



HAL
open science

Inférence bayésienne pour la détermination et la sélection de modèles stochastiques

Francois Caron

► **To cite this version:**

Francois Caron. Inférence bayésienne pour la détermination et la sélection de modèles stochastiques. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Centrale de Lille; Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2006. Français. NNT : . tel-00140088

HAL Id: tel-00140088

<https://theses.hal.science/tel-00140088v1>

Submitted on 4 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 31

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

par

François Caron

Ingénieur ISEN

Inférence bayésienne pour la détermination et la sélection de modèles stochastiques

Doctorat délivré conjointement par l'Ecole Centrale de Lille
et l'Université de Sciences et Technologies de Lille

Soutenue le 10 novembre 2006 devant le jury constitué de :

Mr Jean-Pierre Le Cadre	Directeur de Recherche, IRISA	<i>Rapporteur</i>
Mr Jean-Yves Tourneret	Professeur, ENSEEIHT	<i>Rapporteur</i>
Mr Gilles Celeux	Directeur de Recherche, INRIA	<i>Examineur</i>
Mr Manuel Davy	Chargé de Recherche, LAGIS	<i>Examineur</i>
Mr Arnaud Doucet	Professeur, UBC	<i>Examineur</i>
Mr Emmanuel Duflos	Professeur, EC Lille	<i>Directeur de thèse</i>
Mr Philippe Vanheeghe	Professeur, EC Lille	<i>Directeur de thèse</i>

Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal
(LAGIS, UMR CNRS 8146) de Lille

Inférence bayésienne pour la détermination et la sélection de modèles stochastiques

On s'intéresse à l'ajout d'incertitudes supplémentaires dans les modèles de Markov cachés. L'inférence est réalisée dans un cadre bayésien à l'aide des méthodes de Monte Carlo. Dans un cadre multicapteur, on suppose que chaque capteur peut commuter entre plusieurs états de fonctionnement. Un modèle à saut original est développé et des algorithmes de Monte Carlo efficaces sont présentés pour différents types de situations, prenant en compte des données synchrones/asynchrones et le cas binaire capteur valide/défaillant. Le modèle/algorithme développé est appliqué à la localisation d'un véhicule terrestre équipé de trois capteurs, dont un récepteur GPS, potentiellement défaillant à cause de phénomènes de trajets multiples.

On s'intéresse ensuite à l'estimation de la densité de probabilité des bruits d'évolution et de mesure dans les modèles de Markov cachés, à l'aide des mélanges de processus de Dirichlet. Le cas de modèles linéaires est tout d'abord étudié, et des algorithmes MCMC et de filtrage particulière sont développés. Ces algorithmes sont testés sur trois applications différentes. Puis le cas de l'estimation des densités de probabilité des bruits dans les modèles non linéaires est étudié. On définit pour cela des processus de Dirichlet variant temporellement, permettant l'estimation en ligne d'une densité de probabilité non stationnaire.

Mots-clés : Inférence bayésienne, modèles de Markov cachés, méthodes de Monte Carlo, Markov Chain Monte Carlo, filtrage particulière, Processus de Dirichlet, Estimation de densité, fusion de données, localisation de véhicule, GPS.

Bayesian Inference for the determination and the selection of stochastic models

We are interested in the addition of uncertainty in hidden Markov models. The inference is made in a Bayesian framework based on Monte Carlo methods. We consider multiple sensors that may switch between several states of work. An original jump model is developed for different kind of situations, including synchronous/asynchronous data and the binary valid/invalid case. The model/algorithm is applied to the positioning of a land vehicle equipped with three sensors. One of them is a GPS receiver, whose data are potentially corrupted due to multipaths phenomena.

We consider the estimation of the probability density function of the evolution and observation noises in hidden Markov models. First, the case of linear models is addressed and MCMC and particle filter algorithms are developed and applied on three different applications. Then the case of the estimation of probability density functions in nonlinear models is addressed. For that purpose, time-varying Dirichlet processes are defined for the online estimation of time-varying probability density functions.

Keywords : Bayesian inference, hidden Markov model, Monte Carlo methods, Markov Chain Monte Carlo, particle filter, Dirichlet Process, density estimation, data fusion, land vehicle positioning, GPS.

Remerciements

Loin de l'image du chercheur solitaire, j'ai eu la chance, durant mes trois années de thèse, de travailler en collaboration avec plusieurs chercheurs, qui m'ont fait partager leurs connaissances et leur enthousiasme pour la recherche. Les meilleures idées surgissaient souvent au détour d'une conversation anodine ou par des associations d'idées parfois surprenantes.

Mes remerciements vont en tout premier lieu à Monsieur Philippe Smets (†) [Ber06], Professeur à l'IRIDIA, pour la grande disponibilité dont il a fait preuve envers moi durant la première moitié de ma thèse. Philippe et sa femme Jacqueline m'ont accueilli plusieurs fois à Bruxelles où les discussions papillonnaient entre fonctions de croyances, pour lesquelles il était un éminent spécialiste, art africain, conseils gastronomiques et blagues françaises (!). Bien que les travaux réalisés ensemble sur les fonctions de croyance n'apparaissent pas dans ce manuscrit par souci de cohérence, je lui dois une certaine image du métier de chercheur, faite d'ouverture d'esprit, de simplicité et d'envie de partager ses connaissances.

Je remercie Messieurs Jean-Pierre Le Cadre, Directeur de Recherche à l'IRISA, et Jean-Yves Tourneret, Professeur à l'ENSEEIH, rapporteurs de ce travail de thèse, pour l'intérêt porté à mes travaux et la lecture détaillée de ce mémoire de thèse. Leurs remarques pertinentes ont permis d'améliorer le manuscrit final sur plusieurs points précis. Je remercie également Monsieur Gilles Celeux, Directeur de Recherche à l'INRIA, de participer à ce jury de thèse.

Merci à Monsieur Arnaud Doucet, Professeur à l'Université de Colombie Britannique, pour m'avoir accueilli deux semaines à Vancouver et m'avoir guidé dans mes choix scientifiques. Nos nombreuses discussions sur les méthodes bayésiennes, autour d'un café (le plus souvent), d'une pinte (un peu moins souvent), ou d'un repas thaïlandais (encore moins souvent, heureusement pour mon estomac), m'ont été extrêmement profitables pour la suite de ma thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Manuel Davy, Chargé de Recherche au LAGIS, pour la part très active qu'il a prise dans le déroulement de ma thèse au niveau des axes de recherche, des choix scientifiques, et des conseils pour la rédaction des articles scientifiques. Nos nombreuses discussions autour d'un café m'ont permis d'avancer sur plusieurs points ardu. Je le remercie également pour sa relecture attentive de plusieurs chapitres de cette thèse.

Merci à Messieurs Emmanuel Duflos et Philippe Vanheeghe, Professeurs à l'Ecole Centrale de Lille, d'avoir co-encadré cette thèse et pour la confiance et le total soutien qu'ils m'ont accordé durant les trois années de cette thèse. Leurs relectures minutieuses – j'ai même parfois pu dire pointilleuses – ont permis d'améliorer nettement la qualité du manuscrit final.

Merci à Monsieur Carl Haas, Professeur à l'Université de Waterloo pour m'avoir fait découvrir un domaine applicatif, celui du génie civil, différent du mien, et pour les nombreuses discussions passionnantes que nous avons eu. Merci également à Monsieur Branko Ristic, Chercheur au DSTO, pour la collaboration engagée et à Monsieur Olivier Colot, Professeur à l'Université de Lille I, pour les discussions que nous avons eues sur les fonctions de croyance.

Merci à tous les doctorants ayant partagé – pas tous en même temps, heureusement ! – le même bureau que moi durant ces trois ans : Delphine, Alexandre, Nima, Romain, Michael, Samer, Cédric, Emmanuel, Marc, Marie, Kenko... et j'en oublie sans doute. Merci spécialement à Corentin qui m'a beaucoup aidé sur la compréhension des méthodes de Monte Carlo, les astuces de la mise en page avec L^AT_EX, ou encore les méthodes numériques de programmation.

Mes trois années au LAGIS se sont déroulées dans d'excellentes conditions de travail, et pour cela je remercie l'ensemble du personnel technique et administratif du « 3ème C » : Patrick, l'homme qui tenta le massage cardiaque de la dernière chance sur mon disque dur agonisant ; Jacques, Hilaire, Gilles, Bernard, l'homme qui parle à l'oreille des oursons en guimauve ; Laetitia, Marie-Françoise, Christine et Brigitte. Merci à tous, ainsi qu'à l'ensemble de l'équipe SyNeR, pour avoir contribué à instaurer une excellente atmosphère de travail.

Je remercie également la région Nord-Pas de Calais et le CNRS pour le financement de mes activités de recherche durant ces trois années.

Merci à ma famille, belle-famille, à mes amis pour leur soutien. Merci à mes parents, pour m'avoir transmis leur goût du travail bien fait et leur curiosité intellectuelle.

Enfin, *last but not least*, merci à Odile, pour tout.

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des algorithmes	xiii
Nomenclature	xv
Introduction	1
1 Inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés	7
1.1 Filtrage bayésien multicauteur	7
1.1.1 Modèle d'évolution de l'état	8
1.1.2 Modèles de mesure	9
1.1.3 Inférence bayésienne	9
1.2 Méthodes déterministes optimales et non optimales	11
1.2.1 Filtre et lisseur de Kalman	12
1.2.2 Filtre de Kalman étendu	15
1.2.3 Filtre de Kalman sans parfum	15
1.2.4 Filtrage de Kalman dans un contexte multicauteur	17
1.3 Méthodes de Monte Carlo	19
1.3.1 Intégration de Monte Carlo	20
1.3.2 Filtrage particulière	21
1.3.3 Markov Chain Monte Carlo	27
1.4 Modèles à saut	29
1.4.1 Définitions	29

1.4.2	Système conditionnellement linéaire gaussien	30
2	Fusion de capteurs à modèles d'observation multiples	35
2.1	Problématique	35
2.1.1	Exposé du problème	36
2.1.2	Objectifs d'estimation	37
2.1.3	Contributions principales de ce chapitre	38
2.2	Modèle statistique proposé	39
2.3	Algorithmes de filtrage particulaire pour modèles d'observation multiples	41
2.3.1	Algorithme particulaire pour capteurs synchrones	41
2.3.2	Algorithme particulaire pour capteurs asynchrones	41
2.3.3	Distributions d'importance	43
2.3.4	Cas particuliers intéressants	45
2.4	Discussion	48
2.5	Exemples illustratifs	49
2.5.1	Premier exemple	49
2.5.2	Deuxième exemple	56
2.6	Conclusion	59
3	Fusion multicapteur pour la localisation d'un véhicule terrestre	61
3.1	Introduction	61
3.2	Localisation d'un véhicule terrestre	63
3.2.1	Capteurs embarqués pour la localisation	63
3.2.2	Le système GPS	64
3.3	Modèle statistique	67
3.3.1	Modèle d'évolution de l'état basé sur la cinématique du véhicule	67
3.3.2	Modèles d'observation	69
3.4	Objectifs d'estimation et algorithme	70
3.5	Resultats	70
3.6	Conclusion	73
4	Processus de Dirichlet pour l'estimation de densités	77
4.1	Estimation de densité	78
4.2	Processus de Dirichlet	80
4.2.1	Définition	80
4.2.2	Propriétés	81
4.3	Processus de Dirichlet à mélange	83
4.4	Méthodes d'approximation de la distribution <i>a posteriori</i>	86
4.4.1	Echantillonnage marginal : algorithme d'Escobar	86
4.4.2	Echantillonnage marginal : algorithme de Neal	89
4.4.3	Estimation des hyperparamètres	90
4.5	Discussion	92

4.5.1	Repères bibliographiques	92
4.5.2	A propos de la modélisation par processus de Dirichlet	93
4.6	Conclusion	93
5	DPM pour l'inférence dans les modèles dynamiques linéaires	95
5.1	Introduction	95
5.1.1	Approche proposée	96
5.1.2	Contexte	96
5.1.3	Organisation du chapitre	97
5.2	Modèle dynamique linéaire à distributions de bruits inconnues	97
5.2.1	Modèle des bruits avec DPM	97
5.2.2	Estimation des paramètres	98
5.3	Algorithme MCMC pour l'estimation de l'état hors ligne	100
5.3.1	Hyperparamètres fixés et connus	100
5.3.2	Hyperparamètres inconnus	102
5.4	Filtre particulaire rao-blackwellisé pour l'estimation en ligne	103
5.5	Discussion	106
5.5.1	A propos de la convergence du filtre particulaire rao-blackwellisé	106
5.5.2	A propos de problèmes apparentés	106
5.5.3	A propos de l'observabilité	107
5.6	Applications	107
5.6.1	Déconvolution aveugle de processus impulsionnels	107
5.6.2	Régression robuste	110
5.6.3	Détection de rupture dans une série temporelle biomédicale	112
5.7	Conclusion	114
6	Processus de Dirichlet variant temporellement	117
6.1	Introduction	117
6.1.1	Exposé du problème	117
6.1.2	Processus de Dirichlet dépendants	119
6.1.3	Modélisation proposée et plan du chapitre	120
6.2	Modèle statistique	120
6.2.1	Une première approche	121
6.2.2	Modèle proposé pour les variables d'allocation	121
6.2.3	Loi d'évolution $p(U_{k,t} U_{k,t-1})$	124
6.2.4	Lois d'évolution des hyperparamètres	126
6.3	Algorithme de Monte Carlo séquentiel	127
6.3.1	Objectifs d'estimation	127
6.3.2	Lois d'importance	127
6.3.3	Estimation de la densité de probabilité	131
6.4	Exemple illustratif	131
6.5	TVDP dans les modèles dynamiques non linéaires	137
6.5.1	Objectifs d'estimation	138

6.5.2	Lois d'importance	139
6.5.3	Exemple illustratif	141
6.6	Conclusion	143
Conclusion		145
Bibliographie		151
A Récursion <i>backward forward</i>		165
B Compléments de filtrage statistique		167
B.1	Opérations usuelles sur les probabilités	167
B.2	Distributions conjuguées	167
B.3	Distribution de Wishart	168
B.4	Distribution inverse Wishart	169
B.5	Distribution normale-inverse Wishart	169
B.5.1	Définition	169
B.5.2	Conjugaison	169
B.6	Distribution de Dirichlet	170
B.6.1	Définition	170
B.6.2	Conjugaison	171
B.7	Fractiles de la loi du χ^2	173
B.8	Démonstrations	173
B.8.1	Equation bayésienne récurrente	173
B.8.2	Equations du filtre de Kalman	173
B.8.3	Equations du filtre de Kalman multicapteur	175
B.9	Construction d'une série temporelle stationnaire à l'aide de variables auxiliaires	176
C Algorithmes secondaires		179
C.1	Algorithme d'échantillonnage par acceptation-rejet	179
C.2	Calcul de $\mathbb{E}_p[f(x)]$ par la transformée sans parfum	179
C.3	Algorithme d'échantillonnage selon une distribution en urne de Polya	180
C.4	Le <i>simulation smoother</i>	180
D Démonstrations		183
D.1	Chapitre 2	183
D.2	Chapitre 4	184
D.3	Chapitre 5	184
D.4	Chapitre 6	186

Table des figures

1.1	Modèle graphique du modèle statistique monocapteur générique . . .	10
1.2	Modèle graphique du modèle statistique multicapteur générique . . .	10
1.3	Echantillonnage d'importance	23
1.4	Modèle de Markov caché à saut	29
2.1	Modèle séquentiel bayésien pour la fusion multicapteur avec des mo- dèles d'observation commutant	39
2.2	Probabilité <i>a posteriori</i> et estimée MAP de la variable latente $c_{1,t}$. .	50
2.3	Probabilité <i>a posteriori</i> et estimée MAP de la variable latente $c_{2,t}$. .	51
2.4	Estimées MMSE de $\boldsymbol{\alpha}_t$	52
2.5	Evolution de l'erreur entre le signal réel et estimé	53
2.6	Evolution des hyperparamètres $\sigma_{1,t}^\alpha$ et $\sigma_{2,t}^\alpha$	54
2.7	Probabilité <i>a posteriori</i> et estimée MAP de la variable latente $c_{1,t}$ pour le modèle à probabilités <i>a priori</i> fixées	54
2.8	Probabilité <i>a posteriori</i> et estimée MAP de la variable latente $c_{2,t}$ pour le modèle à probabilités <i>a priori</i> fixées	55
2.9	Evolution de l'erreur entre le signal réel et estimé pour le modèle à probabilités <i>a priori</i> fixées	55
2.10	Evolution des estimées MMSE de $\mathbf{x}_t(1)$ et $\mathbf{x}_t(2)$	57
2.11	Variable latente réelle et estimée $c_{1,t}$ et coefficient de fiabilité $\alpha_{1,1,t}$. .	58
2.12	Variable latente réelle et estimée $c_{2,t}$ et coefficient de fiabilité $\alpha_{2,1,t}$. .	58
2.13	Evolution des erreurs de position et de vitesse entre les valeurs réelles et estimées	59
3.1	Principe de fonctionnement du GPS différentiel	66
3.2	Illustration des erreurs GPS dues aux phénomènes de trajets multiples	67
3.3	Nomenclature du véhicule terrestre	68
3.4	Trajectoire du véhicule estimée avec l'algorithme proposé	71

3.5	Zoom sur la trajectoire du véhicule estimée avec l'algorithme proposé et un UKF avec rejet des erreurs	72
3.6	Probabilité <i>a posteriori</i> de l'état GPS et estimée MMSE du coefficient de fiabilité du GPS	73
3.7	Comparaison de l'algorithme proposé avec un algorithme UKF sans rejet des erreurs	74
3.8	Comparaison de l'algorithme proposé avec un algorithme UKF avec rejet des erreurs	76
4.1	Réalisations de processus Dirichlet	82
4.2	Métaphore du restaurant chinois	84
4.3	Modèle statistique hiérarchique d'un processus de Dirichlet à mélange	84
4.4	Réalisation $F(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(\cdot \theta)d\mathbb{G}(\theta)$	85
4.5	Réalisations d'un processus de Dirichlet à mélange de gaussiennes 2D	94
5.1	Estimée MMSE, valeur réelle du signal et résidu pour l'application de déconvolution aveugle	110
5.2	densité réelle et estimée pour l'application de déconvolution aveugle .	111
5.3	Fonctions réelle et de régression avec l'algorithme MCMC	112
5.4	Fonctions réelle et de régression avec le filtre particulaire Rao-Blackwellisé	113
5.5	Niveau de créatinine mesuré et estimé par MCMC	114
5.6	Probabilité <i>a posteriori</i> d'un saut dans le niveau de créatinine	115
6.1	Modèle statistique du processus de Dirichlet à mélange variant temporellement	123
6.2	Métaphore du restaurant chinois revisité	124
6.3	Densité réelle et estimée avec un TVDP	134
6.4	Evolution temporelle de la distance entre la densité réelle et estimée pour γ_t estimé	135
6.5	Evolution du nombre moyen de variables d'allocation "en vie" pour γ_t estimé	135
6.6	Evolution de $\gamma_{t t}$	136
6.7	Evolution temporelle de la distance entre la densité réelle et estimée pour γ fixé	136
6.8	Evolution du nombre moyen de variables d'allocation "en vie" pour γ fixé	137
6.9	Densité réelle et estimée avec un TVDP	142
6.10	Evolution temporelle de l'erreur entre l'état réel et estimé	143
6.11	Evolution temporelle de la distance entre la densité du bruit d'évolution réelle et estimée	143
6.12	Evolution de $\gamma_{t t}$	144
B.1	Distributions de Dirichlet pour différentes valeurs de α	171

B.2 Evolution de la distribution de Dirichlet <i>a posteriori</i> en fonction du nombre d'échantillons générés.	172
---	-----

Liste des tableaux

2.1	Comparaison du modèle à saut proposé avec un JMLS	57
3.1	Caractéristiques des capteurs extéroceptifs et proprioceptifs	63
3.2	Variables d'état utilisées dans le modèle de véhicule terrestre	68
6.1	Comparaison sur 20 simulations entre le modèle proposé et un modèle dont la distribution du bruit est fixée	142

Liste des algorithmes

1.1	Echantillonnage d'importance pour approcher $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t} \mathbf{z}_{1:t})}[h]$	22
1.2	Filtre particulaire générique	25
1.3	Algorithme MCMC générique	27
1.4	Echantillonneur de Gibbs générique	28
1.5	Algorithme de Metropolis-Hastings générique	28
1.6	Algorithme de Monte Carlo séquentiel rao-blackwellisé	33
2.1	Filtre particulaire pour la fusion de capteurs à classes de fonctionne- ment multiples – Cas synchrone	42
2.2	Filtre particulaire pour la fusion de capteurs à classes de fonctionne- ment multiples – Cas asynchrone	43
2.3	Filtre particulaire rao-blackwellisé pour la fusion de capteurs à classes de fonctionnement multiples – cas asynchrone	47
3.1	Filtre particulaire UKF rao-blackwellisé pour le positionnement d'un véhicule terrestre	75
4.1	Algorithme de Gibbs pour échantillonner selon $p(\theta_{1:m} \mathbf{y}_{1:m})$	88
4.2	Algorithme d'approximation de la densité F	89
4.3	Algorithme de Gibbs pour échantillonner selon $p(\mathbf{c}_{1:m}, U_{X(\mathbf{c}_{1:m})} \mathbf{y}_{1:m})$.	90
5.1	Echantillonneur de Gibbs pour générer des échantillons selon $p(\theta_{1:T} \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$	100
5.2	Algorithme MCMC pour échantillonner selon $p(\theta_{1:T} \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$	102
5.3	Algorithme MCMC pour échantillonner selon $p(\theta_{1:T}, \phi \mathbf{z}_{1:T})$	104
5.4	Filtre particulaire rao-blackwellisé pour échantillonner selon $p(\theta_{1:t} \mathbf{z}_{1:t})$	105
6.1	Algorithme de Monte Carlo séquentiel pour l'estimation en ligne d'une densité de probabilité variant temporellement	128
6.2	Estimation de la densité de probabilité non stationnaire du bruit d'évolution dans les modèles dynamiques	139
C.1	Algorithme pour échantillonner selon $\Pr(d\theta_{m+1} \theta_{1:m}) = \frac{\alpha}{\alpha+m}\mathbb{G}_0 +$ $\frac{1}{\alpha+m} \sum_{k=1}^m \delta_{\theta_k}$	180

Nomenclature

Notations

x	scalaire x
\mathbf{x}	vecteur \mathbf{x}
$\mathbf{x}_{u:v}$	ensemble de vecteurs $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{u+1}, \dots, \mathbf{x}_{v-1}, \mathbf{x}_v\}$
$\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$	particule i avant rééchantillonnage
$\mathbf{x}_t^{(i)}$	particule i après rééchantillonnage
$\tilde{w}_t^{(i)}$	poids associé à la particule i avant rééchantillonnage
$w_t^{(i)}$	poids associé à la particule i après rééchantillonnage
$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	distribution gaussienne de moyenne μ et de matrice de covariance Σ
$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma)$	densité de probabilité gaussienne de moyenne μ et de matrice de covariance Σ évaluée au point \mathbf{x}
$\mathcal{D}(a_0, \dots, a_n)$	distribution de Dirichlet de paramètres a_0, \dots, a_n
$DP(\alpha, \mathbb{G}_0)$	processus de Dirichlet de coefficient d'échelle α et de distribution de base \mathbb{G}_0
$\mathcal{B}(a, b)$	loi beta de paramètres a et b
$\mathcal{G}(a, b)$	loi gamma de paramètres a et b
$\mathcal{NiW}(\mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$	distribution normale-inverse Wishart de paramètres μ_0, κ_0, ν_0 et Λ_0
$\mathcal{U}([a, b])$	distribution uniforme sur l'intervalle $[a, b]$
$Binomial(n, p)$	loi binomiale de paramètres n et p
$Multinomial(\pi)$	loi multinomiale de paramètre π

Acronymes

MMSE	<i>Minimum Mean Squared Error</i>
MAP	<i>Maximum A Posteriori</i>
iid	<i>independent identically-distributed</i>
KF	<i>Kalman Filter</i>
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>
UKF	<i>Unscented Kalman Filter</i>
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i>
SMC	<i>Sequential Monte Carlo</i>
GPB	<i>Generalised Pseudo-Bayes</i>
IMM	<i>Interacting Multiple Model</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
SSSM	<i>Switching State-Space Model</i>
JMS	<i>Jump Markov System</i>
JMLS	<i>Jump Markov Linear System</i>
DP	<i>Dirichlet Process</i>
DPM	<i>Dirichlet Process Mixture</i>
TVDP	<i>Time-Varying Dirichlet Process</i>
TVDPM	<i>Time-Varying Dirichlet Process Mixture</i>

Introduction

*C'est l'incertitude qui nous charme.
Tout devient merveilleux dans la brume.*

Oscar Wilde

Résultant de phénomènes purement aléatoires (obtiendrai-je les six numéros du loto?) ou d'un manque d'information sur un phénomène donné (mon train arrivera-t-il à l'heure?), l'incertitude fait partie intégrante de notre vie. L'être humain intègre par lui-même les nouvelles informations lui parvenant afin d'actualiser sa connaissance sur un phénomène et de réévaluer cette incertitude. L'objet de l'inférence bayésienne est d'offrir les outils permettant de quantifier et de mettre à jour cette incertitude, et donc de pouvoir naviguer dans la brume.

Inférence bayésienne

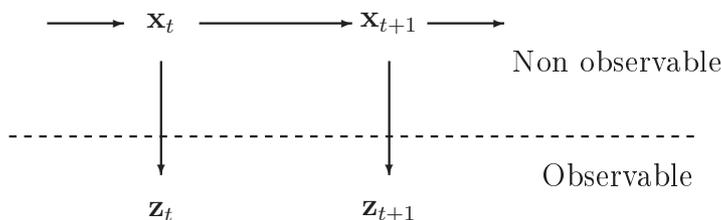
On cherche à avoir une représentation de notre incertitude sur la valeur d'un état caché \mathbf{x}_t , pouvant être scalaire ou vectoriel, à partir de la connaissance de mesures \mathbf{z}_t , récoltées séquentiellement. Ces mesures sont fournies par des capteurs et peuvent être des informations numériques (vitesse d'un véhicule, température d'une pièce...) ou symboliques (détection/non détection d'un obstacle, couleur d'un objet...). Dans un cadre bayésien, cette incertitude, conditionnellement à la connaissance des mesures collectées, est quantifiée par la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, appelée densité de probabilité *a posteriori*, avec $\mathbf{x}_{0:t}$ l'ensemble des états cachés de l'instant 0 à l'instant t , et $\mathbf{z}_{1:t}$ l'ensemble des mesures collectées de l'instant 1 à l'instant t .

Le mécanisme d'inférence permettant de calculer cette densité est basé sur la règle de Bayes

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_{0:t}) \quad (1)$$

où \propto signifie "proportionnel à", $p(\mathbf{x}_{0:t})$ est la densité de probabilité *a priori*, qui représente l'incertitude sur le vecteur $\mathbf{x}_{0:t}$ avant l'observation des mesures, et $p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})$ est la vraisemblance des mesures observées.

On considère dans cette thèse que l'on est capable de définir des modèles stochastiques reliant les états cachés et les mesures observées. Ces modèles prennent en compte les caractéristiques essentielles d'un phénomène donné. Le caractère stochastique du modèle permet de considérer des paramètres purement aléatoire ou mal connus, et offre une plus grande flexibilité que les modèles déterministes. On suppose que sont définis un modèle d'évolution de l'état, reliant deux états successifs \mathbf{x}_{t-1} et \mathbf{x}_t , représenté par la densité $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$, et un modèle de mesure, reliant une mesure \mathbf{z}_t à l'état caché \mathbf{x}_t , représenté par la densité $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$. Les dépendances statistiques entre états cachés et mesures sont représentées sur la figure suivante.



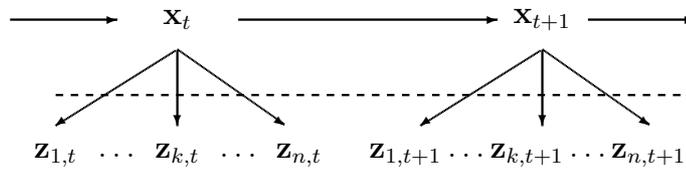
A partir des modèles stochastiques ainsi définis, la densité *a posteriori* peut être écrite selon

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\mathbf{x}_0) \prod_{k=1}^t p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \quad (2)$$

Dans le cas où les modèles d'évolution et de mesure sont linéaires à bruits gaussiens, la densité *a posteriori* est gaussienne, de moyenne et matrice de covariance calculées récursivement à l'aide des équations de Kalman. Dans le cas contraire, des approximations numériques peuvent être obtenues à partir de méthodes de simulation de nombres aléatoires, telles que le filtrage particulaire ou les *Markov Chain Monte Carlo*.

Cadre multicateur

Pour des systèmes réels, un unique capteur est en général incapable de fournir une information complète sur le vecteur \mathbf{x}_t . Il est dans ce cas nécessaire d'utiliser plusieurs capteurs afin de tirer profit de la redondance et de la complémentarité des informations délivrées par ceux-ci. A chaque instant t , on a donc n mesures $\mathbf{z}_{1,t}, \dots, \mathbf{z}_{n,t}$ délivrées par les n capteurs. A chaque capteur est associé un modèle de mesure. Les dépendances statistiques entre ces mesures et les états cachés sont représentées sur la figure suivante.



Etats de fonctionnement des capteurs

La relation statistique entre l'état caché \mathbf{x}_t et la mesure \mathbf{z}_t , représentée par la densité $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$ peut changer en fonction de l'environnement.

Prenons comme exemple de capteur l'œil humain, dont la perception des objets peut varier en fonction de la luminosité, des conditions météorologiques, etc. Cet effet a été particulièrement bien capté par Monet, dans ses séries sur la façade de la cathédrale de Rouen et sur le parlement de Londres (ci-contre). Pour différents jours et différents moments dans la journée, correspondant à différentes conditions météorologiques, et pour le même objet d'intérêt, il a su retranscrire à chaque fois les multiples impressions visuelles ressenties. L'état caché (la façade ou le parlement), et le capteur (l'œil humain) restent les mêmes, mais la relation entre les deux est modifiée par l'environnement extérieur.



La mesure peut également n'avoir qu'un rapport ténu avec l'état caché, dans le cas de perturbations extérieures importantes de l'environnement ou d'un dysfonctionnement du capteur. Toujours dans l'exemple de l'œil humain, Monet peint, à plusieurs années d'intervalle, une série de tableaux représentant un pont japonais agrémentant son jardin de Giverny. Le premier tableau (ci-contre) représente assez fidèlement ce pont. Le deuxième tableau, réalisé alors qu'il est atteint d'une cataracte, n'a pratiquement plus de lien avec le pont japonais. Le capteur (son œil) ayant un comportement défectueux, la mesure n'apporte que peu d'information sur l'objet d'intérêt.





Un capteur peut donc commuter ("sauter") entre plusieurs états de fonctionnement, c'est-à-dire entre plusieurs modèles de mesures prédéfinis, en fonction de l'environnement ou de changements de ses caractéristiques (vieillessement...).

Robotique mobile

La robotique mobile offre un grand nombre de problématiques entrant dans ce cadre théorique. Plusieurs capteurs sont en général nécessaires afin de permettre d'obtenir un grand nombre d'information sur l'état du véhicule (position, vitesse, niveau d'énergie, etc.) et sur son environnement (cartographie, présence d'obstacles, d'ennemi, etc.). Il est donc nécessaire d'embarquer dans ce cas un grand nombre de capteurs, aux informations complémentaires et redondantes. De plus, si le robot mobile est amené à se déplacer de façon autonome, sans intervention de l'utilisateur, il doit être capable de s'adapter à l'environnement extérieur. Les données des capteurs peuvent être altérées par l'environnement extérieur. Un radar détecteur d'obstacle peut être perturbé par des chutes de neige, ou une caméra sur un engin de reconnaissance martien par une tempête de sable. Les capteurs ont également une durée de vie limitée et leurs défaillances doivent pouvoir être repérées afin d'éviter d'utiliser des informations erronées.

Incertitude sur les modèles stochastiques

Les modèles d'évolution de l'état et de mesure, représentés par les densités $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$ et $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$ peuvent eux-même être considérés comme inconnus ou partiellement inconnus. Prenons l'exemple d'un véhicule terrestre dont le modèle d'évolution a été établi en fonction de ses caractéristiques mécaniques. Si des modifications de ces caractéristiques (détérioration des amortisseurs, crevaison d'un pneu) interviennent, son modèle d'évolution va s'en trouver modifié. Le modèle d'évolution précédemment défini ne sera plus une représentation correcte du phénomène réel. Ces situations étant difficilement prévisibles, la système doit alors apprendre son nouveau modèle d'évolution en fonction des mesures récoltées.

De même, l'exploration d'un site hostile peut amener le mobile à évoluer dans des environnements aux caractéristiques inconnues. Cet environnement inconnu peut entraîner un modèle stochastique entre l'état et la mesure qui n'était pas prévu, et qui doit dans ce cas être appris à partir des mesures.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit de thèse est organisé de la façon suivante.

Le **chapitre 1** donne les bases nécessaires à la compréhension de l'ensemble des chapitres suivants. Il pose les hypothèses réalisées sur les modèles stochastiques et donne les équations récurrentes permettant l'inférence bayésienne. Les algorithmes optimal de Kalman et non optimaux de Kalman étendu et sans parfum sont également introduits. Les bases des méthodes d'approximation numérique par échantillonnage aléatoire, appelées méthodes de Monte Carlo (filtrage particulaire et *Markov Chain Monte Carlo*) sont ensuite données. Enfin, la définition d'un modèle à saut est formulée ainsi qu'un algorithme de Monte Carlo permettant de réaliser l'estimation pour ces modèles.

Le **chapitre 2** s'intéresse au problème de l'estimation en présence de capteurs ayant des classes de fonctionnement multiples. Un modèle statistique bayésien est détaillé et plusieurs algorithmes de filtrage particulaire, correspondant à des situations différentes, sont donnés. Les modèles et algorithmes sont testés sur deux exemples académiques.

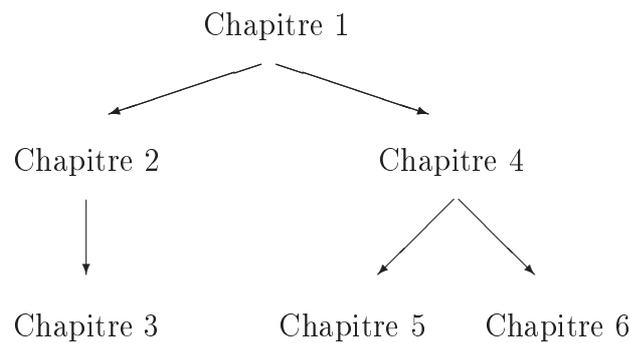
Le **chapitre 3** applique le modèle précédent à un problème de localisation de véhicule terrestre équipé de trois capteurs. L'un des capteurs est un récepteur GPS, pouvant délivrer des données erronées à cause de phénomènes de trajets multiples des signaux GPS.

Le **chapitre 4** présente une revue de l'estimation non paramétrique de densité avec les processus de Dirichlet. Les modèles non paramétriques sont définis en détail et les algorithmes d'estimation par méthodes *Markov Chain Monte Carlo* sont donnés.

Le **chapitre 5** s'intéresse au problème de l'estimation des densités de probabilités du bruit d'évolution et de mesure dans les modèles linéaires. La méthodologie proposée repose sur des modèles non paramétriques basés sur les processus de Dirichlet.

Le **chapitre 6** s'intéresse tout d'abord à l'estimation de densité de probabilité variant temporellement, en définissant des processus de Dirichlet évoluant dans le temps. Puis le problème de l'estimation en ligne des densités de probabilité des bruits d'évolution et de mesure dans les modèles non linéaires est abordé.

Le schéma suivant fournit les relations entre les différents chapitres. Le premier chapitre bibliographique sert d'apéritif à l'ensemble des autres chapitres de cette thèse. Les chapitres 2 et 3 d'une part, et 4, 5 et 6 d'autre part peuvent ensuite se lire de façon indépendante. Le chapitre 3 est une application des méthodes et algorithmes présentés au chapitre 2. Le chapitre 4, qui est un chapitre bibliographique, introduit les notions nécessaires à la compréhension des chapitres 5 et 6, qui peuvent être abordés indépendamment.



Principales contributions

Les contributions principales de ce travail de thèse sont les suivantes.

Le **chapitre 2** présente un modèle à saut original où les probabilités *a priori* des variables latentes évoluent en fonction du temps. Plusieurs algorithmes de filtrage particulière adaptés à ce modèle sont donnés, prenant en compte des données synchrones/asynchrones, ainsi que des modèles linéaires. Des lois d'importance efficaces, spécifiques à notre contexte, sont également proposées. Les modèles et algorithmes proposés sont comparés à des modèles à saut connus sur deux exemples académiques, illustrant l'apport de la méthode.

Le **chapitre 3** modélise la défaillance du capteur GPS selon le modèle du chapitre 2. Les performances de l'algorithme sont testées pour plusieurs types de situations.

Le **chapitre 5** introduit un modèle statistique permettant l'estimation des densités des bruits dans les modèles linéaires. Un algorithme hors ligne MCMC et un algorithme de filtrage particulière en ligne sont développés pour résoudre le problème de façon optimale. Ces algorithmes sont testés sur des applications déjà traitées et revisités en utilisant le modèle et les algorithmes introduits.

Le **chapitre 6** développe un modèle original de processus de Dirichlet variant temporellement pour l'estimation de densité non stationnaire. Un algorithme de Monte Carlo séquentiel et des lois d'importance efficaces sont formulées et testées sur un exemple. Puis ce modèle est appliqué à l'estimation en ligne de la densité des bruits dans les modèles dynamiques non linéaires. Un algorithme de Monte Carlo séquentiel et des lois d'importance dédiés à ce problème sont formulés, et testés sur un exemple académique.

CHAPITRE 1

Inférence bayésienne dans les modèles de Markov cachés

Ce chapitre regroupe l'ensemble des notions, modèles et algorithmes servant de base aux travaux de cette thèse. Dans le paragraphe 1.1, le modèle statistique générique composé d'un modèle de Markov caché observé par un ensemble de capteurs est explicité. Ce modèle générique constitue la base des modèles statistiques introduits dans les chapitres suivants. L'inférence sur le vecteur d'intérêt caché \mathbf{x}_t se fait dans un cadre bayésien, c'est-à-dire en se basant sur la règle d'inversion de Bayes. Les équations de récurrence obtenues en appliquant cette règle au modèle statistique générique considéré dans cette thèse permettent de réaliser l'inférence sur \mathbf{x}_t conditionnellement aux mesures. Le paragraphe 1.2 introduit les algorithmes déterministes permettant de réaliser l'inférence dans ce cadre bayésien. Les équations du filtre de Kalman, optimal dans le cas de la sous-classe des modèles linéaires à bruits gaussiens, et des filtres (non optimaux) de Kalman étendu et sans parfum sont données. Les méthodes de Monte Carlo, qui regroupent un ensemble de techniques d'échantillonnage aléatoire permettant d'obtenir une approximation numérique d'un problème donné, sont introduites au paragraphe 1.3 et les algorithmes dédiés à l'inférence bayésienne sont présentés. Dans le paragraphe 1.4, le modèle générique défini au paragraphe 1.1 est étendu en considérant qu'il existe plusieurs modèles statistiques envisageables. Des algorithmes spécifiques sont ensuite présentés.

1.1 Filtrage bayésien multicapteur

L'objectif du filtrage est de retrouver la valeur de l'état caché d'un système à partir de la connaissance d'un ensemble de mesures. Nous appellerons \mathbf{x}_t le vecteur contenant, à l'instant t , les composantes de cet état. Rechercher l'état caché du

système revient donc à la détermination de \mathbf{x}_t , appelé dans ce contexte vecteur caché ou état caché. On se base pour cela sur la connaissance d'un modèle statistique, constitué d'un modèle d'évolution de l'état et d'un ou plusieurs modèles de mesures.

Une fois ces modèles définis, on se place dans un cadre bayésien afin de réaliser l'inférence sur le vecteur \mathbf{x}_t . Le cadre bayésien offre les outils permettant de quantifier l'incertitude sur ce vecteur \mathbf{x}_t conditionnellement aux mesures, et permet d'intégrer information *a priori* et mesures afin de réaliser l'inférence. On considère pour cela toutes les variables inconnues comme des variables aléatoires, et l'on cherche à estimer la densité *a posteriori*, c'est-à-dire la densité de l'état caché conditionnellement aux mesures. Cette densité représente notre incertitude sur la variable d'intérêt conditionnellement à l'information disponible, constituée des mesures et du modèle statistique.

1.1.1 Modèle d'évolution de l'état

Nous restreignons l'étude aux signaux modélisés par des modèles d'état discrets et markoviens, à domaine de valeurs continu ou discret.

L'état caché $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}$, $t \in \mathbb{N}$ est modélisé comme un processus de Markov de distribution initiale $\Pr(\mathbf{X}_0 \in d\mathbf{x}_0)$ et de noyau de transition

$$\Pr(\mathbf{X}_{t+1} \in d\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \dots, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0) = \Pr(\mathbf{X}_{t+1} \in d\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \quad (1.1)$$

Notation 1.1 Afin de simplifier les notations, on utilisera dans la suite \mathbf{x}_t à la fois pour désigner la variable aléatoire et sa réalisation. On exprimera les distributions de probabilité continues par $\Pr(d\mathbf{x}_t)$ au lieu de $\Pr(\mathbf{X}_t \in d\mathbf{x}_t)$ et les distributions discrètes par $\Pr(\mathbf{x}_t)$ au lieu de $\Pr(\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)$. Si ces distributions admettent des densités, celles-ci sont désignées par $p(\mathbf{x}_t)$.

Le modèle d'évolution de l'état \mathbf{x}_t , markovien, est donc défini par les densités de probabilités suivantes

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_0) \\ p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) \end{cases} \quad (1.2)$$

$p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)$ est appelé par la suite densité de probabilité d'évolution de l'état, ou plus simplement densité d'évolution. Le modèle (1.2) peut également se présenter sous la forme d'un modèle d'état défini par

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \sim p(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}_{t+1} = f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où f_t est une fonction non linéaire modélisant l'évolution de l'état et \mathbf{v}_t est le bruit d'état aléatoire distribué selon une distribution \mathbf{V}_t .

1.1.2 Modèles de mesure

A chaque instant t , l'état caché \mathbf{x}_t est observé par un ensemble de n capteurs S_k , $k = 1..n$, délivrant chacun une donnée $\mathbf{z}_{k,t}$, appelée par la suite mesure ou observation. Chaque mesure $\mathbf{z}_{k,t}$ est reliée à l'état caché par une densité de probabilité $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$, appelée densité de mesure ou loi d'observation par la suite, définie sous la forme d'un modèle de mesure (également appelé modèle d'observation) par

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_{k,t}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,t} \quad (1.4)$$

avec $h_{k,t}$ une fonction non linéaire modélisant la relation déterministe entre la mesure et l'état, et $\mathbf{w}_{k,t}$ le bruit blanc de mesure distribué selon une distribution $\mathbf{W}_{k,t}$. On note $\mathbf{z}_t = \{\mathbf{z}_{1,t}, \dots, \mathbf{z}_{n,t}\}$ l'ensemble des mesures délivrées par les n capteurs à un instant t et $\mathbf{z}_{1:t} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_t\}$.

A chaque instant t , les mesures $\mathbf{z}_{k,t}$, $k = 1..n$, sont supposées indépendantes conditionnellement à l'état \mathbf{x}_t , soit

$$p(\mathbf{z}_{1,t}, \dots, \mathbf{z}_{n,t}|\mathbf{x}_t) = \prod_{k=1}^n p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t), \quad \forall t \in \mathbb{N}^* \quad (1.5)$$

On a ainsi $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t) = \prod_{k=1}^n p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$. Dans le cas d'observations conditionnellement indépendantes, on peut donc passer avec l'équation (1.5) de la formulation multicapteur de la loi d'observation à une formulation monocapteur et vice-versa. Les observations $\mathbf{z}_{1:t}$ sont également supposées indépendantes conditionnellement à la trajectoire $\mathbf{x}_{0:t}$, soit

$$p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t}) = \prod_{j=1}^t p(\mathbf{z}_j|\mathbf{x}_j) \quad (1.6)$$

Le modèle statistique, composé du modèle d'évolution de l'état et des modèles de mesures, est représenté sur les figures 1.1 dans le cas monocapteur, et 1.2 dans le cas multicapteur, sous la forme d'une modèle graphique.

1.1.3 Inférence bayésienne

L'inférence sur le vecteur caché $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}$ est réalisée dans le cadre bayésien à partir de la connaissance

- des mesures $\mathbf{z}_{k,j}$, $k = 1..n$, $j = 1..t$,
- des densités de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$, $k = 1..n$,
- de la densité d'évolution $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$,
- de la densité *a priori* initiale $p(\mathbf{x}_0)$,

on est alors capable

- de filtrer, c'est-à-dire connaître $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$,
- de lisser, c'est-à-dire connaître $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:T})$ avec $T > t$,

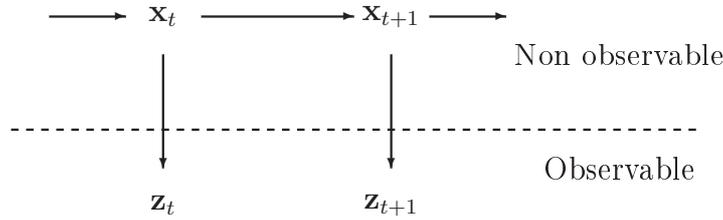


FIG. 1.1 – Modèle graphique du modèle statistique monocapteur. Un processus de Markov caché $\{\mathbf{x}_t\}$ défini par une densité de probabilité d'évolution de l'état $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$ est observé par une mesure \mathbf{z}_t selon la densité de probabilité de mesure $p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)$

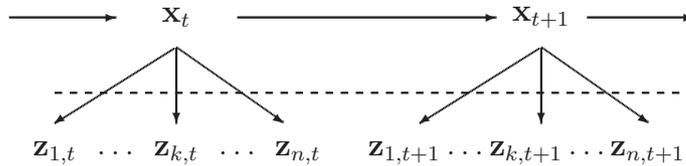


FIG. 1.2 – Modèle graphique du modèle statistique multicapteur. Un processus de Markov caché $\{\mathbf{x}_t\}$ défini par une densité de probabilité d'évolution de l'état $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$ est observé par un ensemble de mesures $\mathbf{z}_{k,t}$ selon les densités de probabilité de mesure $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$, $k = 1 \dots n$.

- de prédire, c'est-à-dire connaître $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:T})$ avec $T < t$.

Si l'estimation se fait en ligne, on souhaite, au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles mesures, connaître la densité *a posteriori* complète $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ ou sa marginale $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) = \int_{\mathcal{X}^t} p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t-1}$, appelée densité *a posteriori* de filtrage.

Si l'estimation se fait hors ligne, une fois toutes les observations $\mathbf{z}_{1:T}$ collectées, on souhaite estimer la densité $p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{z}_{1:T})$ ou les densités marginales $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:T})$, appelées densités *a posteriori* de lissage, pour $t = 0 \dots T$.

Dans le cas général, on souhaite déterminer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$. Cette densité de probabilité représente notre incertitude sur le vecteur $\mathbf{x}_{0:t}$ connaissant les mesures $\mathbf{z}_{1:t}$. En utilisant la règle de Bayes, cette densité s'écrit sous la forme

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_{0:t})}{\int_{\mathcal{X}^{t+1}} p(\mathbf{z}_{1:t}|\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_{0:t})d\mathbf{x}_{0:t}} \quad (1.7)$$

ou, de façon récurrente [Dou01b]

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (1.8)$$

La densité de filtrage $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ vérifie quant à elle les récursions suivantes, en deux étapes

1. La densité de probabilité de filtrage $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ est obtenue par la règle de Bayes

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)}{\int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)d\mathbf{x}_t} \quad (1.9)$$

2. La densité de probabilité de prédiction à un pas $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t})$ est obtenue par l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{z}_{1:t}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})d\mathbf{x}_t \quad (1.10)$$

A partir de la densité *a posteriori* complète $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ ou marginale $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$, on souhaite estimer la valeur du vecteur caché \mathbf{x}_t . Dans un cadre bayésien, deux estimées sont principalement envisageables [Bar01], l'estimée MMSE (*Minimum Mean Squared Error*) et l'estimée MAP (*Maximum A Posteriori*) définies respectivement par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} &= \mathbb{E}[\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}] \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} \mathbf{x}_t p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mathbf{x}_t p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}} [p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})] \quad (1.12)$$

1.2 Méthodes déterministes optimales et non optimales

Comme il a été vu dans le paragraphe précédent, le but du filtrage statistique bayésien est d'estimer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ ou plus souvent sa marginale $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$. Dans le cas monocapteur, cette estimation est réalisée à partir de la connaissance des modèles d'évolution et de mesure suivants

$$\mathbf{x}_{t+1} = f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{z}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \quad (1.14)$$

où \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont des bruits affectant les processus d'évolution et de mesure.

Dans le cas où la fonction f_t est linéaire en \mathbf{x}_t et \mathbf{v}_t , la fonction h_t est linéaire en \mathbf{x}_t et les bruits \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont gaussiens, on parle de modèle linéaire à bruits

additifs gaussiens, ou plus simplement de modèle linéaire gaussien. Pour ce type de modèles, la solution analytique des équations (1.9) et (1.10) est donnée par le filtre de Kalman [Kal60], pour lequel les moments d'ordre 1 et 2 des densités de prédiction $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})$ et de filtrage $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$ sont calculées et propagées [Che03]. Ces deux densités sont alors toujours gaussiennes.

Dans le cas où les fonctions f_t ou h_t sont non linéaires, ou si les bruits \mathbf{v}_t ou \mathbf{w}_t ne sont pas gaussiens, des filtres non optimaux déterministes basés sur l'algorithme du filtre de Kalman linéaire sont couramment utilisés. Le filtre de Kalman étendu (*Extended Kalman Filter*, EKF) procède à une linéarisation locale des fonctions non linéaire d'évolution et de mesure ; le filtre de Kalman sans parfum (*Unscented Kalman Filter*, UKF) procède lui à une approximation de la densité de probabilité par un nuage de points générés de façon déterministe, en utilisant la transformée sans parfum (*Unscented Transform*, UT).

Étant donné que l'EKF et l'UKF réalisent une approximation de la densité *a posteriori* par une gaussienne (ce qui n'est pas le cas si le système n'est pas linéaire gaussien), ils donnent des résultats satisfaisants pour certains types de problèmes mais peuvent avoir des performances très dégradées si la forme de la densité *a posteriori* est éloignée d'une densité gaussienne, comme dans le cas d'une densité multimodale par exemple, ou d'une densité de probabilité ayant un pic prononcé autour de la valeur maximale (on parle de densité "piquée").

1.2.1 Filtre et lisseur de Kalman

a) Filtre de Kalman

On suppose que le modèle constitué des équations (1.13) et (1.14) peut se mettre sous la forme des modèles linéaires d'état et de mesure suivants

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mathbf{v}_t \quad (1.15)$$

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (1.16)$$

où \mathbf{x}_t est le vecteur d'état à l'instant t , \mathbf{v}_t est le bruit d'évolution additif et gaussien, \mathbf{u}_t est une entrée connue, F_t est la matrice d'évolution de l'état, C_t est la matrice de transition de l'entrée et G_t est la matrice de transition du bruit. \mathbf{z}_t est la mesure réalisée au temps t , \mathbf{w}_t est le bruit de mesure additif et gaussien et H_t est la matrice de mesure. Les bruits d'évolution et de mesure sont supposés gaussiens, décorrélés et centrés, de matrices de covariance respectives $\mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T] = \delta_{i,j} Q_i$ et $\mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \delta_{i,j} R_i$, avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

A l'instant $t = 0$, \mathbf{x}_0 est supposé distribué selon une densité de probabilité gaussienne de moyenne et matrice de covariance connues

$$\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{0|0})$$

Ces hypothèses correspondent à la définition de l'*a priori* initial du filtre de Kalman.

Dans le cas de modèles linéaires décrits par les équations (1.15) et (1.16), le filtre de Kalman [Kal60], fournit la solution aux équations de récurrence (1.9) et (1.10), et peut s'écrire sous la forme des relations de récurrence suivantes [And79, Aru02]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \Sigma_{t-1|t-1}) \\ p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}) \\ p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}, \Sigma_{t|t}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= F_{t-1}\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} + C_{t-1}\mathbf{u}_{t-1} \\ \Sigma_{t|t-1} &= F_{t-1}\Sigma_{t-1|t-1}F_{t-1}^T + G_{t-1}Q_{t-1}G_{t-1}^T \end{aligned}$$

$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$ et $\Sigma_{t|t-1}$ étant respectivement la prédiction de l'état et la matrice de covariance de l'erreur de prédiction,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t\nu_t \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - K_tS_tK_t^T \end{aligned}$$

$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}$ et $\Sigma_{t|t}$ étant respectivement l'estimée de l'état et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. K_t est le gain de Kalman défini à l'instant t par

$$K_t = \Sigma_{t|t-1}H_t^T [H_t\Sigma_{t|t-1}H_t^T + R_t]^{-1}$$

ν_t est l'innovation, i.e. la différence entre la mesure et la prédiction de la mesure, donnée par

$$\nu_t = \mathbf{z}_t - H_t\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \quad (1.17)$$

de matrice de covariance

$$S_t = H_t\Sigma_{t|t-1}H_t^T + R_t$$

La démonstration des équations du filtre de Kalman est donnée en annexe B.8.2.

Remarques Sous l'hypothèse d'un modèle linéaire gaussien et dans le cadre de l'estimation bayésienne, le filtre de Kalman donne les statistiques suffisantes de la densité gaussienne *a posteriori* $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$. Il fournit les estimées MAP et MMSE qui sont identiques dans le cas de densités de probabilité gaussiennes. Le filtre de Kalman, dont l'intérêt repose sur la simplicité de mise en oeuvre et la multiplicité des applications, a plusieurs limitations, liées aux hypothèses qui le fondent

- il traite uniquement de modèles d'évolution et d'observation linéaires (ses extensions permettent de traiter des cas non linéaires par approximation),
- les bruits affectant les modèles d'évolution et de mesure doivent être gaussiens et temporellement décorrélés, ce qui est irréaliste dans de nombreuses applications.

Détection de données erronées L'innovation ν_t définie par l'équation (1.17) est la différence entre la mesure \mathbf{z}_t et la prédiction de la mesure $\widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = H_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$. La variable aléatoire ν_t suit une loi normale centrée de matrice de covariance S_t .

$$\nu_t \sim \mathcal{N}(0, S_t)$$

L'innovation quadratique normalisée $r_t \in]0, +\infty[$, définie par

$$r_t = \nu_t^T S_t^{-1} \nu_t$$

suit donc une loi du χ^2 à $l = \dim(\nu_t)$ degrés de liberté. Une étude de la valeur de r_t permet donc, si cette valeur est très grande et très improbable par rapport aux intervalles de confiance des lois du χ^2 donnés en annexe B.7, de détecter un conflit entre la mesure et la prédiction de la mesure [Bar01]. Si la prédiction est supposée correcte, le capteur est alors considéré comme défaillant et sa mesure n'est pas prise en compte dans l'algorithme. Ceci permet d'éviter d'intégrer dans le filtre de Kalman des mesures erronées causant des erreurs à long terme dans le calcul des estimées.

b) Lisseur de Kalman

Lorsque les calculs sont effectués hors ligne, on cherche alors à estimer la densité *a posteriori* de lissage $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:T})$ pour $t = 0 \dots T$. Cette densité peut se décomposer de la façon suivante [And79, Bri04]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:T}) &= \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:T}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:T}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) \int_{\mathcal{X}} \frac{p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:T}) p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})} d\mathbf{x}_{t+1} \end{aligned}$$

La densité de lissage $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:T})$ peut donc se calculer à l'aide d'un algorithme *forward-backward*. Celui-ci consiste à faire une première phase *forward* à l'aide des équations du filtre de Kalman en stockant les moyennes et matrices de covariance des densités de filtrage $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$ et de prédiction $p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t})$ pour $t = 1 \dots T$, puis à faire une deuxième phase *backward* pour $t = T - 1 \dots 1$ afin de calculer les densités lissées de façon récurrente.

La mise à jour retour s'effectue, pour $t = T - 1 \dots 1$, à partir des densités suivantes

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}, \Sigma_{t|t}) \\ p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:t}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; \widehat{\mathbf{x}}_{t+1|t}, \Sigma_{t+1|t}) \\ p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{z}_{1:T}) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; \widehat{\mathbf{x}}_{t+1|T}, \Sigma_{t+1|T}) \end{aligned}$$

selon les équations suivantes

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:T}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|T}, \Sigma_{t|T})$$

avec [Bar01]

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}_{t|T} &= \widehat{\mathbf{x}}_{t|t} + C_t (\widehat{\mathbf{x}}_{t+1|T} - \widehat{\mathbf{x}}_{t+1|t}) \\ \Sigma_{t|T} &= \Sigma_{t|t} + C_t (\Sigma_{t+1|T} - \Sigma_{t+1|t}) C_t^T \\ C_t &= \Sigma_{t|t} F_t^T \Sigma_{t+1|t}^{-1}\end{aligned}$$

1.2.2 Filtre de Kalman étendu

Lorsque les fonction f_t et h_t sont non linéaires, il n'est plus possible d'écrire les équations (1.13) et (1.14) sous les formes (1.15) et (1.16). Cependant, lorsque ces fonctions sont faiblement non linéaires, une linéarisation locale peut être une approximation satisfaisante de la non linéarité. Le filtre de Kalman étendu est une approximation du filtrage optimal qui se base sur cette linéarisation. Il fait l'hypothèse que la densité de probabilité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t})$, qui n'est dans ce cas plus gaussienne, peut être approchée par une densité gaussienne selon les récursions suivantes

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) &\simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}; \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \Sigma_{t-1|t-1}) \\ p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t-1}) &\simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \Sigma_{t|t-1}) \\ p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}) &\simeq \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}, \Sigma_{t|t})\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= f_{t-1}(\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}) \\ \Sigma_{t|t-1} &= \widehat{F}_{t-1} \Sigma_{t-1|t-1} \widehat{F}_{t-1}^T + G_{t-1} Q_{t-1} G_{t-1}^T \\ \widehat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t [\mathbf{z}_t - h_t(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1})] \\ \Sigma_{t|t} &= \Sigma_{t|t-1} - K_t S_t K_t^T \\ K_t &= \Sigma_{t|t-1} \widehat{H}_t^T [\widehat{H}_t \Sigma_{t|t-1} \widehat{H}_t^T + R_t]^{-1}\end{aligned}$$

\widehat{F}_t et \widehat{H}_t sont les linéarisations locales des fonctions f_t et h_t respectivement autour de l'estimée et de la prédiction

$$\begin{aligned}\widehat{F}_t &= \left. \frac{\partial f_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\mathbf{x}_t = \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}} \\ \widehat{H}_t &= \left. \frac{\partial h_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\mathbf{x}_t = \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}}\end{aligned}$$

1.2.3 Filtre de Kalman sans parfum

Le filtre de Kalman sans parfum, proposé par Julier [Jul97], procède lui aussi à une approximation de la densité *a posteriori* par une gaussienne. Mais plutôt

que de faire une approximation des fonctions non linéaires f_t et h_t , il réalise une approximation de la densité de probabilité par un ensemble de points pondérés convenablement choisis de façon déterministe, ces points étant transformés par les fonctions non linéaires f_t et h_t afin d'obtenir une nouvelle densité de probabilité. Cette approximation est appelée la transformée sans parfum (*Unscented Transform*).

a) Transformée sans parfum

La transformée sans parfum est une méthode permettant de calculer les statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non linéaire [Wan00, Jul00]. Elle est fondée sur l'intuition qu'il est plus facile d'estimer une distribution gaussienne que d'approcher une fonction non linéaire. On considère le système non linéaire suivant

$$y = f(x)$$

avec x une variable aléatoire de moyenne \bar{x} et de covariance P_{xx} , et y une variable aléatoire de statistiques à déterminer. Un ensemble de points est choisi, de manière déterministe, tel que leur moyenne et covariance soient \bar{x} et P_{xx} . Ces points "capturent" la forme de la densité de probabilité de x . La fonction non linéaire f est appliquée à chacun de ces points afin d'obtenir un nuage de points transformés de moyenne \bar{y} et de covariance P_{yy} .

La densité de probabilité de la variable aléatoire x de dimension n , de moyenne \bar{x} et de covariance P_{xx} est approchée par $2n + 1$ points pondérés donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \bar{x} & W_0 &= \frac{\kappa}{n+\kappa} \\ \mathcal{X}_i &= \bar{x} + \left(\sqrt{(n+\kappa)P_{xx}} \right)_i & W_i &= \frac{1}{2(n+\kappa)} \\ \mathcal{X}_{i+n} &= \bar{x} - \left(\sqrt{(n+\kappa)P_{xx}} \right)_i & W_{i+n} &= \frac{1}{2(n+\kappa)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt{(n+\kappa)P_{xx}} \right)_i$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne ou colonne de la matrice racine carrée de $(n+\kappa)P_{xx}$ et W_i est le poids associé au $i^{\text{ème}}$ point. La procédure de transformation est alors la suivante

1. Transformer chaque point \mathcal{X}_i par la fonction non linéaire f afin d'obtenir l'ensemble des points transformés

$$\mathcal{Y}_i = f(\mathcal{X}_i)$$

2. La moyenne \bar{y} est donnée par la moyenne pondérée des points transformés

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{Y}_i$$

3. La matrice de covariance P_{yy} est donnée par

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{Y}_i - \bar{y})(\mathcal{Y}_i - \bar{y})^T$$

b) Algorithme

On considère les modèles d'évolution et de mesure définis par les équations (1.13) et (1.14). Les bruits d'évolution et d'observation sont supposés décorrélés et centrés, de matrices de covariance respectives $\mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T] = \delta_{i,j} Q_i$ et $\mathbb{E}[\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T] = \delta_{i,j} R_i$. On suppose d'autre part que $\mathbb{E}[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] = 0 \forall i, j$.

On note $\mathcal{X}^a = [(\mathcal{X}^x)^T (\mathcal{X}^v)^T]^T$ et $n = \dim(\mathbf{x}_t) + \dim(\mathbf{v}_t)$. L'algorithme de l'UKF est le suivant :

- Calcul des points d'approximation et des poids associés

$$\mathcal{X}_{t-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a \quad (\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a \dots \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a) + \sqrt{(n+\kappa)\Sigma_{t-1}^a} \quad (\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a \dots \hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a) - \sqrt{(n+\kappa)\Sigma_{t-1}^a}]$$

avec $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^T \quad \mathbf{0}_{\dim(\mathbf{v}_{t-1})}^T]^T$ et $\Sigma_{t-1}^a = \begin{pmatrix} \Sigma_{t-1|t-1} & 0 \\ 0 & Q_{t-1} \end{pmatrix}$

Calculer les poids selon l'équation (1.18)

- Prédiction

$$\mathcal{X}_{t|t-1}^x = f_{t-1}(\mathcal{X}_{t-1}^x, \mathcal{X}_{t-1}^v)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{X}_{i,t|t-1}^x$$

$$\Sigma_{t|t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{X}_{i,t|t-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(\mathcal{X}_{i,t|t-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T$$

$$\mathcal{Z}_{t|t-1} = h_t(\mathcal{X}_{t|t-1}^x)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{Z}_{i,t|t-1}$$

- Estimation

$$S_t = P_{\nu_t \nu_t} = R_t + \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{Z}_{i,t|t-1} - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})(\mathcal{Z}_{i,t|t-1} - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})^T$$

$$P_{x_t z_t} = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{X}_{i,t|t-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})(\mathcal{Z}_{i,t|t-1} - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})^T$$

$$K_t = P_{x_t z_t} S_t^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t (\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1})$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t S_t K_t$$

Le filtre de Kalman sans parfum fournit une alternative intéressante au filtre de Kalman étendu et donne dans plusieurs cas de meilleurs résultats que celui-ci, pour une complexité équivalente [Wan02a]. Il montre cependant ses limites pour des phénomènes fortement non linéaires et/ou non gaussiens.

1.2.4 Filtrage de Kalman dans un contexte multicapteur

Le filtre et le lisseur de Kalman sont définis pour un système monocapteur, auquel est associé un seul modèle de mesure. Cependant, pour des problèmes réels, il est fréquemment nécessaire d'utiliser des mesures provenant de plusieurs capteurs. A chaque capteur est associé un modèle de mesure différent. On suppose que l'on

dispose d'un modèle d'évolution défini par l'équation (1.15) et de n modèles de mesure linéaires définis par

$$\mathbf{z}_{k,t} = H_{k,t}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_{k,t}, \quad k = 1..n$$

avec $\mathbf{w}_{k,t}$ un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance connue $R_{k,t}$. Du fait des indépendances conditionnelles, on a $\mathbb{E}[w_{i,t}w_{j,t}^T] = 0, \forall i, j$.

Trois approches sont envisageables pour utiliser le formalisme du filtre de Kalman en fusion multicapteur

- regrouper toutes les observations sous un seul vecteur et appliquer directement les équations du filtre de Kalman,
- considérer chaque observation individuellement et faire la fusion séquentiellement,
- utiliser l'algorithme du filtre de Kalman multicapteur.

a) Capteur "groupe"

La première méthode consiste à regrouper toutes les mesures et modèles de mesure sous un seul capteur, appelé capteur "groupe", et à appliquer ensuite les équations du filtre de Kalman.

$$\mathbf{z}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{1,t} \\ \dots \\ \mathbf{z}_{n,t} \end{pmatrix}, \quad H_t = \begin{pmatrix} H_{1,t} \\ \dots \\ H_{n,t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{1,t} \\ \dots \\ \mathbf{w}_{n,t} \end{pmatrix}$$

$$R_t = \mathbb{E}[w_t w_t^T] = \text{blockdiag}(R_{1,t}, \dots, R_{n,t})$$

On obtient alors un seul modèle de mesure "groupe"

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t$$

et l'on peut appliquer les équations du filtre de Kalman.

Si chaque observation $\mathbf{z}_{k,t}$ est de dimension l_k , la matrice de covariance de l'innovation S_t est de dimension l^2 avec $l = \sum_{k=1}^n l_k$. Cette matrice doit être inversée pour calculer le gain de Kalman. La complexité augmente donc en fonction du carré de l . L'approche par capteur "groupe" peut donc être la plus simple à implémenter dans le cas d'un faible nombre de capteurs, mais cette approche monolithique montre ses limites lorsque le nombre de capteurs augmente.

Remarque 1.1 *La méthode du capteur groupe peut s'appliquer de la même manière aux filtres de Kalman étendu et sans parfum*

b) Capteur séquentiel

La méthode de capteur séquentiel consiste à faire un pas de Kalman pour chaque mesure et permet de prendre en compte des données asynchrones [Wil76, Bar01]. Elle fonctionne bien pour un faible nombre de capteurs et lorsque les mesures sont asynchrones. En effet, le temps de calcul augmente linéairement avec le nombre de capteurs, car pour chaque capteur doit être calculé un nouveau gain de Kalman.

c) Filtre de Kalman multicapteur

Le filtre de Kalman multicapteur est une reformulation du filtre de Kalman. Les équations du filtre de Kalman multicapteur sont les suivantes

1. Estimation

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n K_{k,t} \nu_{k,t} \\ \Sigma_{t|t}^{-1} &= \Sigma_{t|t-1}^{-1} + \sum_{k=1}^n H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} H_{k,t}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\nu_{k,t} &= \mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\ K_{k,t} &= \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1}\end{aligned}$$

2. Prédiction

La phase de prédiction reste identique à celle du filtre de Kalman classique.

La démonstration du filtre de Kalman multicapteur est donnée en annexe B.8.3. L'utilisation des équations du filtre de Kalman multicapteur procure certains avantages

- quel que soit le nombre de capteurs employés, la plus grande inversion de matrice est de la dimension du vecteur d'état,
- la complexité de l'algorithme d'estimation augmente linéairement avec le nombre de capteurs.

La version étendue du filtre de Kalman multicapteur est triviale. Elle repose également sur une linéarisation locale des fonctions non linéaires d'évolution et d'observation.

1.3 Méthodes de Monte Carlo

Le filtre et le lisseur de Kalman permettent de calculer de façon récurrente les statistiques suffisantes (moyenne et matrice de covariance) de la densité *a posteriori* dans le cas de modèles linéaires à bruits additifs gaussien. Dans le cas non linéaire et/ou non gaussien, les algorithmes d'EKF et d'UKF permettent d'approcher la densité *a posteriori* par une gaussienne, ceci de façon déterministe. Cependant, dans le cas où la densité *a posteriori* est multimodale ou fortement « piquée », l'approximation gaussienne donnée par l'UKF et l'EKF n'est plus réaliste et peut conduire à une large erreur d'estimation, voire une divergence du filtre. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes d'échantillonnage stochastique, communément appelées méthodes de Monte Carlo, afin d'appréhender n'importe quel type de densité *a posteriori*.

Pour trouver les prémices des méthodes de Monte Carlo, il faut remonter en 1777, lorsque le noble français Georges Louis Leclerc, comte de Buffon, pose le problème dit de "l'aiguille de Buffon". Il montre qu'il est possible, à l'aide d'une aiguille jetée de façon aléatoire un grand nombre de fois sur une feuille quadrillée, d'obtenir une valeur approchée du nombre π (voir par exemple [Aig00]). La formulation moderne des méthodes de Monte Carlo trouve ses racines dans les années 1940, avec les travaux de Metropolis, Ulam et Von Neuman [And86, Met49, Met53, Met87, Ros54]. Le nom de la méthode est formulé en 1947 d'après la ville de la principauté de Monte Carlo, alors le symbole du jeu de casino et de la roulette, génératrice de nombres aléatoires. Ces 20 dernières années, les développements de la capacité des calculateurs ont permis l'essor des techniques de Monte Carlo et le développement de nouvelles méthodes spécifiques, telles que les méthodes de Monte Carlo séquentielles [Kit87, Gor93, Dou98].

Les méthodes de Monte Carlo [Dou05] regroupent un ensemble d'algorithmes permettant d'appréhender par échantillonnage stochastique des systèmes qui ne peuvent être résolus de façon analytique. L'idée de base est de générer un grand nombre d'échantillons distribués selon une certaine distribution de probabilité d'intérêt afin d'obtenir des estimées consistantes. La puissance de ces méthodes réside dans le fait qu'elles sont capables de traiter numériquement des problèmes d'intégration complexes.

1.3.1 Intégration de Monte Carlo

L'estimation dans le cadre de l'inférence bayésienne nécessite le calcul d'intégrales de type

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})d\mathbf{x}_{0:t} \quad (1.19)$$

comme, par exemple, l'estimée MMSE définie par l'équation (1.11), avec dans ce cas $h(\mathbf{x}_{0:t}) = \mathbf{x}_t$. Dans le cas de densités de probabilité complexes, le calcul analytique de cette intégrale n'est pas envisageable, et les techniques classiques d'intégration, comme la discrétisation déterministe sur une grille, sont inappropriées car imprécises et trop coûteuses en temps de calcul. En effet, la nombre d'éléments augmente de façon exponentielle avec la dimension du vecteur à estimer, et la taille de la grille peut ne pas être adaptée à la forme de la densité *a posteriori*.

Le principe de l'intégration de Monte Carlo consiste à générer N réalisations de la variable aléatoire $\mathbf{x}_{0:t}$ distribuées selon $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, et notées $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$, soit

$$\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (1.20)$$

L'approximation de Monte Carlo de l'intégrale (1.19) est alors donnée par

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}) \quad (1.21)$$

On obtient ainsi beaucoup de réalisations dans les régions de forte probabilité et peu (ou pas) dans les régions de faible probabilité. L'échantillonnage est aléatoire et adapté à la forme de la densité *a posteriori*.

L'intégration de Monte Carlo est fondée sur l'approximation de la distribution $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}) \quad (1.22)$$

où $\delta_x(\cdot)$ est la mesure de Dirac au point x . La densité *a posteriori* est ainsi approchée par un ensemble de points $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$ ayant chacun un poids $\frac{1}{N}$.

En pratique, il est souvent impossible de générer directement des échantillons distribués selon la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, celle-ci pouvant être de forme complexe, non standard (non gaussienne, gamma, uniforme...) ou seulement connue à une constante près. Les méthodes MCMC (*Markov chain Monte Carlo*) permettent de générer les échantillons $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$ de façon itérative (hors ligne). Les méthodes de Monte Carlo séquentielles, à l'aide de l'échantillonnage d'importance, permettent de générer les échantillons en ligne de façon récurrente. Ces deux familles de méthodes sont abordées dans les paragraphes suivants.

1.3.2 Filtrage particulière

La synthèse sur les méthodes de Monte Carlo séquentielles faite dans ce paragraphe est issue des ouvrages de Doucet *et al.* [Dou01b], Ristic *et al.* [Ris04] et des documents de synthèse de Chen [Che03] et Davy [Dav06].

a) Echantillonnage d'importance

L'échantillonnage d'importance (*importance sampling*) consiste à utiliser une autre densité de probabilité, appelée densité d'importance et satisfaisant certaines conditions, afin de générer les échantillons $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$, appelés par la suite "particules". Soit $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ une densité de probabilité simple telle que $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$ quand $p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) > 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h] &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \\ &= \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) w(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \end{aligned}$$

L'échantillonnage d'importance permet d'approcher la distribution $\Pr(d\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ par la distribution empirique

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t})$$

avec

- $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \sim \pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$, $i = 1 \dots N$,
- $\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}$
- $\sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} = 1$

L'algorithme 1.1 résume les 3 étapes de l'échantillonnage d'importance pour approcher $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$.

Algorithme 1.1 Echantillonnage d'importance pour approcher $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})}[h]$

- **Etape 1.1.1** Générer $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$ selon $\pi(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$ pour $i = 1, \dots, N$
 - **Etape 1.1.2** Calculer les poids $\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}{\pi(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}|\mathbf{z}_{1:t})}$ pour $i = 1, \dots, N$
 - **Etape 1.1.3** Calculer $\hat{\mu}_N = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)})$
-

Exemple 1.1 On cherche à obtenir une approximation empirique de $p(x) = 0.6 \times \mathcal{N}(x; 2, 1) + 0.4 \times \mathcal{N}(x; -2, 1)$. La densité d'importance choisie est $\pi(x) = \mathcal{N}(x; 0, 4)$. On considère $N = 20$ échantillons $\tilde{x}^{(i)}$ distribués selon π . La figure 1.3 représente la densité à approcher p , la densité d'importance π ainsi que l'approximation de cette densité par un ensemble de points pondérés.

b) Échantillonnage d'importance séquentiel

On souhaite calculer la densité *a posteriori* de façon séquentielle. On rappelle sa formulation récurrente

$$p(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t|\mathbf{z}_{1:t-1})} \quad (1.23)$$

Afin d'appliquer séquentiellement l'algorithme d'échantillonnage d'importance, il faut définir une formulation récurrente de la densité d'importance complète $\pi_t(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t})$. On note $q_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{z}_j)$ la densité d'importance qui permet d'étendre les particules de l'instant $j-1$ à l'instant j . Celle-ci s'exprime à partir de la densité d'importance complète par

$$\begin{aligned} \pi_t(\mathbf{x}_{0:t}|\mathbf{z}_{1:t}) &= \pi_{t-1}(\mathbf{x}_{0:t-1}|\mathbf{z}_{1:t-1}) q_t(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t) \\ &= \pi_0(\mathbf{x}_0) \prod_{j=1}^t q_j(\mathbf{x}_j|\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{z}_j) \end{aligned}$$

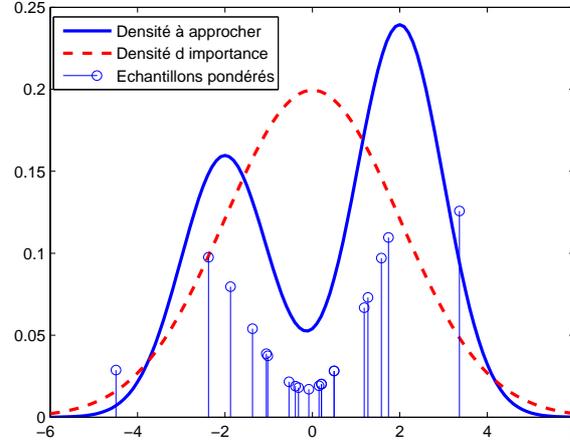


FIG. 1.3 – Echantillonnage d'importance. La densité $p(x) = 0.6 \times \mathcal{N}(x; 2, 1) + 0.4 \times \mathcal{N}(x; -2, 1)$ est approchée par la distribution empirique $P_N(dx) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{x}^{(i)}}(dx)$ avec $N = 20$ particules, $\tilde{x}^{(i)} \sim \pi(x)$, $\tilde{w}^{(i)} = \frac{p(\tilde{x}^{(i)})}{\pi(\tilde{x}^{(i)})}$ et $\pi(x) = \mathcal{N}(x; 0, 4)$.

Au temps t , les poids sont donnés par

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^{(i)} &= \frac{p(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{z}_{1:t})}{\pi_t(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} | \mathbf{z}_{1:t})} \\ &= \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}) q_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \end{aligned}$$

soit

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)})}{q_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \quad (1.24)$$

Il n'est pas nécessaire de connaître la constante de normalisation $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})$, identique pour chaque échantillon. Afin d'obtenir $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$, les poids sont normalisés avec $\tilde{w}_t^{(i)} \leftarrow \tilde{w}_t^{(i)} / \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)}$.

Dans l'algorithme d'échantillonnage d'importance séquentiel (*sequential importance sampling*), les particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$ se propagent au cours du temps à l'aide de la densité d'importance q_t , et les poids se calculent de façon récursive. La propagation augmente la dimension du vecteur d'état ($\mathbf{x}_{0:t-1} \rightarrow \mathbf{x}_{0:t}$), et le poids $\tilde{w}_t^{(i)}$ s'applique à la trajectoire complète $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$.

La valeur de l'intégrale $\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t})} [h] = \int_{\mathcal{X}^{t+1}} h(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}$ est approchée par

$$\mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t})} [h] \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} h(\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}) \quad (1.25)$$

L'estimée MMSE est donc approchée par

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \quad (1.26)$$

c) Dégénérescence des poids et rééchantillonnage

Une limitation connue de l'échantillonnage d'importance séquentiel est que la variance des poids augmente au cours du temps : après plusieurs itérations, un faible nombre de particules a un poids très important et les particules pondérées ne représentent plus fidèlement la distribution *a posteriori*. On dit alors que les particules dégèrent. Afin de résoudre ce problème, on applique une procédure dite de rééchantillonnage, telle que

- les particules de poids fort sont dupliquées (avec un poids $\frac{1}{N}$),
- les particules de poids faible sont détruites.

En pratique, le rééchantillonnage est effectué lorsque

$$N_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_t^{(i)})^2} \leq \eta \quad (1.27)$$

avec η un seuil à définir. La valeur N_{eff} est liée à la variance empirique des poids [Kon94]. Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, le nombre de fils de chaque particule $n_{\text{fils}}^{(i)}$ est tiré aléatoirement de telle sorte que [Kit96]

$$\mathbb{E}_{p(n_{\text{fils}}^{(i)})} [n_{\text{fils}}^{(i)}] = N \tilde{w}_t^{(i)} \text{ avec } \sum_{i=1}^N n_{\text{fils}}^{(i)} = N$$

Après rééchantillonnage, les particules sont notées $\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}$, avec $w_t^{(i)} = \frac{1}{N}$. En pratique, par la suite, on choisira la valeur $\eta = 0.8N$.

d) Densité d'importance optimale

Afin de limiter le rééchantillonnage, il est nécessaire de choisir la densité d'importance qui minimise la variance des poids à chaque instant. La densité d'importance qui minimise la variance des poids, conditionnellement aux observations $\mathbf{z}_{1:t}$ et aux états passés $\mathbf{x}_{0:t-1}$ est

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$$

Cependant, en général, on ne sait pas échantillonner selon $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$ et/ou calculer les poids. Afin d'obtenir une bonne efficacité du filtre, il faut donc choisir une densité d'importance $q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$ simple, mais aussi proche que possible de la densité optimale.

e) Algorithme de filtrage particulaire

L'algorithme général d'échantillonnage d'importance et de rééchantillonnage séquentiels (*Sequential Importance Sampling and Resampling*, SISR), appelé dans la littérature filtre particulaire (*particle filter*), est donné par l'algorithme 1.2.

Algorithme 1.2 Filtre particulaire générique

- Etape 1.2.1 Initialisation

- Pour $i = 1, \dots, N$, faire
 - Générer $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim \pi_0(\mathbf{x}_0)$
 - Calculer le poids initial $w_0^{(i)} = \frac{p(\mathbf{x}_0^{(i)})}{\pi_0(\mathbf{x}_0^{(i)})}$
- Calculer $W_0 = \sum_{i=1}^N w_0^{(i)}$
- Pour $i = 1, \dots, N$, faire $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{w_0^{(i)}}{W_0}$

- Etape 1.2.2 Itérations

- Pour $t = 1, 2, \dots$ faire
 - Pour $i = 1, \dots, N$ faire
 - % Prolongation des trajectoires
 - Générer $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$ selon $q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Mettre à jour les poids récursifs selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{q_t(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)}$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$,

- % Rééchantillonnage

- Calculer $N_{\text{eff}} = \left[\sum_{i=1}^N \left(\tilde{w}_t^{(i)} \right)^2 \right]^{-1}$
 - Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, copier les particules de poids élevé et détruire les particules de poids faible pour obtenir N nouvelles particules, notées sans $\tilde{\cdot}$. Les nouveaux poids sont $w_t^{(i)} = \frac{1}{N}$.
 - Sinon, renommer les particules sans $\tilde{\cdot}$.
-

f) Choix de la densité d'importance

Le choix de la densité d'importance $q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}_t)$ est de première importance dans les algorithmes de filtrage particulaire. Une mauvaise loi va faire explorer des zones de faible probabilité par un grand nombre de particules, diminuant nettement l'efficacité du filtre. Il est cependant nécessaire de trouver un compromis entre facilité de programmation (il n'est en général pas possible de générer des échantillons selon la loi optimale) et optimalité de la loi (une mauvaise loi va aboutir à des rééchantillonnages très fréquents). Les principaux choix possibles sont listés ci-dessous, mais

ne constituent pas une description exhaustive. La densité d'importance peut également être basée sur n'importe quelle heuristique permettant d'approcher la densité d'importance optimale.

- Loi d'évolution de l'état

La loi choisie comme densité d'importance pour les particules est la loi d'évolution de l'état

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

Dans ce cas-là, les poids sont simplement mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$$

Le filtre particulaire prend dans ce cas le nom de filtre *bootstrap*. Il a l'avantage d'être facile à programmer, mais comme il ne tient pas compte de la nouvelle observation, il est souvent peu efficace, conduisant à une variance élevée des poids.

- Densité optimale

La densité d'importance retenue est ici la loi optimale

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$$

Cette loi a l'avantage d'être optimale. Il faut cependant être capable d'échantillonner selon cette loi et de calculer

$$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) d\mathbf{x}_t$$

car les poids sont mis à jour par

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$$

- Pas de filtre de Kalman étendu (ou sans parfum)

On fait pour chaque particule un pas de filtre de Kalman étendu (ou sans parfum)

$$q_t(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, \Sigma_{t|t}^{(i)})$$

$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}$ et $\Sigma_{t|t}^{(i)}$ sont la moyenne et matrice de covariance données par un pas de filtre Kalman étendu (ou sans parfum) en prenant comme statistiques au temps précédent $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)} = \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}$ et $\Sigma_{t-1|t-1}^{(i)} = 0$. Ces lois permettent d'approcher par une densité de probabilité gaussienne la densité d'importance optimale, par linéarisation locale pour le pas d'EKF, par utilisation de la transformée sans parfum pour l'UKF. Ces lois sont efficaces, mais assez coûteuses à mettre en oeuvre en termes de nombre d'opérations, car un pas de filtre de Kalman est réalisé pour chaque particule à chaque instant t .

1.3.3 Markov Chain Monte Carlo

Les grandes lignes des méthodes MCMC sont données ici, basées sur la synthèse de Davy [Dav06]. On pourra se référer au livre de Robert [Rob99] pour un détail de l'ensemble des techniques. Les méthodes MCMC sont un ensemble de méthodes permettant d'échantillonner selon une distribution de probabilité p donnée, en se basant sur la construction d'un chaîne de Markov $\{\theta^{(i)}\}_{i=1..N}$ telle que la série $\{\theta^{(i)}\}_{i=1..N}$ est asymptotiquement distribuée selon $p(\theta)$.

Le principe des algorithmes MCMC est d'échantillonner les $\theta^{(i)}$ de façon itérative, en se basant sur

- un échantillon initial $\theta^{(0)} \sim p_0(\theta)$,
- un noyau de Markov $\mathcal{K}(\theta|\theta')$, qui est une densité de probabilité selon θ (pour θ' fixé).

Le noyau de transition $\mathcal{K}(\theta|\theta')$ doit vérifier certaines propriétés [Rob99]; il doit en particulier être construit de telle façon que $p(\theta)$ est la distribution d'invariance de $\mathcal{K}(\theta|\theta')$, soit

$$\int_{\Theta} \mathcal{K}(\theta|\theta')p(\theta')d\theta' = p(\theta), \forall \theta \in \Theta$$

La densité de probabilité de chaque échantillon aléatoire $\theta^{(i)}$ converge lentement vers la distribution $p(\cdot)$ comme i augmente. L'algorithme MCMC générique est défini selon l'algorithme 1.3.

Algorithme 1.3 Algorithme MCMC générique

- **Etape 1.3.1 Initialisation**
Echantillonner $\theta^{(0)} \sim p_0(\theta)$
 - **Etape 1.3.2 Itérations**
Pour $i = 1, 2, \dots, N$, échantillonner $\theta^{(i)} \sim \mathcal{K}(\theta|\theta^{(i-1)})$
-

En pratique, il est nécessaire de lancer plusieurs itérations "de chauffe" avant d'atteindre la convergence.

Deux algorithmes permettent l'élaboration facile de noyaux de Markov :

- l'algorithme de Gibbs, basé sur un échantillonnage conditionnel,
- l'algorithme de Métropolis-Hastings, basé sur un algorithme d'accord-rejet.

a) Echantillonnage de Gibbs

Supposons que l'on souhaite échantillonner une chaîne de Markov selon une loi $p(\theta)$ où la variable aléatoire $\theta \in \Theta$ peut s'écrire sous la forme $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]$, les θ_k , $k = 1, \dots, p$, pouvant être scalaires ou vectoriels. De plus, on suppose qu'il est possible d'échantillonner selon les densités conditionnelles $p(\theta_1|\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_p)$, $p(\theta_2|\theta_1, \theta_3, \dots, \theta_p)$, ..., $p(\theta_p|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})$. L'échantillonneur de Gibbs consiste à échantillonner un composant θ_k à la fois à partir des densités conditionnelles, ce qui donne l'algorithme 1.4 suivant.

Algorithme 1.4 Echantillonneur de Gibbs générique

• **Etape 1.4.1 Initialisation**Echantillonner $\theta^{(0)} \sim p_0(\theta)$ • **Etape 1.4.2 Itérations**Pour $i = 1, 2, \dots, N$ faire– Pour $k = 1, \dots, p$, échantillonner $\theta_k^{(i)} \sim p(\theta_k | \theta_{-k}^{(i)})$ avec $\theta_{-k}^{(i)} = \{\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{k-1}^{(i)}, \theta_{k+1}^{(i-1)}, \dots, \theta_p^{(i-1)}\}$

L'un des problèmes principaux consiste à savoir au bout de combien d'itérations on peut stopper l'algorithme. Pour un diagnostic de convergence, on peut se rapporter aux travaux de Raftery [Raf95, Raf92], ou à la synthèse de Cowles [Cow96].

b) Algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme de Metropolis-Hastings [Has70] repose sur la définition d'une loi candidate $q(\theta|\theta')$ selon laquelle on est capable d'échantillonner directement et telle que $q(\theta|\theta') \neq 0$ si $p(\theta) \neq 0$, c'est-à-dire telle que le support de la loi candidate contient celui de la loi cible. L'algorithme 1.5 synthétise les étapes de l'échantillonnage par Metropolis-Hastings.

Algorithme 1.5 Algorithme de Metropolis-Hastings générique

• **Etape 1.5.1 Initialisation**Echantillonner $\theta^{(0)} \sim p_0(\theta)$ • **Etape 1.5.2 Itérations**Pour $i = 1, 2, \dots, N$ faire– Echantillonner une valeur candidate $\theta^* \sim q(\theta|\theta^{(i-1)})$

– Calculer

$$\rho(\theta^*, \theta^{(i-1)}) = \min \left(1, \frac{p(\theta^*)}{p(\theta^{(i-1)})} \frac{q(\theta^{(i-1)}|\theta^*)}{q(\theta^*|\theta^{(i-1)})} \right)$$

– Avec la probabilité $\rho(\theta^*, \theta^{(i-1)})$ accepter le candidat, i.e. faire $\theta^{(i)} \leftarrow \theta^*$ – Sinon, rejeter le candidat, i.e. faire $\theta^{(i)} \leftarrow \theta^{(i-1)}$

Remarque 1.2 La densité de probabilité $p(\theta)$ apparaît dans la formule d'acceptance $\rho(\theta^*, \theta^{(i-1)})$ sous la forme d'un rapport. Son expression peut donc n'être connue qu'à une constante près, ce qui est souvent le cas lorsque l'on calcule la densité a posteriori à l'aide du théorème de Bayes.

1.4 Modèles à saut

Dans le paragraphe 1.1 ont été définis les modèles d'évolution et de mesure constituant le modèle statistique de base. Des algorithmes déterministes et de Monte Carlo ont ensuite été présentés dans les paragraphes 1.2 et 1.3 pour réaliser l'inférence bayésienne pour ce type de modèles. Le modèle constitué des équations (1.13) et (1.14) est ici étendu en considérant qu'il est possible de commuter d'un modèle statistique à un autre suivant la valeur d'une variable indicatrice discrète. Un algorithme de Monte Carlo séquentiel est ensuite exposé afin de réaliser l'inférence bayésienne avec ces modèles à saut.

1.4.1 Définitions

Un modèle à équation d'état à saut (*Switching State-Space Model*) est un modèle pouvant commuter d'un modèle statistique à un autre suivant la valeur d'une variable indicatrice discrète indiquant le modèle choisi. Ce type de modèles sera appelé simplement modèle à saut par la suite. Les modèles à saut ont de nombreuses applications en poursuite de cibles [Dou02b, Sär04], télécommunications [Che00b, Wan02b], détection de défaillances [Fre02, Ver04, Flo05], géoscience [Baz05] et traitement de l'image [Wu03].

Un modèle à saut est composé

- d'une variable indicatrice $c_t = 1 \dots d$ discrète (où d est le nombre de modèles différents) qui pilote le choix des modèles statistiques d'évolution et de mesure,
- d'une banque de d modèles d'évolution et de mesure $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, c_t)$ et $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, c_t)$ pour $c_t = 1 \dots d$.

La figure 1.4 représente un modèle à saut sous la forme d'un modèle graphique.

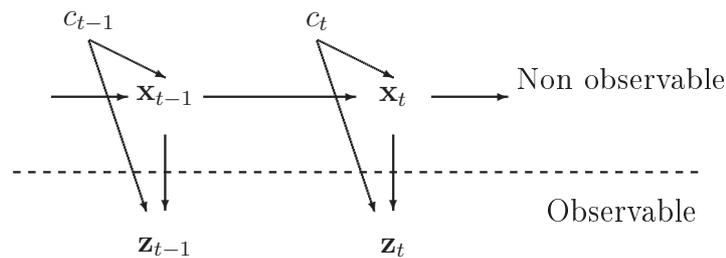


FIG. 1.4 – Modèle de Markov caché à saut. Une variable indicatrice discrète c_t pilote le choix du modèle d'évolution markovien $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, c_t)$ et du modèle de mesure $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, c_t)$

Le but de l'inférence bayésienne pour ces systèmes est de calculer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ ou sa marginale $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ pour l'estimation en ligne, et

la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:T}, \mathbf{c}_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T})$ pour l'estimation hors ligne, à partir de la connaissance

- des observations \mathbf{z}_t
- des lois d'observations $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, c_t)$
- des lois d'évolution de l'état $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, c_t)$
- de la loi d'évolution de la variable discrète $\Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1})$

Il existe différents types de modèles à sauts avec des appellations différentes dans la littérature, suivant

- le modèle statistique appliqué à la variable indicatrice c_t ,
- la classe des modèles d'évolution et de mesure associés aux densités de probabilité $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, c_t)$ et $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, c_t)$.

Les variables $\{c_t\}$ peuvent être considérées comme

1. Indépendantes avec une distribution *a priori* (connue ou inconnue) $\Pr_0(c_t)$. Dans ce cas-là, $\Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) = \Pr_0(c_t)$.
2. Définissant une chaîne de Markov de noyau de transition $\Pr(c_t | c_{t-1})$, connu ou inconnu. Dans ce cas-là, $\Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) = \Pr(c_t | c_{t-1})$. La variable c_t étant discrète, le noyau de transition est défini par une matrice de dimension $d \times d$.

Le deuxième modèle est connu dans la littérature sous le nom de modèle à saut de Markov (*Jump Markov System*, JMS).

1.4.2 Système conditionnellement linéaire gaussien

a) Introduction

Dans le cas où les modèles $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, c_t)$ et $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, c_t)$ peuvent s'écrire sous la forme des modèles linéaires gaussiens (1.15) et (1.16), on parle de système dynamique conditionnellement linéaire (*Conditionnally Linear Dynamic System*, CLDS). Dans le cas où la transition de la variable latente est en plus markovienne, on parle de système linéaire à saut de Markov (*Jump Markov Linear System*, JMLS). De nombreux algorithmes ont été développés pour ces derniers modèles [Ack70, Aka77, Tug82]. Un modèle CLDS peut s'écrire sous la forme des équations (1.15) et (1.16)

$$c_t \sim \Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) \quad (1.28a)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t(c_{t+1})\mathbf{x}_t + C_t(c_{t+1})\mathbf{u}_t + G_t(c_{t+1})\mathbf{v}_t \quad (1.28b)$$

$$\mathbf{z}_t = H_t(c_t)\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (1.28c)$$

où \mathbf{x}_t est le vecteur d'état à l'instant t , \mathbf{v}_t est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance connue Q_t , \mathbf{u}_t est une entrée connue, $F_t(c_{t+1})$ est la matrice d'évolution de l'état, $C_t(c_{t+1})$ est la matrice de transition de l'entrée et $G_t(c_{t+1})$ est la matrice de transition du bruit, \mathbf{z}_t est l'observation réalisée au temps t , \mathbf{w}_t est un bruit blanc gaussien de matrice de covariance connue R_t et $H_t(c_t)$ est la matrice d'observation.

On cherche à estimer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$, ou sa marginale $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$. Cette densité peut s'écrire selon le mélange de densités de probabilités suivant

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{\mathbf{c}_{1:t} \in \{1, \dots, d\}^t} p(\mathbf{x}_t | \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}) \Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) \quad (1.29)$$

Cependant, le nombre de termes du mélange augmente de façon exponentielle avec le temps. De ce fait, il est nécessaire de recourir à des approximations. Le système étant linéaire et gaussien conditionnellement à c_t , la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t})$ est une densité gaussienne de moyenne $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}(\mathbf{c}_{1:t})$ et de matrice de covariance $\Sigma_{t|t}(\mathbf{c}_{1:t})$ calculées à l'aide des équations du filtre de Kalman. La densité $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$ est donc un mélange de d^t densités gaussiennes. La densité *a posteriori* marginale $\Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ s'exprime quant à elle de façon récurrente

$$\Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) \propto \Pr(\mathbf{c}_{1:t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\mathbf{z}_t | c_t, \mathbf{c}_{1:t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1}) \Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1})$$

Afin d'éviter la complexité exponentielle au cours du temps, des techniques déterministes non-optimales ont été développées. Ces méthodes sont basées sur des approximations par des mélanges de gaussiennes, comme l'algorithme *Interacting Multiple Model* [Blo88, Maz98] (IMM) ou les algorithmes *Generalized Pseudo-Bayes* [Bar95] (GPB). L'algorithme *Generalized Pseudo-Bayes 1* (GPB1) calcule à chaque instant le mélange composé des d (d^2 pour GPB2) densités gaussiennes suivant les valeurs possibles de la valeur indicatrice c_t (c_{t-1} et c_t pour GPB2) et approche alors ce mélange par la gaussienne ayant la même moyenne et covariance que ce mélange. L'algorithme *Interacting Multiple Model Kalman Filter* (IMMKF) est conceptuellement identique au GPB2 mais ne nécessite que d filtres en parallèle. Ces méthodes non optimales ont été formulées pour des modèles conditionnellement linéaires et gaussiens, mais peuvent être étendues de façon triviale à des modèles non linéaires en utilisant les approximations de l'EKF et de l'UKF. Ces méthodes sont peu coûteuses en temps de calcul mais peuvent aboutir à des estimées erronées dans des situations difficiles.

Une autre approche consiste à utiliser les méthodes de Monte Carlo, qui permettent d'aboutir à des estimées plus consistantes. Pour l'estimation en ligne, un filtre particulière dédié à ce problème est présenté dans le paragraphe suivant.

b) Filtre particulière rao-blackwellisé

Si le modèle est linéaire gaussien pour une partie des variables d'état, on peut décomposer le problème en deux sous-problèmes dont l'un sera traité par filtrage de Kalman (linéaire gaussien) et l'autre par filtrage particulière [Dou00, Gus02, Nor01]. Ceci permet de réduire la variance de l'erreur, car une partie du problème est résolue de façon optimale. L'algorithme 1.6 page 33 est présenté pour une variable indicatrice sans structure statistique donnée. De nombreux algorithmes de filtrage particulière

ont été définis dans le cas de *Jump Markov Systems* [And03, Dou02a, Jil04] ou de *Jump Markov Linear Systems* [Dou01c, Che00a].

On considère le modèle statistique défini par l'équation (1.28). On cherche à estimer la densité *a posteriori*

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}) \Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$$

La densité $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}(\mathbf{c}_{1:t}), \Sigma_{t|t}(\mathbf{c}_{1:t}))$ peut se calculer analytiquement de façon récurrente à l'aide d'un filtre de Kalman. La distribution $\Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ va être approchée par la distribution empirique

$$P_N(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}}(\mathbf{c}_{1:t})$$

L'algorithme de filtrage particulaire rao-blackwellisé est donné par l'algorithme 1.6 page ci-contre. $\Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ s'exprime de façon récurrente par

$$\Pr(\mathbf{c}_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \Pr(\mathbf{c}_{1:t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{c}_{1:t}) \Pr(c_t | \mathbf{c}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})}$$

avec $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{c}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_t; \hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\mathbf{c}_{1:t}), S_t(\mathbf{c}_{1:t}))$, $\hat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\mathbf{c}_{1:t}) = H_t(c_t)(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}(\mathbf{c}_{1:t}))$ et $S_t(\mathbf{c}_{1:t}) = H_t(c_t)\Sigma_{t|t-1}(\mathbf{c}_{1:t})H_t(c_t)^T + R_t$.

Remarque 1.3 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{c}_{1:t})$ ne se simplifie pas par $p(\mathbf{z}_t | c_t)$ car on ne conditionne pas par rapport à \mathbf{x}_t .

La densité marginale $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$ est donc elle aussi approchée par la densité empirique

$$\begin{aligned} p_N(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) &= \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}) \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}}(\mathbf{c}_{1:t}) \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} p(\mathbf{x}_t | \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t}) \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}), \Sigma_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)})) \end{aligned}$$

soit un mélange de N densités gaussiennes. L'estimée MMSE de \mathbf{x}_t est donnée par (moyenne d'un mélange de gaussiennes [Bar01])

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}) \quad (1.30)$$

Algorithme 1.6 Algorithme de Monte Carlo séquentiel rao-blackwellisé• Etape 1.6.1 Initialisation– Pour $i = 1 \dots N$, faire $(\widehat{\mathbf{x}}_{0|0}, \Sigma_{0|0}) = (\mathbf{x}_0, \Sigma_0)$ – Pour $i = 1 \dots N$, faire $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$ • Etape 1.6.2 ItérationsPour $t = 1, 2, \dots$ faire– Pour $i = 1, \dots, N$ faire

% Prolongation des trajectoires

– Générer $\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}$ selon $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)})$ – Calculer $(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)}), \Sigma_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)}), \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)}), \Sigma_{t|t-1}(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)}))$
à l'aide d'un pas de filtre de Kalman

– Mettre à jour les poids récursifs selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto \tilde{w}_{t-1}^{(i)} \frac{\mathcal{N}(\mathbf{z}_t; \widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)}), S_t(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)})) p(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \mathbf{c}_{1:t-1}^{(i)})}$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$.

% Rééchantillonnage

– Calculer $N_{\text{eff}} = \left[\sum_{i=1}^N (\tilde{w}_t^{(i)})^2 \right]^{-1}$ – Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, copier les particules de poids élevé et détruire les particules de poids faible pour obtenir N nouvelles particules, notées sans $\tilde{\cdot}$. Les nouveaux poids sont $w_t^{(i)} = \frac{1}{N}$.– Sinon, renommer les particules sans $\tilde{\cdot}$.

de matrice de covariance

$$\Sigma_{t|t} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \left[\Sigma_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}) + (\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t})(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \right] \quad (1.31)$$

Remarque 1.4 On ne donne ici qu'un cas particulier du filtre particulaire rao-blackwellisé, qui correspond à notre problématique. Le filtre particulaire rao-blackwellisé peut être utilisé de façon générale lorsqu'une partie du vecteur d'état, à domaine de valeur discret ou continu, peut être intégré analytiquement [Dou00].

Pour l'estimation hors ligne, un algorithme itératif optimal basé sur un échantillonnage de Gibbs et une récursion *backward-forward* a été développé par Doucet et Andrieu [Dou01a], à partir des travaux de Carter et Kohn [Car96]. Une version modifiée de cet algorithme sera introduite dans le chapitre 5.

CHAPITRE 2

Filtrage particulière pour la fusion de capteurs à modèles d'observation multiples

2.1 Problématique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le filtrage statistique bayésien a pour but de calculer la densité de probabilité *a posteriori* d'un vecteur d'état $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}$ à partir de mesures obtenues séquentiellement. Ce calcul repose sur la connaissance d'une densité d'évolution de l'état $\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$, que nous supposons pouvoir être formulée sous la forme d'un modèle à équation d'état

$$\mathbf{x}_t = f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_{t-1}) \tag{2.1}$$

où f_t est une fonction non linéaire et \mathbf{v}_t est un bruit blanc.

Pour des problèmes complexes, impliquant un état pouvant être de dimension importante, un capteur unique ne permet généralement pas d'aboutir à une précision suffisante lors de l'estimation du vecteur \mathbf{x}_t . Il est dans ce cas nécessaire de réaliser la fusion de plusieurs observations $\mathbf{z}_{k,t}$ ($k = 1, \dots, n$) délivrées par n capteurs. Chaque observation est reliée à l'état \mathbf{x}_t par une loi de probabilité $p(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$.

Les capteurs délivrant des observations sont généralement considérés comme étant dans leur état nominal de fonctionnement, c'est-à-dire qu'une loi d'observation nominale $p_{k,1}(\mathbf{z}_{k,t}|\mathbf{x}_t)$ est définie pour chaque capteur $k = 1, \dots, n$. Par exemple, la loi d'observation d'une caméra peut être déterminée pour un jour lumineux et non brumeux. Cependant, dans des contextes réalistes, les conditions de fonctionnement des capteurs peuvent changer, avec pour conséquence une loi d'observation qui est différente de la loi nominale. Ceci peut par exemple apparaître du fait de changements dans l'environnement extérieur au capteur, ou d'une dégradation de celui-ci. Dans le cas de la caméra, la relation statistique entre l'état \mathbf{x}_t et une observation $\mathbf{z}_{k,t}$

($k = 1, \dots, n$) peut subir des changements au cours de la journée, dus par exemple au brouillard, à la poussière ou au crépuscule. Dans de tels cas, il est nécessaire de détecter que le capteur n'est plus dans son état nominal de fonctionnement et, dans la mesure du possible, identifier le bon état de fonctionnement de chaque capteur afin d'éviter de larges erreurs d'estimation de l'état.

2.1.1 Exposé du problème

Afin de résoudre le problème précédemment décrit, on fait l'hypothèse que chaque capteur peut commuter entre différents états de fonctionnement. On définit pour cela un modèle à saut ayant des caractéristiques propres au contexte étudié, le modèle à saut générique ayant été présenté au paragraphe 1.4. Les états de fonctionnement sont indiqués par des variables discrètes $c_{k,t}$, où la convention $c_{k,t} \in \{0, \dots, d_k\}$ pour $k = 1, \dots, n$ est adoptée.

Dans la suite de ce chapitre, on se référera aux variables $c_{k,t}$ sous les appellations *variables latentes*, ou *états du capteur*. Le modèle d'observation est déterminé par la valeur de $c_{k,t}$. De façon plus précise, pour chaque capteur $k = 1, \dots, n$, il y a d_k modèles d'observation possibles, définis pour un état de capteur $c_{k,t} \in \{1, \dots, d_k\}$ par

$$\mathbf{z}_{k,t} = h_{k,c_{k,t},t}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{k,c_{k,t},t} \quad (2.2)$$

où $h_{k,c_{k,t},t}$ et $\mathbf{w}_{k,c_{k,t},t}$ sont respectivement la fonction non linéaire d'observation et le bruit d'observation du modèle d'observation $c_{k,t}$ du capteur k à l'instant t .

La convention suivante est adoptée pour la définition des variables latentes $c_{k,t}$:

$$\begin{cases} c_{k,t} = 0 & \text{si le capteur } k \text{ est dans un état de dysfonctionnement} \\ c_{k,t} = 1 & \text{si le capteur } k \text{ est dans son état nominal de fonctionnement} \\ c_{k,t} = j, j \in \{2, \dots, d_k\} & \text{si le capteur } k \text{ est dans son } j^{\text{ème}} \text{ état de fonctionnement} \end{cases}$$

Un capteur dans son état nominal de fonctionnement correspond à $c_{k,t} = 1$. Quand un capteur est en état de dysfonctionnement ($c_{k,t} = 0$), l'observation $\mathbf{z}_{k,t}$ est statistiquement indépendant de \mathbf{x}_t et $\mathbf{z}_{k,t}$ suit une densité de probabilité vague $p_{k,0}(\mathbf{z}_{k,t})$. Dans le cas général, la loi d'observation jointe pour l'ensemble des n capteurs s'écrit de façon compacte

$$\mathbf{z}_t \sim p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t) \quad (2.3)$$

où

$$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t) = \prod_{k=1}^n p(\mathbf{z}_{k,t} | \mathbf{x}_t, c_{k,t}) \quad (2.4)$$

et

$$p(\mathbf{z}_{k,t} | \mathbf{x}_t, c_{k,t}) = \delta_0(c_{k,t}) p_{k,0}(\mathbf{z}_{k,t}) + \sum_{j=1}^{d_k} \delta_j(c_{k,t}) p_{k,j}(\mathbf{z}_{k,t} | \mathbf{x}_t) \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{z}_t = \{\mathbf{z}_{1,t}, \dots, \mathbf{z}_{n,t}\}$, $\mathbf{c}_t = \{c_{1,t}, \dots, c_{n,t}\}$ et $\delta_j(i) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Afin de réaliser l'estimation dans un cadre bayésien, il reste à définir les probabilités *a priori* des variables latentes $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$). La probabilité *a priori* que $c_{k,t}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soit dans un état donné j ($j = 0, \dots, d_k$) est notée $\alpha_{k,j,t}$. Les $\alpha_{k,j,t}$ représentent la confiance que l'on a dans le fait qu'un capteur soit dans un état donné,

$$\Pr(c_{k,t} = j) = \alpha_{k,j,t}, \quad 0 \leq j \leq d_k \quad (2.6)$$

où $\alpha_{k,j,t} \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t} = 1$.

Soit $\boldsymbol{\alpha}_t$ le vecteur composé des $\alpha_{k,j,t}$ pour $k = 1, \dots, n$, et $j = 0, \dots, d_k$. Ces variables de confiance sont, en pratique, assez difficiles à définir *a priori*, car les conditions extérieures affectant le comportement des capteurs peuvent changer de façon rapide et inattendue. Nous proposons donc d'estimer également ces valeurs en les définissant comme des variables aléatoires. On définit pour cela le modèle d'évolution markovien suivant pour le vecteur de probabilités $\boldsymbol{\alpha}_t$

$$\boldsymbol{\alpha}_t \sim p(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}) \quad (2.7)$$

La loi $p(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1})$ doit être définie de telle façon que les $\alpha_{k,j,t}$ soient des probabilités pour tout t , c'est-à-dire $\alpha_{k,j,t} \geq 0$ pour $j = 0, \dots, d_k$, et $\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t} = 1$ pour chaque capteur k .

2.1.2 Objectifs d'estimation

Conformément à ce que nous avons vu au chapitre 1, notre objectif, dans le cadre de l'inférence bayésienne, est d'estimer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \boldsymbol{\alpha}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ avec un intérêt particulier pour la densité *a posteriori* marginale $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$. En général, $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$ a une forme très complexe et ne peut être calculée de façon analytique. Les méthodes de Monte Carlo séquentielles [Gor93, Dou00, Dou01b] fournissent une approximation numérique de cette densité à l'aide d'un ensemble d'échantillons aléatoires pondérés. De façon plus précise, les particules $\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}$ et $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}$, de poids $\tilde{w}_t^{(i)}$, approchent la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \boldsymbol{\alpha}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ grâce à la distribution empirique $P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, d\mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t})$

$$P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, d\mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{0:t}^{(i)}}(d\mathbf{x}_{0:t}, d\mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}) \quad (2.8)$$

Cette distribution empirique peut être utilisée afin de calculer les estimées bayésiennes du vecteur d'état $\mathbf{x}_{0:t}$, comme par exemple l'estimée MMSE

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \boldsymbol{\alpha}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t})} [\mathbf{x}_{0:t}] &= \int \mathbf{x}_{0:t} p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \boldsymbol{\alpha}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) d\{\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \boldsymbol{\alpha}_{0:t}\} \\ &\simeq \int \mathbf{x}_{0:t} P_N(d\mathbf{x}_{0:t}, d\mathbf{c}_{1:t}, d\boldsymbol{\alpha}_{0:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1.3 Contributions principales de ce chapitre

Ce chapitre apporte plusieurs contributions [Car05a, Car06b]. Tout d'abord, dans le paragraphe 2.2, le cadre général est présenté, et les modèles statistiques définis de façon précise. Ensuite, le modèle à états de capteurs commutant présenté plus haut est complètement spécifié, et une famille d'algorithmes de filtrage particulière définis spécialement pour ce modèle est présentée. En particulier, des lois d'importance efficaces pour l'état \mathbf{x}_t , les variables latentes \mathbf{c}_t et les probabilités $\boldsymbol{\alpha}_t$ sont introduites. Enfin, on considère de façon précise le cas où les capteurs délivrent leurs données de façon asynchrone. En effet, en pratique, il se peut que les capteurs aient des périodes d'échantillonnage ou une horloge différente, et les observations sont collectées à différents instants par les différents capteurs. Des cas particuliers importants sont également discutés :

- Etats de fonctionnement binaire valide/invalidé. Dans la plupart des cas, les utilisateurs ne disposent que d'un modèle d'observation pour le capteur, correspondant aux spécifications de celui-ci dans son état de fonctionnement nominal. Le problème concerne alors la détection de défaillances de ce capteur. Dans ce cas, la variable latente du capteur k est binaire, i.e., $c_{k,t} \in \{0, 1\}$ pour tout t .
- Un algorithme rao-blackwellisé [Dou01b] est proposé, dans le cas où les équations d'évolution de l'état et d'observation sont linéaires à bruit additif gaussien conditionnellement à la variable latente $c_{k,t}$. Ceci permet d'appliquer facilement l'algorithme de détection de défaillances aux systèmes basés sur le filtre de Kalman déjà existants.
- Le cas de modèles d'observation dont la variance du bruit saute entre différentes valeurs est également étudié, c'est-à-dire lorsque les statistiques du bruit additif $w_{k,j,t}$ commutent entre différentes valeurs, tandis que la fonction d'observation $h_{k,j,t} = h_{k,t}$ reste identique. Ces changements de caractéristiques du bruit peuvent être dues par exemple à des conditions extérieures apportant du bruit supplémentaire.

Dans le paragraphe 2.4, les connections entre notre approche d'une part et les modèles à lois *a priori* fixées et *Jump Markov (Linear) Systems* d'autre part sont étudiées ainsi que les différences et l'intérêt de notre modèle par rapport à ces approches déjà existantes. Des simulations concernant deux exemples académiques ont été réalisées sur des données synthétiques, dans lesquelles les capteurs ont deux ou trois états de fonctionnement incluant le mode défaillant. Elles sont présentées afin d'illustrer les performances de l'algorithme. Des comparaisons avec les modèles à saut à lois *a priori* fixée et les modèles à saut de Markov (JMS) sont également réalisées. Dans le chapitre suivant, un exemple réel est étudié. Il concerne la localisation d'un véhicule terrestre où les capteurs délivrent l'angle de braquage, la vitesse du véhicule et la position GPS, celle-ci étant potentiellement corrompue à cause des effets de trajets multiples ou de masquage.

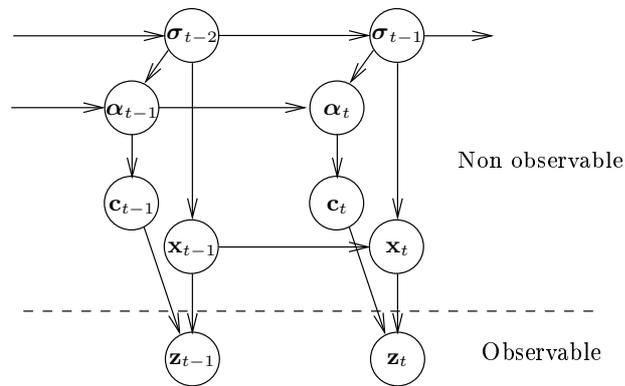


FIG. 2.1 – Modèle séquentiel bayésien pour la fusion multicapteur avec des modèles d'observation commutant. Le vecteur discret \mathbf{c}_t donne le modèle d'observation de chaque capteur, avec la probabilité *a priori* α_t . L'évolution de l'état caché \mathbf{x}_t et de α_t est réglée par l'hyperparamètre σ_t qui évolue également selon un processus de Markov.

2.2 Modèle statistique proposé

Dans ce paragraphe sont présentés les détails du modèle statistique à saut. De plus, un modèle d'évolution pour les probabilités α_t est explicitement donné. Les paramètres à estimer sont essentiellement le vecteur d'état \mathbf{x}_t et les variables discrètes \mathbf{c}_t . On se propose d'appliquer les équations du filtrage bayésien séquentiel à ces paramètres, sur la base des modèles suivants (résumés sous la forme graphique sur la figure 2.1)

$$\mathbf{x}_t \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \sigma_{t-1}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}_t \sim \Pr(\mathbf{c}_t | \alpha_t) \quad (2.11)$$

$$\alpha_t \sim p(\alpha_t | \alpha_{t-1}, \sigma_{t-1}) \quad (2.12)$$

$$\sigma_t \sim p(\sigma_t | \sigma_{t-1}) \quad (2.13)$$

avec

- $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \sigma_{t-1})$ est le modèle d'évolution de l'état, défini par l'équation (2.1) pour $t = 1, 2, \dots$. A l'instant 0, on suppose que $\mathbf{x}_0 \sim p_0(\mathbf{x}_0)$.

- $\Pr(\mathbf{c}_t | \alpha_t)$ est la probabilité *a priori* des variables latentes $c_{k,t}$, $k = 1, \dots, n$. Elle est définie par

$$\Pr(\mathbf{c}_t | \alpha_t) = \prod_{k=1}^n \Pr(c_{k,t} | \alpha_{k,t}) \quad (2.14)$$

avec

$$\Pr(c_{k,t} | \alpha_{k,t}) = \sum_{j=0}^{d_k} \delta_j(c_{k,t}) \alpha_{k,j,t} \quad (2.15)$$

où $\boldsymbol{\alpha}_{k,t} = \{\alpha_{k,0,t} \dots \alpha_{k,d_k,t}\}$. Le choix des probabilités $\alpha_{k,j,t}$ est très important pour l'estimation correcte des états de fonctionnement des capteurs. De plus, les $\alpha_{k,j,t}$ peuvent évoluer au cours du temps, car la fiabilité d'un capteur diminue lorsque celui-ci vieillit par exemple. En conséquence, ces probabilités sont considérées comme des paramètres inconnus avec un modèle d'évolution markovien, et sont également estimées. Le vecteur $\boldsymbol{\alpha}_{k,t}$ étant un vecteur de probabilités, on fait le choix pour le modèle d'évolution d'une distribution de Dirichlet, celle-ci permettant de définir une distribution sur un vecteur de probabilités.

- Le modèle d'évolution $p(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}, \boldsymbol{\sigma}_{t-1})$ pour $\boldsymbol{\alpha}_t$ est une distribution de Dirichlet pour chaque capteur $k = 1, \dots, n$

$$(\alpha_{k,0,t}, \dots, \alpha_{k,d_k,t}) \sim \mathcal{D}(\sigma_{k,t-1}^\alpha \alpha_{k,0,t-1}, \dots, \sigma_{k,t-1}^\alpha \alpha_{k,d_k,t-1}) \quad (2.16)$$

où $\sigma_{k,t-1}^\alpha$ est un coefficient spécifique à chaque capteur qui ajuste la variance des $\alpha_{k,j,t}$'s. La définition d'une distribution de Dirichlet est rappelée ici pour un ensemble de variables aléatoires $(b_0, \dots, b_p) \sim \mathcal{D}(a_0, \dots, a_p)$

$$\mathcal{D}(a_0, \dots, a_p) = \frac{\Gamma(\sum_{l=0}^p a_l)}{\prod_{l=0}^p \Gamma(a_l)} \prod_{l=0}^p b_l^{a_l-1} \delta_1\left(\sum_{l=0}^p b_l\right) \quad (2.17)$$

Les caractéristiques principales d'une distribution de Dirichlet ainsi que l'influence de ses paramètres sont rappelés en annexe B.6. Dans le cas particulier $c_{k,t} \in \{0, 1\}$ ($d_k = 1$), la distribution de Dirichlet se réduit à une distribution beta.

A l'instant $t = 0$, il est supposé que $\alpha_{k,0} \sim p_0(\alpha_{k,0})$. Le coefficient $\sigma_{k,t-1}^\alpha$ règle l'évolution de $\alpha_{k,t}$. Afin d'éviter de définir une valeur fixée pour $\sigma_{k,t-1}^\alpha$ (et donc une dynamique fixée pour $\alpha_{k,t}$) ce coefficient est également estimé, comme expliqué ci-dessous.

- $p(\boldsymbol{\sigma}_t | \boldsymbol{\sigma}_{t-1})$ est l'équation de transition de l'hyperparamètre. Dans de nombreux problèmes, il est supposé que le bruit d'évolution \mathbf{v}_t est gaussien. Dans ce cas, il est supposé que chaque composante scalaire de \mathbf{v}_t a une variance $(\sigma_t^v)^2$. Comme ces variances ont une influence importante sur le comportement du filtre bayésien, il peut être important de les considérer comme inconnues. Pour chacune de ces variances, le modèle d'évolution peut être défini par [And03]

$$\log(\sigma_t^v) = \log(\sigma_{t-1}^v) + \lambda^v \quad (2.18)$$

où λ^v est un bruit blanc gaussien centré de variance fixée et connue. Andrieu *et al.* [And03] ont montré que l'utilisation de tels modèles améliore la robustesse de l'estimation¹. Ce modèle peut également être appliqué à l'hyperparamètre

¹D'autres modèles d'évolution, basés par exemple sur une loi normale tronquée pourraient également être définis. Le modèle d'évolution défini ici a l'avantage d'être un modèle à bruit additif gaussien, modèle généralement plus simple à manipuler.

qui règle l'évolution de α_t , noté $\sigma_{k,t}^\alpha$ ci-dessus. Le raccourci $\sigma_t = \{\sigma_t^v, \sigma_{k,t}^\alpha | k = 1, \dots, n\}$ représente l'ensemble de tous les hyperparamètres. Dans la suite, les hyperparamètres σ_t^v sont supposés connus et fixés et $\sigma_t = \{\sigma_{k,t}^\alpha | k = 1, \dots, n\}$.

Le modèle défini ci-dessus permet, en théorie, l'estimation de l'état augmenté composé du vecteur d'état \mathbf{x}_t , des variables latentes \mathbf{c}_t , des coefficients de fiabilité α_t et des hyperparamètres σ_t . Dans le cas général, il n'est pas possible de calculer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \alpha_{0:t}, \sigma_{0:t-1} | \mathbf{z}_{1:t})$ de façon analytique. Les filtres particuliers [Dou01b] sont largement utilisés et fournissent l'approche la plus convaincante pour résoudre de tels problèmes. Dans le paragraphe suivant, plusieurs algorithmes de filtrage particulière pour des mesures de capteurs synchrones/asynchrones ainsi que pour des cas particuliers importants sont présentés.

2.3 Algorithmes de filtrage particulière pour modèles d'observation multiples

Dans ce paragraphe sont présentés plusieurs algorithmes pour modèles d'observation multiples. Les cas de capteurs synchrones et asynchrones sont respectivement étudiés aux paragraphes 2.3.1 et 2.3.2, où des algorithmes sont donnés pour chaque cas. Dans le paragraphe 2.3.3, des lois d'importance sont présentées, certaines pour le modèle général et d'autres pour les cas spéciaux a) cas binaire capteur valide/invalidé ($c_{k,t} \in \{0, 1\}$), b) système conditionnellement linéaire à bruits additifs Gaussiens c) sauts dans la variance du bruit d'observation.

2.3.1 Algorithme particulière pour capteurs synchrones

Dans certains cas, les mesures délivrées par les n capteurs sont synchrones, i.e. tous les capteurs ont la même fréquence d'échantillonnage et les observations arrivent en même temps. L'algorithme correspondant est l'algorithme 2.1 page suivante.

Les particules sont propagées au cours du temps à l'aide de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t, \mathbf{c}_t, \alpha_t, \sigma_{t-1} | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_{t-1}, \alpha_{t-1}, \sigma_{t-2}, \mathbf{z}_t)$. Cette densité jointe est égale au produit des densités d'importances $q(\sigma_{t-1} | \alpha_t, \alpha_{t-1}, \sigma_{t-2})$, $q(\alpha_t | \mathbf{c}_t, \alpha_{t-1}, \sigma_{t-2})$, $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{c}_t, \mathbf{z}_t)$ et $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \alpha_{t-1}, \mathbf{z}_t)$, en appliquant les règles des probabilités conditionnelles et en considérant les indépendances entre les différentes variables. Les variables peuvent donc être échantillonnées une par une selon ces quatre densités d'importance, qui sont définies de façon précise dans le paragraphe 2.3.3. Les détails du calcul du poids sont donnés en annexe D.1.

2.3.2 Algorithme particulière pour capteurs asynchrones

Dans de nombreux cas, les capteurs sont équipés de dispositifs d'échantillonnage n'ayant ni la même fréquence d'échantillonnage ni la même horloge. De ce fait, les

Algorithme 2.1 Filtre particulaire pour la fusion de capteurs à classes de fonctionnement multiples – Cas synchrone

• **Etape 2.1.1 Initialisation**

- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p_0(\mathbf{x}_0)$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\boldsymbol{\sigma}_0^{(i)} \sim p_0(\boldsymbol{\sigma}_0)$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\boldsymbol{\alpha}_0^{(i)} \sim p_0(\boldsymbol{\alpha}_0)$
- Définir les poids initiaux $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• **Etape 2.1.2 Itérations**

- Pour $t=1,2,\dots$ faire
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, faire
 - Echantillonner la variable d'état du capteur $\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Echantillonner le vecteur d'état $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Echantillonner les probabilités $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} \sim q(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)})$
 - Echantillonner le vecteur des hyperparamètres $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} \sim q(\boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)})$
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^{(i)} &\propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t) q(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \\ &\times \frac{p(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}) p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)})}{q(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}) q(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)})} \end{aligned} \quad (2.19)$$

- Normaliser les poids de telle façon que $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$

% **Rééchantillonnage**

- Calculer N_{eff} selon l'équation (1.27) et réaliser le rééchantillonnage des particules si $N_{\text{eff}} < \eta$
-

mesures délivrées par chaque capteur sont disponibles à des temps différents. Ceci nécessite un algorithme de filtrage particulaire spécifique qui est présenté ci-dessous.

Le principe de l'algorithme 2.2 est assez proche de celui de l'algorithme 2.1. Dans celui-là, cependant, le vecteur d'état \mathbf{x}_t est mis à jour à chaque fois qu'une nouvelle information arrive d'un des capteurs. En pratique, l'algorithme 2.2 sera plus généralement utilisé car de nombreux capteurs récents sont constitués d'une unité d'échantillonnage et de prétraitement des données.

Les distributions d'importance utilisées dans les algorithmes 2.2 et 2.1 sont décrites dans le paragraphe 2.3.3.

Algorithme 2.2 Filtre particulaire pour la fusion de capteurs à classes de fonctionnement multiples – Cas asynchrone

• **Etape 2.2.1 : Initialisation**

– Cette étape est similaire à l'étape 2.1.1 de l'algorithme 2.1.

• **Etape 2.2.2 : Itérations**

– Pour $t=1,2,\dots$ faire

– Attendre l'arrivée d'une nouvelle mesure $\mathbf{z}_{k,t}$, délivrée par le capteur k , $k = 1, \dots, n$ et, pour les particules $i = 1, \dots, N$, faire

– Echantillonner l'état du capteur k selon $\tilde{c}_{k,t}^{(i)} \sim q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$

– Echantillonner le vecteur d'état $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$

– Echantillonner les probabilités $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)} \sim q(\boldsymbol{\alpha}_{k,t} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \tilde{\sigma}_{k,t-2}^{\alpha(i)})$ pour le capteur k

– Echantillonner les hyperparamètres d'intérêt $\tilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)} \sim q(\sigma_{k,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)})$

– Pour les particules $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} & \frac{p(\mathbf{z}_{k,t} | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{c}_{k,t}^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_{k,t}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) q(\tilde{c}_{k,t}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})} \\ & \times \frac{p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)}) p(\tilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)})}{q(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}) q(\tilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{k,t}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)})} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Normaliser les poids tels que $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$

% **Rééchantillonnage**

– Calculer N_{eff} selon l'équation (1.27) et réaliser le rééchantillonnage des particules si $N_{\text{eff}} < \eta$

2.3.3 Distributions d'importance

Dans les algorithmes 2.1 et 2.2, les particules sont propagées de l'instant $t-1$ à l'instant t avec les densités d'importance $q(\cdot)$. Nous avons défini une fonction d'importance pour chacune des variables, donc pour $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$, $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$, $q(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)})$ et $q(\boldsymbol{\sigma}_{t-1} | \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)})$. Leur choix est de grande importance pour l'efficacité du filtre particulaire [Dou00]. Le choix de la distribution d'importance du vecteur d'état $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ n'est pas spécifique à notre cadre, i.e. elle peut être déterminée parmi les choix standards [Dou00, Dou01b] : la loi d'importance optimale $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$, ou des approximations de celle-ci obtenues en appliquant un pas de filtre de Kalman étendu/sans parfum [Dou00, Mer00].

Le choix de la distribution d'importance $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ est crucial et spécifique à notre modèle. Une première remarque est que le nombre de valeurs possibles

du vecteur \mathbf{c}_t est $\prod_{k=1}^n (1 + d_k)$, et tester chaque combinaison possible n'est pas réaliste.

Pour une efficacité optimale, il est nécessaire que la distribution $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ propose les configurations les plus probables, c'est-à-dire, les états de fonctionnement $c_{k,t}$ les plus probables pour chaque capteur k , $k = 1, \dots, n$. Comme les capteurs changent d'état indépendamment les uns des autres, cette distribution d'importance s'écrit sous la forme

$$q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) = \prod_{k=1}^n q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) \quad (2.21)$$

où les distributions d'importance individuelles $q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$ sont aussi utilisées dans l'algorithme 2.2. La distribution d'importance optimale est $q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) = \Pr(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$, définie par

$$\Pr(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) = \frac{\alpha_{k,c_{k,t},t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_{k,t} | c_{k,t}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{\sum_{j=0}^{d_k} \alpha_{k,j,t-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_{k,t} | j, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})} \quad (2.22)$$

Comme cette distribution d'importance optimale ne peut être calculée de façon analytique, on utilise une approximation de cette distribution. En faisant un pas de filtre de Kalman étendu, les densités $p(\mathbf{z}_{k,t} | j, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$ pour $j = 0, \dots, d_k$ sont approchées par

$$p(\mathbf{z}_{k,t} | j, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) \simeq \mathcal{N}(h_{k,j,t}(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}), S_{k,j,t}^{(i)})$$

où $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} = f(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$ est la prédiction de l'état et $S_{k,j,t}^{(i)}$ est l'approximation de la matrice de covariance de l'innovation, définie par

$$S_{k,j,t}^{(i)} = \nabla h_{k,j,t}^{(i)} Q_{t-1}^{(i)} \nabla h_{k,j,t}^{(i)T} + R_{k,j,t}^{(i)}$$

où $R_{k,j,t}^{(i)}$ est la matrice de covariance du bruit additif $\mathbf{w}_{k,j,t}^{(i)}$ pour le capteur k et la particule i , $Q_{t-1}^{(i)}$ est la matrice de covariance du bruit d'évolution \mathbf{v}_{t-1} et

$$\nabla h_{k,j,t}^{(i)} = \left. \frac{\partial h_{k,j,t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}} \quad (2.23)$$

La distribution d'importance $q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$ est donc définie par

$$q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) \propto \begin{cases} \alpha_{k,c_{k,t},t-1}^{(i)} \mathcal{N}(h_{k,c_{k,t},t}(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}), S_{k,c_{k,t},t}^{(i)}) & \text{si } c_{k,t} = 1, \dots, d_k \\ \alpha_{k,0,t-1}^{(i)} p_0(\mathbf{z}_{k,t}) & \text{si } c_{k,t} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

On peut choisir pour $q(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)})$ la distribution d'importance optimale, c'est-à-dire celle qui minimise la variance des poids conditionnellement aux observations [Dou01b]. En effet, celle-ci peut être calculée analytiquement, et il est possible d'échantillonner directement selon cette loi.

Les distributions d'importance optimales $q(\boldsymbol{\alpha}_{k,t} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, c_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)})$ pour chaque capteur k sont données par

$$q(\boldsymbol{\alpha}_{k,t} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, c_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}) = \mathcal{D}(\sigma_{k,t-2}'^{\alpha(i)} \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}'^{(i)}) \quad (2.25)$$

où $\sigma_{k,t-2}'^{\alpha(i)} = \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)} + 1$ et $\boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}'^{(i)} = \frac{\sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}}{\sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)} + 1} \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)} + \frac{1}{\sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)} + 1} \delta_{c_{k,t}^{(i)}}(j)$ pour $j = 1, \dots, d_k$.

La démonstration de l'équation (2.25) est donnée en annexe D. Pour l'ensemble des capteurs,

$$q(\boldsymbol{\alpha}_t | \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_t^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{\alpha(i)}) = \prod_{k=1}^n q(\boldsymbol{\alpha}_{k,t} | \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, c_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}) \quad (2.26)$$

Pour les hyperparamètres $\sigma_{k,t-1}^{\alpha}$ la distribution d'importance est obtenue en appliquant la règle de Bayes

$$q(\log(\sigma_{k,t-1}^{\alpha}) | \boldsymbol{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}) \propto \mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha}_{k,t}^{(i)}; \sigma_{k,t-1}^{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}) \mathcal{N}(\log(\sigma_{k,t-1}^{\alpha}); \log(\sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}), \lambda^{\alpha}) \quad (2.27)$$

où la constante $I = \int \mathcal{D}(\boldsymbol{\alpha}_{k,t}^{(i)}; \sigma_{k,t-1}^{\alpha} \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}) \mathcal{N}(\log(\sigma_{k,t-1}^{\alpha}); \log(\sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}), \lambda^{\alpha}) d\sigma_{k,t-1}^{\alpha}$ peut être approchée par la transformée sans parfum (voir l'annexe C.2). On utilise ensuite un algorithme d'acceptation/rejet (voir l'annexe C.1) pour échantillonner selon cette densité.

2.3.4 Cas particuliers intéressants

Dans ce paragraphe sont présentés des détails supplémentaires pour trois cas particuliers qui ont une certaine importance dans les applications qui nous intéressent.

a) Etat de fonctionnement binaire valide/invalid

Le cas binaire où il n'y a que deux états valide/invalid pour le capteur est de grande importance. Par exemple, dans l'industrie chimique, les capteurs sont immergés dans des produits réactifs qui peuvent être corrosifs, rendant les capteurs susceptibles de fonctionner de façon anormale, et il est difficile de vérifier l'état de ces capteurs sur le site. Un autre exemple est celui des véhicules autonomes, pour lesquels il est nécessaire de vérifier l'information des capteurs leur parvenant afin d'éviter de larges erreurs d'estimation de l'état pouvant résulter dans des prises de décisions hasardeuses ou un accident du véhicule. Dans ce cas binaire, des choix spécifiques de distributions d'importance $q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$ et $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ sont présentés.

Dans le cas binaire, l'état du capteur peut être soit $j = 0$ ou $j = 1$. La distribution d'importance, $q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$ s'écrit

$$q(c_{k,t} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t}) \propto (1 - \alpha_{k,1,t-1}^{(i)}) p_0(\mathbf{z}_{k,t}) \delta_0(c_{k,t}) + \alpha_{k,1,t-1}^{(i)} \mathcal{N}(h_{k,1}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^{(i)}), S_{k,1,t}^{(i)}) \delta_1(c_{k,t}) \quad (2.28)$$

Une fois que $\tilde{\mathbf{c}}_{k,t}^{(i)}$ a été échantillonné dans l'algorithme 2.1 ou dans l'algorithme 2.2, l'état $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$ est échantillonné avec la loi d'importance $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$, qui est une distribution gaussienne dont la moyenne et la matrice de covariance sont données par le filtre de Kalman multicapteur, de la façon suivante : tout d'abord, calculer l'estimée

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{c}}_{k,t}^{(i)} K_{k,t}^{(i)} \boldsymbol{\nu}_{k,t}^{(i)} \quad (2.29)$$

où $\boldsymbol{\nu}_{k,t}^{(i)} = \mathbf{z}_{k,t} - h_{k,1,t}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)})$ et le gain de Kalman est

$$K_{k,t}^{(i)} = \Sigma_{t|t}^{(i)} \left(\nabla h_{k,1,t}^{(i)} \right)^T R_{k,1,t}^{(i)-1} \quad (2.30)$$

Enfin, calculer

$$\Sigma_{t|t}^{(i)} = \left[\Sigma_{t|t-1}^{-1} + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{c}}_{k,t}^{(i)} \left(\nabla h_{k,1,t}^{(i)} \right)^T R_{k,1,t}^{-1} \nabla h_{k,1,t}^{(i)} \right]^{-1} \quad (2.31)$$

et définir $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, \Sigma_{t|t}^{(i)})$. L'avantage de cette approche est que les quantités (moyenne et matrice de covariance) du filtre de Kalman étendu sont utilisées pour échantillonner à la fois $\tilde{\mathbf{c}}_{k,t}^{(i)}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}$, ce qui permet de gagner du temps de calcul. Les autres distributions d'importance sont les mêmes que celles présentées au paragraphe 2.3.3.

b) Modèle conditionnellement linéaire et gaussien

Un autre cas important est celui où le modèle, conditionnellement à la variable d'état du capteur \mathbf{c}_t est linéaire à bruits additifs gaussiens

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + G_t \mathbf{v}_t \quad (2.32)$$

$$\mathbf{z}_{k,t} = H_{k,j,t} \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_{k,j,t} \quad (2.33)$$

avec F_t la matrice d'évolution, G_t la matrice de transition du bruit d'état, \mathbf{v}_t un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance Q_t , $H_{k,j,t}$ la matrice d'observation pour le capteur k dans l'état j et $\mathbf{w}_{k,j,t}$ le bruit blanc gaussien de matrice de covariance $R_{k,j,t}$. Ce cas est intéressant lorsque l'on dispose déjà d'un filtre de Kalman qui utilise un état de capteur donné j , et que l'on souhaite ajouter des possibilités supplémentaires de détection de défaillance du capteur ou de changement d'état. L'algorithme correspondant met en place une banque de filtres de Kalman en interaction, connue sous les noms de filtre particulière rao-blackwellisé ou de filtre de Kalman à mélange, voir par exemple [Fre02, Sch05, Che00a, Nor01]. L'algorithme 2.3 est donné dans le cas asynchrone. Les distributions d'importance sont celles décrites au paragraphe 2.3.3.

Algorithme 2.3 Filtre particulaire rao-blackwellisé pour la fusion de capteurs à classes de fonctionnement multiples – cas asynchrone

• **Etape 2.3.1 Initialisation**

- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\widehat{\mathbf{x}}_{0|0}^{(i)} \sim p_0(\widehat{\mathbf{x}}_{0|0})$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\Sigma_{0|0}^{(i)} \sim p_0(\Sigma_{0|0})$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\sigma_0^{(i)} \sim p_0(\sigma_0)$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\alpha_0^{(i)} \sim p_0(\alpha_0)$
- Initialiser les poids $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• **Etape 2.3.2 Itérations**

- Pour $t=1,2,\dots$ faire
 - Attendre l'arrivée d'une nouvelle mesure $\mathbf{z}_{k,t}$, délivrée par le capteur k , $k = 1, \dots, n$ et, pour les particules $i = 1, \dots, N$, faire
 - Echantillonner la variable d'état du capteur $\widetilde{c}_{k,t}^{(i)} \sim q(c_{k,t} | \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$
 - Echantillonner les probabilités $\widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)} \sim q(\alpha_{k,t} | \alpha_{k,t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{k,t}^{(i)}, \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)})$
 - Echantillonner les hyperparamètres $\widetilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)} \sim q(\sigma_{k,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}, \widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)})$
 - Mettre à jour la moyenne et la matrice de covariance avec un pas de filtre de Kalman $(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, \Sigma_{t|t}^{(i)}) = \text{KF}(\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{k,t}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})$
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_t^{(i)} \propto & w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_{k,t} | \widetilde{c}_{1:t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\widetilde{c}_{k,t}^{(i)} | \widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)})}{q(\widetilde{c}_{k,t}^{(i)} | \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{k,t})} \\ & \times \frac{p(\widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)} | \alpha_{k,t-1}^{(i)}, \widetilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)}) p(\widetilde{\sigma}_{t-1}^{(i)} | \sigma_{t-2}^{(i)})}{q(\widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)} | \alpha_{k,t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{k,t}^{(i)}, \widetilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)}) q(\widetilde{\sigma}_{k,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{k,t-2}^{\alpha(i)}, \widetilde{\alpha}_{k,t}^{(i)}, \alpha_{k,t-1}^{(i)})} \end{aligned} \quad (2.34)$$

- Normaliser les poids tel que $\sum_{i=1}^N \widetilde{w}_t^{(i)} = 1$

% **Rééchantillonnage**

- Calculer N_{eff} comme dans l'équation (1.27) et rééchantillonner les particules si $N_{\text{eff}} < \eta$.
-

c) **Variance du bruit d'observation à valeurs fixés**

Un dernier cas important est celui où, pour un capteur donné k , la fonction d'observation $h_{k,j,t}$ (dans l'équation (2.2)) ne change pas, mais la distribution du bruit blanc additif peut commuter entre des distributions prédéfinies [Wu03]. Le bruit additif de la $j^{\text{ème}}$ densité est noté $\mathbf{w}_{k,j,t}$. On s'intéresse au cas où tous les $\mathbf{w}_{k,j,t}$, $j = 1, \dots, d_k$ sont centrés et monomodaux, avec différentes variances. De façon similaire aux cas ci-dessus, la distribution d'importance $q(\mathbf{c}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \alpha_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ peut être calculée à partir d'une approximation de la loi optimale en utilisant un pas d'EKF.

Une solution alternative consiste à définir un modèle d'évolution pour la variance de $\mathbf{w}_{k,t}$ sous l'état nominal $j = 1$. Cependant, cette solution ne permet pas de commuter entre des valeurs discrètes de variance. Une solution intéressante consiste à définir une borne supérieure à la valeur de cette variance et de commuter vers l'état $j = 0$ (détection de défaillance du capteur) si cette variance devient trop grande.

2.4 Discussion

Dans notre modèle, nous ne faisons pas l'hypothèse d'une transition markovienne pour la variable latente \mathbf{c}_t (comme c'est le cas pour les *Jump Markov (Linear) Systems*), mais pour sa probabilité *a priori* $\boldsymbol{\alpha}_t$. Avec ce modèle, on obtient

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{c}_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) &= \int p(\mathbf{c}_t, \boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) d\boldsymbol{\alpha}_t \\ &= \int \Pr(\mathbf{c}_t | \boldsymbol{\alpha}_t) p(\boldsymbol{\alpha}_t | \mathbf{c}_{1:t-1}) d\boldsymbol{\alpha}_t \end{aligned}$$

et, à travers $\boldsymbol{\alpha}_t$, \mathbf{c}_t est *a priori* dépendant de l'historique complet des états de fonctionnement précédents $\mathbf{c}_{1:t-1}$, ce qui est plus approprié pour le problème qui nous intéresse. Notre modèle introduit donc une mémoire sur les états de fonctionnement précédents des capteurs, plutôt que de simplement considérer le dernier état (dans le cas de JM(L)S), ou de les considérer indépendants (dans le cas de probabilités fixes). Cette mémoire est ajustée par les hyperparamètres $\sigma_{k,t}^\alpha$. En effet, ces hyperparamètres règlent la dynamique d'évolution des probabilités $\boldsymbol{\alpha}_{k,t}$ (cf. équation (2.16)). Une valeur élevée de $\sigma_{k,t}^\alpha$ implique une évolution faible des probabilités $\boldsymbol{\alpha}_{k,t}$ au cours du temps et donc une plus grande mémoire par rapport aux dernières valeurs $\mathbf{c}_{k,1:t}$. *A contrario*, une valeur faible de $\sigma_{k,t}^\alpha$ implique une évolution importante des probabilités $\boldsymbol{\alpha}_{k,t}$ d'un instant t à un instant $t + 1$ et donc un oubli rapide par rapport aux dernières valeurs $\mathbf{c}_{k,1:t}$. Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'on considère les défaillances des capteurs. Par exemple, en industrie chimique, la confiance dans un capteur va généralement diminuer au cours du temps en fonction de l'espérance de vie du capteur. Pour le positionnement d'un véhicule terrestre, la confiance dans le récepteur GPS doit diminuer si des erreurs sont intervenues récemment, car cela indique que le véhicule se trouve dans une zone propice aux phénomènes de trajets multiples (un canyon urbain par exemple). Notre approche est comparée avec des variables latentes définie à la fois de façon iid et markoviennes dans le paragraphe 2.5.

Hue et al. [Hue02] utilisent un modèle similaire pour le suivi et l'association mesures-cibles conjoints (*joint target tracking and data association*). Ils introduisent des probabilités d'association sur les variables latentes (les variables d'association de données dans [Hue02], qui sont le pendant de \mathbf{c}_t ici). Ces probabilités varient temporellement. Cependant, les probabilités d'association sont indépendantes d'un instant à l'autre, ce qui n'est pas adapté à notre contexte. De plus, dans [Hue02], un échantillonneur de Gibbs est utilisé pour mettre à jour ces quantités, tandis que

nous utilisons des distributions d'importance moins coûteuses en temps de calcul et efficaces, comme le montrent les simulations dans le paragraphe suivant.

2.5 Exemples illustratifs

Dans ce paragraphe sont présentées des simulations pour deux scénarios. Le premier concerne un modèle académique largement étudié, avec deux capteurs pouvant sauter d'un état de fonctionnement à un autre. Le deuxième exemple concerne un système conditionnellement linéaire gaussien où les deux capteurs sont potentiellement défaillants.

2.5.1 Premier exemple

On considère le modèle non linéaire suivant, tiré de [Dou01b, Aru02, Car92]

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + 25\frac{x_t}{1+x_t^2} + 8\cos(1, 2(t+1)) + v_t \quad (2.35)$$

où $v_t \sim \mathcal{N}(0, 10)$ et $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 10)$. Deux capteurs délivrent des observations. Le capteur #1 a deux états de fonctionnement valides et un état défaillant, donnés par les trois modèles d'observation suivants

$$z_{1,t} = \begin{cases} x_t + w_{1,0,t} & w_{1,0,t} \sim \mathcal{U}([-25, 25]) & \text{si } c_{1,t} = 0 \\ \frac{x_t^2}{20} + w_{1,1,t} & w_{1,1,t} \sim \mathcal{N}(0, 1) & \text{si } c_{1,t} = 1 \\ \frac{(x_t-10)^2}{20} + w_{1,2,t} & w_{1,2,t} \sim \mathcal{N}(0, 3) & \text{si } c_{1,t} = 2 \end{cases} \quad (2.36)$$

où $\mathcal{U}([a, b])$ est la densité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Le second capteur a un état de fonctionnement nominal et un état défaillant, correspondant aux modèles d'observation suivants

$$z_{2,t} = \begin{cases} x_t + w_{2,0,t} & w_{2,0,t} \sim \mathcal{U}([-25, 25]) & \text{si } c_{2,t} = 0 \\ x_t + w_{2,1,t} & w_{2,1,t} \sim \mathcal{N}(0, 2) & \text{si } c_{2,t} = 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Chacun des capteurs est donc considéré comme potentiellement défaillant. Les observations des capteurs #1 et #2 sont synchrones. L'algorithme 2.1 est appliqué pour 100 itérations avec $N = 500$ particules. On choisit comme distribution d'importance $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t)$ celle basée sur un pas de filtre de Kalman étendu. Le capteur #1 suit le deuxième modèle d'observation correspondant à l'équation (2.36) pour $t \in T_1 \cup T_2$ avec $T_1 = [10, 30]$ et $T_2 = [50, 70]$ et est défaillant pour $t \in T_4$ où $T_4 = [70, 80]$. Pendant les autres intervalles, le capteur #1 suit le premier modèle d'observation correspondant à l'équation (2.36). Le capteur #2 est défaillant pour $t \in T_3$ où $T_3 = [20, 50]$. Ces défaillances sont simulées en ajoutant un biais aléatoire distribué selon $\mathcal{U}([-20, 20])$ aux observations $z_{1,t}$ et $z_{2,t}$.

Dans les figures 2.2-2.6, ont été reportées les estimées MAP/MMSE à chaque instant t de $c_{1,t}$, $c_{2,t}$, $\mathbf{\alpha}_t$ et l'erreur e_t , où

$$e_t = x_t - \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} x_t^{(i)} \quad (2.38)$$

La déviation standard empirique utilisée pour calculer les bornes à 2-sigma dans les figures 2.5 et 2.9 est calculée par

$$\sigma_e = \sqrt{\sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \left(x_t^{(i)} - \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} x_t^{(i)} \right)^2} \quad (2.39)$$

Comme il apparaît sur les figures 2.2- 2.5, les états de fonctionnement des capteurs sont correctement estimés et l'erreur MMSE reste faible, grâce à la capacité de l'algorithme à sauter de façon précise d'un modèle d'observation à un autre.

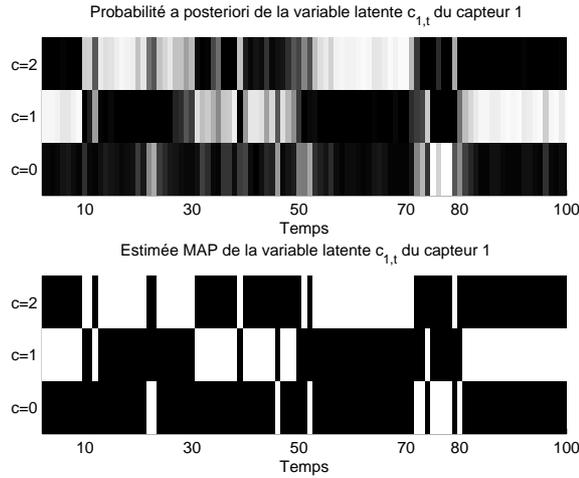


FIG. 2.2 – (Haut) Probabilité *a posteriori* de chaque état $c_{1,t} \in \{0, 1, 2\}$ pour chaque itération $t = 1, \dots, 100$ avec le modèle proposé. La couleur noire correspond à une probabilité égale à zéro, tandis que le blanc correspond à la probabilité un. (Bas) Estimée MAP de la variable latente $c_{1,t} \in \{0, 1, 2\}$ (blanc=état estimé). Durant les intervalles $T_1 = [10, 30]$ et $T_2 = [50, 80]$, l'état correct est $c_{1,t} = 2$, durant l'intervalle $T_4 = [70, 80]$ l'état correct est $c_{1,t} = 0$, et $c_{1,t} = 1$ pour les autres instants temporels. Les états du capteur sont correctement estimés.

Pour cet exemple particulier, notre approche a été comparée à un modèle pour lequel les probabilités *a priori* des \mathbf{c}_t sont supposées fixées et connues. Ces probabilités *a priori* sont choisies en fonction des fréquences relatives réelles des états sur

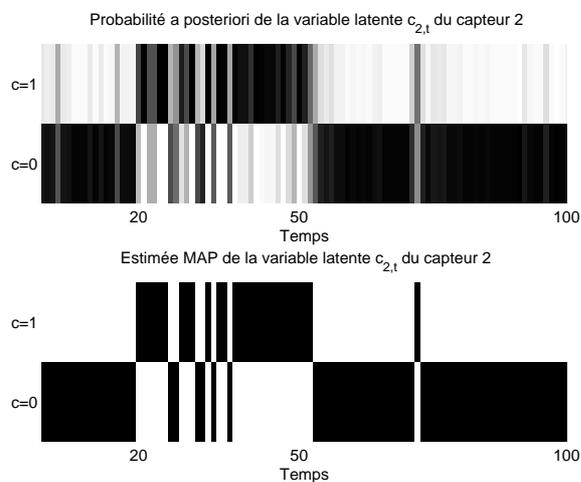


FIG. 2.3 – (Haut) Probabilité *a posteriori* de chaque état $c_{2,t} \in \{0, 1\}$ pour chaque itération $t = 1, \dots, 100$ avec le modèle proposé. La couleur noire correspond à une probabilité égale à zéro, tandis que le blanc correspond à la probabilité un. (Bas) Estimée MAP de la variable latente $c_{2,t} \in \{0, 1\}$ (blanc=état estimé). Durant l'intervalle $T_3 = [20, 50]$, le capteur est défaillant, et il est valide pour les autres instants temporels. Les états de fonctionnement du capteur sont correctement estimés.

l'intervalle $[0, 100]$, soit $\alpha'_1 = [0.1 \ 0.5 \ 0.4]$ et $\alpha'_2 = [0.3 \ 0.7]$ où

$$\Pr(c_{k,t} | \mathbf{c}_{k,1:t-1}) = \Pr(c_{k,t}) = \alpha'_k(c_{k,t} + 1)$$

où $\alpha'_k(j)$ est le j ème élément du vecteur α'_k . La distribution d'importance pour les $c_{k,t}$ reste la même que pour notre approche, sauf que les probabilités *a priori* sont fixés à α'_k . Les résultats de ce modèle pour la même simulation sont présentés dans les figures 2.7-2.9. Des simulations similaires ont été réalisées 500 fois. Elles montrent que notre méthode donne une erreur moyenne qui est 21% inférieure à celle obtenue avec une approche à probabilités *a priori* fixées.

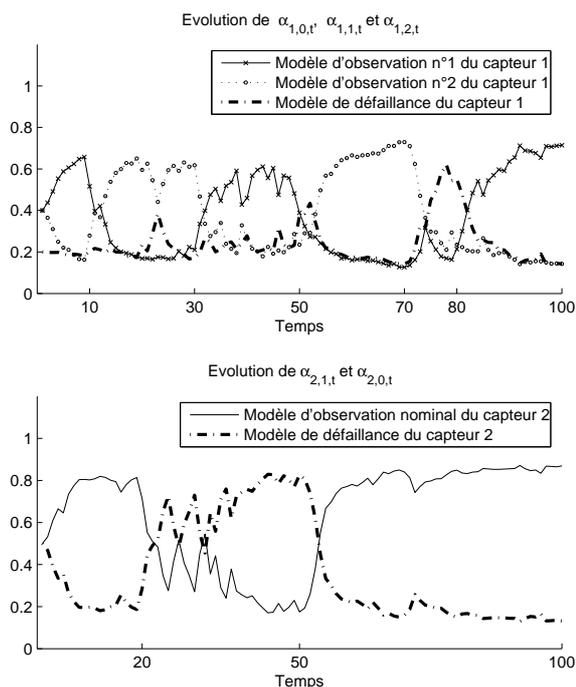


FIG. 2.4 – (Haut) Estimées MMSE de $\alpha_{1,0,t}$, $\alpha_{1,1,t}$ et $\alpha_{1,2,t}$. Pendant les intervalles $T_1 = [10, 30]$ et $T_2 = [50, 80]$, la confiance dans l'état 2 du capteur 1 (i.e. $\alpha_{1,2,t}$) augmente, tandis que $\alpha_{1,1,t}$ diminue. Le contraire se produit en dehors des intervalles T_1 , T_2 et T_4 . Les deux coefficients $\alpha_{1,1,t}$ et $\alpha_{1,1,t}$ diminuent pendant l'intervalle T_4 . Durant l'intervalle $T_3 = [20, 50]$, la valeur de $\alpha_{2,1,t}$ diminue car le capteur est considéré comme défaillant dans cet intervalle. Il augmente en dehors de T_3 , car le capteur est alors estimé valide. (Bas) Estimées MMSE de $\alpha_{2,0,t}$ et $\alpha_{2,1,t}$. Durant l'intervalle $T_3 = [20, 50]$, la valeur de $\alpha_{2,1,t}$ diminue car le capteur est estimé défaillant. Elle augmente en dehors de cet intervalle, le capteur étant alors estimé valide.

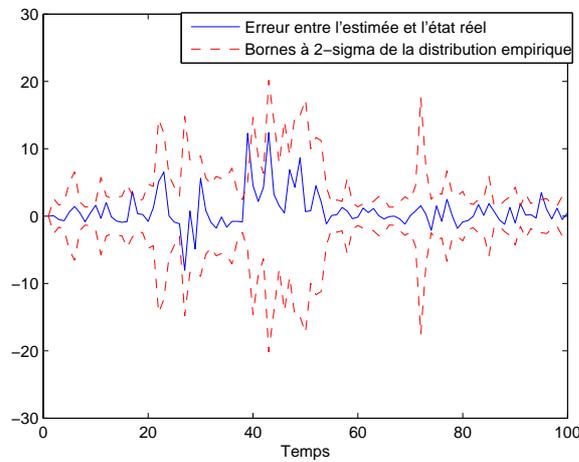


FIG. 2.5 – Evolution de l'erreur e_t calculée selon l'équation (2.38) (ligne pleine). En lignes en pointillé, les bornes à 2-sigma sont tracées. Celles-ci augmentent et diminuent en fonction du modèle d'observation utilisé pour réaliser l'estimation (certains sont plus informatifs que d'autres). En particulier, quand $t \in T_3 = [20, 50]$, le capteur 2 est estimé défaillant, et ne délivre donc plus d'information sur le vecteur d'état caché \mathbf{x}_t . Globalement, la précision de l'estimation est bonne, et l'erreur reste comprise entre les bornes à 2-sigma même lorsque des sauts de modèles d'observation apparaissent.

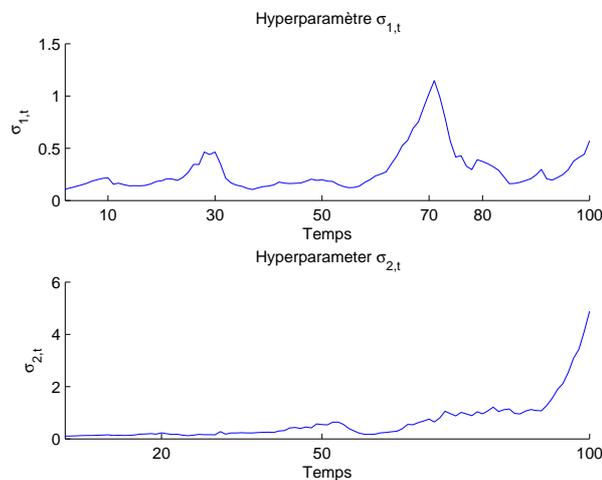


FIG. 2.6 – (Haut) Evolution de l’hyperparamètre $\sigma_{1,t}^\alpha$. Cet hyperparamètre règle la dynamique du coefficient de confiance $\alpha_{1,t}$. De façon plus précise, la valeur de $\sigma_{1,t}$ diminue aux instants $t=30, 50, 70, 80$, afin de permettre aux coefficients de fiabilité de changer rapidement. (Bas) Evolution de l’hyperparamètre $\sigma_{2,t}^\alpha$. Cet hyperparamètre règle la dynamique du coefficient de confiance $\alpha_{2,t}$.

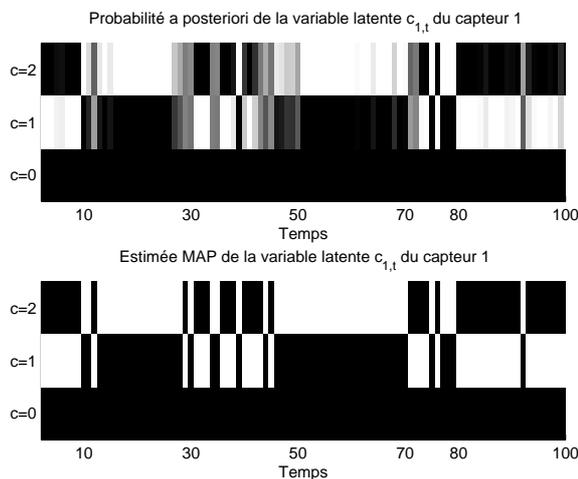


FIG. 2.7 – (Haut) Probabilité *a posteriori* de chaque état $c_{1,t} \in \{0, 1, 2\}$ pour chaque itération $t = 1, \dots, 100$ pour le modèle à probabilités *a priori* fixées. (Bas) Estimée MAP de la variable latente $c_{1,t} \in \{0, 1, 2\}$ (blanc=état estimé). Les états des capteurs sont estimés de façon moins précise, particulièrement lors de la défaillance du capteur ($c_{1,t} = 0$) pendant l’intervalle $T_4 = [70, 80]$.

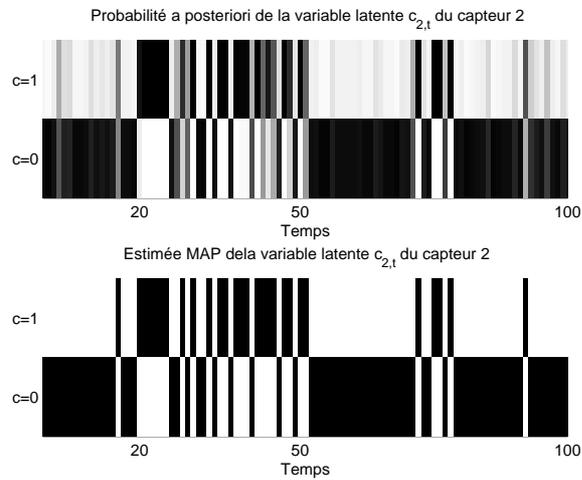


FIG. 2.8 – (Haut) Probabilité *a posteriori* de l'état $c_{2,t} \in \{0, 1\}$ pour chaque itération $t = 1, \dots, 100$ pour le modèle à probabilités *a priori* fixées. (Bas) Estimée MAP de la variable latente $c_{2,t} \in \{0, 1\}$ (blanc = état estimé). Pendant l'intervalle $T_3 = [20, 50]$, le capteur est défaillant, et il est valide le reste du temps. L'état du capteur est moins correctement estimé que pour notre approche.

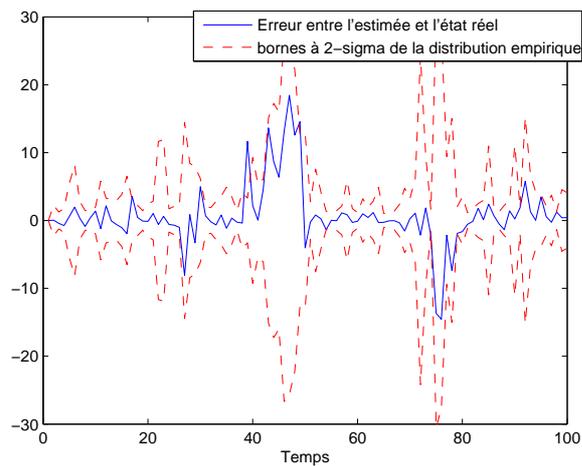


FIG. 2.9 – Evolution de l'erreur e_t calculée selon l'équation (2.38) (ligne pleine) pour le modèle à probabilités *a priori* fixées. En ligne en pointillé, les bornes à 2-sigma sont représentées. L'erreur moyenne est 20% supérieure à celle obtenue pour notre modèle.

2.5.2 Deuxième exemple

Considérons le modèle linéaire suivant [Bar01, Sch05]

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{bmatrix} \gamma_t \quad (2.40)$$

avec $\gamma_t \sim \mathcal{N}(0, 10)$ et $T = 0.1$ la période d'échantillonnage. Deux capteurs synchrones délivrent des observations, chacun ayant uniquement un modèle d'observation nominal

$$z_{1,t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + w_{1,t} \quad (2.41)$$

$$z_{2,t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + w_{2,t} \quad (2.42)$$

Les deux capteurs sont supposés potentiellement défaillants. Quand les capteurs sont dans leur état nominal de fonctionnement, on suppose que les bruits sont distribués selon les densités $w_{1,t} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ et $w_{2,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Quand ces capteurs sont défaillants, on suppose que les bruits sont distribués selon les densités vagues $w_{1,t} \sim \mathcal{N}(0, 100)$ et $w_{2,t} \sim \mathcal{N}(0, 100)$. Le système est, conditionnellement aux variables latentes, linéaire à bruits additifs gaussiens, et l'on peut donc appliquer l'algorithme rao-blackwellisé similaire à l'algorithme 2.3, dans le cas synchrone, cependant.

Les défaillances des capteurs #1 et #2 ont été simulées selon 2 modèles markoviens² définis par les deux matrices de transition $\Pi_{[0,100]} = \begin{bmatrix} .85 & .15 \\ .15 & .85 \end{bmatrix}$ sur l'intervalle $T_1 = [0, 100]$ et $\Pi_{[100,200]} = \begin{bmatrix} .15 & .85 \\ .85 & .15 \end{bmatrix}$ sur l'intervalle $T_2 = [100, 200]$, où

$$\Pr(c_{k,t} = j | c_{k,t-1} = i) = \pi_{i+1,j+1}$$

avec $\Pi = (\pi_{i,j})$. L'algorithme est lancé sur 200 itérations avec $N = 500$ particules. La figure 2.10 montre l'évolution des deux composantes $\mathbf{x}_t(1)$ et $\mathbf{x}_t(2)$ de \mathbf{x}_t , ainsi que les observations $z_1(t)$ et $z_2(t)$. Les estimées MAP/MMSE de \mathbf{c}_t , $\boldsymbol{\alpha}_t$ et $\boldsymbol{\sigma}_t$ sont données dans les figures 2.11–2.13, où les erreurs de position et de vitesse sont définies par l'équation (2.38) pour chaque composante du vecteur \mathbf{x}_t .

Comme on peut le voir, les états des capteurs ainsi que l'état \mathbf{x}_t sont estimés de façon très précise, en dépit de défaillances de ces capteurs. Des simulations réalisées avec les mêmes observations et un modèle standard (c'est-à-dire le même modèle que dans les équations (2.40)–(2.42), sans définir un état de fonctionnement défaillant) montrent une erreur d'estimation beaucoup plus importante à chaque fois que le capteur délivre des données erronées (par souci, de brièveté, ces simulations n'ont été reportées ici ; voir également les résultats du chapitre suivant).

²Les défaillances sont simulées dans ce deuxième exemple suivant un modèle de Markov afin d'effectuer une comparaison pertinente avec un modèle de Markov à saut.

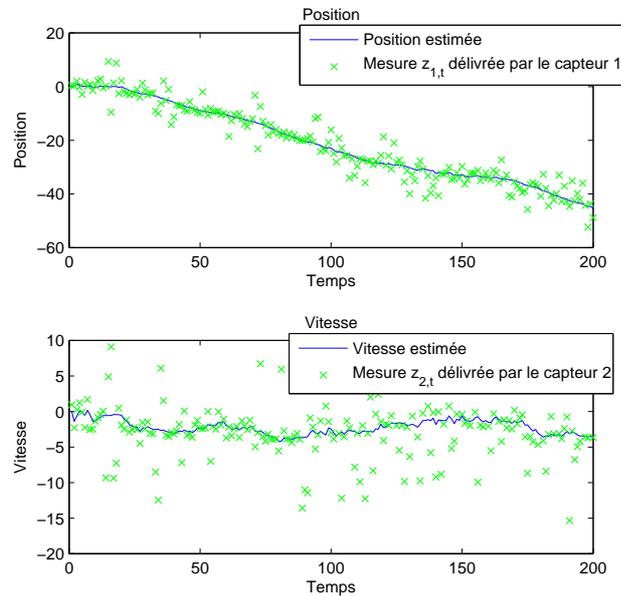


FIG. 2.10 – (Haut) Evolution de l'estimée MMSE de la première composante $\mathbf{x}_t(1)$ de \mathbf{x}_t ainsi que l'observation $z_1(t)$ délivrée par le capteur #1. (Bas) Evolution de l'estimée MMSE de la deuxième composante $\mathbf{x}_t(2)$ de \mathbf{x}_t ainsi que l'observation $z_2(t)$ délivrée par le capteur #2.

Notre modèle a été comparé avec un JMLS. La matrice de transition de ce JMLS est fixée à $\Pi = \Pi_{[0,100]} = \begin{bmatrix} .85 & .15 \\ .15 & .85 \end{bmatrix}$. L'algorithme utilisé est le filtre particulaire rao-blackwellisé optimal développé par Doucet et al. [Dou01c]. Des simulations similaires ont été réalisées 500 fois et les erreurs de position absolues moyennes sont données dans la table 2.1 pour chaque modèle.

TAB. 2.1 – Comparaison du modèle à saut proposé avec un JMLS

Modèle/Intervalle	T_1	T_2	$T_1 \cup T_2$
Moyenne de la valeur abs. de l'erreur de notre modèle	0.6767	0.6241	0.6504
Moyenne de la valeur abs. de l'erreur du JMLS	0.6149	0.7870	0.7070
Amélioration	-10.05%	20.70%	7.21%

Le modèle JMLS fournit de meilleurs résultats sur le premier intervalle où les variables indicatrices sont échantillonnées selon la matrice de transition fixée Π . Ceci était attendu car les données sont générées exactement selon le modèle d'évolution utilisé pour l'estimation. Cependant, sur le second intervalle T_2 , notre modèle donne de bien meilleures performances que le JMLS, bien que celui-ci ne définisse pas de

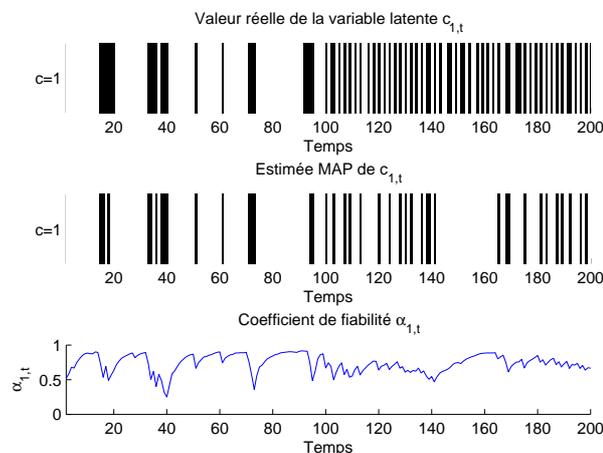


FIG. 2.11 – (Haut) Etat de fonctionnement réel $c_{1,t}$. Son évolution suit un modèle de Markov selon la matrice de transition $\Pi_{[0,100]}$ sur l'intervalle $T_1 = [0, 100]$ et $\Pi_{[100,200]}$ sur l'intervalle $T_2 = [100, 200]$. (Milieu) Estimée MAP de l'état de fonctionnement nominal $c_{1,t} = 1$ (blanc = état estimé). (Bas) Estimée MMSE du coefficient de fiabilité $\alpha_{1,t}$. La valeur de ce coefficient diminue quand le capteur est estimé défaillant.

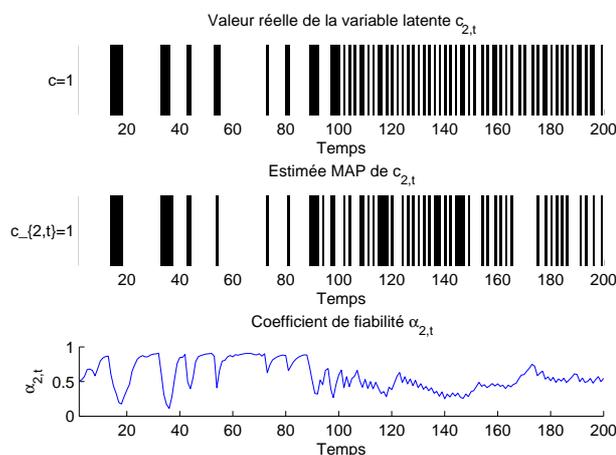


FIG. 2.12 – (Haut) Etat de fonctionnement réel $c_{2,t}$. Son évolution suit un modèle de Markov selon la matrice de transition $\Pi_{[0,100]}$ sur l'intervalle $T_1 = [0, 100]$ et $\Pi_{[100,200]}$ sur l'intervalle $T_2 = [100, 200]$. (Milieu) Estimée MAP de l'état de fonctionnement nominal $c_{2,t} = 1$ (blanc = état estimé). (Bas) Estimée MMSE du coefficient de fiabilité $\alpha_{2,t}$. La valeur de ce coefficient diminue quand le capteur est estimé défaillant.

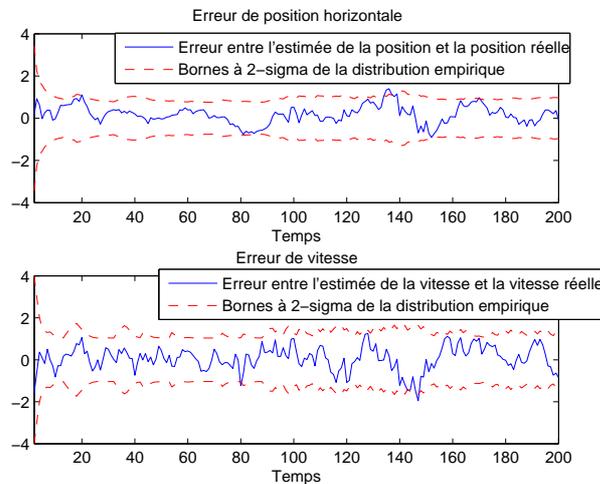


FIG. 2.13 – (Haut) Evolution de l’erreur de position (ligne pleine). En pointillé sont représentées les bornes à 2-sigma. Celles-ci augmentent ou diminuent en fonction des modèles d’observation utilisés (certains sont plus informatifs que d’autres). (Bas) Evolution de l’erreur de vitesse (ligne pleine). En pointillé sont représentées les bornes à 2-sigma. Globalement, la précision d’estimation est bonne.

modèle d’évolution markovien sur les variables indicatrices. L’ajustement de la dynamique des probabilités des variables indicatrices permet une adaptation au nouveau scénario. Comme il est plus réaliste de considérer que la dynamique des variables indicatrices peut évoluer au cours du temps, le modèle à saut qui est proposé ici permet d’obtenir un algorithme d’estimation plus robuste.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé de nouveaux modèles et algorithmes pour la détection de défaillances de capteurs et, de façon plus générale, pour les capteurs à classes de fonctionnement multiples. Une famille d’algorithmes a été proposée, pour des situations où les capteurs délivrent leurs données de façon synchrone ou asynchrone. Des résultats de simulation montrent l’efficacité des distributions d’importance proposées ainsi que la robustesse de notre algorithme face à des modèles tels que le *Jump Markov (Linear) System*.

Une application sur des données réelles est proposée dans le chapitre suivant pour la localisation d’un véhicule terrestre à l’aide d’un récepteur GPS, d’un capteur de vitesse et d’un capteur d’angle de braquage.

CHAPITRE 3

Fusion multicapteur pour la localisation d'un véhicule terrestre

3.1 Introduction

Le modèle et les algorithmes présentés dans le chapitre précédent sont parfaitement adaptés aux applications de robotique mobile. Le développement de véhicules autonomes tels que les drones ou les taxis automatiques est important pour le transport de biens/personnes ou pour des opérations en terrain hostile (exploration martienne, désamorçage de mine terrestre). Afin d'assurer un positionnement de haute précision et une représentation fidèle de l'environnement extérieur, de nombreux capteurs, aux informations complémentaires et/ou redondantes sont nécessaires. Les capteurs de positionnement typiquement utilisés sont le GPS, les unités inertielles et les compas magnétiques. Pour la détection d'obstacle, les capteurs peuvent être des radars ou des caméras. Une caractéristique importante de la robotique mobile est que les observations délivrées par les différents capteurs peuvent être facilement altérées à cause de conditions extérieures difficiles. Par exemple, la lentille d'une caméra peut devenir sale à cause d'une tempête de sable sur Mars, un radar peut subir des perturbations supplémentaires dues à des chutes de neige. D'autres capteurs peuvent délivrer des mesures totalement erronées dans certaines conditions, comme le GPS, soumis à des phénomènes de trajets multiples dans les canyons urbains ou le compas magnétique, sensible à des champs magnétiques parasites.

De nombreux travaux ont eu pour objet la localisation d'un véhicule terrestre dans un cadre multicapteur. Stephen et Lachapelle [Ste01] et Zhao et Turner [Far00] ont utilisé un filtre de Kalman étendu pour combiner les mesures du récepteur GPS avec des données de centrales inertielles ou de capteurs odométriques. D'autres travaux ont appliqué les algorithmes de Monte Carlo séquentiel pour le positionnement

d'un véhicule terrestre. Yang *et al.* [Yan04] ont réalisé une comparaison entre le filtre de Kalman étendu et le filtre particulaire, mettant en évidence l'intérêt de ce dernier pour le problème considéré. Giremus *et al.* [Gir04] et Gustafsson *et al.* [Gus02, Nor01] ont mis en œuvre un filtre *bootstrap* rao-blackwellisé.

Pour les systèmes de localisation à base de récepteurs GPS, le problème principal provient des trajets multiples que peuvent subir les signaux GPS. Ce problème important a intéressé un grand nombre de chercheurs et d'ingénieurs. Plusieurs méthodes de réduction des erreurs liées à ce phénomène ont été proposées au niveau du récepteur GPS [Bra97, Com98, Sou02, Bét03], en agissant directement sur les signaux reçus. D'autres travaux se basent sur la connaissance de l'environnement extérieur [Mar05] afin de prédire les réflexions, ou sur des antennes multiples afin d'estimer les signaux réfléchis [Ray01]. Giremus et Tourneret [Gir05] ont proposé un filtre particulaire rao-blackwellisé afin d'estimer les biais affectant les mesures de pseudo-distances, dus aux trajets multiples. Ils utilisent pour ceci un modèle d'observation à saut dont les variables indicatrices ont des probabilités *a priori* fixées. Contrairement à ces travaux, qui utilisent soit les signaux directement reçus par le récepteur, soit les pseudo-distances, nous supposons ici que nous n'avons à notre disposition que la mesure finale de position délivrée par ce récepteur.

Dans cette partie, on considère un véhicule terrestre équipé de trois capteurs : un récepteur GPS, un capteur d'angle de braquage et un capteur de vitesse. Le récepteur GPS est supposé potentiellement défaillant à cause des phénomènes de trajets multiples pouvant subvenir en milieu urbain. On définit donc pour ce capteur deux modèles d'observations, un nominal et un défaillant, et l'on utilise le modèle général défini dans le chapitre précédent. Etant donné les caractéristiques spécifiques du modèle d'évolution, un algorithme modifié est proposé pour la résolution du problème, dérivé du filtre particulaire UKF rao-blackwellisé [Bri03].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, des détails sont donnés sur les types de capteurs embarqués sur un véhicule terrestre pour la localisation. Un intérêt particulier est accordé au récepteur GPS, constituant la base du système de localisation, et dont le principe de fonctionnement et les erreurs associées sont présentés. Ensuite, le modèle d'évolution de l'état, basé sur les équations cinématiques du véhicule, est explicité, ainsi que les modèles de mesure associés aux trois capteurs, et le modèle permettant de détecter les défaillances du GPS, basé sur le modèle du chapitre précédent. L'algorithme de filtrage particulaire UKF rao-blackwellisé est ensuite présenté. Enfin, des simulations sont données permettant de montrer l'apport du modèle et de l'algorithme.

3.2 Localisation d'un véhicule terrestre

3.2.1 Capteurs embarqués pour la localisation

On peut classer les capteurs embarqués sur un mobile en deux catégories.

D'une part les capteurs **extéroceptifs** (*absolute sensors*), qui prennent des informations sur l'environnement extérieur du mobile et permettent une localisation **absolue** (dans un repère fixe) de celui-ci. Les systèmes de localisation par satellite (le système américain GPS, le système russe GLONASS et le futur système européen Galileo), les compas magnétiques, les caméras, capteurs ultrason ou télémètres font partie de cette catégorie. Ils ont comme caractéristiques une fréquence d'échantillonnage généralement faible (basse fréquence) et une précision bornée dépendant des spécifications du capteur et de l'environnement.

D'autre part les capteurs **proprioceptifs** (*dead-reckoning sensors*) qui prennent des informations sur le mobile lui-même et permettent une localisation **relative** (par rapport à la dernière position) du mobile. Les capteurs de vitesse, d'angle de braquage, les gyromètres, et les accéléromètres entrent dans cette catégorie. Ils ont comme caractéristiques une fréquence d'échantillonnage assez grande (haute fréquence) relativement aux capteurs extéroceptifs, et une précision dépendant à la fois du capteur et du modèle d'évolution du mobile. Comme la localisation est relative, on est confronté à une dérive de l'erreur de positionnement et donc à une erreur non bornée.

La table 3.1 résume les caractéristiques de ces deux catégories de capteurs.

TAB. 3.1 – Caractéristiques des capteurs extéroceptifs et proprioceptifs

Type de capteur	Extéroceptif	Proprioceptif
Localisation	Absolue	Relative
Cadence d'acquisition	Basse fréquence	Haute fréquence
Précision de positionnement à court terme	Moyenne	Très bonne
Précision de positionnement à long terme	Très bonne	Mauvaise (dérive inhérente)

Les capteurs extéroceptifs ont donc un bon comportement à long terme et les capteurs proprioceptifs un bon comportement à court terme. De plus, les mesures délivrées par les capteurs extéroceptifs peuvent être dégradées à cause de perturbations dans l'environnement extérieur (ce point, abordé dans la section suivante, est particulièrement critique pour le signal GPS), tandis que les erreurs des capteurs proprioceptifs sont limitées à une mauvaise calibration du capteur ou une défaillance de celui-ci. Ces deux types de capteurs ont des caractéristiques complémentaires et se prêtent donc bien à une fusion de leurs informations.

3.2.2 Le système GPS

a) Description du système

Le système NAVSTAR-GPS (NAVigation System by Timing And Ranging - Global Positioning System) est un système de positionnement par satellite permettant, à partir de la réception d'un signal émis par une constellation de satellites, de connaître sa position dans un repère fixe ainsi que le temps universel [Duq05].

Conçu et développé à partir de 1973, il est officiellement mis en service en 1995 par le département de la défense américain. Initialement programmé à des fins militaires, son utilisation intéresse de larges domaines civils, allant de la navigation terrestre et maritime aux relevés topographiques en passant par le suivi de flottes de véhicules.

Le système est composé de trois segments distincts :

- le segment spatial, constitué d'un ensemble de 24 satellites (au moins) en orbite MEO (*Medium Earth Orbit*, 20200 km) répartis sur six plans orbitaux, ayant une période orbitale d'environ 12 heures. Chaque satellite possède à son bord un oscillateur fournissant une fréquence fondamentale de 10.23MHz calibrée sur des horloges atomiques. L'émetteur génère continuellement deux ondes (L1 et L2) de fréquences respectives 1575.42 MHz et 1227.60 MHz,
- le segment de contrôle, composé de cinq stations américaines au sol, réparties sur la surface du globe, permettant de piloter le système. Leur rôle est de contrôler les informations envoyées par les satellites et de corriger celles qui sont erronées,
- le segment des usagers, civils ou militaires, qui regroupe l'ensemble des récepteurs recevant de façon passive les informations émises par les satellites.

Chaque satellite envoie continuellement vers la terre un signal contenant (entre autres) des informations sur sa position au moment où il a envoyé le signal et l'heure à laquelle il l'a envoyée. Le calcul du temps mis par le signal pour atteindre le récepteur permet à celui-ci de connaître la distance le séparant du satellite. Etant donné que l'on a quatre inconnues (la position en 3D du récepteur et l'erreur de son horloge), quatre satellites sont au minimum nécessaires afin de déterminer la position du récepteur par triangulation.

Le signal émis par le satellite est composé

- des ondes porteuses L1 et L2, de fréquences respectives 1575.42 et 1227.6 MHz,
- des codes C/A (*Coarse Acquisition*) et P (*Precise*), modulés sur les ondes porteuses selon une séquence binaire de 1023 bits pour le code C/A et une très longue séquence (7 jours) pour le code P. Le code C/A, différent pour chaque satellite, permet d'identifier celui-ci. Pour éviter le brouillage du signal GPS, un code uniquement accessible aux militaires est rajouté au code P,

- du message de navigation, qui module le code C/A sur L1 et le code P sur L2 à une fréquence de 50 Hz. Il contient des informations sur l'orbite du satellite, les corrections d'horloge, ainsi que d'autres paramètres du système.

Selon ces caractéristiques, le GPS offre deux services

- le SPS (*Standard Position Service*), mis à disposition des utilisateurs civils par le code C/A,
- le PPS (*Precise Position Service*), réservé aux militaires américains qui possèdent un algorithme de décryptage permettant d'accéder au code P.

Les distances séparant chaque satellite du récepteur peuvent être calculées de façon différentes : selon la mesure de code ou la mesure de phase. La première se base sur le code C/A afin de définir le temps de propagation, la deuxième se base sur les porteuses L1 et L2.

b) Le GPS différentiel

Le GPS différentiel se base sur le fait que plusieurs erreurs associées au système GPS, notamment dues à la traversée de l'atmosphère terrestre, sont fortement corrélées spatialement. Ainsi, la connaissance des erreurs de propagation en un point P sur la Terre permet de corriger ces erreurs de propagation dans un certain rayon α autour de P.

Un système DGPS (*Differential GPS*) est donc constitué d'une station fixe munie d'un récepteur GPS, et dont la position est connue. Cette station fixe calcule la différence entre sa position réelle connue et celle calculée à partir des signaux GPS et en déduit les erreurs associées. Elle transmet ensuite en temps réel (par UHF, GSM...) ces corrections aux récepteurs GPS mobiles qui peuvent soustraire ces erreurs lors de leur calcul de position. Le principe de fonctionnement du DGPS est résumé par la figure 3.1 page suivante.

c) Erreurs associées au signal GPS

De nombreuses erreurs entachent le calcul de position du GPS. Si certaines peuvent être éliminées par corrections différentielles, d'autres, comme celles dues aux trajets multiples, restent réfractaires à tout traitement global.

- Erreurs dues à la propagation ionosphérique
L'ionosphère, qui s'étend de 50 à 1000 km autour de la surface de la Terre, est constituée de gaz ionisés par les radiations solaires. L'ionisation produit des nuages d'électrons libres qui ont un effet dispersif sur les signaux GPS, et provoquent des erreurs dans le calcul des distances satellites-récepteur.
- Erreurs dues à la propagation troposphérique
La partie la plus basse de l'atmosphère terrestre est composée de gaz secs et de vapeur d'eau qui allongent le chemin de propagation par réfraction.

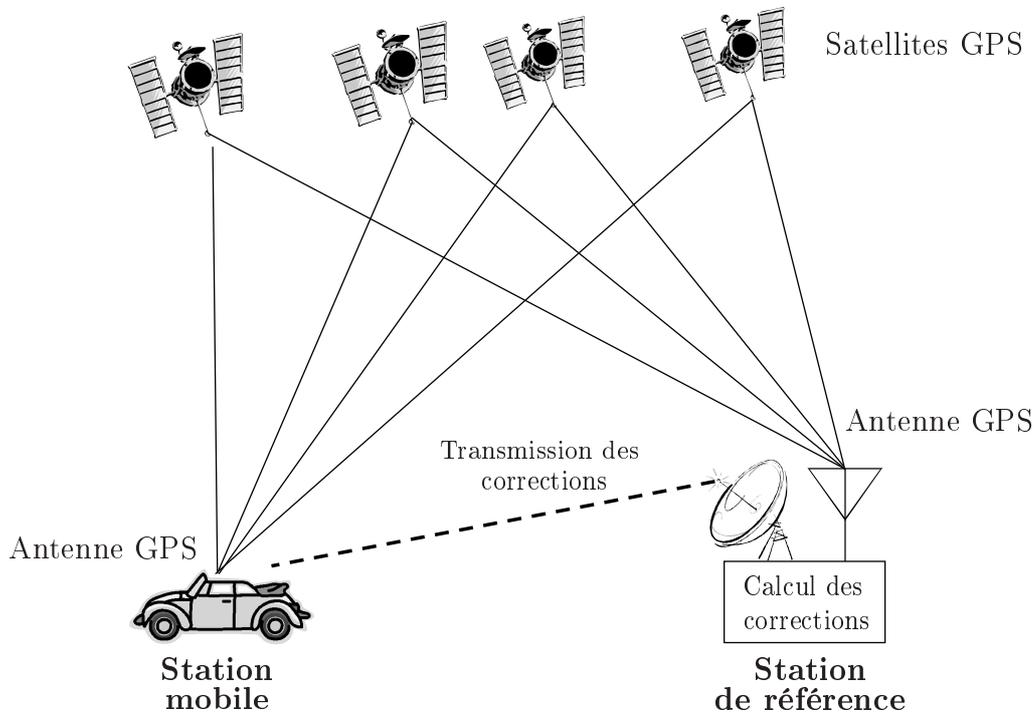


FIG. 3.1 – Principe de fonctionnement du GPS différentiel

- Erreurs de données d'éphémérides
De faibles erreurs dans les données transmises par le satellite peuvent induire des erreurs correspondantes dans le calcul de la position.
- Trajets multiples
L'une des principales sources d'erreurs du signal GPS, qui n'est pas éliminée par la correction différentielle, est due aux phénomènes de trajets multiples. Les objets dans le voisinage de l'antenne du récepteur (sol, immeuble. . .) peuvent facilement réfléchir les signaux GPS. Le récepteur capte alors, en plus du chemin principal, un ou plusieurs chemins secondaires (ayant un temps de propagation supérieur), comme représenté sur le figure 3.2 page suivante. Le calcul de la distance récepteur/satellite s'en trouve alors faussé. Ce phénomène peut être encore aggravé dans le cas d'un masquage du signal principal (le récepteur ne reçoit alors que le ou les signaux secondaires).

Les erreurs dues aux trajets multiples ne peuvent être éliminées par l'utilisation du GPS différentiel car elles dépendent de la géométrie des obstacles dans le voisinage de l'antenne réceptrice.

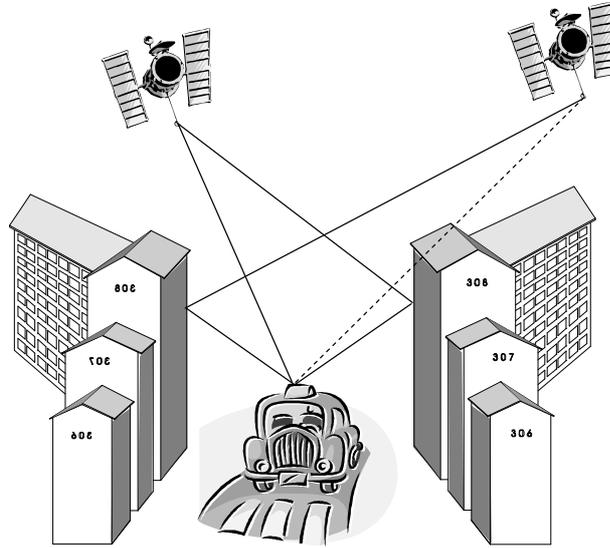


FIG. 3.2 – Illustration des erreurs GPS dues aux phénomènes de trajets multiples

3.3 Modèle statistique

Dans ce paragraphe sont définis les modèles d'évolution et de mesures pour le positionnement d'un véhicule terrestre équipé de quatre roues dont deux directrices. Le modèle d'évolution, dérivé des équations cinématiques simplifiées du véhicule est présenté au paragraphe 3.3.1 et les modèles d'observation des capteurs au paragraphe 3.3.2.

3.3.1 Modèle d'évolution de l'état basé sur la cinématique du véhicule

Le véhicule terrestre auquel nous nous intéressons est illustré sur la figure 3.3. Son modèle cinématique est inspiré de [Gui02] et [Gui00]. Les équations différentielles gouvernant la cinématique du véhicule au point P_c sont basées sur un modèle de braquage d'Ackerman (modèle de bicyclette simplifié), et sont données par (la liste des variables, ici prises au point C , est présentée dans la table 3.2) :

$$\begin{cases} \dot{X}_c(t) = V_c(t) \cos \psi(t) \\ \dot{Y}_c(t) = V_c(t) \sin \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) = \frac{V_c(t)}{L} \tan \beta(t) \end{cases}$$

Soit $P(X, Y)$ la position du véhicule au niveau de l'antenne GPS (point P). Au point P , X et Y s'expriment en fonction de X_c et Y_c selon

$$\begin{aligned} X(t) &= X_c(t) + a \cos \psi(t) + b \sin \psi(t) \\ Y(t) &= Y_c(t) + a \sin \psi(t) - b \cos \psi(t) \end{aligned}$$

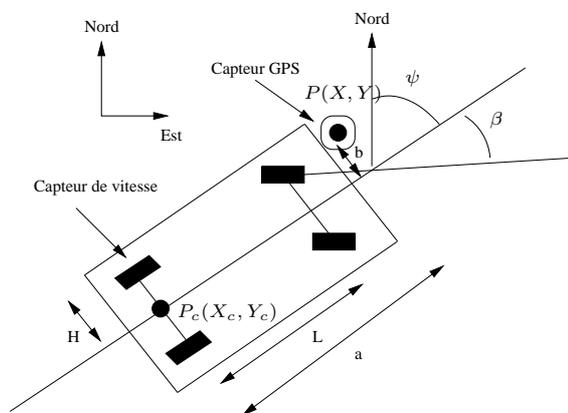


FIG. 3.3 – Nomenclature du véhicule terrestre. ψ est l'angle entre le Nord et l'axe longitudinal du véhicule terrestre et β est l'angle de braquage. La position est calculée au point $P(X, Y)$. Le capteur de vitesse est situé sur la roue arrière gauche du véhicule et le capteur GPS sur le côté avant droit. La position du véhicule est calculée dans un repère de coordonnées Nord-Est.

TAB. 3.2 – Variables d'état utilisées dans le modèle de véhicule terrestre

X, Y	Positions Nord et Est du véhicule au point P
V	Vitesse du véhicule au point P_c
ψ	Cap du véhicule
β	Angle de braquage
T	Période d'échantillonnage

L'approximation discrète du premier ordre est adoptée (on note $V_t = V_c(t)$)

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= X_t + T \left[V_t \cos \psi_t + (-a \sin \psi_t + b \cos \psi_t) \frac{V_t}{L} \tan \beta_t \right] \\
 Y_{t+1} &= Y_t + T \left[V_t \sin \psi_t + (a \cos \psi_t + b \sin \psi_t) \frac{V_t}{L} \tan \beta_t \right] \\
 V_{t+1} &= V_t + T \dot{V}_t \\
 \psi_{t+1} &= \psi_t + T \frac{V_t}{L} \tan(\beta_t) \\
 \beta_{t+1} &= \beta_t + T \dot{\beta}_t \\
 \dot{\beta}_{t+1} &= \dot{\beta}_t + T \ddot{\beta}_t
 \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être reformulées sous la forme du modèle non linéaire suivant

$$\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t) + G \cdot \mathbf{v}_t \quad (3.1)$$

où f est la fonction (non linéaire) de transition de l'état, G est la matrice de transfert du bruit d'état. Le vecteur d'état est $\mathbf{x}_t = [X_t, Y_t, V_t, \psi_t, \beta_t, \dot{\beta}_t]^T$ et le bruit d'état $\mathbf{v}_t = [\dot{V}_t, \ddot{\beta}_t]^T$. Le bruit d'état $\mathbf{v}_t = [\dot{V}_t, \ddot{\beta}_t]^T$ est supposé être un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance connue $Q_t = E[\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^T]$.

3.3.2 Modèles d'observation

Le véhicule est équipé de trois capteurs, comme cela est représenté sur la figure 3.3. Ces capteurs sont

- un récepteur DGPS de précision centimétrique, délivrant la position Nord et Est du véhicule,
- un capteur de vitesse,
- un capteur d'angle de braquage.

Les mesures de vitesse et d'angle de braquage sont synchrones. Les mesures GPS sont quant à elles asynchrones par rapport à ces dernières. La fréquence d'acquisition des mesures GPS est faible (5 Hz) comparée à celle des mesures de vitesse/angle de braquage (40 Hz). Les modèles d'observation des capteurs sont détaillés ci-dessous.

a) Modèles d'observation du capteur GPS

Le modèle d'observation nominal du GPS est le suivant

$$\mathbf{z}_{1,t} = h_1(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_{1,t} = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \mathbf{w}_{1,t} \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{w}_{1,t}$ un bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance connue $R_{1,t} = 0.002I_2$, avec I_2 la matrice identité 2×2 . Quand le capteur GPS est valide, la loi d'observation est $p(\mathbf{z}_{1,t}|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(h_1(\mathbf{x}_t), R_{1,t})$.

Le récepteur GPS ne peut pas être considéré comme complètement fiable à cause des phénomènes de trajets multiples, masquage ou diffraction, pouvant altérer les mesures, particulièrement en environnement urbain [Gre01b]. On suppose que le capteur GPS a deux classes de fonctionnement

- un état nominal de fonctionnement correspondant au modèle de mesure défini par l'équation (3.2),
- un état défaillant lorsque les mesures sont altérées à cause de phénomènes de trajets multiples. Dans ce cas, on définit une densité de probabilité vague $p_0(\mathbf{z}_{1,t})$, uniforme sur un intervalle large centré sur l'estimée de la dernière position.

Pour le capteur GPS, on définit donc la variable latente binaire $c_{1,t} \in \{0, 1\}$, prenant la valeur 0 si le capteur est défaillant et 1 s'il est dans son état nominal de fonctionnement. Le modèle d'évolution pour $\alpha_{1,t}$ est celui défini par l'équation (2.16).

b) Capteurs de vitesse et d'angle de braquage

Les modèles d'observation des capteurs de vitesse et d'angle de braquage sont, respectivement

$$z_{2,t} = h_2(\mathbf{x}_t) + w_{2,t} = (1 + \tan(\beta_t) \frac{H}{L})v_t + w_{2,t}$$

et

$$z_{3,t} = h_3(\mathbf{x}_t) + w_{3,t} = \beta_t + w_{3,t}$$

avec $w_{2,t}$ et $w_{3,t}$ des bruits blancs gaussiens centrés de matrices de covariance $R_{2,t} = 0.1$ et $R_{3,t} = 0.002$. Ces capteurs sont supposés entièrement fiables.

3.4 Objectifs d'estimation et algorithme

Etant donné le modèle statistique et les hypothèses réalisées sur les capteurs, l'objectif d'estimation est le suivant : à chaque instant où les données de vitesse/braquage sont collectées, \mathbf{x}_t est estimé par MMSE. Quand une donnée GPS est disponible, \mathbf{x}_t , $\alpha_{1,t}$ et $\sigma_{1,t}^\alpha$ sont estimés par MMSE et $c_{1,t}$ par MAP.

Dans le modèle d'évolution défini par l'équation (3.1), les composantes du bruit d'évolution de l'état ont une variance négligeable (l'évolution est quasiment déterministe). Ceci cause un problème d'appauvrissement des échantillons dans le filtre particulaire, i.e. la plupart des particules ont la même valeur au bout d'un certain temps [Dou01b, Ris04].

L'approche proposée est basée sur une approximation du filtre particulaire, dont le coût en temps de calcul est faible et qui est assez précise. Cette approche, développée dans [Bri03] sous le nom de filtre de Kalman sans parfum rao-blackwellisé (*Rao-Blackwellised* UKF), est inspirée du filtre particulaire rao-blackwellisé, où les filtres de Kalman sont remplacés par des UKFs [Jul97, Wan00, Jul00]. L'état \mathbf{x}_t est estimé par une banque d'UKFs, tandis que les autres éléments de l'état augmenté (i.e., \mathbf{c}_t , $\boldsymbol{\alpha}_t$, $\boldsymbol{\sigma}_t$) sont mis à jour en utilisant les distributions d'importance décrites au paragraphe 2.3, pour les variables $c_{1:t}$, $\alpha_{0:t}$, $\sigma_{0:t}$. L'algorithme 3.1 page 75 présente les différentes étapes du filtre de Kalman sans parfum rao-blackwellisé.

3.5 Resultats

L'algorithme 3.1 est appliqué à des mesures réelles. Celles-ci ont été collectées par l'Australian Center for Field Robotics (ACFR)¹. Ces données ne sont pas corrompues par les erreurs d'observation standards. Deux types d'erreurs ont été ajoutés pour tester l'algorithme :

¹Ces données peuvent être trouvées à l'adresse internet <http://www.acfr.usyd.edu.au/homepages/academic/enebot/dataset.htm>.

- Simulation de trajets multiples par l'ajout d'un biais aléatoire constant par morceaux aux données réelles, voir la figure 3.4. Des phénomènes de trajets multiples sont simulés dans les intervalles de temps $T_1 = [50, 60]$, $T_2 = [62, 68]$ et $T_3 = [75, 80]$ (ces instants temporels correspondent aux indices des données GPS, i.e., il augmente de t à $t + 1$ à chaque fois qu'une observation GPS est collectée).
- Simulation d'un dérapage du véhicule, simulé en remplaçant la mesure d'angle de braquage par une mesure erronée, sur l'intervalle $T_4 = [12, 14]$ (voir la figure 3.5 page suivante).

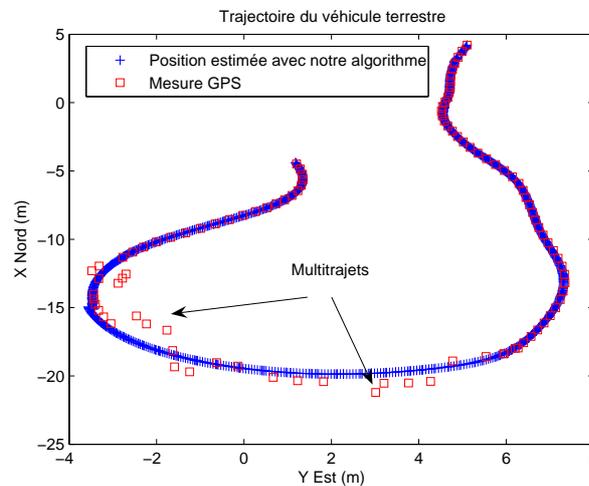


FIG. 3.4 – Estimée MMSE de la trajectoire du véhicule obtenue avec l'algorithme 3.1 page 75. Les carrés représentant les données GPS. Les données sont représentées dans le repère de coordonnées Nord-Est. Les défaillances du GPS surviennent à cause de phénomène de trajets multiples, et ont été simulées en ajoutant un biais aléatoire constant par morceaux.

Les résultats de l'estimation de l'état avec l'algorithme 3.1 ont été comparés avec ceux obtenus avec deux algorithmes à base de filtre de Kalman sans parfum. Dans le premier UKF, la capacité de rejeter les mesures erronées n'est pas mise en œuvre. Dans le second, les erreurs sont détectées en utilisant l'innovation quadratique normalisée, comme détaillé au paragraphe 1.2.1.

La figure 3.6 représente l'évolution de la probabilité *a posteriori* $c_{1,t}$ pour le capteur GPS. Elle montre également l'estimée MMSE de $\alpha_{1,t}$ (qui est ici interprété comme un coefficient de fiabilité du capteur GPS). Pendant les intervalles T_1 , T_2 et T_3 , notre algorithme parvient à détecter les défaillances du GPS et la variable latente $c_{1,t}$ est estimée proche de 0. Le paramètre de fiabilité du GPS $\alpha_{1,t}$ diminue pendant cet intervalle de 80% à 40%.

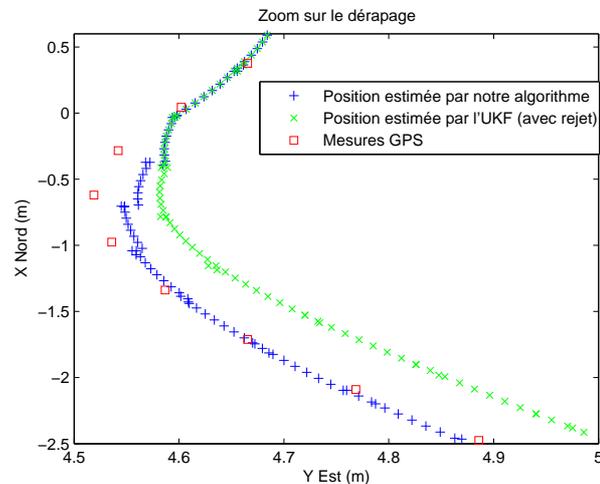


FIG. 3.5 – Estimée MMSE de la trajectoire du véhicule, obtenue avec l'algorithme 3.1 et avec un algorithme UKF avec rejet des erreurs de mesure. Le morceau de la trajectoire représenté est un zoom de la figure 3.4 page précédente. Le dérapage du véhicule est simulé en ajoutant un biais aléatoire à la mesure de l'angle de braquage. Dans ce cas, l'UKF rejette les données GPS et ne parvient pas à suivre à nouveau la trajectoire du véhicule. L'algorithme proposé tout d'abord rejette la donnée GPS, mais revient ensuite vers la bonne trajectoire.

La figure 3.7 compare l'erreur de positionnement donnée par notre algorithme et par le premier algorithme UKF (sans détection des erreurs GPS). Bien sûr, cet UKF donne des résultats médiocres en cas de trajets multiples, car ces données sont intégrées dans le processus de fusion, ce qui occasionne de larges erreurs pendant les intervalles T_1 , T_2 et T_3 . Notre algorithme conserve de bonnes performances, bien que l'erreur augmente sensiblement durant les intervalles T_1 , T_2 et T_3 . L'augmentation de l'erreur est principalement due au manque d'information lorsque la donnée GPS n'est pas utilisée, elle est donc liée au modèle, et non à l'algorithme.

La figure 3.8 est similaire à la figure 3.7. Dans la figure 3.8, notre algorithme est comparé avec un UKF avec détection d'erreurs, comme expliqué au paragraphe 1.2.1. Ce dernier algorithme considère que les données GPS sont erronées sur l'intervalle T_4 (les mesures de braquage sont considérées comme toujours fiables d'après le modèle), et il échoue à revenir vers la bonne trajectoire. Ceci peut être expliqué de la manière suivante : à cause du dérapage, les mesures GPS sont en désaccord avec le modèle d'évolution pendant l'intervalle T_4 , et ces mesures sont donc rejetées par l'algorithme UKF. En conséquence, la trajectoire estimée du véhicule diverge de la trajectoire correcte au cours du temps, impliquant le rejet des mesures GPS suivantes : l'UKF suppose de façon erronée que le GPS est défaillant. Le même phénomène apparaît en cas d'erreurs du GPS dues aux trajets multiples pendant

les intervalles T_1 , T_2 et T_3 (voir la figure 3.8). Au contraire, notre algorithme teste toutes les hypothèses valide/défaillant. Par exemple, à l'instant $t = 12$, l'hypothèse la plus probable est "le GPS est défaillant", mais à l'instant $t = 13$, l'hypothèse la plus probable devient "le GPS est valide aux instants $t = 12$ et $t = 13$ " car la nouvelle mesure GPS est cohérente avec le modèle d'évolution. Ceci explique le fait que l'estimée MMSE de la position calculée par notre algorithme suit la bonne trajectoire (voir la figure 3.5).

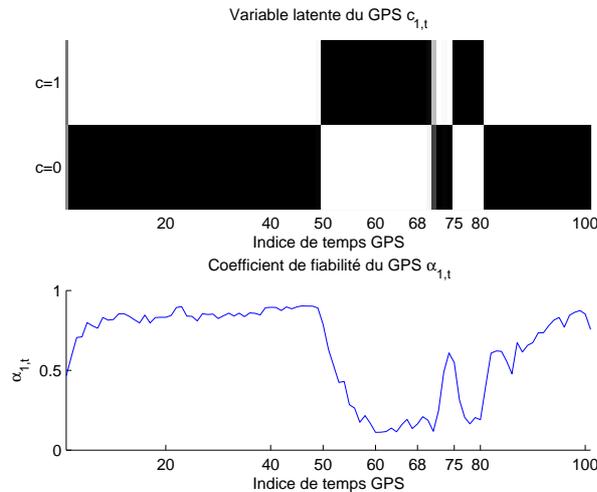


FIG. 3.6 – (Haut) Probabilité a posteriori de l'état GPS $c_{1,t} = 1$. Pendant les intervalles de temps $T_1 = [50, 60]$, $T_2 = [62, 68]$ et $T_3 = [75, 80]$, l'état réel du capteur GPS est $c_{1,t} = 0$ (défaillant), et $c_{1,t} = 1$ (valide) pour les autres intervalles. Les états du capteur sont correctement estimés. (Bas) Estimée MMSE du coefficient de fiabilité du GPS $\alpha_{1,1,t}$. Pendant les intervalles $T_1 = [50, 60]$, $T_2 = [62, 68]$ et $T_3 = [75, 80]$, le coefficient de fiabilité du GPS $\alpha_{1,1,t}$ diminue car le GPS est détecté comme étant défaillant. En dehors de ces intervalles, le coefficient de fiabilité augmente car le GPS est détecté comme étant valide.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre a été présentée une application réelle, en robotique mobile, des modèles et algorithmes développés dans le chapitre précédent. On considère un véhicule terrestre, équipé de trois capteurs dont un capteur GPS potentiellement défaillant. Deux états valide/défaillant sont définis pour ce capteur, et un algorithme modifié prenant en compte les spécificités du modèle d'évolution est donné. Des simulations de trajets multiples ajoutées à des mesures réelles permettent de mettre en évidence l'apport des modèles/algorithmes proposés par rapport aux approches existantes.

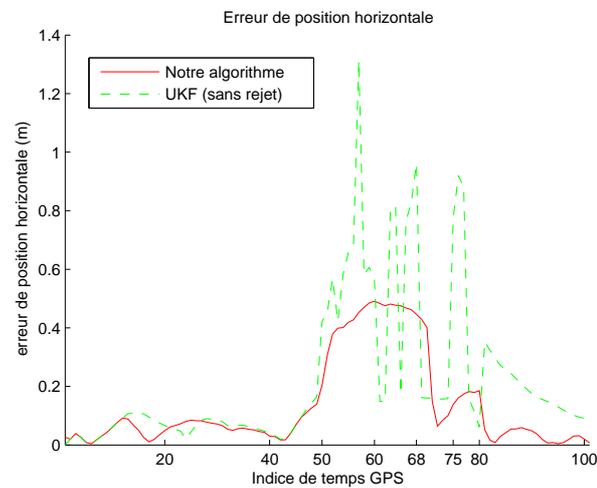


FIG. 3.7 – Comparaison de l'erreur de positionnement moyenne quadratique entre notre algorithme et l'algorithme UKF (sans rejet des mesures erronées). L'UKF donne de larges erreurs d'estimation de la position du véhicule pendant les intervalles $T_1 = [50, 60]$, $T_2 = [62, 68]$ et $T_3 = [75, 80]$ (défaillance du GPS) car il utilise ces données erronées dans le processus de fusion. Notre algorithme donne de bien meilleurs résultats que l'algorithme UKF.

Algorithme 3.1 Filtre particulaire UKF rao-blackwellisé pour le positionnement d'un véhicule terrestre

• **Etape 3.1.1 Initialisation**

- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\widehat{\mathbf{x}}_{0|0}^{(i)} \sim p_0(\widehat{\mathbf{x}}_{0|0})$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\Sigma_{0|0}^{(i)} \sim p_0(\Sigma_{0|0})$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\sigma_{1,0}^{\alpha(i)} \sim p_0(\sigma_{1,0}^{\alpha})$
- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\boldsymbol{\alpha}_{1,0}^{(i)} \sim p_0(\boldsymbol{\alpha}_{1,0})$
- Initialiser les poids $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• **Etape 3.1.2 Itérations**

- Pour $t = 1, 2, \dots$ faire
 - % Si arrivée des mesures $z_{2,t}$ et $z_{3,t}$
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, faire
 - Mettre à jour la moyenne $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}$ et matrice de covariance $\Sigma_{t|t}^{(i)}$ avec un pas d'UKF, i.e. $(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, \Sigma_{t|t}^{(i)}) = \text{UKF}(\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, z_{2,t}, z_{3,t})$
 - Faire $c_{1,t}^{(i)} \leftarrow c_{1,t-1}^{(i)}$
 - Faire $\boldsymbol{\alpha}_{1,t}^{(i)} \leftarrow \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}$
 - Faire $\sigma_{1,t-1}^{\alpha(i)} \leftarrow \sigma_{1,t-2}^{\alpha(i)}$
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids

$$\widetilde{w}_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} p(z_{2,t} | \mathbf{z}_{1:t-1}) p(z_{3,t} | \mathbf{z}_{1:t-1})$$

% Si arrivée d'une mesure GPS $\mathbf{z}_{1,t}$

- Pour les particules $i = 1, \dots, N$, faire
 - Échantillonner la variable d'état du capteur $\widetilde{c}_{1,t}^{(i)} \sim q(c_{1,t} | \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1,t})$
 - Échantillonner les probabilités $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)} \sim q(\boldsymbol{\alpha}_{1,t} | \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{1,t}^{(i)}, \sigma_{1,t-1}^{(i)})$
 - Échantillonner l'hyperparamètre $\widetilde{\sigma}_{1,t-1}^{\alpha(i)} \sim q(\sigma_{1,t-1}^{\alpha} | \sigma_{1,t-2}^{\alpha(i)}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)})$
 - Mettre à jour la moyenne $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}$ et matrice de covariance $\Sigma_{t|t}^{(i)}$ avec un pas d'UKF, i.e. $(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, \Sigma_{t|t}^{(i)}) = \text{UKF}(\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{1,t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1,t})$
 - Pour les particules $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_t^{(i)} &\propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_{1,t} | \widetilde{c}_{1,t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\widetilde{c}_{1,t}^{(i)} | \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)})}{q(\widetilde{c}_{1,t}^{(i)} | \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \Sigma_{t-1|t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1,t})} \\ &\quad \times \frac{p(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}, \widetilde{\sigma}_{1,t-1}^{\alpha(i)}) p(\widetilde{\sigma}_{1,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{1,t-2}^{\alpha(i)})}{q(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)} | \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)}, \widetilde{c}_{1,t}^{(i)}, \sigma_{1,t-2}^{\alpha(i)}) q(\widetilde{\sigma}_{1,t-1}^{\alpha(i)} | \sigma_{1,t-2}^{\alpha(i)}, \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1,t}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{1,t-1}^{(i)})} \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Normaliser les poids afin que $\sum_{i=1}^N \widetilde{w}_t^{(i)} = 1$

% **Rééchantillonnage**

- Calculer N_{eff} comme dans l'équation (1.27) et rééchantillonner les particules si $N_{\text{eff}} < \eta$.
-

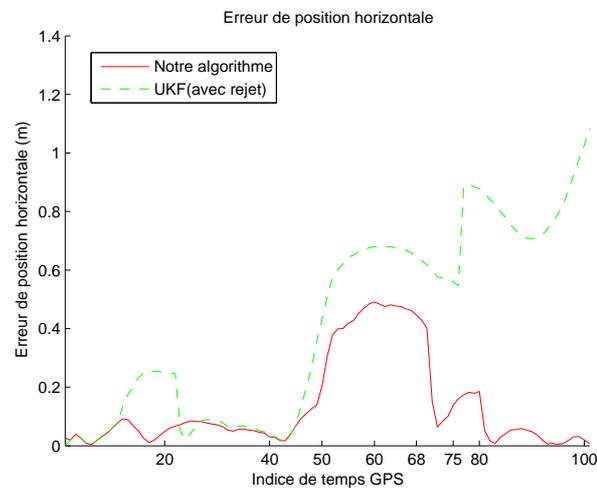


FIG. 3.8 – Comparaison de l'erreur de positionnement moyenne quadratique entre notre algorithme et l'algorithme UKF (avec détection des mesures erronées). La première dérive de l'estimée de position par l'UKF ($t = 12$) est due au rejet des mesures GPS lorsqu'un dérapage s'est produit. Notre algorithme se conduit de meilleure façon dans ce cas ainsi qu'en présence de données GPS corrompues pendant les intervalles $T_1 = [50, 60]$, $T_2 = [62, 68]$ et $T_3 = [75, 80]$: l'UKF d'abord rejette les données GPS, mais dérive rapidement et est incapable de recoller à la bonne trajectoire.

CHAPITRE 4

Processus de Dirichlet pour l'estimation de densités

Comme il a été indiqué dans le chapitre 1, l'inférence bayésienne se base sur la connaissance de modèles stochastiques, qui sont définis dans cette thèse sous la forme des modèles (1.13) et (1.14), rappelés ci-dessous

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t) \\ \mathbf{z}_t &= h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t\end{aligned}$$

La partie stochastique de ces modèles est représentée par les bruits d'état \mathbf{v}_t et de mesure \mathbf{w}_t . La distribution de ces bruits a été supposée connue dans le chapitre 1. Dans les chapitres 2 et 3, on a considéré qu'il pouvait exister un nombre fini de modèles de mesure, et que chaque capteur pouvait commuter d'un modèle à l'autre. Cependant, lorsque le capteur commute dans un état de fonctionnement non prévu, c'est-à-dire lorsque le capteur est défini comme défaillant, la mesure délivrée par le capteur n'est plus utilisée dans l'algorithme de fusion. Il peut alors sembler intéressant, dans ce cas, d'apprendre les nouvelles caractéristiques du modèle de mesure. C'est en général la partie stochastique qui va varier, et l'on souhaite donc estimer la nouvelle distribution du bruit d'observation. De la même manière, la distribution du bruit d'évolution \mathbf{v}_t peut devenir différente de celle considérée précédemment et doit dans ce cas être estimée. L'objet des chapitres 4, 5 et 6 est d'étudier l'estimation conjointe de l'état \mathbf{x}_t et des densités de probabilité des bruits \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t à partir de la séquence des mesures. L'estimation de ces densités est réalisée à l'aide des processus de Dirichlet, dont les bases sont présentées dans ce chapitre. Au chapitre 5, des algorithmes séquentiels et itératifs sont présentés dans le cas où les modèles (1.13) et (1.14) peuvent s'écrire sous la forme de modèles linéaires dont les distributions des bruits sont inconnues. Le chapitre 6 s'intéresse à des modèles non linéaires et à des densités de probabilités pouvant évoluer temporellement.

Les processus de Dirichlet définissent une distribution sur l'ensemble des distributions de probabilité. Ils permettent donc de définir, dans le cadre de l'estimation bayésienne, un *a priori* sur une distribution de probabilité inconnue. Les atouts principaux des processus de Dirichlet proviennent de la forme simple que prend la distribution *a posteriori*, et de la représentation dite en urne de Polya, qui permet une formulation simplifiée des mécanismes d'inférence bayésienne. Par rapport aux mélanges finis, elle permet notamment d'éviter le recours à des méthodes de simulations plus évoluées telles que les sauts réversibles.

Les principales caractéristiques des processus de Dirichlet sont résumées dans ce chapitre. Pour de plus amples détails, on pourra se référer aux articles d'Escobar [Esc92] et Neal [Nea00].

4.1 Estimation de densité

On considère un ensemble de données $\mathbf{y}_{1:m} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$, $\mathbf{y}_{1:m} \in \mathcal{Y}^m$, distribuées selon une densité de probabilité inconnue F

$$\mathbf{y}_k \sim F(\mathbf{y}_k), \quad \forall k = 1..m \quad (4.1)$$

On désire estimer dans un cadre bayésien cette densité de probabilité F à partir de la connaissance des échantillons $\mathbf{y}_{1:m}$. On s'intéresse à la classe des densités de probabilité pouvant s'écrire sous la forme du modèle de mélange suivant

$$F(\mathbf{y}) = \int_{\Theta} f(\mathbf{y}|\theta) d\mathbb{G}(\theta) \quad (4.2)$$

avec $\theta \in \Theta$ une variable latente, $f(\cdot|\theta)$ la densité mélangée connue et \mathbb{G} la distribution de mélange. La distribution de mélange \mathbb{G} est supposée inconnue, de distribution *a priori* $P(\mathbb{G})$. \mathbb{G} est alors appelée mesure de probabilité aléatoire (*Random Probability Measure*, RPM). Les équations (4.1) et (4.2) peuvent être reformulées sous la forme hiérarchique suivante

$$\mathbb{G} \sim P(\mathbb{G}) \quad (4.3a)$$

$$\theta_k | \mathbb{G} \sim \mathbb{G} \quad (4.3b)$$

$$\mathbf{y}_k | \theta_k \sim f(\cdot | \theta_k) \quad (4.3c)$$

Dans un cadre paramétrique, on suppose que la distribution aléatoire \mathbb{G} (et donc F) est caractérisée par un paramètre $\phi \in \Phi$ inconnu de dimension finie [Wal99]. La densité aléatoire F appartient donc à un espace de fonctions \mathcal{F} de dimension finie. L'*a priori* est donc défini sur ϕ et le modèle hiérarchique peut être reformulé de la façon suivante

$$\phi \sim p(\phi) \quad (4.4a)$$

$$\theta_k | \phi \sim \mathbb{G}(\cdot | \phi) \quad (4.4b)$$

$$\mathbf{y}_k | \theta_k \sim f(\cdot | \theta_k) \quad (4.4c)$$

Deux exemples de modèles hiérarchiques paramétriques sont fournis dans les exemples 4.1 et 4.2 avec une densité mélangée gaussienne et une distribution de mélange pouvant être caractérisée par un nombre fini de paramètres.

Exemple 4.1 Densité gaussienne. Soit $\mathbf{y}_{1:m} \in \mathbb{R}^m$ un ensemble de données échantillonnées selon une loi inconnue F . On suppose a priori que la densité F est une loi gaussienne de moyenne inconnue μ et de variance fixée σ_0^2 . La densité F est entièrement caractérisée par la variable aléatoire μ , et appartient donc à un espace de dimension 1. La densité F inconnue peut s'écrire sous la forme

$$F(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(\mathbf{y}; \theta, \sigma_0^2) d\mathbb{G}(\theta)$$

avec $\mathbb{G}|\mu = \delta_\mu$. On suppose a priori que $\mu \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et donc

$$\begin{aligned} \mu &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \theta_k | \mu &\sim \delta_\mu(\cdot) \\ \mathbf{y}_k | \theta_k &\sim \mathcal{N}(\theta_k, \sigma_0^2) \end{aligned}$$

Exemple 4.2 Mélange fini de densités gaussiennes. Soit $\mathbf{y}_{1:m} \in \mathbb{R}^m$ un ensemble de données échantillonnées selon une loi inconnue F . On suppose a priori que la densité F est un mélange fini de densités gaussiennes $\sum_{k=1}^n \pi_k \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_0^2)$ de pondérations π_k et moyennes μ_k , $k = 1, \dots, n$ inconnues et de variances fixées égales à σ_0^2 . La densité F est entièrement caractérisée par les variables aléatoires π_k et μ_k , $k = 1, \dots, n$, et appartient donc à un espace de dimension finie. La densité F inconnue peut s'écrire sous la forme

$$F(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(\mathbf{y}; \theta, \sigma_0^2) d\mathbb{G}(\theta)$$

avec $\mathbb{G}|\pi_{1:n}, \mu_{1:n} = \sum_{k=1}^n \pi_k \delta_{\mu_k}$. On suppose a priori que $\pi_{1:n} \sim \mathcal{D}(\alpha \pi_0)$ et $\mu_k \sim \mathcal{N}(0, 1) \forall k = 1, \dots, n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et π_0 un jeu de probabilité discret fixé de dimension n . En notant $\phi = \{\pi_{1:n}, \mu_{1:n}\}$ et $p(\phi)$ la densité a priori de ϕ , on a le modèle hiérarchique suivant

$$\begin{aligned} \phi &\sim p(\phi) \\ \theta_k | \phi &\sim \sum_{k=1}^n \pi_k \delta_{\mu_k}(\cdot) \\ \mathbf{y}_k | \theta_k &\sim \mathcal{N}(\theta_k, \sigma_0^2) \end{aligned}$$

Dans de nombreux cas cependant, contraindre la densité de probabilité à prendre une certaine forme paramétrique donnée peut limiter l'inférence réalisée à partir de tels modèles [Mul04]. On s'intéresse dans ce cas à des modèles non paramétriques, qui définissent un *a priori* sur un espace plus large, et fournissent donc un support

à plus de possibilités que ne le permettent les modèles paramétriques [Wal99]. Les modèles non paramétriques peuvent généralement être définis comme des modèles paramétriques avec infiniment de paramètres ([Ber94, Mul04]). Dans les modèles non paramétriques, la distribution aléatoire \mathbb{G} (et donc F) appartient à un espace de fonctions \mathcal{F} de dimension infinie. Dans un cadre bayésien, il est supposé que la RPM \mathbb{G} est distribuée selon une certaine distribution *a priori*, c'est-à-dire une distribution sur l'ensemble des distributions de probabilités.

Ferguson [Fer73] a défini deux propriétés désirables pour cette distribution *a priori*

1. Le support de cette distribution doit être large.
2. La distribution *a posteriori* conditionnellement aux échantillons observés doit être analytiquement résolvable¹

Plusieurs distributions *a priori* pour \mathbb{G} sont envisageables (voir les articles de Muller *et al.* [Mul04] et Walker *et al.* [Wal99] pour un inventaire des différentes distributions *a priori*). On s'intéresse ici aux processus de Dirichlet (*Dirichlet Process*, DP), qui sont largement employés dans la littérature.

4.2 Processus de Dirichlet

4.2.1 Définition

Ferguson [Fer73, Fer74] a introduit le processus de Dirichlet comme une mesure de probabilité sur l'espace des mesures de probabilité.

Définition 4.1 Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un espace mesurable, \mathbb{G}_0 une mesure de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ et α un réel positif. Une distribution de probabilité \mathbb{G} est distribuée selon un processus de Dirichlet de distribution de base \mathbb{G}_0 et de facteur d'échelle α si pour n'importe quelle partition A_1, \dots, A_k de \mathcal{X} , le vecteur de probabilités aléatoires $[\mathbb{G}(A_1) \dots \mathbb{G}(A_k)]$ suit une distribution de Dirichlet :

$$[\mathbb{G}(A_1) \dots \mathbb{G}(A_k)] \sim \mathcal{D}(\alpha\mathbb{G}_0(A_1), \dots, \alpha\mathbb{G}_0(A_k)) \quad (4.5)$$

où \mathcal{D} est la distribution de Dirichlet standard, définie par l'équation (2.17).

On note ceci simplement par

$$\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha) \quad (4.6)$$

Le processus de Dirichlet est défini à partir de la distribution de Dirichlet, qui est une distribution sur un jeu de probabilités discrètes. Plusieurs des propriétés des processus de Dirichlet (conjugaison, formulation en urne de Polya) sont analogues

¹Cette propriété a perdu quelque peu de sa pertinence avec le développement des méthodes de Monte Carlo.

à celles de la distribution de Dirichlet. Le lecteur non familier avec cette dernière pourra se référer à l'annexe B.6.

Le processus de Dirichlet est défini par deux paramètres : la mesure de probabilité de base \mathbb{G}_0 et le paramètre d'échelle α . D'après l'équation (4.5), on montre que pour tout $B \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}_{DP(\mathbb{G}_0, \alpha)} [\mathbb{G}(B)] = \mathbb{G}_0(B) \quad (4.7)$$

$$\text{var}_{DP(\mathbb{G}_0, \alpha)} [\mathbb{G}(B)] = \frac{\mathbb{G}_0(B)(1 - \mathbb{G}_0(B))}{1 + \alpha} \quad (4.8)$$

4.2.2 Propriétés

Une propriété importante est que les réalisations d'un processus de Dirichlet sont discrètes [Bla73a], avec une probabilité 1. Sethuraman [Set94] a établi la représentation *stick-breaking*² des réalisations d'un DP, définie par

$$\mathbb{G}(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \delta_{U_j}(\cdot) \quad (4.9)$$

avec $U_j \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{G}_0$, $\pi_j = \beta_j \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \beta_l)$ et $\beta_j \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{B}(1, \alpha)$ où \mathcal{B} est la distribution beta standard.

Les réalisations d'un processus de Dirichlet peuvent donc être vues comme des mélanges infinis dénombrables de mesures de Dirac. Les locations U_j de ces fonctions de Dirac sont notées sous le nom de *cluster* par la suite. Sur la figure 4.1 sont représentées des réalisations $\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$ avec $\mathbb{G}_0 = \mathcal{N}(0, 1)$ et différentes valeurs de α .

Remarque 4.1 *On appelle classe des stick-breaking prior l'ensemble des processus pour lesquels la RPM prend la forme de l'équation (4.9) avec $U_j \sim \mathbb{G}_0$ et $\pi_j = \beta_j \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \beta_l)$. Les processus de cette classe diffèrent dans la façon d'obtenir les coefficients β_j . On peut citer :*

- le processus de beta à deux paramètres [Ish00]

$$\beta_j \sim \mathcal{B}(a, b)$$

- le processus de Pitman-Yor [Pit97] (aussi appelé processus de Poisson-Dirichlet à deux paramètres)

$$\beta_j \sim \mathcal{B}(1 - a, b + ja)$$

²L'expression *stick-breaking* provient de la façon d'obtenir les coefficients π_j . On considère un bâton de longueur initiale 1. A chaque instant j , on casse un morceau du bâton correspondant à β_j que multiplie sa longueur. On recommence ainsi avec le morceau restant. Les coefficients π_j correspondent à la longueur des morceaux cassés.

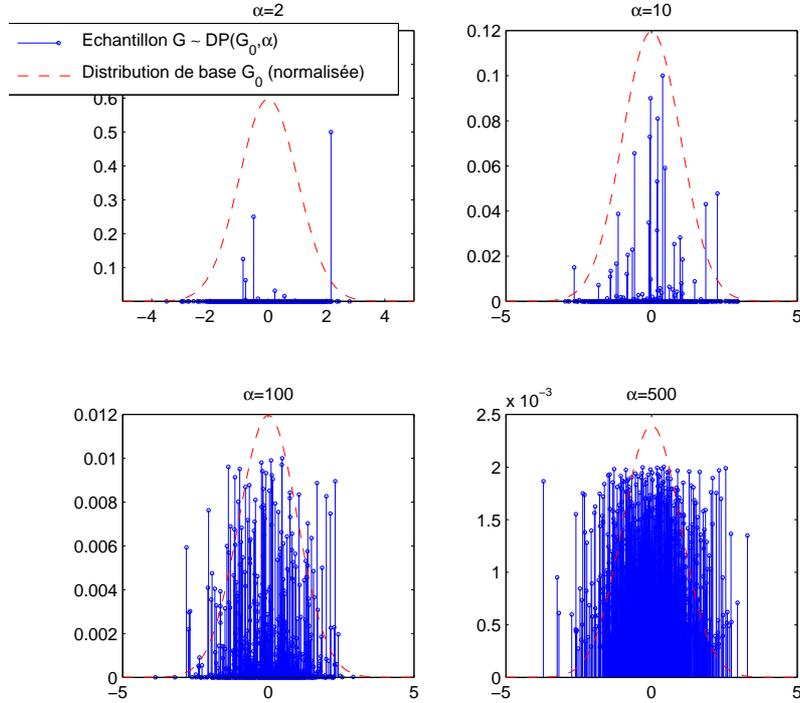


FIG. 4.1 – Représentation de réalisations de processus de Dirichlet $\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$ de distribution de base $\mathbb{G}_0 = \mathcal{N}(0, 1)$ pour différents coefficients d'échelle α . Ces réalisations sont obtenues à partir de la représentation *stick-breaking* (4.9) en simulant les K premiers éléments tels que $1 - \sum_{k=1}^K \pi_k > \epsilon$.

Une motivation fondamentale pour l'utilisation du processus de Dirichlet comme RPM est la simplicité de la mise à jour de la distribution *a posteriori*. Soient m échantillons $\theta_1, \dots, \theta_m$ échantillonnés de façon iid selon une distribution inconnue \mathbb{G}

$$\theta_1, \dots, \theta_m | \mathbb{G} \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{G} \quad (4.10)$$

et supposons que la RPM \mathbb{G} est distribuée selon un processus de Dirichlet de distribution de base \mathbb{G}_0 et de facteur d'échelle α , soit

$$\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha) \quad (4.11)$$

Dans ce cas, la distribution *a posteriori* $\Pr(\mathbb{G} | \theta_{1:m})$ est également un processus de Dirichlet³

$$\mathbb{G} | \theta_{1:m} \sim DP(\mathbb{G}'_0, \alpha') \quad (4.12)$$

³Ce résultat est analogue à celui de la distribution de Dirichlet prior conjuguée pour une loi multinomiale, cf. équation (B.3) en annexe B.6.

avec $\mathbb{G}'_0 = \frac{\alpha}{\alpha+m}\mathbb{G}_0 + \frac{1}{\alpha+m} \sum_{k=1}^m \delta_{\theta_k}$ et $\alpha' = \alpha + m$.

De plus, Blackwell [Bla73b] a démontré que la distribution prédictive, obtenue en marginalisant selon la RPM \mathbb{G} , admet la représentation en urne de Polya suivante

$$\theta_{m+1}|\theta_{1:m} \sim \frac{\alpha}{\alpha+m}\mathbb{G}_0 + \frac{1}{\alpha+m} \sum_{j=1}^m \delta_{\theta_j} \quad (4.13)$$

De ce fait, conditionnellement aux valeurs des variables latentes $\theta_{1:m}$ déjà échantillonnées, la probabilité que le nouvel échantillon soit identique à un échantillon précédent est $\frac{m}{\alpha+m}$, tandis que, avec la probabilité $\frac{\alpha}{\alpha+m}$, le nouvel échantillon est distribué (indépendamment) selon la distribution de base \mathbb{G}_0 . Il est à noter que plusieurs variables latentes θ_k peuvent avoir la même valeur, et donc être associées au même *cluster* U_j . Le nombre de valeurs distinctes de θ_k , noté M , est donc inférieur ou égal à m . L'ensemble $\{U_j, j \in \mathbb{N} | \exists k \in \{1, \dots, m\}, \theta_k = U_j\}$ est appelé l'ensemble des *clusters* animés (*alive clusters*). Comme le montre l'équation (4.13), il y a un effet de *clustering* : si m_j variables latentes θ_k ont pris la valeur du *cluster* U_j , la probabilité que le nouvel échantillon soit égal à cette valeur sera $\frac{m_j}{\alpha+m}$.

Le coefficient d'échelle α règle le nombre de valeurs distinctes M . Pour m large, Antoniak [Ant74] a montré que $\mathbb{E}[M|\alpha, m] \simeq \alpha \log(1 + \frac{m}{\alpha})$. Ainsi, quand α tend vers 0, la plupart des θ_k partagent la même valeur, tandis que lorsque α tend vers l'infini, les θ_k sont quasiment des échantillons iid selon \mathbb{G}_0 (voir la figure 4.1).

Dans la littérature, l'effet de *clustering* est souvent illustré à l'aide de la métaphore dite du « restaurant chinois », qui doit son nom au nombre supposé infini de tables qu'il contient. Cette métaphore est illustrée sur la figure 4.2.

4.3 Processus de Dirichlet à mélange

En choisissant comme distribution *a priori* pour la RPM \mathbb{G} le processus de Dirichlet, on peut reformuler le problème d'estimation de densité selon le modèle hiérarchique suivant, représenté sur la figure 4.3 et connu sous le nom de processus de Dirichlet à mélange [Ant74] (*Dirichlet Process Mixture*, DPM)

$$\mathbb{G}|\mathbb{G}_0, \alpha \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha) \text{ et, pour } k = 1 \dots m \quad (4.14a)$$

$$\theta_k|\mathbb{G} \sim \mathbb{G} \quad (4.14b)$$

$$\mathbf{y}_k \sim f(\cdot|\theta_k) \quad (4.14c)$$

La RPM \mathbb{G} est la distribution de mélange, distribuée selon un processus de Dirichlet $DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$. Les variables latentes θ_k sont distribuées selon \mathbb{G} . $f(\cdot|\theta_k)$ est la densité mélangée. En utilisant les équations (4.2) et (4.9), la distribution inconnue F prend la forme *a priori* suivante

$$F(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j f(\cdot|U_j) \quad (4.15)$$

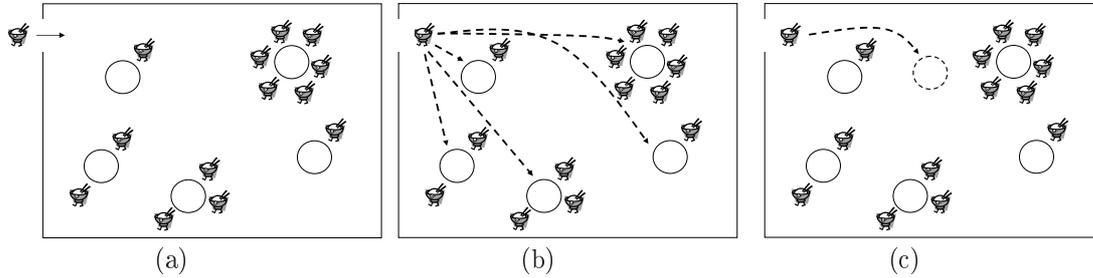


FIG. 4.2 – Métaphore du restaurant chinois. (a) Un nouveau client entre dans un restaurant où se trouve un nombre infini de tables. Seul un nombre fini de tables est occupé par une ou plusieurs personnes. Le nouveau client a alors deux choix possibles. Soit (b) il se joint à une table déjà occupée avec une probabilité proportionnelle au nombre de personnes à cette table. Soit (c) il s'assoit à une nouvelle table, avec une probabilité proportionnelle à α . La localisation de cette nouvelle table est alors tirée aléatoirement selon \mathbb{G}_0 .

avec $U_j \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{G}_0$, $\pi_j = \beta_j \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \beta_l)$ et $\beta_j \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{B}(1, \alpha)$. F est ainsi un mélange infini dénombrable de densités de probabilité $f(\cdot | U_j)$.

La figure 4.4 trace la densité F associée à une réalisation $\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$ avec une densité mélangée $f(\cdot | \theta)$ gaussienne. La densité F est un mélange infini dénombrable de densités de probabilités gaussiennes dont la distribution des pondération du mélange dépend de α et celle des moyennes de ces gaussiennes dépend de \mathbb{G}_0 . La figure 4.5 représente des réalisations d'un processus de Dirichlet à mélange de gaussiennes en 2 dimensions et met en évidence l'effet de *clustering*.

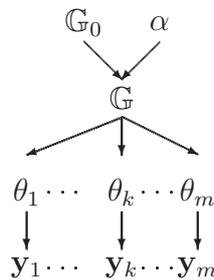


FIG. 4.3 – Modèle statistique hiérarchique d'un processus de Dirichlet à mélange. La RPM \mathbb{G} est distribuée selon un processus de Dirichlet de distribution de base \mathbb{G}_0 et de facteur d'échelle α . Chacune des variables latentes θ_k , $k = 1, \dots, m$ est ensuite distribuée selon \mathbb{G} . Les échantillons \mathbf{y}_k sont finalement distribués selon la densité de mélange $f(\cdot | \theta_k)$.

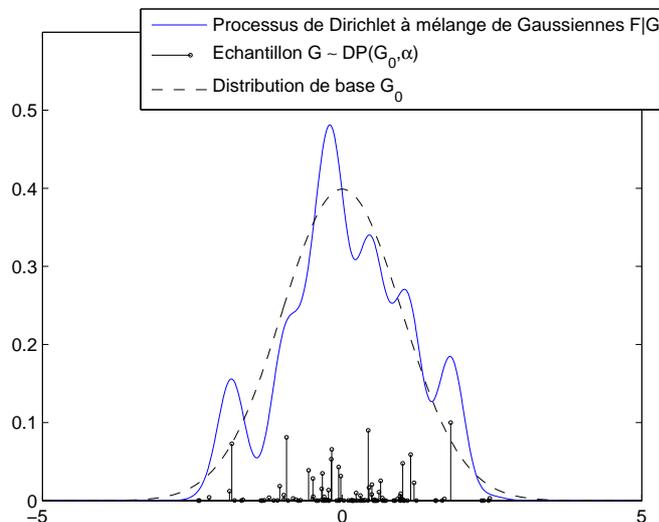


FIG. 4.4 – Réalisation $\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$ d'un processus de Dirichlet de distribution de base $\mathbb{G}_0 = \mathcal{N}(0, 1)$ et de facteur d'échelle $\alpha = 10$ et densité de probabilité $F(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} f(\cdot|\theta)d\mathbb{G}(\theta)$ associée avec $f(\cdot|\theta) = \mathcal{N}(\cdot; \theta, 0.1)$.

Neal [Nea00] a par ailleurs montré que le processus de Dirichlet à mélange défini par l'équation (4.14) était équivalent au modèle fini Dirichlet-multinomial suivant, lorsque p tend vers l'infini

$$U_1, \dots, U_p | \mathbb{G}_0 \sim \mathbb{G}_0 \quad (4.16a)$$

$$\pi_1, \dots, \pi_p | \alpha \sim \mathcal{D}\left(\frac{\alpha}{p}, \dots, \frac{\alpha}{p}\right) \text{ et, pour } k = 1, \dots, m \quad (4.16b)$$

$$c_k | \pi_{1:p} \sim \text{Multinomial}(\pi_{1:p}, t) \quad (4.16c)$$

$$\mathbf{z}_k | c_k, U_{1:p} \sim f(\cdot | U_{c_k}) \quad (4.16d)$$

Les variables $c_k \in \{1, \dots, p\}$, pour $k = 1, \dots, m$, sont appelées variables d'allocation d'une mesure \mathbf{z}_k à un *cluster* U_{c_k} , et l'on a la relation $\theta_k = U_{c_k}$. Les variables d'allocations c_k sont distribuées selon le vecteur de probabilité $\pi_{1:p}$, lui-même distribué selon une distribution de Dirichlet. Lorsque $p \rightarrow \infty$, en marginalisant selon le vecteur de probabilité $\pi_{1:p}$, on a la propriété en urne de Polya suivante

$$\begin{cases} \Pr(c_{m+1} = j | c_1, \dots, c_m) = \frac{m_j}{\alpha + m} & \forall j \in \{c_1, \dots, c_m\} \\ \Pr(c_{m+1} \neq c_i \forall i \leq m | c_1, \dots, c_m) = \frac{\alpha}{\alpha + m} \end{cases} \quad (4.17)$$

avec $m_j = \sum_{i=1}^m \delta_{c_i}(j)$ le nombre de variables d'allocations c_i , $i \leq m$, prenant la valeur j . Une variable d'allocation prend donc une valeur précédemment échantillonnée j proportionnellement à m_j , et prend une nouvelle valeur (correspondant à

un nouveau *cluster*) proportionnellement à α . La représentation donnée par l'équation (4.16) permet, contrairement à la formulation de l'équation (4.14), de dissocier l'échantillonnage des valeurs des *clusters* d'une part, et les variables d'allocation d'une mesure à un cluster spécifique d'autre part.

Dans cette représentation, contrairement à la représentation *stick-breaking*, la numération des variables d'allocation et des *clusters* n'a pas d'importance, car il y a équivalence entre les différentes classes [Nea00, Por06]. En effet la règle de prédiction (4.17) opère dans l'espace des classes d'équivalence par rapport aux labels des *clusters* ($c_1 = c_2 \neq c_3 = c_4 = c_5 \dots$), tandis que la représentation *stick-breaking* donnée par l'équation (4.9) est définie dans l'espace de la définition explicite des labels ($c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 8, c_4 = 8, c_5 = 8, \dots$). Ceci est dû au fait que dans la construction *stick-breaking*, les poids sont ordonnés en moyenne ($\mathbb{E}[\pi_1] < \mathbb{E}[\pi_2] < \dots$).

4.4 Méthodes d'approximation de la distribution *a posteriori*

Les variables inconnues sont la RPM \mathbb{G} et les variables latentes $\theta_{1:m}$. Dans le cas général, on cherche à estimer la densité *a posteriori* complète $p(\mathbb{G}, \theta_{1:m} | \mathbf{y}_{1:m})$ ou, de façon équivalente, $p(U_{1:\infty}, \beta_{1:\infty}, \theta_{1:m} | \mathbf{y}_{1:m})$. Deux approches, basées sur un échantillonnage de Gibbs, sont envisageables :

- l'approche marginale,
- l'approche conditionnelle.

L'approche marginale consiste à intégrer analytiquement suivant la mesure de probabilité aléatoire \mathbb{G} et à estimer la densité *a posteriori* marginale $p(\theta_{1:m} | \mathbf{y}_{1:m})$, en utilisant la représentation en urne de Polya. L'approche conditionnelle [Pap05] utilise l'échantillonnage rétrospectif [Pap03] (*retrospective sampling*) et la modélisation sous la forme *stick-breaking* afin d'estimer la densité *a posteriori* complète $p(U_{1:\infty}, \beta_{1:\infty}, \theta_{1:m} | \mathbf{y}_{1:m})$. Seules les méthodes par échantillonnage marginal sont abordées dans cette thèse. On pourra se reporter à l'article de Papaspiliopoulos et Roberts [Pap03] pour un exposé complet de l'échantillonnage rétrospectif pour les DPMs.

Deux approches sont envisageables pour l'échantillonnage marginal. Soit l'on cherche à estimer directement la densité marginale $p(\theta_{1:m} | \mathbf{y}_{1:m})$ à partir du modèle hiérarchique (4.14) [Esc94, Esc95, Nea00], soit l'on estime conjointement les variables d'allocation $\mathbf{c}_{1:m}$ et les *clusters* vivants U_j à partir du modèle hiérarchique (4.16) [Nea00].

4.4.1 Échantillonnage marginal : algorithme d'Escobar

Plusieurs méthodes, basées sur des algorithmes MCMC [Esc92, Esc95, Nea00, Mac00c] ou d'échantillonnage d'importance séquentiel [Mac99, Fea04], ont été dé-

veloppées afin d'estimer la distribution *a posteriori* marginale $p(\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m})$. On s'intéresse ici aux méthodes MCMC par échantillonnage de Gibbs qui utilisent la représentation en urne de Polya (voir l'équation (4.13)) du processus de Dirichlet. L'algorithme suivant a été développé par Escobar *et al.* [Esc94, Esc95], et repris de façon détaillée par Neal [Nea00].

On note $\theta_{-k} = \{\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \dots, \theta_m\}$. La distribution *a priori* conditionnelle est donnée, d'après le modèle de l'urne de Polya, par

$$\theta_k|\theta_{-k} \sim \frac{\alpha}{\alpha + m - 1} \mathbb{G}_0 + \frac{1}{\alpha + m - 1} \sum_{j=1, j \neq k}^m \delta_{\theta_j} \quad (4.18)$$

La densité $p(\theta_k|\theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m})$ s'exprime, en appliquant la règle de Bayes, par

$$p(\theta_k|\theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m}) \propto p(\mathbf{y}_{1:m}|\theta_{1:m})p(\theta_k|\theta_{-k})$$

soit

$$\theta_k|\theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m} \sim r_k H_k + \sum_{j=1, j \neq k}^m q_{j,k} \delta_{\theta_j} \quad (4.19)$$

avec

$$\begin{aligned} H_k(d\theta_k) &= \frac{f(\mathbf{y}_k|\theta_k) \mathbb{G}_0(d\theta_k)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{y}_k|\theta) d\mathbb{G}_0(\theta)} \\ r_k &= C\alpha \int_{\Theta} f(\mathbf{y}_k|\theta) d\mathbb{G}_0(\theta) \\ q_{j,k} &= C f(\mathbf{y}_k|\theta_j) \end{aligned}$$

où C est une constante de normalisation telle que $\sum_{j=1, j \neq k}^m q_{j,k} + r_k = 1$.

Echantillonner directement selon $p(\theta_k|\theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m})$ nécessite le calcul de l'intégrale $\int_{\Theta} f(\mathbf{y}_k|\theta) d\mathbb{G}_0(\theta)$. Ceci est réalisable de façon analytique si la densité mélangée $f(\cdot|\theta)$ et la distribution de base \mathbb{G}_0 sont conjuguées, par exemple dans le cas où elles sont toutes deux gaussiennes. Dans le cas contraire, on peut échantillonner selon $p(\theta_k|\theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m})$ à partir d'un pas de Metropolis-Hastings, où la densité de probabilité candidate est la densité *a priori* conditionnelle $p(\theta_k|\theta_{-k})$. L'algorithme permettant d'échantillonner simplement selon la loi $p(\theta_k|\theta_{-k})$ est donné en annexe C.3. La probabilité d'acceptance est

$$\rho(\theta_k^{(i-1)}, \theta_k^{(i)*}) = \min\left(1, \frac{f(\mathbf{y}_k|\theta_k^{(i)*})}{f(\mathbf{y}_k|\theta_k^{(i-1)})}\right) \quad (4.20)$$

L'algorithme 4.1 résume les étapes nécessaires pour échantillonner selon $p(\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m})$.

Remarque 4.2 *L'algorithme 4.1 produit une chaîne de Markov ergodique, mais la convergence vers la distribution a posteriori peut être assez lente [Nea98]. Le*

Algorithme 4.1 Algorithme de Gibbs pour échantillonner selon $p(\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m})$

• **Etape 4.1.1 Initialisation**

Pour $k = 1 \dots m$ échantillonner $\theta_k^{(1)}$

• **Etape 4.1.2 Itérations**

Pour $i = 1 \dots N$

• Pour $k = 1 \dots m$

Echantillonner $\theta_k^{(i)} | \{\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{k-1}^{(i)}, \theta_{k+1}^{(i-1)}, \dots, \theta_m^{(i-1)}\}, \mathbf{y}_{1:m}$:

– Directement selon l'équation (4.19) si $f(\mathbf{y}_k|\cdot)$ et $\mathbb{G}_0(\cdot)$ sont conjuguées.

– Sinon, faire un pas d'algorithme de Metropolis-Hastings :

– échantillonner $\theta_k^{(i)*} \sim p(\theta_k | \theta_{-k}^{(i)})$

– avec la probabilité $\rho(\theta_k^{(i-1)}, \theta_k^{(i)*})$ faire $\theta_k^{(i)} = \theta_k^{(i)*}$, sinon faire $\theta_k^{(i)} = \theta_k^{(i-1)}$.

problème est qu'il y a souvent des groupes d'échantillons qui sont associés à la même valeur θ_k avec une grande probabilité. Or, comme l'algorithme ne peut changer les θ_k pour plus d'un échantillon simultanément, les changements des valeurs de θ_k se produisent très rarement, car ils nécessitent le passage par un état intermédiaire de faible probabilité dans lequel les échantillons du groupe ne sont pas associés au même θ_k .

L'estimation de la densité inconnue F revient à l'approximation de la densité prédictive $p(\mathbf{y}_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m})$. Celle-ci s'exprime par

$$p(\mathbf{y}_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m}) = \int_{\Theta} p(\mathbf{y}_{m+1}|\theta_{m+1}) \Pr(d\theta_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m}) \quad (4.21)$$

On recherche une approximation de la distribution $\Pr(d\theta_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m})$. Cette distribution s'exprime par

$$\Pr(d\theta_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m}) = \int_{\Theta^m} \Pr(d\theta_{m+1}|\theta_{1:m}) \Pr(d\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m}) \quad (4.22)$$

avec $\Pr(d\theta_{m+1}|\theta_{1:m}) = \frac{\alpha}{\alpha+m} \mathbb{G}_0(d\theta_{m+1}) + \frac{1}{\alpha+m} \sum_{j=1}^m \delta_{\theta_j}(d\theta_{m+1})$. L'algorithme 4.1 permet l'approximation de la distribution $\Pr(d\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m})$ par la distribution empirique

$$P_N(d\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\theta_{1:m}^{(i)}}(d\theta_{1:m})$$

En propageant chacune des particules $\theta_{1:m}^{(i)}$ par le noyau de transition $\Pr(d\theta_{m+1}|\theta_{1:m})$, on obtient N nouvelles particules $\theta_{m+1}^{(i)}$ qui permettent d'approcher la distribution $\Pr(d\theta_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m})$ par la distribution empirique

$$P_N(d\theta_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\theta_{m+1}^{(i)}}(d\theta_{m+1}) \quad (4.23)$$

et, à partir de l'équation (4.21), on obtient

$$p(\mathbf{y}_{m+1}|\mathbf{y}_{1:m}) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{y}_{m+1}|\theta_{m+1}^{(i)}) \quad (4.24)$$

L'algorithme d'approximation de la densité inconnue F est finalement donné par l'algorithme 4.2.

Algorithme 4.2 Algorithme d'approximation de la densité F

- Etape 4.2.1 Pour $i = 1, \dots, N$, échantillonner $\theta_{1:m}^{(i)}$ par MCMC selon l'algorithme 4.1
- Etape 4.2.2 Pour $i = 1..N$, échantillonner $\theta_{m+1}^{(i)}|\theta_{1:m}^{(i)} \sim p(\theta_{m+1}|\theta_{1:m}^{(i)})$
- Etape 4.2.3 Approcher la densité F par

$$F(\cdot) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\cdot|\theta_{m+1}^{(i)})$$

4.4.2 Echantillonnage marginal : algorithme de Neal

Afin de résoudre le problème de la convergence lente de l'algorithme précédent, Neal [Nea00] a proposé un algorithme basé sur le modèle (4.16). Cet algorithme décompose l'échantillonnage de Gibbs en deux étapes. Les variables d'allocation c_k sont tout d'abord échantillonnées, afin de définir des groupes d'observations. Puis, pour chaque groupe, la valeur du *cluster* U_j associé à ce groupe est mise à jour. Cet algorithme permet donc de modifier la valeur d'un *cluster* associé à un groupe de mesures pour l'ensemble de celles-ci, et d'éviter le problème de l'algorithme précédent.

On note $X(\mathbf{c}_{1:m})$ l'ensemble des valeurs différentes prises par les variables d'allocation $\mathbf{c}_{1:m}$ et $U_{X(\mathbf{c}_{1:m})}$ l'ensemble des *clusters* associés. L'objectif est alors d'estimer par échantillonnage de Gibbs la densité *a posteriori* $p(\mathbf{c}_{1:m}, U_{X(\mathbf{c}_{1:m})}|\mathbf{y}_{1:m})$.

On note $\mathbf{c}_{-k} = \{c_i, i = 1, \dots, m|i \neq k\}$ et $m_{-k,j}$ le nombre de c_i , $i \neq k$ qui sont égaux à j . D'après l'équation (4.17) et en appliquant la règle de Bayes, on a

$$\begin{cases} \Pr(c_k = j|\mathbf{c}_{-k}) = \frac{m_{-k,j}}{\alpha+m-1} & \forall j \in X(\mathbf{c}_{-k}) \\ \Pr(c_k \neq c_i \forall i \neq k|\mathbf{c}_{-k}) = \frac{\alpha}{\alpha+m-1} \end{cases} \quad (4.25)$$

et en appliquant la règle de Bayes, on obtient

$$\begin{cases} \Pr(c_k = j|\mathbf{c}_{-k}, \mathbf{y}_k, U_{X(\mathbf{c}_{-k})}) = b \frac{m_{-k,j}}{\alpha+m-1} f(y_k|U_j) & \forall j \in X(\mathbf{c}_{-k}) \\ \Pr(c_k \neq c_i \forall i \neq k|\mathbf{c}_{-k}, \mathbf{y}_k, U_{X(\mathbf{c}_{-k})}) = b \frac{\alpha}{\alpha+m-1} \int_{\Theta} f(\mathbf{y}_k|\theta) d\mathbb{G}_0(\theta) \end{cases} \quad (4.26)$$

où b est une constante de normalisation telle que la somme de ces probabilités vaille 1. De la même façon que pour l'algorithme précédent, le calcul analytique de ces probabilités nécessite le calcul de l'intégrale $\int_{\Theta} f(\mathbf{y}_k|\theta)d\mathbb{G}_0(\theta)$. Dans le cas où cette intégrale ne peut se calculer analytiquement, on peut échantillonner selon (4.26) avec un pas de Metropolis-Hastings, en utilisant (4.25) comme loi de probabilité candidate.

Une fois que les variables d'allocations sont mises à jour, les *clusters* animés U_j , $j \in X(\mathbf{c}_{1:m})$ sont ensuite mis à jour selon la densité suivante

$$p(U_j|\mathbf{c}_{1:m}, \mathbf{y}_{1:m}) \propto \mathbb{G}_0(U_j) \prod_{i|c_i=j} f(\mathbf{y}_i|U_j) \quad (4.27)$$

Le calcul analytique de l'équation (4.27) est possible si \mathbb{G}_0 est conjuguée pour $f(\mathbf{y}_i|\cdot)$. Dans le cas contraire, on peut échantillonner avec un pas de Metropolis-Hastings en prenant \mathbb{G}_0 comme densité de probabilité candidate.

L'algorithme 4.3 résume les étapes nécessaires pour échantillonner selon $p(\mathbf{c}_{1:m}, U_{X(\mathbf{c}_{1:m})}|\mathbf{y}_{1:m})$.

Algorithme 4.3 Algorithme de Gibbs pour échantillonner selon $p(\mathbf{c}_{1:m}, U_{X(\mathbf{c}_{1:m})}|\mathbf{y}_{1:m})$

• **Etape 4.3.1 Initialisation**

- Pour $k = 1 \dots m$ échantillonner $c_k^{(1)}$
- Pour $j \in X(\mathbf{c}_{1:m}^{(1)})$, échantillonner $U_j^{(1)} \sim \mathbb{G}_0$

• **Etape 4.3.2 Itérations**

Pour $i = 1 \dots N$

• Pour $k = 1 \dots m$

Echantillonner $c_k^{(i)}|\{c_1^{(i)}, \dots, c_{k-1}^{(i)}, c_{k+1}^{(i-1)}, \dots, c_m^{(i-1)}\}, \mathbf{y}_{1:m}$:

Directement selon l'équation (4.26) si $f(\mathbf{y}_k|\cdot)$ et $\mathbb{G}_0(\cdot)$ sont conjuguées, ou avec un pas de Metropolis-Hastings. Si $c_k^{(i)}$ prend une nouvelle valeur, échantillonner $U_{c_k^{(i)}}^{(i-1)}|\mathbf{y}_k$, directement ou avec un pas de Metropolis-Hastings.

- Pour $j \in X(\mathbf{c}_{1:m}^{(i)})$, échantillonner $U_j^{(i)}$ directement selon l'équation (4.27) ou avec un pas de Metropolis-Hastings.
-

En notant $\theta_k^{(i)} = U_{c_k^{(i)}}^{(i)}$, on obtient donc une approximation de la densité *a posteriori* $p(\theta_{1:m}|\mathbf{y}_{1:m})$. Les équations du paragraphe précédent peuvent alors être appliquées afin d'estimer la densité de probabilité F .

4.4.3 Estimation des hyperparamètres

Les algorithmes précédents supposent connus le coefficient d'échelle α ainsi que les hyperparamètres associés à la distribution de base \mathbb{G}_0 , notés ψ . Ces hyperparamètres peuvent également être considérés comme inconnus, afin d'ajouter un degré de flexibilité à l'algorithme. On cherche alors à estimer la densité *a posteriori*

$p(\theta_{1:m}, \alpha, \psi | \mathbf{y}_{1:m})$ par échantillonnage de Gibbs à l'aide des densités conditionnelles $p(\theta_k | \mathbf{y}_{1:m}, \theta_{-k}, \alpha, \psi)$ (pour $k = 1, \dots, m$), $p(\alpha | \theta_{1:m}, \psi, \mathbf{y}_{1:m})$ et $p(\psi | \theta_{1:m}, \alpha, \mathbf{y}_{1:m})$. Les formulations des deux dernières densités conditionnelles sont données dans les paragraphes suivants. Quelques précisions seront également apportées sur le comportement de ces hyperparamètres et leur influence par rapport aux autres variables.

a) Paramètre d'échelle α du processus de Dirichlet

Le paramètre d'échelle α conditionne le nombre de *clusters* ayant un poids significatifs. Si α est petit, la distribution de mélange \mathbb{G} va se concentrer sur quelques *clusters* ayant un poids important. Si α est grand, la distribution \mathbb{G} va avoir plusieurs points de support et le modèle non paramétrique devient "plus proche" [Esc92] de la distribution de base \mathbb{G}_0 .

Soit u_k une variable aléatoire binaire, prenant la valeur 1 si θ_k est une nouvelle valeur, et 0 sinon. On a

$$\Pr(u_m = 1 | \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, \alpha, G_0) = \Pr(u_m = 1 | m, \alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + m - 1}$$

Soit M le nombre de valeurs distinctes de θ_k qui sont apparues dans les m premières observations. Bien que la probabilité d'apparition d'un nouveau *cluster* $\Pr(u_m = 1 | m, \alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + m - 1}$ soit monotone décroissante en m , M vérifie [Ant74]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M | \alpha, m] &= \sum_{k=1}^m \frac{\alpha}{\alpha + k - 1} \\ &\simeq \alpha \ln \frac{m + \alpha}{\alpha} \text{ lorsque } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

De ce fait, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M | \alpha, m] = \infty$. En clair, bien que de nouvelles valeurs de *clusters* n'apparaissent que de plus en plus rarement, on est néanmoins assuré d'obtenir un nombre toujours croissant de *clusters* différents. De plus, le taux d'apparition de nouvelles valeurs de *clusters* ne dépend que du facteur d'échelle α et non de la distribution de base \mathbb{G}_0 , qui détermine quant à elle seule la distribution des M valeurs distinctes.

La probabilité conditionnelle de M s'exprime par

$$\Pr(M | \alpha, m) = \frac{s(m, M) \alpha^M}{\sum_{k=1}^m s(m, k) \alpha^k}$$

où les $s(m, k)$ sont les valeurs absolues des nombres de Stirling de première espèce (cf. [Abr65] ou [Wei]). Le coefficient d'échelle α ne dépend que du nombre M de variables latentes ayant des valeurs différentes et du nombre m d'échantillons, et non des valeurs des θ_k . C'est là un des intérêts majeurs des DPMs : le nombre de

clusters animés est indépendant de leur localisation, et réciproquement. La densité conditionnelle $p(\alpha|\theta_{1:m}, \psi, \mathbf{y}_{1:m})$ se réduit donc à $p(\alpha|M, m)$ et s'exprime par

$$\begin{aligned} p(\alpha|M, m) &\propto \Pr(M|\alpha, m)p(\alpha|m) \\ &\propto \frac{s(m, M)\alpha^M}{\sum_{k=1}^m s(m, k)\alpha^k} p(\alpha|m) \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec $p(\alpha|m)$ la densité *a priori* de α , qui peut dépendre ou non du nombre d'échantillons m . On utilise souvent une loi gamma. Il est possible d'échantillonner selon $p(\alpha|M, m)$ par un algorithme de Metropolis-Hastings, et d'insérer l'échantillonnage conditionnel de α dans les algorithmes d'échantillonnage de Gibbs développés précédemment.

Pour une autre méthode permettant un calcul et un échantillonnage directs (en utilisant comme distribution *a priori* une loi gamma) on peut se référer à West [Wes92] et Escobar et West [Esc95].

b) Hyperparamètres de la distribution de base \mathbb{G}_0

On suppose que la distribution de base \mathbb{G}_0 dépend d'hyperparamètres ψ inconnus que l'on souhaite estimer. On définit pour cela une densité *a priori* $p(\psi)$ de ces hyperparamètres. La densité conditionnelle $p(\psi|\theta_{1:m}, \alpha, \mathbf{y}_{1:m})$ se réduit à $p(\psi|\theta'_{1:M})$ avec $\theta'_{1:M}$ l'ensemble des valeurs de *cluster* différentes. Elle est donnée par

$$p(\psi|\theta'_{1:M}) \propto p(\psi) \prod_{k=1}^M \mathbb{G}_0(\theta'_k|\psi) \quad (4.29)$$

L'échantillonnage peut se faire par Metropolis-Hastings, ou par échantillonnage direct si la forme de la distribution \mathbb{G}_0 le permet.

4.5 Discussion

4.5.1 Repères bibliographiques

Les processus de Dirichlet ont été introduits en 1973 par Ferguson [Fer73, Fer74] puis plusieurs travaux de Blackwell [Bla73b], Antoniak [Ant74] et Sethuraman [Set94] ont complété cet apport initial. Bien que les processus de Dirichlet à mélange aient été introduits dans les années 70, ces modèles étaient trop complexes à appréhender numériquement avant l'introduction de méthodes de Monte Carlo dédiées à ces modèles ces 15 dernières années [Esc92, Esc95, Nea00]. L'intérêt pour les processus de Dirichlet a ainsi accompagné, dans une moindre mesure, celui pour les méthodes de Monte Carlo, qu'elles soient itératives ou séquentielles. Ces modèles ont été depuis appliqués dans des domaines aussi variés que l'économétrie [Gri04], la géoscience [Pie00] et la biologie [Xin06, Do05, Med02].

4.5.2 A propos de la modélisation par processus de Dirichlet

Les processus de Dirichlet à mélange ont plusieurs caractéristiques intéressantes. Tout d'abord, échantillonner selon la distribution *a posteriori* est rendu particulièrement facile grâce à la formulation en urne de Polya. De plus, le caractère discret de la RPM \mathbb{G} permet une estimation directe du nombre de composantes, sans nécessiter d'outils supplémentaires tels que les sauts réversibles (*reversible jumps*). Cet aspect discret a cependant certains effets indésirés sur l'inférence, qui ont été reportés dans [Pet97] et [Gre01a]. Par exemple, le DP tend à favoriser un déséquilibre entre les tailles des groupes de variables latentes associées à un même cluster U_j , et à concentrer la distribution *a posteriori* du nombre de groupes sur une valeur plus importante. Un autre aspect insatisfaisant du DP est le rôle joué par le coefficient d'échelle α [Wal99]. En effet, ce paramètre contrôle à la fois le côté lisse ou discret (voir l'équation (4.9)) de la distribution aléatoire et la variabilité de \mathbb{G} par rapport à la distribution de base \mathbb{G}_0 (voir l'équation (4.8)). Pour une variabilité maximale, le paramètre α devrait tendre vers 0, mais dans ce cas \mathbb{G} converge en probabilité vers une mesure aléatoire concentrée en un seul point. Les arbres de Polya (*Polya trees*), qui sont une généralisation des processus de Dirichlet, ont été proposés pour résoudre ces inconvénients [Wal99], mais ces modèles souffrent cependant de plusieurs limitations pratiques [Mul04].

4.6 Conclusion

Ce chapitre a donné une revue des méthodes non paramétriques d'estimation de densité par processus de Dirichlet à mélange. Les DPMS bénéficient de plusieurs avantages. Tout d'abord, l'échantillonnage selon la densité *a posteriori* est rendu particulièrement aisé grâce à la représentation en urne de Polya. Ensuite, le caractère discret de la distribution \mathbb{G} permet l'estimation directe du nombre de composantes, sans nécessiter d'autres approches telles que les sauts réversibles (*reversible jump*). Les processus de Dirichlet réalisent un compromis attractif entre la flexibilité du modèle et les avantages algorithmiques, ce qui explique leur succès dans de nombreux contextes. Dans le chapitre suivant, les DPMS sont utilisés pour estimer les densités de probabilité des séquences de bruits d'évolution et d'observation dans les modèles dynamiques linéaires.

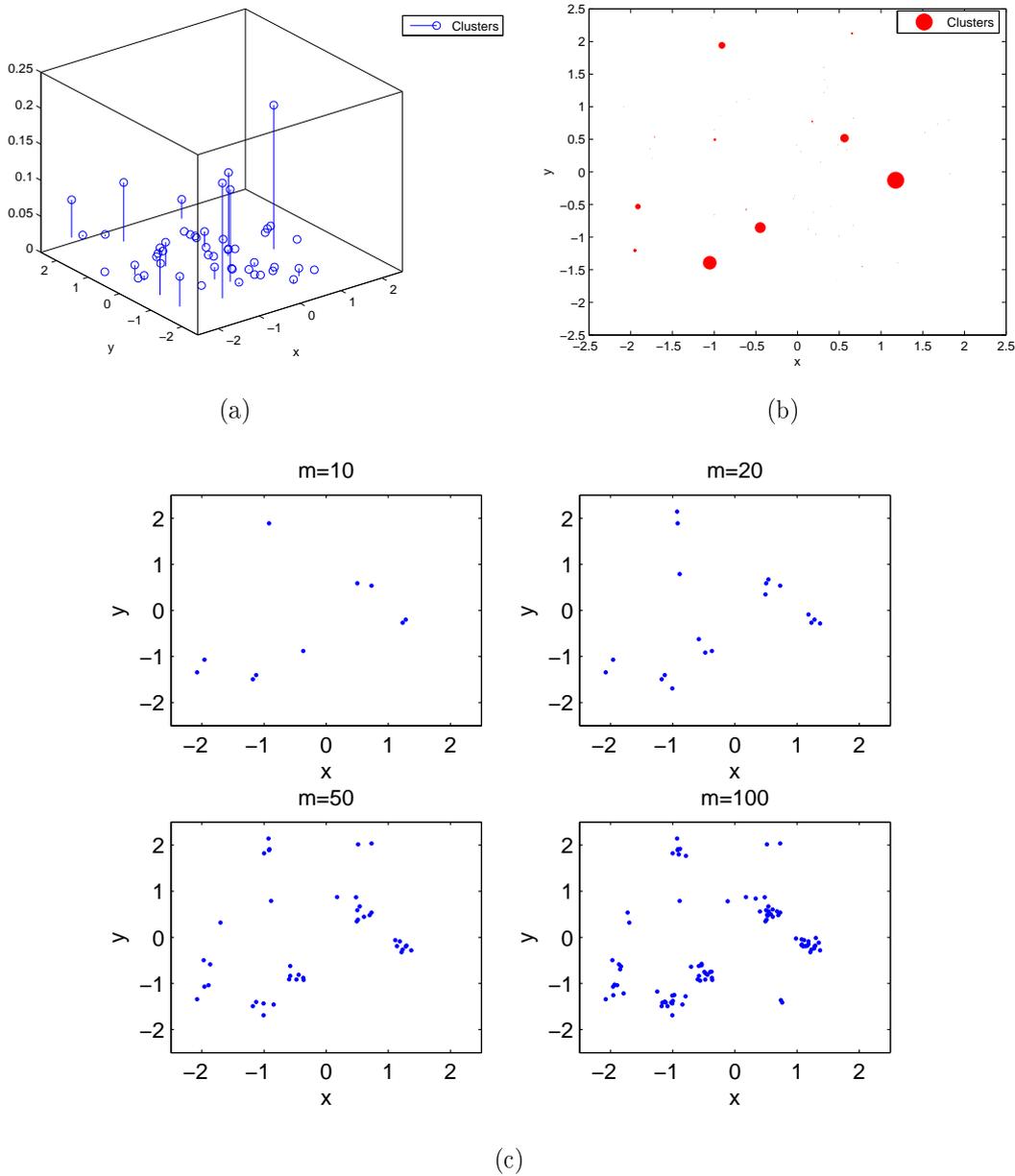


FIG. 4.5 – On considère une réalisation $\mathbb{G} \sim DP(\mathbb{G}_0, \alpha)$ avec $\mathbb{G}_0 = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \Sigma_0)$, $\alpha = 5$, $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$ et Σ_0 la matrice identité d'ordre 2. La figure (a) représente la réalisation \mathbb{G} . Cette réalisation est discrète et consiste en un mélange infini de mesures de Dirac, dont les localisations sont distribuées selon la distribution de base \mathbb{G}_0 , et les pondérations par le facteur d'échelle α . La figure (b) représente la même réalisation, mais en 2D. La taille des points est proportionnelle à la pondération associée au *cluster*. La figure (c) représente des réalisations du DPM de gaussiennes associé à la réalisation \mathbb{G} , avec comme densité mélangée la gaussienne $f(\cdot|\theta) = \mathcal{N}(\cdot; \theta, 0.01\Sigma_0)$, ceci pour $m = 20, 30, 50, 100$ réalisations. Les échantillons d'un DPM ne mettent à jour qu'un nombre fini de *clusters*. Cependant, de nouveaux échantillons permettent de mettre à jour des *clusters* antérieurement non observés.

CHAPITRE 5

Processus de Dirichlet à mélange pour l'inférence bayésienne dans les modèles dynamiques linéaires

5.1 Introduction

Les modèles dynamiques linéaires sont utilisés dans une grande variété d'applications, comprenant la poursuite de cibles, l'identification de systèmes, la détection de rupture, etc. Le modèle, introduit au paragraphe 1.2, est le suivant

$$\mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mathbf{v}_t \quad (5.1)$$

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (5.2)$$

où \mathbf{x}_t est le vecteur d'état caché, \mathbf{z}_t est l'observation, \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont des séquences de variables aléatoires indépendantes. F_t et H_t sont les matrices connues d'évolution de l'état et d'observation, \mathbf{u}_t est une entrée connue, C_t est la matrice de transition de l'entrée et G_t est la matrice de transition du bruit d'état. L'objet principal du modèle (5.1)-(5.2) est de permettre l'estimation de l'état caché \mathbf{x}_t connaissant les observations $\mathbf{z}_{1:t}$ (filtrage) ou $\mathbf{z}_{1:T}$ pour $t \leq T$ (lissage).

Il est couramment supposé que les séquences de bruit \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont gaussiennes, de paramètres connus, car cela permet alors l'utilisation du filtre ou du lisseur de Kalman (voir le paragraphe 1.2). Dans un tel cadre, les techniques de Kalman sont optimales. Cependant, il y a un certain nombre de situations où ces hypothèses gaussiennes sont inadéquates, par exemple lorsque la distribution réelle du bruit d'état ou d'observation est multimodale. Plusieurs exemples de ce type sont présentés au paragraphe 5.6. Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc au problème de *l'estimation optimale de l'état lorsque les densités de probabilité des séquences de*

bruits sont inconnues et doivent être estimées en ligne ou hors ligne à partir des données.

5.1.1 Approche proposée

La méthodologie proposée [Car06a] repose sur l'introduction de processus de Dirichlet à mélange (DPMs), qui sont utilisés pour modéliser les densités de probabilité inconnues du bruit d'état \mathbf{v}_t et du bruit de mesure \mathbf{w}_t . Les DPMs sont des modèles non paramétriques bayésiens flexibles qui sont devenus très populaires en statistiques ces dernières années, permettant l'estimation non paramétrique de densités [Wal99, Nea00, Mul04]. Les fondamentaux de l'estimation de densité à l'aide des processus de Dirichlet à mélange ont été donnés au chapitre 4. De façon concise, un DPM peut être vu comme un mélange infini de densités de probabilité avec une forme paramétrique donnée (par exemple gaussienne). Les paramètres du mélange (poids du mélange et location des *clusters*) sont donnés par la distribution de mélange aléatoire \mathbb{G} , qui est distribuée selon un processus de Dirichlet.

Une distribution *a priori*, notée \mathbb{G}_0 doit être choisie sur l'espace des *clusters*, tandis que les poids sont échantillonnés selon une distribution caractérisée par un paramètre réel positif α . Pour α faible, une petite fraction des poids est significativement différente de zéro, tandis que pour α grand, un grand nombre des poids est différent de zéro. Ainsi, le paramètre α règle le nombre de paramètres réels dans le mélange (c'est-à-dire, le nombre de composantes ayant un poids significativement différent de zéro), sans définir un nombre précis de composantes. Plus encore que cette propriété puissante et implicite de *clustering*, les DPMs sont très attractifs d'un côté algorithmique grâce à la représentation dite d'urne de Polya (cf. équation (4.13)), qui permet des calculs directs des distributions conditionnelles complètes associées aux variables latentes θ .

5.1.2 Contexte

Plusieurs algorithmes ont été développés afin d'estimer les statistiques des bruits dans les systèmes dynamiques linéaires [Meh70, Mye76, Mai81, Mar04]. Cependant, ces algorithmes font l'hypothèse de densités de probabilité gaussiennes (dont les moyenne et matrice de covariance sont inconnues). Comme mis en évidence par la suite, ceci est un cas particulier de notre approche : si le coefficient d'échelle α tend vers 0, les réalisations d'un DPM de densités de probabilité gaussiennes convergent en distribution vers une simple gaussienne dont la distribution *a priori* des paramètres est donnée par la distribution de base \mathbb{G}_0 .

Bien que de nombreux travaux aient été consacrés aux DPMs dans des domaines aussi variés que l'économétrie [Gri04], la géoscience [Pie00] et la biologie [Do05, Med02], cette puissante classe de modèle n'a, à notre connaissance, jamais été utilisée dans le contexte de modèles dynamiques linéaires. Dans ce chapitre, nous montrons que les modèles dynamiques basés sur les DPMs avec des distributions de

bruit inconnues peuvent être définis de façon simple. De plus, plusieurs méthodes efficaces sont données afin de réaliser l'inférence bayésienne, allant de l'échantillonnage de Gibbs pour l'estimation hors ligne au filtre particulaire rao-blackwellisé pour l'estimation en ligne.

5.1.3 Organisation du chapitre

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Au paragraphe 5.2 sont formulés les modèles dynamiques aux distributions de bruits inconnues basés sur les DPMs. Le paragraphe 5.3 présente un algorithme MCMC efficace pour l'estimation optimale dans le cas hors ligne. Dans le paragraphe 5.4, un algorithme de Monte Carlo séquentiel (filtre particulaire) est présenté pour l'estimation optimale dans le cas séquentiel (en ligne). Tous ces algorithmes peuvent être interprétés comme des méthodes de rao-blackwellisation. Au paragraphe 5.5, des caractéristiques de ces algorithmes sont discutées, et reliées à d'autres approches existantes. Finalement, au paragraphe 5.6, les algorithmes proposés sont employés sur trois applications : la déconvolution aveugle de processus impulsionnels, la régression robuste, et un problème de détection de rupture en séries temporelles biomédicales.

5.2 Modèle dynamique linéaire à distributions de bruits inconnues

Le modèle dynamique linéaire défini par les équations (5.1)-(5.2) dépend des distributions inconnues des bruits $\{\mathbf{v}_t\}$ et $\{\mathbf{w}_t\}$, qui sont supposées être des DPMs de gaussiennes dans ce chapitre. Le modèle est défini de façon précise dans la suite de ce paragraphe.

5.2.1 Modèle des bruits avec DPM

A la fois pour $\{\mathbf{v}_t\}$ et $\{\mathbf{w}_t\}$, la densité mélangée $f(\cdot|\theta)$ est supposée être gaussienne, notée $\mathcal{N}(\mu_t^v, \Sigma_t^v)$ et $\mathcal{N}(\mu_t^w, \Sigma_t^w)$ respectivement. On note $\theta_t^v = \{\mu_t^v, \Sigma_t^v\}$ (resp. $\theta_t^w = \{\mu_t^w, \Sigma_t^w\}$) la variable latente donnant la moyenne et la matrice de covariance de la gaussienne à l'instant t , et $\theta_t = \{\theta_t^v, \theta_t^w\}$. Les distributions de base \mathbb{G}_0^v et \mathbb{G}_0^w sont supposées être des distributions normale-inverse Wishart [Gel95] notées $\mathbb{G}_0^v = \mathcal{NIW}(\mu_0^v, \kappa_0^v, \nu_0^v, \Lambda_0^v)$ et $\mathbb{G}_0^w = \mathcal{NIW}(\mu_0^w, \kappa_0^w, \nu_0^w, \Lambda_0^w)$. Cette distribution, dont la définition est donnée en annexe B.5, est couramment utilisée en statistiques pour définir une distribution *a priori* sur un couple {moyenne, matrice de covariance}.

Les hyperparamètres $\psi^v = \{\mu_0^v, \kappa_0^v, \nu_0^v, \Lambda_0^v\}$ et $\psi^w = \{\mu_0^w, \kappa_0^w, \nu_0^w, \Lambda_0^w\}$ sont supposés fixes et inconnus. Enfin, les facteurs d'échelle α^v et α^w sont également supposés fixes et inconnus. L'ensemble des hyperparamètres est noté $\phi^v = \{\alpha^v, \psi^v\}$, $\phi^w = \{\alpha^w, \psi^w\}$ et $\phi = \{\phi^v, \phi^w\}$. Afin de simplifier la présentation, les hyperpara-

mètres sont tout d'abord supposés connus. Au paragraphe 5.3.2, le cas d'hyperparamètres inconnus est abordé en définissant des densités *a priori* et une procédure d'estimation spécifique.

En résumé, nous avons les modèles hiérarchiques suivants

$$\mathbb{G}^v | \phi^v \sim DP(\mathbb{G}_0^v, \alpha^v), \quad (5.3a)$$

$$\text{et pour } t = 1, 2, \dots \quad (\mu_t^v, \Sigma_t^v) | \mathbb{G}^v \sim \mathbb{G}^v, \quad (5.3b)$$

$$\mathbf{v}_t | \mu_t^v, \Sigma_t^v \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_t^v, \Sigma_t^v). \quad (5.3c)$$

et

$$\mathbb{G}^w | \phi^w \sim DP(\mathbb{G}_0^w, \alpha^w), \quad (5.4a)$$

$$\text{et pour } t = 1, 2, \dots \quad (\mu_t^w, \Sigma_t^w) | \mathbb{G}^w \sim \mathbb{G}^w, \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{w}_t | \mu_t^w, \Sigma_t^w \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu_t^w, \Sigma_t^w). \quad (5.4c)$$

Ces modèles peuvent s'écrire de façon équivalente $\mathbf{v}_t \sim F^v(\mathbf{v}_t)$ et $\mathbf{w}_t \sim F^w(\mathbf{w}_t)$ où F^v et F^w sont des densités de probabilité inconnues définies par

$$F^v(\mathbf{v}_t) = \int \mathcal{N}(\mathbf{v}_t; \mu, \Sigma) d\mathbb{G}^v(\mu, \Sigma), \quad (5.5)$$

$$F^w(\mathbf{w}_t) = \int \mathcal{N}(\mathbf{w}_t; \mu, \Sigma) d\mathbb{G}^w(\mu, \Sigma) \quad (5.6)$$

Autrement dit, F^v et F^w sont des mélanges infinis dénombrables de densités de probabilité gaussiennes de paramètres inconnus, et les distributions de mélange \mathbb{G}^v et \mathbb{G}^w sont distribuées selon des processus de Dirichlet.

5.2.2 Estimation des paramètres

Etant donné le modèle statistique défini par les équations (5.1)-(5.4), l'objectif est d'estimer les distributions inconnues \mathbb{G}^v et \mathbb{G}^w de même que les variables latentes $\{\theta_t\}$ et le vecteur d'état $\{\mathbf{x}_t\}$ à chaque instant t , conditionnellement aux observations $\{\mathbf{z}_t\}$. En pratique, seule la variable d'état nous intéresse – \mathbb{G}^v , \mathbb{G}^w et $\{\theta_t\}$ sont des paramètres dits de *nuisance*. De façon idéale, on souhaite estimer en ligne la séquence de densités *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ comme t augmente, ou la densité *a posteriori* hors ligne $p(\mathbf{x}_{0:T} | \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$, où T est la longueur fixe de la séquence des observations $\mathbf{z}_{1:T}$. Grâce à la représentation en urne de Polya, il est possible de marginaliser analytiquement selon \mathbb{G}^v et \mathbb{G}^w , et donc de s'affranchir de leur estimation explicite. Les paramètres $\theta_{1:t}$ et $\theta_{1:T}$ subsistent et l'inférence est basée sur $p(\mathbf{x}_{0:t}, \theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ ou $p(\mathbf{x}_{0:T}, \theta_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$. La densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ vérifie pour chaque t

$$p(\mathbf{x}_{0:t}, \theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}, \phi) = p(\mathbf{x}_{0:t} | \theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}, \phi) p(\theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}, \phi). \quad (5.7)$$

Conditionnellement à θ_t , les équations (5.1)-(5.2) peuvent être reformulées selon

$$\mathbf{x}_t = F_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}'_t(\theta_t) + G_t \mathbf{v}'_t(\theta_t) \quad (5.8)$$

$$\mathbf{z}_t = H_t \mathbf{x}_t + \mu_t^w + \mathbf{w}'_t(\theta_t) \quad (5.9)$$

où $\mathbf{u}'_t(\theta_t) = C_t \mathbf{u}_t + G_t \mu_t^v$ et μ_t^w sont des entrées connues, $\mathbf{v}'_t(\theta_t)$ et $\mathbf{w}'_t(\theta_t)$ sont des bruits blancs gaussiens centrés de matrices de covariance connues Σ_t^v et Σ_t^w , respectivement. Ainsi, $p(\mathbf{x}_{0:t}|\theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ (resp. $p(\mathbf{x}_{0:T}|\theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$) est une densité de probabilité gaussienne dont les paramètres peuvent être calculés avec un filtre (resp. lisseur) de Kalman [And79] pour un $\theta_{1:t}$ (resp. $\theta_{1:T}$) donné.

On s'intéresse généralement à l'estimée MMSE marginale de l'état $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{x}}_{t|T}^{\text{MMSE}}$)

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} &= \int \mathbf{x}_t p(\mathbf{x}_{0:t}|\theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}, \phi) p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t}, \phi) d(\mathbf{x}_{0:t}, \theta_{1:t}) \\ &= \int \mathbf{x}_t p(\mathbf{x}_t|\theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}, \phi) p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t}, \phi) d(\mathbf{x}_t, \theta_{1:t}) \\ &= \int \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}) p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t}, \phi) d\theta_{1:t} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}}_{t|T}^{\text{MMSE}} &= \int \mathbf{x}_t p(\mathbf{x}_{0:T}|\theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \phi) p(\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T}, \phi) d(\mathbf{x}_{0:T}, \theta_{1:T}) \\ &= \int \widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T}) p(\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T}, \phi) d\theta_{1:T} \end{aligned} \quad (5.11)$$

où $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t})$ (resp. $\widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T})$) est la moyenne de la gaussienne $p(\mathbf{x}_t|\theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ (resp. $p(\mathbf{x}_t|\theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$). $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t})$ et $\widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T})$ sont calculés par filtre et le lisseur de Kalman, à partir du modèle linéaire gaussien défini par les équations (5.8)-(5.9).

Le calcul de ces estimées nécessite encore l'intégration par rapport aux θ . Ce type d'intégrale n'est pas calculable de façon analytique, mais elle peut être approchée numériquement par intégration de Monte Carlo [Rob99]. Brièvement, supposons qu'un ensemble de N échantillons pondérés $\{\theta_{1:t}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ de poids $w_t^{(i)}$ est distribué selon $p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t}, \phi)$, alors $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}}$ est calculé selon

$$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} \approx \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}) \quad (5.12)$$

Dans l'équation (5.12), la principale difficulté réside dans le fait de générer les échantillons pondérés $\{\theta_{1:t}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ à partir de la densité marginale *a posteriori* $p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t}, \phi)$ (et de façon similaire, de $p(\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T}, \phi)$ dans le cas hors ligne).

- Pour l'**estimation hors ligne** ($t = T$), ceci est réalisé par MCMC en construisant une chaîne de Markov d'échantillons $\{\theta_{1:T}^{(i)}\}_{i=1, \dots, N}$ de distribution cible $\Pr(d\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T}, \phi)$ (dans ce cas, $w_t^{(i)} = 1/N$ pour $i = 1, \dots, N$). Les algorithmes MCMC disponibles dans la littérature pour estimer ces modèles bayésiens non paramétriques – e.g. [Esc95, Nea00] – sont dédiés à l'estimation de densités

dans les cas où les données sont observées directement. Ils ne s'appliquent pas dans notre cas, car les séquences $\{\mathbf{v}_t\}$ et $\{\mathbf{w}_t\}$ ne sont pas observées directement. Seule est observée la séquence des observations $\{\mathbf{z}_t\}$, supposée générée par le modèle dynamique (5.1)-(5.2). Le paragraphe 5.3 propose un algorithme MCMC dédié à ce modèle.

- Pour l'**estimation en ligne (séquentielle)**, les échantillons sont générés par échantillonnage d'importance séquentiel, comme détaillé au paragraphe 5.4.

5.3 Algorithme MCMC pour l'estimation de l'état hors ligne

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation de l'état hors ligne. Comme souligné plus haut dans ce chapitre, ceci nécessite de calculer les estimées à partir de la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:T}, \theta_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T})$, où l'on rappelle que $\theta_t = \{\theta_t^v, \theta_t^w\} = \{\mu_t^v, \Sigma_t^v, \mu_t^w, \Sigma_t^w\}$ est la variable latente. Il est d'abord supposé que les hyperparamètres sont fixés et connus (paragraphe 5.3.1), puis on les considère comme inconnus, avec des distributions *a priori* données (paragraphe 5.3.2).

5.3.1 Hyperparamètres fixés et connus

Dans ce paragraphe, le vecteur de hyperparamètres ϕ est supposé fixé et connu. La densité marginale *a posteriori* $p(\theta_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$ peut être approchée par MCMC avec un échantillonneur de Gibbs [Rob99] présenté dans l'algorithme 5.1.

Algorithme 5.1 Echantillonneur de Gibbs pour générer des échantillons selon $p(\theta_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T}, \phi)$

- Etape 5.1.1 Initialisation

Pour $t = 1, \dots, T$, échantillonner $\theta_t^{(1)}$ selon une distribution *a priori* arbitraire.

- Etape 5.1.2 Itérations

Pour $i = 2, \dots, N' + N$, Faire

- Pour $t = 1, \dots, T$, échantillonner $\theta_t^{(i)} \sim p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}^{(i)}, \phi)$

où $\theta_{-t}^{(i)} = \{\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{t-1}^{(i)}, \theta_{t+1}^{(i-1)}, \dots, \theta_T^{(i-1)}\}$

Afin d'exécuter l'algorithme 5.1, il est nécessaire d'échantillonner selon la densité conditionnelle $p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}, \phi)$ pour chacune des $N' + N$ itérations (incluant N' itérations de chauffage). D'après la règle de Bayes, on a

$$p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}, \phi) \propto p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_{1:T}) p(\theta_t | \theta_{-t}, \phi). \tag{5.13}$$

où $p(\theta_t | \theta_{-t}, \phi) = p(\theta_t^v | \theta_{-t}^v, \phi^v) p(\theta_t^w | \theta_{-t}^w, \phi^w)$. D'après la représentation en urne de Polya, ces deux termes peuvent être formulés selon (pour w , remplacer l'exposant v

par w ci-dessous) :

$$\theta_t^v | \theta_{-t}^v, \phi^v \sim \frac{1}{\alpha^v + T - 1} \sum_{k=1, k \neq t}^T \delta_{\theta_k^v}(\cdot) + \frac{\alpha^v}{\alpha^v + T - 1} \mathbb{G}_0^v(\cdot | \psi^v) \quad (5.14)$$

Donc, on peut échantillonner selon la densité $p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}, \phi)$ avec un pas d'algorithme de Metropolis-Hastings (MH), où la loi candidate est la densité *a priori* $p(\theta_t | \theta_{-t}, \phi)$. Le choix de cette loi candidate permet de simplifier le calcul de la probabilité d'acceptance, ainsi définie par

$$\rho(\theta_t^{(i-1)}, \theta_t^{(i)*}) = \min \left(1, \frac{p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_t^{(i)*}, \theta_{-t}^{(i)})}{p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_t^{(i-1)}, \theta_{-t}^{(i)})} \right) \quad (5.15)$$

où $\theta_t^{(i)*}$ est la variable latente candidate, échantillonnée selon $p(\theta_t | \theta_{-t}, \phi)$.

Le calcul de la probabilité d'acceptance nécessite de calculer la vraisemblance $p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_t, \theta_{-t})$. Ceci peut être fait en $O(T)$ opérations avec un filtre de Kalman, à partir du modèle linéaire gaussien défini par les équations (5.8)-(5.9), en calculant de façon récurrente $p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_t, \theta_{-t}) = p(\mathbf{z}_1 | \theta_1) \prod_{k=2}^T p(\mathbf{z}_k | \mathbf{z}_{1:k-1}, \theta_{1:k})$. Cependant, ceci doit être réalisé pour $t = 1, \dots, T$ et on obtient finalement un algorithme de complexité $O(T^2)$. Ici, on propose d'utiliser à la place la récursion *backward-forward* développée dans [Dou01a], afin d'obtenir un algorithme de complexité globale $O(T)$. Cet algorithme utilise la décomposition de la vraisemblance suivante :

$$p(\mathbf{z}_{1:T} | \theta_{1:T}) = p(\mathbf{z}_{1:t-1} | \theta_{1:t-1}) p(\mathbf{z}_t | \theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1}) \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t+1:T} | \mathbf{x}_t, \theta_{t+1:T}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}, \theta_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (5.16)$$

avec

$$p(\mathbf{z}_{t:T} | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_{t:T}) = \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t+1:T} | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_{t:T}) p(\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t | \theta_t, \mathbf{x}_{t-1}) d\mathbf{x}_t \quad (5.17)$$

Les deux premiers termes du membre de gauche dans l'équation (5.16) sont calculés par une récursion *forward* basée sur le filtre de Kalman [Dou01a]. Le troisième terme peut être évalué par une récursion *backward* selon l'équation (5.17). Il est montré dans [Dou01a] que si $\int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t:T} | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_{t:T}) d\mathbf{x}_{t-1} < \infty$ alors $\frac{p(\mathbf{z}_{t:T} | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_{t:T})}{\int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t:T} | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_{t:T}) d\mathbf{x}_{t-1}}$ est une densité de probabilité gaussienne par rapport à \mathbf{x}_{t-1} , de moyenne $m'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$ et de covariance $P'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$. Les quantités $P'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$ et $P'_{t-1|t}(\theta_{t:T}) m'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$ satisfont les équations de récursion du filtre d'information *backward* (voir l'annexe A). Selon l'équation (5.16), la densité $p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}, \phi)$ est donnée par

$$p(\theta_t | \mathbf{z}_{1:T}, \theta_{-t}) \propto p(\theta_t | \theta_{-t}, \phi) p(\mathbf{z}_t | \theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1}) \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t+1:T} | \mathbf{x}_t, \theta_{t+1:T}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}, \theta_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (5.18)$$

Algorithme 5.2 Algorithme MCMC pour échantillonner selon $p(\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T}, \phi)$

- Etape 5.2.1 Initialisation $i = 1$
 - Pour $t = 1, \dots, T$, échantillonner $\theta_t^{(1)}$.
- Etape 5.2.2 Itération $i, i = 2, \dots, N' + N$
 - Récursion backward : Pour $t = T, \dots, 1$, calculer et mémoriser $P_{t|t+1}^{i-1}(\theta_{t+1:T}^{(i-1)})$ et $P_{t|t+1}^{i-1}(\theta_{t+1:T}^{(i-1)})m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}^{(i-1)})$
 - Récursion forward : Pour $t = 1, \dots, T$
 - Réaliser un pas de filtre de Kalman avec $\theta_t = \theta_t^{(i-1)}$, mémoriser $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t-1}^{(i)}, \theta_t^{(i-1)})$ et $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t-1}^{(i)}, \theta_t^{(i-1)})$.
 - Pas de Metropolis-Hastings :
 - Echantillonner une variable latente candidate

$$\theta_t^{(i)*} \sim p(\theta_t|\theta_{-t}^{(i)}, \phi) \quad (5.19)$$

- Réaliser un pas de filtre de Kalman avec $\theta_t = \theta_t^{(i)*}$, mémoriser $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t-1}^{(i)}, \theta_t^{(i)*})$ et $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t-1}^{(i)}, \theta_t^{(i)*})$
- Calculer

$$\rho(\theta_t^{(i-1)}, \theta_t^{(i)*}) = \min \left(1, \frac{p(\mathbf{z}_{1:T}|\theta_t^{(i)*}, \theta_{-t}^{(i)})}{p(\mathbf{z}_{1:T}|\theta_t^{(i-1)}, \theta_{-t}^{(i)})} \right) \quad (5.20)$$

- Avec la probabilité $\rho(\theta_t^{(i-1)}, \theta_t^{(i)*})$, faire $\theta_t^{(i)} = \theta_t^{(i)*}$, sinon $\theta_t^{(i)} = \theta_t^{(i-1)}$.

- Etape 5.2.3 Post-échantillonnage de l'état (pour les itérations post-chauffage seulement)
 - Pour $i = N' + 1, \dots, N' + N$, calculer $\widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T}^{(i)}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t|\theta_{1:T}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:T})$ pour tout t avec un lisseur de Kalman.

L'algorithme 5.2 résume la procédure complète d'échantillonnage de la densité *a posteriori*.

Il peut être facilement établi que la chaîne de Markov simulée $\{\theta_{1:T}^{(i)}\}$ est ergodique de distribution limite $\Pr(d\theta_{1:T}|\mathbf{z}_{1:T})$. Après N' itérations de chauffage, les N dernières itérations de l'algorithme sont conservées, et les estimées MMSE de θ_t et \mathbf{x}_t pour tous $t = 0, \dots, T$ sont calculées comme expliqué au paragraphe 5.2.2, suivant l'équation

$$\widehat{\theta}_{t|T}^{\text{MMSE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=N'+1}^{N'+N} \theta_t^{(i)} \quad \widehat{\mathbf{x}}_{t|T}^{\text{MMSE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=N'+1}^{N'+N} \widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T}^{(i)}) \quad (5.21)$$

5.3.2 Hyperparamètres inconnus

Les hyperparamètres dans le vecteur ϕ ont une influence certaine sur l'estimation correcte des DPMs F^v et F^w . Dans ce paragraphe, ces hyperparamètres sont

inclus dans l'inférence en les considérant comme inconnus avec comme distributions *a priori* :

$$\alpha^v \sim \mathcal{G}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad \alpha^w \sim \mathcal{G}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad (5.22)$$

$$\psi^v \sim p_0(\psi^v), \quad \psi^w \sim p_0(\psi^w) \quad (5.23)$$

où η et ν sont des constantes connues et p_0 est une densité de probabilité dont les paramètres sont fixes et supposés connus. La densité *a posteriori* $p(\alpha^v | \mathbf{x}_{1:T}, \theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \psi^v, \phi^w)$ se réduit alors à $p(\alpha^v | M^v, T)$ où M^v est le nombre de valeurs distinctes prises par les variables latentes $\theta_{1:T}^v$. Comme il a été montré dans [Ant74], et présenté dans le paragraphe 4.4.3 du chapitre précédent, cette densité peut être exprimée par

$$p(\alpha^v | M^v, T) \propto \frac{s(T, M^v)(\alpha^v)^{M^v}}{\sum_{k=1}^T s(T, k)(\alpha^v)^k} p(\alpha^v) \quad (5.24)$$

où les $s(T, k)$ sont les valeurs absolues des nombres de Stirling de la première sorte. Il est possible d'échantillonner selon la densité ci-dessus avec une étape de Metropolis-Hasting avec comme loi candidate la densité gamma *a priori* $p(\alpha^v) = \mathcal{G}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ (et de façon similaire pour α^w).

La probabilité *a posteriori* $p(\psi^v | \mathbf{x}_{1:T}, \theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \alpha^v, \phi^w)$ se simplifie par $p(\psi^v | \theta_{1:M^v}^v)$ où $\theta_{1:M^v}^v$ est l'ensemble des valeurs distinctes prises par les variables latentes $\theta_{1:T}^v$. Elle s'exprime par

$$p(\psi^v | \mathbf{x}_{1:T}, \theta_{1:T}, \mathbf{z}_{1:T}, \alpha^v, \phi^w) \propto p_0(\psi^v) \prod_{k=1}^{M^v} \mathbb{G}_0^v(\theta_k^v | \psi^v) \quad (5.25)$$

Il est possible de générer des échantillons selon cette densité avec un pas de Metropolis-Hastings en utilisant la densité Gamma *a priori* $p_0(\psi^v)$ comme loi candidate si l'échantillonnage direct n'est pas envisageable. La procédure est la même pour l'hyperparamètre ψ^w .

L'algorithme 5.3 résume la procédure complète pour échantillonner selon $p(\theta_{1:T}, \phi | \mathbf{z}_{1:T})$.

5.4 Filtre particulière rao-blackwellisé pour l'estimation en ligne

Plusieurs applications, telles que la poursuite de cibles, nécessitent une estimation de l'état en ligne. Dans ce cas, l'approche MCMC est inadéquate car elle nécessite la connaissance du jeu de mesures complet afin de réaliser l'estimation de l'état. Dans ce paragraphe, un algorithme de Monte Carlo séquentiel (filtre particulière) est mis en place, afin d'échantillonner en ligne selon la séquence des distributions de probabilité $\{p(\mathbf{x}_{0:t}, \theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}), t = 1, 2, \dots\}$. Le vecteur d'hyperparamètres ϕ est

Algorithme 5.3 Algorithme MCMC pour échantillonner selon $p(\theta_{1:T}, \phi | \mathbf{z}_{1:T})$

- **Etape 5.3.1 Initialisation $i = 1$**
 - Pour $t = 1, \dots, T$, échantillonner $\theta_t^{(1)}$
 - Échantillonner $\phi^{(1)}$.
 - **Etape 5.3.2 Itération $i, i \geq 2$**
 - Échantillonner $\theta_t^{(i)}$ selon $p(\theta_{1:T} | \mathbf{z}_{1:T}, \phi^{(i-1)})$ (étape 5.2.2 de l'algorithme 5.2)
 - Échantillonner $\alpha^{v(i)}$ selon $p(\alpha^v | \mathbf{z}_{1:T}, \psi^{v(i-1)}, \phi^{w(i-1)})$ avec un pas de Metropolis-Hastings avec l'équation (5.24).
 - De façon similaire, échantillonner $\alpha^{w(i)}$ selon $p(\alpha^w | \mathbf{z}_{1:T}, \alpha^{v(i)}, \psi^{v(i-1)}, \psi^{w(i-1)})$ avec un pas de Metropolis-Hastings
 - Échantillonner $\psi^{v(i)}$ selon $p(\psi^v | \mathbf{z}_{1:T}, \alpha^{v(i)}, \alpha^{w(i)}, \psi^{w(i-1)})$ avec un pas de Metropolis-Hastings avec l'équation (5.25)
 - De façon similaire, échantillonner $\psi^{w(i)}$ selon $p(\psi^w | \mathbf{z}_{1:T}, \phi^{v(i)}, \alpha^{w(i)})$ avec un pas de Metropolis-Hastings
 - **Etape 5.3.3 Post-échantillonnage de l'état (pour les itérations post-chauffage seulement)**
 - Pour $i = N' + 1, \dots, N' + N$, calculer $\widehat{\mathbf{x}}_{t|T}(\theta_{1:T}^{(i)}, \phi^{(i)}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_t | \theta_{1:T}^{(i)}, \phi^{(i)}, \mathbf{z}_{1:T})$ pour tout t avec un lisseur de Kalman.
-

supposé connu, il est donc omis par la suite. L'estimation des hyperparamètres en ligne est discutée au paragraphe 5.5.

Comme expliqué au paragraphe 5.2.2, on cherche à échantillonner selon $p(\theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$, car $p(\mathbf{x}_{0:t} | \theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t})$ peut être calculé avec des techniques de Kalman (la procédure d'échantillonnage est en effet une application du filtre particulaire rao-blackwellisé [Dou01c] aux DPMs). A l'instant t , $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t})$ est approchée avec un ensemble de N particules $\theta_{1:t}^{(1)}, \dots, \theta_{1:t}^{(N)}$ distribuées selon $p(\theta_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$, par la densité empirique suivante

$$p_N(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}), \Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)})) \quad (5.26)$$

Les paramètres $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)})$ et $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)})$ sont calculés de façon récurrentes pour chaque particule i avec le filtre de Kalman [And79]. Afin de construire l'algorithme, on note que

$$p(\theta_{1:t}^{(i)} | \mathbf{z}_{1:t}) \propto p(\theta_{1:t-1}^{(i)} | \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\mathbf{z}_t | \theta_{1:t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\theta_t^{(i)} | \theta_{1:t-1}^{(i)}) \quad (5.27)$$

où

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_t | \theta_{1:t}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1}) &= p(\mathbf{z}_t | \theta_t^{(i)}, \theta_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1}) \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_t; \widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)}), S_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)})) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)}) &= H_t \left[F_t \widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}(\theta_{1:t-1}^{(i)}) + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mu_t^{v(i)} \right] + \mu_t^{w(i)} \\ S_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)}) &= H_t \left[F_t \Sigma_{t-1|t-1}(\theta_{1:t-1}^{(i)}) F_t^\top + G_t \Sigma_t^{v(i)} G_t^\top \right] H_t^\top + \Sigma_t^{w(i)} \end{aligned} \quad (5.28)$$

L'algorithme de filtrage particulière rao-blackwellisé est donné dans l'algorithme 5.4.

Algorithme 5.4 Filtre particulière rao-blackwellisé pour échantillonner selon $p(\theta_{1:t}|\mathbf{z}_{1:t})$

• Etape 5.4.1 Initialisation

– Pour $i = 1, \dots, N$, échantillonner $(\widehat{\mathbf{x}}_{0|0}^{(i)}, \Sigma_{0|0}^{(i)}) \sim p_0(\mathbf{x}_{0|0}, \Sigma_{0|0})$.

– Initialiser $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• Etape 5.4.1 Itérations

Pour $t = 1, 2, \dots$

– Pour $i = 1, \dots, N$

– Échantillonner $\tilde{\theta}_t^{(i)} \sim q(\theta_t|\theta_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t})$

– Calculer $\{\widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)}), \Sigma_{t|t-1}(\theta_{1:t}^{(i)}), \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}), \Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)})\}$ en faisant un pas de filtre de Kalman avec le modèle (5.8)-(5.9) à partir de $\{\widehat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}(\theta_{1:t-1}^{(i)}), \Sigma_{t-1|t-1}(\theta_{1:t-1}^{(i)}), \tilde{\theta}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t\}$

– Pour $i = 1, \dots, N$, mettre à jour les poids selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t|\theta_{1:t-1}^{(i)}, \tilde{\theta}_t^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t-1})p(\tilde{\theta}_t^{(i)}|\theta_{1:t-1}^{(i)})}{q(\tilde{\theta}_t^{(i)}|\theta_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t})}, \quad \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1 \quad (5.29)$$

– Calculer N_{eff} selon l'équation (1.27). Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, rééchantillonner les poids. Sinon, renommer les particules sans \sim s.

La distribution d'importance optimale est $q(\theta_t|\theta_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t}) = p(\theta_t|\theta_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_{1:t})$. Cependant, elle ne peut être utilisée car les poids associés ne peuvent se calculer de façon analytique¹.

La densité d'importance choisie afin de faire évoluer les particules est la loi d'évolution en urne de Polya $p(\theta_t|\theta_{1:t-1}^{(i)})$. Il est à noter que cette densité d'importance est peu efficace, car elle ne se base pas sur la mesure à l'instant t . Cependant, il est montré empiriquement dans le paragraphe 5.6 que l'utilisation de cette loi d'importance donne des résultats acceptables pour les problèmes considérés.

A partir des particules, l'estimée MMSE et la matrice de covariance *a posteriori* de \mathbf{x}_t sont données par

$$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}} = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}) \quad (5.30)$$

$$\widehat{\Sigma}_{t|t} = \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \left[\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}) + (\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}})(\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}^{(i)}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^{\text{MMSE}})^T \right] \quad (5.31)$$

¹En choisissant la distribution d'importance optimale, le calcul des poids nécessite l'évaluation d'une intégrale par rapport à $d\theta_t$. Il est possible d'intégrer analytiquement par rapport aux moyennes μ^v et μ^w , mais pas par rapport aux covariances.

5.5 Discussion

Dans ce paragraphe, plusieurs caractéristiques de l'approche proposée sont discutées.

5.5.1 A propos de la convergence du filtre particulaire rao-blackwellisé

Etant donné que les DPMs F^v et F^w sont des paramètres (de dimension infinie) statiques, le filtre particulaire rao-blackwellisé pâtit d'une accumulation d'erreurs au cours du temps. En d'autres termes, le filtre particulaire n'est pas capable de changer les valeurs de cluster U_j^v 's et U_j^w une fois qu'elles sont initialisées. Ceci est un problème bien connu d'estimation de paramètre statique avec les filtres particulaires. Cependant, comme le composant statique n'est pas la variable latente estimée θ_t mais sa distribution *a priori* \mathbb{G} , cette accumulation est moins critique qu'avec l'estimation de vrais paramètres statiques..

Dans le paragraphe 5.4, le vecteur des hyperparamètres ϕ est supposé connu, également car c'est un paramètre statique. Il peut en fait être estimé en mettant en place l'une des approches de filtrage particulaire pour l'estimation de paramètres statiques. Par exemple, les approches dans [Liu01, Gil01, Dou03, Poy05] sont basées soit sur les méthodes de *kernel density*, étapes MCMC, ou maximum de vraisemblance. Cependant, ces algorithmes ont également d'importants défauts (accumulation d'erreur au cours du temps ou complexité calculatoire – au moins $O(t^2)$). Une solution alternative consiste à introduire une dynamique artificielle sur les hyperparamètres [And03] mais ceci n'est pas applicable dans notre cas : on perdrait alors la structure en urne de Polya donnée par l'équation (4.13).

5.5.2 A propos de problèmes apparentés

Notre modèle a certaines connections avec les *Jump Linear Systems (JLS)* [Ack70, Aka77]. Dans un JLS, une variable indicatrice discrète commute entre un nombre fixé (connu) de modèles linéaires gaussiens (connus) avec une certaine probabilité *a priori* (connue). Notre modèle peut être interprété comme un JLS dont le nombre des différents modèles est inconnu, dont la moyenne et la matrice de covariance de ces différents modèles sont inconnues de même que leurs probabilités *a priori*.

De plus, le modèle proposé dans ce chapitre peut être généralisé de la façon suivante. On note $\underline{\theta}_t = \{F_t, C_t, H_t, G_t, \mu_t^v, \Sigma_t^v, \mu_t^w, \Sigma_t^w\} = \{F_t, C_t, H_t, G_t, \theta_t\}$ et $\underline{\mathbb{G}}_0$ une distribution *a priori* sur $\underline{\theta}_t$. Le modèle hiérarchique suivant

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{G}} &\sim DP(\underline{\mathbb{G}}_0, \alpha), \\
 \underline{\theta}_t | \underline{\mathbb{G}} &\sim \underline{\mathbb{G}}, \\
 \mathbf{x}_t | \underline{\theta}_t, \mathbf{x}_{t-1} &\sim \mathcal{N}(F_t \mathbf{x}_{t-1} + C_t \mathbf{u}_t + G_t \mu_t^v, G_t \Sigma_t^v G_t'), \\
 \mathbf{z}_t | \underline{\theta}_t, \mathbf{x}_t &\sim \mathcal{N}(H_t \mathbf{x}_t + \mu_t^w, \Sigma_t^w)
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

a plus de flexibilité qu'un JLS standard : le nombre de modèles différents peut être estimé, de même que les paramètres de ces modèles et leurs probabilités *a priori*.

5.5.3 A propos de l'observabilité

Afin que la densité du bruit d'observation \mathbf{w}_t soit correctement estimée, certaines contraintes d'observabilité doivent être vérifiées. En effet, la paire (\tilde{F}, \tilde{H}) doit être complètement observable, i.e., la matrice d'observabilité

$$\begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{H}\tilde{F} \\ \dots \\ \tilde{H}\tilde{F}^{n_x+n_z-1} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

doit avoir un rang $n_x + n_z$ où $\tilde{F} = \begin{pmatrix} F & 0_{n_x \times n_z} \\ 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{pmatrix}$, $\tilde{H} = (H \ I_{n_z})$, n_x et n_z sont resp. les longueurs des vecteurs d'état et d'observation.

5.6 Applications

Trois applications des algorithmes développés dans les sections précédentes sont présentées. La première concerne la déconvolution aveugle de processus impulsionnels, la seconde la régression robuste et la dernière la détection de rupture dans une série temporelle biomédicale. Dans chaque cas, il est supposé que les statistiques des bruits d'état sont inconnues, et modélisées par des DPMS de gaussiennes.

5.6.1 Déconvolution aveugle de processus impulsionnels

De nombreux domaines de l'ingénierie et de la physique, tels que l'analyse de données spectroscopiques, la restauration de sources audio, etc. nécessitent une déconvolution aveugle. On se base ici sur le modèle présenté dans [Dou97], qui est rappelé ci-dessous.

a) Modèle statistique

Soit $H = (1 \ h_1 \ \dots \ h_L) = (1 \ \mathbf{h})$ et $\mathbf{x}_t = (v_t \ v_{t-1} \ \dots \ v_{t-L})^T$. Le signal observé z_t est la convolution de la séquence \mathbf{x}_t avec un filtre à réponse impulsionnelle finie H , observé dans un bruit blanc additif gaussien w_t . Le modèle d'observation est donc

$$z_t = H\mathbf{x}_t + w_t \quad (5.34)$$

où $w_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$ avec σ_w^2 est la variance supposée connue de w_t . Le modèle d'état peut être écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_t = F\mathbf{x}_{t-1} + Gv_t \quad (5.35)$$

où $F = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1 \times L} \\ 0_{L \times 1} & I_L \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{L \times 1} \end{pmatrix}$, $0_{m \times n}$ est la matrice zéro de taille $m \times n$ et I_m est la matrice identité de taille $m \times m$. Le bruit d'état v_t est supposé indépendant de w_t . Le mélange de Bernoulli-Gauss proposé dans [Dou97] pour v_t est remplacé ici par un mélange Bernoulli-DPM, i.e. v_t est distribué selon le mélange

$$v_t \sim \lambda F^v + (1 - \lambda)\delta_0 \quad (5.36)$$

où δ_0 est la fonction de Dirac en 0 et F^v est un DPM de gaussiennes défini par l'équation (5.5). En d'autres termes, le bruit est alternativement zéro, ou distribué selon un DPM de gaussiennes.

Pour simplifier les notations, on introduit la variable latente $r_t \in \{0, 1\}$ telle que $\Pr(r_t = 1) = \lambda$, $v_t | (r_t = 1) \sim F^v$ et $v_t | (r_t = 0) \sim \delta_0$. Considérons la variable latente ϕ_t^v définie par $\phi_t^v = \theta_t^v$ si $r_t = 1$ et $\phi_t^v = (0, 0)$ (i.e. les paramètres correspondant à la masse de Dirac) si $r_t = 0$, c'est-à-dire, $\phi_t^v \sim \lambda F^v + (1 - \lambda)\delta_{(0,0)}$. En marginalisant selon F^v , on obtient

$$\phi_t^v | \phi_{-t}^v \sim \lambda p(\phi_t^v | \phi_{-t}^v, r_t = 1) + (1 - \lambda)\delta_{(0,0)} \quad (5.37)$$

où $p(\phi_t^v | \phi_{-t}^v, r_t = 1)$ est la représentation en urne de Polya sur l'ensemble $\tilde{\phi}_{-t}^v = \{\phi \in \phi_{-t}^v | \phi \neq \delta_{(0,0)}\}$ de taille T' donné par

$$\phi_t^v | (\phi_{-t}^v, r_t = 1) \sim \frac{\sum_{k=1, k \neq t}^{T'} \delta_{\tilde{\phi}_k^v} + \alpha^v \mathbb{G}_0^v}{\alpha^v + T'} \quad (5.38)$$

La probabilité λ est considérée être une variable aléatoire de loi *a priori* $p(\lambda) = \mathcal{B}(\zeta, \tau)$ où ζ et τ sont des paramètres connus. La variable aléatoire λ peut être marginalisée analytiquement dans l'équation (5.37)

$$\phi_t^v | \phi_{-t}^v \sim \frac{a(\phi_{-t}^v)}{a(\phi_{-t}^v) + b(\phi_{-t}^v)} p(\phi_t^v | \phi_{-t}^v, r_t = 1) + \frac{b(\phi_{-t}^v)}{a(\phi_{-t}^v) + b(\phi_{-t}^v)} \delta_{(0,0)} \quad (5.39)$$

où

$$a(\phi_{-t}^v) = \zeta + \sum_{k=1, k \neq t}^T r_k$$

$$b(\phi_{-t}^v) = \tau + \sum_{k=1, k \neq t}^T (1 - r_k)$$

où $r_t = 0$ si $\phi_t^v = (0, 0)$ et $r_t = 1$ sinon. La démonstration de l'équation (5.39) est donnée en annexe D.

Les hyperparamètres sont $\Phi = (\alpha^v, \mathbf{h})$ (les hyperparamètres de la distribution de base \mathbb{G}_0^v sont supposés fixés et connus). Ces hyperparamètres sont supposés inconnus de densités *a priori* $p(\Phi) = p(\alpha^v)p(\mathbf{h})$, où

$$p(\alpha^v) = \mathcal{G}\left(\frac{\eta}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad p(\mathbf{h}) = \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 \Sigma_{\mathbf{h}}) \quad (5.40)$$

où η , ν et $\Sigma_{\mathbf{h}}$ sont connus. Conditionnellement à $\mathbf{x}_{0:T}$, la densité conditionnelle *a posteriori* est donnée par (voir la démonstration en annexe D)

$$p(\mathbf{h}|\mathbf{x}_{0:T}, \mathbf{z}_{1:T}) = \mathcal{N}(\mathbf{m}, \sigma_w^2 \Sigma'_{\mathbf{h}}) \quad (5.41)$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma'_{\mathbf{h}}{}^{-1} &= \Sigma_{\mathbf{h}}^{-1} + \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t-1:t-L} \mathbf{v}'_{t-1:t-L} \\ \mathbf{m} &= \Sigma'_{\mathbf{h}} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t-1:t-L} (z_t - v_t) \end{aligned}$$

Les échantillons $\mathbf{x}_{0:T}^{(i)}$ peuvent être générés selon la densité gaussienne $p(\mathbf{x}_{0:T}|\phi_{1:T}^v, \mathbf{z}_{1:T}, \Phi^{(i-1)})$ avec le *simulation smoother* [Dur02], dont l'algorithme, qui a une complexité $O(T)$, a été donné au paragraphe 1.2.

Le but est d'approcher par MCMC la densité *a posteriori* jointe $p(\mathbf{v}_{1:T}, \phi_{1:T}, \Phi|\mathbf{z}_{1:T})$. Ceci est réalisé en appliquant l'algorithme 5.2 page 102 pour les variables latentes, tandis que les autres variables sont échantillonnées par Metropolis-Hastings ou directement selon leurs densités *a posteriori* conditionnelles.

b) Résultats de simulation

Ce modèle a été simulé avec les paramètres suivants : $T = 120$, $L = 3$, $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & -0.2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0.6$, $\sigma_w^2 = 0.1$, $F^v = 0.7\mathcal{N}(2, 0.5) + 0.3\mathcal{N}(-1, 0.1)$, $\Sigma_{\mathbf{h}} = 100$, $\eta = 3$, $\nu = 3$, $\zeta = 1$, $\tau = 1$. Les hyperparamètres de la distribution de base sont $\mu_0 = 0$, $\kappa_0 = 0.1$, $\nu_0 = 4$, $\lambda_0 = 1$. Pour l'estimation, 10000 itérations MCMC sont réalisées, dont 7500 itérations de chauffage. La figure 5.1 (haut) montre l'estimée MMSE de $\mathbf{v}_{1:T}$ ainsi que sa valeur réelle. Comme on peut le voir dans la figure 5.1 (bas), le signal est correctement estimé et le résidu reste assez faible. De plus, comme illustré par la figure 5.2, la densité estimée F^v , obtenue avec les étapes 4.2.2 et 4.2.3 de l'algorithme 4.2, est assez proche de la valeur réelle. Plusieurs séquences d'itérations avec des valeurs initiales différentes ont été réalisées, montrant que l'algorithme de Gibbs converge vers la densité *a posteriori* complète et non simplement un mode local.

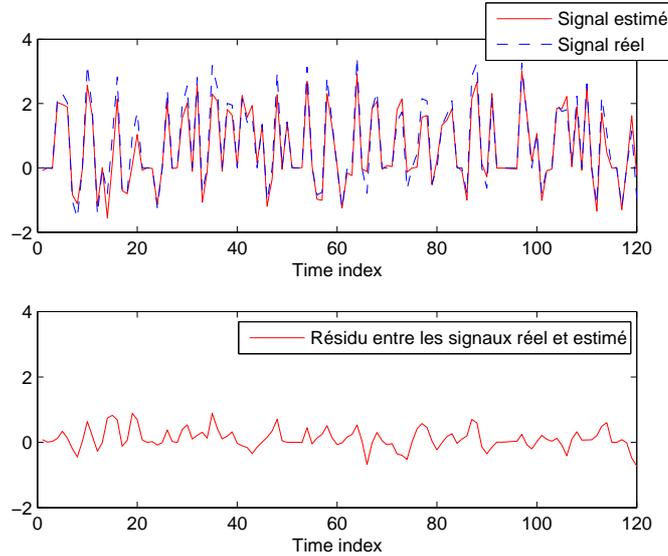


FIG. 5.1 – (Haut) Valeur réelle (ligne pointillée) et estimée MMSE (ligne pleine) de $\mathbf{v}_{1:T}$ après 10000 itérations MCMC (dont 7500 itérations de chauffage). v_t prend la valeur 0 avec la probabilité λ , ou est distribué selon une densité inconnue F^v avec la probabilité $(1 - \lambda)$. (Bas) Résidu $e_t = v_t - E[v_t | \mathbf{z}_{1:T}]$ entre les signaux réel et estimé. Bien que la distribution F^v soit inconnue, l'état v_t est assez correctement estimé.

5.6.2 Régression robuste

On s'intéresse maintenant au problème de la régression robuste décrit dans [Wes94]. La régression robuste a été étudiée dans [Car96, Mul92]. Le modèle statistique considéré ici est présenté ci-dessous.

a) Modèle statistique

On considère le problème de l'estimation d'une fonction de régression continue $g(\cdot)$ définie sur un domaine $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. On dispose de T mesures z_t , $t = 1, \dots, T$ observées dans un bruit additif gaussien

$$z_t = g(y_t) + w_t \tag{5.42}$$

où $y_0 < y_1 < \dots < y_T$ et $w_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$. La fonction $g(\cdot)$ suit l'équation différentielle stochastique suivante $g''(y) = v(y|\theta_t)$ pour tout y dans $[y_{t-1}, y_t]$, où $v(y|\theta_t) \sim \mathcal{N}(\mu_t, \sigma_t^2)$, i.e., la dérivée seconde de la fonction g est constante par morceaux et est distribuée selon une densité gaussienne dont la moyenne et la variance sont données par $\theta_t = \{\mu_t, \sigma_t^2\}$. Conditionnellement à θ_t , ceci peut être formulé sous la forme du modèle à espace d'état suivant

$$\mathbf{x}_t = F\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}'_t + v'_t \tag{5.43}$$

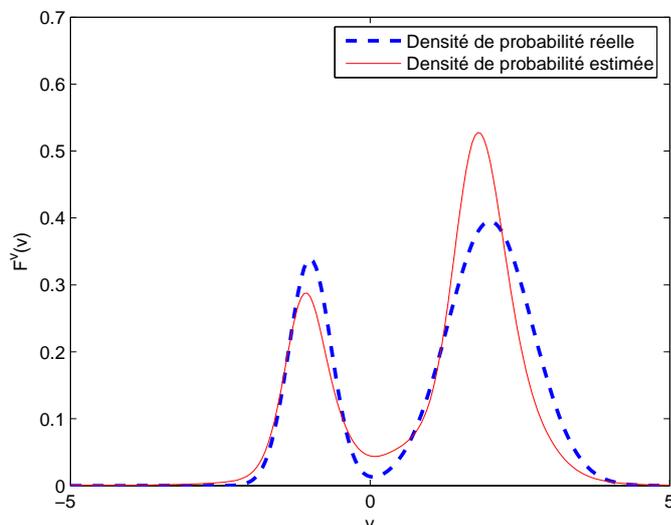


FIG. 5.2 – Densité de probabilité F^v réelle (ligne pointillée) et estimée (ligne pleine). La densité réelle F^v est un mélange de deux gaussiennes $0.7\mathcal{N}(2, .5) + 0.3\mathcal{N}(-1, .1)$. Cette densité est supposée inconnue et estimée conjointement au vecteur d'état avec 10000 itérations MCMC (dont 7500 itérations de chauffage) conditionnellement à un vecteur de 120 observations $\mathbf{z}_{1:T}$. La densité estimée détermine correctement les deux modes de la densité réelle.

$$z_t = H\mathbf{x}_t + w_t \quad (5.44)$$

où $\mathbf{x}_t = (g(y_t) \quad g'(y_t))^\top$, $F = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}'_t = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{pmatrix} \mu_t$, $\mathbf{v}'_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2 \times V(\Delta t))$, $V(\Delta t) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{pmatrix}$, $H = (1 \quad 0)$. $\Delta t = y_t - y_{t-1}$ est la période d'échantillonnage constante.

b) Résultats de simulation

Les simulations ont été réalisées avec les paramètres suivants : $\sigma_w^2 = 0.1$, $\Delta t = 1$, $T = 50$. La fonction réelle g vaut zéro sur $[0, 10]$, puis saute à $4 + \text{sinc}(0.2(t - 10))$ sur $[10, 20]$ et enfin saute à $-5 \times \text{sinc}(0.2(t - 20))$ sur $[20, 50]$. Les hyperparamètres de la distribution de base sont $\mu_0 = 0$, $\kappa_0 = 1$, $\nu_0 = 4$, $\lambda_0 = .05$. La fonction de régression a été estimée avec l'algorithme MCMC (algorithme 5.2 page 102 avec 5000 itérations dont 2500 itérations de chauffage) et le filtre particulaire rao-blackwellisé (algorithme 5.4 page 105 avec 1000 particules). Les fonctions de régression réelle et estimée, ainsi que les mesures, sont tracées dans les figures 5.3 et 5.4. Plusieurs séquences d'itérations avec des valeurs initiales différentes ont été réalisées, montrant

que l'algorithme de Gibbs converge vers la densité *a posteriori* complète et non simplement un mode local.

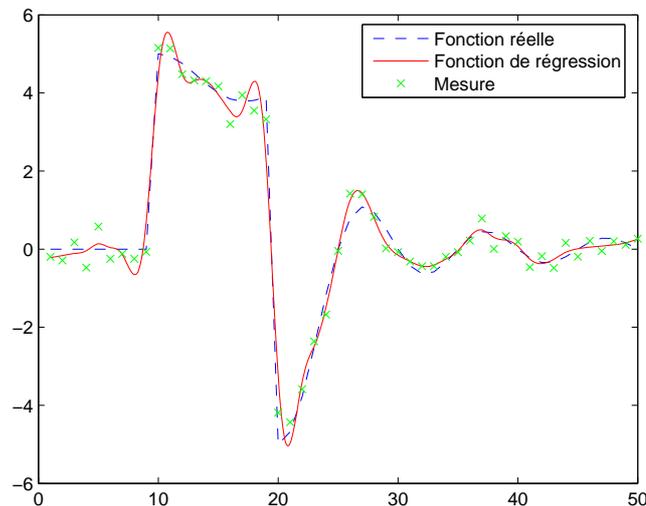


FIG. 5.3 – Fonctions réelle (ligne pointillée) et de régression estimée (ligne pleine) avec l'algorithme MCMC avec 5000 itérations dont 2500 de chauffage. La fonction réelle g vaut 0 sur $[0, 10]$, puis saute à $4 + \text{sinc}(0.2(t - 10))$ sur $[10, 20]$ et saute à nouveau à $-5 \times \text{sinc}(0.2(t - 20))$ sur $[20, 50]$. La fonction de régression estime correctement les sauts de la fonction réelle.

5.6.3 Détection de rupture dans une série temporelle biomédicale

Considérons maintenant le problème de la détection de rupture dans une série temporelle biomédicale. Le problème suivant a été abordé dans [Gor90] et [Car96]. On considère des patients qui ont récemment subi une transplantation rénale. Le niveau de la fonction rénale est donné par la vitesse à laquelle les substances chimiques sont évacuées du sang, et cette vitesse peut être inférée indirectement à partir de la mesure du taux de créatinine. Si la fonction rénale est stable, le taux de créatinine varie à un niveau constant. Si la fonction rénale s'améliore (resp. se détériore) à un niveau constant alors la série diminue (resp. augmente) linéairement. Le rejet critique du rein transplanté est très souvent associé à un changement soudain de niveau ou de pente du niveau de créatinine. Les interventions cliniques sous la forme de dialyse provoquent également des augmentations soudaines du niveau de créatinine. Les amplitudes et le nombre de ces sauts étant inconnus, on modélise ceux-ci à l'aide de processus de Dirichlet à mélange, selon le modèle statistique détaillé ci-dessous.

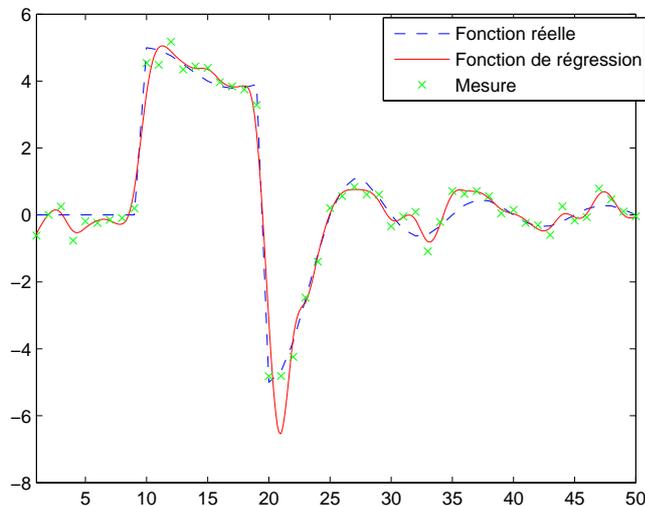


FIG. 5.4 – Fonctions réelle (ligne pointillée) et de régression estimée (ligne pleine) avec le filtre particulaire rao-blackwellisé avec 1000 particules. La fonction réelle g vaut 0 sur $[0, 10]$, puis saute à $4 + \text{sinc}(0.2(t - 10))$ sur $[10, 20]$ et saute à nouveau à $-5 \times \text{sinc}(0.2(t - 20))$ sur $[20, 50]$. La fonction de régression estime correctement les sauts de la fonction réelle.

a) Modèle statistique

Le modèle linéaire est donné par

$$\mathbf{x}_t = F\mathbf{x}_{t-1} + G\mathbf{v}_t \quad (5.45)$$

$$z_t = H\mathbf{x}_t + w_t \quad (5.46)$$

où $\mathbf{x}_t = (m_t, \dot{m}_t)$, m_t est le niveau de créatinine et \dot{m}_t la pente, $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, z_t est la mesure de créatinine et $H = (1 \ 0)$. Les mesures sont sujettes à des erreurs dues aux erreurs humaines de transcription des données, à un dysfonctionnement des équipements ou une contamination du sang. w_t suit le modèle de mélange suivant

$$w_t \sim \lambda^w \mathcal{N}(0, \sigma_1^w) + (1 - \lambda^w) \mathcal{N}(0, \sigma_2^w) \quad (5.47)$$

où $\lambda^w = 0.98$ est la probabilité qu'une mesure soit correcte. Dans ce cas, la variance est $\sigma_1^w = 10^{-7}$ et $\sigma_2^w = 1$ dans le cas contraire. Afin de prendre en compte les effets de sauts dans le niveau de créatinine, le bruit d'état \mathbf{v}_t est supposé distribué selon le modèle de mélange suivant

$$\mathbf{v}_t \sim \lambda^v F^v + (1 - \lambda^v) \delta_{\theta_0^v} \quad (5.48)$$

où $\theta_0^v = \left\{ (0 \ 0)^T, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\lambda^v = 0.15$ est la probabilité d'un saut dans le niveau de créatinine et F^v est un DPM de gaussiennes. Contrairement au modèle proposé dans [Car96], les niveaux de saut ne sont pas fixés. Ceux-ci, ainsi que leur nombre, sont estimés à travers le DPM.

b) Résultats de simulation

Le modèle précédent est appliqué aux données exploitées dans Gordon et Smith [Gor90] (et également réutilisées dans [Car96]). Les hyperparamètres de la distribution de base sont $\mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\kappa_0 = 10^6$, $\nu_0 = 4$, $\lambda_0 = \frac{10^6}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour l'estimation, 2000 itérations MCMC (dont 1000 itérations de chauffage) ont été réalisées. La figure 5.5 présente l'estimation du niveau de créatinine ainsi que les mesures. La figure 5.6 trace la probabilité *a posteriori* d'un saut dans le niveau de créatinine. Plusieurs séquences d'itérations avec des valeurs initiales différentes ont été réalisées, montrant que l'algorithme de Gibbs converge vers la densité *a posteriori* complète et non simplement un mode local.

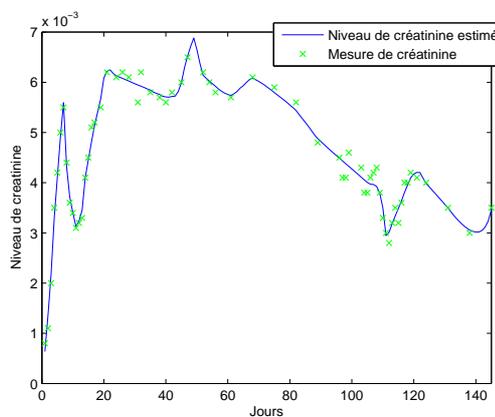


FIG. 5.5 – Niveau de créatinine mesuré (croix) et estimé (ligne pleine) avec 2000 itérations MCMC dont 1000 itérations de chauffage.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, un modèle non paramétrique bayésien pour l'estimation des bruits d'état et d'observation dans les modèles dynamiques linéaires a été présenté. Le processus de Dirichlet à mélange considéré ici comme distribution *a priori* est un modèle flexible et deux algorithmes de simulations numériques basés sur une rao-blackwellisation ont été présentés, permettant une inférence efficace. L'approche

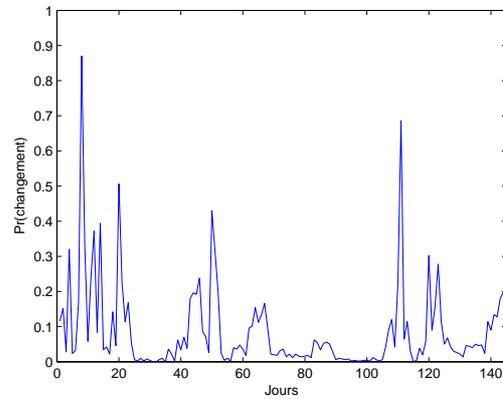


FIG. 5.6 – Probabilité *a posteriori* d'un saut dans le niveau de créatinine avec 2000 itérations MCMC dont 1000 itérations de chauffage. Avec un seuil de détection à 0.4, les sauts sont détectés aux jours Le niveau de créatinine connaît des sauts aux jours 8, 20, 50 et 110.

proposée a prouvé son efficacité dans les applications – en particulier, il a été montré que l'estimation de l'état était possible même si les statistiques des bruits d'évolution et de mesure étaient inconnues.

CHAPITRE 6

Processus de Dirichlet variant temporellement

6.1 Introduction

Une étude bibliographique des méthodes MCMC permettant l'estimation d'une densité de probabilité définie de manière **fixe** à l'aide des processus de Dirichlet a été effectuée au chapitre 4. Des algorithmes MCMC et de Monte Carlo séquentiels ont ensuite été proposés dans le chapitre 5 pour le cas des modèles dynamiques linéaires, quand les distributions des bruits d'évolution et/ou de mesure sont inconnues et **fixées**.

Dans ce chapitre, nous considérons désormais que la densité de probabilité est non seulement inconnue, mais aussi qu'elle **varie dans le temps**. Le fait de considérer la densité inconnue comme non stationnaire a plusieurs avantages. Tout d'abord, cela permet d'éviter le problème de non ergodicité lié au caractère statique de la densité dans le filtre particulaire, rencontré au chapitre 5. Ensuite, cela permet de prendre en compte une évolution temporelle de cette densité, et de développer des algorithmes adaptatifs, les caractéristiques statistiques d'un modèle donné pouvant être amenées à évoluer au cours du temps. Ce chapitre présente les éléments de base de l'estimation de densité variant temporellement à l'aide des processus de Dirichlet, et propose des algorithmes de Monte Carlo séquentiels performants pour estimer ces densités.

6.1.1 Exposé du problème

Au chapitre 4, il était supposé que la variable aléatoire \mathbf{z}_t était distribuée selon une densité F inconnue, mais fixée, soit $\mathbf{z}_t \sim F, \forall t = 1, \dots, T$. On considère dans

ce chapitre qu'à chaque instant t , la variable aléatoire \mathbf{z}_t est distribuée selon une densité inconnue F_t

$$\mathbf{z}_t \sim F_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (6.1)$$

On suppose que, pour tout $t = 1 \dots T$, la densité inconnue F_t prend la forme du modèle de mélange suivant

$$F_t = \int_{\Theta} f_{\psi_t}(\cdot | \theta_t) d\mathbb{G}_t(\theta_t) \quad (6.2)$$

avec $f_{\psi_t}(\cdot | \theta_t)$ la densité mélangée (connue) d'hyperparamètres ψ_t^1 , \mathbb{G}_t la distribution de mélange aléatoire, distribuée selon un processus de Dirichlet de distribution de base $\mathbb{G}_0(\cdot | \phi)$ (avec ϕ les hyperparamètres de \mathbb{G}_0) et de facteur d'échelle α . Ceci peut s'écrire, pour $t = 1, \dots, T$, sous la forme du modèle hiérarchique suivant

$$\mathbb{G}_t | \mathbb{G}_0, \phi, \alpha \sim DP(\mathbb{G}_0(\cdot | \phi), \alpha) \quad (6.3a)$$

$$\theta_t | \mathbb{G}_t \sim \mathbb{G}_t \quad (6.3b)$$

$$\mathbf{z}_t | \theta_t, \psi_t \sim f_{\psi_t}(\cdot | \theta_t) \quad (6.3c)$$

avec $\theta_t \in \Theta$ la variable latente à l'instant t . Il est à noter que contrairement au modèle hiérarchique de l'équation (4.14), une distribution de mélange \mathbb{G}_t différente est maintenant considérée à chaque instant t . On suppose donc qu'à chaque instant t , la distribution de mélange \mathbb{G}_t est distribuée selon un processus de Dirichlet de distribution de base $\mathbb{G}_0(\cdot | \phi)$ et de coefficient d'échelle α .

Conjointement à ce modèle hiérarchique, on désire introduire une dépendance temporelle entre la densité F_t et les densités précédentes $F_{1:t-1}$, ou de façon équivalente selon l'équation (6.2), entre les distributions de mélanges \mathbb{G}_t et $\mathbb{G}_{1:t-1}$ d'une part et les hyperparamètres de la densité mélangée ψ_t et $\psi_{1:t-1}$ d'autre part, soit

$$\mathbb{G}_t | \mathbb{G}_{1:t-1} \sim p(\mathbb{G}_t | \mathbb{G}_{1:t-1})$$

$$\psi_t | \psi_{1:t-1} \sim p(\psi_t | \psi_{1:t-1})$$

Le choix de la loi d'évolution $p(\psi_t | \psi_{1:t-1})$ pour les hyperparamètres ψ_t de la densité mélangée ne pose pas de problème particulier. On peut par exemple choisir une loi d'évolution markovienne $p(\psi_t | \psi_{t-1})$, avec une corrélation temporelle plus ou moins importante entre ψ_t et ψ_{t-1} . Par contre, étant donné le modèle hiérarchique (6.3), il existe une contrainte forte sur la loi d'évolution $p(\mathbb{G}_t | \mathbb{G}_{1:t-1})$. Celle-ci doit être déterminée de telle façon que marginalement, à chaque instant t , \mathbb{G}_t soit distribué selon un processus de Dirichlet $DP(\mathbb{G}_0(\cdot | \phi), \alpha)$. On appellera par la suite une loi d'évolution vérifiant ces conditions un **processus de Dirichlet variant temporellement** (*Time-Varying Dirichlet Process*, TVDP).

¹Par exemple, dans le cas d'un mélange de gaussiennes de variance fixée mais inconnue σ_t , on a $\psi_t = \sigma_t$. Ce paramètre ψ a été omis dans le chapitre 5, afin de simplifier les notations.

Remarque 6.1 *Bien qu'il n'y ait pas de nécessité impérative d'avoir marginalement un processus de Dirichlet, ce choix a plusieurs avantages, repris dans Srebro et Roweis [Sre05]. Tout d'abord, la littérature très développée sur les processus de Dirichlet et leurs propriétés permet une compréhension plus aisée des processus de Dirichlet variant temporellement. D'autre part, les processus de Dirichlet montrent des propriétés de conjugaison qui sont attractives d'un point de vue algorithmique, et qui se retrouvent dans les TVDP.*

6.1.2 Processus de Dirichlet dépendants

Définition 6.1 *Soit s_1 et s_2 deux covariables appartenant à un certain espace \mathcal{S} . On appelle processus de Dirichlet dépendant une loi $p(\mathbb{G}_{s_1}, \mathbb{G}_{s_2})$ déterminant la relation statistique entre deux distributions \mathbb{G}_{s_1} et \mathbb{G}_{s_2} et telle que marginalement \mathbb{G}_{s_1} et \mathbb{G}_{s_2} soient distribuées selon un processus de Dirichlet.*

Nous étudions dans ce chapitre un cas particulier des processus de Dirichlet dépendants, en considérant une covariable $t \in \mathbb{N}^*$ monotone croissante. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la définition de processus de Dirichlet dépendants.

La grande majorité des travaux introduisant une dépendance entre les processus de Dirichlet est basée sur la représentation *stick-breaking* du processus de Dirichlet [Set94, Pap04, Ish01, Ish02, Ish03], voir l'équation (4.9). Dans cette représentation, une réalisation d'un processus de Dirichlet $\mathbb{G}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k,t} \delta_{U_{k,t}}$ est représentée par un vecteur de poids $\pi_{1:\infty,t}$ (ou de façon équivalente par $\beta_{1:\infty,t}$) et un vecteur de *clusters* $U_{1:\infty,t}$. Afin d'introduire une dépendance par rapport à la covariable, les travaux existant font évoluer soit les poids $\pi_{k,t}$ (Griffin et Steel [Gri06b, Gri06a]), soit les *clusters* $U_{k,t}$ (MacEachern [Mac00b, Mac00a, Ior04], Porteous *et al.* [Por06] et Srebro et Roweis [Sre05]). Cependant, l'utilisation de la représentation *stick-breaking* afin de définir des processus de Dirichlet dépendants a un inconvénient majeur. Etant donné que dans cette représentation l'ordre des labels a une importance ($\mathbb{E}[\pi_{1,t}] < \mathbb{E}[\pi_{2,t}] < \dots$), il est nécessaire, en plus de faire évoluer les variables $\pi_{k,t}$, de mélanger à chaque instant les labels, sinon les labels inférieurs ont un avantage sur les labels supérieurs et l'échantillonneur a alors de fortes chances de tomber dans un mode local. Porteous, dans [Por06], fournit pour une explication détaillée de ce problème.

Cifarelli et Regazzini [Cif78] introduisent la dépendance entre deux distributions \mathbb{G}_t en définissant un modèle paramétrique sur la distribution de base \mathbb{G}_0 , qui est ainsi indexée par le temps $\mathbb{G}_{0,t}$. Chacune des distributions \mathbb{G}_t est distribuée de façon indépendante selon $DP(\alpha, \mathbb{G}_{0,t})$, la dépendance est donc située au niveau des hyperparamètres du processus de Dirichlet. Ce modèle a été appliqué dans [Car02], [Gri04], [Gui03] et [Mal97]). Ceci est une approche différente de la notre, car nous souhaitons ici conserver marginalement la même distribution de base et avoir une dépendance directe entre les distributions de mélange \mathbb{G}_t .

Zhu *et al.* [Zhu05] et Xing [Xin05] ont développé une dépendance temporelle entre des distributions de probabilité en se basant sur la représentation en urne de Polya, donnée par les équations (4.13) et (4.17). Zhu *et al.* proposent de pondérer, dans l'équation (4.17), le nombre d'apparition de chaque groupe par un noyau temporel, afin de diminuer la contribution des mesures les plus anciennes. Xing propose quant à lui de supprimer chaque groupe avec une certaine probabilité liée au nombre d'éléments de ce groupe. Bien que similaires dans l'idée à la solution proposée dans ce chapitre, les dépendances temporelles introduites dans ces rapports ne garantissent pas de conserver marginalement un processus de Dirichlet.

6.1.3 Modélisation proposée et plan du chapitre

Afin d'éviter le problème de la non équivalence des classes lié à l'utilisation de la représentation *stick-breaking*, qui nécessite de mélanger les labels, et de pouvoir cependant faire évoluer séparément les poids du mélange et les *clusters*, on se base sur la représentation de Neal [Nea00], qui considère le processus de Dirichlet comme la limite d'un mélange de Dirichlet-multinomial fini. Dans cette représentation, la numération des labels est sans importance, et il y a équivalence entre les classes. De plus, cette représentation permet de dissocier l'échantillonnage des variables d'allocation et celui des *clusters*.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, le modèle statistique du processus de Dirichlet variant temporellement est donné au paragraphe 6.2. Des lois de transition sont formulées explicitement dans le cas de distributions de base gaussienne et normale-inverse Wishart. Les objectifs d'estimation et un algorithme de Monte Carlo séquentiel, avec des lois d'importance efficaces sont ensuite proposées dans le paragraphe 6.3. Au paragraphe 6.5, le modèle du paragraphe 6.2 est appliqué à l'estimation séquentielle des densités de probabilité des bruits dans les modèles dynamiques non linéaires. Un algorithme Monte Carlo séquentiel dédié à ce problème et des lois d'importance y sont développés, et testés sur un exemple.

6.2 Modèle statistique

On considère, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $t = 1, \dots, T$, le modèle fini d'allocation Dirichlet-Multinomial suivant

$$U_{1,t}, \dots, U_{p,t} | \mathbb{G}_0, \phi \sim \mathbb{G}_0(\cdot | \phi) \quad (6.4a)$$

$$\pi_{1,t}, \dots, \pi_{p,t} | \alpha \sim \mathcal{D}\left(\frac{\alpha}{p}, \dots, \frac{\alpha}{p}\right) \quad (6.4b)$$

$$c_t | \pi_{1:p,t} \sim \text{Multinomial}(\pi_{1:p,t}) \quad (6.4c)$$

$$\mathbf{z}_t | c_t, U_{1:p,t}, \psi_t \sim f_{\psi_t}(\cdot | U_{c_t,t}) \quad (6.4d)$$

Dans ce modèle, le vecteur de probabilité $\pi_{1,t}, \dots, \pi_{p,t}$ est distribué à chaque instant t selon une distribution de Dirichlet $\mathcal{D}(\frac{\alpha}{p}, \dots, \frac{\alpha}{p})$, et les variables d'allocation c_t sont distribuées selon la loi multinomiale $\pi_{1:p,t}$. Ce modèle est équivalent, lorsque p tend vers l'infini, au modèle défini par l'équation (6.3) (voir Neal [Nea00]), et l'on a $\theta_t = U_{c_t,t}$. De la même façon que dans Neal [Nea00], on va marginaliser selon les probabilités $\pi_{1:p,t}$ et considérer uniquement les variables d'allocation c_t , en utilisant la représentation en urne de Polya.

6.2.1 Une première approche

De façon simple, on pourrait considérer, pour $r \in \mathbb{N}^*$, le modèle en urne de Polya suivant d'évolution des variables d'allocation c_t

$$c_t | \mathbf{c}_{t-r:t-1} \sim \Pr(c_t | \mathbf{c}_{t-r:t-1}, \alpha)$$

avec

$$\begin{cases} \Pr(c_t = k | \mathbf{c}_{t-r:t-1}) = \frac{m_k(\mathbf{c}_{t-r:t-1})}{\alpha + r}, \quad \forall k \in X(\mathbf{c}_{t-r:t-1}) \\ \Pr(c_t \notin X(\mathbf{c}_{t-r:t-1}) | \mathbf{c}_{t-r:t-1}) = \frac{\alpha}{\alpha + r} \end{cases}$$

On note $X(c_{u:v})$ l'ensemble des valeurs différentes prises par le vecteur $c_{u:v}$ et $m_k(c_{u:v}) = \sum_{j=u}^v \delta_{c_j}(k)$ le nombre de coefficients c_j ($j = u \dots v$) prenant la valeur k . Dans ce modèle, la nouvelle variable d'allocation c_t est échantillonnée selon une urne de Polya à partir des r variables d'allocation précédentes. Bien que ce modèle introduise une dépendance temporelle, il reste insatisfaisant. En effet, pour l'échantillonnage de la variable d'allocation c_t , les allocations précédentes de l'instant $t-1$ à l'instant $t-r$ ont toutes la même influence, alors que celles échantillonnées plus loin dans le temps devraient avoir une influence moindre.

6.2.2 Modèle proposé pour les variables d'allocation

On appelle variable d'allocation "en vie" à l'instant t , une variable d'allocation échantillonnée à un instant précédent $k < t$ et utilisée pour l'échantillonnage de c_t . L'idée du modèle défini ci-dessous est d'éliminer, à chaque instant t , chacune des variables d'allocation encore "en vie" avec une certaine probabilité $(1 - \gamma)$, et de la garder "en vie" avec la probabilité γ , $0 < \gamma < 1$.

On suppose qu'à l'instant $t-1$, N_{t-1} variables d'allocation "en vie" ont été utilisées pour échantillonner la variable d'allocation c_{t-1} selon un modèle d'urne de Polya. A l'instant t , chacune de ces N_{t-1} variables d'allocation ainsi que c_{t-1} est conservée avec la probabilité γ , et on obtient ainsi N_t variables d'allocation "en vie" ($N_t \leq N_{t-1} + 1$), qui sont utilisées pour échantillonner c_t . De cette façon, la probabilité que la variable d'allocation c_{t-r} soit utilisée pour l'échantillonnage de c_t est γ^r , avec $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma^r = 0$.

En réalité, seules nous intéressent pour échantillonner c_t les valeurs différentes de variables d'allocation "en vie", ainsi que le nombre d'occurrences de chacune.

On note $\mathbf{m}_{t-1} = \{m_{k,t-1} | k \in \mathbb{N}_*\}$ le vecteur comprenant le nombre d'occurrences de chaque valeur différente de variable d'allocation "en vie" à l'instant $t - 1$ ayant servi à l'échantillonnage de c_{t-1} . Soit $X(\mathbf{m}_{t-1}) = \{k | m_{k,t-1} \neq 0\}$ l'ensemble des valeurs différentes prises par les variables d'allocation "en vie" à l'instant $t - 1$.

Chacune des variables "en vie" à l'instant $t - 1$ étant conservée de façon indépendante avec la probabilité γ , la variable d'allocation reste "en vie" selon une loi de Bernoulli, et la somme $m_{k,t}$ des variables de chaque groupe restant "en vie" suit donc une loi binomiale, donnée par

$$m_{k,t} \sim \text{Binomial}(m_{k,t-1} + \delta_{c_{t-1}}(k), \gamma) \quad \forall k \in X(\mathbf{m}_{t-1}) \cup \{c_{t-1}\} \quad (6.5)$$

La nouvelle variable d'allocation c_t est alors distribuée selon le modèle en urne de Polya $\text{Pr}(c_t | \mathbf{m}_t)$ suivant

$$\begin{cases} \text{Pr}(c_t = k | \mathbf{m}_t) = \frac{m_{k,t}}{\alpha + \sum_{j \in X(\mathbf{m}_t)} m_{j,t}}, \quad \forall k \in X(\mathbf{m}_t) \\ \text{Pr}(c_t \notin X(\mathbf{m}_t) | \mathbf{m}_t) = \frac{\alpha}{\alpha + \sum_{j \in X(\mathbf{m}_t)} m_{j,t}} \end{cases} \quad (6.6)$$

Le modèle complet, résumé sur la figure 6.1 et appelé mélange de processus de Dirichlet variant temporellement (TVDPM) est donc, pour $t = 1, \dots, T$

$$\psi_t | \psi_{t-1} \sim p(\psi_t | \psi_{t-1}) \quad (6.7a)$$

$$m_{k,t} | m_{k,t-1}, c_{t-1} \sim \text{Binomial}(m_{k,t-1} + \delta_{c_{t-1}}(k), \gamma) \quad \forall k \in X(\mathbf{m}_{t-1}) \cup \{c_{t-1}\} \quad (6.7b)$$

$$c_t | \mathbf{m}_t \sim \text{Pr}(c_t | \mathbf{m}_t) \quad (6.7c)$$

$$U_{k,t} \sim \begin{cases} p(U_{k,t} | U_{k,t-1}) & \text{si } k \in X(\mathbf{m}_t) \\ \mathbb{G}_0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall k \in X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\} \quad (6.7d)$$

$$\mathbf{z}_t | U_{c_t,t}, \psi_t \sim f_{\psi_t}(\cdot | U_{c_t,t}) \quad (6.7e)$$

Si la variable d'allocation c_t prend une nouvelle valeur, on découvre alors un nouveau *cluster* précédemment non observé $U_{c_t,t}$, distribué selon \mathbb{G}_0 . Pour l'ensemble des *clusters* déjà observés, correspondant à l'ensemble $X(\mathbf{m}_t)$, on fait évoluer $U_{k,t}$ selon la densité de transition $p(U_{k,t} | U_{k,t-1})$ pour $k \in X(\mathbf{m}_t)$. Il reste à définir la loi d'évolution $p(U_{k,t} | U_{k,t-1})$ telle que marginalement $U_{k,t} \sim \mathbb{G}_0, \forall t$, ce qui est fait dans le paragraphe suivant pour des distributions de base gaussienne et normale-inverse Wishart.

Illustration du modèle avec la métaphore du restaurant chinois. La métaphore d'un restaurant chinois est fréquemment utilisée afin de mettre en évidence la propriété de *clustering* du processus de Dirichlet. Cette métaphore est reprise sur la figure 6.2 afin d'illustrer le modèle de processus de Dirichlet variant temporellement défini par l'équation (6.7).

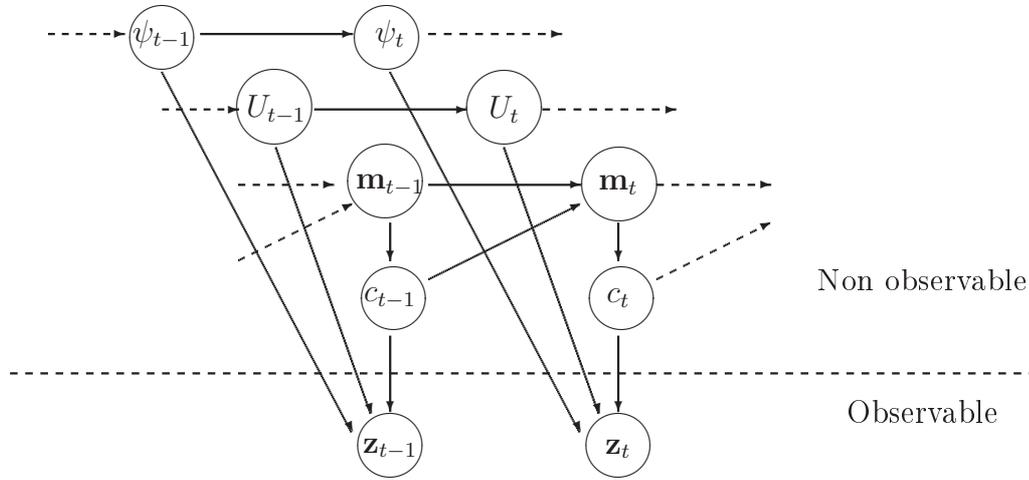


FIG. 6.1 – Modèle statistique du processus de Dirichlet à mélange variant temporellement

Preuve de la conservation d'un structure de partition propre au processus de Dirichlet Soient n variables c_1, \dots, c_n , échantillonnées selon l'équation (4.16) en urne de Polya, également appelée formule d'échantillonnage d'Ewens [Ewe72, Tav97]. Comme indiqué dans le chapitre 4, l'échantillonnage selon cette formule amène un effet de *clustering* des échantillons en M groupes, $M \leq n$. Une des manière d'identifier le regroupement réalisé est d'identifier $a_j(n)$, $j = 1, \dots, n$ le nombre de groupes rassemblant j variables. $a_1(n)$ est égal au nombre de variables seules, $a_2(n)$ correspond au nombre de groupes rassemblant deux variables, etc. Le vecteur $\mathbf{a}_{1:n}(n)$ satisfait $\sum_{j=1}^n j a_j(n) = n$ et $\sum_{j=1}^n a_j(n) = M$. La distribution π_n du vecteur $\mathbf{a}_{1:n}(n)$ est donnée par [Ant74, Pit96, Tav97, Kin78]

$$\pi_n(\mathbf{a}_{1:n}(n)) = n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{\alpha}{j}\right)^{a_j} \frac{1}{a_j!(\alpha + j - 1)} \quad (6.8)$$

Proposition 6.1 ([Pit96]) *La séquence des distributions de probabilité π_n définies par l'équation (6.8) est une structure de partition.*

Définition 6.2 ([Gne05]) *Une structure de partition est une séquence de distributions de probabilité π_n pour $\mathbf{a}_{1:n}(n)$, une partition aléatoire de n , telle que si $\mathbf{a}_{1:n}(n)$ est regardée comme une allocation aléatoire de n balles non labellisées en un certain nombre aléatoire de groupes labellisés, et, étant donné n , un nombre x de balles est retiré de façon uniforme et aléatoire, alors la partition aléatoire des $n - x$ balles restantes est distribuée selon π_{n-x} .*

Ainsi, la suppression uniforme à chaque instant t d'un certain nombre de variables d'allocation conserve la structure de partition, associée à la distribution (6.8), propre au processus de Dirichlet.

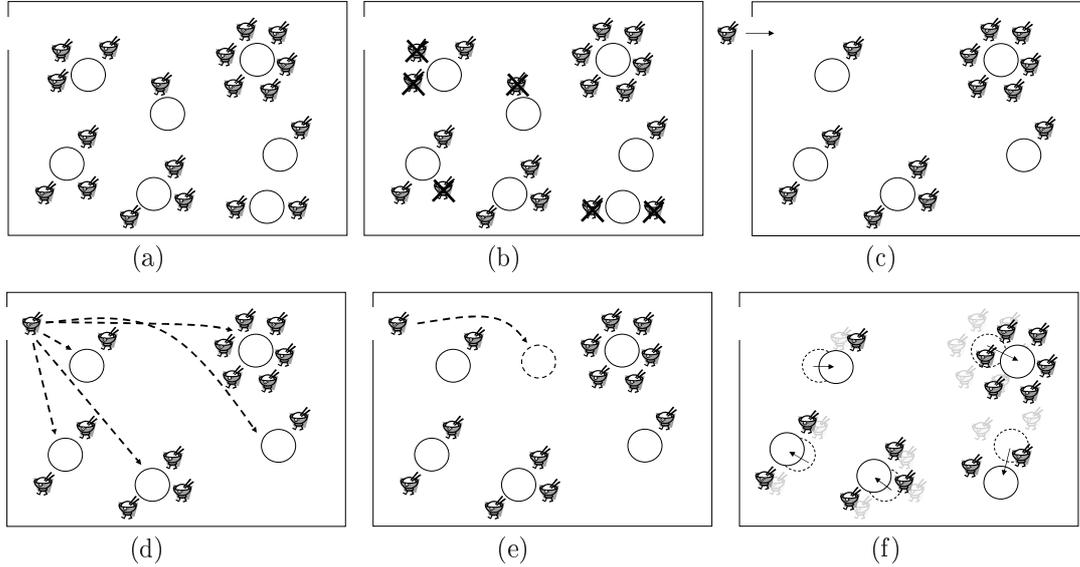


FIG. 6.2 – Illustration du processus de Dirichlet variant temporellement par la métaphore du restaurant chinois. On considère un restaurant avec un nombre infini de tables. A l’instant 1, un premier client entre dans le restaurant et s’assoit à la table $n^{\circ}1$, dont la localisation $U_{1,t}$ est tirée aléatoirement selon \mathbb{G}_0 . (a) A l’instant t , on suppose qu’il y a un certain nombre de clients dans le restaurant, répartis sur plusieurs tables. Chacun des clients effectue un choix : soit il reste à table (avec la probabilité γ), soit il quitte définitivement le restaurant (avec la probabilité $(1 - \gamma)$). (b) Une fois ce choix fait par chacun des clients, il reste dans le restaurant N_t clients, répartis sur plusieurs tables, avec $m_{k,t}$ clients sur la table k . (c) Un nouveau client entre alors dans le restaurant, et (d) s’assoit à la table k avec la probabilité $\frac{m_{k,t}}{\alpha + N_t}$, ou (e) s’assoit seul à une nouvelle table, dont la localisation est distribuée selon \mathbb{G}_0 , avec la probabilité $\frac{\alpha}{\alpha + N_t}$. (f) Chaque table qui était occupée avant l’arrivée du nouveau client est alors déplacée selon la loi d’évolution $p(U_{k,t}|U_{k,t-1})$.

6.2.3 Loi d’évolution $p(U_{k,t}|U_{k,t-1})$

Afin de conserver marginalement un processus de Dirichlet, la loi d’évolution $p(U_{k,t}|U_{k,t-1})$ doit être choisie de telle façon que marginalement $U_{k,t} \sim \mathbb{G}_0, \forall t$. Dans le cas général, la méthodologie de Pitt et Walker [Pit02, Pit05] permet de définir des distributions conditionnelles conservant les distributions marginales, à l’aide de variables auxiliaires. Cette méthodologie est détaillée en annexe B.9. Dans les deux paragraphes suivants sont données les expressions des lois d’évolution pour des distributions de base gaussienne et normale-inverse Wishart. Les travaux réalisés dans ce chapitre sont cependant généralisables à toute forme de distribution de base \mathbb{G}_0 , sous réserve de la détermination d’une loi de transition conservant marginalement

\mathbb{G}_0 .

a) Distribution de base gaussienne

Pitt et Walker [Pit02] ont donné la densité de transition permettant de conserver marginalement une distribution gaussienne de dimension 1. Ce résultat est ici généralisé à toute distribution gaussienne de dimension n .

On considère une distribution de base gaussienne $\mathbb{G}_0(\cdot|\phi) = \mathcal{N}(\cdot; \mu_0, \Sigma_0)$, avec $\phi = \{\mu_0, \Sigma_0\}$. Soit la variable auxiliaire $\omega_{k,t}$ telle que

$$\omega_{k,t}|U_{k,t} \sim \mathcal{N}(\rho U_{k,t}, I)$$

avec $\rho \in]0, +\infty[$. D'après la règle de Bayes, on a donc $U_{k,t}|\omega_{k,t} \sim \mathcal{N}(\mu(\omega_{k,t}), \Sigma)$ avec $\mu(\omega_{k,t}) = \mu_0 + K(\omega_{k,t} - \rho\mu_0)$, $K = \rho\Sigma_0(\rho^2\Sigma_0 + I)^{-1}$ et $\Sigma = \Sigma_0 - K(\rho^2\Sigma_0 + I)K^T$. La densité de transition est alors donnée par

$$\begin{aligned} p(U_{k,t}|U_{k,t-1}) &= \int \mathcal{N}(U_{k,t}; \mu(\omega_{k,t-1}), \Sigma) \mathcal{N}(\omega_{k,t-1}; \rho U_{k,t-1}, I) d\omega_{k,t-1} \\ &= \mathcal{N}(U_{k,t}; \mu_0 + \rho K(U_{k,t-1} - \mu_0), KK^T + \Sigma) \end{aligned}$$

On a (le détail des calculs est donné en annexe D)

$$\mathbb{E}[U_{k,t}|U_{k,t-1}] = \mu_0 + \rho K(U_{k,t-1} - \mu_0) \quad (6.9a)$$

$$\text{cov}(U_{k,t}, U_{k,t-1}) = \rho^2 \Sigma_0 (\rho^2 \Sigma_0 + I)^{-1} \Sigma_0 \quad (6.9b)$$

Le coefficient ρ règle la corrélation entre deux valeurs successives. Plus la valeur de ρ est grande, plus la corrélation entre $U_{k,t}$ et $U_{k,t-1}$ est importante. Si $\rho = 0$, $\text{cov}(U_{k,t}, U_{k,t-1}) = 0$ et $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{cov}(U_{k,t}, U_{k,t-1}) = \Sigma_0$.

b) Distribution de base normale-inverse Wishart

On considère maintenant une distribution de base normale-inverse Wishart $\mathbb{G}_0(\cdot|\phi) = \mathcal{NiW}(\cdot; \mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$ avec $\phi = \{\mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0\}$. On note $U_{k,t} = \{\mu_{k,t}, \Sigma_{k,t}\}$, $\mu_{k,t} \in \mathbb{R}^d$. On définit n variables auxiliaires $\omega_{1,k,t}, \dots, \omega_{n,k,t}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telles que

$$\omega_{1,k,t}, \dots, \omega_{n,k,t} | U_{k,t} \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu_{k,t}, \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}\right)$$

avec $\rho \in]0, +\infty[$. La distribution normale-inverse Wishart étant conjuguée naturelle pour une vraisemblance gaussienne, on a

$$U_{k,t} | \omega_{1:n,k,t} \sim \mathcal{NiW}(\mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0) \quad (6.10)$$

avec $\kappa'_0 = \kappa_0 + n\rho$, $\nu'_0 = \nu_0 + n$, $\mu'_0 = \frac{n\rho}{\kappa_0 + n\rho} \bar{w} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n\rho} \mu_0$ et $\Lambda'_0 = \Lambda_0 + \frac{\kappa_0 n \rho}{\kappa_0 + n\rho} (\bar{w} - \mu_0)(\bar{w} - \mu_0)^T + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{w})(\omega_{j,k,t} - \bar{w})^T$ et $\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_{j,k,t}$. Le détail des calculs est donné en annexe D. La densité de transition est donc

$$p(U_{k,t}|U_{k,t-1}) = \int \mathcal{NiW}(U_{k,t}; \mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0) \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(\omega_{j,k,t-1}; \mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho}) d\omega_{1:n,k,t-1}$$

A notre connaissance, il n'existe pas de méthode permettant de calculer analytiquement cette intégrale, il est donc nécessaire d'échantillonner d'abord les variables auxiliaires $\omega_{1:n,k,t}|U_{k,t-1}$ afin d'échantillonner $U_{k,t}|\omega_{1:n,k,t}$. La procédure est la suivante :

- Pour $j = 1, \dots, n$, échantillonner $\omega_{j,k,t}|U_{k,t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho})$
- Échantillonner $(\mu_{k,t}, \Sigma_{k,t})|\omega_{1:n,k,t} \sim \mathcal{NiW}(\mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0)$

Les corrélations temporelles sont données par (le détail des calculs est donné en annexe D)

$$\mathbb{E}[\mu_{k,t}|\mu_{k,t-1}] = \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n\rho}\mu_0 + \frac{n\rho}{\kappa_0 + n\rho}\mu_{k,t-1} \quad (6.11a)$$

$$\mathbb{E}[\Sigma_{k,t}|\Sigma_{k,t-1}] = \frac{\nu_0 + d + 1}{\nu_0 + d + n + 1}\mathbb{E}[\Sigma_{k,t-1}] + \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1}\Sigma_{k,t-1} \quad (6.11b)$$

$$\text{cov}(\mu_{k,t}, \mu_{k,t-1}) = \frac{n\rho}{(\kappa_0 + n\rho)}\text{var}(\mu_{k,t-1}) \quad (6.11c)$$

$$\text{cov}(\Sigma_{k,t}, \Sigma_{k,t-1}) = \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1}\text{var}(\Sigma_{k,t-1}) \quad (6.11d)$$

Ainsi le produit $n\rho$ règle la corrélation entre deux valeurs successives $\mu_{k,t}$ et $\mu_{k,t-1}$, tandis que l'entier naturel n règle la corrélation entre deux valeurs successives $\Sigma_{k,t}$ et $\Sigma_{k,t-1}$ (qui ne dépend pas de ρ). Plus la valeur de $n\rho$ est importante, plus la corrélation entre $\mu_{k,t-1}$ et $\mu_{k,t}$ est importante. Plus la valeur de n est grande, plus la corrélation entre $\Sigma_{k,t-1}$ et $\Sigma_{k,t}$ est importante.

6.2.4 Lois d'évolution des hyperparamètres

Afin d'ajouter un degré de flexibilité, les hyperparamètres γ , ρ (dans le cas gaussien) ou ρ et n (dans le cas normale-inverse Wishart) peuvent être définis comme des variables aléatoires, évoluant temporellement et auxquelles sont associés des modèles d'évolution $p(\gamma_t|\gamma_{t-1})$, $p(\rho_t|\rho_{t-1})$ et $\text{Pr}(n_t|n_{t-1})$. Ces hyperparamètres ont une grande influence sur l'estimation : le coefficient ρ par exemple règle la mémoire de la densité de probabilité, c'est-à-dire le nombre d'échantillons précédents sur lesquels elle va se baser pour réaliser l'estimation de la nouvelle valeur. Ce coefficient doit donc être important si la densité de probabilité est stationnaire sur de larges périodes de temps (on se base sur un grand nombre d'échantillons précédents afin d'estimer la densité), et faible lors d'un changement de densité. L'importance de l'estimation des hyperparamètres est mise en lumière au paragraphe 6.5.

La distribution beta étant conjuguée pour une vraisemblance binomiale, la loi d'évolution suivante est choisie pour γ_t

$$\gamma_t|\gamma_{t-1} \sim \mathcal{B}(a_\gamma, a_\gamma \frac{1 - \gamma_{t-1}}{\gamma_{t-1}}) \quad (6.12)$$

avec $a_\gamma \in]0, +\infty[$. On a dans ce cas $\mathbb{E}[\gamma_t|\gamma_{t-1}] = \gamma_{t-1}$ et $\text{var}(\gamma_t|\gamma_{t-1}) = \frac{\gamma_{t-1}^2(1-\gamma_{t-1})}{a_\gamma + \gamma_{t-1}}$. Le coefficient a_γ règle donc la dynamique d'évolution de γ_t . Une valeur faible implique une évolution rapide, et réciproquement.

Dans la suite de ce chapitre, les valeurs de n et ρ ont été fixées. On peut cependant également les considérer comme des variables aléatoires variant temporellement et les estimer sur la base des modèles d'évolution suivants. Pour n_t , on définit

$$n_t|n_{t-1} \sim \text{Binomial}(n_{t-1} + a_n, \frac{n_{t-1}}{n_{t-1} + a_n}) \quad (6.13)$$

avec $a_n \in \mathbb{N}$. On a $\mathbb{E}[n_t|n_{t-1}] = n_{t-1}$ et $\text{var}(n_t|n_{t-1}) = \frac{a_n n_{t-1}}{a_n + n_{t-1}}$. Le coefficient a_n règle la dynamique d'évolution de n_t . Une valeur élevée implique une évolution rapide, et réciproquement. Pour ρ_t , on définit

$$\rho_t|\rho_{t-1} \sim \mathcal{G}(\frac{\rho_{t-1}}{a_\rho}, a_\rho) \quad (6.14)$$

avec $a_\rho \in]0, +\infty[$. On a $\mathbb{E}[\rho_t|\rho_{t-1}] = \rho_{t-1}$ et $\text{var}(\rho_t|\rho_{t-1}) = a_\rho \rho_{t-1}$. Le coefficient a_ρ règle la dynamique d'évolution de ρ_t . Une valeur élevée implique une évolution rapide, et réciproquement. On note par la suite η_t l'ensemble des hyperparamètres associés à la loi d'évolution de $U_{k,t}$.

6.3 Algorithme de Monte Carlo séquentiel

6.3.1 Objectifs d'estimation

Les variables d'intérêt sont les variables d'allocation c_t , le vecteur \mathbf{m}_t , les *clusters* $U_{k,t}$, $k \in X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}$ et les hyperparamètres ψ_t et γ_t . On cherche donc, à chaque instant t , à estimer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, U_{1:t}, \psi_{1:t}, \gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ à l'aide d'un algorithme de Monte Carlo séquentiel. Cette densité est approchée à l'aide de N particules pondérées par la distribution empirique

$$P_N(\mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, dU_{1:t}, d\psi_{1:t}, d\gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\mathbf{c}_{1:t}, \tilde{\mathbf{m}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{U}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\psi}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\gamma}_{1:t}^{(i)}}(\mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, dU_{1:t}, d\psi_{1:t}, d\gamma_{1:t})$$

L'algorithme 6.1 page suivante donne les étapes nécessaires à l'estimation séquentielle de la densité de probabilité $p(\mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, U_{1:t}, \psi_{1:t}, \gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$. Les lois d'importance utilisées dans cet algorithme sont détaillées dans le paragraphe suivant.

6.3.2 Lois d'importance

La particule $\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}$ est propagée à l'aide de sa loi d'évolution, c'est pourquoi sa loi d'importance n'apparaît pas dans le calcul du poids. Des lois d'importance efficaces sont proposées dans la suite pour l'échantillonnage des particules $\tilde{c}_t^{(i)}$, $\tilde{U}_{k,t}^{(i)}$ et $\tilde{\gamma}_t^{(i)}$.

Algorithme 6.1 Algorithme de Monte Carlo séquentiel pour l'estimation en ligne d'une densité de probabilité variant temporellement

• **Etape 6.1.1 Initialisation**

- Pour $i = 1, \dots, N$
 - Echantillonner $\tilde{\psi}_0^{(i)} \sim p(\psi_0)$
 - Faire $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• **Etape 6.1.2 Itérations**

- Pour $t = 1, 2, \dots$ faire
 - Pour $i = 1, \dots, N$ faire
 - $\forall k \in X(\mathbf{m}_{t-1}^{(i)}) \cup \{c_{t-1}^{(i)}\}$, échantillonner $\tilde{m}_{k,t}^{(i)} | m_{k,t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)}, \gamma_{t-1}^{(i)} \sim \text{Binomial}(m_{k,t-1}^{(i)} + \delta_{c_{t-1}^{(i)}}(k), \gamma_{t-1}^{(i)})$
 - Echantillonner $\tilde{c}_t^{(i)} \sim q(c_t | \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \psi_{t-1}^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Si $\tilde{c}_t^{(i)} \notin X(\mathbf{m}_t^{(i)})$, échantillonner $\tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)} \sim q(U_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)})$
 - Pour $k \in X(\mathbf{m}_t^{(i)})$, échantillonner $\tilde{U}_{k,t}^{(i)} \sim \begin{cases} q(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)}) & \text{si } k = \tilde{c}_t^{(i)} \\ p(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}) & \text{sinon} \end{cases}$
 - Echantillonner $\tilde{\gamma}_t^{(i)} \sim q(\gamma_t | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)})$
 - Echantillonner $\tilde{\psi}_t^{(i)} \sim q(\psi_t | \mathbf{z}_t, U_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}, \psi_{t-1}^{(i)})$
 - Pour $i = 1, \dots, N$ mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^{(i)} &\propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}, \tilde{\psi}_t^{(i)}) \Pr(\tilde{c}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})}{q(\tilde{c}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \psi_{t-1}^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \\ &\times \frac{\prod_{k \in A_t^{(i)}} p(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | U_{k,t-1}^{(i)}, \eta_{t-1}^{(i)}) \prod_{k \in B_t^{(i)}} \mathbb{G}_0(\tilde{U}_{k,t}^{(i)})}{\prod_{k \in A_t^{(i)}} q(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)}, \eta_{t-1}^{(i)}) \prod_{k \in B_t^{(i)}} q(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)})} \\ &\times \frac{p(\tilde{\psi}_t^{(i)} | \psi_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{\gamma}_t^{(i)} | \gamma_{t-1}^{(i)})}{q(\tilde{\psi}_t^{(i)} | \mathbf{z}_t, U_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}, \psi_{t-1}^{(i)}) q(\tilde{\gamma}_t^{(i)} | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)})} \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$, $A_t^{(i)} = X(\mathbf{m}_t^{(i)}) \cap \{\tilde{c}_t^{(i)}\}$ et $B_t^{(i)} = \overline{X(\mathbf{m}_t^{(i)})} \cap \{\tilde{c}_t^{(i)}\}$.

- Calculer N_{eff} selon l'équation (1.27). Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, rééchantillonner les poids. Sinon, renommer les particules sans $\tilde{\cdot}$.
-

a) Loi $q(c_t | \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \psi_{t-1}^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$

A partir de l'équation (6.6), et en supposant une évolution faible de l'hyperparamètre ψ_t et des clusters $U_{k,t}$ de l'instant $t-1$ à l'instant t , la densité d'importance

optimale peut être approchée par

$$\begin{cases} \Pr(c_t = k | \mathbf{m}_t, \psi_{t-1}, U_{X(\mathbf{m}_t), t-1}, \mathbf{z}_t) \simeq b m_{k,t} f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | U_{k,t-1}), \quad \forall k \in X(\mathbf{m}_t) \\ \Pr(c_t \notin X(\mathbf{m}_t) | \mathbf{m}_t, \psi_{t-1}, U_{X(\mathbf{m}_t), t-1}, \mathbf{z}_t) \simeq b \alpha \int_{\Theta} f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t) \end{cases} \quad (6.15)$$

ou b est la constante de normalisation. Si \mathbb{G}_0 et $f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | \theta)$ sont conjugués, on peut calculer de façon exacte $\int_{\Theta} f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t)$. C'est le cas si $f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | \theta_t)$ est une densité gaussienne et si \mathbb{G}_0 est gaussienne, normale-inverse gamma ou normale-inverse Wishart.

b) Lois d'importance de $U_{k,t}$

La mesure \mathbf{z}_t apporte uniquement de l'information sur le *cluster* $U_{c_t,t}$. C'est pourquoi l'ensemble des *clusters* "en vie", tels que $k \neq c_t$ sont propagés selon la loi d'évolution $p(U_{k,t} | U_{k,t-1})$, et n'apparaissent ensuite plus dans le calcul du poids.

L'échantillonnage de $\tilde{U}_{c_t,t}^{(i)}$ constitue donc ici le point important, pour lequel il existe deux cas de figure. Soit $c_t \in X(\mathbf{m}_t)$, et dans ce cas c_t correspond à un *cluster* déjà "en vie", et l'on échantillonne $\tilde{U}_{c_t,t}^{(i)}$ selon la loi d'évolution $q(\cdot | U_{c_t,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)})$. Soit c_t correspond à un nouveau *cluster* antérieurement non observé, et $U_{c_t,t}$ est alors échantillonné selon $q(U_{\tilde{c}_t^{(i)},t} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)})$.

Loi $q(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)})$ Dans le cas où la nouvelle variable d'allocation c_t correspond à un *cluster* "en vie", $\tilde{U}_{c_t,t}^{(i)}$ est échantillonné selon la densité d'importance $q(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)})$. La loi d'importance optimale

$$p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, U_{k,t-1}, c_t, \psi_{t-1}) = \int p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, U_{k,t-1}, c_t, \psi_t) p(\psi_t | \psi_{t-1}) d\psi_t$$

peut être approchée par

$$\begin{aligned} p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, U_{k,t-1}, c_t, \psi_{t-1}) &\simeq \int p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, U_{k,t-1}, c_t, \psi_t) \delta_{\psi_{t-1}}(d\psi_t) \\ &\simeq \frac{f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | U_{k,t}) p(U_{k,t} | U_{k,t-1})}{\int_{\Theta} f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | U_{k,t}) p(U_{k,t} | U_{k,t-1}) dU_{k,t}} \end{aligned}$$

Cas d'une distribution de base gaussienne.

Si on considère la densité d'évolution gaussienne $p(U_{k,t} | U_{k,t-1}) = \mathcal{N}(U_{k,t} ; \mu_0 + \rho K (U_{k,t-1} - \mu_0), K K^T + \Sigma)$, et que la densité mélangée est gaussienne, de moyenne $U_{k,t}$ et de variance $\Sigma_{\psi_{t-1}}$, la densité d'importance est définie par

$$q(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, U_{k,t-1}, c_t, \psi_{t-1}) = \mathcal{N}(U_{k,t} ; \mu', \Sigma')$$

avec

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu_0 + \rho K(U_{k,t-1} - \mu_0) + K'(\mathbf{z}_t - (\mu_0 + \rho K(U_{k,t-1} - \mu_0))) \\ K' &= (KK^T + \Sigma)(KK^T + \Sigma + \Sigma_{\psi_{t-1}})^{-1} \\ \Sigma' &= KK^T + \Sigma + K'(KK^T + \Sigma + \Sigma_{\psi_{t-1}})K'^T\end{aligned}$$

Cas d'une distribution de base normale-inverse Wishart.

Si l'on considère une distribution de base normale-inverse Wishart, il est nécessaire d'utiliser une variable auxiliaire, car l'on ne sait pas intégrer analytiquement selon la variable auxiliaire. La procédure est la suivante :

- Pour $j = 1, \dots, n$, échantillonner $\omega_{j,k,t} | U_{k,t-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho})$
- Échantillonner $U_{k,t} | \omega_{1:n,k,t}, c_t \sim \mathcal{NiW}(\mu_0'', \kappa_0'', \nu_0'', \Lambda_0'')$

avec $\kappa_0'' = \kappa_0' + 1$, $\nu_0'' = \nu_0' + 1$, $\mu_0'' = \frac{\kappa_0'}{\kappa_0' + 1} \mu_0' + \frac{1}{\kappa_0' + 1} \mathbf{z}_t$ et $\Lambda_0'' = \Lambda_0' + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + 1} (\mathbf{z}_t - \mu_0')(\mathbf{z}_t - \mu_0')^T$.

Loi $q(U_{\tilde{c}_t^{(i)},t} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}^{(i)})$ Si la nouvelle variable d'allocation c_t met à jour un *cluster* $U_{k,t}$ antérieurement non observé, la distribution *a priori* de ce nouveau *cluster* est \mathbb{G}_0 . La loi d'importance optimale $p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}) = \int p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \psi_t) p(\psi_t | \psi_{t-1}) d\psi_t$ peut être approchée par

$$\begin{aligned}p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \psi_{t-1}) &\simeq \int p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \psi_t) \delta_{\psi_{t-1}}(d\psi_t) \\ &\simeq \frac{f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | U_{k,t}) \mathbb{G}_0(U_{k,t})}{\int_{\Theta} f_{\psi_{t-1}}(\mathbf{z}_t | \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t)}\end{aligned}$$

Dans les cas de distributions de base normale ou normale-inverse Wishart et d'une densité mélangée gaussienne, cette densité d'importance se calcule analytiquement.

Loi $q(\tilde{\gamma}_t^{(i)} | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)})$ On note N_t la somme des éléments du vecteur \mathbf{m}_t . On a

$$N_t \sim \text{Binomial}(N_{t-1} + 1, \gamma_t)$$

Ainsi, la loi d'importance optimale est donnée par

$$\begin{aligned}p(\gamma_t | \gamma_{t-1}, N_t, N_{t-1}) &\propto \mathcal{B}(\gamma_t ; a_\gamma, a_\gamma \frac{1 - \gamma_{t-1}}{\gamma_{t-1}}) \text{Binomial}(N_t : N_{t-1} + 1, \gamma_t) \\ &= \mathcal{B}(\gamma_t ; a_\gamma + N_t, a_\gamma \frac{1 - \gamma_{t-1}}{\gamma_{t-1}} + N_{t-1} + 1 - N_t)\end{aligned}$$

la loi beta étant conjuguée naturelle pour une vraisemblance binomiale.

6.3.3 Estimation de la densité de probabilité

La densité inconnue F_t est estimée par $F_{t|t} = \mathbb{E}[F_t|\mathbf{z}_{1:t}]$. $F_{t|t}$ est la densité prédictive *a posteriori* et peut s'exprimer selon

$$F_{t|t}(\mathbf{z}'_t) = p(\mathbf{z}'_t|\mathbf{z}_{1:t}) \quad (6.16)$$

soit la densité de probabilité d'un nouvel échantillon \mathbf{z}'_t à l'instant t connaissant l'ensemble des mesures $\mathbf{z}_{1:t}$. On a

$$\begin{aligned} F_{t|t}(\mathbf{z}'_t) &= p(\mathbf{z}'_t|\mathbf{z}_{1:t}) \\ &= \int p(\mathbf{z}'_t|c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) \\ &\quad \times p(c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t|\mathbf{z}_{1:t}) d\{c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t\} \\ &\simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} p(\mathbf{z}'_t|\tilde{c}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \tilde{U}_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}) \cup \{\tilde{c}_t^{(i)}\}, t}^{(i)}, \tilde{\psi}_t^{(i)}) \end{aligned}$$

Et ainsi (le détail des calculs est donné en annexe D)

$$\begin{aligned} F_{t|t}(\mathbf{z}'_t) &\simeq \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{w}_t^{(i)}}{\alpha + 1 + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)}} \\ &\quad \times \left[\alpha \int_{\Theta} f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t|\theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t) + f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t|\tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}) + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)} f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t|\tilde{U}_{k,t}^{(i)}) \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

Soit, si $\sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)} \gg \alpha$,

$$F_{t|t} \simeq \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \frac{f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\cdot|\tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}) + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)} f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\cdot|\tilde{U}_{k,t}^{(i)})}{1 + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)}} \quad (6.18)$$

6.4 Exemple illustratif

On souhaite estimer en ligne une densité de probabilité F_t variant temporellement à partir de données scalaires $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}$ collectées séquentiellement. On suppose que \mathbf{z}_t est distribué selon un TVDP défini par l'équation (6.3), de densité mélangée gaussienne et de distribution de base normale-inverse Wishart. Les hyperparamètres de la distribution de base sont fixés à $\mu_0 = 0$, $\kappa_0 = 0.1$, $\nu_0 = 2$ et $\Lambda_0 = 1$. Le coefficient d'échelle est fixé à $\alpha = 3$. La loi d'évolution $p(U_{k,t}|U_{k,t-1})$ est celle définie au paragraphe 6.2.3.b). Les hyperparamètres sont fixés à $n = 4000$ et $\rho = 0.5$. L'hyperparamètre γ_t est quant à lui défini comme une variable aléatoire évoluant

temporellement et estimé à partir de la loi d'évolution $p(\gamma_t|\gamma_{t-1})$ définie par l'équation (6.12) avec $a_\gamma = 1000$. Les mesures \mathbf{z}_t sont simulées pour $t = 1, \dots, 1000$ à partir des distributions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{z}_t \sim 0.6\mathcal{N}(-1, 0.25) + 0.4\mathcal{N}(2, 0.5) & \text{si } t = 1, \dots, 300 \\ \mathbf{z}_t \sim 0.6\mathcal{N}(0, 0.5) + 0.2\mathcal{N}(3, 0.25) + 0.2\mathcal{N}(-3, 0.15) & \text{si } t = 301, \dots, 600 \\ \mathbf{z}_t \sim \mathcal{N}(0, 1) & \text{si } t = 601, \dots, 700 \\ \mathbf{z}_t \sim \mathcal{N}(-1.5 + \frac{850-t}{100}, 1) & \text{si } t = 701, \dots, 850 \\ \mathbf{z}_t \sim \mathcal{N}(-1.5, 1) & \text{si } t = 851, \dots, 1000 \end{array} \right.$$

Il y a donc des changements brutaux de densité de probabilité aux instants $t = 301$ et $t = 601$, où il y a apparition et disparition soudaine de modes de la densité. Entre les instants $t = 701$ et $t = 850$, le mode de la densité se déplace de 0 à -1.5 . La densité est estimée à l'aide de l'équation (6.18), et la distance d_t entre la densité estimée $F_{t|t}$ et la densité réelle F_t est calculée selon

$$d_t = \int_{\mathbb{R}} (F_{t|t}(\mathbf{z}) - F_t(\mathbf{z}))^2 d\mathbf{z} \quad (6.19)$$

La valeur de d_t est approchée numériquement à l'aide d'une grille déterministe. On calcule également le nombre moyen de variables d'allocation en vie $N_{t|t}$ selon

$$N_{t|t} = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \left(1 + \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t^{(i)})} m_{k,t}^{(i)} \right) \quad (6.20)$$

L'algorithme 6.1 est appliqué sur ces données simulées avec 500 particules. Sur la figure 6.3 sont représentées la densité estimée $F_{t|t}$ (en ligne pleine) et la densité réelle F_t (en pointillé) aux instants $t = 10, 50, 100, 200, 300, 310, 350, 400, 500, 600, 610, 650, 700, 800, 900$. Les évolutions en fonction du temps de la distance d_t , calculée selon l'équation (6.19), du nombre moyen $N_{t|t}$ de variables d'allocations en vie calculé selon l'équation (6.20), et de l'hyperparamètre estimé $\gamma_{t|t}$ sont représentées sur les figures 6.4-6.6.

Aux instants $t = 301$ et $t = 601$, d_t augmente puis diminue progressivement vers 0, montrant une convergence progressive de la densité estimée vers la densité réelle. L'algorithme s'adapte aux changements de forme de la densité de probabilité en ajustant la valeur de γ_t , qui diminue aux instants $t = 300$ et $t = 600$, pour remonter ensuite. Le même phénomène apparaît pour $N_{t|t}$. Tant que la densité de probabilité reste identique, l'algorithme se base sur un nombre grandissant de variables d'allocation précédemment échantillonnées. Lors d'un changement de la densité de probabilité, ce nombre diminue brutalement et l'algorithme oublie donc très vite les variables d'allocations anciennes, permettant ainsi une convergence plus rapide vers la nouvelle densité.

Afin de mettre en évidence l'impact de l'estimation de γ sur l'estimation de la densité F_t , l'algorithme a été lancé à partir des mêmes données, mais cette fois-ci

avec une valeur γ fixée à $\frac{149}{150}$. Le nombre de variables d'allocation "en vie" tend vers la valeur limite 150 (figure 6.8). Les changements de densité de probabilité ne sont pas repérés et l'algorithme continue à se baser sur un nombre de variables d'allocation précédentes élevé afin d'estimer la densité de probabilité. La figure 6.7 montre l'évolution temporelle de la distance d_t entre la densité réelle et estimée. Après un changement de densité, aux instants $t = 301$ et $t = 601$, la convergence vers la densité réelle est beaucoup plus longue que celle obtenue sur la figure 6.4 lorsque γ_t est estimé.

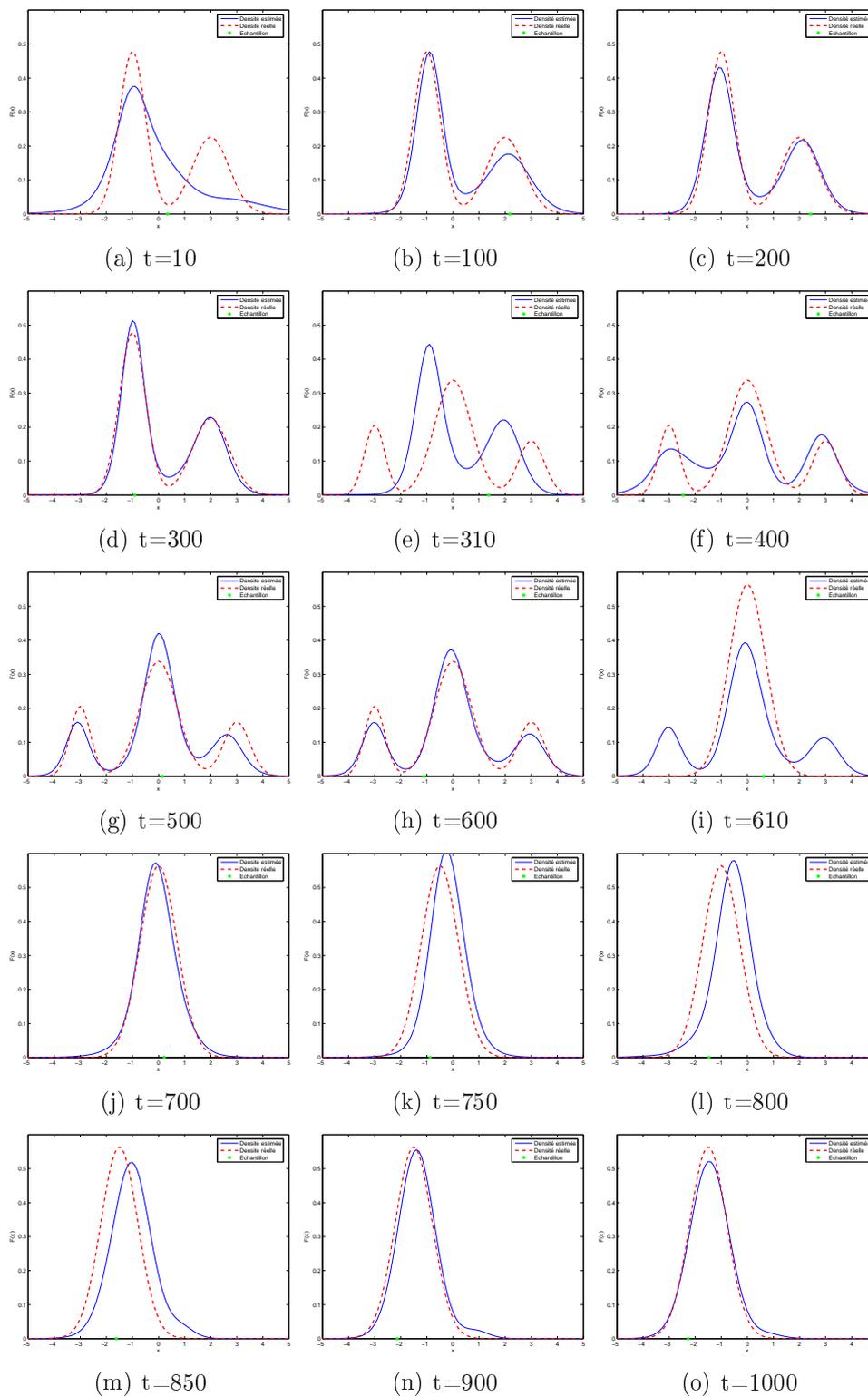


FIG. 6.3 – Densité réelle (en pointillé) et estimée (ligne pleine) aux instants $t = 10, 100, 200, 300, 310, 400, 500, 600, 610, 700, 750, 800, 850, 900, 1000$. Des changements brusques dans la forme de la densité réelle apparaissent aux instants $t = 301$ et $t = 601$. Le mode de la densité se déplace entre les instants $t = 700$ et $t = 850$.

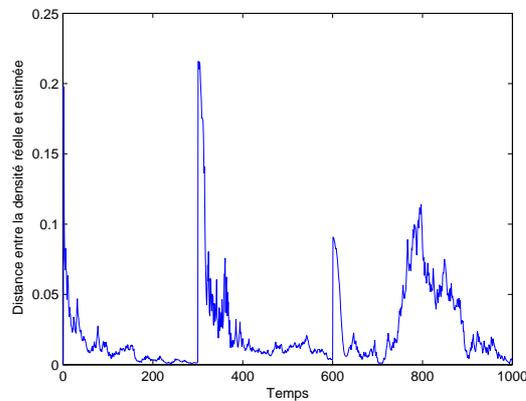


FIG. 6.4 – Evolution temporelle de la distance d_t entre la densité réelle et estimée pour γ_t estimé. L'erreur est importante aux instants $t = 1$, $t = 301$, $t = 601$, correspondant à des changements brutaux de la densité de probabilité. Puis cette erreur diminue progressivement, indiquant que la densité estimée converge vers la densité réelle.

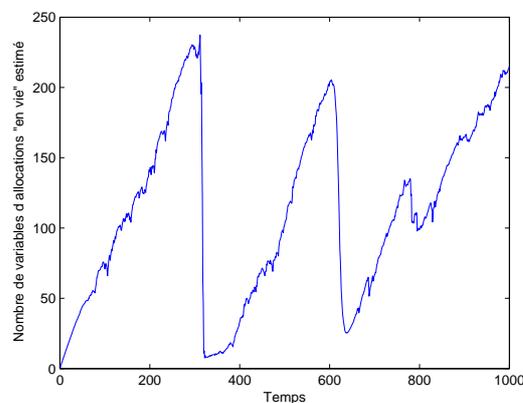


FIG. 6.5 – Evolution temporelle du nombre moyen de variables d'allocation "en vie" pour γ_t estimé. Lorsque la densité F_t reste la même, comme c'est le cas dans les intervalles $[1\ 300]$, $[301\ 600]$, $[601\ 700]$ et $[850\ 1000]$, le nombre de variables "en vie" augmente, l'algorithme se basant sur un nombre de variables de plus en plus grand afin d'estimer la densité de probabilité. Lorsqu'il y a un changement de densité, comme aux instants $t = 301$ et $t = 601$, le nombre de variables "en vie" chute brutalement, ce qui permet d'oublier les mesures précédentes, qui ne correspondent plus à la nouvelle densité de probabilité.

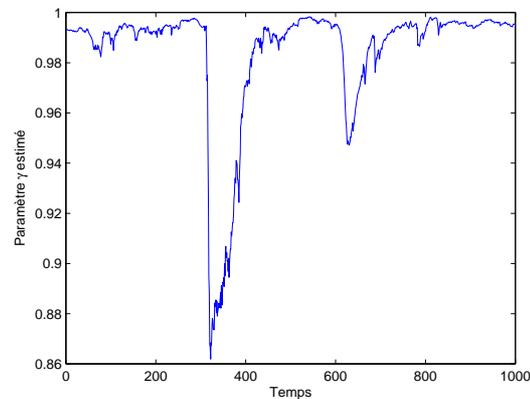


FIG. 6.6 – Evolution temporelle de $\gamma_{t|t}$. Lorsque la densité F_t reste la même, comme c'est le cas dans les intervalles $[1\ 300]$, $[301\ 600]$, $[601\ 700]$ et $[850\ 1000]$, sa valeur augmente, l'algorithme a alors une plus grande probabilité de conserver les variables d'allocations antérieures. Lorsqu'il y a un changement de densité, comme aux instants $t = 301$ et $t = 601$, sa valeur diminue, ce qui permet d'oublier rapidement les mesures précédentes, qui ne correspondent plus à la nouvelle densité de probabilité.

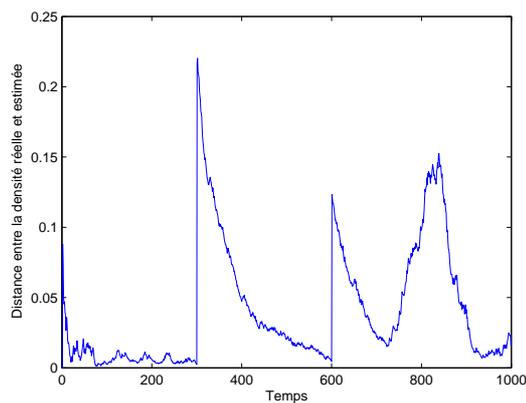


FIG. 6.7 – Evolution temporelle de la distance d_t entre la densité réelle et estimée pour γ fixé. L'erreur est importante aux instants $t = 1$, $t = 301$, $t = 601$, correspondant à des changements brutaux de la densité de probabilité. La densité estimée converge vers la densité réelle, mais de façon plus lente que lorsque γ_t est estimé (figure 6.4).

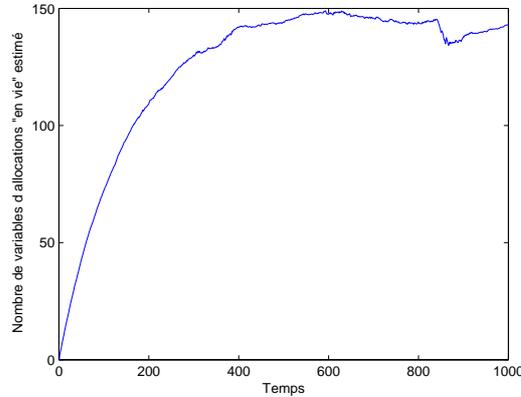


FIG. 6.8 – Evolution temporelle du nombre moyen de variables d'allocation "en vie" pour γ fixé à $\frac{149}{150}$. Le nombre moyen de variables "en vie" tend vers la valeur limite de 150, quels que soient les changements pour la densité réelle F_t , contrairement au cas où γ_t est estimé (figure 6.5).

6.5 Estimation en ligne des densités des bruits dans les modèles non linéaires

On considère le système non linéaire suivant

$$\mathbf{x}_t = f_{t-1}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \quad (6.21)$$

$$\mathbf{z}_t = h_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t \quad (6.22)$$

où \mathbf{x}_t est l'état caché, \mathbf{z}_t est la mesure, f_t est la fonction d'évolution connue et h_t est la fonction d'observation connue. \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont respectivement le bruit d'évolution et le bruit d'observation, supposés indépendants.

Remarque 6.2 Afin de simplifier les notations et contrairement aux conventions adoptées jusqu'ici dans ce manuscrit, on considère ici que le bruit d'évolution perturbant l'état à l'instant t est \mathbf{v}_t au lieu de \mathbf{v}_{t-1} , ceci afin de garder les mêmes indices et de simplifier les notations. Un simple décalage d'indice permet de retrouver le cas général décrit dans le chapitre 1.

On suppose que les bruits \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont non stationnaires et qu'à chaque instant t on a

$$\mathbf{v}_t \sim F_t^v \quad (6.23)$$

$$\mathbf{w}_t \sim F_t^w \quad (6.24)$$

avec F_t^v et F_t^w des densités de probabilités inconnues prenant la forme du modèle de mélange suivant

$$F_t^v = \int_{\Theta} f(\cdot|\theta) d\mathbb{G}_t^v(\theta) \quad (6.25)$$

$$F_t^w = \int_{\Theta} f(\cdot|\theta) d\mathbb{G}_t^w(\theta) \quad (6.26)$$

avec

$$\mathbb{G}_t^v \sim DP(\alpha^v, \mathbb{G}_0^v) \quad (6.27)$$

$$\mathbb{G}_t^w \sim DP(\alpha^w, \mathbb{G}_0^w) \quad (6.28)$$

Les distributions de base $\mathbb{G}_0^v = \mathcal{N}iW(\mu_0^v, \kappa_0^v, \nu_0^v, \Lambda_0^v)$ et $\mathbb{G}_0^w = \mathcal{N}iW(\mu_0^w, \kappa_0^w, \nu_0^w, \Lambda_0^w)$ sont des distributions normale-inverse Wishart d'hyperparamètres (fixés) $\phi^v = \{\mu_0^v, \kappa_0^v, \nu_0^v, \Lambda_0^v\}$ et $\phi^w = \{\mu_0^w, \kappa_0^w, \nu_0^w, \Lambda_0^w\}$. La densité mélangée $f(\cdot|\theta_t) = \mathcal{N}(\cdot; \mu_t, \Sigma_t)$ est une gaussienne de paramètres $\theta_t = \{\mu_t, \Sigma_t\}$. Afin d'introduire une dépendance temporelle entre les densités F_t^v et F_{t-1}^v d'une part, et F_t^w et F_{t-1}^w d'autre part, les bruits \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t sont supposées être distribuées selon le modèle TVDPM défini par l'équation (6.3).

Il est à noter que pour que l'estimation des densités de probabilité F_t^v et F_t^w soit envisageable, des conditions d'observabilité sont requises. Ces conditions, dépendantes du système non linéaire considéré, ne sont pas abordées ici.

6.5.1 Objectifs d'estimation

On donne ici l'algorithme uniquement pour l'estimation de la densité de probabilité du bruit de mesure F_t^v . Cet algorithme est directement généralisable (au prix de notations plus lourdes) pour l'estimation de F_t^w ou l'estimation conjointe de F_t^v et F_t^w . Les indices v sont omis par la suite, et l'on note F_t la densité de probabilité du bruit \mathbf{v}_t .

Les variables d'intérêt sont l'état \mathbf{x}_t , les variables d'allocation c_t , le vecteur \mathbf{m}_t , les *clusters* $U_{k,t}$, $k \in X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}$ et l'hyperparamètre γ_t . On cherche donc, à chaque instant t , à estimer la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, U_{1:t}, \gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$ à l'aide d'un algorithme de Monte Carlo séquentiel. Cette densité est approchée à l'aide de N particules pondérées par la distribution empirique

$$P_N(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, dU_{1:t}, d\gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} \delta_{\tilde{\mathbf{x}}_{0:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_{1:t}^{(i)}, \tilde{U}_{1:t}^{(i)}, \tilde{\gamma}_{1:t}^{(i)}}(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, dU_{1:t}, d\gamma_{1:t})$$

L'algorithme 6.2 page ci-contre donne les étapes nécessaires à l'estimation séquentielle de la densité de probabilité $p(\mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{c}_{1:t}, \mathbf{m}_{1:t}, U_{1:t}, \gamma_{1:t} | \mathbf{z}_{1:t})$.

Algorithme 6.2 Estimation de la densité de probabilité non stationnaire du bruit d'évolution dans les modèles dynamiques

• **Etape 6.2.1 Initialisation**

- Pour $i = 1, \dots, N$
 - Echantillonner $\mathbf{x}_0^{(i)} \sim p_0(\mathbf{x}_0)$
 - Faire $w_0^{(i)} \leftarrow \frac{1}{N}$

• **Etape 6.2.2 Itérations**

- Pour $t = 1, 2, \dots$ faire
 - Pour $i = 1, \dots, N$
 - $\forall k \in X(\mathbf{m}_{t-1}^{(i)}) \cup \{c_{t-1}^{(i)}\}$, échantillonner $\tilde{m}_{k,t}^{(i)} | m_{k,t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)}, \gamma_{t-1}^{(i)} \sim \text{Binomial}(m_{k,t-1}^{(i)} + \delta_{c_{t-1}^{(i)}}(k), \gamma_{t-1}^{(i)})$
 - Echantillonner $\tilde{c}_t^{(i)} \sim q(c_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Si $\tilde{c}_t^{(i)} \notin X(\mathbf{m}_t^{(i)})$, échantillonner $\tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)} \sim q(U_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$
 - Pour $k \in X(\mathbf{m}_t^{(i)})$, échantillonner $\tilde{U}_{k,t}^{(i)} \sim \begin{cases} q(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \tilde{c}_t^{(i)}) & \text{si } k = \tilde{c}_t^{(i)} \\ p(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}) & \text{sinon} \end{cases}$
 - Echantillonner $\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t^{(i)}, \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)})$
 - Echantillonner $\tilde{\gamma}_t^{(i)} \sim q(\gamma_t | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)})$
 - Pour $i = 1, \dots, N$ mettre à jour les poids

$$\begin{aligned} \tilde{w}_t^{(i)} &\propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_t^{(i)}, \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}) \Pr(\tilde{c}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t^{(i)}, \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}) q(\tilde{c}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)} \\ &\times \prod_{k \in A_t^{(i)}} \frac{p(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | U_{k,t-1}^{(i)})}{q(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, U_{k,t-1}^{(i)}, \tilde{c}_t^{(i)})} \prod_{k \in B_t^{(i)}} \frac{\mathbb{G}_0(\tilde{U}_{k,t}^{(i)})}{q(\tilde{U}_{k,t}^{(i)} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})} \\ &\times \frac{p(\tilde{\gamma}_t^{(i)} | \gamma_{t-1}^{(i)})}{q(\tilde{\gamma}_t^{(i)} | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)})} \end{aligned}$$

avec $\sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^{(i)} = 1$, $A_t^{(i)} = X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}) \cap \{\tilde{c}_t^{(i)}\}$ et $B_t^{(i)} = \overline{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \cap \{\tilde{c}_t^{(i)}\}$.

- Calculer N_{eff} selon l'équation (1.27). Si $N_{\text{eff}} \leq \eta$, rééchantillonner les poids. Sinon, renommer les particules sans $\tilde{\cdot}$.
-

6.5.2 Lois d'importance

Le choix de la densité d'importance $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t^{(i)}, \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)})$ n'est pas spécifique à notre contexte. On peut choisir pour celle-ci un pas de filtre Kalman étendu ou sans parfum (cf. paragraphe 1.3.2.f)). La loi $q(\gamma_t | \gamma_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, \mathbf{m}_{t-1}^{(i)}, c_{t-1}^{(i)})$ est identique à

celle proposée dans le paragraphe 6.3.2.

a) Loi $q(c_t | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, U_{X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)}, t-1)}^{(i)}, \mathbf{z}_t)$

On a, de façon similaire à l'équation (6.15)

$$\begin{cases} \Pr(c_t = k | \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t), t-1}, \mathbf{z}_t) = bm_{k,t} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}, U_{k,t-1}), \forall k \in X(\mathbf{m}_t) \\ \Pr(c_t \notin X(\mathbf{m}_t) | \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t), t-1}, \mathbf{z}_t) = b\alpha \int_{\Theta} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t) \end{cases} \quad (6.29)$$

ou b est la constante de normalisation.

La vraisemblance $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}, U_{k,t-1})$, pour $k \in X(\mathbf{m}_t)$, peut être approchée par un pas de filtre de Kalman étendu ou sans parfum. La valeur de l'intégrale $\int_{\Theta} p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t)$ peut elle être approchée par intégration de Monte Carlo, en échantillonnant selon \mathbb{G}_0 .

b) Loi $q(U_{k,t} | U_{k,t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t, \tilde{c}_t^{(i)})$

La loi d'importance optimale est approchée par

$$p(U_{k,t} | U_{k,t-1}, \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}, c_t) \simeq \frac{p(\mathbf{z}_t | U_{k,t}, \mathbf{x}_{t-1}) p(U_{k,t} | U_{k,t-1})}{\int_{\Theta} p(\mathbf{z}_t | U_{k,t}, \mathbf{x}_{t-1}) p(U_{k,t} | U_{k,t-1}) dU_{k,t}} \quad (6.30)$$

A notre connaissance, il n'existe pas de technique efficace permettant d'approcher cette densité de probabilité dans le cas général. Il peut cependant y avoir des simplifications possibles dans le cas où une partie du modèle peut être linéarisée.

Dans le cas général, on choisira la loi d'évolution $p(U_{k,t} | U_{k,t-1})$ comme loi d'importance pour les particules. Cette loi d'importance est peu efficace car elle ne prend pas en compte la mesure \mathbf{z}_t , mais permet tout de même une bonne estimation de la densité de probabilité pour un nombre de particules raisonnable, comme cela est montré au paragraphe 6.5.3.

c) Loi $q(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})$

La loi d'importance optimale est approchée par

$$p(U_{k,t} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \simeq \frac{p(\mathbf{z}_t | U_{k,t}, \mathbf{x}_{t-1}) \mathbb{G}_0(U_{k,t})}{\int p(\mathbf{z}_t | U_{k,t}, \mathbf{x}_{t-1}) \mathbb{G}_0(U_{k,t}) dU_{k,t}} \quad (6.31)$$

De la même façon que précédemment, il n'existe pas, à notre connaissance, de stratégie efficace permettant d'approcher cette densité, même s'il peut exister des simplifications possibles en fonction du modèle. Dans le cas général, on choisira \mathbb{G}_0 comme loi d'importance pour les particules.

6.5.3 Exemple illustratif

On considère le modèle fortement non linéaire suivant [Dou01b, Aru02, Car92]

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t + 25\frac{x_t}{1+x_t^2} + 8\cos(1, 2(t+1)) + v_t \quad (6.32)$$

$$z_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \quad (6.33)$$

où $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 10)$. Le bruit d'évolution v_t est supposé non stationnaire et distribué selon les distributions suivantes

$$\begin{cases} v_t \sim 0.7\mathcal{N}(0, 10) + 0.3\mathcal{N}(-10, 5) & \text{si } t = 1, \dots, 299 \\ v_t \sim \mathcal{N}(0, 10) & \text{si } t = 300, \dots, 600 \end{cases}$$

Les hyperparamètres de la distribution de base sont fixés à $\mu_0 = 0$, $\kappa_0 = 0.1$, $\nu_0 = 10$ et $\Lambda_0 = 80$. Le coefficient d'échelle est fixé à $\alpha = 3$. La loi d'évolution $p(U_{k,t}|U_{k,t-1})$ est celle définie au paragraphe 6.2.3.b). Les hyperparamètres sont fixés à $n = 4000$ et $\rho = 0.5$. L'hyperparamètre γ_t est quant à lui défini comme une variable aléatoire évoluant temporellement et estimé à partir de la loi d'évolution $p(\gamma_t|\gamma_{t-1})$ définie par l'équation (6.12) avec $a_\gamma = 1000$. L'algorithme 6.2 est utilisé avec 1000 particules. Les particules $\tilde{x}_t^{(i)}$ sont propagées à l'aide d'un pas de filtre de Kalman étendu.

Sur la figure 6.9 sont représentées la densité estimée $F_{t|t}$ (en ligne pleine) et la densité réelle F_t (en pointillé) aux instants $t = 10, 100, 200, 290, 300, 400, 500, 600$. Les évolutions en fonction du temps de la différence entre l'état réel x_t et l'état estimé $x_{t|t}$, de la distance d_t , calculée selon l'équation (6.19), du nombre moyen $N_{t|t}$ de variables d'allocations en vie calculé selon l'équation (6.20), et de l'hyperparamètre estimé $\gamma_{t|t}$ sont représentées sur les figures 6.10-6.12.

Soit E la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne, calculée selon

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - x_{t|t})^2} \quad (6.34)$$

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme, l'erreur quadratique obtenue avec le modèle proposé est comparée à celle obtenue avec un algorithme de filtrage particulaire classique avec 5000 particules (afin d'obtenir un temps de calcul similaire à celui de notre algorithme) et la même densité d'importance pour l'évolution de $\tilde{x}_t^{(i)}$, en définissant $v_t \sim \mathcal{N}(0, 100)$. 20 simulations sont réalisées avec des réalisations de bruits d'évolution différentes. La moyenne et l'écart-type de E pour les 20 simulations et pour chacun des deux modèles (TVDP et filtre particulaire classique) sont reportés dans la table 6.1.

Bien que la densité n'est pas estimée parfaitement du fait des fortes linéarités, l'utilisation du modèle proposé améliore nettement l'estimation du vecteur d'état.

TAB. 6.1 – Comparaison sur 20 simulations entre le modèle proposé et un modèle dont la distribution du bruit est fixée

Modèle pour v_t	TVDP	$\mathcal{N}(0, 100)$
Moyenne	5.09	10.08
Ecart-type	0.38	2.08

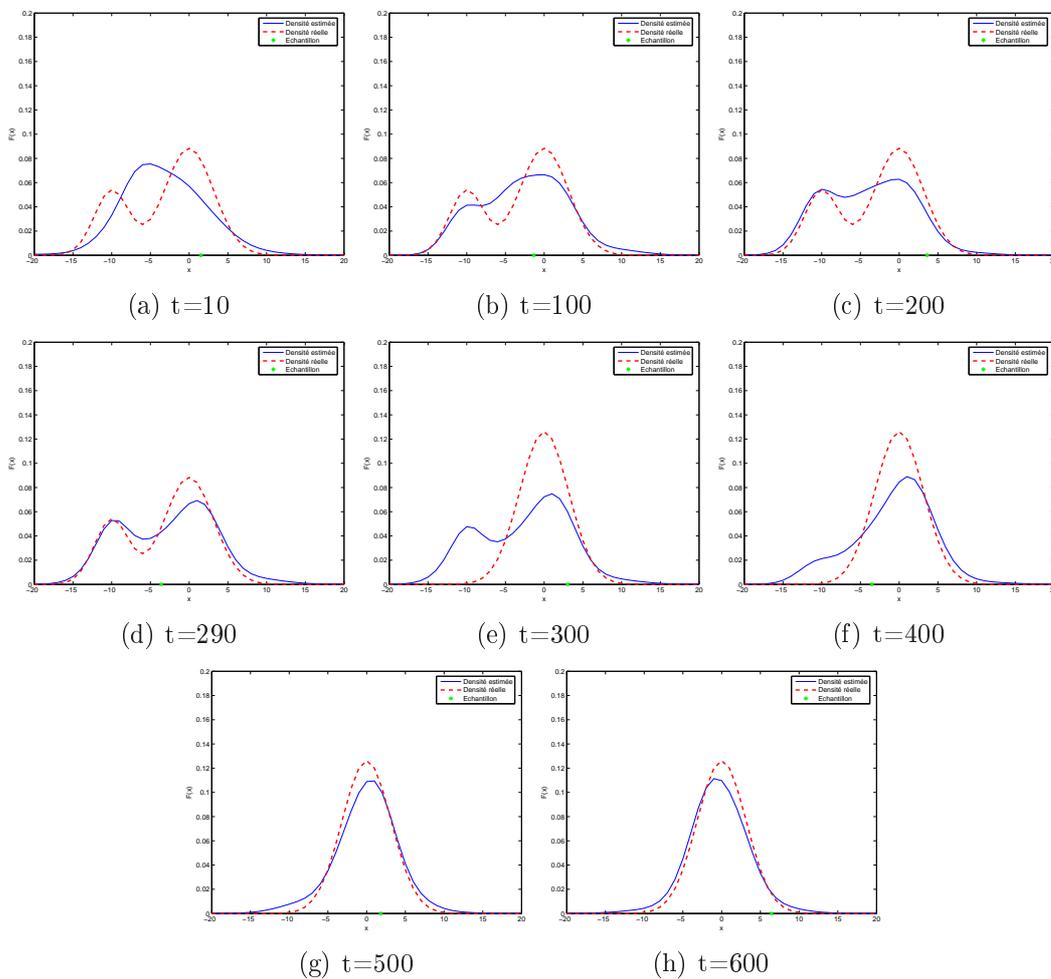


FIG. 6.9 – Densité réelle (en pointillé) et estimée (ligne pleine) aux instants $t = 10, 100, 200, 290, 300, 400, 500, 600$. Un changement dans la forme de la densité réelle a lieu à l'instant $t = 300$.

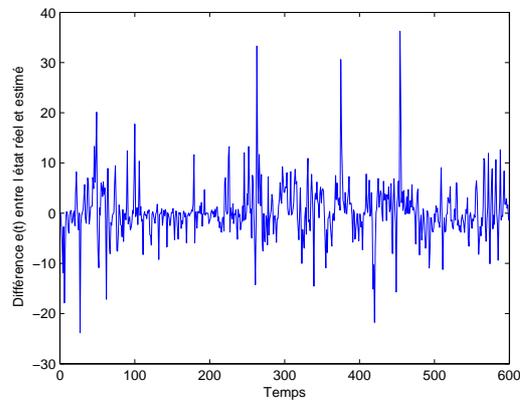


FIG. 6.10 – Evolution temporelle de l'erreur entre l'état réel et estimé.

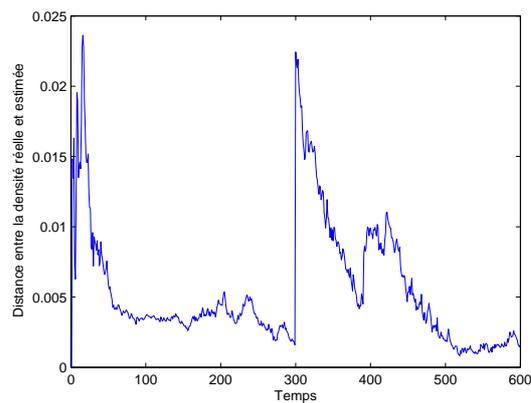


FIG. 6.11 – Evolution temporelle de la distance d_t entre la densité du bruit d'évolution réelle et estimée . L'erreur est importante aux instants $t = 1$ et $t = 300$, correspondant à l'initialisation et à un changement de la densité de probabilité. Puis cette erreur diminue indiquant que la densité estimée converge vers la densité réelle.

6.6 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé à la définition d'un processus de Dirichlet variant temporellement pour l'estimation en ligne de densités de probabilité non stationnaires. Un algorithme de Monte Carlo séquentiel pour l'estimation en ligne de cette densité ainsi que des densités d'importance efficaces ont également été proposés et testés sur un exemple illustratif. Ce modèle a ensuite été appliqué pour l'estimation de

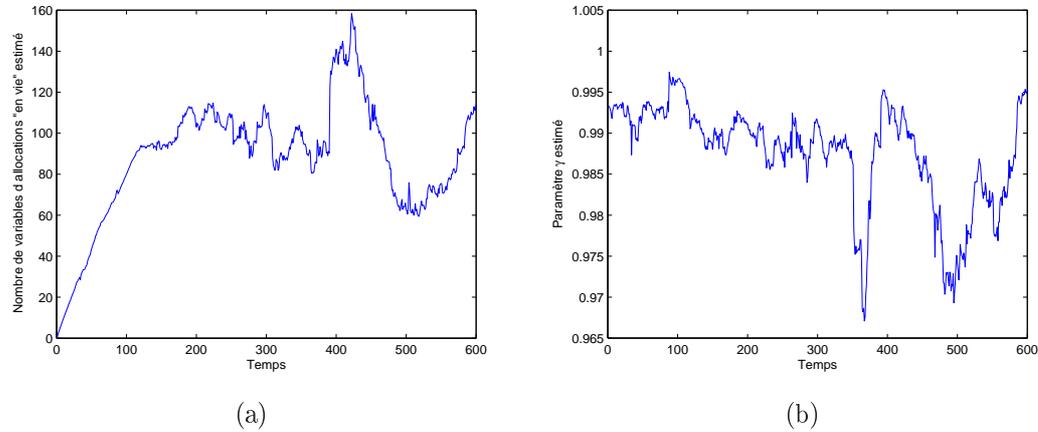


FIG. 6.12 – (a) Evolution temporelle du nombre moyen de variables d'allocation "en vie". (b) Evolution temporelle de $\gamma_{t|t}$.

la densité de probabilité des bruits dans les modèles dynamiques non linéaires. Un algorithme de Monte Carlo séquentiel dédié à ce problème est développé et testé sur un modèle fortement non linéaire.

Conclusion

La pensée complexe sait qu'il existe deux sortes d'ignorances : celle de l'homme qui ne sait pas mais veut apprendre, et l'ignorance (plus dangereuse) de celui qui croit que la connaissance est un procédé linéaire, cumulatif, qui avance en faisant la lumière là où auparavant régnait l'obscurité, ignorant que l'effet de toute lumière est aussi de produire des ombres. [...] il faut apprendre à cheminer dans l'obscurité et l'incertitude.

Edgar Morin, Eduquer pour l'ère planétaire.

Ce travail de thèse a pour objet les modèles de Markov cachés. Il s'est attaché à considérer des incertitudes supplémentaires affectant les modèles d'évolution et de mesure, selon les deux problèmes suivant.

1. Chaque capteur n'a pas un mais plusieurs modes de fonctionnement, et peut commuter entre ces différents modes.
2. Les densités de probabilité des bruits des lois d'évolution et de mesure sont inconnues et doivent être estimées conjointement à l'état.

Cette thèse s'est attachée à une analyse bayésienne de ces problèmes, en se basant sur les méthodes de Monte Carlo, afin d'aboutir à une approximation numérique de la distribution de probabilité *a posteriori*. L'approche méthodologique utilisée tout au long de ce manuscrit a été la suivante.

1. Définition d'un modèle statistique donnant les relations *a priori* entre les variables inconnues et la relation entre celles-ci et les mesures.
2. Définition de l'algorithme de Monte Carlo permettant d'approcher la distribution *a posteriori* de l'ensemble des variables inconnues.

Bien que ces deux parties soient bien découplées dans le manuscrit, et qu'en toute théorie les modèles doivent être définis indépendamment de l'algorithme, en se basant sur toute la connaissance *a priori* dont l'on dispose, ceci doit être modéré. En effet, l'efficacité algorithmique guide dans certains cas le choix des lois *a priori* vers des distributions conjuguées. C'est particulièrement vrai pour les processus de Dirichlet. Bien que quelques travaux ont dénoncé le manque de flexibilité des processus de Dirichlet, ceux-ci connaissent un grand succès de par la simplicité des algorithmes d'estimation qui leur sont associés.

Le chapitre 1 a développé les mécanismes de l'inférence bayésienne pour les modèles de Markov cachés et mis en avant les méthodes de Monte Carlo séquentielles et itératives pour l'approximation de la distribution de probabilité *a posteriori*.

Dans le chapitre 2, on s'est intéressé au cas d'un système multicateur où chaque capteur pouvait commuter entre différents états de fonctionnement. Un modèle à saut original a été exposé pour cette problématique. Dans ce modèle, les probabilités *a priori* de validité d'un modèle de mesure évoluent en fonction du temps. Plusieurs algorithmes de filtrage particulière pour des mesures synchrones, asynchrones et des modèles linéaires ont ensuite été détaillés avec des densités d'importance efficaces. Ces modèles/algorithmes ont ensuite été comparés aux modèles à saut « classiques », en montrant l'intérêt de notre modèle pour le problème concerné.

Les modèles et algorithmes du chapitre 2 ont ensuite été appliqués à la localisation d'un véhicule terrestre équipé de trois capteurs. L'un des capteurs est un récepteur GPS, pouvant délivrer des données erronées à cause de phénomènes de trajets multiples des signaux GPS. L'approche proposée montre une détection correcte des erreurs GPS et une augmentation de la précision de la localisation par rapport à un algorithme basé sur le filtre de Kalman.

Le chapitre 4 a présenté l'estimation non paramétrique de densités avec les processus de Dirichlet. Les propriétés et avantages de ceux-ci ont été développés en détail.

Dans le chapitre 5, on s'est intéressé à l'estimation des densités de probabilité des bruits d'évolution et de mesure dans les modèles dynamiques linéaires, à l'aide des processus de Dirichlet. Les algorithmes d'estimation de densité du chapitre 4 ne s'appliquant pas directement dans ce cas, un algorithme MCMC et de Monte Carlo séquentiel, dédiés à ce problème, ont été définis et testés sur plusieurs applications.

Enfin, le chapitre 6 s'est intéressé à la définition de processus de Dirichlet variant temporellement, afin d'estimer séquentiellement une densité de probabilité non stationnaire. Un algorithme de Monte Carlo et des lois d'importances efficaces ont été définis. Puis ce modèle a été appliqué à l'estimation des densités de probabilité non stationnaires des bruits d'évolution et de mesure dans les modèles non linéaires, et un algorithme de Monte Carlo séquentiel et des lois d'importance ont été spécifiés.

Retour sur les choix effectués dans ce mémoire

Ce mémoire s'est attaché à une analyse bayésienne du problème concerné. Celle-ci offre un cadre mathématique permettant une quantification de l'incertain et une expression mathématique des règles de mise à jour de cette incertitude en fonction de nouvelles informations. D'autres modélisations de l'incertain, telles que la théorie des fonctions de croyances [Dem68, Sha76, Sme94, Sme05] ont également été étudiées dans des travaux annexes [Car05b, Car06e, Car06c, Car06d]. La théorie des fonctions de croyance permet une modélisation de l'incertitude et de l'imprécision/ignorance relative à un modèle donné. Bien que de nouveaux outils méthodologiques aient été développés récemment [Sme05], les calculs relatifs à l'inférence restent complexes et des méthodes d'approximation numérique aléatoire ou déterministe restent à développer afin de populariser ce modèle.

L'approximation, dans ce cadre bayésien, de la densité *a posteriori* a été réalisée à l'aide des méthodes de Monte Carlo. L'utilisation de ces méthodes a semblé naturelle, un large spectre d'algorithmes, développés ces 10 dernières années, ont aidé à leur popularisation et ont démontré toute la puissance applicative de ces méthodes. D'autres méthodes, reposant sur des procédures d'approximation déterministe, sont cependant envisageables, comme par exemple les méthodes variationnelles [Jor99, Ble04], qui connaissent un certain succès dans la communauté de l'apprentissage (*Machine Learning*).

D'un côté modélisation statistique, ce mémoire s'est concentré sur les modèles à saut et les distributions de Dirichlet. Cette dernière permet, dans un cadre nonparamétrique, d'obtenir un compromis intéressant entre la flexibilité du modèle et les avantages algorithmiques, grâce à sa forme conjuguée. D'autres modèles, tels que les arbres de Polya [Wal99], ou les modèles d'allocation Dirichlet-multinomiale [Gre01a], permettent de gagner en flexibilité au détriment de l'aspect algorithmique.

Le choix a été fait, dans la plupart des cas, de considérer les hyperparamètres comme des variables aléatoires et de les estimer également, sur la base d'une distribution *a priori*. Ceci amène généralement un étage supplémentaire dans le modèle statistique, et une étape supplémentaire dans l'algorithme. Ces choix ont été justifiés sur la base de simulations, montrant la flexibilité ainsi apportée. Dans certains cas cependant, la connaissance *a priori* dont l'on dispose sur les paramètres du problème rend non nécessaire l'estimation de ces hyperparamètres, qui peuvent alors être considérés comme fixés.

Perspectives

Le chapitre 2 propose un algorithme permettant de commuter entre différents états de fonctionnement de capteur, dont un état dit défaillant, pour lequel on définit une densité vague. Il serait intéressant, dans le cas où le capteur tombe dans un état défaillant, d'essayer d'estimer, en ligne, le nouveau modèle de mesure associé. Une des approches envisageables serait d'utiliser le modèle et l'algorithme développés au chapitre 6 afin d'apprendre en ligne la densité de probabilité du bruit de mesure.

On a considéré dans le chapitre 3 les données GPS sous la forme binaire valide/invalid. Des travaux récents se sont intéressés à l'estimation du biais introduit par les trajets multiples à l'aide de modèles à saut [Gir05]. Ces sauts dans les biais sont liés à la forme de l'environnement (hauteur des immeubles, ...). Une piste intéressante serait d'étudier, pour un environnement donné, l'estimation des biais GPS à l'aide des processus de Dirichlet.

Les processus de Dirichlet ont deux applications principales : l'estimation de densité, qui nous a intéressé dans ce manuscrit, et le *clustering* de données. L'algorithme 6.1 peut en effet être utilisé afin d'effectuer du suivi de classe évolutive. Des applications pourraient concerner par exemple la quantification de séquences vidéo [Gon96] ou la détection d'intrusions sur Internet [Old04]. Cependant, pour de telles applications, une règle de décision doit être définie, qui constitue ici le point difficile. En effet le problème dit de *label switching* [Ste00] se pose, car il y a équivalence entre les classes. Des pistes peuvent être trouvées dans les travaux de Stephens [Ste00], Celeux et al. [Cel00] et Fraley et Raftery [Fra02] sur le problème de décision dans les modèles de mélange fini.

Une version rao-blackwellisée de l'algorithme 6.2 pour des modèles linéaires peut également être développée.

On a considéré dans le chapitre 6 des processus de Dirichlet avec des hyperparamètres fixés au cours du temps. Une extension de ce travail pourrait concerner des processus de Dirichlet dont les hyperparamètres varient également en fonction du temps. L'utilisation de la représentation *stick-breaking* doit permettre d'apporter des solutions à ce problème.

Bibliographie

- [Abr65] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover : NewYork, 1965.
- [Ack70] G. ACKERSON et K. FU. On state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 15, pages 10–17, 1970.
- [Aig00] M. AIGNER et G. M. ZIEGLER. *Proofs from THE BOOK*. Springer, 2000.
- [Aka77] H. AKASHI et H. KUMAMOTO. Random sampling approach to state estimation in switching environments. *Automatica*, volume 13, pages 429–434, 1977.
- [And79] B. ANDERSON et J. MOORE. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, 1979.
- [And86] H. ANDERSON. Metropolis, Monte Carlo, and the MANIAC. *Los Alamos Science*, pages 96–108, 1986.
- [And03] C. ANDRIEU, M. DAVY et A. DOUCET. Efficient Particle Filtering for Jump Markov Systems. Application to time-varying autoregressions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 51, n° 7, pages 1762 – 1770, 2003.
- [Ant74] C. ANTONIAK. Mixtures of Dirichlet processes with applications to Bayesian nonparametric problems. *The Annals of Statistics*, volume 2, pages 1152–1174, 1974.
- [Aru02] M. S. ARULAMPALAM, S. MASKELL, N. GORDON et T. CLAPP. A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 50, n° 2, pages 174 – 188, 2002.
- [Bar95] Y. BAR-SHALOM et X. R. LI. *Multitarget-multisensor tracking : principles and techniques*. YBS publishing, 1995.

- [Bar01] Y. BAR-SHALOM, X. R. LI et T. KIRUBAJAN. *Estimation with applications to tracking and navigation*. Editions Wiley-Interscience, 2001.
- [Baz05] E. BAZIW. Real-time seismic signal enhancement utilizing a hybrid Rao-Blackwellized particle filter and hidden Markov model filter. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, volume 2, n° 4, pages 418–422, 2005.
- [Ber94] J. BERNARDO et A. SMITH. *Bayesian theory*. Wiley, 1994.
- [Ber06] H. BERSINI, T. DENOEU, D. DUBOIS et H. PRADE. In memoriam : Philippe Smets (1938-2005). *International Journal of Approximate Reasoning*, volume 41, pages iii–viii, 2006.
- [Bla73a] D. BLACKWELL. Discreteness of Ferguson selection. *The Annals of Statistics*, volume 1, pages 356–358, 1973.
- [Bla73b] D. BLACKWELL et J. MACQUEEN. Ferguson distributions via Polya urn schemes. *The Annals of Statistics*, volume 1, pages 353–355, 1973.
- [Ble04] D. BLEI et M. JORDAN. Variational methods for the Dirichlet process. *Dans International Conference on Machine Learning (ICML)*. Banff, Alberta, Canada, 2004.
- [Blo88] H. BLOM et Y. BAR-SHALOM. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 33, n° 8, pages 780–783, 1988.
- [Bra97] M. BRAASCH. Autocorrelation sidelobe considerations in the characterization of multipath errors. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 33, n° 1, pages 290–295, 1997.
- [Bri03] M. BRIERS, S. MASKELL et R. WRIGHT. A Rao-Blackwellised Unscented Kalman Filter. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION)*. Cairns, Queensland, Australie, 2003.
- [Bri04] M. BRIERS, A. DOUCET et S. MASKELL. Smoothing algorithms for state-space models. Rapport technique, Signal Processing Laboratory, Department of Engineering, University of Cambridge, 2004.
- [Bét03] D. BÉTAILLE. A testing methodology for GPS phase multipath mitigation techniques. *Dans ION GPS*. 2003.
- [Car92] B. CARLIN, N. POLSON et D. STOFFER. A Monte Carlo Approach to Nonnormal and Nonlinear State-Space Modeling. *Journal of the American Statistical Association*, volume 87, pages 493–500, 1992.
- [Car94] C. K. CARTER et R. KOHN. On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*, volume 81, pages 541–553, 1994.
- [Car96] C. K. CARTER et R. KOHN. Markov chain Monte Carlo in conditionally Gaussian state space models. *Biometrika*, volume 83, n° 3, pages 589–601, 1996.

- [Car02] C. CAROTA et G. PARMIGIANI. Semiparametric regression for count data. *Biometrika*, volume 89, pages 265–281, 2002.
- [Car05a] F. CARON, M. DAVY, E. DUFLOS et P. VANHEEGHE. Fusion de capteurs potentiellement défaillants par filtrage particulaire. *Dans Colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*. Louvain-La-Neuve, Belgique, 2005.
- [Car05b] F. CARON, P. SMETS, E. DUFLOS et P. VANHEEGHE. Multisensor data fusion in the frame of the TBM on reals. Application to land vehicle positioning. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION'2005)*. Philadelphie, USA, 2005.
- [Car06a] F. CARON, M. DAVY, A. DOUCET, E. DUFLOS et P. VANHEEGHE. Bayesian inference for dynamic models with Dirichlet process mixtures. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION'2006)*. Florence, Italie, 2006.
- [Car06b] F. CARON, M. DAVY, E. DUFLOS et P. VANHEEGHE. Particle filtering for multisensor data fusion with switching observation models. Application to land vehicle positioning. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006. Accepté pour publication.
- [Car06c] F. CARON, S. N. RAZAVI, J. SONG, P. VANHEEGHE, E. DUFLOS, C. CALDAS et C. HAAS. Locating sensor nodes on construction projects. *Autonomous Robots*, 2006. Accepté pour publication.
- [Car06d] F. CARON, S. N. RAZAVI, J. SONG, P. VANHEEGHE, E. DUFLOS, C. CALDAS et C. HAAS. Models for locationg RFID nodes. *Dans Joint International Conference on Computing and Decision Making in Civil and Building Engineering*. Montreal, Canada, 2006.
- [Car06e] F. CARON, B. RISTIC, E. DUFLOS et P. VANHEEGHE. Least committed basic belief density induced by a multivariate Gaussian pdf. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION'2006)*. Florence, Italie, 2006.
- [Cel00] G. CELEUX, M. HURN et C. ROBERT. Computational and inferential difficulties with mixture posteriors. *Journal of the American Statistical Association*, volume 95, pages 957–970, 2000.
- [Che00a] R. CHEN et J. LIU. Mixture Kalman filters. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, volume 62, n° 3, pages 493–508, 2000.
- [Che00b] R. CHEN, X. WANG et J. LIU. Adaptive joint detection and decoding in flat-fading channels via mixture Kalman filtering. *IEEE Transactions on Information Theory*, volume 46, n° 6, pages 2079–2094, 2000.
- [Che03] Z. CHEN. Bayesian filtering : from Kalman filters to particle filters, and beyond. Rapport technique, Adaptive System Laboratory, Mac-

- Master university, ON, Canada, 2003. http://soma.crl.mcmaster.ca/~zhechen/download/ieee_bayesian.ps.
- [Cif78] D. CIFARELLI et E. REGAZZINI. Nonparametric statistical problems under partial exchangeability. *Annali dell'istituto di Matematica Finanziaria dell'Università di Torino*, volume 12, pages 1–36, 1978.
- [Com98] C. COMP et P. AXELRAD. Adaptive SNR-based carrier phase multipath mitigation technique. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 34, n° 1, pages 264–276, 1998.
- [Cow96] M. COWLES et B. CARLIN. MCMC convergence diagnosis : a comparative review. *Journal of the American Statistical Association*, volume 91, n° 434, pages 883–904, 1996.
- [Dav06] M. DAVY. An Introduction to Statistical Signal Processing and Spectrum Estimation. Dans A. KLAPURI et M. DAVY, rédacteurs, *Signal Processing Methods for Music Transcription*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [Dem68] A. DEMPSTER. A Generalization of Bayesian Inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, volume 30, 1968.
- [Do05] K.-A. DO, P. MULLER et F. TANG. A Bayesian mixture model for differential gene expression. *Journal of the Royal Statistical Society C*, volume 54, n° 3, page 627, 2005.
- [Dou97] A. DOUCET et P. DUVAUT. Bayesian estimation of state-space models applied to deconvolution of Bernoulli-Gaussian processes. *Signal Processing*, volume 57, pages 147–161, 1997.
- [Dou98] A. DOUCET. On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering. Rapport technique, Dept of Engineering, University of Cambridge, 1998.
- [Dou00] A. DOUCET, S. GODSILL et C. ANDRIEU. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistical Computing*, volume 10, n° 3, pages 197–208, 2000.
- [Dou01a] A. DOUCET et C. ANDRIEU. Iterative Algorithms for State Estimation of Jump Markov Linear Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 49, n° 6, pages 1216–1227, 2001.
- [Dou01b] A. DOUCET, N. DE FREITAS et N. GORDON, rédacteurs. *Sequential Monte Carlo Methods in practice*. Springer-Verlag, 2001.
- [Dou01c] A. DOUCET, N. GORDON et V. KRISHNAMURTHY. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 49, n° 3, pages 613–624, 2001.
- [Dou02a] A. DOUCET et B. RISTIC. Recursive state estimation for multiple switching models with unknown transition probabilities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 38, n° 3, pages 1098–1104, 2002.

- [Dou02b] A. DOUCET, B. VO, C. ANDRIEU et M. DAVY. Particle filtering for Multi-Target Tracking and Sensor Management. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION'2002)*. Annapolis, Maryland, USA, 2002, volume 1, pages 474–481.
- [Dou03] A. DOUCET et V. TADIC. Parameter estimation in general state-space models using particle methods. *Ann. Inst. Statist. Math.*, volume 55, n° 2, pages 409–422, 2003.
- [Dou05] A. DOUCET et X. WANG. Monte Carlo methods for signal processing : a review in the statistical signal processing context. *IEEE Signal Processing Magazine*, volume 22, n° 6, pages 152–170, 2005.
- [Duq05] F. DUQUENNE, S. BOTTON, F. PEYRET, D. BETAILLE et P. WILLIS. *GPS : localisation et navigation par satellites*. Hermes-Lavoisier, 2005.
- [Dur02] J. DURBIN et S. KOOPMAN. A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis. *Biometrika*, volume 89, n° 3, pages 603–615, 2002.
- [Esc92] M. ESCOBAR et M. WEST. Computing Bayesian nonparametric hierarchical models. Rapport technique, Institute of statistics and decision sciences, Duke University, Durham, USA, 1992.
- [Esc94] M. ESCOBAR. Estimating normal means with a Dirichlet process prior. *Journal of the American Statistical Association*, volume 89, pages 268–277, 1994.
- [Esc95] M. ESCOBAR et M. WEST. Bayesian density estimation and inference using mixtures. *Journal of the American Statistical Association*, volume 90, pages 577–588, 1995.
- [Ewe72] W. EWENS. The sampling theory of selectively neutral alleles. *Theoretical Population Biology*, volume 3, pages 87–112, 1972.
- [Far00] F. FARUQI et K. TURNER. Extended Kalman filter synthesis for integrated global positioning/inertial navigation systems. *Applied Mathematics and Computation*, volume 115, pages 213–227, 2000.
- [Fea04] P. FEARNHEAD. Particle filters for mixture models with an unknown number of components. *Statistics and Computing*, volume 14, pages 11–21, 2004.
- [Fer73] T. FERGUSON. A Bayesian analysis of some nonparametric problems. *The Annals of Statistics*, volume 1, pages 209–230, 1973.
- [Fer74] T. FERGUSON. Prior distributions on spaces of probability measures. *The Annals of Statistics*, volume 2, pages 615–629, 1974.
- [Flo05] J. FLORES-QUINTANILLA, R. MORALES-MENENDEZ, R. RAMIREZ-MENDOZA, L. GARZA-CASTANON et F. CANTU-ORTIZ. Toward a new fault diagnosis system for electric machines based on dynamic probabilistic models. *Dans American Control Conference*. Portland, USA, 2005.

- [Frü94] S. FRÜHWIRTH-SHNATTER. Data augmentation and dynamic linear models. *Journal of Time series Analysis*, volume 15, pages 183–202, 1994.
- [Fra02] C. FRALEY et A. RAFTERY. Model-based clustering, discriminant analysis, and density estimation. *Journal of the American Statistical Association*, volume 97, pages 611–631, 2002.
- [Fra05] C. FRALEY et A. RAFTERY. Bayesian regularization for normal mixture estimation and model-based clustering. Rapport technique 486, Dpt of Statistics, University of Washington, Seattle, USA, 2005.
- [Fre02] N. DE FREITAS. Rao-Blackwellised particle filtering for fault diagnosis. *Dans Aerospace Conference*. 2002.
- [Gel95] A. GELMAN, J. CARLIN, H. STERN et D. RUBIN. *Bayesian data analysis*. Chapman and Hall, 1995.
- [Gil01] W. GILKS et C. BERZUINI. Following a moving target : Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models. *Journal of the Royal Statistical Association : Series B (Statistical Methodology)*, volume 63, n° 1, pages 127–146, 2001.
- [Gir04] A. GIREMUS, A. DOUCET, V. CALMETTES et J.-Y. TOURNERET. A Rao-Blackwellized particle filter for INS/GPS integration. *Dans IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'04)*. 2004.
- [Gir05] A. GIREMUS et J.-Y. TOURNERET. Joint detection/estimation of multipath effects for the Global Positioning System. *Dans IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'05)*. Philadelphie, USA, 2005.
- [Gne05] A. GNEDIN et J. PITMAN. Regenerative partition structures. *The Electronic Journal of Combinatorics*, volume 11, pages 1–21, 2005.
- [Gon96] A. GONZALEZ, M. GRAÑA, A. D'ANJOU et M. COTTRELL. On the application of competitive neural networks to time-varying clustering problems. *Dans Spatiotemporal models in biological and artificial systems*, IOS Press. 1996.
- [Gor90] K. GORDON et A. SMITH. Monitoring and modeling biomedical time series. *Journal of the American Statistical Association*, volume 85, pages 328–337, 1990.
- [Gor93] N. GORDON, D. SALMOND et A. SMITH. A novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *Dans Radar and Signal Processing*. 1993, volume 140, pages 107–113.
- [Gre01a] P. GREEN et S. RICHARDSON. Modelling heterogeneity with and without the Dirichlet process. *Scandinavian Journal of Statistics*, volume 28, n° 2, pages 355–375, 2001.

- [Gre01b] M. GREWAL, L. WEILL et A. ANDREWS. *Global positioning systems, inertial navigation, and integration*. John Wiley-Son, 2001.
- [Gri04] J. GRIFFIN et M. STEEL. Semiparametric Bayesian inference for stochastic frontier models. *Journal of Econometrics*, volume 123, pages 121–152, 2004.
- [Gri06a] J. GRIFFIN et M. STEEL. Nonparametric inference in time series problems. *Dans World Meeting on Bayesian Analysis of the International Society on Bayesian Analysis*. 2006.
- [Gri06b] J. GRIFFIN et M. STEEL. Order-based dependent Dirichlet processes. *Journal of the American Statistical Association*, volume 101, n° 473, pages 179–194, 2006.
- [Gui00] J. GUIVANT, E. NEBOT et S. BAIKER. Autonomous navigation and map building using laser range sensors in outdoor applications. *Journal of Robotic Systems*, volume 17, n° 10, pages 565–583, 2000.
- [Gui02] J. GUIVANT, F. MASSON et E. NEBOT. Simultaneous localization and map building using natural features and absolute information. *International Journal of Robotics and Autonomous Systems*, volume 40, pages 79–90, 2002.
- [Gui03] P. GUIDICI, M. MEZZETTI et P. MULIERE. Mixtures of products of Dirichlet processes for variable selection in survival analysis. *Journal of Statistical Planning and Inference*, volume 111, pages 101–115, 2003.
- [Gus02] F. GUSTAFSSON, F. GUNNARSSON, N. BERGMAN, U. FORSELL, J. JANSSON, R. KARLSSON, et P.-J. NORDLUND. Particle filters for positioning, navigation and tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 50, n° 2, pages 425 – 437, 2002.
- [Has70] W. HASTINGS. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, volume 57, pages 97–109, 1970.
- [Hue02] C. HUE, J.-P. LE CADRE et P. PÉREZ. Sequential Monte Carlo Methods for Multiple Target Tracking and Data Fusion. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 50, n° 2, pages 309 – 325, 2002.
- [Ior04] M. D. IORIO, P. MUELLER, G. L. ROSNER et S. MACÉACHERN. An ANOVA model for dependent random measures. *Journal of the American Statistical Association*, volume 99, pages 205–215, 2004.
- [Ish00] H. ISHWARAN et M. ZAREPOUR. Markov chain Monte Carlo in approximate Dirichlet and beta two-parameter process hierarchical models. *Biometrika*, volume 87, pages 371–390, 2000.
- [Ish01] H. ISHWARAN et L. JAMES. Gibbs sampling methods for stick-breaking priors. *Journal of the American Statistical Association*, volume 96, n° 453, pages 161–173, 2001.

- [Ish02] H. ISHWARAN et M. ZAREPOUR. Exact and approximate sum-representations for the Dirichlet process. *Canadian Journal of Statistics*, volume 30, pages 269–283, 2002.
- [Ish03] H. ISHWARAN et L. JAMES. Some further developments for stick-breaking priors : finite and infinite clustering and classification. *Sankhya Series A*, volume 65, pages 577–592, 2003.
- [Jil04] V. JILKOV et X. R. LI. Online Bayesian estimation of transition probabilities for Markovian jump systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 52, n° 6, pages 1620–1630, 2004.
- [Jon95] P. DE JONG et N. SHEPHARD. The simulation smoother for time series. *Biometrika*, volume 82, n° 2, pages 339–350, 1995.
- [Jor99] M. JORDAN, Z. GHAHRAMANI, T. JAAKKOLA et L. SAUL. An introduction to variational methods for graphical models. *Machine Learning*, volume 37, pages 183–233, 1999.
- [Jul97] S. JULIER et J. UHLMANN. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. *Dans Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls, Orlando, FL*. 1997.
- [Jul00] S. JULIER, J. UHLMANN et H. DURRANT-WHYTE. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 45, n° 3, pages 477 – 482, 2000.
- [Kal60] R. E. KALMAN. A new approach to linear filtering and prediction problem. *Journal of the Basic Engineering*, volume 82, pages 35–45, 1960.
- [Kin78] J. KINGMAN. Random partitions in population genetics. *Proceedings of the Royal Society of London*, volume 361, pages 1–20, 1978.
- [Kit87] G. KITAGAWA. Non-Gaussian state-space modeling of nonstationary time series. *Journal of the American Statistical Association*, volume 82, n° 400, pages 1032–1041, 1987.
- [Kit96] G. KITAGAWA. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, volume 5, n° 1, pages 1–25, 1996.
- [Kon94] A. KONG, J. LIU et W. H. WONG. Sequential imputations and Bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association*, volume 89, n° 425, pages 278–288, 1994.
- [Liu01] J. LIU et M. WEST. Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering. *Dans A. DOUCET, N. D. FREITAS et N. GORDON, rédacteurs, Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag. 2001.

- [Mac99] S. MACÉACHERN, M. CLYDE et J. LIU. Sequential importance sampling for nonparametric Bayes models : the next generation. *The Canadian Journal of Statistics*, volume 27, n° 2, pages 251–267, 1999.
- [Mac00a] S. MACÉACHERN. Decision theoretic aspects of dependent nonparametric processes. *Dans World Meeting of the International Society for Bayesian Analysis*. 2000.
- [Mac00b] S. MACÉACHERN. Dependent Dirichlet processes. Rapport technique, Dept. of Statistics, Ohio State university, 2000.
- [Mac00c] S. MACÉACHERN et P. MULLER. Efficient MCMC schemes for robust model extensions using encompassing Dirichlet process mixture models. *Dans F. RUGGERI et D. RIOS-INSUA, rédacteurs, Robust Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, pages 295–316. 2000.
- [Mai81] R. E. MAINE et K. ILIFF. Formulation and implementation of a practical algorithm for parameter estimation with process and measurement noise. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, volume 41, n° 3, pages 558–579, 1981.
- [Mal97] B. MALLICK et S. WALKER. Combining information from several experiments with nonparametric priors. *Biometrika*, volume 84, pages 697–706, 1997.
- [Mar04] J. MARYAK, J. SPALL et B. HEYDON. Use of the Kalman filter for inference in state-space models with unknown noise distributions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 49, n° 1, pages 87– 90, 2004.
- [Mar05] J. MARAIS, M. BERBINEAU et M. HEDDEBAUT. Land mobile GNSS availability and multipath evaluation tool. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, volume 54, n° 5, pages 1697–1704, 2005.
- [Maz98] E. MAZOR, A. AVERBUCH, Y. BAR-SHALOM et J. DAYAN. Interacting multiple model methods in target tracking : a survey. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 34, n° 1, pages 103–123, 1998.
- [Med02] M. MEDVEDOVIC et S. SIVAGANESAN. Bayesian infinite mixture model based clustering of gene expression profiles. *Bioinformatics*, volume 18, n° 9, pages 1194–1206, 2002.
- [Meh70] R. MEHRA. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 15, n° 2, pages 175–184, 1970.
- [Mer00] R. V. DER MERWE, A. DOUCET, N. DE FREITAS et E. WAN. The unscented Particle Filter. *Dans Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*. 2000.
- [Met49] N. METROPOLIS et S. ULAM. The Monte Carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, volume 44, n° 247, pages 335–341, 1949.

- [Met53] N. METROPOLIS, A. ROSENBLUTH, M. ROSENBLUTH et A. TELLER. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, volume 21, n^o 6, pages 1087–1092, June 1953.
- [Met87] N. METROPOLIS. The beginning of the Monte Carlo method. *Los Alamos science*, pages 125–130, 1987.
- [Mul92] H. MULLER. Change-points in nonparametric regression analysis. *The Annals of Statistics*, volume 20, pages 737–761, 1992.
- [Mul04] P. MULLER et F. QUINTANA. Nonparametric Bayesian data analysis. *Statistical Science*, volume 19, n^o 1, pages 95–110, 2004.
- [Mye76] K. MYERS et B. TAPLEY. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 21, n^o 4, pages 520–523, 1976.
- [Nea98] R. NEAL. Markov chain sampling methods for Dirichlet process mixture models. Rapport technique 9815, Dpt of Statistics and department of computer science, University of Toronto, Ontario, Canada, 1998.
- [Nea00] R. NEAL. Markov chain sampling methods for Dirichlet process mixture models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, volume 9, pages 249–265, 2000.
- [Nor01] P.-J. NORDLUND et F. GUSTAFSSON. Sequential Monte Carlo filtering techniques applied to integrated navigation systems. *Dans American Control Conference*. Arlington, VA, 2001.
- [Old04] J. OLDMEADOW, S. RAVINUTALA et C. LECKIE. Adaptive clustering for network intrusion detection. *Dans Advances in knowledge discovery and data mining*, Springer Berlin, 2004.
- [Pap03] O. PAPASPILIOPOULOS, G. ROBERTS et M. SKÖLD. Non-centered parameterisations for hierarchical models and data augmentation. *Dans J. BERNARDO, M. BAYARRI, J. BERGER, A. DAWID, D. HECKERMAN, A. SMITH et M. WEST, rédacteurs, Bayesian statistics*, Oxford University Press, pages 307–326. 2003.
- [Pap04] O. PAPASPILIOPOULOS et G. ROBERTS. Retrospective MCMC for Dirichlet process hierarchical models. Rapport technique, University of Lancaster, UK, 2004.
- [Pap05] O. PAPASPILIOPOULOS et G. ROBERTS. Retrospective Markov chain Monte Carlo methods for Dirichlet hierarchical models, 2005. Soumis pour publication. Disponible sur <http://www.maths.lancs.ac.uk/papaspil/research.html>.
- [Pet97] S. PETRONE et A. RAFTERY. A note on the Dirichlet prior in Bayesian nonparametric inference with partial exchangeability. *Statistics and Probability Letters*, volume 36, pages 69–83, 1997.

- [Pie00] A. PIEVATOLO et R. ROTONDI. Analysing the interevent time distribution to identify seismicity phases : a Bayesian nonparametric approach to the multiple-changepoint problem. *Applied Statistics*, volume 49, n° 4, pages 543–562, 2000.
- [Pit96] J. PITMAN. Some developments of the Blackwell-MacQueen urn scheme. *Dans Statistics, probability and game theory; papers in honor of David Blackwell*, Institute of Mathematical Statistics, California, 1996.
- [Pit97] J. PITMAN et M. YOR. The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. *The Annals of Probability*, volume 25, pages 855–900, 1997.
- [Pit02] M. PITT, C. CHATFIELD et S. WALKER. Constructing first order stationary autoregressive models via latent processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, volume 29, pages 657–663, 2002.
- [Pit05] M. PITT et S. WALKER. Constructing stationary time series models using auxiliary variables with applications. *Journal of the American Statistical Association*, volume 100, n° 470, pages 554–564, 2005.
- [Por06] I. PORTEOUS, A. IHLER, P. SMYTH et M. WELLING. Gibbs sampling for (coupled) infinite mixture models in the stick-breaking representation. *Dans International Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. 2006.
- [Poy05] G. POYIADJIS, A. DOUCET et S. SINGH. Particle methods for optimal filter derivative : application to parameter estimation. *Dans International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'05)*. 2005.
- [Raf92] A. RAFTERY et S. LEWIS. One long run with diagnostics : a comparative review. *Statistical Science*, volume 7, pages 493–497, 1992.
- [Raf95] A. RAFTERY et S. M. LEWIS. How Many Iterations in the Gibbs Sampler ? Rapport technique, University of Washington, USA, 1995.
- [Ray01] J. RAY, M. CANNON et P. FENTON. GPS code and carrier multipath mitigation using a multi-antenna system. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, volume 37, pages 183–195, 2001.
- [Ris04] B. RISTIC, S. ARULAMPALAM et N. GORDON. *Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, 2004.
- [Rob99] C. P. ROBERT et G. CASELLA. *Monte Carlo statistical methods*. Springer, 1999.
- [Ros54] M. N. ROSENBLUTH et A. ROSENBLUTH. Further results on Monte Carlo equations of state. *The Journal of Chemical Physics*, volume 22, n° 5, pages 881–884, 1954.

- [Sch05] T. SCHON, F. GUSTAFSSON et P.-J. NORDLUND. Marginalized Particle Filters for Mixed Linear/Nonlinear State-Space Models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 53, n° 7, pages 2279 – 2289, 2005.
- [Set94] J. SETHURAMAN. A constructive definition of Dirichlet priors. *Statistica Sinica*, volume 4, pages 639–650, 1994.
- [Sha76] G. SHAFER. *A Mathematical Theory Of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [Sme94] P. SMETS et R. KENNES. The Transferable Belief Model. *Artificial Intelligence*, volume 66, pages 191–234, 1994.
- [Sme05] P. SMETS. Belief functions on real numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*, volume 40, n° 3, pages 181–223, 2005.
- [Sou02] J. SOUBIELLE, I. FIJALKOW, P. DUVAUT et A. BIBAUT. GPS positioning in a multipath environment. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 50, n° 1, pages 141–150, 2002.
- [Sär04] S. SÄRKKÄ, A. VEHTARI et J. LAMPINEN. Rao-Blackwellized Monte Carlo Data Association for Multiple Target Tracking. *Dans International Conference on Information Fusion (FUSION'2004)*. Stockholm, Suède, 2004.
- [Sre05] N. SREBRO et S. ROWEIS. Time-varying topic models using dependent Dirichlet processes. Rapport technique, Department of Computer Science, University of Toronto, 2005.
- [Ste00] M. STEPHENS. Dealing with label switching in mixture models. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, volume 62, pages 795–809, 2000.
- [Ste01] J. STEPHEN et G. LACHAPELLE. Development and testing of a GPS-augmented multi-sensor vehicle navigation system. *Journal of Navigation*, volume 54, n° 2, pages 297–319, 2001.
- [Tav97] S. TAVARE et W. EWENS. The Ewens multivariate distribution. *Dans Multivariate discrete distributions*, Wiley, 1997.
- [Tug82] J. TUGNAIT. Adaptive estimation and identification for discrete systems with Markov jump parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, volume 27, n° 5, pages 1054–1065, 1982.
- [Ver04] V. VERMA, G. GORDON, R. SIMMONS et S. THRUN. Real-time fault diagnosis. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, volume 11, n° 2, pages 56–66, 2004.
- [Wal99] S. WALKER, P. DAMIEN, P. LAUD et A. SMITH. Bayesian nonparametric inference for random distributions and related functions. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, volume 61, n° 3, pages 485–527, 1999.

- [Wan00] E. WAN et R. VAN DER MERWE. The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation. *Dans IEEE Symposium 2000 (AS-SPCC), Lake Louise, Alberta, Canada.* 2000.
- [Wan02a] E. A. WAN et R. VAN DER MERVE. The unscented Kalman filter. *Dans Kalman filtering and neural networks*, S. Haykin. 2002.
- [Wan02b] X. WANG, R. CHEN et D. GUO. Delayed-pilot sampling for mixture Kalman filter with application in fading channels. *IEEE Transactions on Signal Processing*, volume 50, n^o 2, pages 241–254, 2002.
- [Wei] E. WEISSTEIN. Stirling number of the first kind. From Mathworld—A Wolfram web resource.
- [Wes92] M. WEST. Hyperparameter estimation in Dirichlet process mixture models. Rapport technique, Institute of statistics and decision sciences, Duke University, Durham, USA, 1992.
- [Wes94] M. WEST, P. MULLER et M. ESCOBAR. Hierarchical priors and mixture models, with application in regression and density estimation. *Dans P. FREEMAN et A. SMITH, rédacteurs, Aspects of uncertainty*, John Wiley, pages 363–386. 1994.
- [Wil76] D. WILLNER, C. CHANG et K. DUNN. Kalman filter algorithms for a multi-sensor system. *Dans IEEE Conference on Decision and Control and Symposium on Adaptive Processes.* Clearwater, Fla, USA, 1976, pages 570–574.
- [Wu03] Y. WU, G. HUA et T. YU. Switching observation models for contour tracking in clutter. *Dans Aerospace Conference.* 2003.
- [Xin05] E. P. XING. Dynamic nonparametric Bayesian model and the birth-death process. Rapport technique, Center for automated learning and discovery, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 2005.
- [Xin06] E. XING, K. SOHN, M. JORDAN et Y. TEH. Bayesian multi-population haplotype inference via a hierarchical Dirichlet process mixture. *Dans International Conference on Machine Learning (ICML 2006).* 2006.
- [Yan04] N. YANG, W. F. TIAN, Z. H. JIN et C. B. ZHANG. Particle filter for sensor fusion in a land vehicle navigation system. *Measurement Science and Technology*, volume 16, pages 677–681, 2004.
- [Zhu05] X. ZHU, Z. GHARAMANI et J. LAFFERTY. Time-sensitive Dirichlet process mixture models. Rapport technique, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 2005.

ANNEXE A

Récursion *backward forward*

Les quantités $P'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$ et $P'_{t-1|t}(\theta_{t:T})m'_{t-1|t}(\theta_{t:T})$ définies au paragraphe 5.3.1 satisfont les équations de récursion du filtre d'information *backward* suivantes, adaptées de [Dou01a].

1. Initialisation

$$\begin{aligned} P'_{T|T}(\theta_T) &= H_T^\top (\Sigma_T^w)^{-1} H_T \\ P'_{T|T}(\theta_T)m'_{T|T}(\theta_T) &= H_T^\top (\Sigma_T^w)^{-1} (\mathbf{z}_T - \mu_T^w) \end{aligned}$$

2. Récursion *Backward*. Pour $t = T - 1..1$,

$$\Delta_{t+1} = \left[I_{n_v} + B^\top(\theta_{t+1})P'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T})B(\theta_{t+1}) \right]^{-1} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} P'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) &= F_{t+1}^\top P'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T}) \\ &\quad \times (I_{n_x} - B(\theta_{t+1})\Delta_{t+1}(\theta_{t+1:T})B^\top(\theta_{t+1})P'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T}))F_{t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T})m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) &= F_{t+1}^\top (\theta_{t+1}) \\ &\quad \times (I_{n_x} - P'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T})B(\theta_{t+1})\Delta_{t+1}(\theta_{t+1:T})B^\top(\theta_{t+1})) \\ &\quad \times P'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T}) (m'_{t+1|t+1}(\theta_{t+1:T}) - \mathbf{u}'_{t+1}(\theta_{t+1})) \end{aligned}$$

$$P'_{t|t}(\theta_{t:T}) = P'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) + H_t^\top (\Sigma_t^w)^{-1} H_t \quad (\text{A.2})$$

$$P'_{t|t}(\theta_{t:T})m'_{t|t}(\theta_{t:T}) = P'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T})m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) + H_t^\top (\Sigma_t^w)^{-1} (\mathbf{z}_t - \mu_t^w) \quad (\text{A.3})$$

où $B(\theta_t) = G_t \times \text{chol}(\Sigma_t^v)^\top$.

Pour obtenir le rapport de Metropolis-Hastings, il n'est nécessaire de calculer la probabilité d'acceptation qu'à une constante près

$$p(\mathbf{z}_{1:T}|\theta_{1:T}) \propto p(\mathbf{z}_t|\theta_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1}) \int_{\mathcal{X}} p(\mathbf{z}_{t+1:T}|\mathbf{x}_t, \theta_{t+1:T}) p(\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:t}, \theta_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (\text{A.4})$$

Si $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}) \neq 0$ alors il existe $\Pi_{t|t}(\theta_{1:t})$ et $Q_{t|t}(\theta_{1:t})$ tels que

$$\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t}) = Q_{t|t}(\theta_{1:t}) \Pi_{t|t}(\theta_{1:t}) Q_{t|t}^T(\theta_{1:t}).$$

Les matrices $Q_{t|t}(\theta_{1:t})$ et $\Pi_{t|t}(\theta_{1:t})$ sont obtenues par la décomposition en valeurs singulières de $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t})$. La matrice $\Pi_{t|t}(\theta_{1:t})$ est une matrice diagonale $n_t \times n_t$, $1 \leq n_t \leq n_x$ avec comme éléments les valeurs propres non nulles de $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t})$. On obtient alors

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_{1:T}|\theta_{1:T}) &\propto \mathcal{N}(\widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\theta_{1:t}), S_{t|t-1}(\theta_{1:t})) \left| \Pi_{t|t}(\theta_{1:t}) Q_{t|t}^T(\theta_{1:t}) P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) Q_{t|t}(\theta_{1:t}) + I_{n_t} \right|^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^T(\theta_{1:t}) P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}) - 2 \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^T(\theta_{1:t}) P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) \right. \\ &\left. - (m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t}))^T \times P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) A_{t|t}(\theta_{1:t}) \times P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) (m'_{t|t+1}(\theta_{t+1:T}) - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t})) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où

$$A_{t|t}(\theta_{1:t}) = Q_{t|t}(\theta_{1:t}) \left[\Pi_{t|t}^{-1}(\theta_{1:t}) + Q_{t|t}^T(\theta_{1:t}) P_{t|t+1}'^{-1}(\theta_{t+1:T}) Q_{t|t}(\theta_{1:t}) \right]^{-1} Q_{t|t}^T(\theta_{1:t}) \quad (\text{A.6})$$

Les quantités $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}(\theta_{1:t})$, $\Sigma_{t|t}(\theta_{1:t})$, $\widehat{\mathbf{z}}_{t|t-1}(\theta_{1:t})$ et $S_{t|t-1}(\theta_{1:t})$ sont, resp., les estimées et matrice de covariance de \mathbf{x}_t , l'innovation à l'instant t , et la covariance de cette innovation. Ces quantités sont délivrées par le filtre de Kalman, le système étant linéaire à bruits additifs gaussiens conditionnellement à $\theta_{1:t}$.

ANNEXE B

Compléments de filtrage statistique

B.1 Opérations usuelles sur les probabilités

On considère trois variables aléatoires $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ et $z \in \mathcal{Z}$.

- Règle de Bayes

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)} = \frac{p(z|x)p(x)}{\int_{\mathcal{X}} p(z|x)p(x)dx}$$

- Théorème des probabilités totales

$$p(z) = \int_{\mathcal{X}} p(z|x)p(x)dx$$

- Marginalisation

$$p(x|z) = \int_{\mathcal{Y}} p(x, y|z)dy$$

- Probabilités conditionnelles

$$p(x, y|z) = p(x|y, z)p(y|z)$$

- Espérance

$$\mathbb{E}_{p(x|z)} [f(x)] = \int_{\mathcal{X}} f(x)p(x|z)dx$$

B.2 Distributions conjuguées

Soit \mathcal{F} une classe (ou famille paramétrique) de distributions $p(\cdot|x)$ sur z et \mathcal{P} une classe de distribution *a priori* sur x $p(\cdot)$. La classe \mathcal{P} est dite conjuguée [Gel95]

pour \mathcal{F} ssi, pour tout $p(\cdot) \in \mathcal{P}$ et tout $p(\cdot|x) \in \mathcal{F}$ on a

$$p(\cdot|z) \in \mathcal{P} \text{ avec } p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{\int p(z|x)p(x)dx}$$

L'utilisation de distributions conjuguées permet de simplifier les calculs, en rendant possible le calcul analytique.

On appelle famille conjuguée naturelle l'ensemble des distributions conjuguée p telles que $\mathcal{P} = \mathcal{F}$, i.e. telles que la vraisemblance appartient à la même classe que la distribution *a priori*.

Remarque B.1 *La famille gaussienne est conjuguée naturelle.*

B.3 Distribution de Wishart

Soit $x_{1:n} = [x_1^T \dots x_n^T]^T$ une matrice $n \times p$ telle que $x_1, \dots, x_n \in R^p$ sont échantillonnés selon

$$x_1, \dots, x_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \Lambda)$$

Alors la matrice $A = x_{1:n}^T x_{1:n}$ (de dimension $p \times p$) suit une distribution de Wishart¹

$$A \sim W(n, \Lambda)$$

Les paramètres n et Λ sont appelés resp. degrés de libertés et paramètre d'échelle de la distribution de Wishart. La dimension de A ($p \times p$) n'est pas explicitement indiquée dans la notation, mais elle est déterminée par Λ . La distribution de Wishart permet de définir une distribution sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives. La densité de probabilité est exprimée par [Gel95]

$$W(A : n, \Lambda) = \left(2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right) \right)^{-1} |\Lambda|^{-\frac{n}{2}} |A|^{\frac{(n-p-1)}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{trace}(\Lambda^{-1}A)\right]$$

La moyenne de cette distribution est

$$\mathbb{E}[A] = n\Lambda$$

Remarque B.2 *La distribution de Wishart à une dimension est la distribution en χ^2 .*

¹Du nom de son inventeur

B.4 Distribution inverse Wishart

Soit Λ une matrice de dimensions $p \times p$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice Σ est distribuée selon une distribution inverse Wishart ($\Sigma \sim iW(\cdot : n, \Lambda)$) si Σ^{-1} est distribuée selon une Wishart

$$\Sigma^{-1} \sim W(n, \Lambda^{-1})$$

La densité de probabilité de Σ est donnée par [Gel95]

$$iW(\Sigma : n, \Lambda) = \left(2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right) \right)^{-1} |\Lambda|^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\left(\frac{n+p+1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{trace}(\Lambda \Sigma^{-1})\right]$$

La moyenne de la distribution inverse Wishart est

$$\mathbb{E}[\Sigma] = \frac{\Lambda}{(n-p-1)}$$

B.5 Distribution normale-inverse Wishart

B.5.1 Définition

On note $\theta = (\mu, \Sigma)$. θ suit une loi normale-inverse Wishart si, étant donné Σ , μ suit une loi normale

$$\mu | \Sigma \sim \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\Sigma}{\kappa_0}\right)$$

où les hyperparamètres $\mu_0 \in R^p$ et $\kappa_0 > 0$ sont connus et fixés. De plus, Σ suit une loi inverse Wishart

$$\Sigma^{-1} \sim W(\nu_0, \Lambda_0^{-1})$$

où les hyperparamètres $\nu_0 > p$ et $\Lambda_0 \in \mathcal{M}_{p \times p}$ sont connus et fixés. On note ceci simplement par

$$\theta = (\mu, \Sigma) \sim \mathcal{NiW}(\mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$$

La distribution pour θ est donnée par

$$p(\theta) \propto |\Sigma|^{-\frac{\nu_0+p+2}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \text{trace}(\Lambda_0 \Sigma^{-1}) - \frac{\kappa_0}{2} (\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)\right]$$

B.5.2 Conjugaison

La distribution \mathcal{NiW} est conjuguée pour la loi normale. Supposons que $\theta = (\mu, \Sigma)$ suit une loi normale-inverse Wishart $p(\theta) = \mathcal{NiW}(\theta : \mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$

$$\theta = (\mu, \Sigma) \sim \mathcal{NiW}(\mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$$

et que n mesures $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ soient distribuées selon la loi normale de paramètres $\theta = (\mu, \Sigma)$

$$\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

Dans ce cas, la densité *a posteriori* $p(\mu, \Sigma | \mathbf{z}_{1:n}) = \frac{p(\mathbf{z}_{1:n} | \mu, \Sigma) p(\mu, \Sigma)}{\int p(\mathbf{z}_{1:n} | \mu, \Sigma) p(\mu, \Sigma) d\mu d\Sigma}$ suit également une loi normale-inverse Wishart

$$\mu, \Sigma | z \sim \mathcal{NiW}(\mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0)$$

soit

$$\begin{aligned} \mu | \Sigma, z &\sim \mathcal{N}\left(\mu'_0, \frac{\Sigma}{\kappa'_0}\right) \\ \Sigma^{-1} &\sim W(\nu'_0, \Lambda'_0{}^{-1}) \end{aligned}$$

avec, en notant $\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{z}_j$,

$$\begin{aligned} \kappa'_0 &= \kappa_0 + n \\ \nu'_0 &= \nu_0 + n \\ \mu'_0 &= \frac{n}{\kappa_0 + n} \bar{\mathbf{z}} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n} \mu_0 \\ \Lambda'_0 &= \Lambda_0 + \left(\frac{\kappa_0 n}{\kappa_0 + n}\right) (\bar{\mathbf{z}} - \mu_0)(\bar{\mathbf{z}} - \mu_0)^T + \sum_{j=1}^n (\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z}_j - \bar{\mathbf{z}})^T \end{aligned}$$

Les détails des calculs peuvent être trouvés dans [Fra05].

B.6 Distribution de Dirichlet

B.6.1 Définition

La distribution de Dirichlet est une distribution sur un jeu de probabilités discrètes de dimension K .

Définition B.1 Soit p_0 un vecteur de dimension K tel que $\forall j = 1..K, p_0(j) \geq 0$ et $\sum_{j=1}^K p_0(j) = 1$. p_0 définit un jeu de probabilités discrètes de dimension K . Soit $\alpha \geq 0$ un coefficient scalaire. La distribution de Dirichlet $\mathcal{D}(\cdot; \alpha p_0)$ de vecteur p_0 et de paramètre d'échelle α est définie par

$$\Pr(p | p_0, \alpha) = \mathcal{D}(p; \alpha p_0) \stackrel{def}{=} \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^K \alpha p_0(j))}{\prod_{j=1}^K \Gamma(\alpha p_0(j))} \prod_{j=1}^K [p(j)]^{\alpha p_0(j)-1} \quad (\text{B.1})$$

avec p un vecteur de dimension K définissant un jeu de probabilités discrètes ($\forall j = 1..K, p(j) \geq 0$ et $\sum_{j=1}^K p(j) = 1$) et Γ est la fonction gamma.²

²Lorsque $\dim(p_0) = 2$, la distribution de Dirichlet se réduit à la loi beta.

Le vecteur p_0 donne la moyenne de la distribution

$$\mathbb{E}[p(j)] = p_0(j)$$

α est un facteur réglant la dispersion autour de la moyenne

$$\text{Var}[p(j)] = \frac{(1 - p_0(j))p_0(j)}{(1 + \alpha)}$$

Exemple B.1 Sur la figure B.1 sont représentées les distributions de Dirichlet $\mathcal{D}(p ; \alpha p_0)$ avec $p_0 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right]$ et différentes valeurs de α .

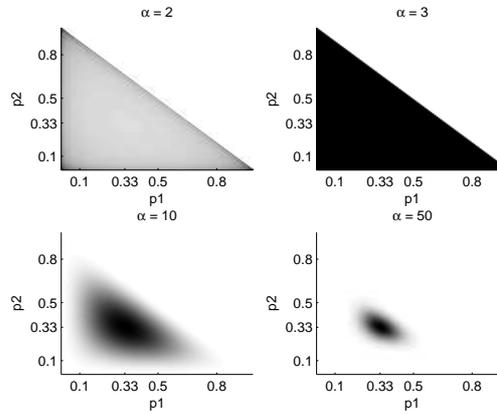


FIG. B.1 – Distribution de Dirichlet $p \sim \mathcal{D}(p ; \alpha p_0)$ avec $p_0 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right]$ et $\alpha = 2, 3, 10, 50$. Le coefficient d'échelle α règle la dispersion autour du vecteur de probabilité moyen p_0 .

B.6.2 Conjugaison

La distribution de Dirichlet est une distribution *a priori* conjuguée pour la loi multinomiale. Soit

$$c|p \sim \text{Multinomial}(\cdot|p)$$

i.e.³, $\Pr(c = k|p) = p(k)$. Donc si $\Pr(p|p_0, \alpha) = \mathcal{D}(p ; \alpha p_0)$ la distribution *a posteriori* est également une distribution de Dirichlet

$$\Pr(p|c = k, p_0, \alpha) = \frac{\Pr(c = k|p) \Pr(p|p_0, \alpha)}{\Pr(c = k|p_0, \alpha)} = \mathcal{D}(p ; \alpha' p'_0) \quad (\text{B.2})$$

avec $p'_0(k) = \frac{\alpha}{\alpha+1} p_0(k) + \frac{1}{\alpha+1}$ et $\forall j \neq k, p'_0(j) = \frac{\alpha}{\alpha+1} p_0(j), \alpha' = \alpha + 1$.

³On utilise ici une notation moins standard d'échantillons d'une loi multinomiale.

Considérons m échantillons c_1, \dots, c_m échantillonnés de façon iid selon la loi multinomiale

$$c_k | p \stackrel{iid}{\sim} \text{Multinomial}(\cdot | p), \quad k = 1..m$$

On note $m_j = \sum_{k=1}^m \delta_{c_k}(j)$ le nombre d'occurrences c_k telles $c_k = j$. La distribution *a posteriori* est donnée par

$$\Pr(p | c_1, \dots, c_m, p_0, \alpha) = \frac{\Pr(c_1, \dots, c_m | p) \Pr(p | p_0, \alpha)}{\Pr(c_1, \dots, c_m | p_0, \alpha)} \quad (\text{B.3})$$

$$= \mathcal{D}(p ; \alpha' p'_0) \quad (\text{B.4})$$

avec $p'_0(j) = \frac{\alpha}{\alpha+m} p_0(j) + \frac{1}{\alpha+m} m_j$ et $\alpha' = \alpha + m$.

De plus, la loi conditionnelle prédictive $\Pr(c_{m+1} | c_1, \dots, c_m, p_0, \alpha)$, obtenue en marginalisant selon la distribution inconnue p , s'exprime selon la formulation en urne de Polya suivante :

$$\Pr(c_{m+1} = j | c_1, \dots, c_m, p_0, \alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + m} p_0(j) + \frac{1}{\alpha + m} m_j \quad (\text{B.5})$$

Exemple B.2 On considère que les échantillons c_k sont générés selon la loi multinomiale $\text{Multinomial}(\cdot | p)$ avec $p = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \right]$.

$$c_k | p \stackrel{iid}{\sim} \text{Multinomial}(c_k | p)$$

On suppose qu'a priori $p \sim \mathcal{D}(\alpha p_0)$ avec $p_0 = \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right]$ et $\alpha = 2$. Sur la figure B.2 sont représentées les distributions *a posteriori* $\Pr(p | c_1, \dots, c_m, p_0, \alpha)$, en fonction du nombre m d'échantillons c_k ($k = 1..m$) générés.

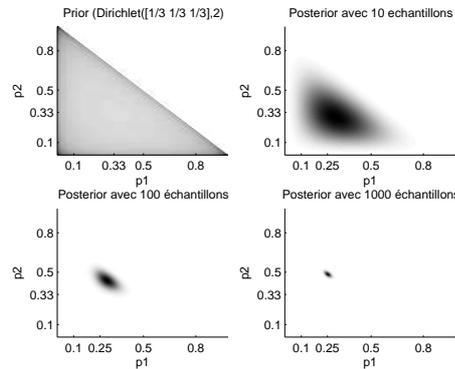


FIG. B.2 – Evolution de la distribution de Dirichlet *a posteriori* en fonction du nombre d'échantillons générés.

B.7 Fractiles de la loi du χ^2

On note l le nombre de degrés de liberté. Si x suit une loi du χ^2 à l degrés de liberté, alors les valeurs de a telles que $p_a = \Pr(x < a)$ sont listées dans le tableau suivant.

l / p_a	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	1.642	2.709	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828	12.116
2	3.219	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816	15.202
3	4.642	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266	17.730
4	5.989	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467	19.998
5	7.289	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750	20.515	22.105
6	8.558	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458	24.103
7	9.803	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322	26.018
8	11.030	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125	27.868
9	12.242	14.684	16.919	19.023	21.66	23.589	27.877	29.666

B.8 Démonstrations

B.8.1 Equation bayésienne récurrente

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) &= \frac{p(\mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})} \\
 &= \frac{p(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_{0:t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})} \\
 &= p(\mathbf{x}_{0:t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t}) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})}
 \end{aligned}$$

Or $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)$ et $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{z}_{1:t-1}) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$. On retrouve donc la formule

$$p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{z}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_{0:t-1} | \mathbf{z}_{1:t-1}) \frac{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})}$$

B.8.2 Equations du filtre de Kalman

On considère l'équation bayésienne (1.9) donnant la formule d'estimation. Selon les hypothèses du filtre de Kalman, la densité de probabilité de la prédiction et de la fonction de vraisemblance sont des gaussiennes multivariées, définies par

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}) = |2\pi \Sigma_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T \Sigma_{t|t-1}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \right]$$

et

$$p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) = |2\pi R_t|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_t - H_t \mathbf{x}_t)^T R_t^{-1} (\mathbf{z}_t - H_t \mathbf{x}_t) \right]$$

Etant donné que la loi normale est conjuguée naturelle, la densité *a posteriori* est également une gaussienne, de statistiques $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$ et $\Sigma_{t|t}$ à déterminer

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = |2\pi \Sigma_{t|t}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \Sigma_{t|t}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) \right]$$

En appliquant la formule (1.9) et en prenant le logarithme :

$$(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \Sigma_{t|t}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) = (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T \Sigma_{t|t-1}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + (\mathbf{z}_t - H_t \mathbf{x}_t)^T R_t^{-1} (\mathbf{z}_t - H_t \mathbf{x}_t) + C(\mathbf{z}_t)$$

avec C une fonction de \mathbf{z}_t indépendante de \mathbf{x}_t . On obtient donc une forme quadratique en \mathbf{x}_t . En différentiant une fois par rapport à \mathbf{x}_t

$$\Sigma_{t|t}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) = \Sigma_{t|t-1}^{-1} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) - H_t^T R_t^{-1} (\mathbf{z}_t - H_t \mathbf{x}_t)$$

En différentiant à nouveau

$$\Sigma_{t|t}^{-1} = \Sigma_{t|t-1}^{-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t \quad (\text{B.6})$$

En réinjectant ceci dans l'équation précédente, on obtient donc

$$\Sigma_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \Sigma_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + H_t^T R_t^{-1} \mathbf{z}_t \quad (\text{B.7})$$

Les équations (B.7) et (B.6) sont les équations d'estimation du filtre de Kalman sous la forme dite du filtre d'information. Le vecteur d'information est $\hat{\mathbf{y}}_{t|t} = \Sigma_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{y}}_{t|t-1} + H_t^T R_t^{-1} \mathbf{z}_t$ et l'incertitude sur ce vecteur est mesurée par la matrice $Y_{t|t} = \Sigma_{t|t}^{-1} = Y_{t|t-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t$.

D'après l'équation (B.6) la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\Sigma_{t|t}$ est donnée par

$$\Sigma_{t|t} = \left[\Sigma_{t|t-1}^{-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t \right]^{-1}$$

Ce qui donne, en utilisant la formule d'inversion classique

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} H_t^T (H_t \Sigma_{t|t-1} H_t^T + R_t)^{-1} H_t \Sigma_{t|t-1}$$

Ce qui donne (voir [Bar01] page 206)

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - K_t S_t K_t^T$$

avec $S_t = H_t \Sigma_{t|t-1} H_t^T + R_t$ et $K_t = \Sigma_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1}$.

L'estimée, d'après l'équation (B.7) est obtenue par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \Sigma_{t|t} \Sigma_{t|t-1}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t} H_t^T R_t^{-1} \mathbf{z}_t \\ &= \Sigma_{t|t} \Sigma_{t|t-1}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t} H_t^T R_t^{-1} (\mathbf{z}_t - H_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \Sigma_{t|t} H_t^T R_t^{-1} H_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\ &= \Sigma_{t|t} (\Sigma_{t|t-1}^{-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t) \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t} H_t^T R_t^{-1} (\mathbf{z}_t - H_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1})\end{aligned}$$

Or $\Sigma_{t|t} = \left[\Sigma_{t|t-1}^{-1} + H_t^T R_t^{-1} H_t \right]^{-1}$ et $\Sigma_{t|t} H_t^T R_t^{-1} = \Sigma_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1} = K_t$ (voir [Bar01] pages 133-134). On obtient donc l'équation suivante

$$\widehat{\mathbf{x}}_{t|t} = \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t \nu_t$$

Les équations de prédiction sont quant à elles triviales, obtenues avec l'équation d'état et les formules de transformation linéaire de densités gaussiennes.

B.8.3 Equations du filtre de Kalman multicapteur

Dans le cas de plusieurs observations conditionnellement indépendantes, l'équation (1.9) peut se mettre sous la forme

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}) \prod_{k=1}^n p(\mathbf{z}_{k,t} | \mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1})}$$

Selon les hypothèses du filtre de Kalman, la densité de probabilité de la prédiction et des fonctions de vraisemblance sont des gaussiennes multivariées, définies par

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}) = |2\pi \Sigma_{t|t-1}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T \Sigma_{t|t-1}^{-1} (\mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \right]$$

et

$$p(\mathbf{z}_{k,t} | \mathbf{x}_t) = |2\pi R_{k,t}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \mathbf{x}_t)^T R_{k,t}^{-1} (\mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \mathbf{x}_t) \right]$$

Etant donné que la loi normale est conjuguée naturelle, la densité *a posteriori* est également une gaussienne, de statistiques $\widehat{\mathbf{x}}_{t|t}$ et $\Sigma_{t|t}$ à déterminer

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:t}) = |2\pi \Sigma_{t|t}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t})^T \Sigma_{t|t}^{-1} (\mathbf{x}_t - \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}) \right]$$

En prenant le logarithme de l'équation bayésienne et en différentiant deux fois par rapport à \mathbf{x}_t , on obtient les deux équations suivantes

$$\Sigma_{t|t}^{-1} = \Sigma_{t|t-1}^{-1} + \sum_{k=1}^n H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} H_{k,t}$$

$$\Sigma_{t|t}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t} = \Sigma_{t|t-1}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} \mathbf{z}_{k,t}$$

La dernière équation peut être réécrite de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}}_{t|t} &= \Sigma_{t|t} \Sigma_{t|t-1}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} \mathbf{z}_{k,t} \\
&= \Sigma_{t|t} \Sigma_{t|t-1}^{-1} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} (\mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \sum_{k=1}^n \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} H_{k,t} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \\
&= \Sigma_{t|t} (\Sigma_{t|t-1}^{-1} + H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} H_{k,t}) \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n \Sigma_{t|t} H_{k,t}^T R_{k,t}^{-1} (\mathbf{z}_{k,t} - H_{k,t} \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\
&= \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \sum_{k=1}^n K_{k,t} \nu_{k,t}
\end{aligned}$$

B.9 Construction d'une série temporelle stationnaire à l'aide de variables auxiliaires

Soit $\mathbf{x}_t, t \in \mathbb{N}$, une variable aléatoire. On désire définir un noyau de Markov $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ de telle façon que la chaîne de Markov $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_T\}$ soit stationnaire, c'est-à-dire que la distribution marginale de \mathbf{x}_t , supposée connue, soit la même quel que soit t

$$\mathbf{x}_t \sim p_X \quad \forall t$$

La technique proposée par Pitt et Walker [Pit05, Pit02] repose sur l'introduction de variables auxiliaires. On définit donc une variable auxiliaire ω_t telle que

$$\omega_t | \mathbf{x}_t \sim p_{\omega|X}(\cdot | \mathbf{x}_t)$$

A partir de cette formule et en appliquant la règle de Bayes, on a

$$p_{X|\omega}(\cdot | \omega_t) \propto p_X(\cdot) p_{\omega|X}(\omega_t | \cdot)$$

Si, à l'instant initial, $\mathbf{x}_0 \sim p_X$, en échantillonnant successivement $\omega_t | \mathbf{x}_t \sim p_{\omega|X}(\cdot | \mathbf{x}_t)$ puis $\mathbf{x}_{t+1} | \omega_t \sim p_{X|\omega}(\cdot | \omega_t)$, on obtient donc une chaîne de Markov stationnaire de distribution marginale p_X . La densité de transition de cette chaîne de Markov est définie par

$$p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) = \int p_{X|\omega}(\mathbf{x}_{t+1} | \omega_t) p_{\omega|X}(\omega_t | \mathbf{x}_t) d\omega_t$$

Le problème principal repose sur le choix de la densité $p_{\omega|X}$. Celle-ci doit être choisie de telle façon que $p_{X|\omega}$ soit calculable analytiquement. Il faut donc choisir $p_{\omega|X}$ de telle façon que p_X soit conjuguée naturelle pour $p_{\omega|X}$. Afin de pouvoir régler la corrélation entre deux valeurs successives, on choisit $p_{\omega|X}$ dans une famille paramétrique, comme mis en évidence dans l'exemple ci-dessous.

Exemple B.3 *A titre illustratif, l'exemple fourni dans [Pit05] est repris ici. On souhaite définir une chaîne de Markov $\{\mathbf{x}_t\}_{t=0..T}$ telle que marginalement $\mathbf{x}_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On introduit la variable auxiliaire ω_t telle que $\omega_t | \mathbf{x}_t \sim p_{\omega|X}$. $p_{\omega|X}$ doit être définie de façon à pouvoir déterminer analytiquement $p_{\omega|X}$. La densité gaussienne étant conjuguée naturelle, on définit*

$$\omega_t | \mathbf{x}_t \sim N(\phi \mathbf{x}_t, 1)$$

avec ϕ une constante non nulle, réglant la corrélation entre deux valeurs successives. On a ainsi

$$x_{t+1} | \omega_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{\omega_t \rho}{\phi} + (1 - \rho)\mu, \frac{\rho}{\phi^2}\right)$$

avec $\rho = \frac{\sigma^2 \phi^2}{1 + \sigma^2 \phi^2}$. La densité de transition est donnée par

$$p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) = \mathcal{N}((1 - \rho)\mu + \rho x_{t+1}, (1 - \rho^2)\sigma^2)$$

ou, sous la forme d'un modèle d'état

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mu(1 - \rho) + \rho \mathbf{x}_t + \varepsilon_t \text{ avec } \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, (1 - \rho^2)\sigma^2)$$

Le facteur ϕ règle la corrélation entre deux valeurs successives \mathbf{x}_{t+1} et \mathbf{x}_t . On montre facilement que le coefficient de corrélation est donné par

$$\text{corr}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t) = \rho$$

ANNEXE C

Algorithmes secondaires

C.1 Algorithme d'échantillonnage par acceptation-rejet

On souhaite générer des échantillons selon une loi f , mais l'on ne sait pas générer directement selon cette loi. On passe donc par une loi candidate g selon laquelle on sait générer des échantillons, en supposant que le support de la distribution G contient le support de F . En notant $C = \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ l'algorithme d'acceptation-rejet est donné par

1. Générer X selon G
2. Générer U selon $\mathcal{U}(0, 1)$
3. Accepter X si $U \leq \frac{f(x)}{Cg(x)}$
4. Retourner à 1

C.2 Calcul de $\mathbb{E}_p[f(x)]$ par la transformée sans parfum

Soit l'intégrale $I = \mathbb{E}_p[f(x)] = \int_{\mathcal{X}} f(x)p(x)dx$ dont l'on souhaite estimer la valeur (son calcul analytique est supposé non envisageable). f est une fonction non linéaire de \mathcal{X} dans \mathbb{R} et p est une densité de probabilité sur \mathcal{X} .

La variable aléatoire d -dimensionnelle x de moyenne \bar{x} et de matrice de covariance P_{xx} est approchée par $2d + 1$ points pondérés définis par

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x} & W_0 &= \frac{\kappa}{d+\kappa} \\ x_i &= \bar{x} + (\sqrt{(d+\kappa)P_{xx}})_i & W_i &= \frac{1}{2(d+\kappa)} \\ x_{i+n} &= \bar{x} - (\sqrt{(d+\kappa)P_{xx}})_i & W_{i+n} &= \frac{1}{2(d+\kappa)} \end{aligned}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$, $(\sqrt{(d + \kappa)P_{xx}})_i$ désigne la i ème ligne ou colonne de la racine carrée de $(d + \kappa)P_{xx}$ et W_i est la poids associé au i ème point. Le calcul de I est donné par

$$I = \int_{\mathcal{X}} f(x)p(x)dx = \sum_{i=0}^{2n} W_i f(x_i)$$

C.3 Algorithme d'échantillonnage selon une distribution en urne de Polya

Algorithme C.1 Algorithme pour échantillonner selon $\Pr(d\theta_{m+1}|\theta_{1:m}) = \frac{\alpha}{\alpha+m}\mathbb{G}_0 + \frac{1}{\alpha+m} \sum_{k=1}^m \delta_{\theta_k}$

Echantillonner $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$

- Si $u < \frac{\alpha}{\alpha+m}$
 - Echantillonner $\theta_{m+1} \sim \mathbb{G}_0$
- Sinon
 - Calculer $k = \text{ceil}((u - \frac{\alpha}{\alpha+m})(\alpha + m))$
 - Faire $\theta_{m+1} = \theta_k$

avec $\text{ceil}(x)$ la fonction donnant la valeur entière supérieure de x et $\mathcal{U}(0, 1)$ la distribution uniforme sur $[0, 1]$.

C.4 Le *simulation smoother*

Un *simulation smoother* est un algorithme permettant, dans le cas d'un modèle linéaire gaussien, de générer des échantillons $\tilde{\mathbf{x}}_{0:T}^{(i)}$ distribués selon une densité gaussienne *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{z}_{1:T})$. Ceci est important en pratique pour l'analyse de modèles non gaussiens ou la mise en oeuvre de l'inférence bayésienne. Le lisseur de Kalman permet de calculer les estimées $\hat{\mathbf{x}}_{t|T}$ (et donc l'estimée de la trajectoire complète) et les matrices de covariance $\Sigma_{t|T} = E[\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T|\mathbf{z}_{1:T}]$, mais pas les intercorrélations entre les états \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j pour $i \neq j$. Il ne permet donc pas de générer un échantillon $\tilde{\mathbf{x}}_{0:T} \sim p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{z}_{1:T})$.

La densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_{0:T}|\mathbf{z}_{1:T})$ est gaussienne et sa matrice de covariance ne dépend pas des observations $\mathbf{z}_{1:T}$. L'algorithme [Dur02] se décompose en trois étapes qui sont décrites ci-dessous.

1. Générer, pour $t = 0 \dots T - 1$, des échantillons \mathbf{v}_t^+ et \mathbf{w}_t^+ respectivement selon les densités $\mathcal{N}(0, Q_t)$ et $\mathcal{N}(0, R_t)$. Pour $t = 1 \dots T$, calculer \mathbf{x}_t^+ et \mathbf{z}_t^+ à partir des modèles d'état (1.15) et de mesure (1.16) en remplaçant \mathbf{v}_t et \mathbf{w}_t par \mathbf{v}_t^+ et \mathbf{w}_t^+ et avec $\mathbf{x}_0^+ \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_0, \Sigma_0)$.
2. Calculer $\hat{\mathbf{x}}_{t|T} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t|\mathbf{z}_{1:T}]$ et $\hat{\Sigma}_{t|T}^+ = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T|\mathbf{z}_{1:T}^+]$ à l'aide du lisseur de Kalman

3. Faire $\tilde{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|T} - \hat{\mathbf{x}}_{t|T}^+ + \mathbf{x}_t^+$ pour $t = 0 \dots T$

Cet algorithme nécessite uniquement l'algorithme standard du lisseur de Kalman et est donc facile à mettre en oeuvre, pour un coût calculatoire en $O(T)$. D'autres algorithmes de *simulation smoother*, de formulations moins simple que l'algorithme présenté ici, ont été spécialement développés par Frühwirth-Schnatter [Frü94], Carter et Kohn [Car94] et de Jong et Shephard [Jon95].

Quand on ne souhaite générer qu'un seul échantillon $\tilde{\mathbf{x}}_t$, le coût calculatoire peut être réduit en définissant $\mathbf{z}_t^* = \mathbf{z}_t - \mathbf{z}_t^+$ et $\tilde{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t|T}^* + \mathbf{x}_t^+$ où $\hat{\mathbf{x}}_{t|T}^* = \mathbb{E}[\mathbf{x}_t | \mathbf{z}_{1:T}^*]$ est calculé avec le lisseur de Kalman.

ANNEXE D

Démonstrations

D.1 Chapitre 2

Equation (2.19)

D'après l'équation (1.24), les poids sont mis à jour selon

$$\tilde{w}_t^{(i)} \propto w_{t-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{z}_t | \tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)})}{q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}, \mathbf{z}_t)}$$

Avec les règles sur les probabilités conditionnelles on a

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) &= p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \\ &\quad \times p(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \\ &\quad \times p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \\ &\quad \times p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \end{aligned}$$

et en considérant les indépendances entre variables on obtient

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) &= p(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}) \\ &\quad \times p(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}) p(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \end{aligned}$$

De la même manière, mais en décomposant différemment selon les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned} q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{c}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}, \mathbf{z}_t) &= q(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{t-1}^{(i)} | \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \\ &\quad \times q(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t^{(i)} | \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{t-2}^{(i)}) \\ &\quad \times q(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)}, \mathbf{z}_t) q(\tilde{\mathbf{c}}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \boldsymbol{\alpha}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{z}_t) \end{aligned}$$

ce qui donne donc la formule (2.19).

Equation (2.25)

En appliquant la règle de Bayes, la densité d'importance optimale pour $\alpha_{k,t}$ s'exprime par

$$p(\alpha_{k,t} | \alpha_{k,t-1}, c_{k,t}, \sigma_{k,t}^\alpha) = \frac{\Pr(c_{k,t} | \alpha_{k,t}) p(\alpha_{k,t} | \alpha_{k,t-1}, \sigma_{k,t-1}^\alpha)}{\Pr(c_{k,t} | \alpha_{k,t-1}, \sigma_{k,t-1})}$$

Or $p(\alpha_{k,t} | \alpha_{k,t-1}, \sigma_{k,t-1}^\alpha) = \mathcal{D}(\alpha_{k,t}; \sigma_{k,t-1}^\alpha \alpha_{k,t-1})$ et $\Pr(c_{k,t} | \alpha_{k,t}) = \text{Multinomial}(c_{k,t}; \alpha_{k,t})$ d'après l'équation (2.6). La distribution de Dirichlet étant conjuguée naturelle pour une loi d'observation multinomiale (voir l'annexe B.6), $p(\alpha_{k,t} | \alpha_{k,t-1}, c_{k,t}, \sigma_{k,t}^\alpha)$ est également une distribution de Dirichlet $\mathcal{D}(\alpha_{k,t}; \sigma_{k,t-1}^\alpha \alpha'_{k,t-1})$, de paramètres $\sigma_{k,t-1}^\alpha = \sigma_{k,t-1}^\alpha + 1$ et $\alpha'_{k,j,t-1} = \frac{\sigma_{k,t-1}^\alpha}{\sigma_{k,t-1}^\alpha + 1} \alpha_{k,j,t-1} + \frac{1}{\sigma_{k,t-1}^\alpha + 1} \delta_{c_{k,t}}(j)$ pour $j = 1, \dots, d_k$.

D.2 Chapitre 4

Equation (4.19)

$$\begin{aligned} p(\theta_k | \theta_{-k}, \mathbf{y}_{1:m}) &= \frac{p(\mathbf{y}_{1:m} | \theta_{1:m}) p(\theta_k | \theta_{-k})}{p(\mathbf{y}_{1:m} | \theta_{-k})} \\ &= \frac{p(\theta_k | \theta_{-k}) \prod_{j=1}^m f(\mathbf{y}_j | \theta_j)}{\int_{\Theta} p(\theta_k | \theta_{-k}) \prod_{j=1}^m f(\mathbf{y}_j | \theta_j) d\theta_k} \\ &= \frac{p(\theta_k | \theta_{-k}) f(\mathbf{y}_k | \theta_k)}{\int_{\Theta} p(\theta_k | \theta_{-k}) f(\mathbf{y}_k | \theta_k) d\theta_k} \end{aligned}$$

D.3 Chapitre 5

Equation (5.39)

$$\begin{aligned} p(\phi_t | \phi_{-t}) &= \int_{\mathbb{R}} p(\phi_t, \lambda | \phi_{-t}) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(\phi_t | \lambda, \phi_{-t}) p(\lambda | \phi_{-t}) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\lambda p(\phi_t | \lambda, r_t = 1) + (1 - \lambda) \delta_{0,0}) p(\lambda | \phi_{-t}) \\ &= p(\phi_t | \lambda, r_t = 1) \mathbb{E}_{p(\lambda | \phi_{-t})} [\lambda] + \delta_{(0,0)} (1 - \mathbb{E}_{p(\lambda | \phi_{-t})} [\lambda]) \end{aligned}$$

λ ne dépend que des valeurs r_t et donc $p(\lambda|\phi_{-t}) = p(\lambda|\mathbf{r}_{-t})$ et, avec la règle de Bayes

$$p(\lambda|\mathbf{r}_{-t}) \propto p(\lambda)p(\mathbf{r}_{-t}|\lambda)$$

Les valeurs r_t sont échantillonnées selon la distribution de Bernoulli de paramètre λ . La distribution beta étant conjuguée naturelle pour une vraisemblance suivant une distribution de Bernoulli, $p(\lambda|\mathbf{r}_{-t})$ est également une loi beta telle que

$$p(\lambda|\mathbf{r}_{-t}) = \mathcal{B} \left(\zeta + \sum_{k=1, k \neq t}^T r_k, \tau + \sum_{k=1, k \neq t}^T (1 - r_k) \right)$$

Equation (5.41)

$$\begin{aligned} p(\mathbf{h}|\mathbf{x}_{0:T}, \mathbf{z}_{1:T}) &\propto p(\mathbf{h})p(\mathbf{z}_{1:T}|\mathbf{h}, \mathbf{x}_{0:T}) \\ &\propto \mathcal{N}(\mathbf{h}; 0, \sigma_w^2) \prod_{t=1}^T \mathcal{N}(z_t; [\mathbf{1} \ \mathbf{h}]\mathbf{x}_t) \\ &\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_w^2}(\mathbf{h}\Sigma_0^{-1}\mathbf{h}^\top + \sum_{t=1}^T (z_t - [\mathbf{1} \ \mathbf{h}]\mathbf{x}_t)(z_t - [\mathbf{1} \ \mathbf{h}]\mathbf{x}_t)^\top)\right) \end{aligned}$$

En prenant la partie exponentielle à une constante près :

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{h}\Sigma_{\mathbf{h}}^{-1}\mathbf{h}^\top + \sum_{t=1}^T (z_t - [\mathbf{1} \ \mathbf{h}]\mathbf{x}_t)(z_t - [\mathbf{1} \ \mathbf{h}]\mathbf{x}_t)^\top \\ &= \mathbf{h}\Sigma_{\mathbf{h}}^{-1}\mathbf{h}^\top + \sum_{t=1}^T (z_t - v_t - \mathbf{h}\mathbf{v}_{t-1:t-L})(z_t - v_t - \mathbf{h}\mathbf{v}_{t-1:t-L})^\top \\ &= \mathbf{h}\Sigma_{\mathbf{h}}^{-1}\mathbf{h}^\top + \sum_{t=1}^T (z_t - v_t)(z_t - v_t)^\top + \mathbf{h} \left(\sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t-1:t-L}\mathbf{v}_{t-1:t-L}^\top \right) \mathbf{h}^\top \\ &\quad + \sum_{t=1}^T (z_t - v_t)\mathbf{v}_{t-1:t-L}^\top \mathbf{h}^\top - \mathbf{h} \sum_{t=1}^T (z_t - v_t)\mathbf{v}_{t-1:t-L} \\ &= (\mathbf{h} - \mathbf{m})\Sigma_{\mathbf{h}}^{\prime-1}(\mathbf{h} - \mathbf{m})^\top \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{h}}^{\prime-1} &= \Sigma_{\mathbf{h}}^{-1} + \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t-1:t-L}\mathbf{v}_{t-1:t-L}^\top \\ \mathbf{m} &= \Sigma_{\mathbf{h}}^{\prime-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_{t-1:t-L} (z_t - v_t) \end{aligned}$$

D.4 Chapitre 6

Equation (6.9)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U_{k,t}U_{k,t-1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_{k,t}|U_{k,t-1}]U_{k,t-1}^T] \\
&= \mathbb{E}[(\mu_0 + \rho K(U_{k,t-1} - \mu_0))U_{k,t-1}^T] \\
&= (\mu_0 - \rho K\mu_0)\mathbb{E}[U_{k,t-1}]^T + \rho K\mathbb{E}[U_{k,t-1}U_{k,t-1}^T] \\
&= (\mu_0 - \rho K\mu_0)\mu_0^T + \rho K(\mu_0\mu_0^T + \Sigma_0) \\
&= \mu_0\mu_0^T + \rho K\Sigma_0
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\text{cov}(U_{k,t}, U_{k,t-1}) &= \rho K\Sigma_0 \\
&= \rho^2\Sigma_0(\rho^2\Sigma_0 + I)^{-1}\Sigma_0
\end{aligned}$$

Equation (6.10)

On considère une distribution de base normale-inverse Wishart $\mathbb{G}_0(\cdot|\phi) = \mathcal{NiW}(\cdot : \mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0)$ avec $\phi = \{\mu_0, \kappa_0, \nu_0, \Lambda_0\}$. On note $U_{k,t} = \{\mu_{k,t}, \Sigma_{k,t}\}$. On définit n variables auxiliaires $\omega_{1,k,t}, \dots, \omega_{n,k,t}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telles que

$$\omega_{1,k,t}, \dots, \omega_{n,k,t} | U_{k,t} \sim \mathcal{N}(\mu_{k,t}, \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho})$$

avec $\rho \in \mathbb{R}$.

Les relations suivantes seront utilisées par la suite (voir Fraley et Raftery [Fra05], annexe A)

$$u^T \Sigma^{-1} v = \text{trace}(u^T \Sigma^{-1} v) = \text{trace}(\Sigma^{-1} v u^T) \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \mu)(y_j - \mu)^T = n(\bar{y} - \mu)(\bar{y} - \mu)^T + \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})(y_j - \bar{y})^T \quad (\text{D.2})$$

avec $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$.

On note $\omega_{k,t} = \{\omega_{1,k,t}, \dots, \omega_{n,k,t}\}$. La vraisemblance est donnée par (en utilisant

les deux relations précédentes)

$$\begin{aligned}
p(\omega_{k,t}|U_{k,t}) &= |2\pi \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \mu_{k,t})^T \left(\frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}\right)^{-1} (\omega_{j,k,t} - \mu_{k,t})\right) \\
&= |2\pi \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}|^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\rho \Sigma_{k,t}^{-1} \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \mu_{k,t})(\omega_{j,k,t} - \mu_{k,t})^T)\right) \\
&= |2\pi \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}|^{-\frac{n}{2}} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1} (n\rho(\mu_{k,t} - \bar{\omega})(\mu_{k,t} - \bar{\omega})^T + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})(\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})^T)\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
p(U_{k,t}|\omega_{k,t}) &\propto |2\pi \frac{\Sigma_{k,t}}{\rho}|^{-\frac{n}{2}} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1} (n\rho(\mu_{k,t} - \bar{\omega})(\mu_{k,t} - \bar{\omega})^T + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})(\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})^T)\right) \\
&\quad \times |\Sigma_{k,t}|^{-\left(\frac{\nu_0+d+2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1} \Lambda_0)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{\kappa_0}{2} \text{trace}(\Sigma^{-1} (\mu_{k,t} - \mu_0)(\mu_{k,t} - \mu_0)^T)\right) \\
&\propto |\Sigma_{k,t}|^{-\left(\frac{\nu_0+n+d+2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1} (\Lambda_0 + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})(\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})^T)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1} (n\rho(\mu_{k,t} - \bar{\omega})(\mu_{k,t} - \bar{\omega})^T + \kappa_0(\mu_{k,t} - \mu_0)(\mu_{k,t} - \mu_0)^T)\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après Fraley et Raftery (annexe A, équation (11)), on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
n\rho(\mu_{k,t} - \bar{\omega})(\mu_{k,t} - \bar{\omega})^T + \kappa_0(\mu_{k,t} - \mu_0)(\mu_{k,t} - \mu_0)^T &= (\kappa_0 + n\rho)(\mu_{k,t} - \mu'_0)(\mu_{k,t} - \mu'_0)^T \\
&\quad + \frac{\kappa_0 n\rho}{\kappa_0} (\bar{\omega} - \mu_0)(\bar{\omega} - \mu_0)^T
\end{aligned}$$

avec $\mu'_0 = \frac{n\rho}{\kappa_0+n\rho}\bar{\omega} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0+n\rho}\mu_0$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
p(U_{k,t}|\omega_{k,t}) &\propto |\Sigma_{k,t}|^{-\left(\frac{\nu_0+n+d+2}{2}\right)} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}\text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1}(\Lambda_0 + \frac{\kappa_0 n\rho}{\kappa_0}(\bar{\omega} - \mu_0)(\bar{\omega} - \mu_0)^T + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})(\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})^T)\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}\text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1}(\kappa_0 + n\rho)(\mu_{k,t} - \mu'_0)(\mu_{k,t} - \mu'_0)^T)\right) \\
&\propto |\Sigma_{k,t}|^{-\left(\frac{\nu'_0+d+2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2}\text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1}\Lambda'_0)\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{\kappa'_0}{2}\text{trace}(\Sigma_{k,t}^{-1}(\mu_{k,t} - \mu'_0)(\mu_{k,t} - \mu'_0)^T)\right)
\end{aligned}$$

soit $U_{k,t}|\omega_{1:n,k,t} \sim \mathcal{NiW}(\mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0)$ avec $\kappa'_0 = \kappa_0 + n\rho$, $\nu'_0 = \nu_0 + n$, $\mu'_0 = \frac{n\rho}{\kappa_0+n\rho}\bar{\omega} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0+n\rho}\mu_0$ et $\Lambda'_0 = \Lambda_0 + \frac{\kappa_0 n\rho}{\kappa_0+n\rho}(\bar{\omega} - \mu_0)(\bar{\omega} - \mu_0)^T + \rho \sum_{j=1}^n (\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})(\omega_{j,k,t} - \bar{\omega})^T$ et $\bar{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_{j,k,t}$.

Equation (6.11)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mu_{k,t}|\mu_{k,t-1}, \Sigma_{k,t-1}] &= \int \mu_{k,t} p(\mu_{k,t}, \Sigma_{k,t}|\mu_{k,t-1}, \Sigma_{k,t-1}) d\mu_{k,t} d\Sigma_{k,t} \\
&= \int \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(w_{j,k,t-1} : \mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho}) \\
&\quad \times \left(\int \mu_{k,t} \mathcal{NIW}(U_{k,t} : \mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0) d\mu_{k,t} d\Sigma_{k,t} \right) dw_{k,t-1} \\
&= \int \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(w_{j,k,t-1} : \mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho}) \left(\frac{n\rho}{\kappa_0 + n\rho} \bar{\omega} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n\rho} \mu_0 \right) dw_{k,t-1} \\
&= \frac{n\rho}{\kappa_0 + n\rho} \mu_{k,t-1} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n\rho} \mu_0 \\
&= \mathbb{E}[\mu_{k,t}|\mu_{k,t-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\Sigma_{k,t} | \Sigma_{k,t-1}] &= \int \Sigma_{k,t} p(\mu_{k,t}, \Sigma_{k,t} | \mu_{k,t-1}, \Sigma_{k,t-1}) p(\mu_{k,t-1} | \Sigma_{k,t-1}) d\mu_{k,t} d\Sigma_{k,t} d\mu_{k,t-1} \\
&= \int p(\mu_{k,t-1} | \Sigma_{k,t-1}) \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(w_{j,k,t-1} : \mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho}) \\
&\quad \times \left(\int \Sigma_{k,t} \mathcal{N}\mathcal{I}\mathcal{W}(U_{k,t} : \mu'_0, \kappa'_0, \nu'_0, \Lambda'_0) d\mu_{k,t} d\Sigma_{k,t} \right) d\mu_{k,t-1} dw_{k,t-1} \\
&= \int p(\mu_{k,t-1} | \Sigma_{k,t-1}) \prod_{j=1}^n \mathcal{N}(w_{j,k,t-1} : \mu_{k,t-1}, \frac{\Sigma_{k,t-1}}{\rho}) \frac{1}{\nu'_0 + d + 1} \\
&\quad \times \left(\Lambda_0 + \frac{\kappa_0 n \rho}{\kappa_0 + n \rho} (\bar{w} - \mu_0) (\bar{w} - \mu_0)^T + \rho \sum_{j=1}^n (w_{j,k,t} - \bar{w})(w_{j,k,t} - \bar{w})^T \right) \\
&\quad \times d\mu_{k,t-1} dw_{k,t-1} \\
&= \frac{\Lambda_0}{\nu_0 + d + n + 1} + \frac{n \Sigma_{k,t-1}}{\nu_0 + d + n + 1} \\
&= \frac{\nu_0 + d + 1}{\nu_0 + d + n + 1} \frac{\Lambda_0}{\nu_0 + d + 1} + \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} \Sigma_{k,t-1} \\
&= \frac{\nu_0 + d + 1}{\nu_0 + d + n + 1} \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}] + \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} \Sigma_{k,t-1}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\mu_{k,t} \mu_{k,t-1}^T] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\mu_{k,t} | \mu_{k,t-1}] \mu_{k,t-1}^T] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\frac{n \rho}{\kappa_0 + n \rho} \mu_{k,t-1} + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n \rho} \mu_0 \right) \mu_{k,t-1}^T \right] \\
&= \frac{n \rho}{\kappa_0 + n \rho} \mathbb{E} [\mu_{k,t-1} \mu_{k,t-1}^T] + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n \rho} \mu_0 \mathbb{E} [\mu_{k,t-1}^T] \\
&= \frac{n \rho}{\kappa_0 + n \rho} \left(\frac{\Lambda_0}{\kappa_0 (\nu_0 + d + 1)} + \mu_0 \mu_0^T \right) + \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n \rho} \mu_0 \mu_0^T \\
&= \frac{n \rho}{\kappa_0 (\nu_0 + d + 1) (\kappa_0 + n \rho)} \Lambda_0 + \mu_0 \mu_0^T
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
cov(\mu_{k,t}, \mu_{k,t-1}) &= \frac{\Lambda_0}{\kappa_0 (\nu_0 + d + 1)} \frac{n \rho}{(\kappa_0 + n \rho)} \\
&= \frac{n \rho}{(\kappa_0 + n \rho)} var(\mu_{k,t-1})
\end{aligned}$$

Ainsi le produit $n\rho$ règle la corrélation entre deux valeurs successive $\mu_{k,t}$ et $\mu_{k,t-1}$.

De même on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\Sigma_{k,t} \Sigma_{k,t-1}^T] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\Sigma_{k,t} | \Sigma_{k,t-1}] \Sigma_{k,t-1}^T] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\nu_0 + d + 1}{\nu_0 + d + n + 1} \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}] + \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} \Sigma_{k,t-1} \right) \Sigma_{k,t-1}^T \right] \\ &= \frac{\nu_0 + d + 1}{\nu_0 + d + n + 1} \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}] \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}]^T + \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1} \Sigma_{k,t-1}^T]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{cov}(\Sigma_{k,t}, \Sigma_{k,t-1}^T) &= \mathbb{E} [\Sigma_{k,t} \Sigma_{k,t-1}^T] - \mathbb{E} [\Sigma_{k,t}] \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}]^T \\ &= \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} (\mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1} \Sigma_{k,t-1}^T] - \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}] \mathbb{E} [\Sigma_{k,t-1}]^T) \\ &= \frac{n}{\nu_0 + d + n + 1} \text{var}(\Sigma_{k,t-1})\end{aligned}$$

L'entier naturel n règle la corrélation entre deux valeurs successives $\Sigma_{k,t}$ et $\Sigma_{k,t-1}$. Plus la valeur de n est importante, plus la dépendance temporelle est importante.

Equation (6.17)

En notant c'_t la variable d'allocation de la mesure \mathbf{z}'_t au cluster $U_{c'_t}$, on a

$$\begin{aligned}p(\mathbf{z}'_t | c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) &= p(\mathbf{z}'_t, c'_t \notin X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\} | c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) \\ &+ \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}} p(\mathbf{z}'_t, c'_t = k | c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) \\ &= p(\mathbf{z}'_t | c'_t \notin X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) \Pr(c'_t \notin X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\} | c_t, \mathbf{m}_t) \\ &+ \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}} p(\mathbf{z}'_t | c'_t = k, c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) \Pr(c'_t = k | c_t, \mathbf{m}_t)\end{aligned}$$

On obtient, en utilisant la loi de prédiction en urne de Polya

$$\begin{aligned}p(\mathbf{z}'_t | c_t, \mathbf{m}_t, U_{X(\mathbf{m}_t) \cup \{c_t\}, t}, \psi_t) &= \int_{\Theta} f_{\psi_t}(\mathbf{z}'_t | \theta) d\mathbb{G}_0(\theta) \frac{\alpha}{\alpha + 1 + \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t)} m_{k,t}} \\ &+ \frac{f_{\psi_t}(\mathbf{z}'_t | U_{c_t, t}) + \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t)} m_{k,t} f_{\psi_t}(\mathbf{z}'_t | U_{k,t})}{\alpha + 1 + \sum_{k \in X(\mathbf{m}_t)} m_{k,t}}\end{aligned}$$

Et ainsi

$$\begin{aligned}F_{t|t}(\mathbf{z}'_t) &\simeq \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{w}_t^{(i)}}{\alpha + 1 + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)}} \\ &\times \left[\alpha \int_{\Theta} f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t | \theta_t) d\mathbb{G}_0(\theta_t) + f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t | \tilde{U}_{\tilde{c}_t^{(i)}, t}^{(i)}) + \sum_{k \in X(\tilde{\mathbf{m}}_t^{(i)})} \tilde{m}_{k,t}^{(i)} f_{\tilde{\psi}_t^{(i)}}(\mathbf{z}'_t | \tilde{U}_{k,t}^{(i)}) \right]\end{aligned}$$