HAL
open science

Méthode des éléments finis mixtes et conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences

N'Guessan Jean-Luc Yao Bi

To cite this version:

N'Guessan Jean-Luc Yao Bi. Méthode des éléments finis mixtes et conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 1995. Français. NNT : . tel-00140054

HAL Id: tel-00140054

https://theses.hal.science/tel-00140054

Submitted on 4 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

No D'ORDRE : E.C.L. 95-04 **ANNEE 1995**

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Génie Electrique

préparée au sein de

L'ECOLE DOCTORALE DE LYON DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR:
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE

par

M. YAO BI N'guessan Jean-Luc
Ingénieur ESTP (Paris)

METHODE DES ELEMENTS FINIS MIXTES ET CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES POUR LA MODELISATION DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUES HYPERFREQUENCES

Soutenue le 24 janvier 1995 devant la Commission d'Examen :

Jury

MM.	G. Meunier	Directeur de Recherche CNRS - LEG - ENSIEG - *Président*
	M. Aubourg	Chargé de Recherche CNRS - IRCOM - UL - *Rapporteur*
	A. Razek	Directeur de Recherche CNRS - LGEP - ESE - *Rapporteur*
	J.F. Maître	Professeur - M.I.S. - Ecole Centrale de Lyon
	A. Nicolas	Professeur - CEGELY - Ecole Centrale de Lyon
	L. Nicolas	Chargé de Recherche CNRS - CEGELY - Ecole Centrale de Lyon

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS iv

RESUME v

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 5

FORMULATION DU PROBLEME PHYSIQUE 5

1.1. INTRODUCTION 5

1.2. MODELE MATHEMATIQUE: LES EQUATIONS DE MAXWELL 6

1.2.1. Les équations de Maxwell en régime harmonique 6

1.2.2. L'équation vectorielle des ondes 9

1.2.3. Les conditions aux limites 10

1.3. FORMULATION FAIBLE DU PROBLEME 15

1.3.1. Problème à résoudre 15

1.3.2. Formulation par la méthode de Galerkin 18

1.3.3. Cas particulier d'une configuration 2D 23

1.4. CONCLUSION 27

CHAPITRE 2 28

CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES 28

2.1. INTRODUCTION 28

2.2. CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DU TYPE BT 29

2.2.1. CLA du type BT en 2D 29

2.3. CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DU TYPE EM 38

2.3.1. CLA du type EM en 2D 38

2.3.2. CLA du type EM en 3D 46

2.4. COUPLAGE AVEC LA METHODE DES ELEMENTS FINIS 49

2.4.1. Cas d'une frontière circulaire en 2D 50

2.4.2. Cas d'une frontière rectangulaire en 2D 51

2.4.3. Cas d'une frontière rectangulaire en 3D 53

2.5. APPLICATION AU RAYONNEMENT DIPOLAIRE 56

2.6 CONCLUSION 68

CHAPITRE 3 60

APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS MIXTES DE H(ROT) 60

3.1. INTRODUCTION 60

3.2. ELEMENTS FINIS NODAUX 62

3.2.1. Eléments finis de Lagrange en une dimension 63

3.2.2. Eléments finis de Lagrange sur le triangle 64

3.2.3. Eléments finis de Lagrange en trois dimensions 65

3.3. ELEMENTS FINIS MIXTES DE H(ROT) 69

3.3.1. Eléments finis mixtes de H(rot) sur le triangle. 70

3.3.2 Eléments finis mixtes de H(rot) en trois dimensions 82

3.3.3. Transformation géométrique des éléments de H(rot). 90

3.4. DISCRETISATION DU PROBLEME APPROCHE 92

3.4.1 Construction de l'espace d'approximation 93

3.4.2. Mise sous forme de système matriciel linéaire 95

3.5. CONCLUSION 97

CHAPITRE 4 99

APPLICATIONS : PHENOMENES DE DIFFRACTION 99

4.1. INTRODUCTION 99

4.2. FORMULATION DU PROBLEME DE DIFFRACTION 99

4.2.1. Formulation en champ total 100

4.2.2. Formulation en champ diffracté 101

4.2.3. Discrétisation 104

4.3. EXEMPLES DE DIFFRACTION EN 2D 106

4.3.1. Diffraction par des objets de forme simple 106

4.3.2. Diffraction par objets complexes 120

4.4. EXEMPLES DE DIFFRACTION EN 3D 123

4.4.1. cas de la diffraction par un cylindre 123

4.5. CONCLUSION 126

CHAPITRE 5 128

APPLICATIONS : GUIDES D'ONDES OUVERTS 128

5.1. INTRODUCTION 128

5.2. GENERALITES 129

5.2.1. Principes fondamentaux 129

5.2.2. Détermination des modes dans le guide 131

5.2.3. Excitation d'un mode du guide 133

5.2.4 Formulation du problème de guides d'onde ouverts 134

5.3. GUIDE D'ONDES "PLANS PARALLELES" 135

5.3.1. Détermination des modes du guide d'ondes "plans parallèles" 135

5.3.2. Modélisation 2D d'un convertisseur de type Vlasov sans réflecteur 137

5.4. GUIDE D'ONDES CIRCULAIRE 145

5.4.1. Déterminations des modes du guide circulaire 145

5.4.2. Modélisation 3D d'un convertisseur de type Vlasov sans réflecteur 147

5.5 CONCLUSION 151

CONCLUSION 164

BIBLIOGRAPHIE 163

ANNEXES A 167

REMERCIEMENTS

Je voudrais adresser ici mes sincères remerciements à:

*Monsieur **Alain Nicolas**, Professeur et Directeur du Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY), pour la confiance qu'il m'a témoignée en me confiant ce travail et en assurant la direction de cette thèse.*

*Monsieur **Laurent Nicolas,** Chargé de Recherche CNRS au CEGELY, pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail dans une réelle ambiance amicale.*

*Monsieur **Michel Aubourg,** Chargé de Recherche CNRS à l'IRCOM, et Monsieur **Abdel Razek**, Directeur de Recherche CNRS au LGEP, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter la tâche de rapporteurs.*

*Monsieur **Gérard Meunier,** Directeur de Recherche CNRS au LEG, et Monsieur **Jean-François Maître**, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de siéger à ce jury.*

*Ce travail n'aurait pu se réaliser sans la participation et la compétence du personnel du CEGELY qui a su m'aider dans toutes les tâches techniques (Messieurs **F. Chappuis, C. Chirol et D. Prébet**), informatiques (Messieurs **L. Mariaux, D. Muller, O. Fabrègue**) et administatives (Mesdames **J. Chabert** et **J. Floirat**).*

Je ne manquerai pas de remercier tous les collègues thésards du CEGELY pour la chaleureuse et amicale ambiance qu'ils ont su créer.

Je tiens à remercier l'EECI, l'Energie Electrique de la Côte d'Ivoire, en la personne de Monsieur Antoine Kouassi, Directeur des Affaires Administratives et Finacière à l'EECI, pour avoir financer mes études d'ingénieur et m'avoir permis ainsi d'arriver à ce niveau d'étude doctorale.

à toute ma famille

RESUME

L'objectif de ce travail est l'élaboration d'un code numérique efficace pour la modélisation et la simulation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences en régime harmonique et en espace libre.

Ce code de calcul s'appuie sur la discrétisation en deux (2D) et trois dimensions (3D) des équations de Maxwell en régime fréquentiel par une méthode d'éléments finis couplée à des conditions aux limites absorbantes (CLA).

Les formulations de Galerkin en **E** ou **H** de l'équation vectorielle des ondes sont établies pour un domaine borné par une frontière arbitraire sur laquelle les conditions de rayonnement sont imposées par un opérateur surfacique.

Cet opérateur est explicité grâce à des CLA locales du type Bayliss-Turkel (BT) et Engquist-Majda (EM). Ces opérateurs approchés sont présentés sous une forme vectorielle et symétrique afin de faciliter leur couplage avec les éléments finis employés et de préserver la symétrie des matrices.

Les éléments finis utilisés sont des éléments finis mixtes de $H(\mathrm{rot})$. Ces éléments finis sont vectoriels et ont la propriété fondamentale d'être à composantes tangentielles localisées sur les frontières des éléments géométriques. Ils sont ainsi capables de forcer implicitement les conditions de continuité tangentielle des champs électrique **E** ou magnétique **H** à la traversée des interfaces tout en y permettant les discontinuités éventuelles des composantes normales de ces champs.

Les résultats obtenus, dans le cas de la diffraction d'une onde plane par des objets 2D de forme simple, sont comparés aux solutions exactes avec succès, tant en champ proche qu'en champ lointain. Dans le cas de cylindres conducteurs de longueur finie (calcul 3D), les résultats sont en bon accord avec ceux des éléments finis nodaux. Une application de cette méthode aux problèmes liés à l'émission d'un faisceau directif de forte puissance avec des antennes de type Vlasov est présentée.

INTRODUCTION

L'évolution des ordinateurs et avec eux, l'accroissement des moyens de calculs, ont donné un formidable essor à l'analyse numérique assistée par ordinateur des phénomènes physiques rencontrés dans les sciences pour l'ingénieur, depuis ces dix dernières années. La disponibilité des ordinateurs performants ou stations de travail permet de résoudre numériquement la plupart des modèles (dont la complexité laisse d'ailleurs peu de place à toute résolution analytique). En outre, ces ordinateurs sont généralement équipés d'écrans graphiques couleur de haute résolution, simplifiant la génération des données et la visualisation des résultats.

D'abord outil de recherche, la modélisation numérique est devenue, grâce à la démocratisation du matériel informatique, un acteur important dans la conception des produits industriels. Pendant la phase de conception de dispositifs tels que les dispositifs micro-ondes, l'intérêt principal d'un code numérique est de permettre la multiplication des essais, sans fabrication de prototypes réels (physiques). Il en résulte une optimisation du prototype et une meilleure productivité. En effet, la réalisation de prototypes expérimentaux peut être particulièrement coûteuse et d'éventuelles erreurs expérimentales risquent d'augmenter largement ces coûts. Un autre intérêt est de fournir des informations difficilement mesurables: la cartographie précise des champs électromagnétiques ainsi que leur "effet lointain" (section radar, compatibilité électromagnétique ...), les pertes dans les matériaux ...

Les phénomènes électromagnétiques hyperfréquences ou micro-ondes (gamme de fréquences comprise entre 0.3 GHz et 300 GHz) sont régies par les équations de Maxwell ou l'équation des ondes, le comportement des milieux en présence des champs, et des conditions aux limites appropriées. Il existe une grande variété de méthodes numériques de résolution de ces équations qui sont des équations aux dérivées partielles. Toutes ces méthodes ne sont pas identiquement adaptées aux différents problèmes électromagnétiques. La méthode des éléments finis (MEF) apparaît être suffisamment souple pour ce qui est de la représentation des problèmes à géométries variées et complexes (angles vifs, surfaces gauches ...) contenant

des matériaux de propriétés complexes (non-linéarité, anisotropie ...). Elle s'est imposée sans conteste comme outil efficace et à moindre coût pour résoudre numériquement les problèmes électromagnétiques hyperfréquence, en régime harmonique et à domaines ouverts. Néanmoins des difficultés majeures apparaissent lors de la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, dans une formulation basée sur l'équation des ondes, selon la dimension (dimension deux ou dimension trois) et la complexité du problème. On peut citer entre autres:

- la prise en compte des conditions d'interfaces entre deux matériaux différents,
- la représentation des singularités des champs aux arêtes et aux coins,
- la satisfaction de la condition de divergence nulle, pour les milieux homogènes,
- la prise en compte des problèmes ouverts où les conditions de décroissance des champs à l'infini doivent être imposées à distance finie.

Une bonne partie de l'expérience de la MEF appliquée aux problèmes d'hyperfréquences a été acquise dans le contexte des problèmes bidimensionnels (2D) isotropes. Dans cette configuration, les approches sont plutôt classiques. On considère phénomène et dispositifs invariants dans une direction et on en étudie une coupe perpendiculaire à cette direction. Une seule composante du champ, celle portée par la direction, est suffisante pour formuler le problème 2D. On aboutit à la forme scalaire de l'équation des ondes dont les solutions, même dans les milieux hétérogènes, sont des fonctions scalaires continues. Les éléments finis nodaux sont bien adaptés à la discrétisation du problème 2D qui comporte alors une seule inconnue par noeud de maillage.

L'équation vectorielle des ondes, dans les problèmes tridimensionnels (3D), est beaucoup plus difficile à modéliser du fait que les éléments finis doivent être capables de prendre en compte les sauts de discontinuités aux interfaces des matériaux, de permettre des conditions d'interfaces différentes sur la composante normale et les composantes tangentielles, et de représenter les singularités aux arêtes ou aux coins. De plus, il est nécessaire d'imposer la condition de divergence nulle dans une région homogène. L'expérience acquise dans les problèmes de cavités et de guides d'ondes fermés suggère que les solutions de l'équation des ondes, obtenues en utilisant sans précaution des éléments finis nodaux qui ne satisfont pas la contrainte de divergence nulle, peuvent être complètement fausses. Des éléments finis

vectoriels, appelés "éléments d'arête" ou "éléments mixtes de H(rot)", ont été introduits. Ces fonctions de base vectorielles possèdent des propriétés qui collent plus à la physique du problème et semblent résoudre ces difficultés.

Indépendamment des formulations scalaire ou vectorielle, une condition de radiation doit être imposée à distance finie, à la frontière du domaine d'analyse. Les conditions de radiation basées sur une équation intégrale de frontière sont par nature exacte mais génèrent des matrices de bord pleines et non-symétriques. Des conditions aux limites dites "absorbantes" (C.L.A.) ont été proposées comme une alternative aux conditions basées sur une équation intégrale de frontière. Elles se présentent sous forme d'opérateurs différentiels qui préservent le caractère creux de la matrice issue de la discrétisation par éléments finis de l'équation des ondes. Elles donnent des résultats très satisfaisants tout en limitant considérablement le temps de calcul.

L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'élaboration d'un code numérique efficace pour la modélisation et la simulation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences en régime harmonique et en espace libre, pour la conception de guides d'ondes ou d'antennes de forte puissance, l'analyse de problème de diffraction électromagnétique ...

Dans cette thèse, une formulation mettant en oeuvre la méthode des éléments finis mixtes couplée à des conditions aux limites absorbantes a été développée. Pour des besoins de validation, un module de solutions analytiques de diffraction d'une onde plane par des objets de forme simple a été programmé et inséré dans le code 2D. Dans la recherche de méthodes de résolution plus efficaces et adaptées au système découlant de la formulation avec éléments mixtes, l'algorithme GMRES avec ré-orthogonalisation a été programmé et implanté dans le code 3D.

Cet exposé est organisé comme suit.

Le chapitre 1 décrit brièvement le cadre physique du problème à résoudre et met en évidence les avantages liés au choix de la formulation faible de l'équation vectorielle des ondes par la méthode de Galerkin avec l'espace vectoriel H(rot) comme espace des solutions admissibles.

Le chapitre 2 présente les conditions aux limites absorbantes pour la prise en compte de l'infini à distance finie ainsi que les problèmes rencontrés lors de leur couplage avec la méthode des éléments finis.

Le chapitre 3 présente les éléments finis utilisés: les éléments mixtes de H(rot) ou éléments d'arête. Quelques fonctions de base y sont explicitées sous une forme générale. Leur mise en oeuvre dans la discrétisation de la formulation du problème est aussi présentée.

Le chapitre 4 montre l'application de la méthode des éléments finis mixtes couplée aux CLA à des problèmes de diffraction électromagnétique en deux et trois dimensions. En particulier la diffraction d'une onde plane par des objets de formes variées est présentée.

Le chapitre 5 montre une autre application de cette méthode aux problèmes liés à l'émission d'un faisceau "uni-mode" de forte puissance avec des guides d'ondes rayonnants. En guise d'exemple, une modélisation 2D et 3D d'antennes de type Vlasov est effectuée.

Enfin, la conclusion reprend les chapitres précédents et ouvre des perspectives pour un travail futur.

CHAPITRE 1

FORMULATION DU PROBLEME PHYSIQUE

1.1. INTRODUCTION

La résolution d'un problème d'électromagnétisme consiste à déterminer les structures du champ électromagnétique dans une région de l'espace. Ces configurations du champ doivent satisfaire simultanément les équations de Maxwell, ou l'équation des ondes, et des conditions aux limites appropriées. Des solutions exactes ou analytiques peuvent être obtenues dans un petit nombre de cas selon la géométrie des objets. Dans la plupart des problèmes, il faudra approcher numériquement la solution. Les principales méthodes numériques utilisées en électromagnétisme peuvent être classées en deux groupes:

- la méthode des Equations Intégrales de Frontières (EIF),
- les Méthodes Finies (MF) qui comprennent la Méthode des Différences Finies (MDF) et la Méthode des Eléments Finis (MEF).

La première méthode utilise une discrétisation surfacique des objets tandis que les deux dernières nécessitent une discrétisation volumique. En général une formulation par équations intégrales de frontière est plus efficace que les schémas en méthodes finies pour les objets parfaitement conducteurs car l'ordre du système matriciel obtenu est moindre que celui des MF, les inconnues étant situées uniquement sur les frontières. Ce relatif avantage de la méthode des EIF s'essouffle pour des objets complexes et hétérogènes, pour lesquels un maillage volumique doit être employé. De plus la matrice résultante de la formulation par EIF est dense et non-symétrique. A l'inverse, les méthodes finies génèrent des matrices creuses et, souvent, symétriques définies positives, ce qui constitue un avantage certain du point de vue du stockage et de la résolution. Pour ces raisons, les méthodes finies possèdent plus de capacités que les équations intégrales de frontières pour la résolution de problèmes complexes d'électromagnétisme.

Le principe de base de la méthode des différences finies est la substitution, dans la formulation du problème, de chacun des opérateurs différentiels par un quotient aux différences écrit sur un réseau de points définissant le maillage du domaine d'étude. Outre les propriétés de consistance, de stabilité et de convergence à vérifier, une des difficultés majeures lors de la mise en oeuvre de la MDF est de faire coïncider le réseau des points utilisés avec les frontières du problème, lorsque celles-ci sont de forme quelconque. A cause, en partie, de ces restrictions de maillage, la méthode des éléments finis apparait être beaucoup plus souple pour ce qui est de la représentation des géométries complexes. Elle est l'une des techniques numériques capables de modéliser efficacement et à moindre coût les structures hétérogènes; cependant la MDF reste encore la méthode numérique la plus utilisée pour les phénomènes électromagnétiques en régime temporel.

Nous commençons par décrire brièvement les équations de Maxwell, puis nous posons le problème à résoudre dans le cadre de notre étude et nous en donnons une formulation faible ou variationnelle, préalable à une approximation par la méthode des éléments finis.

1.2. MODELE MATHEMATIQUE: LES EQUATIONS DE MAXWELL

Les phénomènes électromagnétiques, d'un point de vue macroscopique, sont régis par les équations de Maxwell. De nombreux auteurs ont largement traité la théorie de l'électromagnétisme [1-5]. Dans cette section, nous essayons de rappeler quelques concepts fondamentaux qui nous serons utiles pour la suite. Les équations de Maxwell, en régime harmonique, seront présentées ainsi que les conditions aux limites.

1.2.1. Les équations de Maxwell en régime harmonique

Les équations de Maxwell résultent

- de concepts physiques (charge électrique, densité de courant);
- de lois universelles (conservation de la charge, loi de Faraday);
- de lois de comportement caractéristiques de chaque milieu.

Elles sont exprimées à l'aide de six concepts ou grandeurs physiques qui sont :

- Charge électrique, représentée par le scalaire q_e (Coulombs/m^3)

- Courant électrique, représenté par le vecteur $\boldsymbol{Je}$ (Ampères/m²)
- Induction magnétique , représentée par le vecteur $\boldsymbol{B}$ (Webers/m²)
- Champ magnétique, représenté par le vecteur $\boldsymbol{H}$ (Ampères/m²)
- Induction électrique, représentée par le vecteur $\boldsymbol{D}$ (Coulombs/m²)
- Champ électrique, représenté par le vecteur $\boldsymbol{E}$. (Volts/m)

A ces quantités, il convient d'ajouter une source de courant magnétique, $\boldsymbol{Jm}$, et une charge magnétique, q_m, qui sont fictives et sont seulement des concepts mathématiques (elles n'ont pas d'existence physique). Elles ne serviront à représenter que des sources de courant et des charges induites ou équivalentes. De plus elles permettent de conserver la dualité entre les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$.

Lorsque toutes ces quantités sont continues et à dérivées continues, elles obéissent à la forme différentielle des équations de Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \partial \boldsymbol{D} / \partial t + \boldsymbol{Je} \quad (1.1), \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B} / \partial t - \boldsymbol{Jm} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = q_e \quad (1.2), \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = q_m . \quad (1.4)$$

Les équations (1.1) et (1.2) contiennent la loi de conservation de la charge, tandis que les équations (1.3) et (1.4) traduisent la loi de Faraday.

Aux équations de Maxwell (1.1-1.4), il faut ajouter les lois de comportement ou relations constitutives qui spécifient les caractéristiques du milieu dans lequel les champs existent. Elles expriment les quantités $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{Je}$ en fonction du champ électromagnétique défini par les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$.

Pour les ***milieux linéaires***, d'un point de vue diélectrique, magnétique et électrique, elles deviennent :

- lois de proportionnalité des champs et inductions :

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad (1.6)$$

où ε la constante diélectrique (ou permittivité) du milieu et μ la perméabilité magnétique sont indépendantes des phénomènes électromagnétiques. Le rapport $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$, avec ε_0 la constante diélectrique du vide, représente la permittivité relative du milieu. Le rapport

$\mu_r = \mu / \mu_0$, avec μ_0 égale à la perméabilité du vide, représente la perméabilité relative du milieu. Ce rapport vaut 1 pour les milieux non magnétiques.

- loi d'Ohm:

$$\boldsymbol{Je} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{1.7}$$

où σ est la conductivité du milieu. En pratique, il convient d'approcher les bons conducteurs par les conducteurs parfaits caractérisés par $\sigma = \infty$ et les bons diélectriques par des diélectriques parfaits caractérisés par $\sigma = 0$.

Lorsque la variation des champs en fonction du temps est ***sinusoïdale ou harmonique***, l'analyse mathématique des équations de Maxwell se simplifie en exprimant les champs à l'aide de quantités complexes. Par ailleurs, la théorie effectuée en régime harmonique peut être étendue, à un régime quelconque au moyen des transformations de Fourier ou de Laplace. En régime harmonique, de pulsation ω, les champs et les sources sont reliés à leurs formes complexes par

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{E}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{H}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{D}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{D}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{B}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{Je}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{Je}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.12}$$

$$q_e(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,q_e(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{Jm}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,\mathbf{Jm}(x,y,z)\exp(j\omega t)\,). \tag{1.14a}$$

$$q_m(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\,(\,q_m(x,y,z)\exp(j\omega t)\,), \tag{1.14b}$$

où "Re" désigne l'application qui à tout nombre complexe associe sa partie réelle.

Les équations de Maxwell deviennent alors :

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{Je}, \tag{1.15}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{Jm}, \tag{1.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e, \tag{1.16}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = q_m. \tag{1.18}$$

En milieux linéaires et sans pertes électriques ($\sigma = 0$) et en l'absence de charges d'espace ($q = 0$), elles se réduisent à

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{Je}, \tag{1.19}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} - \mathbf{Jm}, \tag{1.21}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \tag{1.20}$$

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0. \tag{1.22}$$

Les équations (1.19) et (1.21) constituent les relations du champ électromagnétique avec les sources et sont les deux équations essentielles de Maxwell. Les équations (1.20) et (1.22) sont obtenues en prenant la divergence des équations (1.19) et (1.21) aux points où les sources de courant sont nulles.

L'étude dans le domaine fréquentiel et le formalisme des quantités complexes permettent d'étendre la notion de linéarité aux milieux à pertes diélectriques et magnétiques, en introduisant une permittivité complexe et une perméabilité complexe. A cet effet on pose $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'', \varepsilon' = \varepsilon'_r\varepsilon_0$ et $\varepsilon'' = \varepsilon''_r\varepsilon_0$ positives; $\mu = \mu' - j\mu'', \mu' = \mu'_r\mu_0$ et $\mu'' = \mu''_r\mu_0$ positives. Les pertes diélectriques et magnétiques sont introduites respectivement par les quantités ε'' et μ''. Par aileurs, en régime harmonique, un métal conducteur homogène de propriétés $(\varepsilon, \mu_0, \sigma)$ pourra être remplacé par un diélectrique $(\tilde{\varepsilon}, \mu_0)$ de permittivité $\tilde{\varepsilon}$ donnée par:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + j\sigma/\omega.$$

Grâce à cette équivalence métal-diélectrique, on menera éventuellement de front l'étude des métaux et celle des diélectriques.

Remarquons qu'il n'est pas possible de poser une relation linéaire entre **D** et **E** (ou entre **B** et **H**) pour un matériau à pertes en régime temporel [1].

1.2.2. L'équation vectorielle des ondes

Les équations essentielles de Maxwell (1.19) et (1.21) sont des équations aux dérivées partielles du premier ordre dont chacune a au moins une inconnue. On peut découpler ces équations et obtenir une équation aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue **E** ou **H**. Le rotationnel de (1.21), aux points où **Jm = 0**, est

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H},$$

en y substituant $\nabla \times \mathbf{H}$ par (1.19), cette équation devient

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\omega^2 \varepsilon\mu \mathbf{E} - j\omega\mu \mathbf{Je},$$

que l'on écrit

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{Je}, \tag{1.23}$$

avec k la constante de propagation du champ électromagnétique dans le milieu ($k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$).

L'équation (1.23) est appelée *équation vectorielle des ondes*, avec ici un terme source au second membre; elle est aussi parfois nommée *équation "rot-rot" des ondes.*

Une équation similaire en **H** est obtenue de la même façon, en prenant le rotationnel de (1.19) où **Je = 0** et, en y substituant $\nabla\times\mathbf{E}$ par (1.21) :

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}-k^2\mathbf{H}=-j\omega\varepsilon\mathbf{Jm}. \tag{1.24}$$

La relation vectorielle

$$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}$$

appliquée aux équations (1.23) et (1.24), conduit à

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=-j\omega\mu\mathbf{Je}, \tag{1.25}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=-j\omega\varepsilon\mathbf{Jm}, \tag{1.26}$$

On obtient ainsi une autre forme de l'équation des ondes connue sous le nom d'*équation vectorielle de Helmholtz*, avec ici un terme source au second membre.

***Remarque 1.1*:**

- Les équations (1.23) et (1.24) contiennent implicitement, respectivement, les informations $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ et $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$; ce qui est vite démontré en prenant la divergence de ces équations aux points où **Je = 0** et **Jm = 0**. Par contre, les équations (1.25) et (1.26) ne contiennent pas ces conditions et, sont donc moins générales que les équations (1.23) et (1.24).

1.2.3. Les conditions aux limites

a) Les Conditions d'interfaces

Nous avons supposé plus haut que le milieu était homogène et que les champs étaient suffisamment réguliers (continuité des champs ainsi que de leurs rotationnel et divergence). L'analyse peut être étendue à un milieu inhomogène, en particulier à un milieu homogène par morceaux c'est à dire constitué de plusieurs milieux homogènes, en ajoutant aux équations de Maxwell (1.19-1.22) écrites dans chaque milieu des conditions d'interface à la traversée d'un milieu.

Ainsi, sur la surface qui sépare deux milieux de propriétés différentes, dont aucun n'est un conducteur électrique parfait (**c.e.p.**), les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont continues; ce qui est exprimé par:

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}^1-\mathbf{E}^2)=\mathbf{0}, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}^1-\mathbf{H}^2)=\mathbf{0}. \tag{1.28}$$

où **n** est le vecteur unité normal à la surface de séparation, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, et où les indices 1 et 2 spécifient le milieu dans lequel le champ **E** ou **H** est défini (Fig.1.1).

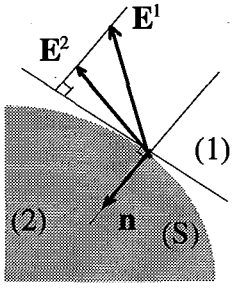


Figure 1.1: Conditions d'interfaces: continuité tangentielle du champ E.

Si l'un des milieux est un conducteur électrique parfait (cep), par exemple la région 2, le champ électrique y est nul du fait qu'une densité surfacique de courant existe à l'interface de conductivité infinie. La relation (1.27) devient au bord d'un c.e.p.

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0}. \tag{1.29}$$

Lorsque la surface S sert de support à un courant de surface électrique et magnétique, les composantes tangentielles des champs **E** et **H** sont discontinues; ce qui se traduit par

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}^1-\mathbf{E}^2)=-\mathbf{Jm}, \tag{1.30}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}^1-\mathbf{H}^2)=\mathbf{Je}. \tag{1.31}$$

Les équations (1.30-1.31) sont essentiellement les équations des champs **E** et **H** à la surface S support de courants.

Les conditions portant sur les composantes normales donnent pour le champ **E** et le champ **H** respectivement

$$\mathbf{n}\cdot(\varepsilon_1\mathbf{E}^1-\varepsilon_2\mathbf{E}^2)=0, \tag{1.32}$$

$$\mathbf{n}\cdot(\mu_1\mathbf{H}^1-\mu_2\mathbf{H}^2)=0. \tag{1.33}$$

***Remarque 1.2*:**

- Lorsque $\omega \neq 0$, les conditions (1.32) et (1.33) portant sur les composantes normales des champs **E** et **H** sont automatiquement remplies si les relations (1.27) et (1.28) sont satisfaites [4]. On peut le démontrer en prenant la divergence des équations (1.28) et (1.27).
- Les relations (1.31) et (1.32) sont contenues respectivement dans (1.19) et (1.20) au sens des distributions [5,10] tout comme (1.30) et (1.33) sont contenues respectivement dans (1.21) et (1.22).

b) Comportement du champ à l'infini

<u>*Condition de rayonnement de Sommerfeld*</u>

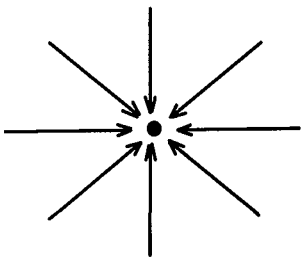
Lorsque l'on est confronté à des problèmes à domaines ouverts, une condition portant sur le comportement des champs à l'infini doit être forcée. Cette condition est constituée d'une condition de régularité à l'infini et d'une condition de rayonnement qui est essentiellement une conséquence de la conservation de l'énergie [2].

La condition de régularité stipule que, si des sources variables sont situées à distance finie de l'origine, alors les champs s'annulent à l'infini de façon que $\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\mathbf{E}$ et $\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\mathbf{H}$ restent finis uniformément dans toutes les directions, où r est la distance radiale à l'origine et d est la dimension de l'espace (d = 2 ou 3).

Les champs **E** et **H** ainsi que leurs composantes cartésiennes satisfont,d'après (1.25) et (1.26), l'équation d'Helmholtz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{1.34}$$

aux points où la densité de courant est nulle. La donnée de la source et la condition que la solution de (1.34) soit régulière à l'infini ne sont pas suffisantes pour déterminer la fonction ψ de façon unique. En effet, l'équation l'Helmholtz admet pour solution des *ondes convergentes* ou *divergentes* (Figure 1.2 et Figure 1.3).



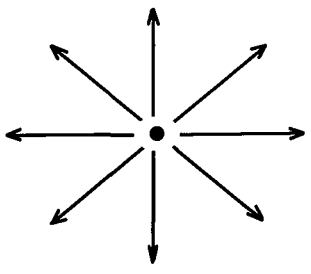


Figure 1.2: Ondes convergentes. Figure 1.3: Ondes divergentes.

La condition de rayonnement introduite par Sommerfeld:

$$\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + jk\psi\right) = 0, \tag{1.35}$$

uniformément dans toutes les directions, a pour effet de garantir que la fonction d'onde ψ se comporte à l'infini comme une onde divergente (ou *onde sortante* ou *onde rayonnante*); ce qui exprime que la propagation a lieu des sources vers l'infini. Soulignons que les solutions rayonnantes de (1.34) vérifient automatiquement la condition de régularité: $\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\psi$ finie ($\psi = O\left(r^{-(d-1)/2}\right)$). On a supposé implicitement dans l'équation (1.35) que le temps intervient avec le facteur $e^{j\omega t}$.

<u>*Condition de rayonnement de Silver-Müller*</u>

La condition de rayonnement de Sommerfeld assure aux composantes cartésiennes d'une onde vectorielle **A** solution de (1.34) d'être des ondes scalaires rayonnantes (de vérifier l'équation 1.35); par contre elle ne garantit pas que **A** est solution de l'équation vectorielle des ondes

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{1.36}$$

Effectivement, elle ne contient pas le couplage indispensable entre les composantes cartésiennes qui est traduit par l'équation $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$.

La condition de rayonnement de Silver-Müller est la contrepartie de celle de Sommerfeld pour les ondes obéissant à l'équation vectorielle des ondes (1.36). Elle s'écrit:

$$\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left\{\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A}) - jk\mathbf{A}\right\} = 0, \tag{1.37}$$

uniformément dans toutes les directions, où **r** est le vecteur unitaire radial.

Toutefois, notons que pour les solutions **A** de l'équation vectorielle des ondes (1.36), la condition de rayonnement de Silver-Müller est équivalente à la condition de rayonnement de Sommerfeld appliquée aux composantes cartésiennes de **A** [8-9], car ces solutions satisfont (1.34) et sont à divergence nulle.

Pour une onde électromagnétique (**E**, **H**) sortante, solution des équations de Maxwell, la condition de rayonnement de Silver-Müller se met sous l'une ou l'autre forme suivante:

$$\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{H} + \eta_0^{-1}\mathbf{E}\right) = \mathbf{0}, \tag{1.38a}$$

ou $\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{E}-\eta_0\mathbf{H}\right)=\mathbf{0}$, (1.38b)

uniformément dans toutes les directions; $\eta_0=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0^{-1}}$ est l'impédance caractéristique du vide.

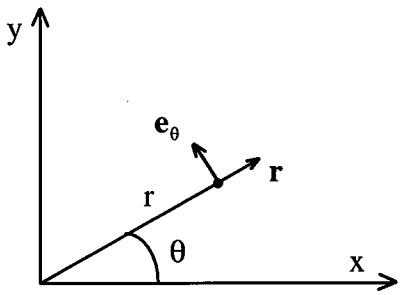


Figure 1.4: Coordonnées cylindriques.

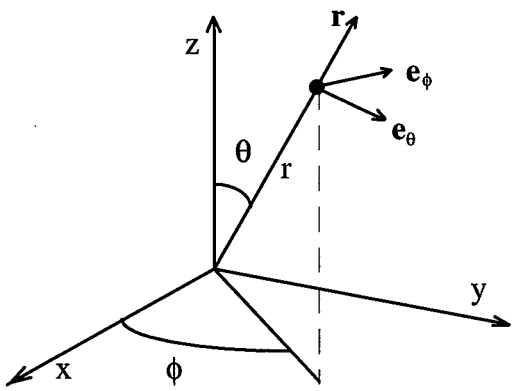


Figure 1.5: Coordonnées sphériques.

Le champ électromagnétique lointain

Toute onde électromagnétique rayonnante (**E**, **H**) solution des équations de Maxwell ou encore de l'équation des ondes a la forme asymptotique:

- d'une onde sortante sphérique en trois dimensions d'espace:

$$\mathbf{E}(r,\theta,\phi)=\frac{e^{-jkr}}{r}\left\{\mathbf{E}_\infty(\theta,\phi)+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, r\to\infty, \tag{1.39a}$$

$$\mathbf{H}(r,\theta,\phi)=\frac{e^{-jkr}}{r}\left\{\mathbf{H}_\infty(\theta,\phi)+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, r\to\infty, \tag{1.39b}$$

uniformément dans toutes les directions,

- d'une onde sortante cylindrique en deux dimensions d'espace:

$$\mathbf{E}(r,\theta)=\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\left\{\mathbf{E}_\infty(\theta)+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, r\to\infty, \tag{1.40a}$$

$$\mathbf{H}(r,\theta)=\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\left\{\mathbf{H}_\infty(\theta)+O\left(\frac{1}{r}\right)\right\}, r\to\infty, \tag{1.40b}$$

uniformément dans toutes les directions,

où les champs $\mathbf{E}_\infty$ et $\mathbf{H}_\infty$ sont définis sur une sphère unité (ou sur un cercle unité en deux dimensions) et donnent les diagrammes ou caractéristiques vectorielles de rayonnement des champ électrique lointain et champ magnétique lointain respectivement. Ces champs satisfont:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\infty=\eta_0\mathbf{H}_\infty \tag{1.41a}$$

et $\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_{\infty} = 0,$ (1.41b)

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal sortant à la sphère unité (ou au cercle unité). La relation (1.41) implique que lorsque r tend vers l'infini, on a les approximations: $\mathbf{n}\times\mathbf{E} \approx \eta_0\mathbf{H}$ et $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E} \approx 0$.

1.3. FORMULATION FAIBLE DU PROBLEME

1.3.1. Problème à résoudre

Dans le cadre de notre étude, le problème électromagnétique à résoudre est la détermination du couple (**E**, **H**) en régime harmonique à très hautes fréquences dans un domaine non borné, connaissant les sources de courants électrique et/ou magnétique qui peuvent être soit induites soit imposées. Les milieux seront isotropes et pourront être inhomogènes à pertes diélectriques et/ou à pertes magnétiques (en régime harmonique ces milieux sont linéaires). Aux fréquences qui nous intéressent, la profondeur de pénétration du champ dans les conducteurs est négligeable, et, par conséquent, ils seront considérés comme parfaits.

Le champ électromagnétique vérifie le problème dit continu que nous notons (PC), défini par:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{Jm} \quad \text{dans } \mathbb{R}^d / \Omega_{cep},$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{Je} \quad \text{dans } \mathbb{R}^d / \Omega_{cep},$$

$$\mathbf{n}_e\times\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{cep},$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{(d-1)/2}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{E} - \eta_0\mathbf{H}\right) = \mathbf{0},$$

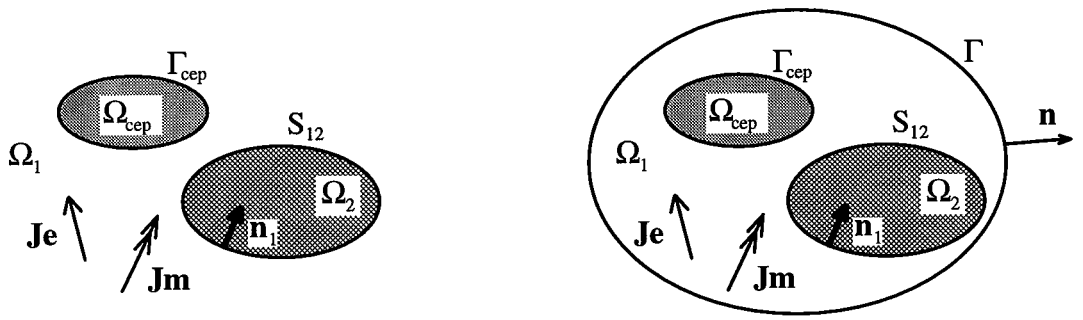
et les conditions de continuité aux interfaces précédemment définies;

où $\mathbf{n}_e$ est le vecteur unitaire rentrant normal à la surface Γ_{cep}, frontière du domaine Ω_{cep} occupé par les cep (Figure 1.6).

L'unicité de la solution d'un tel problème électromagnétique a été établie par Müller [9]; la question à considérer est l'existence et l'approximation de la solution. Comme il a été mentionné en introduction à ce chapitre, nous avons retenu la méthode des éléments finis pour la résolution numérique du problème électromagnétique (PC).

Dans cette méthode, le domaine d'étude est subdivisé en parties de tailles finies appelées éléments [12-15]. Les variables du problème sont remplacées par un système de variables

discrètes sur tout le domaine d'intérêt (voir chapitre 3). Une fois introduites dans une formulation intégrale du problème, ces variables discrètes conduisent à un système d'équations à résoudre. Par nature, la méthode des éléments finis demande donc une troncature du domaine infini du problème (PC) par une frontière artificielle Γ. Dans ce contexte, la condition de rayonnement de Sommerfeld ou de Silver-Müller est amenée de l'infini sur la frontière Γ grâce à un opérateur tangentiel, $\boldsymbol{T}$, de type intégral ou différentiel (voir chapitre 2).



(a) problème en espace libre *(b) problème borné*

Figure 1.6: Configurations du problème.

Avant traitement par la méthode des éléments finis, les équations du problème (PC) sont généralement reformulées soit

i) en utilisant directement comme variables d'état **E** ou **H** (équation de Helmholtz ou équation rot-rot), soit

ii) en utilisant des potentiels scalaires et vecteurs auxiliaires comme variables d'état; les champs **E** et **H** sont ensuite déterminés par dérivation (numérique) de ces potentiels.

Le choix d'une formulation est important lorsque l'on souhaite développer un modèle numérique pouvant faire face à un large éventail de problèmes rencontrés en électromagnétisme. Une "bonne" formulation ne doit pas introduire de modes parasites ou solutions non-physiques dans les solutions correctes. Il existe plusieurs types de solutions parasites mais les plus courantes proviennent du non-respect des conditions aux limites aux interfaces de milieux différents [6] et à la non-satisfaction des conditions de divergence nulle [16-17].

Les formulations en potentiels scalaires et vecteurs font l'objet d'un intérêt croissant pour la modélisation des équations de Maxwell [18-19]. Ces formulations éludent les problèmes de

solutions parasites et de mauvais conditionnement des matrices résultant de la discrétisation de l'équation rot-rot en champ **E** ou **H**. Ces approches utilisent des potentiels vecteurs dont l'unicité nécessite la définition de jauges (la définition de divergence de ces potentiels). Cependant, en présence de milieux inhomogènes, la définition de jauges ne garantit pas l'unicité des potentiels électromagnétiques [20]. Pour assurer cette unicité, des conditions additionnelles (en plus des conditions d'interfaces sur le champ électromagnétique) doivent être imposées aux potentiels aux interfaces des matériaux. Comme les approches en potentiels vecteurs requièrent toujours la définition de jauges, comme les quantités premières qui nous intéressent sont les champs **E** et **H**, et comme les conditions d'interface sont formulées plus facilement et plus naturellement en termes de ces champs, nous nous sommes intéressés aux formulations directes en **E** ou en **H**.

La formulation utilisant l'équation vectorielle d'Helmholtz (1.25) ou (1.26) demande des conditions complémentaires afin de satisfaire la condition de divergence nulle. C'est pourquoi, la résolution de l'équation vectorielle des ondes formulée en **E** ou en **H** est préférable car elle a l'avantage d'imposer la condition de divergence nulle à la solution [21].

Le problème dans le domaine intérieur (borné), Ω, peut donc s'écrire comme suit

$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{Je} \qquad \text{dans } \Omega/\Omega_{cep}, \qquad (1.42a)$$

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H} - k_0^2\mu_r\mathbf{H} = -j\omega\varepsilon_0\mathbf{Jm} \qquad \text{dans } \Omega/\Omega_{cep}, \qquad (1.42b)$$

(PCH) $$\mathbf{n}_e\times\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_{cep}, \qquad (1.42c)$$

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H} = T\,(\mathbf{H}) \qquad \text{sur } \Gamma, \qquad (1.42d)$$

et les conditions d'interfaces,

ou

$$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{Jm} \qquad \text{dans } \Omega/\Omega_{cep}, \qquad (1.43a)$$

$$\nabla\times\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E} - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{Je} \qquad \text{dans } \Omega/\Omega_{cep}, \qquad (1.43b)$$

(PCE) $$\mathbf{n}_e\times\mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_{cep}, \qquad (1.43c)$$

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{E} = T\,(\mathbf{E}) \qquad \text{sur } \Gamma, \qquad (1.43d)$$

et les conditions d'interfaces,

où **n** est le vecteur unitaire normal sortant à Γ (Figure 1.6) et $k_0$est la constante de propagation en espace libre des ondes planes émises à la pulsation ω ($k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$).

Dans le problème (PCH), la variable principale est le champ magnétique **H**, solution de (1.42b), et la variable duale, le champ électrique **E**, est déterminée par l'équation (1.42a). Dans le problème (PCE), les rôles sont inversés: le champ magnétique **E** est solution de (1.43b), tandis que le champ magnétique **H** est déterminé par l'équation (1.43a).

Le couple (**E**, **H**) solution de (PCH) est aussi solution de (PCE) et, réciproquement, la solution du problème (PCE) est la solution du problème (PCH). Le prolongement de la solution de (PCE) ou de (PCH) à tout l'espace est solution du problème (PC) à frontière libre. Ce prolongement peut être obtenu grâce aux formules de Stratton-Chu [2]. Ces formules sont dérivées en appliquant l'analogue vectoriel du théorème de Green aux équations rot-rot dans (PCE) et (PCH). En annexes (A1), on montre comment ces formules sont utilisées pour le calcul du champ électromagnétique à l'extérieur du domaine discrétisé.

1.3.2. Formulation par la méthode de Galerkin

Les formulations dans la méthode des éléments finis sont généralement fournies par des principes variationnels [7] ou des résidus pondérés [23]. L'un ou l'autre principe est sensé donner le même résultat. Le dernier est plus souple et correspond, dans le cas des équations qui régissent notre problème, au premier [22,27]. La méthode de Galerkin est une méthode de résidus pondérés dans laquelle la *fonction test* ou *fonction poids* appartient à l'espace des solutions admissibles.

L'on sait, d'après Silver-Müller, que pour **H** solution du problème global (PC), les intégrales $\int_\Omega |\mathbf{H}|^2 d\Omega$ et $\int_\Omega |\nabla\times\mathbf{H}|^2 d\Omega$ sont finies pour Γ située à distance quelconque des sources. Par conséquent les solutions de (PCH), peuvent être recherchées dans l'espace de Hilbert suivant

$$H(\mathrm{rot}) = \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{L}^2(\Omega);\ \nabla\times\mathbf{A} \in \mathbb{L}^2(\Omega)\right\},$$

où $\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{\mathbf{A} \text{ de } \Omega \to \mathbb{C}^3\ ; \int_\Omega |\mathbf{A}|^2 d\Omega < \infty\right\}$ est l'espace des fonctions vectorielles à valeurs complexes de carré du module sommable. Une propriété fondamentale des fonctions de l'espace $H(\mathrm{rot})$ est qu'elles sont à composantes tangentielles continues aux interfaces dans Ω [10].

L'équation des ondes en **H** est multipliée par une fonction test **W** appartenant à l'espace $H(\mathrm{rot})$

et est intégrée sur le domaine d'étude Ω:

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}-k_0^2\mu_r\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{W}d\Omega=-j\omega\varepsilon_0\int_{\Omega}\mathbf{Jm}\cdot\mathbf{W}d\Omega. \tag{1.44}$$

La relation vectorielle:

$$\int_{\Omega}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{W}\,d\Omega=\int_{\Omega}\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{W})\,d\Omega-\oint_{\Gamma}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma, \tag{1.45}$$

avec $\mathbf{A}=\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}$, conduit à la formulation:

$$\int_{\Omega}\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega-k_0^2\int_{\Omega}\mu_r\mathbf{H}\cdot\mathbf{W}d\Omega+\oint_{\Gamma}\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}d\Gamma=-j\omega\varepsilon_0\int_{S_e}\mathbf{Jm}\cdot\mathbf{W}dS,$$

$$\forall\ \mathbf{W}\in H(\mathrm{rot}) \tag{1.46}$$

Rappelons que pour **H** appartenant à $H(\mathrm{rot})$, **H** est parfaitement déterminé par la donnée du second membre de (1.46) pour toute fonction **W** de l'espace $H(\mathrm{rot})$. En outre, une propriété est vérifiée au *sens faible* (au sens de $\mathbb{L}^2$), par une fonction de $\mathbb{L}^2$, si elle est vérifiée presque partout (p.p.) c'est à dire partout, sauf sur un ensemble dénombrable de points (ensemble de mesure nulle). Cette propriété dite *faible* est moins stricte que la propriété classique dite *forte*. L'on peut vérifier que la solution **H** de l'équation (1.46) est solution au sens faible de (1.42b), il s'en suit que sa divergence est nulle (voir remarque 1.1). Afin d'assurer au problème continu (PCH) une solution unique dans Ω, il est nécessaire que la formulation intégrale (1.46) écarte les solutions parasites (non physiques) dues en partie au non-respect des conditions d'interfaces. Aussi, il convient de montrer les conditions à remplir par la fonction test, et de ressortir les conditions implicitement vérifiées par la formulation des résidus (1.46).
Dans un souci de clarté, le domaine Ω est supposé être composé de conducteurs parfaits Ω_{cep} et de deux régions Ω_1 et Ω_2 séparées par une interface S_{12} simplement fermée comme décrit à la Figure 1.6 (b).

On commence par déterminer les conditions à imposer à la fonction test, autrement dit à la solution **H** de (1.46). Pour ce faire, on peut utiliser la théorie des distributions [24] et écrire la première équation du problème (PCH) avec "précaution", i.e., au sens des distributions [5], de manière à rappeler les conditions d'interfaces sur le champ **H**. On a:

$$\{\nabla\times\}\mathbf{H}=j\omega\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{Je}\delta_{S_e}, \tag{1.47}$$

or

$$\{\nabla\times\}\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{H}+\mathbf{n}_1\times\left(\mathbf{H}^1-\mathbf{H}^2\right)\delta_{S_{12}}+\left(\mathbf{n}_e\times\mathbf{H}\right)\delta_{\Gamma_{cep}}$$
$$+\mathbf{n}_{(+)}\times\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)\delta_{S_e}+\mathbf{n}_{(+)}\times\left(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)}\right)\delta_{S_m}+(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\delta_{\Gamma}, \tag{1.48}$$

où l'opération entre accolades est prise au sens des distributions, i.e., tient compte des sauts éventuels du champ **H** aux interfaces. La notation δ_S signifie que les quantités en facteur sont localisées sur la surface S.

En égalisant ces expressions de $\{\nabla\times\}\mathbf{H}$, on obtient les relations suivantes:

$$\nabla\times\mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}, \tag{1.49a}$$

$$\mathbf{n}_1\times(\mathbf{H}^1-\mathbf{H}^2)\delta_{S_{12}} = \mathbf{0}, \tag{1.49b}$$

$$(\mathbf{n}_e\times\mathbf{H})\delta_{\Gamma_{cep}} = \mathbf{Je}^{(i)}\delta_{\Gamma_{cep}}, \tag{1.49c}$$

$$\mathbf{n}_{(+)}\times(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)})\delta_{S_e} = \mathbf{Je}\delta_{S_e}, \tag{1.49d}$$

$$\mathbf{n}_{(+)}\times(\mathbf{H}^{(+)}-\mathbf{H}^{(-)})\delta_{S_m} = \mathbf{0}, \tag{1.49e}$$

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{H})\delta_\Gamma = \mathbf{Je}^{(i)}\delta_\Gamma. \tag{1.49f}$$

Les courants $\mathbf{Je}^{(i)}$ étant induits, les équations (1.49c) et (1.49f) sont des identités qui définissent $\mathbf{Je}^{(i)}$ et ne sont pas des conditions aux limites pour la partie tangentielle du champ **H**, de ce fait elles sont ignorées dans l'écriture de (1.47). Puisque **H** est à composantes tangentielles continues au passage des interfaces, du fait de son appartenance à l'espace H(rot), les relations (1.49b) et (1.49e) sont satisfaites. Par conséquent, pour que l'équation (1.42a) soit satisfaite au sens des distribution, i.e., qu'elle contienne les conditions d'interfaces tangentielles sur le champ **H**, il suffit de définir le champ **E** par (1.49a) et d'imposer à **H** de remplir (1.49d).

L'intégration de (1.44) par sous domaines [22], nous amène à définir les intégrales

$$R_1 = \int_{\Omega_1}(\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}-k_0^2\mu_r\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}d\Omega,$$
$$R_2 = \int_{\Omega_2}(\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}-k_0^2\mu_r\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}d\Omega.$$

On a aussitôt d'après (1.45),

$$R_2 = \int_{\Omega_2}(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega - k_0^2\int_{\Omega_2}\mu_r\mathbf{H}\cdot\mathbf{W}d\Omega + \oint_{S_{12}}(\mathbf{n}_2\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}dS. \tag{1.50}$$

Les champs **E** et **H** pouvant présenter des discontinuités à la traversée des surfaces de courants, il faut effectuer l'intégration sur Ω_1 avec "précaution". La surface S_e par exemple, support de courants électriques, sépare un sous-domaine Λ de Ω_1 en deux autres sous-domaines $\Lambda_{(+)}$ et $\Lambda_{(-)}$. On a la relation vectorielle:

$$\int_{\Lambda}(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{W}d\Omega=\int_{\Lambda}\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{W})d\Omega+\int_{\Lambda}\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega,$$

d'autre part le théorème de la divergence donne successivement

$$\int_{\Lambda_{(+)}}\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{W})d\Omega=\int_{\partial\Lambda_{(+)}/S_e}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}_{(+)}dS+\int_{S_e}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}_{(+)}dS,$$
$$\int_{\Lambda_{(-)}}\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{W})d\Omega=\int_{\partial\Lambda_{(-)}/S_e}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}_{(-)}dS+\int_{S_e}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}_{(-)}dS.$$

On en déduit, en faisant la somme des deux expressions ci-dessus, que

$$\int_{\Lambda}\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{W})d\Omega=\oint_{\partial\Lambda}(\mathbf{A}\times\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}dS+\int_{S_e}\left\{\mathbf{n}_{(+)}\times\left(\mathbf{A}^{(+)}-\mathbf{A}^{(-)}\right)\right\}\cdot\mathbf{W}dS. \tag{1.51}$$

Ce qui, avec $\mathbf{A}=\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}$, conduit à

$$\begin{aligned}R_1=&\int_{\Omega_1}\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega-k_0^2\int_{\Omega_1}\mu_r\mathbf{H}\cdot\mathbf{W}d\Omega+\oint_{S_{12}}\left(\mathbf{n}_1\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{W}dS\\&+\int_{S_e}\left\{\mathbf{n}_{(+)}\times\left[\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)^{(+)}-\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)^{(-)}\right]\right\}\cdot\mathbf{W}dS\\&+\int_{S_m}\left\{\mathbf{n}_{(+)}\times\left[\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)^{(+)}-\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)^{(-)}\right]\right\}\cdot\mathbf{W}dS\\&+\oint_{\Gamma_{cep}}\left(\mathbf{n}_e\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{W}dS+\oint_{\Gamma}\left(\mathbf{n}\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{W}dS\end{aligned} \tag{1.52}$$

En identifiant la somme des intégrales R_1 et R_2 au second membre de (1.46), on obtient que la formulation (1.46) vérifie implicitement (en substituant $\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}$ par $j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}$ grâce à (1.49a)) les conditions aux limites

$$\mathbf{n}_1\times\left(\mathbf{E}^1-\mathbf{E}^2\right)\delta_{S_{12}}=\mathbf{0} \tag{1.53a}$$

$$\left(\mathbf{n}_e\times\mathbf{E}\right)\delta_{\Gamma_{cep}}=\mathbf{0} \tag{1.53b}$$

$$\mathbf{n}^{(+)}\times\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)\delta_{S_m}=-\mathbf{Jm}\delta_{S_m} \tag{1.53c}$$

$$\mathbf{n}^{(+)}\times\left(\mathbf{E}^{(+)}-\mathbf{E}^{(-)}\right)\delta_{S_e}=\mathbf{0} \tag{1.53d}$$

$$(\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H})\delta_{\Gamma}=\boldsymbol{T}(\mathbf{H})\delta_{\Gamma} \tag{1.53e}$$

Ainsi, les conditions portant sur les composantes tangentielles du champ **E** sont naturellement remplies par la formulation faible (1.46). Ce qui n'est pas étonnant car ces conditions sont contenues dans la deuxième équation du problème (PCH) au sens des distributions (voir remarque 1.2): on arrive donc aux mêmes conclusions en écrivant cette équation au sens des distributions [25]. La condition de rayonnement, imposée à distance finie, traduite par la relation (1.53e) est faiblement vérifiée par la formulation (1.46).

Le problème faible, (PVH), consiste alors à

trouver **H** dans $H(\text{rot})$,

H vérifiant (1.49d),

H solution de (1.46).

La continuité tangentielle du champ **H** étant assurée par l'appartenance de **H** à l'espace $H(\text{rot})$ et celle du champ **E** étant établie par la formulation variationnelle, les composantes normales E_n et H_n de ces champs sont discontinues de sorte que les continuités normales des vecteurs induction $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$ soient satisfaites (voir remarque 1.2).

Il est possible, à l'aide de la théorie des distributions et de la théorie des espaces de Sobolev, de montrer que la formulation faible du problème admet une solution unique dans l'espace $H(\text{rot})$ dès lors que l'opérateur de bord $\boldsymbol{T}$ correspond bien à la condition de Silver-Müller à distance finie [10-11].

De la même façon, on montre que le problème faible formulé en **E** (PVE) peut s'écrire:

trouver **E** dans $H(\text{rot})$,

E vérifiant (1.53b),

E vérifiant (1.53c),

E solution de

$$\int_\Omega \left(\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega - k_0^2\int_\Omega \varepsilon_r\mathbf{E}\cdot\mathbf{W}d\Omega + \oint_\Gamma \mu_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{E})\cdot\mathbf{W}d\Gamma = -j\omega\mu_0\int_{S_e}\mathbf{Je}\cdot\mathbf{W}dS,$$

$$\forall\, \mathbf{W} \in H(\text{rot}). \qquad (1.54)$$

Il est aussi possible de montrer que **E** solution de (PVE) est solution au sens faible de l'équation (1.43b) et, en tant que tel, sa divergence est nulle. La dualité des champs **E** et **H** permet d'aboutir à des remarques duales de celles évoquées dans la formulation en champ **H** concernant les conditions faiblement remplies par (1.54) et celles fortement satisfaites par le champ **E**.

La discrétisation d'une formulation comme (1.46) ou (1.54) par la méthode des éléments finis impose aux éléments finis de vérifier certaines propriétés. Les éléments finis doivent être vectoriels et capables d'approcher l'espace $H(\text{rot})$ ou encore de générer un sous-espace de $H(\text{rot})$ de dimension finie. La formulation faible obtenue en résolvant (1.46) (resp. (1.54))

pour toute fonction poids **W** appartenant à ce sous-espace de H(rot) est dite approchée. Cette formulation faible approchée est à l'image de la formulation faible (1.46) (resp. 1.54) et, par conséquent, elle possède les mêmes vertus que cette dernière concernant la prise en compte des conditions d'interfaces sur les champs **E** et **H**, bien entendu selon le degré d'approximation de l'espace H(rot). Les éléments finis classiques (nodaux) sont scalaires et sont inadaptés pour générer un sous-espace de H(rot). Il faut donc faire appel à des éléments finis non-standards appelés *éléments mixtes de* H(rot); ils seront présentés au chapitre 3. La matrice obtenue en discrétisant les intégrales volumiques de (1.46) (resp. 1.54) est appelée "matrice éléments finis" et elle est symétrique lorsque les éléments finis employés sont vectoriels (chapitre 3). Pour obtenir une matrice globale symétrique il faut que l'opérateur $\boldsymbol{T}$ soit tel que la discrétisation de l'intégrale de frontière conduise à une matrice de bord symétrique. L'opérateur $\boldsymbol{T}$ fait l'objet du chapitre 2.

1.3.3. Cas particulier d'une configuration 2D

La géométrie d'un problème électromagnétique en trois dimensions (3D) peut être réduite en deux dimensions (2D) en ne considérant qu'une section de la structure, ou dans le cas d'une symétrie de révolution. Un exemple est celui des guides d'ondes où la géométrie du guide ainsi que les propriétés électromagnétiques des matériaux le remplissant sont supposées être uniformes le long d'un axe (l'axe Oz dans Figure 1.7). Un autre exemple de configuration 2D est le cas de la diffraction, par un cylindre infiniment long, d'une onde plane à incidence normale par rapport à l'axe de révolution Oz, les propriétés électromagnétiques du cylindre étant supposées uniformes le long de l'axe Oz.

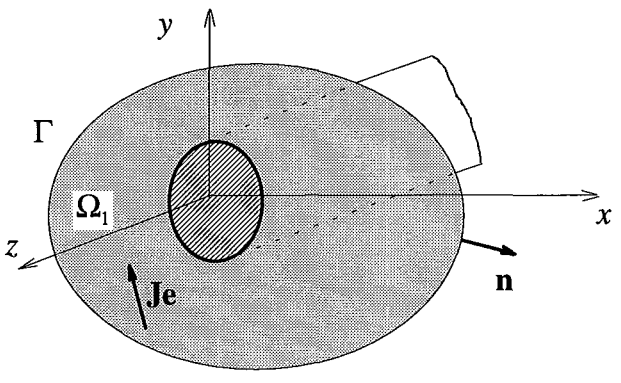


Figure 1.7: Configuration 2D du problème.

Dans cette configuration la formulation du problème se simplifie lorsque l'on prend comme champ principal le champ orienté selon l'axe Oz, i.e., le champ qui est normal à la section étudiée. Pour une formulation en champ **H** (le champ **H** est normal à la section étudiée):

$$\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z \quad (1.55); \qquad \mathbf{Jm} = Jm_z \mathbf{e}_z \quad (1.56)$$

Avec ces relations, le problème (PCH) devient:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{Je} \qquad \text{dans } \Omega / \Omega_{cep}, \qquad (1.57a)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla H_z + k_0^2 \mu_r H_z = j\omega\varepsilon_0 Jm_z \qquad \text{dans } \Omega / \Omega_{cep}, \qquad (1.57b)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_{cep}, \qquad (1.57c)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial n} = T(H_z) \qquad \text{sur } \Gamma, \qquad (1.57d)$$

et les conditions d'interfaces.

La formulation faible s'appuie sur l'espace des solutions admissibles suivant:

$$H(\text{grad}) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega);\ \nabla\varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\},$$

où $L^2(\Omega) = \left\{ \varphi \text{ de } \Omega \to C\ ; \int_\Omega \varphi^2 d\Omega < \infty \right\}$ est l'espace des fonctions scalaires à valeurs complexes de carré sommable. Les fonctions de l'espace $H(\text{grad})$ sont continues aux interfaces sur Ω. On obtient la formulation:

$$\int_\Omega \varepsilon_r^{-1} \nabla H_z \cdot \nabla W_z \, d\Omega + k_0^2 \int_\Omega \mu_r H_z W_z \, d\Omega + \oint_\Gamma \varepsilon_r^{-1} T(H_z) W_z d\Gamma = j\omega\varepsilon_0 \int_{S_e} Jm_z W_z dS,$$

$$\forall\ W_z \in H(\text{grad}). \qquad (1.58)$$

Dans le cas d'une formulation en champ **E** (champ **E** orienté selon l'axe Oz),

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z \quad (1.59); \qquad \mathbf{Je} = Je_z \mathbf{e}_z \quad (1.60)$$

on obtient la formulation faible duale de (1.58):

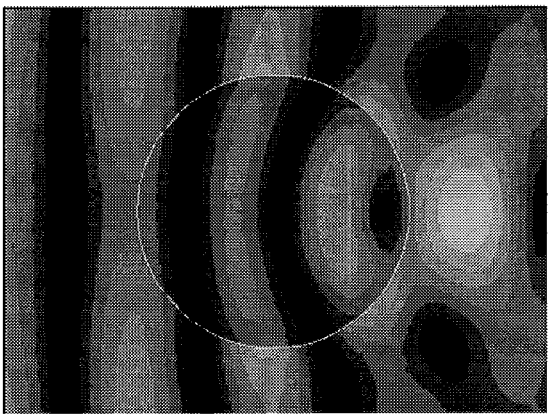
$$\int_\Omega \mu_r^{-1} \nabla E_z \cdot \nabla W_z \, d\Omega + k_0^2 \int_\Omega \varepsilon_r E_z W_z \, d\Omega + \oint_\Gamma \mu_r^{-1} T(E_z) W_z d\Gamma = j\omega\mu_0 \int_{S_e} Je_z W_z dS,$$

$$\forall\ W_z \in H(\text{grad}). \qquad (1.61)$$

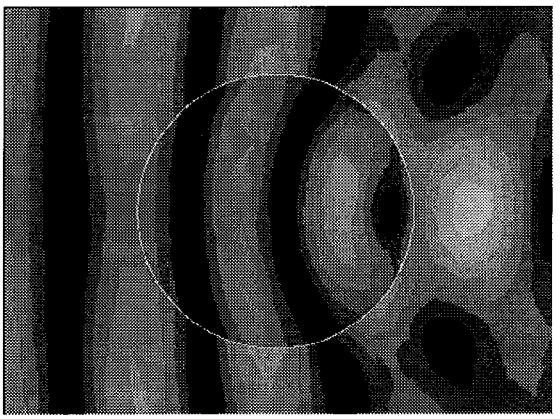
La condition de mur électrique (1.53b) à imposer au champ **E** devient $E_z = 0$.

La formulation scalaire (1.58) (resp. (1.61)), avec comme inconnue la composante H_z (resp. E_z), est généralement adoptée pour résoudre les problèmes en deux dimensions [27,28]. Elle est suffisante pour résoudre la plupart des problèmes qui nous intéressent. Néanmoins, dans cette procédure, le champ transverse, i.e., contenu dans la section étudiée, est obtenu par

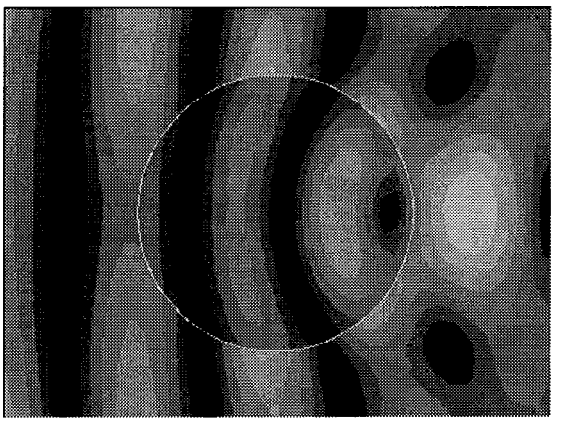
dérivation numérique. Cette dérivation introduit des erreurs dans le calcul du champ tranverse (Figures 1.9 et 1.10). De plus, les discontinuités possibles du champ transverse (Figure 1.8) tout comme son comportement au voisinage des coins (Figures 1.9 et 1.10) sont mal pris en compte dans une formulation scalaire. Aussi la formulation vectorielle duale de celle scalaire se présente comme une alternative lorsque l'on désire évaluer le champ transverse avec une bonne précision [29].



(a) solution analytique

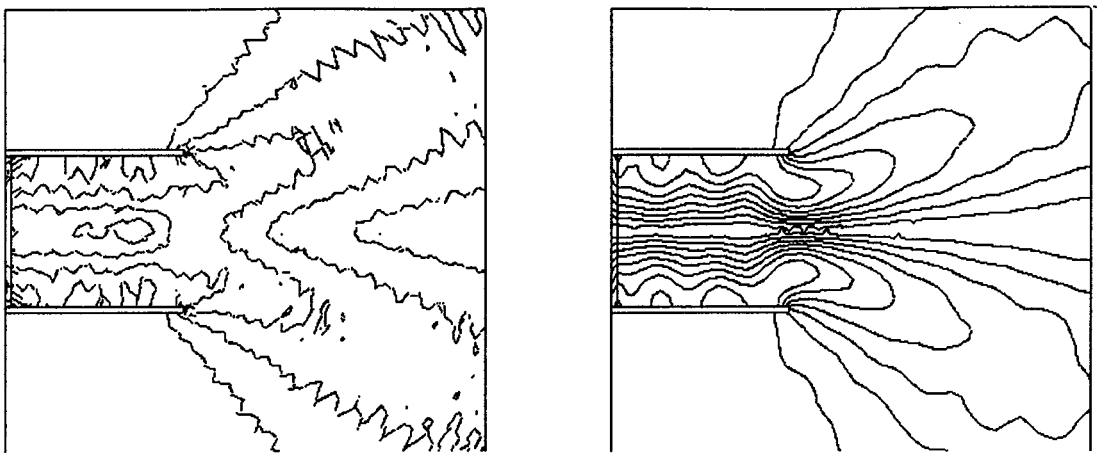


(b) formulation scalaire



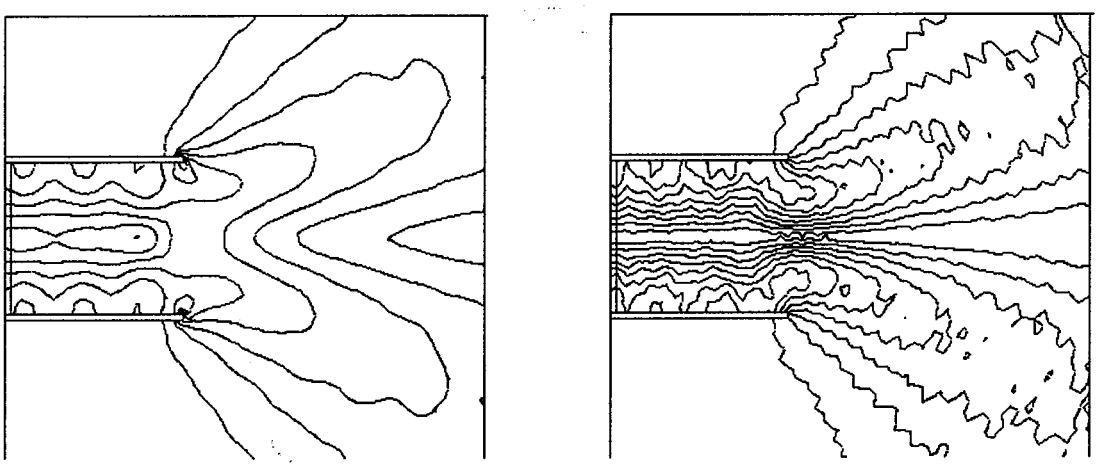
(c) formulation vectorielle

Figure 1.8: Champ électrique au voisinage d'un cylindre diélectrique $(\varepsilon_r = 2,\ \mu_r = 0)$ absorbant une onde plane.



(a) module du champ dual ***E*** *(b) module du champ principal* ***H***

Figure 1.9: Effet de la dérivation numérique: formulation scalaire en champ **H**.



(a) module du champ principal ***E*** *(b) module du champ dual* ***H***

Figure 1.10: Effet de la dérivation numérique: formulation vectorielle en champ **E**.

Cet effet de la dérivation numérique sur le champ proche est illustré par les Figures 1.8, 1.9 et 1.10. Les cas tests sont ceux de la diffraction d'une onde plane par un cylindre infiniment long non conducteur (chapitre 4) et du rayonnement d'un guide d'ondes ouvert (chapitre 5). Les lobes sont de meilleure qualité dans la Figure 1.8 (c) comparée ceux de la Figure 1.8 (b). Le tracé des isovaleurs du champ principal est net et lisse (Figures 1.9 (b) et 1.10 (a)) alors quel celui du champ dual est imprécis et en dents de scie (oscillations due à la dérivation numérique) dans les Figures 1.9 (a) et 1.10 (b).

1.4. CONCLUSION

L'équation vectorielle des ondes écrite en champ **E** ou en champ **H** a été choisie parce que ses solutions sont à divergence nulle. La formulation par la méthode de Galerkin de l'équation rot-rot en **H** (resp. **E**) vérifie naturellement (et au sens faible) les conditions d'interfaces sur le champ dual **E** (resp. **H**). Avec le choix de la fonction test dans l'espace H(rot), elle permet de satisfaire implicitement (et au sens fort) les conditions de continuité tangentielle à la traversée de milieux différents portant sur le champ principal **H** (resp. **E**). De plus l'imposition du saut de **H** (resp. **E**) à la surface support de courant, associée au choix de **H** (resp. **E**) dans H(rot), permet de vérifier fortement l'équation de Maxwell définissant le champ **E** (resp. **H**). Néanmoins, pour la formulation en champ **E**, la condition de mur électrique doit être forcée à la surface d'un conducteur électrique parfait. Les conditions de continuité normale portant sur **E** et **H** sont automatiquement remplies comme conséquences de celles tangentielles. Il s'en suit que la formulation de Galerkin de l'équation rot-rot avec l'espace H(rot) comme espace des solutions admissibles, que nous avons adoptée, ne génère pas de solutions parasites dues au non-respect des conditions de divergence nulle ou à la non-satisfaction des conditions d'interfaces. L'opérateur de bord $\boldsymbol{T}$ doit être équivalent à la condition de Sommerfeld ou de Silver-Müller à distance finie pour assurer l'unicité de la solution. Il sera examiné au chapitre suivant. Notre formulation s'adapte sans trop de difficultés au cas des milieux anisotropes en remplaçant les permittivité et perméabilité par des tenseurs de permittivité et de perméabilité respectivement.

CHAPITRE 2

CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES

2.1. INTRODUCTION

La modélisation d'un problème électromagnétique en milieu ouvert par une méthode finie, i.e. utilisant une discrétisation volumique de la région d'analyse, nécessite la troncature du domaine infini par une frontière fictive. Pour respecter l'aspect non borné du problème, il est essentiel d'imposer sur cette frontière des conditions aux limites qui prennent en compte le domaine extérieur. Ces conditions aux limites sont dites absorbantes (**C.L.A.**) car elles minimisent, quand elles ne sont pas exactes, les réflections non physiques sur la frontière de sorte que celle-ci apparaisse quasi transparente aux ondes sortant du domaine et se propageant vers l'infini. Dans leur forme asymptotique, où le bord artificiel est rejeté vers l'infini, les conditions aux limites devront s'identifier à la condition de radiation de Sommerfeld ou de Silver-Müller (voir chapitre 1). Ces conditions sont aussi dénommées conditions transparentes, conditions non réfléchissantes, conditions de rayonnement, conditions d'espace libre ou conditions ouvertes.

Ces conditions aux limites généralement présentées sous forme d'opérateurs intégral et différentiel sur le bord ont été récemment recensées dans la littérature [30]. Ces opérateurs, que nous avons désignés par $\boldsymbol{T}$ au chapitre 1, peuvent se regrouper en deux catégories : locaux et non locaux.

Dans leur principe, les opérateurs non locaux permettent de placer la frontière aussi près que possible de la structure à étudier. Cependant, ils ont l'inconvénient de détruire et le caractère creux, et la symétrie, des matrices générées par les méthodes finies [30]: la matrice de bord est pleine et non-symétrique.

A l'opposé, les conditions aux limites locales se présentent sous la forme d'opérateurs différentiels qui préservent le caractère lacunaire de la matrice résultant des méthodes finies. Toutefois ces opérateurs locaux sont construits comme des approximations de la condition exacte qui, quant à elle, est globale (non locale), et, par conséquent, ils ne sont pas totalement

absorbants par nature. Il s'en suit qu'une CLA locale introduit une erreur dans la solution du problème, due essentiellement aux réflections parasites sur la frontière des ondes sortantes.

Il existe essentiellement deux types de CLA locales qui sont tous deux basés sur une représentation vraie du champ. L'un utilise un développement asymptotique (somme discrète) d'une onde divergente et construit ensuite des opérateurs différentiels sensés absorber ou annihiler des termes ou modes de ce développement. Il a été introduit par Bayliss et Turkel [31-32]; dans la suite il sera dit du *type BT*. L'autre, initié par Engquist et Madja [33-34], utilise la transformée de Fourier pour écrire toute onde comme un paquet (somme continue) d'ondes planes et construit un opérateur pseudo-différentiel qui annihile ces ondes planes et donc l'onde. Les approximations de cet opérateur pseudo-différentiel sont obtenues sous la forme d'opérateurs différentiels qui absorbent certaines de ces ondes planes. Dans la suite il sera dit du *type EM*.

Nous commençons par rappeler brièvement la façon de dériver les CLA du type BT en deux dimensions pour l'onde scalaire. Ensuite nous présentons une version pour le cas de l'onde vectorielle bidimensionelle et nous montrons comment "symétriser" cette CLA vectorielle afin de conserver la symétrie de la matrice originelle, i.e., issue de la méthode des éléments finis. Puis, nous revoyons tout aussi brièvement la dérivation des CLA du type EM pour l'onde scalaire bidimensionelle et nous en proposons une version vectorielle. Nous faisons une extension au cas tridimensionnel de l'onde scalaire puis de l'onde vectorielle. Pour finir, nous effectuons le couplage avec la formulation vectorielle par éléments finis mixtes.

2.2. CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DU TYPE BT

2.2.1. CLA du type BT en 2D

a) CLA scalaire du type BT en 2D

Nous revoyons ici la dérivation des CLA du type BT dans le cas bidimensionel d'une onde scalaire sortant du domaine intérieur et obéissant à l'équation d'Helmholtz en coordonnées cylindriques (r, θ)

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{2.1}$$

Une solution rayonnante de (2.1) peut se développer asymptotiquement en une série de puissances inverses de r de la forme [35]:

$$\psi(r,\theta)=\frac{e^{-jkr}}{r^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(\theta)}{r^n} \tag{2.2}$$

On introduit alors l'opérateur L ,

$$\mathsf{L} = (\frac{\partial}{\partial r} + jk), \tag{2.3a}$$

qui, appliqué à (2.2), donne l'expression:

$$\mathsf{L}\psi = -\frac{e^{-jkr}}{r^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\frac{a_n}{r^n}+\frac{na_n}{r^n}) \tag{2.3b}$$

Quand r tend vers ∞, seul le premier terme, celui de rang n = 0, est retenu dans la série située au second membre de (2.3b) et, par conséquent, cette somme est équivalente au terme $r^{-3/2}$, i.e. est un $O(r^{-3/2})$. Nous obtenons donc de (2.3b)

$$\mathsf{L}\psi = O(r^{-3/2}). \tag{2.4}$$

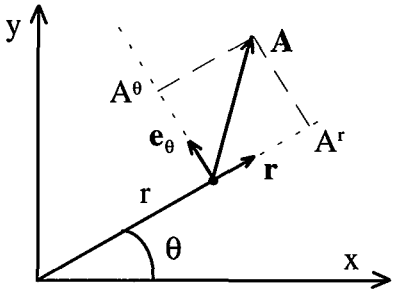


Figure 2.1: Champ de vecteurs en coordonnées cylindriques.

De (2.4), il est clair que si nous négligeons les termes de l'ordre de $O(r^{-3/2})$ pour une distance r finie, nous avons $\mathsf{L}\psi = 0$; ce qui correspond précisément à la condition de radiation de Sommerfeld pour ψ en deux dimensions (pour r infini).

C'est pourquoi l'idée de l'opérateur d'annihilation est souvent considérée comme proposée pour la première fois par Sommerfeld [36], dans la mesure où cette condition de champ lointain annule le premier mode de l'expansion (2.2). Bayliss et Turkel [31] ont étendu cette approche pour dériver des opérateurs d 'annihilation d'ordre m, B_m, qui peuvent éliminer les m premiers termes de la somme (2.2) pour des valeurs finies de r avec une précision théorique de $O(r^{-2m-1/2})$. Par exemple, en partant de (2.3b), on a

$$B_1\,\psi = \left(L + \frac{1}{2r}\right)\psi = -\frac{e^{-jkr}}{r^{5/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n}{r^{n-1}}, \tag{2.5a}$$

$$B_1\,\psi = O(r^{-5/2}). \tag{2.5b}$$

On applique l'opérateur L à la fonction $\varphi = B_1\,\psi$ donnée par (2.5a), et on montre que

$$\left(L + \frac{5}{2r}\right)\varphi = O(r^{-9/2}), \tag{2.6}$$

nous dérivons alors l'opérateur, B_2, suivant

$$B_2 = \left(L + \frac{5}{2r}\right)B_1, \tag{2.7a}$$

$$B_2\,\psi = O(r^{-9/2}). \tag{2.7b}$$

Cette procédure peut se poursuivre à l'aide de la formule de récurrence suivante

$$B_p = \left(L + \frac{4p-3}{2r}\right)B_{p-1} \quad , p \geq 2,$$

pour aboutir à

$$B_m = \prod_{p=1}^{m}\left(L + \frac{4p-3}{2r}\right), \tag{2.8a}$$

$$B_m\,\psi = O(r^{-2m-1/2}). \tag{2.8b}$$

Ces opérateurs couplés à l'équation scalaire des ondes conduisent à des problèmes bien posés [31]. Il apparaît, de (2.8), que pour minimiser l'erreur dans la solution due à un opérateur B_m, il faut soit éloigner la frontière de la structure soit utiliser des opérateurs d'ordre supérieur. Faire croître r (la distance dispositif microonde-frontière) revient à mailler un domaine plus étendu et donc à augmenter la taille de la matrice associée. Aussi il est préférable de ramener la frontière le plus près possible de la structure. Toutefois, même d'ordre supérieur, ces opérateurs sont de nature asymptotique et, en conséquence, pourraient ne pas assurer nécessairement une amélioration continue de la solution quand la frontière extérieure est rapprochée des objets [37]. En outre, l'implantation numérique des opérateurs d'ordre élevé, $m \geq 2$, implique des dérivations numériques d'ordre inférieur ou égal à m par rapport à r. Cela, aussitôt, conduit à l'emploi des éléments finis de degré m ou plus et, donc, à une matrice de moins en moins creuse.

Comme il sera montré plus loin, les opérateurs d'ordre $m \leq 2$ sont souvent suffisants pour permettre une délimitation du domaine assez près de la structure, et constituent un bon

compromis entre maniabilité et précision. Afin de faciliter le couplage avec la formulation par la méthode des éléments finis, l'opérateur B_2 est réécrit en remplaçant les dérivées secondes radiales par les dérivées secondes angulaires. Nous commençons par développer l'expression de B_2 donnée par (2.7a)

$$B_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(2jk + \frac{3}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-k^2 + \frac{3jk}{r} + \frac{3}{4r^2}\right), \tag{2.9}$$

puis en utilisant (2.1) en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - k^2 , \tag{2.10}$$

pour substituer les dérivées secondes radiales dans (2.9) et, après division par $\left(2jk + \frac{2}{r}\right)$ nous obtenons

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial r} - \left(\alpha + \beta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right), \tag{2.11}$$

avec: $$\alpha(r) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1}\left(-jk - \frac{3}{2r} + \frac{3j}{8kr^2}\right), \tag{2.12a}$$

$$\beta(r) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1}\left(\frac{-j}{2kr^2}\right). \tag{2.12b}$$

On peut simplifier l'écriture des coefficients (2.12) sans détériorer la précision de l'approximation (2.7). L'opérateur B_2 étant obtenu à un $O(r^{-9/2})$ près, de (2.11), les coefficients $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ peuvent être développés à un $O(r^{-4})$ près comme suit.

Le développement limité

$$\left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1} = 1 + \frac{j}{kr} - \frac{1}{k^2r^2} - \frac{j}{k^3r^3} + O(r^{-4}), \tag{2.13}$$

conduit aux développements suivants

$$\alpha(r) = -jk - \frac{1}{2r} - \frac{j}{8kr^2} + \frac{1}{8k^2r^3} + O(r^{-4}), \tag{2.14a}$$

$$\beta(r) = -\frac{j}{2kr^2} + \frac{1}{2k^2r^3} + O(r^{-4}). \tag{2.14b}$$

On retrouve, avec ces coefficients α et β simplifiés, les CLA du type BT obtenues par Mittra [37]. Notons que l'on retrouve l'opérateur B_1 écrit sous la forme (2.11) en développant α et β à $O(r^{-2})$ près.

La CLA scalaire de Bayliss-Turkel du second ordre (2.11), n'est pas directement compatible avec la formulation vectorielle (1.46) (resp. (1.54)) parce que l'opérateur B_2 n'effectue pas de lien entre les composantes du champ **H** (resp. **E**); lien qui est traduit par l'opération "rotationnel" dans la relation (1.42d) (resp. 1.43d). D'où la nécessité de dériver des CLA vectorielles du type BT. Cela a été fait dans [38-40] pour une onde vectorielle en trois dimensions mais pas, à notre connaissance, en deux dimensions.

b) CLA vectorielle du type BT en 2D

Soit **A** une onde vectorielle sortante obéissant à l'équation des ondes en deux dimensions

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}-k^2\mathbf{A}=\mathbf{0}. \tag{2.15}$$

Le vecteur **A** obéit par conséquent à la fois à l'équation vectorielle d'Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=\mathbf{0} \tag{2.16}$$

et à la condition de divergence nulle

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0. \tag{2.17}$$

D'après (2.16) chaque composante cartésienne de **A** vérifie l'équation scalaire d'Helmholtz (2.1) et, d'après Wilcox [8], **A** peut s'écrire asymptotiquement

$$\mathbf{A}(r,\theta)=\frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}_n(\theta)}{r^n} \tag{2.18}$$

On peut suivre l'approche utilisée par Bayliss et Turkel et obtenir ainsi des CLA pour l'onde vectorielle comme cela a été fait dans [39-40]. Mais il est plus immédiat de partir des résultats obtenus dans le cas scalaire au moins pour les opérateurs d'ordre $m \leq 2$. En effet, chaque composante cartésienne de **A** est une fonction d'onde sortante ψ vérifiant $B_2\psi=0$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\alpha\psi+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{2.19}$$

On en déduit que le vecteur **A** vérifie,

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial r}=\alpha\mathbf{A}+\beta\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\theta^2}, \tag{2.20}$$

ainsi que la condition de divergence nulle $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$.

De (2.20), on tire que la composante de **A** selon le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\theta$ vérifie

$$\frac{\partial A^\theta}{\partial r}=\alpha\,A^\theta+\beta\,\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\theta^2}\cdot\mathbf{e}_\theta. \tag{2.21}$$

Soit, en utilisant les relations classiques entre les vecteurs de base **r** et $\mathbf{e}_\theta$ et leurs dérivées par rapport à l'angle θ,

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial r} = (\alpha - \beta)\mathbf{A}_t + \beta\frac{\partial^2 \mathbf{A}_t}{\partial \theta^2} + 2r\beta\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}), \tag{2.22}$$

où $\mathbf{A}_t = A^\theta\,\mathbf{e}_\theta$ et $\nabla_t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$.

D'autre part, en coordonnées cylindriques, le produit vectoriel de **r** et du rotationnel de **A** peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A} = -\frac{1}{r}\mathbf{A}_t - \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial r} + \nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}), \tag{2.23}$$

et en remplaçant $\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial r}$ dans (2.23) par son expression donnée en (2.22), on obtient:

$$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}_2(\mathbf{A}) + O\left(r^{-9/2}\right), \tag{2.24a}$$

et $$\mathbf{B}_2(\mathbf{A}) = \alpha'\mathbf{A}_t + \beta'\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + \gamma\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}), \tag{2.24b}$$

avec $$\alpha'(r) = -(\alpha(r) - \beta(r) + \frac{1}{r}) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1}\left(jk + \frac{1}{2r} + \frac{j}{8kr^2}\right), \tag{2.25a}$$

$$\beta'(r) = -r^2\beta(r) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1}\left(\frac{j}{2k}\right), \tag{2.25b}$$

$$\gamma(r) = (1 - 2r\beta(r)) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)^{-1}. \tag{2.25c}$$

L'opérateur $\mathbf{B}_2$ étant obtenu à un $O(r^{-9/2})$ près, de (2.24), (2.25) et (2.14), on tire les développements:

$$\alpha'(r) = jk - \frac{1}{2r} - \frac{3j}{8kr^2} + \frac{3}{8k^2r^3} + O(r^{-4}), \tag{2.26a}$$

$$\beta'(r) = \frac{j}{2k} - \frac{1}{2k^2r} + O(r^{-2}), \tag{2.26b}$$

$$\gamma(r) = 1 + \frac{j}{kr} - \frac{1}{k^2r^2} + O(r^{-3}). \tag{2.26c}$$

La condition (2.24) apparaît donc comme une reécriture de la condition (2.22) portant sur la partie tangentielle du champ, laquelle est aussi une reécriture de la CLA scalaire (2.19); par conséquent elle hérite, lorsqu'elle est couplée à l'équation vectorielle des ondes, du caractère stable de la condition (2.19).

Lorsque l'on incorpore la condition (2.24) dans la formulation faible (1.46) ou (1.54), la discrétisation de cette dernière conduit alors à un système matriciel non-symétrique. De ce fait, la condition (2.24) est une ***CLA non-symétrique***. La dissymétrie provient de la dérivée première de la composante normale contenue dans le dernier terme de (2.24). Ce problème ne se pose pas quand on utilise la formulation scalaire (1.58) couplée à la CLA scalaire (2.11), car dans cette situation ce terme est nul [42]. Cependant il est possible de "symétriser" la CLA vectorielle non symétrique c'est à dire de modifier son expression afin qu'elle préserve la symétrie de la matrice globale résultant de la MEF. La symétrisation de la CLA est importante pour deux raisons. La première est que nous avons alors un gain de place mémoire dans le stockage des termes non nuls de la matrice. On peut augmenter ce gain en stockant la matrice en termes de nombres réels car la matrice éléments finis est réelle tandis que la matrice de frontière est imaginaire pure. La deuxième raison est que la plupart des méthodes itératives de résolution de grands systèmes linéaires creux sont plus efficaces lorsque le système est symétrique. De plus, leur algorithme se simplifie souvent pour une matrice symétrique. Dans la section 2.5 nous illustrons ces avantages d'une CLA symétrique sur un cas de rayonnement d'un dipôle.

c) Symétrisation de la CLA du type BT en 2D

Symétrisation par la composante tangentielle

La technique de symétrisation proposée dans [41] consiste à substituer la dérivée première de la composante radiale de **A**, dans (2.24b), par des dérivées (tangentielles), d'ordre pair inférieur ou égal à deux, de la composante tangentielle de **A**. Elle a été appliquée dans [41] pour symétriser la CLA du type BT en dimension trois, établie dans [40]. Nous utilisons dans un premier temps cette approche, comme démontré ci-après, pour symétriser les CLA vectorielles du type BT à l'ordre un et à l'ordre deux, en dimensions deux. La démarche consiste à dériver une approximation de la composante radiale à partir de la CLA non symétrique et de l'équation vectorielle des ondes. Le produit scalaire de l'équation vectorielle des ondes (2.15) par le vecteur unitaire radial **r**, donne

$$\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}-k^2\mathbf{A})=0$$

La relation vectorielle

$$\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A}) \tag{2.27}$$

combinée à la relation précédente entraîne

$$k^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = -\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A}) \tag{2.28}$$

En couplant (2.28) et (2.24), on a une approximation de la composante radiale de **A**, $A^r = \mathbf{r}\cdot\mathbf{A}$,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{k^2}\nabla\cdot\left\{\alpha'\mathbf{A}_t + \beta'\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + \gamma\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) + O(r^{-9/2})\right\} \tag{2.29}$$

On soumet ensuite (2.29) à l'opérateur ∇_t et, en ne retenant que les termes contenant des dérivées d'ordre deux ou inférieur dans l'expression résultante, on obtient la relation de symétrisation suivante [29]:

$$\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) = -(j/k)\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + O(r^{-7/2}). \tag{2.30}$$

En substituant $\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})$ par son approximation donnée par (2.30) dans la CLA initiale (2.24), on obtient la CLA vectorielle symétrique:

$$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A} = \alpha''\mathbf{A}_t + \beta''\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + O(r^{-7/2}), \tag{2.31}$$

avec $\alpha''(r) = jk - \frac{1}{2r} - \frac{3j}{8kr^2} + O(r^{-3})$, (2.32a)

$$\beta''(r) = -\frac{j}{2k} + O(r^{-1}). \tag{2.32b}$$

Notons que pour la CLA d'ordre un, nous avons la relation de symétrisation suivante:

$$\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{0} + O(r^{-5/2}). \tag{2.33}$$

Cette technique de symétrisation fait passer l'erreur résiduelle, de la CLA vectorielle d'ordre deux du type BT, de $O(r^{-9/2})$ à $O(r^{-7/2})$. Ce qui peut s'interpréter comme un affaiblissement de la CLA vectorielle non symétrique. Nous proposons ici une nouvelle approche de symétrisation, que nous appelons "symétrisation par la composante radiale", qui couplée avec la précédente, que nous nommons "symétrisation par la composante tangentielle", permet de conserver l'erreur résiduelle à $O(r^{-9/2})$.

Symétrisation par la composante radiale

Remarquons que l'approximation de symétrisation (2.30) équivaut à:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} = -(j/k)\nabla\cdot\mathbf{A}_t + O(r^{-5/2}); \tag{2.34}$$

elle s'interprète en définitif comme une approximation de la composante radiale du champ **A**. Or, il est possible de tirer une approximation similaire à partir de la condition aux limites absorbante portant sur la composante radiale du champ. De (2.20), nous montrons que la composante radiale A^r vérifie:

$$\gamma\frac{\partial A^r}{\partial r}=(\alpha+\beta)A^r+\beta\frac{\partial^2 A^r}{\partial\theta^2}+O(r^{-9/2}). \tag{2.35}$$

En utilisant le fait que $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$, nous obtenons une approximation de la composante radiale du champ **A**, A^r, en fonction de sa composante tangentielle $\mathbf{A}_t$:

$$\alpha'\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}=\gamma\nabla\cdot\mathbf{A}_t-\beta'\nabla_t^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})+O(r^{-9/2}), \tag{2.36}$$

où les coefficients α', β' et γ sont développés comme en (2.26).

Si l'on retient dans (2.36) les termes au plus de l'ordre de $r^{-5/2}$, on retrouve exactement l'approximation (2.34) et par conséquent on dérive ainsi la CLA (2.31) sans l'améliorer.

Par ailleurs, la relation (2.29) s'écrit, en ne retenant que les termes au plus de l'ordre de $r^{-5/2}$:

$$-k^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}=\alpha'\nabla\cdot\mathbf{A}_t+\nabla_t^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})+O(r^{-7/2}), \tag{2.37}$$

où le coefficient α' est développé à un $O(r^{-2})$ près.

On élimine le terme contenant les dérivées secondes dans (2.36) et (2.37), on obtient alors:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}=-\frac{j}{k}\left(1+\frac{j}{2kr}\right)\nabla\cdot\mathbf{A}_t+O(r^{-7/2}) \tag{2.38}$$

En substituant (2.38) dans (2.24):

$$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A}=\alpha_3\mathbf{A}_t+\beta_3\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t)+O(r^{-9/2}), \tag{2.39}$$

avec $\alpha_3(r)=\alpha'(r)$, (2.40a)

$$\beta_3(r)=-\frac{j}{2k}+\frac{1}{k^2r}+O(r^{-2}); \tag{2.40b}$$

Nous aboutissons finalement à une CLA symétrique théoriquement aussi précise que celle non-symétrique (2.24). En ce sens, les deux approches de symétrisation sont complémentaires.

Remarque 2.1:

- Dans [8], Wilcox montre que la quantité (rA^r) est une onde scalaire vérifiant l'équation d'Helmholtz. Aussi on peut dériver les approximations de la composante radiale A^r en utilisant directement le fait que (rA^r), en tant que solution de l'équation scalaire d'Helmholtz,

vérifie la CLA scalaire (2.19) dans laquelle les coefficients α et β sont développés à un $O(r^{-3})$ près. On retrouve d'ailleurs ce résultat en faisant apparaître (rA^r) à la place de A^r dans (2.35).

- La dérivation des CLA vectorielles du type BT non-symétriques et symétriques, d'ordre un et d'ordre deux, à partir des CLA scalaires que nous avons exposée peut s'étendre en trois dimensions.

Table 2.1: Récapitulatif des CLA scalaires et vectorielles d'ordre deux du type BT

CLA scalaire du type BT	CLA vectorielle du type BT non-symétrique	CLA vectorielle du type BT symétrique
$\frac{\partial\psi}{\partial r}=B_2(\psi)+O(r^{-9/2})$	$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}_2(\mathbf{A})+O(r^{-9/2})$	$\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}_2(\mathbf{A})+O(r^{-9/2})$
$B_2(\psi)=\alpha\psi+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$	$\mathbf{B}_2(\mathbf{A})=\alpha\mathbf{A}_t+\beta\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t)+\gamma\nabla_t(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})$	$\mathbf{B}_2(\mathbf{A})=\alpha\mathbf{A}_t+\beta\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t)$
$\alpha(r)=-jk-\frac{1}{2r}-\frac{j}{8kr^2}+\frac{1}{8k^2r^3}$ $\beta(r)=-\frac{j}{2kr^2}+\frac{1}{2k^2r^3}$	$\alpha(r)=jk-\frac{1}{2r}-\frac{3j}{8kr^2}+\frac{3}{8k^2r^3}$ $\beta(r)=\frac{j}{2k}-\frac{1}{2k^2r}$ $\gamma(r)=1+\frac{j}{kr}-\frac{1}{k^2r^2}$	$\alpha(r)=jk-\frac{1}{2r}-\frac{3j}{8kr^2}+\frac{3}{8k^2r^3}$ $\beta(r)=-\frac{j}{2k}+\frac{1}{k^2r}$

2.3. CONDITIONS AUX LIMITES ABSORBANTES DU TYPE EM

2.3.1. CLA du type EM en 2D

a) CLA scalaire du type EM en 2D

Nous rappelons ici la dérivation des CLA du type EM [33-34] dans le cas d'une onde scalaire en deux dimensions.

Soit l'équation des ondes en régime temporel et en coordonnées cartésiennes

$$L\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{2.41}$$

Une solution particulière de (2.41) est donnée par

$$\psi(x,y,t) = e^{j\omega t}e^{j(k_x x+k_y y)}, \tag{2.42}$$

une onde plane de fréquence ω, se propageant dans la direction des x négatifs. Pour (ω,k_y) donné, la fonction (2.42) peut s'écrire,

$$\psi(x,y,t) = e^{j\omega t}e^{j((k^2-k_y^2)^{1/2}x+k_y y)}. \tag{2.43}$$

L'opérateur

$$L^-(x,k_y,k)=\frac{\partial}{\partial x}-j\sqrt{(k^2-k_y^2)}, \tag{2.44}$$

annihile toute onde de la forme de ψ donnée par (2.43): $L^-(x,k_y,k)\psi=0$. Cette dernière équation constitue une condition aux limites absorbante pour une telle onde, par exemple, à la frontière $x = 0$.

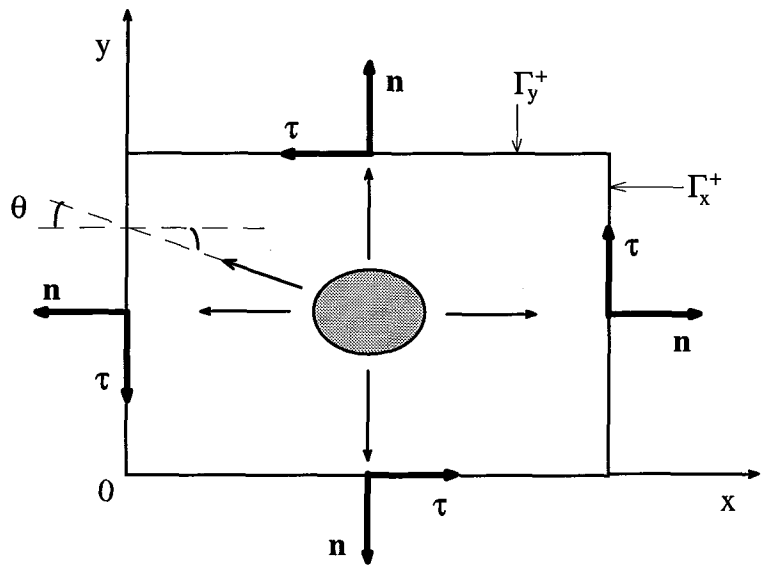


Figure 2.2: Définition d'un domaine rectangulaire en 2D.

Une onde obéissant à (2.41) et se propageant dans la direction des x négatifs peut s'écrire comme une double somme continue, sur k (somme sur les fréquences) et sur k_y (somme sur les angles d'incidence), d'ondes planes de la forme (2.43) parametrées par (k, k_y). Engquist et Majda ont montré, en utilisant la transformation de Fourier puis la théorie des opérateurs pseudo-différentiels [33], qu'une telle onde est annulée par l'opérateur

$$L^-(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}} \tag{2.45}$$

On en déduit une factorisation de l'opérateur L

$$L = L^{+}(x,y,t)L^{-}(x,y,t), \tag{2.46}$$

l'opérateur $L^{+}(x,y,t)$ effectue la même fonction que $L^{-}(x,y,t)$ pour les ondes se propageant dans la direction des x positifs et est défini comme $L^{-}(x,y,t)$ mais avec un signe (+) devant la racine carrée dans (2.45).

De la même façon, on définit une factorisation suivant l'axe Oy

$$L = L^{+}(y,x,t)L^{-}(y,x,t) \text{ avec } L^{\pm}(y,x,t) = \frac{\partial}{\partial y} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}}.$$

En résumé, sur la frontière $\Gamma = \Gamma_x^{\pm} \cup \Gamma_y^{\pm}$ de normale sortante **n** (voir Fig. 2.2), on a, en régime temporel, la CLA suivante pour les ondes sortant du domaine:

$$L^{+}(n,\tau,t)\psi = 0, \tag{2.47a}$$

$$\text{avec } L^{+}(n,\tau,t) = \frac{\partial}{\partial n} + \sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}}, \tag{2.47b}$$

où τ est le vecteur unitaire tangent à Γ de sorte que le trièdre ($\mathbf{n}$, τ , $\mathbf{e}_z$) soit direct.

Le symbole de l'opérateur $L^{+}(n,\tau,t)$ fait intervenir une racine qui le classe comme un opérateur pseudo-différentiel qui est non local en espace et en temps. Afin d'obtenir une condition aux limites plus simple à implanter dans une méthode finie, l'opérateur $L^{+}(n,\tau,t)$ est approché par un opérateur qui est, lui, local. L'idée est d'approcher $L^{+}(n,\tau,t)$ par des polynômes d'interpolation ou des fractions rationnelles. L'approximation conduit, naturellement, à une CLA non exacte. Néanmoins, il est possible de générer des CLA approchées d'ordre élevé qui absorbent l'onde sur une certaine plage d'angles d'incidence. Une zoologie des approximations peut être trouvée dans [36,44,45]. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à des approximations d'ordre peu élevé ($m \leq 2$), pour les mêmes raisons que celles précédemment évoquées dans le cas des CLA du type BT. Elles ont la forme générale d'un opérateur différentiel polynomial de degré deux.

Dans le cas particulier d'une onde plane, l'opérateur $L^{+}(n,\tau,t)$ correspond à l'opérateur $L^{+}(n,k_\tau,k)$:

$$L^{+}(n,k_\tau,k) = \frac{\partial}{\partial n} + j\sqrt{k^2 - k_\tau^2}. \tag{2.48}$$

qui absorbe exactement une onde plane incidente, par exemple, sur le bord x = 0 à un angle θ défini par $k_\tau = k\sin\theta$ (Figure 2.2). On a

$$L^{+}(n,k_{\tau},k)=\frac{\partial}{\partial n}+jk\sqrt{1-S^{2}} \tag{2.49a}$$

avec $S=\frac{k_{\tau}}{k}$, $|S|<1$ (2.49b)

On définit l'approximation d'ordre 1

$$\sqrt{1-S^{2}}=p_{0}+O(S^{2}), \tag{2.50}$$

qui, en régime harmonique, correspond à

$$L^{+}(n,k_{\tau},k)=\frac{\partial}{\partial n}+jkp_{0}+O(S^{2}). \tag{2.51}$$

L'approximation du second ordre donne

$$\sqrt{1-S^{2}}=p_{0}+p_{2}S^{2}+O(S^{4}), \tag{2.52}$$

qui correspond à

$$L^{+}(n,k_{\tau},k)=\frac{\partial}{\partial n}+jkp_{0}-j\frac{p_{2}}{k}\frac{\partial^{2}}{\partial\tau^{2}}+O(S^{4}). \tag{2.53}$$

Les CLA équivalentes en régime temporel s'en déduisent en substituant le terme jk par l'opérateur $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$.

La CLA au bord (2.47a), en régime fréquentiel, avec l'approximation (2.53) peut s'écrire

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n}=\alpha\psi+\beta\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\tau^{2}}+O(S^{4}). \tag{2.54}$$

Les coefficients α et β sont donnés par: $\alpha=jkp_{0}$ (2.55a)

$$\beta=-j\frac{p_{2}}{k}. \tag{2.55b}$$

Lorsque p_0 = 1 et p_2 = 0, la condition (2.54) est absorbante pour les ondes planes dont l'incidence est normale par rapport au bord et renvoie à la condition de Engquist-Majda d'ordre un [33]. Le choix des coefficients p_0 et p_2 est, en général, déterminé par la méthode d'interpolation utilisée et, est dicté par le souci d'améliorer la performance des approximations sur une plage d'angles d'incidence [44]. Par exemple le choix (p_0, p_2) = (1, -1/2) est optimal pour les ondes planes à faibles valeurs d'angle d'incidence (proche de la normale) et correspond à l'approximation du second ordre d'Engquist-Majda [33] qui utilise un développement limité à deux termes de Taylor (ou de Padé). Lorsque l'on connaît *a priori* ou *a posteriori* les directions de propagation de l'onde, les CLA introduites par Higdon [46-47]

permettent d'optimiser le choix des coefficients p_0 et p_2 de façon à absorber certaines directions (exactement deux directions de propagation). L'opérateur d'Higdon d'ordre m:

$$H_m = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial n} + \cos\theta_i \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right), \tag{2.56}$$

est absorbant pour toute onde plane dont l'angle d'incidence θ par rapport à la normale appartient à la plage $\pm(\theta_i)$, $|\theta_i| < 90°$, $1 \le i \le m$.

On a immédiatement, en régime harmonique, pour l'ordre un

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial n} + jk\cos\theta_1 \tag{2.57}$$

et le choix $p_0 = \cos(\theta_1)$ est optimal pour θ proche de θ_1.

La condition d'Higdon d'ordre deux, H_2, en régime harmonique, se met sous la forme

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial n} + jk\frac{1+\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos\theta_1+\cos\theta_2} + \frac{1}{\cos\theta_1+\cos\theta_2}\frac{j}{k}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}. \tag{2.58}$$

Ainsi le choix $\quad p_0 = (1+\cos\theta_1\cos\theta_2)/(\cos\theta_1+\cos\theta_2),$ (2.59a)

et $\quad p_2 = -1/(\cos\theta_1+\cos\theta_2),$ (2.59b)

est optimal pour θ proche de θ_1 ou de θ_2. Pour $\theta_1 = \theta_2 = 0$, on retrouve bien les coefficients p_0=1 et p_2=-1/2 correspondants à la seconde approximation de Engquist et Majda. Par la suite, le couple (p_0, p_2) sera donné par (2.59).

Dans [34,44,46], il est montré que les CLA du type EM conduisent à des problèmes bien posés pour l'équation scalaire des ondes. Comme c'était le cas pour la CLA scalaire de type BT, la CLA scalaire de type EM n'est pas directement compatible avec les formulations vectorielles (1.46) et (1.54). Là encore, le recours à des CLA vectorielles de type EM s'impose. Nous proposons, dans ce qui suit, des CLA vectorielles du type Engquist-Majda, en deux dimensions et en trois dimensions.

b) CLA vectorielle du type EM en 2D

Soit **A** une onde vectorielle sortante vérifiant (2.15). Chaque composante cartésienne de **A** vérifie l'équation scalaire d'Helmholtz (2.1) et, par conséquent, **A** obéit à l'équation d'absorption (2.54). En particulier, la partie tangentielle de **A** vérifie:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial n} = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \frac{\partial^2 \mathbf{A}_t}{\partial \tau^2} + O(S_\tau^4), \tag{2.60}$$

avec $\mathbf{A}_t = A_\tau \boldsymbol{\tau}$, (2.61a)

$$S_\tau = (1/k)\left|\nabla_t A_\tau\right|. \tag{2.61b}$$

En outre, on a l'identité vectorielle

$$\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}) = (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{V}_t + \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{V}, \tag{2.62}$$

où $\mathbf{V}$ est un vecteur quelconque et l'opérateur tangentiel ∇_t est défini par $\nabla_t f = \frac{\partial f}{\partial \tau}\boldsymbol{\tau}$ avec f fonction scalaire quelconque. En utilisant cette identité, on reécrit la CLA donnée par (2.59) de la façon suivante

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}_t + \beta\nabla_t^2\mathbf{A}_t + \nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}) + O(S_\tau^4). \tag{2.63a}$$

En utilisant la relation vectorielle en 2D,

$$\nabla_t^2\mathbf{V}_t = \nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{V}_t),$$

(2.63a) s'écrit encore

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}_t + \beta\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + \nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}) + O(S_\tau^4). \tag{2.63b}$$

Sous cette forme, on reconnait celle de la CLA du second ordre du type BT introduite à la section 2.2.1-b. Encore une fois, il est nécessaire de symétriser cette CLA de façon à garder la symétrie de la matrice éléments finis. Nous proposons dans ce qui suit une méthode de symétrisation des CLA vectorielles du type EM (2.63).

c) Symétrisation de la CLA du type EM en 2D

Nous menons ici de front la symétrisation par la composante tangentielle et celle par la composante normale.

D'une part la méthode de symétrisation par la composante tangentielle, exposée dans la section 2.2.1-c conduit à l'approximation :

$$-k^2 A_n = \alpha\nabla\cdot\mathbf{A}_t + \nabla_t^2 A_n + \beta\nabla_t^3\cdot\mathbf{A}_t + O(S_\tau^5). \tag{2.64}$$

D'autre part, nous avons la CLA scalaire suivante vérifiée par la composante normale:

$$-\frac{\partial A_n}{\partial n} = \alpha A_n + \beta\nabla_t^2 A_n + O(S_n^4), \tag{2.65a}$$

avec $S_n = (1/k)\left|\nabla_t A_n\right|$ (2.65b)

La condition de divergence nulle (2.17), avec (2.65a), entraîne

$$-\alpha A_n = -\nabla \cdot \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t^2 A_n + O(S_n^4) \tag{2.66}$$

Si l'on néglige le terme $\nabla_t^2 A_n$ dans (2.64) et (2.66) ou encore si l'on retient les termes au plus de l'ordre de $O(S_n^2)$ dans ces équations, la compatibilité des expressions résultantes impose $\alpha = jk$. On obtient alors l'approximation:

$$A_n = -(j/k)\nabla \cdot \mathbf{A}_t + O(S_n^2) \tag{2.67a}$$

ou $$-\frac{\partial A_n}{\partial n} = jkA_n + O(S_n^2) \tag{2.67b}$$

Ainsi les deux méthodes de symétrisation reviennent à imposer à la composante normale du vecteur champ **A** de vérifier la CLA scalaire d'ordre un de Engquist-Majda [50]. Lorsqu'elle est introduite dans (2.63b), l'approximation (2.67) donne la CLA symétrisée suivante:

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha' \mathbf{A}_t + \beta' \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + O(S_n^3) \tag{2.68a}$$

avec $\alpha' = jk$ (2.68b)

$$\beta' = -j(p_2 + 1)/k. \tag{2.68c}$$

Ce processus fait passer l'erreur résiduelle de la CLA (2.63), qui reste toujours d'ordre deux, de $O(S_\tau^4)$ à $O(S_n^3)$. Le paramètre p_2 est donné par (2.59b) mais avec l'un des angles fixé à 0°. L'optimisation des coefficients ne s'effectue plus que sur un seul angle.

Nous remédions ici à cette restriction en éliminant le terme $\nabla_t^2 A_n$ entre (2.64) et (2.66). On obtient ainsi l'approximation de symétrisation suivante:

$$A_n = \beta_n \nabla \cdot \mathbf{A}_t + O(S_\tau^3), \tag{2.69a}$$

avec $\beta_n = (-j/k)p_3$, (2.69b)

$$p_3 = (1 + p_0 p_2)/(p_0 + p_2). \tag{2.69c}$$

Finalement, en introduisant (2.69) dans (2.63b), on trouve:

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha'' \mathbf{A}_t + \beta'' \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + O(S_\tau^4), \tag{2.70a}$$

avec $\alpha'' = \alpha$, (2.70b)

$$\beta'' = -(j/k)(p_2 + p_3), \tag{2.70c}$$

Cette version maintient l'erreur résiduelle à $O(S_\tau^4)$.

Remarquons que si l'on fixe le paramètre p_0 à 1 dans (2.69), on retrouve bien l'approximation (2.67a). Soulignons aussi que si l'on définit $\alpha_n = 1/\beta_n$, la relation (2.69) équivaut à une CLA d'ordre un sur la composante normale plus précise que (2.67a):

$$-\frac{\partial A_n}{\partial n} = \alpha_n A_n + O(S_\tau^3). \tag{2.71}$$

Notons par ailleurs que pour une CLA vectorielle d'ordre un, les relations de symétrisation se réduisent à

$$\nabla_t A_n = \mathbf{0} + O(S_n^2). \tag{2.72}$$

Remarque 2.2:

- On retrouve les CLA d'Engquist-Majda, à l'ordre un $(p_0 = 1,\ p_2 = 0)$ et à l'orde deux $(p_0 = 1,\ p_2 = -1/2)$, en faisant tendre formellement r vers l'infini dans les CLA du type BT correspondantes. Cette opération reste formelle, r étant finie dans les CLA du type BT.

Table 2.2: Récapitulatif des CLA scalaires et vectorielles d'ordre deux du type EM

CLA scalaire du type EM	CLA vectorielle du type EM non-symétrique	CLA vectorielle du type EM symétrique
$-\frac{\partial \psi}{\partial n} = T(\psi) + O(S^4)$	$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{T}(\mathbf{A}) + O(S_\tau^4)$	$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{T}(\mathbf{A}) + O(S_\tau^4)$
$T(\psi) = \alpha\psi + \beta\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$	$\boldsymbol{T}(\mathbf{A}) = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})$	$\boldsymbol{T}(\mathbf{A}) = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t)$
$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k} p_2$	$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k} p_2$	$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k}\left(p_2 + \frac{1 + p_0 p_2}{p_0 + p_2}\right)$

2.3.2. CLA du type EM en 3D

a) CLA scalaire du type EM en 3D

La dérivation des conditions aux limites absorbantes du type EM, pour le cas de l'onde scalaire en dimension trois, découle directement du développement effectué dans le cas bidimensionnel [43,45,48]. L'équation des ondes est donnée, dans le repère cartésien local à Γ, par

$$L\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nabla_t^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0, \tag{2.73}$$

où **n** est le vecteur unitaire normal à Γ et orienté vers l'extérieur du domaine, le couple (τ, ν) est le repère cartésien tangent à Γ, de sorte que le trièdre (**n**, τ, ν) soit direct; l'opérateur ∇_t^2 y est défini par $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2}$.

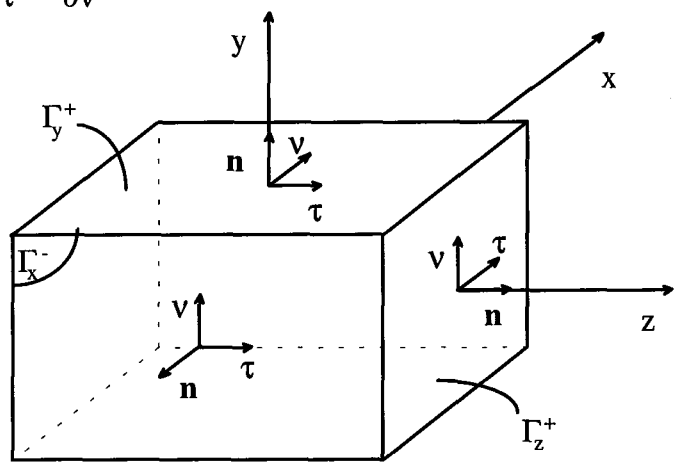


Figure 2.3: Définition d'un domaine rectangulaire en 3D.

L'opérateur L est factorisé suivant la normale à la frontière Γ:

$$L(n,\tau,\nu,t) = L^+(n,\tau,\nu,t)L^-(n,\tau,\nu,t)$$

$$\text{avec } L^{\pm}(n,\tau,\nu,t) = \frac{\partial}{\partial n} \pm j\sqrt{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla_t^2} \tag{2.74}$$

De même que précédemment, $L^+(n,\tau,\nu,t)$ constitue une CLA exacte, à la frontière Γ, pour toute fonction d'onde scalaire ψ sortant du domaine. Les approximations de cet opérateur se déduisent de celles de l'opérateur $L^+(n,k_t,k)$ qui absorbe parfaitement une onde plane incidente sur le bord Γ avec un angle θ (défini par la donnée du couple (k_t,k)) par rapport à la normale au bord:

$$L^+(n,k_t,k)=\frac{\partial}{\partial n}+jk\sqrt{1-S^2}\,, \tag{2.75a}$$

$$\text{avec } S=\frac{k_t}{k}\quad,\quad |S|<1 \tag{2.75b}$$

Le vecteur $\mathbf{k}_t$ représente la partie tangentielle du vecteur d'onde **k,** et est défini par $\mathbf{k}_t = k_\tau\tau + k_\nu\nu$ et son module, k_t, par $k_t^2 = k_\tau^2 + k_\nu^2$.

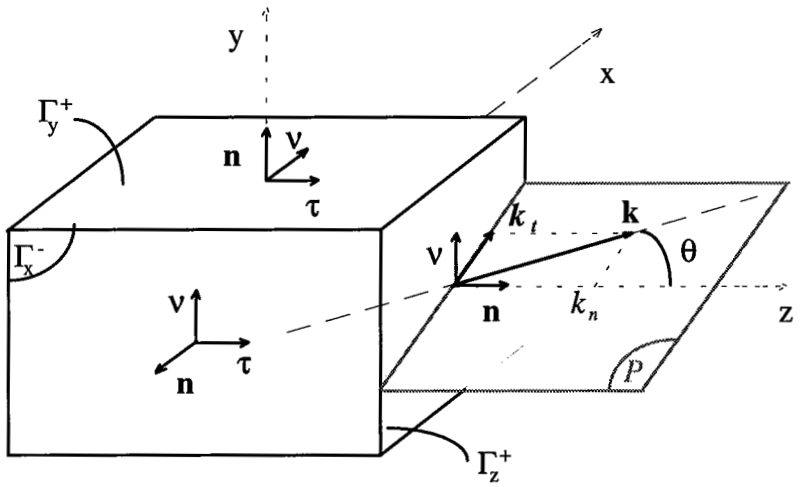


Figure 2.4: Définition du vecteur d'onde tangent.

Notons que l'angle d'absorption totale θ est donné par $k_t = k\sin\theta$.

On a aussitôt l'approximation d'ordre deux

$$L^+(n,k_t,k)=\frac{\partial}{\partial n}+jkp_0+j\frac{p_2}{k}k_t^2$$

En substituant $(-k_t^2)$ par l'opérateur ∇_t^2 dans la relation précédente, on obtient

$$L^+(n,k_t,k)=\frac{\partial}{\partial n}-jkp_0+j\frac{p_2}{k}\nabla_t^2;$$

ce qui conduit à la CLA sur $\Gamma=\Gamma_x^\pm \cup \Gamma_y^\pm \cup \Gamma_z^\pm$,

$$-\frac{\partial\psi}{\partial n}=\alpha\psi+\beta\nabla_t^2\psi, \tag{2.76}$$

qui est formellement celle obtenue en deux dimensions. Les coefficients α et β sont donnés par (2.55) et (2.59).

b) CLA vectorielle du type EM en 3D

L'extension au cas vectoriel en trois dimensions, est menée de la même manière qu'en dimension deux. L'onde vectorielle sortante vérifiant l'équation des ondes en dimensions

trois, a chacune de ces composantes obéissant à l'équation scalaire d'Helmholtz en trois dimensions et, par conséquent, sa partie tangentielle est soumise à la CLA (2.76):

$$-\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial n} = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t^2 \mathbf{A}_t + O(S_t^4), \tag{2.77a}$$

avec $S_t = (1/k)|\nabla_t A_t|$. (2.77b)

L'identité vectorielle (2.62) associée à (2.77) conduit à la CLA

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t^2 \mathbf{A}_t + \nabla_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + O(S_t^4), \tag{2.78}$$

qui est formellement celle obtenue dans le cas bidimensionnel.

La relation vectorielle

$$\nabla_t^2 \mathbf{V}_t = \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{V}_t) - \nabla \times (\nabla_t \times \mathbf{V}_t) \tag{2.79}$$

entraîne

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t - \beta \nabla \times (\nabla_t \times \mathbf{A}_t) + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + O(S_t^4). \tag{2.80}$$

En remarquant que

$$\nabla_t \times \mathbf{V}_t = \{\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{V})\}\mathbf{n},$$

on obtient encore

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t - \beta \nabla \times \{\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\}\mathbf{n} + \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + \nabla_t (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) + O(S_t^4). \tag{2.81}$$

Sous cette dernière écriture, on retrouve la forme de la CLA du second ordre, du type BT non-symétrique introduite dans [40] pour l' onde vectorielle en trois dimensions.

c) Symétrisation de la CLA du type EM en 3D

La symétrisation est conduite de la même façon qu'en deux dimensions. On obtient la CLA symétrique, à partir de (2.78) ou (2.80) ou (2.81), suivante :

$$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t + \beta \nabla_t^2 \mathbf{A}_t + \beta_n \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + O(S_t^4), \tag{2.82a}$$

ou $$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t - \beta \nabla \times (\nabla_t \times \mathbf{A}_t) + (\beta + \beta_n) \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + O(S_t^4), \tag{2.82b}$$

ou $$\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_t - \beta \nabla \times \{\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\}\mathbf{n} + (\beta + \beta_n) \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{A}_t) + O(S_t^4); \tag{2.82c}$$

les coefficients α et β sont donnés par (2.55) et β_n par (2.69b).

Dans le cas particulier de la CLA d'Engquist-Majda d'ordre deux, $\beta_n = -2\beta$, et (2.82c) peut alors s'écrire:

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}_t - \beta\nabla\times\{\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\}\mathbf{n} - \beta\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t) + O(S_t^4). \tag{2.83}$$

Là encore, on reconnaît la forme des CLA du second ordre, du type BT, symétriques introduites dans [39] et [41] pour l' onde vectorielle en trois dimensions.

Table 2.3: Récapitulatif des CLA scalaires et vectorielles d'ordre deux du type EM en 3D.

CLA scalaire du type EM	CLA vectorielle du type EM non-symétrique	CLA vectorielle du type EM symétrique
$-\frac{\partial\psi}{\partial n} = T(\psi) + O(S^4)$	$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \boldsymbol{T}(\mathbf{A}) + O(S_t^4)$	$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \boldsymbol{T}(\mathbf{A}) + O(S_t^4)$
$T(\psi) = \alpha\psi + \beta\nabla_t^2\psi$	$\boldsymbol{T}(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{A}_t + \beta\nabla_t^2\mathbf{A}_t + \nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{A})$	$\boldsymbol{T}(\mathbf{A}) = \alpha\mathbf{A}_t + \beta\nabla_t^2\mathbf{A}_t + \beta_n\nabla_t(\nabla\cdot\mathbf{A}_t)$
$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k}p_2$	$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k}p_2$	$\alpha = jkp_0$ $\beta = -\frac{j}{k}p_2$ $\beta_n = -\frac{j}{k}\left(\frac{1+p_0p_2}{p_0+p_2}\right)$

2.4. COUPLAGE AVEC LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Le couplage des conditions aux limites absorbantes et de la méthode des éléments finis consiste à substituer dans l'intégrale de contour de (1.46), par exemple, le terme $\boldsymbol{T}(\mathbf{H})$ par ses diverses approximations résumées dans les Tables 2.1, 2.2 et 2.3.

Les CLA sont données dans un système de coordonnées particulier et peuvent s'appliquer à toute frontière arbitraire. Mais en pratique, dans un souci de réduction du domaine d'analyse et de maniabilité, la forme des structures étudiées conditionne le choix de la frontière extérieure et donc le type de CLA.

Ainsi, pour des objets ayant des géométries à section circulaire on préférera une frontière courbe, en général un cercle de rayon R centré à l'origine, et on y appliquera les CLA du type BT. Dans ce cas, le repère local ($\mathbf{r}$, $\mathbf{e}_\theta$) est confondu au repère local ($\mathbf{n}$, τ), tandis que les coefficients α, β, et γ restent constants pour un rayon R donné; il s'en suit une expression plus simple de l'opérateur $\boldsymbol{T}$. Ceci étant dit, il est possible d'écrire les CLA du type BT (pour l'onde scalaire) dans le repère local ($\mathbf{n}$, τ) associé à une frontière plus conforme à la géométrie des objets, moyennant quelques modifications, un peu lourdes, de leurs expressions [38].

En général, une frontière rectangulaire est soumise aux CLA du type EM. Le repère local ($\mathbf{n}$, τ) coïncide alors, à une permutation près, au repère cartésien global. De plus, sur chaque côté de la frontière, le vecteur normal $\mathbf{n}$ est invariant et la plage des angles d'incidence de l'onde sortante est alors déterminée assez simplement; ce qui facilite le choix optimal des coefficients α et β. Cependant, le choix d'une frontière rectangulaire pose le problème de singularités géométriques (coins et arêtes); nous verrons plus loin comment l'on peut y remédier.

2.4.1. Cas d'une frontière circulaire en 2D

On utilise la CLA du second ordre du type BT (2.24); l'utilisation de la condition d'ordre un s'en déduit aisément ($\beta = 0$).

L'intégrale de contour (avec $\varepsilon_r^{-1} = 1$ sur la frontière extérieure pour simplifier l'exposé) devient

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}\,d\tau = \alpha\oint_\Gamma \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{W}\,d\tau + \beta\oint_\Gamma \left(\nabla_t\left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right)\right)\cdot\mathbf{W}\,d\tau + \gamma\oint_\Gamma \left(\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\right)\cdot\mathbf{W}\,d\tau. \tag{2.84}$$

L'égalité

$$\nabla_t\cdot\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right)\mathbf{W}\right] = \left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right)\left(\nabla\cdot\mathbf{W}_t\right) + \mathbf{W}\cdot\nabla_t\left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right) \tag{2.85}$$

entraîne

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}\,d\tau = \alpha\oint_\Gamma \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{W}_t\,d\tau - \beta\oint_\Gamma \left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right)\left(\nabla\cdot\mathbf{W}_t\right)d\tau + \beta\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{H}_t\right)W_\tau\right]_\Gamma \\ + \gamma\oint_\Gamma \mathbf{W}_t\cdot\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.86}$$

Il est clair que la discrétisation du terme $\oint_\Gamma \mathbf{W}\cdot\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,d\tau$, comme préalablement annoncé, conduit à une matrice de bord non symétrique, ce qui est une caractéristique indésirable de la CLA vectorielle (2.24).

En approchant $\boldsymbol{T}$ avec la CLA symétrique (2.39), on a formellement (2.86) avec $\gamma = 0$ et les coefficients α et β donnés par (2.40). Par ailleurs, la frontière Γ étant lisse, on a aussitôt:

$$\left[(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)W_\tau\right]_\Gamma = 0. \tag{2.87}$$

Finalement, avec les CLA symétriques, on a:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}\,d\tau = \alpha\oint_\Gamma \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{W}_t\,d\tau - \beta\oint_\Gamma(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)(\nabla\cdot\mathbf{W}_t)\,d\tau. \tag{2.88}$$

2.4.2. Cas d'une frontière rectangulaire en 2D

Ici, on emploie les CLA du second ordre du type EM.

Lorsque l'opérateur $\boldsymbol{T}$ est approché par la CLA non symétrique (2.63b), on obtient explicitement (2.86) avec $\gamma = 1$ et les coefficients α et β définis par (2.55).

L'utilisation de la CLA symétrique (2.70a) conduit formellement à (2.86) avec les coefficients α et β donnés par (2.70b) et (2.70c) et cette fois-ci $\gamma = 0$.

Cependant une frontière rectangulaire comporte des coins et, le terme $\left[(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)W_\tau\right]_\Gamma$ n'est plus nul; de plus la discrétisation de ce terme conduit à une matrice non symétrique. Avec une CLA appropriée au coin, il est encore possible de symétriser la matrice globale de bord.

a) Condition de coins en 2D

Une condition de coin peut s'interpréter simplement comme une reécriture au coin des CLA. Elle doit conduire à une écriture symétrique de la contribution des coins, $\left[(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)W_\tau\right]_\Gamma$, à l'intégrale de contour (2.86). La construction d'une condition de coin doit être guidée par deux principes assez simples [49]:

(i) La condition de coin ne doit pas introduire de singularité dans la solution.

(ii) L'expression de la condition de coin doit contenir uniquement des dérivées premières dans une direction donnée (pour les CLA d'ordre deux).

L'idée exposée dans [49], pour la dérivation d'une condition de coin, est de fusionner au coin et l'équation vérifiée par l'onde, et les deux CLA écrites au voisinage du coin. Nous avons, suite à l'approximation de symétrisation (2.71), une CLA d'ordre un sur la composante normale du champ. Et cette dernière, associée à la condition de divergence nulle, nous donne une condition de coin compatible avec la CLA vectorielle symétrique utilisée:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_t = -\frac{\partial A_n}{\partial n} = \alpha_n A_n . \tag{2.89}$$

La présence de coins ne pose aucune difficulté et, en parcourant le contour dans le sens trigonométrique (Figure 2.5), nous avons:

$$\left[W_\tau \nabla \cdot \mathbf{H}_t\right]_\Gamma = \alpha_n \sum_{i=1}^{4} \left[H_n W_\tau\right]_{\Gamma_i} = \alpha_n \sum_{i=1}^{4} \left\{ H_{n_1} W_{\tau_1}\Big|_{C_i} - H_{n_2} W_{\tau_2}\Big|_{C_i} \right\} \tag{2.90a}$$

Pour une frontière rectangulaire, le vecteur unitaire tangent à un côté représente, au coin, au signe près le vecteur unitaire normal au côté adjacent (Figure 2.5).

Figure 2.5: Discontinuité des vecteurs unitaires **n** et τ au coin.

On a encore:

$$\left[W_\tau \nabla \cdot \mathbf{H}_t\right]_\Gamma = -\alpha_n \sum_{i=1}^{4} \left\{ H_{\tau_1} W_{\tau_2}\Big|_{C_i} + H_{\tau_2} W_{\tau_1}\Big|_{C_i} \right\}. \tag{2.90b}$$

L'intégrale de contour est obtenue en regroupant (2.88) et (2.90b):

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{W}\, d\tau = \alpha \oint_\Gamma \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{W}_t\, d\tau - \beta \oint_\Gamma (\nabla \cdot \mathbf{H}_t)(\nabla \cdot \mathbf{W}_t)\, d\tau$$

$$-\beta\alpha_n \sum_{i=1}^{4} \left\{ H_{\tau_1} W_{\tau_2}\Big|_{C_i} + H_{\tau_2} W_{\tau_1}\Big|_{C_i} \right\} \tag{2.91}$$

2.4.3. Cas d'une frontière rectangulaire en 3D

On se sert des CLA du second ordre du type EM en 3D; l'opérateur $\boldsymbol{T}$, est donné par (2.78). L'intégrale de surface de (1.46), après une intégration par parties, donne:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}\,d\Gamma=\alpha\oint_\Gamma \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{W}_t\,d\Gamma-\beta\oint_\Gamma\left(\frac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_t}{\partial\tau}+\frac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial\mathbf{W}_t}{\partial\nu}\right)d\Gamma$$

$$+\beta\sum_{i=1}^{6}\oint_{\partial\Gamma_i}\frac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial m_i}\cdot\mathbf{W}_t\,dl+\oint_\Gamma \mathbf{W}_t\cdot\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,d\Gamma, \tag{2.92}$$

où $\mathbf{m}_i$ est un vecteur unitaire tangent à la face Γ_i et normal au contour $\partial\Gamma_i$, lequel entoure la face Γ_i (Figure 2.6). La matrice de bord obtenue en discrétisant l'équation (2.92) est non symétrique. Ceci à cause des termes associés d'une part à l'intégration linéique et, d'autre part, à la dernière intégration surfacique dans (2.92). La "symétrisation" de ce dernier terme, en utilisant (2.69), donne:

$$\oint_\Gamma \mathbf{W}_t\cdot\nabla_t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H})\,d\Gamma=-\beta_n\oint_\Gamma(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)(\nabla\cdot\mathbf{W}_t)d\Gamma+\beta_n\sum_{i=1}^{6}\oint_{\partial\Gamma_i}(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)(\mathbf{m}_i\cdot\mathbf{W}_t)dl. \tag{2.93}$$

La symétrisation des intégrations linéiques dans (2.92) et (2.93) fait alors appel à des conditions d'arêtes.

a) Conditions d'arêtes en 3D

La discontinuité des diverses composantes du champ au coin (due aux discontinuités des vecteurs de base tangents et normal) ne nous autorise pas à appliquer directement la technique élaborée dans [49] pour dériver des conditions d'arêtes. Néanmoins la CLA (2.89) vérifiée par la composante normale du champ donne:

$$\beta_n\sum_{i=1}^{6}\oint_{\partial\Gamma_i}(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)(\mathbf{m}_i\cdot\mathbf{W}_t)dl=\sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\left(H_{n_i}W_{m_i}+H_{n_j}W_{m_j}\right)dl, \tag{2.94}$$

avec $L_{ij}=\partial\Gamma_i\cap\partial\Gamma_j$ (Figure 2.6). On n'impose pas de condition d'arêtes particulière sur la composante normale du champ, la CLA (2.89) étant d'ordre un.

L'intégration linéique dans (2.92) se développe comme suit:

$$\sum_{i=1}^{6}\oint_{\partial\Gamma_i}\frac{\partial\mathbf{H}_t}{\partial m_i}\cdot\mathbf{W}_t dl=\sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\left(\left(\frac{\partial H_l}{\partial m_i}+\frac{\partial H_l}{\partial m_j}\right)W_l+\frac{\partial H_{m_i}}{\partial m_i}W_{m_i}+\frac{\partial H_{m_j}}{\partial m_j}W_{m_j}\right)dl. \tag{2.95}$$

Le domaine étant rectangulaire, sur l'arête L_{ij} les vecteurs $\mathbf{m}_i$ et $\mathbf{m}_j$ sont respectivement confondus aux vecteurs $\mathbf{n}_j$ et $\mathbf{n}_i$ (Figure 2.6).

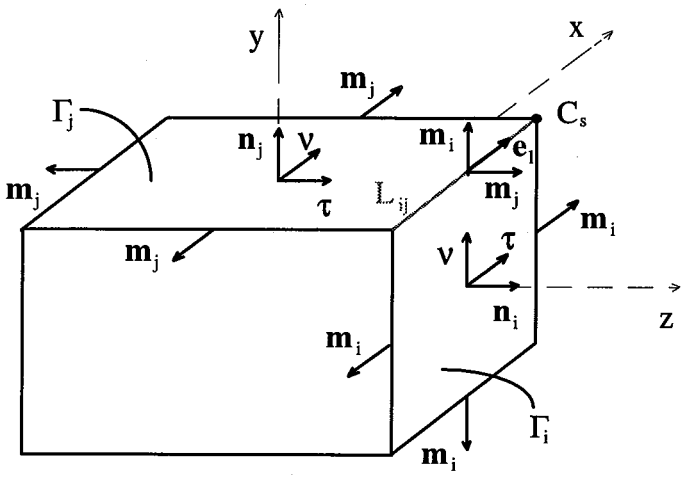


Figure 2.6: Définition d'arête et de coin sur un domaine rectangulaire 3D.

D'une part, d'après (2.89), on a la condition suivante:

$$\frac{\partial A_m}{\partial m} = -\alpha_n A_m, \tag{2.96}$$

d'autre part, d'après (2.77), on a les conditions suivantes:

$$\text{sur } L_{ij} \in \Gamma_i: \qquad -\frac{\partial A_l}{\partial m_j} = \alpha A_l + \beta\left(\frac{\partial^2 A_l}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 A_l}{\partial m_i^2}\right), \tag{2.97}$$

$$\text{sur } L_{ij} \in \Gamma_j: \qquad -\frac{\partial A_l}{\partial m_i} = \alpha A_l + \beta\left(\frac{\partial^2 A_l}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 A_l}{\partial m_j^2}\right), \tag{2.98}$$

En additionnant (2.97) et (2.98), puis en utilisant le fait que A_l vérifie l'équation de Helmholtz (2.1), on obtient la condition d'arête (portant sur la composante le long de l'arête) suivante :

$$\text{sur } L_{ij}: \qquad -\left(\frac{\partial A_l}{\partial m_i} + \frac{\partial A_l}{\partial m_j}\right) = \alpha\delta A_l + \beta\frac{\partial^2 A_l}{\partial l^2}, \tag{2.99}$$

avec $\delta = 2 - k^2\beta/\alpha$.

Remarquons que pour la condition d'Engquist-Majda d'ordre deux, nous avons $\delta = 3/2$; nous retrouvons ainsi la condition d'arête, appliquée à une onde scalaire, donnée dans [49].

Les relations (2.95), (2.96) et (2.99) entraînent:

$$\sum_{i=1}^{6}\oint_{\partial\Gamma_i}\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial m_i}\cdot \mathbf{W}_t dl = -\sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\left(\delta\alpha H_l W_l + \alpha_n H_{m_i} W_{m_i} + \alpha_n H_{m_j} W_{m_j}\right)dl - \beta\sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\frac{\partial^2 H_l}{\partial l^2}W_l dl. \tag{2.100}$$

L'intégration faisant intervenir des dérivées secondes linéiques dans (2.100) se développe comme suit:

$$\oint_{L_{ij}} \frac{\partial^2 H_l}{\partial l^2} W_l dl = -\oint_{L_{ij}} \frac{\partial H_l}{\partial l}\frac{\partial W_l}{\partial l} dl + \left[\frac{\partial H_l}{\partial l} W_l\right]_{L_{ij}} . \tag{2.101}$$

Comme en deux dimensions, le dernier terme dans (2.101), est traité par une condition de coin.

b) Condition de coins en 3D

La frontière étant rectangulaire, le vecteur unitaire tangent à l'arête L_{ij} ,$\mathbf{e}_l$, est au signe près égal au vecteur unitaire normal sortant aux faces orthogonales à L_{ij} (Figure 2.6). Aussi, d'après (2.89), nous avons la condition de coin suivante:

$$-\frac{\partial A_l}{\partial l} = \delta_l \alpha_n A_l, \tag{2.102}$$

avec $\delta_l = \pm 1$; le signe (+) lorsque le vecteur tangent $\mathbf{e}_l$ est orienté, au coin, selon la normale sortante et le signe (-) lorsqu'il est orienté en sens inverse.

Finalement en regroupant (2.92), (2.93), (2.94), (2.100), (2.101) et (2.102) on obtient:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}\, d\Gamma = {} & \alpha\oint_\Gamma \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{W}_t\, d\Gamma - \beta\oint_\Gamma\left(\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial \mathbf{W}_t}{\partial\tau} + \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial \mathbf{W}_t}{\partial\nu}\right)d\Gamma - \beta_n\oint_\Gamma(\nabla\cdot\mathbf{H}_t)(\nabla\cdot\mathbf{W}_t)d\Gamma \\ & + \sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\left(H_{n_i}W_{m_i} + H_{n_j}W_{m_j}\right)dl \\ & - \beta\sum_{i<j}\int_{L_{ij}}\left(\delta\alpha H_l W_l + \alpha_n H_{m_i}W_{m_i} + \alpha_n H_{m_j}W_{m_j} - \beta\frac{\partial H_l}{\partial l}\frac{\partial W_l}{\partial l}\right)dl \\ & - \beta^2\alpha_n\sum_{s=1}^{8}\left(\delta_{l_1}H_{l_1}W_{l_1} + \delta_{l_2}H_{l_2}W_{l_2} + \delta_{l_3}H_{l_3}W_{l_3}\right)\Big|_{C_s}\end{aligned} \tag{2.103}$$

Comme le montre l'équation (2.103) la prise en compte des singularités géométriques complique l'implantation de la CLA d'EM sur une frontière rectangulaire en 3D. En première approximation, nous avons omis les conditions d'arêtes et de coins dans le couplage de cette CLA avec la méthode des éléments finis. En effet, nous faisons l'hypothèse que la non-application de ces conditions de singularités génère des ondes parasites qui restent essentiellement locales par nature et donc qu'un faible pourcentage de ces ondes se propagent vers l'intérieur du domaine. Nous essayons de justifier ce point de vue sur l'exemple, assez simple mais suffisant, du rayonnement d'un dipôle infinitésimal.

2.5. APPLICATION AU RAYONNEMENT DIPOLAIRE

Nous appliquons dans cette section les conditions aux limites absorbantes vectorielles non-symétrique et symétrique du type EM en 3D au problème du rayonnement d'un dipôle. Le cas test considéré a été utilisé dans [77] pour évaluer la performance de la CLA du type EM scalaire non-symétrique en 3D. Le dipôle infinitésimal, parcouru par un courant **Jm** constant, est centré à l'origine et orienté selon l'axe des z (Figure 2.7). Le problème a été modélisé avec deux plans de symétries: xz et yz. Le domaine d'analyse est rectangulaire de dimensions $1\lambda \times 1\lambda \times 2.1\lambda$ à la fréquence de 3GHz et est subdivisé avec des cubes de $0.1\lambda \times 0.1\lambda \times 0.1\lambda$. La longueur du dipôle est de 0.1λ; la distance entre le dipôle et la frontière

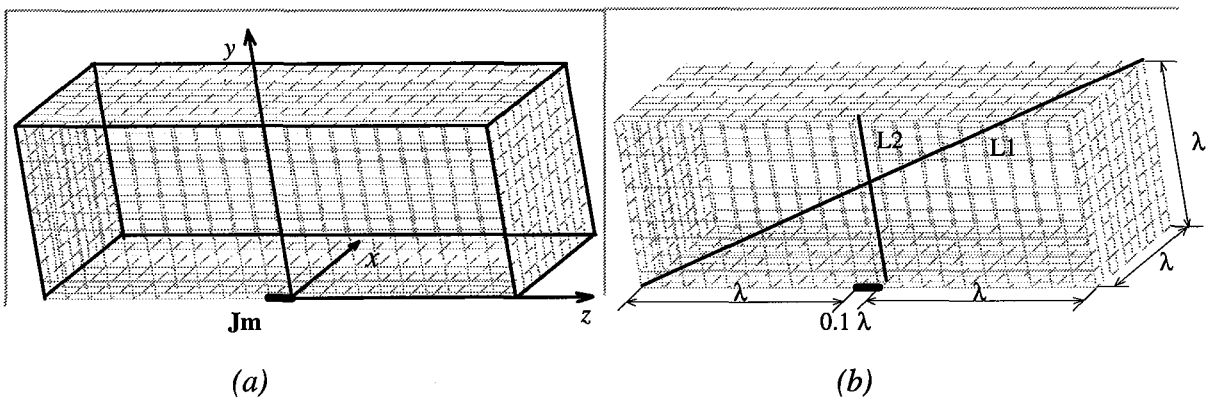
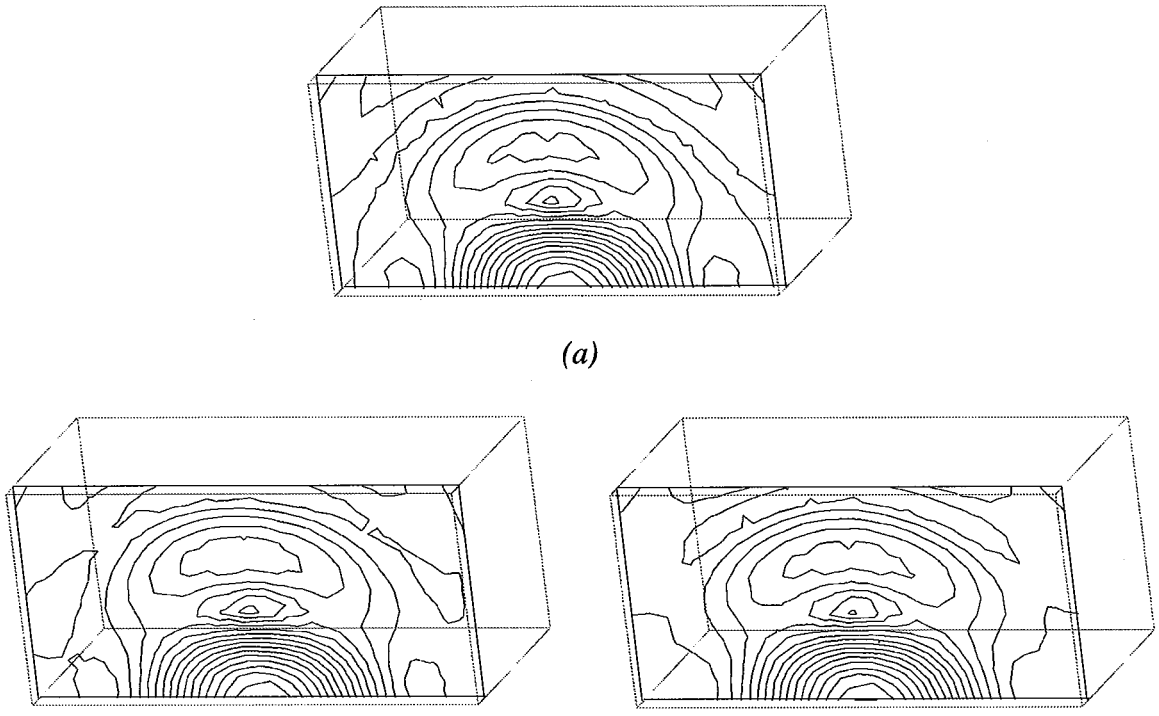


Figure 2.7: Définition du dipôle, géométrie et maillage.

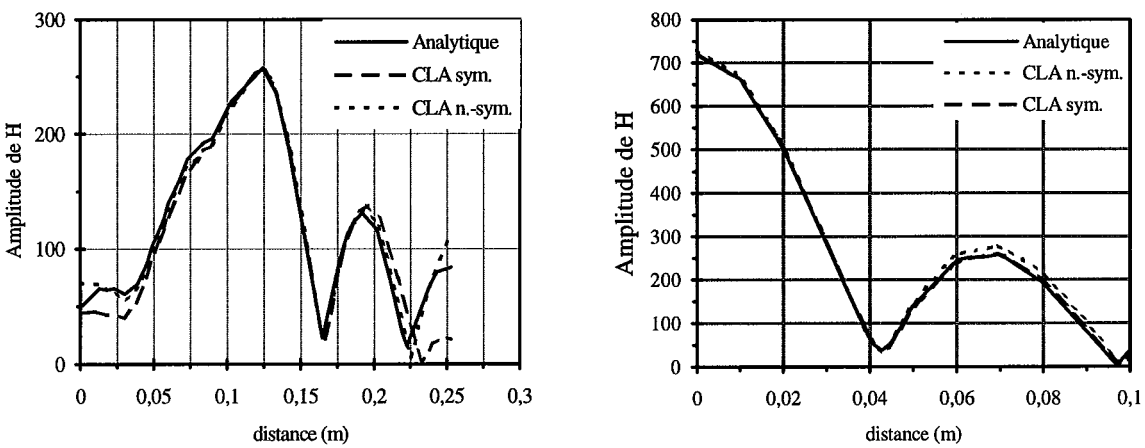
est de 1λ dans les trois directions (Figure 2.7 (b)). Dans la mise en oeuvre de la CLA, seule la première ligne de l'équation (2.103) est considérée. Cette approximation est justifiée par les Figures 2.8 et 2.9 qui montrent bien que lorsque l'on se rapproche des arêtes et des coins, les solutions numériques s'éloignent de celle analytique dans l'allure (Figure 2.8) et en valeur (Figure 2.9 (a)). Cependant, lorsque l'on se situe bien à l'intérieur du domaine, par exemple sur la ligne L2 prise dans un plan yz à $x = 0.1\lambda$, les solutions numériques et analytiques concordent bien, comme l'indique la Figure 2.9 (b). Il semble, au vu de ces résultats, que la CLA symétrique est plus sensible à la non-application des conditions de singularités géométriques que la CLA non-symétrique. Ceci peut s'expliquer au regard de la relation (2.93), qui montre que le couplage de la CLA symétrique avec la MEF introduit une intégration linéique en plus. Cependant comme l'indique la Table 2.4., le temps de résolution



(a)

(b) *(c)*

Figure 2.8: Lignes de champ magnétique dans un plan yz situé à x = 0.1λ. (a) solution analytique; (b) solution avec CLA non symétrique; (c) solution avec CLA symétrique.



(a) *(b)*

Figure 2.9: Champ magnétique le long d'un segment, (a) segment L1, (b) segment L2.

du système matriciel obtenu avec une CLA non-symétrique est plus important. La méthode de résolution est GMRES [51] avec un paramètre de réinitialisation de 20 et un préconditionnement SSOR dont le paramètre "omega" est pris égal à 1.0 . La convergence de la méthode est supposée atteinte lorsque le résidu est réduit à 10e-7 de sa valeur initiale. Cette différence, à notre avis, provient du fait que, pour une CLA non-symétrique, la matrice de bord est totalement complexe et franchement non symétrique tandis pour une CLA symétrique, cette dernière est imaginaire pure. L'ajout de cette partie réelle à la matrice de bord, a un effet négatif sur le conditionnement de la matrice globale.

Table 2.4: Comparaison des CLA d'Engquist-Majda vectorielles non-symétrique et symétrique en trois dimensions.

Type de CLA	Nb Inconnues	Termes à stocker	Temps CPU (en secondes)	Nb itérations
symétrique	1116	15126	61 s	279
non-symétrique	1116	29136	107 s	462
symétrique	3969	58209	298 s	360
non-symétrique	3969	112449	6483 s	8131
symétrique	7381	111301	1028 s	414
non-symétrique	7381	215221	18779 s	13166

2.6 CONCLUSION

Nous avons montré qu'il est possible de dériver simplement, à partir des CLA scalaires d'ordre deux du type EM ou BT, des CLA vectorielles non-symétriques du même ordre et avec la même précision. Mais le couplage de ces CLA avec une formulation vectorielle conduit à un système matriciel non-symétrique. Afin de conserver la symétrie de la matrice éléments finis, nous avons proposé une approche de symétrisation de ces CLA qui permet d'obtenir des CLA vectorielles symétriques avec la même précision. Toutefois à ces CLA vectorielles

symétriques, il convient de rajouter des conditions d'arêtes et de coins lorsque la frontière est rectangulaire afin de "symétriser" leur contribution à la matrice de bord. Néanmoins, en première approximation, on peut se dispenser de cette contribution en admettant que les réflections parasites ainsi engendrées restent locales. Dans les deux cas, la formulation faible de notre problème, couplée avec les CLA vectorielles symétriques, est alors totalement symétrique.

CHAPITRE 3

APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS MIXTES DE H(ROT)

3.1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis permet d'approcher la solution **H** du problème variationnel (PVH) par une solution approchée $\mathbf{H}_h$, obtenue en résolvant (PVH) dans un sous-espace W_h, de dimension finie, de l'espace des solutions admissibles, en l'occurrence l'espace H(rot). La solution $\mathbf{H}_h$ tend vers la solution exacte **H** lorsque le paramètre h tend vers zéro. La construction de l'espace W_h par la méthode des éléments finis se passe comme suit. On établit une subdivision, triangulation ou maillage du domaine d'étude par des éléments géométriques simples. L'espace W_h est alors constitué de fonctions d'approximation, définies sur chaque élément géométrique, à composantes tangentielles continues d'un élément à un autre. Ces fonctions sont généralement polynomiales, le plus souvent linéaires ou quadratiques. Le paramètre h tend vers 0 quand la subdivision s'affine.

Construire l'espace W_h ou approcher **H**, en utilisant des fonctions d'approximation qui sont continues sur le domaine d'étude, comme il est fait dans la méthode des éléments finis nodaux [12-15], revient à imposer la continuité de toutes les composantes de **H** au passage d'un élément à un autre. Or ceci n'est pas toujours physique car le champ **H** peut avoir sa composante normale discontinue à la traversée d'interface entre différents matériaux.

D'où le recours à des éléments finis particuliers, appelés *éléments mixtes* ou *éléments de Whitney*, adaptés à la représentation des champs de vecteurs comme **H** ou **B**, et permettant leurs possibles discontinuités. Ces éléments ont été utilisés pour la première fois par Raviart et Thomas [54] pour des problèmes bidimensionnels. Dans [55], Nédélec a introduit deux familles d'éléments mixtes en trois dimensions. La première famille généralise les éléments mixtes de Raviart-Thomas et est *conforme* dans l'espace H(div). La seconde apparaît nouvelle et est *conforme* dans l'espace H(rot). Nédélec a introduit à nouveau dans [56] deux familles d'éléments mixtes en trois dimensions, l'une conforme dans l'espace H(div) et l'autre conforme dans l'espace H(rot). Bossavit a retrouvé des éléments mixtes de Nédélec chez Whitney

[58-59] et, a montré qu'ils conviennent au calcul des courants de Foucault [61] ainsi qu'au problème de diffraction en électromagnétisme [11].

Les éléments mixtes, qui sont bien adaptés à la représentation des champs comme **E** ou **H**, sont également connus sous le nom de *éléments d'arête* ou *1-forme de Whitney* [59-60] ou *éléments tangentiels* [63-64] ou *éléments mixtes de H*(rot) ou *éléments conformes dans H*(rot) [55-57] ou *éléments rot-conformes.* Ces éléments imposent uniquement la continuité tangentielle du champ et peuvent donc servir à la construction du sous-espace W_h de l'espace H(rot) sans altérer l'aspect physique du problème.

Nous nous sommes intéressés aux éléments mixtes de H(rot) tels qu'ils sont introduits par Nédélec, car ils sont plus généraux dans le sens où ils peuvent être construits sur les éléments géométriques les plus courants en deux dimensions comme en trois dimensions, et ceci à tout ordre k d'approximation (où k est le degré du polynôme d'approximation). De plus, on peut s'arranger dans le choix des degrés de liberté, et donc dans la définition des fonctions d'approximation, pour retrouver les autres types d'éléments d'arêtes.

Dans ce chapitre nous commençons par rappeler la description de quelques éléments finis nodaux, spécialement ceux de Lagrange, qui nous serviront ensuite à la présentation des éléments mixtes. Nous finirons avec la discrétisation du problème variationnel approché, ce qui va conduire à l'élaboration d'un système matriciel linéaire. Mais avant, il est utile de rappeler quelques définitions, assez générales, relatives à un élément fini [52,53,57].

Définition 3.1. *Un élément fini* est la donnée du triplet (K, P, Σ):

1) un élément géométrique, noté K, de $\mathbb{R}^n$ (n = 1, 2 ou 3),
2) un sous-espace vectoriel, noté P, de l'espace des fonctions scalaires (ou vectorielles) de dimension finie égale à N,
3) un ensemble de N degrés de liberté, noté Σ, constitué de formes linéaires σ_i, $1 \leq i \leq N$, sur l'espace des fonctions scalaires (ou vectorielles) définies sur l'élément géométrique K.

4) En outre, Σ doit être P-unisolvant: la donnée de N scalaires réels $\alpha_i, 1 \leq i \leq N$, doit définir un unique élément p de P tel que $\sigma_i(p) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq N$. Autrement dit la donnée de l'ensemble $\{\sigma_i(p)\}_{1 \leq i \leq N}$ que l'on note $\Sigma(p)$ définit de façon unique p de P.

Définition 3.2. Lorsque l'ensemble Σ est P-unisolvant, les formes linéaires σ_i, $1 \leq i \leq N$, génèrent alors N fonctions w_j de P telles que

$$\sigma_i(w_j) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq N, \text{ où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Les N fonctions w_j sont appelées *fonctions de base* de l'élément fini; elles sont aussi, parfois, dénommées *fonctions de forme*.

Définition 3.3. On appelle opérateur de *P-interpolation* sur Σ, l'opérateur Π qui a toute fonction v définie sur K associe la fonction Πv définie par

$$\Pi v = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(v) w_j$$

et Πv est dit le *P-interpolé* de v sur Σ. Πv est l'unique fonction p de P qui interpole v sur Σ, c'est à dire qui satisfait $\sigma_i(p) = \sigma_i(v)$, $1 \leq i \leq N$.

3.2. ELEMENTS FINIS NODAUX

Les *éléments finis nodaux*, en particulier les éléments de Lagrange, sont les éléments les plus usuels de la méthode des éléments finis. Ces éléments de Lagrange permettent de générer des fonctions continues, à valeurs scalaires, qui définissent de façon unique sur les éléments géométriques dits de *type (k)* tout polynôme de degré *k* [52-53]. Cette dernière propriété nous sera utile pour expliciter les degrés de liberté et les fonctions de base correspondantes des éléments mixtes qui feront l'objet de la section 3.3. L'ensemble Σ est constitué de formes linéaires définies comme suit:

$$\sigma_i(p) = p(a_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

où les $\{a_i\}_{1 \leq i \leq N}$ sont N points, appelés *noeuds*, régulièrement répartis sur l'élément K.

Autrement dit, l'ensemble des degrés de liberté est constitué des valeurs de la fonction p aux points $\{a_i\}$. L'ensemble Σ s'identifie aux noeuds de l'élément. Si l'on note Σ_f la restriction de

Σ à un composant géométrique frontalier (sommet, arête ou face) quelconque de K et P_f la restriction de P à f, on a Σ_f est P_f-*unisolvant*. Les valeurs de l'interpolée sur chaque composant frontalier ne dépendent que des valeurs nodales sur ce composant frontalier, et donc (les valeurs nodales étant communes aux éléments finis adjacents) l'interpolée est *continue* au passage d'un élément fini à l'autre: l'élément fini est dit *conforme* ou *de classe* C^0 (ensemble des fonctions continues). Les éléments de Lagrange servent également à approcher une fonction à valeurs vectorielles, dans ce cas le degré de liberté est *"vectoriel"*, i.e., constitué de la valeur de chaque composante de la fonction aux noeuds de l'élément. Aussi, dans l'approximation d'un vecteur à l'aide des fonctions de Lagrange, on impose à chacune de ses composantes d'être continue.

Bien que nous ne nous en servions pas pour l'approximation de la solution, nous donnons ici une description, non exhaustive, des éléments finis nodaux qui nous seront utiles cependant, dans la suite, à la construction des éléments finis mixtes.

3.2.1. Eléments finis de Lagrange en une dimension

L'élément géométrique K est un segment de IR d'extrémités a_1 et a_2.

On note P_k l'espace des polynômes de degré *k* à une variable. Sa dimension est

$$\dim \mathsf{P}_k = k+1. \tag{3.1}$$

Il est généré par les monômes $\{x^l\}$, $0 \le l \le k$.

Les fonctions de Lagrange définies sur le segment $[a_1, a_2]$ de *type (k)* permettent d'exprimer de façon unique tout polynôme de l'espace P_k défini sur le segment.

Exemple 3.1 (*segment de type (1)*)

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_1,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_1), p(a_2)\}.$$

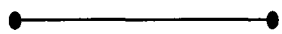
Nous avons deux fonctions de base. Ce sont les coordonnées barycentriques du point x par rapport aux extrémités du segment:

$$w_1(x) = \lambda_1(x) \ ; \ w_2(x) = \lambda_2(x),$$

définies par

$$x = \lambda_1(x)a_1 + \lambda_2(x)a_2, \tag{3.2}$$

$$1 = \lambda_1(x) + \lambda_2(x). \tag{3.3}$$



(a) *Segment de type (1)*
2 d°l

(b) *Segment de type (2)*
3 d°l

Figure 3.1: Eléments de Lagrange sur un segment.

Exemple 3.2 (*segment de type (2)*)

$$P = P_2,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_1),\ p(a_2),\ p(a_{12})\}.$$

Le point a_{12} est le point milieu du segment $[a_1, a_2]$. On a trois fonctions de base qui sont:

$$w_1(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1)\ ;\ w_2(x) = \lambda_2(x)(2\lambda_2(x) - 1)\ ;\ w_{12}(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x).$$

3.2.2. Eléments finis de Lagrange sur le triangle

L'élément géométrique est un triangle K de sommets a_1, a_2 et a_3.

On appelle (x_1, x_2) les coordonnées d'un point M du plan rapporté aux axes Ox_1 et Ox_2.

On note P_k l'espace des polynômes de degré k à deux variables. Sa dimension est

$$\dim P_k = (k+1)(k+2)/2 \tag{3.4}$$

La base canonique de l'espace P_k est constitué des monômes $x_1^i x_2^j$, $0 \le i + j \le k$.

Les fonctions de Lagrange définies sur le *triangle de type (k)* constituent une base de l'espace P_k.

Exemple 3.3 (*Triangle de type (1)*)

$$P = P_1,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_i)\ ;\ 1 \le i \le 3\}.$$

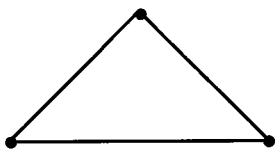
Les fonctions de base sont les fonctions barycentriques du point courant par rapport aux trois sommets du triangle:

$$w_i = \lambda_i\ ,\ 1 \le i \le 3,$$

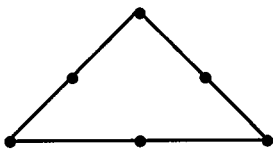
définies par

$$x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) a_i, \tag{3.5}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x). \tag{3.6}$$



(a) Triangle de type (1)
3 d°l



(b) Triangle de type (2)
6 d°l

Figure 3.2: Eléments de Lagrange sur le triangle.

Exemple 3.4 (*Triangle de type (2)*)

$$P = P_2,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_i)\ ;\ 1 \le i \le 3\} \cup \{p(a_{ij})\ ;\ 1 \le i < j \le 3\},$$

où le point a_{ij} est le milieu du côté $[a_i, a_j]$.

Les fonctions de base sont les fonctions

$$w_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1),\ \ 1 \le i \le 3, \tag{3.7a}$$

et $$w_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j,\ \ 1 \le i < j \le 3. \tag{3.7b}$$

3.2.3. Eléments finis de Lagrange en trois dimensions.

Nous désignerons par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point M de l'espace rapporté aux axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3.

a) Eléments de Lagrange sur le tétraèdre

L'élément géométrique est un tétraèdre K de sommets a_1, a_2, a_3 et a_4.

Soit P_k l'espace des polynômes de degré k à trois variables. Il est généré par les monômes $x_1^i x_2^j x_3^l$, $0 \le i + j + l \le k$. Sa dimension est

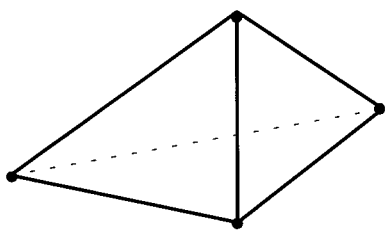
$$\dim P_k = (k+1)(k+2)(k+3)/6 \tag{3.8}$$

Exemple 3.5 (*Tétraèdre de type (1)*)

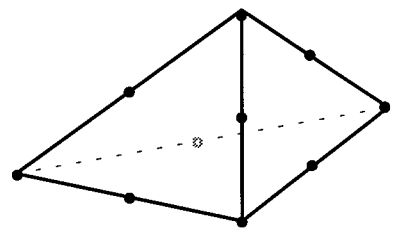
$$P = P_1,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_i)\ ;\ 1 \le i \le 4\}.$$

Les fonctions de base sont les fonctions barycentriques par rapport aux sommets du tétraèdre.



(a) Tétraèdre de type (1)
4 d°l



(b) Tétraèdre de type (2)
10 d°l

Figure 3.3: Eléments de Lagrange sur le tétraèdre.

Exemple 3.6 (*Tétraèdre de type (2)*)

$$P = P_2,$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_i)\ ;\ 1 \le i \le 4\} \cup \{p(a_{ij})\ ;\ 1 \le i < j \le 4\},$$

où le point a_{ij} est le milieu du côté $[a_i, a_j]$. On a dim P = card Σ= 10.

Les fonctions de base sont formellement identiques à celles donnant les fonctions de base du *triangle de type (2)*.

b) Eléments de Lagrange sur l'hexaèdre

L'élément géométrique K est un hexaèdre ou parallélépipède de sommets $\{a_i\}_{1 \le i \le 8}$.

On désigne par Q_k l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à *k* par rapport à chaque variable. L'espace Q_k est généré par les monômes $x_1^i x_2^j x_3^l$, $0 \le i \le k$, $0 \le j \le k$, $0 \le l \le k$. Nous avons:

$$\dim Q_k = (k+1)^3 \tag{3.9}$$

et $$P_k \subset Q_k \subset P_{3k}. \tag{3.10}$$

Les fonctions de Lagrange associées à l'*hexaèdre de type (k)* constituent une base de l'espace Q_k défini sur l'hexaèdre.

Nous donnons les fonctions de base pour un cube unité $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, K^r, de sommets $\{a_i^r\}_{1\le i\le 8}$. On pourra se ramener au cas du parallélépipède quelconque K par une application affine inversible F (voir plus loin section 3.3.3) telle que

$$a_j = F(a_j^r),\quad 1\le j\le 8.$$

Nous noterons (u_1,u_2,u_3) les coordonnées cartésiennes du point courant u de K^r (Figure 3.4), de sommets

$$a_1^r=(1,0,0),\ a_2^r=(1,1,0),\ a_3^r=(1,1,1),\ a_4^r=(1,0,1),$$

$$a_5^r=(0,0,0),\ a_6^r=(0,1,0),\ a_7^r=(0,1,1),\ a_8^r=(0,0,1).$$

Exemple 3.7 (*Hexaèdre de type (1)*)

$$P=Q_1,$$

$$\Sigma(p)=\{p(a_i)\ ;\ 1\le i\le 8\}.$$

Les huit fonctions de base s'écrivent:

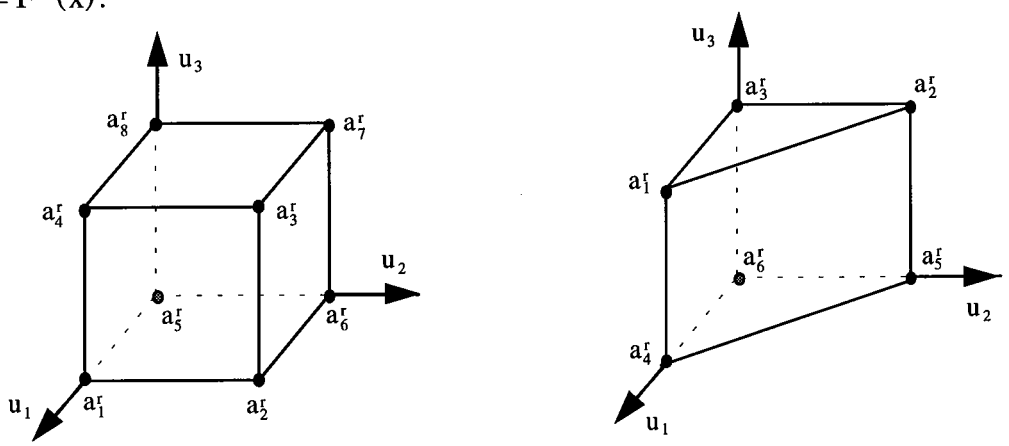
$$p_1(x)=u_1(1-u_2)(1-u_3),\qquad p_2(x)=u_1u_2(1-u_3),$$

$$p_3(x)=u_1u_2u_3,\qquad p_4(x)=u_1(1-u_2)u_3,$$

$$p_5(x)=(1-u_1)(1-u_2)(1-u_3),\qquad p_6(x)=(1-u_1)u_2(1-u_3),$$

$$p_7(x)=(1-u_1)u_2u_3,\qquad p_8(x)=(1-u_1)(1-u_2)u_3,$$

avec $u=F^{-1}(x)$.



(a) Cube unité de type (1)
8 d°l

(b) Prisme unité de type (1)
6 d°l

Figure 3.4: Eléments de Lagrange sur l'hexaèdre et sur le prisme.

c) Eléments de Lagrange sur le prisme

L'élément géométrique K est un prisme de sommets $\{a_i\}_{1\le i\le 6}$.

Nous désignons par $P_{k,l}$ l'espace des polynômes qui sont de degré k en les deux variables x_1 et x_2, et de degré l en la variable x_3. On a

$$\dim P_{k,l} = (l+1)(k+1)(k+2)/2 \tag{3.11}$$

et $$P_k \subset P_{k,k} \subset Q_k. \tag{3.12}$$

Les fonctions de Lagrange associées au prisme de *type (k)* sont une base de l'espace $P_{k,k}$ défini sur le prisme.

Tout comme dans le cas de l'hexaèdre, les fonctions de base sont données pour un prisme unité K^r (Figure 3.4), de sommets

$$a_1^r = (1,0,1),\ a_2^r = (0,1,1),\ a_3^r = (0,0,1),\ a_4^r = (1,0,0),\ a_5^r = (0,1,0),\ a_6^r = (0,0,0).$$

Exemple 3.8 (*Prisme de type (1)*)

$$P = P_{1,1},$$

$$\Sigma(p) = \{p(a_i)\ ;\ 1 \le i \le 6\}.$$

Nous avons les fonctions de base

$$p_1(x) = u_1(1-u_2)u_3, \qquad p_2(x) = (1-u_1)u_2u_3, \qquad p_3(x) = (1-u_1)(1-u_2)u_3,$$
$$p_4(x) = u_1(1-u_2)(1-u_3), \qquad p_5(x) = (1-u_1)u_2(1-u_3), \qquad p_6(x) = (1-u_1)(1-u_2)(1-u_3),$$

avec $u = F^{-1}(x)$.

Remarque 3.1:

- De l'inclusion (3.12), il apparaît que, dans l'ordre du plus précis (de celui qui interpole le mieux), viennent les éléments de Lagrange construits sur l'hexaèdre puis ceux sur le prisme et enfin ceux construits sur le tétraèdre, les éléments géométriques étant du même *type k*.

3.3. ELEMENTS FINIS MIXTES DE *H*(ROT)

Les éléments mixtes de *H*(rot) sont des éléments finis vectoriels où l'espace P est un espace de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3). Ces éléments finis sont *conformes dans H*(rot) c'est à dire que l'interpolée d'une fonction **v** définie sur K est à *composantes tangentielles continues* au passage d'un élément à un autre, ou, de façon équivalente, que l'annulation des degrés de liberté définis sur une face (resp. une arête) entraîne l'annulation de la composante tangentielle à la face (resp. à l'arête).

Principes fondamentaux

- Pour pouvoir imposer la continuité de la composante tangentielle des fonctions que l'on veut approcher, on détermine de façon unique cette composante sur chaque variété frontalière de l'élément par la seule donnée des degrés de liberté définis sur cette variété; elle sera alors naturellement commune aux éléments voisins. On dit que l'on localise la composante tangentielle sur les frontières de l'élément.
- On commence par réserver un certain nombre (selon l'espace d'interpolation P) de degrés de liberté pour définir la composante tangentielle de l'interpolée sur chaque variété frontalière, et on complète éventuellement avec des degrés de liberté internes qui restent propres à l'élément.
- Les degrés de liberté sont donc associés aux composants géométriques de l'élément à savoir: arête, face et volume; d'où le nom d'éléments mixtes.

Il existe deux familles d'éléments mixtes de *H*(rot), l'une est dite "incomplète" et l'autre "complète" [25]. La première est décrite dans [55] tandis que la seconde est décrite dans [56]. Pour la famille incomplète, l'espace d'interpolation P est un espace spécial de vecteurs dont les composantes tangentielles et normale appartiennent à des espaces de polynômes différents. Pour la famille complète l'espace d'interpolation P est simplement un produit d'un même espace de polynômes; un vecteur de P a ses composantes tangentielles et normale de degré identique. Un exposé sur ces deux familles d'éléments mixtes est effectué dans [25].

Nous commençons par rappeler les définitions générales des deux familles d'éléments mixtes telles qu'elles sont données dans [55-57], puis nous explicitons les fonctions de base pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deux sur les éléments géométriques les plus courants.

3.3.1. Eléments finis mixtes de *H*(rot) sur le triangle.

Nous rappelons les espaces de polynômes introduits dans [55] associés aux éléments mixtes que nous allons décrire. On appelle (x_1, x_2) les coordonnées d'un point M du plan rapporté aux axes Ox_1 et Ox_2.

$$R_k = (P_{k-1})^2 \oplus S_k, \tag{3.14}$$

$$S_k = \left\{ \mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^2 ;\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 0 \right\}, \text{ ou } S_k = \tilde{P}_{k-1} \begin{cases} -x_2 \\ x_1 \end{cases}. \tag{3.15}$$

$$D_k = (P_{k-1})^2 \oplus \tilde{P}_{k-1}\mathbf{r}.$$

où $\tilde{P}_k$ est l'espace des polynômes *homogènes*, à deux variables, de degré k (généré par les monômes $x_1^i x_2^j$, $i+j=k$) et $\mathbf{r}$ est le vecteur qui définit la position du point courant M de coordonnées x_1 et x_2 : $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$.

L'espace P_k est celui défini à la section 3.2.2 . L'espace $(P_k)^2$ est un espace de vecteurs de IR^2 dont chaque composante est dans P_k.

La somme directe $\oplus$ implique que l'écriture de $\mathbf{p} \in (P_{k-1})^2$ en $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{s}_k$ avec $\mathbf{p}_{k-1} \in (P_{k-1})^2$ et $\mathbf{s}_k \in S_k$ est unique. Nous avons:

$$\dim \tilde{P}_k = k+1; \quad \dim S_k = k; \quad \dim R_k = k(k+2); \quad \dim D_k = k(k+2).$$

L'espace spécial R_k servira à la définition de la famille incomplète tandis que les espaces $(P_k)^2$ et D_k à celle de la famille complète.

Nous noterons Σ_V l'ensemble des degrés de liberté associés à un composant géométrique V, σ_V la forme linéaire associée à V, $P_k(V)$ la restriction de P_k à V, lorsque V est une sous-variété de K, et τ_i est le vecteur tangent à un côté C_i et l'orientant.

Exemple 3.9 *(Famille Incomplète sur le triangle)*

$P = R_k$,

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1 (associés aux arêtes)

$$\sigma_{C_i}(\mathbf{p}) = \int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \tau_i\ \varphi(s)\ ds \ ;\ \forall\ \varphi \in P_{k-1}(C_i),\ i = 1, 2, 3; \tag{3.16}$$

Type 2 (associés au volume)

$$\sigma_K(\mathbf{p}) = \int_K \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,dx \quad ; \forall\, \mathbf{q} \in \left(P_{k-2}\right)^2. \tag{3.17}$$

L'élément fini ci-dessus respecte la *Définition 3.1* et est R_k-unisolvant; la démonstration est effectuée dans [57]. Bien que la donnée de $\Sigma(\mathbf{p})$ soit suffisante pour définir de façon unique toute fonction $\mathbf{p}$ élément de P, la connaissance des fonctions de base est indispensable pour la définition du *P-interpolé* de toute fonction $\mathbf{v}$ définie sur K, en d'autres termes à la discrétisation de notre problème variationnel. L'unisolvance de cet élément fini nous assure que ses degrés de liberté génèrent bien ses fonctions de base et nous autorise à rechercher ces dernières. Dans un premier temps, nous essayons de mettre en évidence les principes qui sont contenus dans la définition de cet élément fini (espace d'interpolation et degrés de liberté). Ensuite nous exposons une méthodologie qui s'appuie sur ces principes et qui permet d'exhiber les fonctions de base relatives à cet élément fini.

- Par construction, l'espace des polynômes $P = R_k$ est intermédiaire entre les espaces de polynômes $\left(P_{k-1}\right)^2$ et $\left(P_k\right)^2$:

$$\left(P_{k-1}\right)^2 \subset R_k \subset \left(P_k\right)^2. \tag{3.18}$$

Aussi la donnée d'une base de $P = R_k$ n'est pas suffisante pour générer tout polynôme de l'espace $\left(P_k\right)^2$ contrairement aux fonctions de Lagrange associées au triangle de *type (k)* qui peuvent génèrer les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ayant chacune de leurs composantes dans P_k, d'où le caractère *incomplet* de cet élément fini mixte.

- La composante tangentielle de $\mathbf{p}$, appartenant à $P = R_k$, le long d'une arête est un polynôme en la variable curviligne s de degré *(k-1)*: $\mathbf{p}\cdot\tau_i$ appartient à l'espace $P_{k-1}\left(C_i\right)$.

La restriction de $\mathbf{p}$ élément de R_k, $\mathbf{p}_{|C_i}$, à une arête C_i, est un polynôme de degré *(2k+1)*.

En effet,

$$\mathbf{p} \in R_k \text{ entraîne } \mathbf{p}_{|C_i} \in \left(P_{k-1}\left(C_i\right)\right)^2 \oplus P_{k-1}\left(C_i\right)\begin{Bmatrix} -x_2(s) \\ x_1(s) \end{Bmatrix}. \tag{3.19}$$

Or, le long de l'arête C_i, on a:

$$\tau_i \cdot \begin{Bmatrix} -x_2(s) \\ x_1(s) \end{Bmatrix} = \pm\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \text{cste}, \tag{3.20}$$

l'équation de l'arête C_i étant $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \text{cste}$; où $\mathbf{n}_i$ est un vecteur normal au côté C_i et $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$. On en déduit, avec (3.19), que $\mathbf{p} \cdot \tau_i$ appartient à l'espace $P_{k-1}(C_i)$ et donc que la composante normale, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_i$, appartient à l'espace $P_k(C_i)$, d'où une fois encore le caractère *incomplet* de cet élément mixte.

• La composante tangentielle de $\mathbf{p}$ le long d'une arête C_i est déterminée de façon unique par la donnée de l'ensemble $\Sigma_{C_i}(\mathbf{p})$ des degrés de liberté de $\mathbf{p}$ définis sur l'arête C_i.

La forme linéaire σ_{C_i} est induite par le produit scalaire qui, à deux fonctions ϕ et φ de $P_{k-1}(C_i)$, associe le réel:

$$<\phi, \varphi>_{C_i} = \int_{C_i} \phi \, \varphi \, ds.$$

Le polynôme $\phi = \mathbf{p} \cdot \tau_i$ étant un élément de $P_{k-1}(C_i)$, la donnée de $\sigma^j_{C_i}(\mathbf{p})$ pour chaque fonction φ^j élément d'une base $\{\varphi^j(s)\}$, $1 \leq j \leq k$, de $P_{k-1}(C_i)$ détermine de façon unique $\phi = \mathbf{p} \cdot \tau_i$. En clair, la composante tangentielle de $\mathbf{p}$ le long d'une arête étant un polynôme en la variable curviligne s de degré *(k-1)*, elle est définie de façon unique par la donnée de $\Sigma_{C_i}(\mathbf{p})$. Ce résultat entraîne les deux points suivants.

• Le nombre de d°l par arête est:

$$\text{card } \Sigma_{C_i} = \dim P_{k-1}(C_i) = k.$$

• L'élément fini est conforme dans *H*(rot).

L'annulation des degrés de liberté associés à une arête entraîne $\mathbf{p} \cdot \tau = 0$ sur cette arête, ce qui prouve que l'élément fini est conforme dans *H*(rot) et est donc à composantes tangentielles continues.

• Cet élément fini mixte n'est pas conforme (de classe C^0).

En effet, d'après (3.19), il faut *(2k+1)* paramètres pour définir la restriction de $\mathbf{p}$ à une arête C_i. Or, on n'a que *k* degrés de liberté par arête, par conséquent, la donnée de $\Sigma_{C_i}(\mathbf{p})$ ne suffit pas pour déterminer $\mathbf{p}_{|C_i}$: Σ_{C_i} n'est pas P_{C_i}-unisolvant, à l'opposé de l'élément fini de Lagrange.

• Il reste $nd = (k-1)k$ degrés de liberté que l'on associe au volume; ce qui correspond à la dimension de l'espace $(P_{k-2})^2$.

D'une part la localisation de la composante tangentielle sur chaque arête ayant nécessité *3k* degrés de liberté et, d'autre part, l'espace $\mathsf{P}=\mathsf{R}_k$ étant de dimension $k(k+2)$, il reste bien $nd=(k-1)k$ degrés de liberté à repartir sur l'élément. Nous montrons que les degrés de Type 2 correspondent à ces *nd* degrés de liberté.

La restriction de la forme linéaire σ_K à l'espace $(\mathsf{P}_{k-2})^2$ est induite par un produit scalaire sur $(\mathsf{P}_{k-2})^2$. Ce produit hermétique associe à deux fonctions $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{q}$ de $(\mathsf{P}_{k-2})^2$ le réel:

$$<\mathbf{p}',\mathbf{q}>_K=\int_K \mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}\,dx.$$

En conséquence la donnée de $\sigma_K^j(\mathbf{p}')$ pour chaque fonction $\mathbf{q}^j$ élément d'une base $\{\mathbf{q}^j\}$, $1\le j\le nd$ de l'espace $(\mathsf{P}_{k-2})^2$, détermine de façon unique tout polynôme $\mathbf{p}'$ élément de $(\mathsf{P}_{k-2})^2$. Pour $\mathbf{p}$ de P n'appartenant pas à $(\mathsf{P}_{k-2})^2$, la donnée de $\sigma_K^j(\mathbf{p})$, $1\le j\le nd$, ne détermine pas $\mathbf{p}$. Néanmoins elle nous offre *nd* relations linéaires indépendantes qui correspondent aux degrés de liberté restants. Ainsi le nombre de d°l de Type 2 est:

$$\text{card } \Sigma_K = \dim(\mathsf{P}_{k-2})^2 = (k-1)k.$$

Le nombre total de d°l est donc: $3k+(k-1)k=k(k+2)$. On a bien: card $\Sigma=\dim \mathsf{P}$.

Nous exposons à présent la méthodologie que nous avons utilisée pour calculer des fonctions de base de l'espace R_k à partir de la donnée des degrés de liberté de Type 1 et de Type 2.

<u>Fonctions de base de Type 1</u>

Soit $\mathbf{w}$ une fonction de base associée à l'arête C_i.

(i) On écrit, dans un repère local au triangle, que $\mathbf{w}$ est élément de l'espace R_k.

On a donc dim $\mathsf{R}_k=k(k+2)$ paramètres à déterminer.

(ii) On écrit que $\mathbf{w}\cdot\tau_j$ est nul sur les arêtes C_j, $j\neq i$, soit que $\mathbf{w}|_{C_j}$ est normal aux arêtes différentes de C_i. On annule ainsi les degrés de liberté (d°l) associés aux arêtes autres que C_i. Cela nous donne $2\dim \mathsf{P}_{k-1}(C_i)=2k$ relations indépendantes ou paramètres.

(iii) On écrit que $\mathbf{w}$ annule les autres types de degrés de liberté, ici associés au volume.

Pour ce faire on décompose la fonction **q**, élément de $(P_{k-2})^2$, sur une base $\{\mathbf{q}^l\}$, $1 \le l \le (k-1)k/2$, de $(P_{k-2})^2$; les fonctions de Lagrange définies sur le *triangle de type (k-2)* constituent une base tout indiquée de P_{k-2}. On écrit ensuite que pour chaque fonction de pondération, $\mathbf{q}^l$, le moment de Type 2 est nul. Nous obtenons ainsi $\dim(P_{k-2})^2 = (k-1)k$ paramètres de plus. Il reste alors *k* paramètres indépendants à trouver afin de déterminer **w**.

(iv) A ce stade il s'agit de trouver les *k* fonctions de base $\{\mathbf{w}^l\}$, $1 \le l \le k$, associées à l'arête C_i et les *k* fonctions de pondération $\{\varphi^m\}$, $1 \le m \le k$, correspondantes telles que:

$$\int_{C_i} \mathbf{w}^l \cdot \tau_i \, \varphi^m \, ds = \delta_{lm} = \begin{cases} 1, & \text{pour } l = m \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}, \quad 1 \le l, m \le k. \tag{3.21}$$

Chaque fonction de pondération φ^m, en tant qu'élément de $P_{k-1}(C_i)$, peut s'épandre dans la base constituée par les fonctions de Lagrange, $\{w_j(s)\}_{1 \le j \le k}$, de $P_{k-1}(C_i)$:

$$\varphi^m = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m w_j(s). \tag{3.22}$$

Posons

$$\beta_j^l = \int_{C_i} \mathbf{w}^l \cdot \tau_i \, w_j(s) \, ds, \quad 1 \le j, l \le k; \tag{3.23}$$

la quantité β_j^l correspond au degré de liberté associé à $\mathbf{w}^l$ lorsque l'on prend $\varphi = w_j$ comme fonction de pondération dans la définition du moment de Type 1 (3.16). Rappelons que pour *l fixé*, le vecteur de base $\mathbf{w}^l$ est entièrement défini par la donnée des k coefficients β_j^l. De (3.21), (3.22) et (3.23), on a:

$$\int_{C_i} \mathbf{w}^l \cdot \tau_i \, \varphi^m \, ds = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \beta_j^l = \delta_{lm}, \quad 1 \le l, m \le k \tag{3.24}$$

Le système d'équations (3.21) peut être perçu comme la détermination, pour *l fixé*, des coefficients $\{\beta_j^l\}$, $1 \le j \le k$, les coefficients $\{\varphi_j^m\}$, $1 \le j, m \le k$, étant donnés, ou, inversement, comme la détermination pour *m fixé* des coefficients $\{\varphi_j^m\}$, $1 \le j \le k$, les coefficients $\{\beta_j^l\}$, $1 \le j, l \le k$, étant donnés. Le système (3.21) peut s'écrire

- pour *l fixé*, $[\varphi]\{\beta^l\} = \{\delta^l\}$, (3.25)

avec $[\varphi]_{mj} = \varphi_j^m$,

$\{\beta^l\}_j = \beta_j^l$, $\qquad \{\delta^l\}_j = \delta_{lj}$;

dans ce cas la matrice $[\varphi]$ doit vérifier dét$[\varphi] \neq 0$;

- pour *m fixé*, $[\beta]\{\varphi^m\} = \{\delta^m\}$, (3.26)

avec $[\beta]_{lj} = \beta^l_j$,

$\{\varphi^m\}_j = \varphi^m_j$, $\{\delta^m\}_j = \delta_{mj}$;

dans ce cas la matrice $[\beta]$ doit vérifier dét$[\beta] \neq 0$.

En résumé, soit on se donne des d°l (plus précisement les fonctions de pondération) sous certaines conditions (dét$[\varphi] \neq 0$) et on détermine les fonctions de base correspondantes, soit, inversement, on se donne les fonctions de base sous certaines conditions (dét$[\beta] \neq 0$) et on détermine les degrés de liberté correspondants. Un choix très simple est de prendre, lorsque l'on résoud (3.25), les fonctions de pondération de sorte que la matrice $[\varphi]$ soit égale à la matrice identité [Id]; cela revient à choisir les fonctions de pondération égales aux fonctions de Lagrange. De façon similaire, lorsque l'on résoud (3.26), il est simple de se donner la matrice $[\beta]$ égale à la matrice [Id].

Fonctions de base de Type 2

Soit **w** une fonction de base associée au volume K.

(v) On écrit, dans un repère local au triangle, que **w** est élément de l'espace R_k.

On a toujours dim $\mathsf{R}_k = k(k+2)$ paramètres à déterminer.

(vi) On écrit que $\mathbf{w} \cdot \tau = 0$ sur les arêtes C_i, $1 \leq i \leq 3$, soit $\mathbf{w}_{|C_i}$ normal à l'arête C_i, $1 \leq i \leq 3$.

On annule ainsi tous les degrés de liberté de Type 1. On obtient alors $3\dim \mathsf{P}_{k-1}(C_i) = 3k$ relations indépendantes ou paramètres. Il reste exactement nd = $(k-1)k$ paramètres indépendants à trouver afin de déterminer **w**.

(vii) A ce niveau, **w** peut être identifiée à un polynôme de degré *k-2*, autrement dit **w** est fonction d'un polynôme **v** appartenant à $(\mathsf{P}_{k-2})^2$ dont la connaissance donne **w**. Le moment dans la définition des degrés de liberté de Type 2 est induit par un produit scalaire sur $(\mathsf{P}_{k-2})^2$, par conséquent la donnée de ces degrés de liberté suffit pour déterminer **v**. Il s'agit donc de trouver les *nd* fonctions de base $\{\mathbf{w}^l\}$, $1 \leq l \leq nd$, associées au volume et les *nd* fonctions de pondération $\{\mathbf{q}^m\}$, $1 \leq m \leq nd$, correspondantes telles que:

$$\int_K \mathbf{w}^l \cdot \mathbf{q}^m \, dx = \delta_{lm}, \quad 1 \le l, m \le nd. \tag{3.27}$$

Là encore, on peut choisir les fonctions de Lagrange pour générer les fonctions de pondération. On suit alors une procédure similaire à celle de l'étape (iv).

Remarque 3.2:

- On peut remplacer les moments dans la définition des degrés de Type 1 par la valeur de la composante tangentielle de la fonction **p** en des points (noeuds) régulièrement répartis sur l'arête et ceux de Type 2 par la valeur de la fonction **p** en des points régulièrement répartis à l'intérieur du triangle (comme il est fait avec les éléments de Lagrange).
- Il est possible de retrouver les autres fonctions de base associées au côté C_i à partir des relations (3.25) et (3.26) en se donnant d'autres fonctions de pondération que celles de Lagrange (par exemple les fonctions de la base canonique).
- Lorsque la fonction **p** n'est pas un polynôme (ou est un polynôme de degré supérieur à *k*), l'annulation des degrés de liberté de Type 1 entraîne que la composante tangentielle de **p**, $\mathbf{p} \cdot \tau_i$, le long de l'arête C_i est nulle faiblement (presque partout sur l'arête) ou encore est le plus proche de 0 au sens du produit hermétique défini sur $\mathsf{P}_{k-1}(C_i)$.

Exemple 3.9-1 *(Elément mixte R1 sur le triangle)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.9 pour k = 1.

$\mathsf{P} = \mathsf{R}_1$,

Σ est constitué uniquement des moments de Type 1.

On a un seul degré de liberté par arête, soit un total de 3 degrés de liberté associés au triangle. La fonction de base associée à une arête C définie par le couple de sommets (a_i, a_j) s'écrit:

$$\mathbf{w}_C = t_0\left(\lambda_i \nabla\lambda_j - \lambda_j \nabla\lambda_i\right), \tag{3.28}$$

de d°l $$\sigma_C(\mathbf{p}) = \int_C \mathbf{p} \cdot \tau \, \varphi_0 \, ds, \tag{3.29}$$

où $(\lambda_i)_{1 \le i \le 3}$ sont les coordonnées barycentriques du point courant par rapport aux trois sommets du triangle.

Avec le choix $t_0 = \varphi_0 = 1$, on retrouve bien les éléments d'arêtes de Whitney [59]. Dans ce cas le degré de liberté (3.29) correspond à *la circulation* de **p** le long de l'arête C.

L'on peut vérifier que la fonction de base (3.28) respecte bien les étapes (i) à (iv) de la méthodologie ci-dessus.

L'élément fini est symbolisé par la Figure 3.5 (a): le point ou noeud concrétise les degrés de liberté auquels il est associé et est situé au milieu de l'arête, le nombre entre parenthèse, 1, indique celui des d°l, le vecteur représente le vecteur tangent indispensable à la définition du degré de liberté et oriente l'arête.

La composante tangentielle de $\mathbf{w}_C$ le long de l'arête $C = \{a_i, a_j\}$ est:

$$\mathbf{w}_C \cdot \tau = t_0 / \mathrm{mes}(C). \tag{3.30}$$

Cette composante tangentielle est constante le long de l'arête C, on retrouve bien que $\mathbf{w}_C \cdot \tau$ est polynôme de $\mathsf{P}_{k-1}(C)$ avec k = 1. La donnée de t_0 suffit pour définir la fonction de base (3.28); par conséquent, on peut remplacer le degré de liberté (3.29) par la valeur de $\mathbf{w}_C \cdot \tau$ au point milieu $\{a_{ij}\}$ de l'arête C [55].

Nous avons la relation suivante:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{w}_C = 2t_0 \nabla\lambda_i \times \nabla\lambda_j. \tag{3.31}$$

(a) Triangle de type (1) incomplet 3 d°l *(b) Triangle de type (2) incomplet 8 d°l*

Figure 3.5: Famille incomplète sur le triangle.

Les éléments R1 sont les éléments mixtes de plus bas degré et les plus employés dans les problèmes de cavités micro-ondes [62,66,67]. Ils ont beaucoup contribué à l'utilisation des éléments mixtes dans la modélisation des problèmes électromagnétiques.

Exemple 3.9-2 *(Elément mixte R2 sur le triangle)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.9 avec k = 2.

$P = R_2$.

On a 2 d°l par arête et 2 d°l internes au triangle. Soit un total de 8 d°l par triangle.

La méthodologie précédente permet de trouver la forme générale des deux vecteurs de base de Type 1, associés à une arête $C = \{a_i\ ,\ a_j\}$:

$$\mathbf{w}_C = (\alpha_1 + t)\lambda_i \nabla\lambda_j - (\alpha_2 + t)\lambda_j \nabla\lambda_i, \tag{3.32}$$

où $t = t_1\lambda_i + t_2\lambda_j$; $t_1 = 4(-2\alpha_1 + \alpha_2)/3$; $t_2 = 4(\alpha_1 - 2\alpha_2)/3$.

Le choix des coefficients $(\alpha_1^1\ ,\ \alpha_2^1)$ et $(\alpha_1^2\ ,\ \alpha_2^2)$ associés respectivement aux fonctions de base $\mathbf{w}_C^1$ et $\mathbf{w}_C^2$ est régi par la condition dét$[\beta] \neq 0$ (voir étape (iv)) qui s'écrit plus simplement $\alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^1 \neq 0$. Les fonctions de pondération sont alors déterminées en résolvant (3.26).

Les deux vecteurs de base de Type 2 s'écrivent dans une base $(\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$ comme suit:

$$\mathbf{w}_K = (\alpha_1 + t)\lambda_i \nabla\lambda_j - (\alpha_2 + t)\lambda_j \nabla\lambda_i, \tag{3.33}$$

avec $t_1 = -\alpha_1$ et $t_2 = -\alpha_2$.

Les coefficients α_1 et α_2 sont déterminés en suivant l'étape (vii) selon une procédure semblable à celle des fonctions de base de Type 1.

L'élément fini est symbolisé par la Figure 3.5 (b): pour l'arête, nous avons le même symbolisme que dans l'exemple précédent, les degrés de liberté définis sur la face sont concrétisés par un point ou noeud qui est situé au barycentre de la face, l'entier entre parenthèse, 2, correspond à leur nombre et les deux vecteurs ayant leur origine à ce noeud représente une base locale à la face et sont indispensables à leur définition.

On note τ un vecteur unitaire tangent à l'arête C. On définit $\delta = 1$ si τ oriente l'arête de $\{a_i\}$ vers $\{a_j\}$, $\delta = -1$ sinon. Nous avons les relations suivantes:

$$\tau \cdot \mathbf{w}_C = \delta\{(\alpha_1 + t_1)\lambda_i(s) + (\alpha_2 + t_2)\lambda_j(s)\} / \text{mes}(C), \tag{3.34}$$

$$\text{rot}\, \mathbf{w}_C = \{(\alpha_1 + \alpha_2) + 3(t_1\lambda_i + t_2\lambda_j)\}\nabla\lambda_i \times \nabla\lambda_j, \tag{3.35}$$

où $(\lambda_i(s))_{1\leq i\leq 2}$ sont les coordonnées barycentriques du point courant par rapport aux deux sommets de l'arête $\{a_i, a_j\}$ et les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 3}$ sont comme définies à l'exemple précédent.

Il est net que les fonctions de base de Type 2 annulent le second membre de (3.34); leur rotationnel est donné par (3.35). La composante tangentielle de $\mathbf{w}_C$ est bien un polynôme à la variable curviligne s de degré 1 ($\tau \cdot \mathbf{w}_C$ élément de $P_{k-1}(C)$ avec k = 2). Elle est définie à l'aide des coefficients α_1 et α_2, et des fonctions $\lambda_i(s)$ et $\lambda_j(s)$ qui sont continues d'un élément à un autre, d'où la continuité de la composante tangentielle. Par ailleurs les fonctions $\lambda_i(s)$ et $\lambda_j(s)$ sont définies uniquement par la donnée des sommets $\{a_i\}$ et $\{a_j\}$, d'où la localisation de la composante tangentielle sur l'arête C. Les coefficients α_1 et α_2 sont entièrement déterminés par la donnée de $\tau \cdot \mathbf{w}_C$ aux sommets $\{a_i\}$ et $\{a_j\}$, on peut donc remplacer les degrés de liberté de Type 1 par la donnée de la composante tangentielle aux sommets de l'arête.
Des exemples de choix de coefficients α_1 et α_2 sont donnés en annexes A.

Remarque 3.3:

- Sous la forme (3.33), le vecteur de base de Type 2 apparaît être associé à une arête $\{a_i, a_j\}$. Le choix de la base $(\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$, ou de l'arête associée, peut se faire en prenant comme critère l'écartement des vecteurs $\nabla\lambda_i$ et $\nabla\lambda_j$: ceux ci doivent être peu colinéaires.
- La forme générale (3.32) (resp. 3.33) est indépendante du choix des degrés de liberté, par conséquent elle est vérifiée par toute fonction de base associée à l'arête C (resp. au volume K). Par contre, les relations qui relient les coefficients α_1, α_2, t_1 et t_2 sont moins générales et dépendent du choix des degrés de liberté de Type 2 (intégrales pondérées ou valeurs à des noeuds).

Exemple 3.10 *(Famille Complète sur le triangle)*

$P = (P_k)^2$,

Σ est constitué d'intégrales pondérées suivantes:

Type 1

$$\sigma_{C_i}(\mathbf{p}) = \int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \tau_i \varphi(s)\, ds \quad ; \forall\, \varphi \in P_k(C_i)\ , i = 1, 2, 3; \tag{3.36}$$

Type 2

$$\sigma_K(\mathbf{p}) = \int_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, dx \quad ; \forall\, \mathbf{q} \in D_{k-1}. \tag{3.37}$$

Le nombre de d°l par arête est: $(k+1)$.

Le nombre de d°l de type 2 est: $(k-1)(k+1)$

Le nombre total de d°l est: $\dim \mathsf{P} = (k+1)(k+2)$.

L'espace P est confondu avec l'espace des polynômes $(\mathsf{P}_k)^2$ sur le triangle, d'où le caractère *complet* de cet élément fini mixte.

De la même façon que dans l'Exemple 3.9, on montre que cet élément fini n'est pas conforme, il reste néanmoins conforme dans *H*(rot). Cette fois-ci les composantes tangentielle et normale d'un élément de P sont tous deux du même degré *k+1*.

Le passage de R_k à $(\mathsf{P}_k)^2$ se fait en ajoutant les polynômes qui sont les gradients d'un polynôme homogène de degré $(k+1)$. En effet, si on note G_k l'espace des polynômes homogènes de degré k qui sont les gradients d'un polynôme homogène de degré $(k+1)$, soit $\mathsf{G}_k = \text{grad}\, \tilde{\mathsf{P}}_{k+1}$, on a alors d'après [57]:

$$(\tilde{\mathsf{P}}_k)^2 = \mathsf{S}_k \oplus \mathsf{G}_k. \tag{3.38}$$

D'autre part, on a la relation

$$(\mathsf{P}_k)^2 = (\mathsf{P}_{k-1})^2 \oplus (\tilde{\mathsf{P}}_k)^2. \tag{3.39}$$

On en déduit:

$$(\mathsf{P}_k)^2 = \mathsf{R}_k \oplus \mathsf{G}_k. \tag{3.40}$$

De (3.31), il est clair que ces deux espaces ont le même rotationnel:

$$\text{rot}\,(\mathsf{P}_k)^2 = \text{rot}\,\mathsf{R}_k. \tag{3.41}$$

Le calcul des fonctions de base se fait en suivant la même procédure que dans l'Exemple 3.9, en adaptant aux nouveaux espaces de polynômes d'interpolation et de pondération.

Exemple 3.10-1 *(Elément mixte P1 sur le triangle)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.10 avec k = 1.

$$\mathsf{P} = (\mathsf{P}_1)^2,$$

Σ est uniquement constitué des moments de Type 1.

Les deux vecteurs de base de Type 1, associés à une arête $C = \{a_i, a_j\}$, ont la forme générale:

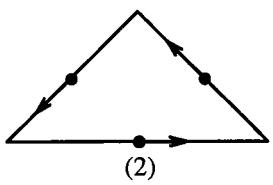
$$\mathbf{w}_C = \alpha_1 \lambda_i \nabla\lambda_j - \alpha_2 \lambda_j \nabla\lambda_i. \tag{3.42}$$

On a les propriétés

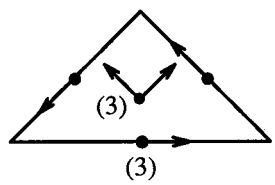
$$\tau \cdot \mathbf{w}_C = \delta\big(\alpha_1 \lambda_i(s) + \alpha_2 \lambda_j(s)\big) / \operatorname{mes}(C), \tag{3.43}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{w}_C = (\alpha_1 + \alpha_2) \nabla\lambda_i \times \nabla\lambda_j. \tag{3.44}$$

La donnée des coefficients α_1 et α_2 définit de façon unique la fonction de base (3.42). Ces coefficients ne sont autres que les valeurs de $\tau \cdot \mathbf{w}_C$ respectivement aux points $\{a_i\}$ et $\{a_j\}$. On peut donc remplacer les degrés de liberté de Type 1 par les valeurs de $\tau \cdot \mathbf{w}_C$ en ces points et retrouver ainsi les fonctions de base de *l'élément P1* apparues dans [25,65].



(a) Triangle de type (1) complet
6 d°l



(b) Triangle de *type (2) complet*
12 d°l

Figure 3.6: Famille complète sur le triangle.

Exemple 3.10-2 *(Elément mixte P2 sur le triangle)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.10 avec k = 2.

$$\mathsf{P} = (\mathsf{P}_2)^2,$$

L'élément fini comporte 3 d°l par arête et 3 d°l internes au volume, soit au total 12 d°l.

Les trois fonctions de base associées à une arête $C = \{a_i, a_j\}$, se mettent sous la forme:

$$\mathbf{w}_{ij} = \big(\alpha_1 N_i + \beta_{12}(N_{ij} - N_{il})\big)\nabla\lambda_j + \big(\alpha_2 N_j + \alpha_{12}(N_{ji} - N_{jl})\big)\nabla\lambda_i, \tag{3.45}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 4(\alpha_{12} + \beta_{12})$; où $\{N_i\}_{1\le i\le 3}$ et les $\{N_{ij}\}_{1\le i<j\le 3}$ sont les fonctions de Lagrange associées au *triangle de type (2)* (par convention on a posé $N_{ji} = N_{ij}$).

Les trois vecteurs de base de Type 2 s'écrivent dans une base $(\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$ comme suit:

$$\mathbf{w}_K = (\alpha_{12} N_{ij} + \alpha_{13} N_{il})\nabla\lambda_j + (\alpha_{12} N_{ji} + \alpha_{23} N_{jl})\nabla\lambda_i. \tag{3.46}$$

Remarque 3.4:

- L'élément fini P1 s'intercale entre les éléments R1 et R2, tandis que l'élément R2 s'intercale entre l'élément P1 et l'élément P2 en termes de nombre de degré de liberté et donc de précision (meilleure interpolation).

- Les rotationnels d'un élément R1, (3.31), et d'un élément P1, (3.44), appartiennent au même espace de polynômes. Celui d'un élément R1 est toujours non nul tandis que celui d'un élément P1 peut être nul selon le choix des coefficients α_1 et α_2.

- Nous avons les hiérarchisations suivantes:

$$R1 \subset P1 \subset R2 \subset P2 \ldots. \subset Rk \subset Pk,$$

$$\text{rot } R1 = \text{rot } P1 \subset \text{rot } R2 = \text{rot } P2 \ldots. \subset \text{rot } Rk = \text{rot } Pk.$$

3.3.2 Eléments finis mixtes de *H*(rot) en trois dimensions

a) *Eléments de H(rot) sur le tétraèdre*

Les espaces de polynômes R_k et D_k sont définis comme en deux dimensions:

$$R_k = (P_{k-1})^3 \oplus S_k, \qquad S_k = \left\{\mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^3;\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{p} = 0\right\}, \qquad D_k = (P_{k-1})^3 \oplus \tilde{P}_{k-1}\mathbf{r}.$$

où $\tilde{P}_k$ est l'espace des polynômes homogènes, à trois variables, de degré k (généré par les monômes $x_1^i x_2^j x_3^l$, $i+j+l=k$) et $\mathbf{r}$ est le vecteur: $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. L'espace P_k est défini comme à la section 3.2.3. L'espace $(P_k)^3$ est un espace de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont chaque composante est dans P_k. On a :

$$\dim \tilde{P}_k = (k+1)(k+2)/2; \qquad \dim S_k = k(k+2);$$

$$\dim R_k = k(k+2)(k+3)/2; \qquad \dim D_k = k(k+1)(k+3)/2.$$

Nous désignerons par $(\lambda_i)_{1\le i\le 4}$ les coordonnées barycentriques du point courant par rapport aux quatre sommets du tétraèdre.

Exemple 3.11 *(Famille Incomplète sur le tétraèdre)*

$P = R_k$,

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1 (associés aux arêtes)

$$\sigma_{C_i}(\mathbf{p}) = \int_{C_i} \mathbf{p}\cdot\tau_i\ \varphi(s)\ ds\ ,\ \forall\ \varphi \in P_{k-1}(C_i)\ ,\ i = 1 \text{ à } 6\ ; \tag{3.47}$$

Type 2 (associés aux faces)

$$\sigma_{f_i}(\mathbf{p}) = \int_{f_i} (\mathbf{p}\times\mathbf{n}_i)\cdot\mathbf{q}\ d\gamma\ ,\ \forall\ \mathbf{q} \in \left(P_{k-2}(f_i)\right)^2\ ,\ i = 1 \text{ à } 4; \tag{3.48}$$

Type 3 (associés au volume)

$$\sigma_K(\mathbf{p}) = \int_K \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\ dx\ ,\ \forall\ \mathbf{q} \in \left(P_{k-3}\right)^3. \tag{3.49}$$

L'ensemble, A_f, des degrés de liberté associés à une face *f* et aux arêtes de cette face est exactement celui de l'élément fini en deux dimensions de l'Exemple 3.9 (famille incomplète sur le triangle). La partie tangentielle sur la face *f* de l'espace R_k est l'espace R_k bidimensionnel que l'on note $R_k(f)$. L'élément fini de l'Exemple 3.9 étant unisolvant, A_f est $R_k(f)$-unisolvant. Donc l'annulation des degrés de liberté définis sur une face annule la partie tangentielle sur cette face. Ceci prouve que cet élément fini mixte est conforme dans *H*(rot).

Le nombre de d°l par arête est: $\dim P_{k-1}(C_i) = k$.

Le nombre de d°l de type 2 est: $\dim\left(P_{k-2}(f_i)\right)^2 = (k-1)k$.

Le nombre de d°l de type 3 est: $\dim\left(P_{k-3}\right)^3 = (k-2)(k-1)k/2$.

Le nombre total de d°l est: $\dim P = k(k+2)(k+3)k/2$.

Pour le calcul des fonctions de base, on peut suivre une procédure semblable à la méthodologie exposée dans le cas bidimensionnel. Les degrés de liberté associés au volume n'apparaissant qu'à partir de k = 3, les fonctions de base des éléments R1 et R2 sur le tétraèdre se déduisent de celles sur le triangle.

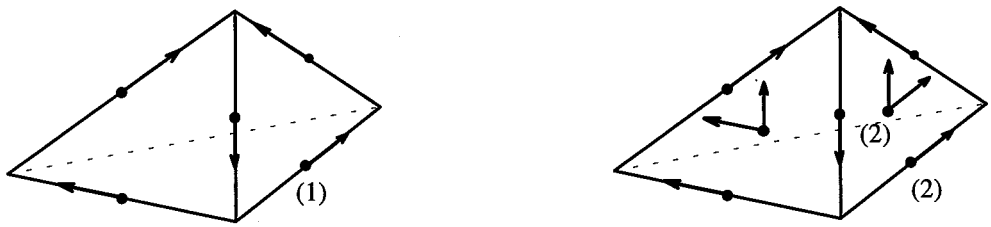
Exemple 3.11-1 *(Elément mixte R1 sur le tétraèdre)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.11 pour k = 1.

$P = R_1$,

Σ est constitué uniquement des moments de Type 1.

Les fonctions de base sont formellement celles de l'élément fini bidimensionnel R1 de l'Exemple 3.9-1.



(a) Tétraèdre de type (1) incomplet 6 d°l

(b) Tétraèdre de type (2) incomplet 20 d°l

Figure 3.7: Famille incomplète sur le tétraèdre.

Exemple 3.11-2 *(Elément mixte R2 sur le tétraèdre)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.11 pour k = 2.

$$P = R_2.$$

Nous avons 2 d°l par arête et 2 d°l par face. Soit un total de 20 d°l par tétraèdre.

Les fonctions de base se déduisent de celles de l'élément fini bidimensionnel R2 de l'Exemple 3.9-2.

Les fonctions de base de Type 1 sont formellement identiques.

Les fonctions de base associées à une face f sont formellement celles de l'élément bidimensionnel R2 associées au volume (voir Exemple 3.9-2) mises sous la forme suivante:

$$\mathbf{w}_f = \alpha_1\lambda_i\lambda_l\nabla\lambda_j - \alpha_2\lambda_j\lambda_l\nabla\lambda_i + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_i\lambda_j\nabla\lambda_l. \tag{3.50}$$

où la face f est définie et orientée par ses trois sommets: $f = \{i, j, l\}$.

Exemple 3.12 *(Famille Complète sur le tétraèdre)*

$$P = (P_k)^3,$$

Σ est constitué d'intégrales pondérées suivantes:

Type 1

$$\sigma_{C_i}(\mathbf{p}) = \int_{C_i} \mathbf{p}\cdot\tau_i\varphi(s)\, ds \quad , \ \forall\, \varphi \in P_k(C_i)\ , i = 1,2,3; \tag{3.51}$$

Type 2

$$\sigma_{f_i}(\mathbf{p}) = \int_{f_i} \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\, d\gamma \quad , \ \forall\, \mathbf{q} \text{ tangent à la face } f_i \text{ et } \mathbf{q} \in D_{k-1}(f_i)\ , i = 1 \text{ à } 4; \tag{3.52}$$

Type 3

$$\sigma_K(\mathbf{p}) = \int_K \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\, dx \quad , \ \forall\, \mathbf{q} \in D_{k-2}. \tag{3.53}$$

La conformité dans $H(\text{rot})$ de cet élément fini se déduit de l'unisolvance de la famille complète sur le triangle.

Le nombre de d°l par arête est: $(k+1)$.

Le nombre de d°l par face est: $(k-1)(k+1)$.

Le nombre de d°l de Type 3 est: $(k-2)(k-1)(k+1)/2$.

Le nombre total de d°l est: $\dim \mathsf{P} = (k+1)(k+2)(k+3)/2$.

Les degrés de liberté associés au volume n'apparaissent qu'à partir de k = 3.

Exemple 3.12-1 *(Elément mixte P1 sur le tétraèdre)*

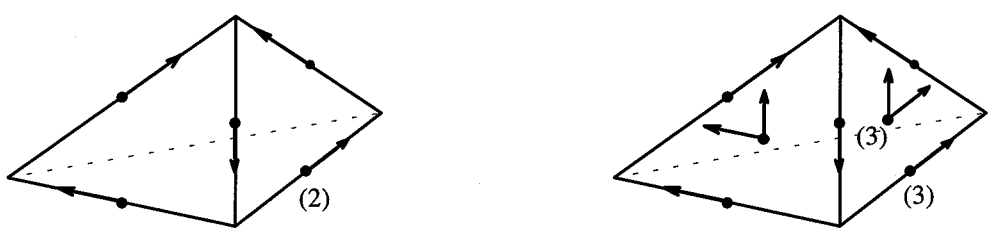
C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.12 pour k = 1.

$$\mathsf{P} = (\mathsf{P}_1)^3,$$

Σ est constitué uniquement des moments de Type 1.

Nous avons deux degrés de liberté par arête.

Les fonctions de base sont formellement celles de l'élément fini bidimensionnel P1 de l'Exemple 3.11-1.



(a) Tétraèdre de type (1) complet 12 d°l

(b) Tétraèdre de type (2) complet 30 d°l

Figure 3.8: Famille complète sur le tétraèdre.

Exemple 3.12-2 *(Elément mixte P2 sur le tétraèdre)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.12 pour k = 2.

$$\mathsf{P} = (\mathsf{P}_2)^3.$$

Les fonctions de base associées aux arêtes ne se déduisent pas de celles de l'élément fini bidimensionnel P2 de l'Exemple 3.10-2.

Les fonctions de base de Type 1 sont formellement celles de l'élément P2 sur le triangle mises, en utlisant les coordonnées barycentriques, sous la forme:

$$\mathbf{w}_{ij} = \left(\alpha_1 N_i + \beta_{12}\left(N_{ij} - N_{il} - N_{im}\right)\right)\nabla\lambda_j + \left(\alpha_2 N_j + \alpha_{12}\left(N_{ji} - N_{jl} - N_{jm}\right)\right)\nabla\lambda_i, \tag{3.54}$$

avec $\alpha_1 + \alpha_2 = 4(\alpha_{12} + \beta_{12})$; où $\{N_i\}_{1\le i\le 4}$ et les $\{N_{ij}\}_{1\le i<j\le 4}$ sont les fonctions de Lagrange associées au *trétraèdre de type (2)*.

Les fonctions de base associées à une face sont formellement celles de l'élément bidimensionnel P2 de Type 2 écrites comme suit:

$$\mathbf{w}_f = 4\alpha_{13}\lambda_i\lambda_l\nabla\lambda_j + 4\alpha_{23}\lambda_j\lambda_l\nabla\lambda_i - 4\alpha_{12}\lambda_i\lambda_j\nabla\lambda_l. \tag{3.55}$$

où la face f est définie et orientée par ses trois sommets: $f = \{i, j, l\}$.

b) *Eléments de H(*rot*) sur l'hexaèdre*

Pour simplifier l'exposé, nous allons présenter ici les éléments de degré inférieur ou égal à un. La définition générale de ces éléments est toutefois rappelée en annexes A.

Nous rappelons l'espace $Q_{k,l,m}$ des polynômes de degré k en x_1, l en x_2, m en x_3. Nous avons:

$$\dim Q_{k,l,m} = (k+1)(l+1)(m+1)$$

Remarquons que $Q_{k,k,k} = Q_k$, où l'espace Q_k est comme défini à la section 3.2.3-b.

Comme c'était le cas dans l'exemple de l'élément fini de Lagrange sur l'Hexaèdre K, les fonctions de base seront explicitées à l'aide de celles calculées sur le cube unité (voir section 3.2.3-b).

Nous appelons $C^r = \{a_i^r, a_j^r\}$ l'arête image par F de l'arête $C = \{a_i, a_j\}$ et par u_m la coordonnée telle que l'arête C^r soit parallèle à l'axe Ou_m (Figure 3.4 (a)).

Nous notons $(N_i)_{1\le i\le 8}$ les fonctions de Lagrange associées à l'*hexaèdre de type (1)*, $(\lambda_i^r(u_m))_{1\le i\le 2}$ les fonctions de Lagrange de *type (1)* associées à l'arête $\{a_i^r, a_j^r\}$ en la variable u_m, et $(\lambda_i(s))_{1\le i\le 2}$ les fonctions de Lagrange de *type (1)* associée à l'arête $\{a_i, a_j\}$ en la variable curviligne s.

Exemple 3.13-1 *(Elément mixte R1 sur l'hexaèdre)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.13 (voir Annexes A) pour k = 1.

$$P = \{\mathbf{p};\ p_1 \in Q_{0,1,1};\ p_2 \in Q_{1,0,1};\ p_3 \in Q_{1,1,0}\} \tag{3.56}$$

Σ est constitué des moments de Type 1 (associés aux arêtes):

$$\int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \tau_i\ \varphi_0\ ds\ ,\ \varphi_0 = \text{cste}\ ,\ i = 1 \text{ à } 12; \tag{3.57}$$

La fonction de base associée à une arête $C = \{a_i, a_j\}$ s'écrit de façon générale:

$$\mathbf{w}_C = t_0\left(N_i \nabla\lambda_j^r(u_m) - N_j \nabla\lambda_i^r(u_m)\right), \tag{3.58a}$$

ou $$\mathbf{w}_C = t_0\left(N_i + N_j\right)\nabla\lambda_j^r(u_m). \tag{3.58b}$$

Remarquons que, sous l'écriture (3.58a), on reconnaît la forme des éléments d'arête de Withney [59] et sous celle (3.58b), on retrouve les éléments d'arête sur l'hexaèdre calculés dans [68].

Exemple 3.14-1 *(Elément mixte P1 sur l'hexaèdre)*

C'est l'élément fini mixte de l'exemple 3.14 (voir Annexes A) pour k = 1.

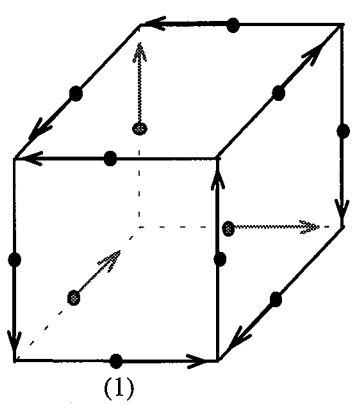
$$P = \left(Q_1\right)^3.$$

L'ensemble Σ est constitué uniquement de moments de Type 1. Nous avons deux degrés de liberté par arête.

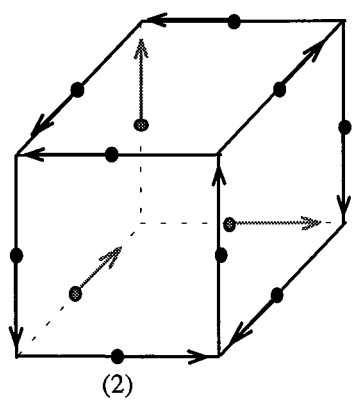
Les fonctions de base associées à une arête $\{a_i, a_j\}$ ont la forme générale:

$$\mathbf{w}_C = \alpha_1 N_i \nabla\lambda_j^r(u_m) - \alpha_2 N_j \nabla\lambda_i^r(u_m), \tag{3.59}$$

de d°l $$\sigma_C(\mathbf{p}) = \int_C \mathbf{p} \cdot \tau\ \left(\varphi_1 \lambda_i(s) + \varphi_2 \lambda_j(s)\right) ds. \tag{3.60}$$



(a) Hexaèdre de type (1) incomplet
12 d°l



(b) Hexaèdre de type (1) complet
24 d°l

Figure 3.9: Eléments de *H*(rot) sur l'hexaèdre.

Remarque 3.5:

- Les éléments mixtes R1 et P1 sur le rectangle sont obtenus simplement en considérant une face de l'hexaèdre

c) *Eléments de H(rot) sur le prisme*

Pour la même raison que précédemment nous présenterons ici les éléments de degré inférieur ou égal à un. La définition générale de ces éléments est toutefois rappelée en annexes A.

Nous rappelons que $P_{k,l}$ est l'espace des polynômes de degré l en x_3 qui sont dans P_k pour x_3 fixé et $R_{k,l}$ est l'espace des polynômes de degré l en x_3 qui sont dans R_k pour x_3 fixé. Les espaces P_k et R_k sont comme définis à la section 3.3.1. On a:

$$\dim P_{k,l} = (l+1)(k+1)(k+2)/2 \ ; \quad \dim R_{k,l} = (l+1)k(k+2).$$

Tout comme c'était le cas dans l'exemple de l'élément fini de Lagrange sur le prisme K les fonctions de base seront explicitées à l'aide de celles calculées sur le prisme unité (voir section 3.23-c).

Nous désignerons par $(N_m)_{1\le m\le 6}$ les fonctions de Lagrange associées au *prisme de type (1)*, $(\lambda^r_m(u_1,u_2))_{1\le m\le 3}$ les coordonnées barycentriques par rapport aux trois sommets d'une face triangulaire, $(\lambda^r_m(u_3))_{1\le m\le 2}$ les fonctions de Lagrange associées à l'arête $\{a^r_i, a^r_j\}$ de *type (1)* en la variable u_3; $C^r = \{a^r_i, a^r_j\}$ étant l'arête image par F de l'arête $C = \{a_i, a_j\}$

Exemple 3.15-1 *(Elément mixte R1 sur le prisme)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.15 (voir Annexes A2) pour k = 1.

$$P = \{\mathbf{p};\ (p_1,p_2) \in R_{1,1};\ p_3 \in P_{1,0}\}. \tag{3.61}$$

Nous avons un seul degré de liberté par arête, défini comme dans l'Exemple 3.13-1.

Les fonctions de base associées aux arêtes horizontales (appartenant aux faces triangulaires) se déduisent de celles de l'élément R1 sur le tétraèdre, tandis que les fonctions de base associées aux arêtes verticales (appartenant uniquement aux faces rectangulaires) se déduisent de celles de l'élément R1 sur l'hexaèdre. La fonction de base associée à une arête $\{a_i, a_j\}$ est:

- pour une arête horizontale,

$$\mathbf{w}_C = t_0\left(N_i \nabla\lambda_j^r(u_1,u_2) - N_j \nabla\lambda_i^r(u_1,u_2)\right), \tag{3.62}$$

- pour une arête verticale,

$$\mathbf{w}_C = t_0\left(N_i \nabla\lambda_j^r(u_3) - N_j \nabla\lambda_i^r(u_3)\right). \tag{3.63}$$

(a) Prisme de type (1) incomplet
9 d°l

(b) Prisme de type (1) complet
18 d°l

Figure 3.10: Eléments de *H*(rot) sur le prisme.

Exemple 3.16-1 *(Elément mixte P1 sur le prisme)*

C'est l'élément fini mixte de l'Exemple 3.16 (voir Annexes) pour k = 1.

$$\mathsf{P} = \left(\mathsf{P}_{1,1}\right)^3. \tag{3.64}$$

Cet élément comporte deux degrés de liberté par arête définis comme dans l'Exemple 3.14-1. Les fonctions de base associées aux arêtes horizontales (appartenant aux faces triangulaires) se déduisent de celles de l'élément P1 sur le tétraèdre, tandis que les fonctions de base associées aux arêtes verticales (appartenant uniquement aux faces rectangulaires) se déduisent de celles de l'élément P1 sur l'hexaèdre. Les fonctions de base associées à une arête $\{a_i, a_j\}$ sont:

- pour une arête horizontale,

$$\mathbf{w}_C = \alpha_1 N_i \nabla\lambda_j^r(u_1,u_2) - \alpha_2 N_j \nabla\lambda_i^r(u_1,u_2), \tag{3.65}$$

- pour une arête verticale,

$$\mathbf{w}_C = \alpha_1 N_i \nabla\lambda_j^r(u_3) - \alpha_2 N_j \nabla\lambda_i^r(u_3). \tag{3.66}$$

3.3.3. Transformation géométrique des éléments de *H*(rot).

Les notions de transformation géométrique et d'élément de référence simplifient la définition analytique des fonctions de base pour des éléments géométriques de formes compliquées.

Un *élément de référence* K^r est un élément géométrique de forme simple, repéré dans un *espace de référence* rapporté aux axes $Ou_1u_2u_3$ (Ou_1u_2 en deux dimensions), qui peut être transformé en un élément géométrique courant K par une *transformation géométrique* F [15]. Cette application doit être inversible et associer à tout point u de K^r (resp. x de K) de coordonnées cartésiennes $(u_i)_{1\le i\le n}$, l'unique point x de K (resp. u de K^r) de coordonnées cartésiennes $(x_i)_{1\le i\le n}$ défini par:

$$x = F(u) \quad (\text{resp. } u = F^{-1}(x)). \tag{3.67}$$

Lorsque les éléments géométriques sont des polyèdres, éléments ayant des faces planes (des côtés droits en deux dimensions) et des arêtes droites, une application affine est suffisante pour définir la transformation géométrique. Elle existe et est entièrement définie par la donnée des coordonnées des sommets de l'élément courant K. Les fonctions de Lagrange de *type (1)* sur l'élément géométrique de référence permettent de définir cette application F, les coordonnées cartésiennes $(x_i)_{1\le i\le n}$ étant des polynômes de degré 1 [15].

Dans ce qui suit on s'en tient au cas où F est une transformation affine, bien que la définition de F puisse se généraliser avec des fonctions de Lagrange associées à l'élément géométrique de *type (m)*.

A toute fonction φ^r définie sur K^r (resp. définie sur K), on associe la fonction φ définie sur K (resp. définie sur K^r):

$$\forall\, u \in K^r,\ \ \varphi^r(u) = \varphi(x). \tag{3.68}$$

On note [DF] la matrice jacobienne de la transformation géométrique F de terme générique (ligne i, colonne j) $\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$, [J] la matrice transposée de [DF]: $J_{ij} = \dfrac{\partial x_j}{\partial u_i}$; [I] la matrice inverse de [J]: $I_{ij} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$. En utilisant:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} dx_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} du_j \mathbf{u}_j, \tag{3.69}$$

et la définition de la matrice [DF], on montre que

$$\{x\} = [DF]\{u\}, \text{ soit } \{x\} = [J]^T\{u\}. \tag{3.70}$$

En prenant le gradient de (3.71), on obtient:

$$\nabla_u \varphi^r = [J]\nabla_x \varphi, \text{ soit } \nabla_x \varphi = [I]\nabla_u \varphi^r, \tag{3.71}$$

où l'indice "u" (resp. "x") implique que les dérivées sont effectuées relativement aux coordonnées $(u_i)_{1\le i\le n}$ (resp. $(x_i)_{1\le i\le n}$).

Dans une transformation géométrique, les fonctions de base des éléments finis mixtes se transforment comme des gradients afin que l'espace des polynômes d'interpolation P soit invariant [55]. Une fonction $\mathbf{p}$ de P a donc pour image la fonction $\mathbf{p}^r$ de P^r définie par:

$$\mathbf{p} = [I]\mathbf{p}^r. \tag{3.72}$$

Aussi l'écriture des fonctions de base (ou plus précisement l'écriture de l'opération gradient "∇"), telle que nous l'avons donnée plus haut, est indépendante du repère considéré (repère local ou repère global).

Nous montrons, en prenant le rotationnel de (3.72) que:

$$\nabla_x \times \mathbf{p} = \frac{1}{|J|}[J]^T \nabla_u \times \mathbf{p}^r, \tag{3.73}$$

$|J|$ étant le déterminant de la matrice jacobienne [J].

De (3.70), nous déduisons que tout vecteur $\mathbf{q}$ de K ,i.e., défini par deux points de K est relié à son image, le vecteur $\mathbf{q}^r$ de K^r, par:

$$\mathbf{q} = [J]^T \mathbf{q}^r. \tag{3.74}$$

Notons au passage que les éléments de l'espace D_k se transforment comme (3.74) de sorte que D_k soit invariant par la transformation affine F [55].

Les degrés de liberté se transforment alors de la manière suivante.

• Degrés de liberté associés à une arête:

Si on utilise la transformation (3.74) on a:

$$\int_C \mathbf{p}\cdot\tau\ \varphi(s)\ ds = \int_{C^r} \mathbf{p}^r \cdot \tau^r\ \varphi^r(s^r)\ |J_C|\ ds^r, \tag{3.75}$$

avec $ds = |J_C| ds^r$.

Or une transformation affine quelconque ne conserve pas les propriétés métriques (les longueurs, et l'orthogonalité). Par conséquent pour avoir l'invariance dans la définition des

degrés de liberté associés à une arête, il faut remplacer la transformation (3.74), pour le vecteur unitaire tangent à l'arête, par la suivante:

$$\tau = \frac{1}{|J_c|}[J]^T \tau^r, \tag{3.76}$$

de sorte que les vecteurs tangents τ et τ^r restent unitaires. On a alors: $\sigma_C(\mathbf{p}) = \sigma_{C^r}(\mathbf{p}^r)$.

- Degrés de liberté associés à une face

De même en lieu et place de la transformation (3.74) pour les fonctions poids **q** intervenant dans la définition des degrés de liberté associés à une face f, on utilise la suivante:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{|J_f|}[J]^T \mathbf{q}^r, \tag{3.77}$$

où **q** est un vecteur tangent à la face f et $d\gamma = |J_f| d\gamma^r$.

On obtient ainsi $\sigma_f(\mathbf{p}) = \sigma_{f^r}(\mathbf{p}^r)$.

- Degrés de liberté associés au volume

De la même façon pour les fonctions poids **q** intervenant dans la définition des degrés de liberté associés au volume, la transformation (3.74) est remplacée par:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{|J|}[J]^T \mathbf{q}^r. \tag{3.78}$$

On obtient alors $\sigma_K(\mathbf{p}) = \sigma_{K^r}(\mathbf{p}^r)$.

3.4. DISCRETISATION DU PROBLEME APPROCHE

Dans cette section, nous allons construire la solution approchée du problème variationnel (PVE) par une méthode d'éléments finis mixtes. On commence par construire l'espace d'approximation W_h, dans lequel on pose ensuite le problème (PVE), et on aboutit à un système linéaire qui permet de calculer $\mathbf{E}_h$, solution approchée de **E**.

On rappelle par commodité le problème (PVE) à approcher:

Trouver **E** dans H(rot), tel que

$$(\mathbf{n}_e \times \mathbf{E})\delta_{\Gamma_{cep}} = \mathbf{0}, \tag{1.42b}$$

$$\mathbf{n}^{(+)} \times (\mathbf{E}^{(+)} - \mathbf{E}^{(-)})\delta_{S_m} = -\mathbf{Jm}\delta_{S_m}, \tag{1.42c}$$

$$\int_\Omega (\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega - k_0^2\int_\Omega \varepsilon_r \mathbf{E}\cdot\mathbf{W}d\Omega + \oint_\Gamma \mu_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{E})\cdot\mathbf{W}d\Gamma = -j\omega\mu_0\int_{S_e}\mathbf{Je}\cdot\mathbf{W}dS,$$

$$\forall\, \mathbf{W} \in H(\text{rot}). \tag{1.43}$$

3.4.1 Construction de l'espace d'approximation

Soit T_h une subdivision (un maillage) du domaine d'étude Ω/Ω_{cep} par M_h polyèdres K. On peut définir l'espace de dimension finie W_h qui approche l'espace H(rot) comme suit:

$$W_h = \{\mathbf{w} \in H(\text{rot});\ \mathbf{w}|_K \in \mathsf{P}_K;\ \forall\, K \in T_h\},$$

où le triplet (K, P_K, Σ_K) est un élément mixte de H(rot) auquel est associé l'opérateur d'interpolation Π_K.

Nous noterons l'élément géométrique $K = \Omega^e$, la restriction d'une fonction de $\mathbf{W}_h$ de W_h à K, $\mathbf{W}_h|_K = \mathbf{W}_h^e$, l'espace d'interpolation $\mathsf{P}_K = \mathsf{P}^e$ et $N^e = \dim \mathsf{P}^e$; l'exposant e est le numéro de l'élément géométrique K. Avec ces notations, on peut écrire pour toute fonction $\mathbf{W}_h$ de W_h:

$$\mathbf{W}_h^e = \sum_{i=1}^{N^e} W_{hi}^e \mathbf{w}_i^e, \tag{3.79}$$

avec $W_{hi}^e = \sigma_i^e(\mathbf{W}_h)$; $\{\mathbf{w}_i^e\}_{1\le i\le N^e}$ sont les fonctions de base de P^e, et $\{\sigma_i^e\}_{1\le i\le N^e}$ les degrés de liberté correspondants, associés aux arêtes, aux faces et au volume de l'élément Ω^e.

Il semble a priori que la dimension de W_h soit égale à $\sum_{e=1}^{M_h} N^e$ puisque nous avons pour chaque Ω^e une base de P^e avec N^e éléments et M_h polyèdres Ω^e. Cependant cette approximation ne tient pas compte de la propriété de continuité tangentielle que doit respecter $\mathbf{W}_h$ comme toute fonction de W_h. En effet, la définition des degrés de liberté Σ_K est locale: les moments sont attachés aux arêtes, aux faces et au volume de l'élément et font intervenir une base vectorielle locale à chaque variété (vecteur unitaire tangent pour l'arête...). Afin d'assurer cette continuité, les degrés de liberté frontaliers sont définis de façon unique d'un élément à un autre. En d'autres termes, la définition dite globale, i.e., définition indépendante de l'élément K considéré, des d°l frontaliers est identique à la définition locale à chaque élément. On associe alors à l'espace W_h l'ensemble Σ_h, défini comme la réunion des ensembles de degrés de liberté frontaliers globaux et ceux internes de chaque élément. On désigne par N_h le nombre des degrés de liberté globaux que l'on note $\{\sigma_i\}_{1\le i\le N_h}$. Un élément $\mathbf{W}_h$ de W_h sera totalement défini par la donnée de ces N_h différents degrés de liberté associés aux arêtes, aux faces et aux volumes du maillage T_h.

Par analogie avec l'élément fini (K, P_K, Σ_K) ces N_h formes linéaires permettent de générer N_h fonctions de base $\{\mathbf{w}_j\}_{1\le j\le N_h}$ de l'espace W_h telles que:

$$\sigma_i(\mathbf{w}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i, j \le N_h. \tag{3.80}$$

Comme toute fonction de l'espace W_h, les fonctions de base globales $\mathbf{w}_j$, $1 \le j \le N_h$, peuvent s'écrire explicitement grâce à leur restriction sur chaque élément Ω^e comme suit: soit $\mathbf{w}_k$ une fonction de base globale associée au degré de liberté σ_k, lequel est attaché à M_k éléments Ω_k^e. La fonction $\mathbf{w}_k$ coïncide alors sur chaque élément Ω_k^e, $1 \le k \le M_k$, à la fonction de base locale associée à σ_k et est nulle partout ailleurs. Ainsi la fonction $\mathbf{W}_h$ de W_h peut encore s'écrire:

$$\mathbf{W}_h = \sum_{i=1}^{N_h} W_{hi}\mathbf{w}_i, \tag{3.81}$$

avec $W_{hi} = \sigma_i(\mathbf{W}_h)$, $1 \le i \le N_h$; mais, en pratique, c'est l'écriture (3.79) qui est utilisée.

Rappelons que nous cherchons la solution approchée $\mathbf{E}_h$ comme élément de W_h. Il s'agit donc de calculer les inconnues $E_{hj} = \sigma_j(\mathbf{E}_h)$, $1 \le j \le N_h$, qui permettront ensuite d'exprimer $\mathbf{E}_h$ en tout point x de Ω par:

$$\mathbf{E}_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} E_{hj}\mathbf{w}_j(x). \tag{3.82}$$

Autrement dit, on approche la solution exacte $\mathbf{E}$ par son interpolée dans W_h: $\mathbf{E}_h = \Pi_h(\mathbf{E})$.

La solution approchée $\mathbf{E}_h$, tout comme $\mathbf{E}$, vérifie:

$$\int_\Omega (\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E}_h)\cdot(\nabla\times\mathbf{W}_h)d\Omega - k_0^2\int_\Omega \varepsilon_r\mathbf{E}_h\cdot\mathbf{W}_h d\Omega + \oint_\Gamma \mu_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{E}_h)\cdot\mathbf{W}_h d\Gamma = -j\omega\mu_0\int_{S_e}\mathbf{Je}\cdot\mathbf{W}_h dS,$$

$$\forall\, \mathbf{W}_h \in W_h; \tag{3.83}$$

ainsi que les conditions (1.42b) et (1.42c) qui deviennent respectivement:

$$E_{hj} = \sigma_j(\mathbf{E}_h) = 0, \tag{3.84}$$

pour tout degré de liberté σ_j défini sur la surface des cep,

et $$\sigma_j(\mathbf{E}_h^{(+)}) - \sigma_j(\mathbf{E}_h^{(-)}) = -\sigma_j(\mathbf{Jm}) \text{ ou encore } E_{hj}^{(+)} - E_{hj}^{(-)} = -(\mathrm{Jm})_j, \tag{3.85}$$

pour tout degré de liberté σ_j défini sur la surface S_m.

La condition de mur électrique est simplement prise en compte en annulant les degrés de liberté définis sur la surface des conducteurs électriques parfaits. L'ensemble des équations

(3.83), (3.84) et (3.85) constitue le problème approché que nous allons mettre sous forme de système d'équations linéaires.

3.4.2. Mise sous forme de système matriciel linéaire

Nous nous intéressons dans un premier temps à la mise sous forme matricielle du terme $\int_\Omega \varepsilon_r \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{W}_h d\Omega$. Une intégration de ce terme par sous-domaines donne:

$$\int_\Omega \varepsilon_r \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{W}_h d\Omega = \sum_{e=1}^{M_h} \int_{\Omega^e} \varepsilon_r \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{W}_h d\Omega. \tag{3.86}$$

On note $\{E_h^e\}$ et $\{W_h^e\}$ les vecteurs colonnes élémentaires des degrés de liberté respectivement de $\mathbf{E}_h^e$ et $\mathbf{W}_h^e$: $\{E_h^e\}_j = E_{hj}^e$ et $\{W_h^e\}_i = W_{hi}^e$, $1 \le i, j \le N^e$.

Les vecteurs colonnes globaux $\{E_h\}$ et $\{W_h\}$ sont reliés aux vecteurs locaux $\{E_h^e\}$ et $\{W_h^e\}$ par:

$$\{E_h^e\} = [\Delta^e]\{E_h\} \tag{3.87},$$

et $$\{W_h^e\} = [\Delta^e]\{W_h\}, \tag{3.88}$$

où la matrice $N^e \times N_h$, $[\Delta^e]$, est une matrice d'extraction.

Si on pose $[A_\varepsilon^e]$ la matrice de terme générique

$$\left(A_\varepsilon^e\right)_{ij} = \int_{\Omega^e} \varepsilon_r \mathbf{w}_i^e \cdot \mathbf{w}_j^e d\Omega, \tag{3.89}$$

on obtient

$$\int_{\Omega^e} \varepsilon_r \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{W}_h \, d\Omega = \{W_h^e\}^T [A_\varepsilon^e]\{E_h^e\}. \tag{3.90}$$

Ce qui conduit finalement, en utilisant (3.86) et (3.90), à la forme matricielle suivante

$$\int_\Omega \varepsilon_r \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{W}_h d\Omega = \{W_h\}^T [A_\varepsilon]\{E_h\}, \tag{3.91}$$

avec $$[A_\varepsilon] = \sum_{e=1}^{M_h} [\Delta^e]^T [A_\varepsilon^e][\Delta^e]. \tag{3.92}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\int_\Omega \mu_r^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}_h) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_h) d\Omega = \{W_h\}^T [B_\mu]\{E_h\}, \tag{3.93}$$

avec $$\left(B_\mu^e\right)_{ij} = \int_{\Omega^e} \mu_r^{-1}(\nabla \times \mathbf{w}_i^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_j^e) d\Omega, \tag{3.94}$$

et $\int_\Gamma \boldsymbol{T}(\mathbf{E}_h)\cdot \mathbf{W}_h d\Gamma = \{W_h\}^T[T^b]\{E_h\}$, (3.95)

avec $(T^b)^e_{ij} = \int_{\Gamma^e} \boldsymbol{T}(\mathbf{w}^e_i)\cdot \mathbf{w}^e_j d\Gamma$ si e est un "élément frontalier", (3.96a)

$(T^b)^e_{ij} = 0$ sinon, (3.96b)

où nous désignons par "élément frontalier", un élément ayant une face (ou une arête en 2D) sur Γ. Les matrices $[B_\mu]$ et $[T^b]$ sont assemblées comme la matrice $[A_\varepsilon]$ en (3.92).

L'intégration par sous-domaines du second membre de (3.83) s'écrit:

$$\int_{S_e} \mathbf{Je}\cdot \mathbf{W}_h dS = \sum_{e=1}^{M_h} W^e_{hi} \int_{(S_e)^e} \mathbf{Je}\cdot \mathbf{w}^e_i dS. \tag{3.97}$$

Si l'on définit le vecteur source élémentaire, $\{Je^e\}$, par

$$\{Je^e\}_i = \int_{(S_e)^e} \mathbf{Je}\cdot \mathbf{w}^e_i dS, \tag{3.98}$$

on obtient:

$$\int_{S_e} \mathbf{Je}\cdot \mathbf{W}_h dS = \{W_h\}^T\{Je\}, \tag{3.99}$$

avec $\{Je\} = \sum_{e=1}^{M^s_h} [\Delta^e]^T\{Je^e\}$, (3.100)

M^s_h étant le nombre d'éléments dont une face ou une arête est située sur la surface S_e.

En regroupant (3.91), (3.93), (3.95) et (3.99) nous avons:

$$\{W_h\}^T\left([S_{\varepsilon\mu}]\{E_h\} + [T^b]\{E_h\}\right) = \{W_h\}^T\{F\}, \quad \forall\, \{W_h\} \in W_h, \tag{3.101}$$

où $[S_{\varepsilon\mu}] = [B_\mu] - k_0^2[A_\varepsilon]$ et $\{F\} = -j\omega\mu_0\{Je\}$.

Finalement, le problème approché (3.83)-(3.85) est équivalent au système matriciel suivant:

$$[S_{\varepsilon\mu}]\{E_h\} + [T^b]\{E_h\} = \{F\}, \tag{3.102}$$

et $\{E_h\}$ vérifiant (3.84) et (3.85). (3.103)

La formulation en champ **H** conduit au système matriciel dual de (3.102):

$$[S_{\mu\varepsilon}]\{H_h\} + [T^b]\{H_h\} = \{F\}, \tag{3.104}$$

et $\{H_h\}$ vérifiant $H^{(+)}_{hj} - H^{(-)}_{hj} = -(Je)_j$, (3.105)

pour tout degré de liberté σ_j défini sur la surface S_e.

La matrice éléments finis $[S_{\mu\varepsilon}]$ et le second membre $\{F\}$ sont donnés par: $[S_{\mu\varepsilon}]=[B_\varepsilon]-k_0^2[A_\mu]$ et $\{F\}=-j\omega\varepsilon_0\{Jm\}$.

Les système d'équations (3.102) et (3.104) sont symétriques lorsque l'opérateur $\boldsymbol{T}$ dans (3.83) est symétrique, les matrices éléments finis $[S_{\varepsilon\mu}]$ et $[S_{\mu\varepsilon}]$ étant symétriques par construction.

Le calcul effectif des coefficients (3.89), (3.94), (3.96a) et du second membre (3.98) est nécessaire pour la résolution du système (3.102). En général, le calcul exact (analytique) de ces termes est fastidieux voire impossible. C'est la raison pour laquelle, on les évalue plus volontiers à l'aide de schémas d'intégration numérique ou formules de quadrature [12-15]. La définition de ces formules d'intégration numérique s'effectue sur l'*élément de référence* (voir section 3.3.3). Des tables de telles formules peuvent être trouvées dans [12-15].

3.5. CONCLUSION

Nous avons présenté les éléments finis mixtes de *H*(rot) tels qu'ils sont introduits par Nédélec, c'est à dire, à partir de la donnée de l'espace d'interpolation et de l'ensemble des degrés de liberté. Nous avons explicité les fonctions de base qui sont indispensables à la mise en oeuvre de la MEF sur les éléments géométriques les plus courants (triangle, tétraèdre, hexaèdre, prisme), et ceci pour les polynômes de degré un ou deux. Le calcul des fonctions de base pour des polynômes de degré supérieur peut se faire assez simplement en suivant la méthodologie que nous avons proposée. Nous avons donné les vecteurs de base sous une forme générale, dans laquelle peuvent se retrouver bien d'éléments d'arête dérivés de façon indépendante par d'autres auteurs, à degré d'interpolation égal. Dans ce sens cette forme générale sert de synthèse et peut aider à la mise en place d'une bibliothèque d'éléments d'arête par le choix des fonctions de base qu'elle permet. Les fonctions de base s'expriment à l'aide des fonctions de Lagrange associées à l'élément géométrique considéré, de même que les degrés de liberté correspondants s'explicitent avec les fonctions de Lagrange associées aux sous-variétés (arête, face, volume) auxquelles ils sont rattachés. Ceci facilite l'implantation des éléments mixtes dans un code numérique, notamment dans un code utilisant déja les éléments finis de Lagrange.

Nous avons par ailleurs montré que les éléments mixtes de H(rot) étaient bien adaptés à l'approximation de notre problème variationnel (PVH) ou (PVE): et par conséquent, la formulation approchée obtenue hérite, selon le degré d'approximation, des vertus de la formulation exacte établies au chapitre 1 concernant le respect de la condition de divergence nulle et la satisfaction des conditions d'interface par la solution. La condition de mur électrique est simplement forcée en annulant les inconnues définies sur la surface des conducteurs. La condition de divergence est naturellement forcée lorsque l'on utilise les éléments R1: par contre pour les autres éléments, elle est faiblement (et automatiquement) remplie par la formulation.

Nous espérons avoir contribué ici à la compréhension de ces éléments mixtes de H(rot) ainsi que de leur lien avec les éléments de Lagrange (éléments nodaux), et, à leur mise en oeuvre dans la discrétisation, en deux ou trois dimensions, de l'équation vectorielle des ondes en régime harmonique.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS : PHENOMENES DE DIFFRACTION

4.1. INTRODUCTION

Un problème général de diffraction électromagnétique implique une source, située quelque part dans l'espace, illuminant une structure. Le champ électromagnétique $(\mathbf{E}^{in},\mathbf{H}^{in})$ généré par la source est dit "incident" et est déterminé par la donnée de la source. En présence de la structure, le champ électromagnétique (**E**, **H**) produit est dit "total". La différence entre le champ total et le champ incident est le champ "diffracté", $(\mathbf{E}^{di},\mathbf{H}^{di})$. Le problème direct (par opposition à inverse) de diffraction consiste à trouver les champs total et/ou diffracté à partir du champ incident et des équations de Maxwell qui gouvernent ces champs.

Hormis les problèmes canoniques (cylindre infiniment long, coin) pour lesquels les solutions peuvent être exprimées en termes de fonctions analytiques [1,3,69], les problèmes de diffraction en électromagnétisme doivent être résolus à l'aide de méthodes numériques. Il existe deux approches pour formuler le problème lorsque l'on utilise une méthode finie [70-71]. Dans la première approche, l'équation des ondes est formulée sous une forme faible en prenant comme inconnu le champ électromagnétique total (**E**, **H**), tandis que dans la seconde approche, c'est le champ électromagnétique diffracté $(\mathbf{E}^{di},\mathbf{H}^{di})$ qui est pris comme inconnu. Dans l'une ou l'autre de ces approches, la condition aux limites absorbante est appliquée uniquement sur le champ électromagnétique diffracté (car il est totalement sortant).

Nous commençons par dériver ces deux formulations du problème de diffraction puis nous présentons quelques exemples de diffraction d'une onde plane en deux dimensions ainsi qu'en trois dimensions.

4.2. FORMULATION DU PROBLEME DE DIFFRACTION

Dans cette section nous rappelons brièvement la formulation du phénomène de diffraction électromagnétique avant traitement par la méthode des éléments finis, ceci dans les hypothèses de notre étude (voir section 1.3.1).

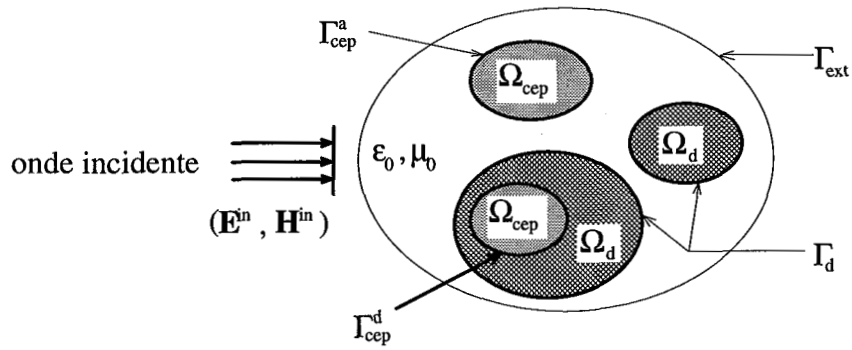


Figure 4.1: Configuration du problème de diffraction.

Dans ces conditions, le problème électromagnétique de diffraction, formulé en champ magnétique, est de trouver **H** tel que:

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}-k_0^2\mu_r\mathbf{H}=\mathbf{0} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}^{in}+\mathbf{H}^{di} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{cep} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}^{di}=\boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{di}) \text{ sur } \Gamma_{ext}, \tag{4.4}$$

et d'en déduire le champ électrique **E** par $\mathbf{E}=(1/j\omega\varepsilon)\nabla\times\mathbf{H}$.

Les équations du problème de diffraction écrites en prenant le champ électrique **E** comme champ principal sont:

$$\nabla\times\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E}-k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E}=\mathbf{0} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{in}+\mathbf{E}^{di} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{cep} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{E}^{di}=\boldsymbol{T}(\mathbf{E}^{di}) \text{ sur } \Gamma_{ext}, \tag{4.8}$$

Le champ magnétique **H** est déterminé par $\mathbf{H}=-(1/j\omega\mu)\nabla\times\mathbf{E}$.

4.2.1. Formulation en champ total

La méthode de Galerkin (voir chapitre 1) transforme l'équation (4.1) comme suit:

$$\int_\Omega(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega-k_0^2\int_\Omega\mu_r\mathbf{H}\cdot\mathbf{W}d\Omega+\oint_{\Gamma_{ext}}\varepsilon_r^{-1}(\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}d\Gamma=0 \tag{4.9}$$

Sur la frontière extérieure du domaine, on applique une condition aux limites absorbantes au champ diffracté $\mathbf{H}^{di}$, et du fait de la linéarité de l'opérateur $\boldsymbol{T}$, nous avons:

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{H}^{di} \approx \boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{di}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{H}) - \boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{in});$$

ce qui entraîne:

$$\boldsymbol{G}(\mathbf{H}) = \boldsymbol{T}(\mathbf{H}) + \{\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in}) - \boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{in})\} \tag{4.10}$$

où nous avons défini sur la frontière, par commodité, la fonction vectorielle linéaire $\boldsymbol{G}$, qui à tout champ de vecteurs $\mathbf{A}$, associe le vecteur $\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A}$ (lorsqu'il est défini).

L'expression (4.9) associée à (4.10) devient alors:

$$\int_\Omega \varepsilon_r^{-1}(\nabla\times\mathbf{H})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega - k_0^2\int_\Omega \mu_r\mathbf{H}\cdot\mathbf{W}d\Omega\, d\Gamma + \oint_{\Gamma_{ext}} \varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{H})\cdot\mathbf{W}d\Gamma =$$
$$\oint_{\Gamma_{ext}} \varepsilon_r^{-1}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{in}) - \boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\}\cdot\mathbf{W}d\Gamma \tag{4.11}$$

La *formulation en champ total* (4.11) respecte implicitement les conditions d'interfaces sur le champ $\mathbf{E}$, en particulier la condition (4.3). Aucune condition d'interface n'est explicitement imposée au champ $\mathbf{H}$ du fait de l'appartenance de la fonction poids $\mathbf{W}$ à l'espace H(rot) (voir section 1.3.2).

Une étude similaire effectuée en utilisant les équations (4.5-4.8), permet d'aboutir à la formulation duale de l'équation (4.11) :

$$\int_\Omega \mu_r^{-1}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega - k_0^2\int_\Omega \varepsilon_r\mathbf{E}\cdot\mathbf{W}d\Omega\, d\Gamma + \oint_{\Gamma_{ext}} \mu_r^{-1}\boldsymbol{T}(\mathbf{E})\cdot\mathbf{W}d\Gamma =$$
$$\oint_{\Gamma_{ext}} \mu_r^{-1}\{\boldsymbol{T}(\mathbf{E}^{in}) - \boldsymbol{G}(\mathbf{E}^{in})\}\cdot\mathbf{W}d\Gamma \tag{4.12}$$

La condition sur le conducteur électrique parfait (4.7) doit être explicitement imposée au champ $\mathbf{E}$.

4.2.2. Formulation en champ diffracté

De l'équation (4.1), on tire aussitôt:

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}^{di} - k_0^2\mu_r\mathbf{H}^{di} = -\{\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}^{in} - k_0^2\mu_r\mathbf{H}^{in}\} \tag{4.13}$$

Or, le champ électromagnétique incident, $(\mathbf{E}^{in},\mathbf{H}^{in})$, vérifie les équations de Maxwell en régime harmonique sans terme source; en particulier le champ magnétique incident, $\mathbf{H}^{in}$, obéit à l'équation homogène des ondes:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}^{in}-k_0^2\mathbf{H}^{in}=\mathbf{0} \tag{4.14}$$

Il existe deux différentes approches pour coupler les équations (4.13) et (4.14) afin d'obtenir l'équation à pondérer. L'approche exposée dans [71] consiste à soustraire (4.14) à (4.13) et à appliquer la méthode de Galerkin à l'équation résultante. Cette approche a pour inconvénient d'affaiblir quelque peu l'équation (4.14), i.e., (4.14) est vérifiée faiblement. L'autre approche suivie dans [70], pour la diffraction par des objets diélectriques, pondère tout simplement (4.13). Nous faisons ici une extension de cette seconde approche à une formulation vectorielle en présence d'objets conducteurs.

Dans l'air, d'après la relation (4.14), le second membre de l'équation (4.13) est nul. La méthode de Galerkin appliquée à l'équation (4.13) donne alors:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}^{di}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega-k_0^2\int_\Omega\mu_r\mathbf{H}^{di}\cdot\mathbf{W}d\Omega+\oint_{\Gamma_{ext}}\boldsymbol{T}(\mathbf{H}^{di})\cdot\mathbf{W}d\Gamma=\\&-\int_{\Omega_d}\left(\varepsilon_r^{-1}\nabla\times\mathbf{H}^{in}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega+k_0^2\int_{\Omega_d}\mu_r\mathbf{H}^{in}\cdot\mathbf{W}d\Omega-\\&-\oint_{\Gamma_d}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\cdot\mathbf{W}d\Gamma-\oint_{\Gamma_{cep}^a}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\cdot\mathbf{W}d\Gamma,\end{aligned} \tag{4.15}$$

où Ω_d représente le domaine occupé par les matériaux de propriétés électromagnétiques différentes de celles de l'air (ε_r ou μ_r différent de l'unité) et Γ_d sa frontière située dans l'air. Nous donnerons par la suite à ces matériaux le nom générique de "matériaux diélectriques". La frontière Γ_{cep}^d est la frontière des conducteurs électriques parfaits entourés par les matériaux diélectriques et Γ_{cep}^a celle de ceux se trouvant dans l'air (Figure 4.1).

L'équation (4.15) sous entend (voir section 1.3.2, l'intégration avec "précaution") la condition d'interface entre milieux de propriétés électriques différentes dont aucun n'est un conducteur électrique parfait:

$$\left\{\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{di})\right)^{(1)}-\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{di})\right)^{(2)}\right\}\delta_{S_{12}}=-\left\{\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\right)^{(1)}-\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\right)^{(2)}\right\}\delta_{S_{12}},$$

$$\text{soit}\quad \mathbf{n}_1\times\left(\mathbf{E}^{(1)}-\mathbf{E}^{(2)}\right)\delta_{S_{12}}=\mathbf{0} \tag{4.16}$$

Au bord des conducteurs électriques parfaits, on a implicitement:

$$\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{di})\right)\delta_{\Gamma_{cep}}=-\left(\varepsilon_r^{-1}\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\right)\delta_{\Gamma_{cep}^d}-\boldsymbol{G}(\mathbf{H}^{in})\delta_{\Gamma_{cep}^a},$$

$$\text{soit}\quad (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\delta_{\Gamma_{cep}}=\mathbf{0}; \tag{4.17}$$

Sur la frontière extérieure, Γ_{ext}, qui se trouve en général dans l'air ($\varepsilon_r = 1$), on a appliqué dans la formulation (4.15), à travers l'opérateur $\boldsymbol{T}$, une condition aux limites absorbante sur le champ magnétique diffracté $\mathbf{H}^{di}$. Cette *formulation en champ diffracté* vérifie implicitement les conditions d'interface (4.16) et (4.17) portant sur le champ dual total, ici le champ électrique $\mathbf{E}$. Conformément à ce qui a été établi dans la section 1.3.2, aucune condition n'est explicitement imposée au champ magnétique total $\mathbf{H}$.

Une étude analogue, avec comme inconnu le champ électrique diffracté, permet d'aboutir à la formulation duale de l'équation (4.15):

$$\int_{\Omega}\left(\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E}^{di}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega-k_0^2\int_{\Omega}\varepsilon_r\mathbf{E}^{di}\cdot\mathbf{W}d\Omega+\oint_{\Gamma_{ext}}\boldsymbol{T}\left(\mathbf{E}^{di}\right)\cdot\mathbf{W}d\Gamma=$$
$$-\int_{\Omega_d}\left(\mu_r^{-1}\nabla\times\mathbf{E}^{in}\right)\cdot(\nabla\times\mathbf{W})d\Omega+k_0^2\int_{\Omega_d}\varepsilon_r\mathbf{E}^{in}\cdot\mathbf{W}d\Omega-\oint_{\Gamma_d}\boldsymbol{G}\left(\mathbf{E}^{in}\right)\cdot\mathbf{W}d\Gamma \qquad (4.18)$$

Par contre cette fois-ci une condition aux limites doit être explicitement imposée au champ principal diffracté, à savoir $\mathbf{n}\times\mathbf{E}^{di}=-\mathbf{n}\times\mathbf{E}^{in}$ sur la frontière des conducteurs électriques parfaits de façon à remplir (4.7).

Remarque 4.1:

- Dans le cas de la formulation en champ total, les sources induites par le champ électromagnétique incident sont localisées sur la frontière extérieure. Aussi une bonne discrétisation de celle-ci est nécessaire pour obtenir un "bon" terme source. Par ailleurs cette formulation est plus sensible à la condition aux limites absorbantes car celle-ci intervient dans le terme source.
- A la différence de la formulation en champ total, il n'y a pas de source induite sur la frontière extérieure pour la formulation en champ diffracté (parce que nous avons supposé que celle-ci se trouvait dans l'air); les sources induites par le champ électromagnétique incident se trouvent dans les milieux diélectriques et les milieux magnétiques, et, selon le choix du champ principal diffracté (de l'inconnue), sur la frontière des conducteurs électriques parfaits situés dans l'air.
- Comme le soulignera la discrétisation des deux formulations, celle en champ total est plus simple à mettre en oeuvre; l'air est considéré comme un milieu diélectrique particulier tandis

que dans la formulation en champ diffracté une nette distinction est faite entre l'air et les milieux diélectriques.

- La formulation en champ diffracté présentée dans [71] se retrouve ici en remplaçant formellement μ_r^{-1} (resp. ε_r^{-1}) et ε_r (resp. μ_r) par $\mu_r^{-1}-1$ (resp. $\varepsilon_r^{-1}-1$) et ε_r-1 (resp. μ_r-1) dans le second membre de (4.18) (resp. 4.15) et en annulant l'intégrale sur la frontière Γ_d. De ce fait cette formulation n'effectue pas de distinction nette entre l'air et les milieux diélectrique. Dans ce sens, elle présente une relative facilité de mise en oeuvre comparée à celle que nous avons exposée.

4.2.3. Discrétisation

Nous nous proposons dans cette section d'élaborer le système matriciel associé à chacune des formulations présentées dans la section précédente. Nous nous plaçons dans le cas où l'onde incidente est une onde plane électromagnétique. Le champ principal incident, de vecteur unitaire directeur **v**, est une onde plane pilotée par le vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$. Dans le repère cartésien de base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, où les coordonnées du point courant sont x, y et z, on définit les vecteurs

$$\mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}), \qquad \tilde{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0 / k_0 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Pour une formulation en champ **H**, le champ principal incident normalisé s'exprime à l'aide de l'onde plane élémentaire $\psi(x,y,z) = \exp(-j\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}_0)$ comme suit:

$$\mathbf{H}^{in} = \psi(x,y,z)\mathbf{v}. \tag{4.19}$$

Le champ dual incident s'écrit alors

$$\mathbf{E}^{in} = -\eta_0 \psi(x,y,z)\mathbf{u}, \tag{4.20}$$

avec $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{k}}_0 \times \mathbf{v}$,

et η_0 est l'impédance caractéristique du vide ($\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 377$ Ohms).

Si l'on définit $\mathbf{Jm} = \mathbf{n}\times\mathbf{E}^{in}$ nous avons tout de suite $G(\mathbf{H}^{in}) = j\omega\varepsilon_0\mathbf{Jm}$; **Jm** représente le courant magnétique induit par le champ électrique incident $\mathbf{E}^{in}$ sur la surface considérée.

Dans le cas d'une formulation en champ **E**, le champ dual incident est donné par

$$\mathbf{H}^{in} = v_0 \psi(x,y,z)\mathbf{u}, \tag{4.21}$$

avec $\eta_0 v_0 = 1$.

De même on pose $\mathbf{Je} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{in}$ et on a $\boldsymbol{G}(\mathbf{E}^{in}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{Je}$; **Je** représente le courant électrique induit par le champ magnétique incident $\mathbf{H}^{in}$ sur la surface considérée.

<u>Formulation en champ total</u>

Formulation en champ H

La discrétisation de (4.11) par la méthode des éléments finis mixtes (voir chapitre 3), aboutit au système matriciel suivant

$$[S_{\varepsilon\mu}]\{H\} + [T^b]\{H\} = \{F\}. \tag{4.22}$$

Les matrices $[S_{\varepsilon\mu}]$ et $[T^b]$ étant définies et assemblées comme dans la section 3.4.

Le vecteur terme source $\{F\}$ est défini par

$$\{F\} = [T^b]\{H_b^{in}\} - j\omega\varepsilon_0\{Jm^b\}, \tag{4.23}$$

- $\{H_b^{in}\}$: le vecteur global des degrés de liberté du champ magnétique incident et définis uniquement sur la frontière extérieure du domaine (indice ou exposant "b"),
- $\{Jm^b\}$: ce terme source, induit par le champ électrique incident sur la frontière extérieure du domaine, est évalué et assemblé comme à la section 3.4.

Formulation en champ E

La discrétisation de l'équation duale de (4.11) à savoir la formulation (4.12), conduit au système matriciel dual de (4.22):

$$[S_{\mu\varepsilon}]\{E\} + [T^b]\{E\} = \{F\}, \tag{4.24}$$

la matrice $[S_{\mu\varepsilon}]$est définie et assemblée comme à la section 3.4.,

$$\{F\} = [T^b]\{E_b^{in}\} + j\omega\mu_0\{Je^b\}, \tag{4.25}$$

- $\{E_b^{in}\}$ est le vecteur dual de $\{H_b^{in}\}$,
- $\{Je^b\}$ est le vecteur dual de $\{Jm^b\}$.

La condition de mur électrique (4.7) est imposée simplement en annulant les degrés de liberté du champ total électrique définis sur la surface des conducteurs: $\{E_c\}=0$.

Formulation en champ diffracté

Formulation en champ H^{di}

$$[S_{\varepsilon\mu}]\{H^{di}\}+[T^b]\{H^{di}\}=\{F\}, \tag{4.26}$$

$$\{F\}=-[S^d_{\varepsilon\mu}]\{H^{in}_d\}-j\omega\varepsilon_0\{Jm^d\}-j\omega\varepsilon_0\{Jm^c\}, \tag{4.27}$$

- $\{H^{in}_d\}$: le vecteur global des degrés de liberté du champ magnétique incident définis dans le domaine occupé par les matériaux diélectriques (indice ou exposant "d"),

- $\{Jm^d\}$: est défini comme $\{Jm^b\}$, mais sur la surface externe située dans l'air des diélectriques,

- $\{Jm^c\}$: est défini comme $\{Jm^b\}$, mais sur la surface externe située dans l'air des cep.

Formulation en champ E^{di}

$$[S_{\mu\varepsilon}]\{E^{di}\}+[T^b]\{E^{di}\}=\{F\}, \tag{4.28}$$

$$\{F\}=-[S^d_{\mu\varepsilon}]\{E^{in}_d\}+j\omega\mu_0\{Je^d\}. \tag{4.29}$$

La condition de mur électrique (4.7) est imposée simplement en opposant les degrés de liberté des champs diffracté et incident électriques définis sur la surface des conducteurs: $\{E^{di}_c\}=-\{E^{in}_c\}$.

4.3. EXEMPLES DE DIFFRACTION EN 2D

4.3.1. Diffraction par des objets de forme simple

Nous considérons dans cette section des cas de diffraction d'une onde électromagnétique plane incidente par des objets de forme simple pour lesquels des solutions analytiques existent explicitement. Nous présentons des résultats concernant en particulier le cylindre cep, le coin cep et le cylindre non conducteur (diélectrique et/ou magnétique). En comparant ces résultats numériques avec les solutions analytiques, il est possible d'étudier les effets de certains

paramètres tels que l'angle d'incidence de l'onde plane, la fréquence de propagation et la distance entre l'objet diffractant et la frontière extérieure.

Lorsque l'on étudie un phénomène de diffraction, d'électromagnétisme en général, les quantités globales lointaines (évaluées à partir du champ électromagnétique lointain) sont d'un grand intérêt. Cependant le calcul du champ lointain à partir d'une solution MEF passe par une bonne détermination du champ électromagnétique proche. Aussi, une étude d'erreur commise sur le champ proche en fonction des paramètres cités se justifie. Pour ce faire nous avons opté pour une étude d'erreur globale sur une zone d'intérêt entourant l'objet diffractant (les sources induites). C'est d'ailleurs dans cette zone que sera choisie le contour fictif qui servira au calcul du champ lointain. On reprend l'étude effectuée dans [72] pour une formulation scalaire.
L'erreur globale sur une fenêtre S est donnée par la quantité suivante:

$$\mathrm{err}(X) = \frac{\int_S |\Delta X| \, dS}{\mathrm{mes}(S)}, \tag{4.30}$$

avec $\Delta X = \dfrac{X_{nu} - X_{an}}{\|X_{an}\|_\infty}$,

X_{nu}: la quantité calculée numériquement,

X_{an}: désigne la quantité calculée analytiquement,

$|X|$: le module de X et $\|X\|_\infty$ le maximum de $|X|$ sur S.

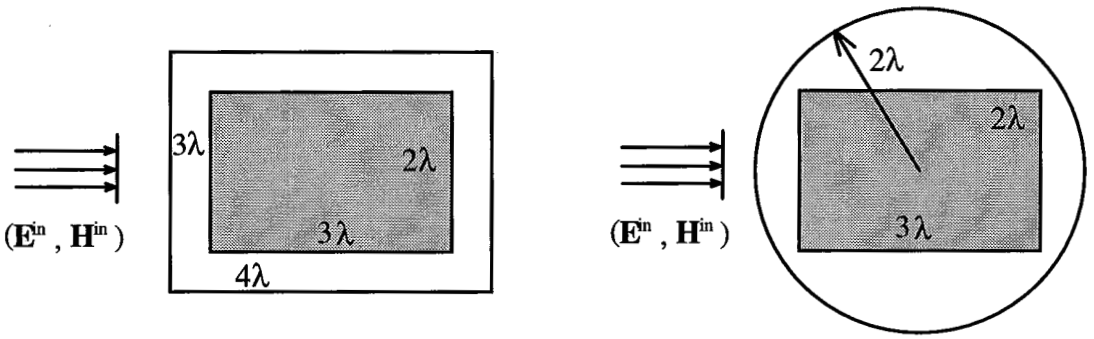
Diffraction d'une onde plane par une fenêtre vide

L'étude de la "diffraction" d'une onde plane par une fenêtre vide (sans objet) donne une évaluation des performances de la formulation MEF-CLA dans un cas quasi-idéal. La formulation en champ total est utilisée (le champ diffracté étant évidemment nul). Dans un premier temps le second membre est calculé par une CLA exacte, plus précisément le second membre est obtenu en discrétisant $-\boldsymbol{G}(\mathbf{E}^{in}) = j\omega\mu_0\mathbf{Je}$. On résoud l'équation:

$$[S_{\mu\varepsilon}]\{E\} = \{F\} \tag{4.31}$$

avec $\{F\} = j\omega\mu_0\{Je^b\}$. (4.32)

L'erreur provient, dans ce cas, de la discrétisation de la formulation (erreur dans le calcul des termes de $\left[S_{\varepsilon\mu}\right]$ et de {F}). Dans le deuxième cas, le second membre est approché par la CLA de type EM non symétrique du second ordre; on modifie l'opérateur $\boldsymbol{T}$ de sorte que la frontière soit transparente pour l'onde incidente. Le vecteur {F} est obtenu en discrétisant $\boldsymbol{T}(\mathbf{E}^{in})$.



(a) frontière rectangulaire *(b) frontière circulaire*

Figure 4.2: Définition du domaine sans objet et de la fenêtre S à 3 Ghz.

Pour différents angles d'incidence, on étudie la performance de cette CLA dans une configuration où elle est sensée être optimale. Puisque l'on connaît *a priori* la direction de

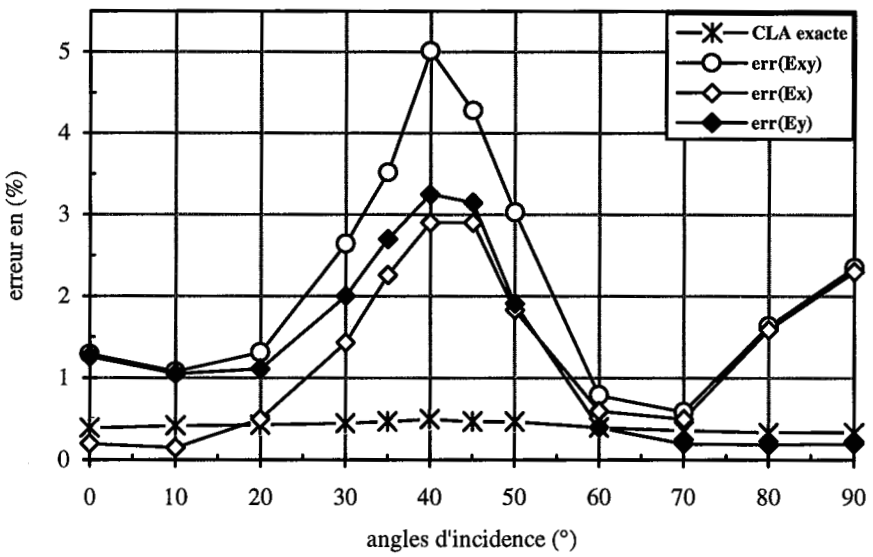


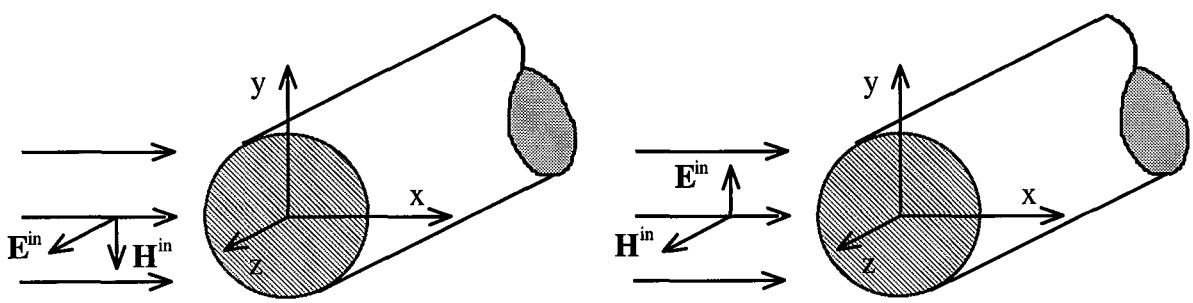
Figure 4.3: Erreur globale sur une fenêtre vide.

propagation de l'onde, nous avons choisi le premier angle égal à l'angle d'incidence et le second égal à son complémentaire sur chaque côté. Les résultats obtenus sont illustrés par la

Figure 4.3. L'erreur de discrétisation sur le champ Exy reste inférieure à 0.5%, la densité étant environ de 14 noeuds par longueur d'onde. Selon l'inclinaison, par rapport à l'axe Ox, de l'onde on commet plus d'erreur sur l'une ou l'autre de la composante du champ transverse. Cela s'explique au vu de l'erreur théorique de la CLA (voir équations 2.60 et 2.65a) qui dépend du module de la composante considérée. Lorsque l'angle d'incidence est faible le module de la composante normale (ici selon l'axe Ox) est faible et l'erreur commise sur cette composante est moindre que celle sur la composante normale. Au delà des angles d'incidence proches de la diagonale du domaine les rôles sont inversés.

Diffraction d'une onde plane par un cylindre

La surface de nombreux objets comme le fuselage des avions, des missiles et autres, est souvent représentée par des structures cylindriques. Le cylindre circulaire, à cause de sa simplicité et de sa solution analytique représentée par des fonctions spéciales (fonctions de Bessel et de Hankel) bien connues [73], est l'une des géométries largement employée pour modéliser des problèmes de diffraction par des objets pratiques. Les solutions analytiques peuvent être obtenues par des méthodes modales avec l'hypothèse que le cylindre est de longueur infinie [1,3,69]. Pour le cas particulier de la diffraction d'une onde plane pilotée par un vecteur d'onde normal à la génératrice du cylindre, on peut se ramener exactement à une configuration 2D dans une section droite du cylindre.

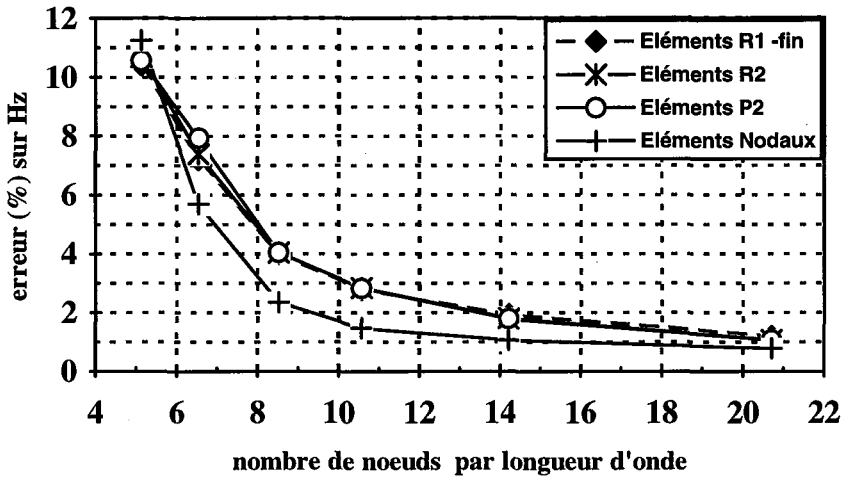


(a) polarisation TM^z *(b)* polarisation TE^z

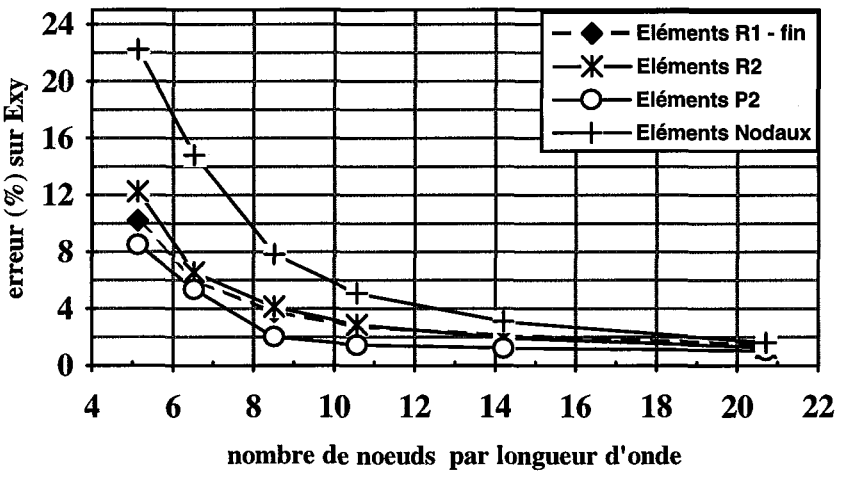
Figure 4.4: Diffraction par un cylindre.

Dans le cas test que nous considérons ici, le cylindre de rayon a = 5 cm est centré dans un domaine rectangulaire de dimensions 40 cm x 30 cm ou à l'intérieur d'un cercle de rayon

20 cm. L'onde plane a une incidence nulle par rapport à l'axe des x positifs et une fréquence de propagation de 3 Ghz. Avant tout nous avons effectué une étude de l'erreur globale comme définie en (4.30) sur les différentes composantes des champs électrique et magnétique, en fonction de la densité de maillage. Nous présentons les résultats dans la Figure 4.5 pour une polarisation TE^z (la composante selon l'axe Oz du champ électrique incident est nulle).



(a)



(b)

Figure 4.5: Influence de la densité de maillage sur la solution numérique.

La densité de maillage a été définie comme le nombre de noeuds des *triangles de type (2)* par longueur d'onde. L'approximation de la formulation scalaire de l'équation 4.22 (formulation en champ total) s'est faite avec des éléments nodaux de Lagrange sur le *triangle de type (2)* tandis que celle vectorielle (4.24) utilise tour à tour des éléments R1, R2 et P2 sur le triangle,

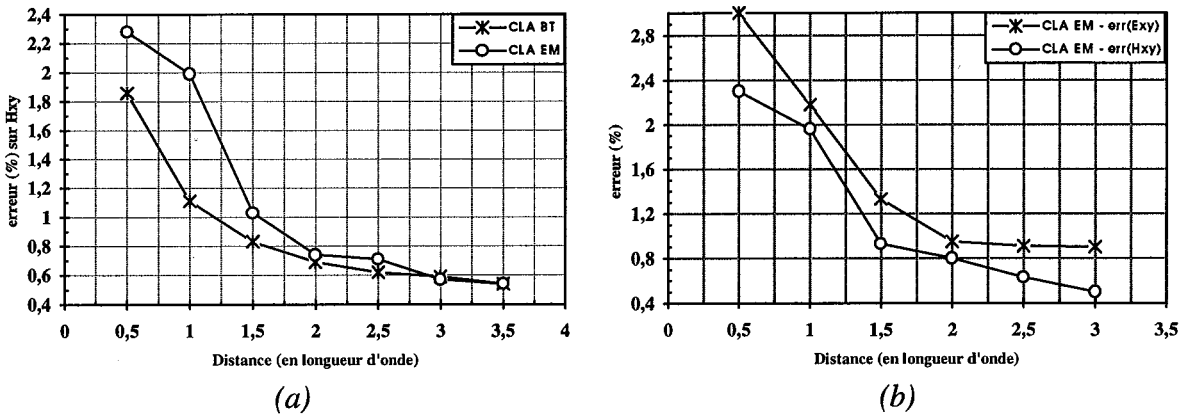
couplée à une CLA d'ordre deux symétrique. Pour les éléments R1, chaque *triangle de type (2)* initial a été subdivisé en quatre autres de *type (1)*, de manière à ce que les noeuds du maillage initial coïncident avec ceux de ce nouveau maillage plus fin. On obtient alors exactement la même densité de maillage avec des *triangles de type (1)*. Nous retrouvons les résultats théoriques (voir remarque 3.4) à savoir que les éléments P2 sont plus précis que les éléments R2 (Figure 4.5 (b)) et que leurs rotationnels sont des polynômes de même degré (Figure 4.5 (a)). Autrement dit les éléments R2 sont aussi précis que les éléments P2 en ce qui concerne l'interpolation ou l'approximation du rotationnel du champ. Les éléments "R1-fin" (obtenus sur un *triangle de type (2)*) comportent 9 degrés de liberté liés aux arêtes par *triangle de type (2)* et naturellement donnent des résultats sensiblement identiques, en précision, à ceux des éléments R2 et en deçà de ceux des éléments P2. Il en ressort que pour obtenir une précision identique à celle des éléments R2, en utilisant des éléments R1, il faut subdiviser le maillage initial en quatre. Cependant employer des éléments R1 sur un maillage fin pose des problèmes de stockage (le nombre de triangles est multiplié par quatre) et de singularité numérique à cause de la taille des triangles qui est alors petite (le rotationnel des éléments R1 étant inversement proportionnel, d'après l'équation (3.76), à la surface du triangle associé). C'est la raison pour laquelle nous utilisons exclusivement dans la suite les éléments R2 et P2. Les problèmes de dérivation numérique évoqués à la section sont aussi retrouvés: la composante longitudinale, Hz, du champ **H** est mieux évaluée en utilisant directement la formulation scalaire (Figure 4.5 (a)) tandis la composante transverse, Exy, du champ **E** est mieux calculée avec la formulation vectorielle (Figure 4.5 (b)) pour une même densité de maillage. D'où la complémentarité de ces deux formulations lorsque l'on désire obtenir un calcul des champs **H** et **E** de précision identique sur un même maillage et éviter les problèmes mentionnés plus haut relatifs à un maillage excessivement fin. Ceci étant dit les courbes d'erreur se rejoignent lorsque le maillage devient fin et tendent toutes vers une asymptote donnée par l'erreur due à la CLA non exacte. La Table 5.1 montre que les temps d'assemblage de la matrice pour les éléments mixtes de degré deux sur le triangle restent inférieurs (éléments R2) ou peu différents (éléments P2) à ceux des éléments nodaux. Cela est dû au fait qu'il y a moins de connectivité entre les noeuds support de degrés de liberté dans le cas des

Table 5.1: Comparaison d'éléments finis d'ordre deux sur le triangle.

densité (nds/λ)	Elément	err(Exy) en %	err(Hz) en %	Nb Inconnues	Nb nonzeros	Temps CPU Ass.	Temps CPU Rés.	Temps CPU total
~ 14	**R2**	***1.57***	1.60	**5552**	34368	19 s	**26 s**	***46 s***
~ 14	P2	1.03	1.63	8328	75246	25 s	47 s	73 s
~ 14	Nodaux	2.81	1.21	2297	13880	31 s	11 s	42 s
~ 20	R2	1.13	1.01	11640	72468	57 s	60 s	118 s
~ 20	P2	0.98	1.00	17460	158688	71 s	117 s	188 s
~ 20	**Nodaux**	***1.59***	0.99	**4764**	29100	68 s	**27 s**	***97 s***

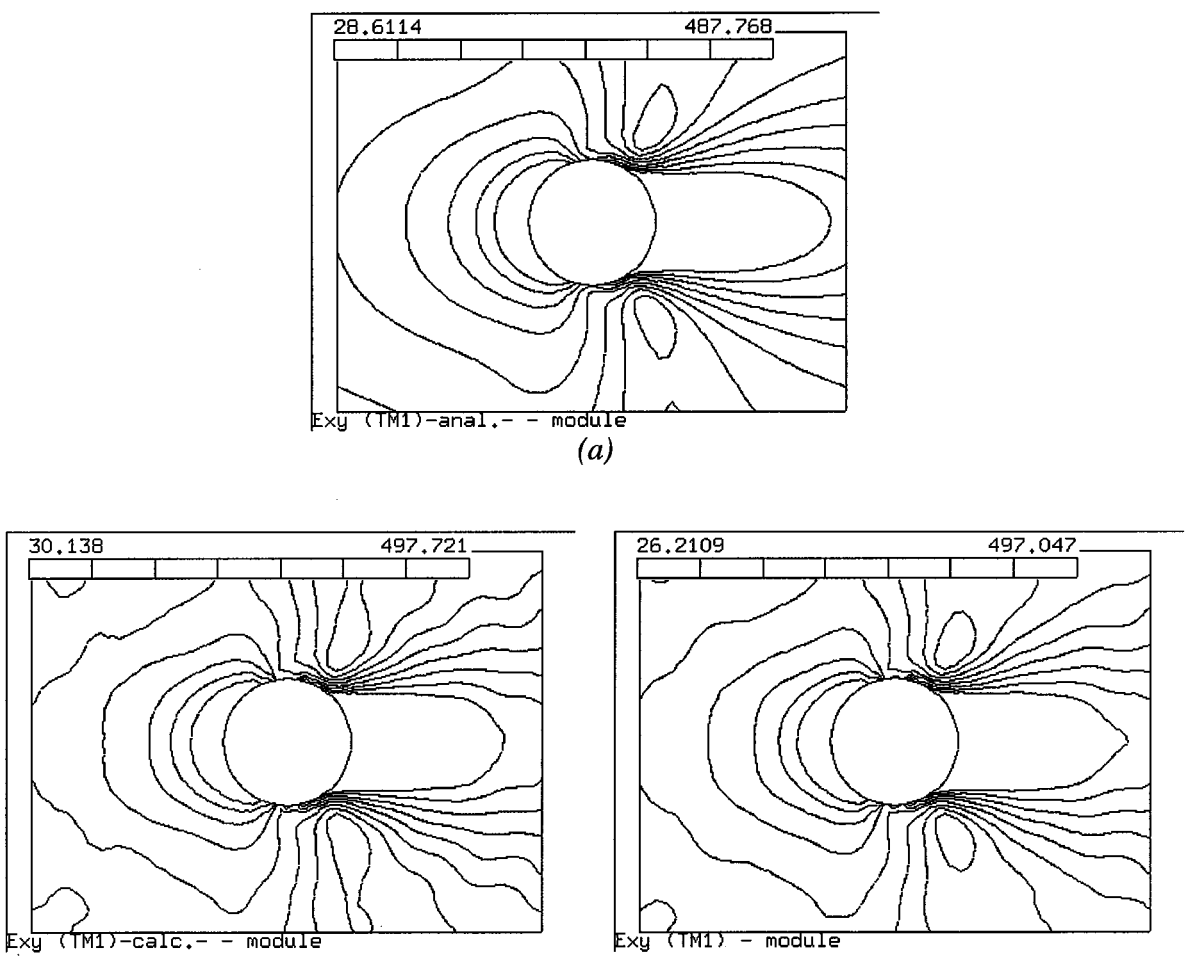
éléments mixtes que dans celui des éléments nodaux. En effet une arête appartient au plus à deux triangles tandis qu'un sommet peut appartenir à plus de deux triangles. De façon générale les temps de résolution avec les éléments mixtes R2 et P2 sont plus élevés pour une même densité de maillage que ceux des éléments nodaux. Ceci est normal car les éléments nodaux approchent une seule composante Hz (resp. Ez) tandis que les éléments R2 et P2 interpolent deux composantes Ex et Ey (resp. Hx et Hy), par conséquent ils génèrent plus d'inconnues, plus de non-zéros et requièrent donc plus de temps de résolution. Néanmoins la Table 5.1 (valeurs en "gras italique") indique qu'à erreur identique commise sur la composante Exy, les éléments nodaux nécessitent plus de temps de calcul que les éléments R2. Elle indique aussi que pour un nombre d'inconnues sensiblement identique, les éléments nodaux et les éléments mixtes R2 ont un temps de résolution proche (nombres en "gras souligné" dans Table 5.1).

On étudie cette fois l'influence de la distance d définie à la Figure 4.9 (a) sur la solution numérique en comparaison avec la solution analytique. Pour ce faire, on fait varier la distance d de 1.5λ à 3.5λ., la fréquence étant maintenue à 3 GHz et la densité à ~14 nds/λ. La Figure 4.6 illustre bien l'influence, sur la performance des CLA, de la distance entre la frontière du domaine et les sources à l'origine du champ électromagnétique sortant. Les deux types de CLA sont plus précis quand la frontière s'éloigne du cylindre. Nous observons une bonne performance des CLA: l'erreur moyenne sur la solution ne dépasse pas 3 % et reste inférieure,



(a) *(b)*

Figure 4.6: Erreur globale fonction de la distance cylindre-frontière extérieure; (a) cylindre conducteur; (b) cylindre diélectrique $(\varepsilon_r = 2,\ \mu_r = 1)$, mode TM^z et mode TE^z.



(a) *(b)* *(c)*

Figure 4.7: Influence de la condition de coin: (a) solution analytique, (b) solution numérique sans condition de coin, (c) avec condition de coin.

à partir de d = λ, à 2 % (soit une erreur moyenne sur chaque composante Hx et Hy de 1.4%), puis décroît très vite vers une asymptote donnée par l'erreur de discrétisation (~0.5%). Nous notons un avantage pour la CLA du type BT lorsque la frontière est plus proche du cylindre, ceci parce que les ondes parasites de coins atteignent la fenêtre S avec une amplitude non négligeable lorsque le domaine est rectangulaire (Figure 4.6 (a)). L'application de la condition de coin (2.89) diminue légèrement l'erreur globale, par contre elle a un effet positif notable sur la répartition du champ au voisinage du coin (Figure 4.7). La condition de coin étant obtenue à partir des CLA appliquées au voisinage du coin, elle n'améliore pas la solution de façon nette si ces CLA ne sont pas optimales.

On étudie maintenant l'influence de la fréquence sur la solution numérique. Le cylindre précédent est considéré dans la même configuration. La frontière, fixe cette fois-ci, du domaine est un rectangle 40 cm x 30 cm ou un cercle de rayon 20 cm. La fréquence de propagation de l'onde plane varie de 0.1 GHz à 4.5 GHz. Pour les fréquences égale ou supérieures à 3 GHz, le maillage respecte la même densité: $202 / \lambda^2$ (de façon à avoir la même erreur de discrétisation pour ces fréquences). Pour les fréquences inférieures à 3 GHz, la modélisation a été effectuée avec le même nombre de noeuds utilisé à 3 GHz: 2297 pour la frontière rectangulaire et 2420 pour la frontière circulaire; ceci pour éviter une trop grande erreur d'approximation de la surface du cylindre.

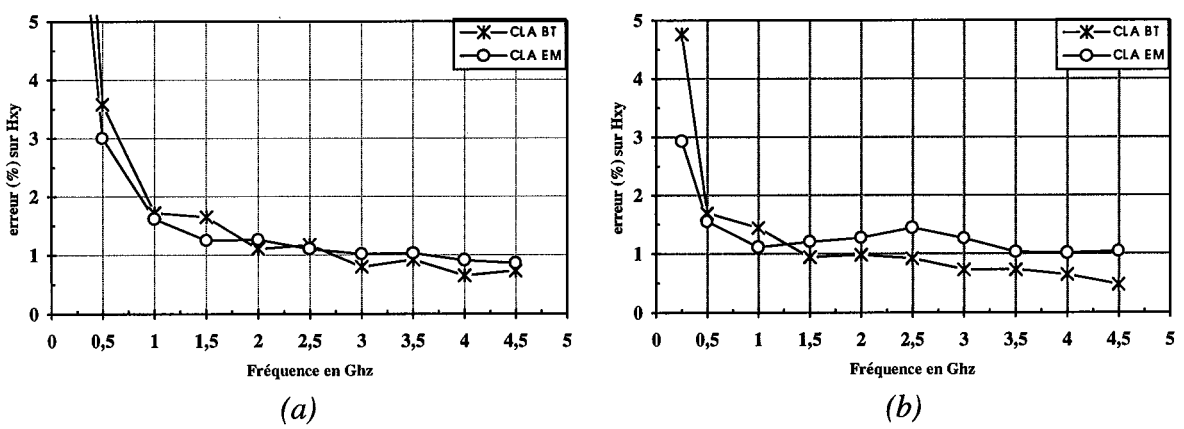
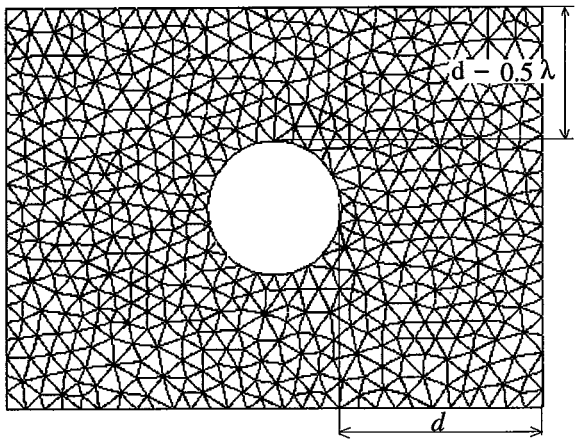
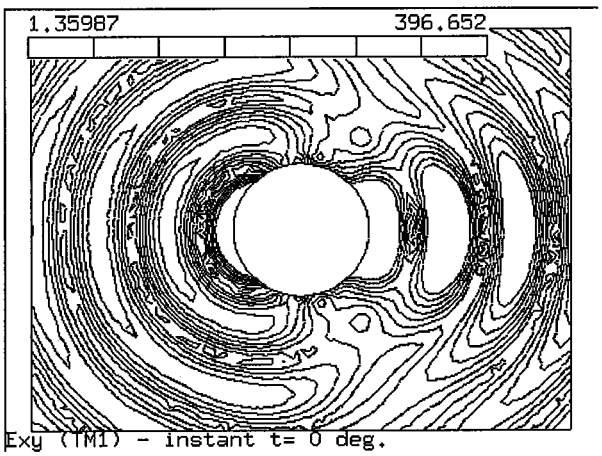


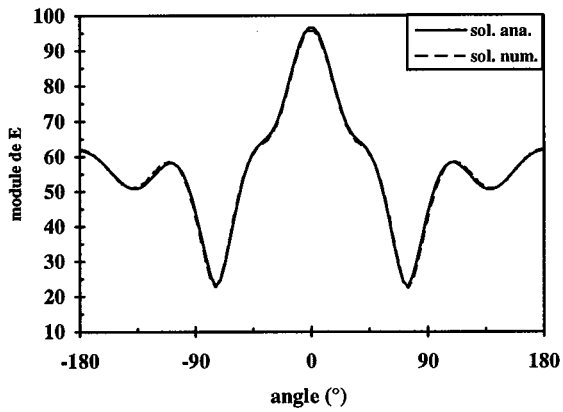
Figure 4.8: Erreur globale fonction de la fréquence; (a) cylindre conducteur, (b) coin conducteur

Cylindre conducteur
Angle d'incidence: 0°
Discrétisation: *Triangle de type 2 complet*
-densité: 14 noeuds par λ
-nombre d'éléments: 1085
-nombre de sommets: 606
-nombre d'arêtes: 1691
Nombre d'Inconnues: 8328
Nombre de termes non nuls: 75246
Solveur: NDRA
Station de travail: HP 9000/710
Temps CPU (s) : 73 (Ass. : 25, Rés. : 48)

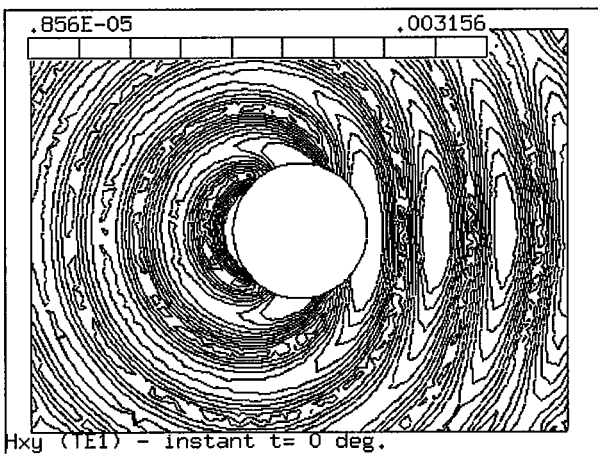


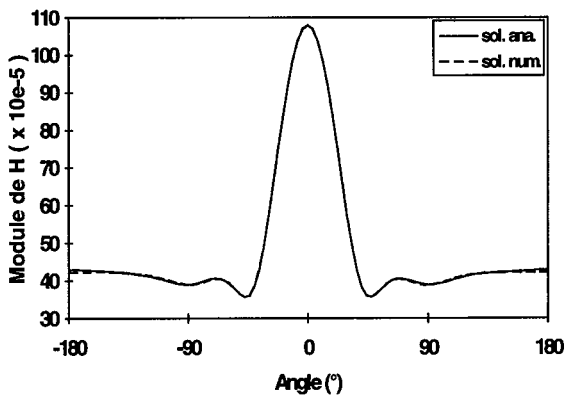
(a) géométrie et discrétisation du problème





(b) mode TE^z: *Formulation en champ* ***E***

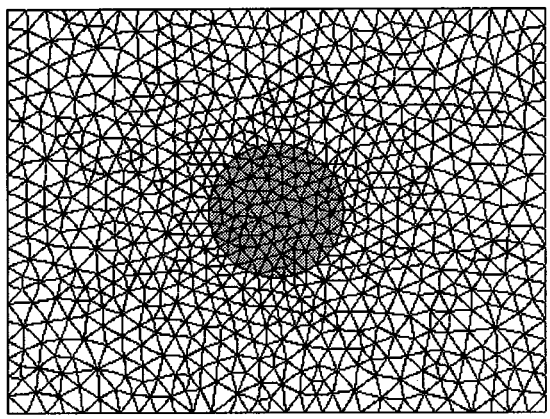




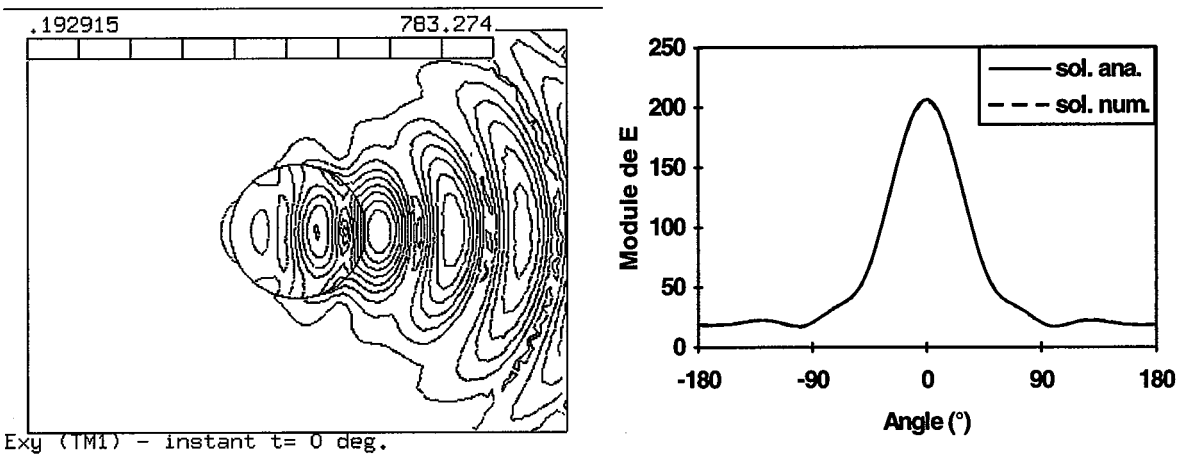
(c) mode TM^z: *Formulation en champ* ***H***

Figure 4.9: cylindre conducteur: isovaleurs instantanées de l'amplitude du champ diffracté proche et module du champ lointain correspondant; (b) champ **E**; (c) champ **H**.

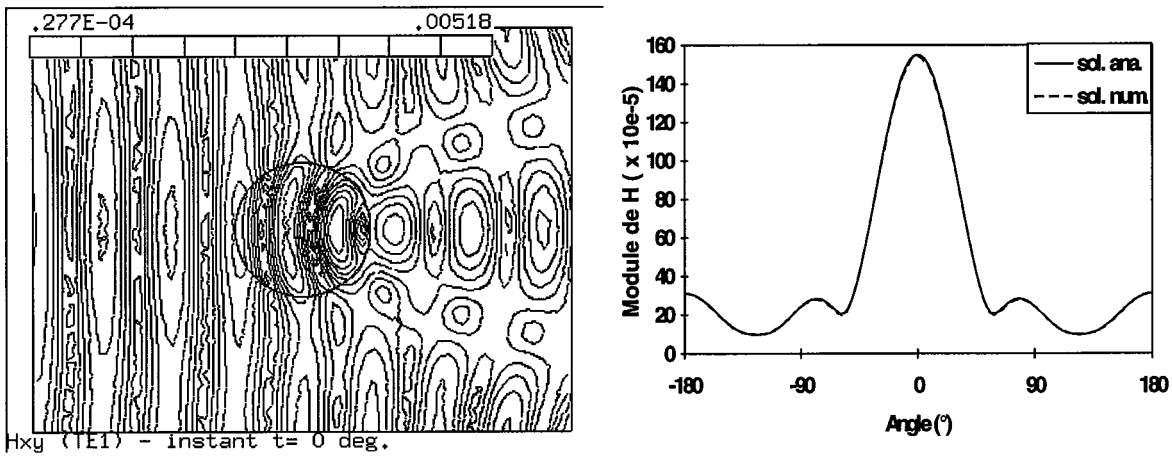
Cylindre non conducteur
Angle d'incidence: 0°
Discrétisation: *Triangle de type 2 complet*
-densité: 14 noeuds par λ
-nombre d'éléments: 1498
-nombre de sommets: 801
-nombre d'arêtes: 2298
Nombre d'Inconnues: 11388
Nombre de termes non nuls: 103668
Solveur: NDRA
Station de travail: HP 9000/710
Temps CPU (s) : 115 (Ass. : 38, Rés. : 77)



(a) géométrie et discrétisation du problème



(b) mode TE^z: *Formulation en champ* ***E***



(c) mode TM^z: *Formulation en champ* ***H***

Figure 4.10: Cylindre non conducteur: isovaleurs instantanées de l'amplitude du champ diffracté proche et module du champ lointain correspondant; (b) champ **E**; (c) champ **H**.

Plus la fréquence est élevée, plus les deux types de CLA sont précis car, en termes de longueur d'onde, on éloigne (virtuellement) ainsi la frontière extérieure. Pour les basses fréquences (< 1 GHz), les solutions deviennent incorrectes (Figure 4.8 (a)). Ceci s'explique par le fait que la distance entre le cylindre et la frontière est une faible fraction de la longueur d'onde. Par exemple, pour la fréquence de 0.5 GHz, cette distance est de 0.25 de la longueur d'onde.

b) Etude d'erreur en champ lointain

Le calcul du champ lointain (très loin des objets) ou de façon générale du champ en tout point du domaine extérieur (domaine non discrétisé) pour les problèmes de diffraction a été effectué par deux différentes méthodes: par les formules de Stratton-Chu [2], i.e., par les équations intégrales de frontière (EIF) ou par un développement en séries harmoniques [1] associé à une transformation de Fourier [74]. Dans chaque méthode, le champ électromagnétique proche, calculé numériquement par la MEF, permet d'obtenir les valeurs du champ électromagnétique en dehors du domaine discrétisé. Un contour fictif, que nous notons Γ_{fe}, est le siège de courants induits par le champ proche dans la première méthode tandis que dans la seconde, il est utilisé pour calculer les coefficients de l'expansion harmonique (EH). Une étude d'erreur en champ lointain a été menée dans [75], pour ces deux méthodes, sur les influences de la densité de maillage et de la distance objet diffractant - contour fictif Γ_{fe}. Le champ proche a été calculé numériquement par une formulation scalaire. Il ressort de cette étude que la méthode EH est plus précise que la méthode EIF. La raison est que le développement en séries harmoniques utilise le champ principal **E** ou **H**. La méthode par EIF, quant à elle, demande à la fois le champ principal **E** (resp. **H**) et le champ dual **H** (resp. **E**) obtenu par dérivation de **E** (resp. **H**). C'est cette dérivation numérique qui introduit plus d'erreur dans le calcul des quantités lointaines par EIF [71]. En outre la méthode EH est peu sensible à la densité de maillage dès lors que le contour Γ_{fe} est très proche de l'objet. D'autre part, lorsque le contour Γ_{fe} se rapproche de la frontière extérieure du domaine, le champ lointain est de moins en moins bien évalué, ceci étant dû aux réflexions parasites produites par les CLA. Nous aboutissons aux mêmes résultats en reprenant cette étude avec un champ

proche calculé par la formulation vectorielle. Ici nous montrons dans la Figure 4.11 la détérioration de la valeur du champ lointain quand la frontière extérieure, rectangulaire, se rapproche de l'objet, Γ_{fe} étant maintenu à une distance fixe de l'objet. Le contour fictif Γ_{fe} est un cercle de rayon 0.055λ. Le champ **H** lointain, dont le module est porté en ordonnées dans la Figure 4.11 ainsi que dans les Figures 4.9 et 4.10, correspond au champ $\mathbf{H}_\infty$ défini à la section 1.2.3. Il est déterminé par la méthode EH dans les Figures 4.9 et 4.10 et par la méthode EIF dans la Figure 4.11. On obtient naturellement de meilleurs résultats en choisissant la frontière extérieure circulaire et la méthode EH pour la détermination de $\mathbf{H}_\infty$ dans la Figure 4.11.

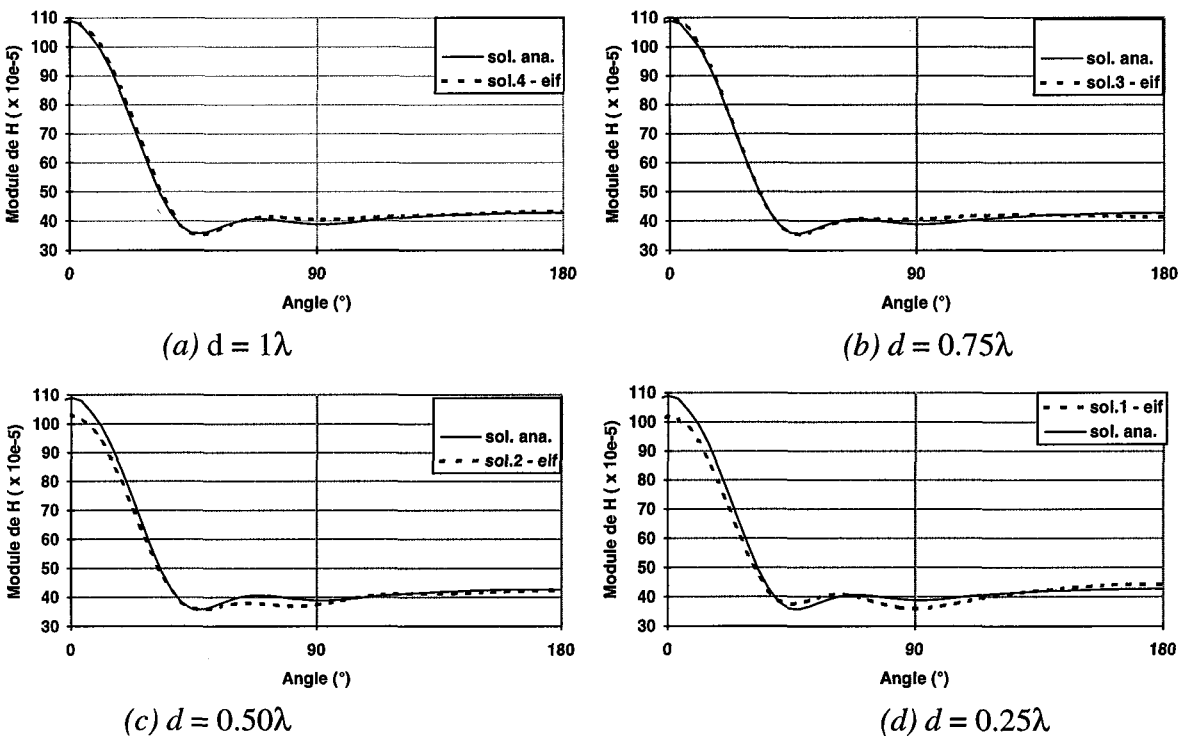


Figure 4.11: Influence des réflexions parasites sur le champ lointain magnétique.

Le calcul du champ lointain à partir d'une solution numérique MEF-CLA peut être significativement amélioré. Afin de minimiser les effets des réflexions parasites dans le calcul du champ lointain, il est proposé dans [37] de considérer *a priori* le champ diffracté proche, comme non totalement sortant. Le développement en séries du champ diffracté proche prend en compte les réflexions parasites à la frontière; il n'est plus uniquement composé d'ondes

élémentaires divergentes (harmoniques sortantes) mais est une combinaison d'ondes divergentes et convergentes (harmoniques rentrantes). Seuls les coefficients relatifs aux harmoniques sortantes sont ensuite retenues pour évaluer le champ diffracté lointain. Cette idée est attractive car il peut arriver que l'on s'intéresse uniquement aux quantités lointaines et dans ce cas il serait souhaitable de pouvoir rapprocher la frontière extérieure des objets et de réduire ainsi la taille du domaine discrétisé. Cependant cette méthode EH nécessite une frontière circulaire; ce qui n'est pas toujours pratique selon la géométrie de l'objet. Par contre avec la méthode EIF, la frontière peut être de forme quelconque. Aussi il serait bien de pouvoir étendre cette approche à la méthode EIF.

Diffraction d'une onde plane par un coin

La diffraction des ondes électromagnétiques par un coin conducteur est d'un grand intérêt. En effet, la diffraction par le coin est un problème de base qui peut être utilisé pour représenter localement - près des bords - la diffraction par des objets de forme plus complexe. Les solutions analytiques peuvent être obtenues à l'aide de méthodes modales, avec les hypothèses et la configuration suivante [69]:

- coin de longueur et de largeur infinies,
- coin parfaitement conducteur
- la bissectrice du coin est parallèle à un axe de coordonnées (ici Ox dans Figure 4.12)

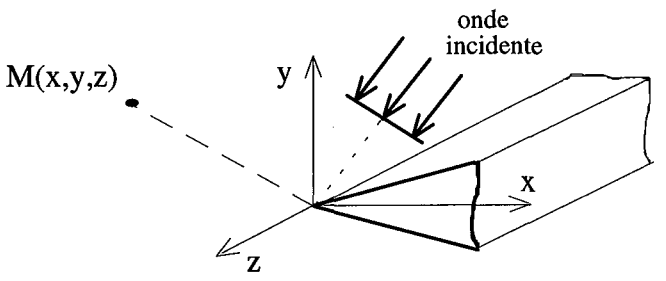


Figure 4.12: Coin: définition de la géométrie.

Les hypothèses théoriques ne peuvent être respectées dans une modélisation par la MEF: la largeur du coin doit être finie. Aussi les effets de bord dus aux extrémités du coin sont à prendre en considération dans la comparaison des solution analytique et numérique. Toutefois,

la définition de notre fenêtre S minimise l'influence des effets de bord sur l'erreur globale. La longueur du coin a été prise égale à 30 cm, soit 3λ, pour une fréquence de 3 GHz. L'angle interne total du coin est choisi égal 45° et l'extrémité principale du coin est située à l'origine. La Figure 4.8 (b) montre la variation de l'erreur globale comme préalablement définie sur la fenêtre S de 30 cm x 20 cm, en fonction de la fréquence, pour les deux types de CLA. Des observations identiques au cas du cylindre conducteur peuvent être faites.

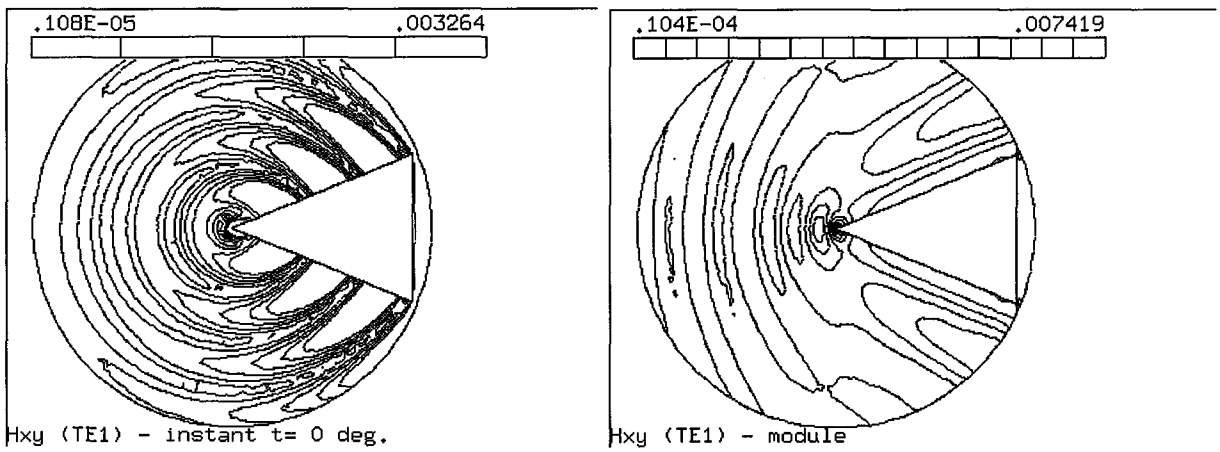


Figure 4.13: Coin conducteur: (a) isovaleurs instantanées de l'amplitude du champ diffracté **H**; (b) isovaleurs du module du champ total magnétique.

4.3.2. Diffraction par objets complexes

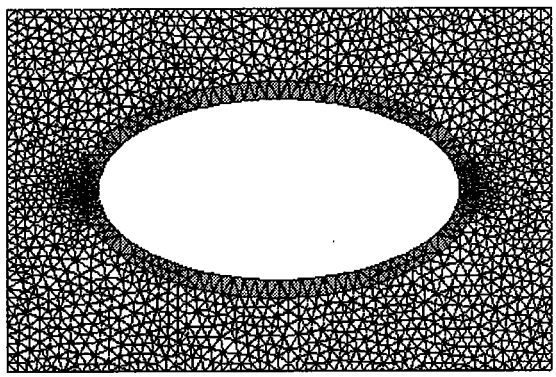
Dans cette section, nous présentons des cas de diffraction dont la résolution par une méthode numérique s'avère nécessaire. Ces exemples sont extraits d'un atelier de travail sur les approximations et les méthodes numériques pour la résolution des équations de Maxwell [76]. Nous avons choisi les deux cas suivants:

- l'ellipse parfaitement conductrice recouverte d'une couche diélectrique (cas E2) d'épaisseur $\delta = 0.2\lambda$, et de propriétés diélectriques $(\varepsilon_r = 3,\ \mu_r = 1)$,

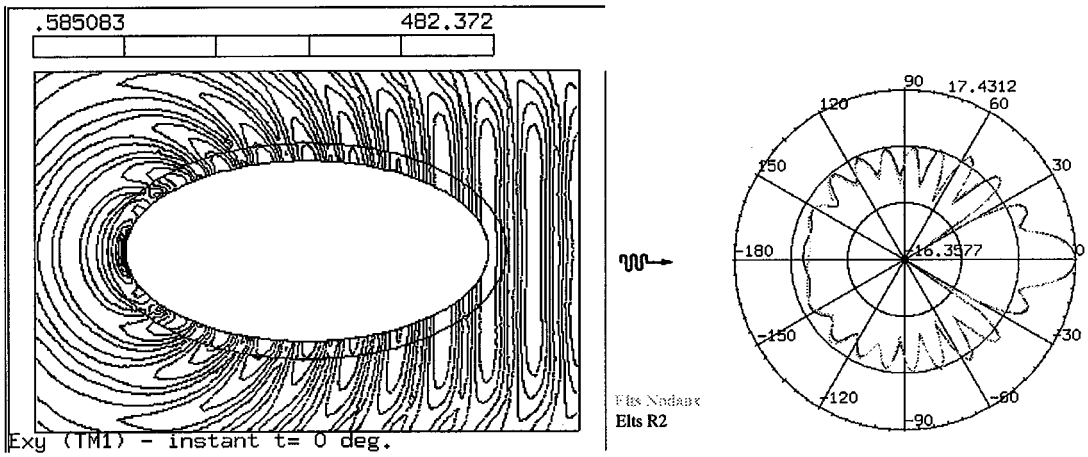
- l'aile d'avion NACA0012 parfaitement conductrice recouverte d'une couche diélectrique (cas A2) d'épaisseur $\delta = 0.1\lambda$, et de propriétés diélectriques $(\varepsilon_r = 7.4,\ \mu_r = 1.4)$.

Les résultats obtenus sont condensés dans les Figures 4.14 et 4.15. Nous observons une bonne concordance entre les calculs de la section radar effectués à partir des champs proches obtenus

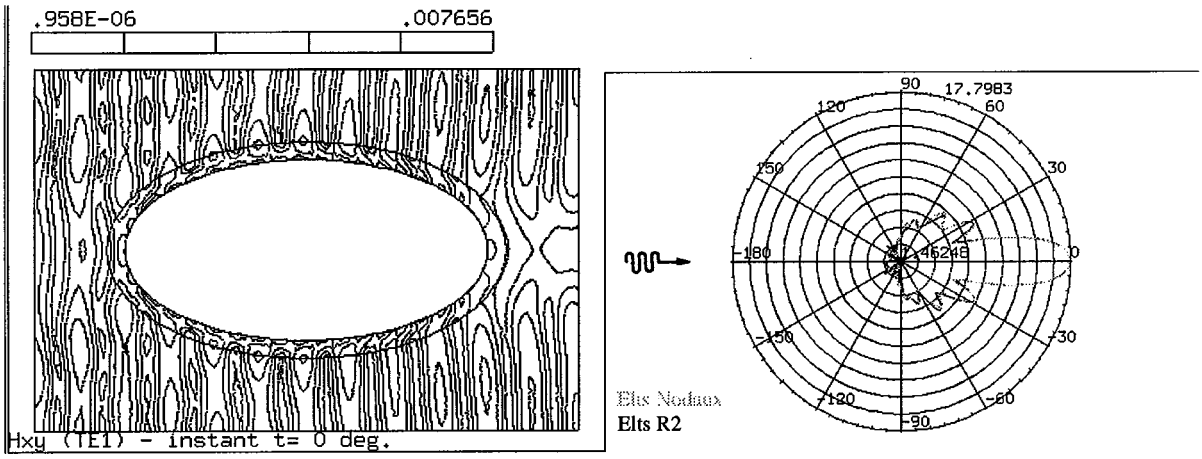
Ellipse (E2)
Angle d'incidence: 0°
Discrétisation: *Triangle de type 2 complet*
-densité: 14 noeuds par λ
-nombre d'éléments: 3116
-nombre de sommets: 1705
-nombre d'arêtes: 4821
Nombre d'Inconnues: 23811
Nombre de termes non nuls: 215886
Solveur: NDRA
Station de travail: HP 9000/710
Temps CPU (s) : 360 (Ass. : 161, Rés. : 199)



(a) géométrie et discrétisation du problème



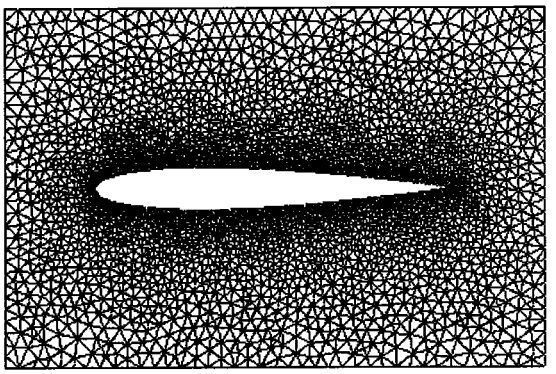
(b) mode TE^z: *Formulation en champ* ***E***



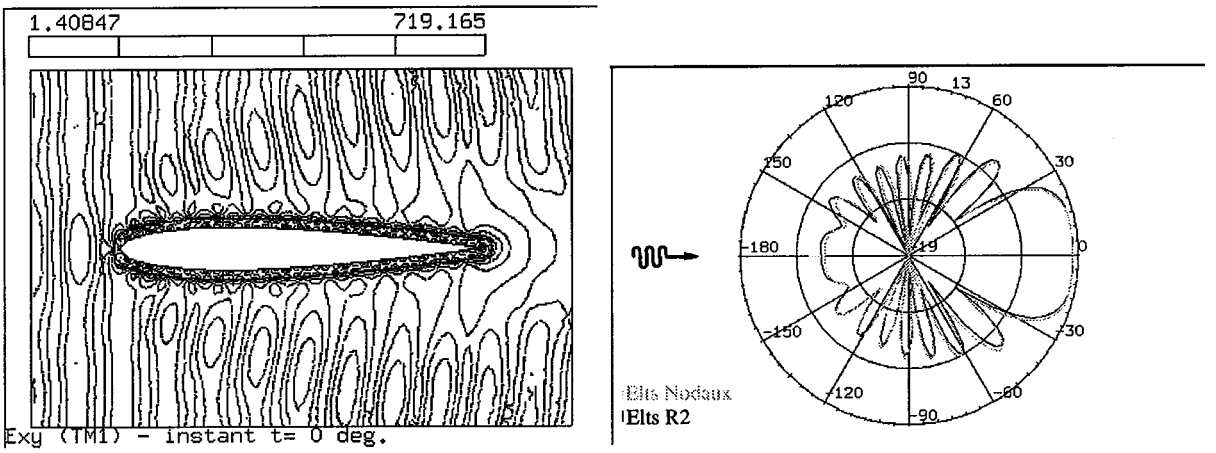
(c) mode TM^z: *Formulation en champ* ***H***

Figure 4.14: Ellipse (E2): isovaleurs instantanées du champ diffracté proche et section radar; (b) champ **E**; (c) champ **H**.

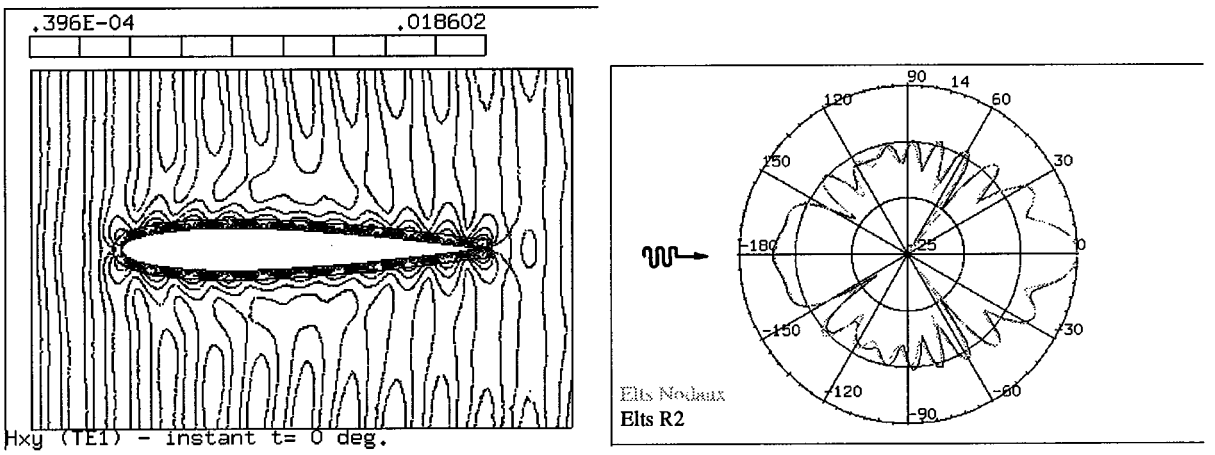
NACA0012 airfoil (A2)
Angle d'incidence: 0°
Discrétisation: *Triangle de type 2 incomplet*
-densité: 14 noeuds par λ
-nombre d'éléments: 5554
-nombre de sommets: 2942
-nombre d'arêtes: 8496
Nombre d'Inconnues: 28100
Nombre de termes non nuls: 175446
Solveur: NDRA
Station de travail: HP 9000/710
Temps CPU (s) : 413 (Ass. : 247, Rés. : 166)



(a) géométrie et discrétisation du problème



(b) mode TE^z*: formulation en champ* ***E***



(c) mode TM^z*: formulation en champ* ***H***

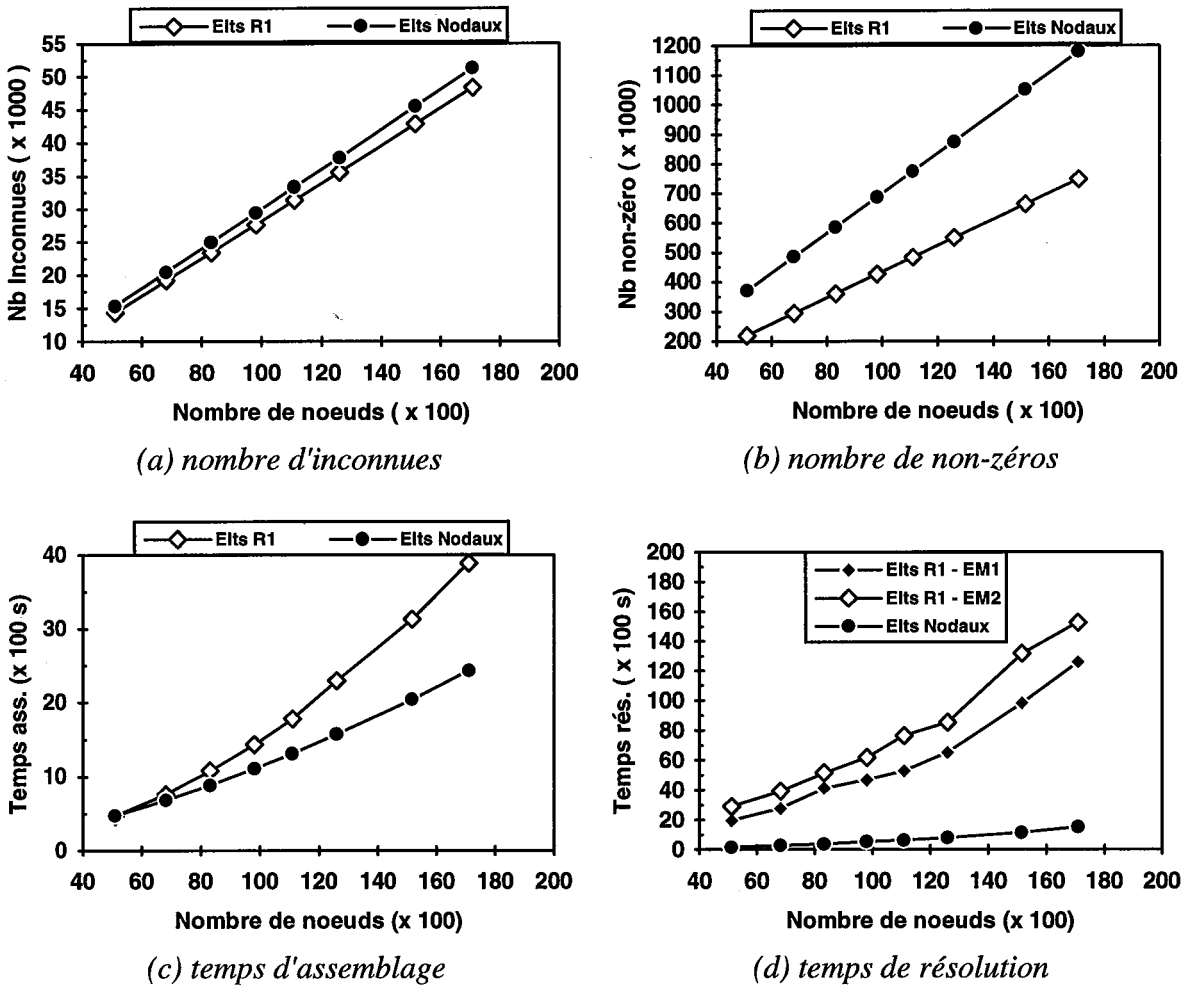
Figure 4.15: Aile d'avion (A2): isovaleurs instantanées du champ diffracté proche et section radar; (b) champ **E**; (c) champ **H**.

d'un côté par la formulation scalaire et de l'autre par la formulation vectorielle. La méthode EIF a été utilisée dans les deux cas pour évaluer les quantités lointaines.

4.4. EXEMPLES DE DIFFRACTION EN 3D

4.4.1. cas de la diffraction par un cylindre

Nous considérons dans cette section l'étude de la diffraction d'une onde plane polarisée TM^z par des cylindres conducteurs de différentes longueurs. Une comparaison entre la formulation du problème utilisant les éléments finis nodaux et celle utilisant les éléments mixtes est effectuée en termes de nombre d'inconnues, de nombre de coefficients non nuls de la matrice (non-zéros), de temps de calcul et de précision. Plus précisément nous avons utilisé les éléments de Lagrange de *type (1)* et les éléments mixtes R1 sur l'hexaèdre. La formulation employant les éléments nodaux est scalaire et est couplée à la CLA scalaire d'Engquist-Majda du second ordre [77], et celle travaillant avec les éléments R1 est couplée à la CLA d'Engquist-Majda vectorielle symétrique qui est, soit d'ordre deux (EM2), soit d'ordre un (EM1). La géométrie et la discrétisation du problème sont données par la Figure 4.17 (a). Le rayon du cylindre est de 6 cm et la fréquence de l'onde incidente est de 3 GHz. Le problème a été modélisé avec un plan de symétrie yz, l'incidence de l'onde plane étant de 0° par rapport à l'axe Oy et la polarisation étant TM^z. Les résultats obtenus sont résumés dans la Figure 4.17. Les isovaleurs du module du champ **H** dans la section médiane sont données par la Figure 4.17 (b). Les Figures 4.17 (d) et (e) en particulier montrent comment la section radar, évaluée dans une coupe médiane du cylindre, se rapproche de celle de la solution analytique 2D lorsque la longueur du cylindre augmente. Les courbes dans la Figure 4.17 (d) donnent l'écart moyen le long d'un cercle, en fonction de la longueur L du cylindre, entre la section radar analytique 2D et celles obtenues à partir des solutions numériques. Nous notons un bon accord entre les solutions numériques (Figure 4.17 (c) et (e)). Le graphe de la Figure 4.16 (a) indique que le nombre d'inconnues est sensiblement le même pour les deux formulations avec un léger avantage pour les éléments R1. Ce résultat a été constaté aussi dans [68] pour des problèmes de courants de Foucault. La Figure 4.16 (b) montre que la matrice obtenue avec les éléments

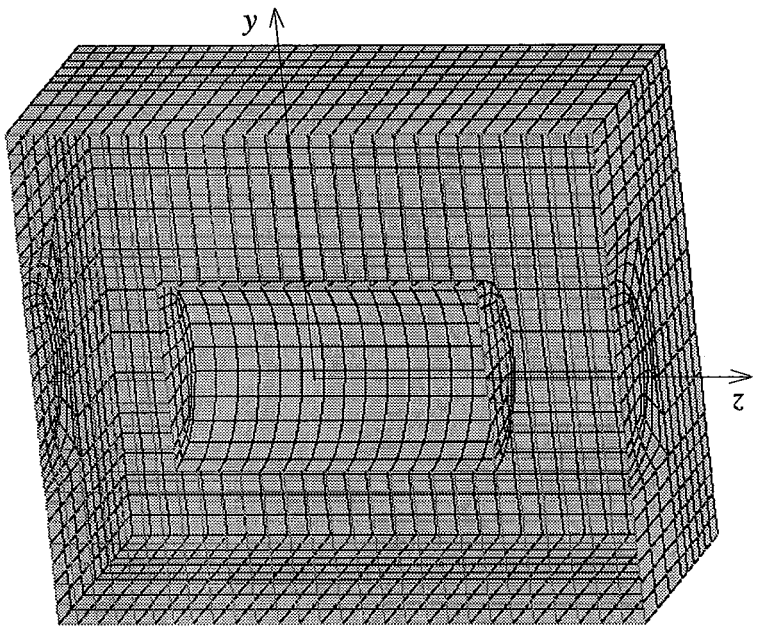


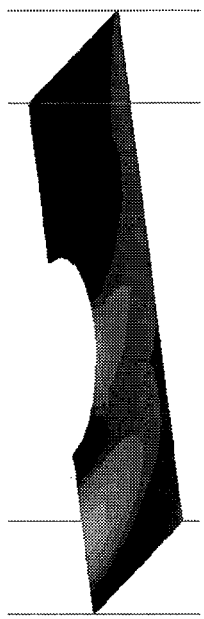
(a) nombre d'inconnues *(b) nombre de non-zéros*

(c) temps d'assemblage *(d) temps de résolution*

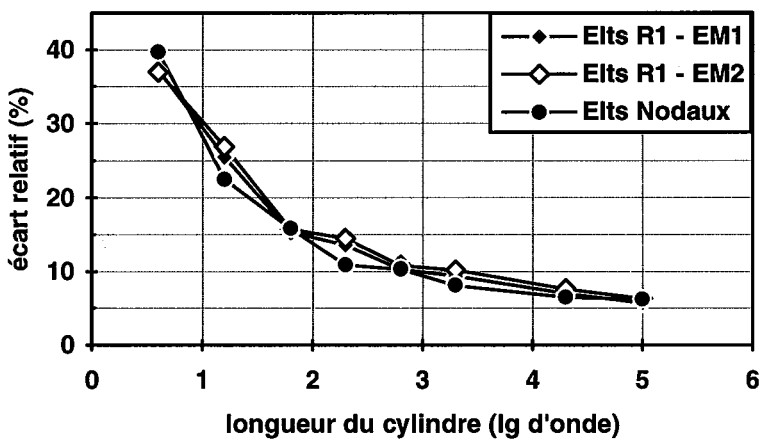
Figure 4.16: Comparaison d'éléments finis nodaux et mixtes sur l'hexaèdre.

R1 sur l'hexaèdre est plus creuse que celle avec les éléments nodaux; nous avons en moyenne une réduction de 40 % de non-zéros. Cependant ces avantages ne sont pas traduits, dans notre implantation, en terme de temps de calcul comme l'indique les Figures 4.16 (c) et 4.16 (d). Le temps d'assemblage est plus important avec les éléments R1 (Figure 4.16 (c)). La raison est que, dans notre code, les valeurs des fonctions de base nodales aux points d'intégration de Gauss sont précalculées et stockées une fois pour toutes, tandis que celles vectorielles sont calculées à chaque point de Gauss lors des intégrations surfaciques. Nous envisageons de remédier à cet inconvénient en définissant la trace des éléments R1 sur les surfaces par des éléments R1 bidimensionnels dont les valeurs des fonctions de base aux points de Gauss seront elles précalculées et stockées. Le graphe de la Figure 4.16 (d) indique très clairement que la résolution du système d'équations obtenu avec les éléments R1 est beaucoup plus lente. La méthode de résolution utilisée est un gradient conjugué préconditionné (PCCG). Nous ne

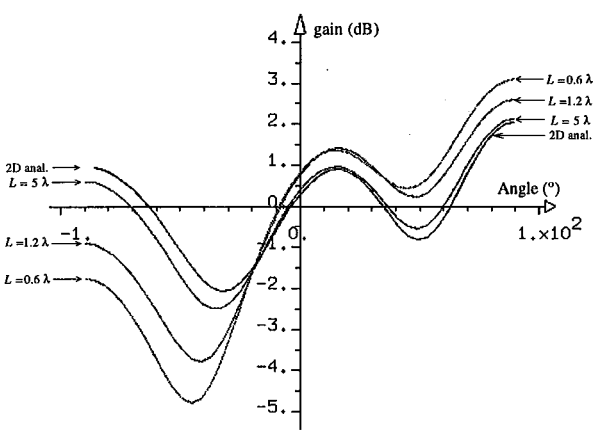


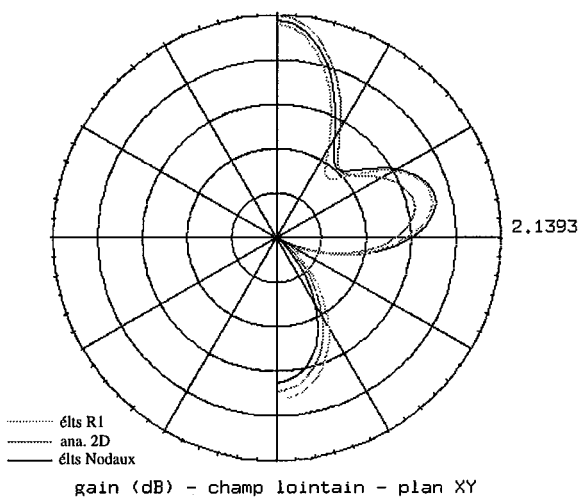


(a) géométrie et discrétisation *(b) coupe dans le plan médian*



(c) écart relatif solution analytique et solution numérique





(d) section radar pour différentes longueurs *(e) section radar à L=5λ*

Figure 4.17: Diffraction par un cylindre de longeur finie.

disposons pas d'information sur le préconditionnement, mais une chose est sûre, c'est qu'il n'est pas adapté aux matrices résultant de l'approximation par les éléments R1. Nous notons toutefois une amélioration significative de la convergence de la méthode lorsque l'on emploie des CLA d'ordre un (EM1). Cette remarque a été aussi soulignée dans [78] pour les CLA du type BT couplées à des éléments d'arête sur le tétraèdre. Nous en déduisons que la contribution, à la matrice globale, des termes contenant les rotationnels et divergences tangentiels, dans l'expression des CLA d'ordre deux, a un effet négatif sur le conditionnement de la matrice.

4.5. CONCLUSION

Le paramètre important, influant sur la performance des CLA locales, reste la distance entre la frontière artificielle et la structure. Pour les CLA du type EM, plus la frontière est proche de l'objet plus la plage d'angles à absorber est large. La condition d'ordre deux n'en absorbant au mieux exactement que deux, la solution contient de plus en plus de modes parasites. Les CLA du type BT, quant à elles, par construction, sont très sensibles à la distance. D'ailleurs, l'erreur théorique est fonction de l'inverse de la distance radiale. Nous retrouvons ces résultats théoriques dans les études menées, dans cette section, sur des cas de diffraction en 2D et en 3D. Et nous observons une bonne performance des CLA pour une distance dispositif micro-onde - frontière extérieure égale ou supérieure à une longueur d'onde, lors de l'étude effectuée en 2D. Nous avons présenté, en 2D, une comparaison en termes de nombre d'inconnus, de nombre de non zéros entre la formulation scalaire qui travaille avec une variable Hz (resp. Ez) et la formulation vectorielle qui travaille avec deux variables Ex et Ey (resp. Hx et Hy). Il en ressort que cette dernière formulation nécessite plus d'inconnues, plus de non-zéros et requiert donc plus de temps de calcul pour une même densité de maillage. Nous avons montré leur complémentarité en termes de précision commise sur le calcul du champ électromagnétique (**E**, **H**). L'étude effectuée en 2D valide, et les expressions des fonctions de base R2 et P2 sur le triangle exhibées au chapitre 3, et les CLA vectorielles symétriques proposées au chapitre 2. L'état actuel du pré-traitement (génération

des données) et du post-traitement (visualisation des résultats) de notre code 3D ne nous a pas permis d'effectuer des études d'erreurs similaires au cas 2D, notamment sur le champ proche, ni de présenter des exemples de diffraction d'une onde plane par objets complexes. Mais les conclusions, concernant la performance des CLA du type EM, survenues lors des études en 2D, restent valables en 3D, les deux formulations vectorielles 2D et 3D étant formellement identiques. Le problème de conditionnement du système matriciel, rencontré en 3D, ne se pose pas en 2D car la méthode de résolution utilisée, Nested Dissection Renumbering Algorithm (NDRA) [79] est du type direct. Et dans ce cas, à nombre d'inconnues proche les éléments mixtes R2 et P2 ont des temps de résolution voisins de ceux des éléments nodaux.

CHAPITRE 5

APPLICATIONS : GUIDES D'ONDES OUVERTS

5.1. INTRODUCTION

Les guides d'ondes appartiennent à la famille des lignes de transmission et permettent fondamentalement de véhiculer l'énergie électromagnétique micro-onde d'un point à un autre par l'intermédiaire d'antennes ou de cornets. Ils servent aussi d'antennes lorsqu'ils comportent des ouvertures. La propagation des ondes ou signaux le long du guide est régie par certaines conditions. Elle est généralement assurée par des réflexions multiples, soit sur des parois en métal (tube métallique) soit sur des surfaces séparant des milieux diélectriques de propriétés différentes: guide diélectrique, fibre optique [3,4,80]. L'optimisation des performances des dispositifs micro-ondes, en particulier des antennes, requiert la connaissance des caractéristiques de propagation et des configurations du champ électromagnétique ainsi que de leur lien avec les paramètres de fabrication (géométrie, propriétés des matériaux). De ce fait, il existe un intérêt croissant dans les méthodes théoriques ou numériques d'analyse des antennes. L'analyse théorique des dispositifs liés à la propagation de micro-ondes à haute puissance s'appuie souvent sur la théorie géométrique de la diffraction (GTD). Cette analyse, effectuée avec des hypothèses simplificatrices (longueur du guide semi-infinie, épaisseur du guide infiniment fine), est alors généralement limitée à des géométries simples et à la considération du champ lointain, les propriétés du champ proche ne pouvant être déterminées avec précision. Or la connaissance de celui-ci peut se révéler importante dans l'optimisation de tels dispositifs [28]. Nous montrons ici que notre formulation par éléments finis mixtes peut être une méthode efficace d'analyse et de conception d'antennes micro-ondes de fortes puissances. Nous l'appliquons plus précisément à la conception de convertisseurs de modes [81], qui peuvent être considérés comme des guides d'ondes ouverts (ce dernier terme par opposition aux guides d'ondes blindés). Dans les exemples présentés en 2D et en 3D, nous ne considérons qu'un seul mode, i.e., une seule configuration du champ électromagnétique peut

se propager à la fréquence d'exploitation. Autrement dit un seul mode est injecté ou excité dans le guide, et nous regardons le champ proche au voisinage de l'antenne ainsi que le champ lointain rayonné.

Nous rappelons certains principes fondamentaux concernant les guides d'ondes, et la dérivation des solutions générales pour les modes TE, TM dans le guide. Ces solutions, que nous supposons connues, nous seront nécessaires pour déterminer la source artificielle à injecter dans le guide de façon à reconstituer, grâce au principe d'équivalence, ces mêmes champs à l'intérieur du guide. Nous étudierons ensuite la propagation de ces champs produits par cette source à l'extérieur du guide et leur "effet lointain", notamment pour des dispositifs à base d'antennes de type Vlasov [81].

5.2. GENERALITES

5.2.1. Principes fondamentaux

Dans cette section nous rappelons brièvement quelques principes sur les guides d'ondes avant analyse par la méthode des éléments finis.

Le guide d'ondes est principalement un tube dans lequel on fait passer des signaux hyperfréquences. La propagation de ces signaux ou ondes le long du guide est régie par les conditions aux interfaces des milieux remplissant le guide et au bord du guide, et bien entendu par les équations de Maxwell.

Les abréviations adoptées pour les modes TM et TE d'un guide d'ondes sont les suivantes:

a) TM_{mn} pour les modes magnétiques transversaux (le champ magnétique n'a pas de composantes le long de l'axe de propagation du guide, ici Oz),

b) TE_{mn} pour les modes électriques transversaux (le champ électrique n'a pas de composantes selon Oz: le champ électrique est perpendiculaire aux côtés du guide).

Dans chaque cas m et n sont des nombres entiers correspondant aux nombres de demi-longueurs d'onde d'intensité (électrique pour les modes TE et magnétique pour les modes TM) entre chaque paire de parois.

Chaque mode s'accompagne d'une valeur de *fréquence de coupure* caractéristique $f_{c,mn}$, en dessous de laquelle il ne se propage pas. La fréquence de coupure est un paramètre qui dépend

de la section du guide d'ondes et des propriétés électromagnétiques du matériau remplissant le guide. On lui associe une *longueur d'onde de coupure* (λ_c) définie par

$$\lambda_{c,mn} = c / f_{c,mn}, \tag{5.1}$$

et un *nombre d'onde de coupure* (k_c) donné par

$$k_{c,mn} = 2\pi / \lambda_{c,mn} \tag{5.2}$$

c étant la vitesse de la lumière dans le matériau. L'onde se propage dans le guide, selon l'axe des z avec une *constante de propagation de guide* ou *nombre d'onde de guide* (k_g):

$$k_g = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \tag{5.3}$$

où $$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi / \lambda \tag{5.4}$$

est la constante de propagation, dans le matériau caractérisé par ε et μ, des ondes planes émises à la pulsation ω ou encore à la fréquence f ($\omega = 2\pi f$); λ étant la longueur d'onde associée à k. La vitesse de propagation des ondes varie avec la fréquence et la taille du guide d'ondes. Il convient de faire la distinction entre la vitesse de phase (V_p) et la vitesse de groupe (V_g). La vitesse de phase est la vitesse apparente de variation de phase le long du guide d'onde:

$$V_p = \omega / k_g = c\,\lambda_g / \lambda; \tag{5.5}$$

elle est supérieure d'un facteur de λ_g / λ à la vitesse de la lumière c, λ_g étant la longueur d'onde dans le guide. Cette dernière définit la périodicité de l'onde dans le sens longitudinal (axe Oz) et correspond à la distance sur laquelle la phase varie de 2π (360°). La longueur d'onde dans le guide est obtenue par la formule:

$$\lambda_g = 2\pi / k_g = \lambda / \sqrt{1 - (f_c / f)^2}. \tag{5.6}$$

Par ailleurs, la vitesse à laquelle se propage l'énergie est la vitesse de groupe V_g qui est inférieure à c d'un facteur λ_g / λ. On constate à partir de l'équation (5.6) que la vitesse de phase se rapproche de l'infini à mesure que la fréquence se rapproche de la fréquence de coupure f_c; elle se rapproche de la vitesse de la lumière à mesure que la fréquence s'élève. Le rapport entre V_p et V_g est exprimé par:

$$V_p V_g = c^2 \tag{5.7}$$

Comme les guides d'ondes sont des lignes de transmission, chaque mode s'accompagne d'une impédance d'onde. L'impédance d'onde qui relie les champs transversaux électrique et magnétique est définie par:

$$Z^{+} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{-E_y}{H_x}, \tag{5.8}$$

l'exposant "+" indique que nous considérons la propagation dans la direction des z positifs (direction +z); on a $Z^{-} = -Z^{+}$. L'équation (5.8) implique qu'à l'intérieur du guide les composantes E_x et H_y (resp. E_y et H_x) sont en phase et ont même allure.

5.2.2. Détermination des modes dans le guide

La détermination des modes de propagation dans le guide peut se faire par des méthodes analytiques de résolution d'équations différentielles en exploitant la géométrie du guide et avec les hypothèses suivantes:

- la structure est uniforme dans la direction de propagation Oz et est infiniment long,
- la section droite quelconque,
- le milieu remplissant le guide est isotrope, linéaire et homogène,
- l'enveloppe du guide est formée d'un conducteur électrique parfait (cep),
- le guide ne contient pas de densité de charge électrique.

La structure étant uniforme dans la direction de propagation (Figure 5.1), les champs électrique et magnétique peuvent être séparés en composantes transverses et longitudinales:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_t(x,y,z) + E_z(x,y,z)\mathbf{e}_z, \tag{5.9}$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{H}_t(x,y,z) + H_z(x,y,z)\mathbf{e}_z, \tag{5.10}$$

la dépendance en la variable z est prise de la forme $e^{-jk_g z}$. On a supposé dans cette forme que l'onde se propage selon la direction des z positifs; une propagation selon la direction -z peut s'obtenir en substituant k_g par $-k_g$. En admettant que le guide ne contient pas de source (ou aux points où il n'existe pas de source), les équations de Maxwell à l'intérieur du guide s'écrivent:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \tag{5.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}. \tag{5.12}$$

On montre, avec la dépendance en $e^{-jk_g z}$ et les équations de Maxwell ci-dessus, que les composantes transverses sont liées aux composantes longitudinales par [82]:

$$k_c^2 \mathbf{E}_t = j\omega\mu\, \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z - jk_g \nabla_t E_z \tag{5.13}$$

$$k_c^2 \mathbf{H}_t = -j\omega\varepsilon\, \mathbf{e}_z \times \nabla_t E_z - jk_g \nabla_t H_z \tag{5.14}$$

où l'opérateur ∇ a été décomposé en un opérateur tangent ∇_t et en un opérateur longitudinal $\frac{\partial}{\partial z}$: $\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$.

Pour les modes transverses électromagnétiques TEM, caractérisés par $E_z = H_z = 0$, l'équation (5.13) entraîne la nullité de k_c, et par conséquent les équations (5.13) et (5.14) ne sont d'aucune utilité pour dériver les composantes transverses à partir des composantes longitudinales. Il faut alors procéder autrement. On montre [4] que, pour supporter un mode TEM, le guide doit être formé d'au moins deux conducteurs. Nous nous sommes intéressés en particulier aux modes TM et TE qui sont les modes les plus rencontrés dans les guides d'onde.

• **Mode TE**

Ce mode est caractérisé par $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$. Dans cette configuration $k_c \neq 0$ et on a:

$$\mathbf{E}_t = j\omega\mu / k_c^2\, \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{H}_t = -jk_g / k_c^2 \nabla_t H_z. \tag{5.16}$$

La composante H_z est obtenue en résolvant l'équation scalaire d'Helmholtz:

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0, \tag{5.17}$$

laquelle, avec $H_z(x,y,z) = h_z(x,y)e^{-jk_g z}$ et la décomposition de l'opérateur ∇, se réduit à une équation scalaire 2D des ondes:

$$\nabla_t^2 h_z + k_c^2 h_z = 0. \tag{5.18}$$

Cette équation, qui est une équation aux valeurs propres, est résolue avec les conditions aux limites sur le guide ($\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$).

Avec les équations (5.8), (5.15) et (5.16), on montre que l'impédance d'onde pour le mode TE s'obtient par la formule:

$$Z_{TE}^{+} = \eta k / k_g = \eta\lambda_g / \lambda = \eta / \sqrt{1 - (f_c / f)^2}, \tag{5.19}$$

dans laquelle $\eta = \sqrt{\mu / \varepsilon}$ est l'impédance caractéristique du milieu. L'équation (5.19) montre que lorsque la fréquence d'exploitation avoisine celle de coupure, l'impédance d'onde pour le mode TE est voisine de l'infini, d'où une réflexion totale du signal.

• **Mode TM**

Ce mode est caractérisé par $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$. Les équations (5.13) et (5.14) deviennent:

$$\mathbf{E}_t = j\omega\mu / k_c^2 \, \mathbf{e}_z \times \nabla_t H_z \tag{5.20}$$

$$\mathbf{H}_t = -jk_g / k_c^2 \nabla_t H_z \tag{5.21}$$

La composante E_z est obtenue en résolvant l'équation scalaire d'Helmholtz:

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0, \tag{5.22}$$

laquelle, avec $E_z(x,y,z) = E_z(x,y)e^{-jk_g z}$ peut se réduire à une équation scalaire 2D des ondes:

$$\nabla_t^2 E_z + k_c^2 E_z = 0. \tag{5.23}$$

Cette équation est résolue avec les conditions aux limites sur le guide ($\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$).

Pour un mode TM, l'impédance d'onde vaut:

$$Z_{TM}^{+} = \eta k_g / k = \eta\lambda / \lambda_g = \eta\sqrt{1 - (f_c / f)^2}. \tag{5.24}$$

5.2.3. Excitation d'un mode du guide

Nous avons considéré plus haut la propagation des ondes guidées ou modes en l'absence de sources, mais naturellement le guide d'onde doit être couplé à un générateur ou à une quelconque source de puissance. A partir de la connaissance d'un mode de propagation, il est possible, grâce aux conditions à la traversée d'une surface support de courants (chapitre 1), de déterminer la source de courant électrique ou magnétique équivalente nécessaire à l'excitation de ce mode. En effet, il émane de cette source une onde électromagnétique se propageant dans le sens des z positifs $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$ avec une variation en z de la forme $e^{-jk_g z}$ (le mode désiré) et une autre se propageant dans le sens des z négatifs $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-)$ avec une variation en z de la forme $e^{+jk_g z}$. Et nous avons les conditions à la traversée de surface support de courant:

$$(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \tag{5.26a}$$

$$\mathbf{Je} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-), \tag{5.26b}$$

lorsque la source est électrique, ou

$$\mathbf{Jm} = (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \times \mathbf{n}, \tag{5.27a}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{0}, \tag{5.27b}$$

quand la source est magnétique. Connaissant $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+)$, on détermine $\mathbf{E}^-$ (resp. $\mathbf{H}^-$) avec (5.26a) (resp. (5.27b)) et, en utilisant (5.8), on en déduit $\mathbf{H}^-$ (resp. $\mathbf{E}^-$) d'où le courant **Je** (resp. **Jm**).

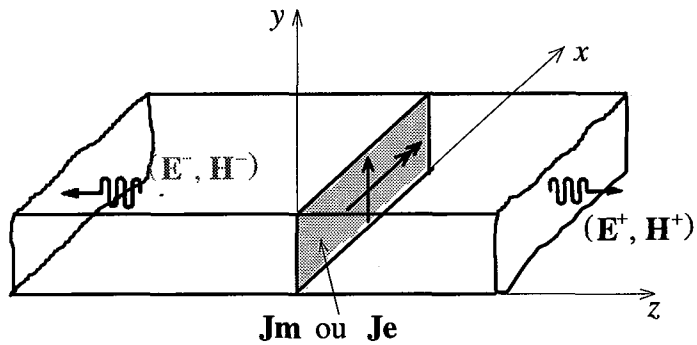


Figure 5.1: Guide rectangulaire infiniment long avec surface support de densités de courant.

5.2.4 Formulation du problème de guides d'onde ouverts

Dans le but d'étudier les problèmes liés à la propagation de micro-ondes de forte puissance en espace libre, par la méthode des éléments finis, nous considérons qu'un mode est excité dans le guide qui est de longueur finie et d'épaisseur finie. Le guide ouvert se comporte alors comme une antenne, i.e., comme un dispositif électromagnétique rayonnant. Afin d'étudier la propagation dans une seule direction, le guide est fermé à un côté (Figure 5.2). L'excitation est constituée par une source de courant électrique ou magnétique, linéique en 2D et surfacique en 3D, équivalente à une source de champ, localisée de façon précise dans le guide. Ici, nous posons les équations qui déterminent la source de courant connaissant l'expression analytique du champ électromagnétique à l'intérieur du guide.

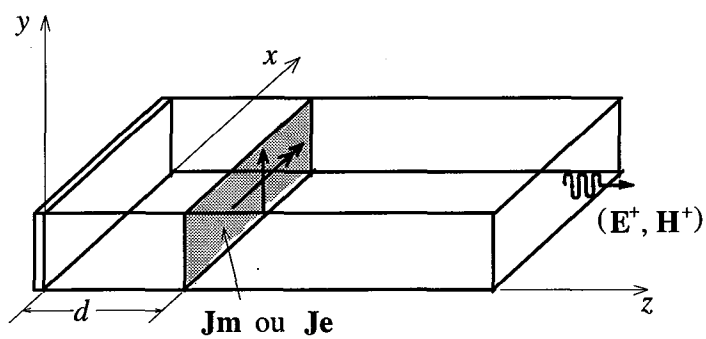


Figure 5.2: Guide rectangulaire fonctionnant comme une antenne avec surface source.

La position relative de la source de courant par rapport au fond du guide doit satisfaire, les conditions aux limites au fond du guide, ainsi que la génération du mode désiré au delà de la source. L'onde réfléchie par le fond du guide est notée $(\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r)$ et a une variation en z de la forme. La superposition de l'onde réfléchie $(\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r)$ et de l'onde incidente $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-)$ sur le fond du guide donne naissance à une onde stationnaire $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ dans la région $0 < z < d$, la source de courant étant positionnée à z = d (Figure 5.3). La source vérifie (voir chapitre 1):

$$\mathbf{Je} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^s), \tag{5.28a}$$

$$\mathbf{0} = (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^s) \times \mathbf{n}, \tag{5.28b}$$

lorsqu'elle est électrique, ou

$$\mathbf{Jm} = (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^s) \times \mathbf{n}, \tag{5.29a}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^s), \tag{5.29b}$$

quand elle est magnétique.

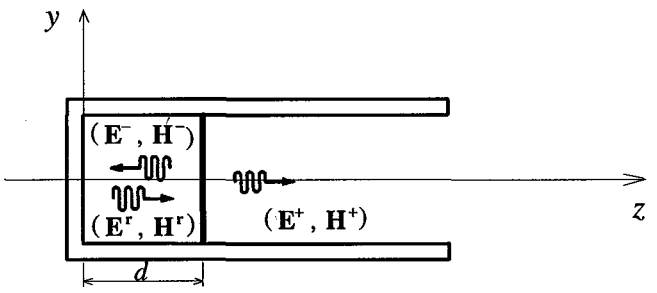


Figure 5.3: Configuration 2D d'un guide d'onde rayonnant.

Dans ces conditions le problème de rayonnement des guides d'onde ouverts revient à résoudre les équations de Maxwell (5.11) et (5.12) avec soit un terme source magnétique, soit un terme source électrique. La formulation du problème a été effectuée de façon générale au chapitre 1 (section 1.3) ainsi que sa discrétisation dans la section 3.4.

5.3. GUIDE D'ONDES "PLANS PARALLELES"

5.3.1. Détermination des modes du guide d'ondes "plans parallèles"

Le guide d'onde "plans parallèles" est probablement le guide le plus simple qui puisse supporter des modes TM et TE; il peut aussi supporter un mode TEM car il est composé de deux conducteurs plans comme indiqué à la Figure 5.4. Bien qu'il soit une idéalisation, ce

guide est aussi important pour des raisons pratiques car son comportement est similaire à beaucoup d'autres guides. Nous l'utiliserons d'ailleurs dans une approximation 2D pour modéliser des radiateurs de type Vlasov dans la section 5.3.2.

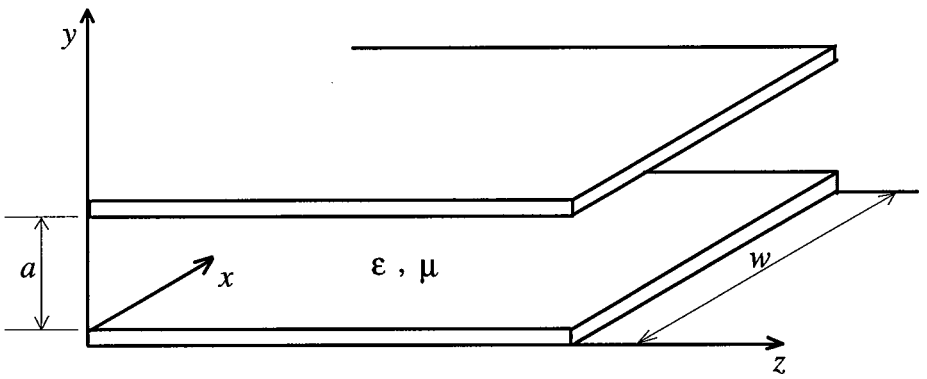


Figure 5.4: Géométrie d'un guide "plans parallèles".

La détermination des modes propres dans le guide "plans parallèles" se fait en considérant que la largeur du guide w est bien plus grande que la distance de séparation entre les deux plaques parallèles, a, de façon à négliger les effets de bord et toute variation selon l'axe des x. Les résultats obtenus pour les modes TM et TE, en suivant la procédure exposée à la section 5.2.2, sont rappelés dans la Table 5.1.

Table 5.1: Modes TM et TE pour le guide "plans parallèles".

Quantité	Mode TM_n	Mode TE_n
k_c	$n\pi / a$	$n\pi / a$
λ_c	$2a / n$	$2a / n$
E_z	$A_n \sin(k_c y) e^{-jk_g z}$	0
H_z	0	$B_n \cos(k_c y) e^{-jk_g z}$
E_x	0	$Z_{TE} H_y$
E_y	$(-jk_g / k_c) A_n \cos(k_c y) e^{-jk_g z}$	0
H_x	$-E_y / Z_{TM}$	0
H_y	0	$(jk_g / k_c) B_n \sin(k_c y) e^{-jk_g z}$

5.3.2. Modélisation 2D d'un convertisseur de type Vlasov sans réflecteur

En pratique, un mode dans le guide d'onde est excité avec un générateur de puissance. Il est difficile de générer un mode pur sans gaspiller des quantités de puissance notables dans d'autres modes indésirables. Aussi, dans un guide d'onde, il peut exister plusieurs modes excités dont certains sont évanescents et emmagasinent de l'énergie. Il faut utiliser des systèmes que l'on désignera par *convertisseurs de modes*, transformant le paquet de modes présents au niveau de la source en un faisceau "uni-mode" bien défini. Une solution est d'utiliser des convertisseurs de type Vlasov [81] pour transformer l'ensemble de modes produits par la source en un faisceau ayant une direction bien définie. Vlasov a proposé des convertisseurs de modes qui transforment l'onde sortant de la cavité source en un faisceau à l'aide de réflecteur (un cylindre parabolique dont les axes focaux coïncident avec les axes du guide d'onde). La Figure 5.5 montre des convertisseurs de type Vlasov. Ils sont constitués d'un radiateur de section circulaire couplé à un réflecteur. La sortie du radiateur est coupée obliquement par un plan (Figure 5.5 (a)) ou comporte une ouverture "en escalier" (Figure 5.5 (b)). C'est la configuration géométrique de cette extrémité qui est le paramètre important du convertisseur.

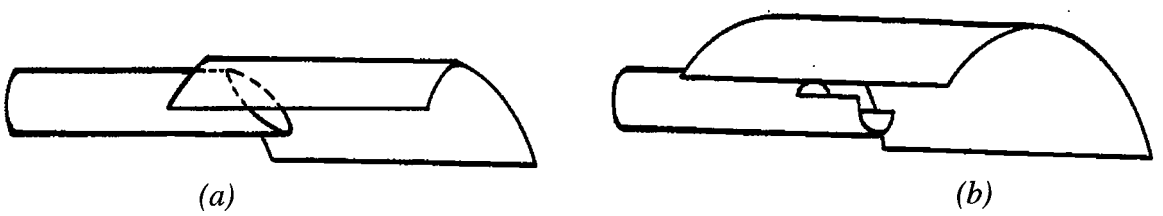


Figure 5.5: Convertisseurs du type Vlasov avec réflecteur, (a) ouverture oblique, (b) ouverture en escalier.

Dans une analyse ou approximation 2D, le convertisseur de type Vlasov agit comme un guide d'onde "plans parallèles" et le réflecteur parabolique comme un plan réfléchissant. Le faisceau créé se propage avec un angle α par rapport à l'axe du guide comme indiqué à la Figure 5.6. L'angle de propagation est fonction de la fréquence et de la géométrie du guide:

$$\alpha = \arctan\left(k_y / k_z\right) \tag{5.30}$$

ou encore

$$\alpha = \arctan\left(k_c / k_g\right) = \arctan\left(\lambda_g / \lambda_c\right) \tag{5.31}$$

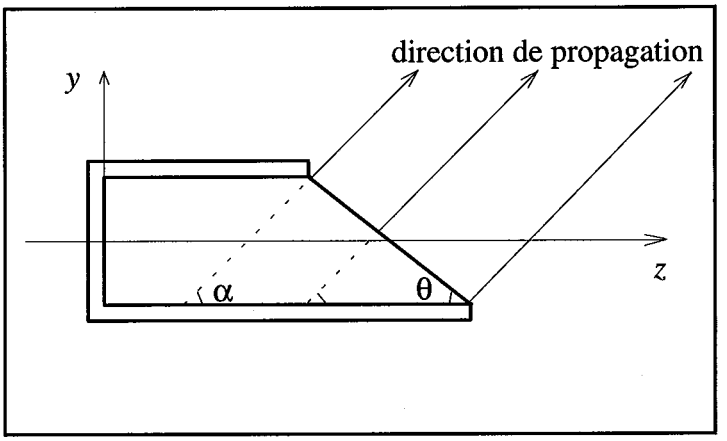
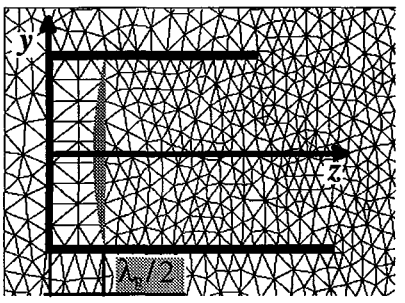


Figure 5.6: Modèle 2D d'une antenne de type Vlasov sans réflecteur.

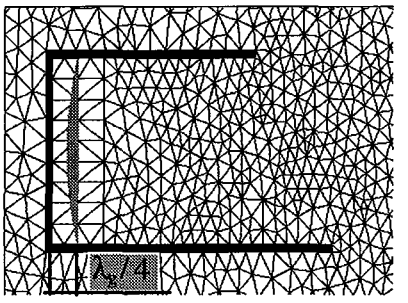
Dans cette section une antenne de type Vlasov sera étudiée, au travers d'une analyse numérique 2D, avec une formulation par éléments finis mixtes. Le champ proche ainsi que le champ lointain seront analysés comme des fonctions de la fréquence et de l'angle d'ouverture du guide. Nous reprenons en partie l'étude effectuée dans [27] mais avec ici une formulation vectorielle utilisant les éléments d'arêtes.

Dans le cas de notre formulation 2D vectorielle, le champ principal pour un mode TM_n (sous entendu TM_n^z) est le champ électrique **E** (de composantes Ez et Ey dans le repère de la Figure 5.6), aussi la source de courant recherchée est électrique. Nous montrons, en faisant usage de (5.29), que le courant électrique, est situé au quart de la longueur d'onde de guide (par rapport au fond de guide, Figure 5.7 (c)) et s'écrit : $\mathbf{Je} = \cos(k_c y')\mathbf{e}_y$, avec $y' = y + a/2$. Pour un mode TE_n^z, la source de courant électrique est situé soit à l'origine (z = 0), soit à la demi-longueur d'onde de guide et a pour expression $\mathbf{Jm} = \sin(k_c y')\mathbf{e}_y$, où $y' = y + a/2$.

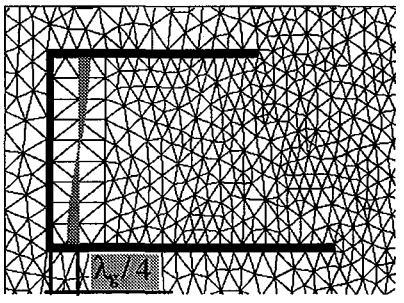
Remarquons que dans le cas d'une formulation scalaire, pour un mode TM_n^z, la source de courant est magnétique (formulation scalaire en Hx), pour un mode TE_n^z, elle est magnétique (formulation scalaire en Ex).



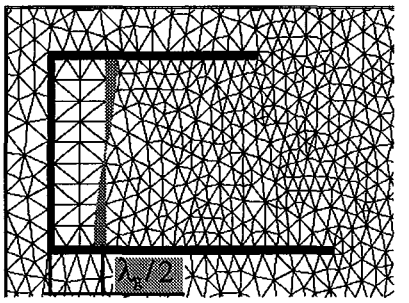
(a) mode TE_n^z, *formulation en* **H**



(b) mode TE_n^z, *formulation scalaire en* E_x



(c) mode TM_n^z, *formulation en* **E**



(d) mode TM_n^z, *formulation scalaire en* H_x

Figure 5.7: Position de la ligne source selon le mode et la formulation.

Les figures 5.8 montrent des isovaleurs instantanées (à l'instant t = 0) d'une antenne de type Vlasov avec un angle d'ouverture θ = 20° comme une fonction de la fréquence. La Figure 5.8 (a) montre la configuration de ce modèle: le rayon du guide est de 2.38 cm, sa fréquence de coupure est 3.15 GHz et le domaine d'étude est de 5.3 *a* x 4 *a* (25.46 cm x 19.04 cm). L'onde issue du mode TM_1^z (formulation vectorielle en champ **E**) est bien formée dans le guide et se propage à l'extérieur du guide avec son angle naturel α calculé selon la fréquence dans la Table 5.2.

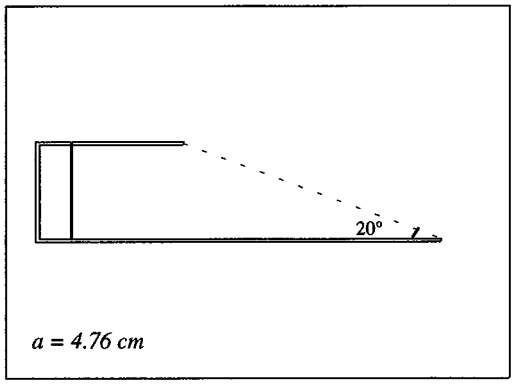
Table 5.2: Fréquence de la source et angle de propagation α.

fréquence (en GHz)	longueur d'onde de guide (en cm)	α (en degrés)
4.0	12.17	51.9
5.617	6.45	34.1
8.6	3.75	21.5

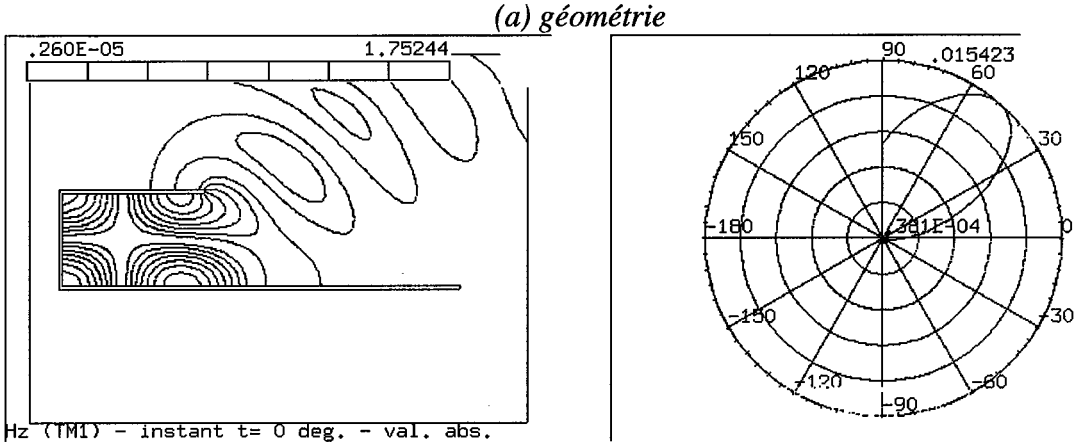
Les Figures 5.8 (b), (c) et (d) montrent les lignes de force du champ proche magnétique rayonné, et le champ lointain correspondant, par une antenne de type Vlasov aux fréquences

4 GHz , 5.617 GHz et 8.6 GHz respectivement. Quand la fréquence augmente, l'angle de propagation α décroît et le faisceau gagne en directivité avec un accroissement de la valeur extrême du module du champ lointain. Ces faits sont illustrés aussi bien par les isovaleurs du champ proche que par le diagramme de rayonnement. La Figure 5.9 montre le champ proche et le champ lointain correspondant comme une fonction de l'angle d'ouverture du guide pour le cas du mode TE_1^z (formulation vectorielle en champ **H**). La fréquence de la source est maintenue à 8.6 GHz et le rayon du guide est toujours de 2.38 cm, le domaine d'étude est réduit à 3.88 a x 4 a (18.51 cm x 19.04 cm). Quand l'angle d'ouverture augmente, la direction de propagation privilégiée varie de 0°, avec un angle d'ouverture de 90°, vers 21.5° avec un angle d'ouverture de 30°, et la valeur extrême du module du champ lointain (plus précisément la caractéristique de rayonnement $\mathbf{H}_\infty$) gagne en intensité. La figure 5.10 montre le champ proche rayonné et le diagramme de rayonnement du champ lointain (plus précisément la caractéristique de rayonnement $\mathbf{E}_\infty$) pour le cas d'une polarisation TM_1^z. Pour le cas de l'angle d'ouverture de 90°, le faisceau est dirigé à ±30° et la valeur maximale du champ lointain est relativement faible, comparée aux cas avec d'autres angles d'ouverture. Quand l'angle d'ouverture α diminue, la direction du faisceau se rapproche de son angle naturel, à savoir 21.5°, et le lobe inférieur diminue; de plus la valeur maximale du champ lointain augmente fortement. Nous retrouvons bien la capacité qu'à l'antenne de type Vlasov d'émettre un mode TM directement en un faisceau ayant une direction bien définie.

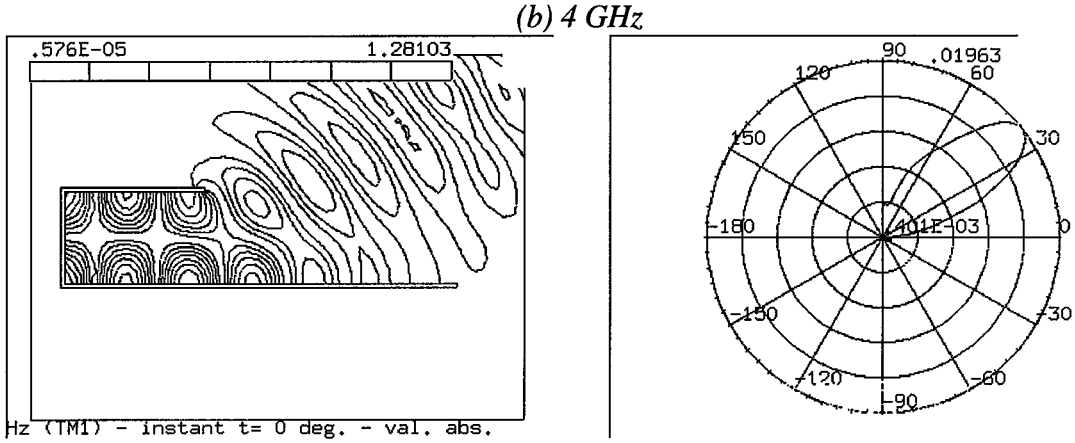
Nous comparons ici les résultats numériques qualitativement aux mesures expérimentales. Dans l'expérience, un radiateur cylindrique de rayon 2.38 cm est utilisé à la fréquence de fonctionnement de 8.6 GHz comme une antenne de type Vlasov. (Cette expérience a été réalisée par B.G. Ruth et ses collègues aux *Harry Diamond laboratories* [83]). Un cornet réceptif est monté, le long du radiateur, dans une chambre anéchoïde. La distance séparant l'ouverture du guide et le cornet récepteur est de 45 pieds (environ 13.716 mètres). Les mesures ont été effectuées à diverses fréquences et divers angles d'ouverture du guide. Les longueurs d'onde de guide et de coupure du guide "plans parallèles" diffèrent beaucoup de celles d'un guide circulaire comme illustré à la Table 5.2.



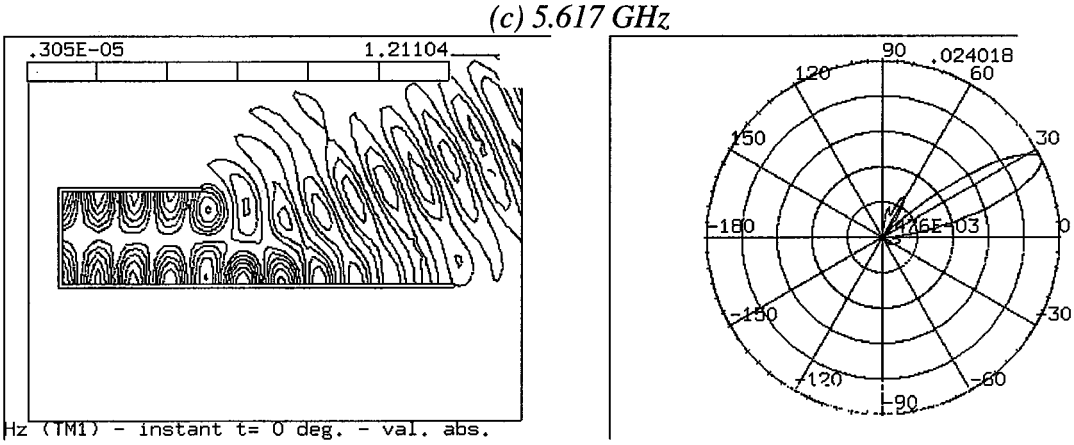
(a) géométrie



(b) 4 GHz



(c) 5.617 GHz



(d) 8.6 GHz

Figure 5.8: Influence de la fréquence: champ proche et champ lointain rayonnés par une antenne de type Vlasov avec un angle d'ouverture de 20°.

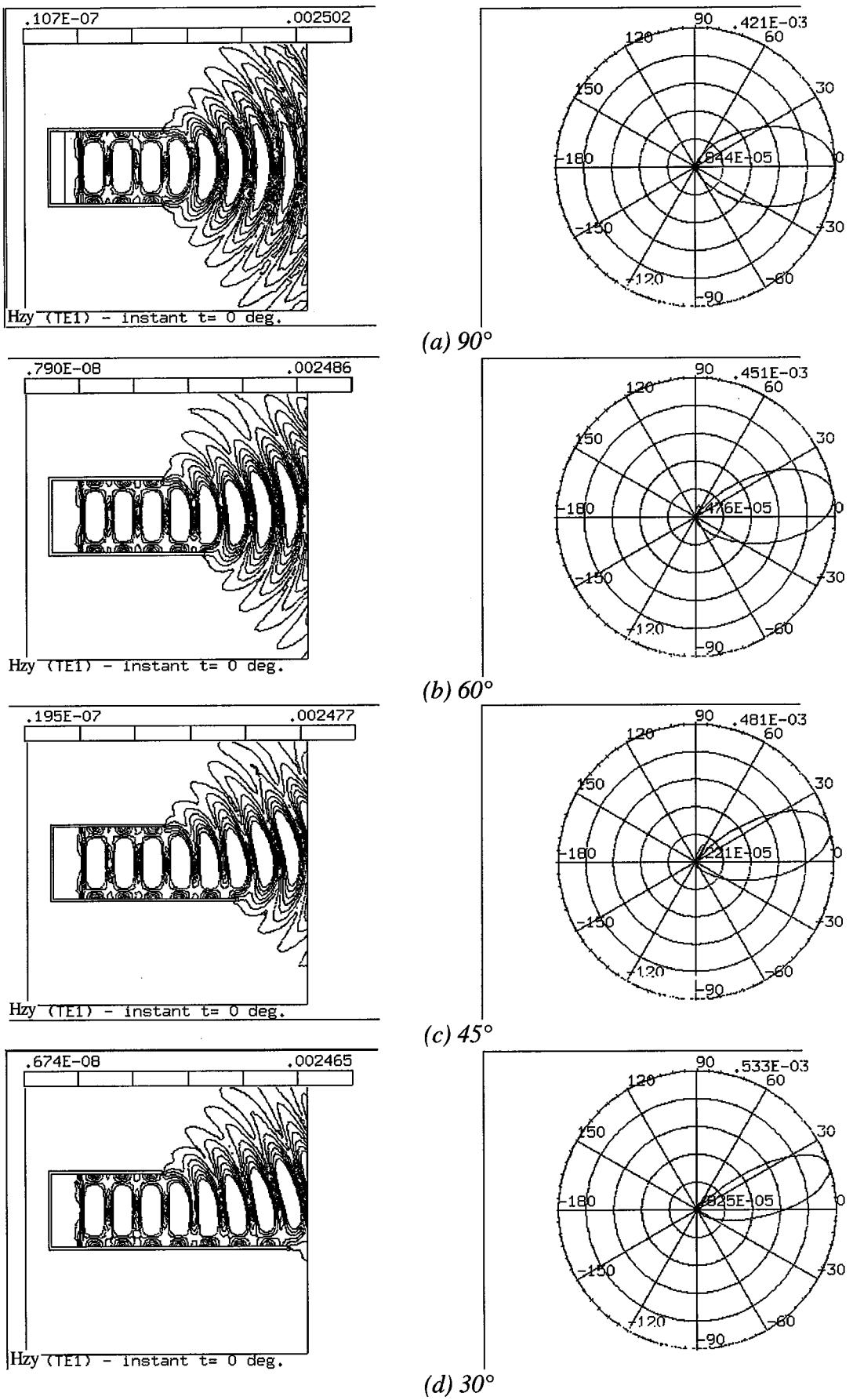


Figure 5.9: Influence de l'angle d'ouverture: Champ proche et champ lointain magnétique rayonnés par une antenne de type Vlasov à 8.6 GHz.

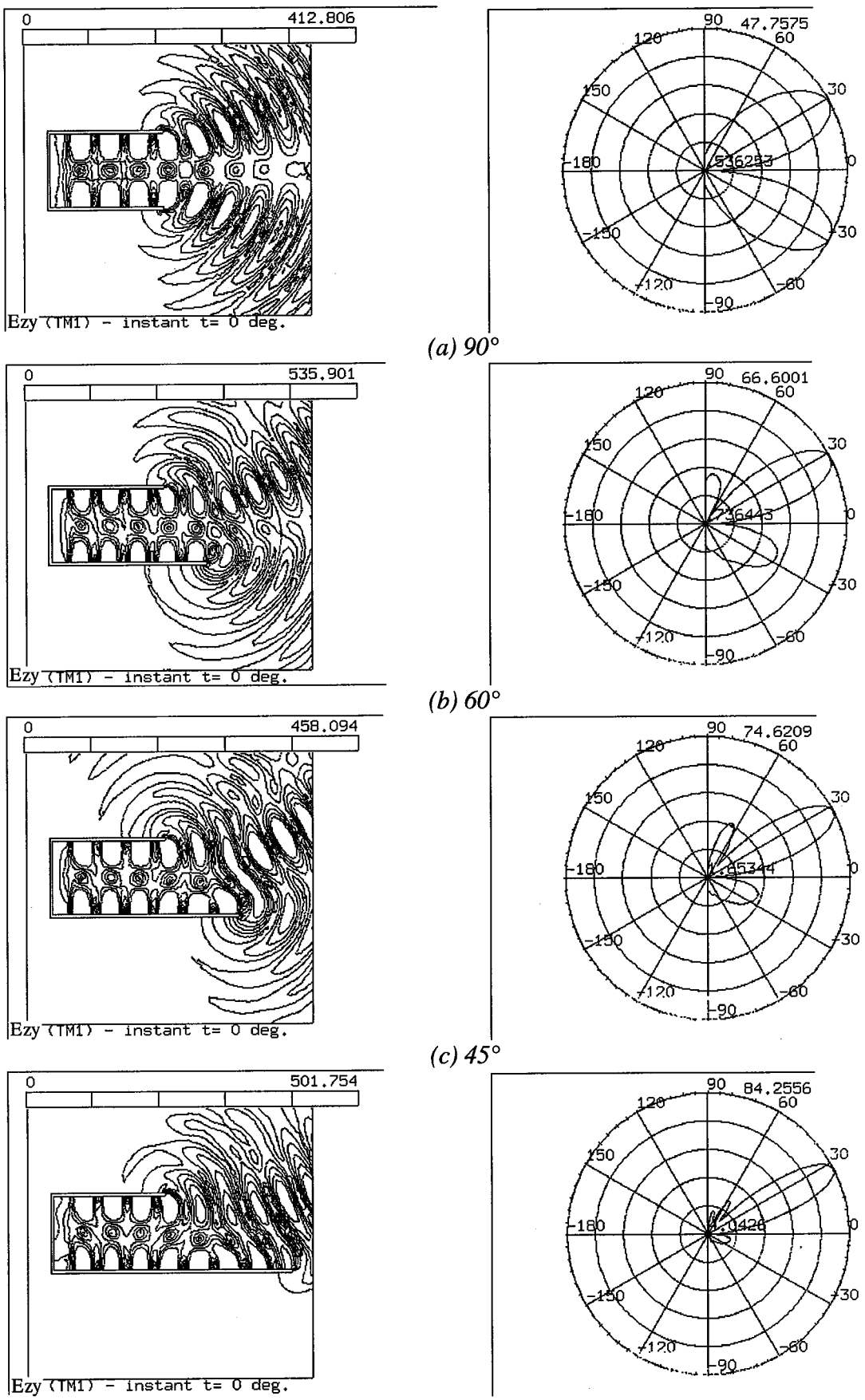


Figure 5.10: Influence de l'angle d'ouverture: champ proche et champ lointain électrique rayonnés par une antenne de type Vlasov à 8.6 GHz.

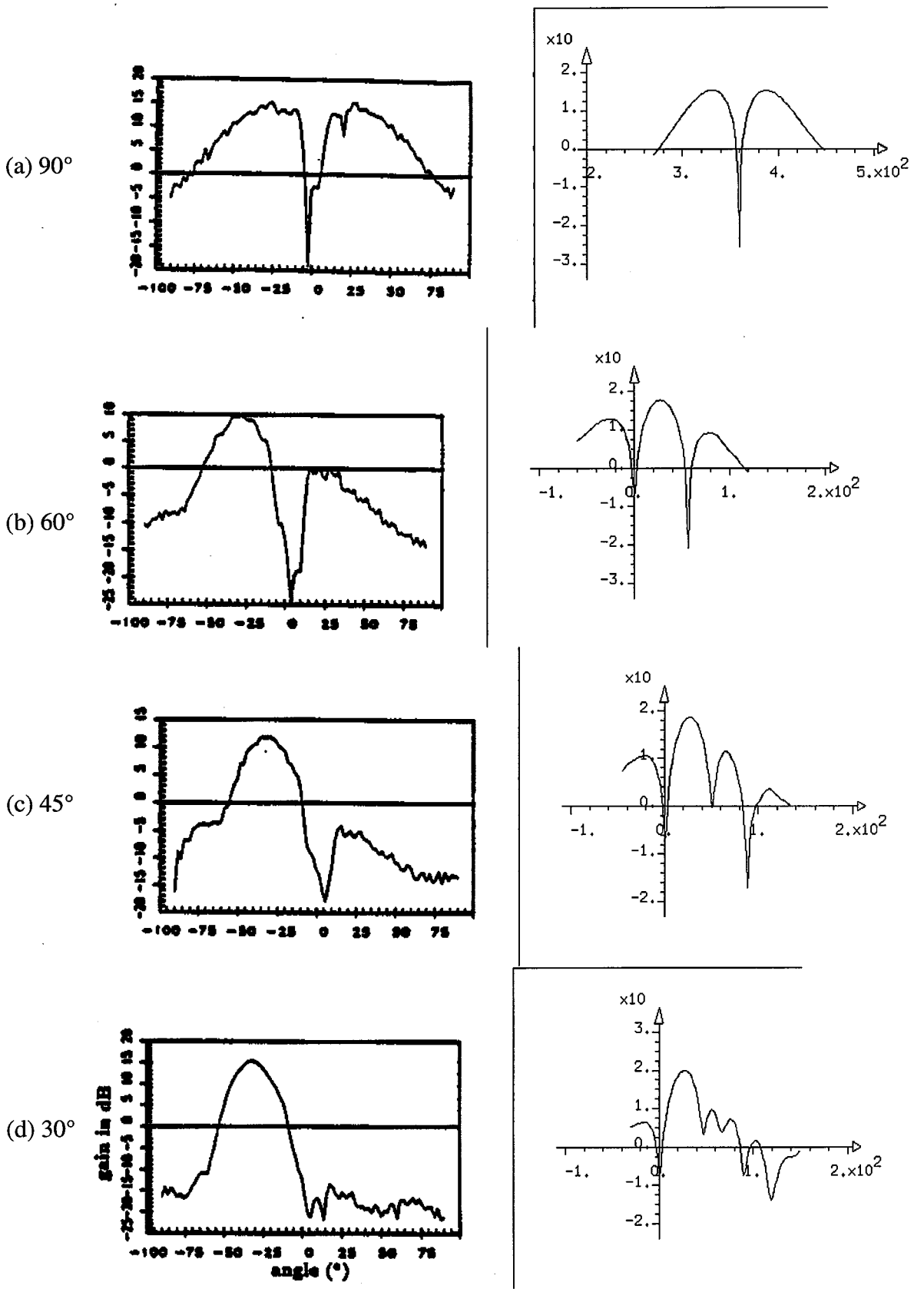


Figure 5.11: Comparaison de résultats expérimentaux (à gauche) et numériques (à droite) pour le gain d'une antenne de type Vlasov.

Par exemple, pour le mode TM_1^z à la fréquence de 8.6 GHz, l'angle α du guide "plans parallèles" est 21.5° et l'angle α du guide circulaire 3D est 34.1° pour le mode TM_{01}^z. On peut obtenir le même angle de propagation, α, en réduisant la fréquence de fonctionnement du guide "plans parallèles" à 5.617 GHz (Table 5.2). Dans ce cas, la largeur du faisceau est plus grande que celle du faisceau à 8.6 GHz. La Figure 5.11 montre le gain obtenu, d'un côté par les mesures expérimentales et de l'autre par les résultats numériques, pour un convertisseur de type Vlasov pour différents angles d'ouverture et à la fréquence de 8.6 GHz. Il est difficile toutefois de comparer quantitativement les mesures expérimentales et les résultats numériques, car l'approximation 2D du guide circulaire 3D par un guide "plans parallèles" entraîne naturellement une différence d'angles de propagation et de largeur du faisceau dans la zone lointaine. Néanmoins nous notons qualitativement une allure comparable des courbes (le décalage d'échelle est dû à la différence de référence angulaire).

5.4. GUIDE D'ONDES CIRCULAIRE

5.4.1. Déterminations des modes du guide circulaire

Le guide d'onde circulaire est un tube à section circulaire de rayon a (Figure 5.12). A cause de la symétrie circulaire, le système de coordonnées cylindriques circulaires est le mieux adapté pour étudier cette structure. Les champs transversaux, dans le système de coordonnées cylindriques, peuvent toujours s'exprimer en fonction des composantes longitudinales à l'aide des relations (5.13) et (5.14). Les modes TE et TM dans le guide d'ondes circulaire sont obtenus en suivant ma procédure de la section 5.2.2. Ils sont rappelés dans la Table 5.3.

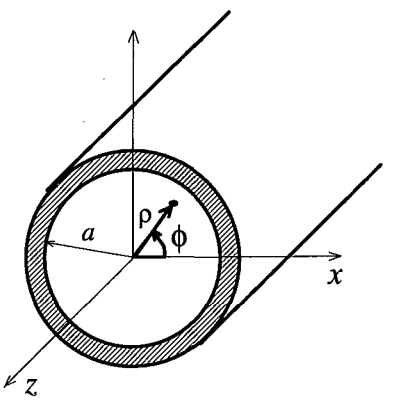


Figure 5.12: Guide d'ondes circulaire

Table 5.3: Modes TM et TE pour le guide circulaire.

Quantité	Mode TM_{mn}	Mode TE_{mn}
k_c	$\frac{p'_{mn}}{a}$	$\frac{p_{mn}}{a}$
E_z	$(A\sin(m\phi)+B\cos(m\phi))J_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$	0
H_z	0	$(A\sin(m\phi)+B\cos(m\phi))J_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$
E_ρ	$\frac{-jk_g}{k_c}(A\sin(m\phi)+B\cos(m\phi))J'_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$	$Z_{TE}H_\phi$
E_ϕ	$\frac{-jk_g m}{k_c^2\rho}(A\cos(m\phi)-B\sin(m\phi))J_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$	$-Z_{TE}H_\rho$
H_ρ	$-E_\phi / Z_{TM}$	$\frac{-jk_g}{k_c}(A\sin(m\phi)+B\cos(m\phi))J'_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$
H_ϕ	E_ρ / Z_{TM}	$\frac{-jk_g m}{k_c^2\rho}(A\cos(m\phi)-B\sin(m\phi))J_m(k_c\rho)e^{-jk_g z}$

- p'_{mn} est la énième racine de la fonction de Bessel J'_{mn}, $J'_{mn}(p'_{mn})=0$,
- p_{mn} est la énième racine de la fonction de Bessel J_{mn}, $J_{mn}(p_{mn})=0$.

L'impédance d'onde, dans le système de coordonnées cylindriques, est donnée par

$$Z^+ = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{-E_\phi}{H_\rho}, \tag{5.32}$$

Dans le cas particulier des modes TE et TM du guide circulaire, l'impédance d'onde est encore donnée par les relations (5.19) et (5.24) respectivement.

La direction de propagation dans le guide par rapport à l'axe des z est définie par:

$$\alpha = \arctan(k_\rho / k_z) \tag{5.33}$$

ou encore

$$\alpha = \arctan(k_c / k_g) = \arctan(\lambda_g / \lambda_c)$$

où k_ρ le nombre d'onde dans la direction radiale correspond au nombre d'onde de coupure k_c; on retrouve la relation générale (5.31).

5.4.2. Modélisation 3D d'un convertisseur de type Vlasov sans réflecteur

Nous présentons ici quelques résultats obtenus lors de l'analyse 3D de convertisseurs de type Vlasov constitué de guide de section circulaire à ouverture oblique:

- rayon intérieur: 23.8 mm
- épaisseur: 2 mm
- longueur extérieure: 75 mm
- mode TM_{01}^{z}
- fréquence: 8.6 GHz

Le problème a été modélisé avec deux antisymétries (symétrie géométrique avec champ magnétique perpendiculaire au plan de symétrie) pour une ouverture de 90°, et avec une antisymétrie pour une ouverture à 60°. Les maillages sont décrits avec des hexaèdres du premier ordre (Figures 5.12 et 5.18). La discrétisation utilise des éléments mixtes R1 et la frontière extérieure est soumise à la CLA - EM du second ordre. Quelques informations relatives à la discrétisation, avec une comparaison au cas 2D, sont données dans la Table 5.4. La Figure 5.13 montre les densités de courant sur la feuille source, utilisées pour générer un mode TM_{01}^{z}. Les figures suivantes concernent les solutions. Le courant résultant sur les surfaces du guide sont en Figure 5.14 pour l'ouverture à 90°, et est visible sur la Figure 5.18 pour l'ouverture à 60°. Les Figures 5.15, 5.16 et 5.17 montrent le champ magnétique proche rayonné par le guide ouvert à 90°. Les Figures 5.18 et 5.19 présentent celui rayonné par le guide ouvert à 60°. On voit sur ces dernières figures que la direction principale de propagation du champ magnétique fait un angle avec l'axe du guide proche des 34° idéaux.

Table 5.4: Evolution de la taille du problème avec l'angle d'ouverture du guide.

Ouverture	Dimension du problème	Nb noeuds	Nb éléments	Nb inconnues	Nonzéros
à 90°	2D	3194	1510	11586	104712
	3D	9555	8160	26841	412227
à 60°	2D	5674	2714	20724	188004
	3D	14784	12900	41776	646894

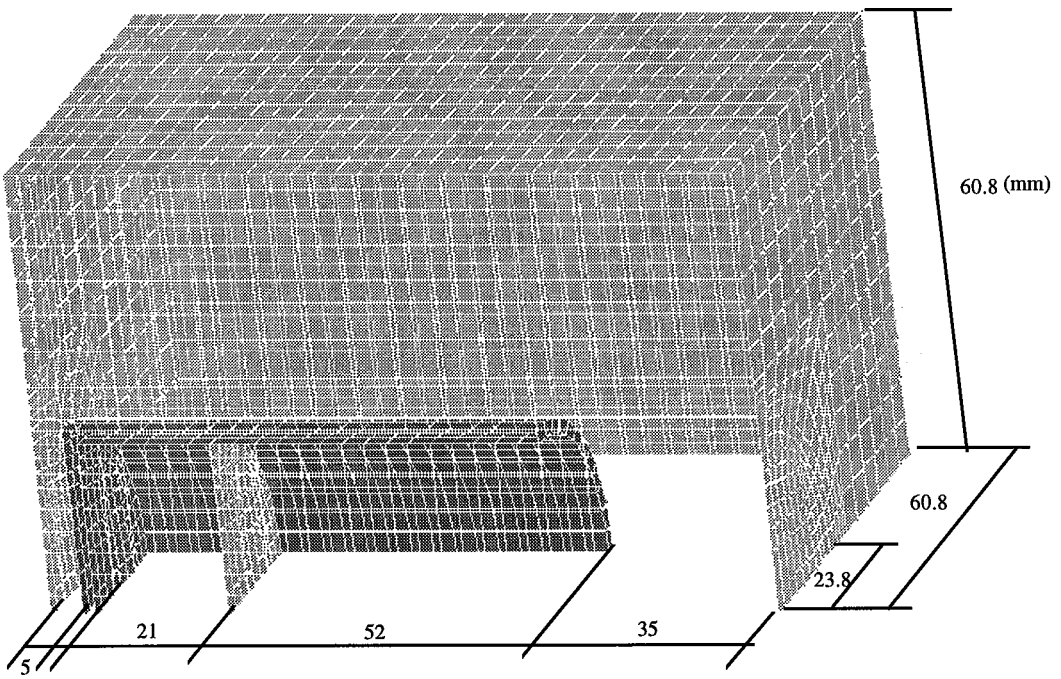


Figure 5.12: géométrie et maillage du guide de section circulaire.

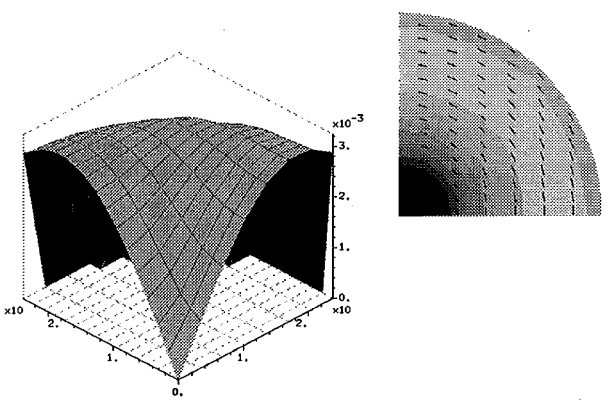


Figure 5.13: Graphe 3D de la densité de courant **Jm** générant le mode TM_{01}.

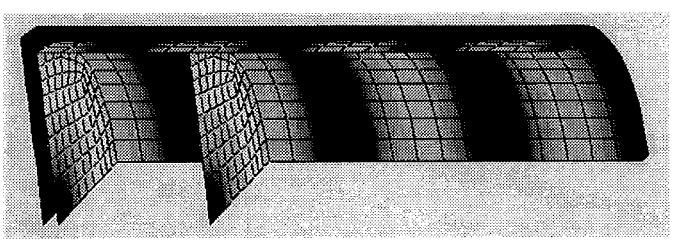


Figure 5.14: Champ magnétique **H** sur la surface source et sur le guide.

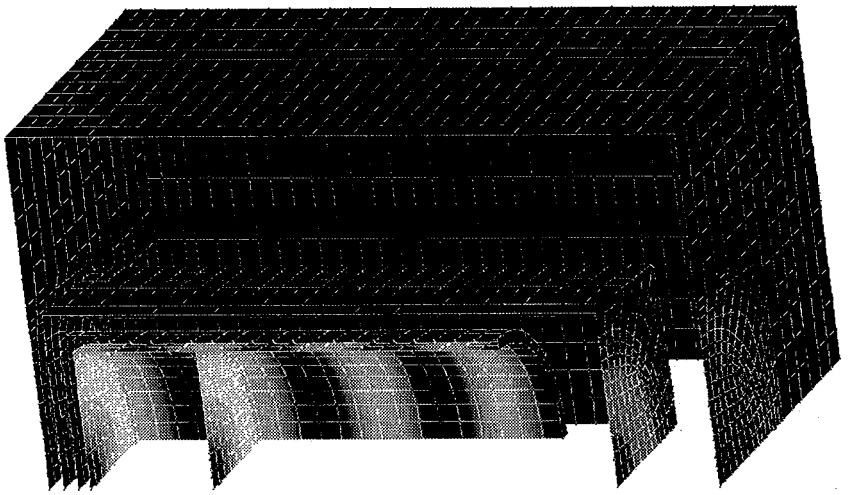


Figure 5.15: Champ magnétique sur le guide, sur une surface intérieure et sur les surfaces extérieures.

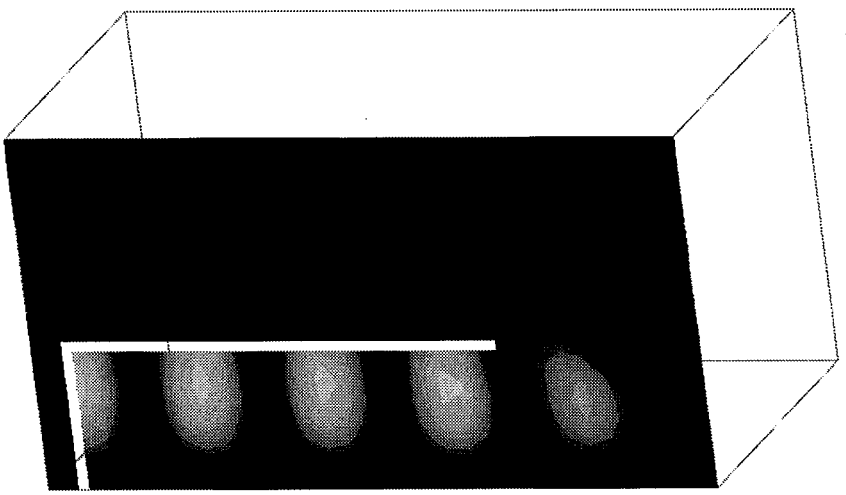


Figure 5.16: Amplitude du champ magnétique dans le plan de symétrie YZ.

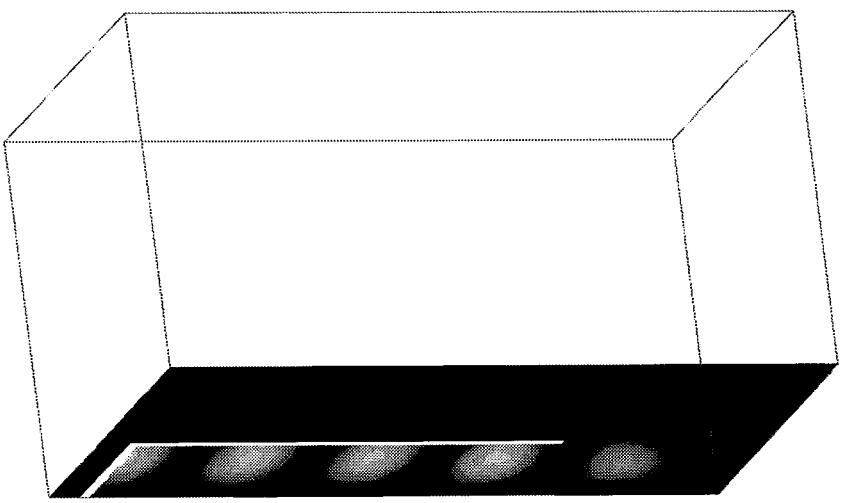


Figure 5.17: Amplitude du champ magnétique dans le plan de symétrie XZ.

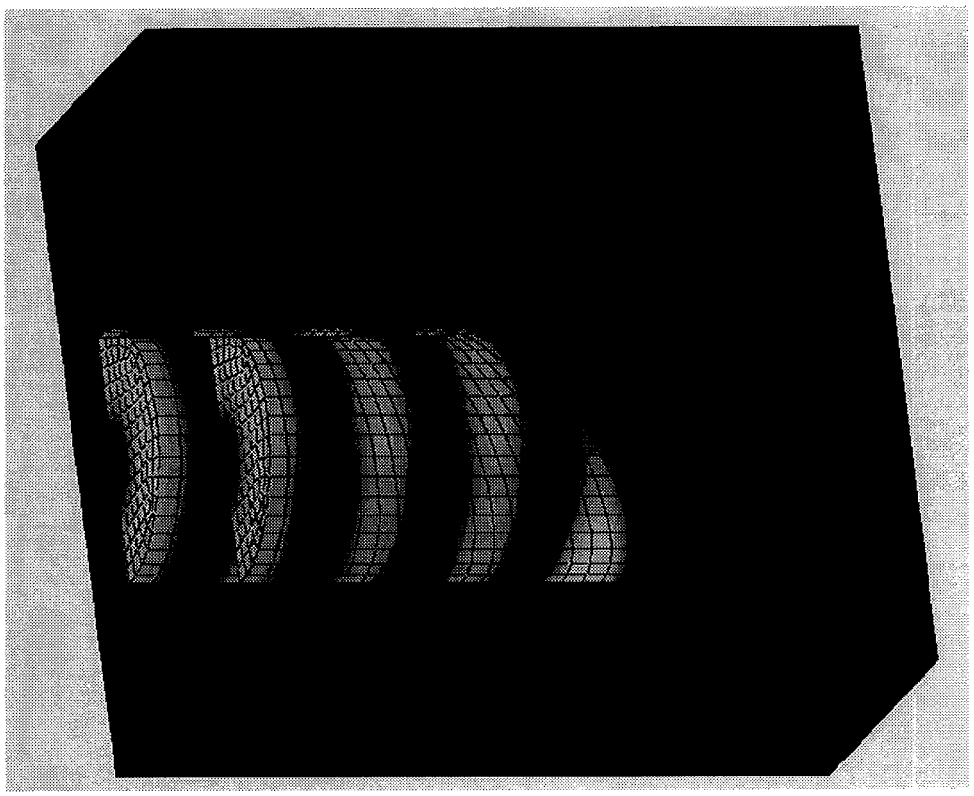


Figure 5. 18: Guide ouvert à 60°: champ magnétique sur le guide, sur la ligne source, sur une surface intérieure et sur les surfaces extérieures.

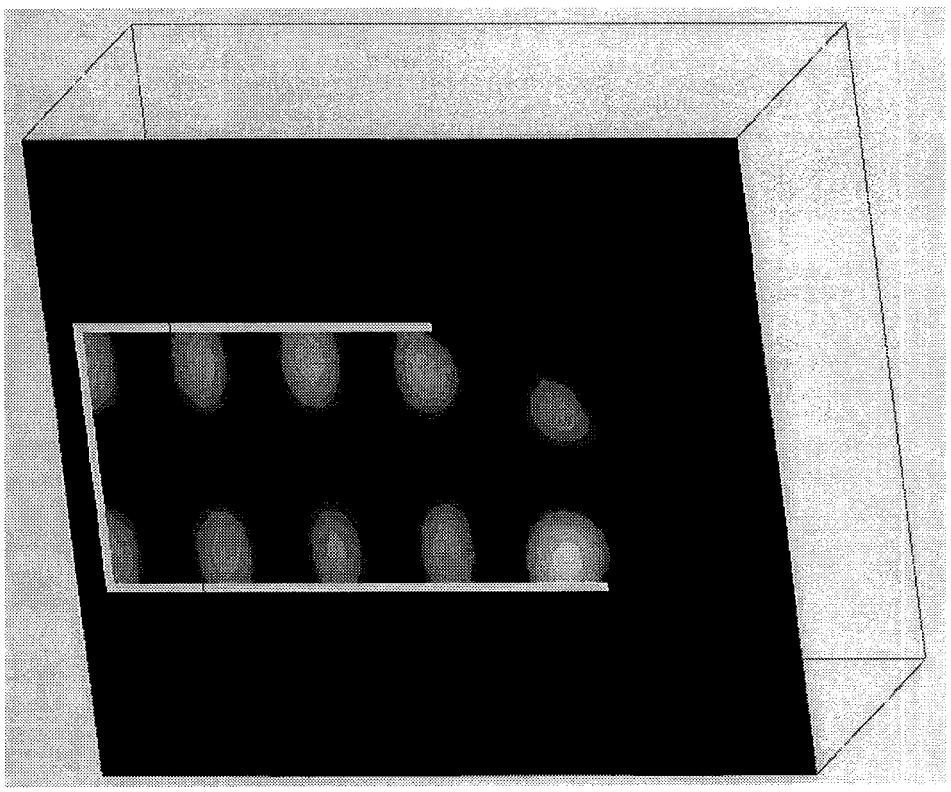


Figure 5. 19: Guide ouvert à 60°: amplitude du champ magnétique dans le plan de symétrie YZ

5.5 CONCLUSION

Nous avons montré que notre formulation peut s'appliquer à la conception et l'analyse d'antennes constituées de guides d'ondes ouverts. La modélisation 2D d'une antenne de type Vlasov a montré que la direction du faisceau est influencée par la fréquence de la source et l'angle d'ouverture du guide. Nous avons essayé de comparer les résultats de la modélisation d'une antenne de type Vlasov aux résultats exprérimentaux. Cette comparaison fut difficile car l'approximation 2D du guide circulaire 3D par un guide "plans parallèles" entraîne une différence d'angles de propagation. Néanmoins de façon qualitative, nous observons une allure comparable des courbes de gain obtenues par les résultats numériques 2D et les mesures expérimentales. Ainsi on peut tirer d'une modélisation 2D des enseignements intéressants en comparant différents problèmes similaires. Certes, il n'en reste pas moins vrai qu'une modélisation 3D est nécessaire pour avoir des résultats significatifs. Les moyens informatiques dont nous disposons ne nous ont pas permis de reprendre en totalité l'analyse effectuée en 2D, la taille du problème s'accroît vite avec l'angle d'ouverture. Toutefois, l'observation du champ proche, dans les modélisations 3D pour deux angles d'ouverture, montre que l'angle d'ouverture influe sur la directivité du faisceau.

CONCLUSION

Dans cette thèse, une méthode d'éléments finis mixtes couplée à des conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques en milieu ouvert a été présentée. Elle a été appliquée avec succès à la conception d'antennes de forte puissance et à l'analyse de problème de diffraction électromagnétique d'une onde plane.

Cette méthode est basée sur la formulation de Galerkin de l'équation vectorielle des ondes, en régime harmonique, en champ **E** ou **H** avec l'espace $H(\mathrm{rot})$ comme espace des solutions admissibles. Nous avons mis en évidence le fait que la formulation ne génère pas de solutions parasites dues au non-respect des conditions de divergence nulle ou à la non-satisfaction des conditions d'interfaces. Cette formulation est solide et tend d'ailleurs à s'imposer dans les approches de résolution de l'équation vectorielle des ondes en régime harmonique et en milieu ouvert.

Pour conserver toutefois à la formulation toutes ses vertus lors de sa discrétisation par la méthode des éléments finis, il est essentiel d'utiliser des éléments finis spécifiques. Ces éléments finis doivent être vectoriels et capables d'approcher correctement l'espace $H(\mathrm{rot})$. Les éléments utilisés, les éléments de $H(\mathrm{rot})$ ou éléments d'arêtes, sont à composantes tangentielles continues et localisées sur les frontières de l'élément. De ce fait, ces fonctions de base forcent implicitement des conditions de continuité de la partie tangentielle du champ aux interfaces tout en respectant les possibles discontinuités des champs que l'on représente. De plus, la condition de mur électrique (ou de mur magnétique sur les plans de symétrie) est simplement forcée en annulant les degrés de liberté ou inconnues du problème définis sur la surface des conducteurs (ou sur les plans de symétrie). Un effort a été entrepris dans l'explicitation de ces fonctions de base à l'aide d'éléments finis nodaux, en particulier les fonctions de base de degré deux ont été exhibées, sous une forme générale, sur les éléments géométriques les plus courants en deux et trois dimensions.

Les problèmes à modéliser étant à domaines non bornés, une condition de rayonnement est imposée à distance finie avec des conditions aux limites absorbantes (C.L.A.) locales de type Bayliss-Turkel ou de type Engquist-Majda. Afin de faciliter leur couplage avec notre formulation qui est vectorielle, des versions vectorielles ont été dérivées à partir de CLA scalaires. Un effort a été fourni pour conserver la symétrie du système matriciel global après ce couplage. C'est ainsi que nous avons proposé une approche de symétrisation qui permet d'obtenir des CLA vectorielles symétriques ayant une précision théorique identique à celle des CLA scalaires dont elles dérivent. L'usage de la CLA du type BT en 3D nécessite une frontière sphérique qui agrandit considérablement le domaine d'étude dès que les objets ont une forme allongée. C'est pourquoi, nous avons préféré employer les CLA du type EM en 3D. Cependant ces CLA travaillent en général sur des frontières rectangulaires qui réduisent le domaine d'étude pour beaucoup de géométries mais qui comportent des singularités géométriques (coins et arêtes). Nous avons proposé des conditions de coins et d'arêtes qui permettent de "symétriser" les contributions des coins (en 2D) ou des intégrales linéiques (en 3D) à la matrice de bord.

L'utilisation de la formulation vectorielle en 2D peut paraître un luxe dans la mesure où elle travaille avec les deux composantes du champ transverse alors que la formulation scalaire travaille avec une seule composante du champ. Cependant, la formulation vectorielle 2D étant formellement identique à la formulation vectorielle 3D, elle peut permettre de valider cette dernière sur des problèmes 2D qui sont des approximations de problèmes réels 3D dont la résolution avec les moyens informatiques dont nous disposons n'est pas possible. Un autre intérêt de la formulation vectorielle 2D, est qu'elle se présente comme une alternative pour calculer le champ transverse avec une précision identique à celle de la composante longitudinale du champ sur un même maillage. Sous cet angle, elle ne se substitue pas à la formulation scalaire 2D mais elle la complète.

L'étude d'erreur en champ proche effectuée dans le cas de la diffraction d'une onde électromagnétique par des objets de forme simple a montré que notre méthode est fiable. Les

résultats peuvent être améliorés en jouant sur la densité de maillage et sur la distance entre les objets et la frontière extérieure.

Les suggestions que nous pouvons faire dans l'état actuel de nos travaux concernent d'une part l'optimisation de l'implantation dans le code 3D de la formulation, et d'autre part l'évolution de la formulation.

Dans notre code 3D, la table des noeuds support de degrés de liberté est construite à partir de la table donnant les sommets et/ou noeuds milieux des arêtes des éléments. Le maillage doit être construit avec les noeuds support de degrés de liberté (un par sommet, un par arête, un par face et un par volume), situés aux barycentres des composants géométriques correspondants.

Les intégrations surfaciques en 3D font intervenir les parties tangentielles des fonctions de base. Aussi on gagnerait à définir ces parties tangentielles comme des fonctions de base à part entière définies sur les faces de l'élément.

Le système matriciel qui découle de notre formulation par éléments finis mixtes semble mal conditionné pour les méthodes itératives du type gradient conjugué. Un préconditionnement adapté à ce système matriciel doit être recherché pour accélérer la convergence des méthodes de résolution.

L'évolution de la formulation peut se faire sans trop de difficultés aux milieux anisotropes en introduisant des tenseurs de permittivité et de perméabilité, aux milieux conducteurs en introduisant des impédances de surface.

Nous espérons avoir contribué ici à la résolution par les méthodes numériques des équations de Maxwell en régime harmonique et en milieu ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARRINGTON, R.F., **Time-Harmonic Electromagnetic Fields**, *Mc Graw-Hill* New York, 1961.

[2] STRATTON, J.A., **Electromagnetic Theory**, *Mc Graw-Hill*, New York, 1941.

[3] BALANIS, C.A., **Advanced engineering electromagnetics**, *John Wiley & Sons*, New York, 1989.

[4] GARDIOL, F., **Hyperfréquences**, *Dunod,* Paris, 1987.

[5] PETIT, R., **Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique**, *Masson*, Paris, 1989.

[6] KONRAD, A., "Vectorial Variational Formulation of Electromagnetic Fields in Anisotropic Media", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-24, pp. 553-559, 1976.

[7] WEBB, J.P., MAILE, G.L., FERRARI, R.L., "Finite-element solution of three-dimensional electromagnetic problems", *IEE Proc. H*, vol. 130, n° 2, pp. 153-159, 1983.

[8] WILCOX, C.H., "An expansion theorem for electromagnetic fields", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 9, pp. 115-134, 1956.

[9] COLTON D., KRESS R., **Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory**, *Springer-Verlag*, Berlin, 1992.

[10] DUVAUT G., LIONS J.L., **Les inéquations en mécanique et en physique**, *Dunod* Paris, 1972.

[11] BOSSAVIT A., MAYERGOYZ, I.D., "Edge-elements for scattering problems", *IEEE. Trans. Magnetics,* vol. 25, n° 4, pp. 2816-2821, 1989.

[12] ZIENKIEWICZ, O.C., **The Finite Element Method**, 3rd. ed. *Mc Graw-Hill*, London, 1977.

[13] SILVESTER, P.P., FERRARI, R.L., **Finite Elements for Electrical Engineers**, 2nd ed. *Cambridge Press*, Cambridge, 1990.

[14] REDDY, J.N., **An Introduction to the Finite Element Method**, *Mc Graw-Hill*, New York, 1984.

[15] DHATT, G. , GOUZOT, G., **Une présentation de la méthode des éléments finis**, *Maloine*, Paris, 1980.

[16] RAHMAN, B.M.A., FERNANDEZ, F.A., DAVIES, J.B., "Review of finite element methods for microwave and optical waveguides", *Proc. IEEE*, vol. 79, pp. 1442-1448, 1991.

[17] DAVIES, J.B., "Finite Element Analysis of Waveguides and Cavities", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 29, pp. 1578-1583, 1993.

[18] BIRO, O., PREIS, K., "On the Use of the Magnetic Vector Potential in the Finite Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Currents", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 25, pp. 3145-3159, 1989.

[19] BOYSE, W.E., MINERBO, G.N., PAULSEN, K.D., LYNCH, D.R., "Application of Potentials to Finite Element Modeling of Maxwell's Equations", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 29, pp. 1333-1336, 1993.

[20] MAYERGOYZ, I.D., "Some Remarks Concerning Electromagnetic Potentials", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 29, pp. 1578-1583, 1993.

[21] MOYER, E.T., SCHROEDER, E.A., "Finite Element Formulations of Maxwell's Equations - Advantages and Comparison Between Available Approaches", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 27, pp. 4217-4219, 1991.

[22] FERRARI, R.L., NAIDU, R.L., "Finite-element modelling of high-frequency electromagnetic problems with material discontinuities", *IEE Proc. A*, vol. 137, n° 6, pp. 313-320, 1990.

[23] BREBBIA, C.A., **The boundary elemnt method for engineers**, *Pentech Press*, London, 1980.

[24] SCHWARTZ, L., **Théorie des distributions**, *Hermann*, Paris, 1966.

[25] AUBOURG, M., MADRANGEAS, V., GUILLON, P.Y., "Méthode des éléments finis-Application aux dispositifs et à l'instrumentation microondes", *rapport interne, I.R.C.O.M.*

[26] PENMAN, J., FRASER J.,R., "Dual and Complementary Energy Methods in Electromagnetism", *IEEE Trans., MAG-19*, vol. 6, pp. 2311-16, 1983.

[27] SHIN, P.S., **Hybrid finite-boundary element analysis of time harmonic electromagnetic fields**, Ph.D. Thesis, *Rensselaer Polytechnic Institute*, Troy, NY, 1989.

[28] NICOLAS, L., CONNOR, K.A., SALON, S.,J., RUTH, B.,G., LIBELO, L., F., "Modélisation 2D par éléments finis de phénomènes micro-ondes en milieu ouvert", *J. Phys. III France*, pp. 2101-2114, 1992.

[29] YAO BI, J.L., NICOLAS, L., NICOLAS, A., "Modeling Unbounded Wave Propagation Problems In Terms Of Transverse Fields Using 2D Mixed Finite Elements", à paraître dans *IEEE Trans. Magnetics*, vol. Mai 1995.

[30] GIVOLI, D., "Non-reflecting boundary conditions", *J. Comput. Phys.*, vol. 99, pp. 1-29, 1991.

[31] BAYLISS, A., TURKEL, E., "Radiation boundary conditions for wave-like equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 33, pp. 707-725, 1980.

[32] BAYLISS, A., GUNZBURGER, M., TURKEL, E., "Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 42, pp. 430-451, 1982.

[33] ENGQUIST, B., MAJDA, A., "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", *Math. Comp.*, Vol. 31, pp. 629-651, 1977.

[34] ENGQUIST, B., MAJDA, A., "Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations", *Comm. Pure Appl.*, Vol. 32, pp. 313-357, 1979.

[35] KARP, S.N., "A convergent far-field expansion for two-dimensional radiation functions", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 14, pp. 427-434, 1961.

[36] MOORE, T.G., BLASCHAK, J.G., TAFLOVE, A., KRIEGSMANN, G.A., "Theory and application of radiation boundary operators ", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 36, no. 12, pp. 1797-1812, 1988.

[37] MITTRA, R., RAMAHI, O., "Absorbing boundary conditions for the direct solution of partial differential equations arising in electromagnetic scattering problems", dans ***Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering***, MORGAN, M.A., Ed., vol. II, New York, N.Y.: Elsevier, pp. 133-173, 1990.

[38] MITTRA, R., RAMAHI, O., KHEBIR, A., GORDON, R., KOUKI, A., "A review of absorbing boundary conditions for two and three-dimensional electromagnetic scattering problems", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 3034-3039, 1989.

[39] WEBB, J.P., KANELLOPOULOS, V.N., "Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation", *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 2, pp. 370-372, 1989.

[40] PETERSON, A.F., "Absorbing boundary conditions for the Vector wave equation", *Microwave and Optical Technology Letters,* vol. 1, no. 2, pp. 62-64, 1988.

[41] PETERSON, A.F., "Accuracy of 3D radiation boundary conditions for use with the vector Helmoltz equation", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, no. 3, pp. 351-355, 1992.

[42] D' ANGELO, J., MAYERGOYZ, I.D., "On the use of local absorbing boundary conditions for RF scattering problems", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 25, no.4, pp.3040-3042, 1989.

[43] D' ANGELO, J., MAYERGOYZ, I.D., "Three dimensional RF scattering by the finite element method", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 27, no.5, pp.3827-3832, 1991.

[44] TREFETHEN, L.N., HALPERN, L., "Well-posedness of One-wave Equations and Absorbing Boundary Conditions", *Math. Comp.*, Vol. 47, pp. 421-435, 1986.

[45] COLLINO, F., "Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires", dans Méthodes numériques d'ordre élevé pour les ondes en milieu transitoire, Ecole INRIA des ondes, Paris, 24-28 janvier 1994.

[46] HIGDON, R.L., "Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to the Multi-dimensional Wave Equation", *Math. Comp.*, Vol. 47, pp. 438-459, 1986.

[47] HIGDON, R.L., "Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation", *Math. Comp.*, Vol. 49, pp. 65-90, 1987.

[48] TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K.R., "The finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures",

dans ***Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering***, MORGAN, M.A., Ed., vol. II, New York, N.Y.: Elsevier, pp. 287-373, 1990.

[49] BAMBERGER, A., JOLY, P., ROBERTS, J.E., "Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 27, no. 2, pp. 323-352, 1990.

[50] YAO BI, J.L., NICOLAS, L., NICOLAS, A., "*H*(curl) elements on hexahedral and vector ABC's for unbounded microwave problems", à paraître dans *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. de mai 1995.

[51] SAAD, Y., SCHULTZ, M.H., "*GMRES:* A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, pp. 856-869, 1986.

[52] DAUTRAY, R., LIONS, J.L., **Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques**, *Masson*, Paris, 1985.

[53] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles**, *Masson*, Paris, 1983.

[54] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., "A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems", dans Dold A., Eckmann B., (Eds). **Mathematical aspects of finite element methods**. Proceedings of the conference tenue à Rome, 10-12 Dec, 1975. Springer, Berlin Heidelberg New-York (Lecture Notes in Mathematics vol. 606).

[55] NEDELEC, J.C., "Mixed finite elements in R^3", *Numer. Math.*, vol. 35, pp. 315-341, 1980.

[56] NEDELEC, J.C., "A New Family of Mixed Fnite Elements in R^3", *Numer. Math.*, vol. 50, pp. 57-81, 1986.

[57] NEDELEC, J.C., **Notions sur les techniques d'éléments finis**, *Ellipses*, Paris, 1991.

[58] WHITNEY, H., **Geometric Integration Theory**, *Princeton University*, Princeton, 1957.

[59] BOSSAVIT, A., "Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism", *Proc. IEE*, vol. 135A, pp. 493-500, 1988.

[60] BOSSAVIT, A., "A Rationale for 'Edge-Elements' in 3-D Fields Computations", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 24, no. 1, pp. 74-79, 1989.

[61] BOSSAVIT, A., **Electromagnétisme, en vue de la modélisation**, *Springer-Verlag*, Paris, 1993.

[62] BOSSAVIT, A., "Solving Maxwell equations in a closed cavity, and the question of spurious modes", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 26, no. 2, pp. 702-705, 1990.

[63] CENDES, Z.J., "Vector finite elements for electromagnetic field computation", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 27, pp. 3958-3966, 1991.

[64] BARTON, M.L., CENDES, Z.J., "New vector finite elements for three-dimensional magnetic fields computations", *J. Appl. Phys.*, vol. 61, no. 8, pp. 3919-3921, 1987.

[65] MUR, G., DE HOOP, A.T., "A finite element method for computing three dimensional electromagnetic field in inhomogeneous media", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. MAG-21, no. 6, pp. 2188-2191, 1985.

[66] PICHON, L., RAZEK, A., "Analysis of three-dimensional dielectric loaded cavities with edge elements", *ACES Journal*, 66, 2, pp. 133-142, 1991.

[67] WONG, M.F., PICON, O., FOUAD-HANNA, V., "Résolution par éléments finis d'arêtes des équations de Maxwell dans les problèmes de jonctions et de cavités micro-ondes", *Journal de Physique III*, pp. 2083-2099, Nov. 1992.

[68] VAN WELIJ, J.S., "Calculation of Eddy Currents in Terms of *H* on Hexahedra", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 21, pp. 2239-2241, 1985.

[69] ASVESTAS, J.S., BOWMAN, J.J., CHRISTIANSEN, P.L., EINARSSON, O., KLEINMAN, R.E, SENGUPTA, D.L., SENIOR, T.B.A., SLEATOR, F.B., USLENGHI, P.L.E., ZITRON, N.R., "**Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes**", *Hemisphere Publishing Corp.*, NY, 1987.

[70] RAMAHI, O.M., MITTRA, R., "Finite-element analysis of dielectric scatterers using the absorbing boundary condition", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 25, no. 4, pp. 3043-3045, 1989.

[71] D'ANGELO, J., MAYERGOYZ, I.D, "Finite element methods for the solution of RF radiation and scattering problems", *Electromagnetics*, vol. 10, pp. 177-199, 1990.

[72] YAO BI, J.L., NICOLAS, L., NICOLAS, A., "2D electromagnetic scattering by simple shapes: a quantification of the error due to open boundary", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, no. 2, pp. 1830-1834, 1993.

[73] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A., **Handbook of Mathematical Functions**, *Dover Publications, INC.*, New York, 1970.

[74] KUNT, M., DE COULON, F., "Principe et applications de la transformation de fourier rapide", *EPFL*, publication no. 136, Lausanne, 1974.

[75] KEDDADRA, A., NICOLAS, A., NICOLAS, L., YAO BI, J.L., "Numerical aspects of the calculation of radar cross sections from 2D finite element frequency-domain near fields", International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Leuven, Belgique, Mai 17-20, 1994.

[76] GWU-SEAS (US), GAMNI / SMAI (France), Numerical Methods for solving high frequency electromagnetics problems, Washington, D.C., Oct. 28-29, 1993.

[77] NICOLAS, L., CONNOR, K.A., SALON, S.J., RUTH, B.G., LIBELO L.F., "Three Dimensional Finite Element Analysis of High Power Microwave Devices", *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, pp. 1642-1645, 1993.

[78] CHATTERJEE, A., JIN, J.M., VOLAKIS, J.L., "Edge-Based Finite Elements and Vector ABC's Applied to 3-D Scattering", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 41, no. 2, pp. 221-226, 1993.

[79] GEORGE, A., LIU, J.W., **Computer solution of large sparse positive definite systems**, *Prentice-Hall*, Inc., Englewood Cliffs, NJ 07632, 1981.

[80] COLLIN, R.E., **Foundations of microwave engineering**, *Mc Graw-Hill*, New York, 1966.

[81] VLASOV, S., ORLOVA, I., " Quasioptical transformer which transform the waves in a waveguide having circular cross section into a highly directional beam of waves", *Radiophysics Quantum Electronics,* vol. 17, pp. 148-154, 1974.

[82] POZAR, D.M., **Microwave engineering**, *Addison-Wesley*, New York, 1990.

[83] RUTH, B.G., SCHLESIGER, C.D.R., DAHLSTROM, R.K., " Antenna Measurements on the radiator component of an X-Band Vlasov type Mode Converter", *International Journal of Infrared and Millimeter Waves,* vol. 10, no. 7, pp. 869-878, 1989.

ANNEXES A

COMPLEMENTS SUR LES ELEMENTS FINIS MIXTES DE H(ROT)

A.1 FONCTIONS DE BASE SUR LE TRIANGLE

Elément mixte P1 (k = 1)

$$P = (P_1)^2 \tag{A.1}$$

Σ est uniquement constitué des moments de type 1:

$$\sigma_i(\mathbf{p}) = \int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \tau_i \varphi(s)\, ds \quad ;\forall\, \varphi \in P_1(C_i),\ i = 1, 2, 3 \tag{A.2}$$

On cherche les fonctions de base **w** associées à l'arête C_1 défini par le couple de sommets (a_1,a_2).

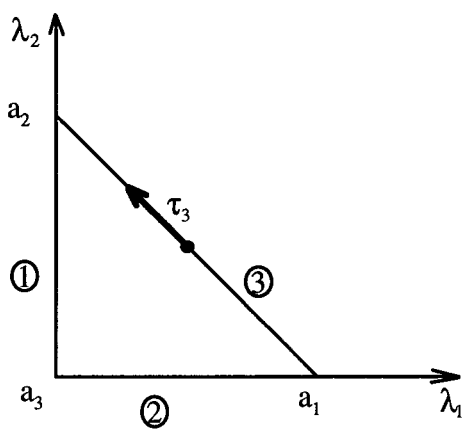


Figure A.1: Repère local au triangle.

(i) On écrit que **p** est élément de P_1 ; **w** s'exprime à l'aide des coordonnées barycentriques:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{w}(a_i). \tag{A.3}$$

(ii) On construit **w** normal aux arêtes autres que C_3, ce qui entraîne l'annulation des degrés de liberté associés à ces arêtes et conduit à

$$\mathbf{w}(a_3) = \mathbf{0} \ \text{ et } \ w_1(a_1) = w_2(a_2) = 0. \tag{A.4}$$

On a alors

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} -\alpha_2\lambda_2 \\ \alpha_1\lambda_1 \end{vmatrix}, \tag{A.5}$$

en posant $\alpha_1 = w_2(a_1)$ et $\alpha_2 = -w_1(a_2)$ (dans le repère local au triangle d'axes (λ_1,λ_2)).

En utilisant, le fait que les fonctions de base se transforment comme des gradients, on obtient la forme générale suivante:

$$\mathbf{w} = \alpha_1\lambda_1\nabla\lambda_2 - \alpha_2\lambda_2\nabla\lambda_1 \ , \tag{A.6}$$

(iv) D'autre part, le degré de liberté associé à un **w** est défini par la donnée d'une fonction φ élément de $\mathsf{P}_1(C_1)$ qui s'écrit

$$\varphi = \varphi(a_1)\lambda_1(s) + \varphi(a_2)\lambda_2(s). \tag{A.7}$$

On recherche donc deux fonctions de base, $\mathbf{w}_1^1$ et $\mathbf{w}_1^2$ ayant la forme générale (A.5) de **w**, associées à C_3 soit donc à deux degrés de liberté σ_1^1 et σ_1^2 définies par la donnée de deux fonctions φ^1 et φ^2, et satisfaisant les relations

$$\sigma_1^j(\mathbf{w}_1^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & \text{pour } i = j \\ 0 \ , & \text{sinon} \end{cases} , \quad 1 \le i, j \le 2. \tag{A.8}$$

Ce qui peut s'écrire

$$\alpha_1^j\left(\frac{1}{3}\varphi^i(a_1) + \frac{1}{6}\varphi^i(a_2)\right) + \alpha_2^j\left(\frac{1}{6}\varphi^i(a_1) + \frac{1}{3}\varphi^i(a_2)\right) = \delta_{ij} \tag{A.9}$$

Ce système peut être vu comme la détermination du couple (α_1^j, α_2^j) pour j fixé; dans ce cas les couples $(\varphi^i(a_1), \varphi^i(a_2))$ connus doivent satisfaire

$$\varphi^1(a_1)\varphi^2(a_2) - \varphi^2(a_1)\varphi^1(a_2) \neq 0, \tag{A.10}$$

ou réciproquement comme la détermination du couple $(\varphi^i(a_1), \varphi^i(a_2))$ pour i fixé; dans ce cas les couples (α_1^j, α_2^j) donnés devront alors vérifier

$$\left(\alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^1\right) \neq 0. \tag{A.11}$$

• Le choix naturel $(\varphi^1(s), \varphi^2(s)) = (\lambda_1(s), \lambda_2(s))$ revient à prendre les fonctions de Lagrange de l'espace $\mathsf{P}_1(C_3)$ comme fonctions poids dans la définition de σ_1^1 et σ_1^2. Ceci joint à la résolution du système (A.9) conduit à

$$\mathbf{w}_1^1 = \ 4\lambda_1\nabla\lambda_2 + 2\lambda_2\nabla\lambda_1$$

et $$\mathbf{w}_1^2 = -2\lambda_1\nabla\lambda_2 - 4\lambda_2\nabla\lambda_1.$$

Plus généralement, par permutation des arêtes, la fonction de base associée à une arête C définie par le couple de sommets (a_i, a_j), est donnée par:

$$\mathbf{w}_{ij}^1 = \ 4\lambda_i\nabla\lambda_j + 2\lambda_j\nabla\lambda_i \text{ associée à } \sigma_C^1(\mathbf{p}) = \int_C \mathbf{p}\cdot\tau\,\lambda_i(s)\,ds$$

et $$\mathbf{w}_{ij}^2 = -2\lambda_i\nabla\lambda_j - 4\lambda_j\nabla\lambda_i \text{ associée à } \sigma_C^2(\mathbf{p}) = \int_C \mathbf{p}\cdot\tau\,\lambda_j(s)\,ds$$

•Le choix $(\varphi^1,\varphi^2)=\left(1,\lambda_i(s)-\lambda_j(s)\right)$ donne

$\mathbf{w}_{ij}^1=\lambda_i\nabla\lambda_j-\lambda_i\nabla\lambda_j$ associée à $\sigma_C^1(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau\, ds$

$\mathbf{w}_{ij}^2=3\lambda_i\nabla\lambda_j+3\lambda_i\nabla\lambda_j$ associée à $\sigma_C^2(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau\left(\lambda_i(s)-\lambda_j(s)\right) ds$

et permet d'obtenir une complétion de la base R1; d'où le terme parfois de P1 incomplet pour désigner R1

Elément mixte R2 (k = 2)

$$P=R^2=(P_1)^2\oplus S^2\ ;\ S^2=\left\{\mathbf{p}\in(\tilde{P}_2)^2/\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}=0\right\}=\tilde{P}_1\left|\begin{matrix}-\lambda_2\\ \lambda_1\end{matrix}\right..$$

La forme générale des vecteurs de base associés à une arête $C=\{a_i\ ,\ a_j\}$ est:

$\mathbf{w}_{ij}^m=(\alpha_1^m+t^m)\lambda_i\nabla\lambda_j-(\alpha_2^m+t^m)\lambda_j\nabla\lambda_i$ associé à $\sigma_{ij}^m(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau_{ij}\,\varphi^m(s)\, ds$, $1\le m\le 2$.

avec $t^m\in\tilde{P}_1(K)$, $t^m=t_1^m\lambda_i+t_2^m\lambda_j$;

$t_1^m=4/3(-2\alpha_1^m+\alpha_2^m)$;

$t_2^m=4/3(\alpha_1^m-2\alpha_2^m)$.

Le choix des coefficients de pondération φ_1^m et φ_2^m permet de déterminer les coefficients α_1^m et α_2^m.

On a par exemple,

Exemple 1

$\mathbf{w}_{ij}^1=(-4+8\lambda_i)\lambda_i\nabla\lambda_j-(-2+8\lambda_i)\lambda_j\nabla\lambda_i$ associé à $\sigma_{ij}^1(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau_{ij}\,\lambda_i\, ds$,

$\mathbf{w}_{ij}^2=(-2+8\lambda_j)\lambda_i\nabla\lambda_j-(-4+8\lambda_j)\lambda_j\nabla\lambda_i$ associé à $\sigma_{ij}^2(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau_{ij}\,\lambda_j\, ds$,

Exemple 2

$\mathbf{w}_{ij}^1=(-3+4\lambda_i+4\lambda_j)\lambda_i\nabla\lambda_j-(-3+4\lambda_i+4\lambda_j)\lambda_j\nabla\lambda_i$ associé à $\sigma_{ij}^1(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau_{ij}\, ds$,

$\mathbf{w}_{ij}^2=(-1+4\lambda_i-4\lambda_j)\lambda_i\nabla\lambda_j-(\ 1+4\lambda_i-4\lambda_j)\lambda_j\nabla\lambda_i$ associé à $\sigma_{ij}^2(\mathbf{p})=\int_C \mathbf{p}\cdot\tau_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\, ds$.

Les fonctions de base associée au volume K du triangle peuvent s'écrire dans l'une des bases $(\nabla\lambda_i, \nabla\lambda_j)$:

$$\mathbf{w}_K^m = (\alpha_1^m + t^m)\lambda_i \nabla\lambda_j - (\alpha_2^m + t^m)\lambda_j \nabla\lambda_i \text{ associé à } \sigma_K^m(\mathbf{p}) = \iint_K \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}^m \, dx \,,\ 1 \le m \le 2$$

Exemple

$$\mathbf{w}_K^1 = 8(-1+\lambda_i+2\lambda_j)\lambda_i\nabla\lambda_j - 8(-2+\lambda_i+2\lambda_j)\lambda_j\nabla\lambda_i \text{ associé à } \sigma_K^1(\mathbf{p}) = \iint_K \mathbf{p}\cdot\nabla_t\lambda_j \, dx \,,$$

$$\mathbf{w}_K^2 = 8(\ 2-2\lambda_i-\lambda_j)\lambda_i\nabla\lambda_j - 8(\ 1-2\lambda_i-\lambda_j)\lambda_j\nabla\lambda_i \text{ associé à } \sigma_K^2(\mathbf{p}) = \iint_K \mathbf{p}\cdot\nabla_t\lambda_i \, dx \,,$$

avec $\nabla_t\lambda_i = \nabla\lambda_i \times \mathbf{e}_z$, $1 \le i \le 3$.

Elément mixte P2 (k = 2)

$$P = (P_2)^2$$

Les fonctions de base associées à une arête (a_i, a_j), peuvent se mettre sous la forme générale

$$\mathbf{w}_{ij}^m = \left(\alpha_1^m N_i + \beta_{12}^m (N_{ij} - N_{il})\right)\nabla\lambda_j + \left(\alpha_2^m N_j + \alpha_{12}^m (N_{ji} - N_{jl})\right)\nabla\lambda_i$$

$$\int_{C_m} \mathbf{p}\cdot\tau_m \, \varphi^m(s) \, ds \quad \text{où} \quad \varphi^m(s) = \varphi_1^m N_i(s) + \varphi_2^m N_j(s) + \varphi_3^m N_{ij}(s)$$

Le choix

$$\begin{cases} \alpha_1^1 = 1 \\ \alpha_2^1 = 0 \\ \alpha_{12}^1 = \beta_{12}^1 = 1/8 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = 0 \\ \alpha_2^2 = -1 \\ \alpha_{12}^2 = \beta_{12}^2 = -1/8 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1^3 = 0 \\ \alpha_2^3 = 0 \\ \alpha_{12}^3 = -\beta_{12}^3 = -1/4 \end{cases};$$

conduit à

$$\begin{cases} \varphi_1^1 = 9 \\ \varphi_2^1 = 3 \\ \varphi_3^1 = -3/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_1^2 = 3 \\ \varphi_2^2 = 9 \\ \varphi_3^2 = -3/2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_1^3 = -3 \\ \varphi_2^3 = -3 \\ \varphi_3^3 = 9/2 \end{cases}.$$

Les fonctions de base p_K^m, $1 \le m \le 3$, associée au volume peuvent s'écrire:

$$\mathbf{p}_K^m = \left(\alpha_{12}^m N_{ij} + \alpha_{13}^m N_{il}\right)\nabla\lambda_j + \left(\alpha_{12}^m N_{ji} + \alpha_{23}^m N_{jl}\right)\nabla\lambda_i,$$

$$\sigma_K^m(\mathbf{p}) = \int_K \mathbf{p}\cdot\left\{(s_1^m + t_0^m\lambda_i)\nabla_t\lambda_j + (s_2^m + t_0^m\lambda_j)\nabla_t\lambda_i\right\} dx$$

Le choix

$$\begin{cases}\alpha_{12}^1 = 1\\ \alpha_{13}^1 = 0\\ \alpha_{23}^1 = 0\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha_{12}^2 = 0\\ \alpha_{13}^2 = 1\\ \alpha_{23}^2 = 0\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha_{12}^3 = 0\\ \alpha_{13}^3 = 0,\\ \alpha_{23}^3 = 1\end{cases}$$

entraîne

$$\begin{cases}s_1^1 = -3\\ s_2^1 = -3\\ t^1 = 15\end{cases},\quad \begin{cases}s_1^2 = 3\\ s_2^2 = 9\\ t^2 = -15\end{cases},\quad \begin{cases}s_1^3 = 9\\ s_2^3 = 3\\ t^3 = -15\end{cases}$$

A.2 DEFINITIONS DES ELEMENTS DE *H*(ROT) SUR L'HEXAEDRE ET SUR LE PRISME

Exemple 3.13 ***(Famille Incomplète sur l'hexaèdre)***

$$\mathsf{P} = \left\{\mathbf{p};\ p_1 \in Q_{k-1,k,k};\ p_2 \in Q_{k,k-1,k};\ p_3 \in Q_{k,k,k-1}\right\}$$

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1 (associés aux arêtes)
$\int_{C_i} \mathbf{p}\cdot\tau_i\ \varphi(s)\ ds\ ;\ \forall\ \varphi \in \mathsf{P}_{k-1}(C_i)$, i = 1 à 12 ;

Type 2 (associés aux faces)
$\int_{f_i} (\mathbf{p}\times\mathbf{n}_i)\cdot\mathbf{q}\ d\gamma\ ;\ \forall\ \mathbf{q} = (q_1, q_2)\ ;\ q_1 \in Q_{k-2,k-1};\ q_2 \in Q_{k-1,k-2}$; i = 1 à 6

Type 3 (associés au volume)
$\int_K \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\ dx\ ;\ \forall\ \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)\ ;\ q_1 \in Q_{k-1,k-2,k-2};\ q_2 \in Q_{k-2,k-1,k-2};\ q_3 \in Q_{k-2,k-2,k-1}$

Le nombre de d°l par arête est: $\dim \mathsf{P}_{k-1}(C_i) = k$.

Le nombre de d°l de type 2 est: $2(\dim Q_{k-2} \dim Q_{k-1}) = 2(k-1)k$.

Le nombre de d°l de type 3 est: $3\left(\dim Q_{k-1}(\dim Q_{k-2})^2\right) = 3k(k-1)^2$.

Le nombre total de d°l est: $\dim \mathsf{P} = 3\left(\dim Q_{k-1}(\dim Q_k)^2\right) = 3k(k+1)^2$.

A partir de k = 2, contrairement au cas du tétraèdre, nous avons déjà des noeuds internes.

Exemple 3.14 ***(Famille Complète sur l'hexaèdre)***

$$\mathsf{P} = (Q_k)^3$$

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1
$\int_{C_i} \mathbf{p}\cdot\tau_i\ \varphi(s)\ ds\ ;\ \forall\ \varphi \in \mathsf{P}_k(C_i)$, i = 1 à 12 ;

Type 2

$\int_{f_i} (\mathbf{p} \times \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{q} \, d\gamma$; $\forall$ q tangent à la face et $\mathbf{q} \in Q_{k,k-2} \times Q_{k-2,k}$; i = 1 à 6

Type 3

$\int_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, dx$; $\forall \, \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$; $q_1 \in Q_{k,k-2,k-2}$; $q_2 \in Q_{k-2,k,k-2}$; $q_3 \in Q_{k-2,k-2,k}$

Le nombre de d°l par arête est: $(k+1)$.

Le nombre de d°l de type 2 est: $2(k+1)(k-1)$.

Le nombre de d°l de type 3 est: $3(k+1)(k-1)^2$.

Le nombre total de d°l est: $\dim \mathsf{P} = 3(k+1)^3$.

Pour k = 2, contrairement au cas du tétraèdre, nous avons déjà des noeuds internes.

Exemple 3.15 ***(Famille Incomplète sur le prisme)***

$\mathsf{P} = \{\mathbf{p};\ (p_1, p_2) \in \mathsf{R}_{k,k};\ p_3 \in \mathsf{P}_{k,k-1}\}$

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1 (associés aux arêtes)

$\int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \tau_i \, \varphi(s) \, ds$; $\forall \, \varphi \in \mathsf{P}_{k-1}(C_i)$, i = 1 à 9 ;

Type 2 (associés aux faces)

$\int_{f_i} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, d\gamma$; $\forall$ q tangent à la face ; i = 1 à 5

Type 2.1: $q \in (\mathsf{P}_{k-2}(f_i))^2$, pour les deux faces horizontales

Type 2.2: $\mathbf{q} \in Q_{k-1,k-2} \times Q_{k-2,k-1}$, pour les trois faces verticales.

Type 3 (associés au volume)

Type 3.1: $\int_K p_3 q_3 \, dx$; $\forall \, q_3 \in \mathsf{P}_{k-3,k-1}$

Type 3.2: $\int_K (p_1 q_1 + p_2 q_2) \, dx$; $\forall \, (q_1, q_2) \in (\mathsf{P}_{k-2,k-2})^2$.

Le nombre de d°l par arête est: card $\Sigma_{C_i} = \dim \mathsf{P}_{k-1}(C_i) = k$.

Le nombre de d°l de Type 2.1 est: $2\dim \mathsf{P}_{k-2}(f_i) = (k-1)k$.

Le nombre de d°l de Type 2.2 est: $2(\dim Q_{k-2} \dim Q_{k-1}) = 2(k-1)k$.

Le nombre de d°l de Type 3.1 est: $\dim \mathsf{P}_{k-3,k-1} = k(k-1)(k-2)/2$.

Le nombre de d°l de Type 3.2 est: $2\dim \mathsf{P}_{k-2,k-2} = (k-1)^2 k$.

Le nombre total de d°l est égal à: $\dim \mathsf{P} = 2\dim \mathsf{R}_{k,k} + \dim \mathsf{P}_{k,k-1} = 3k(k+1)(k+2)/2$.

A partir de k = 2, nous avons des noeuds internes de Type 3.2 auxquels s'ajoutent ceux de Type 3.1 dès que k = 3.

Exemple 3.16 ***(Famille Complète sur le prisme)***

$\mathsf{P} = \left(\mathsf{P}_{k,k}\right)^3$

Σ est constitué des moments suivants:

Type 1 (associés aux arêtes)

$\int_{C_i} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \, \varphi(s) \, ds$; $\forall \, \varphi \in \mathsf{P}_k\left(C_i\right)$, i = 1 à 9 ;

Type 2 (associés aux faces)

$\int_{f_i} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \, d\gamma$; $\forall$ q tangent à la face ; i = 1 à 5

Type 2.1: $q \in \mathsf{D}_{k-1}\left(f_i\right)$, pour les deux faces horizontales

Type 2.2: $\mathbf{q} \in Q_{k,k-2} \times Q_{k-2,k}$, pour les trois faces verticales.

Type 3 (associés au volume)

Type 3.1: $\int_K p_3 q_3 \, dx$; $\forall \, q_3 \in \mathsf{P}_{k-3,k}$

Type 3.2: $\int_K \left(p_1 q_1 + p_2 q_2\right) dx$; $\forall \left(q_1, q_2\right) \in \mathsf{D}_{k-1,k-2}$.

Le nombre de d°l par arête est:	$(k+1)$.
Le nombre de d°l de Type 2.1 est:	$(k-1)(k+1)$.
Le nombre de d°l de Type 2.2 est:	$2(k-1)(k+1)$.
Le nombre de d°l de Type 3.1 est:	$(k+1)(k-1)(k-2)/2$.
Le nombre de d°l de Type 3.2 est:	$(k+1)(k-1)^2$.
Le nombre total de d°l est égal à:	$\dim \mathsf{P} = 3(k+1)^2(k+2)/2$.

A partir de k = 3, nous avons des noeuds internes de Type 3.1.

Abstract:

The purpose of this work is the numerical modeling of open boundary R.F. electromagnetic phenomena in the frequency domain.
Maxwell's equations are discretized in two (2D) and three dimensions (3D) and are coupled with absorbing boundary conditions (ABC).
The **E** or **H** Galerkin's formulations of the vector wave equation are written in a finite domain bounded by an artificial boundary. Radiation conditions are imposed through a surface operator written on this fictitious boundary.
This operator is obtained using local absorbing boundary conditions of Bayliss-Turkel or Engquist-Majda types. The advantage of these conditions are that the sparsity of the finite element matrix is maintained. To facilitate the coupling with the finite element method, ABC are presented in vector and symmetric form.
H(rot) mixed finite elements are used. They are vectorial and their components are localized tangentially to the boundaries of the geometric elements. So they implicitely enforce the tangential continuity of the electric and magnetic fields at the interfaces between different media, and they allow the possible normal discontinuity of the fields.
Numerical results are first compared with closeform solutions in the case of the scattering of a plane wave by 2D simple shape objects. A very good agreement is obtained for the near and far fields. For the case of perfect conducting cylinders of finite length (3D computation), results are in good agreement with those obtained from a 3D nodal-based finite element method. Application to Vlasov-type mode convertors is then presented.

YAO BI N'guessan Jean-Luc 24 janvier 1995 Thèse ECL 95-04 Spécialité: Génie Electrique

Titre: "Méthode des éléments finis mixtes et conditions aux limites absorbantes pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences"

Title: "Mixed finite element method and absorbing boundary conditions for the modeling of electromagnetic phenomena in hyperfrequency"

Résumé:
L'objectif de ce travail est l'élaboration d'un code numérique efficace pour la modélisation et la simulation des phénomènes électromagnétiques hyperfréquences en régime harmonique et en espace libre.
Ce code de calcul s'appuie sur la discrétisation en deux (2D) et trois dimensions (3D) des équations de Maxwell en régime fréquentiel par une méthode d'éléments finis couplée à des conditions aux limites absorbantes (CLA).
Les formulations de Galerkin en **E** ou **H** de l'équation vectorielle des ondes sont établies pour un domaine borné par une frontière arbitraire sur laquelle les conditions de rayonnement sont imposées par un opérateur surfacique.
Cet opérateur est explicité grâce à des CLA locales du type Bayliss-Turkel (BT) et Engquist-Majda (EM). Ces opérateurs sont présentés sous une forme vectorielle et symétrique afin de faciliter leur couplage avec les éléments finis employés et de préserver la symétrie des matrices.
Les éléments finis utilisés sont des éléments finis mixtes de H(rot). Ces éléments finis sont vectoriels et ont la propriété fondamentale d'être à composantes tangentielles localisées sur les frontières des éléments géométriques. Ils sont ainsi capables de forcer implicitement les conditions de continuité tangentielle des champs électrique **E** ou magnétique **H** à la traversée des interfaces tout en y permettant les discontinuités éventuelles des composantes normales de ces champs.
Les résultats obtenus, dans le cas de la diffraction d'une onde plane par des objets 2D de forme simple, sont comparés aux solutions exactes avec succès, tant en champ proche qu'en champ lointain. Dans le cas de cylindres conducteurs de longueur finie (calcul 3D), les résultats sont en bon accord avec ceux des éléments finis nodaux. Une application de cette méthode aux problèmes liés à l'émission d'un faisceau directif de forte puissance avec des antennes de Vlasov est présentée.

Mots clés:
électromagnétisme - hyperfréquences - éléments finis mixtes de H(rot) - conditions aux limites absorbantes

Direction de recherche:
Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY) - URA CNRS 829
M. A. Nicolas (Professeur des Universités)
Ecole Centrale de Lyon
BP163 - 69131 Ecully cedex - France