon Kuipers [KUI87] ou Rickel & Porter [RICK94] sont ainsi des processus à *fluctuation plus rapide* que les mécanismes dénommés "lents". L'amplitude de la variation  $\Delta x$ , qui apparaît dans la définition courante de la vitesse ( $\Delta x / \Delta t$ ), n'est plus prise en compte. Il est également inutile d'imposer des conditions telles que "ce mécanisme s'achève avant que l'autre n'ait pu varier significativement", condition évoquée par exemple chez Kuipers.

L'indice de fluctuation est utilisé pour comparer les fluctuations de deux processus distincts, mais également sur deux intervalles de la même représentation. Par exemple : "X fluctue plus vite entre  $t = 30$  et  $t = 60$  jours (mois de Juin de l'année  $a$ ) qu'entre  $t = 395$  et  $t = 425$  jours (mois de Juin de l'année  $a+1$ )".

Egalement, deux représentations trapézoïdales du même processus peuvent ainsi être comparées. On dispose dans ce dernier cas d'une mesure de la "perte en fluctuations" au cours de l'abstraction. Par exemple, en supposant un domaine de 1000 jours : " $FI_{[50,150]} = 0.28 \text{ épisodes} \cdot j^{-1}$  à  $G^{(3)} = 0.007$  et  $FI_{[50,150]} = 0.06 \text{ épisodes} \cdot j^{-1}$  à  $G^{(4)} = 0.014$ " mesure une perte de (la représentation de) près de 80% des fluctuations sur le même intervalle, par le passage de la granularité minimale 7 jours/1000 à 14 jours/1000, c'est-à-dire de l'échelle d'une semaine à l'échelle de 2 semaines.

### 3.3 La structure des granularités

#### 3.3.1 Généralités

La structure des granularités (Fig. 3.3a) est un diagramme regroupant toutes les représentations trapézoïdales d'un processus (Fig. 3.3b). Elle ne fait pas apparaître les *valeurs numériques* du processus représenté par des séquences de trapèzes, mais seulement les *dates* des points extrêmes de ces trapèzes. Ainsi, seules les caractéristiques temporelles des représentations sont décrites et étudiées. La forme des comportements est ici laissée de côté; elle sera étudiée dans la section suivante à l'aide des chaînes symboliques (3.4).

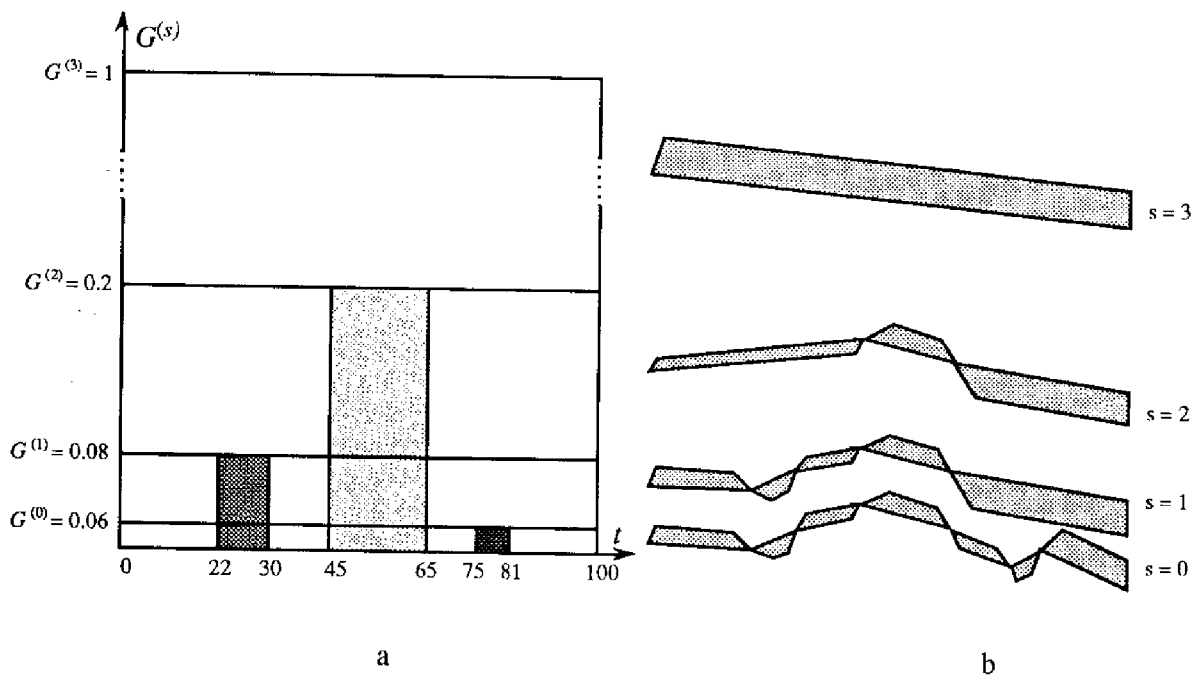


Fig. 3.3 : (a) Un exemple de structure des granularités (ordonnées : granularité minimale à l'étape  $s$ ; abscisses : dates des points extrêmes des trapèzes); (b) les représentations trapézoïdales correspondantes de  $s=0$  à  $s=3$ , obtenues à partir de la série de points initiale donnée figure 2.9. Sur un domaine  $\Delta = 100$ , ce processus peut être représenté à quatre granularités minimales différentes, selon la durée de l'épisode minimal.

Nous avons mis en évidence le manque de robustesse des représentations trapézoïdales vis-à-vis de la série de points initiale (cf. 2.5.2). La structure des granularités est une base simple de comparaison des représentations obtenues à partir de deux séries de points initiales différentes. Cette comparaison permet d'évaluer l'impact du choix de la fréquence d'échantillonnage du processus (qui produit la série de points initiale) sur l'aspect des représentations. Une stratégie en découle qui vise à aider l'utilisateur à trouver la ou les "bonnes" fréquences d'échantillonnage et granularités minimales pour l'observation de phénomènes qu'il estime intéressants.

La deuxième utilisation de la structure est la détection de phénomènes locaux “réguliers”, c’est-à-dire faisant intervenir des fluctuations de fréquence (à peu près) constante. La localisation temporelle de tels phénomènes justifie une décomposition de dynamiques imbriquées (cf. 2.6) car elle assure à cette décomposition un résultat comportementalement remarquable.

### 3.3.2 Construction et lecture de la structure des granularités

En abscisse sont inscrites les dates des points extrêmes de chaque épisode de la représentation trapézoïdale à l’étape zéro  $Z^0(X_{t_0, \dots, t_n})$ . L’axe des ordonnées porte les granularités minimales à chaque étape  $G^{(s)}$ .

La représentation d’un processus à une granularité minimale quelconque  $G$  est accessible avec sa structure :  $Z^s(X_{t_0, \dots, t_n})$  représente le processus à toute granularité minimale appartenant à l’intervalle  $]G^{(s-1)}, G^{(s)}]$ . Par exemple, à partir de la structure des granularités de la figure 3.3a, on peut dire que la représentation du processus à la granularité minimale arbitraire  $G = 0.1$ , comprise entre  $G^{(1)} = 0.08$  et  $G^{(2)} = 0.2$ , est  $Z^2(X_{t_0, \dots, t_n})$ , et est formée de trois épisodes.

Un déplacement vers le haut de la structure correspond à une abstraction de la représentation, un déplacement vers le bas à un affinement.

### 3.3.3 Aide à la décision pour le choix de la fréquence d’échantillonnage du processus

Nous nous plaçons dans le cas général où la série de points initiale est obtenue à partir du processus continu en y appliquant une certaine fréquence d’échantillonnage (initiale). Si cette fréquence d’échantillonnage est variable sur le domaine, elle est maximale là où la durée séparant deux instants consécutifs est la plus courte.

#### *Règles de décision*

Nous émettons d’abord l’hypothèse selon laquelle l’utilisateur a une bonne idée de la granularité minimale  $G$  qui lui convient. Il cherche alors à en déduire la fréquence d’échantillonnage minimale du processus étudié. Dans le cadre d’une simulation, cette fréquence le conduira à choisir un pas de simulation le plus grand possible en ayant le niveau de détail auquel il veut obtenir les fluctuations du processus; dans le cadre d’une prise de mesures, il pourra connaître la fréquence minimale à laquelle ces mesures doivent être récoltées.

La structure fournit des indications sur la pertinence de la fréquence d’échantillonnage initiale en faisant le lien avec le niveau de détail désiré. Trois situations peuvent se produire :

— si  $G < G^{(0)}$ , même la représentation la plus fine est trop grossière. Il faut alors augmenter la valeur maximale de la fréquence d'échantillonnage initiale (diminuer le pas minimal de simulation ou de mesure);

— si  $G > G^{(dernière\ étape)}$ , alors la représentation la plus abstraite est à considérer. Le processus est représenté par un ou deux épisodes, ce qui est sujet à discussion comme nous l'avons déjà signalé (cf. 2.5.1).

— dans le cas général,  $G$  se situe entre deux granularités minimales  $G^{(s-1)}$  et  $G^{(s)}$ . Une démarche possible est alors d'échantillonner à nouveau le processus continu (nouvelle simulation ou nouvelle prise de mesures) avec une nouvelle fréquence maximale plus faible que l'initiale, et correspondant à  $G^{(s-1)}$ . Plus simplement, on peut aussi ré-échantillonner à fréquence constante la série de points initiale, de façon à se ramener à une nouvelle fréquence d'échantillonnage maximale correspondant à  $G^{(s-1)}$ . Par exemple, pour se ramener à une granularité minimale  $G^{(s-1)} = 3G^{(0)}$ , il suffira de prendre un point sur trois dans la série de points initiale. La nouvelle fréquence d'échantillonnage est alors égale au produit de la fréquence initiale par la fréquence de ré-échantillonnage (qui vaut 1/3 ici).

Le résultat est une nouvelle série de points initiale. L'influence de la nouvelle fréquence d'échantillonnage sur l'allure des représentations doit évidemment être examinée afin de justifier ou d'infirmer le choix de cette fréquence. La procédure de segmentation et d'abstraction successive est donc exécutée sur la nouvelle série de points, et la nouvelle structure est dessinée.

Si cette structure est semblable à la première, cela veut dire que le fait de changer la fréquence d'échantillonnage n'a pas modifié profondément les caractéristiques temporelles des représentations. La rapidité des fluctuations (mesurée par l'indice de fluctuation) reste du même ordre de grandeur et ces fluctuations sont localisées à peu près aux mêmes endroits du domaine. Ayant vérifié que les caractéristiques des représentations ne sont pas dues aux hasards de la construction, on conclut à une *robustesse* acceptable des représentations vis-à-vis de la fréquence d'échantillonnage et d'un éventuel bruit. La nouvelle fréquence est alors *suffisante* pour la granularité minimale que l'utilisateur a choisie. Une économie peut ainsi être réalisée dans le stockage des points, et un coût de calcul diminué dans la simulation.

Si la comparaison des structures n'est pas concluante, alors la nouvelle fréquence d'échantillonnage (correspondant à  $G^{(s-1)}$ ) est multipliée par 2 (le pas entre deux instants est divisé par 2) et une nouvelle série de points est créée. La procédure de segmentation et d'abstraction est à nouveau exécutée, et la nouvelle structure est dessinée et comparée à la structure d'origine.

Un exemple de cette stratégie de raisonnement sera décrit dans le chapitre 4 (cf. 4.4.3).

#### *Une règle dictée par le théorème de Shannon ?*

Le fait de multiplier la fréquence d'échantillonnage par 2 est cohérent avec le théorème de Shannon. Rappelons-le, ce théorème contraint la fréquence d'échantillonnage  $f$  d'un processus de fréquence maximale  $F$  à respecter la condition  $f \geq 2F$ . Si l'on considère que la granularité minimale  $G^{(s-1)}$  correspond à la fréquence maximale  $F$  du processus représenté à l'abstraction  $s-1$ , alors il faut l'échantillonner à la fréquence  $2F$  correspondant à  $G^{(s-1)}/2$  pour être sûr de ne pas rater un phénomène "intéressant". Cependant, cela ne vaut que si le phénomène intéressant en question se situe à la fréquence  $F$ , c'est-à-dire s'il n'est constitué que d'un seul épisode trapézoïdal, et qu'en plus cet épisode est minimal !

En fait, le plus souvent, un phénomène intéressant ne sera pas constitué d'un seul épisode, mais de plusieurs. C'est pourquoi une fréquence d'échantillonnage correspondant à  $G^{(s-1)}$  peut très bien être suffisante. Si elle ne l'est pas, le fait de la multiplier par 2 est donc arbitraire mais relativement logique.

#### *Comparaison de deux structures*

Le point délicat de cette stratégie de choix est la comparaison de deux structures. Elle consiste à essayer de répondre aux questions suivantes :

— les caractéristiques temporelles à la granularité minimale "intéressante"  $G$  sont-elles à peu de choses près les mêmes dans les deux structures ?

— à partir de quelle granularité minimale les caractéristiques temporelles sont-elles similaires ?

La similarité de deux représentations à une granularité minimale est évaluée avec le nombre d'épisodes dont elles sont composées, leur *durée* et leur *localisation*. Cette comparaison n'est pas implémentée pour le moment. En effet, par construction, on n'a jamais exactement les mêmes représentations à la même granularité minimale et une comparaison stricte échouerait à tous les coups.

C'est donc une comparaison visuelle qui est effectuée, capable d'intégrer une ressemblance "floue" (au sens de la logique floue). Tout au mieux pourra-t-on implémenter à l'avenir des règles de suggestion concernant la similarité des structures, mais l'utilisateur restera le plus apte à juger de cette similarité. En particulier, si les deux représentations à la granularité minimale  $G$  sont peu ressemblantes, mais que les structures coïncident à partir de quelques étapes plus haut, on peut conclure à la robustesse des représentations, mais pas au niveau de détail intéressant. Les représentations sont fiables, mais il faut augmenter la fréquence d'échantillonnage comme précisé au paragraphe précédent.



Lorsque l'intérêt porté à un phénomène n'est pas uniquement lié à ses caractéristiques *temporelles* mais également à sa *forme*, il est également utile de comparer l'aspect visuel des représentations à  $G$ . Retrouver le phénomène conforte la confiance dans la nouvelle fréquence d'échantillonnage choisie, le contraire incite à la modifier.

*La granularité minimale "intéressante" pour l'utilisateur*

Elle est déterminée de la manière suivante :

— lorsque l'utilisateur réclame une précision et une durée d'observation particulières (par exemple : une valeur par semaine pendant six mois), la granularité minimale adéquate en découle ( $G = 0.039$ ).

— lorsque l'utilisateur ne sait rien a priori (et c'est là tout l'intérêt de disposer d'un jeu de représentations du processus), le choix est guidé par la visualisation d'un phénomène attirant l'attention dans une ou plusieurs représentations. Par exemple, ce peut être la disparition de fluctuations, l'apparition d'une tendance globalement croissante, décroissante ou stable (présence d'un plateau), un ralentissement, une accélération, etc. composés d'un ou de plusieurs épisodes. Alors  $G$  est la granularité minimale de la représentation où apparaît ce phénomène. L'*expertise* est donc nécessaire pour faire l'hypothèse d'une représentation "intéressante", et la structure des granularités est un support de vérification de cette hypothèse.

3.3.4. Aide à la décomposition de dynamiques imbriquées : détection de phénomènes réguliers

*Régularité*

On entend par phénomène régulier une portion d'évolution où les fluctuations du processus sont quasiment mono-fréquentielles. Un phénomène régulier est donc représenté dans la représentation trapézoïdale à l'étape zéro par un ensemble d'épisodes trapézoïdaux de durée similaire, regroupés sur une partie du domaine. Dans ces circonstances, la décomposition de dynamiques imbriquées prend tout son sens puisqu'elle permet de séparer ces fluctuations régulières de la tendance globale qu'elles masquent.

Un phénomène régulier est nettement visible dans la structure : sur la portion concernée du domaine, les épisodes originaux (i.e. de la représentation à l'étape zéro) sont abstraits en quelques étapes de granularités minimales analogues. Les traits horizontaux sont donc proches les uns des autres jusqu'à l'abstraction de ces épisodes. Puis, il apparaît un *écart* de granularité important pour atteindre le niveau d'abstraction suivant, beaucoup plus élevé .

*Exemples*

Examinons deux situations (Fig. 3.4) :

— (a) Les épisodes trapézoïdaux ont des durées semblables. Ils sont abstraits en quelques étapes (traits horizontaux au bas de la structure) et donnent naissance à des épisodes beaucoup plus longs (d'où l'écart).

— (b) Deux groupes distincts d'épisodes trapézoïdaux sont isolés, chaque groupe étant constitué d'épisodes de durée semblable. Le premier groupe est abstrait (traits horizontaux au bas de la structure), après quoi ne restent que les épisodes résultants et le second groupe (d'où le 1<sup>er</sup> écart). Les épisodes du second groupe sont abstraits (traits horizontaux au milieu de la structure) et ne laissent que des épisodes beaucoup plus grands (d'où le second écart).

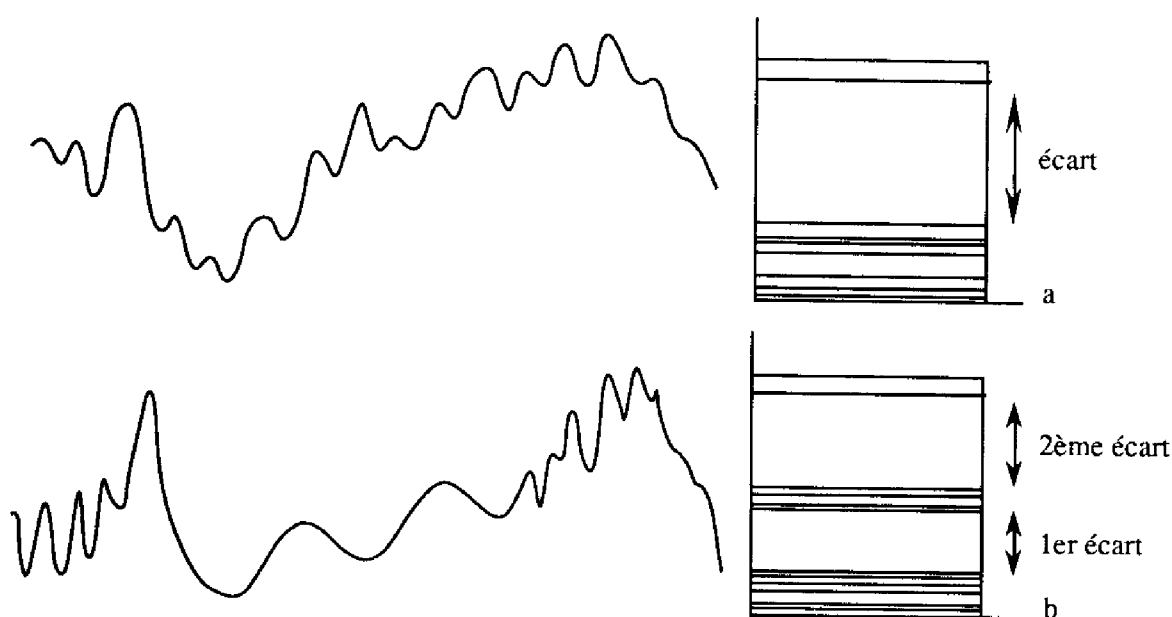


Fig. 3.4 : Deux cas d'évolutions conduisant à des structures des granularités permettant de détecter un phénomène régulier.

### *Implémentation*

La tâche "d'aide à la décomposition de dynamiques imbriquées" est intégrée dans le système d'interprétation PARADISE (cf. 4.2) sous la forme de la règle suivante :

- si l'écart maximal entre deux granularités minimales consécutives se produit après le regroupement d'au moins un épisode original, et
- si l'épisode résultant de ce regroupement occupe un intervalle du domaine  $[t_i, t_j]$  occupé à l'origine par au moins 7 épisodes trapézoïdaux,
- alors il y a une régularité des fluctuations sur  $[t_i, t_j]$  et une décomposition est conseillée.

Le nombre de 7 épisodes provient du fait que l'on s'est fixé un minimum de 3 épisodes de durée similaire pour dénoter un phénomène régulier (Fig. 3.5). Ceci est évidemment arbitraire et peut être modifié à volonté.

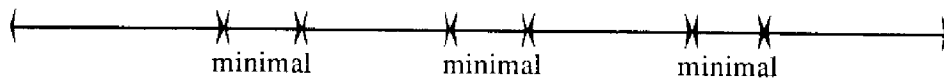


Fig. 3.5 : La situation "la moins régulière" suffisante pour la détection d'un phénomène régulier (chaque flèche à deux points désigne un épisode). Seuls 3 épisodes sur les 7 ont des durées proches et sont minimaux à la même étape ou à des étapes de granularité minimale proche.

### 3.3.5 Facilité et limites d'interprétation de la structure

Comme on a pu le voir, la structure des granularités synthétise bien l'ensemble des caractéristiques temporelles des représentations trapézoïdales de l'évolution d'un processus à différents niveaux d'abstraction. On y trouve les paramètres importants décrivant la dynamique du processus : le nombre, la localisation et la durée des épisodes.

La détection de régularités est facilement automatisable, et elle est implémentée dans notre logiciel. Par contre, on a du mal à imaginer une automatisation de la comparaison de deux structures, qui reste avant tout une tâche visuelle fort subjective. Sur des structures de 20 ou 30 étapes d'abstraction, avec des représentations à l'étape zéro de 700 ou 800 épisodes, il est difficile d'y voir clair. A granularité minimale égale et sur le même intervalle du domaine, on peut très bien trouver un épisode dans une structure, et deux dans l'autre.

L'utilisateur s'attachera donc, à granularité minimale égale, à évaluer si les dates de début et de fin d'épisodes coïncident, si les épisodes longs sont retrouvés dans les deux représentations aux mêmes endroits du domaine, et si le nombre d'épisodes ne diffère pas de plus de 10 ou 15%. Lorsque ces conditions (empiriques !) sont respectées, alors les représentations peuvent être déclarées semblables.

## 3.4 Interprétation symbolique/numérique d'une représentation

Nous disposons avec les épisodes d'outils d'analyse pouvant être utilisés de plusieurs façons : à travers leurs caractéristiques numériques seulement (durées et variations d'amplitude), leurs caractéristiques numériques/symboliques, ou encore purement symboliques (types). Nous allons voir ici quel genre d'information comportementale peut être extrait des épisodes, pris soit individuellement, soit en séquence d'épisodes.

Après une analyse de la signification fonctionnelle des différents types d'épisodes, nous dressons une liste non exhaustive d'interprétations comportementales accessibles à partir d'un épisode, selon son type symbolique et les valeurs numériques de ses points. Les différenciations de comportements sont alors purement numériques.

Ensuite, nous verrons comment les comportements standards des systèmes dynamiques en Automatique peuvent être traduits par le biais des épisodes. On montrera les divers degrés de précision comportementale obtenus avec les symboles uniquement, ou en y rajoutant l'information numérique disponible. Enfin, à partir de la définition de la *chaîne symbolique*, constituée par la séquence de tous les types d'épisodes d'une représentation, un algorithme de détection de ces comportements, isolés ou récurrents, est proposé. On montrera qu'il permet en outre à l'utilisateur de rechercher un comportement quelconque dans une représentation par épisodes.

Cette analyse symbolique est réalisable sur chacune des représentations d'un processus. Pour l'ensemble des représentations, la synthèse des analyses symboliques rend compte de la "modification des comportements" au cours de l'abstraction. Etant réalisée par l'utilisateur, cette synthèse est facilitée par la simplicité des informations produites à chaque niveau d'abstraction.

#### 3.4.1 Préambule : signification fonctionnelle des types symboliques d'épisodes

##### *Episodes triangulaires*

La forme d'un épisode triangulaire  $T(X, t_i)$  sous-tend que le processus évolue de  $(x_i, t_i)$  à  $(x_k, t_k)$ , avec  $k = i + 1$ . Les tangentes en ces points se croisent en un troisième point noté  $(x_j, t_j)$  (Fig. 3.6). Nous pouvons donc estimer analytiquement le comportement continu du processus à l'intérieur d'un épisode triangulaire par une trajectoire exponentielle. L'expression la plus simple suffisante est alors :

$$T(X, t_i) \equiv f(t) \text{ avec } f(t) = c \cdot e^{at} + b$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes réelles.

Deux triplets distincts  $(a, b, c)$  suffisent à déterminer  $f(t)$ . On suppose  $x_k \neq 0$ ; si dans les expressions suivantes, un dénominateur est nul, alors l'utilisation des limites est suffisante pour parvenir à la fonction.

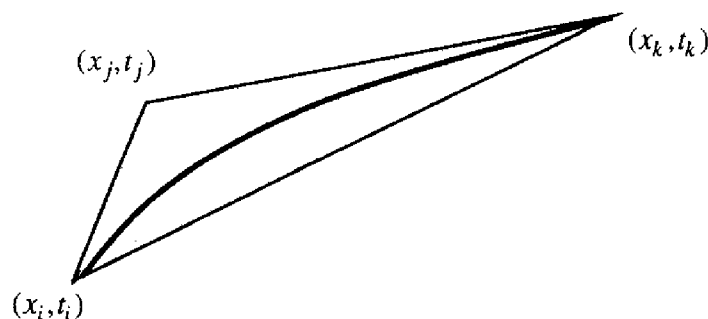


Fig. 3.6 : L'évolution continue du processus à l'intérieur d'un épisode triangulaire.

— Pour les types  $A$ ,  $A^*$ ,  $C$  ou  $C^*$ , l'identification des termes aboutit à :

$$c = \left( \frac{x_i^{t_k}}{x_k^{t_i}} \right)^{\frac{1}{t_k - t_i}} \quad a = \frac{\ln \left( \frac{x_k}{x_i} \right)}{t_k - t_i} \quad b = 0$$

— Pour les types  $B$ ,  $B^*$ ,  $D$  ou  $D^*$ , on aura :

$$c = \frac{x_k - x_i}{\frac{t_k}{J^{t_k - t_i}} - \frac{t_i}{J^{t_k - t_i}}}, \quad a = \frac{\ln J}{t_k - t_i}, \quad b = x_i + \frac{x_k - x_i}{1 - J} \quad \text{et} \quad J = \frac{(x_k - x_j)(t_j - t_i)}{(t_k - t_j)(x_j - x_i)}.$$

### Episodes trapézoïdaux

La même correspondance peut être établie pour les épisodes trapézoïdaux. On admet que  $Z(X, t_i)$  est un trapèze débutant en  $(x_i, t_i)$  et s'achevant en  $(x_l, t_l)$ , avec  $l = i + 1$ . Les deux autres points, où se coupent les tangentes en  $(x_i, t_i)$  et  $(x_l, t_l)$  et la parallèle au segment joignant  $(x_i, t_i)$  et  $(x_l, t_l)$ , sont chronologiquement notés  $(x_j, t_j)$  et  $(x_k, t_k)$  (Fig. 3.7).

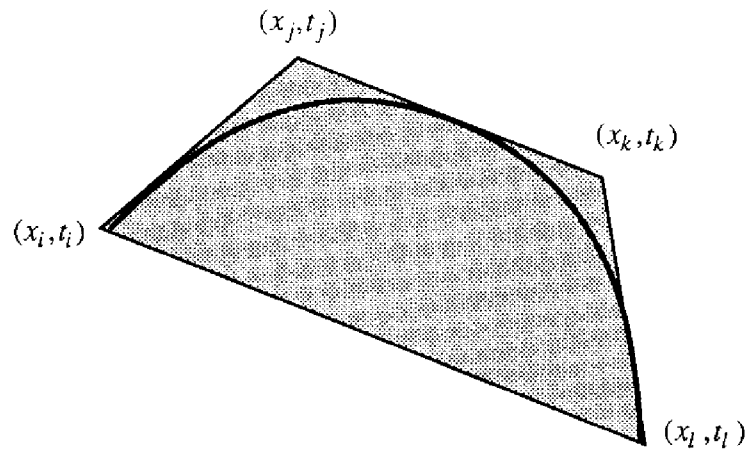


Fig. 3.7 : L'évolution continue du processus à l'intérieur d'un épisode trapézoïdal.

L'expression la plus générale possible basée sur le fait qu'un épisode trapézoïdal groupe deux épisodes triangulaires serait :

$$Z(X, t_i) \equiv g(t) \text{ avec } g(t) = (c \cdot e^{a \cdot t + d} + b) + (c' \cdot e^{a' \cdot t + d'} + b')$$

où chaque parenthèse correspond à un type triangulaire.

Comme il y a trop de paramètres à déterminer, cette expression est simplifiée au maximum. La fonction traduisant le comportement du processus dans un épisode trapézoïdal est alors la fonction hyperbolique :

$$g(t) = c \cdot (e^{t-d} \pm e^{-t+d}) + b.$$

Deux ensembles distincts de valeurs de  $(c, b, d)$  déterminent  $g(t)$ .

— Pour le type  $BD$  et ses types particuliers (avec “\*”), le signe positif s'applique et on a les expressions suivantes :

$$c = \frac{x_l - x_i}{e^{t_l - d} + e^{-t_l + d} - e^{t_i - d} - e^{-t_i + d}}, \quad b = x_i + c \cdot (e^{t_i - d} + e^{-t_i + d}),$$

$$d = t_i - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{I - e^{-(t_l - t_i)}}{I - e^{t_l - t_i}} \right) \text{ et } I = \frac{x_l - x_k}{t_l - t_k} \cdot \frac{t_j - t_i}{x_j - x_i}$$

— Pour le type *CA* et ses types particuliers,  $b = x_i - c \cdot (e^{t_i - d} + e^{-t_i + d})$  est la seule différence.

— Pour le type *BA* et ses types particuliers, le signe négatif s'applique,  $I$  est identique et on a :

$$c = \frac{x_l - x_i}{e^{t_l - d} - e^{-t_l + d} - e^{t_i - d} + e^{-t_i + d}}, \quad b = x_i - c \cdot (e^{t_i - d} - e^{-t_i + d}),$$

$$\text{et } d = t_i - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-I + e^{-(t_l - t_i)}}{I - e^{t_l - t_i}} \right)$$

— Finalement, pour le type *CD* et ses types particuliers,  $b = x_i + c \cdot (e^{t_i - d} - e^{-t_i + d})$ .

Bien qu'il ne soit pas exploité dans la suite, ce calcul montre que l'on est capable de trouver analytiquement un comportement continu du processus à l'intérieur d'un épisode quelconque, simplement à partir des points de l'épisode.

### 3.4.2 Interprétation et comparaison d'épisodes pris individuellement

Les coefficients des fonctions locales précédemment mises en évidence sont des premiers outils de comparaison d'un épisode avec un autre, de la même représentation ou d'une représentation différente. Il est facile d'en imaginer beaucoup d'autres. Des critères géométriques simples sont par exemple cités ici comme potentiellement intéressants pour l'analyse.

#### *Durées et variations d'amplitude*

La comparaison des durées et variations d'amplitude de deux épisodes met en parallèle les caractéristiques des comportements qu'ils sous-tendent.

La durée d'un épisode est bien entendu la différence des dates de ses points extrêmes.

La variation d'amplitude d'un épisode triangulaire ou trapézoïdal est plus complexe. Nous la définissons comme la *variation du processus à l'intérieur de l'épisode, indépendamment de sa "tendance globale"*. On retrouve donc pour l'épisode trapézoïdal le même calcul que lors de la décomposition de dynamiques imbriquées (cf. 2.6.1) : la variation d'amplitude est évaluée par la *mesure de la distance verticale entre les côtés parallèles mis à l'horizontale par rotation autour d'un point extrême*. Précisons ce calcul.

Un pré-requis est que les dates soient conservées par l'opération. En effet, on perdrait la représentativité des durées si cela n'était pas imposé. On effectue donc une rotation autour d'un point extrême, après quoi les dates des trois autres points sont rétablies.

Reprenons  $(x_i, t_i)$ ,  $(x_j, t_j)$ ,  $(x_k, t_k)$  et  $(x_l, t_l)$  comme points d'un épisode trapézoïdal. Soient  $(x'_i, t'_i)$ ,  $(x'_j, t'_j)$ ,  $(x'_k, t'_k)$  et  $(x'_l, t'_l)$  les quatre points du trapèze ayant subi une rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $(x_l, t_l)$  (Fig. 3.8).

La conservation des dates s'exprime par :

$$t'_i = t_i, \quad t'_j = t_j, \quad t'_k = t_k, \quad t'_l = t_l.$$

Le côté reliant les points extrêmes est horizontal. Ces points vérifient donc :

$$x'_i = x'_l = x_l.$$

Pour les deux autres points, les formules de la rotation donnent :

$$\begin{cases} x'_j = x_l + \sin \alpha \cdot (t_j - t_l) + \cos \alpha \cdot (x_j - x_l) \\ x'_k = x_l + \sin \alpha \cdot (t_k - t_l) + \cos \alpha \cdot (x_k - x_l) \end{cases}$$

Pour les types *BD* et *CA*, on a :

$$x'_j = x'_k.$$

et donc :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{-(x_i - x_l) \cdot (-\sqrt{t_l^2 - (2t_i t_l - t_i^2 - x_l^2 + 2x_i x_l - x_i^2)})}{(t_i - t_l)^2 + (x_i - x_l)^2} \\ \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cdot (t_j - t_k)}{-(x_j - x_k)} \end{cases}$$

La variation d'amplitude est alors donnée par  $|x'_j - x'_l|$ .

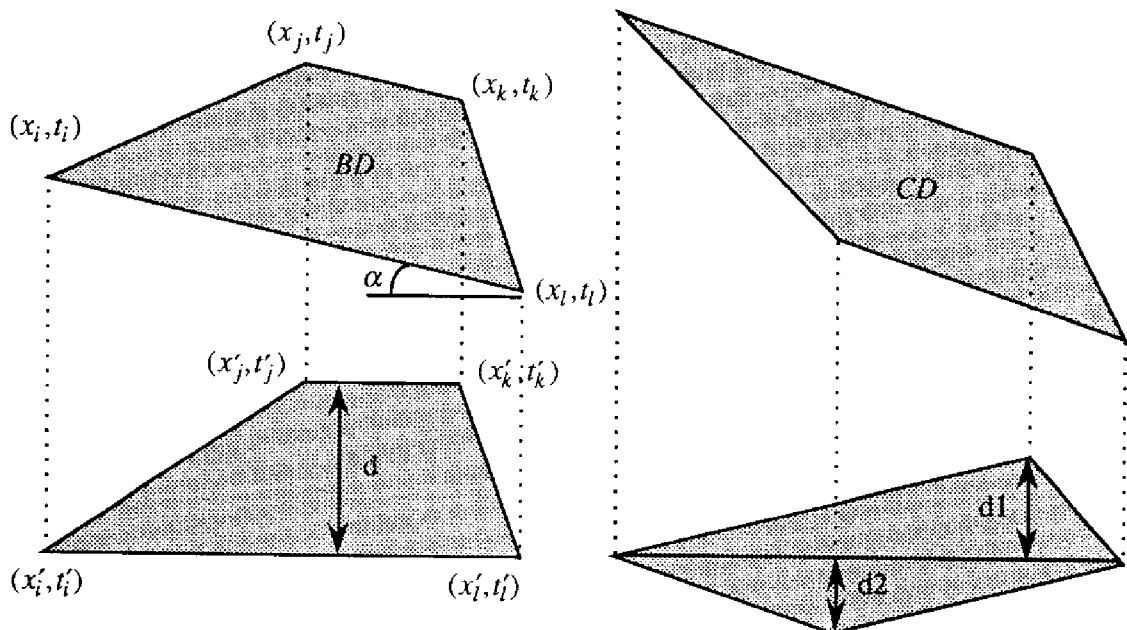


Fig. 3.8 : Le calcul de la variation d'amplitude pour un épisode trapézoïdal. Une rotation d'angle  $\alpha$  autour d'un point extrême (ici  $(x_l, t_l)$ ) est d'abord réalisée, après quoi les dates modifiées sont rétablies. La variation d'amplitude est ensuite mesurée : elle est égale à  $d$  pour le type *BD* et à  $d1+d2$  pour le type *CD*.

Pour les types *BA* et *CD*, la variation d'amplitude est la somme des deux distances verticales  $d1$  et  $d2$ , respectivement de  $(x_j, t_j)$  et de  $(x_k, t_k)$  au segment (horizontal) joignant  $(x_i, t_i)$  et  $(x_l, t_l)$ . Simplement avec :

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

on peut calculer les valeurs :

$$d1 = |\sin \alpha \cdot (t_j - t_l) + \cos \alpha \cdot (x_j - x_l)|$$

$$d2 = |\sin \alpha \cdot (t_k - t_l) + \cos \alpha \cdot (x_k - x_l)|$$

### *Raideur d'épisode*

Deux épisodes de même type s'interprètent comme un même comportement qualitatif du processus. Si l'on désire cependant distinguer les façons dont le processus évolue à l'intérieur de ces épisodes, on a besoin d'une plus grande précision, en prenant en considération l'emplacement des points autres que les points extrêmes. Un moyen est de manipuler leur date et leur valeur, mais c'est assez lourd; des calculs de rapports de pentes sont difficiles à interpréter car ils nécessitent de distinguer les types.

Une bonne solution est alors de se servir d'un angle. Pour un épisode triangulaire, l'angle  $\alpha$  entre les segments de  $(x_i, t_i)$  à  $(x_j, t_j)$  et de  $(x_j, t_j)$  à  $(x_k, t_k)$  permet d'évaluer la "raideur" de l'épisode, c'est-à-dire la façon dont le processus change de pente (Fig. 3.9). Plus l'angle est important, moins la raideur l'est. Notons qu'elle est indépendante des pentes des côtés, puisqu'elle reste identique si on fait subir une rotation au triangle.

Par exemple, sur la figure 3.9, les deux premiers épisodes triangulaires de type *A* ont la même raideur, celle du troisième est plus faible (angle plus grand). Le processus croît donc avec une accélération plus abrupte dans les deux premiers que dans le troisième. Le premier épisode de type *B* a une raideur plus importante que le second. Le changement de pente (signifiant un ralentissement de la croissance) y est donc plus violent.

Pour un épisode trapézoïdal, il y aura de même une "raideur à gauche", calculée à l'aide du même angle  $\alpha$ , mais aussi une "raideur à droite", obtenue à partir de l'angle  $\beta$  entre les segments de  $(x_j, t_j)$  à  $(x_k, t_k)$  et de  $(x_k, t_k)$  à  $(x_l, t_l)$  (Fig. 3.10). Les raideurs décrivent la manière dont le processus change deux fois de pente dans l'intervalle couvert par l'épisode.

Sur la figure 3.10, on voit par exemple que le processus subit un ralentissement plus raide de sa croissance en début d'épisode pour le premier *BD* que pour les deux autres. Par contre, il subit un changement de tendance (chute) beaucoup plus brutal dans le troisième que dans le second, et plus brutal dans le second que dans le premier. Pour les *BA*, les angles permettent de conclure un aspect différent de l'évolution : assez "douce" dans le premier épisode, elle est plus raide au début du second, pour s'adoucir sur la fin.



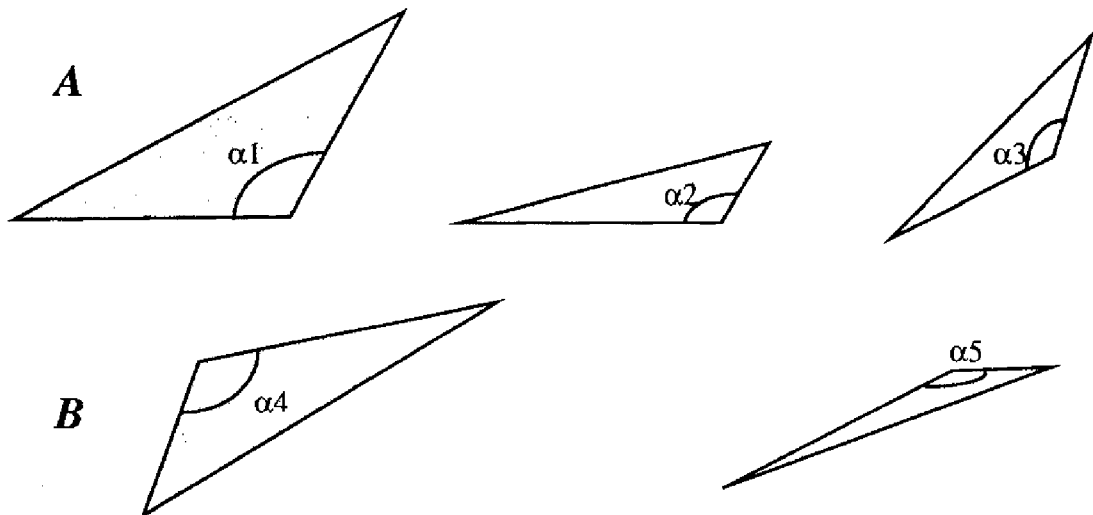


Fig. 3.9 : Quelques épisodes triangulaires et l'angle caractérisant leur raideur. Ceux du type A sont tels que  $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3$ . Ceux du type B ont des angles tels que  $\alpha_4 < \alpha_5$ . Plus l'angle est important et plus la raideur est faible.

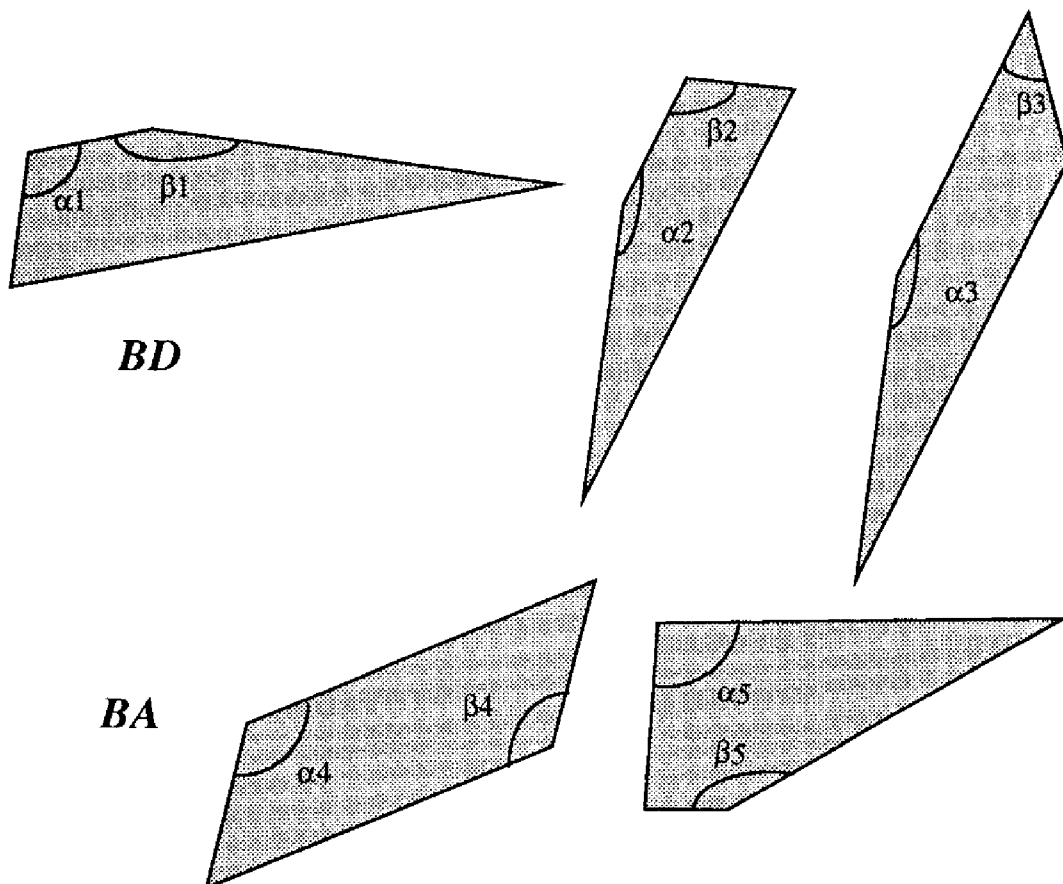


Fig. 3.10 : Quelques épisodes trapézoïdaux et les angles caractérisant leurs raideurs. Ceux du type BD sont tels que  $\alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_3$  et  $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ . Ceux du type BA ont des angles tels que  $\alpha_4 > \alpha_5$  et  $\beta_4 < \beta_5$ .

Remarque :

Les raideurs peuvent être évaluées sur une représentation trapézoïdale, mais pas sur l'évolution imbriquée (cf. 2.6). Dans cette évolution en effet, les trapèzes ont subi le traitement décrit au paragraphe précédent pour la mesure de la variation d'amplitude : rotation suivie d'un changement de dates. Si la rotation conserve les angles (donc les raideurs à droite et à gauche), le changement de dates les modifie.

### 3.4.3 Codage symbolique/numérique de comportements standards en Automatique

Nous allons montrer ici comment exprimer à l'aide des épisodes triangulaires et trapézoïdaux la majorité des comportements standards que l'on peut rencontrer en Automatique. En retour, ceci permettra dans la partie suivante (3.4.4) de détecter ces comportements dans une représentation.

#### Réponses (locales) d'un système du premier ordre

Les réponses aux signaux-tests d'un système du premier ordre de fonction de transfert  $F(p) = \frac{\text{gain}}{1+T.p}$ , où  $T$  est la constante de temps et  $p$  la variable de Laplace, sont

exprimables par le biais des épisodes triangulaires. Ceux-ci sont alors (Fig. 3.11):

- $C^*$  si l'entrée est une impulsion d'aire unité; alors  $T = t_j - t_i$  et  $\text{gain} = T.(x_i - x_j)$ .
- $B^*$  (réponse sans retard) pour une entrée en échelon unité; alors  $T = t_j - t_i$  et  $\text{gain} = x_j - x_i$ .
- $A^*$  si l'entrée est une rampe de pente unité; alors  $T = t_j - t_i$  et  $\text{gain} = \frac{x_k - x_j}{t_k - t_j}$ .

Le type symbolique suffit donc à transcrire cette classe de comportements, dont les caractéristiques numériques sont accessibles avec l'information numérique disponible sur les épisodes.

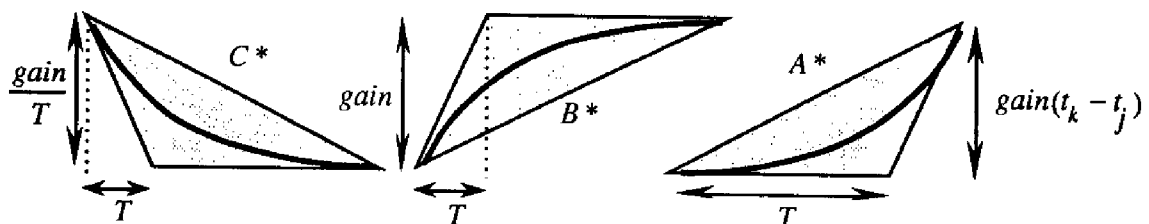


Fig. 3.11 : Episodes triangulaires traduisant les réponses aux signaux-tests d'un système du premier ordre.

L'existence d'un côté horizontal traduit l'atteinte du régime permanent. Lorsque l'étoile est absente du type de l'épisode, on peut néanmoins considérer l'équivalence avec la réponse d'un système du premier ordre si la durée de l'épisode est supérieure au temps de réponse à 5%, c'est-à-dire si :



d'amplitude). Ainsi dans une séquence d'épisodes composée d'une répétition de séquences élémentaires, si les variations d'amplitude et les durées des épisodes diminuent, alors on a une oscillation amortie (cas de la figure 3.12). Si elles restent les mêmes, l'oscillation est entretenue. Enfin si elles augmentent, elle est divergente.

Lorsque les durées des épisodes sont identiques sur une telle séquence (fréquence constante), on a un comportement sinusoïdal. Des amplitudes croissantes indiquent une sinusoïde pseudo-périodique divergente, des amplitudes décroissantes une sinusoïde amortie. Bien sûr, si elles sont aussi constantes, le comportement est sinusoïdal, périodique et entretenu.

A l'opposé, des durées croissantes traduisent un ralentissement des fluctuations (une diminution de la fréquence; l'indice de fluctuation décroît), des durées s'amenuisant traduisent une accélération des fluctuations (l'indice de fluctuation croît).

### *Stabilité*

Une autre partie majeure d'une analyse comportementale est l'étude de la stabilité. Avec un modèle numérique, une étude théorique peut s'avérer complexe, en particulier pour un système fortement non-linéaire. De plus, l'effet d'une abstraction temporelle sur la stabilité ne peut être évalué. Par contre, à partir des représentations et du codage symbolique dont nous disposons, cette information est accessible. Par exemple, on en tirera une interprétation du type : "Nous pouvons considérer le processus stable entre  $t_i$  et  $t_j$  à la granularité minimale  $G^{(s)}$  et pour toutes les représentations plus grossières".

Un point de stabilité dans un épisode se traduit par la présence de l'étoile ("\*"), caractéristique d'une tendance *std*, dans son type. Dans la représentation triangulaire, un type  $A^*$  ou  $D^*$  (croissance ou décroissance accélérée à partir d'une position stable) révèle un point de stabilité à la droite du premier point  $(x_i, t_i)$ . Dans un épisode du type  $B^*$  ou  $C^*$  (croissance ou décroissance arrivant à une position stable), il est localisé à gauche du dernier point  $(x_k, t_k)$ .

Pour les épisodes trapézoïdaux, il faut distinguer la représentation à l'étape zéro des représentations abstraites. A l'étape zéro,  $B^*A$  ou  $C^*D$  (respectivement  $BA^*$  ou  $CD^*$ ) place le point de stabilité à gauche (respectivement à droite) du point d'inflexion.  $B^*A^*$  ou  $C^*D^*$  implique que le point d'inflexion est lui-même le point de stabilité. Pareillement,  $B^*D$  ou  $C^*A$  (respectivement  $BD^*$  ou  $CA^*$ ) indique une stabilité à gauche (respectivement à droite) de l'extremum. Enfin,  $B^*D^*$  ou  $C^*A^*$  traduisent le fait que l'extremum est lui-même un point de stabilité.

La même notion dans les représentations aux étapes ultérieures sera examinée au 3.4.6.

Si l'on veut examiner la stabilité du processus sur une séquence d'épisodes, il convient de joindre aux types de ces épisodes l'information numérique disponible sur leur variation

d'amplitude : il y a stabilité (respectivement instabilité) si l'on a une séquence oscillatoire, composée d'épisodes dont les variations d'amplitude vont en décroissant (respectivement en croissant). L'exemple de la figure 3.12 traduit ainsi un comportement stable.

#### *Récurrence et périodicité symboliques*

Une séquence d'épisodes désignés par leur type symbolique est *récurrente* lorsqu'elle est présente plusieurs fois dans la même représentation. Par exemple, la séquence :

$$\{BDCABABD\}$$

est récurrente (soulignée) dans la séquence :

$$\{CABDCABABDCABDCDCABDCABABDCDCD\}.$$

Si en plus les récurrences sont adjacentes, alors on dira que l'évolution est *périodique* sur l'intervalle occupé par les récurrences. Sa période est égale au nombre d'épisodes triangulaires composant une récurrence. Une période n'a donc pas forcément une durée constante. Par exemple :

$$\{CABDCDCDCABDCDCDCABDCDCD\}$$

est une séquence représentant une évolution périodique de période 8 ( $\{CABDCDCD\}$ , correspondant à une oscillation suivie d'une chute).

Récurrences et périodes dénotent la présence dans une même représentation du même comportement, plus ou moins déformé en temps et en amplitude mais au moins de la même forme. Cette forme regroupe, à une granularité minimale précise, un ensemble de fluctuations de rapidité et d'amplitude diverses mais en *nombre* identique. La récurrence d'un comportement est remarquable car elle permet d'établir une cyclicité qualitative dans une évolution représentée à un quelconque niveau d'abstraction. Voyons maintenant pratiquement comment la détecter.

#### 3.4.4 Détection de comportements standards, de récurrences et de séquences particulières dans une chaîne symbolique

Nous avons précisé la traduction d'une séquence (ou d'un ensemble de séquences) de symboles en caractéristiques comportementales. Il faut maintenant savoir les détecter et les localiser dans la représentation symbolique d'une représentation, appelée *chaîne symbolique*. Ceci est réalisé par un algorithme de *mise en correspondance de motifs*. Nous détaillons ici son fonctionnement et l'utilisation qui en est faite.

#### *Chaînes symboliques*

Il s'agit le plus naturellement du monde de l'ensemble des types symboliques des épisodes d'une représentation. Il est appelé *chaîne triangulaire* pour la représentation triangulaire, *chaîne trapézoïdale* pour une représentation trapézoïdale.

Par souci de simplicité, la chaîne symbolique d'une représentation trapézoïdale débute et se termine par un type trapézoïdal, et ne retient pas les éventuels types d'épisodes triangulaires subsistant au début ou à la fin de la représentation. Il serait en effet complexe pour l'interprétation (et fort lourd pour nos explications...) de faire intervenir à la fois des épisodes triangulaires et trapézoïdaux dans la représentation symbolique d'un comportement : il faudrait interpréter de manière homogène les deux sortes de formes. D'ailleurs, ceci n'aurait d'intérêt que si la durée des triangles restants est importante par rapport aux autres épisodes, ce qui est un cas particulier.

En accord avec ce qui a été précédemment mentionné (cf. 2.4.4), dans les représentations trapézoïdales abstraites, un type  $BA$  ou  $CD$  comprenant un changement de tendance est remplacé par la séquence  $\{BDCA\}$  ou  $\{CABD\}$ , respectivement.

*Détection de récurrences et de comportements oscillatoires par mise en correspondance de motifs*

La détection d'un type symbolique particulier étant évidente, nous ne nous intéressons qu'aux séquences traduisant un comportement oscillatoire et aux séquences récurrentes *non-chevauchantes*. Seuls les symboles sont ici considérés; la prise en compte des durées et variations d'amplitude permettra ensuite éventuellement de caractériser plus en détail une séquence trouvée.

Soient  $SEQ_1$  et  $SEQ_2$  deux séquences de lettres. L'ensemble initial des séquences récurrentes possibles  $POSS\_SEQ$  est formé par toutes les séquences de quatre lettres possibles, soit :

- $POSS\_SEQ = \{ABAB, ABDC, BABA, BABD, BDCA, BDCD, CABA, CABD, CDCA, CDCD, DCAB, DCDC\}$  pour traiter la chaîne triangulaire, et
- $POSS\_SEQ = \{CABA, CABD, BDCA, BDCD, CDCA, CDCD, BABA, BABD\}$  pour une chaîne trapézoïdale.

L'algorithme suivant (algorithme 5) produit l'ensemble des séquences récurrentes  $RED\_SEQ$  avec leur localisation et leur nombre d'occurrences ( $RED\_SEQ$  est initialement vide) :

Entrée :  $POSS\_SEQ$

Tant que  $POSS\_SEQ \neq \emptyset$

Chercher les emplacements et nombre d'occurrences de chaque  $SEQ \in POSS\_SEQ$

Pour chaque  $SEQ \in POSS\_SEQ$

Si le nombre d'occurrences de  $SEQ$  est supérieur à 1, alors

retirer  $SEQ$  de  $POSS\_SEQ$ , et l'ajouter à  $RED\_SEQ$

```

former deux nouvelles séquences  $SEQ'$  et  $SEQ''$  avec les deux types
trapézoïdaux suivants possibles ou les deux paires de types triangulaires
suivants possibles
/* Par exemple, si CABA est trouvé plus d'une fois, il est complété par BA
et BD pour former les nouvelles séquences CABABA et CABABD */
Pour  $SEQ = SEQ'$  et  $SEQ = SEQ''$ 
  Si les deux dernières lettres (pour la chaîne triangulaire) ou les quatre
  dernières (pour une chaîne trapézoïdale) de  $SEQ$  forment une séquence non
  retirée précédemment, alors
    ajouter  $SEQ$  à  $POSS\_SEQ$ 
    /* Par exemple, si BABA n'a pas été trouvé plus d'une fois à la première
    recherche, alors CABABA n'est pas une séquence redondante possible */
  Fin si
Fin pour
Sinon retirer  $SEQ$  de  $POSS\_SEQ$ 
Fin si
Fin pour
Fin tant que

```

Algorithme 5 : Détection et localisation de récurrences non-chevauchantes dans une chaîne symbolique.

Pour une chaîne symbolique assez longue (quelques centaines de lettres), l'algorithme produit une multitude de séquences récurrentes. On s'intéresse alors aux plus longues d'entre elles, car elles codent un comportement de durée *a priori* plus importante. Un deuxième algorithme de mise en correspondance élimine alors toutes les séquences récurrentes incluses dans une plus longue.

Cet algorithme assez trivial est suffisant pour rechercher les plus longues séquences récurrentes (et les autres) en quelques secondes sur un processeur Sparc 1000 à 50 MHz. Ceci est dû au fait que les séquences recherchées sont non-chevauchantes, et à cause du nombre limité de transitions possibles entre épisodes (Fig. 2.8b et 2.18).

Pour la détection des séquences traduisant un comportement oscillatoire, le même algorithme est appliqué à partir de :

- $POSS\_SEQ = \{BDCA, DCAB, CABD, ABDC\}$  pour traiter la chaîne triangulaire, et
- $POSS\_SEQ = \{CABD, BDCA\}$  pour une chaîne trapézoïdale.

Les seules transitions autorisées sont alors  $B \rightarrow D, D \rightarrow C, C \rightarrow A$  et  $A \rightarrow B$  pour la chaîne triangulaire,  $BD \rightarrow CA$  et  $CA \rightarrow BD$  pour la trapézoïdale.

#### *Recherche d'une séquence particulière*

Tout ajout ou retrait d'épisode est conservé dans un arbre dont les racines sont les séquences élémentaires possibles ( $POSS\_SEQ$  initial). Huit racines sont seulement

possibles, et chaque chemin d'une racine à un type est une séquence. La figure 3.13 montre un exemple d'arbre obtenu à l'issue de la recherche des récurrences d'au moins quatre épisodes trapézoïdaux et non incluses dans une séquence plus longue.

A partir de cette trace d'exécution, l'utilisateur peut savoir si une séquence de son choix est présente dans la chaîne, combien de fois et où : cette séquence est un chemin unique du graphe. Par exemple, un comportement de la forme de celui de la figure 3.14 (oscillation s'achevant en phase de croissance) sera codé par la séquence :

{BDCABDCABA}.

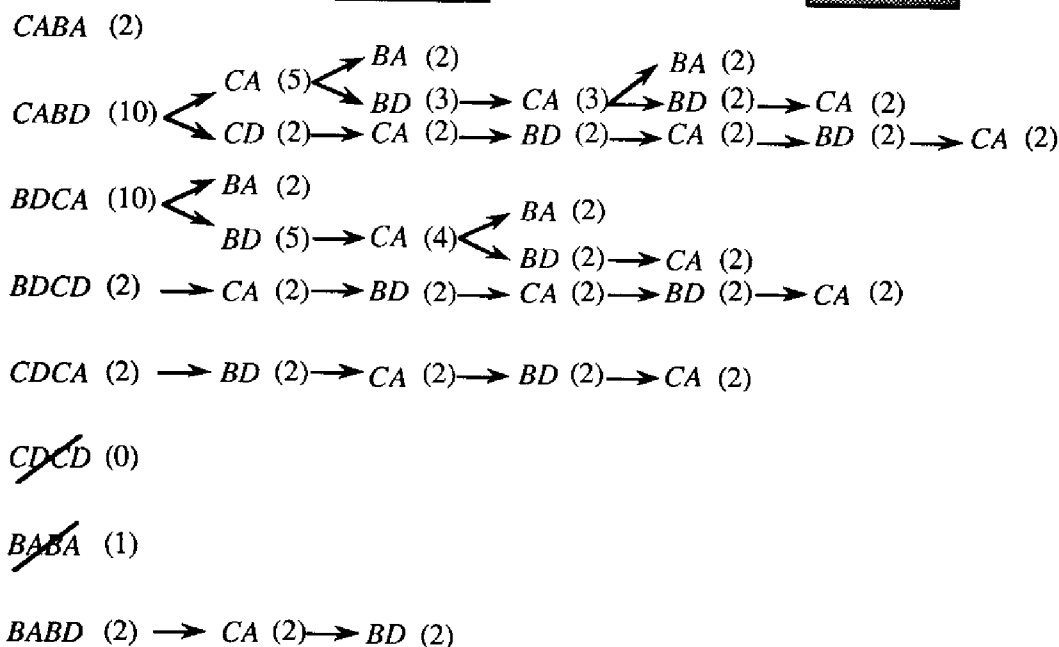


Fig. 3.13 : Recherche des plus longues séquences récurrentes dans une chaîne trapézoïdale : un exemple d'arbre. Les flèches indiquent la transition vers un autre type trapézoïdal. Chaque chemin d'une racine à un type est une séquence, et le chiffre entre parenthèses indique le nombre d'occurrences de cette séquence. Excepté pour les racines, les séquences trouvées une ou zéro fois ne sont pas marquées. Ne sont pas non plus représentés les emplacements de chaque séquence dans le domaine. Les séquences trouvées sont grisées par paires dans la chaîne symbolique.

Un simple examen de l'arbre donné en exemple figure 3.13 montre que cette forme de comportement est présente 2 fois. Elle est incluse dans une séquence récurrente plus longue. L'utilisateur dispose donc de l'information additionnelle selon laquelle le comportement qu'il cherche fait partie d'un comportement plus long, qui commence plus tôt dans l'évolution. Cela peut l'amener à se focaliser sur ce dernier comportement.



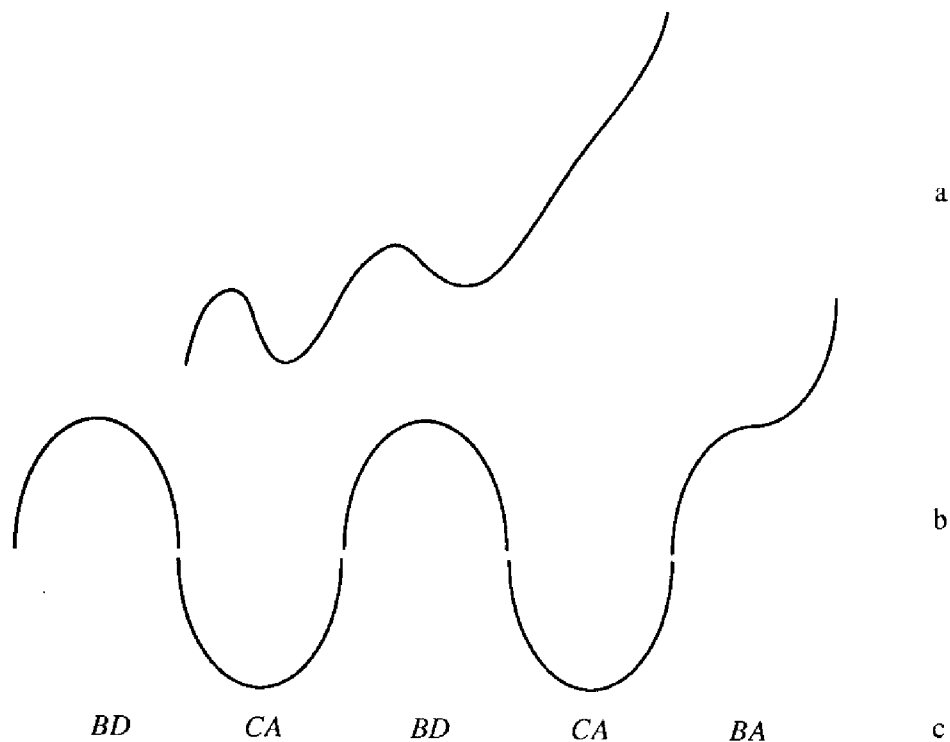


Fig. 3.14 : (a) un exemple de comportement cherché par l'utilisateur; (b) sa représentation "normalisée" avec des formes-types; (c) la traduction symbolique de ce comportement.

### 3.4.5 Modification des comportements au cours de l'abstraction

L'intérêt de cette analyse n'est pas tant son caractère exhaustif ou profond quant aux caractéristiques comportementales révélées, mais le fait qu'elle est *applicable à n'importe quel niveau d'abstraction*. Ainsi l'on dispose à chaque étape d'un jeu d'informations facilement comparables car exprimées dans les mêmes termes. L'abstraction successive modifie la chaîne symbolique, et donc son interprétation. Voyons ce qu'il est possible de conclure de ces modifications.

#### *Durées et variations d'amplitude des épisodes*

Dès la première abstraction, la contrainte selon laquelle le processus évolue à l'intérieur des épisodes n'est plus imposée. Par conséquent, les variations d'amplitude des épisodes ne sont plus interprétables. Il en va de même de la raideur.

Les durées restent par compte fiables, sauf si l'on étudie un épisode *BA* ou *CD* contenant un changement de direction (cf. 2.4.4). Dans ce cas, la somme des durées des comportements remplaçants (codés par un *BD* et un *CA*) est connue, mais pas la durée individuelle du *BD* ou du *CA*. Si l'on a besoin de la date entre ces deux épisodes fictifs, il faut alors raisonner par intervalles.

### *Stabilité dans un épisode*

Lors de l'abstraction, des blocs de trois épisodes trapézoïdaux sont regroupés en un seul épisode. La conservation de l'étoile dans le type du trapèze résultant indique donc que le point de stabilité était, à l'étape précédente, ou bien dans le premier épisode du bloc (si le type résultant débute avec  $C^*$  ou  $B^*$ ), ou bien dans le troisième (si le type résultant finit par  $A^*$  ou  $D^*$ ), ou encore dans les deux (si le type résultant est  $C^*A^*$ ,  $C^*D^*$ ,  $B^*D^*$  ou  $B^*A^*$ ). Evidemment, dans les autres cas, l'étoile est perdue et la localisation du point de stabilité ne peut plus se faire à cette étape.

A l'inverse, peut-on considérer que l'abstraction successive fait apparaître un nouveau point de stabilité ? Non, si le type résultant est  $BA$  ou  $CD$ . Par contre, un épisode  $CA$  ou  $BD$  dont les côtés parallèles sont horizontaux apparaît comme contenant un point de stabilité à cette étape, et pas dans les représentations plus fines. Un tel épisode est noté avec deux étoiles ( $C^*A^*$  ou  $B^*D^*$ ).

La stabilité sur plusieurs épisodes est impossible à évaluer, puisque les variations d'amplitude des épisodes d'une représentation abstraite ne sont plus disponibles.

### *Comportement oscillatoire*

Examinons la séquence suivante, extraite d'une chaîne trapézoïdale à l'étape  $s$  :

$$\{\underline{BDCABD} \overset{\min}{CD} \underline{CDCABDCABDCABABDCABDCABDCA}\},$$

On considère que les épisodes sont numérotés de 1 à 17. La recherche des comportements oscillatoires (soulignés) conclut à la détection de :

$$\begin{aligned} &\{BDCABD\} \text{ de } 1 \text{ à } 3, \\ &\{CABDCABDCA\} \text{ de } 6 \text{ à } 10 \text{ et} \\ &\{BDCABDCABDCA\} \text{ de } 12 \text{ à } 17. \end{aligned}$$

Supposons que l'épisode de durée minimale dans cette représentation se trouve être unique et en 4<sup>ème</sup> position ( $CD$ ). La chaîne à la granularité minimale  $G^{(s+1)}$  est donc :

$$\{BDCABDCABDCABDCABABDCABDCABDCA\},$$

dans laquelle la recherche des épisodes de durée minimale et des oscillations conduit à :

$$\{\underline{BDCABDCABDCABDCABAB} \overset{\min}{\overset{\min}{\overset{\min}{BDCA}}} \underline{BDCA}\}.$$

Les séquences oscillatoires détectées sont alors :

$$\begin{aligned} &\{BDCABDCABDCABDCA\} \text{ de } 1 \text{ à } 8 \text{ et toujours (même localisation)} : \\ &\{BDCABDCABDCA\} \text{ de } 10 \text{ à } 15. \end{aligned}$$

La première séquence détectée traduit un "nouveau" comportement oscillatoire. Il est visible à cette étape, alors qu'il ne l'était pas à la précédente.

Si on a ensuite plusieurs épisodes minimaux, les n°10, 12 et 14 ( $\overset{\min}{BD}$ ), la séquence à la granularité minimale  $G^{(s+2)}$  devient :

$$\{BDCABDCABDCABDCABA\},$$

où la deuxième séquence oscillatoire de l'étape précédente a disparu. Elle n'est plus visible à cette granularité minimale, où l'intervalle qu'elle occupait est maintenant représenté par une phase de croissance (*BA*).

Cet exemple traduit la possibilité qu'a un comportement oscillatoire de disparaître ou d'apparaître dans la représentation. Ceci pourra être employé pour déterminer des granularités minimales et fréquences d'échantillonnage "intéressantes" (cf. 3.3.3) : la nécessité d'avoir un comportement oscillatoire sur un intervalle (pour la validation d'un modèle par exemple) conduit à fixer un ensemble de valeurs possibles pour la fréquence d'échantillonnage. Dans le cas d'une analyse de série de mesures, l'apparition d'un comportement oscillatoire renseigne sur un processus et peut également guider sa modélisation.

Une fois fixées une granularité minimale intéressante et la fréquence d'échantillonnage correspondante, le processus est ré-échantillonné et sa structure des granularités étudiée. Si elle est similaire à la structure initiale, alors on pourra en conclure que l'on a trouvé la "bonne" granularité minimale de représentation du processus (cf. 3.3.3 pour le détail de ce raisonnement).

#### *Réurrence*

Le principe est le même pour la détection de récurrences que pour la détection de comportements oscillatoires. Par exemple, prenons la séquence à l'étape *s* :

{BABDCABDCABDCDCABDCABDCABDCABABA}.

Supposons qu'une récurrence de {*BDCABDCABD*} est trouvée des épisodes n°2 à 6 et 9 à 13. A l'étape suivante, les épisodes minimaux n°3 et 12 ont été regroupés avec leurs voisins. Il reste :

{BABDCABDCDCABDCABDCABABA}

où {*BDCABD*} est récurrente sur les mêmes intervalles du domaine. La similarité de comportement est donc maintenue bien que certaines caractéristiques comportementales aient été perdues, qui plus est à un endroit différent de la séquence récurrente (n°3 : vers le début de la première occurrence; n°12 : vers la fin de la seconde).

Retrouver une similarité de comportement sur le même intervalle et à deux étapes d'abstraction confère à la représentation une robustesse qui incite à la confiance. Il est alors justifié de prendre comme granularité minimale intéressante la plus grossière des deux et de tracer la structure des granularités pour une nouvelle série de points ré-échantillonnée à la fréquence d'échantillonnage correspondante (cf. 3.3.3).

Lorsque l'abstraction supprime la récurrence d'un comportement à une étape, on en conclut que la présence de ce comportement en plusieurs endroits du domaine n'était

visible qu'aux niveaux de détail des étapes antérieures. Inversement, l'apparition d'une récurrence est concevable : la similarité de comportement était cachée par trop de détails, et est révélée dans une représentation plus grossière.

*Modification des comportements après modification de la fréquence d'échantillonnage*

Tout ce qui a été dit précédemment pour un changement de granularité minimale par abstraction est vrai pour un changement de granularité minimale par modification de la fréquence d'échantillonnage : le raisonnement reste le même, sous réserve de la robustesse des représentations vis-à-vis des séries de points initiales (cf. 3.3.3).

3.4.6 Facilité et limites d'interprétation des chaînes

*Points positifs*

Les fonctionnalités détaillées jusqu'ici montrent que l'on peut arriver à balayer un ensemble de caractéristiques comportementales assez large, par la seule utilisation des symboles. Un avantage de ce mode d'interprétation est donc d'offrir un raisonnement de haut-niveau (symbolique), pouvant être complété à tout moment par l'information numérique disponible. Cet aspect illustre bien à notre sens la place que peut prendre le raisonnement qualitatif (symbolique) dans l'analyse des systèmes dynamiques complexes.

Plus prosaïquement, ce traitement de l'information symbolique permet de *dissocier* la forme des comportements de leur amplitude et durée. On est donc "purement qualitatif", tout en rattachant une représentation qualitative à une granularité minimale numérique. Ainsi, on ne perd pas de vue notre préoccupation première, qui est l'ambivalence d'un raisonnement quantitatif/qualitatif.

*Points négatifs*

Il convient de montrer quelques points embarrassants liés à l'interprétation symbolique d'une représentation. D'abord, il faut noter la prépondérance "naturelle" des types *BD* et *CA* (contenant un maximum ou un minimum) lorsque l'on traite une évolution fluctuante. De plus, aucun regroupement d'épisodes de types *BD* et *CA* ne peut former un *BA* ou *CD* alors qu'un regroupement d'épisodes comprenant un *BA* ou *CD* a des chances de donner un *BD* ou *CA*. Si l'on ajoute le fait qu'un trapèze résultant de type *BA* ou *CD* est remplacé par un *BD* et un *CA* s'il contient un changement de tendance, on comprend que ces types se fassent rares après quelques étapes d'abstraction !

En pratique, il en résulte une détection abusive de séquences oscillatoires. On corrige usuellement ce travers en testant les durées et variations d'amplitude des épisodes des séquences détectées. Ainsi, on se focalise lorsque c'est possible sur les séquences présentant *en plus* des caractéristiques numériques remarquables pour sélectionner les

séquences récurrentes, oscillatoires et périodiques. On s'éloigne alors du traitement symbolique pur...

On a déjà parlé du handicap que pouvait constituer le caractère local de la représentation, avec en particulier un manque de fiabilité et de robustesse (cf. 2.5.2). Ici, on peut arguer que la connaissance de points de stabilité dans un épisode, de la stabilité sur plusieurs épisodes, de réponses locales d'un système du 1<sup>er</sup> ou 2<sup>nd</sup> ordre, etc. est due au hasard des points initiaux, ou bien n'est pas toujours utile en regard de "l'aspect global". On rappellera qu'il existe des outils pour traiter le global (lisseurs, filtres, analyse spectrale) dont les performances peuvent ne pas être optimales pour l'interprétation de processus fortement irréguliers (cf. 4.3). Egalement, l'essai de plusieurs fréquences d'échantillonnage et l'interprétation à plusieurs niveaux d'abstraction renforce la robustesse des résultats.

#### *Perspectives*

Un codage symbolique plus fin des épisodes pourrait éviter la détection d'une trop grande quantité de comportements de la forme {*BDCABDCABDCA...*} qui sont assez éloignés de ce que l'on peut considérer comme oscillatoire. Cette typologie serait établie à partir des quatre formes élémentaires actuellement utilisées en introduisant des distinctions numériques. Cela rejoindrait ce que l'on fait pour le moment, mais en se servant du numérique en amont de la détection au lieu de le faire en aval.

### **3.5 Interprétation spectrale d'une représentation**

#### 3.5.1 Présentation des spectres

Nous avons vu que le spectre de fréquences d'un signal temporel donne la distribution de ses fréquences (cf. 1.4.1). De manière analogue, nous proposons ici une batterie de spectres décrivant sous forme d'histogrammes la distribution des caractéristiques des épisodes dans une représentation. Ils complètent les chaînes symboliques : ils permettent d'étudier la "population" d'épisodes dans sa globalité, sans localisation temporelle, contrairement aux chaînes symboliques. C'est le comportement du processus sur tout le domaine qui est caractérisé à n'importe quel niveau d'abstraction par l'interprétation des spectres.

Les épisodes ont trois caractéristiques significatives : leur type, leur durée (accessible à travers leur granularité) et leur variation d'amplitude (cette dernière n'étant certes fiable que pour les représentations non abstraites, cf. 2.4.4). On a donc trois sortes de spectres : les spectres des types, des granularités ou des variations d'amplitude. L'abscisse d'un spectre

porte une de ces trois grandeurs. Quant à l'axe des ordonnées, il indique ce que mesure le spectre : un nombre d'épisodes, des durées ou des variations d'amplitude.

Les spectres des granularités et des variations d'amplitude peuvent être dessinés sans distinguer les types d'épisodes, ou bien pour un type symbolique particulier, ce qui permet de s'attacher à une forme de comportement particulière.

Ceci conduit à établir au maximum 33 spectres pour une représentation (Fig. 3.15) ! Parmi eux, les spectres faisant intervenir des variations d'amplitude n'ont de sens que pour la représentation triangulaire et la trapézoïdale à l'étape zéro. Néanmoins, une telle variété empêche une analyse exhaustive de chacun d'eux. Nous privilégions donc l'inférence d'une interprétation simple, à partir d'une analyse numérique ou statistique. Des exemples sont donnés afin de préciser la particularité de chaque spectre.

Pour une représentation trapézoïdale abstraite, le spectre des types répertorie un épisode *BA* ou *CD* avec changement de tendance comme deux épisodes *BD* et *CA*, de durée et de variation d'amplitude inconnues (cf. 2.4.4).

ord. \ abs.	types	granularités	variations d'amplitude
nombre d'épisodes	— <i>BD CA BA CD</i> — <i>A B C D</i>	— tous types — un seul type	— tous types — un seul type
durées	— <i>BD CA BA CD</i> — <i>A B C D</i>	— tous types — un seul type	— tous types — un seul type
variation d'amplitude	— <i>BD CA BA CD</i> — <i>A B C D</i>	— tous types — un seul type	— tous types — un seul type

Fig. 3.15 : Les différents spectres possibles. Les zones grisées indiquent ceux qui ne sont pas tracés pour les représentations abstraites. Il ne reste donc que 12 spectres à partir de la représentation trapézoïdale à l'étape 1.

### 3.5.2 Spectres des types

Ils permettent la comparaison directe des types (i.e. des formes de comportement exprimées par chacun), et ne sont constitués que de quatre points (un pour chaque type). Ils ont l'avantage d'être simples à analyser, mais ne donnent aucune indication sur la façon dont le processus fluctue dans le temps (voir les spectres des granularités) et en amplitude (voir les spectres de variation d'amplitude).

Le spectre des types, lorsqu'il est exprimé en nombre d'épisodes (Fig. 3.16a) permet d'évaluer la proportion du nombre total d'épisodes représentée par chaque type. Par exemple : "*BD* et *CA* constituent 90% des épisodes, *CD* et *BA* 10%" indique que le comportement est principalement oscillatoire. "Il y a 23 épisodes *BD*" signifie qu'il y a 23

pics. “Le nombre d’épisodes de chaque type est le même à 5% près” indique un processus aléatoire.

S’il relate les durées des épisodes, le spectre exprime la durée relative de chaque comportement par rapport aux autres. Par exemple : “85% du temps est pris par les épisodes BA” indique que le processus croît la plupart du temps.

Le spectre prenant en compte les variations d’amplitude en ordonnées montre de la même façon le poids relatif de chaque comportement. Par exemple : “80% de la variation d’amplitude totale est due aux épisodes BA”.

### 3.5.3 Spectres des granularités et des variations d’amplitude

#### *Classes de granularités*

Une *classe de granularités* est définie sur l’axe des abscisses d’un spectre des granularités (Fig. 3.16b). C’est un intervalle de granularités suffisamment semblables pour être interprétées comme reflétant une façon de fluctuer commune et distincte de celle d’une autre classe. Par exemple, l’existence de deux classes distinctes  $[0.08;0.15]$  et  $[0.75;0.85]$  regroupant à elles deux la totalité des épisodes dénote la présence de deux façons de fluctuer, dont l’une est au moins 5 fois plus rapide que l’autre. (Attention à ne pas confondre cette interprétation, non localisée dans le temps, avec celle des dynamiques imbriquées (cf. 2.6), ni avec celle obtenue par le calcul des indices — locaux — de fluctuation (cf. 3.2.2)).

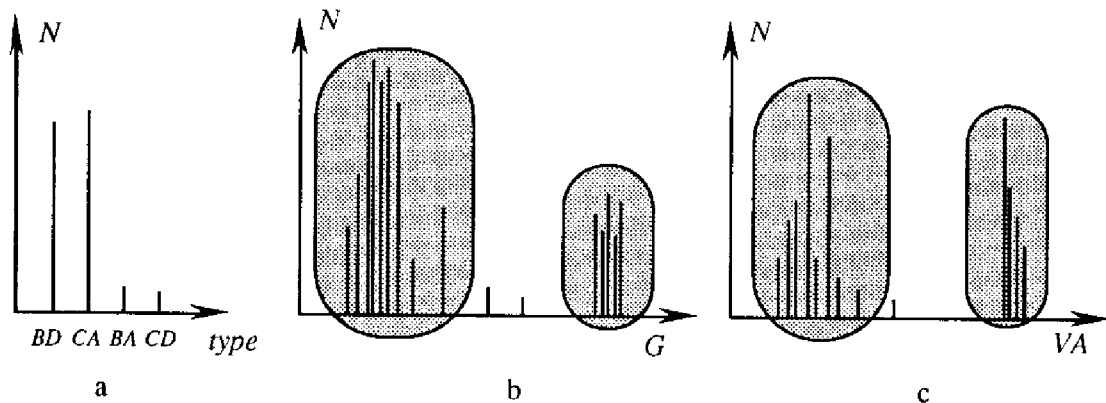


Fig. 3.16 : Exemples de spectres exprimés en nombre d’épisodes  $N$ . (a) spectre des types; (b) spectre des granularités  $G$ ; (c) spectre des variations d’amplitudes  $VA$ . Les zones grisées correspondent aux classes de granularités et de variations d’amplitude.

Afin de déterminer les classes, on cherche sur l’axe des abscisses du spectre la différence maximale entre deux granularités consécutives. Une première classe regroupe les granularités à gauche de cette différence, une deuxième groupe le reste. La même chose est faite avec chacune de ces deux classes, etc. En pratique, l’utilisateur fixe un nombre désiré de classes (habituellement deux ou trois), ou bien un seuil en-deça duquel les granularités

sont dites suffisamment semblables. Ceci est empiriquement accompli à partir de l'aspect visuel du spectre.

Si la séparation entre classes n'est pas claire, ou bien si elles n'ont que peu d'épisodes, elles perdent de leur représentativité. L'analyse est moins nette, mais reste valide.

#### *Spectres des granularités*

Les spectres des granularités exprimés en nombre d'épisodes montrent le nombre d'épisodes présents à chaque granularité (Fig. 3.16b). Les conclusions extraites de ces spectres concernent la proportion du nombre total d'épisodes représenté par chaque classe de granularités. Avec ou sans distinction de type, ces conclusions permettent donc de relier chaque façon de fluctuer du processus à son importance en nombre d'épisodes.

La comparaison de ces spectres est digne d'intérêt. Par exemple : "80% des *CD* sont dans une classe de granularités grossières, et 87% des *BA* dans une classe de granularités fines" signale que les phases de décroissance durent (pour la plupart) plus longtemps que les phases de croissance.

En multipliant pour chaque granularité le nombre d'épisodes par leur durée (resp. leur variation d'amplitude), on fait apparaître la durée (resp. la variation d'amplitude) explicite des fluctuations. L'interprétation relie alors chaque façon de fluctuer à son importance en temps (resp. en variation d'amplitude). Par exemple : "La dernière classe occupe 85% du temps total" montre que 85% du temps, le processus fluctue lentement.

#### *Spectres des variations d'amplitude*

Tout ce qui vient d'être présenté concernant les granularités s'applique aux variations d'amplitude pour les représentations non-abstraites. Chaque classe est alors une *façon de fluctuer en amplitude* (fortes / faibles variations d'amplitude, cf. Fig. 3.16c).

Lorsqu'il est construit pour chaque type, le spectre sert à la comparaison : "90% des *CD* présentent de fortes variations d'amplitude et 85% des *BA* en ont de faibles" traduit le fait que les phases de décroissance sont plus marquées que les phases de croissance.

#### 3.5.4 Un test statistique pour le spectre des granularités (ou des variations d'amplitude) exprimé en nombre d'épisodes

Notre but est de tester si la "population" d'épisodes suit une certaine fonction de répartition théorique. Pour cela, le test du  $\chi^2$  d'ajustement d'une distribution théorique à des fréquences observées est employé. Il sert à reconnaître une loi uniforme, binomiale, de Poisson, etc. Nous expliquons brièvement la théorie dans le cas d'un spectre de granularités exprimé en nombre d'épisodes.



Soit  $F_{obs}$  la fonction de répartition (inconnue) de la population d'épisodes observée, et  $F_{théo}$  la théorique. L'échantillon est composé de  $n$  épisodes répartis entre  $K$  classes de granularités. Soit  $p_i$  la probabilité théorique d'un épisode d'appartenir à la classe  $K_i$ . Alors la statistique de test est :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(\text{effectif observé de } K_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i},$$

où  $n \cdot p_i$  est l'effectif théorique de la classe  $K_i$ . On accepte l'hypothèse selon laquelle la population d'épisodes observée suit  $F_{théo}$  si on a l'inégalité :

$$\chi^2 \leq \chi_{\alpha, K-1}^2,$$

où  $\chi_{\alpha, K-1}^2$  est le  $(1-\alpha)$ -quantile de la distribution  $\chi^2$  à  $K-1$  degrés de liberté;  $(1-\alpha)$  est le niveau du test ( $\alpha$  est la probabilité de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie). Le terme  $\chi_{\alpha, K-1}^2$  est donné par une table de quantiles.

Un exemple de test du  $\chi^2$  appliqué à une distribution binomiale de paramètre 1/2 (Fig. 3.17) est donné au chapitre 4. En l'occurrence, une telle distribution des épisodes ne justifie pas qu'un changement de fréquence d'échantillonnage soit appliqué. En effet, cela signifie que n'importe quelle valeur de  $X$  a les mêmes chances d'être suivie, un pas plus tard, d'une valeur plus grande ou plus petite (croissance ou décroissance avec même probabilité). Il n'y a donc pas de déterminisme dans la durée des comportements et le modèle sous-jacent de ces durées (représentant la cyclicité, la fréquence décroissante ou croissante du comportement) est infaisable. Cela ne dispense pas de tracer d'autres spectres, qui peuvent fournir d'autres types d'informations.

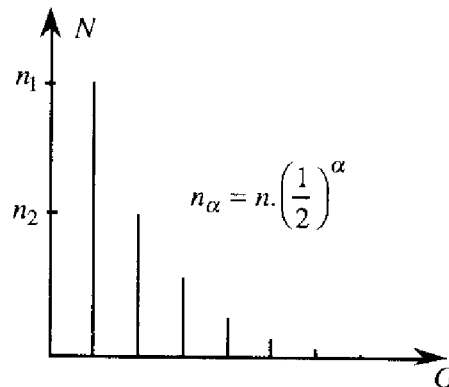


Fig. 3.17 : Une répartition théorique aléatoire des granularités dans un spectre des granularités  $G$  exprimé en nombre d'épisodes  $N$ . Le nombre total d'épisodes  $n$  est réparti en 7 classes "idéales" de population  $n_\alpha$ , où  $\alpha$  est le numéro de la classe.

### 3.5.5 Modification des spectres au cours de l'abstraction

Comme avec les chaînes symboliques, les interprétations des spectres à différents niveaux d'abstraction sont directement comparables. Elles mettent donc en évidence les modifications (provoquées par l'abstraction) de la représentation des comportements globaux. Ici aussi, nous dégagons à travers des exemples l'utilité des spectres pour le choix d'une granularité minimale, c'est-à-dire les retombées pour l'aide à la modélisation / simulation.

Rappelons que les spectres faisant explicitement intervenir des variations d'amplitude ne sont pas déterminables pour les représentations abstraites. Il ne reste donc que les spectres des types ou des granularités, exprimés en nombre d'épisodes ou selon les durées.

#### *Spectres des types*

Ces spectres jouent un peu le même rôle que les chaînes symboliques, sans localiser les comportements. On retrouve donc des conclusions similaires à celles proposées au 3.4.5. La prépondérance maintenue ou modifiée d'épisodes  $BD$  et  $CA$  illustre par exemple le maintien, l'apparition ou la disparition d'un comportement majoritairement oscillatoire (Fig. 3.18).

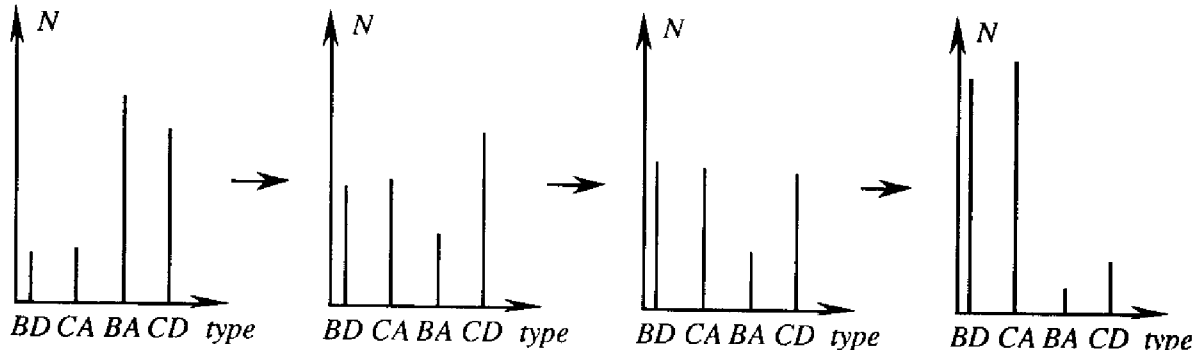


Fig. 3.18 : Un exemple de modification du spectre des types exprimés en nombre d'épisodes au cours de quatre étapes d'abstraction. Un comportement globalement oscillatoire tend à apparaître alors que les épisodes de phases de croissance ou décroissance pure disparaissent.

Lorsque l'utilisateur s'intéresse à la globalité du comportement du processus plutôt qu'aux comportements localisés sur un intervalle particulier du domaine, la sélection des granularités minimales intéressantes découle de cette analyse multi-niveaux :

— s'il attend un comportement oscillatoire en nombre de fluctuations, ce sont les granularités minimales où le spectre exprimé en nombre d'épisodes présente une forte proportion de  $BD$  et de  $CA$ , car ils expriment des phases de retour à niveau. Dans le cas d'une interprétation de résultats de simulation, si les spectres laissent toujours apparaître

une majorité de  $BA$  et de  $CD$  (croissances ou décroissances privilégiées), il est clair que le modèle doit être revu.

— S'il désire que la plus grande part du domaine soit occupée par un comportement globalement oscillatoire, c'est le spectre exprimant les durées qu'il faut observer pour les différentes représentations.

### *Spectres des granularités*

Au cours des abstractions, un spectre des granularités voit sa classe de granularités fines s'amenuiser progressivement et ses valeurs se déplacer vers la droite (Fig. 3.19).

Une classe de granularités grossières peut voir son effectif se renforcer à cette occasion. Cela montre que la façon de fluctuer devient majoritairement (en nombre ou durée) la plus lente. Mais une classe de granularités grossières peut aussi très bien se dépeupler dans le même temps, si les épisodes de granularité fine sont regroupés avec des plus grands. Il y a alors constitution d'une ou de plusieurs autres classes, de granularités encore plus grandes, et précisant de nouvelles façons de fluctuer du processus.

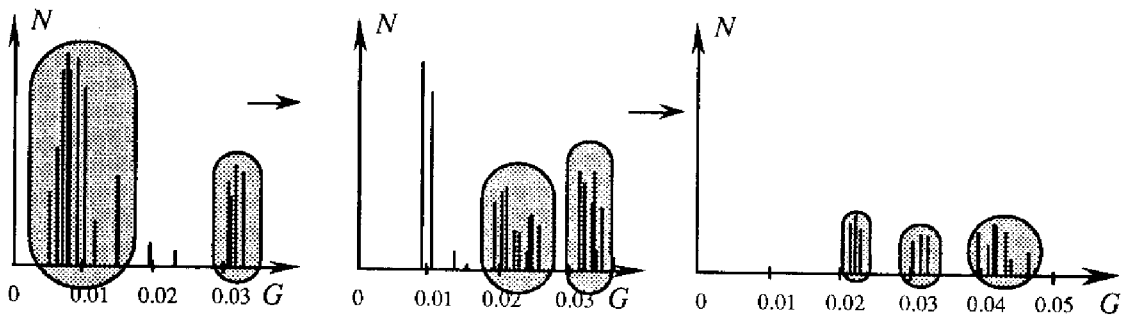


Fig. 3.19 : Un exemple de modification du spectre des granularités exprimé en nombre d'épisodes, sans faire de distinction de type. Les trois spectres correspondent à trois étapes d'abstraction non consécutives. L'interprétation est donnée dans le texte.

Sur l'exemple de la figure 3.19, on voit entre les deux premiers spectres un dépeuplement des granularités fines et la constitution d'une classe intermédiaire. Les épisodes de granularité fine sont donc proches les uns des autres dans le temps et se sont majoritairement regroupés entre eux (la classe des granularités grossières augmente peu). On combine alors l'utilisation des spectres avec celle de la structure des granularités pour voir si ces régularités sont localisées ou non dans le domaine (cf. 3.3.4).

Entre les étapes d'abstraction dont on a extrait les second et troisième spectres, la classe de granularités fines a disparu. La façon de fluctuer qu'elle dénotait a été abstraite en totalité. Des épisodes de cette classe, de la classe intermédiaire et de la classe des granularités grossières ont donné naissance à une nouvelle classe, constituée d'épisodes de granularité encore plus grossière, formant une nouvelle façon "très lente" de fluctuer. C'est

cette façon de fluctuer qui devient petit à petit majoritaire, en nombre d'épisodes, et donc également en durée.

### 3.5.6 Facilité et limites d'interprétation des spectres

#### *Points positifs*

La diversité des spectres fait la qualité de leur interprétation. En particulier, le fait de pouvoir exprimer le même spectre selon trois critères (nombre d'épisodes, durée, variation d'amplitude) permet de comprendre un comportement global sous des aspects indépendants mais complémentaires. De même, la possibilité de considérer au choix "les fluctuations en général" ou bien une forme de comportement (un type d'épisode) en particulier offre une interprétation à deux niveaux.

#### *Points négatifs*

Une fois isolées les classes de granularités (ou de variations d'amplitude), l'interprétation d'un spectre est aisée. Toute la difficulté réside donc dans la constitution de ces classes. On aura noté qu'elle est difficile à réaliser de façon automatique, à moins de fixer des règles empiriques (nombre maximum de classes, seuil de similarité de deux granularités). Du moins le système d'interprétation peut-il proposer une répartition en classes, mais l'utilisateur reste maître.

L'abstraction diminue le nombre d'épisodes. Il est donc de plus en plus difficile de raisonner à partir de classes qui étant peu peuplées sont moins représentatives. La situation la plus favorable est donc celle où beaucoup d'épisodes sont présents au départ. Ainsi, il est plus facile de constituer les classes après plusieurs étapes d'abstraction.

Bien qu'il ne soit pas gênant pour l'interprétation, notons également comme point négatif le fait que les épisodes extrêmes non abstraits restent représentés dans les spectres. Mais ceci est lié à la construction des représentations et a déjà été discuté (cf. 2.5.1).

## **3.6 Conclusion : utilisation combinée des outils d'interprétation**

L'interprétation des chaînes symboliques permet de détecter une gamme de comportements des plus généraux (avec le traitement symbolique seul) aux plus fins (en ajoutant l'information numérique des durées et variations d'amplitude des épisodes). Elle est locale dans le temps. Par contre, l'interprétation spectrale n'attire pas l'attention sur la présence d'un phénomène particulier en un endroit du domaine temporel, mais fournit des considérations globales complémentaires aux considérations locales.

Le couplage chaînes symboliques/spectres s'avère être un outil puissant pour la détermination des comportements locaux ou globaux exhibés dans une représentation.

L'emploi de ces deux types d'outils s'effectue en amont de celui de la structure, puisqu'il guide le plus objectivement possible l'utilisateur vers une ou plusieurs granularités minimales intéressantes.

Dans le contexte de l'aide à la modélisation/simulation, le raisonnement interprétatif sera donc celui schématisé figure 3.20 : grâce aux caractéristiques mises en lumière, une ou plusieurs représentations et granularités minimales sont sélectionnées dans la structure des granularités. L'essai d'une nouvelle fréquence d'échantillonnage aboutit ensuite à de nouvelles représentations et une nouvelle structure. Cette dernière recense les nouvelles caractéristiques temporelles du processus, comparables aux originales en termes de localisation (n'oublions pas que la structure permet une datation précise) et de rapidité (par exemple via l'indice de fluctuation basé sur le nombre d'épisodes). L'analyse des nouvelles représentations graphiques, des nouvelles chaînes symboliques et des nouveaux spectres complète la comparaison.

Si elle est satisfaisante pour l'utilisateur, alors la granularité de représentation choisie fixe la "bonne" échelle de temps, et la nouvelle fréquence d'échantillonnage est à retenir pour ce processus. Sinon, une autre fréquence d'échantillonnage est à essayer.

Lorsque l'utilisateur est un modélisateur, ce raisonnement en boucle est alors une aide pour concevoir, améliorer et valider le modèle au regard des observations faites sur le système réel. Plus simplement, à partir d'un modèle numérique considéré comme correct, l'utilisateur dispose d'un ensemble de représentations pour chaque processus. Elles l'aident d'abord dans la compréhension du système modélisé, ensuite dans le choix d'une bonne fréquence d'échantillonnage pour la représentation de chaque processus qui l'intéresse. En prenant pour chaque processus cette fréquence d'échantillonnage comme pas de simulation, la simulation du système entier (cf. 2.2.3) est ainsi réalisée de façon performante : le pas est adapté à la dynamique de chaque processus.

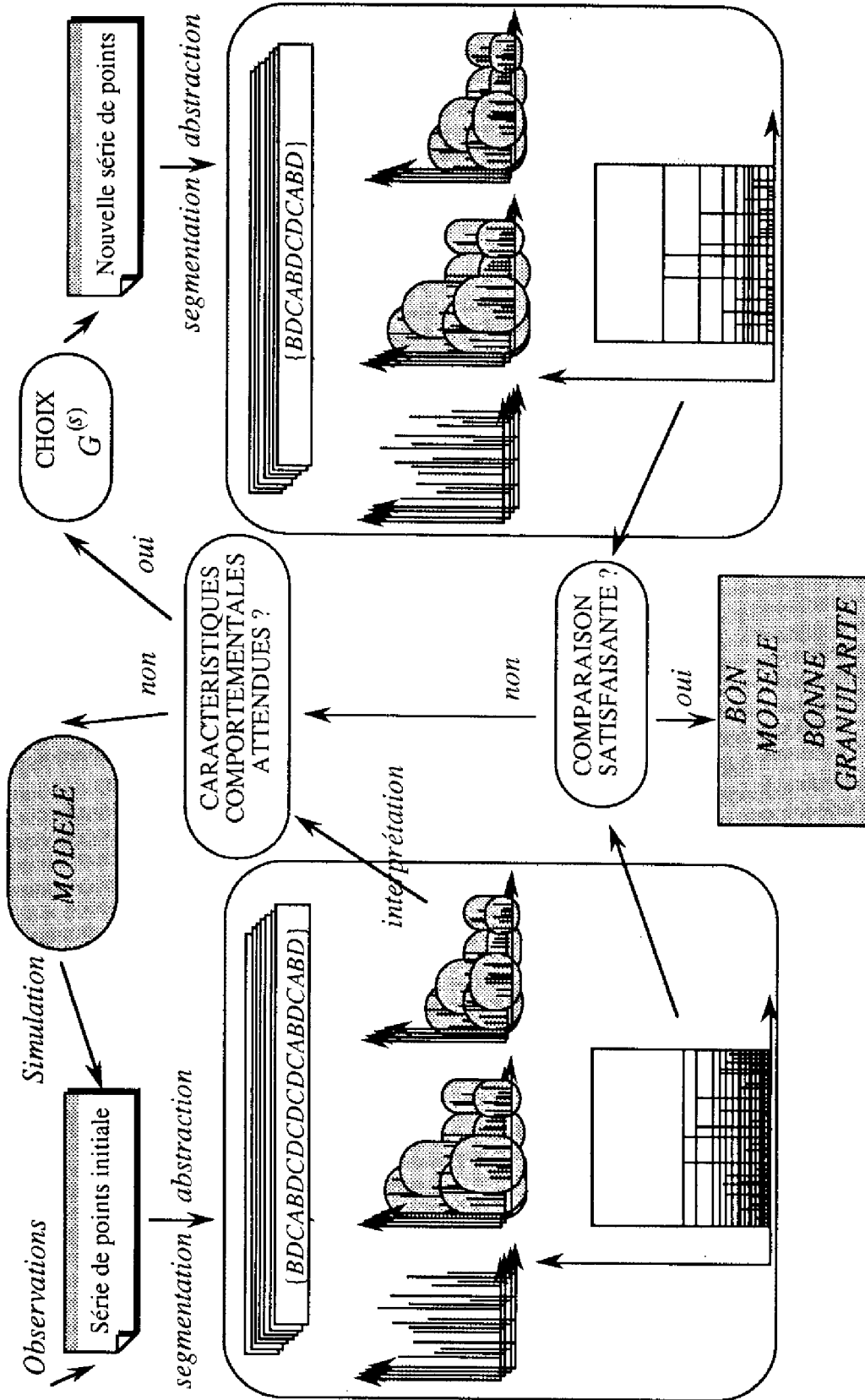


Fig. 3.20 : Le processus d'interprétation pour l'aide à la modélisation et à la simulation



## **Chapitre 4**

### **Interprétation de processus biologiques**





## 4.1 Introduction

Nous allons maintenant illustrer la méthode de représentation présentée au chapitre 2 et l'utilisation des outils d'interprétation introduits au chapitre précédent sur quelques exemples de processus tirés du domaine environnemental.

Une illustration de la méthode de séparation des dynamiques imbriquées (cf. 2.5) est fournie par le modèle proie-prédateur avec chasseurs. Nous mettrons d'abord en évidence l'interdépendance des fluctuations de chaque processus, et validerons la technique par une comparaison avec la décomposition de Fourier. Pour démontrer le caractère *local* de notre décomposition, le processus étudié sera ensuite rendu irrégulier. Une comparaison avec Fourier et les méthodes classiques de filtrage et de lissage permettra alors de dégager l'intérêt de la décomposition des dynamiques imbriquées.

Nous interpréterons ensuite un processus formé par les résultats de la simulation d'un processus agronomique complexe, issu d'un modèle de croissance dont la validité est — à peu près — assurée. Il s'agit là d'un processus-test par excellence, car la confrontation des résultats obtenus avec l'expertise d'un agronome permet la mise en lumière des qualités et des limites de notre approche.

Au préalable, décrivons l'essentiel des fonctionnalités offertes par l'implémentation informatique réalisée.

## 4.2 PARADISE (Process AbstRaction ANd Interpretation System)

### 4.2.1 Présentation et couplage avec le générateur de systèmes experts temps réel G2

PARADISE est une maquette logicielle implémentée en langage C sur Sun Sparc 1000. Elle permet le calcul automatique de toutes les représentations décrites au chapitre 2, ainsi qu'une majeure partie des interprétations présentées au chapitre 3. Pour le moment, elle ne dispose pas d'une interface graphique mais peut facilement s'appuyer sur les outils d'interface disponibles dans bon nombre de logiciels. En l'occurrence, les graphiques apparaissant au cours de ce chapitre sont obtenus avec la fenêtre graphique du logiciel de statistiques Splus.

Le logiciel PARADISE peut être utilisé seul ou couplé avec le générateur de Système Expert temps réel G2 [GEN92]. Lorsque G2 est en service, c'est son système d'affichage qui se charge des représentations, structures, chaînes et spectres.

La figure 4.1 illustre la configuration du système PARADISE et de son couplage facultatif avec G2.

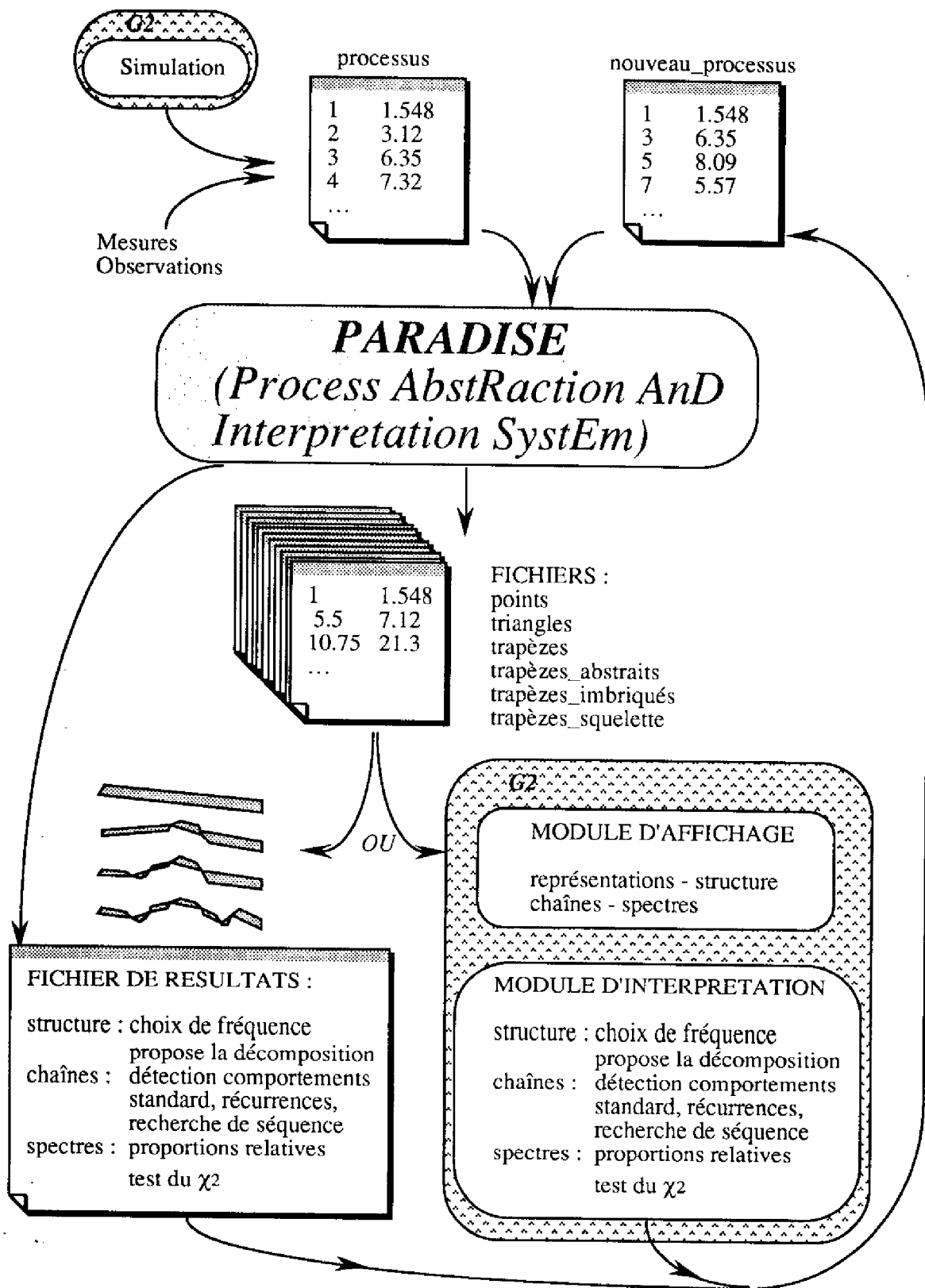


Fig. 4.1 : Schéma de fonctionnement de PARADISE et couplage possible avec G2. Les fichiers contiennent les dates en 1<sup>ère</sup> colonne et les valeurs en 2<sup>ème</sup> colonne.

#### 4.2.2 Entrées du système

PARADISE nécessite simplement en entrée un fichier de données contenant deux vecteurs : le vecteur des valeurs numériques du processus, et le vecteur des dates associées. Ce fichier peut être une série de mesures, ou un fichier de résultats de simulation. Le simulateur intégré à G2 peut par exemple être utilisé à cet effet.

#### 4.2.3 Sorties

##### *Sorties UNIX*

Lors d'une session d'interprétation, divers fichiers sont automatiquement produits : deux pour la représentation triangulaire (points des bases et points des côtés), deux pour les trapèzes à toutes les étapes d'abstraction, deux pour les trapèzes formant les évolutions imbriquée et squelette, et ceci à chaque étape si désiré. Sont également générés les fichiers permettant d'afficher la structure des granularités, ainsi que tout type de spectre.

Un fichier de résultats est également fourni à l'utilisateur. Il donne un historique des points avant le traitement, un historique des points et épisodes de toutes les représentations, les chaînes symboliques, les échelles et granularités minimales à toutes les étapes, etc.

Les chaînes symboliques sont interprétées à chaque étape : comportements oscillatoires, stabilité, récurrence et périodicité sont détectés et localisés temporellement (Fig. 4.2). Une séquence quelconque peut être demandée par l'utilisateur; le système la détecte dans la chaîne symbolique et renvoie son nombre d'occurrences et leurs positions dans le domaine temporel (Fig. 4.3). C'est la seule fonctionnalité où l'utilisateur peut intervenir.

```

Terminal
RECHERCHE D'UNE SEQUENCE ? (o/n) : o
=====
Rentrer la sequence : ABCABBCD
Ce n'est pas une sequence d'episodes trapézoïdaux.
Rentrer la sequence : BDCABABDCA
BDCABABDCA est unique, et va de l'episode 11 à l'episode 15
c'est à dire de t = 571.000000 à t = 826.000000
Autre recherche ? (o/n) : o
Rentrer la sequence : BDCABDCA BDCABDCA
BDCABDCA BDCABDCA est récurrente 2 fois :
de l'episode 1 à l'episode 8
c'est à dire de t = 156.000000 à t = 468.000000
de l'episode 14 à l'episode 21
c'est à dire de t = 736.000000 à t = 1141.000000
Autre recherche ? (o/n) : o
Rentrer la sequence : BABDCCDCA
Sequence non trouvée dans la chaîne
Autre recherche ? (o/n) : █

```

Fig. 4.3 : Extrait du fichier de résultats : recherche de séquences particulières dans la chaîne symbolique trapézoïdale. Le système reconnaît si la séquence demandée est bien formée d'épisodes trapézoïdaux; il produit ensuite le nombre et l'emplacement des occurrences de cette séquence.

Text Editor V3.4 [essai] - reset30, dlir /home/ossau/aypiles/S/ETR.s/ETRA0/SV\_SORTIES.S

CIATINE SYMBOLIQUE TRIANGULAIRE : CABDCABDCABDCABDCABDCABDCABDCABDCABDCABDC\* D\* CAB

Domaine d'etude = duree entre le premier et le dernier dtp: 1620.000000  
 Nombre de points composant l'evolution triangulaire : 123

RECHERCHE DE COMPORTEMENTS STANDARD:  
 Sequences caracteristiques d'un comportement oscillatoire:

CABDCABDCABDCABDCABDCAB de l'episode 0 a l'episode 26 c'est a dire de t = 1.000000 a t = 706.000000  
 ABDCABDCABDCABDCABDCAB de l'episode 27 a l'episode 52 c'est a dire de t = 706.000000 a t = 1351.000000  
 ABDC de l'episode 53 a l'episode 56 c'est a dire de t = 1351.000000 a t = 1546.000000  
 DCAB de l'episode 57 a l'episode 60 c'est a dire de t = 1546.000000 a t = 1621.000000

Ampli decroissante (stabilite) CABD des episodes 0 a 3 c'est a dire de t = 1.000000 a t = 276.000000  
 Ampli decroissante (stabilite) CABD des episodes 20 a 23 c'est a dire de t = 496.000000 a t = 616.000000  
 Duree constante BDCABDCABDCAB des episodes 2 a 14 c'est a dire de t = 196.000000 a t = 391.000000  
 Duree constante ABDC des episodes 17 a 20 c'est a dire de t = 451.000000 a t = 511.000000  
 Duree constante ABDC des episodes 31 a 34 c'est a dire de t = 811.000000 a t = 871.000000  
 Duree constante DCABDCA des episodes 45 a 51 c'est a dire de t = 1201.000000 a t = 1306.000000

PATTERN-MATCHING SUR CIATINE TRIANGULAIRE:  
 SEQUENCES RECURRENTES MAXIMALES :  
 =====

ABDCABDCABDCABDCABDCABDC (2 fois) :  
 De l'episode 5 a l'episode 30 c'est a dire de t = 241.000000 a t = 811.000000  
 De l'episode 31 a l'episode 56 c'est a dire de t = 811.000000 a t = 1546.000000  
 (periodicite de periode 26)

ABDCABDCABDCABDCABDCABDC (2 fois) :  
 De l'episode 1 a l'episode 26 c'est a dire de t = 151.000000 a t = 706.000000  
 De l'episode 27 a l'episode 52 c'est a dire de t = 706.000000 a t = 1351.000000  
 (periodicite de periode 26)

DCABDCABDCABDCABDCABDCABDC (2 fois) :  
 De l'episode 3 a l'episode 28 c'est a dire de t = 211.000000 a t = 751.000000  
 De l'episode 29 a l'episode 54 c'est a dire de t = 751.000000 a t = 1471.000000  
 (periodicite de periode 26)

BDCABDCABDCABDCABDCABDC (2 fois) :  
 De l'episode 2 a l'episode 27 c'est a dire de t = 196.000000 a t = 736.000000

Fig. 4.2 : Extrait du fichier de résultats : détection des comportements oscillatoires et des récurrences (par mise en correspondance de motifs) dans une chaîne triangulaire.

### *Sorties G2*

G2 permet une interactivité que nous n'avons pas cherché à avoir sous UNIX. L'utilisateur peut ici faire apparaître de façon dynamique (sans avoir à arrêter le moteur d'inférence) les résultats (représentations, structure, chaînes, spectres, et leur interprétation) pour différentes séries de points initiales. Le dialogue qui s'instaure entre l'utilisateur et G2 autorise ainsi le raisonnement en boucle de la figure 3.20 au cours d'une même "session". Le déroulement continu de cette session facilite grandement la comparaison des résultats engendrés par les différents outils (Fig. 4.4).

Les facilités d'affichages graphiques et l'interfaçage convivial permettent une utilisation de haut-niveau ne sollicitant pas une connaissance profonde des outils d'interprétation implémentés. Bien que le fonctionnement *temps réel* du moteur d'inférence ne soit pas pour le moment utilisé, les capacités de description des événements et de raisonnement temporel de G2 se sont montrées adaptées aux tâches accomplies.

Ce sont des objets intégrés à G2 (de la classe *graph*) qui se chargent de toutes les représentations par épisodes (Fig. 4.5). La structure des granularités et les spectres sont des objets de la classe *chart*, les chaînes symboliques affichées dans des *readout-tables*. Les fichiers générés par PARADISE sont lus par G2 au moyen de l'interface fichiers *GFI* (*G2 File Interface*).

#### 4.2.4 La base de connaissances de PARADISE dans G2

##### *Classes*

La représentation des connaissances est basée sur un formalisme objet. Il s'avère bien adapté à l'implémentation de nos outils d'interprétation, dissociables en trois classes principales (structure, chaîne et spectre) et analysables de façon générique pour toutes les étapes de l'abstraction successive. La génération et le traitement de nouveaux objets pour de nouvelles séries de points sont alors immédiats et sans danger d'inconsistance.

Une classe d'objets appelée *outil-d'interprétation* est créée. Elle a pour sous-classes les classes *chaîne-symbolique*, *structure-des-granularités* et les classes décrivant les spectres. La classe *chaîne-symbolique* a elle-même deux sous-classes selon que la chaîne est triangulaire ou trapézoïdale. Chaque sous-classe de chaînes possède des attributs génériques (la chaîne elle-même, plus des attributs concernant les éventuelles séquences oscillatoires et récurrentes qui s'y trouvent) et spécifiques (tableau des durées et variations d'amplitude de chaque épisode). Toutes les chaînes sont ainsi entièrement spécifiées.

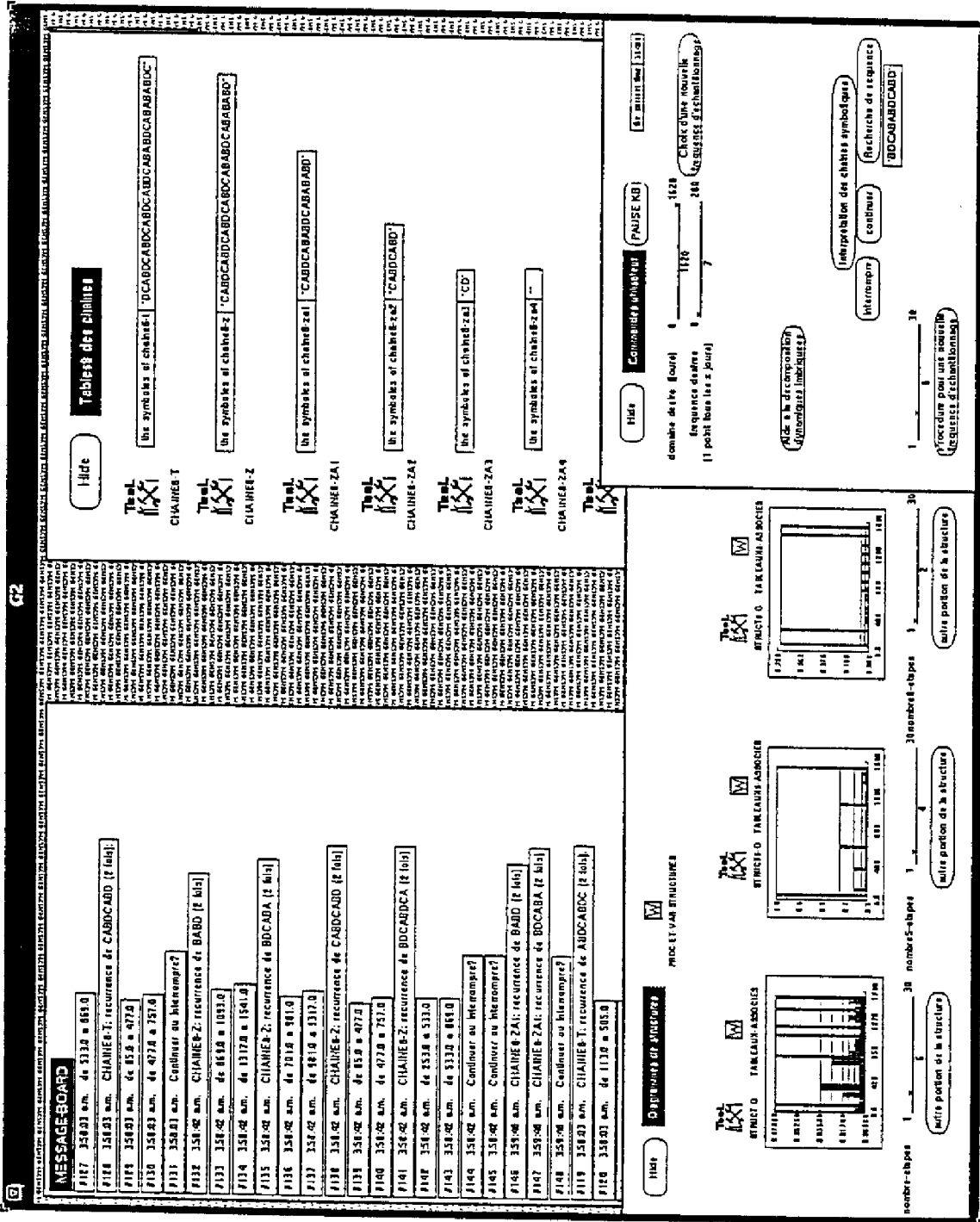


Fig. 4.4 : Quelques espaces de travail (workspaces) de G2 en cours de session : affichage des résultats, table des chaînes symboliques pour une série de points initiale, panneau de contrôle utilisateur et affichage des structures des granularités pour plusieurs séries de points initiales.

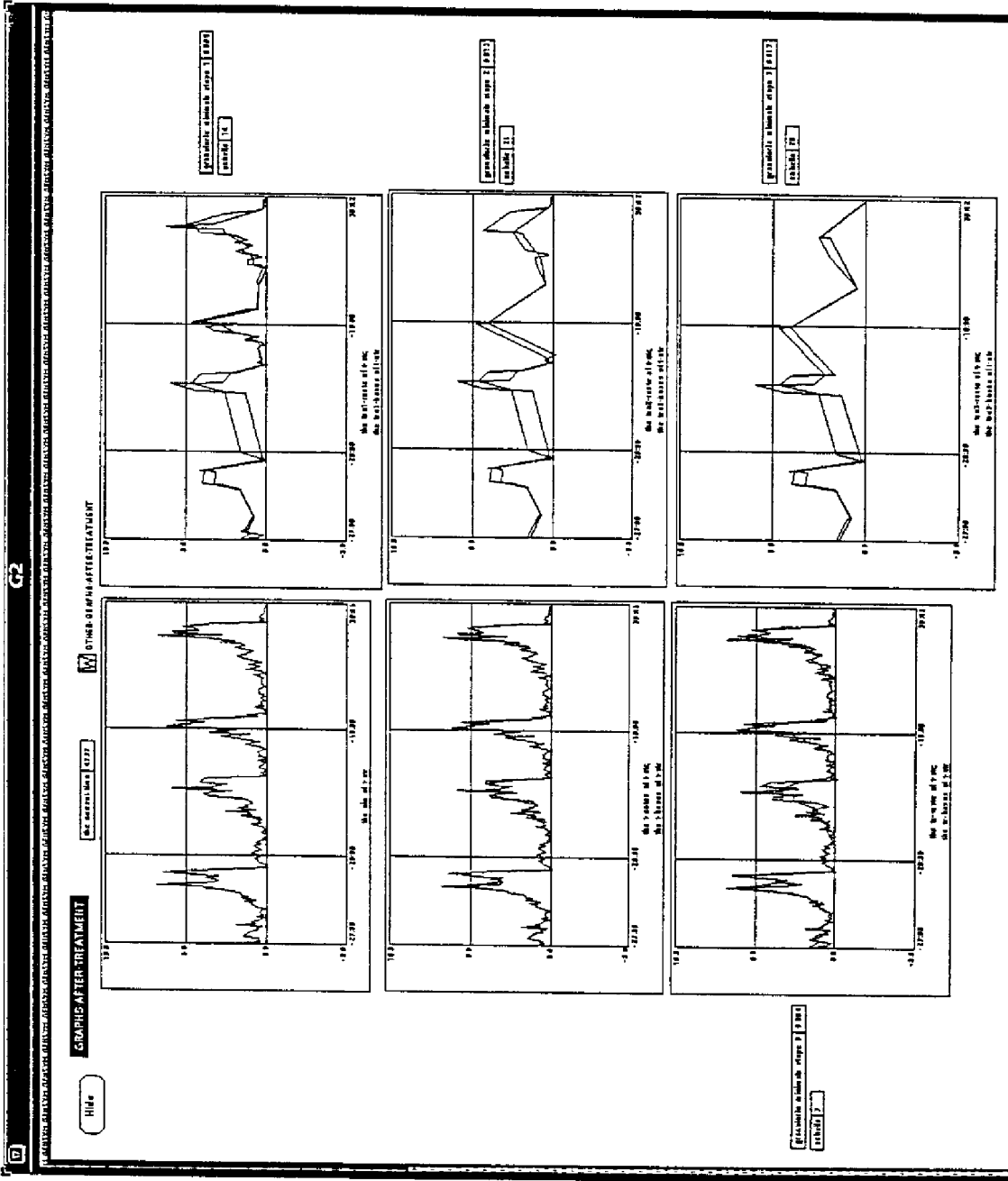


Fig. 4.5 : Le workspace d'affichage des représentations par épisodes. De haut en bas et de gauche à droite : série de points initiale; représentation triangulaire; représentations trapézoïdales aux étapes 0, 1, 2 et 3.



### *Base de règles*

Un jeu de règles gère le déroulement temporel de la session d'interprétation : il empêche les procédures d'interprétation et de décision d'être démarrées intempestivement par l'opérateur tant que les fichiers de données ne sont pas chargés. Egalement, le moteur d'inférence s'appuie sur plusieurs règles pour demander le chargement de nouveaux fichiers d'attributs lorsque c'est nécessaire. Enfin, une règle transmet la requête de l'opérateur concernant le ré-échantillonnage du processus et son traitement par PARADISE.

### *Procédures*

Dans G2 sont implémentées diverses procédures de décision (Fig. 4.6) :

— A partir de la structure des granularités, elles signalent et localisent dans l'évolution les intervalles où un phénomène "régulier" (composé d'épisodes de durée semblable) est présent (cf. 3.3.4). La décomposition des dynamiques imbriquées est alors conseillée à l'utilisateur, et réalisée sous UNIX par PARADISE si désiré.

D'autres procédures conseillent à l'utilisateur une nouvelle fréquence d'échantillonnage de la série initiale, à partir de ses besoins exprimés (et modifiables) en matière de précision et durée de simulation et selon l'aspect de la structure des granularités.

— Une procédure principale génère l'interprétation d'une chaîne symbolique. Elle fait appel à deux séries de procédures : celles qui détectent et localisent des comportements oscillatoires dans une représentation, et celles qui détectent et localisent les récurrences présentes. A titre d'exemple, une des procédures réalisant la mise en correspondance de motifs pour l'obtention des récurrences dans les chaînes trapézoïdales est proposée (Fig. 4.7). Enfin, une procédure permet à l'utilisateur de rechercher dans toutes les chaînes symboliques une séquence de son choix.

— Les procédures permettant l'interprétation des spectres sont en cours de réalisation.

Muni de l'ensemble des informations récoltées, l'utilisateur peut sélectionner le niveau d'abstraction auquel la forme et les caractéristiques comportementales du processus sont intéressantes. S'il choisit une nouvelle fréquence d'échantillonnage, sa requête est automatiquement communiquée à une procédure. Cette dernière lance à l'extérieur un programme de ré-échantillonnage de la série initiale, puis l'ensemble du traitement par PARADISE de la nouvelle série de points. Les nouvelles représentations, structure, chaînes et spectres sont renvoyés à G2 qui affiche et propose l'analyse de ces nouveaux outils. Et ainsi de suite...

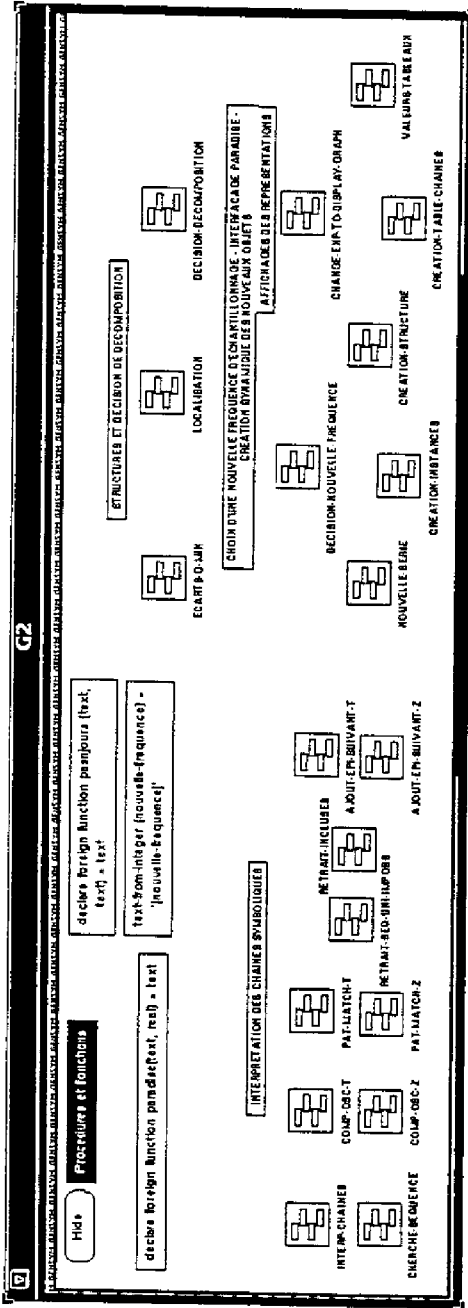


Fig. 4.6 : Workspace des procédures

```

Cancel
Undo
Paste
04-match-2 (CH: class chaîne-symbolique-trapèzoidale, text-nouvelle-sequence:TEXT, text-etape:TEXT)

SSCH, SSCHI: text
nb-lettres, pos, LI: integer
NREC, NPOSS: class integer-parametric
SDPE: symbol
POSS, REC: class text-array
DEBUT-POSS, FIN-POSS, DEBUT-REC, FIN-REC: class maxlist
app: void-value
SCHI: class chaîne-symbolique-trapèzoidale
CPOSS, CREC: class integer-array
DPE: class dates-des-points-extremes-array

begin
  DEBUT-POSS - the debut-poss-eg of CH; FIN-POSS - the fin-poss-eg of CH; DEBUT-REC - the debut-rec-eg of CH; FIN-REC - the fin-rec-eg
  of CH
  CPOSS - the cor-poss-eg of CH; change the array-length of CPOSS to 500
  REC - the cor-rec-eg of CH; change the array-length of REC to 500
  POSS - the rec-eg of CH; change the array-length of POSS to 500
  NREC - the nb-rec-eg of CH; change the array-length of NREC to 500
  NPOSS - the nb-poss-eg of CH; conclude that NREC = 0
  NPOSS - the nb-poss-eg of CH; conclude that NPOSS = 0

  if nouvelle-sequence = 1 then SDPE = symbol (insert-in-text (text-etape, "d-o-a", 7))
  else SDPE = symbol (insert-in-text (text-etape, (insert-in-text (text-nouvelle-sequence, "d-o-a", 2), length-of-text (insert-in-text (text-nouvelle-
  sequence, "d-o-a", 2)) + 1))
  DPE - the dates-des-points-extremes-array named by SDPE;

  SCHI - CH; SSCHI - the symbols of SCHI; nb-lettres = length-of-text (SSCHI)
  repeat
    pos = position-of-text ("", SSCHI); exit if pos = 0
    SSCHI = sub-from-text (SSCHI, pos, pos; nb-lettres = nb-lettres - 1); and
    conclude that POSS[0] = "CABA"; conclude that POSS[1] = "CABD"; conclude that POSS[2] = "BOCA"; conclude that POSS[3] = "BODD"; conclude
    that POSS[4] = "COCA"; conclude that POSS[5] = "CDDC"; conclude that POSS[6] = "BABA"; conclude that POSS[7] = "BABD";
  repeat

  repeat
    exit if NPOSS <= 0;
    for I=0 to NPOSS - 1 do
      SSCH = SSCHI;
      conclude that CPOSS[I] = 0
      app = is-contained-in-text (POSS[I], SSCH);
      if app is true then begin
        if text-etape = "D" then begin
          conclude that DEBUT-POSS[I][0] = DPE truncate ((nb-lettres - length-of-text (SSCH) + position-of-text (POSS[I], SSCH) - 1) / 2);
          conclude that FIN-POSS[I][0] = DPE truncate ((nb-lettres - length-of-text (SSCH) + position-of-text (POSS[I], SSCH) + length-of-text
          (POSS[I]) - 1) / 2);
        end
        repeat
          conclude that CPOSS[I] = CPOSS[I] + 1;
          SSCH = sub-from-text (SSCH, 1, position-of-text (POSS[I], SSCH) + length-of-text (POSS[I]) - 1);
          app = is-contained-in-text (POSS[I], SSCH);
          exit if app is false;
          if (app is true and text-etape = "D") then begin
            conclude that DEBUT-POSS[I][CPOSS[I]] = DPE truncate ((nb-lettres - length-of-text (SSCH) + position-of-text (POSS[I], SSCH) - 1) /
            2);
            conclude that FIN-POSS[I][CPOSS[I]] = DPE truncate ((nb-lettres - length-of-text (SSCH) + position-of-text (POSS[I], SSCH) + length-
            of-text (POSS[I]) - 1) / 2);
          end
        end
      end
    end
  end

  call retrah-eg-un-poss (POSS, NPOSS, CPOSS, DEBUT-POSS, FIN-POSS, REC, NREC, CREC, DEBUT-REC, FIN-REC, text-etape);
  call retrah-inclusif (REC, NREC, CREC, DEBUT-REC, FIN-REC, text-etape);
  call nb-ds-tp-avant-2 (POSS, NPOSS);
end

for I=0 to NREC - 1 do inform the operator that (the name of CH); recurrence de (REC[I]) ((CREC[I]) (0));
  if text-etape = "D" then
    for J=0 to CREC[I] - 1 do inform the operator that (de (DEBUT-REC[I][J]) a (FIN-REC[I][J])); end end
end
end

```

Fig. 4.7 : Procédure de mise en correspondance de motifs dans une chaîne symbolique trapézoïdale

### 4.3 Décomposition des dynamiques imbriquées : le modèle proie-prédateur avec chasseurs

#### 4.3.1 Présentation

##### *Modèle proie-prédateur*

Le modèle proie-prédateur original (de Lotka-Volterra) décrit l'évolution de deux populations de proies et de prédateurs en compétition. Il se présente sous la forme du système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha(1-y)x \\ \frac{dy}{dt} = -\beta(1-x)y \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  sont les populations de proies et de prédateurs, et  $\alpha$  et  $\beta$  leurs taux de reproduction. La simulation de ce modèle donne deux évolutions du type de celles de la figure 4.8, interprétables qualitativement comme suit :

— quand la population de prédateurs augmente, celle des proies diminue;

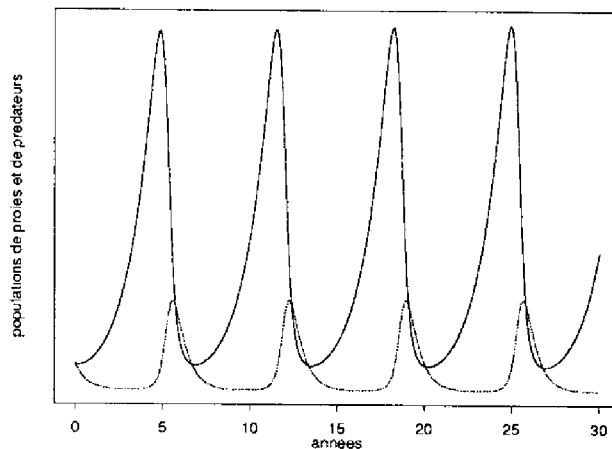


Fig. 4.8 : Modèle proie-prédateur classique : simulation des populations de proies (—) et de prédateurs (...) avec un pas de temps de 10 jours et un domaine de 30 ans.

— lorsque les prédateurs sont trop nombreux pour être correctement nourris avec les proies restantes, leur population décroît, ce qui a pour conséquence l'augmentation de la population de proies;

— quand les prédateurs sont assez peu nombreux pour se nourrir correctement avec la population de proies disponible, leur population se remet à croître et celle des proies à baisser.

Il s'agit d'un mécanisme très classique d'auto-régulation. Ce modèle a été beaucoup étudié dans la littérature [JOL83], et nous ne nous focaliserons pas sur la forme du comportement des processus, mais plutôt sur leur *vitesse de fluctuation*. Nous vérifierons simplement la cohérence de notre interprétation avec le comportement oscillatoire attendu.

#### Adjonction d'une population de chasseurs

On considère une population de chasseurs ne tuant que des proies, 6 mois par an, dont l'effectif est décrit par une semi-sinusoïde proportionnelle à la quantité de proies présentes. Les équations du modèle deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \alpha(1-y)x - \gamma xz \\ \frac{dy}{dt} = -\beta(1-x)y \\ \text{si } \sin(t) > 0, z = \lambda x \sin(t), \text{ sinon } z = 0 \end{array} \right.$$

où  $z$  est la population de chasseurs,  $\gamma$  le taux de mortalité des proies rencontrant un chasseur et  $\lambda$  la part de population de proies rencontrant les chasseurs. La simulation des trois populations est réalisée avec un pas de temps de 10 jours sur un domaine temporel de 30 ans (Fig. 4.9).

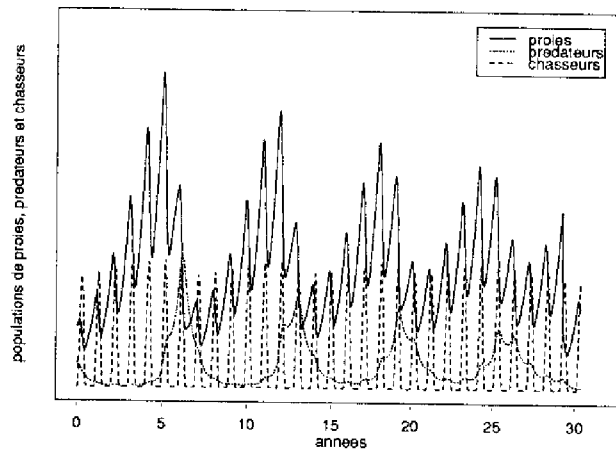


Fig. 4.9 : Simulation des populations de proies, prédateurs et chasseurs sur un domaine de 30 ans, avec un pas de temps de 10 jours. Les valeurs initiales sont de 50 proies, 20 prédateurs et 0 chasseur et interviennent dans l'aspect des courbes avec les taux de reproduction et de mortalité.

#### 4.3.2 Décomposition des dynamiques imbriquées et comparaison avec Fourier

Nous allons mettre en évidence l'influence des fluctuations des prédateurs et des chasseurs sur la population de proies, par la décomposition de dynamiques imbriquées. Cela est décelable directement à l'examen du modèle ou des courbes de simulation. Mais

faire la même chose sur des séries de points irrégulières et sans modèle fiable aboutirait à des conclusions non vérifiables. La méthode exposée au 2.6 ne serait donc pas validée.

### *Indices de fluctuation et structure des granularités*

Pour vérifier l'influence des prédateurs et des chasseurs, examinons la représentation trapézoïdale des proies et des chasseurs à l'étape zéro (Fig. 4.10a et c).

Les indices de fluctuation sur la totalité du domaine sont identiques : ils sont approximativement de 2 épisodes/an. En omettant les chasseurs, la population de proies n'exhibe pas les fluctuations rapides représentées par ces deux épisodes (Fig. 4.10b). On en conclut qu'elles sont dues à l'action des chasseurs.

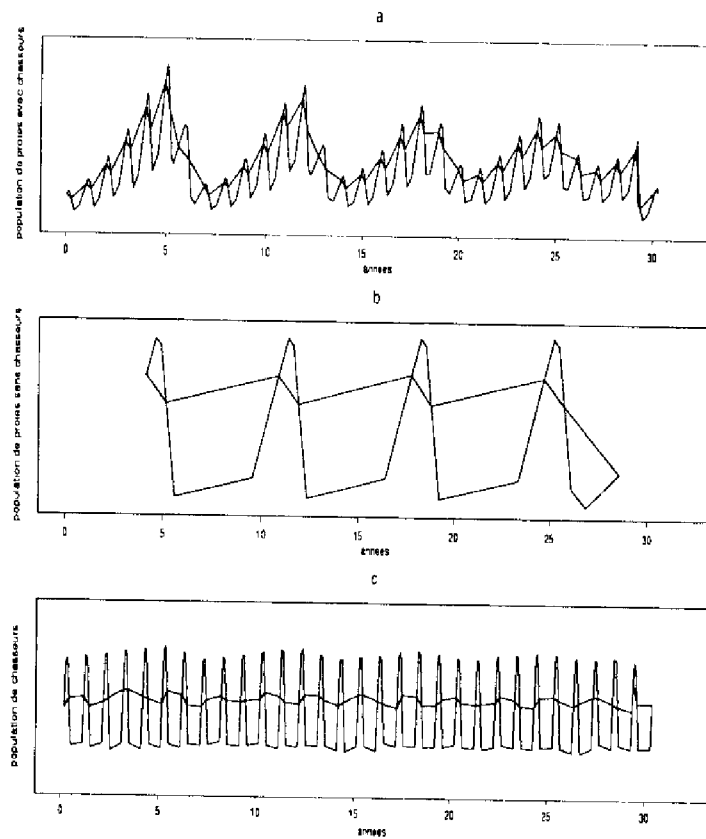


Fig. 4.10 : (a) Représentation trapézoïdale à l'étape zéro de la population de proies. (b) Représentation trapézoïdale à l'étape zéro de la même population sans chasseurs; les fluctuations rapides sont absentes. (c) Représentation trapézoïdale à l'étape zéro de la population de chasseurs. Les épisodes de cette représentation et de la représentation des proies avec chasseurs sont de durée proche.

### *Décomposition*

Les abstractions éliminent successivement ces fluctuations rapides des représentations. Dans la structure des granularités, un écart important apparaît après la disparition du dernier épisode présent à l'étape zéro (Fig. 4.11; on ne considère pas les épisodes extrêmes qui ne peuvent disparaître qu'à la fin). Cet écart est bien supérieur à ceux observés jusque-là. Les

granularités minimales des étapes précédentes étaient assez proches, ce que l'on comprend au vu de la durée également assez proche des épisodes apparaissant à l'étape zéro. L'épisode résultant du regroupement occupe une partie importante du domaine. La règle précisée au 3.3.4 peut donc être appliquée : il y a présence d'un phénomène régulier.

On décompose alors la représentation à l'étape zéro pour en extraire l'évolution squelette et l'évolution imbriquée (Fig. 4.12).

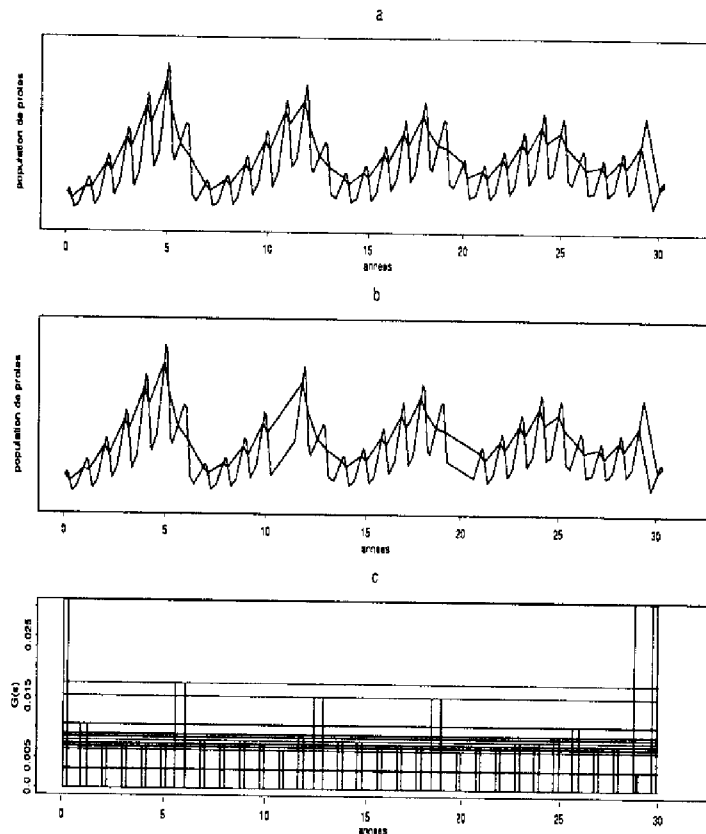


Fig. 4.11 : (a) Représentation trapézoïdale de l'évolution des proies à l'étape 1. (b) Représentation trapézoïdale à l'étape 2. (c) Partie inférieure de la structure des granularités pour l'évolution des proies. Le dernier épisode de l'étape zéro disparaît à  $G^{(9)} = 0.018$ , ce qui correspond à une échelle d'à peu près 6.5 mois, après quoi il y a un écart important. Une régularité des durées des épisodes originaux (i.e. de la représentation à l'étape zéro) est donc présente. L'évolution imbriquée contiendra tous les épisodes présents à l'étape zéro (redressés à l'horizontale), dont les durées forment la "ligne" la plus basse de la structure.

L'évolution squelette de la population de proies est l'évolution de départ sans les fluctuations des chasseurs, successivement abstraites. On cherche à établir une relation entre la vitesse de fluctuation des prédateurs et celle des fluctuations restantes, exprimées par l'évolution squelette des proies. Pour cette comparaison, nous nous servons à nouveau des indices de fluctuation.

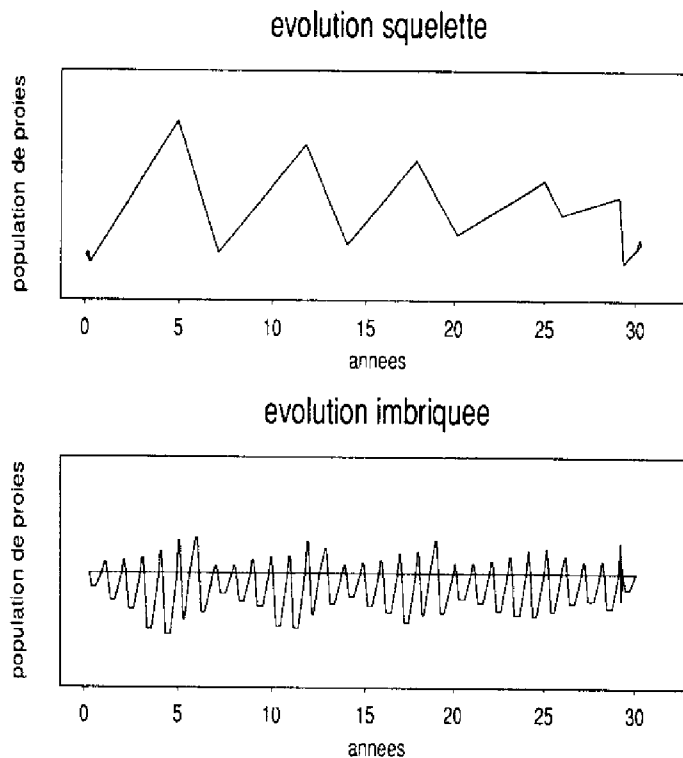


Fig. 4.12 : Décomposition de l'évolution des proies en dynamiques imbriquées : (a) évolution squelette; (b) évolution imbriquée.

On construit donc la représentation trapézoïdale à l'étape zéro de cette évolution squelette, et on la compare à la représentation à l'étape zéro de l'évolution des prédateurs *en l'absence de chasseurs* (Fig. 4.13). Les indices de fluctuation s'avèrent très proches l'un de l'autre, ce qui établit que les fluctuations de l'évolution squelette sont étroitement liées à celles des prédateurs en l'absence de chasseurs.

On vérifie ainsi ce que nous avons deviné au regard des évolutions : dans celle des proies, les fluctuations rapides sont dues aux fluctuations des chasseurs, et sont imbriquées dans des fluctuations plus lentes correspondant à l'influence des prédateurs. De plus, la structure des granularités nous permet de déterminer précisément l'échelle de temps (6.5 mois) au-delà de laquelle ces influences rapides (ou à "haute-fréquence") n'apparaissent plus dans la représentation.

Notons que la même démarche conduirait à démontrer que les fluctuations des chasseurs influencent aussi indirectement celles des prédateurs.

#### *Comparaison avec la décomposition de Fourier*

On devrait obtenir avec Fourier deux composantes fréquentielles correspondant aux chasseurs et aux prédateurs. La figure 4.14 montre le spectre de fréquences obtenu, représenté par le périodogramme lissé et par le spectre d'un modèle autorégressif estimé.



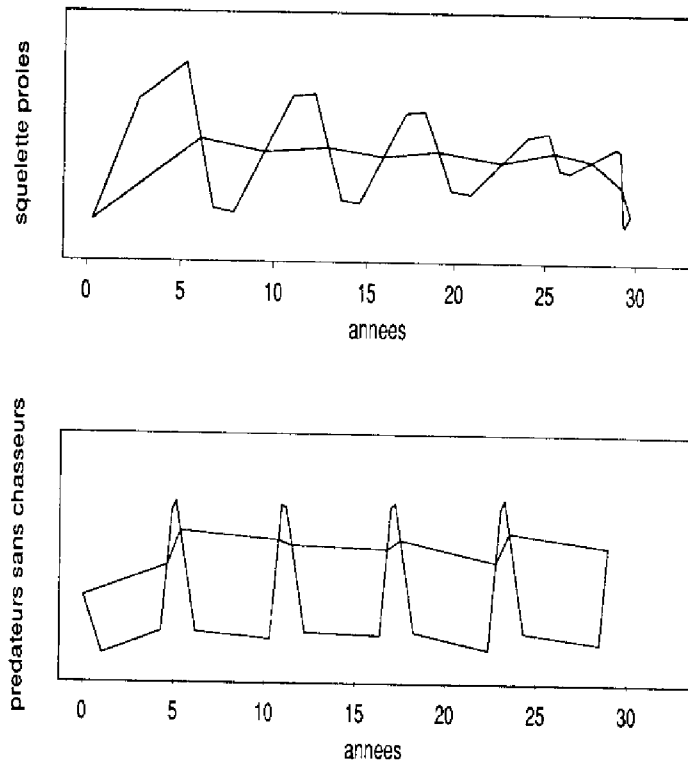


Fig. 4.13 : Représentations à l'étape zéro de l'évolution squelette des proies, et de l'évolution des prédateurs en l'absence de chasseurs.

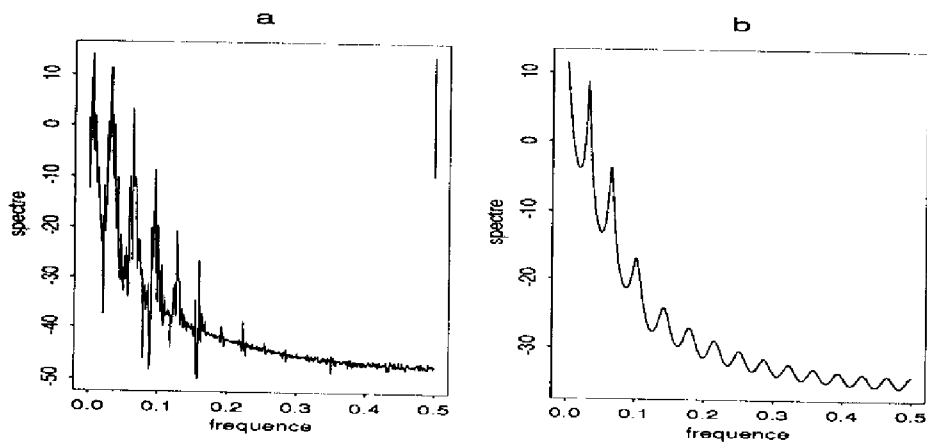


Fig. 4.14 : Spectre des fréquences discrètes de Fourier pour l'évolution de la population de proies : (a) estimation par un périodogramme lissé; (b) spectre du modèle autorégressif estimé. Les axes sont gradués de la même façon que sur la figure 1.2.

Deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont nettement distinguées. L'évolution des proies peut alors être approximée par la série de Fourier tronquée :

$$X_{t_0, \dots, t_n} = A_1 \cos(2\pi \cdot f_1 t) + B_1 \sin(2\pi \cdot f_1 t) + A_2 \cos(2\pi \cdot f_2 t) + B_2 \sin(2\pi \cdot f_2 t)$$

La figure 4.15 montre les deux composantes fréquentielles ainsi que leur somme, en regard de l'évolution de la population de proies.

Comparons à nouveau la rapidité des fluctuations à l'aide des indices. Avec des sinusoides, il n'est pas besoin d'établir la représentation trapézoïdale à l'étape zéro pour se rendre compte qu'une période correspond à deux épisodes (*CA* et *BD*). Pour la première composante fréquentielle (Fig. 4.15b), on comptabilise alors 9 épisodes sur 28 ans, soit environ 0.3 épisode/an. Pour l'évolution squelette (Fig. 4.13a), on trouve 10 épisodes pour 30 ans, ce qui donne également 0.3 épisode/an à peu de chose près. Il y a donc une relation de quasi-égalité entre la rapidité des fluctuations de la basse-fréquence de Fourier et celle des fluctuations de l'évolution squelette.

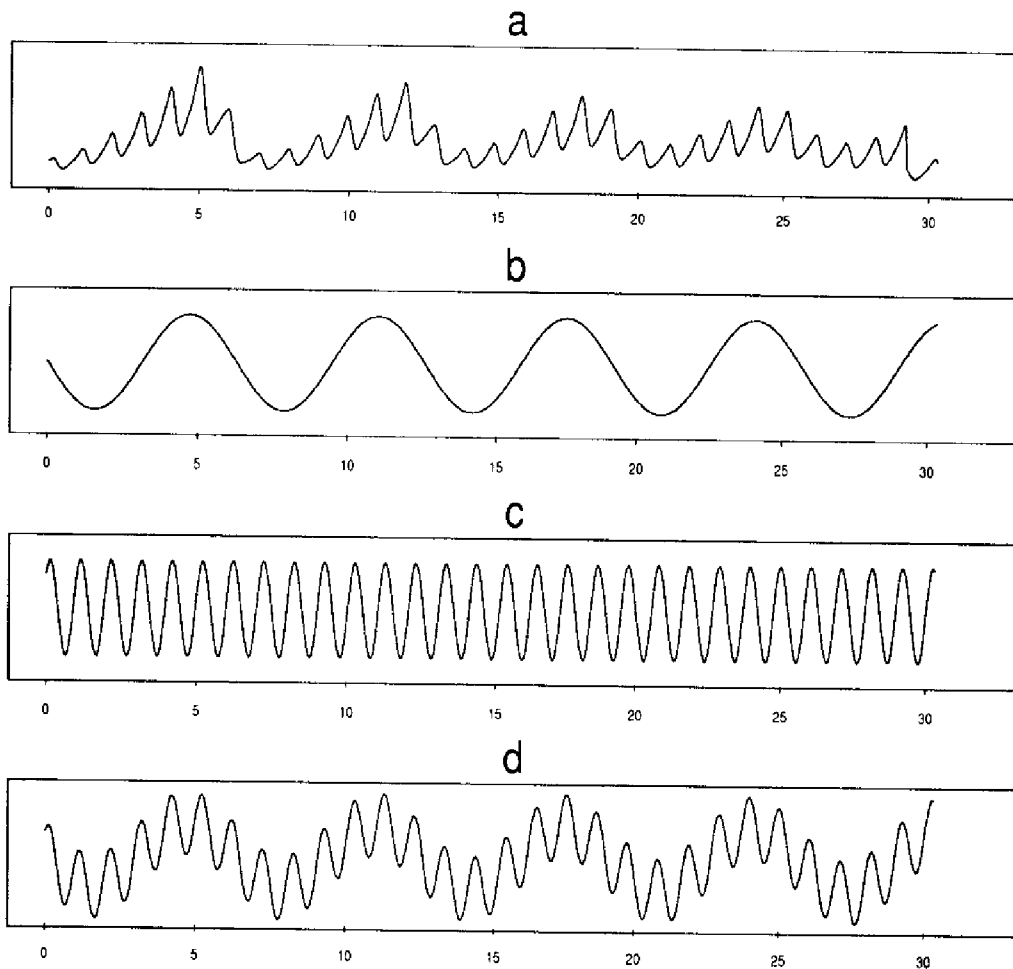


Fig. 4.15 : Décomposition de Fourier de l'évolution de la population de proies. (a) Evolution de la population de proies (identique à celle de la figure 4.9); (b) première composante fréquentielle  $f_1$ ; (c) seconde composante fréquentielle  $f_2$ ; (d) somme des deux composantes  $f_1$  et  $f_2$ .

Pour la seconde composante fréquentielle (Fig. 4.15c), l'indice vaut 1.93 épisode/an (c'est aussi l'indice de la somme des composantes fréquentielles, cf. Fig. 4.15d). L'indice de l'évolution imbriquée est égal à 2 épisodes/an (Fig. 4.12b) (tout comme l'indice de la représentation à l'étape zéro, cf. Fig. 4.10a). On peut donc également dire que la rapidité des fluctuations de la dynamique imbriquée est très proche de celle de la seconde composante de Fourier.

Il y a donc ici une concordance quasi-parfaite entre notre décomposition des dynamiques imbriquées et une décomposition fréquentielle classique, d'un point de vue rapidité des fluctuations. Néanmoins, au vu des aspects comparés des figures 4.12 et 4.15b et c, on peut remarquer quelques différences intéressantes :

- bien que l'évolution des proies ait été prise pour un processus bien régulier, on se rend compte de certains comportements locaux n'apparaissant pas sur une sinusoïde donnée par Fourier : les durées des périodes ne sont pas toutes exactement les mêmes; une chute brutale à l'année 29 apparaît nettement sur l'évolution squelette;

- il n'est pas possible de rendre compte des variations d'amplitude globales avec la première fréquence principale donnée par Fourier, alors que l'évolution squelette montre un amortissement. De même, l'évolution imbriquée laisse bien apparaître la différence entre les variations d'amplitude au-dessus et au-dessous de l'horizontale prise comme valeur de référence nulle, ainsi que leur modification au cours du temps. Cette variabilité n'est pas décelée sur la seconde composante issue de Fourier.

On voit donc l'avantage que peut conférer la localité de notre traitement "fréquentiel". Pour mettre complètement en évidence l'intérêt de cette localité, il reste à comparer la décomposition des dynamiques imbriquées avec les techniques classiques de filtrage et de lissage d'un processus irrégulier.

En intermède, et puisque nous disposons de toutes les représentations que l'on peut obtenir à partir de l'évolution de la population de proies, interprétons-les brièvement.

#### 4.3.3 Interprétations comportementales

Quelques interprétations simples permettent de décrire assez complètement le comportement de la population de proies, et d'analyser sa tendance globale exprimée par l'évolution squelette.

##### *Chaînes symboliques*

La représentation trapézoïdale à l'étape zéro (Fig. 4.10a) est composée d'une succession de séquences {BDCA} dénotant un comportement (symbolique) oscillatoire périodique de

période 4. Lorsque l'on considère l'information numérique additionnelle sur les durées des épisodes, une périodicité de 7 ans est mise en évidence. Au cours de chaque période, les durées et variations d'amplitude croissent pendant 5 ans (oscillations divergentes) puis décroissent sur 2 ans (oscillations amorties). Ceci caractérise plus complètement les fluctuations rapides. Notons que la même interprétation est réalisable à partir de l'évolution imbriquée.

En faisant la même chose pour les fluctuations lentes, exprimées par l'évolution squelette, on retrouve les séquences  $\{BDCA\}$  de période 7 ans. Ici, les durées des épisodes restent approximativement constantes sur tout le domaine, bien que les variations d'amplitude diminuent. Ceci dénote un comportement oscillatoire amorti. L'évolution squelette "lente" est par conséquent stable sur le domaine considéré.

### Spectres

On obtient des interprétations globales complémentaires aux précédentes, qui étudient la succession locale des épisodes. L'analyse du spectre des granularités exprimé en nombre d'épisodes montre que l'évolution est formée d'épisodes regroupables en deux classes, de granularités correspondant à des durées proches de 3 et 9 mois (Fig. 4.16a).

Pour les types  $BD$  et  $CA$ , il apparaît au vu du spectre des types exprimé en durées (Fig. 4.16b) qu'en général, le passage par un maximum ( $BD$ ) prend moins de temps que le passage par un minimum ( $CA$ ) : les  $CA$  occupent 21 ans, les  $BD$  7 ans. La population de proies décroît donc rapidement après un maximum, et met plus longtemps à remonter après un minimum. Notons que le rapport de ces durées est proche de celui des granularités moyennes des classes apparaissant sur la figure 4.16a. La classe des faibles granularités est donc composée en majorité de types  $BD$ , celle des fortes granularités de types  $CA$ .

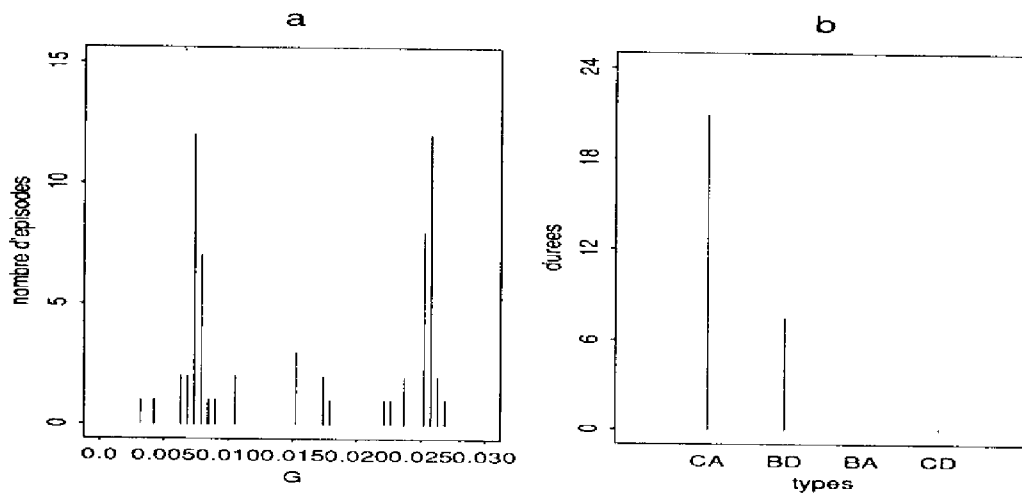


Fig. 4.16 : (a) Spectre des granularités exprimé en nombre d'épisodes pour la population de proies. (b) Spectre des types exprimé en durées pour le même processus.

#### 4.3.4 Cas d'un processus irrégulier

##### *Présentation et décomposition*

Examinons maintenant comment la technique de décomposition se comporte face à un processus irrégulier. Nous prenons pour cela l'évolution des proies, au milieu de laquelle on introduit des fluctuations beaucoup plus lentes, oscillant autour d'une valeur constante (Fig. 4.17). La fréquence d'échantillonnage est la même partout.

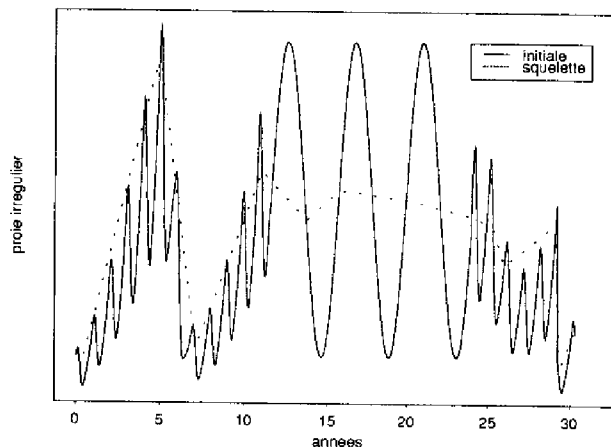


Fig. 4.17 : Les évolutions initiale par points et squelette de la population de proies rendue artificiellement irrégulière.

Une décomposition de Fourier permet de déterminer les trois fréquences les plus importantes, mais sans les localiser dans le temps. Démontrer la validité de notre approche consisterait à trouver dans les parties de droite et de gauche de l'évolution squelette la même "basse-fréquence" mise en évidence sur l'évolution régulière (Fig. 4.12), et dans la partie centrale, un segment horizontal. En effet, la tendance globale du processus y est stable, et les fluctuations les plus rapides sont à une fréquence plus basse qu'ailleurs. Une décomposition parfaitement locale temporellement ne devrait pas tenir compte de cette irrégularité de fréquence.

L'évolution squelette est extraite de la représentation à l'étape zéro (Fig. 4.17). La partie centrale est proche de l'horizontale, et ses parties voisines sont exactement les mêmes que pour la décomposition du processus régulier. La localité des fréquences de fluctuation est donc parfaitement conservée.

Pour montrer l'efficacité de cette méthode, comparons l'évolution squelette obtenue avec le résultat de plusieurs lisseurs et filtres évolués, susceptibles de traiter des situations semblables.

Remarque :

On aurait pu tout aussi bien représenter le signal (évolution squelette – évolution lissée) et examiner son aspect : plat si le lisseur a éliminé la haute-fréquence, et variable sinon.

### Lissage

Toutes les techniques citées ici sont *locales*, c'est-à-dire qu'en chaque instant, la valeur lissée ne dépend que des valeurs non-lissées, à cet instant et sur un voisinage spécifié.

Il ne s'agit pas ici de supprimer la fréquence la plus rapide, comme nous le faisons ou comme le fait le filtrage, mais de tracer la tendance globale. Tout le jeu consiste à ajuster les paramètres de chaque lisseur de telle manière que la tendance globale horizontale des fluctuations du milieu puisse être obtenue en même temps que les tendances croissante / décroissante du début et de la fin.

— Le *lissage par régression locale pondérée* impose, pour chaque point  $(x_i, t_i)$  de l'évolution à lisser, de fixer un voisinage égal à un pourcentage du nombre total de points. A chaque point du voisinage est associé un poids, après quoi la valeur lissée est ajustée par les moindres carrés. Le résultat pour trois tailles différentes de voisinage est donné figure 4.18.

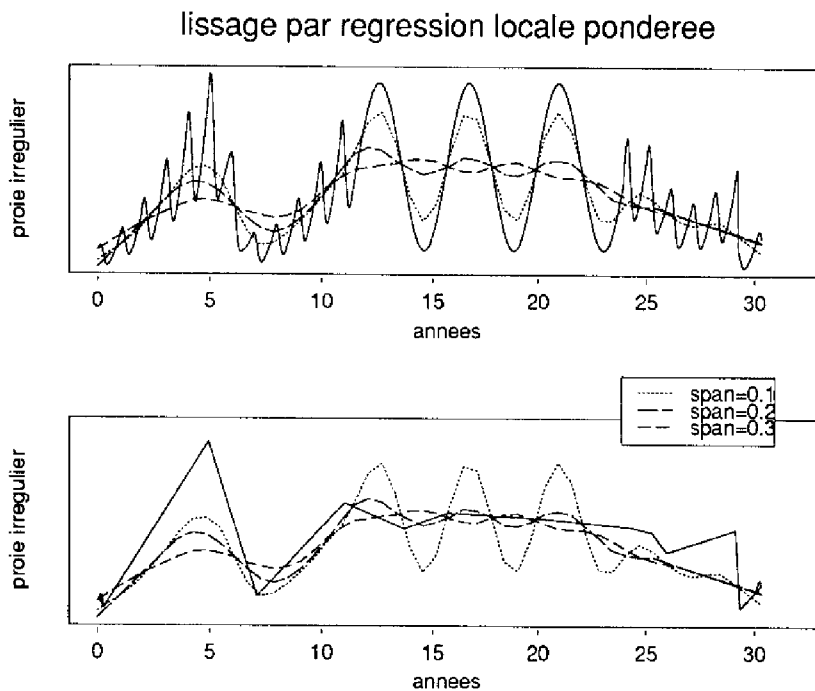


Fig. 4.18 : Lissage par régression locale pondérée pour des voisinages (*span*) de 10, 20 et 30% du nombre de points. Comme pour les graphiques suivants de cette section, la figure du haut présente les signaux lissés superposés à l'évolution non-lissée, la figure du bas les mêmes signaux lissés superposés à l'évolution squelette. On aura donc un résultat similaire pour le lissage et pour notre méthode de détermination de la tendance globale si l'évolution squelette et l'évolution lissée coïncident dans le graphique du bas.

Il est clair que plus le voisinage comprend de points, plus on arrive à stabiliser la partie médiane, mais au détriment des parties gauche et droite. Ce problème vient du fait que le voisinage est le même quelle que soit la partie à lisser. Bien adapté à la partie centrale, il ne l'est pas aux parties à fluctuations rapides, et vice-versa.

— Le lissage à l'aide du “*supersmoother*” permet de modifier le voisinage selon la courbure de l'évolution : lorsqu'elle augmente, moins de points sont considérés. Ceci est géré automatiquement par une technique de *validation croisée* locale, qui cherche à chaque point un voisinage pour lequel l'erreur quadratique moyenne est minimale. Malgré cela, les résultats sont décevants (Fig. 4.19). On n'arrive pas à gommer les fluctuations centrales même si l'on se contente de piètres oscillations en début et fin d'évolution. Eventuellement, une amélioration pourrait être essayée en spécifiant par expertise un vecteur de pondération, mais l'objectivité du traitement disparaîtrait.

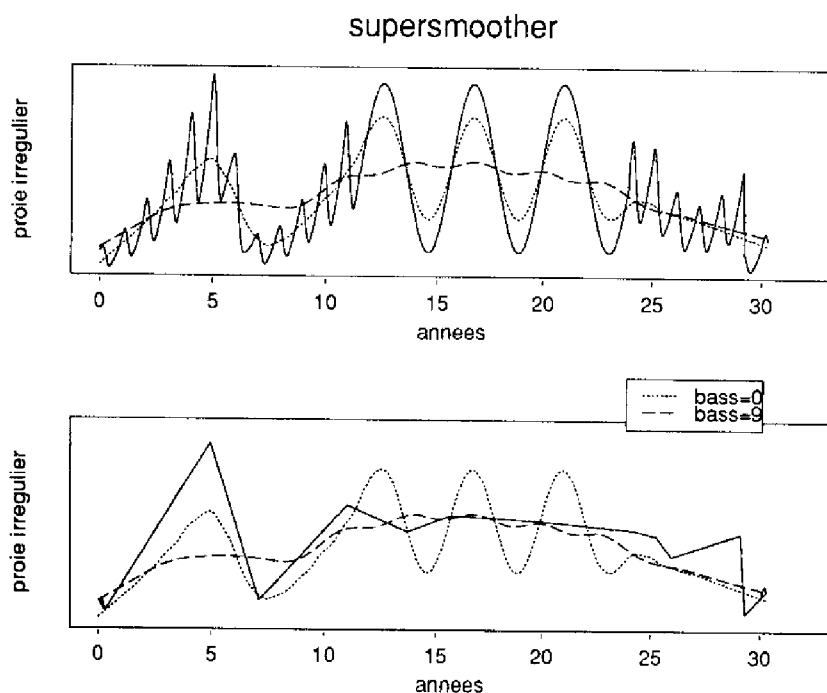


Fig. 4.19 : Lissage par le supersmoother, en faisant varier le paramètre de lissage (*bass*) destiné à contrôler la tendance globale (basse-fréquence) lors de la validation croisée locale.

— Un *lisseur par noyau* est un lisseur à moyenne locale pondérée. Il se rapproche ainsi du premier type que nous avons vu. Ici aussi, le voisinage est constant sur tout le domaine, et sert à calculer la moyenne locale. Plus le voisinage est grand, plus la bande passante (fréquentielle) est étroite, plus les fluctuations rapides disparaissent, et plus la courbe est lisse.

Un type de noyau est également choisi, afin de calculer les poids respectifs de chaque point du voisinage. Le noyau est une fonction respectant certaines propriétés (positivité,

somme égale à 1, symétrie) et pouvant avoir plusieurs formes (carrée, triangulaire, fonction de Parzen, gaussienne). En fait, le type “carré” lisse fort mal, et les trois autres donnent des résultats semblables. La pondération se fait de telle manière que les points proches de  $x_i$  (en date) reçoivent des poids élevés, alors que les points de date éloignée reçoivent un poids faible ou nul. C’est la valeur du voisinage qui contrôle la distance maximum à laquelle les points peuvent recevoir un poids.

On arrive avec un voisinage important à avoir une portion centrale presque horizontale, et un début d’évolution ondulé (Fig. 4.20). C’est le résultat le plus proche du nôtre dont nous disposons jusqu’ici. Cependant, les variations finales (dont la chute violente à  $t = 29$  ans) sont inexistantes.

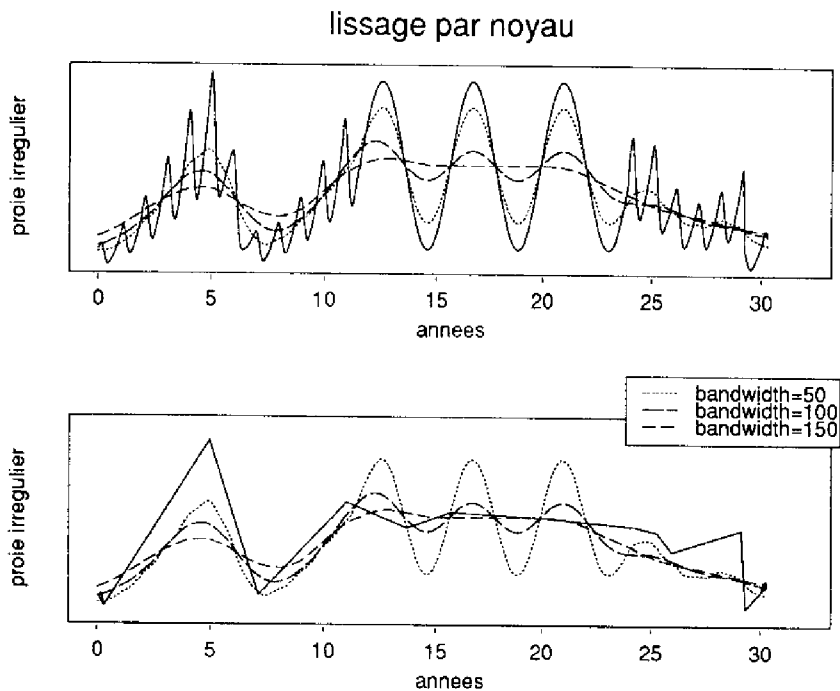


Fig. 4.20 : Lissage par noyau triangulaire avec un voisinage (*bandwidth*) variable de 50 à 150 points (sur une totalité de 950 points).

— Une *fonction spline cubique de lissage* se comporte approximativement comme un lisseur par noyau. Elle fait également intervenir un paramètre de lissage correspondant au voisinage. Il peut être ici aussi choisi automatiquement, grâce à une validation croisée, ou bien être spécifié par le biais d’un nombre de *degrés de liberté* égal à la trace de la matrice de lissage. Plus il y a de degrés de liberté et moins le processus est lissé.

Prendre un nombre de degrés de liberté égal à 7 donne un résultat proche de celui obtenu avec le lissage par noyau, avec cependant des variations peu développées en début et fin de domaine (Fig. 4.21).



Comme pour les trois lisseurs précédents, un compromis arbitraire doit être réalisé par tâtonnements. En fait, il est impossible de supprimer de la même manière le “bruit” représenté par des fluctuations de fréquences différentes sur une tendance globale.

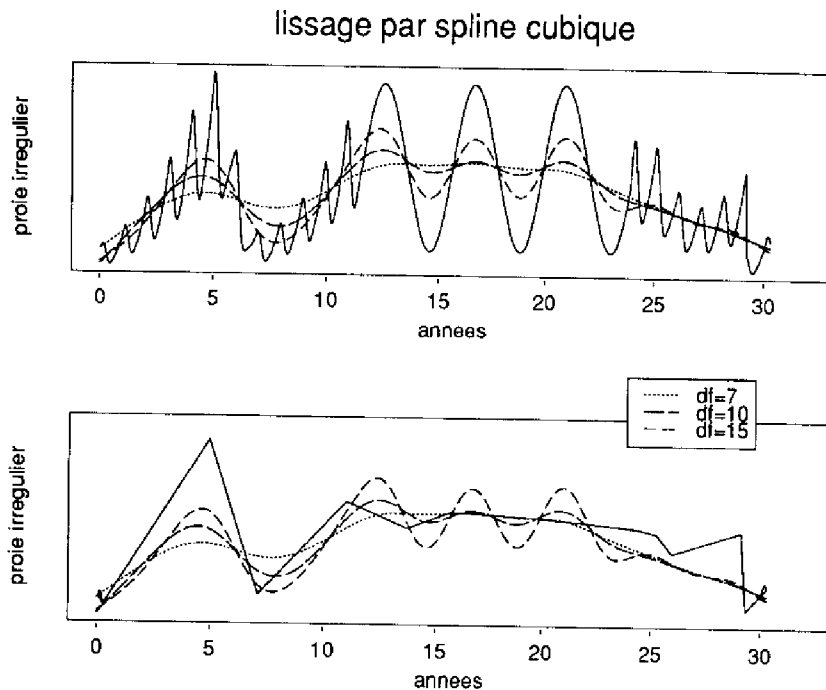


Fig. 4.21 : Lissage par spline cubique avec différents degrés de liberté ( $df$ ). L'utilisation d'un paramètre de lissage différent du degré de liberté est également possible mais sans grande modification.

#### Filtrage fréquentiel

Ici, on teste l'utilisation de filtres numériques linéaires invariants, i.e. pour lesquels la relation entre signal d'entrée et de sortie est définie par une équation de récurrence linéaire à coefficients constants. On voudrait réaliser un passe-bas capable d'éliminer les fluctuations rapides du début et de la fin, la fréquence un peu plus lente du milieu, sans perdre la basse-fréquence exprimant la tendance globale sur tout le domaine.

— Prenons d'abord un *filtre de convolution* (filtre à réponse impulsionnelle finie), dont les coefficients  $(a_0, \dots, a_q)$  permettent de calculer le processus filtré :

$$y_t = \sum_{j=0}^q a_j x_{t-j} \quad t = 0, 1, \dots$$

Tout l'art du filtrage consiste à trouver les “bons” coefficients. Par exemple, avec un vecteur de coefficients suivant une loi gaussienne, on arrive (toujours par compromis) à filtrer convenablement le signal (Fig. 4.22) : le tracé en tirets longs présente une variation satisfaisante en début d'évolution, une horizontale proche de la nôtre au centre, et une fin d'évolution honorable. Cela n'a rien d'étonnant, le filtre gaussien étant équivalent à un lisseur par noyau gaussien, que l'on a vu donner à peu près les mêmes résultats.

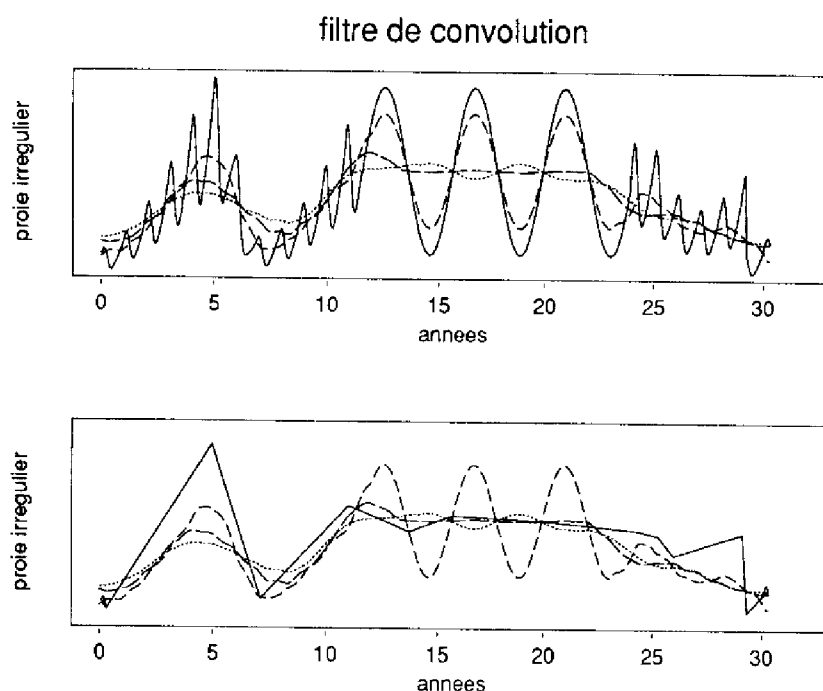


Fig. 4.22 : Filtrage par un filtre de convolution gaussien. Les différentes courbes sont obtenues en faisant varier le voisinage de la moyenne (nulle), sur lequel on considère la gaussienne.

On peut de manière équivalente générer directement un filtre passe-bas de fréquence de coupure inférieure à la fréquence des oscillations centrales. On obtient le résultat de la figure 4.23. Il est très proche de celui obtenu précédemment avec le filtre gaussien (et le lissage par noyau).

Le problème est que ce mode de filtrage aurait été inutilisable si la fréquence sur la partie centrale avait été inférieure à celle des oscillations globales (i.e. du squelette) du début et de la fin : alors, pour obtenir une horizontale au milieu, on aurait été amené à filtrer également les oscillations globales que l'évolution squelette aurait conservées dans tous les cas. La solution de se ramener à un filtre de type passe-bande n'est pas valide non plus puisque la fréquence à conserver sur une partie du domaine n'est pas forcément la même sur une autre partie.

— Nous avons également essayé quelques *filtres récurrents* (à réponse impulsionnelle infinie), également linéaires mais dont les coefficients  $(a_0, \dots, a_p)$  sont basés sur une autorégression d'ordre  $p$  :

$$y_t = \sum_{j=0}^p a_j y_{t-j} + x_t.$$

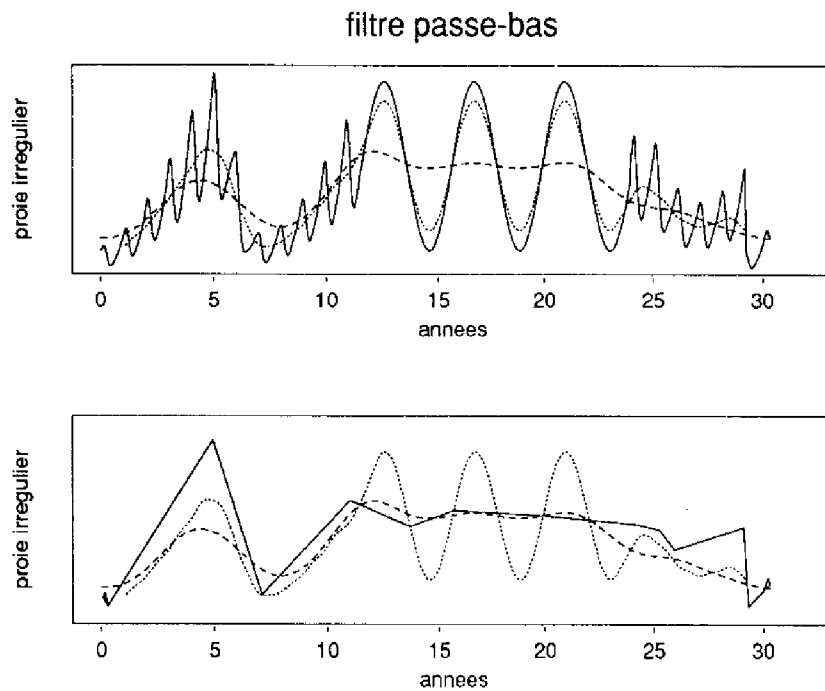


Fig. 4.23 : Filtre passe-bas de fréquence de coupure inférieure à celle des fluctuations rapides mais supérieure à celle des oscillations centrales ( $\cdots$ ) et de fréquence de coupure inférieure aux deux ( $---$ ).

Les résultats sont nettement moins intéressants (Fig. 4.24) : le compromis est impossible à faire, puisqu'on perd toute la tendance oscillatoire du début pour arriver à stabiliser le milieu.

— Enfin, un *lisseur basé sur des filtres robustes* a été essayé. La robustesse s'entendant par rapport aux points aberrants, les points des fluctuations rapides ont été considérés comme aberrants, et donc éliminés. Mais il est impossible d'en faire autant pour les points des oscillations centrales, ou bien c'est au détriment des autres (Fig. 4.25).

#### 4.3.5 Conclusion

La décomposition des dynamiques imbriquées permet en tout point de l'évolution de séparer la composante de plus haute fréquence de tout le reste. Par récursivité de la décomposition de l'évolution squelette, on peut ainsi extraire localement toutes les "hautes-fréquences". Les relations d'influence entre les fluctuations des processus interagissant dans le même système peuvent ensuite être établies localement, de la manière décrite au 4.3.2.

C'est un résultat que l'on ne peut atteindre avec une décomposition de Fourier.

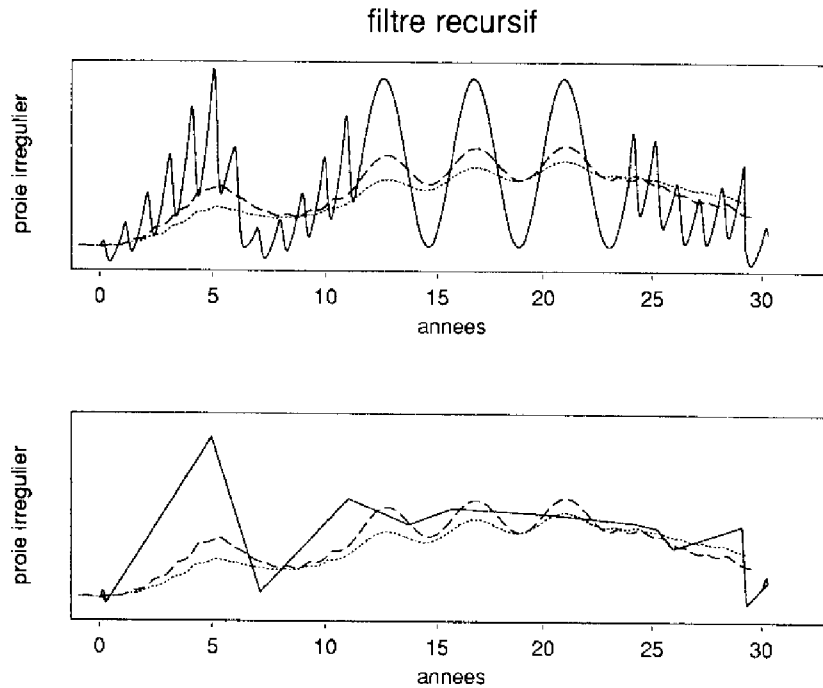


Fig. 4.24 : Filtrage récursif par lissage exponentiel. Le meilleur compromis obtenu (...) est nettement moins bon que le processus filtré par un passe-bas.

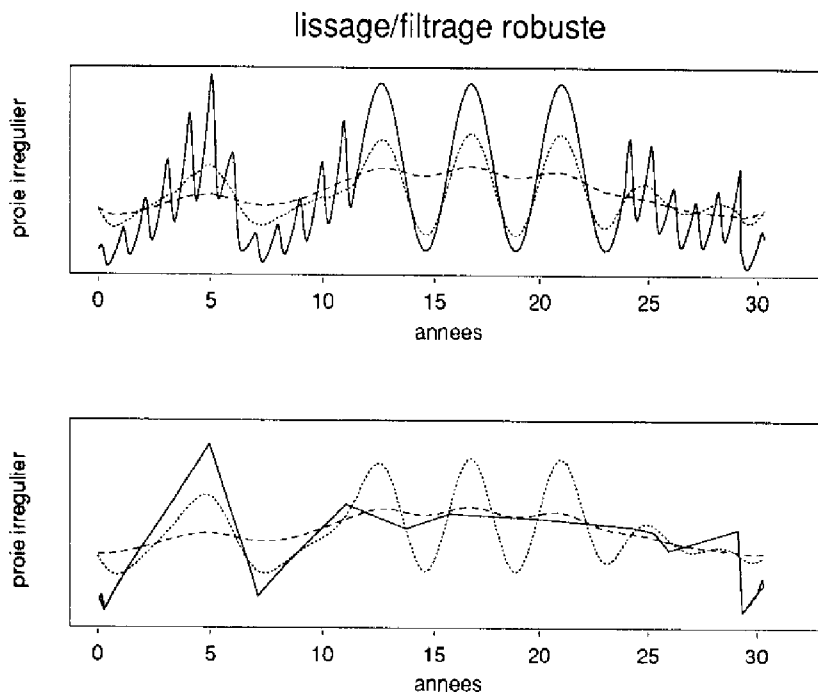


Fig. 4.25 : Lissage robuste avec deux filtres (figure du haut) et lissage robuste "alternatif" (figure du bas).

Comparée aux techniques — pourtant locales — visant à extraire la tendance générale (lissage) ou à éliminer des fréquences supérieures à un seuil (filtrage passe-bas), notre méthode se montre d'une facture originale. En effet, bien qu'on arrive à des résultats

approchants avec un lisseur par noyau ou un filtrage passe-bas ou gaussien, elle présente des avantages notables :

— les oscillations du début et de la fin sont toujours plus marquées que sur les processus filtrés ou lissés avec un compromis optimal entre la variation d'amplitude de début et de fin et l'horizontalité du milieu. Avec les filtres et lisseurs les plus satisfaisants, le dernier pic est toujours très peu marqué, et un événement local tel que la chute à  $t = 29$  ans passe systématiquement inaperçu;

— il n'y a pas de compromis à faire pour qu'une oscillation disparaisse à un endroit et soit conservée à un autre. Avec les techniques classiques exposées, ce compromis n'est pas toujours facile à obtenir, sauf dans le cas du filtrage passe-bas où l'on peut cerner, par une analyse spectrale préalable, en deçà de quelle fréquence doit être placée la fréquence de coupure du filtre.

En plus, nous avons volontairement traité un processus irrégulier, pour lequel l'idée de "tendance globale" et les notions de haute/basse fréquence sont facilement visualisables. Dans un cas plus complexe, un compromis aurait été impossible à trouver, puisqu'en fait, les outils approchants fonctionnent tous les trois de la même manière : élimination des fluctuations les plus rapides jusqu'à ce qu'il ne subsiste que celle qui nous intéresse. Si la fréquence que l'on voulait conserver n'avait pas été la plus basse, les résultats auraient été pires (mais la démonstration moins claire).

Il resterait à tester les ondelettes pour analyser les performances de cette technique de décomposition face à ce que l'on peut actuellement trouver de plus *local* en temps et en fréquence. Les outils informatiques nous ont manqué pour cette comparaison, malheureusement reléguée au rang de perspective.

## 4.4 Un processus issu d'un modèle de croissance de cultures : *EPIC*

4.4.1 Présentation du modèle et du processus analysé par la procédure d'abstraction successive

### *Modèle*

Le modèle *EPIC* (*Erosion Productivity Impact Calculator*) [WIL89] a été spécialement conçu pour l'étude des relations entre l'érosion et la productivité des cultures. Il décrit tous les processus liés à la croissance : biomasse, évapotranspiration réelle et potentielle, indice foliaire, eau et azote contenus dans le sol, photosynthèse, etc. Les simulations sont les seuls moyens dont disposent les agronomes pour prédire la dynamique de ces processus.

### Processus interprété

On étudie ici l'évolution de l'évapotranspiration réelle du blé et du maïs en rotation annuelle (année 1 : blé; année 2 : maïs; année 3 : blé; etc.). La simulation a été effectuée sur plus de 4 années (1621 jours exactement), avec un pas de temps de 1 jour (Fig. 4.26), le jour 1 étant le 25 Juillet 1983. Ce processus est noté  $etr1$ , et est exprimé en mm/jour.

Il apparaît difficile à analyser visuellement à cause de son caractère très fluctuant : on ne peut guère caractériser en détail les phénomènes exhibant les fluctuations les plus rapides. Bien sûr, on relève dans l'allure *globale* 4 cycles, dont les formes sont semblables. L'évapotranspiration est fonction de la croissance des végétaux, aussi sait-on que ce sont des cycles de croissance/récolte. Les dates approximatives des pics de croissance sont :

- blé (cycle 1) : vers le 20 Mai 1984
- maïs (cycle 2) : vers le 25 Juillet 1985
- blé (cycle 3) : vers le 30 Mai 1986
- maïs (cycle 4) : vers le 4 Août 1987.

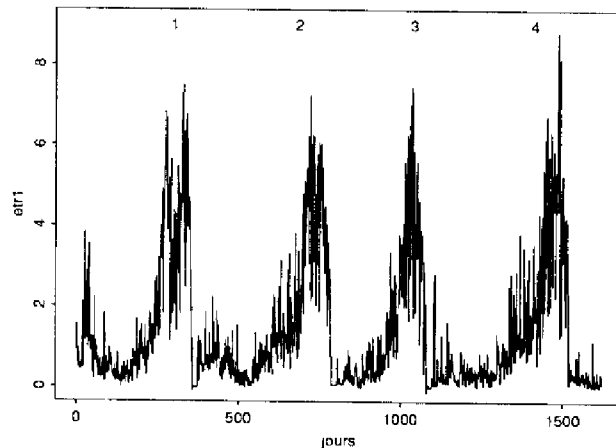


Fig. 4.26 : Evapotranspiration du blé et du maïs en rotation annuelle : série initiale de points  $etr1$  issue de la simulation avec un pas de 1 jour ( $G(\delta^{etr1}) = 1/1621 = \text{constante}$ ), sur un domaine de 4 ans et 5 mois (cycles 1 et 3 : blé; cycles 2 et 4 : maïs).

### Objectifs de l'interprétation

Nous avons essayé de dégager de cette évolution un certain nombre de renseignements *locaux* (par l'interprétation visuelle, l'allure de la structure des granularités et l'analyse symbolique) ou *globaux* (par l'analyse des spectres) revêtant un intérêt pour l'utilisateur agronome. Cette intérêt est en premier lieu la connaissance et la compréhension du processus, ainsi que la confirmation d'hypothèses émises au sujet de son comportement. Ensuite, il s'agit de trouver à quelle(s) granularité(s) minimale(s) on doit représenter le processus, pour observer des caractéristiques jugées importantes pour son interprétation. Enfin, on cherchera à savoir si la simulation et le stockage des points pourraient être favorisés par un changement de la fréquence d'échantillonnage de la série de points initiale.

Pour évaluer la justesse des interprétations issues de PARADISE, et pour relier les caractéristiques décelées à l'influence d'autres processus, les résultats ont été confrontés à l'expertise d'un agronome. En particulier ici, la forte dépendance entre l'évapotranspiration et les variations climatiques (surtout les précipitations) est une connaissance experte qui a permis de compléter l'interprétation comportementale que PARADISE était capable de fournir.

#### 4.4.2 Analyse visuelle des résultats de l'abstraction successive de *etr1*

Les quatre cycles présents dans l'évolution initiale se retrouvent dans les représentations trapézoïdales abstraites, du moins jusqu'à l'échelle 21 jours. Mais en plus, ces représentations laissent apparaître des caractéristiques comportementales indiscernables dans l'évolution initiale. Ces caractéristiques ne font pas intervenir la forme des épisodes (que l'on ne distingue pas toujours bien à l'échelle des figures 4.27, et pour laquelle on dispose de l'analyse de la chaîne symbolique), et sont instinctivement souvent liées aux variations d'amplitude du processus.

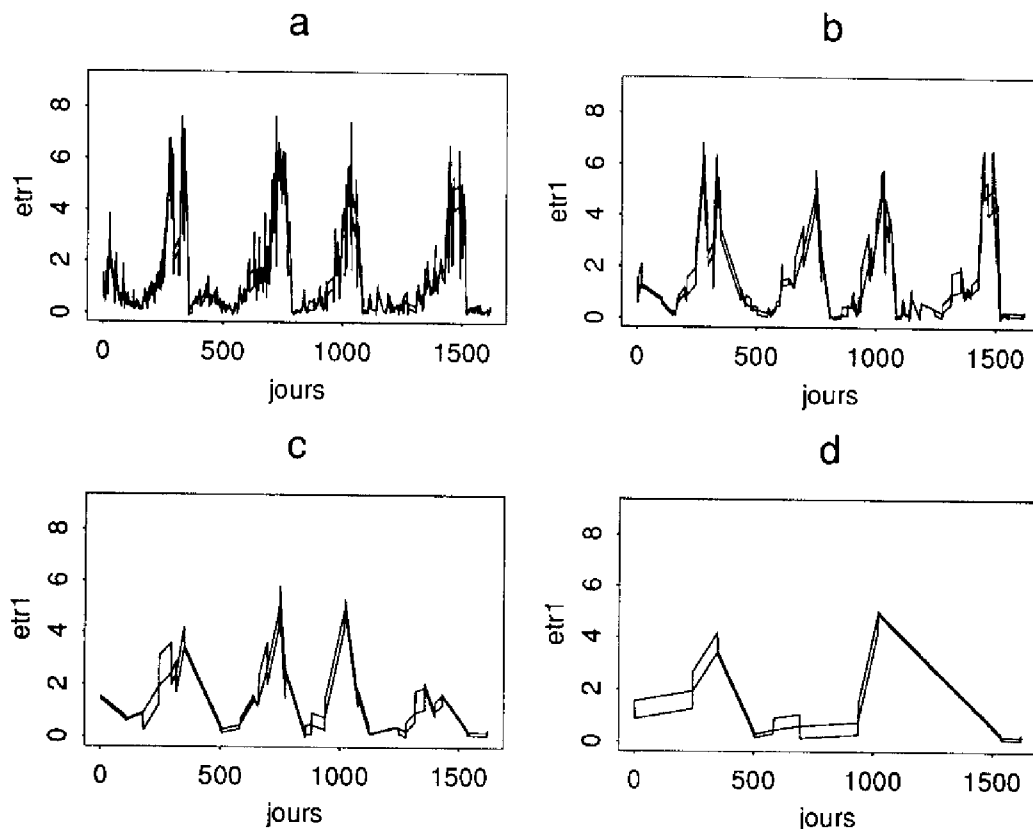


Fig. 4.27 : Représentations trapézoïdales abstraites du processus d'évapotranspiration potentielle (*etr1*) aux granularités minimales (a) 2/1621 (échelle 2 jours); (b) 7/1621 (échelle 7 jours); (c) 21/1621 (échelle 21 jours); (d) 56/1621 (échelle 56 jours).

A la validité de ces caractéristiques décelées visuellement, on pourra opposer le fait que le regroupement de trapèzes n'englobe pas tous leurs points, (cf. 2.4.4), et que tous les points d'une représentation abstraite ne sont donc pas représentatifs de l'évolution du processus. Rappelons à ce sujet que sur les 4 points d'un épisode trapézoïdal, 2 sont toujours des "vrais" points du processus (les points extrêmes). Une certaine confiance dans les valeurs numériques est donc possible. Citons donc quelques observations.

#### *Double-pics*

La représentation à la granularité minimale 2/1621, correspondant à une échelle de 2 jours, permet de distinguer un phénomène de "double-pic" dans les cycles 1 et 4 (Fig. 4.27a). Sur l'évolution initiale, il n'était relativement net que pour le cycle 1, et il a suffi de deux étapes d'abstraction pour le révéler.

Agrandissons la figure 4.27a au niveau des intervalles où se situent ces double-pics (Fig. 4.28a et b). La présence de cette particularité se traduit par un épisode assez long et quasi-horizontale entre les pics : des jours 295 à 315 pour le premier cycle, des jours 1465 à 1485 pour le quatrième, soit approximativement une durée de 3 semaines dans les deux cas.

Ces longs épisodes résultent de l'abstraction de plusieurs plus courts à cet endroit (Fig. 4.28c et d). Il y avait à ces deux endroits du domaine des fluctuations rapides (épisodes de durée 1 jour), de valeur moyenne nettement inférieure à la valeur maximale (autour de 3 et 5 comparé à un maximum de 8 et 9). L'expertise de l'agronome permet de relier cette interprétation à une *quantité de précipitations assez faible et irrégulière par rapport à la normale saisonnière*.

On remarquera que le deuxième pic du quatrième cycle ( $t = 1482$ ) a disparu entre les représentations à granularité minimale 1/1621 et 2/1621, car il ne durait qu'un jour. L'abstraction annule donc les variations trop locales comme celle-ci.

Pourtant, malgré la perte de ce pic, l'abstraction a rendu le phénomène de double-pic beaucoup plus visible qu'il ne l'était initialement. Puisque plusieurs épisodes voisins de ce pic avaient des points de valeur élevée (supérieure à 6), le point subsistant à la granularité 2/1621 est un "nouveau" pic.

#### *Plateaux*

A la granularité minimale de 7/1621, des plateaux sont visibles dans les phases de croissance du maïs (Fig. 4.27b). Leur détection et leur localisation n'étaient pas triviales dans l'évolution de départ. Ici, on les situe entre 600 et 660 jours pour le cycle 2, et entre 1320 et 1430 jours après le début pour le cycle 4 (Fig. 4.29a et b).



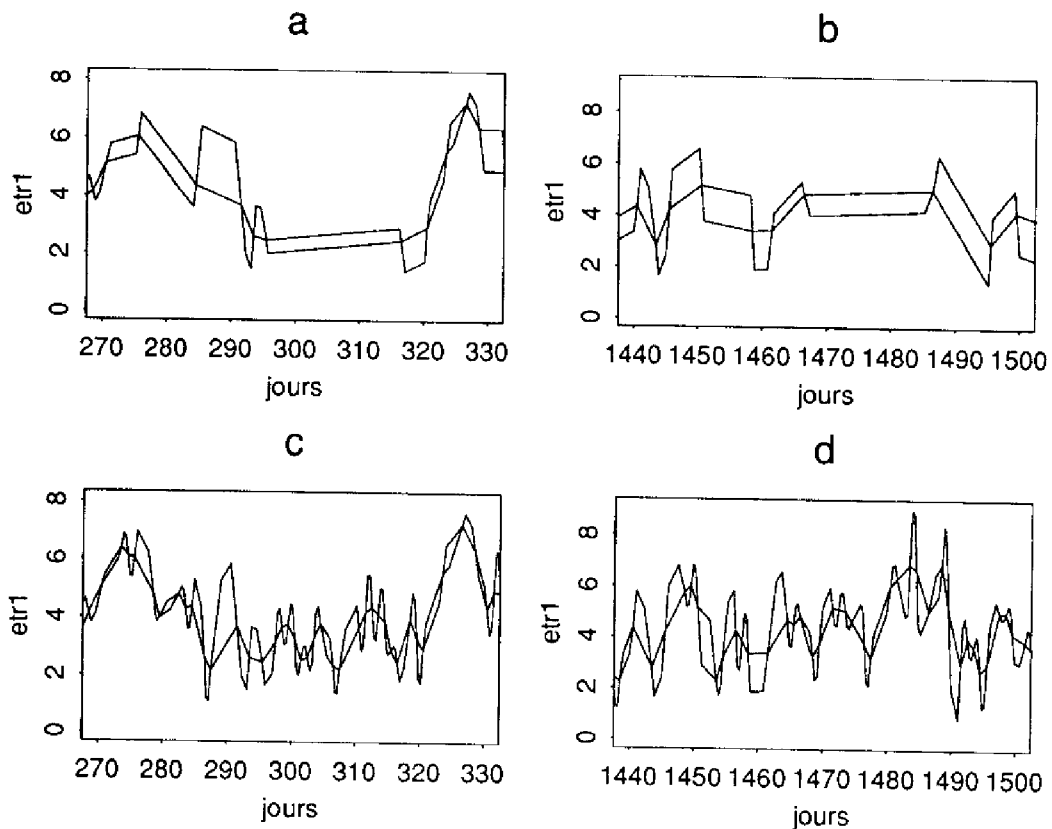


Fig. 4.28 : Vues agrandies des "double-pics" des cycles 1 et 4 pour les représentations aux granularités minimales 2/1621 et 1/1621. (a) Le double-pic (entre  $t \cong 278$  et  $t \cong 328$ ) du cycle 1 représenté à la granularité minimale 2/1621; un épisode assez long est présent entre  $t \cong 295$  et  $t \cong 315$ . (b) Celui du cycle 4 de la même représentation (entre  $t \cong 1450$  et  $t \cong 1488$ ); un épisode assez long est également présent entre  $t \cong 1465$  et  $t \cong 1485$ . (c) Le double-pic du cycle 1 représenté à la granularité minimale initiale 1/1621. (d) Le double-pic du cycle 4 de la même représentation. On s'aperçoit que le second pic (en  $t \cong 1482$ ) était plus haut que celui restant sur la figure b.

A cette granularité minimale, les fluctuations originellement présentes (Fig. 4.29c et d) sont représentées par des épisodes de durée égale à une vingtaine de jours en moyenne. On est donc passé localement d'une échelle de 1 jour à une échelle de 3 semaines (l'indice de fluctuation est passé de 0.7 épisode/jour à 0.05 épisode/jour).

Ainsi, il ressort clairement à cette granularité minimale que la phase de croissance du maïs subit un *ralentissement*, absent dans le cas du blé. Alors que la croissance du blé est très abrupte dans le premier cycle, il y a néanmoins un léger ralentissement dans le troisième (Fig. 4.27b); mais on ne distingue pas d'épisodes formant un plateau comme pour le maïs. La croissance est ralentie un moment, mais ce n'est pas un comportement récurrent du blé; il s'agirait alors plutôt d'une influence climatique.

On remarque également une différence entre les deux plateaux observés sur le maïs : dans le cycle numéro 4, le plateau débute plus tôt que dans le second. Il se situe plus "bas"

en valeur. Cette précocité du ralentissement de la croissance fut reliée par l'agronome à l'occurrence d'un *événement climatique majeur* : la présence à cette période de précipitations abondantes inhabituelles. Comme par ailleurs, ce plateau dure plus longtemps que pour le second cycle, la croissance a ensuite été très rapide, signalée par un épisode presque vertical (à  $t = 1430$ ). Ceci suggère que le maïs a rattrapé son retard de croissance.

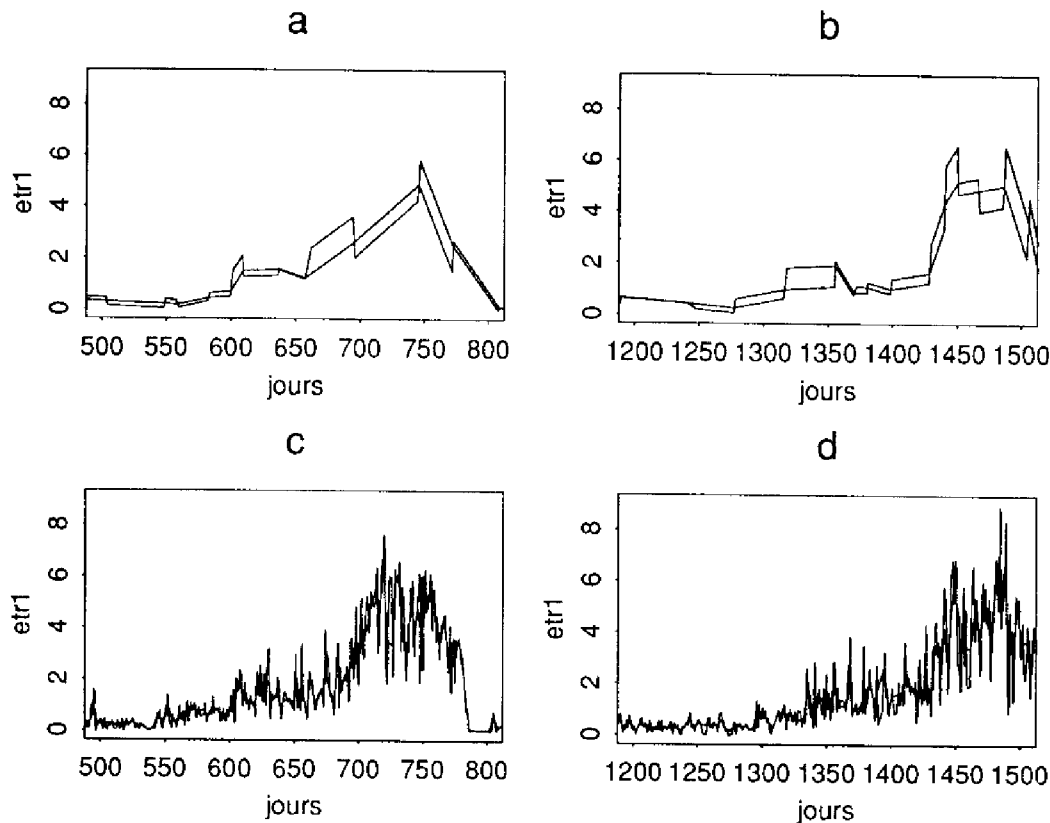


Fig. 4.29 : Vues agrandies des second et quatrième cycles du processus *etr1*. (a) Second cycle à la granularité minimale 7/1261; un plateau est distingué entre  $t = 600$  et  $t = 660$  jours. (b) Quatrième cycle à la même granularité minimale; un autre plateau apparaît entre  $t = 1320$  et  $t = 1430$  jours. (c) Second cycle à la granularité minimale initiale 1/1621 (représentation à l'étape zéro); (d) Quatrième cycle à la même granularité minimale.

#### *Sensibilité du maïs et du blé aux variations climatiques*

A la granularité minimale 21/1621 (Fig. 4.27c), les pics du quatrième cycle sont sérieusement écrêtés. Il semble donc que le quatrième cycle (maïs) soit le plus rapide, c'est-à-dire composé des épisodes les plus courts. C'est pour cette raison que jusqu'à cette granularité minimale, ils ont été regroupés plus que les épisodes des autres cycles, provoquant l'écrêtage des pics.

Cette constatation est confirmée par la représentation à la granularité minimale 56/1621 qui ne fait plus figurer ni le pic du quatrième cycle, ni celui du second (Fig. 4.27d). Aucun épisode représentant les cycles de maïs, même résultant du regroupement de plusieurs, n'a une durée supérieure à 56 jours, soit 8 semaines. On peut alors conclure de cette abstraction

que l'évapotranspiration du maïs est beaucoup plus sensible aux conditions climatiques que celle du blé, et ceci malgré la présence de plateaux.

#### Conclusion sur la procédure d'abstraction

On a pu observer visuellement des phénomènes intéressants difficiles à distinguer sur l'évolution initiale. Une expertise est cependant toujours nécessaire pour évaluer l'intérêt de ces phénomènes et les relier à d'autres processus pouvant agir sur le processus étudié. Il y a donc une forte part de subjectivité, qu'il n'y aura pas avec l'analyse des chaînes symboliques et des spectres. Egalement, il reste souvent une incertitude sur une conclusion comportementale : le phénomène observé est-il bien caractéristique du comportement du processus, ou bien est-il trop sensible aux points individuels pour que l'on soit sûr de la part nulle du hasard ? La structure des granularités permet d'évaluer cela.

#### 4.4.3 Analyse de la structure des granularités

La structure révèle que 29 étapes sont nécessaires à l'abstraction totale de *etr1* (Fig. 4.30).

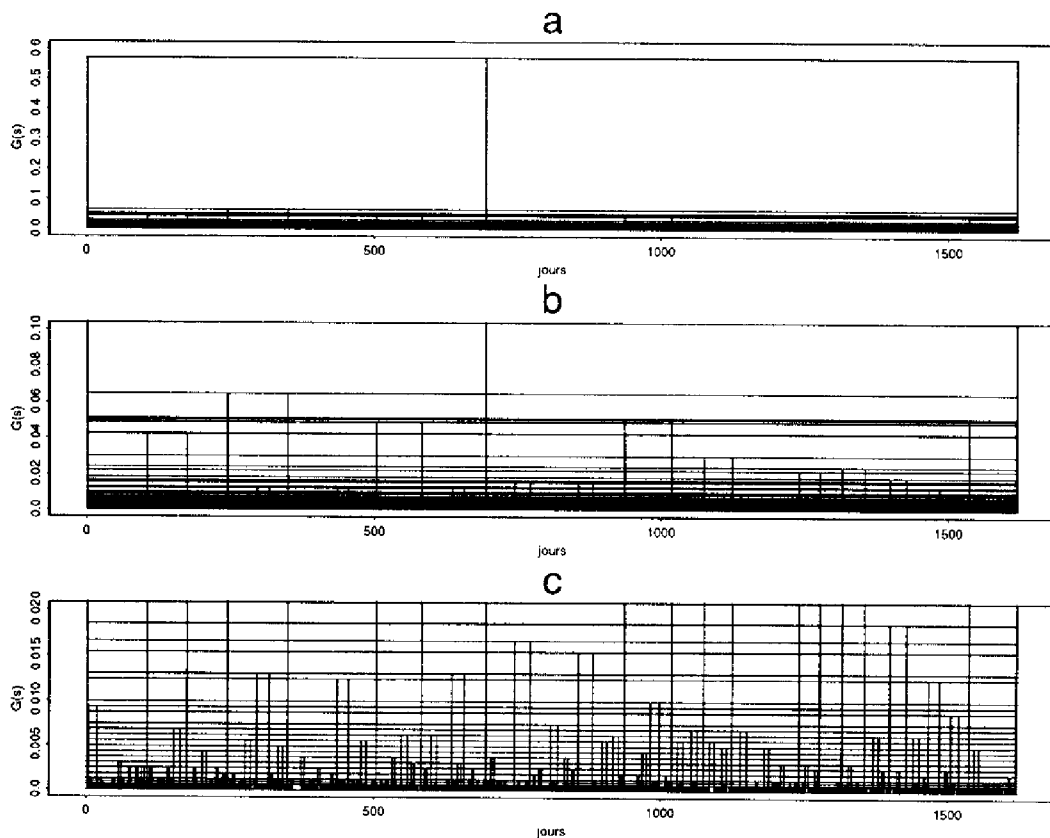


Fig. 4.30 : Structure des granularités pour le processus *etr1*. (a) la structure entière; (b) un agrandissement sur  $G^{(s)} \in [0, 0.1]$ ; (c) un autre agrandissement sur  $G^{(s)} \in [0, 0.02]$ .

*Détection d'un phénomène régulier et analyse des dynamiques imbriquées*

La recherche d'écart importants pouvant indiquer la présence d'un phénomène régulier (cf. 3.3.4) est décevante : on ne peut vraiment noter qu'un écart important, celui de la dernière étape d'abstraction. Il ne fait bien sûr pas intervenir un épisode de la représentation à l'étape zéro. La décomposition n'est donc pas très informative quant à la présence d'une tendance globale remarquable : l'évolution squelette est une simplification de l'évolution initiale et est tout aussi irrégulière (Fig. 4.31a).

Par contre, l'évolution imbriquée, si elle n'illustre pas une régularité de la durée des fluctuations (c'est-à-dire des épisodes), montre que ces fluctuations sont d'amplitude maximale au plus fort de la croissance (au niveau des pics de croissance) (Fig. 4.31b). C'est à remarquer, compte tenu du fait que ces phases ne se déroulent pas au même moment dans l'année (printemps pour le blé, été pour le maïs) et qu'on peut valablement supposer que les précipitations sont en moyenne nettement différentes entre ces deux saisons. L'évapotranspiration réelle est donc un processus connaissant des variations d'amplitude importantes dans la phase de croissance maximale, qu'il s'agisse du blé ou du maïs. L'expertise permet d'expliquer cela : *l'évapotranspiration potentielle (i.e. maximale) est plus forte lors de la phase de croissance maximale*, aussi la plante répond-elle plus intensément aux éventuelles précipitations.

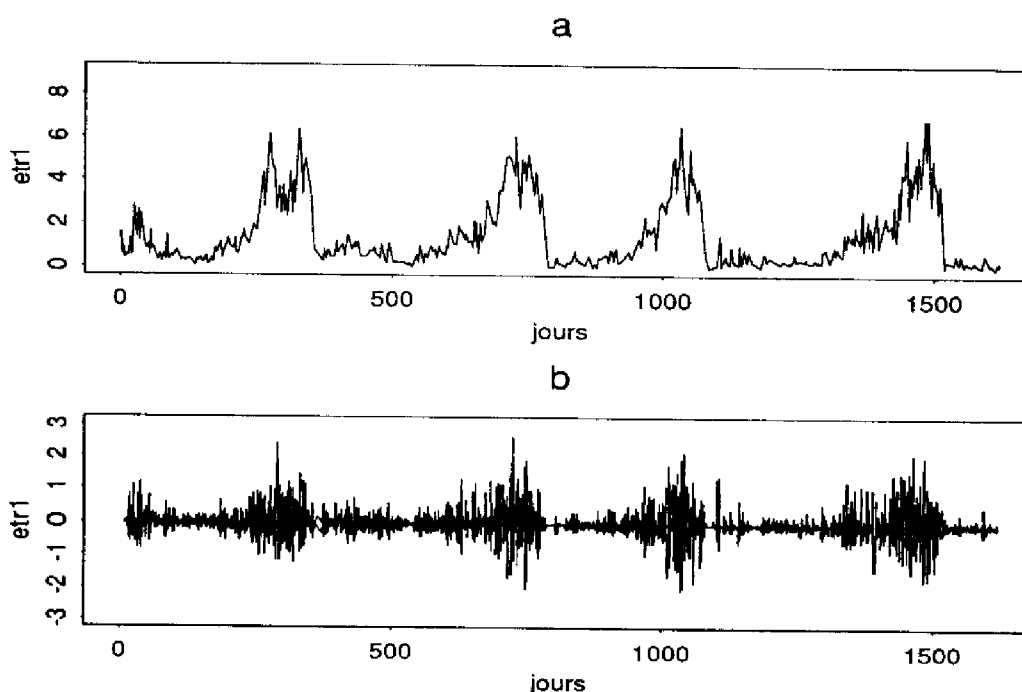


Fig. 4.31 : Décomposition des dynamiques imbriquées dans *etr1* : (a) évolution squelette; (b) évolution imbriquée.

### Analyse de la fréquence d'échantillonnage

Pour évaluer l'influence de la fréquence d'échantillonnage de la série de points initiale sur les caractéristiques comportementales "intéressantes" relevées visuellement, il faut tester d'autres séries de points. Par exemple, attachons-nous à la présence des plateaux, signalée précédemment dans la représentation à la granularité minimale  $7/1621$ . Selon la stratégie développée au 3.3.3, la première série à tester est celle comportant un point tout les 7 jours. Appelons-la *etr7*. On prend aussi la série où la fréquence d'échantillonnage est de un point par mois. Elle est notée *etr30*. Les différentes structures des granularités obtenues sont présentées en regard de la structure pour *etr1* (Fig. 4.32a, b et c).

En comparant visuellement les trois structures, on a du mal à percevoir des similarités.

— Il paraît incontestable que la structure pour *etr30* est différente : on a 31 épisodes à  $G^{(s)} = 0.018$ , alors que seuls 19 épisodes sont présents à la même granularité minimale dans la structure d'*etr1*.

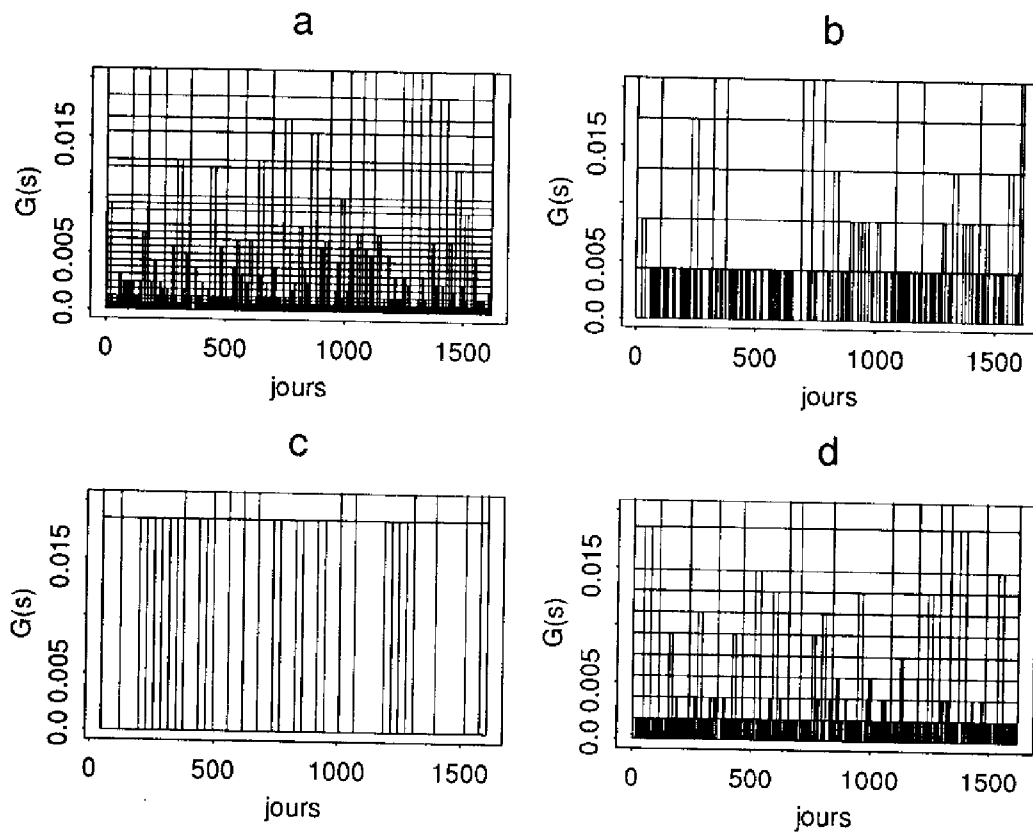


Fig. 4.32 : Partie inférieure des structures des granularités pour différentes séries de points initiales : (a) fréquence d'échantillonnage de 1 point/jour (*etr1*); (b) 1 point/7 jours (*etr7*); (c) 1 point/30 jours (*etr30*); (d) 1 point/3 jours (*etr3*). La comparaison est expliquée dans le texte.

— Entre les structures pour *etr1* et *etr7*, les différences sont également flagrantes. La première comparaison à faire est celle à  $G^{(s)} = 7/1621 = 0.043$  (soit  $G^{(0)}$  pour *etr7* et  $G^{(7)}$

pour *etr1*). Il y a de toute évidence beaucoup plus d'épisodes pour *etr7* que pour *etr1*, ce qui exclut toute similitude à cette granularité minimale. La comparaison est aussi insatisfaisante dans les représentations aux granularités les plus fortes, où il y a pourtant plus de chances d'avoir des concordances : par exemple, à  $G^{(s)} = 0.01$ , 31 épisodes sont présents pour *etr1* contre 17 seulement pour *etr7*; à  $G^{(s)} = 0.015$ , on compte 23 épisodes pour *etr1* contre 14 pour *etr7*. La localisation d'épisodes de durée semblable dans les deux structures est également peu concluante.

— De plus, l'observation de la représentation de *etr7* à l'étape zéro ( $G^{(s)} = 7/1621$ ) ne laisse pas apparaître de plateaux, bien que l'on ait vu qu'ils duraient 60 et 110 jours (Fig. 4.29a et b) ! Tout ceci n'est pas très surprenant : le comportement du processus est erratique, et l'influence des points individuels est trop importante à cause de leur forte sensibilité locale au climat.

Pour réduire l'influence de ces points individuels, on prend donc une fréquence d'échantillonnage plus grande d'à peu près le double, soit un point tous les 3 jours (*etr3*). Là, on peut constater que les plateaux se manifestent à nouveau sur la représentation à la granularité minimale 7/1621 (Fig. 4.33b).

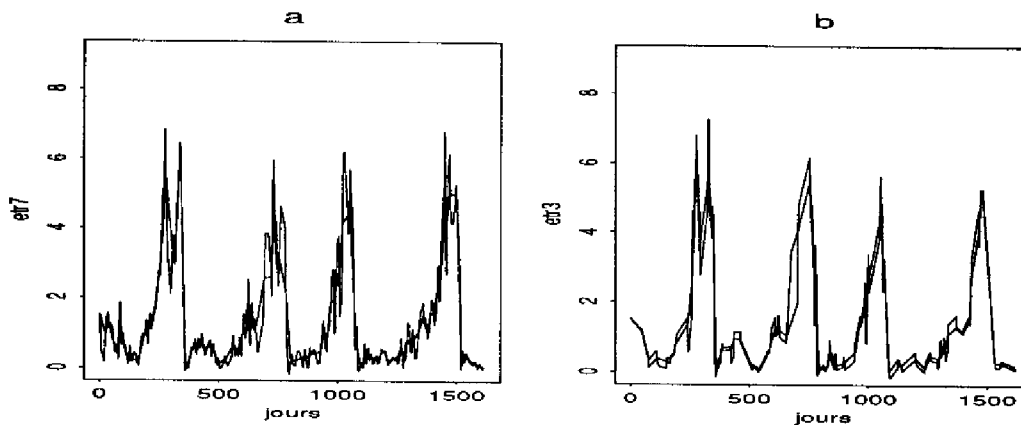


Fig. 4.33 : Les représentations de *etr7* et *etr3* à la même granularité minimale intéressante 7/1621. (a) La représentation de *etr7* ne laisse pas apparaître de plateaux dans les cycles 1 et 4. (b) Par contre, ils sont nettement discernables dans la représentation de *etr3*.

On compare les structures des granularités pour *etr1* et *etr3* (Fig. 4.32a et d). La représentation de *etr3* à  $G^{(0)} = 3/1621 = 0.0018$  comporte beaucoup plus d'épisodes que celle de *etr1* à la même granularité minimale  $G^{(3)}$ . Par contre, lorsque l'on examine les représentations à des granularités minimales plus grossières, on trouve des similarités :

— Les représentations à  $G^{(s)} = 0.01$  comportent toutes les deux 31 épisodes. On y trouve aussi une concordance de certains épisodes. Il peut y avoir 1 épisode d'un côté (sur  $[t_1, t_2]$ ), et 2 de l'autre (sur  $[t'_1, t'_2]$  et  $[t'_2, t'_3]$ ), dont les points extrêmes coïncident

( $t_1 = t'_1$  et  $t_2 = t'_3$ ) et dont la somme des durées est égale ( $t_2 - t_1 = t'_3 - t'_1$ ). C'est le cas deux fois, pour les dates  $t \in [100, 240]$  et  $t \in [1075, 1240]$ . On peut encore trouver 3 épisodes de durée totale égale, mais avec l'un des 3 décalé dans le temps (par exemple :  $t \in [700, 850]$ ).

— De même, à  $G^{(s)} = 0.015$ , la structure pour *etr3* montre qu'il y a 21 épisodes, contre 23 pour *etr1* à la même granularité minimale. Là aussi, il y a concordance de plusieurs points extrêmes d'épisodes.

Cette stratégie semble satisfaisante ici : le stockage de 1 point sur 3 est par conséquent suffisant pour retrouver le phénomène de plateau, ainsi que des structures de granularités relatant un mécanisme d'abstraction similaire. Dans le cas présent, où le processus est très sensible à l'information locale, une fréquence d'échantillonnage trop faible (1 point par semaine) faisait trop disparaître cette information. En multipliant la fréquence d'échantillonnage par 2, on en a retrouvé suffisamment.

Cette heuristique s'avère donc capable de déterminer la "bonne" fréquence d'échantillonnage et la "bonne" granularité minimale de représentation correspondantes à un phénomène intéressant.

#### 4.4.4 Utilisation des chaînes symboliques

Les procédures de détection décrites au 3.4.4 sont appliquées aux chaînes symboliques obtenues pour les processus *etr1*, *etr7* et *etr30*. Les séquences  $\{BDCA\}$  ou  $\{CABD\}$ , caractéristiques d'un comportement oscillatoire, sont nombreuses à cause de la nature très fluctuante du processus. Par contre, on ne peut en trouver dont la durée ou la variation d'amplitude des épisodes varie de façon monotone sur plus de trois ou quatre épisodes. Vis-à-vis du nombre d'épisodes total (plus de 1000 à l'étape zéro, 272 à l'étape 1, plus de 50 après 10 étapes d'abstraction), force est d'avouer que l'importance de ces oscillations pour l'interprétation du processus est faible.

On s'attache donc plutôt ici aux récurrences, impossibles à repérer visuellement. En particulier, nous nous fixons comme tâche principale la détermination de la granularité minimale et de la fréquence d'échantillonnage pertinentes pour la représentation du comportement de l'évapotranspiration selon l'espèce. Il s'agit donc d'avoir une récurrence sur les cycles 1 et 3, différente d'une autre récurrence couvrant les cycles 2 et 4. Ceci n'est pas réalisable visuellement, ni avec la structure des granularités, ni avec les spectres.

#### *Etr1*

Dans la représentation de *etr1* à l'échelle de 7 jours (Fig. 4.34a), 5 séquences maximales (non incluses dans une plus longue) et récurrentes deux fois sont trouvées. Trois d'entre

elles concernent des intervalles situés entre deux cycles, et sont donc moins intéressantes pour l'interprétation (sauf si on s'intéresse aux inter-cultures). Les deux autres couvrent des cycles entiers.

— La récurrence la plus longue est celle de la séquence :

$\{BDCABDCABDCABABABDCABDCABDCABDCABDCABDCABDCABD\}$ ,

répétée pour  $t \in [151, 503]$  et  $t \in [1355, 1620]$ . Ces intervalles sont complètement occupés par les cycles 1 (blé) et 4 (maïs). Cela révèle un comportement *symbolique* semblable pour la forme de ces cycles, bien qu'ils ne soient pas de la même plante. La séquence élémentaire la plus courante de cette récurrence est  $\{BDCA\}$  (ou  $\{CABD\}$ ), qui traduit une oscillation. Une séquence assez rare pour une évolution aussi erratique est à remarquer :  $\{BABA\}$ , qui signifie la présence d'une phase de croissance sur deux épisodes consécutifs. Elle est localisée en début des 1<sup>er</sup> et 4<sup>ème</sup> cycle.

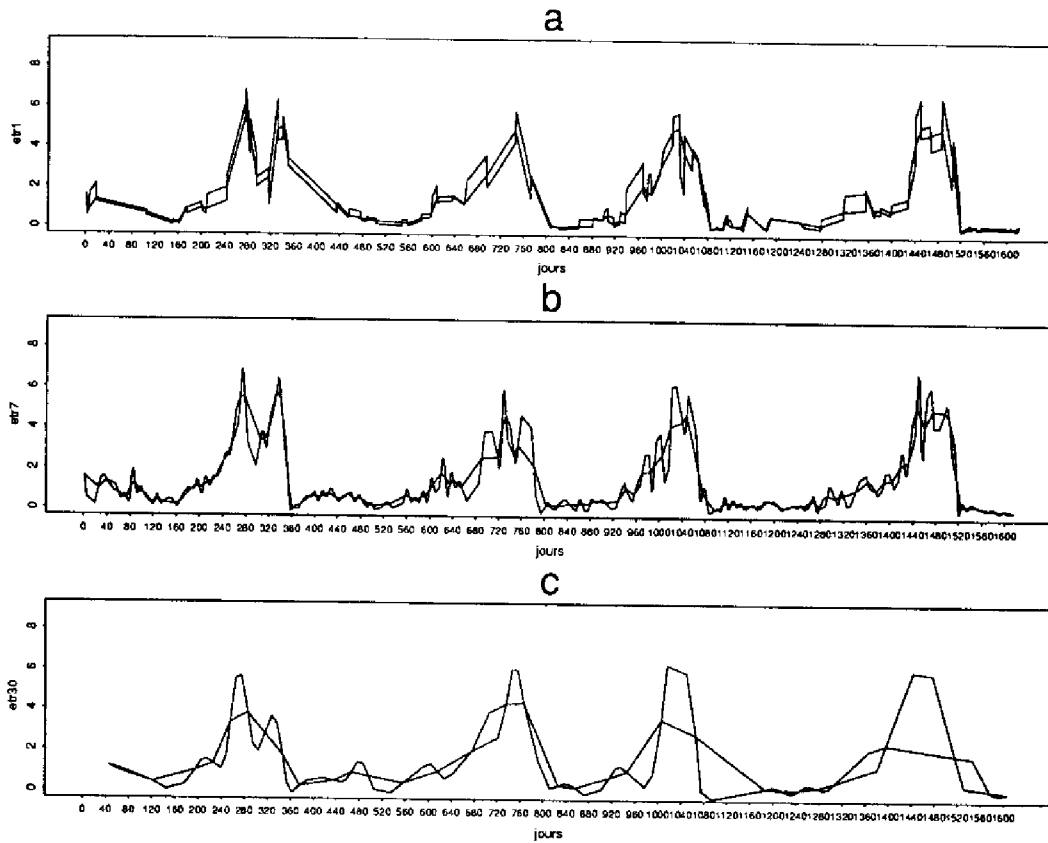


Fig. 4.34 : Représentations des processus (a)  $etr1$  à  $G^{(s)} = 7/1621$ , (b)  $etr7$  à  $G^{(0)} = 7/1621$  et (c)  $etr30$  à  $G^{(0)} = 30/1621$ . Leur interprétation symbolique est donnée dans le texte.

La présence d'un phénomène de croissance suivie d'un double-pic dans les cycles 1 et 4 (dételé visuellement, cf. 4.3.2) est confirmée par la récurrence de la séquence  $\{BABABDCABDCABDCABD\}$ . A cette granularité minimale, la forme des 1<sup>er</sup> et 4<sup>ème</sup>



cycles *entiers* est donc la même, ce que l'on n'avait vu que partiellement lors de l'interprétation visuelle avec les double-pics.

— L'autre récurrence est celle de la séquence :

$(CABDCABDCABDCABABDCABDCABDCABDCABDCABD)$ ,

pour  $t \in [445, 820]$  et  $t \in [917, 1115]$ . Ces périodes sont celles des cycles 2 (maïs) et 3 (blé), qui ont donc la même allure à cette granularité minimale, en ne considérant que l'information symbolique. Ceci non plus n'avait pas été mis en évidence à l'oeil nu.

Inversement aux nouvelles informations que l'on obtient à partir de la mise en correspondance de motifs dans la chaîne symbolique, on s'aperçoit que l'on ne retrouve pas la récurrence d'une séquence traduisant les plateaux précédemment visualisés sur cette même représentation (cf. 4.3.2). Ceci prouve que ces plateaux, décelés à cause de leur valeur moyenne quasi-constante, ne sont pas tout à fait de la même forme pour les cycles 2 et 4. Egalement, il faut noter que les récurrences trouvées ne permettent pas de distinguer les formes d'évolution des deux espèces.

#### *Etr7*

Si l'on considère maintenant la représentation du processus *etr7* à la granularité minimale de l'étape zéro, soit 7/1621 (Fig. 4.34b), on a du mal à trouver des séquences couvrant des parties importantes du processus.

— Plusieurs récurrences permettent cependant d'associer les cycles 1 et 3, ce qui tendrait à prouver une conformité de comportement pour les deux cycles du blé à cette granularité minimale. Mais ces récurrences couvrent approximativement la moitié d'un cycle. Par exemple,  $\{BDCABDCABDCABABDCABDCA\}$  est repérée pour  $t \in [207, 319]$  et  $t \in [880, 1020]$ , ce qui correspond aux phases de croissance du blé (notons le type *BA*, encore une fois significatif d'une phase de croissance). On ne peut donc rien en conclure sur la forme entière du comportement du blé.

— Il est par contre difficile de trouver une récurrence de forme sur les deux comportements du maïs. Tout juste peut-on trouver de petites récurrences localisées en début de cycle :  $\{CABDCABD\}$  est présente pour  $t \in [655, 732]$  et  $t \in [1375, 1425]$ .

En fait, à cette granularité minimale, il y a encore trop de différences entre les cycles 2 et 4. En particulier, les plateaux ne sont pas détectables. Si l'on demande à PARADISE de localiser toutes les séquences  $\{CABDCDCABDCA\}$  (que l'on peut remarquer à l'emplacement approximatif du plateau pour le quatrième cycle), aucune récurrence trouvée n'est compatible avec la phase de croissance du second cycle.

*Etr30*

Puisqu'il semble y avoir trop de détails non pertinents pour dissocier les comportements des deux espèces, prenons une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus grande : un point par mois. La figure 4.34c indique la représentation à l'étape zéro de la série ainsi constituée *etr30*.

— Une séquence récurrente  $\{BDCABDCABDCA\}$  est détectée pour  $t \in [195, 375]$  et  $t \in [825, 1180]$ . Ses deux occurrences couvrent la totalité des cycles 1 et 3 (blé). Une autre,  $\{BDCABABDC\}$ , est localisée pour  $t \in [555, 800]$  et  $t \in [1245, 1540]$ , ce qui correspond à la totalité des cycles du maïs.

— La dissemblance majeure entre les comportements du blé et du maïs est le fait qu'une augmentation brusque démarre la croissance du blé (épisode de type *CA*) alors qu'un point d'inflexion ralentit celle du maïs (épisode de type *BA*). Ceci précise et confirme l'interprétation visuelle réalisée, qui avait conclu à la présence de plateaux en début de croissance du maïs.

Cette fréquence d'échantillonnage et cette granularité minimale sont donc parfaites pour distinguer les différences de forme entre les comportements de l'évapotranspiration pour le blé et pour le maïs. Elles illustrent un bon compromis : elle sont *suffisamment précises* pour qu'un cycle de blé n'ait pas la même forme qu'un cycle du maïs, mais *suffisamment grossières* pour qu'il n'y ait pas de différence entre les deux cycles d'une même espèce. Ce compromis n'était pas simple à atteindre, la sensibilité du processus à un phénomène aléatoire (comme le climat) rendant l'analyse peu concluante en présence de trop de détails. La détermination de cette "bonne" granularité minimale pour la dissociation des espèces était impossible à obtenir avec la seule analyse visuelle des représentations plus ou moins abstraites.

*Conclusion sur l'analyse des chaînes symboliques*

L'intérêt des chaînes symboliques est multiple : elles permettent de mettre en lumière des comportements et récurrences indiscernables autrement. Egalement, la recherche de séquences peut confirmer de manière parfaitement objective une interprétation visuelle peu sûre car forcément subjective. Plus encore peut-être que cela, l'un des intérêts majeurs de la détection de comportements ou de récurrences est de permettre de trouver, après quelques essais, la granularité minimale de la représentation où l'on détecte les comportements qualitatifs que l'on désire. Ce moyen d'analyser automatiquement une représentation à n'importe quel niveau de détail devrait par là-même être un outil précieux pour les tâches de modélisation et de simulation. Nous y reviendrons dans la conclusion générale.

#### 4.4.5 Analyse des spectres

La plupart des spectres ne sont disponibles que pour les représentations à l'étape zéro, les étapes ultérieures faisant intervenir des épisodes *BA* et *CD* contenant un changement de direction. La durée et la variation d'amplitude des comportements *BD* et *CA* qu'ils représentent sont par conséquent inconnues (cf. 2.4.4). Citons quelques spectres à l'étape zéro, particulièrement intéressants pour l'interprétation.

##### *Spectres des types*

Le spectre des types exprimé en nombre d'épisodes construit à partir de la représentation à l'étape zéro de *etr1* montre une large majorité de types *BD* (passage par un maximum) et *CA* (passage par un minimum), en nombre quasiment égal. Il en est de même pour les représentations à l'étape zéro de *etr7* et *etr30* (Fig. 4.35), ainsi que pour les représentations aux étapes ultérieures. La conclusion tirée est le caractère global presque exclusivement oscillatoire du comportement. On mesure alors d'autant mieux l'importance des deux épisodes consécutifs *BABA* (croissance) signalés dans la séquence récurrente maximale de *etr1* à l'échelle 7 jours (cf. 4.4.4).

Comme on l'a vu avec les chaînes symboliques, la prise en compte des durées et variations d'amplitude n'apprend rien qui permette de caractériser ces oscillations plus en détail.

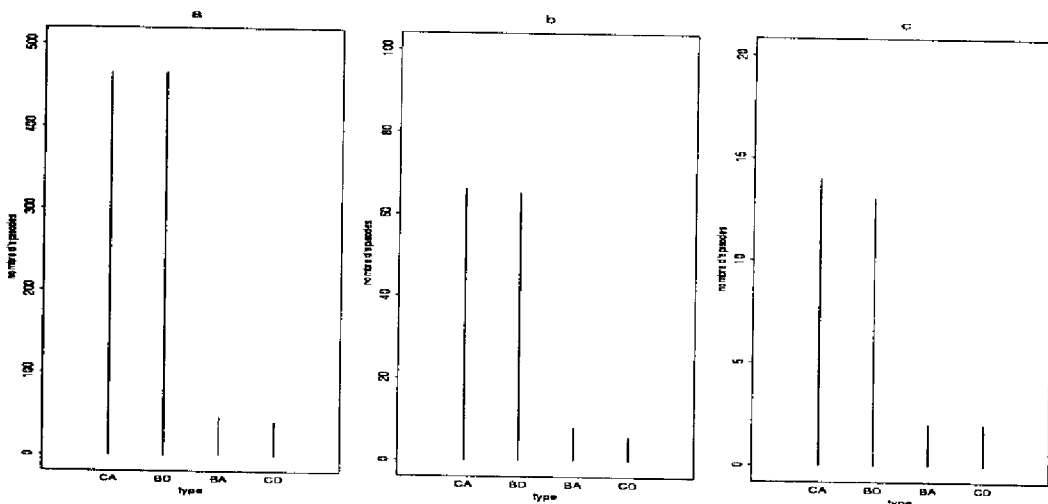


Fig. 4.35 : Spectres des types exprimés en nombre d'épisodes : (a) pour *etr1*; (b) pour *etr7*; (c) pour *etr30*. Dans les trois cas, il y a une forte majorité de types *CA* et *BD*.

##### *Spectres des granularités*

Dans un tel processus, les oscillations peuvent dénoter un comportement aléatoire. Pour vérifier cette hypothèse, le spectre des granularités exprimé en nombre d'épisodes est tracé

pour les représentations de *etr1* et *etr7* à l'étape zéro (Fig. 4.36). La répartition en classes pour une répartition aussi régulière ne peut se faire qu'en prenant une classe pour chaque granularité. Le test du  $\chi^2$  est positif pour une distribution binomiale de paramètre 1/2 : la population des épisodes à  $G^{(0)}$ ,  $2G^{(0)}$ ,  $3G^{(0)}$ , etc. est proche de  $n/2$ ,  $n/4$ ,  $n/8$ , avec  $n$  le nombre total d'épisodes. Ceci confirme la forte connexion entre l'évapotranspiration et les variations climatiques, que l'on sait suivre de telles lois : l'évapotranspiration du jour (de la semaine pour *etr7*)  $t+1$  a une probabilité 1/2 d'être supérieure à celle du jour (de la semaine)  $t$ , et la même probabilité d'être inférieure.

Il est par conséquent intéressant de remarquer que, même si l'évolution d'un processus laisse clairement apparaître des variations d'amplitude remarquables (quatre cycles ici), il n'y a pas de déterminisme sur la durée des épisodes (cf. 3.5.4). Ceci confirme l'absence d'une régularité globale des fluctuations, ce qui complète la connaissance d'une absence de régularité locale, prouvée par la structure des granularités (cf. 4.4.3).

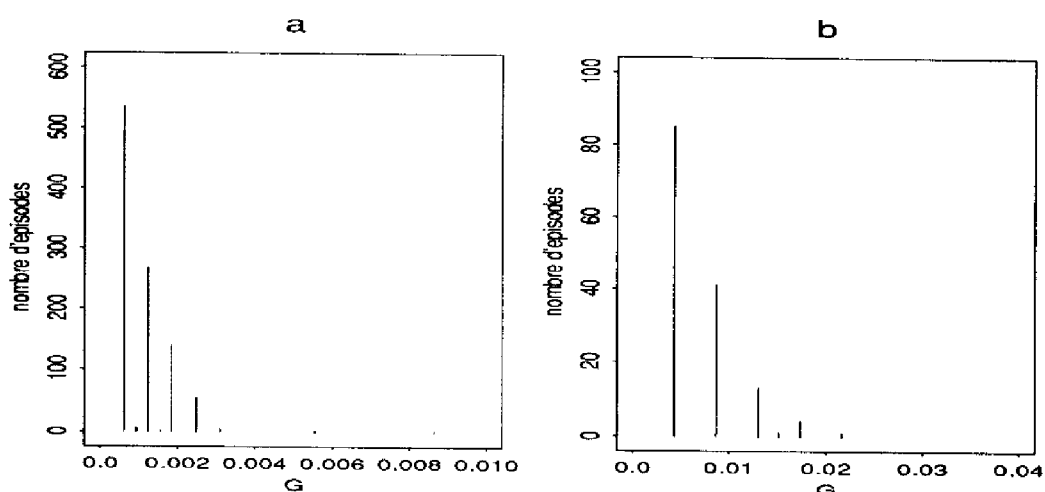


Fig. 4.36 : Spectres des granularités exprimés en nombre d'épisodes : (a) pour *etr1*; (b) pour *etr7*. Les formes exhibées par ces spectres sont caractéristiques d'une distribution binomiale de paramètre 1/2.

Le tracé du spectre des granularités pour chaque type d'épisode de *etr1* (Fig. 4.37) permet de relever que les épisodes de type *BA* et *CD* ont au moins une granularité égale au double de la granularité minimale des *BD* et *CA*. Les phases monotones sont donc moins nombreuses, mais durent chacune le double de temps de la plupart des phases de maximum ou minimum. On retrouve ce phénomène pour *etr7* et *etr30*. Ceci pourrait traduire un double processus pour l'évapotranspiration : un processus de croissance propre responsable des phases monotones et des cycles globaux de croissance/récolte, auquel se superpose un aléa climatique.

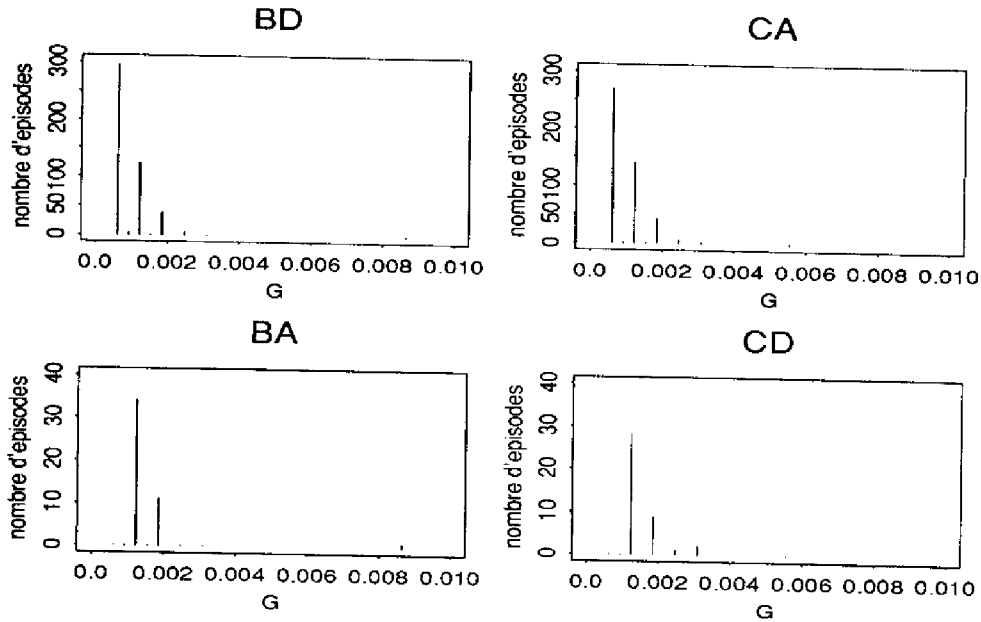


Fig. 4.37 : Spectre des granularités exprimé en nombre d'épisodes, pour chaque type d'épisode trapézoïdal de *etr1* représenté à l'étape zéro. On retrouve la forme d'une binomiale de paramètre  $1/2$  pour *CA* et *BD*. Les types *BA* et *CD* ont une granularité au moins égale au double de la granularité minimale de *CA* et *BD*.

#### *Spectres des variations d'amplitude*

Les spectres des variations d'amplitudes pour *etr1* et *etr7* démontrent qu'une grande majorité des épisodes trapézoïdaux présente une faible variation d'amplitude (classe de variations d'amplitude inférieures à 1.6) (Fig. 4.38). Le comportement est erratique, mais le processus subit peu de variations importantes. A partir de sa valeur à  $t$ , on peut donc d'une manière fiable donner une fourchette pour la valeur à  $t+1$ , même si comme on l'a vu précédemment, on ignore dans quel sens se fera le changement.

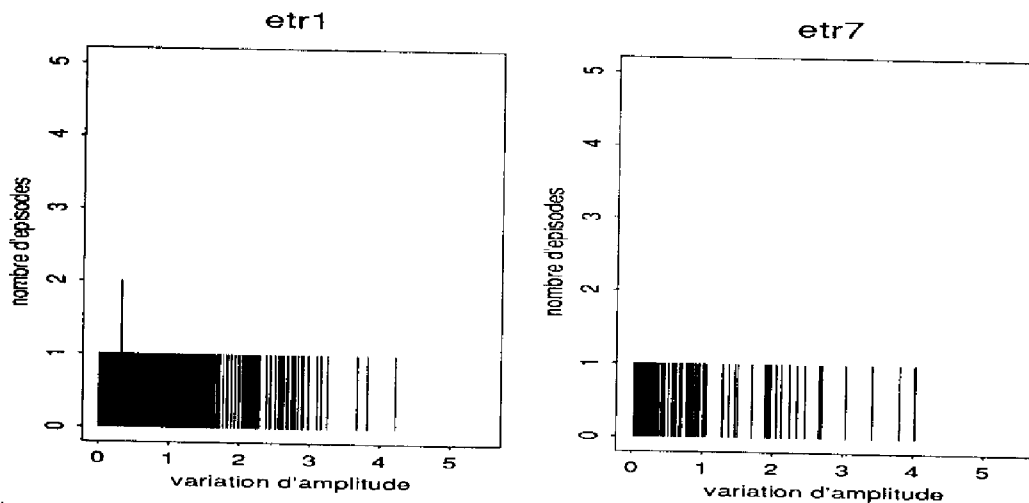


Fig. 4.38 : Spectres des variations d'amplitude exprimés en nombre d'épisodes pour *etr1* et *etr7*. Il est clair que la majorité des épisodes exprime une faible variation d'amplitude du processus.

### *Conclusion sur les spectres*

La concordance des conclusions selon la fréquence d'échantillonnage prouve que la plupart des interprétations comportementales *globales* de ce processus peuvent aussi bien être retrouvées en ne conservant qu'1 point sur 7, voire 1 sur 30. On ne modifie donc pas de façon conséquente le comportement global de l'évapotranspiration en éliminant une grande part de ses points. Ceci n'était pas vrai pour les comportements locaux, découverts à partir des chaînes symboliques ou de la structure des granularités. Evidemment, on ne pouvait pas non plus conclure cela de l'analyse visuelle des représentations. Les interprétations ne sont donc pas redondantes.

On a donc en définitive un processus globalement très erratique composé de deux sous-processus, que l'on peut faire correspondre aux dynamiques imbriquées (Fig. 4.12) : l'un est celui de la croissance propre des plantes, et est composé de fluctuations de durée irrégulière (évolution squelette). L'autre retrace l'aléa climatique, avec des fluctuations de durée beaucoup plus courte et également irrégulière (suivant une binomiale), et d'amplitude peu importante (évolution imbriquée).

C'est à peu près tout ce que l'on peut dire du comportement global de ce processus, et c'est complémentaire à tout ce que l'on a pu apprendre localement par l'analyse visuelle des représentations, l'analyse de la fréquence d'échantillonnage, la décomposition des dynamiques imbriquées et l'analyse symbolique à différents niveaux d'abstraction. L'ensemble de ces informations fournit une description assez complète des comportements du processus, apte en particulier à guider l'utilisateur vers une granularité minimale et une représentation intéressante pour la tâche à accomplir.

## **4.5 Conclusion**

Ce chapitre a permis de tester les capacités interprétatives de nos outils sur des cas concrets.

La maquette logicielle réalisée à cet effet, PARADISE, n'autorise quasiment pas d'interactivité avec l'utilisateur. Mais elle réalise tous les calculs des représentations, structure des granularités, chaînes et spectres pour une série de points initiale. Egalement, une majeure partie des interprétations y est implémentée. Il restera à y développer la procédure d'interprétation des spectres, ce qui ne devrait pas poser de difficulté.

Comme nous disposions du générateur de système-expert G2, nous y avons développé l'interprétation des structures des granularités et des chaînes symboliques. Nous l'avons couplé avec PARADISE de telle manière qu'une session d'interprétation en boucle soit possible : affichage des différentes représentations et des différents outils, analyse de ces outils, suggestion d'une nouvelle fréquence d'échantillonnage, ré-échantillonnage,

affichage des nouvelles représentations et des nouveaux outils, analyse et comparaison avec les résultats de la première analyse.

Nous avons d'abord vérifié la justesse des interprétations sur un modèle simple et connu : le modèle proie-prédateur, auquel a été adjointe une population de chasseurs. L'analyse des fluctuations de ces trois processus interagissant nous a permis d'illustrer de façon satisfaisante la méthode de décomposition des dynamiques imbriquées. En particulier, elle permet de déterminer les influences — en matière de rapidité de fluctuation — existant entre les processus d'un même système.

Afin de mettre en évidence le caractère avantageux de la localité temporelle de ce traitement "fréquentiel", nous avons décomposé un processus irrégulier, et comparé le résultat avec les résultats donnés par une bonne collection de lisseurs et filtres pointus. Il s'est avéré qu'aucun d'eux n'était capable, à l'instar de notre décomposition, de dissocier en tout point de l'évolution les fluctuations de plus haute fréquence (les plus rapides) de la tendance globale restante. Ainsi l'établissement de relations d'influences entre les fluctuations des processus est-il possible localement, ce qui est indispensable dans la situation de processus irréguliers où nous nous sommes placés.

Nous avons enfin interprété en détail un processus agronomique complexe. Les comportements décelés par les différents outils se sont montrés complémentaires. Les informations tirées de l'analyse visuelle des courbes, teintées de subjectivité et donc quelquefois hypothétiques, ont pu être confirmées par l'analyse des outils symboliques et statistiques.

L'utilisation de la structure des granularités pour la comparaison des procédures d'abstraction de deux séries de points initiales n'a pas été évidente, comme nous l'avions prévu. C'est une des voies dans lesquelles il y a des développements simples à réaliser, avec la comparaison de deux représentations à même granularité (cf. 3.3.3). Néanmoins, nous sommes parvenus à prouver qu'une certaine robustesse des représentations était possible, même sur un processus extrêmement agité et soumis à l'aléa climatique comme l'évapotranspiration.

Avec les chaînes symboliques s'est posé le problème de la pertinence des informations fournies automatiquement. En effet, avec une connaissance purement symbolique, une multitude d'oscillations sont détectées, et beaucoup de récurrences ne sont pas exploitables. Une telle analyse symbolique automatisée a cependant ceci d'intéressant qu'elle produit une information critique et d'une grande simplicité d'utilisation. Le raisonnement symbolique, avec un alphabet limité à quatre lettres pour décrire toutes les formes possibles de comportement, s'avère rapide et facile à manier. L'information dont on dispose est partielle, mais elle est suffisante pour une interprétation en termes de formes élémentaires, elle-même suffisante pour analyser qualitativement n'importe quel processus complexe.

Enfin, les spectres sont aussi rapidement exploitables : selon la caractéristique des épisodes dont on étudie la distribution, on obtient également une information critique, simple et différente de celle obtenue par les autres outils. Les spectres permettent de s'abstraire des détails locaux pour s'attacher à des considérations générales que l'on aurait pu rater sans eux. Cela est d'autant plus vrai que le processus est erratique, car la quantité de détails le rend difficile à appréhender dans sa globalité.



# Conclusion générale

Nous avons conçu, développé et testé un système d'interprétation de courbes numériques baptisé PARADISE. Il permet de réaliser une analyse multi-résolution des comportements d'un processus dynamique, basée sur la représentation de ce processus à différents niveaux d'abstraction.

## *Représentation d'une évolution*

A partir d'une série de points initiale, formée de mesures ou de résultats de simulation et représentant l'évolution d'un processus, une segmentation est réalisée. Elle est fondée sur le concept d'épisode triangulaire, qui permet la description d'une courbe en termes de tendances et courbures qualitatives. Ainsi est générée une nouvelle représentation dynamique constituée d'épisodes triangulaires et appelée *représentation triangulaire*. La série de points initiale est entièrement contenue dans cette représentation, qui décrit donc à la fois quantitativement et qualitativement l'évolution du processus.

Le regroupement des épisodes triangulaires en épisodes trapézoïdaux produit ensuite une *représentation trapézoïdale* de l'évolution. Une abstraction successive de cette représentation trapézoïdale est alors possible sans expertise de l'utilisateur. Elle s'effectue de manière géométrique, en regroupant les épisodes trapézoïdaux en épisodes de durée plus longue. La durée des épisodes étant le seul critère d'abstraction employé, cette procédure est une *abstraction temporelle* automatique.

Cette méthode est applicable à n'importe quel processus dynamique. Nous avons cependant pour tâche d'analyser des processus se déroulant au sein de systèmes naturels. A

cause de l'incertitude liée aux modèles numériques ou aux mesures disponibles pour de tels processus, nous avons choisi de privilégier les *formes d'évolution* (exprimées qualitativement) par rapport aux valeurs numériques. Par contre, pour évaluer la durée des intervalles de temps sur lesquels les comportements qualitatifs sont observés, nous avons conservé une datation précise. Aussi, bien que l'abstraction temporelle implique la perte de connaissances comportementales (en termes de valeurs numériques, tendances et courbures qualitatives), les changements de niveau de détail sont localisés dans le temps. Ayant affaire à des processus susceptibles d'exhiber de fortes irrégularités de fluctuation, cette localisation temporelle des comportements et de leur niveau de détail est un point positif important.

Bénéficiant du caractère temporellement local des abstractions effectuées, nous avons mis en place une décomposition "fréquentielle" qui sépare en tout point du domaine temporel les fluctuations de plus haute fréquence ("rapides") de la tendance globale du signal ("fluctuations lentes"). Cette *décomposition des dynamiques imbriquées* permet d'établir des relations d'influence entre les processus d'un même système, selon la vitesse de leurs fluctuations.

Cet aspect visant la représentation d'une évolution à différents niveaux d'abstraction a constitué la première partie de nos travaux. Les représentations du processus ainsi obtenues revêtent un intérêt strictement *visuel* qui est déjà fort utile pour l'interprétation comportementale et le choix d'une représentation, objectif de la seconde partie.

#### *Interprétation comportementale et choix d'une représentation*

Nous avons défini une notion de *granularité temporelle* pour mesurer numériquement le niveau de détail local d'une représentation. La plus petite valeur de ces niveaux de détail locaux, appelée *granularité minimale*, caractérise le niveau de détail de la représentation entière, c'est-à-dire le seuil en deçà duquel un comportement n'est plus représenté. La granularité fait intervenir non seulement la durée des comportements qualitatifs (i.e. des épisodes), mais aussi la durée d'étude du processus. Ayant ainsi un caractère adimensionnel, elle devrait permettre un raisonnement homogène sur le comportement de plusieurs processus et pas simplement sur le comportement d'un seul. L'analyse comparative du comportement de deux processus interagissant au sein d'un même système est donc la première grande perspective que nous pouvons tracer pour la suite de ces travaux.

Pour ce faire, il fallait d'abord concevoir et juger des *outils* adaptés à l'interprétation d'un seul processus à n'importe quel niveau d'abstraction.

Un premier outil, la *structure des granularités*, remplit une double fonction. D'abord, il permet de détecter automatiquement des phases de fluctuation régulière dans l'évolution du

processus. Ces phases sous-tendent bien souvent une tendance globale remarquable du processus. La décomposition des dynamiques imbriquées y est donc particulièrement intéressante. Ensuite, la structure des granularités sert à évaluer l'influence de la série de points initiale, dont dépendent toutes les représentations. En effet, les autres outils peuvent conduire l'utilisateur à choisir une représentation particulière parmi celles dont il dispose. Ce choix implique la ré-exécution de la procédure d'abstraction pour une nouvelle série de points, résultant du ré-échantillonnage de la série initiale. La nouvelle structure aide alors l'utilisateur, par comparaison avec la première, à estimer l'impact de cette modification sur les représentations obtenues.

La comparaison automatique de deux structures peut être un premier pas vers la comparaison de deux processus distincts, que nous avons évoquée comme perspective prioritaire. Elle passe par la définition de différents degrés d'équivalence : nombre d'étapes d'abstraction, nombre d'épisodes à une même granularité minimale, emplacement des épisodes minimaux, etc. Ainsi, il sera possible de comparer deux représentations du même processus à granularité minimale différente (avec une structure), deux représentations du même processus à même granularité (avec deux structures), et enfin les représentations de deux processus à granularité égale ou différente (avec une structure pour chacun d'eux).

Les autres outils d'interprétation sont destinés à révéler à l'utilisateur des caractéristiques intéressantes pour lui et susceptibles de guider son choix d'une représentation particulière, et donc d'une granularité minimale et d'une fréquence d'échantillonnage :

— Le second outil formalisé est une *chaîne symbolique*, formée par les types des épisodes d'une représentation. Avec elle, des comportements particuliers, périodiques, récurrents, etc. peuvent être décelés et localisés dans le domaine temporel d'étude. En ajoutant les informations numériques concernant la durée et la variation d'amplitude du processus dans chaque épisode, on affine si besoin est la caractérisation de ces comportements.

— Les derniers outils sont statistiques, et offrent des descriptions globales (non datées) du comportement du processus, également pour une représentation. Ces descriptions sont complémentaires à celles issues d'une chaîne, qui sont localisées dans le temps. Elles sont obtenues à partir de *spectres*, capables de fournir en partie le même type d'information que l'interprétation d'une chaîne (oscillations, variations d'amplitude, durées des comportements). Ici cependant, on étudie la proportion de certains comportements dans l'ensemble des comportements présents, ainsi que leur distribution statistique dans la représentation.

Ces deux classes d'outils pourront également intervenir dans la comparaison de deux processus : si l'on peut automatiser la comparaison de deux spectres correspondant à deux

représentations du même processus, on devrait arriver à comparer deux spectres correspondant à deux processus représentés à la même granularité.

Quant aux chaînes symboliques, nous pensons que les perspectives les plus prometteuses sont liées à leur utilisation. En effet, on peut sans mal en imaginer quelques-unes pour la comparaison :

— à la même granularité, on pourra comparer les interprétations obtenues : comparaison des localisations de séquences codant un comportement oscillatoire et des localisations des récurrences;

— plus intéressante peut-être, la comparaison des séquences d'épisodes elles-mêmes devra être étudiée. Par la définition d'une *distance symbolique* entre deux séquences, on pourra évaluer leur degré de similitude. Généraliser cette idée aux représentations entières conduira alors à évaluer la similitude entre deux chaînes symboliques codant les représentations, à même granularité ou non, de deux processus distincts. Relevant de ces objectifs, on pourra s'inspirer de ce qui est déjà réalisé en biologie moléculaire dans le cadre de l'analyse de séquences, formées elles aussi à partir d'un nombre fini de symboles (alphabet de quatre lettres pour les acides nucléiques).

#### *Vers une algèbre symbolique ?*

Une autre voie à explorer serait la définition d'opérations qualitatives sur les chaînes symboliques. Nous avons remarqué que les types  $A$  et  $D$ ,  $B$  et  $C$ ,  $BD$  et  $CA$  et  $CD$  et  $BA$  sont opposés (cf. 2.3.3). Peut-être pourrait-on alors proposer une algèbre symbolique sur les quatre lettres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , de manière à pouvoir réaliser une "addition" ou une "soustraction" de deux chaînes symboliques, ainsi qu'à établir une relation d'ordre. L'information numérique aiderait à résoudre les situations ambiguës (par exemple :  $A$  "+"  $D$  = ?) : si  $A$  et  $D$  sont de même durée, leur "somme" serait égale à  $A$  si sa variation d'amplitude est la plus grande, à  $D$  sinon. En "additionnant" deux épisodes de durée différente, l'épisode de plus longue durée modifierait la variation d'amplitude de l'autre, comme des morceaux d'évolution squelette ajoutés à une évolution imbriquée.

Plus ambitieux encore, un formalisme permettant d'établir des *équations différentielles symboliques* pourrait être mis à l'étude à partir des quatre types d'épisodes triangulaires. La génération automatique d'une représentation triangulaire à partir de la simulation d'une telle équation différentielle serait alors un grand pas pour la simulation quantitative/qualitative.

Ces méthodes d'analyse pourraient être intégrées dans une tâche d'aide à la conception : en proposant une visualisation et une interprétation rapide de la façon dont les processus se comportent, elles permettraient de guider l'utilisateur dans le choix des processus à modéliser et la détermination de leur pas de simulation optimal. Dans cette optique, le couplage de PARADISE à un système à base de connaissances, incorporant des règles

d'interprétation et de décision pour la modélisation quantitative/qualitative, est une perspective pleine de promesses.

# Annexe I

## Théorie des perturbations singulières

Nous donnons ici les principaux outils de manipulation des systèmes singulièrement perturbés dont on désire réaliser la décomposition en sous-systèmes lents et rapides .

### I.1 Séparation d'un système à deux échelles de temps

#### *Séparation des échelles dans un système linéaire*

La forme linéarisée du système singulièrement perturbé standard :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, t), & x(t_0) = x^0 \\ \varepsilon \dot{z} = g(x, z, t), & z(t_0) = z^0 \end{cases} \quad (1)$$

est la suivante (cf. 1.3.2) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \varepsilon \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ce système présente deux échelles de temps distinctes s'il peut être transformé en un système bloc-triangulaire :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & B \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}$$

tel que la plus grande valeur propre de  $F_1$  est plus petite que la plus petite de  $F_2$ . C'est la taille de l'écart entre ces valeurs qui mesure la différence entre les échelles de temps. Il n'y a donc pas nécessairement une différence d'ordre de grandeur. S'il y a les mêmes écarts de valeurs propres dans  $F_1$  et/ou  $F_2$ , alors (1) est un système linéaire multi-échelles [COD83] (cf. I.2).

Si le système a deux échelles, et que les valeurs propres sont suffisamment séparées, les sous-systèmes "lent" et "rapide" sont complètement isolables. En appliquant le changement de variable  $\eta = z + Lx$  à (2), on arrive à :

$$F_1 = A - BL \text{ et } F_2 = \hat{D} + BL.$$

Les deux sous-systèmes sont alors définis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (A - BL)\xi \\ \dot{\eta} = (\hat{D} + LB)\eta \end{cases}$$

où  $\xi = x - M\eta$  est la variable d'état lente,  $\eta = z + Lx$  est la rapide,  $D = \varepsilon\hat{D}$ ,  $C = \varepsilon\hat{C}$  et les matrices  $L$  et  $M$  vérifient les équations :

$$\begin{cases} \hat{D}L - LA + LBL - \hat{C} = 0 \\ (A - BL)M - M(\hat{D} + LB) + B = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Malheureusement, la résolution de ce système ne peut se faire que de façon itérative, et conduit à des approximations de  $L$  et  $M$ , et donc de  $\xi$  et  $\eta$ . Ces approximations sont d'autant plus fiables que les échelles sont séparées. Une autre méthode de séparation itérative des sous-systèmes lent et rapide peut être trouvée dans [KOK80], ainsi qu'une version applicable à une classe de systèmes non-linéaires séparables en  $x$  et  $z$ .

#### Réduction du modèle linéaire par approximation

La séparation des sous-systèmes lent et rapide consiste à exprimer le système selon les échelles lente et rapide, et à faire tendre  $\varepsilon$  vers 0. Prendre  $\varepsilon = 0$  revient à considérer que la variable rapide a atteint son régime permanent (il n'y a plus de dynamique rapide).

D'après (3), on a l'approximation :  $L = D^{-1}C + O(\varepsilon)$ . Si on prend  $\varepsilon = 0$ , et que  $\xi$  est noté  $x_l$  dans cette situation ( $l$  pour *lent*), le sous-système lent apparaît :

$$\dot{x}_l = (A - BD^{-1}C)x_l, \quad x_l(t_0) = x^0.$$

Il s'agit du modèle réduit de (1) puisque  $\varepsilon\dot{z}_l = 0$ . On dit que  $x_l$  est l'état "quasi-stable" de  $x$ . Si maintenant on introduit l'échelle de temps rapide :

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \quad \tau = 0 \text{ à } t = t_0$$

et que  $\eta$  est noté  $z_r$  lorsque  $\varepsilon = 0$  ( $r$  pour *rapide*), alors le sous-système rapide est le régime transitoire suivant :

$$\frac{dz_r(\tau)}{d\tau} = Dz_r(\tau), \quad z_r(0) = z^0 - z_l(t_0).$$

Une approximation à deux échelles de temps du système (2) est donc :

$$\begin{cases} x(t) = x_l(t) + O(\varepsilon) \\ z(t) = z_l(t) + z_r(\tau) + O(\varepsilon) \end{cases} \quad (4)$$

où  $x_l(t)$  et  $z_r(\tau)$  sont les limites pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  des vraies variables d'état lente et rapide  $\xi(t)$  et  $\eta(\tau)$ , respectivement. La réduction du modèle consiste ensuite à négliger le sous-système transitoire rapide. En effet,  $z_r(\tau)$  décroît rapidement dans un intervalle initial, après quoi la réponse du système est essentiellement due à  $x_l(t)$  et  $z_l(t)$ .

#### Systèmes non-linéaires

Cette réduction est aussi applicable aux systèmes non-linéaires. En prenant la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le transitoire rapide décroît instantanément. Le modèle (1) d'ordre réduit à l'échelle de temps  $t$  (sous-système lent) est alors défini par  $x_l(t)$  et  $z_l(t)$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_l}{dt} = f(x_l, z_l, t), \quad x_l(t_0) = x^0 \\ 0 = g(x_l, z_l, t) \end{cases} \quad (5)$$

Pour obtenir le sous-système rapide, on cherche les parties rapides de  $x$  et  $z$ . On réécrit donc (1) à l'échelle de temps  $\tau$ , soit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, z, t' + \varepsilon\tau) \\ \frac{dz}{d\tau} = g(x, z, t' + \varepsilon\tau) \end{cases}$$

dont on prend à nouveau la limite pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On constate que  $dx/d\tau = 0$ , c'est à dire que  $x$  est constant à l'échelle de temps rapide. Les seules variations rapides observées sont donc celles de  $z$  à partir de son état quasi-stable  $z_l$ . En les notant  $z_r = z - z_l$  et en prenant  $\varepsilon = 0$ , on arrive au sous-système rapide :

$$\frac{dz_r}{d\tau} = g(x^0, z_l^0 + z_r(\tau), t_0), \quad z_r(0) = z^0 - z_l^0 \quad (6)$$

où  $t'$  a été choisi égal à  $t_0$  et  $x^0$  et  $z_l^0$  sont des paramètres fixés. Si la variable rapide  $z$  atteint rapidement son état quasi-stable  $z_l$ , le sous-système lent (5) et le sous-système rapide (6) produisent ensemble l'approximation (4).

### Systèmes discrets

Il n'est pas inutile de préciser quelle peut être la décomposition selon deux échelles de temps pour un système discret, car il est fréquent de trouver les phénomènes écologiques représentés sous cette forme. La formulation semblable à celle des systèmes continus présente des difficultés si le pas de discrétisation est fixé. Une formulation plus intéressante consiste à choisir ce pas de manière à ce qu'il soit compatible avec l'échelle la plus rapide du système continu discrétisé [BLA81]. Pour un système à deux échelles, il est donc en  $O(\varepsilon)$ . Partons du système linéaire continu singulièrement perturbé standard :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{z}(t), \quad \tilde{x}(0) = x_0 \\ \varepsilon \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{z}(t), \quad \tilde{z}(0) = z_0 \end{cases} \quad (7)$$

Si l'on reprend le changement de variables selon l'échelle rapide  $\tau$ , c'est à dire  $x(t) = \tilde{x}(\varepsilon\tau)$  et  $z(\tau) = \tilde{z}(\varepsilon\tau) + \tilde{D}^{-1}\tilde{C}\tilde{x}(\varepsilon\tau)$ , alors le système (7) devient :

$$\begin{cases} \frac{dx(\tau)}{d\tau} = \varepsilon Ax(\tau) + \varepsilon Bz(\tau) \\ \varepsilon \frac{dz(\tau)}{d\tau} = \varepsilon Cx(\tau) + (\tilde{D} + \varepsilon E)z(\tau) \end{cases}$$

ensuite discrétisé en :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \varepsilon Ax_k + \varepsilon Bz_k \\ z_{k+1} = Dz_k + \varepsilon Ez_k + \varepsilon Cx_k \end{cases} \quad (8)$$

Réduisons l'ordre de ce système en prenant  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; on note les deux échelles  $k$  (rapide) et  $\varepsilon k$  (lente). La solution est recherchée en termes d'expansions rapide et lente :

$$x_k = a_k + X(\varepsilon k) \quad \text{et} \quad z_k = b_k + Z(\varepsilon k).$$

Les termes rapides  $a_n$  et  $b_n$  sont obtenus en résolvant le problème de la valeur finale, les termes lents  $X(\varepsilon k)$  et  $Z(\varepsilon k)$  à partir du problème de la valeur initiale. On arrive ainsi à :



$$\begin{cases} x_k = X^{(0)}(\epsilon k) + O(\epsilon) \\ z_k = b_k^{(0)} + O(\epsilon) \end{cases}$$

où  $x_k$  est lent et  $z_k$  rapide. Le sous-système rapide est finalement obtenu par :

$$b_{k+1}^{(0)} = Db_k^{(0)}, b_0^{(0)} = z_0,$$

c'est-à-dire selon l'échelle de temps rapide *discrète*  $k$ . Par contre, le sous-système lent est obtenu selon une échelle de temps lente *continue*  $l = \epsilon k$ , car à partir de l'équation différentielle :

$$\frac{dX^{(0)}(l)}{dl} = AX^{(0)}(l), X^{(0)}(0) = x_0.$$

Le système à deux échelles de temps discret (8) est donc approché par une combinaison hybride d'un sous-système discret et d'un sous-système continu. L'implémentation de cette approximation est ensuite réalisable en échantillonnant le sous-système lent avec un pas plus grand.

## I.2 Séparation d'un système hiérarchisé selon l'échelle de temps

### *Principe*

On considère que le système est formé de  $N$  sous-systèmes "locaux" en interaction faible. Si les connections faibles de ces sous-systèmes sont en  $O(\epsilon)$ , alors ils sont découplés selon l'échelle de temps rapide  $\tau$ . Mais ils interagissent fortement à l'échelle de temps lente  $t = \epsilon\tau$  dans le modèle "global" agrégé de dimension  $N$ . Le système est ainsi décomposé en  $N + 1$  sous-systèmes formant une hiérarchie à deux niveaux : 1 système agrégé lent et  $N$  sous-systèmes locaux rapides. Si le système agrégé lent a lui-même la propriété d'être séparable en deux sous-systèmes d'échelles différentes, une hiérarchie à trois niveaux apparaît, selon trois échelles :  $\tau$  (rapide),  $\epsilon\tau$  (moyenne) et  $\epsilon^2\tau$  (lente). Et ainsi de suite...

Une méthode pour hiérarchiser un système linéaire de cette manière est issue de l'agrégation de chaînes de Markov.

### *Agrégation de chaînes de Markov*

Dans ces chaînes, des probabilités de transition élevées parmi un groupe d'états (fortes connexions) permettent que ce groupe soit traité comme un seul état agrégé, pour une étude à long-terme. Des probabilités de transition beaucoup plus faibles vers les états d'autres groupes (faibles connexions) ont un effet après une longue période de temps seulement, et peuvent donc être négligées sur une période plus courte.

A l'échelle de temps rapide  $\tau$ , le vecteur de probabilité  $p$  d'une chaîne de Markov à  $n$  états dont  $N$  groupes, chacun composé d'états en interaction forte, satisfait :

$$\frac{dp}{d\tau} = p(A + \varepsilon B)$$

où  $A = \text{diag}[A_1, A_2, \dots, A_N]$  sont les interactions fortes (intra-groupe) et  $B$  les faibles (inter-groupes). Ces dernières sont négligeables au début, mais deviennent significatives après une longue période de temps.

A l'échelle de temps lente  $t = \varepsilon\tau$ , la même représentation est :

$$\frac{dp}{dt} = p\left(\frac{1}{\varepsilon}A + B\right) \quad (9)$$

où le régime transitoire rapide est formé par les transitoires de chaque groupe d'états en interaction forte  $A$ . Après un certain temps,  $pA$  décroît en  $O(\varepsilon)$ ; à partir de là,  $pB$  n'est plus négligeable devant  $(1/\varepsilon)pA$ .

Pour séparer les parties rapide et lente de  $p(t)$ , donnons le système représenté à l'échelle lente (9) sous la forme standard de perturbation singulière :

$$\begin{cases} \dot{y} = yVBT + zWBT \\ \varepsilon \dot{z} = \varepsilon yVBS + zW(A + \varepsilon B)S \end{cases}$$

où  $y = pT$ ,  $z = pS$ ,  $p = yV + zW$  et  $AT = 0$ ,  $VA = 0$ ,  $VT = I_N$ ,  $WT = 0$ ,  $VS = 0$ ,  $WS = I_{n-N}$ .

Le sous-système lent est alors la chaîne agrégée :

$$\dot{y}_l = y_l(VBT - \varepsilon VBS(WAS)^{-1}WBT) = y_l A_l. \quad (10)$$

Ses états sont les groupes d'états présents à l'origine, et  $y_J$ ,  $J = 1, \dots, N$  est la probabilité du processus original d'être dans le groupe  $J$ .

Il faut donc comprendre le système global comme un ensemble de sous-systèmes locaux rapides découplés, coordonnés sur une échelle de temps lente par le sous-système lent agrégé (10) représentant les fortes interactions.

# Annexe II

## Théorie des ondelettes

Après avoir explicité au 1.4.4 l'intérêt des ondelettes, il convenait de préciser la technique associée, même d'une manière simplifiée à l'extrême. On peut aborder la théorie des ondelettes via la transformée en ondelettes continues, ou bien par l'analyse multi-résolution. C'est cette deuxième voie d'accès que nous avons choisie, car les notions qu'elle introduit sont à notre sens plus proches de l'analyse à différentes échelles de temps que nous avons entreprise.

Nous définissons ici les notions qui y interviennent : fonctions d'échelle, ondelettes et relations de reconstruction et de décomposition du signal [UED95].

### II.1 Préambule : fonctions de base à échelle variable

Imaginons que la fonction  $f(x)$  soit une note de musique à une certaine octave. Alors on peut construire cette note par une combinaison judicieuse de fonctions sinus et cosinus :

$$\lambda = a \cos bt + c \sin dt.$$

Sinus et cosinus sont les fonctions de base de cet exemple. Si en plus on veut que la base soit orthogonale, il faut choisir des combinaisons de sinus et cosinus dont le produit scalaire est nul :

$$\begin{cases} \lambda_i = a_i \cos b_i t + c_i \sin d_i t \\ \lambda_j = a_j \cos b_j t + c_j \sin d_j t \end{cases} \text{ tels que si } i \neq j, \lambda_i \cdot \lambda_j = 0.$$

$\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont les fonctions de la base orthogonale.

Si on fait maintenant varier une fonction de base en utilisant différentes échelles, on construit des fonctions de base à échelle variable. Par exemple, prenons un signal variant sur un domaine temporel  $[0,1]$ . On peut le diviser avec deux fonctions en échelon, qui sont localisées sur  $[0,1/2]$  et  $[1/2,1]$ . On peut à nouveau le segmenter avec quatre fonctions en échelon sur  $[0,1/4]$ ,  $[1/4,1/2]$ ,  $[1/2,3/4]$  et  $[3/4,1]$ . On a construit trois représentations à l'échelle 1, 1/2 et 1/4, respectivement. L'échelle est alors définie comme une durée égale à une puissance de 1/2. La fonction de base est ici l'échelon; on la fait varier en échelle en la

prenant non-nulle sur des fenêtres de durée différente [STR92]. Les ondelettes(-mères) sont des fonctions de base à échelle variable (Fig. 1.4 et 1.5).

## II.2 Fonctions d'échelle

**Rappel d'algèbre linéaire** — Soit un espace vectoriel  $U$  et un sous-espace  $V$ . Il existe toujours un sous-espace  $W$  tel que :

1. chaque élément de  $U$  peut être écrit comme une combinaison linéaire d'un élément de  $V$  et un élément de  $W$ , ce que l'on note :  $U = V + W$ .

2. cette représentation est unique ssi  $V \cap W = \{0\}$ . On l'appelle alors la *décomposition en somme directe* de  $U$ , et on la note :  $U = V \dot{+} W$ .

En général,  $W$  n'est pas unique. En fait, à partir de  $U$  et  $V$ , on peut choisir  $W$  tel que  $V \perp W$ , i.e. tel que chaque élément de  $V$  soit orthogonal à chaque élément de  $W$ . Cette décomposition est alors la *décomposition orthogonale* de  $U$  et on l'écrit :  $U = V \oplus W$ .

Une *fonction d'échelle*  $\phi(x)$  est une fonction qui peut être écrite comme une combinaison linéaire des fonctions  $\phi(2x - k)$ , qui sont des versions de  $\phi(x)$  à l'échelle 1/2 et translattées de  $k/2$  :

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - k) \quad (1)$$

On appelle cette relation la *relation à deux échelles pour la fonction d'échelle*  $\phi(x)$  et la séquence  $\{p_k\}$  est la *séquence à deux échelles* de  $\phi$ . Les fonctions d'échelle considérées sont à support compact, c'est-à-dire que l'on a un nombre fini de  $p_k$  non-nuls.

Définissons un sous-espace fermé  $V_0$  engendré par les translations entières de  $\phi$  :

$$V_0 := \overline{\langle \phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle}^{L^2}$$

où  $L^2$  est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, et  $\overline{A}^{L^2}$  désigne la fermeture dans  $L^2$  du sous-espace  $A$ . Considérons ensuite la version changée d'échelle (par puissance de 2) et translattée de  $\phi(x)$  :

$$\phi_{j,k}(x) := \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

On définit enfin le sous-espace engendré par ces fonctions :

$$V_j := \overline{\langle \phi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z} \rangle}^{L^2}.$$

D'après (1), on a :

$$\phi(x - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2x - 3k),$$

et  $\phi(2x - 3k)$  est de la forme  $\phi_{1,k}(x)$ . On en conclut que  $V_0 \subset V_1$ . Une représentation dans  $V_0$  est une *abstraction* de la représentation correspondante dans  $V_1$ . En généralisant cette

constatation, on s'aperçoit que la relation à deux échelles génère une séquence de sous-espaces emboîtés:

$$\begin{array}{c} \cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \\ \leftarrow \text{Abstraction} \qquad \text{Affinement} \rightarrow \end{array} \quad (2)$$

On bâtit ainsi un cadre de représentation multi-échelles.

En plus de ces propriétés, on désire que n'importe quelle fonction réelle soit représentable comme une combinaison linéaire de fonctions d'échelles  $\phi_{j,k}$ , c'est à dire :

$$\overline{\left( \bigcup_{j \in Z} V_j \right)}^{L^2} = L^2(R)$$

Ces propriétés suffisent généralement à générer ce que l'on appelle l'*analyse multi-résolution* (MRA) que l'on définit ci-dessous.

**Analyse multi-résolution** — Une fonction  $\phi \in L^2(R)$  génère une analyse multi-résolution si elle génère une séquence emboîtée de sous-espaces fermés  $V_j$  qui vérifient :

1.  $\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$  (inclusion)
2.  $\overline{\left( \bigcup_{j \in Z} V_j \right)}^{L^2} = L^2(R)$  (complétude)
3.  $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$  (unique élément commun)
4.  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, j \in Z$  (propriété d'échelle)

Toutes les fonctions d'échelle vérifiant la relation (1) et la propriété de complétude ne génèrent pas forcément une MRA. Néanmoins, on ne considère ici que celles qui le font.

On dira enfin qu'une famille de fonctions d'échelle  $\phi$  forme une *base orthonormée* si :

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in Z$$

où  $\delta_{j,l}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{j,l} = 1$  si  $j = l$ , 0 sinon).

### II.3 Ondelettes

Soit une séquence emboîtée de sous-espaces  $V_j$  telle qu'on vient de la définir. Alors il existe des sous-espaces  $W_j$  compléments orthogonaux de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ , c'est à dire :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in Z$$

et

$$W_j \perp W_{j'}, \quad \text{si } j \neq j'.$$

Puisque les  $V_j$  sont emboîtés selon (2), on en vient à :

$$V_j = V_j \oplus \bigoplus_{k=0}^{j-j-1} W_{j+k} \text{ pour } j < J,$$

où tous les sous-espaces sont orthogonaux. Grâce aux propriétés 2 et 3 de la MRA, on en déduit la *décomposition orthogonale* de  $L^2(R)$ , à savoir :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$$

Les sous-espaces  $W_j$  héritent de la propriété d'échelle des  $V_j$  :

$$f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Le concept de base de la MRA est donc le suivant : si on a une fonction d'échelle  $\phi$  appartenant à  $V_j$ , alors il existe une autre fonction  $\psi$  appartenant à  $W_j$  appelée l'*ondelette*, telle que  $\{\psi_{j,k}(x); k \in \mathbb{Z}\}$  génère  $W_j$ , avec :

$$\psi_{j,k}(x) := \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Puisque  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ ,  $\psi(x) \in W_0$  peut être écrit sous forme de combinaison linéaire de la fonction d'échelle  $\phi(2x - k)$ , qui forme une base de  $V_1$ . De manière analogue à la relation à deux échelles pour la fonction d'échelle (1), qui donnait  $\phi(x) \in V_0$  en fonction de  $\phi(2x - k) \in V_1$ , il existe une *relation à deux échelles pour l'ondelette* :

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \phi(2x - k) \quad (3)$$

où  $\{q_k\}$  est la *séquence à deux échelles* de l'ondelette.

#### II.4 Relations de reconstruction et de décomposition du signal

Le traitement d'un signal s'effectue selon la séquence indiquée par la figure II.1.

Les deux relations (1) et (3) sont appelées *relations de reconstruction*. Elles expriment la fonction d'échelle  $\phi(x) \in V_0$  et l'ondelette  $\psi(x) \in W_0$  en fonction de  $\phi(2x - k) \in V_1$ .

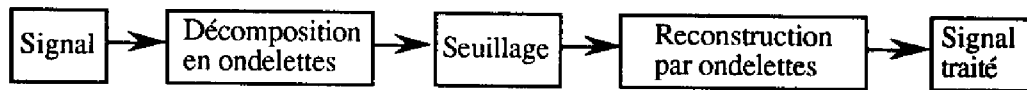


Fig. II.1 : La totalité du traitement du signal effectué avec les ondelettes

Voyons maintenant le processus inverse : puisque  $\phi(2x)$  et  $\phi(2x - 1)$  appartiennent à  $V_1$  et  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ , il existe quatre séquences notées  $\{a_{-2k}\}$ ,  $\{b_{-2k}\}$ ,  $\{a_{1-2k}\}$  et  $\{b_{1-2k}\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  telles que :

$$\begin{aligned} \phi(2x) &= \sum_k [a_{-2k} \phi(x - k) + b_{-2k} \psi(x - k)] \\ \phi(2x - 1) &= \sum_k [a_{1-2k} \phi(x - k) + b_{1-2k} \psi(x - k)] \end{aligned}$$

que l'on peut combiner en une seule formule, appelée *relation de décomposition* (en deux) pour  $\phi$  et  $\psi$  :

$$\phi(2x - l) = \sum_k [a_{l-2k} \phi(x - k) + b_{l-2k} \psi(x - k)], \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Elle exprime donc la fonction d'échelle  $\phi(2x-l) \in V_1$  en fonction de  $\phi(x-k) \in V_0$  et de  $\psi(x-k) \in W_0$ .

Les deux paires de séquences  $(\{p_k\}, \{q_k\})$  (séquences de reconstruction) et  $(\{a_k\}, \{b_k\})$  (séquences de décomposition) sont utilisées pour les algorithmes ci-dessous, qui donnent une bonne idée de la façon dont "ça marche".

## II.5 Algorithmes pyramidaux de reconstruction et de décomposition

Nous avons vu que  $\{V_j\}$  (la suite des  $V_j$ ) est générée par les translatées d'une fonction d'échelle  $\phi_j \in L^2(\mathbb{R})$  et que  $\{W_j\}$  est générée par les translatées d'une ondelette  $\psi_j \in L^2(\mathbb{R})$ . D'après la propriété 2 d'une MRA, toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  peut être approchée d'aussi près que l'on veut par une fonction  $f_N \in V_N$ , pour tout  $N \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $V_j = V_{j-1} \dot{+} W_{j-1}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $f_N$  peut se décomposer de manière unique selon :

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1}$$

où  $f_{N-1} \in V_{N-1}$  et  $g_{N-1} \in W_{N-1}$ . En répétant cette décomposition, on arrive à :

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \dots + g_{N-M} + f_{N-M} \quad (5)$$

où  $f_j \in V_j$  et  $g_j \in W_j$  pour tout  $j$ . Cette relation exprime la *décomposition en ondelettes*.

Les algorithmes que nous allons décrire permettent d'exprimer  $f_N$  sous forme de somme directe de ses composantes  $g_{N-1}, \dots, g_{N-M}$  et  $f_{N-M}$ , et inversement de retrouver  $f_N$  à partir de ces composantes. Ces algorithmes hiérarchiques sont qualifiés de *pyramidaux*. Les fonctions  $f_j \in V_j$  et  $g_j \in W_j$  sont représentées de façon unique par des combinaisons linéaires de fonctions d'échelles engendrant  $V_j$  ou d'ondelettes engendrant  $W_j$  :

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \\ \text{avec } c^j = \{c_k^j\} \in l^2 \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} g_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \\ \text{avec } d^j = \{d_k^j\} \in l^2 \end{cases}$$

Les fonctions  $f_j$  et  $g_j$  sont représentées dans la suite par les séquences  $c^j$  et  $d^j$ .

— Algorithme de décomposition (Fig. II.2) : En appliquant la relation de décomposition (4) aux représentations précédentes de  $f_j$  et  $g_j$ , on obtient les coefficients des fonctions d'échelle (coefficients de la fonction à décomposer) et ceux de la base d'ondelettes :

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l a_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l b_{l-2k} c_l^j \end{cases}$$

Les  $c^{j-1}$  et  $d^{j-1}$  sont calculés à chaque étape à partir de  $c^j$  par la méthode des moyennes mobiles, en utilisant les séquences de décomposition  $\{a_k\}$  et  $\{b_k\}$  comme poids.

Il est utile pour la compréhension de voir la décomposition en ondelettes comme un *filtrage*. Plus on décompose le signal initial  $f$ , plus il est *lissé* (abstrait), ce qui le transforme en  $f_j$ , caractérisée par ses coefficients  $c^j$ . La séquence  $\{a_k\}$  est un filtre lisseur.

De façon complémentaire, les coefficients  $d^j$  décrivent le *détail* de l'information éliminé à chaque étape par le lissage. Ce détail est représenté par les fonctions  $g_j$  et obtenu grâce à la séquence  $\{b_k\}$  qui se comporte comme un filtre.

A chaque étape, on a donc localement une meilleure résolution fréquentielle (les ondelettes se dilatent) tout en lissant les données restantes, c'est-à-dire en diminuant la résolution temporelle (les fonctions d'échelle se dilatent).

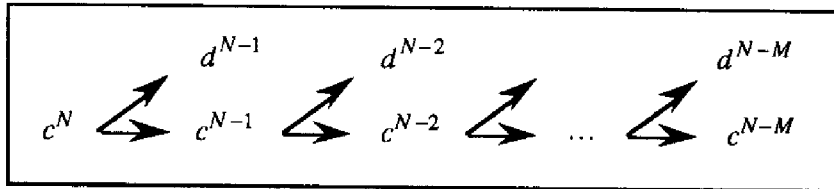


Fig. II.2 : Décomposition en ondelettes

— Algorithme de reconstruction (Fig. II.3) : En appliquant les relations de reconstruction (1) et (3) aux représentations de  $f_j$  et  $g_j$ , on arrive à :

$$c_k^j = \sum_l [p_{k-2l} c_l^{j-1} + q_{k-2l} d_l^{j-1}]$$

Ici, on parvient à  $c^j$  à partir de  $c^{j-1}$  et  $d^{j-1}$  par deux moyennes mobiles, en utilisant les séquences de reconstruction  $\{p_k\}$  et  $\{q_k\}$  comme poids. La séquence  $\{p_k\}$  joue le rôle d'un filtre passe-bas, la séquence  $\{q_k\}$  d'un passe-haut.

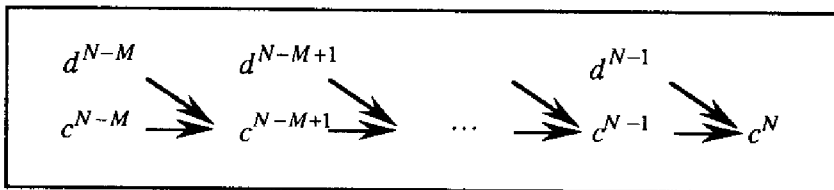


Fig. II.3 : Reconstruction par ondelettes



# Références Bibliographiques

- [ALL82] ALLEN T.F.H., STARR T.B. : "Hierarchy, perspectives for ecological complexity", University of Chicago Press, Chicago, 1982.
- [AYR93a] AYROLLES L., GUERRIN F. : "Towards a general approach to deal with temporal granularity", in Proc. of the IJCAI'93 Workshop on Engineering Problems for Qualitative Reasoning, Chambéry, France, pp. 95-102, 1993.
- [AYR93b] AYROLLES L., GUERRIN F., RAMBAL S. : "Qualitative Reasoning about Multiple Time-scales in Terrestrial Ecosystem Simulation", in Proc. of the IJCAI'93 Workshop on AI in Agriculture, Natural Resources and Environmental Sciences, Chambéry, France, 1993.
- [AYR94] AYROLLES L., FAIVRE R., GUERRIN F. : "Analyse Qualitative de processus à dynamiques multiples", Actes des XXVIème Journées de Statistique de l'Association pour la Statistique et ses Utilisations (ASU), Neuchâtel, Suisse, pp. 89-92.
- [AYR95a] AYROLLES L., FAIVRE R., GUERRIN F. : "Time-Abstraction and Quantitative/Qualitative Interpretation of Multiple Dynamics Processes. Proceedings of the 9th International Workshop on Qualitative Reasoning, Amsterdam, Netherlands, pp. 218-227, 1995.
- [AYR95b] AYROLLES L., FAIVRE R., GUERRIN F. : "A Temporal Multi-Resolution Analysis for a Quantitative/Qualitative Interpretation of Complex Dynamic Processes", IEE Proceedings on Control Theory And Applications, 1996 (à paraître).
- [AYR95c] AYROLLES L., AGUILAR-MARTIN J., GUERRIN F. : "Interprétation Symbolique pour la Supervision Multi-résolution de Processus Complexes", Supervision de Processus à l'aide du Système Expert G2, Eds. Hermès, pp. 73-90, 1995.
- [BLA81] BLANKENSHIP G. : "Singularly perturbed difference equations in optimal control problems", IEEE Trans. Aut. Control, AC-26, pp. 911.
- [BOU93] BOUSSON K. : "Raisonnement Causal pour la Supervision de Processus Basés sur des Modèles", Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1993.

- [BOU94] BOUSSON K., TRAVE-MASSUYES L. : "Putting More Numbers in the Qualitative Simulator CA-EN", in Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Intelligent Systems Engineering, pp. 62-69, Technical University of Hamburg-Harburg, Germany, 1994.
- [CAM87] CÂMARA A.S., PINHEIRO M., ANTUNES M.P., SEIXAS M.J. : "A new method for qualitative simulation of water resources systems. 1-Theory", Water Resources Research, vol. 23, n°11, pp. 2015-2018, 1987.
- [CHA90] CHAPIN III F.S., SCHULZE E.D., MOONEY H.A. : "The ecology and economics of storage in plants", Annu. Rev. Ecol. Syst., 21, pp. 423-447, 1990.
- [CHE90a] CHEUNG J.T.Y., STEPHANOPOULOS G. : "Representation of process trends - Part I. A formal representation framework", Computers Chem. Engng., vol. 14, n°4/5, pp. 495-510, 1990.
- [CHE90b] CHEUNG J.T.Y., STEPHANOPOULOS G. : "Representation of process trends - Part II. The problem of scale and qualitative scaling", Computers Chem. Engng., vol. 14, n°4/5, pp. 511-539, 1990.
- [CHU92] CHUI C.K. : "An Introduction to wavelets", Academic Press, San Diego, 1992.
- [COD83] CODERCH M. *et al.* : "Hierarchical aggregation of linear systems with multiple time-scales", IEEE Trans. Aut. Control, AC-28, pp. 1017, 1983.
- [DAU88] DAUBECHIES I. : "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", Comm. Pure Appl. Math., vol. 41, pp. 906-966, 1988.
- [DAU92] DAUBECHIES I. : "Ten Lectures on Wavelets", n°61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [DEK84] De KLEER J., BROWN J.S. : "A Qualitative Physics Based on Confluences", Artificial Intelligence, vol. 24, pp. 7-83, 1984.
- [DELC88] DELCOURT H.R., DELCOURT P.A. : "Quaternary landscape ecology : Relevant scales in space and time", Landscape Ecology, vol. 2, n°1, pp. 23-44, 1988.
- [DELE83] DELEBECQUE F. : "A reduction process for perturbed Markov chains", SIAM J. Appl. Math., 43, pp. 325, 1983.

- [DJE93] DJERROUD A., ROUSSET M.-C., GODEFROY P., GARCIN M. : "An event-driven causal simulation applied to geoforecasting analysis", in 4th Annual Conf. on AI, Simulation and Planing in High Autonomy Systems, IEEE Computer Society Press, pp. 95-101, 1993.
- [DON93] DONOHO D. : "Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noisy Data", Different Perspectives on Wavelets, Proceeding of Symposia in Applied Mathematics, vol.47, I. Daubechies ed. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., pp. 173-205, 1993.
- [DOR89] DORMOY J.-L. : "Nouvelles Méthodes de Calcul Qualitatif", Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 3, n°4, pp. 39-53, 1989.
- [DUB94] DUBOIS D., GENTIL S. : "Intelligence Artificielle et Automatique", Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 8, n°1, pp. 7-27, 1994.
- [EUZ93] EUZENAT J. : "Représentation granulaire du temps", Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 7, n°3, pp. 329-361, 1993.
- [FLA93] FLANDRIN P. : "Temps-fréquence", Traité des Nouvelles Technologies, série Traitement du Signal, Eds. Hermès, 1993.
- [FOR84] FORBUS K.D. : "Qualitative Process Theory", Artificial Intelligence, vol. 24, pp. 85-168, 1984.
- [GEN92] GENSYM CORPORATION : "G2 Reference Manual, version 3.0", 1992.
- [GRA95] GRAPS A. : "An Introduction to Wavelets", IEEE Computational Science and Engineering, vol. 2, n°2, 1995.
- [GRO84] GROSSMAN A., MORLET J. : "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelet of Constant Shape", SIAM J. Math. Anal., vol. 15, n°4, pp. 723-736, 1984.
- [GUE91] GUERRIN F. : "Qualitative reasoning about an ecological process: interpretation in Hydroecology", Ecological Modelling, vol. 59, 3-4, pp. 165-201, 1991.
- [HUN92] HUNT J.E., COOKE D.E. : "Qualitatively modelling photosynthesis", Technical Report, University of Wales, Aberystwyth, Royaume-Uni, 1992.
- [HOB85] HOBBS J.R. : "Granularity", in Proc. of the 9<sup>th</sup> IJCAI Conference, Los Angeles, CA, pp. 432-435, 1985.

- [IWA90] IWASAKI Y. : "Reasoning with multiple abstraction models" in Proc. of the AAAI Workshop on Automatic Generation of Approximations and Abstractions (Eds. T. Ellman, R. Keller, and J. Mostow), pp. 122-134, 1990.
- [JOL83] JOLIVET E. : "Introduction aux modèles mathématiques en Biologie", Institut National de la Recherche Agronomique, Eds. Masson, 1983.
- [KAY93] KAY H., KUIPERS B.J. : "Numerical Behavior Envelopes for Qualitative Models", in Proceedings of the AAAI Conference (Morgan Kauffman eds.), pp. 606-613, San Mateo, CA, 1993.
- [KER89] KERFOOT W. C., De ANGELIS D.L. : "Scale-dependent Dynamics: Zooplankton and the Stability of Freshwater Food Webs", Trends in Ecology and Evolution, Vol. 4, N°6 [36], 1989.
- [KOK80] KOKOTOVIC P.V., ALLEMONG J.J., WINKELMAN J.R., CHOW J.H. : "Singular perturbation and iterative separation of time-scales", Automatica, 16, pp. 23, 1980.
- [KOW86] KOWALSKI R., SERGOT M. : "A Logic-based Calculus of Events", New Generation Computing, vol. 4, pp. 267, 1986.
- [KUI86] KUIPERS B.J. : "Qualitative Simulation", Artificial Intelligence, vol. 29, pp. 289-338, 1986.
- [KUI87] KUIPERS B.J. : "Abstraction by time scale in qualitative simulation", in Proc. of the AAAI Conference, Seattle, WA, pp. 621-625, 1987.
- [LAK77] LAKIN W.D., VAN DEN DRIESSCHE P. : "Time scales in population biology", SIAM Journal of Applied Math., 32, pp. 694, 1977.
- [LAU93] LAUENROTH W.K., URBAN D.L., COFFIN D.P., PARTON W.J., SHUGART H.H., KIRCHNER T.B., SMITH T.M. : "Modeling vegetation structure-ecosystem process interaction across sites and ecosystems", Ecological Modelling, 67, pp. 49-80, 1993.
- [LEY91] LEYVAL L. : "Raisonnement Causal pour la Simulation de Procédés Industriels Continus", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991.
- [MAC72] Mac ARTHUR R.H. : "Geographical Ecology", Harper and Row, New York, New York, USA, 1972.

- [MAÏ91] MAÏM E. : "Reasoning with different granularities in CRL", in Proc. of the IMACS Conference, Dublin, Irlande, pp. 974-976, 1991.
- [MAL89] MALLAT S.G. : "A theory for multiresolution signal decomposition : the Wavelet representation", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11 (7), pp. 674-693, 1989.
- [MAV88] MAVROVOUNIOTIS M.L., STEPHANOPOULOS G. : "Formal Order of Magnitude Reasoning in Process Engineering", Computers Chemical Engineering, vol. 12, pp. 867-880.
- [MEY93] MEYER Y. : "Wavelets : Algorithms and Applications", SIAM, Philadelphia, pp. 13-31, pp. 101-105, 1993.
- [MOO91] MOONEY H.A., DRAKE B.G., LUXMOORE R.J., OECHEL W.C., PITELKA L.F. : "Predicting Ecosystem Responses to Elevated CO<sub>2</sub> Concentrations", BioScience, vol. 41, n°2, pp. 96-104, 1991.
- [MOR82] MORLET J. : "Sampling Theory and Wave Propagation", NATO ASI Series, Issues in Acoustic Signal/Image Processing and Recognition, vol. 1, C.H. Chen (éd.), pp. 233-261, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [MUL92] MÜLLER F. : "Hierarchical approaches to ecosystem theory", Ecological Modelling, 63, pp. 215-242, 1992.
- [NAI79] NAIDU D.S., RAJAGOPALAN P.K. : "Application of Vasileva's singular perturbation method to a problem in ecology", Int. J. Syst. Sci., 10, pp. 761, 1979.
- [O'NE86] O'NEILL R.V., De ANGELIS D.L., WAIDE J.B., ALLEN T.F.H. : "A hierarchical concept of ecosystems", Princeton University Press, 1986.
- [PAH93a] PAHL-WOSTL C. : "The hierarchical organization of the aquatic ecosystem : an outline how reductionism and holism may be reconciled", Ecological Modelling, 66, pp 81-100, 1993.
- [PAH93b] PAHL-WOSTL C. : "Food webs and ecological networks across temporal and spatial scales", OIKOS 66, 1993.
- [PIE93] PIELKE R.A., SCHIMEL D.S., LEE T.J., KITTEL T.G.F, ZENG X. : "Atmosphere-terrestrial ecosystem interactions: implications for coupled modeling", Ecological Modelling, 67, pp. 5-18, 1993.

- [PUC85] PUCCIA C.J., LEVINS R. : "Qualitative modeling of complex systems - An introduction to loop analysis and time averaging", Harvard University Press, 1985.
- [RAI89] RAIMAN O. : "Le Raisonnement sur les ordres de grandeur", Revue d'Intelligence Artificielle, vol. 3, n°4, pp. 55-67, 1989
- [RIC94] RICKEL J., PORTER B. : "Automated modeling for answering prediction questions: selecting the time-scale and system boundary", in Proc. of the AAAI Conference, pp. 1191-1198, 1994.
- [SAC90] SACKS E. : "Automatic Qualitative Analysis of Dynamic Systems Using Piecewise Linear Approximations", Artificial Intelligence, vol. 41, pp. 313-364, 1990.
- [SAK84] SAKSENA V.R., O'REILLY J., KOKOTOVIC P.V. : "Singular Perturbations and Time-scale Methods in Control Theory : Survey 1976-1983", Automatica, vol. 20, n°3, pp. 273-293, 1984.
- [SCA93] SCARGLE J. *et al.* : "The Quasi-Periodic Oscillations and Very Low Frequency Noise of Scorpius X-1 as Transient Chaos: A Dripping Handrail ?", Astrophysical Journal, vol. 411, L91-L94, 1993.
- [SCH81] SCHAFFER W.M. : "Ecological abstraction : the consequences of reduced dimensionality in ecological models", Ecological Monographs, 51 (4), pp 383-401, 1981.
- [SCHM91] SCHMOLDT D.L. : "Simulation of plant physiological processes using fuzzy variables", AI Applications, vol. 5, n°4, pp. 3-16, 1991.
- [STR92] STRANG G. : "Wavelets", American Scientist, vol. 82, pp. 250-255, 1992.
- [STRU93] STRUSS P. : "Temporal Abstraction in Qualitative Physics", in Working Papers of the 7<sup>th</sup> International Workshop on Qualitative Reasoning, Seattle, WA, 1993.
- [TRA96] TRAVE-MASSUYES L., DAGUE P., GUERRIN F. : "Raisonnement Qualitatif pour les Sciences de l'Ingénieur", Chapitre 11, éd. Masson, 1996 (à paraître).
- [UED95] UEDA M., LODHA S. : "Wavelets: An Elementary Introduction and Examples", UCSC-CRL 94-47, preprint, 1995.
- [VID95] VIDA KOVIC B., MÜLLER P. : "Wavelets for Kids - A Tutorial Introduction", preprint, 1995.

- [WEL90] WELD D., DE KLEER J. : "Readings in qualitative reasoning about physical systems", Morgan Kaufmann ed., 1990.
- [WIC92] WICKERHAUSER M.V. : "Acoustic Signal Compression with Wave Packets", Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications (C.K. Chui éd.), Academic Press, San Diego, pp. 679-700, 1992.
- [WIL89] WILLIAMS J.R., JONES C.A., KINIRY J.R., SPANEL D.A. : "The EPIC Crop Growth Model", Transactions of the ASAE, vol. 32, n°2, pp. 497-511, 1989.
- [YAN94] YANNOU B. : "Aide à la conception qualitative de systèmes dynamiques", thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [YIP88] YIP K. : "Generating Global Behaviors Using Deep Knowledge of Local Dynamics", in Proceedings of the AAAI Conference, pp. 280-285, St-Paul, MN, 1988.
- [YOU82] YOUNG K.K.D. : "State-space decompositions for linear singularly perturbed systems", 21<sup>st</sup> IEEE Conference Decision and Control, pp. 1084-1089, 1982.

**Titre :** Abstraction temporelle et interprétation quantitative/qualitative de processus à dynamiques multiples - Application aux processus biologiques.

**Résumé :** Une caractéristique des systèmes dynamiques complexes, qu'ils soient physiques ou naturels, est la présence de processus évoluant à différentes échelles de temps (dynamiques multiples) et de façon fortement non-linéaire. Nous nous plaçons dans le cas où l'évolution de chaque processus étudié est une série de mesures, ou bien est issue de la simulation de modèles numériques. Pour concevoir ou améliorer ces modèles en se basant sur l'échelle qui l'intéresse, l'utilisateur doit d'abord être capable de *représenter l'évolution de chaque processus à plusieurs échelles*, déterminées objectivement selon l'évolution elle-même. Ensuite, le choix d'une ou de plusieurs représentations doit être guidé par l'*interprétation des caractéristiques dynamiques* à chaque échelle de temps.

Nous définissons une notion de *granularité temporelle*, exprimant le niveau de détail de la représentation. Ayant affaire à des processus biologiques dont la forme de l'évolution est plus informative pour l'utilisateur que les valeurs numériques précises, une représentation qualitative/quantitative est élaborée : une segmentation de l'évolution initiale en épisodes triangulaires (exprimant différentes formes de comportements locaux), puis l'abstraction successive de ces épisodes triangulaires en épisodes trapézoïdaux, conduisent à l'obtention de toutes les représentations possibles de l'évolution, et de toutes les échelles de temps associées. Le développement d'outils graphiques, symboliques et statistiques permet d'identifier et d'interpréter automatiquement les principales caractéristiques dynamiques du processus à n'importe quelle échelle de temps : équilibre, stabilité, périodicité, récurrence, comportements majoritaires, etc. Ces caractéristiques permettent de conseiller un choix d'échelles de temps et, par suite, de fréquences d'échantillonnage pertinentes. Une fonctionnalité supplémentaire vise à identifier et à dissocier localement les composantes fréquentielles de l'évolution initiale.

Des exemples d'interprétation sont donnés pour deux modèles biologiques. Les analyses sont confrontées à la connaissance experte d'un agronome pour la validation de la méthode. Ce travail a conduit à la conception du logiciel PARADISE (Process AbstRaction AnD Interpretation SystEm).

**Mots-clés :** Raisonnement qualitatif - Analyse multi-résolution - Granularité temporelle - Interprétation symbolique - Aide à la modélisation - Aide à la simulation - Processus biologiques.

**Title:** Temporal abstraction and quantitative/qualitative interpretation of multiple dynamics processes - Application to biological processes.

**Abstract:** A characteristic of complex dynamic systems, whether they are physical or natural, is the presence of processes evolving at different time-scales (multiple dynamics), and in a strongly non-linear way. We suppose that the evolution of each process under study is given by a series of measurements, or is obtained by the simulation of numerical models. To design or improve these models taking into account the scale he is interested in, the user must first be able to *represent each process evolution at different time-scales*, objectively determined according to the evolution itself. Then, the choice of one or several representations must be guided by an interpretation of the process dynamic features at each time-scale.

We define a notion of *temporal granularity*, expressing the level of detail of the representation. As we deal with biological processes for which the evolution shape is more informative than precise numerical values, a quantitative/qualitative representation is proposed. A segmentation of the initial evolution in triangular episodes (expressing different shapes of local behaviors), and the successive abstraction of these triangular episodes in trapezoidal ones lead to determine every possible representation of the evolution, and every associated time-scale.

The design of graphic, symbolic and statistical tools allows to automatically detect and interpret the main dynamic features of the process, at any time-scale: steadiness, stability, periodicity, recurrence, most frequent behaviours, etc. These features allow to advise the user to choose relevant time-scales, and the corresponding sampling frequencies. An additional functionality identifies and locally separates the frequency components of the initial evolution.

Examples of interpretation are given for two biological models. Analyses are compared with an agronomist's expert knowledge for the method validation. This work has led to the design and development of a software named PARADISE (Process AbstRaction AnD Interpretation SystEm).

**Keywords:** Qualitative reasoning - Multi-resolution analysis - Temporal granularity - Symbolic interpretation - Modelling support - Simulation support - Biological processes.