



**HAL**  
open science

# Contribution à l'Analyse Asymptotique et à l'Homogénéisation de Structures Périodiques

Patrice Cartraud

► **To cite this version:**

Patrice Cartraud. Contribution à l'Analyse Asymptotique et à l'Homogénéisation de Structures Périodiques. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Nantes; Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2003. tel-00140089

**HAL Id: tel-00140089**

**<https://theses.hal.science/tel-00140089v1>**

Submitted on 4 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Mémoire d'habilitation à diriger des recherches*

**Contribution à l'Analyse Asymptotique et à  
l'Homogénéisation de Structures Périodiques**

Activités de recherche

Patrice CARTRAUD

Ecole Centrale de Nantes  
Laboratoire Mécanique et Matériaux

le 15 décembre 2003  
à l'École Centrale de Nantes

devant le jury ci-dessous :

- LÉNÉ F., Professeur, Université Paris 6, L.M.2S, Présidente et Rapporteur
- CAILLERIE D., Professeur, Université de Grenoble, Laboratoire 3S, Rapporteur
- DÉBORDES O., Professeur, EGIM Marseille, L.M.A., Rapporteur
- MICHEL J.C., Directeur de recherche CNRS, L.M.A., Marseille, Examineur
- MOËS N., Professeur, École Centrale de Nantes, L.M.M., Examineur
- PESEUX B., Professeur, École Centrale de Nantes, L.M.M., Examineur

Directeur de Recherche : Bernard PESEUX



## *Remerciements*

Ce mémoire présente une synthèse de mes travaux de recherche, effectués au sein du Laboratoire Mécanique et Matériaux de l'Ecole Centrale de Nantes, pendant la période 1989-2003.

Je remercie son Directeur, Donatien Le Houédec, pour m'y avoir accueilli et pour ses conseils précieux tout au long de cette période. Je remercie également Christian Wielgosz pour m'avoir encadré pendant ma thèse de doctorat, et pour son soutien efficace dans mes démarches de candidature en tant qu'ATER puis Maître de Conférences. J'exprime toute ma gratitude à Bernard Peseux, qui a toujours suivi avec un oeil très bienveillant mes activités. Bernard n'a pas ménagé ses encouragements pour la rédaction de cette habilitation, toujours remise à plus tard, et m'a régulièrement délesté de tâches administratives. Je le remercie aussi pour m'avoir associé à plusieurs encadrements de thèse et à différents projets.

Je remercie tout particulièrement Serge Dubigeon, pour ses cours de Mécanique haut en couleurs, et Olivier Débordes, qui m'a inoculé le virus de la recherche.

J'exprime aussi ma reconnaissance aux membres de mon jury d'habilitation, et plus particulièrement aux rapporteurs : Françoise Léné (qui m'a fait l'honneur de présider le jury), Denis Caillerie et Olivier Débordes. Ils ont accepté cette lourde tâche tout en rédigeant leur rapport dans des délais courts. Je les en remercie très vivement. Je remercie également Jean-Claude Michel et Nicolas Moës pour avoir examiné ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui ont manifesté.

Les travaux exposés dans ce mémoire s'appuient sur les contributions de différentes personnes.

Je pense d'abord et avant tout à Natacha Buannic. J'ai travaillé pendant 4 ans avec Natacha, et je suis pleinement conscient de la chance que j'ai eue. Je ne lui dirai jamais assez merci pour tout ce qu'elle m'a apporté.

Je remercie Stéphane Bourgeois pour son amitié fidèle, et Gildas L'Hostis qui a relu plusieurs chapitres de ce mémoire.

Merci aussi à Bertrand Burgardt pour toutes nos discussions.

Merci enfin à Nicolas Cosme, Réza Ghoreishi et Mathieu Cloirec pour leur apport à ce travail, et leur compréhension quant à ma disponibilité très relative ces derniers mois.

Ces années ont été jalonnées de rencontres très enrichissantes sur les plans professionnel et humain, et je tiens ici à mentionner (au risque d'en oublier certains) Guy Babaud, Stéphane Bonelli, Claude Boutin, Peter Davies, David Dureisseix, Samuel Forest, Jean-Claude Masson, Jim Simmonds, Tanguy Quesnel et Juan-Manuel Viaño.

Je remercie aussi tous mes collègues de l'Ecole Centrale de Nantes, et plus particulièrement (à des titres divers) Alix Potet et Yvon Riou, et les membres du laboratoire : Pascal Cosson, Anh Le Van, Tanguy Messenger, Hervé Oudin, Patrick Rozycki, et aussi Brigitte Renaud et Jean-Pierre Regoin pour leur bonne humeur et tous les services rendus.

Mes pensées vont également à ma famille : à mes parents, et à Nancy, pour son soutien constant pendant cette période virtuellement compatible avec la vie de famille.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>Première Partie. Modèles Homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre</b>	<b>11</b>
<b>1 Travaux de thèse</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Modélisation du comportement du carton . . . . .	14
1.2.1 Essais sur le carton et analyse des résultats . . . . .	14
1.2.2 Calage de lois de comportement . . . . .	15
1.2.3 Bilan . . . . .	16
1.3 Homogénéisation du joint de culasse . . . . .	16
1.3.1 Introduction . . . . .	16
1.3.2 Méthodes d'homogénéisation développées . . . . .	17
1.4 Conclusion . . . . .	20
<b>2 Structures minces périodiques</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Quelques repères bibliographiques . . . . .	24
2.2.1 Plaques périodiques en élasticité . . . . .	24
2.2.2 Poutres périodiques en élasticité . . . . .	28
2.3 Etude comparative des méthodes d'homogénéisation . . . . .	29
2.3.1 Plaques périodiques . . . . .	29
2.3.2 Poutres périodiques . . . . .	31
2.3.3 Bilan . . . . .	31
2.4 Exemples d'application . . . . .	32
2.4.1 Plaques périodiques . . . . .	32
2.4.2 Coques périodiques . . . . .	34
2.4.3 Poutres périodiques . . . . .	36
2.5 Conclusion . . . . .	37
<b>3 Milieux poreux</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	41
3.2 Quelques repères bibliographiques . . . . .	41
3.2.1 Applications structures minces . . . . .	42
3.2.2 Applications matériaux cellulaires . . . . .	44
3.3 Modélisation continue équivalente d'un treillis de barres . . . . .	46
3.4 Homogénéisation continue . . . . .	48
3.4.1 Introduction . . . . .	48
3.4.2 Résultat préliminaire . . . . .	49

3.4.3	Applications . . . . .	51
3.4.4	Bilan . . . . .	53
3.5	Conclusion . . . . .	53

## Deuxième Partie. Modèles homogénéisés d'ordre supérieur et effets de bords 57

### Introduction 59

### 4 Modélisation asymptotique d'ordre supérieur de structures minces périodiques 67

4.1	Introduction . . . . .	67
4.2	Généralités sur la méthode des développements asymptotiques . . . . .	67
4.3	Les problèmes cellulaires . . . . .	68
4.4	Les problèmes macroscopiques . . . . .	70
4.5	Calcul du développement asymptotique . . . . .	71
4.6	Problème macroscopique sur le développement asymptotique complet . . . . .	72
4.7	Conclusion . . . . .	74

### 5 Effets de bords 77

5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	Principe de la méthode . . . . .	78
5.3	Application de la méthode . . . . .	79
5.4	Conclusion . . . . .	80

### 6 Exemples d'application 83

6.1	Introduction . . . . .	83
6.2	Mise en oeuvre numérique . . . . .	83
6.3	Poutres à section constante . . . . .	84
6.3.1	Poutre sandwich symétrique à constituants isotropes . . . . .	84
6.3.2	Poutre stratifiée dissymétrique à constituants anisotropes . . . . .	87
6.4	Plaque périodique . . . . .	90
6.5	Conclusion . . . . .	90

### Conclusion 95

### 7 Développements numériques 101

7.1	Introduction . . . . .	101
7.2	Résolution par éléments finis des problèmes cellulaires . . . . .	101
7.2.1	Problèmes cellulaires du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	101
7.2.2	Problèmes cellulaires du 2 <sup>eme</sup> ordre . . . . .	104
7.3	Application de la méthode X-FEM aux problèmes cellulaires du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	105
7.3.1	Exemple d'application . . . . .	106
7.3.2	Conclusions et perspectives . . . . .	107

### 8 Analyse du comportement de câbles synthétiques 111

8.1	Présentation générale . . . . .	111
8.2	Description des modèles . . . . .	112
8.2.1	Structure torsadée à grand nombre de sous-structures . . . . .	112
8.2.2	Structure 1+6 . . . . .	113
8.3	Validation des modèles . . . . .	114
8.4	Conclusions et perspectives . . . . .	115

<b>Conclusion générale</b>	<b>119</b>
<b>A Modélisation continue équivalente d'un treillis de barres</b>	<b>123</b>



# Introduction Générale

Dans le domaine du calcul de structure, l'augmentation de la puissance des ordinateurs permet aujourd'hui de traiter des structures complexes avec des modèles de plus en plus fins. Néanmoins dans le cas de super-structures (bateau, avion), des modèles fins détaillés conduiraient à des temps de réalisation du maillage importants, et à une analyse des résultats très difficile compte tenu du volume d'informations à traiter.

Il faut donc être capable de construire des **modèles simplifiés** de ces structures, ce qui est possible dans la plupart des cas. Ceci résulte de l'existence de **plusieurs échelles** dans le problème. Ainsi, si on reprend le cas du bateau, l'épaisseur des coques est négligeable devant ses autres dimensions. D'autre part, pour un navire à passagers, les hublots sont généralement identiques, et en grand nombre. On peut aussi citer le cas des milieux finement hétérogènes, tels que les matériaux composites.

Ces exemples montrent l'existence d'un **petit paramètre**, qu'on cherche à exploiter pour simplifier le problème. Un tel processus est souvent réalisable, ce qu'on peut résumer en citant Trefethen: "If no parameters in the world were very large or very small, science would reduce to an exhaustive list of everything", d'après (Andrianov, I., Awrejcewicz, J., et Barantsev, R. (2003) Asymptotic approaches in mechanics: New parameters and procedures, *Appl. Mech. Rev.* **56**(1), 87-110).

Dans la littérature, plusieurs approches sont proposées pour tenir compte de ce petit paramètre et proposer un modèle simplifié :

- des méthodes heuristiques d'équivalence (dans le domaine des matériaux) dans lesquelles le modèle simplifié est équivalent, en un certain sens, au modèle fin;
- des méthodes fondées sur des hypothèse a priori (pour les structures minces), où on exploite implicitement l'existence du petit paramètre pour formuler des hypothèses sur l'évolution des champs inconnus dans la section de la poutre ou l'épaisseur de la plaque;
- la méthode des développements asymptotiques, où on recherche la solution du problème fin sous le forme d'un développement asymptotique en puissance croissante du petit paramètre ;
- les méthodes de convergence, dans lesquelles on recherche la limite de la solution du problème fin quand le petit paramètre tend vers 0.

Comme cette présentation rapide le laisse entrevoir, les deux premières méthodes sont moins rigoureuses que les deux dernières. Elles sont en revanche beaucoup plus faciles à utiliser. La méthode de convergence, quant à elle, requiert un arsenal mathématique important.

En tant que mécanicien des structures, et m'efforçant d'être rigoureux, je me situe le plus souvent dans le cadre de la méthode des développements asymptotiques, à moins que les difficultés nécessitent un repli sur la première ou la deuxième méthode.

Plus concrètement, j'ai abordé des problèmes dans lesquels le petit paramètre était associé à une hétérogénéité matériau de type périodique. Dans ce cas, simplifier le matériau revient à lisser les hétérogénéités, ce qu'on définit par **homogénéisation**. J'ai d'autre part étudié des structures minces périodiques, pour lesquelles on a deux petits paramètres correspondant respectivement à la finesse de l'hétérogénéité et à l'inverse de l'élançement. Ces travaux se situent pour l'essentiel

dans le cadre de l'élastostatique linéaire. Tous ces problèmes ont une origine industrielle, et ne constituent pas une application banale de la théorie de l'homogénéisation ou de la méthode des développements asymptotiques, comme nous aurons l'occasion de le souligner.

Dans une première partie de ce mémoire, intitulée *Modèles Homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre*, nous présenterons un premier niveau d'application des méthodes d'homogénéisation. L'objectif est simplement l'obtention du comportement global (on parlera dorénavant de comportement **macroscopique**) du matériau, ou de la structure mince périodique.

Au chapitre 1, je présenterai mes travaux de thèse, qui portait sur la modélisation d'un joint de culasse. Le joint présente une périodicité de ses constituants dans le plan. Or, sur le moteur, du fait du serrage entre le bloc et la culasse, une modélisation 3D du joint est nécessaire. Il s'agit là d'une source de difficultés car on n'a pas périodicité dans les 3 directions de l'espace. Ceci nous a amenés à développer de méthodes spécifiques, dans le cadre de la méthode des moyennes. Dans ce même chapitre, j'exposerai rapidement l'autre partie de mon travail de thèse, sur la modélisation du comportement élastoplastique d'un constituant du joint.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des structures minces périodiques. Comme indiqué auparavant, ces structures se caractérisent par l'existence de deux petits paramètres. Ceci donne lieu à plusieurs méthodes d'homogénéisation, selon l'ordre dans lequel on fait tendre vers 0 ces deux petits paramètres. Cependant, le domaine de validité de ces méthodes n'est pas très bien défini, et d'une manière générale, très peu d'applications ont été traitées, notamment à l'aide de méthodes numériques. Nous avons donc analysé ces différentes méthodes, et les avons appliquées à différents exemples de poutres, plaques et coques périodiques. Toutes ces méthodes rentrent dans le cadre de la méthode des développements asymptotiques.

Au chapitre 3, nous nous intéresserons aux milieux poreux. En effet, les plaques périodiques que nous avons étudiées au chapitre 2 sont très peu denses, et il est intéressant de les aborder en tant que structures discrètes, où de nombreux travaux existent sur les méthodes d'équivalence. Ceci nous permettra de comparer ces méthodes avec celles utilisées au chapitre 2. D'autre part, nous proposerons une méthode numérique pour la résolution des problèmes cellulaires sur ces milieux.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, intitulée *Modèles homogénéisés d'ordre supérieur et effets de bords*, l'objectif est de dépasser le stade de la détermination du comportement macroscopique. Comme annoncé au départ, nous cherchons à substituer, à un modèle détaillé, un modèle plus simple. Ceci suppose que la réponse de la structure avec le modèle simple sera une bonne approximation de la solution avec le modèle fin. Or, nous montrerons que les modèles macroscopiques de la première partie peuvent s'avérer très imprécis, d'où la nécessité de les améliorer.

Au chapitre 4, nous construirons, pour une poutre périodique, un modèle asymptotique d'ordre supérieur, en déterminant formellement l'expression des termes du développement asymptotique à un ordre quelconque. Nous aborderons également les aspects pratiques de mise en oeuvre de la méthode, et proposerons une approche pour calculer la série complète à partir de la résolution d'un seul problème macroscopique.

Au chapitre 5, nous traiterons le problème des effets de bords, et exposerons une méthode pour les prendre en compte.

Des exemples d'application sont ensuite présentés au chapitre 6, où on confronte la solution issue du modèle asymptotique d'ordre supérieur avec prise en compte des effets de bords à la solution du modèle fin.

En plus de ces deux parties, on présente au chapitre 7 les développements numériques utilisés dans les différentes parties du mémoire. Ce chapitre comprend également l'exposé d'une méthode de calcul originale pour la résolution des problèmes cellulaires.

Enfin, le chapitre 8 concerne un travail en cours sur la modélisation des câbles synthétiques.

**Première Partie**  
**Modèles Homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre**



## Chapitre 1

# Travaux de thèse

### 1.1 Introduction

Ma thèse s'est déroulée dans le cadre d'une convention CIFRE, avec la société Meillor. Il s'agit d'une entreprise de taille moyenne (effectif de 500 personnes environ en 90), fabricant de joints de culasse. L'objectif à terme de la thèse était la modélisation numérique du serrage en statique de la culasse.

Ma thèse a été effectuée sous la direction de C. Wielgosz, au Laboratoire de Mécanique et Matériaux de l'Ecole Centrale de Nantes. Elle a été menée en collaboration avec O. Débordes, du L.M.A. de Marseille.

Le type de joint que j'ai étudié était constitué d'une âme en acier (tôle perforée) et d'un carton (composé principalement de cellulose et d'élastomères). Ce carton est "agrafé" sur le relief des trous de la tôle, par une opération de laminage. La perforation de la tôle est périodique, avec des trous qui débouchent alternativement vers le haut ou vers le bas dans les deux directions du plan. Une vue en coupe du joint est donnée figure 1.1(a), alors que la figure 1.1(b) donne le principe de perforation de la tôle (un carré noir (respectivement blanc) représente un trou débouchant vers la surface supérieure du joint (respectivement inférieure)). Pour fixer les idées, précisons qu'un joint de 1,2 mm d'épaisseur a une âme d'épaisseur 0,2 mm, et que les dimensions de la période dans le plan sont de 6 x 6 mm.

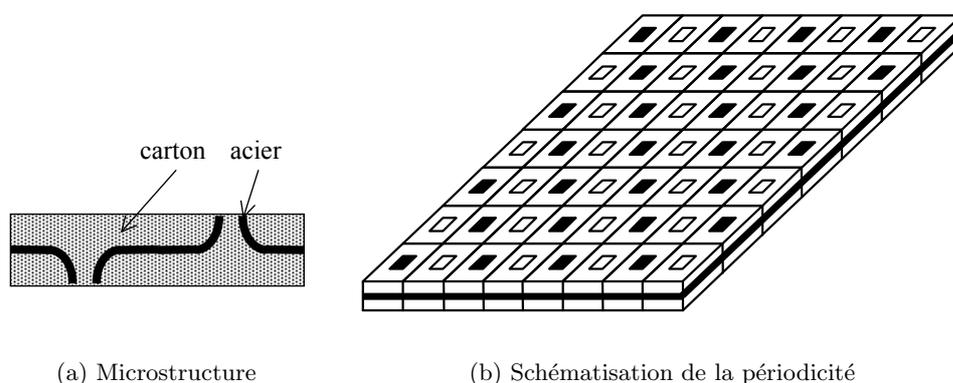


FIG. 1.1 – *Le joint de culasse*

Le problème du joint sur le moteur peut être schématisé de la façon suivante, cf. figure 1.2, sachant que les goujons traversent le joint, où existent par ailleurs d'autres trous (cylindres moteurs, passages huile et eau). Dans les bureaux d'études des constructeurs, ce problème est résolu

numériquement de la façon suivante. La culasse et le bloc-moteur sont supposés élastiques linéaires et condensés (super-éléments). La difficulté principale se situe dans la description du comportement du joint, celui-ci étant discrétisé par une couche d'éléments finis 3D entre le bloc et la culasse. Ce joint est alors assimilé à un matériau homogène, et son comportement est seulement représenté par une courbe non-linéaire, issue d'un essai de compression.

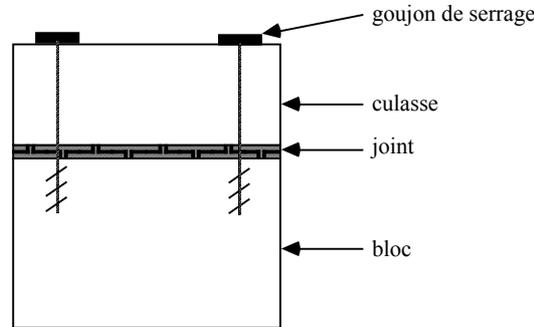


FIG. 1.2 – Le problème du joint sur le moteur

Avec cette simulation, les grandeurs d'intérêt pour les constructeurs sont les contraintes dans le bloc et la culasse, ce cas de charge étant critique pour leur dimensionnement. Pour le fabricant du joint de culasse, l'analyse porte sur la carte de pression sur les faces du joint, pour estimer sa capacité à assurer ses fonctions d'étanchéité.

Dans ma thèse, une approche de type homogénéisation a été choisie pour modéliser le comportement du joint. Cette approche offre notamment l'avantage de faire le lien entre les propriétés du carton et celles du joint. De ce fait, ma thèse a consisté en deux parties, de volumes comparables. Dans un premier temps, j'ai traité le problème de la caractérisation et de la modélisation du comportement du carton. Disposant alors d'une description géométrique et matérielle de la microstructure du joint, j'ai abordé son homogénéisation. Ces deux parties sont résumées ci-après.

## 1.2 Modélisation du comportement du carton

Nous décrivons ici les travaux réalisés pour la modélisation du comportement du carton, sachant que celle-ci sera utilisée par la suite pour l'homogénéisation du joint. Ces travaux consistent en la réalisation d'essais sur le carton, puis le calage de lois de comportement.

Le présentation sera volontairement succincte, car il s'agit d'une partie en marge du reste de mes activités de recherche. Pour plus de détails, on se reportera à (Cartraud *et al.*, 1993) et (Cartraud et Wielgosz, 1996).

### 1.2.1 Essais sur le carton et analyse des résultats

Il est important de rappeler que l'objectif final est de simuler le serrage de la culasse sur le moteur (et non pas de s'attaquer au problème du moteur en fonctionnement). Cette sollicitation peut donc être considérée comme monotone. Lors de cette opération de serrage, le joint travaille essentiellement en compression. D'autre part, quand le joint est soumis à des efforts dans son plan, compte tenu des raideurs respectives de l'acier et du carton, tout se passe comme si seul l'acier travaille.

Il en résulte qu'il est suffisant de modéliser le comportement du carton en compression.

D'autre part, une analyse des états de contraintes et de déformations régnant dans le joint sur le moteur montre que ces derniers se situent entre deux extrêmes correspondant à la compression

simple et à la compression oedométrique pour lesquelles le déplacement latéral est respectivement libre ou nul.

Les essais reproduisant ces deux états ont donc été réalisés. La figure 1.3 présente les résultats obtenus pour l'essai de compression simple, ceux-ci étant ramenés à une éprouvette cylindrique d'épaisseur et de diamètre 1 mm ( $F$  est l'effort de compression,  $u_z$ ,  $u_r$  sont les déplacements dans l'épaisseur et radial respectivement). Lors de cet essai, on atteint la rupture de l'échantillon. Pour l'essai oedométrique, on obtient sur  $u_z$  une courbe de la même allure que celle de la figure 1.3, et on n'arrive pas à rompre l'échantillon, et seul l'effort de compression est mesuré.

Ces essais mettent en évidence un comportement élasto-plastique avec écrouissage, et une plasticité qui apparaît très tôt, dès la mise en charge. On a des déformations modérément grandes, et des déformations élastiques non petites. On note enfin une analogie avec le comportement des géomatériaux, notamment un durcissement du matériau sous charge, ce qui résulte de sa porosité.

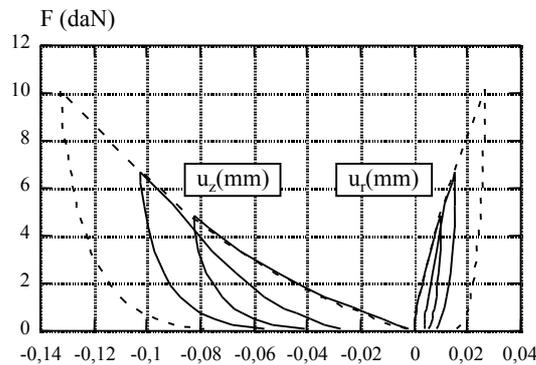


FIG. 1.3 – Résultats de l'essai de compression simple

### 1.2.2 Calage de lois de comportement

Nous avons tout d'abord défini un cadre de travail en grandes transformations, en adoptant une formulation eulérienne en référentiel tournant. Il s'avère que pour les essais réalisés, cette formulation conduit à une décomposition additive des déformations en parties élastique et plastique, ce qui permet d'identifier les modèles associés de façon indépendante.

#### Elasticité

Nous avons repris un modèle hypo-élastique utilisé en mécanique des sols (donc des milieux granulaires), et adapté aux milieux poreux (Saada et Bianchini, 1988). On travaille ainsi avec des modules tangents fonction de la trace des contraintes selon une loi en puissance. Ce modèle a été calé sur les essais en exploitant les courbes de décharge, et grâce à l'existence de solutions analytiques. Il a fallu cependant envisager un modèle anisotrope pour arriver à représenter avec une bonne précision les résultats des deux essais.

#### Plasticité

Pour la plasticité, nous avons utilisé l'essai de compression simple pour caler le modèle (car l'état de contraintes est connu) et l'essai oedométrique pour le valider. Deux modèles ont été recalés.

Nous avons tout d'abord utilisé un modèle Cam-Clay, cf. (Halphen et Salençon, 1987) par exemple, car l'essai oedométrique a fourni une réponse similaire à celle d'une argile. Le calage de cet essai sur les résultats de l'essai de compression a alors été effectué, en utilisant une solution

semi-analytique pour positionner la surface de plasticité perpendiculairement aux incréments de déformation plastique. La loi d'érouissage a ensuite été ajustée. Ce modèle a donc été calé au mieux sur l'essai de compression simple, et on a obtenu sur cet essai une corrélation modèle/expérience satisfaisante. La simulation numérique de l'essai oedométrique (utilisation du code SIC, (Bonelli, 1993)), avec le modèle élastique précédent et ce modèle plastique a fourni des résultats en bon accord avec l'expérience pour la charge, mais moins bons pour la décharge, cf. figure 1.4.

Les difficultés de calage du modèle Cam-Clay nous ont amenés à envisager un autre modèle, à 2 mécanismes de plasticité, associés respectivement aux parties sphérique et déviatorique de l'état de contraintes. Nous avons ainsi utilisé le mécanisme sphérique du modèle de Cambou-Jafari (Cambou et Jafari, 1988) (utilisé en mécanique des sols), et le critère de Von-Mises. Ce modèle rentre dans le cadre des matériaux standards généralisés, et ses deux mécanismes peuvent évoluer de façon indépendante, ce qui facilite le recalage. En outre, une solution analytique existe pour l'essai de compression simple, et nous avons pu obtenir une excellente description de cet essai avec ce modèle. La simulation de l'essai oedométrique a fourni avec ce modèle des résultats proches de ceux obtenus avec le modèle Cam-Clay, cf. figure 1.4, avec toutefois un écart avec l'expérience plus important à la décharge.

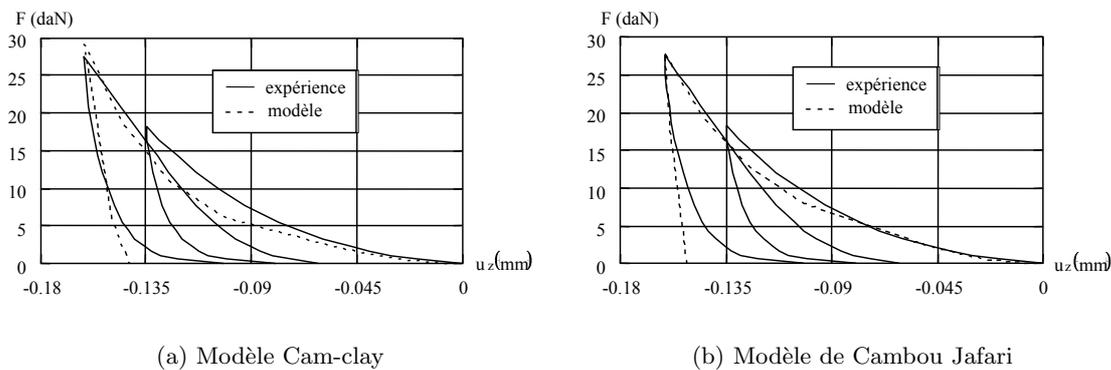


FIG. 1.4 – Réponse des modèles sur l'essai oedométrique

### 1.2.3 Bilan

Les résultats obtenus avec les modèles utilisés sont satisfaisants, même s'ils paraissent perfectibles. Il ne nous a paru cependant non justifié de mettre en oeuvre des modèles plus complexes, compte tenu des résultats expérimentaux disponibles. Une meilleure connaissance du comportement du carton aurait nécessité d'autres essais, du type force imposée pour être exploitable du point de vue de la plasticité. Mais il nous était impossible de réaliser des essais triaxiaux, car nous ne pouvions utiliser qu'une machine de traction.

## 1.3 Homogénéisation du joint de culasse

### 1.3.1 Introduction

Comme indiqué en introduction à ce chapitre, le problème du serrage de la culasse sur un moteur se présente selon la figure 1.2. L'objet de cette section est de proposer une méthode pour remplacer le joint par un milieu homogène équivalent, afin de réduire la taille du modèle éléments finis utilisé dans les calculs. Cet aspect est d'autant plus important ici que dans ce problème, le joint est la

seule source de non-linéarité.

Nous cherchons donc une méthode d'homogénéisation pour décrire le comportement **3D** global du joint. Etant donné que les hétérogénéités sont périodiques dans le plan, on introduit le petit paramètre  $\varepsilon$ , caractérisant leur finesse, et égal au rapport entre les dimensions dans le plan de la période et du joint. Désignons par  $\mathbf{u}^\varepsilon$  la solution du problème dans lequel le joint est décrit de façon hétérogène. Notre objectif est d'approcher  $\mathbf{u}^\varepsilon$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , par la solution d'un problème avec un joint homogénéisé. L'idéal, d'un point de vue mathématique, est d'utiliser une méthode de convergence (cf. (Duvaut, 1976) par exemple), qui fournit par ailleurs la formulation du problème d'homogénéisation. A défaut, on peut appliquer la méthode des développements asymptotiques formels ((Sanchez-Palencia, 1980)), qui conduit en général à une série de problèmes microscopiques et macroscopiques. On s'arrête alors au problème macroscopique de plus bas ordre, dont le comportement est donné par la résolution d'un problème microscopique traité auparavant. Si on met en oeuvre dans le cas présent cette dernière méthode, on constate qu'on lisse les hétérogénéités dans le plan, mais pas dans l'épaisseur. Il en résulte qu'on n'atteint pas complètement l'objectif qui est d'avoir un comportement homogénéisé 3D.

En fait, la présentation précédente ne traduit pas toute la complexité du problème hétérogène initial. En effet, d'autres petits paramètres sont présents. Ainsi, on peut définir  $e$  associé à la minceur du joint ( $e$  est d'ailleurs environ égal à  $\varepsilon/5$ ). D'autre part, le carton est beaucoup moins raide que l'acier, et on peut estimer sa raideur (bien que non constante) à environ un centième de celle de l'acier, d'où un troisième petit paramètre  $\eta$ .

Dans la littérature, les difficultés liées à la coexistence de  $\varepsilon$  et  $e$  ont été traitées dans (Caille-rie, 1984) notamment, mais pour des applications de type plaques périodiques (nous reviendrons largement sur ces aspects au chapitre 2). Il s'agit donc d'un cas où le milieu à homogénéiser constitue l'ensemble du domaine étudié, et où par conséquent les conditions aux limites sur ses faces supérieure et inférieure sont parfaitement définies, soit deux différences importantes par rapport au problème étudié ici. Dans notre cas, on est en fait face à un problème de jonction, et dans ce domaine, les résultats disponibles se limitent à l'étude d'une structure mince homogène à l'intérieur d'un milieu 3D, cf. par exemple (Ciarlet, 1997). Dans le cas traité dans cet ouvrage, le problème limite couple le domaine 3D à une plaque, d'épaisseur constante. Ainsi, là encore, ces résultats n'apportent pas une réponse adéquate au problème du serrage de la culasse. En effet, les méthodes de calculs des ingénieurs font appel à un modèle 3D pour le joint, dont on cherche en particulier la variation d'épaisseur.

Compte tenu des difficultés précédemment citées (existence de plusieurs petits paramètres, dans le cadre d'un problème de jonction), des résultats donnés dans la littérature dans le cas où ces difficultés sont traitées de façon séparée, et des besoins des bureaux d'études, nous nous sommes orientés vers une approche d'homogénéisation plus heuristique. C'est ainsi que nous nous sommes situés dans le cadre de la méthode des moyennes, (Suquet, 1985) pour obtenir la loi de comportement 3D équivalente du joint.

### 1.3.2 Méthodes d'homogénéisation développées

D'après ce qui vient d'être énoncé, il s'agit d'obtenir les caractéristiques effectives du joint selon un comportement 3D. Le cadre adopté étant la méthode des moyennes, il nous faut définir de façon précise les 3 phases de cette méthode : la représentation, la localisation et l'homogénéisation, cf. (Bornert *et al.*, 2001), chapitre 1.

Dans le cas du joint, du fait de sa périodicité dans le plan, l'étape de représentation est parfaitement définie. Ainsi, le volume élémentaire représentatif du joint (noté **VER** par la suite) correspond à une période du joint dans son plan, toute l'épaisseur étant considérée dans la direction perpendi-

culaire. Pour simplifier, et sachant que l'objectif ici est de définir une méthode d'homogénéisation, on se place dans le cadre hypothèse des petites perturbations, en supposant les matériaux élastiques, et parfaitement collés entre eux.

En ce qui concerne la phase d'homogénéisation, on définit classiquement les grandeurs macroscopiques comme les moyennes sur le VER de leurs homologues microscopiques (ce qui peut être justifié par une interprétation d'essais mécaniques élémentaires, cf. (Débordes, 1989)).

Il reste à définir la localisation, qu'on peut voir comme une modélisation d'essais mécaniques à l'échelle du VER, car permettant de passer d'une grandeur macroscopique à la grandeur microscopique associée. Pour le joint de culasse, c'est la localisation qui est source de difficultés. En effet, les méthodes classiques de localisation cf. (Bornert *et al.*, 2001), chapitres 1 et 2, sont définies par des problèmes aux limites sur le VER, avec des conditions aux limites homogènes (théorie des modules effectifs) ou périodiques (homogénéisation périodique). Ainsi, si on applique ces approches au joint, dans le premier cas, on ne tient pas compte de la périodicité dans le plan, et dans le second, on fait l'hypothèse de périodicité dans l'épaisseur, qui n'est pas justifiée.

En réalité, dans le cas du joint, les seules équations qu'on puisse écrire pour le problème de localisation des déformations sur le VER noté  $Y$  sont ( $\mathbf{y}$  désigne l'échelle microscopique,  $\mathbf{a}$  le tenseur de rigidité,  $\mathbf{E}$  la déformation macroscopique, et  $\langle \cdot \rangle$  l'opérateur moyenne spatiale sur le VER):

$$\begin{cases} \mathbf{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}); \quad \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = \mathbf{grad}_{s_{\mathbf{y}}}(\mathbf{u}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) \text{ 1-2 périodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ 1-2 anti-périodique} \\ \langle \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) \rangle = \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.1)$$

où la notation 1-2 signifie que la propriété vaut pour les deux directions du plan horizontal.

Et ces équations sont insuffisantes pour définir un problème bien posé, ce qui est notamment lié à l'absence de conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure du VER.

Ce dernier point fait ressortir le problème de jonction évoqué auparavant. En effet, dans le plan, on peut isoler convenablement une période du joint via des conditions aux limites périodiques sur le bord du VER. Dans l'épaisseur, en revanche, on ne peut exprimer de façon générale les déplacements ou les efforts exercés par les pièces environnant le joint.

Il faut donc faire des hypothèses, et nous en avons envisagé de différentes natures: sur les déplacements, les efforts, ou mixtes. Pour restreindre le choix de ces conditions aux limites, nous avons imposé comme contraintes l'obtention d'une loi de comportement homogénéisée 3D, et le respect de la condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Nous avons finalement obtenu différents problèmes de localisation, que nous présentons de façon globale ci-dessous ( $Sup$  et  $Inf$  désignent les faces supérieure et inférieure du VER):

$$\begin{cases} \mathbf{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{u}^* & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^* \text{ 1-2 périodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ 1-2 anti-périodique} \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^* \text{ 3' périodique} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ sur } \underbrace{Sup \text{ et } Inf}_{\{a\}} \end{array} \right. & \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ 3' anti-périodique}}_{\{b\}} & \underbrace{\int_{Sup \cup Inf} \mathbf{u}^* \otimes_s \mathbf{n} \, dS = 0}_{\mathbf{u}^* \text{ 3' anti-périodique}} \\ & & \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{n} \text{ sur } Sup \text{ et } Inf}_{\{c\}} \end{cases} \quad (1.2)$$

Nous donnons ci-après quelques commentaires sur la façon dont ces problèmes (1.2)(a), (b) ou (c) ont été obtenus:

- (a): hypothèse sur les déplacements. On suppose, par analogie avec la théorie des déformations des modules effectifs, que le champ de déplacement est linéaire sur les faces  $Sup$  et  $Inf$  du

VER. On peut alors montrer que  $\mathbf{u}$  est de la forme (1.2)<sub>3</sub> avec  $\mathbf{u}^*$  champ 1-2 périodique, défini à un champ de solide rigide près, et vérifiant la condition (1.2)(a).

- (b) : hypothèses mixtes : le relief des trous de perforation de la tôle affleure sur les faces du joint. Or, si on effectue un essai de compression sur un joint compris entre 2 blocs d'acier, on constate des pics de pression sur ces reliefs. D'autre part, aux effets de bords près, les cartes de pression ont le même profil sur les 2 faces du joint. Ainsi, en tenant compte des propriétés d'invariance du VER, on peut associer les déformations et les contraintes d'un point de la surface inférieure du VER à celles d'un point de la face supérieure. Ceci est réalisé en prenant une direction oblique et non verticale, pour qu'un point matériel A initialement dans l'acier le reste en B, cf. figure 1.5. Ainsi, en notant  $3' = \overline{AB}$ , on en déduit les conditions (1.2)(b), qui rendent le problème bien posé puisqu'il s'agit d'un problème d'homogénéisation périodique.

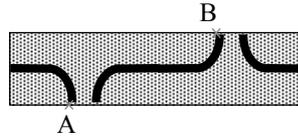


FIG. 1.5 – Points A et B définissant la direction de périodicité

- (c) : hypothèse sur les efforts : en s'inspirant de l'approche en contraintes de la théorie des modules effectifs, on fait l'hypothèse d'une répartition uniforme d'efforts sur *Sup* et *Inf*. Cette hypothèse se traduit par la condition (1.2)(c)<sub>2</sub> d'après la formule de Green et la périodicité dans le plan des contraintes. Il s'avère alors que ces conditions aux limites ne suffisent pas à rendre le problème (1.1) bien posé. On fait donc l'hypothèse supplémentaire (1.2)<sub>3</sub>, qui est une condition suffisante pour assurer que  $\mathbf{e}_y(\mathbf{u})$  est 1-2 périodique. La condition  $\langle \mathbf{e}_y(\mathbf{u}) \rangle = \mathbf{E}$  conduit finalement à (1.2)(c)<sub>1</sub>.

On a donc défini trois méthodes de localisation, et il est naturel de s'interroger sur leur adéquation au problème d'homogénéisation du joint de culasse. De ce point de vue, la méthode avec les hypothèses mixtes (1.2)(b) paraît la plus précise, dans la mesure où les conditions aux limites initialement manquantes peuvent être justifiées par des considérations géométriques, et n'ont donc pas à être considérées comme des hypothèses. Pour les deux autres méthodes, on constate qu'elles conduisent à des faces du joint qui, soit restent planes, soit subissent un effort uniformément réparti. Le premier cas (1.2)(a) est une hypothèse raisonnable car le bloc et la culasse sont sensiblement plus raides que le joint, et vont donc présenter des déformations à variation locale lente. Le second cas paraît en revanche beaucoup moins réaliste et est en tout cas en désaccord avec les résultats expérimentaux qui montrent une grande hétérogénéité de la répartition de pression sur le joint, y compris à l'échelle microscopique. Ce second cas serait plus adapté à un joint dans un environnement de type fluide.

Signalons que l'on peut comparer ces différentes méthodes d'homogénéisation en utilisant les théorèmes énergétiques, ce qui nous a permis de montrer que les hypothèses (1.2)(a) conduisent au comportement homogénéisé le plus raide, devant (1.2)(b), puis (1.2)(c).

Ces différentes méthodes ont été appliquées à un modèle élastique du VER du joint, avec pour le carton un module d'Young pris 100 fois plus petit que celui de l'acier égal à 200 GPa. On analyse les résultats sur le module d'Young homogénéisé dans la direction de l'épaisseur du joint, car le joint travaille essentiellement en compression dans cette direction. Il apparaît alors que les hypothèses (1.2)(a) et (b) conduisent à des valeurs très proches (4.99 et 5.25 GPa respectivement), alors que les hypothèses (1.2)(c) fournissent une raideur inférieure d'environ 40% (3.26 GPa). Pour avoir une valeur de référence, on considère le VER précédent, pris en sandwich entre deux couches d'acier,

censées représenter les structures environnant le joint. On applique alors sur cet échantillon les méthodes précédentes, sachant qu'il est attendu que les différentes hypothèses (1.2)(a), (b) ou (c) faites sur les conditions aux limites sur *Sup* et *Inf* aient peu d'influence ici, ces surfaces étant maintenant homogènes. En effet, pour un joint de 1.2 mm d'épaisseur, en prenant deux couches d'acier de 0.5 mm d'épaisseur, l'écart sur le module d'Young homogénéisé de l'échantillon dans la direction de l'épaisseur est cette fois-ci de 4% entre les méthodes (1.2)(a) et (c). Enfin, si à partir de ces résultats, on détermine le module d'Young homogénéisé du joint seul (grâce au calcul des moyennes des contraintes et des déformations), on trouve alors 5.09 et 5.21 GPa, pour ces deux méthodes respectivement.

Il apparaît ainsi que les méthodes d'homogénéisation (1.2)(b) et (c), sont appropriées au cas du joint situé entre deux structures en acier.

La seule publication que j'aie sur cette partie de ma thèse est (Cartraud *et al.*, 1991).

## 1.4 Conclusion

Ma thèse m'a permis de me former dans deux domaines distincts: l'homogénéisation et la modélisation du comportement non-linéaire des matériaux.

En homogénéisation, j'ai travaillé en utilisant la méthode des moyennes, et j'ai réalisé petit à petit ses limites. J'ai fait pendant ma thèse plusieurs tentatives pour traiter le problème d'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques, mais elles n'ont pas abouti. Je me suis en fait heurté aux difficultés que j'ai évoquées en 1.3.1. Aujourd'hui, avec plus d'expérience, il est clair que si j'avais à reprendre cette étude, je l'aborderais avec cette méthode, tout en étant conscient des difficultés du problème traité. Mais il s'agit à mon sens d'un "beau" problème, encore ouvert.

La suite logique des travaux présentés ici aurait été l'homogénéisation du comportement élasto-plastique du joint, que je n'ai pas eu le temps de traiter sérieusement pendant la thèse. Cependant, la technologie du joint de culasse a changé (passage à des joints multifeuilles métalliques), et on m'a proposé parallèlement un sujet d'étude sur les plaques périodiques. J'ai donc stoppé à la fin de ma thèse mes investigations sur le joint de culasse pour travailler en priorité sur les plaques périodiques.

Grâce à mes travaux sur la modélisation du comportement du carton, j'ai acquis des connaissances dans en mécanique des sols. C'est ainsi qu'à la fin de ma thèse, j'ai travaillé pendant 2 ans en collaboration avec un collègue du Laboratoire Génie-Civil de l'Ecole Centrale de Nantes (Y. Riou). Le thème était la modélisation du forage d'un tunnel, et l'étude portait plus particulièrement sur les influences du choix d'un modèle de comportement élasto-plastique pour le sol, et de la modélisation du déconfinement. Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du réseau GEO (projet "souterrains et forages en site urbain"), durant la période 94-96. Ils ne seront pas présentés dans ce mémoire. En effet, n'étant pas de formation génie civil à la base, j'ai préféré stopper ces activités et me concentrer sur le thème de recherche que l'homogénéisation.

# Bibliographie

- Bonelli, S. (1993). *Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols*. Thèse, Université Aix-Marseille II.
- Bornert, M., Bretheau, T., et Gilormini, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires et milieux périodiques*. HERMES Science.
- Caillerie, D. (1984). Thin elastic and periodic plates. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **6**, 159–191.
- Cambou, B. et Jafari, K. (1988). Modèle de comportement des sols non cohérents. *Revue Française de Géotechnique*, **44**, 43–55.
- Cartraud, P. et Wielgosz, C. (1996). Numerical modelling of the elastoplastic behaviour of a gasket material. *Computational Materials Science*, **5**, 75–81.
- Cartraud, P., Wielgosz, C., et Débordes, O. (1991). Homogénéisation de composites plans sollicités hors de leur plan. *Actes du 10ème Congrès Français de Mécanique*, **vol. 1**, 129–132.
- Cartraud, P., Bonelli, S., Wielgosz, C., et Débordes, O. (1993). Recalage numérique/expérimental d’une loi de comportement élastoplastique pour un constituant d’un joint de culasse. *Actes du 1er Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume vol. 1, 526–534. Hermès.
- Ciarlet, P. (1997). Mathematical elasticity - volume II: Theory of plates. *Studies in mathematics and its applications*, volume 27. North-Holland.
- Débordes, O. (1989). Homogénéisation périodique. Cours, Université Laval, Québec.
- Duvaut, G. (1976). Analyse fonctionnelle des milieux continus. Application à l’étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation. W. Koiter, éditeur, *Theoretical and applied mechanics*. North-Holland.
- Halphen, B. et Salençon, J. (1987). *Cours de calcul de structures anélastiques, Elastoplasticité*. presses de l’E.N.P.C.
- Saada, A. et Bianchini, G. (1988). *Constitutive equations for granular non-cohesive soils*. Balkema.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin.
- Suquet, P. (1985). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 193–278. Springer-Verlag.



## Chapitre 2

# Structures minces périodiques

### 2.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'homogénéisation de *structures minces* périodiques, c'est-à-dire avec l'objectif de construire des modèles simplifiés de poutre, plaque ou coque.

Nous avons abordé ces travaux en 94, lorsque nous avons démarré le partenariat avec Principia Marine (ex Institut de Recherches de la Construction Navale) sur les panneaux alvéolaires, cf. figure 2.1. Au départ, l'objectif était de caractériser la rigidité de ces panneaux en acier, pour concevoir des structures comparables au panneau raidi classiquement utilisé. Le cadre est donc celui de l'élastostatique linéaire. Ce travail a été mené en collaboration étroite avec S. Bourgeois, du L.M.A. de Marseille.

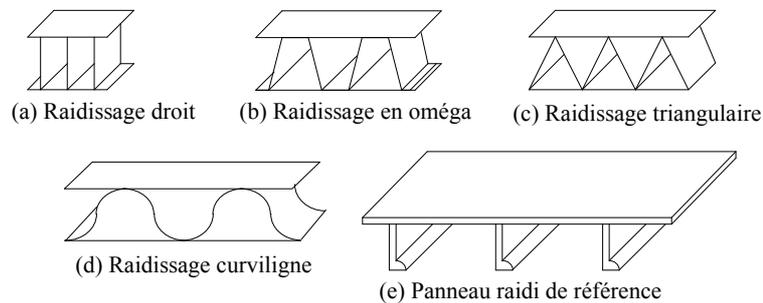


FIG. 2.1 – Différents types de panneaux alvéolaires

Par la suite, en vue d'approfondir certains problèmes rencontrés dans les plaques, nous sommes passés à partir de 96 à l'étude des poutres périodiques, cf. figure 2.2, toujours en élastostatique linéaire.

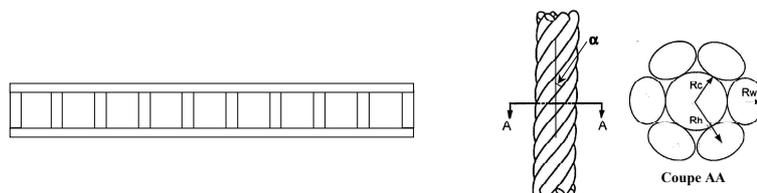


FIG. 2.2 – Exemples de poutres périodiques : treillis, et câble

Enfin, depuis l'année 2000, par le biais d'une collaboration avec SNECMA Moteurs, nous avons étudié des coques hétérogènes quasi-périodiques, utilisées comme aubes dans les moteurs. Une coupe de l'aube est présentée figure 2.3. Le problème étudié étant la perte d'aube, il s'agit de développer

dans ce cas une méthode d'homogénéisation en plasticité et en dynamique.



FIG. 2.3 – *Détail d'une aube creuse*

Les milieux minces périodiques se caractérisent par l'existence de deux petits paramètres : à celui associé à la finesse des hétérogénéités, s'ajoute celui exprimant la minceur du milieu. Il s'ensuit plusieurs méthodes d'homogénéisation pour obtenir une structure homogène équivalente, selon l'ordre dans lequel on fait tendre ces petits paramètres vers 0.

Nous discutons dans ce chapitre ces différentes méthodes, en vue de dégager leur domaine de validité respectif. Nous présentons enfin quelques exemples d'applications.

## 2.2 Quelques repères bibliographiques

### 2.2.1 Plaques périodiques en élasticité

La présentation qui suit s'appuie sur l'ouvrage de Lewiński et Telega, (Lewiński et Telega, 1999) qui donne une excellente vue d'ensemble des méthodes d'homogénéisation des plaques périodiques, et sur les analyses bibliographiques faites dans (Bourgeois, 1997), (Bourgeois *et al.*, 1998), et (Buanic *et al.*, 2003) (ce dernier article est joint à ce mémoire).

Les panneaux présentés figure 2.1 sont périodiques dans une direction, et invariants dans l'autre direction perpendiculaire à l'épaisseur. Il s'agit donc d'un cas particulier de plaques périodiques dans les deux directions du plan. Considérons alors le panneau alvéolaire présenté figure 2.4, dont on cherche à simplifier la modélisation. Deux possibilités apparaissent pour atteindre cet objectif : tenir compte de la minceur de la structure, et/ou lisser ses hétérogénéités.

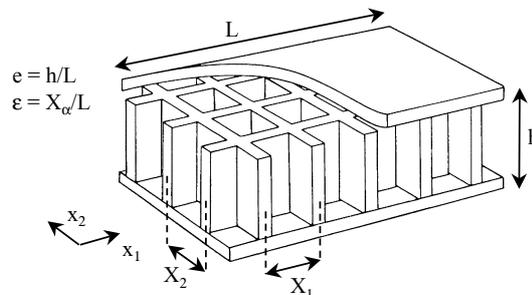


FIG. 2.4 – *Exemple de plaque périodique, d'après (Kalamkarov, 1992)*

Ceci peut être explicité en introduisant les petits paramètres  $e$  et  $\varepsilon$  :  $e = h/L$  est l'inverse de l'élanement de la plaque, et  $\varepsilon = X_\alpha/L$ ,  $\alpha \in \{1,2\}$  caractérise la taille dans le plan de la période relativement à celle du panneau. Passer de la structure mince hétérogène à une plaque homogène équivalente consiste à faire tendre ces petits paramètres vers 0, d'où la définition de 3 familles de méthodes (voir aussi figure 2.6) :

- une première famille de méthodes correspondant aux opérations  $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Le premier passage à la limite conduit à une plaque périodique, qui est ensuite homogénéisée.
- une deuxième famille de méthodes où  $e$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  simultanément. La plaque homogène équivalente est alors obtenue en une seule étape.
- une troisième famille de méthodes dans laquelle  $\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ . On homogénéise d'abord dans le plan, le second passage à la limite étant ensuite effectué sur une structure mince

homogène par couche.

A l'origine, certaines méthodes ont été proposées dans le cadre de la première famille de méthodes, cf. par exemple (Duvaut, 1976). De même, les ingénieurs ont pour habitude d'utiliser des méthodes appartenant à la troisième famille de méthodes sur des applications de type panneaux sandwich, en remplaçant l'âme par un milieu homogène équivalent (voir (Noor *et al.*, 1995) pour les différentes approches de modélisation de ces panneaux). Le grand intérêt du formalisme présenté ci-dessus est de mettre en relief, via les 2 petits paramètres, les hypothèses sous-jacentes à ce type de méthodes. Ce formalisme est dû à Caillerie (Caillerie, 1984), qui a de plus démontré que dans le cas général, les caractéristiques effectives de plaque obtenues par les méthodes ( $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ ),  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  et  $(\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ ) étaient différentes (un résultat analogue a été établi par Kohn et Vogelius (Kohn et Vogelius, 1984) pour des plaques d'épaisseur variable). Au départ, une méthode dans chacune des familles a été développée dans (Caillerie, 1984) et (Kohn et Vogelius, 1984). Des variantes de ces méthodes ont ensuite été proposées, et nous détaillons ci-après les méthodes disponibles dans chacune des familles, voir aussi figure 2.6.

◇ Première famille de méthodes :  $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Le premier passage à la limite peut être réalisé de façon rigoureuse (i.e. mathématique), ou de façon ingénieur en utilisant un modèle de plaque fondé sur des hypothèses a priori. Dans le premier cas, on aboutit au modèle de Kirchhoff-Love (noté **KL** par la suite), alors que dans le second on peut choisir une théorie de KL, de Reissner-Hencky-Mindlin (notée **RHM** par la suite), de Reddy, voire une théorie propre aux sandwichs (Lewiński et Telega, 1999). Le choix de cette théorie est guidé par les caractéristiques géométriques et matérielles de la cellule, et en particulier par l'ampleur des effets du cisaillement transverse.

Il s'agit ensuite d'homogénéiser ce problème de plaque à coefficients périodiques, d'où l'obtention de problèmes cellulaires 2D. On en tire alors une plaque homogène équivalente, selon la même théorie que celle choisie lors du passage  $e \rightarrow 0$ . Par la suite, dans cette première famille de méthode, nous reviendrons sur les méthodes d'homogénéisation de plaques de KL ou RHM, et nous noterons ces méthodes **m1KL** et **m1RHM** respectivement. La méthode m1KL est également exposée dans (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999) pour une plaque perforée de type grillage.

Signalons pour conclure sur cette famille de méthodes que Lewiński a proposé une amélioration de la méthode m1RHM, (Lewiński, 1992), (Lewiński et Telega, 1999) section 5.3. Il a en effet constaté que cette méthode (tout comme m1KL d'ailleurs) présentait l'inconvénient de conduire aux mêmes caractéristiques effectives pour 2 périodes pourtant différentes telles que celles présentées figure 2.5. Il a donc cherché à remédier à ce problème, en complétant les mises à l'échelle (scalings) géométriques dans le plan, effectuées lorsqu'on aborde l'homogénéisation du problème de plaque, par une mise à l'échelle dans l'épaisseur. De cette manière, bien que l'on parte d'un problème hétérogène de plaque de type RHM, le comportement limite obtenu est de type KL. On notera cette méthode **m1RHMb**.

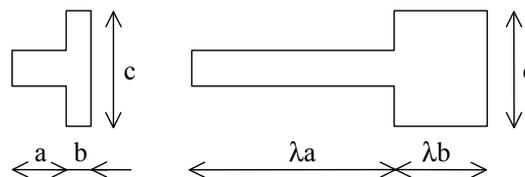


FIG. 2.5 – Deux cellules donnant les mêmes caractéristiques effectives avec la méthode m1RHM

◇ Deuxième famille de méthodes :  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

Avec cette méthode, on obtient une plaque homogène équivalente de type KL, dont les caractéristiques effectives sont déterminées après résolution de problèmes cellulaires posés sur la période

3D du panneau. Cette méthode est due à Caillerie et Kohn et Vogelius, et nous la nommerons **m2**.

En pratique, ces problèmes doivent être résolus numériquement, c'est pourquoi Lewiński, dans (Lewiński, 1991), a proposé d'en donner des solutions approchées, celles-ci pouvant être analytiques dans des cas simples. On peut ainsi, pour se ramener à des problèmes cellulaires 2D, chercher une approximation de type plaque, selon une théorie de KL ou RHM. Lewiński a alors démontré que dans ce cas, et sous certaines hypothèses liées à l'hétérogénéité de la cellule de base, on retrouvait les caractéristiques effectives des méthodes m1KL et m1RHMB respectivement. On a donc ici commutativité des processus d'homogénéisation et de passage à un modèle de plaque (Lewiński, 1991), (Lewiński, 1992).

D'autres approximations des solutions des problèmes cellulaires ont été proposées quand la cellule est constituée d'éléments minces (Kalamkarov, 1992), (Parton et Kudryavtsev, 1993), (Kalamkarov et Kolpakov, 1997).

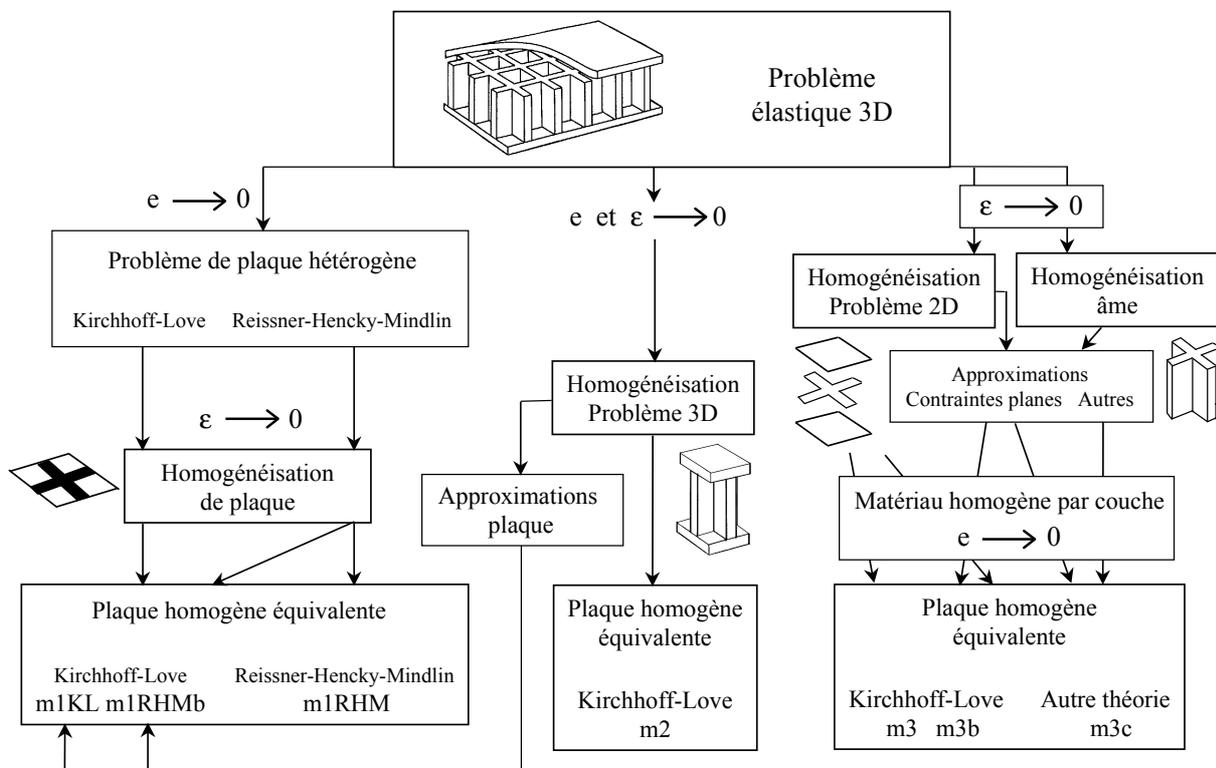


FIG. 2.6 – Méthodes d'homogénéisation de plaques périodiques

◇ Troisième famille de méthodes:  $\epsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ .

Du fait de la périodicité 2D, le premier passage à la limite conduit à des problèmes cellulaires 2D, posés sur chaque tranche horizontale de la période, mais dont on extrait une loi de comportement homogénéisée 3D (Caillerie, 1984), (Caillerie, 1985). Une plaque homogène équivalente de type KL est ensuite obtenue en faisant  $e \rightarrow 0$ . On notera cette méthode **m3**. On notera **m3b** l'approche où l'hypothèse d'un état de contraintes plan est faite lors de la première étape d'homogénéisation, (Soto et Diaz, 1993).

Rappelons qu'on peut rattacher à cette troisième famille de méthode les très nombreux travaux consacrés aux structures minces de type sandwich, dans lesquels l'âme est homogénéisée séparément (ce qui peut être assimilé à  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Une fois l'âme homogénéisée, on est ramené à une plaque multicouche, et on effectue l'opération  $e \rightarrow 0$  en utilisant la théorie de plaque de son choix, fondée sur des hypothèses a priori dans l'épaisseur, pour obtenir une plaque homogène équivalente. Quand cette théorie de plaque n'est pas de type KL, on notera **m3c** cette approche. On renvoie à (Hohe et

Becker, 2002) pour une présentation des différentes méthodes d'homogénéisation de l'âme. Dans ce dernier article, on indique que l'homogénéisation de l'âme est le plus souvent effectuée en supposant que ses faces supérieure et inférieure sont libres d'effort, ce qui est une approximation forte de la réalité où elle est liée aux peaux du sandwich. On fait alors référence à plusieurs approches dans lesquelles une période 3D de l'âme est considérée, avec son épaisseur réelle. On cherche alors à prendre en compte de façon approchée ce voisinage des peaux, suivant différents moyens.

Ce problème est complètement absent dans la deuxième famille de méthodes où la cellule 3D comprend à la fois les peaux et l'âme, et traite donc de façon rigoureuse leurs interactions.

L'ensemble des méthodes est récapitulé figure 2.6.

Disposant de plusieurs méthodes pour réaliser l'homogénéisation du panneau alvéolaire, et sachant qu'elles donnent des caractéristiques effectives différentes, nous avons cherché à définir leur domaine de validité. A ce niveau, quelle que soit la méthode considérée (à l'exception de m3b), on a des résultats de convergence (Lewiński et Telega, 1999). Mais ces résultats ne sont finalement pas d'un grand secours, car correspondant à un comportement limite, alors qu'en pratique on a des valeurs finies des petits paramètres  $e$  et  $\varepsilon$ . Une première réponse au problème du domaine de validité des méthodes peut cependant être donnée, de façon intuitive. Ainsi, si les petits paramètres sont du même ordre de grandeur, il paraît raisonnable d'utiliser la deuxième famille de méthode, où les deux petits paramètres tendent ensemble vers 0. Dans le cas contraire, on passera à la limite en premier sur le paramètre le plus petit. Ceci revient à dire que si la période du panneau a la forme d'une plaque mince (respectivement une tranche mince), on s'orientera vers la première famille de méthodes (respectivement la troisième). Alors que si l'épaisseur de la période est comparable à ses dimensions dans le plan, on appliquera la deuxième famille de méthodes. On peut même aller plus loin quant à l'utilisation de la première famille de méthodes, la méthode m1KL étant restreinte à des périodes très élancées, alors que m1RHM et m1RHMB peuvent convenir jusqu'à un élancement de 10 environ. En fait, dès 91, Lewiński (Lewiński, 1991) a proposé un domaine d'application de ces méthodes, qui correspond à celui qui vient d'être énoncé pour les méthodes m1KL, m1RHM, m1RHMB, m3 et m3b. Pour la méthode m2, il affirme qu'elle est valable quelle que soit la forme de la période, pourvu que  $e \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ . Dans l'ouvrage (Lewiński et Telega, 1999), les auteurs indiquent à nouveau que cette méthode constitue *la* référence, toutes les autres pouvant être considérées comme en étant des approximations plus ou moins bonnes. On peut récapituler ces résultats dans le tableau 2.1.

méthode	Principe	Domaine de validité
m1KL	Homogénéisation d'une plaque de KL	$e \ll \varepsilon$
m1RHM	Homogénéisation d'une plaque de RHM	$e \lesssim \varepsilon/10$
m1RHMB	Approximation RHM des problèmes cellulaires de m2	$e \lesssim \varepsilon/10$
m2	$(e, \varepsilon) \rightarrow 0$	$e \ll 1$ et $\varepsilon \ll 1$
m3	Homogénéisation par couche puis $e \rightarrow 0$	$e \gg \varepsilon$
m3b	m3 et hyp. de contraintes planes dans l'homogénéisation	$e \gg \varepsilon$

TAB. 2.1 – *Domaine d'application des méthodes d'homogénéisation*

Au moment où nous avons abordé ces problèmes de plaques périodiques (en 94), la question du choix de la "bonne" méthode d'homogénéisation ne nous paraissait pas tranché clairement. Ceci notamment car seulement un exemple avait fait l'objet de calculs avec les différentes méthodes (plaque symétrique d'épaisseur variable, traitée dans (Lewiński, 1991)). Nous avons donc souhaité approfondir cette question.

D'autre part, la méthode m2 conduisant à des problèmes cellulaires 3D, elle requiert une résolution numérique, même lorsque la plaque est invariante dans une direction (auquel cas les problèmes cellulaires sont 2D). Toutes les autres méthodes donnent des problèmes locaux 2D voire

1D, et dans ce dernier cas on peut obtenir des expressions analytiques des caractéristiques effectives (Lewiński, 1991), (Lewiński, 1995), (Soto et Diaz, 1993). Il nous a donc semblé intéressant de faire une étude comparative des différentes méthodes d'homogénéisation, avec de plus comme objectif d'étudier dans quelles circonstances les méthodes issues des première et troisième familles, pouvaient constituer une bonne approximation de m2.

Ces travaux sont exposés en section 2.3.1.

A l'issue de ces travaux préliminaires, et convaincus de la supériorité de la méthode m2, nous l'appliquerons à différents exemples, cf. section 2.4.1.

D'autre part, en ce qui concerne les coques périodiques, nous avons été amenés à appliquer la méthode m3c, pour des raisons propres au problème traité (structure quasi-périodique en élasto-plasticité) et nous reviendrons sur ce cas en section 2.4.2. Nous ne présenterons pas ici l'homogénéisation des coques périodiques, nous renvoyons pour la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  à (Kalamkarov, 1992), (Parton et Kudryavtsev, 1993), et (Kalamkarov et Kolpakov, 1997), et à (Lewiński et Telega, 1999) pour des approches  $(e \rightarrow 0)$  puis  $(\varepsilon \rightarrow 0)$ .

## 2.2.2 Poutres périodiques en élasticité

On s'intéresse maintenant à une structure élancée, cf. figure 2.7, où sont présentés un treillis périodique et une poutre composite. On a à nouveau un problème avec 2 petits paramètres. Ainsi, dans le cas périodique,  $e(= a/L)$  et  $\varepsilon(= l/L)$  traduisent respectivement la petitesse de la section et de la période devant la longueur  $L$  de la structure, alors que pour la poutre composite  $\varepsilon$  caractérise la finesse des hétérogénéités. Pour le treillis périodique, on a même un troisième petit paramètre  $\delta(= d/l)$ , qui représente l'inverse de l'élancement des poutres constituant la période. Comme dans le cas des plaques, l'existence conjointe de  $e$  et  $\varepsilon$  va donner lieu à plusieurs méthodes d'homogénéisation.

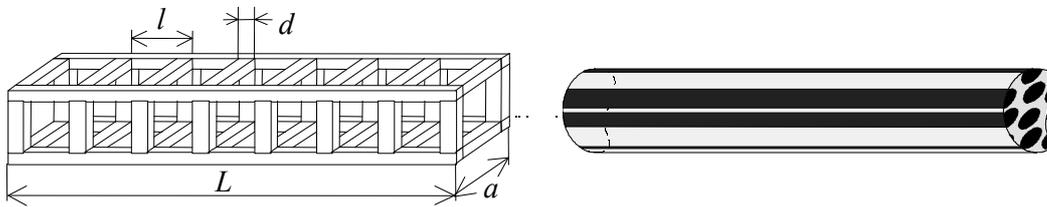


FIG. 2.7 – Exemples de poutres hétérogènes

◇ Première méthode :  $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Le premier passage à la limite  $e \rightarrow 0$  conduit à une poutre de Navier-Bernoulli (notée **NB** par la suite) à caractéristiques périodiques, qui est ensuite homogénéisée. Cette méthode est donc aux poutres le pendant de m1KL développée pour les plaques. Elle est présentée pour des poutres composites à section périodique dans (Tutek, 1987), et pour des poutres à section perforée périodiquement dans (Trabucho et Viaño, 1996). Dans le cas des treillis périodiques, cette méthode est développée dans (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999) et (Miller, 1994) notamment, avec un troisième passage à la limite  $\delta \rightarrow 0$  qui permet d'obtenir une expression analytique des caractéristiques effectives.

◇ Deuxième méthode :  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

Cette méthode a été proposée dans (Jurak et Tutek, 1989) pour les poutres composites. Pour les poutres périodiques, au moment où nous avons abordé leur étude (en 96), nous n'avions pas connaissance d'approche où les passages à la limite sur  $e$  et  $\varepsilon$  étaient effectués simultanément. Nous avons donc transposé la méthode m2 due à Caillerie pour les plaques périodiques, pour obtenir une méthode adaptée à l'étude des poutres. Ce travail a été publié dans (Cartraud, 1997), et il ne nous paraît pas utile d'exposer les détails de cette méthode ici. Retenons simplement que les caractéristiques effectives de la poutre de NB équivalente sont obtenues après résolution de problèmes

cellulaires 3D posés sur la période de la structure. Une fois ces travaux réalisés, nous avons trouvé des références où la même méthode avait déjà été présentée, (Kolpakov, 1991), (Siad *et al.*, 1993) et (Mouftakir, 1996) pour des problèmes plans.

◇ Troisième méthode :  $\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ .

Le second passage à la limite  $e \rightarrow 0$  est réalisé sur une structure 3D élançée à loi de comportement homogénéisée. C'est donc l'équivalent de la méthode m3 exposée auparavant pour les plaques. Elle est appliquée aux poutres composites dans (Geymonat *et al.*, 1987a).

Comme dans le cas des plaques, ces méthodes conduisent en général à des caractéristiques effectives différentes. Ainsi, dans (Geymonat *et al.*, 1987b), les auteurs ont démontré la non commutativité des passages à la limite  $e \rightarrow 0$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  quand la section de la poutre varie selon son axe, cf. aussi (Tutek, 1987). Il y a en revanche commutativité sur le cas de la poutre composite de la figure 2.7, dont la section est invariante (Geymonat *et al.*, 1987b), (Trabucho et Viaño, 1996).

Pour les applications qui nous concernent, c'est-à-dire les poutres périodiques (donc à section variable), il nous a paru nécessaire d'étudier le domaine de validité des 3 méthodes. Comme pour les plaques, on peut donner une réponse a priori sur la base de la valeur de  $e/\varepsilon$ , cf. section 2.1. Ceci nous a permis d'écarter la méthode 3, car pour les applications envisagées, la longueur de la période sera au moins du même ordre de grandeur que les dimensions de sa section. Nous avons donc mené une étude sur le domaine de validité des deux premières méthodes : ( $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) et  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ , que nous présenterons en section 2.3.2.

Nous exposerons alors, en section 2.4.3 des exemples d'application avec la méthode 2, qui s'avère la meilleure.

## 2.3 Etude comparative des méthodes d'homogénéisation

### 2.3.1 Plaques périodiques

Deux études ont été effectuées.

La première a été menée sur un panneau sandwich avec une âme en nid d'abeilles, dont la cellule de base est représentée figure 2.8. Ces résultats ont été partiellement publiés dans (Bourgeois, 1997), (Bourgeois *et al.*, 1998).

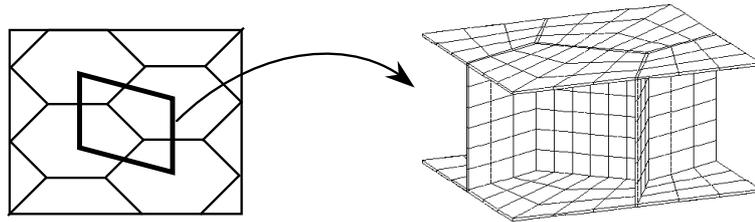


FIG. 2.8 – Période d'un panneau avec une âme en nid d'abeilles, d'après (Bourgeois, 1997)

D'après la forme de cette cellule, on se situe dans un cas où  $e$  et  $\varepsilon$  sont du même ordre de grandeur, car le côté de l'hexagone mesure 50 mm, comme la distance entre les plans moyens des deux parements. Ainsi, d'après le tableau 2.1, seule la méthode m2 s'applique. Il nous a cependant paru intéressant d'étudier les résultats obtenus par les autres méthodes d'homogénéisation.

Sur cet exemple, il faut bien sûr résoudre numériquement les problèmes cellulaires 3D issus de la méthode m2, mais aussi ceux, 2D, issus des première et troisième familles de méthodes. On a donc réalisé l'implémentation numérique des méthodes (m1KL, m2, m3b), soit en utilisant le logiciel Samcef, soit en développant notre programme éléments finis. Ces travaux d'implémentation ont été

effectués en parallèle ou consécutivement à ceux de S. Bourgeois (Bourgeois, 1997), qui a d'autre part implémenté les méthodes m1RHM et m3 dans le logiciel SIC.

Afin de disposer de résultats de référence, des calculs correspondant à un état macroscopique uniforme sont réalisés sur une plaque hétérogène constituée d'un grand nombre de périodes (Bourgeois, 1997). Ceci permet alors l'identification des caractéristiques équivalentes de la plaque, et leur confrontation aux valeurs obtenues par les différentes méthodes d'homogénéisation. Il apparaît alors que c'est la méthode m2 qui fournit les résultats les plus précis avec un écart inférieur à 1,5% par rapport aux caractéristiques équivalentes identifiées. Les autres méthodes étudiées (m1KL, m1RHM, m3 et m3b) fournissent des résultats satisfaisants, et ce d'autant plus que l'épaisseur de l'âme est faible. Les écarts les plus importants sont obtenus sur les rigidités équivalentes en cisaillement dans le plan et en torsion, cf. figure 2.9, où la méthode m2 est prise comme référence, compte tenu des résultats annoncés précédemment. Sur cette figure, on a porté en abscisse l'épaisseur de l'âme en mm, sachant que la cellule de base, cf. figure 2.8 est constituée du même matériau, et que les peaux ont une épaisseur constante de 1 mm.

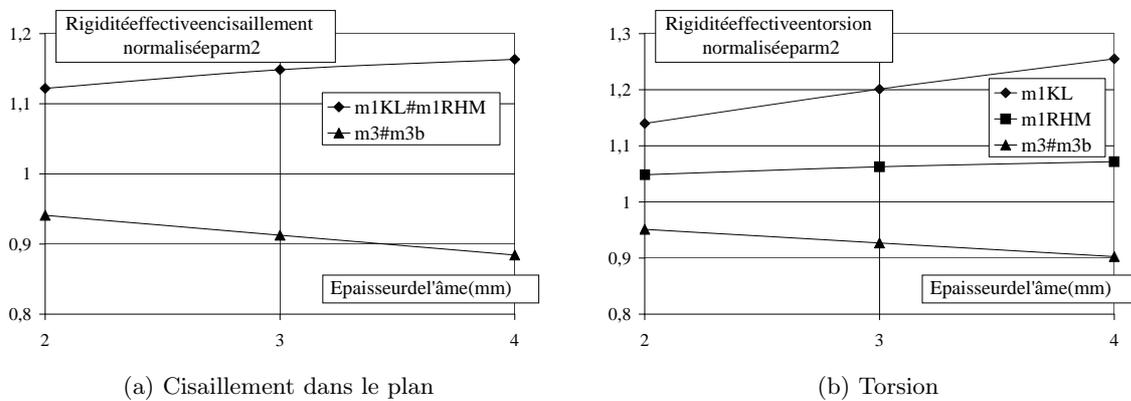


FIG. 2.9 – Comparaison des méthodes pour une épaisseur d'âme variable

Il apparaît en outre que les résultats obtenus par les première et troisième familles de méthodes permettent d'encadrer les résultats provenant de m2, mais il n'est pas possible de donner une démonstration générale de cette propriété, (Kohn et Vogelius, 1984), (Kohn et Vogelius, 1986).

On peut donc retenir de cette première étude que dans le cas où  $e \approx \varepsilon$ , la méthode m2 est très précise, ce qui est conforme aux affirmations de Lewiński. De plus, les résultats issus des première et troisième familles en fournissent une bonne approximation, à condition que l'âme soit peu raide par rapport aux peaux. Cette condition sera le plus souvent satisfaite sur les panneaux sandwich, où le domaine de validité des méthodes (m1KL, m1RHM, m1RHMB, m3 et m3b) peut donc être étendu à  $e \approx \varepsilon$ .

Une deuxième étude a ensuite été réalisée, en vue de comparer les résultats des différentes méthodes, en fonction du rapport  $\varepsilon/e$ , et les résultats correspondants ont été publiés dans (Bourgeois, 1997), (Bourgeois *et al.*, 1998). L'exemple traité ici est celui du panneau à raidissage droit, cf. figure 2.1(a). Le panneau étant invariant dans une direction, on dispose de solutions analytiques pour les méthodes (m1KL, m1RHM, m1RHMB, m3 et m3b), sachant que sur cet exemple on peut montrer que les résultats de m3 coïncident avec ceux de m3b). Cette étude a permis de compléter les résultats de l'étude précédente, à savoir que les écarts sur les méthodes sont négligeables si l'épaisseur de l'âme est faible. En effet, pour une âme dont l'épaisseur est la moitié de celle des peaux, les différences sur les caractéristiques effectives de toutes les méthodes sont inférieures à 2%, pour  $0,1 \leq \varepsilon/e \leq 10$ , sauf pour la rigidité à la torsion de la méthode m1KL. Ces écarts augmentent avec l'épaisseur de l'âme. D'autre part, cet exemple a mis en évidence les limites des approches m3

(=m3b ici), puisque certaines caractéristiques effectives obtenues par cette méthode sont insensibles à l'épaisseur de l'âme (ce résultat découle de la discontinuité de l'âme).

Nous tirerons une conclusion générale sur le bilan comparatif de ces méthodes d'homogénéisation en section 2.3.3, après avoir présenté les résultats relatifs aux poutres périodiques.

### 2.3.2 Poutres périodiques

Un premier résultat intéressant a été obtenu dans (Cartraud, 1997), concernant l'homogénéisation d'un fil hélicoïdal. Sur cet exemple, la longueur de la période est grande par rapport aux dimensions de sa section, avec  $\varepsilon/e \approx 100$ . Nous avons pourtant obtenu un résultat très précis sur les caractéristiques effectives de la poutre, en utilisant la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

Nous avons voulu confirmer ce résultat, en étudiant un treillis de poutres périodiques, (Buannic et Cartraud, 1999). Comme dans le cas des plaques périodiques, on commence par réaliser des calculs sur une structure avec un grand nombre de périodes pour identifier des caractéristiques effectives de référence. Le cas étudié est présenté figure 2.10. La période est constituée de poutres (noeuds rigides). Les poutres constitutives sont en acier, et de section carrée de côté  $d = 0.05m$ . Afin d'étudier l'évolution des résultats en fonction du rapport  $\varepsilon/e (= l/h)$ , la longueur de la période  $l$  varie entre  $h/4$  et  $20h$ , la hauteur  $h$  étant constante, avec  $h = 1m$ . On met en oeuvre sur cet exemple deux méthodes d'homogénéisation :

- approche 1 :  $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et enfin  $\delta \rightarrow 0$  pour tenir compte du grand élancement des poutres de la période, (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999).
- approche 2 :  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ , avec résolution des problèmes cellulaires 3D avec des éléments finis de poutre, (Buannic *et al.*, 1999), et section 3.4.2.

Les résultats obtenus pour la rigidité homogénéisée en flexion  $(EI)_{hom}$  sont présentés en figure 2.10, et confrontés aux valeurs de référence.

Il apparaît clairement que l'approche 1 ne conduit à des résultats satisfaisants que si  $\varepsilon/e \geq 5$ , ce qui correspond bien à  $e \ll \varepsilon$ . On remarque cependant dans ce domaine une majoration de l'ordre de 16% de la rigidité en flexion, cf. figure 2.10. Ce dernier résultat est une conséquence du premier passage à la limite  $e \rightarrow 0$ , qui conduit à un modèle de poutre hétérogène où chaque section droite vérifie les hypothèses de Bernoulli et subit donc un déplacement de solide rigide. Il en résulte une surestimation de la rigidité équivalente en flexion.

Cet inconvénient disparaît dans l'approche 2 où aucune contrainte n'est imposée quant à la déformation des sections de la période. Il s'ensuit que cette seconde méthode, où l'on fait tendre  $e$  et  $\varepsilon$  simultanément vers 0, garde une très bonne précision quel que soit le rapport d'élancement  $\varepsilon/e$  de la période.

Enfin, remarquons que ces résultats apportent une information nouvelle par rapport à ceux donnés dans (Geymonat *et al.*, 1987b). En effet, il y est montré, pour une poutre à section variable, que les comportements limites ( $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) et ( $\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ ) sont différents. Sur l'exemple traité, nous avons des caractéristiques effectives différentes pour ( $e \rightarrow 0$  puis  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) et  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

### 2.3.3 Bilan

Qu'il s'agisse des plaques ou des poutres périodiques, c'est la méthode où les 2 petits paramètres tendent simultanément vers 0 qui s'avère la meilleure. Elle fournit en effet les caractéristiques effectives avec une excellente précision, et ce quelle que soit la valeur du rapport  $\varepsilon/e$ , pourvu que les deux petits paramètres soient petits. Ainsi, sur les différents exemples traités, les résultats obtenus sont conformes aux affirmations de Lewiński (Lewiński, 1991), (Lewiński et Telega, 1999).

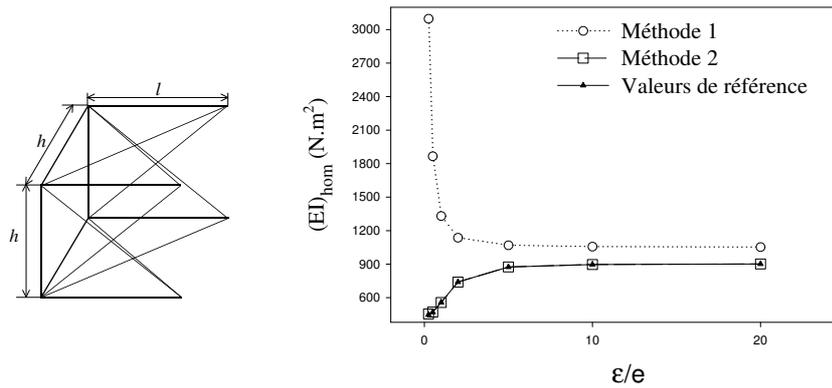


FIG. 2.10 – Période de structure treillis et rigidité de flexion homogénéisée en fonction de  $\epsilon/e$

D'autre part, même si les autres méthodes peuvent dans certains cas donner des bonnes approximations du comportement homogénéisé, on a aussi mis en évidence leurs limites, et notamment leur inaptitude à prendre en compte certaines caractéristiques de la période. De plus, au delà de l'aspect calcul des caractéristiques effectives, ces méthodes sont certainement plus criticables concernant la détermination des contraintes locales. En effet, qu'on applique les méthodes ( $e \rightarrow 0$  puis  $\epsilon \rightarrow 0$ ) ou ( $\epsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ ), on *découple* les phénomènes "dans le plan" (respectivement "dans l'axe") de ceux "dans l'épaisseur" (respectivement "dans la section"). Ceci est évidemment source d'approximations. Au contraire, dans la méthode  $(e, \epsilon) \rightarrow 0$ , les problèmes cellulaires sont 3D, ce qui permet un calcul précis des contraintes locales, n'importe où dans la cellule, et notamment dans des zones critiques (où des effets 3D règnent) telles les jonctions âme-parement dans les panneaux sandwich.

Les problèmes cellulaires étant 3D, il n'est pas possible d'obtenir de solution analytique des caractéristiques effectives. Il faut les résoudre numériquement, mais l'implémentation de cette méthode est facile, voire quasi-immédiate si on part d'un logiciel où l'homogénéisation périodique des matériaux est déjà codée, cf. chapitre 7.

## 2.4 Exemples d'application

### 2.4.1 Plaques périodiques

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons travaillé sur les plaques périodiques en collaboration avec Principia Marine, sur les structures présentées figure 2.1. L'objectif initial était de concevoir de tels panneaux alvéolaires, avec des dimensions dans le plan de plusieurs mètres, susceptibles de remplacer les plaques raidies. Le critère retenu était la rigidité de la structure, en membrane et en flexion (à l'échelle d'un navire, la sollicitation la plus critique est une flexion d'ensemble, qui se traduit à l'échelle locale par une sollicitation en membrane). Pour ce faire, le panneau à raidissage droit a été considéré en premier. En effet, il est facile d'obtenir sur cette géométrie une expression analytique des caractéristiques effectives en utilisant la méthode m1RHMb. Ayant paramétré cette géométrie, une étude de sensibilité a permis de définir les dimensions de la cellule pour obtenir un comportement homogénéisé en membrane et en flexion au moins aussi raide que ceux de la plaque raidie. La géométrie de la cellule des autres panneaux alvéolaires a ensuite été obtenue en prenant une épaisseur de parements identique à celle du panneau à raidissage droit, l'épaisseur de l'âme étant calculée de façon à ce que tous les panneaux aient la même masse surfacique. Ceci donne les cellules présentées figure 2.11, qui sont réalisés en acier.

Nous avons finalement appliqué la méthode m2 à ces différentes cellules, à partir d'un modèle éléments finis 3D.

Il ressort de cette étude que les écarts sur les caractéristiques effectives des cellules de la figure

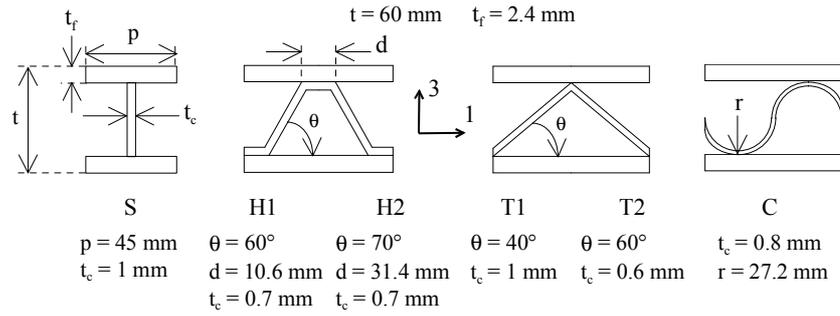


FIG. 2.11 – Période des panneaux alvéolaires étudiés

2.11 sont très faibles (inférieurs à 5%), excepté pour la rigidité en cisaillement dans le plan où ils atteignent 15%. Ceci traduit le rôle prépondérant joué par les parements dans le comportement global du panneau. D'autre part, ces structures ont un comportement en flexion quasi-isotrope, alors que pour le panneau raidi on a une anisotropie assez marquée (rapport de 7 entre les rigidités en flexion selon les raidisseurs et dans la direction perpendiculaire).

Nous avons d'autre part montré la précision de la méthode m2 en comparant les réponses des panneaux hétérogènes 3D et homogénéisés en membrane et flexion pure.

Ces résultats sont détaillés dans (Buannic *et al.*, 2003), joint à ce mémoire. Cette publication, bien que récente, présente des travaux antérieurs à 97, à l'exception d'un exemple de composites, traité à la demande des reviewers, pour avoir une application plus en rapport avec la thématique de la revue.

Pour conclure sur les plaques périodiques, et pour illustrer nos travaux, nous donnons figure 2.12 les déformées obtenues lors de la résolution des problèmes cellulaires. Le cas traité est le panneau sandwich avec une âme en nids d'abeilles à section carrée, cf. figure 2.4, et les résultats présentés correspondent au champ total régnant dans la cellule, et non pas seulement à sa partie périodique, les calculs ont été réalisés avec Samcef, cf. chapitre 7.

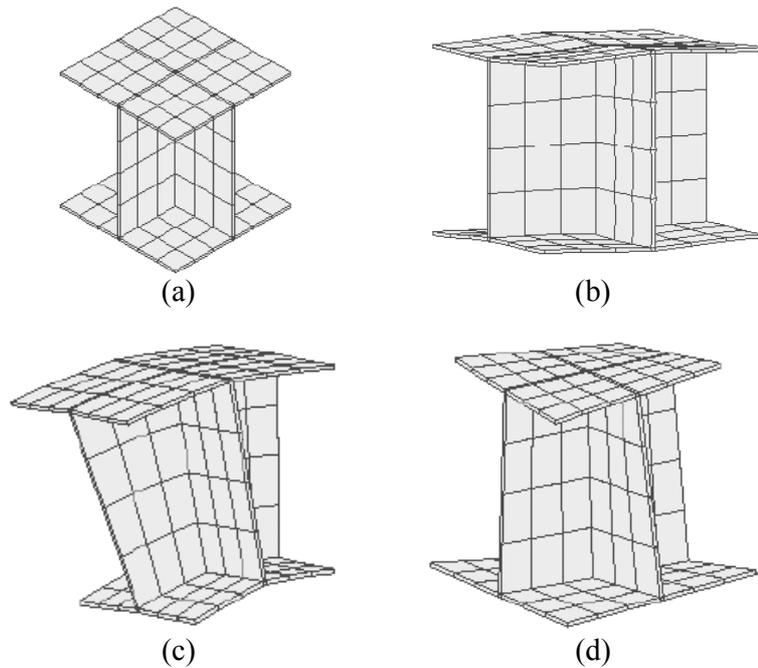


FIG. 2.12 – (a) modèle éléments finis de la période, et déformées obtenues pour les problèmes cellulaires avec une macrodéformation de (b) membrane, (c) courbure, et (d) torsion

### 2.4.2 Coques périodiques

Comme mentionné en introduction à ce chapitre, nous avons été amenés à travailler sur les coques périodiques dans le cadre d'une collaboration avec SNECMA Moteurs (thèse CIFRE de N. Cosme, sous la direction de B. Peseux, co-encadrée par J. Bonini (SNECMA Moteurs) et moi-même). Cette thèse a démarré en novembre 2000.

L'objectif de la thèse est de simuler le comportement d'un moteur complet sur les premiers tours moteur suivant la perte d'aube. Cette perte d'aube dans les soufflantes (aube fan) peut se produire suite à un choc (ingestion d'oiseau par exemple) ou par fatigue. Elle entraîne des sollicitations très critiques dans l'ensemble du moteur, d'où la nécessité de pouvoir disposer d'un modèle numérique prédictif.

Les phénomènes physiques mis en jeu lors de la perte d'aube sont complexes, et donnent lieu à des problèmes fortement non-linéaires. Ils nécessitent des calculs en dynamique rapide, de type explicite (utilisation du code Plexus). En effet, quand une aube se casse, son sommet impacte le carter, elle commence alors à s'enrouler, puis à se fragmenter. Son pied heurte ensuite l'aube adjacente, et il y a par ailleurs propagation d'ondes dans le moteur et des phénomènes de balourd qui provoquent l'excentrement du rotor. La description du processus de perte d'aube et sa modélisation par éléments finis est décrite de façon plus détaillée dans (Cosme *et al.*, 2002).

Dans le cadre de cette thèse, ma contribution concerne la modélisation des aubes du fan. Il s'agit d'aubes dites *creuses*, et dont une vue en coupe a déjà été présentée en introduction à ce chapitre, cf. figure 2.3 et que nous redonnons ci-après figure 2.13(a). Cette technologie d'aube s'est développée car elle permet une augmentation du diamètre du moteur sans en accroître la masse. Cette aube métallique est constituée de deux peaux et d'une âme avec un raidissage en Oméga. L'aube étant vrillée et son épaisseur hors tout variable, ce raidissage n'est pas périodique.

Dans une première phase (Cosme *et al.*, 2002), cette aube a été modélisée de façon fine, avec une description détaillée du raidissage, cf. figure 2.13(a). Ce modèle présente l'inconvénient de conduire à un grand nombre de degrés de liberté, c'est pourquoi il a été décidé de le simplifier.

A ce stade, il est important de souligner que dans l'aube, c'est principalement les peaux, à comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope qui contribuent au comportement d'ensemble de l'aube. Il en résulte qu'il est justifié de faire l'approximation d'un comportement linéaire pour les raidisseurs.

Compte tenu des conclusions de la section 2.3.3, l'idéal serait d'utiliser une coque homogène équivalente, obtenue selon la méthode d'homogénéisation  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ . En effet la hauteur et la largeur de l'aube sont respectivement 20 à 80 fois son épaisseur, et on a un peu plus d'une dizaine de raidisseurs en Oméga selon sa largeur. Cette méthode, dans le cas des coques, est exposée dans (Kalamkarov, 1992), (Parton et Kudryavtsev, 1993), (Kalamkarov et Kolpakov, 1997). Cependant, plusieurs problèmes apparaissent. Tout d'abord, cette approche conduit au premier ordre à un modèle où les effets du cisaillement transverse ne sont pas pris en compte. De plus, compte tenu du comportement élasto-plastique des peaux, il faut déterminer un critère de plasticité pour la coque homogène équivalente. Or, les travaux existants dans ce domaine se limitent à des comportements élasto-plastiques parfaits (Bourgeois, 1997), avec une détermination du critère de plasticité à partir d'un ensemble de points dans l'espace des contraintes intégrées. Ceci passe par la résolution numérique de problèmes cellulaires, ce qui implique ici beaucoup de cellules à traiter compte tenu de l'absence de périodicité. Cette méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  ne sera donc pas utilisée ici, étant donné les difficultés qu'elle engendre.

Ces difficultés résultent de la non-linéarité du comportement des peaux, qui est difficile à prendre en compte de façon globale. C'est pourquoi nous nous sommes orientés vers une approche du type  $(\varepsilon \rightarrow 0$  puis  $e \rightarrow 0$ ), dans laquelle on conservera une description locale des peaux, selon un processus que nous décrivons ci-après.

Dans un premier temps, ce qui peut-être assimilé à l'étape  $\varepsilon \rightarrow 0$ , l'âme est homogénéisée séparément, c'est-à-dire en considérant un motif qui n'intègre pas les raidisseurs. Pour ce faire, on utilise une approche de type Résistance des Matériaux, qui fournit l'expression analytique des caractéristiques élastiques 3D du milieu homogène équivalent, (Ko, 1980). Dans ces travaux, c'est un raidissage périodique qui est considéré. Par conséquent, pour l'aube creuse, les caractéristiques effectives sont calculées pour chaque motif en Oméga, supposé localement périodique. Ces calculs sont très rapides, car analytiques.

Une fois ce milieu homogène équivalent connu, on peut l'utiliser soit dans un modèle volumique cf. figure 2.13(b) (avec 3 éléments volumiques dans l'épaisseur), soit dans un modèle de coque multicouche (avec intégration dans l'épaisseur, cf. ci-après). Le gain en temps de calcul par rapport au modèle détaillé de l'aube creuse cf. figure 2.13(a) est plus important dans le cas du modèle coque que pour le modèle volumique, il reste néanmoins intéressant dans ce dernier cas (environ 40%). Ce gain résulte à la fois d'une réduction du nombre de degrés de liberté, mais aussi de l'augmentation du pas de temps de calcul. En effet, ce dernier est conditionné par la taille du plus petit élément de l'aube. Or, avec une âme homogénéisée, il est plus facile de faire un maillage régulier. On évite ainsi les éléments de petite taille contrairement au modèle détaillé de l'aube creuse cf. figure 2.13.

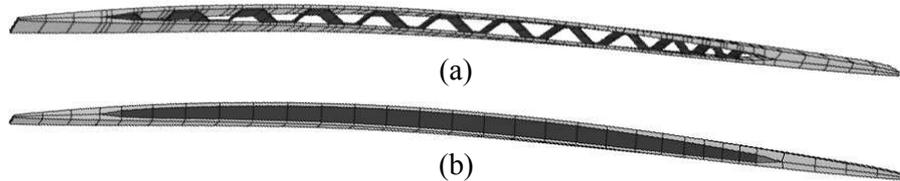


FIG. 2.13 – Modèles élément fini des aubes creuse (a) et homogénéisée (b)

L'intérêt de ces deux modèles homogénéisés est que l'on conserve la description des peaux. Ainsi, il n'y a pas de difficulté pour tenir compte de leur comportement élasto-plastique, puisque cela est directement intégré dans la formulation des éléments finis utilisés. Les seules approximations de ces modèles homogénéisés résident dans les jonctions âme-peaux. Ces approximations ne permettent pas la modélisation des mécanismes de fragmentation de l'aube dus à un flambement des raidisseurs. Cependant, ces mécanismes sont à l'heure actuelle très mal connus, il est donc légitime de simplifier la description de l'âme.

Deux modèles d'aube homogénéisée ont donc été développés. Le premier fondé sur une description volumique, cf. figure 2.13(b), le second en utilisant une coque multicouche. L'intégration dans l'épaisseur est dans ce cas réalisée avec 2 points dans les peaux, et la couche homogène équivalente à l'âme. De plus, dans ce second modèle, on peut utiliser une théorie prenant en compte les effets du cisaillement transverse.

Plusieurs validations de ces deux modèles homogénéisés ont été effectuées.

Tout d'abord, pour valider l'homogénéisation indépendante de l'âme, on a vérifié que la théorie des stratifiés appliquée à la séquence peau/âme homogène équivalente/peau donnait en membrane-flexion des caractéristiques globales très proches de celles obtenues par la méthode de référence  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

D'autres validations sont fondées sur des comparaisons entre les résultats du modèle détaillé de l'aube creuse cf. figure 2.13(a) et les modèles homogénéisés. Les problèmes traités sont l'analyse modale d'une poutre encastée-libre en rotation, et un calcul sur le moteur complet d'autre part pour étudier le comportement en perte d'aube. Des résultats partiels sont présentés dans (Cosme *et al.*, 2003). Ces résultats montrent que les modèles homogénéisés donnent une bonne représentation du comportement d'ensemble des aubes. On a en effet une bonne précision sur les différentes gran-

deux caractéristiques telles que l'excentrement du rotor et les efforts dans les paliers. Les modèles homogénéisés sont moins précis pour la représentation de phénomènes locaux, comme la déformée de l'aube adjacente sous l'impact de l'aube lâchée. Il s'agit là d'une limite classique de l'homogénéisation. Ces derniers résultats sont néanmoins satisfaisants, cf. figure 2.14, où on représente les réponses des modèles 3D hétérogène (aube creuse), et volumique homogénéisé.

En conclusion, ces modèles homogénéisés fournissent des résultats avec une précision satisfaisante. Ils permettent un gain en temps de calcul appréciable, et sont bien adaptés à un calcul d'ensemble sur le moteur.

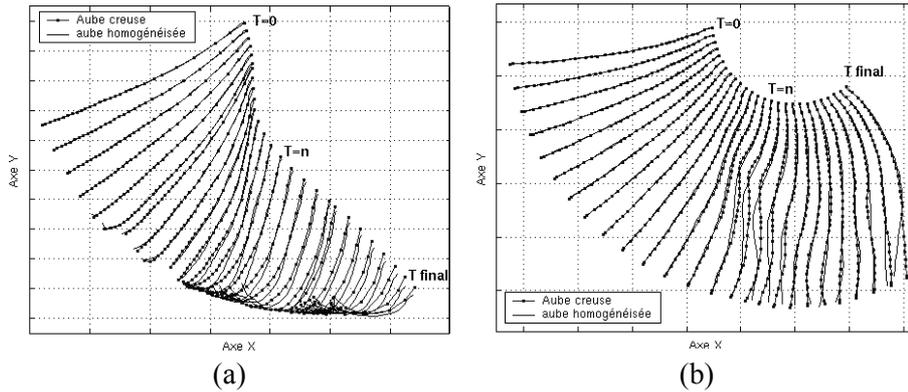


FIG. 2.14 – Comparaison des positions du bord d'attaque au cours du temps.  
aube adjacente

(a) aube lâchée (b)

### 2.4.3 Poutres périodiques

Au départ, en vue de valider la méthode d'homogénéisation  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ , nous avons travaillé sur des exemples pour lesquels nous disposions d'une estimation indépendante des caractéristiques homogénéisées. C'est ainsi que nous avons appliqué cette méthode à un treillis de poutres de type Vierendeel, cf. figure 2.2(a), et à un fil hélicoïdal, cf. (Cartraud, 1997). Nous avons aussi étudié des poutres ondulées, pour lesquelles il existe une solution analytique obtenue par homogénéisation des équations de poutre courbe, (Potier-Ferry et Siad, 1992). Dans tous les cas, la méthode d'homogénéisation  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  a permis d'obtenir les caractéristiques effectives avec une excellente précision.

Nous aurons l'occasion d'exposer des résultats relatifs aux poutres dans la deuxième partie de ce mémoire. Nous ne présentons donc ici qu'un seul exemple, concernant un câble à 6 torons, cf. figure 2.2(b), qui n'a pas encore été publié. Les calculs sont dus à mon collègue T. Messager.

Le cas étudié correspond à un câble métallique, sur lequel on dispose de résultats de référence. Ces derniers proviennent d'un modèle analytique dans lequel les constituants du câble sont décrits par des poutres courbes (Labrosse, 1998) (voir aussi chapitre 8).

Ce câble se caractérise par une âme et des fils hélicoïdaux de rayon 2.675 et 2.59 mm respectivement. L'angle d'enroulement est de  $8.18^\circ$ , ce qui correspond à une longueur de période de 230 mm (ceci donne un rapport  $\varepsilon/e$  égal à 14 environ). Enfin, on prend pour les caractéristiques de l'acier un module d'Young de 200 GPa, et un coefficient de Poisson de 0.3. Nous utilisons un modèles éléments finis 3D, la figure 2.15 donnant une vue du maillage utilisé. On note qu'il existe une ligne de noeuds en commun au niveau des contacts âme-fils (il est justifié de ne pas considérer le contact entre les fils hélicoïdaux). Une étude de sensibilité effectuée par ailleurs a montré que les hypothèses sur le contact âme-fils ont une influence négligeable sur le comportement global du câble en chargement axial. On supposera donc pour simplifier le contact collant.

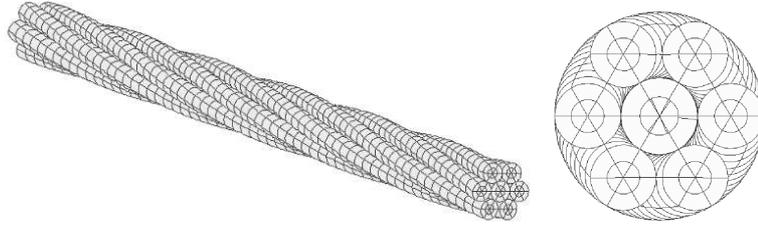


FIG. 2.15 – Modèles élément fini de la période du câble

Les calculs ont été réalisés avec le logiciel Samcef (cf. chapitre 7) et le tableau 2.2 compare les caractéristiques effectives (en traction, torsion et couplage traction-torsion) de la méthode d'homogénéisation périodique et du modèle analytique. On constate un écart très faible.

Rigidité effective	Traction (N)	Torsion (N.m <sup>2</sup> )	Couplage (N.m)
Homogénéisation	$2.86E + 07$	53.5	$1.82E + 04$
Modèle analytique	$2.90E + 07$	52.9	$1.86E + 04$

TAB. 2.2 – Caractéristiques équivalentes du câble métallique

## 2.5 Conclusion

Nos travaux sur les structures minces périodiques, présentés dans ce chapitre, ne sont pas de nature théorique, puisque nous n'avons pas proposé de méthode d'homogénéisation originale. Notre apport se situe davantage au niveau de la mise en oeuvre d'un grand nombre de méthodes existantes, en vue de les comparer et de préciser leur domaine d'application. Ceci a nécessité des développements numériques importants (sur lesquels nous reviendrons en partie au chapitre 7) pour la résolution par éléments finis des problèmes cellulaires. Nous avons ainsi pu utiliser ces méthodes sur des exemples variés, alors que les applications traitées dans la littérature étaient assez peu nombreuses, ou restreintes à des cas académiques (à l'exception de travaux sur les plaques figurant dans (Salha, 1988)).

Compte tenu des résultats obtenus, nous pouvons affirmer, comme Lewiński pour les plaques (Lewiński, 1991), (Lewiński et Telega, 1999), que pour les structures minces périodiques, le problème du choix de la méthode d'homogénéisation ne se pose plus, et qu'il faut appliquer la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ .

Cette méthode fondée sur la méthode des développements asymptotiques, donne au *premier ordre* un modèle macroscopique de type KL pour les plaques, et NB pour les poutres. Il s'agit de la meilleure méthode d'homogénéisation, parmi celles que nous avons étudiées, dans le sens où c'est celle qui donne avec la plus grande précision les caractéristiques effectives en membrane-flexion pour les plaques, ou en traction-flexion-torsion pour les poutres. Ses seules restrictions sont  $e \ll 1$  et  $\varepsilon \ll 1$ .

Il paraît naturel maintenant de donner un sens plus précis à ces conditions et de s'interroger sur le domaine de validité de la solution homogénéisée obtenue avec cette méthode. Ceci revient à estimer l'écart, sur un problème aux limites, entre les solutions homogénéisée et hétérogène 3D. De ce point de vue, dans le cas des plaques, l'approche préconisée paraît moins riche que les méthodes m1RHM ou m3c qui conduisent à une plaque homogène équivalente selon une théorie prenant en compte les effets du cisaillement transverse. Cette faiblesse n'est qu'apparente, car ces méthodes donnent une mauvaise approximation de la rigidité en cisaillement transverse, ce qui résulte directement du fait que les effets dans le plan et hors du plan  $y$  sont découplés, cf. section

2.3.3. Ceci a d'ailleurs été illustré dans (Buannic *et al.*, 2003) (joint à ce mémoire) où la méthode m1RHM, appliquée aux panneaux alvéolaires, a fourni des résultats très éloignés des caractéristiques équivalentes identifiées par ailleurs.

Ainsi, dans les situations où la solution homogénéisée obtenue avec la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  s'avérera imprécise, il n'y a pas d'amélioration à attendre avec l'utilisation d'une autre méthode d'homogénéisation. La solution consiste à appliquer la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  et à prendre en compte des termes supplémentaires du développement asymptotique. On peut ainsi restituer des effets d'ordre supérieur, comme nous l'illustrerons dans la 2<sup>ème</sup> partie de ce mémoire.

# Bibliographie

- Bourgeois, S. (1997). *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse, Université Aix-Marseille II.
- Bourgeois, S., Cartraud, P., et Débordes, O. (1998). Homogenization of periodic sandwiches. A. Vautrin, éditeur, *Mechanics of sandwich structures*, 131–138. Kluwer.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (1999). Etude comparative de méthodes d'homogénéisation pour des structures périodiques élancées. *Actes du 14ème Congrès Français de Mécanique - Toulouse*.
- Buannic, N., Cartraud, P., et L'Hostis, G. (1999). Homogénéisation de structures ou matériaux constitués de poutres. *Actes du 4ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*.
- Buannic, N., Cartraud, P., et Quesnel, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, **59**, 299–312.
- Caillerie, D. (1984). Thin elastic and periodic plates. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **6**, 159–191.
- Caillerie, D. (1985). Non homogeneous plate theory and conduction in fibered composites. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 1–62. Springer-Verlag.
- Cartraud, P. (1997). Homogénéisation d'une poutre hétérogène selon son axe, de section et de période de dimensions comparables. *Actes du 3ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, 265–270.
- Cioranescu, D. et Saint Jean Paulin, J. (1999). *Homogenization of Reticulated Structures*. Springer.
- Cosme, N., Chevrollet, D., Bonini, J., Peseux, B., et Cartraud, P. (2002). Prediction of transient engine loads and damage due to hollow fan blade-off. *Revue Européenne des Eléments Finis*, **11**, 651–666.
- Cosme, N., Cartraud, P., Peseux, B., Bonini, J., et Chevrollet, D. (2003). Application d'une technique d'homogénéisation à l'étude de la perte d'aube creuse en dynamique rapide. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume II, 181–188.
- Duvaut, G. (1976). Analyse fonctionnelle des milieux continus. Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation. W. Koiter, éditeur, *Theoretical and applied mechanics*. North-Holland.
- Geymonat, G., Krasucki, F., et Marigo, J. (1987a). Stress distribution in anisotropic elastic beams. P. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, éditeurs, *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, 119–133. Masson.
- Geymonat, G., Krasucki, F., et Marigo, J. (1987b). Sur la commutativité des passages à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *C.R.Acad.Sci. Ser. I*, **305**, 225–228.
- Hohe, J. et Becker, W. (2002). Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties. *Appl. Mech. Rev.*, **55**, 61–87.
- Jurak, M. et Tutek, Z. (1989). A one-dimensional model of homogenized rod. *Glasnik Matematički*, **24**, 271–290.
- Kalamkarov, A. (1992). *Composite and reinforced elements of construction*. Wiley.
- Kalamkarov, A. et Kolpakov, A. (1997). *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Wiley.

- Ko, W. (1980). Elastic constants for superplastically formed/diffusion-bonded sandwich structures. *A.I.A.A. J.*, **18**, 986–987.
- Kohn, R. et Vogelius, M. (1984). A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids Structures*, **20**, 333–350.
- Kohn, R. et Vogelius, M. (1986). Thin plates with rapidly varying thickness, and their relation to structural shape optimization. J. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, et J. Lions, éditeurs, *Homogenization and effective moduli of materials and Media*, 126–149. Springer.
- Kolpakov, A. (1991). Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *J. Appl. Math. Mech.*, **55**, 358–365.
- Labrosse, M. (1998). *Contribution à l'étude du rôle du frottement sur le comportement et la durée de vie des câbles monocouches*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Lewiński, T. (1991). Effective models of composite periodic plates - Part III. two-dimensional approaches. *Int. J. Solids Structures*, **27**, 1185–1203.
- Lewiński, T. (1992). Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. *Int. J. Solids Structures*, **29**, 309–326.
- Lewiński, T. (1995). Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure. *Int. J. Solids Structures*, **32**, 3261–3287.
- Lewiński, T. et Telega, J. (1999). *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. World Scientific.
- Miller, R. (1994). The eigenvalue problem for a class of long, thin, elastic structures with periodic geometry. *Q. Appl. Math.*, **52**, 261–282.
- Mouftakir, L. (1996). *Homogénéisation de structures ondulées*. Thèse, Université de Metz.
- Noor, A., Burton, W., et Bert, C. (1995). Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, **155**, 155–199.
- Parton, V. et Kudryavtsev, B. (1993). *Engineering Mechanics of Composite Structures*. CRC Press.
- Potier-Ferry, M. et Siad, L. (1992). Homogénéisation géométrique d'une tôle ondulée. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **314**, 425–430.
- Salha, B. (1988). Eléments pour une théorie de plaques hétérogènes. *Note technique HI-71/6054, EDF/DER, Service IMA, Département MMN*.
- Siad, L., Potier-Ferry, M., et Mouftakir, L. (1993). Homogénéisation géométrique d'un poutre épaisse ondulée. *Actes du 1er Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume vol. 1, 171–177. Hermès.
- Soto, C. et Diaz, A. (1993). On the modelling of ribbed plates for shape optimization. *Struct. Optim.*, **6**, 175–188.
- Trabucho, L. et Viaño, J. (1996). Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487–974. North-Holland.
- Tutek, Z. (1987). A homogenized model of a rod in linear elasticity. P. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, éditeurs, *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, 316–331. Masson.

## Chapitre 3

# Milieux poreux

### 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'homogénéisation des milieux fortement poreux, c'est-à-dire les milieux constitués d'un assemblage périodique de structures minces (on pourrait aussi parler de milieux réticulés).

De tels milieux existent pour des applications de type **structures minces périodiques** (cf. figure 3.1(a)), il s'agira alors de construire des modèles approchés de type 2D ou 1D. Ces structures très légères sont principalement rencontrées dans le domaine du génie civil. Nous nous y sommes intéressés quand nous avons abordé l'étude des panneaux alvéolaires. En effet, cf. figure 2.1 du chapitre 2, la trace dans un plan vertical de ces panneaux présente des similitudes avec les structures de la figure 3.1(a).

Les **matériaux cellulaires** (cf. figure 3.1(b)) fournissent d'autres types de milieux fortement poreux, auquel cas c'est un milieu homogène équivalent 3D qui sera recherché. L'ouvrage de Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997) donne de nombreux exemples de ces matériaux, dont l'utilisation est en augmentation constante, en raison notamment de leur faible poids et de leur grande capacité d'absorption d'énergie.

Ces deux cas de structures minces et de matériaux poreux seront traités dans ce chapitre, dans le cadre de l'élastostatique linéaire. Notre objectif ici est d'étudier les méthodes développées pour la modélisation simplifiée des milieux poreux, en cherchant à les améliorer. Certaines de ces méthodes sont propres à ces milieux. D'autres sont plus générales : il s'agit de l'homogénéisation périodique, présentée pour les structures minces au chapitre 2, et considérée comme classique dans le cas des matériaux. Cependant, le caractère général de ces méthodes (i.e. les problèmes cellulaires sont définis sur une période 3D) les rend mal adaptées à l'étude des milieux poreux. Nous présenterons donc une approche pour remédier à ce problème.

Nous aurions pu intituler ce chapitre milieux discrets, mais cette appellation sous-entend l'utilisation d'un formalisme discret pour la description de ces milieux. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser l'appellation milieux poreux, qui nous paraissait plus neutre de ce point de vue.

### 3.2 Quelques repères bibliographiques

Notre propos n'est pas ici de faire une analyse bibliographique exhaustive du sujet, mais de faire état des principales approches rencontrées dans la littérature pour l'homogénéisation des milieux fortement poreux. Nous pourrons ainsi situer les domaines où nous avons cherché à apporter une contribution.

Nous distinguerons les applications structures minces, et les matériaux cellulaires.

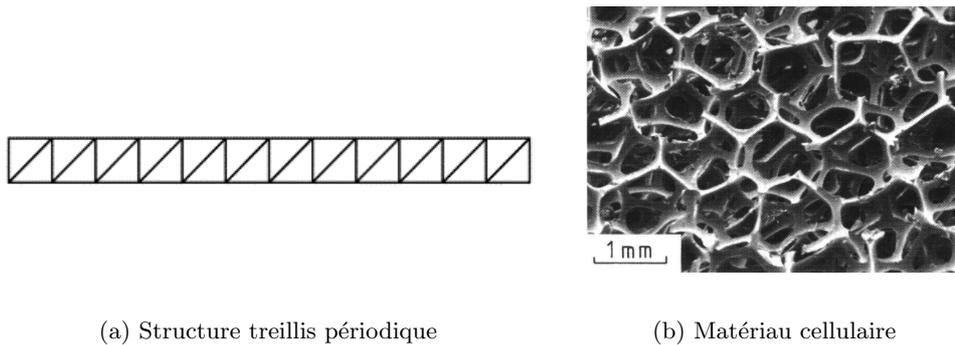


FIG. 3.1 – Exemples de milieux poreux

### 3.2.1 Applications structures minces

Dans le domaine des structures discrètes (treillis de barres ou de poutres à comportement global de type plaque ou poutre), nous mentionnons plus particulièrement comme références l'article de synthèse de Noor (Noor, 1988), la thèse de Verna (Verna, 1991), où est faite une analyse minutieuse de nombreux articles, et (Tollenaere, 1994). Le plus grand nombre des articles est consacré à l'analyse modale. Suivant Noor, on recense 4 grandes catégories de méthodes.

◇ La méthode directe, qui consiste simplement en une analyse éléments finis détaillée de la structure, avec un modèle constitué d'éléments de type barre, poutre, ou plaque. Cette approche souffre des inconvénients classiques: temps de réalisation du maillage et du calcul, difficulté pour analyser les résultats de façon globale.

◇ La méthode dite des structures périodiques, fondée sur les matrices de transfert. On trouvera des applications récentes de cette méthode dans (Stephen, 1999) et (Lee, 2000).

◇ La méthode des champs discrets qui, comme son nom l'indique, considère comme point de départ une *formulation discrète* du problème. Les équations d'équilibre sont en effet écrites aux noeuds de la cellule, ces équations faisant intervenir, via la loi de comportement des constituants (de type barre ou poutre), les variables cinématiques des noeuds voisins de la cellule. On obtient alors des équations aux différences finies, qui sont résolues sous cette forme, ou de façon approchée en introduisant un développement de Taylor pour exprimer les variables cinématiques des noeuds voisins de la cellule. On trouvera un exposé détaillé de la méthode dans (Tollenaere, 1994) et (Karpov *et al.*, 2002a). On peut noter que dans le cas de la périodicité 1D, Renton (cf. par exemple (Renton, 1984)) a montré que les solutions élémentaires de ces équations aux différences finies se décomposent en des solutions à décroissance exponentielle (correspondant pour la poutre à un état d'auto-contrainte), et des solutions polynômiales de degré  $\leq 3$  associées à des sollicitations de traction, torsion, flexion et cisaillement appliquées aux extrémités de la poutre. Enfin, récemment, il a été proposé dans (Karpov *et al.*, 2002b) d'utiliser une transformée de Fourier discrète pour résoudre les équations aux différences finies.

◇ Les approches de substitution par un milieu continu. Noor (Noor, 1988) définit ainsi les approches dans lesquelles la structure initiale est remplacée par un milieu continu équivalent, sachant que cette équivalence peut être définie sur les relations constitutives, ou les énergies. Il inclut à juste titre dans ces approches l'homogénéisation périodique. Par souci de clarté, nous distinguerons par la suite :

- les méthodes où on fait une hypothèse a priori sur la forme du milieu continu, dont les caractéristiques effectives sont ensuite recherchées par une méthode d'équivalence. Nous appellerons ces méthodes *milieu continu équivalent*. Nous reviendrons de façon plus détaillée sur ces méthodes en section 3.3, et nous présenterons une approche que nous avons développée dans ce cadre.
- les méthodes d'homogénéisation.

Parmi ces méthodes d'homogénéisation, on peut distinguer deux catégories :

- les approches milieu continu, dont le point de départ est la *formulation 3D* du problème. Nous avons exposé ces méthodes dans le chapitre 2, et nous n'y revenons pas ici. Rappelons simplement le résultat principal obtenu : la méthode d'homogénéisation qui a le plus grand domaine de validité est celle où on fait tendre simultanément vers 0 les deux petits paramètres du problème :  $e$ , l'inverse de l'élanement de la structure, et  $\varepsilon$ , l'inverse du nombre de périodes (cas de la périodicité 1D). Il s'ensuit des problèmes cellulaires 3D dont la résolution fournit les caractéristiques effectives de la structure.

Nous exposerons en section 3.4 comment nous avons adapté cette méthode d'homogénéisation à l'étude de périodes constituées de barres ou de poutres.

- l'homogénéisation des milieux discrets, qui considère initialement la *formulation discrète* du problème. Cette méthode, pour les applications qui nous concernent ici a été développée il y a un peu plus de 10 ans maintenant. Elle a été initiée à Grenoble : 3 thèses (Verna, 1991), (Tollenaere, 1994), (Moreau, 1996) y ont été consacrées, sous la direction de D. Caillerie, et cette équipe est encore active dans ce domaine aujourd'hui. Cette méthode a été tout d'abord appliquée à des treillis de barres à comportement global 1D en statique (Verna, 1991), puis en dynamique (Tollenaere, 1994). Dans (Moreau, 1996), sont traités le cas des grands déplacements, et des structures avec périodicité 2D.

Les étapes essentielles de cette méthode sont les suivantes.

On démarre comme dans la méthode des champs discrets en écrivant les équations d'équilibre aux noeuds d'une cellule, et la loi de comportement de ses constituants. On cherche alors les déplacements des noeuds de la cellule sous la forme d'un développement asymptotique en puissance de  $\varepsilon$  qui caractérise le rapport des dimensions de la cellule et de la structure. Les déplacements des cellules adjacentes sont alors déduits des précédents grâce à un développement de Taylor, ce qui suppose implicitement que le champ discret est la trace d'un champ continu dérivable, (Pradel, 1998), (Boutin et Hans, 2003). On remarque que contrairement aux approches d'homogénéisation de milieu continu fondées sur des développements asymptotiques, il n'y a pas ici de notion de double échelle, ni de périodicité locale, puisqu'on travaille au niveau discret. On peut aussi noter que ce formalisme discret revient à faire tendre vers 0 en premier le petit paramètre représentant l'inverse de l'élanement des constituants de la cellule.

Les étapes suivantes de la méthode consistent à préciser l'ordre de grandeur de la raideur des barres et du chargement extérieur en fonction de  $\varepsilon$ , puis à résoudre les équations obtenues à chaque ordre en  $\varepsilon$ . Signalons que dans le cas de chargements extérieurs polynômiaux, il est possible d'obtenir la solution exacte du problème, suivant différentes techniques (Verna, 1991), (Moreau, 1996). On peut aussi chercher à définir des caractéristiques équivalentes de poutre, auquel cas il est nécessaire de combiner les équations obtenues en fonction des parties

symétrique et anti-symétrique des déplacements aux noeuds.

Cette méthode présente l'avantage d'être rigoureuse, et la prise en compte des termes d'ordre supérieur des développements asymptotiques permet d'améliorer la précision de la solution. Une extension de cette méthode a été proposée récemment pour l'étude du comportement vibratoire d'un treillis de poutres à comportement global 1D (Boutin et Hans, 2003). Les auteurs envisagent différents ordres de grandeur pour les rigidités de traction et flexion des poutres constituant la cellule, ce qui influe sur le comportement limite obtenu.

L'inconvénient de cette méthode réside au niveau de sa mise en oeuvre, qui est lourde, même si on cherche à adopter une approche matricielle (Tollenaere, 1994), (Moreau, 1996). Il faut en effet reprendre la mise en équations dès qu'on effectue une modification sur la cellule. C'est principalement pour cette raison que nous n'avons pas utilisé cette méthode.

Notre objectif est en effet de disposer d'une méthode suffisamment générale. Ainsi, si on considère les cellules de deux structures différentes, on veut appliquer de la même façon cette méthode, et seuls changeront les modèles éléments finis de ces cellules lors de la résolution des problèmes locaux. C'est pourquoi nous nous situons dans le cadre de l'homogénéisation des milieux continus, et présenterons en section 3.4 une méthode pour l'homogénéisation de structures minces fortement poreuses.

### 3.2.2 Applications matériaux cellulaires

On s'intéresse maintenant à des matériaux fortement poreux, et on parlera de matériaux cellulaires. Un exemple de ces matériaux a été donné figure 3.1(b), et notre objectif est ici de définir un milieu homogène équivalent, dans le cadre de l'élasticité linéaire. A la différence des cas étudiés en section 3.2.1, c'est maintenant une loi de comportement 3D qui est recherchée.

Dans le domaine des matériaux cellulaires, l'ouvrage de référence est celui de Gibson et Ashby (Gibson et Ashby, 1997), dans lequel sont rassemblés de nombreux travaux relatifs à différents problèmes de l'ingénieur : élasticité, ruine plastique, rupture, flambement, absorption d'énergie...

Au niveau de leur microstructure, ces matériaux très peu denses sont constitués de structures minces. On peut les décomposer en 2 classes : les matériaux à cellule ouverte et ceux à cellule fermée, cf. figure 3.2 où on donne l'exemple d'une cellule cubique d'un matériau périodique. Dans le premier cas, la matière est concentrée sur les arêtes des cellules, dont la section est de dimensions négligeables par rapport à la longueur. Pour les matériaux à cellule fermée, la cellule est constituée d'un assemblage de parois minces.

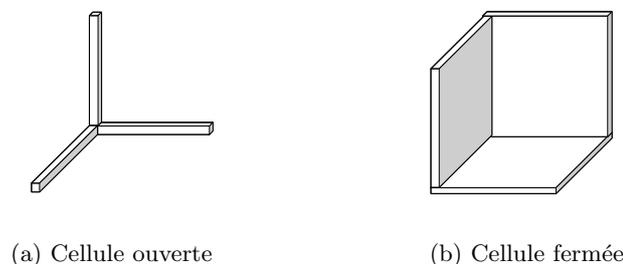


FIG. 3.2 – Exemples de cellules de base de matériau cellulaire périodique

En général, les caractéristiques effectives de ces matériaux sont exprimées en fonction de leur densité. Une loi d'échelle, reliant une rigidité équivalente à celle du matériau constitutif et à la densité a pour expression générale  $a^{hom}/a_{mat} \propto \tau^n$  où  $\tau$  désigne la densité, et où l'exposant  $n$  est

fonction des mécanismes de déformation élémentaires mis en jeu au niveau local (Grenestedt, 1999). Ainsi, en 3D,  $n = 1$  pour les cellules ouvertes ou fermées travaillant en traction-compression,  $n = 2$  pour les cellules ouvertes travaillant en flexion, et  $n = 3$  pour les cellules fermées travaillant en flexion. Evidemment, ce type de résultat doit être formulé sur chacune des constantes indépendantes qui permettent de caractériser le comportement global du matériau (les matériaux cellulaires sont le plus souvent isotropes, ou à symétrie cubique). Autrement dit, il est possible d'avoir différentes valeurs de l'exposant  $n$  pour un même matériau.

Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour la détermination des caractéristiques effectives d'un matériau cellulaire. Un aperçu de ces méthodes est donné dans (Pradel, 1998), et certaines d'entre elles ont déjà été présentées dans la section précédente. On distingue :

- des méthodes d'équivalence. Une période est étudiée, et soumise à un état macroscopique élémentaire. Le problème local est ensuite traité par une approche de type Résistance des Matériaux (poutre ou plaque). On applique soit une déformation macroscopique (Warren et Kraynik, 1997), (Ostoja-Starzewski, 2003), soit une contrainte macroscopique (Gibson et Ashby, 1997), (Zhu *et al.*, 1997), et les caractéristiques effectives sont calculées par une équivalence sur les énergies (Ostoja-Starzewski, 2003), (Zhu *et al.*, 1997) ou sur les relations constitutives (Gibson et Ashby, 1997), (Warren et Kraynik, 1997). Dans le cas où on applique une déformation macroscopique, on utilise en fait l'approche en déformations de la théorie des modules effectifs (Warren et Kraynik, 1997). Alors que lorsqu'on applique une contrainte macroscopique, on considère des efforts appliqués à l'infini sur un échantillon constitué d'un grand nombre de périodes, et on se ramène à des efforts sur le contour d'une période, en tirant profit de la nature discrète de son contour et des propriétés de symétrie. Ce dernier type d'approche a donc ses limites, et ne garantit pas que les conditions aux limites appliquées soient équivalentes à des conditions aux limites périodiques. Enfin, pour certains types de sollicitations, des méthodes énergétiques sont utilisées pour obtenir des bornes sur les caractéristiques effectives, cf. (Gibson et Ashby, 1997) pour le nid d'abeilles en cisaillement hors plan. Dans tous ces travaux, la forme du comportement macroscopique est postulée, sachant qu'on a le plus souvent un milieu continu classique de Cauchy. On renvoie à (Ostoja-Starzewski, 2003) pour les milieux continus micropolaires.
- des travaux où on cherche à prendre en compte le caractère aléatoire de la géométrie des matériaux cellulaires. Ainsi, un réseau de barres d'orientation quelconque, et ne travaillant qu'en tension, est étudié dans (Christensen, 2000) pour décrire le comportement macroscopique d'un matériau isotrope. Dans (Warren et Kraynik, 1988), les auteurs considèrent une cellule constituée de 4 poutres, et pour obtenir les caractéristiques effectives d'un matériau à comportement macroscopique isotrope, ils orientent cette cellule de façon équiprobable dans toutes les directions de l'espace.
- les méthodes d'homogénéisation, qui sont à nouveau de 2 types selon la formulation des problèmes hétérogènes.

Les approches milieu continu, où on part d'une formulation 3D du problème. On a cette fois-ci 2 petits paramètres,  $\varepsilon$ , associé à la taille de la période relativement à celle du domaine 3D étudié, et  $\delta$ , qui représente l'inverse de l'élançement de ses constituants. Le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  conduit à des problèmes cellulaires 3D, qu'on peut résoudre tels quels (L'Hostis, 1996), ou après simplification en tenant compte de la petitesse de  $\delta$ . Cette dernière opération peut être effectuée de façon mathématique (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), (L'Hostis *et al.*, 1998), ou mécanique en reformulant les problèmes cellulaires sur un assemblage de

poutres (Kalamkarov et Kolpakov, 1997), (Buannic *et al.*, 1999), (Laroussi *et al.*, 2002), ou de plaques.

Nous y reviendrons de manière plus détaillée en section 3.4.

L'homogénéisation des milieux *discrets*, dans laquelle on procède en tout point de la façon exposée en 3.2.1. Citons (Pradel, 1998), où l'auteur traite l'homogénéisation d'un matériau constitué de poutres de Bernoulli, et obtient un milieu homogène équivalent de Cauchy ou de Cosserat suivant les ordres de grandeur des rigidités de traction et de flexion des poutres.

C'est dans le cadre des approches milieu continu que nous avons travaillé, en proposant une méthode numérique efficace pour le calcul des caractéristiques effectives du matériau. Cette méthode sera exposée en section 3.4. Il s'agit d'une simple extension des travaux que nous avons développés à l'origine pour les structures minces périodiques.

### 3.3 Modélisation continue équivalente d'un treillis de barres

Nous rappelons que nous qualifions de modélisation continue équivalente les approches dans lesquelles la forme du milieu continu est supposée a priori, ses caractéristiques effectives étant alors à déterminer.

Nous avons choisi d'étudier ces méthodes car outre l'aspect simplification de modèles, elles nous paraissaient très bien adaptées à une phase d'avant-projet de conception de structures périodiques telles que les panneaux alvéolaires. En effet, ces méthodes permettent de faire un calcul facile et rapide des caractéristiques équivalentes de la structure, d'où la possibilité de mener une étude de sensibilité en fonction des paramètres géométriques et matériels de la cellule. Nous avons travaillé sur ces méthodes pendant la période 94-97, avec l'encadrement d'un D.E.A. par an.

Plusieurs types d'approches rentrent dans cette famille de méthodes, cf. (Noor, 1988), et nous nous intéressons ici à celles où l'équivalence entre le milieu continu et le milieu d'origine porte sur l'énergie de déformation (on se restreindra à la statique par souci de simplicité). Nous présentons en annexe A la méthode classiquement rencontrée dans la littérature. Nous l'analysons de façon critique, et nous présentons les améliorations que nous avons voulu lui apporter, sans trop rentrer dans les détails des calculs, qui figurent dans (Burgardt et Cartraud, 1999).

Nous résumons ici les points essentiels de notre travail.

Les principales étapes de cette méthode sont (Noor, 1988) :

1. Faire une hypothèse sur la forme du milieu continu équivalent.
2. Isoler une période.
3. Définir une approximation de la cinématique de la période.
4. Identifier les déformations du milieu continu équivalent.
5. Calculer ses caractéristiques effectives en utilisant l'équivalence énergétique.

A l'étape 1, nous appliquons la méthode classique telle quelle, et dans le cas d'un treillis de barres à comportement global 1D, nous faisons l'hypothèse que le milieu continu équivalent est une poutre de Timoshenko.

Considérons à titre d'exemple le comportement dans le plan des périodes constituées d'un assemblage de barres données figure 3.3, et dont la poutre de Timoshenko équivalente est recherchée.

A l'étape 3, les approches classiques consistent :

- soit à définir le champ de déplacement par un développement de Taylor d'un champ approché dans une section (Noor et Russel, 1986);

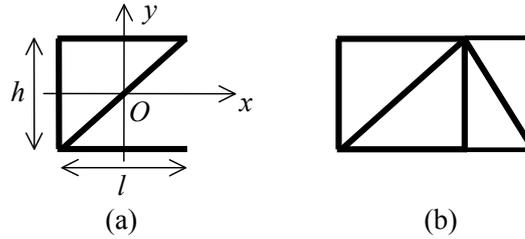


FIG. 3.3 – Cellules d'un treillis périodique à (a) 1 baie, (b) 2 baies

- soit à effectuer un développement polynômial en  $x$  et en  $y$ , dont le nombre de termes est égal au nombre de degrés de liberté de la période (Dow et Huyer, 1989).

Dans les deux cas, on aboutit pour une cellule à 2 baies à un champ quadratique en  $x$ , alors que le champ de déplacement exact dans les barres est linéaire. Nous avons donc proposé une nouvelle approximation de la cinématique, qui prenne au mieux en compte cette propriété.

D'autre part, à l'étape 4, nous avons utilisé l'expression de l'énergie de déformation du milieu continu pour définir les variables macroscopiques de la poutre. On obtient ainsi que les déformations et contraintes intégrées macroscopiques sont les moyennes de leurs homologues microscopiques. Cette définition est d'une part plus rationnelle que celle utilisée dans les travaux cités auparavant (où les déformations macroscopiques sont définies par leur valeur au centre de la cellule), et aussi plus riche car les contraintes intégrées macroscopiques sont explicitées.

Enfin, à l'étape 5, lors du calcul des caractéristiques effectives, on a montré que l'on pouvait prendre en compte de façon rigoureuse la périodicité de la structure, sur les déformations et les contraintes. On a d'autre part mis en évidence les approximations sous-jacentes à certaines méthodes rencontrées dans la littérature.

On peut présenter les travaux effectués comme un développement d'une version discrète de la méthode des moyennes en homogénéisation périodique (Suquet, 1985). On a en effet une méthode périodique, et deux autres méthodes de type modules effectifs, en déformations et en contraintes. De plus, dans les 3 cas, la version poutre de l'égalité de macro-homogénéité de Hill-Mandel est respectée.

Comme le milieu est périodique, on doit évidemment appliquer la méthode périodique, auquel cas, on peut résumer notre contribution dans le domaine de la modélisation continue équivalente d'un treillis de barres à :

- l'amélioration de l'approximation du champ de déplacement en adoptant une approximation linéaire dans chaque baie;
- la rationalisation de la définition des grandeurs macroscopiques en déformations et en contraintes intégrées;
- la prise en compte rigoureuse de la périodicité dans le calcul des caractéristiques effectives.

Ainsi, nous avons développé une méthode fiable, qui contrairement aux méthodes existantes :

- conduit, pour une cellule à deux baies identiques à des caractéristiques effectives rigoureusement égales à celles obtenues en considérant une seule baie (ce qui résulte du fait qu'on a un champ de déplacement linéaire par baie);
- fournit des caractéristiques effectives indépendantes du choix de la période.

L'intérêt de la méthode présentée ici est la facilité de sa mise en oeuvre, puisqu'il suffit de construire la matrice raideur assemblée de la cellule et de faire ensuite quelques opérations matricielles pour obtenir les caractéristiques effectives. De plus, cette méthode "conduit" à un modèle

équivalent de type poutre de Timoshenko, qui est finalement en théorie des poutres le modèle le plus complexe utilisé en bureaux d'études. L'inconvénient principal de cette méthode est l'hypothèse a priori sur la forme du milieu continu. Pour justifier cette hypothèse a posteriori, on peut, comme nous l'avons fait, comparer les résultats d'un modèle éléments finis détaillé à ceux du modèle poutre équivalent. On constate alors que l'écart diminue avec le nombre de cellules... mais c'est tout, et il n'est pas simple d'améliorer le modèle équivalent pour augmenter son domaine de validité, si ce n'est éventuellement en considérant une théorie de poutre plus riche, supposée a priori!

Nous n'avons donc pas voulu trop investir dans ces méthodes, et avons limité nos efforts à l'encadrement de 3 D.E.A. Nos investigations dans ce domaine ont donc cessé en 97, alors que nous avons commencé à travailler sur des méthodes d'homogénéisation basées sur la méthode des développements asymptotiques, qui nous paraissaient beaucoup plus rigoureuses et prometteuses, et que nous exposons aux chapitres 2 et 4.

## 3.4 Homogénéisation continue

### 3.4.1 Introduction

Nous avons discuté par ailleurs, au chapitre 2, du bien fondé de certaines méthodes d'homogénéisation pour les structures minces périodiques. Nous avons ainsi montré que les méthodes d'homogénéisation les plus précises correspondent à un passage à la limite simultané sur les deux petits paramètres associés à l'inverse de l'élanement de la structure et à la finesse des hétérogénéités. Dans le cas des matériaux périodiques, l'utilisation de l'homogénéisation périodique a été justifiée dans de nombreux travaux, cf. (Bensoussan *et al.*, 1978), (Sanchez-Palencia, 1980) entre autres. Tous les résultats précédents ont été établis en restant général quant aux caractéristiques géométriques et matérielles de la cellule de base.

Notre objectif dans ce chapitre est d'appliquer ces méthodes, de façon performante et robuste, aux milieux fortement poreux, qui se caractérisent par l'existence d'un autre petit paramètre égal à l'inverse de l'élanement des constituants de la période.

Quelle que soit l'application visée (structure mince ou matériau), la formulation des problèmes cellulaires est 3D. Leur résolution numérique grâce à un modèle éléments finis 3D est tout à fait possible. C'est d'ailleurs ce qui est mis en oeuvre dans (L'Hostis, 1996) dans le cas des matériaux cellulaires, dans (Cartraud, 1997) pour une poutre périodique dont la cellule est un treillis de poutres, ou encore dans (Bourgeois, 1997) pour des plaques périodiques dont la cellule est un assemblage de plaques. Cependant, les constituants de la période étant minces, il est nécessaire d'avoir des modèles avec un grand nombre d'éléments finis 3D, ce qui pénalise le temps de calcul.

Nous avons donc cherché à reformuler les problèmes cellulaires pour pouvoir ensuite les traiter à partir d'un assemblage éléments finis de type barre, poutre ou plaque. Ceci revient à dire que sur les problèmes envisagés ici, on passe à la limite en dernier sur le petit paramètre associé à l'inverse de l'élanement des constituants de la période.

Nous avons commencé par étudier le cas d'une poutre périodique dont la cellule est un treillis de poutres ou de barres. Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un D.E.A. soutenu en 97. Nous avons ensuite étendu la méthode à des applications matériaux cellulaires, au cours de l'année 98. Ces derniers travaux ont été réalisés en collaboration avec Gildas L'Hostis, du Laboratoire de Physique et Mécanique Textile de Mulhouse. Ils ont été initiés en 96-97, lors de son passage en tant qu'A.T.E.R. à l'Ecole Centrale de Nantes. La seule publication que nous ayons sur ce sujet est (Buannic *et al.*, 1999), qui donne une présentation très succincte de ces travaux. Nous reportons ici l'essentiel des résultats obtenus et donnons quelques illustrations.

### 3.4.2 Résultat préliminaire

Que l'on considère l'homogénéisation périodique d'une structure mince poreuse (plaque ou poutre) ou d'un matériau cellulaire, les problèmes cellulaires sur la cellule  $Y$  soumise à une déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  peuvent être mis sous la forme ( $\mathbf{y}$  désigne l'échelle microscopique,  $\mathbf{a}$  le tenseur de rigidité,  $\mathbf{e}_y$  l'opérateur déformation sur la variable  $\mathbf{y}$ , et  $\sharp = \text{plaque, poutre ou } 3D$ ):

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial Y_b & \\ \mathbf{u}^{per} \text{ périodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} & \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\partial Y = \partial Y_a \cup \partial Y_b$ , avec  $\partial Y_a$  qui représente le contour de la cellule concerné par la périodicité, et  $\partial Y_b$  sa partie complémentaire, libre d'efforts.

Dans le cas d'une application structures minces, le tenseur  $\mathbf{E}^\sharp$  est affine en  $\mathbf{y}$  et la périodicité existe dans 1 ou 2 directions de l'espace. Pour l'homogénéisation 3D d'un matériau,  $\mathbf{E}^{3D} \equiv \mathbf{E}$  est constant et la périodicité a lieu dans les 3 directions. Nous rappelons ci-dessous les expressions de  $\mathbf{E}^\sharp$  pour les poutres et les plaques périodiques, sachant que la direction  $\mathbf{e}_3$  correspond à l'axe de la poutre ou à la normale à la plaque, et que les différentes déformations macroscopiques associées à l'extension  $E$ , la torsion  $T$ , la courbure  $C$  et la membrane  $M$  sont des constantes (dans toute la suite du mémoire, les indices grecs varient de 1 à 2, et les indices latins de 1 à 3):

$$\begin{cases} E_{\alpha\beta}^{poutre} = 0 \\ E_{\alpha 3}^{poutre} = \frac{1}{2}(-1)^\alpha y_\beta \cdot E^T, \alpha \neq \beta \\ E_{33}^{poutre} = E^E - y_\alpha \cdot E^{C\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} E_{\alpha\beta}^{plaque} = E_{\alpha\beta}^M + y_3 E_{\alpha\beta}^C \\ E_{i3}^{plaque} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Les méthodes classiques de résolution de (3.1) en 3D consistent à discrétiser  $\mathbf{u}^{per}$  (Léné, 1984), (Débordes, 1989). Les relations de périodicité se traduisent alors par l'égalité des degrés de liberté de deux noeuds en vis à vis.

Une méthode moins usuelle consiste à discrétiser le **champ total**  $\mathbf{u}^T$  tel que  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^T)$ , ce qui est toujours possible car  $\mathbf{E}^\sharp$  est constant ou affine en  $\mathbf{y}$ . La périodicité conduit alors à des relations linéaires à second membre non nul.

Envisageons le cas de la cellule donnée figure 3.4(a), et constituée de poutres à section carrée. La résolution du problème (3.1) avec des éléments finis 3D est possible, mais il faudra utiliser un modèle avec un grand nombre de degrés de liberté pour bien décrire les phénomènes de flexion. Il paraît donc plus judicieux de se ramener à un modèle de cellule de type treillis de poutres.

Pour ce faire, il faut introduire au niveau local des hypothèses de poutre, et on choisit ici le modèle de Navier-Bernoulli. Compte tenu des méthodes de résolution citées plus haut, le problème est de savoir si on peut faire ces hypothèses *indifféremment* sur le champ total  $\mathbf{u}^T$  ou sur  $\mathbf{u}^{per}$ .

La réponse à cette question est non, et elle découle du résultat suivant : le champ  $\mathbf{u}^E$  défini à un mouvement de solide rigide près par  $\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^E) = \mathbf{E}^\sharp$  ne vérifie pas les hypothèses de Navier-Bernoulli, par conséquent  $\mathbf{u}^T$  et  $\mathbf{u}^{per}$  ne peuvent tous les deux les satisfaire car  $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^E + \mathbf{u}^{per}$ .

La démonstration est rapide. Considérons une poutre d'orientation quelconque dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ , cf. figure 3.4(b).

En écrivant que cette poutre a une cinématique de Navier-Bernoulli, on obtient les relations  $u_{1L}(y_{1L}, y_{3L}) = u_{1L}(0, y_{3L})$  et  $u_{3L}(y_{1L}, y_{3L}) = u_{3L}(0, y_{3L}) - y_{1L} \partial_{0, y_{3L}} u_{1L}(y_{3L})$  où le point de coordonnées  $(0, y_{3L})$  se situe sur la ligne moyenne de la poutre, l'indice  $L$  faisant référence au repère local, et  $\partial_{y_{3L}} := \partial / \partial y_{3L}$ . Ces relations impliquent donc  $\partial_{y_{1L}} u_{3L} + \partial_{y_{3L}} u_{1L} = 0$ , soit dans la base globale  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  :  $2 \cos \alpha \sin \alpha (\partial_{y_1} u_1 - \partial_{y_3} u_3) + (\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) (\partial_{y_3} u_1 - \partial_{y_1} u_3) = 0$ . Il est alors facile de montrer que cette relation n'est pas satisfaite pour le champ  $\mathbf{u}^E$ . En effet, le premier membre vaut alors  $2 \cos \alpha \sin \alpha (\mathbf{E}_{11}^\sharp - \mathbf{E}_{33}^\sharp) + 2(\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2) \mathbf{E}_{13}^\sharp$ , par conséquent, cette expression n'est

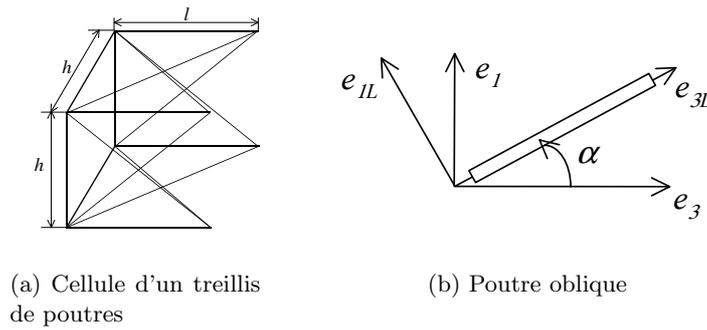


FIG. 3.4 – Exemple de cellule avec des poutres obliques

pas nulle en général, que  $\mathbf{E}^\sharp$  soit constant (homogénéisation 3D) ou de la forme (3.2).

Il faut donc choisir entre  $\mathbf{u}^T$  et  $\mathbf{u}^{per}$  pour introduire une approximation de poutre. La réponse à ce problème est apportée par une analyse de la signification physique de ces deux champs. Considérons en effet un échantillon macroscopique constitué d'un grand nombre de cellules, et sollicité à l'infini à des sollicitations conduisant à un état de déformation macroscopique uniforme (aux effets de bords près). Dans ce cas, la dérivée de la déformation macroscopique étant nulle, le développement asymptotique s'arrête rapidement et se réduit en fait à  $\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^E + \mathbf{u}^{per}$ . C'est donc ce champ  $\mathbf{u}^T$  qui règne effectivement dans la structure, le champ  $\mathbf{u}^{per}$  ne représentant que des fluctuations locales autour de  $\mathbf{u}^E$ . Par conséquent, c'est sur  $\mathbf{u}^T$  que doivent porter les hypothèses de Navier-Bernoulli.

Signalons que dans (Kalamkarov et Kolpakov, 1997), les auteurs ont proposé d'adopter une approche locale de poutre sur le champ total, mais sans que soit évoquée la propriété précédente.

Pour illustrer cette propriété, considérons la solution 3D du problème cellulaire à extension macroscopique imposée pour une poutre périodique ondulée, de section carrée. La figure 3.5 présente une vue dans le plan des déformées obtenues sur le champ total  $\mathbf{u}^T$  en (a) et sur  $\mathbf{u}^{per}$  en (b). Sur cette dernière figure, il apparaît clairement que les hypothèses de Navier-Bernoulli ne sont pas satisfaites, car les angles droits entre les différentes poutres de la cellule ne sont pas conservés, et que les sections des poutres gauchissent. Ces hypothèses sont en revanche bien vérifiées sur le champ total, cf figure 3.5(a).

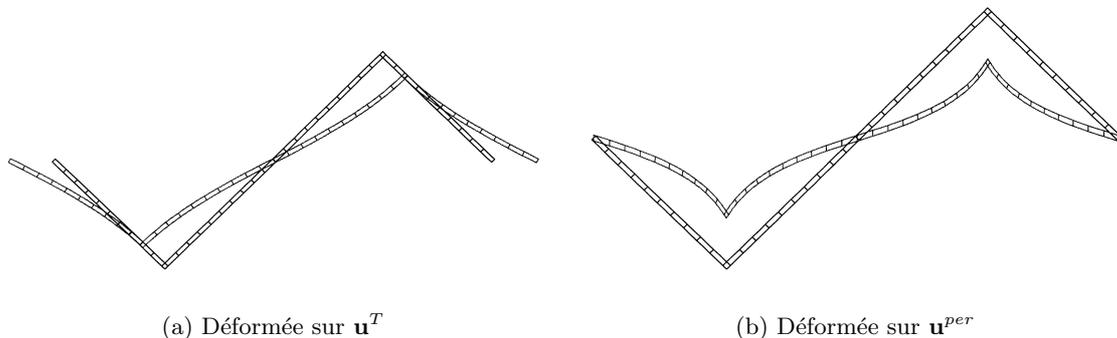


FIG. 3.5 – Réponse de la cellule d'une poutre ondulée à une déformation macroscopique d'extension

La mise en oeuvre de cette méthode est simple, et peut même être réalisée à partir d'un code éléments finis standard. On discrétise la période avec des éléments finis poutre de Bernoulli, dont les degrés de liberté sont associés au champ total  $\mathbf{u}^T$ . Pour tenir compte de la périodicité, il suffit

de générer les relations linéaires sur les noeuds en vis à vis sur la période, sachant que les relations sur les rotations se déduisent des précédentes par dérivation. Dans le cas d'une poutre périodique, l'expression de ces relations est donnée dans (Buannic *et al.*, 1999) pour une cellule de type treillis de poutres. Pour le même type de cellule en homogénéisation 3D de matériau, ces relations sont encore plus simples car  $\mathbf{E}^{\sharp}$  est constant, ce qui conduit à des égalités sur les rotations. Et si on considère une cellule de type treillis de barres, on conserve simplement parmi les relations précédentes celles qui portent sur les degrés de liberté en déplacements.

Si maintenant on envisage une cellule faite d'un assemblage de plaques, cf figure 3.2(a), le même type de méthode peut être utilisé en adoptant une hypothèse locale de Kirchhoff-Love. Cependant, dans ce cas, pour des applications de type structure mince, on est confronté à des difficultés techniques lorsque les plaques appartenant au contour de la période ne sont pas parallèles à un plan de coordonnées. En effet, les relations sur les rotations sont alors dépendantes de l'orientation du plan moyen de la plaque.

Nous donnons ci-après quelques exemples d'illustration et de validation de la méthode.

### 3.4.3 Applications

#### Structures minces

Les premiers cas tests ont été réalisés sur des poutres ondulées, telles que celles dont la période est représentée figure 3.5. Sur ce type de structure, il existe une solution analytique du comportement homogénéisé en traction et flexion dans le plan, en partant d'équations locales de poutres (Potier-Ferry et Siad, 1992). Avec la méthode proposée, ces résultats analytiques ont été obtenus avec un écart inférieur à 0,1%.

D'autres cas tests (treillis de poutres ou de barres), avec comparaison à des caractéristiques effectives identifiées à partir de calculs sur une structure faite d'un grand nombre de périodes, ou à des calculs d'homogénéisation 3D ont fourni d'autres validations de la méthode, (Buannic, 1997).

#### Matériaux cellulaires

Le premier exemple concerne la cellule cubique ouverte présentée figure 3.2(a). Sur cet exemple, on dispose de résultats numériques provenant de la méthode classique de résolution par éléments finis des problèmes cellulaires 3D, (L'Hostis, 1996), et de valeurs analytiques obtenues par une technique de passage à la limite (l'épaisseur  $d$  des poutres tendant vers 0) (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), (L'Hostis *et al.*, 1998).

Le comportement homogénéisé de ce matériau est à symétrie cubique, et on s'intéresse tout d'abord au module d'Young suivant un axe de coordonnées. Ces résultats sont comparés dans le tableau 3.1 (la longueur des éléments constitutifs de la période est  $L = 1mm$ , et  $\tau$  désigne la densité, calculée en négligeant le volume des jonctions :  $\tau = 3(d/L)^2$ ). On constate que sur cette caractéristique, la méthode numérique avec des éléments finis de type poutre redonne les valeurs limites issues de (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), (L'Hostis *et al.*, 1998). D'autre part, le module d'Young est proportionnel à la densité du matériau, ce qui traduit un comportement en traction des poutres. Sur ce même exemple, il est intéressant de noter que la méthode adoptée

$d$ (mm)	$\tau$	$E^{hom}/E$ (EF 3D)	$E^{hom}/E$ (lim)	$E^{hom}/E$ (EF poutre)
0.01	$3.0E - 04$	$1.0058E - 04$	$1.0000E - 04$	$1.0000E - 04$
0.05	$7.5E - 03$	$2.5400E - 03$	$2.5000E - 03$	$2.5000E - 03$
0.10	$3.0E - 02$	$1.0300E - 02$	$1.0000E - 02$	$1.0000E - 02$

TAB. 3.1 – Résultats une cellule cubique ouverte

conduit à des coefficients de Poisson nuls, ce qui est une limite de l'approche poutre. Cependant, avec des calculs 3D, ce coefficient reste très faible car pour  $d = 0.1$ , on trouve  $\nu < 0.03$ . D'autre part, si on s'intéresse au coefficient de cisaillement dans un plan de coordonnées, l'approche développée par (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), (L'Hostis *et al.*, 1998) conduit à une valeur nulle. Ce résultat met en évidence les limites de cette approche, qui ne prend pas en compte la flexion des poutres, qui apparaît pour ce type de sollicitation macroscopique. Avec notre approche, on obtient une valeur non nulle, et on observe que le module de cisaillement calculé suit la loi  $G^{hom} = E\tau^2/9$ , alors que  $E^{hom} = E\tau/3$ . Ces relations sont en désaccord avec les formules données dans (Kalamkarov et Kolpakov, 1997), qui sont pourtant obtenues en tant que solution analytique des problèmes qu'on résout numériquement. En fait, les formules de cet ouvrage sont erronées, et en reprenant les calculs des auteurs, on retrouve bien les résultats donnés plus haut.

Le deuxième exemple est encore une cellule ouverte et il s'agit de la cellule tétrakaidécahédrique, dont la figure 3.6 donne une vue de 3 cellules voisines, pour mettre en évidence la périodicité. Nous avons choisi d'étudier cette cellule, car elle permet de bien représenter des géométries de mousse observées au microscope, mais aussi parce qu'elle est suffisamment complexe pour que différents phénomènes (traction, flexion, et torsion) soient mis en jeu à l'échelle locale en fonction de la sollicitation macroscopique. Enfin, on dispose pour cette cellule de résultats analytiques de référence obtenus par équivalence (Warren et Kraynik, 1997), (Zhu *et al.*, 1997), ou en utilisant une méthode de calcul formelle pour résoudre le problème d'homogénéisation périodique posé sur une cellule de poutres (Pradel, 1998). Ces 3 sources donnent les mêmes valeurs analytiques, et nous nous intéressons ici à titre d'exemple à un module de cisaillement dont l'expression est :

$$\frac{1}{G^{hom}} = \frac{2\sqrt{2}L^2}{EA} + \frac{\sqrt{2}L^4}{EI} \frac{8EI + GJ}{5EI + GJ} \quad (3.3)$$

où  $A, I, J$  sont respectivement l'aire, et les inerties de flexion et de torsion des poutres,  $L$  étant la longueur des poutres les plus longues. Nous avons réalisé des calculs en considérant des poutres de section carrée de côté  $d$ , avec  $0,01 \leq d/L \leq 0,08$ . Dans cet intervalle, une très bonne approximation de  $G^{hom}$  est donnée par l'inverse du second terme de (3.3), si bien que c'est la flexion qui prédomine. Ceci est confirmé par les résultats du calcul donnés figure 3.7. On constate en effet que

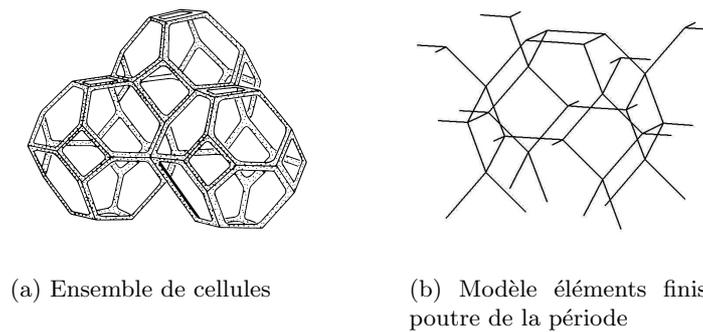


FIG. 3.6 – Matériau cellulaire à cellules de type tétrakaidécahédrique

le module de cisaillement adimensionnalisé est proportionnel à la densité au carré. D'autre part, un écart inférieur à 1% est obtenu entre les valeurs analytiques (Zhu *et al.*, 1997) et les résultats numériques de l'approche poutre. Il y a par ailleurs une bonne corrélation avec les calculs 3D.

Nous avons par ailleurs traité le cas d'une cellule cubique fermée, cf. figure 3.2(b) en utilisant des éléments finis de type plaque. Nous avons obtenu avec une excellente précision les valeurs limites de (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), (L'Hostis *et al.*, 1998).

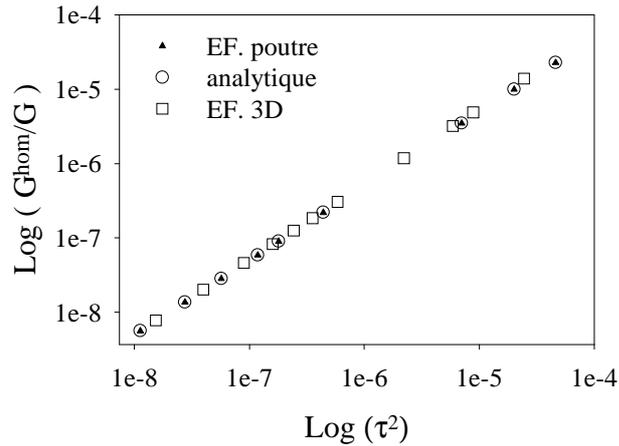


FIG. 3.7 – Résultats comparatifs pour la cellule tétrakaidécaédrique.

### 3.4.4 Bilan

L'intérêt de la méthode présentée ici est qu'elle conduit à un modèle avec un très petit nombre de degrés de liberté, alors que les modèles éléments finis 3D dépassent parfois 100000 degrés de liberté pour les matériaux à faible densité. De plus, le chargement, étant induit par les relations linéaires issues de la périodicité, dans le cas des poutres, il est suffisant d'avoir un seul élément fini par élément de structure pour avoir la solution exacte des problèmes cellulaires. Ceci permet d'envisager l'étude d'un grand nombre de cellules différentes, pour prendre en compte le cas échéant le caractère aléatoire (géométrique ou matériel) de certains milieux poreux.

On note d'autre part que la prise en compte mécanique de la minceur des constituants permet de restituer les phénomènes de traction, flexion, torsion, alors que le passage à la limite  $\delta \rightarrow 0$  ne prend en compte pour la cellule ouverte cubique que la traction. Ceci met en relief les limites de cette approche  $\delta \rightarrow 0$ . Ces limites sont d'ailleurs évoquées dans (Cioranescu et Saint Jean Paulin, 1999), où les auteurs constatent une perte d'ellipticité du comportement homogénéisé suite à ce passage à la limite pour certaines géométries de cellules. Il ressort de ces travaux que le domaine de validité de cette dernière méthode n'est pas clairement établi.

Les limites de l'approche présentée sont en fait celles d'un modèle poutre ou plaque. Ainsi, l'élanement des constituants doit rester supérieur à 10, et certains effets 3D sont mal représentés par le modèle. Par exemple, un calcul précis des contraintes au voisinage des jonctions requiert un modèle 3D.

## 3.5 Conclusion

Les milieux poreux ont constitué pour nous un champ d'applications de méthodes étudiées par ailleurs (homogénéisation périodique de structures minces et de matériaux) et nous ont également permis d'élargir nos connaissances en examinant d'autres méthodes telle que la modélisation continue des structures discrètes.

En ce qui concerne cette dernière méthode, même si nous l'avons améliorée (cf. section 3.3), son inconvénient principal demeure, à savoir l'hypothèse a priori sur la forme du milieu continu équivalent. De ce fait, cette approche souffre de la comparaison avec l'homogénéisation périodique, fondée sur la méthode des développements asymptotiques, et nous l'avons abandonnée.

Concernant l'homogénéisation périodique, elle a été adaptée à l'étude des milieux poreux, avec la mise au point d'une méthode performante de résolution des problèmes cellulaires.



# Bibliographie

- Bensoussan, A., Lions, J., et Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland.
- Bourgeois, S. (1997). *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse, Université Aix-Marseille II.
- Boutin, C. et Hans, S. (2003). Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, **30**, 303–320.
- Buannic, N. (1997). Homogénéisation de structures périodiques à comportement global de poutre. D.E.A., Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N., Cartraud, P., et L’Hostis, G. (1999). Homogénéisation de structures ou matériaux constitués de poutres. *Actes du 4ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*.
- Burgardt, B. et Cartraud, P. (1999). Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *Computers and Structures*, **73**, 267–279.
- Cartraud, P. (1997). Homogénéisation d’une poutre hétérogène selon son axe, de section et de période de dimensions comparables. *Actes du 3ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, 265–270.
- Christensen, R. (2000). Mechanics of cellular solids and other low-density materials. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 93–104.
- Cioranescu, D. et Saint Jean Paulin, J. (1999). *Homogenization of Reticulated Structures*. Springer.
- Débordes, O. (1989). Homogénéisation périodique. Cours, Université Laval, Québec.
- Dow, J. et Huyer, S. (1989). Continuum models of space station structures. *J. Aerospace Eng.*, **2**, 220–238.
- Gibson, L. et Ashby, M. (1997). *Cellular solids, Structure and properties*. Second edition, Cambridge University Press.
- Grenestedt, J. (1999). Effective elastic behavior of some models for ‘perfect’ cellular solids. *Int. J. Solids Structures*, **36**, 1471–1501.
- Kalamkarov, A. et Kolpakov, A. (1997). *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Wiley.
- Karpov, E., Dorofeev, D., et Stephen, N. (2002a). Characteristic solutions for the statics of repetitive beam-like trusses. *Int. J. Mech. Sc.*, **44**, 1363–1379.
- Karpov, E., Stephen, N., et Dorofeev, D. (2002b). On static analysis of finite repetitive structures by discrete fourier transform. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 4291–4310.
- Laroussi, M., Sab, K., et A., A. (2002). Foam mechanics: nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 3599–3623.
- Lee, U. (2000). Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfert matrix method. *Eng. Structures*, **22**, 681–690.
- Léné, F. (1984). *Contribution à l’étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse d’Etat, Université Paris 6.
- L’Hostis, G. (1996). *Contribution à la conception et à l’étude de structures composites thermoélastiques*. Thèse, Université Paris 6.

- L'Hostis, G., Devries, F., et Léné, F. (1998). Méthode simplifiée pour le calcul du comportement thermoélastique de composites alvéolaires. *Revue des composites et des matériaux avancés*, **8**, 91–118.
- Moreau, G. (1996). *Homogénéisation de structures discrètes en élasticité et en incrémental*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Noor, A. (1988). Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Appl. Mech. Rev.*, **41**, 285–296.
- Noor, A. et Russel, W. (1986). Anisotropic continuum models for beamlike lattice trusses. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **57**, 257–277.
- Ostoja-Starzewski, M. (2003). Lattice models in micromechanics. *Appl. Mech. Rev.*, **55**, 35–60.
- Potier-Ferry, M. et Siad, L. (1992). Homogénéisation géométrique d'une tôle ondulée. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **314**, 425–430.
- Pradel, F. (1998). *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse, E.N.P.C.
- Renton, J. (1984). The beam-like behavior of space trusses. *A.I.A.A. J.*, **22**, 273–280.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin.
- Stephen, N. (1999). On the vibration of one-dimensional periodic structures. *J. of Sound and Vibration*, **227**, 1133–1142.
- Suquet, P. (1985). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 193–278. Springer-Verlag.
- Tollenaere, H. (1994). *Modèles bidimensionnels de tissés. Homogénéisation de treillis en vibrations libres*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Verna, P. (1991). *Modélisation continue de structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Warren, W. et Kraynik, A. (1988). The linear elastic properties open-cell foams. *J. Appl. Mech.*, **55**, 341–346.
- Warren, W. et Kraynik, A. (1997). Linear elastic behavior of a low density kelvin foam with open cells. *J. Appl. Mech.*, **64**, 787–794.
- Zhu, H., Knott, J., et Mills, N. (1997). Analysis of the elastic properties of open-cell tetrakaidecahedral cells. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, 319–343.

**Deuxième Partie**  
**Modèles homogénéisés d'ordre**  
**supérieur et effets de bords**



# Introduction

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons essentiellement cherché à définir la méthode d'homogénéisation la plus appropriée pour une application donnée, de type matériau ou structure mince périodique. Pour choisir parmi les différentes méthodes disponibles, nous avons adopté comme critère la précision sur les caractéristiques effectives, des valeurs de référence étant obtenues à partir de calculs sur une structure hétérogène 3D constituée d'un grand nombre de périodes. Ceci revient à dire qu'on a qualifié l'homogénéisation en tant que méthode permettant de déterminer le **comportement limite** d'un milieu périodique.

Nous rappelons que nous avons retenu comme méthode d'homogénéisation celle où on passe à la limite sur les deux petits paramètres simultanément dans le cas des structures minces périodiques, l'homogénéisation périodique s'imposant naturellement pour les applications où un comportement matériau est recherché. Dans tous ces cas, l'homogénéisation peut être réalisée à partir de la méthode des développements asymptotiques, et dans cette première partie nous nous sommes limités à l'obtention du problème macroscopique de plus bas ordre, dont les relations constitutives découlent de la résolution d'un problème cellulaire. C'est en ce sens qu'on parle de **comportement homogénéisé du 1<sup>er</sup> ordre**.

Nous allons maintenant nous intéresser à la notion de **modèles homogénéisés**. Notre objectif est donc d'étudier quelles sont les erreurs induites par l'utilisation d'un milieu homogène équivalent dans un problème aux limites, en substitution du milieu hétérogène 3D d'origine, et comment faire pour les diminuer.

Ce problème peut être abordé de plusieurs façons :

1. Une première analyse peut être menée en considérant les échelles mises en jeu. Ainsi, il est clair qu'on ne pourra adopter une description macroscopique que si on peut lisser les hétérogénéités, ce qui suppose qu'elles soient en nombre suffisant (de même, la modélisation simplifiée d'une structure mince implique d'avoir des dimensions avec des ordres de grandeur différents). On peut ainsi introduire un petit paramètre **géométrique**  $\varepsilon_1$  (égal à l'inverse du nombre de périodes ou à l'inverse de l'éclatement, et à l'inf des deux pour une structure mince périodique). Une autre condition à satisfaire pour l'homogénéisabilité est que les phénomènes physiques étudiés présentent des variations spatiales lentes (i.e. de longueur d'onde grande devant la taille des hétérogénéités ou l'épaisseur d'une plaque), (Boutin, 1996), (Forest, 1998), (Kouznetsova, 2002). Cette condition est évidemment en relation directe avec la nature des sollicitations en statique, ou à une longueur d'onde de mode propre en dynamique. Sous réserve qu'on puisse déterminer cette longueur d'onde, on pourra alors introduire un deuxième petit paramètre  $\varepsilon_2$ , en divisant la taille de la cellule ou l'épaisseur de la plaque par cette longueur.

Il est intuitif que les modèles homogénéisés décrits dans la première partie seront d'autant plus précis que  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  seront petits, d'où la notion de comportement limite évoquée plus haut. L'erreur va donc croître avec  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , jusqu'à atteindre des valeurs insupportables dans des situations non homogénéisables. Il existe cependant un espace dans lequel on peut homogénéiser, bien que les modèles homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre ne soient pas satisfaisants. Cet espace correspond à des valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  petites mais pas très petites (Boutin, 1996),

(Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000). Pour fixer les idées, ces valeurs se situent entre  $1/30$  et  $1/10$ , mais dépendent bien sûr du cas traité.

Il est important de noter que de nombreuses applications industrielles rentrent dans ce cadre : les plaques épaisses, les poutres peu élancées, et les structures périodiques à nombre de périodes faibles (le joint de culasse est un bon exemple).

2. Une deuxième approche pour étudier la validité des modèles homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre consiste à interpréter le problème cellulaire traité lors de la construction du milieu homogène équivalent. En effet, dans ce problème, on caractérise la réponse d'une cellule sous l'action d'un champ macroscopique constant, avec des conditions aux limites périodiques. Il en résulte qu'on ne pourra a priori utiliser le modèle que si on retrouve cette uniformité macroscopique dans le problème aux limites considéré (Ghosh *et al.*, 2001), (Kouznetsova, 2002), autrement dit en l'absence de **gradients macroscopiques**. On note aussi une autre limite du modèle au voisinage des bords de la structure, où on a la fois perte de périodicité et des champs macroscopiques qui évoluent rapidement (Dumontet, 1990), (Ghosh *et al.*, 2001), (Dureisseix, 2000).
3. Il existe par ailleurs des résultats mathématiques qui donnent un sens précis à l'écart entre la solution du 1<sup>er</sup> ordre, que nous notons  $u^{(1)}$  et la solution exacte  $u^\varepsilon$ , cf. entre autres (Bensoussan *et al.*, 1978), (Sanchez-Palencia, 1980), (Bakhvalov et Panasenko, 1989) pour les matériaux périodiques, et (Ciarlet, 1997), (Trabucho et Viaño, 1996) pour les structures minces. Ainsi, on a une relation du type  $\|u^{(1)} - u^\varepsilon\| \leq C\varepsilon^m$  où la constante  $C$  est fonction du chargement et des conditions aux limites, et où  $m \geq 1$  dépend du problème étudié (matériau ou structure mince) et de la norme utilisée. Il est donc clair que l'écart diminue avec  $\varepsilon$ .

Signalons que dans le cas d'une structure mince, les arguments développés en 1) et 2) se rejoignent. Tout d'abord, le comportement limite est une poutre de Navier-Bernoulli (NB) ou une plaque de Kirchhoff-Love (KL). Il s'agit donc de modèles faciles à interpréter, ce qui rend aisé la détermination de leur domaine de validité. Considérons à titre d'exemple une poutre sandwich. Ainsi, on justifiera les insuffisances du modèle du 1<sup>er</sup> ordre de NB par la non prise en compte des effets du cisaillement transverse, qui deviennent significatifs pour des élancements faibles. Or, cette déficience est liée à la nature des problèmes cellulaires traités à cet ordre, où sont considérés des états de flexion pure (moment constant), alors qu'il faudrait envisager l'action des efforts tranchants (c'est-à-dire un gradient de moment).

Pour résumer, les modèles du 1<sup>er</sup> ordre apparaissent inadaptés lorsque les petits paramètres  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont non infinitésimaux, et/ou les sollicitations macroscopiques sont non uniformes.

Il existe par ailleurs des régions du milieu hétérogène où la description macroscopique avec périodicité locale est inadaptée : voisinage des bords, et plus généralement des trous et des zones siège d'effets localisés (application d'une force quasi ponctuelle par exemple).

Pour illustrer les limites des modèles du 1<sup>er</sup> ordre, considérons le cas d'une poutre console, dont la cellule de base est constituée d'un matériau homogène isotrope, cf. figure 3.8 (cet exemple est tiré de (Buannic, 2000)). On compare les réponses 3D hétérogène (obtenue par un calcul éléments finis) et homogénéisée du 1<sup>er</sup> ordre (poutre de NB), en faisant varier le nombre de périodes. On constate, cf. figure 3.9(a), dans le cas d'une structure constituée de 20 périodes, un écart très important entre la solution hétérogène 3D et la solution de NB. Cet écart diminue avec le nombre de périodes, comme l'illustre la figure 3.9(b) où on trace, à l'extrémité de la poutre, le rapport entre les flèches hétérogène 3D et de NB, en fonction du nombre de périodes. On constate bien une convergence vers la valeur de 1, mais celle-ci est très lente. Or, dans le cas étudié, la déformation macroscopique de courbure est linéaire et son gradient constant, l'importance relative de ce dernier étant d'autant plus grande que la poutre est courte. Cet exemple montre donc bien que c'est la

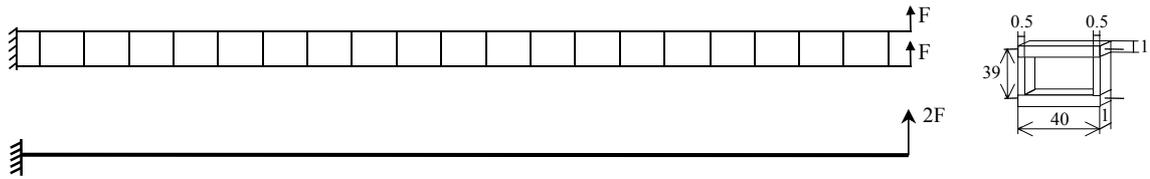
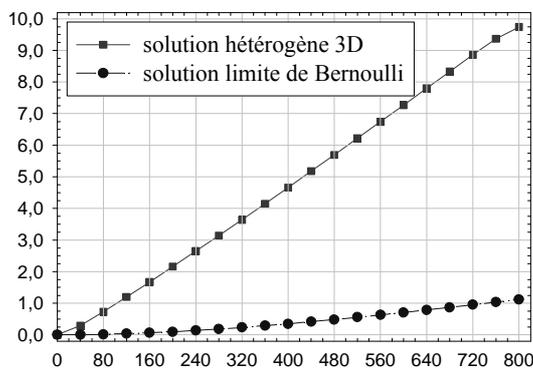


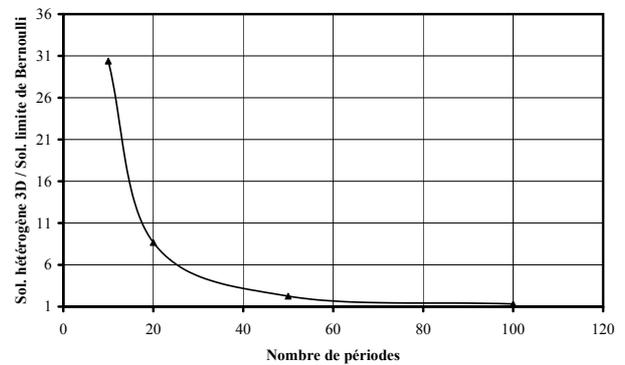
FIG. 3.8 – Problèmes aux limites 3D hétérogène et macroscopiques. Géométrie de la cellule de base

présence d'un gradient de déformation macroscopique non négligeable qui détériore la qualité des modèles macroscopiques du 1<sup>er</sup> ordre.

En effet, si sur ce même exemple on considère un chargement de flexion pure, pour 10 périodes, la solution de NB permet d'approcher la solution 3D avec une excellente précision.



(a) Déplacement transversal le long de la poutre pour une structure à 20 périodes



(b) Evolution du rapport entre les solutions en fonction du nombre de périodes

FIG. 3.9 – Comparaison des solutions hétérogène 3D et du 1<sup>er</sup> ordre de NB

Ayant mis en évidence les limites de ces modèles 1<sup>er</sup> ordre (alors que dans la première partie de ce mémoire on a montré leur précision pour la détermination des caractéristiques effectives à cet ordre), il est naturel de chercher à les améliorer.

Un premier aspect concerne les effets de bords, et autres effets localisés pour lesquels la notion de périodicité locale n'est plus valable. Il est clair que les régions concernées exigent un traitement spécifique, et qu'à un moment donné un modèle hétérogène 3D devra être utilisé pour capturer ces phénomènes complexes. Dans (Ghosh *et al.*, 2001), les auteurs utilisent un modèle à 3 niveaux : purement macroscopique, macroscopique-microscopique (où en fait on relocalise la solution macroscopique), et purement microscopique (i.e. hétérogène 3D) dans les régions dites critiques. La difficulté se situe alors dans le raccordement de ces différents modèles. Ce type de problème est traité dans (Panasenko, 1999), (Panasenko, 2000) où l'auteur considère une structure élancée, et définit les conditions d'interface entre le modèle 1D associé à la partie intérieure de la structure, et les 2 zones 3D près des extrémités. Une autre démarche consiste à traiter de façon indépendante ces effets localisés (par exemple en étudiant les problèmes de couche limite) pour ensuite exploiter les résultats dans le problème macroscopique. Nous reviendrons plus longuement sur ces dernières méthodes au chapitre 5.

Les effets localisés ne sont pas à eux seuls responsables des écarts entre la solution homogénéisée du 1<sup>er</sup> ordre et la solution exacte. Il est donc important d'enrichir le modèle macroscopique. Pour ce faire, sachant qu'un modèle du 1<sup>er</sup> ordre correspond en fait au modèle macroscopique de plus bas ordre issu de la méthode des développements asymptotiques, il est naturel de chercher à calculer

les termes d'ordre supérieur des développements. Ceci va nous amener à considérer de nouveaux problèmes microscopiques et macroscopiques, les premiers d'entre eux permettant de caractériser plus finement le comportement macroscopique.

Dans la littérature, plusieurs références illustrent l'intérêt de prendre en compte les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique. On peut citer (Schraad et Triantafyllidis, 1997), où les auteurs étudient un milieu périodique 2D constitué de barres, soumis à des déformations macroscopiques non uniformes, et montrent que l'énergie de déformation converge plus rapidement vers l'énergie exacte quand on y inclut des termes d'ordre 2. De même, dans (Fish et Chen, 2001), l'amélioration apportée par les termes d'ordre supérieur est illustrée sur un exemple de dynamique. Dans ce même article, les auteurs font référence à des travaux antérieurs de Boutin et Auriault, qui ont montré que les modèles asymptotiques d'ordre supérieur permettaient de représenter des phénomènes tels que la dispersion, alors que le modèle du 1<sup>er</sup> ordre est non dispersif.

Ainsi, au delà de l'aspect précision du modèle macroscopique (puisque'il est intuitif qu'on évalue mieux la solution exacte en augmentant le nombre de termes calculés dans son développement asymptotique), il apparaît qu'un modèle d'ordre supérieur peut restituer des phénomènes complexes, hors d'atteinte du modèle du 1<sup>er</sup> ordre. Ceci est à mettre en relation avec les nombreux travaux qui cherchent à justifier des théories de milieux continus généralisés à partir d'une approche microscopique-macroscopique. On peut citer dans ce domaine (Gambin et Króner, 1989), (Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996), (Boutin, 1996), (Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000). Mentionnons également (Forest, 1998), (Forest, 2002), où l'auteur considère des approches d'homogénéisation plus heuristiques que la méthode des développements asymptotiques.

Citons enfin (Kouznetsova, 2002), où dans le cadre d'une approche de type EF<sup>2</sup> (éléments finis au carré), on montre l'intérêt d'utiliser une loi de comportement macroscopique avec gradient de déformation.

Dans le domaine des structures minces, la situation est un peu différente, et on cherche plutôt, en considérant les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique, à justifier des modèles plus fins que NB ou KL. Ceci est réalisé notamment dans (Trabucho et Viaño, 1996), (Goldenveizer *et al.*, 1993) pour des modèles de Timoshenko et Reissner-Hencky-Mindlin respectivement.

Par ailleurs, des résultats mathématiques sont disponibles, montrant le gain apporté par la prise en compte des termes d'ordre supérieur. Ainsi, dans (Bakhvalov et Panasenko, 1989), il est montré que le majorant de la norme de l'écart entre la solution 3D et la solution asymptotique (cf. point 3 précédent) est multiplié par  $\varepsilon$  quand on calcule un terme de plus de la solution asymptotique. On obtient ainsi une décroissance rapide de cet écart. Ce même type de résultat apparaît dans (Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000), où les auteurs considèrent un milieu élastique 2D infini (pour s'affranchir des effets de bords). Ces résultats théoriques sont illustrés par des exemples numériques dans (Dumontet, 1990). On a des résultats similaires dans des travaux relatifs aux plaques élastiques homogènes isotropes, de dimensions finies. Il est ainsi démontré dans (Nazarov, 1996), (Dauge *et al.*, 1999) que la prise en compte des termes d'ordre supérieur conduit à une amélioration effective de la précision du modèle plaque **à condition** de traiter le problème des effets de bords. La même conclusion est donnée dans (Duva et Simmonds, 1991), (Goldenveizer *et al.*, 1993), (Kaplunov *et al.*, 1997).

Dans cette deuxième partie du mémoire, nous aborderons les différents points évoqués auparavant en considérant l'exemple d'une poutre périodique. Nous exposerons au chapitre 4 la construction d'un modèle asymptotique d'ordre supérieur.

Au chapitre 5, nous traiterons le problème des effets de bords, en présentant une adaptation d'une méthode proposée à l'origine pour des plaques isotropes (Gregory et Wan, 1984).

Quelques exemples d'illustration seront donnés au chapitre 6. Enfin, nous conclurons en cherchant à interpréter les modèles obtenus, et discuterons de leur lien avec d'autres théories.

Nous n'avons pas travaillé sur des applications matériaux pour ces différents aspects. Néanmoins, nous ferons régulièrement référence à des travaux dans ce domaine, afin de montrer comment les résultats obtenus se transposent aux structures minces, ou inversement.

L'exposé de cette deuxième partie sera plus détaillé que celui de la première. En effet, il s'agit à mon sens de travaux plus originaux (ce qui réduit de fait l'exposé de l'état de l'art), en outre, il m'a paru nécessaire de rentrer ici où là dans le détail des équations pour mieux faire ressortir notre contribution.

Nous avons été sensibilisés aux limites des modèles homogénéisés du 1<sup>er</sup> ordre en travaillant sur les panneaux structuraux (cf. figure 2.1 du chapitre 2). Nous avons en effet obtenu sur ces structures des résultats similaires à ceux présentés figure 3.9, cf. (Buannic *et al.*, 2003) joint à ce mémoire. Dans cet article, on montre en outre que le modèle du 1<sup>er</sup> ordre est d'autant moins précis que la structure est souple en cisaillement transverse.

La thèse de Natacha Buannic (démarrée en octobre 97), et consacrée aux poutres élastiques, avait pour objectif l'obtention d'une bonne approximation de la solution 3D, grâce à l'utilisation d'un modèle asymptotique d'ordre supérieur.



# Bibliographie

- Bakhvalov, N. et Panasenko, G. (1989). *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer.
- Bensoussan, A., Lions, J., et Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland.
- Boutin, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 1023–1051.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N., Cartraud, P., et Quesnel, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, **59**, 299–312.
- Ciarlet, P. (1997). Mathematical elasticity - volume II: Theory of plates. *Studies in mathematics and its applications*, volume 27. North-Holland.
- Dauge, M., Gruais, I., et Rössle, A. (1999). The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 305–345.
- Dumontet, H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Dureisseix, D. (2000). Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures. *Forum IPSI Phi2AS en analyse de structures*.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1991). The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *J. Appl. Mech.*, **58**, 175–180.
- Fish, J. et Chen, W. (2001). Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *J. Eng. Mech.*, **127**, 1223–1230.
- Forest, S. (1998). Homogénéisation et mécanique des milieux continus généralisés. *Ecole d'été Méthodes d'Homogénéisation en Mécanique des Matériaux - Hyères, France*.
- Forest, S. (2002). Homogenization methods and the mechanics of generalized continua - Part 2. *Theoretical and Applied Mechanics*, **28-29**, 117–148.
- Gambin, B. et Króner, E. (1989). Higher-order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media. *Phys. Stat. Sol. (b)*, **151**, 513–519.
- Ghosh, S., Lee, K., et Raghavan, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 2335–2385.
- Goldenveizer, A., Kaplunov, J., et Nolde, E. (1993). On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells. *Int. J. Solids Structures*, **30**, 675–694.
- Gregory, R. et Wan, Y. (1984). Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*, **14**, 27–64.
- Kaplunov, J. D., Kossovitch, L., et Nolde, E. (1997). *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. Academic Press.
- Kouznetsova, V. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Ph. D. thesis, T.U. Eindhoven.

- Nazarov, S. (1996). On the accuracy of asymptotic approximations for longitudinal deformation of a thin plate. *Math. Modelling Numer. Anal.*, **30**, 185–213.
- Panasenko, G. (1999). Asymptotic partial decomposition of variational problems. *C.R.Acad.Sci. Ser. IIB*, **327**, 1185–1190.
- Panasenko, G. (2000). Method of asymptotic partial decomposition of rod structures. *Int. J. of Comput. Civil and Structural Eng.*, **1**, 57–70.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin.
- Schraad, M. et Triantafyllidis, N. (1997). Effects of scale size on media with periodic and nearly periodic microstructures - I macroscopic properties. *J. Appl. Mech.*, **64**, 751–762.
- Smyshlyaev, V. et Cherednichenko, K. (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1325–1357.
- Trabucho, L. et Viaño, J. (1996). Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487–974. North-Holland.
- Triantafyllidis, N. et Bardenhagen, S. (1996). The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *J. Mech. Phys. Solids*, **44**, 1891–1928.

## Chapitre 4

# Modélisation asymptotique d'ordre supérieur de structures minces périodiques

### 4.1 Introduction

Dans la très grande majorité des travaux, l'application de la méthode des développements asymptotiques se limite à l'obtention du modèle macroscopique de plus bas ordre, dont on a souligné les limites en introduction à cette deuxième partie du mémoire. Dans ce chapitre, cette méthode sera suivie pour calculer les termes successifs du développement, pour améliorer la précision des modèles asymptotiques ainsi construits.

Dans une partie préliminaire, nous exposerons assez brièvement la méthode, en insistant sur la nature des résultats obtenus et sur des aspects pratiques de mise en oeuvre.

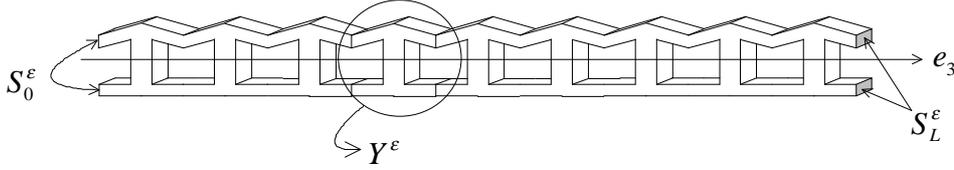
Nous discuterons ensuite différentes approches pour le calcul de la série du développement asymptotique.

La grande majorité du contenu de ce chapitre est tirée du chapitre 2 de (Buannic, 2000). De nombreux détails techniques et les résultats essentiels sont donnés par ailleurs dans (Buannic et Cartraud, 2001), joint à ce mémoire. L'exposé sera donc relativement succinct.

### 4.2 Généralités sur la méthode des développements asymptotiques

Nous exposons ici rapidement les bases de la méthode des développements asymptotiques, appliquée aux poutres périodiques élastiques. Pour les poutres à section constante, la référence dans ce domaine est l'ouvrage de Trabucho et Viaño (Trabucho et Viaño, 1996), citons également (Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992). Pour les poutres périodiques, on renvoie à (Kolpakov, 1991), (Kalamkarov et Kolpakov, 1997).

La structure hétérogène étudiée est présentée figure 4.1. Elle est élancée selon  $\mathbf{e}_3$ , et formée par la répétition périodique d'une cellule de base (ou période)  $Y^\varepsilon$ . On a donc un problème à deux petits paramètres :  $e$  (inverse de l'élancement), et  $\varepsilon$  (inverse du nombre de périodes). Compte tenu des résultats du chapitre 2, on applique la méthode d'homogénéisation où  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$  simultanément. En pratique, cela revient à supposer que les deux petits paramètres sont égaux. Par la suite, nous ne ferons donc intervenir que le seul petit paramètre  $\varepsilon$ .

FIG. 4.1 – Structure 3D élancée périodique  $\Omega^\varepsilon$ 

Le point de départ de la méthode des développements asymptotiques est le problème d'élasticité 3D, posé sur  $\Omega^\varepsilon$ .

Une échelle locale est alors introduite en posant  $\mathbf{y} := \mathbf{x}/\varepsilon$ , soit  $y_i = x_i/\varepsilon$ , l'échelle globale étant paramétrée par  $\mathbf{z} := z_3 = x_3$ .

Ce changement de variable se traduit au niveau d'une fonction quelconque par la transformation :  $\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{y}, z_3)(\varepsilon)$  et pour les opérateurs du problème d'élasticité par une relation du type  $\mathbf{e}_x^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{e}_y(\mathbf{u}) + \mathbf{e}_z(\mathbf{u})$  dans le cas de la déformation.

L'étape suivante consiste à définir les ordres de grandeur des différentes données du problème en fonction du petit paramètre  $\varepsilon$  : loi de comportement, efforts extérieurs volumiques et surfaciques (sur le contour latéral de la poutre), et déplacements ou efforts imposés aux extrémités de la poutre.

Enfin, on recherche le déplacement sous la forme d'un développement asymptotique :

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}, z_3)(\varepsilon) = \hat{u}_\alpha^0(z_3) \mathbf{e}_\alpha + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{y}, z_3) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{y}, z_3) + \dots \quad (4.1)$$

où chaque fonction  $\mathbf{u}^k(\mathbf{y}, z_3)$ ,  $k \geq 1$ , est périodique par rapport à la variable  $y_3$ , ce que l'on notera simplement par périodique dans la suite.

En réécrivant alors le problème d'élasticité 3D en tenant compte des opérations précédentes, on obtient une série de problèmes, à chaque puissance de  $\varepsilon$ .

Il s'avère que la propriété de périodicité locale de  $\mathbf{u}^k(\mathbf{y}, z_3)$  joue le rôle de conditions aux limites, si bien que ces problèmes sont en fait posés sur la période 3D mise à l'échelle  $Y$ . Ces problèmes seront donc dits **cellulaires** ou **microscopiques**. Leur résolution permet de déterminer la dépendance de la solution  $\mathbf{u}(\mathbf{y}, z_3)(\varepsilon)$  en fonction de la variable microscopique  $\mathbf{y}$ . La dépendance vis à vis de la variable macroscopique  $z_3$  est déterminée par résolution des problèmes **macroscopiques**, dont la formulation découle des conditions d'existence de solution aux problèmes cellulaires. Les conditions aux limites de ces problèmes macroscopiques sont enfin obtenues à partir des conditions aux limites du problème 3D initial sur les sections extrêmes  $S_0^\varepsilon$  et  $S_L^\varepsilon$ .

### 4.3 Les problèmes cellulaires

Les problèmes locaux sont obtenus en considérant les termes des équations d'équilibre à un ordre  $\varepsilon^k$  donné. Ces problèmes sont de la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}^{k+1} = -\operatorname{div}_z \boldsymbol{\sigma}^k - \mathbf{f}^k ; & \boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}^{k+1} ; & \mathbf{e}^{k+1} = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{k+2}) + \mathbf{e}_z(\mathbf{u}^{k+1}) \text{ dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}^{k+1} & \text{sur } \partial Y_{b1} \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial Y_{b2} \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} \text{ et } \mathbf{u}^{k+2} & \text{périodiques} \end{cases} \quad (4.2)$$

où les efforts extérieurs  $f_i^k$  et  $g_i^k$  sont non nuls pour une seule valeur de  $k$ , déterminée d'après les hypothèses sur les ordres de grandeur de ces efforts. D'autre part,  $\partial Y_{b1}$  représente le contour latéral de la période (soumis à des efforts surfaciques extérieurs), alors que  $\partial Y_{b2}$  correspond à un contour interne, libre d'efforts.

Nous donnons ci-après les résultats principaux issus de la résolution des problèmes locaux.

Le premier problème local est obtenu pour  $k = -1$ . On le résout formellement en considérant  $\hat{u}_\alpha^0$  (c'est-à-dire en fait  $\mathbf{e}_z(\hat{u}_\alpha^0 \mathbf{e}_\alpha)$ ) comme une donnée du problème. On montre alors sans difficulté que sa solution est analytique et donnée par  $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{e}^0 = \mathbf{0}$  et :

$$\mathbf{u}^1 = \hat{u}_i^1(z_3) \mathbf{e}_i + \varphi^1(z_3)(y_1 \mathbf{e}_2 - y_2 \mathbf{e}_1) - y_\alpha \partial_3 \hat{u}_\alpha^0(z_3) \mathbf{e}_3 \quad (4.3)$$

ce qui traduit un déplacement d'ensemble de la cellule, de translation  $\hat{\mathbf{u}}^1$ , de rotation de torsion  $\varphi^1$ , les pentes  $\partial_3 \hat{u}_\alpha^0$  étant associées à la flexion (on note  $\partial_3 := \partial/\partial z_3$ ). Par la suite, ce type de solution correspondant à un mouvement d'ensemble sera notée  $\hat{\mathbf{u}}^i(y_\alpha, z_3)$ , soit à cet ordre  $\hat{\mathbf{u}}^1$ .

A l'ordre supérieur ( $k = 0$ ), la donnée du problème est  $\mathbf{e}_z(\mathbf{u}^1)$ . Compte tenu de la forme de  $\mathbf{u}^1$  obtenue auparavant, on peut décomposer  $\mathbf{e}_z(\mathbf{u}^1)$  en une partie dépendant de  $\mathbf{e}_z(\hat{u}_\alpha^1 \mathbf{e}_\alpha)$  (qui va donner lieu à une solution  $\hat{\mathbf{u}}^2$  de la même nature qu'à l'ordre précédent) et une autre, fonction d'une **déformation globale d'ordre 1**, définie par  $\hat{\mathbf{e}}^1(z_3) = {}^t\{\partial_3 \hat{u}_3^1(z_3), \partial_{33} \hat{u}_1^0(z_3), \partial_{33} \hat{u}_2^0(z_3), \partial_3 \varphi^1(z_3)\}$ . Ainsi,  $\hat{\mathbf{e}}^1$  est constituée d'une extension, de deux courbures, et d'un taux de torsion. Par linéarité, la solution du problème à cet ordre s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^2 = \hat{\mathbf{u}}^2(\mathbf{y}, z_3) + \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{e}}^1(z_3) \\ \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) = [\boldsymbol{\chi}^{1E}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\chi}^{1C_1}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\chi}^{1C_2}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\chi}^{1T}(\mathbf{y})] \end{cases} \quad (4.4)$$

alors que la solution en contraintes sera notée par analogie  $\boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{y}, z_3) = \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{e}}^1(z_3)$ , où l'on a  $\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) = [\boldsymbol{\tau}^{1E}, \boldsymbol{\tau}^{1C_1}, \boldsymbol{\tau}^{1C_2}, \boldsymbol{\tau}^{1T}]$ . Ainsi,  $(\boldsymbol{\chi}^{1E}, \boldsymbol{\tau}^{1E})$  représente la solution du problème local à extension unitaire imposée, c'est-à-dire avec comme données  $\mathbf{e}_z(\hat{u}_\alpha^1 \mathbf{e}_\alpha) = \mathbf{0}$  et  $\hat{\mathbf{e}}^1(z_3) = {}^t\{1, 0, 0, 0\}$ .

A l'ordre suivant ( $k = 1$ ), les données du problème local proviennent de  $\mathbf{div}_z \boldsymbol{\sigma}^1$  et de  $\mathbf{e}_z(\mathbf{u}^2)$ . Il apparaît aussi à cet ordre une contribution des efforts volumiques et surfaciques. Ces données mettent donc en jeu :

- $\mathbf{e}_z(\hat{u}_\alpha^2 \mathbf{e}_\alpha)$
- une déformation globale d'ordre 2 définie par  $\hat{\mathbf{e}}^2(z_3) = {}^t\{\partial_3 \hat{u}_3^2, \partial_{33} \hat{u}_1^1, \partial_{33} \hat{u}_2^1, \partial_3 \varphi^2\}$
- le **premier gradient de la déformation globale d'ordre 1** :  $\partial_3 \hat{\mathbf{e}}^1(z_3)$
- les chargements volumiques et surfaciques non nuls à cet ordre

Il en résulte que la solution de ce problème s'écrit, par linéarité :

$$\mathbf{u}^3 = \hat{\mathbf{u}}^3(\mathbf{y}, z_3) + \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\chi}^2(\mathbf{y}) \partial_3 \hat{\mathbf{e}}^1(z_3) + \hat{\mathbf{u}}_{part}^3(\mathbf{y}, z_3) \quad (4.5)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}_{part}^3(\mathbf{y}, z_3)$  est la solution correspondant aux efforts extérieurs imposés. Pour les contraintes, la solution du problème est donnée par  $\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{y}, z_3) = \boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{y}) \partial_3 \hat{\mathbf{e}}^1(z_3) + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{part}^2(\mathbf{y}, z_3)$ .

Signalons à ce niveau que c'est pour la première fois à cet ordre que les conditions nécessaires d'existence d'une solution ne sont pas satisfaites automatiquement. Ces conditions peuvent s'exprimer sur  $\partial_3 \hat{\mathbf{e}}^1$  et les efforts volumiques et surfaciques. Il faut en tenir compte pour pouvoir définir des problèmes bien posés dont les solutions sont les composantes de  $\boldsymbol{\chi}^2$  d'une part, et  $\hat{\mathbf{u}}_{part}^3$  d'autre part.

Par récurrence, la résolution des problèmes locaux conduit à l'expression formelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}, z_3)(\varepsilon) &= \hat{u}_\alpha^0(z_3) \mathbf{e}_\alpha \\ &+ \varepsilon^1 [\hat{\mathbf{u}}^1(\mathbf{y}, z_3)] \\ &+ \varepsilon^2 [\hat{\mathbf{u}}^2(\mathbf{y}, z_3) + \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^1(z_3)] \\ &+ \varepsilon^3 [\hat{\mathbf{u}}^3(\mathbf{y}, z_3) + \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\chi}^2(\mathbf{y}) \cdot \partial_3 \hat{\mathbf{e}}^1(z_3) + \hat{\mathbf{u}}_{part}^3(\mathbf{y}, z_3)] \\ &+ \varepsilon^4 [\hat{\mathbf{u}}^4(\mathbf{y}, z_3) + \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}^3(z_3) + \boldsymbol{\chi}^2(\mathbf{y}) \cdot \partial_3 \hat{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\chi}^3(\mathbf{y}) \cdot \partial_{33} \hat{\mathbf{e}}^1(z_3) + \hat{\mathbf{u}}_{part}^4(\mathbf{y}, z_3)] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

et pour les contraintes, on a :

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{y}, z_3)(\varepsilon) = & \varepsilon^1[\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{e}}^1(z_3)] \\ & + \varepsilon^2[\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{y}) \cdot \partial_3 \dot{\mathbf{e}}^1(z_3) + \dot{\boldsymbol{\tau}}_{part}^2(\mathbf{y}, z_3)] \\ & + \varepsilon^3[\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y}) \cdot \dot{\mathbf{e}}^3(z_3) + \boldsymbol{\tau}^2(\mathbf{y}) \cdot \partial_3 \dot{\mathbf{e}}^2(z_3) + \boldsymbol{\tau}^3(\mathbf{y}) \cdot \partial_{33} \dot{\mathbf{e}}^1(z_3) + \dot{\boldsymbol{\tau}}_{part}^3(\mathbf{y}, z_3)] \\ & + \dots\end{aligned}\quad (4.7)$$

Et dans ces expressions, la résolution des problèmes locaux fournit les termes  $\boldsymbol{\chi}^k(\mathbf{y}), \boldsymbol{\tau}^k(\mathbf{y})$  et  $\dot{\mathbf{u}}_{part}^k(\mathbf{y}, z_3), \dot{\boldsymbol{\tau}}_{part}^k(\mathbf{y}, z_3)$ . En général, ces champs sont calculés numériquement. Il existe toutefois quelques solutions analytiques dans le cas homogène isotrope pour des poutres à section constante (Trabucho et Viaño, 1996), et les plaques (Dauge *et al.*, 1999).

#### 4.4 Les problèmes macroscopiques

Les problèmes macroscopiques vont permettre de calculer la partie macroscopique des développements (4.6), (4.7), c'est-à-dire les termes  $\dot{\mathbf{u}}^k(z_3, y_\alpha)$  et  $\dot{\mathbf{e}}^k(z_3)$ , dépendant de la variable lente  $z_3$ , et solution de problèmes globaux monodimensionnels. Nous exposons dans cette section l'obtention des équations régissant ces problèmes, leur résolution sera abordée dans la section suivante.

Comme indiqué auparavant, les équations d'équilibre de ces problèmes sont issues des conditions d'existence de solution des problèmes cellulaires, voir (Buannic et Cartraud, 2001) (joint à ce mémoire) section 5.1 pour plus de détails. Ces équations s'écrivent à l'ordre  $k$  :

$$\begin{cases} \partial_3 N^k(z_3) + q_3^k(z_3) = 0 \\ \partial_{33} M_\alpha^k(z_3) - q_\alpha^k(z_3) = 0 \\ \partial_3 M_3^k(z_3) + \gamma^k(z_3) = 0 \end{cases}\quad (4.8)$$

faisant intervenir les moyennes sur la période des contraintes intégrées classiques de poutre (effort normal, moments de flexion et moment de torsion) définies par (on note  $\langle . \rangle := \frac{1}{l_3} \int_{Y^*} . dY$ , où  $l_3$  est la longueur de la période mise à l'échelle  $Y$ ) :

$$\begin{cases} N^k(z_3) & = \langle \sigma_{33}^k(\mathbf{y}, z_3) \rangle \\ M_\alpha^k(z_3) & = \langle -y_\alpha \sigma_{33}^k(\mathbf{y}, z_3) \rangle \\ M_3^k(z_3) & = \langle -y_2 \sigma_{13}^k(\mathbf{y}, z_3) + y_1 \sigma_{23}^k(\mathbf{y}, z_3) \rangle \end{cases}\quad (4.9)$$

Dans (4.8), les termes  $q_i^k$  et  $\gamma^k$  s'expriment en fonction des efforts répartis, et sont non nuls seulement pour une valeur de  $k$ .

Par la suite, on notera

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^k(z_3) = {}^t\{N^k, M_1^k, M_2^k, M_3^k\}\quad (4.10)$$

le vecteur des contraintes macroscopiques d'ordre  $k$ .

A l'ordre 1, la loi de comportement macroscopique est de la forme  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1(z_3) = \mathcal{A}^{hom1} \cdot \dot{\mathbf{e}}^1(z_3)$ , où  $\mathcal{A}^{hom1}$  s'obtient simplement à partir de la solution locale en contrainte  $\boldsymbol{\tau}^1(\mathbf{y})$  et des relations (4.9).

Aux ordres supérieurs, si les équations d'équilibre sont de la même forme qu'au premier ordre, les relations constitutives, en revanche, changent. On obtient en effet, d'après (4.7) (par la suite, on note  $\partial_3^k := \partial^k / \partial z_3^k$ ) :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^k(z_3) = \mathcal{A}^{hom1} \cdot \dot{\mathbf{e}}^k(z_3) + \mathcal{A}^{hom2} \cdot \partial_3 \dot{\mathbf{e}}^{k-1}(z_3) + \mathcal{A}^{hom3} \cdot \partial_{33} \dot{\mathbf{e}}^{k-2}(z_3) + \dots \\ \dots + \mathcal{A}^{homk} \cdot \partial_3^{k-1} \dot{\mathbf{e}}^1(z_3) + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{part}^k(z_3) \end{cases}\quad (4.11)$$

Et dans cette expression, on note que  $\mathcal{A}^{homk}$  est obtenu en considérant le problème cellulaire d'ordre  $k-1$  avec comme donnée le  $(k-1)^{eme}$  gradient de déformation macroscopique. D'autre part,  $\acute{\sigma}_{part}^k$  se calcule sans difficulté à partir de la solution particulière locale  $\acute{\tau}_{part}^k$  par un processus d'intégration sur la période.

En fait, on peut réécrire cette dernière relation sous une autre forme. En effet, les solutions particulières  $\acute{\tau}_{part}^k$  sont associées au chargement extérieur. Or, ce chargement se retrouve dans les équations différentielles des problèmes macroscopiques, si bien qu'on peut l'exprimer en fonction des gradients de déformation macroscopique. Il s'ensuit que (4.12) peut être transformée en :

$$\acute{\sigma}^k(z_3) = \mathcal{A}^{hom1} \cdot \acute{e}^k(z_3) + \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{A}^{*hom(i+1)} \cdot \partial_3^i \acute{e}^{k-i}(z_3) \quad (4.12)$$

avec  $\mathcal{A}^{*hom(i+1)}, i \geq 1$  qui dépend du chargement extérieur, et ne représente donc pas une loi de comportement. C'est pourquoi on parle de tenseur quasi-matériel (Boutin, 1996).

## 4.5 Calcul du développement asymptotique

Il est opportun à ce stade d'explicitier la mise en oeuvre de la méthode des développements asymptotiques. Notre objectif est de montrer comment on passe alternativement des problèmes microscopiques aux problèmes macroscopiques, pour calculer les termes successifs des développements asymptotiques. On note que jusqu'alors, on a seulement exposé la façon d'obtenir les équations différentielles macroscopiques, mais pas les conditions aux limites associées aux extrémités de la poutre. Ce point sera traité ultérieurement, et on admettra pour l'instant qu'à chaque ordre on est capable de définir ces conditions aux limites.

Le premier problème à résoudre est le problème cellulaire d'ordre 0, dont on tire  $\chi^1(\mathbf{y}), \tau^1(\mathbf{y})$  et par suite la loi de comportement globale  $\mathcal{A}^{hom1}$ . En introduisant la relation  $\acute{\sigma}^1(z_3) = \mathcal{A}^{hom1} \cdot \acute{e}^1(z_3)$  dans les équations d'équilibre du problème macroscopique d'ordre 1, on obtient un système différentiel d'ordre 12 (6 conditions aux limites seront donc requises à chaque extrémité). **Ce système généralise les équations du modèle de Navier-Bernoulli**, dans le sens où la matrice  $\mathcal{A}^{hom1}$  est symétrique, et donc non nécessairement diagonale, d'où l'existence possible de couplages mécaniques. Une autre analogie avec le modèle de Navier-Bernoulli est que les contraintes issues du problème cellulaire d'ordre 0 sont associées à des efforts tranchants nuls.

La résolution du problème macroscopique d'ordre 1 fournit alors la déformation macroscopique  $\acute{e}^1(z_3)$ , et les variables cinématiques associées, c'est-à-dire  $\{\hat{u}_\alpha^0(z_3), \hat{u}_3^1(z_3), \varphi^1(z_3)\}$ .

On s'attaque ensuite au  $2^{eme}$  problème cellulaire (ordre 1), pour obtenir  $\chi^2(\mathbf{y}), \tau^2(\mathbf{y}), \mathcal{A}^{*hom2}$ , ainsi que  $\acute{\mathbf{u}}_{part}^3(\mathbf{y}, z_3), \acute{\tau}_{part}^2(\mathbf{y}, z_3)$ . La loi de comportement du problème macroscopique d'ordre 2 s'écrit d'après (4.12)  $\acute{\sigma}^2(z_3) = \mathcal{A}^{hom1} \cdot \acute{e}^2(z_3) + \mathcal{A}^{*hom2} \cdot \partial_3 \acute{e}^1(z_3)$ , le dernier terme étant connu d'après la résolution du  $2^{eme}$  problème cellulaire, et du problème macroscopique d'ordre 1. Ainsi, en injectant cette loi constitutive dans les équations d'équilibre du problème macroscopique d'ordre 2, et en passant le terme connu dans le second membre, on se retrouve comme à l'ordre précédent avec un système différentiel d'ordre 12. La solution de ce problème donne  $\acute{e}^2(z_3)$  et  $\{\hat{u}_\alpha^1(z_3), \hat{u}_3^2(z_3), \varphi^2(z_3)\}$ .

Et le processus se poursuit par récurrence.

Il s'agit là d'une application classique de la méthode des développements asymptotiques. On remarque que la résolution du problème macroscopique d'ordre  $k$  suppose la résolution préalable des problèmes macroscopiques et des problèmes cellulaires d'ordre inférieur ou égal à  $k-1$ . Les solutions locales ainsi obtenues permettent par ailleurs une relocalisation de la solution macroscopique partout dans la période 3D, cf. (4.6), (4.7).

La résolution des problèmes cellulaires à chaque ordre est indispensable pour le calcul des termes successifs des développements asymptotiques. On peut en revanche proposer une méthode pour obtenir en une seule étape la série complète correspondant à la partie macroscopique de la solution. Ceci fait l'objet de la section suivante.

## 4.6 Problème macroscopique sur le développement asymptotique complet

La résolution des problèmes macroscopiques à chaque ordre est fastidieuse et amoindrit l'intérêt de la méthode des développements asymptotiques. En outre, une question pratique se pose : jusqu'à l'ordre du développement asymptotique doit-on calculer pour obtenir une bonne approximation de la solution 3D ?

Pour contourner cette question, nous proposons ici une approche qui permet de définir un problème portant sur le **développement asymptotique macroscopique complet**, c'est-à-dire  $\hat{u}_\alpha^0 \mathbf{e}_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \hat{\mathbf{u}}^k$ . Nous exposons ci-après le principe de cette approche.

Considérons à titre d'exemple le cas d'une poutre périodique sollicitée en flexion dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ , par l'intermédiaire d'un chargement macroscopique noté  $q_1^1$ . Pour simplifier l'exposé (sans restreindre pour autant le caractère général de la démarche), on suppose que la loi de comportement macroscopique d'ordre 1 représentée par  $\mathcal{A}^{hom1}$  est diagonale. Dans ces conditions, on montre sans difficultés que les équations macroscopiques à chaque ordre associées à la flèche dans la direction  $\mathbf{e}_1$  s'écrivent (équations (4.8)<sub>2</sub>) avec  $\alpha = 1$ ) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^0(z_3) - q_1^1 = 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^1(z_3) + \mathcal{A}_{22}^{*hom2} \partial_3^5 \hat{u}_1^0(z_3) = 0 \\ \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^2(z_3) + \mathcal{A}_{22}^{*hom2} \partial_3^5 \hat{u}_1^1(z_3) + \mathcal{A}_{22}^{*hom3} \partial_3^6 \hat{u}_1^0(z_3) = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour avoir un problème portant sur le développement asymptotique complet  $\hat{u}_1^{(\infty)} := \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_1^k$ , la solution de facilité consiste à former la somme des équations (4.13) affectées du coefficient  $\varepsilon^k$ . On obtient alors (on montre sans difficulté que  $\varepsilon^k \mathcal{A}^{*hom(k+1)}$  est indépendant de  $\varepsilon$ , cf. par exemple (Boutin, 1996)) :

$$\left( \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathcal{A}_{22}^{*hom(k+1)} \partial_3^{k+4} \right) \hat{u}_1^{(\infty)} - q_1^1 = 0 \quad (4.14)$$

Ce type de démarche apparaît notamment dans (Boutin, 1996)) dans le cas de la périodicité 3D, et où l'équation précédente est tronquée à  $k = 2$ . L'auteur constate alors que l'équation aux dérivées partielles obtenue contient un opérateur elliptique, et deux autres, de nature différente. De même, dans (Chen et Fish, 2001), il y a une troncature à  $k = 2$ , et c'est un problème de dynamique qui est considéré. Dans cette référence, on qualifie alors l'équation obtenue de "mauvaise", car nécessitant plus de conditions aux limites qu'on est capable d'en définir. On retrouve ces deux aspects dans l'équation (4.14), puisque seul le premier terme est d'ordre 4 (comme l'est l'équation de flexion du problème macroscopique au premier ordre), et que lorsque  $k$  augmente, l'ordre de dérivation spatiale du système et donc le nombre de conditions aux limites requis également. Ainsi, (4.14) peut être qualifiée d'équation différentielle d'ordre infini.

Dans (Bakhvalov et Panasenko, 1989), on trouve également une équation d'ordre infini, portant sur la partie macroscopique du développement asymptotique. L'approche est différente de celle présentée auparavant, puisque l'équation est obtenue après avoir injecté le développement asymptotique complet du déplacement dans l'opérateur associé au problème 3D hétérogène. Cette approche

est reprise dans (Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000).

Ce qui importe à ce stade est que le système différentiel est d'ordre infini, et n'est donc pas exploitable en l'état puisqu'on ne pourra définir une infinité de conditions aux limites. Pour se ramener à une équation d'ordre fini, une solution consiste à tronquer. Il s'agit cependant d'un problème très délicat, car les résultats obtenus sont très sensibles à la relation sur laquelle est effectuée la troncature.

Ainsi, dans (Askes *et al.*, 2002), les auteurs étudient un système discret, monodimensionnel, de masses et ressorts alternés selon la direction  $\mathbf{x}$ . Ils obtiennent alors pour le milieu continu équivalent une loi de comportement de la forme  $\sigma = E(e + a\partial^2 e/\partial x^2 + b\partial^4 e/\partial x^4 + \dots)$ , avec  $a$  et  $b$  positifs. Ils montrent alors que si on tronque la relation précédente au  $2^{eme}$  terme, on a un système instable et un problème macroscopique qui peut être mal posé, ce qui conduit à des comportements irréalistes. En revanche, le modèle où l'on considère le  $4^{eme}$  gradient de la déformation fournit une bonne approximation du milieu discret. D'autre part, dans (Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000), il y a une étude approfondie du problème de la troncature. Ainsi, les auteurs montrent que celle-ci ne doit pas porter sur les équations différentielles du problème macroscopique (car il y a un risque de perte d'ellipticité), mais sur l'énergie.

Il est cependant possible de conserver comme inconnue le développement asymptotique macroscopique complet, tout en lui associant une équation différentielle d'ordre fini. Pour ce faire, il suffit, à un ordre donné dans les équations (4.13), d'exploiter les équations macroscopiques aux ordres précédents. Ainsi, dans (4.13)<sub>2</sub>, compte tenu de (4.13)<sub>1</sub>, on écrit  $\partial_3^5 \hat{u}_1^0 = (\mathcal{A}_{22}^{hom1})^{-1} \partial_3 q_1^1$ . De même, dans (4.13)<sub>3</sub>, on a d'après (4.13)<sub>2</sub>:  $\partial_3^5 \hat{u}_1^1 = -(\mathcal{A}_{22}^{hom1})^{-1} \mathcal{A}_{22}^{*hom2} \partial_3^6 \hat{u}_1^0$ , que l'on transforme en  $\partial_3^5 \hat{u}_1^1 = -(\mathcal{A}_{22}^{hom1})^{-2} \mathcal{A}_{22}^{*hom2} \partial_{33} q_1^1$ . Si bien que par récurrence on peut réécrire les équations (4.13) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^0(z_3) = q_1^1 \\ \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^1(z_3) = f^1(\mathcal{A}_{22}^{hom1}, \partial_3 q_1^1) \\ \mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^2(z_3) = f^2(\mathcal{A}_{22}^{hom1}, \mathcal{A}_{22}^{*hom2}, \partial_3 q_1^1, \partial_{33} q_1^1) \\ \dots \end{cases} \quad (4.15)$$

d'où par sommation :

$$\mathcal{A}_{22}^{hom1} \partial_3^4 \hat{u}_1^{(\infty)} = q_1^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f^k \quad (4.16)$$

avec un second membre dont le calcul ne présente pas de difficultés majeures (à condition que le chargement  $q_1^1$  soit infiniment dérivable).

Le grand intérêt de cette dernière équation est que son ordre est identique à celui du problème macroscopique du  $1^{er}$  ordre. Ce type de résultats se généralise à l'ensemble des problèmes macroscopiques de poutre (traction, flexions et torsion, qui peuvent être couplés), cf. (Buannic, 2000). On montre alors que le problème portant sur le développement asymptotique complet de la partie macroscopique du déplacement donne un système différentiel d'ordre 12. On peut également appliquer cette approche au cas de l'homogénéisation périodique d'une plaque ou d'un milieu 3D, et définir ainsi un système différentiel d'ordre 8 ou avec un opérateur elliptique respectivement. Par la suite, on appellera ce problème le **problème macroscopique complet**

Il est remarquable que dans tous les cas, *les équations différentielles du problème macroscopique complet sont identiques à celles du problème macroscopique du  $1^{er}$  ordre*, aux chargements  $\varepsilon^k f^k$  près. Nous verrons au chapitre suivant que ces deux problèmes macroscopiques se distinguent

également par leurs conditions aux limites, quand les effets de bords sont pris en compte.

Bien entendu, définir un problème macroscopique complet n'a de sens que si la série converge, ce qui n'est pas toujours le cas (Bourgeois, 2000). Il s'agit là d'une difficulté réelle car il paraît très difficile d'estimer a priori la convergence de la série, qui dépend des caractéristiques géométriques et matérielles de la période, du nombre de périodes dans le problème étudié, et du chargement. Signalons pour conclure sur ce point la référence (Andrianov et Awrejcewicz, 2001) où les auteurs proposent différentes approches pour calculer des séries divergentes.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté de façon classique la méthode des développements asymptotiques à 2 échelles, et la série des problèmes microscopiques et macroscopiques à laquelle elle conduit. Nous avons souligné la contribution des gradients de déformation macroscopiques dans les termes d'ordre supérieur, et nous y reviendrons en conclusion à cette deuxième partie, où nous aborderons l'interprétation des résultats obtenus avec la méthode des développements asymptotiques et leur relation avec d'autres théories.

Nous avons par ailleurs étudié le calcul pratique du développement asymptotique, et montré qu'on pouvait obtenir la série macroscopique complète en résolvant un seul problème macroscopique, dit complet. Ce problème est défini avec un opérateur différentiel classique, les effets d'ordre supérieur se manifestant dans l'expression du chargement. A notre connaissance, ce résultat est nouveau dans la littérature. En effet, s'il existe des travaux dans lesquels on calcule le développement asymptotique complet, ses termes sont calculés individuellement, c'est-à-dire en résolvant plusieurs problèmes macroscopiques.

La mise en oeuvre de la méthode est donc facile. En effet, si on utilise la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes cellulaires, il s'avère que c'est la même matrice raideur qui intervient à tous les ordres. D'autre part, le problème macroscopique complet est relativement classique, puisque ses seules spécificités se manifestent sur le chargement.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés aux équations différentielles des problèmes microscopiques, sans chercher à définir les conditions aux limites associées. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

# Bibliographie

- Andrianov, I. et Awrejcewicz, J. (2001). New trends in asymptotic approaches: Summation and interpolation methods. *Appl. Mech. Rev.*, **54**, 69–92.
- Askes, H., Suiker, A., et Sluys, L. (2002). A classification of higher-order strain-gradient models - linear analysis. *Arch. Appl. Mech.*, **72**, 171–188.
- Bakhvalov, N. et Panasenko, G. (1989). *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer.
- Bourgeois, S. (2000). Homogénéisation d'une poutre périodique: limite des développements asymptotiques. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **328**, 719–725.
- Boutin, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 1023–1051.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2001). Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 1: Asymptotic expansion method. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 7139–7161.
- Chen, W. et Fish, J. (2001). A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *J. Appl. Mech.*, **68**, 153–161.
- Dauge, M., Gruais, I., et Rössle, A. (1999). The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 305–345.
- Kalamkarov, A. et Kolpakov, A. (1997). *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Wiley.
- Kolpakov, A. (1991). Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *J. Appl. Math. Mech.*, **55**, 358–365.
- Sanchez-Hubert, J. et Sanchez-Palencia, E. (1992). *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation*. Masson.
- Smyshlyaev, V. et Cherednichenko, K. (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1325–1357.
- Trabucho, L. et Viaño, J. (1996). Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487–974. North-Holland.



## Chapitre 5

# Effets de bords

### 5.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons présenté les équations différentielles des problèmes macroscopiques, et l'objectif de ce chapitre est de les compléter pour pouvoir calculer leur solution. Or, on constate aisément que les développements asymptotiques (4.6), (4.7) sur le déplacement et les contraintes sont en général incompatibles avec des conditions aux limites arbitraires aux extrémités de la poutre. Ainsi, il n'est pas possible de satisfaire exactement ces conditions aux limites, d'où l'existence d'effets de bords. En ce sens, la solution asymptotique obtenue précédemment peut-être qualifiée d'**intérieure** (outer expansion), dans la mesure où elle vérifie toutes les équations du problème hétérogène 3D à l'exception des conditions aux limites sur les sections extrêmes.

Pour traiter ce problème d'effets de bords, plusieurs approches sont proposées dans la littérature :

- la première consiste à conserver la description 3D hétérogène au voisinage des bords. De cette façon, on peut prendre en compte de façon exacte les conditions aux limites 3D. On connecte ensuite cette description 3D au modèle macroscopique, utilisé dans la partie intérieure de la poutre. Il s'agit là d'une méthode très séduisante car le modèle 3D hétérogène peut représenter les phénomènes complexes au voisinage des bords, et qu'on passe au modèle macroscopique dès que ces effets localisés se sont atténués. Ainsi, ce modèle **hybride** peut être considéré comme optimum, ou comme le résultat d'un processus adaptatif. De plus avec ce type d'approche, les solutions macroscopique et au voisinage des bords sont calculées en une seule étape.

Pour obtenir les conditions de jonctions entre les deux modèles, on peut utiliser la méthode décrite dans (Panasenko, 1999), (Panasenko, 2000). Cette méthode paraît suffisamment générale, même si pour l'instant elle est présentée sur des cas simples. L'approche Arlequin (Ben Dhia, 1998) peut également être appliquée. Dans cette référence, en 2D, et dans le cas homogène, on superpose un modèle de poutre de Timoshenko utilisé sur toute la longueur de la poutre, et un modèle 2D au voisinage des bords. D'autres exemples, avec une superposition plaque/3D et coque/3D sont donnés dans (Ben Dhia *et al.*, 2003). Cette méthode fournit des résultats très convaincants, et on pourrait proposer une amélioration à sa version actuelle en considérant pour le modèle poutre, plaque ou coque celui associé aux équations différentielles portant sur le développement asymptotique macroscopique complet.

- une autre méthode est fondée sur l'introduction d'un deuxième développement asymptotique (dit extérieur ou inner expansion) de façon à satisfaire de façon exacte les conditions aux limites du problème 3D. Plusieurs variantes existent à ce niveau. Dans plusieurs travaux, la solution au voisinage du bord peut être représentée par ce seul développement asymptotique, ce qui va donner lieu par la suite à un raccord (matching) avec la solution intérieure, voir par exemple (Sanchez-Palencia, 1985). On peut aussi décrire le comportement près du bord par la somme des développements asymptotiques intérieur et extérieur, cf. entre autres

(Destuynder, 1986), (Dauge *et al.*, 1999) pour les plaques, et (Dumontet, 1990) pour les matériaux composites.

A ce stade, il convient de souligner que la mise en oeuvre de ce type de méthode est lourde et complexe, car il faut résoudre des problèmes hétérogènes de couche limite à chaque ordre.

- une troisième approche consiste à utiliser le modèle macroscopique sur tout le domaine, et à définir des conditions aux limites macroscopiques "appropriées". A ce niveau, l'idée est que le non respect des conditions aux limites 3D produise une erreur qui reste localisée au voisinage des bords. En première analyse, il semble naturel de définir des conditions aux limites approchées de façon à satisfaire *en moyenne* les conditions aux limites 3D, mais rien ne permet de justifier cette démarche. Il existe en revanche une méthode qui fournit les conditions aux limites macroscopiques assurant la décroissance de l'écart entre la solution asymptotique intérieure et la solution exacte quand on s'éloigne des bords. Avec cette méthode, on n'a pas à considérer de développement asymptotique additionnel. Les conditions aux limites macroscopiques sont obtenues à partir de la solution de quelques problèmes auxiliaires, simples, et définis sur un domaine hétérogène 3D identique à celui qui intervient dans les problèmes de couche limite. Cette méthode a été initialement proposée pour l'étude de plaques homogènes en flexion cylindrique (Gregory et Wan, 1984), puis a été étendue à d'autres situations (cf. (Wan, 2003) et les références qui y sont incluses). Elle a également été utilisée pour des poutres à section constante (Fan, 1989), (Duva et Simmonds, 1991). C'est cette méthode que nous allons appliquer ici.

Cette méthode est exposée dans ce chapitre. Nous mettrons l'accent sur ses ingrédients de base, puis passerons aux conditions aux limites ainsi obtenues et à leur interprétation. Pour plus de détails, on se reportera à (Buannic et Cartraud, 2001), joint à ce mémoire, ou encore au chapitre 3 de (Buannic, 2000).

## 5.2 Principe de la méthode

Les solutions asymptotiques en déplacement et en contrainte (4.6), (4.7) dépendent de la variable microscopique selon des fonctions solution des problèmes cellulaires. Comme indiqué auparavant, il est en général impossible que ces fonctions permettent de représenter exactement des conditions aux limites arbitraires aux extrémités de la poutre, ce qui donne lieu aux effets de bords. La solution asymptotique précédente est donc une solution intérieure, et sera notée dorénavant  $(\mathbf{u}^{(I)}, \boldsymbol{\sigma}^{(I)})$ , ce qui permet de la distinguer de la solution exacte  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)$ .

La méthode présentée dans (Gregory et Wan, 1984) a pour objectif de trouver les conditions aux limites des problèmes macroscopiques pour que l'écart entre  $(\mathbf{u}^{(I)}, \boldsymbol{\sigma}^{(I)})$  et  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon)$  ne soit significatif qu'au voisinage des extrémités de la poutre.

Considérons le cas des conditions aux limites à l'extrémité  $S_0^\varepsilon(x_3 = 0)$  de la poutre, et déterminons les conditions aux limites correspondantes pour les problèmes macroscopiques. La méthode repose sur l'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, qu'on applique à la poutre de sections extrêmes  $S_0^\varepsilon$  et  $S_L^\varepsilon$ . Dans le cas particulier où aucun effort volumique ou surfacique n'est appliqué, ce théorème conduit à la relation :

$$\int_{S_0^\varepsilon \cup S_L^\varepsilon} \sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} dx_1 dx_2 = \int_{S_0^\varepsilon \cup S_L^\varepsilon} \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)} dx_1 dx_2 \quad (5.1)$$

où (1) et (2) désignent deux états élastostatiques.

On choisit alors pour l'état (1) la différence entre la solution asymptotique intérieure et la solution exacte. En imposant que cette différence tende vers 0 quand on s'éloigne du bord  $S_0^\varepsilon$ ,

on annule dans (5.1) l'intégrale sur le bord  $S_L^\varepsilon$  (ceci revient à considérer une poutre semi-infinie ( $L \rightarrow \infty$ )). On aboutit finalement à :

$$\int_{S_0^\varepsilon} \left( (\sigma_{i3}^{(I)} - \sigma_{i3}^\varepsilon) u_i^{(2)} - \sigma_{i3}^{(2)} (u_i^{(I)} - u_i^\varepsilon) \right) dx_1 dx_2 = 0 \quad (5.2)$$

et on rappelle que les exposants  $(I)$  et  $\varepsilon$  sont associés respectivement aux solutions asymptotique intérieure et exacte.

Cette relation est donc une condition nécessaire pour avoir la décroissance des effets de bords. La détermination précise des conditions aux limites macroscopiques passe par la résolution de problèmes auxiliaires qui fournissent  $(\mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)})$ . Ces conditions aux limites sont obtenues à chaque ordre en reportant les développements asymptotiques (4.6), (4.7) de  $(\mathbf{u}^{(I)}, \boldsymbol{\sigma}^{(I)})$  dans (5.2). Comme les problèmes macroscopiques sont d'ordre 12, il faut définir 6 conditions aux limites à chaque extrémité, et donc considérer 6 problèmes auxiliaires pour avoir 6 solutions (2).

### 5.3 Application de la méthode

Nous donnons ci-après les résultats principaux concernant les conditions aux limites macroscopiques obtenues avec la méthode d'analyse de la décroissance des effets de bords. L'expression détaillée des conditions aux limites figure dans (Buannic et Cartraud, 2001), joint à ce mémoire. Trois cas de figure sont à distinguer selon qu'on envisage des conditions aux limites de type contrainte imposée  $\sigma_{i3}^\varepsilon(x_1, x_2, 0) = \bar{\sigma}_{i3}^\varepsilon(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , déplacement imposé, ou mixtes (composante  $\alpha$  en contrainte ou en déplacement, et composante 3 de nature différente). Les résultats mentionnés par la suite correspondent à un chargement appliqué uniquement aux extrémités de la poutre. Dans le cas contraire, la mise en oeuvre de la méthode est techniquement plus difficile.

Pour des conditions aux limites en contraintes, les états (2) sont tout simplement les 6 déplacements de solide rigide, et **la méthode fournit une justification du principe de Saint-Venant**. Ainsi, les conditions aux limites macroscopiques portent sur les efforts et moments résultants du chargement surfacique imposé.

Si les conditions aux limites sont en déplacement, il y a 6 problèmes à résoudre pour déterminer les états (2). Dans ces problèmes, l'extrémité étudiée est encastree (ce qui correspond aux conditions aux limites 3D *homogènes*), et l'autre extrémité est sollicitée de telle manière que la poutre soit en état de traction pure, flexion pure (dans les plans  $\mathbf{e}_1\text{-}\mathbf{e}_3$  ou  $\mathbf{e}_2\text{-}\mathbf{e}_3$ ), flexion simple ou torsion pure unitaires. Ces problèmes sont posés sur une poutre non pas semi-infinie, mais dont la longueur est supérieure à la taille des effets de bords. Pour estimer cette dernière, on peut se reporter à (Stephen et Wang, 1996), où les auteurs proposent une méthode pour calculer le taux de décroissance des phénomènes de couche limite, à partir de l'étude d'une période. On exprime alors formellement les conditions aux limites macroscopiques à chaque ordre en fonction des solutions en contrainte de ces problèmes en  $S_0^\varepsilon$ . On obtient ensuite à chaque ordre ( $k \geq 1$ ) des conditions aux limites de type classique, c'est-à-dire avec une valeur imposée pour toutes les variables cinématiques de la section :  $\hat{u}_\beta^{k-1}(0) = \hat{u}_{\beta_{\text{donné}}}^{k-1}$ ,  $\partial_3 \hat{u}_\beta^{k-1}(0) = \partial_3 \hat{u}_{\beta_{\text{donné}}}^{k-1}$ ,  $\hat{u}_3^k(0) = \hat{u}_{3_{\text{donné}}}^k$  et  $\varphi^k(0) = \varphi_{\text{donné}}^k$ . Ces conditions aux limites ne sont cependant pas usuelles. Ainsi, dans le cas d'un encastrement, on a en général des conditions aux limites non homogènes à partir des problèmes macroscopiques du 2<sup>ème</sup> ordre. D'autre part, il apparaît que ces conditions aux limites introduisent certains couplages : ainsi, si par exemple on a des conditions aux limites en déplacement de type  $u_\alpha^\varepsilon(x_1, x_2, 0) = \bar{u}_\alpha^\varepsilon(x_1, x_2)$ , on constate que  $\bar{u}_2^\varepsilon(x_1, x_2)$  intervient dans les conditions aux limites portant sur  $\hat{u}_1^0(0)$ .

Nous donnons ci-après, à titre d'illustration, les expressions des conditions aux limites macroscopiques portant sur la flèche selon  $\mathbf{e}_1$ , dans le cas où on a sur la section en  $S_0^\varepsilon$  les conditions aux

limites 3D en déplacement  $u_i^\varepsilon(x_1, x_2, 0) = \bar{u}_i^\varepsilon(x_1, x_2)$  :

$$\begin{cases} \hat{u}_1^0(0) = \int_{S_0} \bar{u}_\alpha \sigma_{\alpha 3}^{(2)} dy_1 dy_2 \\ \hat{u}_1^1(0) = 0 \\ \hat{u}_1^{k-1}(0) = - \int_{S_0} \left( \chi_j^1 \mathbf{e}^{k-2}(0) + \chi_j^2 \partial_3 \mathbf{e}^{k-3}(0) \right) \sigma_{j3}^{(2)} dy_1 dy_2 ; \quad k \geq 3 \end{cases} \quad (5.3)$$

avec sommation sur les indices répétés.

Enfin, pour des conditions aux limites mixtes, il y a 3 états (2) correspondant à un déplacement de solide rigide, et 3 autres à calculer. Les conditions aux limites en contrainte conduisent alors à des conditions aux limites macroscopiques classiques sur les contraintes intégrées de poutre (on récupère 3 des 6 conditions aux limites obtenues dans le cas précédent où on avait que des conditions aux limites 3D en contrainte). Les conditions aux limites en déplacement donnent en revanche lieu à des conditions aux limites macroscopiques de forme non classique, par exemple du type  $\hat{u}_3^k(0) + \mathcal{R}(\mathbf{e}^k(0)) = \hat{u}_{3_{\text{donné}}}^k$ , et mettent donc en jeu la valeur de la déformation macroscopique.

On constate donc d'une manière générale que ce sont les conditions aux limites en déplacement qui sont à l'origine de conditions aux limites macroscopiques non standards.

Ceci se confirme quand on s'intéresse aux conditions aux limites du problème macroscopique portant sur le développement asymptotique complet. Ainsi, les conditions aux limites en contrainte donnent des conditions aux limites de type Saint-Venant. Alors que dès qu'on a des conditions aux limites de type déplacement imposé, les conditions aux limites macroscopiques sont encore plus complexes que celles obtenues auparavant, car elles impliquent, outre la déformation macroscopique, sa dérivée.

En pratique, les coefficients intervenant dans l'expression des conditions aux limites cinématiques sont égaux à une intégrale sur la section, portant sur le produit d'un terme provenant de la résolution des problèmes cellulaires avec un terme associé à un état (2), cf. 5.3.

La méthode exposée ici nécessite la résolution d'au plus 6 problèmes pour obtenir les états (2). Pour éviter ces résolutions, on peut utiliser une autre approche (heuristique) qui consiste à satisfaire les conditions aux limites 3D en moyenne. On constate alors qu'on obtient les mêmes conditions aux limites en contraintes que celles obtenues avec la méthode d'analyse de la décroissance des effets de bords. Quant aux conditions aux limites de type cinématique, elles sont de la même forme que celles données par la méthode précédente, avec des coefficients différents, et sans introduire de couplage comme évoqué précédemment.

## 5.4 Conclusion

Comme nous l'avons indiqué en introduction, toute approche prétendant prendre en compte de façon rigoureuse des effets de bords requiert la résolution de problèmes posés sur un domaine hétérogène 3D identique à celui considéré ici. En effet, la longueur de ce domaine doit être supérieure à la taille des effets de bords. De ce point de vue, la méthode choisie ici est tout à fait compétitive en termes de coût de calcul.

Nous l'avons ici présentée dans le cas de poutres, mais on peut également l'appliquer aux plaques pour des problèmes 2D ou axisymétriques (Wan, 2003). Pour les milieux périodiques 3D, à ma connaissance, elle n'a pas été utilisée.

# Bibliographie

- Ben Dhia, H. (1998). Multiscale mechanical problems: the Arlequin method. *C.R.Acad.Sci. Ser. IIB*, **326**, 899–904.
- Ben Dhia, H., Durand, C., et Rateau, G. (2003). Partition 3d/coque par la méthode Arlequin. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume III, 307–314.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2001). Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 2 : Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 7163–7180.
- Dauge, M., Gruais, I., et Rössle, A. (1999). The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 305–345.
- Destuynder, P. (1986). *Une Théorie Asymptotique des Plaques Minces en Elasticité Linéaire*. Masson.
- Dumontet, H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1991). The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *J. Appl. Mech.*, **58**, 175–180.
- Fan, H. (1989). *On the Foundations of Beam Theory*. Ph. D. thesis, University of Illinois at Chicago.
- Gregory, R. et Wan, Y. (1984). Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*, **14**, 27–64.
- Panasenko, G. (1999). Asymptotic partial decomposition of variational problems. *C.R.Acad.Sci. Ser. IIB*, **327**, 1185–1190.
- Panasenko, G. (2000). Method of asymptotic partial decomposition of rod structures. *Int. J. of Comput. Civil and Structural Eng.*, **1**, 57–70.
- Sanchez-Palencia, E. (1985). Boundary layers and edge effects in composites. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 122–192. Springer-Verlag.
- Stephen, N. et Wang, P. (1996). On saint-venant's principle in pin-jointed frameworks. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 79–97.
- Wan, F. (2003). Stress boundary conditions for plate bending. *Int. J. Solids Structures*, **40**, 4107–4123.



## Chapitre 6

# Exemples d'application

### 6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre des exemples d'application des modèles asymptotiques d'ordre supérieur. L'objectif est de montrer en particulier que la prise en compte des termes d'ordre supérieur et des effets de bords permet d'obtenir la solution hétérogène 3D avec une bonne précision. Les résultats présentés ici sont tirés de (Buannic, 2000) et de (Buannic et Cartraud, 2000).

Comme nous l'avons déjà souligné, à notre connaissance, les références dans lesquelles sont traités des problèmes aux limites sont rares. Citons (Goldeneveizer *et al.*, 1993), les travaux de Fish, cf. (Fish et Chen, 2001) par exemple, ou des exemples de dynamique sont considérés. On renvoie aussi à (Bourgeois, 2000) pour un cas en statique.

Après avoir rappelé la mise en oeuvre de la méthode, nous présentons des résultats sur des poutres à section constante et sur une plaque périodique en flexion cylindrique.

### 6.2 Mise en oeuvre numérique

Le calcul de la solution asymptotique passe par la résolution successive de trois types de problèmes :

- les problèmes cellulaires;
- les problèmes posés sur un domaine 3D hétérogène supérieur à la taille des effets de bords, pour calculer les solutions (2) qui interviennent dans l'expression des conditions aux limites macroscopiques;
- les problèmes macroscopiques successifs ou le problème macroscopique complet.

Pour la résolution des problèmes locaux, on utilise la méthode des éléments finis, les détails techniques sont exposés au chapitre 7.

Nous nous restreignons ici au cas où aucun effort volumique ou surfacique n'est appliqué à la cellule. Il est alors facile de montrer que le second gradient des déformations macroscopiques est nul à tout ordre. Il s'ensuit qu'il est suffisant de résoudre les problèmes cellulaires aux deux plus bas ordres (i.e. on considère comme donnée une déformation macroscopique ou son premier gradient). D'autre part, dans ce cas, on a  $\mathcal{A}^{hom2} = \mathcal{A}^{*hom2}$  cf. section 4.4.

Les problèmes pour le calcul des solutions (2) ne présentent aucune difficulté particulière, et peuvent être traités par tout code éléments finis standard. En ce qui concerne la longueur du domaine considéré, nous n'avons pas mené d'étude spécifique à ce propos, et avons adopté une longueur de 5 périodes (ou 5 fois les plus grandes dimensions de la section dans le cas d'une section homogène), pour être sûr de majorer la taille des effets de bords. D'autre part, pour faciliter le

calcul des conditions aux limites macroscopiques (où on combine les solutions des problèmes cellulaires et les états (2), cf. (5.3)), on fera en sorte que le maillage de la section extrême soit identique pour ces deux problèmes.

Dans tous les calculs qui suivent, des éléments finis quadratiques ont été utilisés.

Quant aux problèmes macroscopiques ou au problème macroscopique complet, ils admettent une solution analytique ou semi-analytique, facile à obtenir à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Pour valider les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques, un calcul de référence hétérogène 3D sera réalisé. Par la suite, les résultats correspondant à ce calcul seront appelés "SOLUTION E.F. 3D". La confrontation des résultats se fera sur la ligne moyenne géométrique de la section (ou sur le plan moyen de la plaque), en des points où on impose que les champs locaux  $\chi^1, \chi^2$  (définis à un mouvement de solide rigide près) sont nuls. De ce fait, la solution asymptotique en ces points se réduit à sa partie macroscopique. Selon l'ordre de troncature de cette solution, on la nommera "SOLUTION  $\mathcal{O}(1)$ " pour la solution du 1<sup>er</sup> ordre, définie par  $\{\hat{u}_\alpha^0(z_3), \hat{u}_3^1(z_3)\}$  pour une poutre. La solution asymptotique tronquée à l'ordre suivant  $\{\hat{u}_\alpha^0 + \varepsilon \hat{u}_\alpha^1, \hat{u}_3^1 + \varepsilon \hat{u}_3^2\}$  est notée "SOLUTION  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ", et ainsi de suite. Enfin, le développement asymptotique complet sera noté "SOLUTION  $\mathcal{O}(\infty)$ ". Par souci de clarté, nous serons amenés à présenter parfois la contribution des termes du développement asymptotique macroscopique ordre par ordre, mais nous rappelons que la série complète peut être obtenue en une seule étape.

## 6.3 Poutres à section constante

### 6.3.1 Poutre sandwich symétrique à constituants isotropes

Le premier exemple concerne une poutre sandwich symétrique à constituants isotropes, dont la section est représentée figure 6.1. Pour une poutre à section constante (invariante selon l'axe

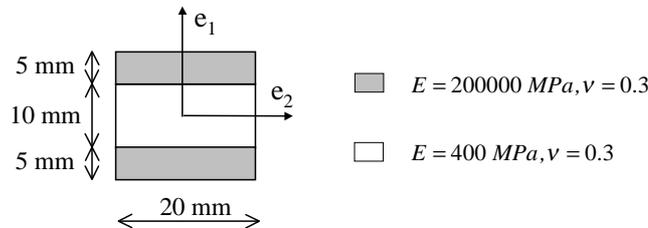


FIG. 6.1 – Caractéristiques géométriques et matérielles du sandwich

d'élongement), les problèmes cellulaires sont 2D, mais on a réalisé des développements en 3D pour le cas général des poutres périodiques. On utilise donc un maillage de la section avec un seul élément fini dans la direction de l'élongement.

En choisissant pour axe de référence de la poutre sa ligne moyenne géométrique, la résolution des problèmes cellulaires fournit un comportement macroscopique avec une matrice  $\mathcal{A}^{hom1}$  diagonale, et une matrice  $\mathcal{A}^{hom2}$  nulle. Ceci résulte des propriétés de symétrie de la cellule de base. Pour les problèmes cellulaires à déformation macroscopique imposée, les déformées obtenues sur le champ total sont données figure 6.2. On vérifie bien que chacune des déformées est due à une composante de la déformation macroscopique imposée. On présente également figure 6.3 les déformées sur le champ périodique  $\chi^2$ , obtenues lors de la résolution des problèmes cellulaires à gradient de déformation macroscopique imposé. Celles-ci mettent en évidence le gauchissement des sections. Dans le cas où on impose un gradient de courbure, soit à un coefficient près un gradient de moment, ce gauchissement

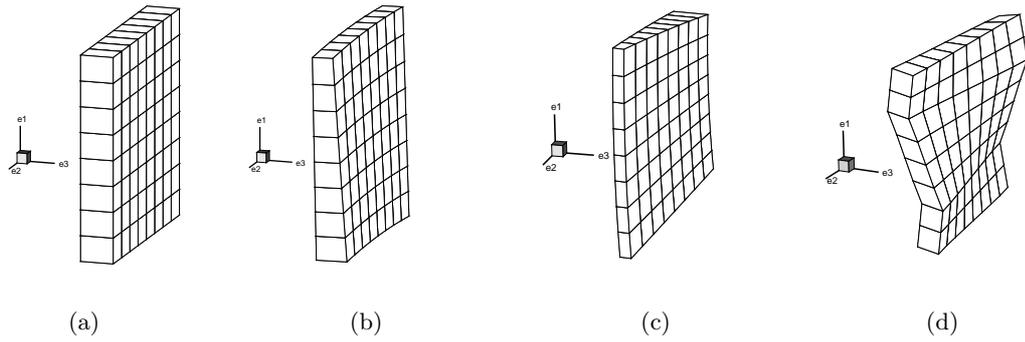


FIG. 6.2 – Déformées sur le champ total pour le premier problème cellulaire (a) extension unitaire, (b), (c) courbure unitaire dans les plans  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ , (d) torsion unitaire

est donc associé à l'effort tranchant.

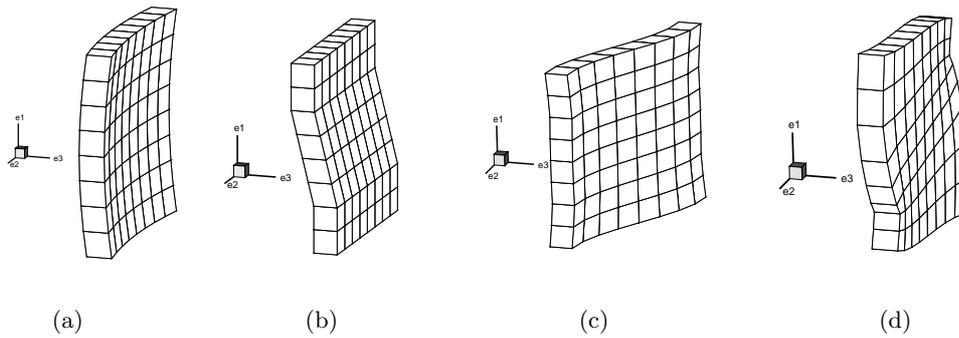


FIG. 6.3 – Déformées sur le champ  $\chi^2$  pour le deuxième problème cellulaire (a) gradient d'extension unitaire, (b), (c) gradient de courbure unitaire dans les plans  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ , (d) gradient de torsion unitaire

Si on sollicite une poutre ayant cette section par un chargement aux extrémités qui conduit à un état macroscopique uniforme, on constate un très bon accord entre la solution macroscopique au 1<sup>er</sup> ordre et la solution hétérogène 3D, même pour un faible élancement (égal à 10 par exemple).

Envisageons maintenant le cas de la poutre console, avec un encastrement à l'origine, et un effort tranchant *unitaire* imposé à l'autre extrémité, dans la direction  $\mathbf{e}_1$  (on utilise pour ce faire un corps rigide à l'extrémité  $z_3 = L$ , dont on impose le torseur des efforts). On a alors un moment de flexion au 1<sup>er</sup> ordre linéaire, et donc une déformation macroscopique de courbure également, d'où l'existence d'un gradient de déformation non nul. Cependant, comme on a obtenu que la matrice  $\mathcal{A}^{hom2}$  est nulle, l'effet de ce gradient de déformation se manifeste uniquement à travers les conditions aux limites macroscopiques.

Pour la résolution des problèmes macroscopiques, on a des conditions aux limites cinématiques à l'encastrement, alors qu'en  $z_3 = L$ , étant donné que les conditions aux limites 3D sont de type contraintes, les conditions aux limites macroscopique sont données par le principe de Saint-Venant. Des calculs élémentaires conduisent à l'expression suivante du développement asymptotique complet de la flèche, dans laquelle toutes les quantités de type  $f(0)$  sont relatives aux conditions aux limites

macroscopiques à l'encastrement, et ont été données en (5.3) :

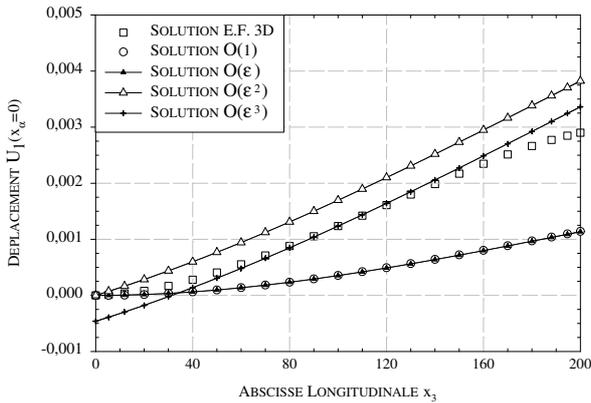
$$\begin{cases} \hat{u}_1(z_3) &= \hat{u}_1^0 + \varepsilon \hat{u}_1^1 + \varepsilon^2 \hat{u}_1^2 + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3 \\ &= (\mathcal{A}_{22}^{hom1})^{-1} \left( L \frac{z_3^2}{2} - \frac{z_3^3}{6} \right) + \varepsilon z_3 \partial_3 \hat{u}_1^1(0) + \varepsilon^2 (z_3 \partial_3 \hat{u}_1^2(0) + \hat{u}_1^2(0)) + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3(0) \end{cases} \quad (6.1)$$

La solution asymptotique précédente est comparée à la flèche de référence 3D sur la figure 6.4(a), pour un élanement de 10. On constate que le modèle du 1<sup>er</sup> ordre  $\mathcal{O}(1)$ , qui correspond à la solution classique de Bernoulli, donne une estimation très médiocre de la solution 3D. Ce résultat est dû à la faible rigidité au cisaillement transverse de la poutre, dont l'âme est très peu raide devant les peaux. Ceci apparaît d'ailleurs sur la déformée du calcul éléments finis 3D, cf. figure 6.5. On constate en effet que les sections ne restent pas planes, et on note un glissement significatif puisque l'angle droit entre la section et la ligne moyenne n'est pas conservé.

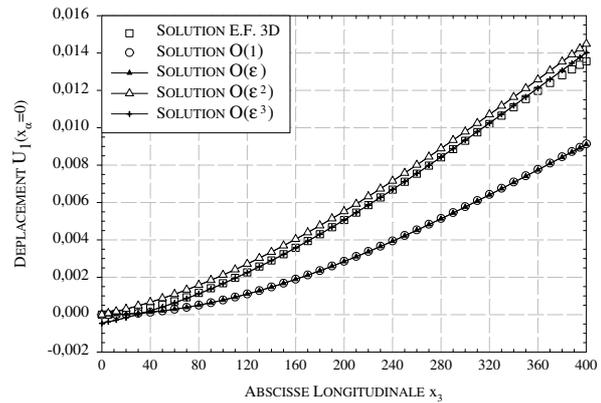
La précision de la solution asymptotique s'améliore au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de termes calculés dans son développement. A l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  ( $\equiv \mathcal{O}(\infty)$ ), dans la zone centrale de la structure, on obtient avec un très bon accord la solution 3D. Il est intéressant de souligner qu'à partir de l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , la réponse de la structure dépend uniquement de l'expression des conditions aux limites à l'origine, cf. (6.1), et ne met donc pas en jeu des caractéristiques de comportement macroscopique. Ceci se traduit à chaque ordre par un déplacement de solide rigide.

On note par ailleurs l'importance des effets de bords, cf. figure 6.4(a), dont la taille avoisine 80 mm, soit 4 fois la largeur de la section. Ce phénomène est directement lié à la faible rigidité en cisaillement transverse de la poutre. A titre de comparaison, on présente sur la figure 6.4(b) le cas d'un élanement de 20 ( $\varepsilon = 1/20$ ). La taille des effets de bords est toujours la même, ce qui a pour effet d'élargir en proportion le domaine de validité de la solution asymptotique intérieure. On vérifie d'autre part la bonne mise en oeuvre de la méthode d'analyse de la décroissance des effets de bords, puisque l'écart entre la solution asymptotique et la solution 3D tend vers 0 quand on s'éloigne des bords.

Enfin, on note qu'avec cette méthode, on a une flèche et une rotation non nulles à l'encastrement pour le développement asymptotique complet.



(a)  $\varepsilon = 1/10$



(b)  $\varepsilon = 1/20$

FIG. 6.4 – Flexion simple dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$

Sur ce type de structure, la solution du 1<sup>er</sup> ordre (c'est-à-dire la solution de Navier-Bernoulli) n'est pas satisfaisante, ce qui n'est pas surprenant pour un cas de chargement où on met en jeu les effets du cisaillement transverse. Une façon classique d'améliorer la solution consiste à utiliser une théorie de poutre de Timoshenko, et il est intéressant d'étudier ici les résultats qu'une telle théorie permettrait d'obtenir. Or, pour le problème considéré, la flèche de Timoshenko est égale à celle du

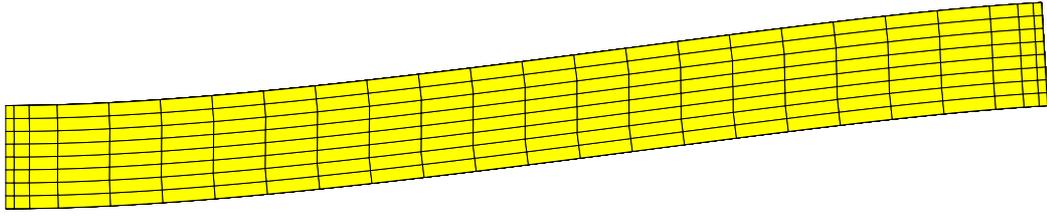


FIG. 6.5 – Flexion simple dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  -  $\varepsilon = 1/10$ . Vue dans le plan de la déformée obtenue par éléments finis

modèle du 1<sup>er</sup> ordre plus un terme linéaire en  $z_3$ , abscisse de la ligne moyenne de la poutre (et dont la pente est fonction de la rigidité en cisaillement transverse). Or, si l'on trace la différence entre la solution 3D et la solution du 1<sup>er</sup> ordre de Bernoulli, on obtient la courbe présentée figure 6.6, manifestement non-linéaire, ce qui est dû aux effets de bords. Ainsi, l'utilisation d'un modèle de Timoshenko va conduire à un écart entre la solution approchée et la solution 3D sur toute la longueur de la poutre, quelle que soit la valeur de la rigidité en cisaillement transverse.

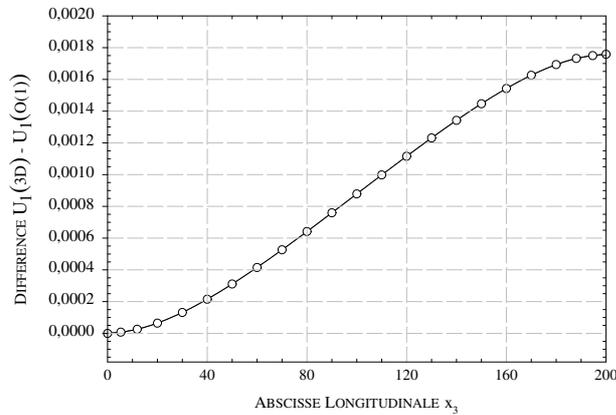


FIG. 6.6 – Flexion simple dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  -  $\varepsilon = 1/10$ . Différence entre la solution 3D et la solution de Bernoulli (ordre  $\mathcal{O}(1)$ )

Sur cet exemple, la matrice  $\mathcal{A}^{hom2}$  étant nulle, la seule différence entre le problème macroscopique complet et un problème de poutre de Bernoulli concerne les conditions aux limites. **Il est donc plus précis d'utiliser un modèle de Bernoulli en prenant en compte de façon correcte les effets de bords, que d'utiliser une théorie de Timoshenko avec des conditions aux limites classiques**, comme cela est souligné dans (Duva et Simmonds, 1991), (Duva et Simmonds, 1992).

### 6.3.2 Poutre stratifiée dissymétrique à constituants anisotropes

Nous envisageons maintenant un exemple plus général, notamment pour mettre en jeu les gradients de la déformation dans la loi de comportement macroscopique.

La section de la poutre est présentée figure 6.7. La résolution des problèmes cellulaires donne les résultats suivants pour le comportement macroscopique, sachant que l'axe de référence de la poutre est sa ligne moyenne géométrique (les unités sont le N et le mm):

$$\mathcal{A}^{hom1} \equiv \begin{bmatrix} 6.819E6 & 0 & 0 & 8.041E6 \\ 0 & 2.123E8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.112E8 & 0 \\ 8.041E6 & 0 & 0 & 1.779E8 \end{bmatrix} \quad \mathcal{A}^{hom2} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.348E8 & 0 \\ 0 & -7.348E8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

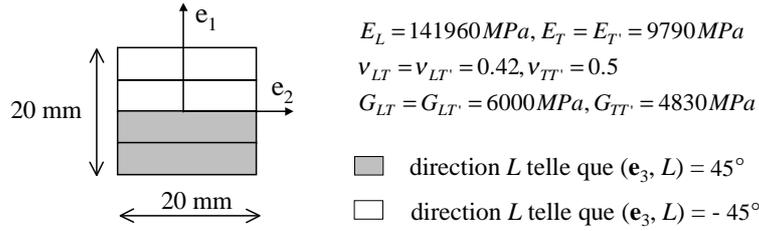


FIG. 6.7 – Caractéristiques géométriques et matérielles du stratifié dissymétrique

Afin de mettre à nouveau en évidence l'importance des effets de bords, considérons le cas de charge de la flexion pure unitaire, dans le plan  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$  (un moment dans la direction  $\mathbf{e}_1$  est appliquée à l'extrémité de la poutre). L'état de déformation macroscopique étant constant, le gradient des déformations macroscopiques est nul, et donc  $\mathcal{A}^{hom2}$  n'est pas impliquée dans la solution du problème.

On obtient donc pour le développement asymptotique complet de la flèche dans la direction  $\mathbf{e}_1$ , une expression fonction uniquement des conditions aux limites macroscopiques à l'encastrement :

$$\hat{u}_1(z_3) = \hat{u}_1^0 + \varepsilon \hat{u}_1^1 + \varepsilon^2 \hat{u}_1^2 = \varepsilon z_3 \partial_3 \hat{u}_1^1(0) + \varepsilon^2 \hat{u}_1^2(0) \quad (6.3)$$

Et il apparaît que cette solution permet d'obtenir une très bonne approximation de la solution 3D, cf. figure 6.8(a). En particulier, la non-nullité de ce déplacement montre que **les conditions aux limites génèrent un couplage mécanique** entre les deux flexions. On note que ce couplage est identique à celui présent dans  $\mathcal{A}^{hom2}$ .

Il est intéressant de souligner que sur ce cas, comme on est en flexion pure, l'utilisation d'un modèle de Timoshenko avec des conditions aux limites classiques conduirait à un déplacement nul selon  $\mathbf{e}_1$ .

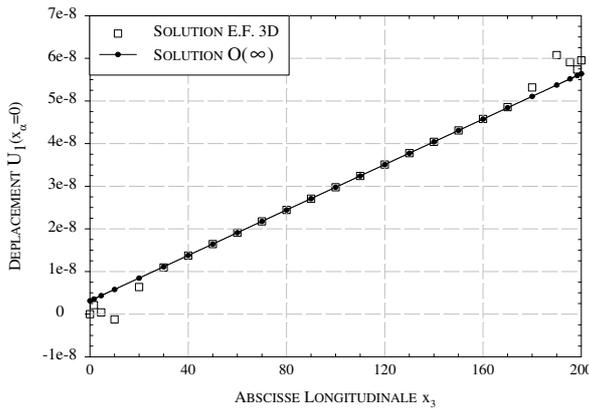
Dans l'objectif de faire intervenir  $\mathcal{A}^{hom2}$  dans la solution asymptotique, on considère à présent le cas de la flexion simple unitaire dans le plan  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ . La solution asymptotique complète est alors donnée par :

$$\begin{cases} \hat{u}_1(z_3) = \hat{u}_1^0 + \varepsilon \hat{u}_1^1 + \varepsilon^2 \hat{u}_1^2 + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3 \\ \quad = 0 + \varepsilon \left( (\mathcal{A}_{22}^{hom1} \mathcal{A}_{33}^{hom1})^{-1} \mathcal{A}_{23}^{hom2} \right) \frac{z_3^2}{2} + z_3 \partial_3 \hat{u}_1^1(0) + \varepsilon^2 (z_3 \partial_3 \hat{u}_1^2(0) + \hat{u}_1^2(0)) + \varepsilon^3 \hat{u}_1^3(0) \end{cases} \quad (6.4)$$

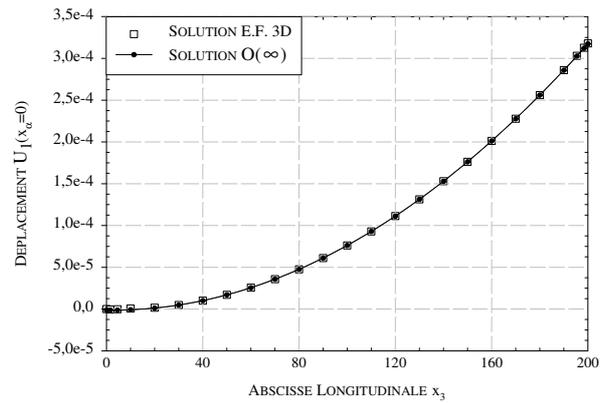
Cette solution est comparée à la solution 3D figure 6.8(b). La solution ayant globalement une allure quadratique, ces résultats valident le calcul de  $\mathcal{A}^{hom2}$ .

Pour terminer sur cet exemple, nous présentons des résultats avec pour objectifs d'étudier la précision obtenue par la méthode des développements asymptotiques sur les contraintes locales, et de tester les approximations induites par la prise en compte des conditions aux limites en moyenne. Nous rappelons que l'intérêt de cette approche est qu'aucun calcul auxiliaire n'est à faire pour obtenir les conditions aux limites macroscopiques, mais qu'elle présente l'inconvénient de ne pas être justifiée d'un point de vue théorique.

Pour ce faire, on étudie le cas de la flexion simple unitaire dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ . Les résultats sur le déplacement transverse induit selon  $\mathbf{e}_2$  sont présentés figure 6.9(a), la solution avec les conditions aux limites en moyenne étant référencée "SOLUTION  $\mathcal{O}(\infty)$  - CL  $\langle \rangle$ ". On observe que les résultats obtenus selon cette approche, sans être catastrophiques, sont cependant sensiblement moins bons que ceux obtenus par la méthode d'analyse de la décroissance des effets de bords. Signalons qu'on a observé des résultats plus satisfaisants avec cette approche pour des structures présentant une matrice  $\mathcal{A}^{hom1}$  diagonale.



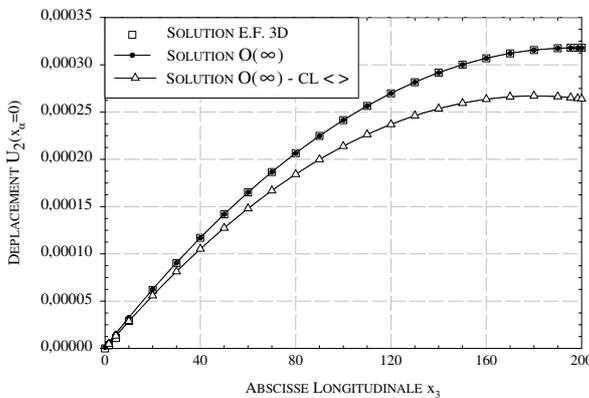
(a)



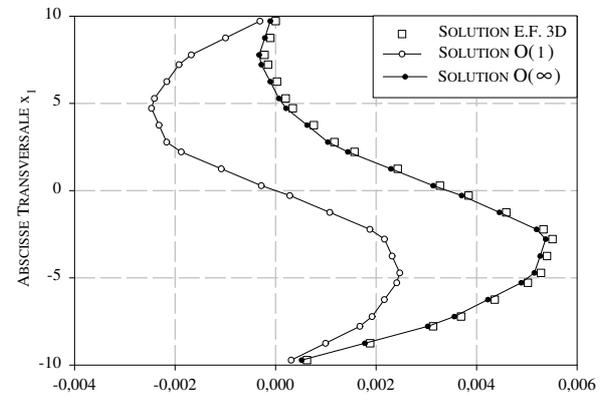
(b)

FIG. 6.8 –  $\varepsilon = 1/10$  - Déplacement transverse induit selon  $\mathbf{e}_1$  (a) Flexion pure dans le plan  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ . (b) Flexion simple dans le plan  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

En ce qui concerne les contraintes, on étudie leur répartition dans l'épaisseur, dans une section située au voisinage du milieu de la poutre. Les résultats de la méthode des développements asymptotiques sont obtenus à partir des solutions des problèmes cellulaires  $\tau^1(\mathbf{y})$ ,  $\tau^2(\mathbf{y})$ , et sont présentés figure 6.9(b), chaque point correspondant à un point d'intégration numérique. On constate qu'on relocalise précisément les contraintes 3D hétérogènes, alors que la solution à l'ordre  $\mathcal{O}(1)$  est très mauvaise, car associée à un effort tranchant nul.



(a)



(b)

FIG. 6.9 – Flexion simple dans le plan  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$  -  $\varepsilon = 1/10$  - (a) Déplacement transverse induit selon  $\mathbf{e}_2$ , influence de l'expression des conditions aux limites (b) Contrainte de cisaillement  $\sigma_{13}$  dans l'épaisseur

D'autres exemples de poutres à section constante sont traités dans (Buannic, 2000). Il y a également des exemples de poutres périodiques, et des problèmes avec des conditions aux limites mixtes sont considérés. Les résultats essentiels sur les poutres périodiques figurent dans (Buannic et Cartraud, 2001) joint à ce mémoire. En particulier, sur l'exemple donné en introduction à cette deuxième partie, il est montré que la méthode des développements asymptotiques permet d'obtenir la solution intérieure 3D avec une très bonne précision.

### 6.4 Plaque périodique

Nous présentons une dernière application, de type plaque périodique. Ces résultats ont fait l'objet d'une communication, (Buannic et Cartraud, 2000).

On considère le cas de la flexion cylindrique, pour une cellule en acier, cf. figure 6.11. Cet exemple est tout à fait représentatif des panneaux alvéolaires susceptibles d'être utilisés en construction navale.

Nous utilisons sur cet exemple la même méthodologie qu'auparavant.

Une solution de référence 2D (déformations planes) hétérogène est obtenue. Par ailleurs, deux séries de problèmes cellulaires sont résolus, en imposant une déformation macroscopique ou son gradient. Signalons que dans le cas de la plaque, cette dernière série de problèmes est un peu plus délicate à traiter que dans le cas de la poutre, car il y a deux variables macroscopiques associées aux coordonnées du plan de référence (le plan moyen est choisi ici).

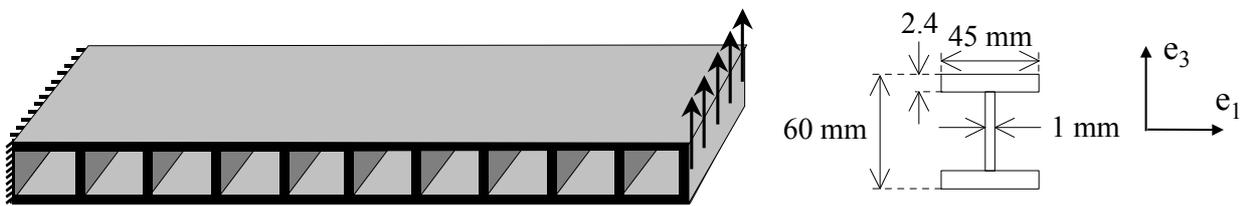


FIG. 6.10 – Problème aux limites étudiés et cellule de base

D'autre part, des problèmes auxiliaires 2D posés sur une ensemble de 5 périodes sont résolus pour obtenir les états (2) intervenant dans le calcul des conditions aux limites macroscopiques. La solution macroscopique est ensuite calculée analytiquement. Les résultats obtenus sur la flèche du plan moyen sont présentés figure 6.11, les directions  $e_1$  et  $e_3$  étant respectivement perpendiculaire et parallèle aux raidisseurs, cf. figure 6.11. On observe la très mauvaise précision obtenue avec la solution d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  de Kirchhoff-Love, et la qualité des résultats pour la solution asymptotique complète.

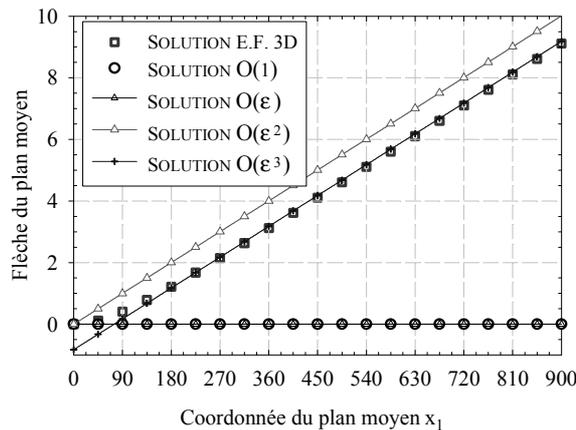


FIG. 6.11 – Flexion simple dans le plan  $e_1 - e_3$  -  $\epsilon = 1/20$ . Flèche du plan moyen

### 6.5 Conclusion

Nous avons montré ici à travers différents exemples de poutres et de plaque la précision des modèles asymptotiques d'ordre supérieur avec prise en compte des effets de bords. En particulier, on a noté que ceux-ci permettaient d'approcher de façon très précise la solution hétérogène 3D dans la zone intérieure de la structure, alors que la solution au 1<sup>er</sup> ordre était parfois très médiocre.

D'un point de vue plus général, on a observé qu'il est difficile d'estimer a priori le nombre de termes à calculer dans le développement pour obtenir une bonne approximation de la solution 3D. En effet, ce nombre dépend des caractéristiques géométriques et matérielles de la période, et du mode de chargement. Ceci renforce l'intérêt de la méthode avec laquelle on calcule le développement asymptotique complet.

On a d'autre part constaté l'importance des effets de bords, qui contribuent de façon essentielle aux termes d'ordre supérieur, et jouent un rôle comparable à celui d'une loi de comportement macroscopique.

On a ainsi remarqué que pour améliorer le modèle de Navier-Bernoulli du 1<sup>er</sup> ordre, il valait mieux changer les conditions aux limites pour tenir compte des effets de bords, plutôt que de passer à un modèle de Timoshenko avec des conditions aux limites classiques.

Enfin, on a pu vérifier que la méthode mise en oeuvre pour la prise en compte des effets de bords conduit effectivement à une décroissance de l'écart entre les solutions asymptotique et 3D quand on s'éloigne des bords. Cette méthode présente cependant l'inconvénient de conduire à une erreur au voisinage des bords, d'où l'impossibilité d'évaluer la solution dans ces régions.



# Bibliographie

- Bourgeois, S. (2000). Homogénéisation d'une poutre périodique : limite des développements asymptotiques. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **328**, 719–725.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2000). Higher-order asymptotic modeling for heterogeneous periodic plates. *20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics - Chicago*.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2001). Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 2 : Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 7163–7180.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1991). The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *J. Appl. Mech.*, **58**, 175–180.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1992). The influence of two-dimensional end effects on the natural frequencies of cantilevered beam weak in shear. *J. Appl. Mech.*, **59**, 230–232.
- Fish, J. et Chen, W. (2001). Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *J. Eng. Mech.*, **127**, 1223–1230.
- Goldenveizer, A., Kaplunov, J., et Nolde, E. (1993). On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells. *Int. J. Solids Structures*, **30**, 675–694.



# Conclusion

Dans le chapitre 4, nous avons présenté la procédure pour construire un modèle asymptotique d'ordre supérieur. Le calcul du développement asymptotique complet passe par la résolution d'une série infinie de problèmes cellulaires et de problèmes macroscopiques. La première série de problèmes cellulaires est finie si les chargements extérieurs sont polynômiaux, et on a montré que l'on pouvait réduire la deuxième à un seul problème macroscopique, dit complet.

Nous avons abordé au chapitre 5 le problème des effets de bords, et appliqué au cas des poutres périodiques la méthode d'analyse de la décroissance des effets de bords. Avec cette méthode, après avoir résolu au plus 6 problèmes sur un domaine 3D hétérogène de longueur supérieure à la taille des effets de bords, on obtient les conditions aux limites macroscopiques à chaque ordre, ou sur le problème macroscopique complet après sommation.

Cette méthodologie a été mise en oeuvre au chapitre 6, sur différents exemples de poutres et plaques périodiques. Les résultats obtenus ont démontré la précision de la méthode, et l'importance des effets de bords. En effet, ceux-ci sont à l'origine de certains couplages mécaniques, et dans certains cas particuliers, les conditions aux limites constituent la seule différence entre le problème macroscopique complet et celui du 1<sup>er</sup> ordre.

On a par ailleurs noté sur plusieurs exemples que les termes d'ordre supérieur du développement sont souvent plus grands que le terme d'ordre 1, ce qui rend délicat le problème de sa troncature. En ce sens, le fait de pouvoir calculer le développement asymptotique macroscopique complet en une seule étape présente un intérêt réel, à condition toutefois que la série converge.

Un autre aspect intéressant des applications traitées concerne l'estimation du petit paramètre  $\varepsilon$  à partir des valeurs des termes du développement asymptotique. Nous adoptons ici la définition donnée dans (Boutin, 1996), à savoir :  $\varepsilon = (\|\varepsilon^2 u^2\|/\|u^0\|)^{1/2}$ . Avec cette relation, on obtient une valeur supérieure à 1 pour la poutre sandwich d'élanement 10, et supérieure à 5 pour la plaque périodique. Il est remarquable qu'en dépit de ces valeurs non petites de  $\varepsilon$ , on ait réussi à avoir une bonne approximation de la solution 3D hétérogène par la méthode des développements asymptotiques. En effet, on considère en général lorsque  $\varepsilon > 1$ , que l'homogénéisation n'est plus valable et qu'il faut utiliser un modèle 3D hétérogène, cf. (Boutin, 1996), cette conclusion étant reprise telle quelle dans (Fish et Chen, 2001).

Par conséquent, les limites des modèles du 1<sup>er</sup> ordre, soulignées en introduction à cette 2<sup>ème</sup> partie, ont pu être levées, en restant dans le cadre de la méthode des développements asymptotiques, grâce à la prise en compte des termes d'ordre supérieur et des effets de bords.

Les résultats fournis par la méthode des développements asymptotiques formels sont donc probants. A ce stade, il nous paraît important de nous interroger sur l'exploitation de ces résultats : doit-on utiliser cette méthode telle quelle ? Est-elle trop complexe pour être utilisée en bureaux d'études ? Si oui comment en tirer profit ?

Aujourd'hui, environ 30 ans après les premiers travaux sur l'homogénéisation et l'analyse asymptotique des structures minces, force est de constater que ces méthodes ont encore très peu pénétré le milieu industriel. Certes, certains codes éléments finis proposent des fonctionnalités pour la résolution des problèmes cellulaires (Samcef par exemple), mais, dans le meilleur des cas, l'utilisa-

tion de la méthode se limitera à l'obtention du comportement macroscopique du 1<sup>er</sup> ordre.

Ce point de vue est partagé par plusieurs auteurs dans le cas d'applications structures minces (Fan, 1989), (Sutyrin, 1997). Il s'ensuit une série de travaux où les modèles asymptotiques d'ordre supérieur sont utilisés comme référence, pour optimiser des modèles utilisés par les ingénieurs. On définit ainsi des théories qualifiées parfois d'asymptotiquement correctes. On peut citer dans ce domaine des références sur la théorie de Timoshenko (Trabucho et Viaño, 1996), (Popescu *et al.*, 2000), ou de Reissner-Hencky-Mindlin (Sutyrin, 1997), (Yu *et al.*, 2002). Le calage de la théorie ingénieur sur le modèle asymptotique d'ordre supérieur s'effectue alors, via la loi de comportement, sur la forme des équations différentielles, ou sur l'énergie de déformation.

Pour des applications matériau en élasticité, la situation est un peu différente, dans la mesure où on imagine mal les ingénieurs sortir du cadre de l'élasticité linéaire. On peut néanmoins espérer à terme la diffusion de la théorie des milieux continus généralisés, d'où l'intérêt d'étudier leur justification par une approche micromécanique. Nous donnons ci-après quelques références à ce propos, sachant que nous nous limitons aux cas où on part d'une mécanique classique au niveau local.

Une étude approfondie est menée dans (Boutin, 1996). L'auteur montre clairement que la méthode des développements asymptotiques donne lieu à des effets microstructuraux. Ceux-ci ont pour origine les gradients de déformation, qui sont mis en jeu par le biais de l'hétérogénéité du milieu, qui conduit à des tenseurs  $\mathcal{A}^{*homk}$ ,  $k \geq 2$  non nuls. Il apparaît d'autre part qu'on peut établir une analogie avec la théorie du second gradient, en sommant les équations différentielles des problèmes macroscopiques des 3 premiers ordres.

Plus récemment, dans (Smyshlyaev et Cherednichenko, 2000), sur un problème 2D anti-plan, les auteurs obtiennent une théorie à gradient de déformation à partir de la méthode des développements asymptotiques. Ainsi, d'après l'expression de l'énergie de déformation, on peut identifier des contraintes d'ordre supérieur en tant que variables duales des gradients de déformations, et définir par une approche variationnelle des équations d'équilibre d'ordre supérieur. Cette approche a été étendue au cas 3D dans (Peerlings et Fleck, 2002).

Par conséquent, il est possible d'établir un lien entre une théorie à gradients de déformation et la méthode des développements asymptotiques.

Il existe par ailleurs des justifications de la théorie de Cosserat, mais en adoptant au niveau local un formalisme discret, avec des éléments de poutre et donc des degrés de liberté de rotation, cf. (Pradel, 1998) par exemple.

Il est important de remarquer que toute la discussion précédente relative à l'analogie entre théories "raffinées" (refined) et les modèles asymptotiques d'ordre supérieur est fondée sur un comparatif portant sur les équations différentielles, l'énergie de déformation, ou encore la loi de comportement.

Il est donc nécessaire d'intégrer à cette discussion les conditions aux limites, et ce d'autant plus qu'on a souligné l'importance de la prise en compte des effets de bords pour l'obtention d'une solution précise.

Or, si on utilise une théorie de milieu continu généralisé, le nombre de conditions aux limites à définir est supérieur à celui d'un milieu classique. En général, la forme de ces conditions aux limites est issue d'une approche variationnelle, et les conditions aux limites non classiques portent sur une grandeur cinématique (auquel cas on la notera  $CL_u$ ) ou sur sa variable duale ( $CL_\sigma$ ). Il apparaît alors que le choix entre ces deux types de conditions aux limites est difficile, et les travaux de la littérature n'apportent pas de réponse satisfaisante sur ce point. Ainsi, dans (Papargyri-Beskou *et al.*, 2003), où les auteurs étudient une poutre, on calcule deux solutions, la première avec comme conditions aux limites non classiques aux deux extrémités de la poutre  $CL_u$  en 0 et  $CL_\sigma$  en  $L$ , et la

deuxième avec l'inverse. De même, dans (Lam *et al.*, 2003), pour un encastrement, on envisage les deux types de conditions aux limites, d'où à nouveau deux solutions. Pour les applications 3D, les conditions aux limites non classiques sont le plus souvent postulées sans justification, cf. (Kouznetsova, 2002) par exemple. Les difficultés sont ici plus importantes que dans les applications structures minces. En effet, il faut définir en tout point du contour 6 conditions aux limites pour une théorie du second gradient, alors qu'on part d'une mécanique locale classique avec 3 conditions aux limites.

Il apparaît ainsi que si on rajoute à ces problèmes la prise en compte des effets de bords, définir des conditions aux limites appropriées pour un milieu continu généralisé est un problème encore largement ouvert. Dans le domaine des structures minces, ce même problème est présent, car on a montré que le passage à une théorie de Timoshenko ou de Reissner-Hencky-Mindlin ne conduit pas à une bonne approximation de la solution 3D si on utilise des conditions aux limites classiques. Il faut donc définir dans ce cadre des conditions aux limites qui assurent la décroissance des effets de bords. Dans le cas des poutres, on peut appliquer l'approche proposée dans (Ladevèze et Simmonds, 1998). L'intérêt de cette approche est que les conditions aux limites sont obtenues sans qu'il y ait de problème auxiliaire à résoudre.

Un dernier aspect concerne la résolution numérique du problème aux limites avec un milieu continu généralisé. Ainsi, si on incorpore le gradient de la déformation dans la loi de comportement, il va falloir évaluer des dérivées secondes des déplacements, ce qui exclut l'utilisation d'éléments finis  $C^0$  classiques. Il en résulte le développements d'éléments finis ad-hoc pour ce type de milieu, cf. (Kouznetsova, 2002) et (Askes et Metrikine, 2002) par exemple.

Ainsi, ce type de problème aux limites est plus difficile à résoudre que le problème macroscopique complet, dont l'opérateur est classique.

Par conséquent, basculer du modèle asymptotique d'ordre supérieur à une théorie de milieu continu généralisé soulève de nombreux problèmes (à un degré moindre si on utilise un modèle raffiné de structure mince). Cela relativise de ce fait les critiques formulées à propos de la mise en oeuvre de la méthode des développements asymptotiques.



# Bibliographie

- Askes, H. et Metrikine, A. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 2: Static and dynamic response. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **21**, 573–588.
- Boutin, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 1023–1051.
- Fan, H. (1989). *On the Foundations of Beam Theory*. Ph. D. thesis, University of Illinois at Chicago.
- Fish, J. et Chen, W. (2001). Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *J. Eng. Mech.*, **127**, 1223–1230.
- Kouznetsova, V. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Ph. D. thesis, T.U. Eindhoven.
- Ladevèze, P. et Simmonds, J. (1998). New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **17**, 377–402.
- Lam, D., Yang, F., Chong, A., et Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **51**, 1477–1508.
- Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K., Polyzos, D., et Beskos, D. (2003). Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Structures*, **40**, 385–400.
- Peerlings, R. et Fleck, N. (2002). A numerical framework for homogenisation towards higher-order media. R. F. E. J. Mang, H.A., éditeur, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- Popescu, B., Hodges, D., et K.H., L. (2000). On asymptotically correct timoshenko-like anisotropic beam theory. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 535–558.
- Pradel, F. (1998). *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse, E.N.P.C.
- Smyshlyaev, V. et Cherednichenko, K. (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1325–1357.
- Sutyrin, V. (1997). Derivation of plate theory accounting asymptotically correct shear deformation. *J. Appl. Mech.*, **64**, 905–915.
- Trabucho, L. et Viaño, J. (1996). Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487–974. North-Holland.
- Yu, W., Hodges, D., et Volovoi, V. (2002). Asymptotic construction of Reissner-like composite plate theory with accurate strain recovery. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 5185–5203.



## Chapitre 7

# Développements numériques

### 7.1 Introduction

Nous présentons ici des développements numériques qui ont été réalisés pour la résolution des problèmes cellulaires. Comme cela est apparu à travers les chapitres de ce mémoire, nous avons traité des problèmes très divers, pour l'homogénéisation périodique de matériaux, et de structures minces. Cette diversité se manifeste également dans la formulation des problèmes cellulaires, qui est le plus souvent initialement 3D, et qui peut être transformée en problèmes posés sur un assemblage de barres, poutres ou plaques, cf. chapitre 3. Enfin, nous avons été amenés à résoudre des problèmes d'ordre supérieur, cf. chapitres 4 et 6.

La variété des cas abordés nous a conduits à développer différentes méthodes numériques, adaptées aux spécificités du problème étudié.

Nous avons déjà présenté, au chapitre 3 des aspects numériques liés à la résolution des problèmes cellulaires sur des milieux poreux, et nous n'y revenons pas ici. Nous avons par ailleurs réalisé des développements numériques pour différentes méthodes d'homogénéisation pour les plaques périodiques, avec une formulation de type plaque (méthode m1KL) ou en contraintes planes (méthode m3c) des problèmes cellulaires. Cependant, nous avons principalement traité des problèmes cellulaires 3D pour l'homogénéisation périodique de matériaux et de structures minces. Ce sont donc ces développements que nous présentons dans ce chapitre.

Il importe de préciser que les développements numériques ne constituent pas le coeur de nos activités de recherche. Il s'agit pour nous plutôt d'outils, qui nous permettent d'aborder des applications très diverses, pour étudier des problèmes riches et en tout cas plus variés que les rares cas où une solution analytique existe.

Ainsi, nous n'avons pas cherché à avoir des méthodes numériques performantes, notre objectif principal étant plutôt l'étude de la validité des modèles homogénéisés.

Nous concluons ce chapitre par un travail récent auquel nous avons collaboré, fondé sur l'utilisation d'une extension de la méthode des éléments finis (appelée X-FEM) pour la résolution des problèmes cellulaires.

### 7.2 Résolution par éléments finis des problèmes cellulaires

#### 7.2.1 Problèmes cellulaires du 1<sup>er</sup> ordre

Nous reprenons ici l'écriture des problèmes cellulaires donnée en section 3.4.2 du chapitre 3.

Que l'on considère l'homogénéisation périodique d'une structure mince (plaque ou poutre selon la méthode  $(e, \varepsilon) \rightarrow 0$ ) ou d'un matériau cellulaire, les problèmes cellulaires sur la cellule 3D  $Y$  soumise à une déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  peuvent être mis sous la forme ( $\mathbf{y}$  désigne l'échelle

microscopique,  $\mathbf{a}$  le tenseur de rigidité,  $\mathbf{e}_y$  l'opérateur déformation sur la variable  $\mathbf{y}$ , et  $\sharp = \text{plaque, poutre ou } 3D$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial Y_b \\ \mathbf{u}^{per} \text{ périodique et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} \end{cases} \quad (7.1)$$

où  $\partial Y = \partial Y_a \cup \partial Y_b$ , avec  $\partial Y_a$  qui représente le contour de la cellule concerné par la périodicité, et  $\partial Y_b$  sa partie complémentaire, libre d'efforts.

On rappelle que le tenseur  $\mathbf{E}^\sharp$  est une donnée du problème dans le cas d'une déformation macroscopique imposée, son expression étant donnée en section 3.4.2. Enfin, la périodicité a lieu dans 1, 2 ou 3 directions de l'espace selon qu'il s'agit d'un problème d'homogénéisation de poutre, plaque, ou de matériau 3D.

Le tenseur  $\mathbf{E}^\sharp$  peut s'interpréter comme une déformation initiale, et certains codes standards offrent la possibilité de la prendre en compte ainsi. Cependant, cette fonctionnalité se limite le plus souvent à une déformation constante, il faut donc envisager d'autres méthodes de résolution pour les problèmes cellulaires de poutre ou de plaque.

Les méthodes de résolution par éléments finis sont fondées sur des formulations variationnelles. Pour (7.1), on peut prendre comme formulation variationnelle :

$$\int_{Y^*} (\mathbf{a} : \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per})) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) dY = - \int_{Y^*} (\mathbf{a} : \mathbf{E}^\sharp) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) dY \quad \forall \boldsymbol{\psi} \text{ périodique} \quad (7.2)$$

où  $Y^*$  désigne la partie solide de la cellule de base  $Y$ . On discrétise alors le champ  $\mathbf{u}^{per}$ , et la prise en compte de la déformation macroscopique, incluse dans  $\mathbf{E}^\sharp$ , se ramène à un calcul de force généralisée. On note que ce dernier calcul nécessite une intégration sur tous les éléments de la cellule.

On peut aussi réécrire le second membre de (7.2) sous la forme suivante (Léné, 1984) :

$$\int_{Y^*} (\mathbf{a} : \mathbf{E}^\sharp) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) dY = \int_{\partial Y_b} \boldsymbol{\psi} \cdot (\mathbf{a} : \mathbf{E}^\sharp) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{Y^*} \boldsymbol{\psi} \cdot \operatorname{div}_y (\mathbf{a} : \mathbf{E}^\sharp) dY \quad (7.3)$$

auquel cas le calcul peut être plus rapide (cas d'un matériau périodique sans trou, pour lequel la première intégrale disparaît car  $\partial Y_b = \emptyset$ , et où l'intégrand de la seconde est non nul uniquement à l'interface entre deux matériaux).

Pour l'homogénéisation des plaques et des poutres,  $\partial Y_b$  n'est jamais vide, et l'intégrand de la seconde intégrale de (7.3) est partout non nul dès lors qu'on impose une courbure. Il est par conséquent préférable d'utiliser (7.2).

Qu'on utilise (7.2) ou l'expression (7.3) de son second membre, on aboutit à un système matriciel de la forme :

$$[K]\{\mathbf{U}^{per}\} = \{F(\mathbf{E})\} \quad (7.4)$$

où  $\mathbf{U}^{per}$  désigne les variables nodales associées à  $\mathbf{u}^{per}$ . Le calcul de la loi de comportement homogénéisée s'obtient facilement à partir d'un produit scalaire entre la solution de (7.4) et son second membre.

Une autre façon de procéder consiste à travailler à partir de la formulation variationnelle :

$$\int_{Y^*} \left( \mathbf{a} : (\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y})) \right) : \left( \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}^*, \mathbf{y}) \right) dY = |Y| \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E}^* \quad (7.5)$$

$\forall \boldsymbol{\psi} \text{ périodique, } \mathbf{E}^*$

où  $|Y|$  désigne la mesure de la période (homogène à une longueur, une surface ou un volume selon la nature du problème d'homogénéisation à résoudre), et  $\boldsymbol{\Sigma}$  les contraintes macroscopiques, qui sont

les moyennes des contraintes microscopiques pour un problème matériau. Pour un problème de plaque,  $\Sigma$  est constitué des efforts de membrane et des moments de flexion moyens sur la période, et sont mis en dualité par (7.5) avec les macro-déformations de membrane et de courbure.

En considérant alors les déformations macroscopiques en tant que degrés de liberté, on n'a plus de vecteur force généralisée à calculer. Il faut cependant modifier les matrices élémentaires déformations/déplacements pour avoir une déformation égale à  $\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y})$ . Cette méthode, dite du **noeud macroscopique** (Débordes, 1989), est implémentée dans le code SIC pour l'homogénéisation périodique des matériaux. Elle conduit à un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} K & K_1 \\ K_1^T & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^{per} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ |Y|\Sigma \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

On note que  $|Y|\Sigma$  étant les réactions associées aux déformations imposées  $\mathbf{E}$ , on dispose ainsi d'un moyen simple pour calculer la loi de comportement homogénéisée.

Avec les approches précédentes, les relations de périodicité se traduisent par l'égalité de degrés de liberté. En pratique, on élimine les degrés de liberté redondants, ce qui donne une matrice raideur de taille minimale.

Une autre méthode de résolution peut aussi être utilisée, en discrétisant le champ total  $\mathbf{u}^T$  tel que  $\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^T) = \mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y})$ . Il en résulte que la seule spécificité des problèmes cellulaires est la prise en compte de la périodicité de  $\mathbf{u}^{per}$ , qui donne des relations linéaires entre degrés de liberté avec un second membre non nul. L'intérêt de cette approche est qu'il est possible d'utiliser un code standard pour la résolution. Le travail se limite alors à la génération des relations linéaires, la loi de comportement homogénéisée étant déterminée à partir de l'énergie de déformation.

En pratique, on résout  $n$  problèmes cellulaires indépendants, correspondant à un seul terme non nul dans les composantes de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  (ainsi  $n=6$  pour un matériau 3D ou une plaque, et  $n=4$  pour une poutre). La solution de 7.1 peut donc s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}^{per} = \hat{\mathbf{u}} + \chi^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}(z_3) \quad (7.7)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}$  est un déplacement de solide rigide, et où le symbole  $:$  représente une contraction :

- double en homogénéisation 3D :  $\mathbf{u}^{per} = \hat{\mathbf{u}} + \chi^{1kl} \mathbf{E}_{kl}$  avec  $k, l \in \{1, 3\}$ ;
- double en homogénéisation de plaque, :  $\mathbf{u}^{per} = \hat{\mathbf{u}} + \chi^{1M\alpha\beta} \mathbf{E}_{\alpha\beta} + \chi^{1C\alpha\beta} \mathbf{E}_{\alpha\beta}$  avec  $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$  et où les exposants M et C font référence aux déformations macroscopiques de membrane et de courbure ;
- simple en homogénéisation de poutre :  $\mathbf{u}^{per} = \hat{\mathbf{u}} + \chi^{1\mathcal{L}} \mathbf{E}_{\mathcal{L}}$  avec  $\mathcal{L} \in \{1, 4\}$  pour les déformations macroscopiques correspondant à l'extension, aux deux courbures, et à la torsion.

Enfin, signalons que pour les applications structures minces, l'origine du système de coordonnées  $(y_i)$  détermine la position de l'axe de référence de la poutre ou du plan de référence de la plaque par rapport auxquels sont calculés le comportement macroscopique.

### Travaux réalisés

A l'origine, dans le cadre de ma thèse, j'ai travaillé sur le logiciel SIC, et me suis donc familiarisé avec la méthode du noeud macroscopique. Etant seul au laboratoire à travailler avec ce logiciel et ne pouvant suivre ses évolutions, j'ai basculé sur un programme "maison". Je suis en fait parti d'une base, en l'occurrence un programme éléments finis 3D, développé par mon collègue A. Le Van, sur lequel j'ai greffé l'homogénéisation périodique de matériaux, plaques et poutres, en implémentant cette même méthode. L'intérêt de l'approche noeud macroscopique est qu'une fois que l'effort de programmation est fait pour un cas, l'implémentation d'un autre cas est très rapide, puisqu'il

suffit de modifier les lignes de programme correspondant à la relation  $\mathbf{e}_y(\mathbf{u}^{per}) + \mathbf{E}^\sharp(\mathbf{E}, \mathbf{y})$ , et aux expressions de  $|Y|$  et  $\Sigma$ .

Dans le cas des plaques, on pourra trouver des détails concernant l'implémentation dans (Buannic *et al.*, 2003), joint à ce mémoire.

En parallèle, dans le cadre d'une collaboration industrielle (ETAS : Etablissement Technique d'Angers, DGA), j'ai été amené à travailler sur la dernière méthode présentée section précédente, qui offre l'avantage d'éviter de redévelopper dans un code. Ces travaux ont été réalisés autour du logiciel SAMCEF, et appliqués à la résolution des problèmes de plaque ou poutre. Les exemples du panneau sandwich et du câble présentés au chapitre 2 ont été traités de cette manière.

Enfin, quand nous avons abordé la résolution des problèmes cellulaires d'ordre supérieur (Buannic, 2000), il s'est avéré qu'aucune des deux méthodes précédentes n'était utilisable facilement, alors que l'approche fondée sur (7.2) s'appliquait à la fois aux problèmes cellulaires d'ordre 1 et 2. Nous avons donc implémenté cette méthode dans notre programme éléments finis pour la résolution de ces deux problèmes cellulaires.

## 7.2.2 Problèmes cellulaires du 2<sup>eme</sup> ordre

Par linéarité, la solution des problèmes cellulaires du deuxième ordre se décompose en une solution à déformation macroscopique imposée (provenant du terme  $\hat{\mathbf{u}}$  de (7.7)), éventuellement une solution particulière due aux efforts répartis, et une solution à gradient de déformation macroscopique imposée. C'est à cette dernière solution que nous nous intéressons ici, qui est solution du problème :

$$\begin{cases} \mathbf{div}_y \boldsymbol{\tau} + \mathbf{div}_z \mathbf{S}^\sharp(\mathbf{a}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}), \mathbf{E}) = \mathbf{0}; \boldsymbol{\tau} = \mathbf{a}(\mathbf{y}) : \mathbf{e}; \mathbf{e} = \mathbf{e}_y(\mathbf{v}^{per}) + \mathbf{e}_z(\boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E}) \text{ dans } Y \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial Y_b \\ \mathbf{v}^{per} \text{ périodique et } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} \end{cases} \quad (7.8)$$

où  $\mathbf{E}$  est la déformation macroscopique intervenant dans les problèmes cellulaires d'ordre 1. D'autre part,  $\mathbf{S}^\sharp$  est homogène à une contrainte, et son expression est obtenue en tenant compte des conditions d'existence d'une solution aux problèmes cellulaires du 2<sup>eme</sup> ordre. Compte tenu de cette dernière expression et de la forme des déformations, il apparaît que la solution du problème est fonction du gradient de la déformation macroscopique  $\mathbf{grad}_z \mathbf{E}$ , avec  $\mathbf{z}$  qui désigne la variable macroscopique, possédant 1, 2 ou 3 composantes selon qu'on homogénéise un problème de poutre, plaque ou matériau 3D.

On peut trouver la formulation détaillée de ces problèmes dans (Buannic, 2000) pour les poutres, (Lewiński, 1991) pour les plaques, et (Dumontet, 1990), (Triantafyllidis et Bardenhagen, 1996), (Boutin, 1996) pour les matériaux 3D.

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{Y^*} (\mathbf{a} : \mathbf{e}_y(\mathbf{v}^{per})) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) dY &= - \int_{Y^*} (\mathbf{a} : \mathbf{e}_z(\boldsymbol{\chi}^1(\mathbf{y}) : \mathbf{E})) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\psi}) dY \\ &+ \int_{Y^*} \mathbf{div}_z \mathbf{S}^\sharp \cdot \boldsymbol{\psi} dY \quad \forall \boldsymbol{\psi} \text{ périodique} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ainsi, la comparaison avec (7.2) montre qu'on a le même premier membre (ce qui signifie qu'une seule triangularisation de la matrice raideur suffira pour la résolution des deux problèmes cellulaires), et une première intégrale dans le second membre qui correspond à nouveau à la prise en compte d'une déformation initiale. Le dernier terme, associé à l'effort volumique conduit à un vecteur force généralisée qu'on calcule facilement.

En fait, les difficultés concernant la résolution des problèmes cellulaires d'ordre 2 sont ailleurs. En effet, les tenseurs  $\mathbf{S}^\sharp$  et  $\mathbf{e}_z(\boldsymbol{\chi}^1 : \mathbf{E})$  sont fonction du champ  $\boldsymbol{\chi}^1$ , solution des problèmes à l'ordre précédent. Or, la solution de ces problèmes est définie à un mouvement de solide rigide près, et la façon dont on le fixe a une influence sur la solution de (7.8). Ainsi, pour "isoler" la solution correspondant au gradient de déformation, il faut utiliser dans ce problème un champ  $\boldsymbol{\chi}^1$  avec un mouvement d'ensemble en moyenne nul sur la période (Buannic, 2000).

Si la formulation de ces problèmes cellulaires d'ordre 2 n'est pas récente, les références dans lesquelles sont présentés des résultats provenant de leur résolution numérique sont, à ma connaissance, peu nombreuses. On peut citer (Lahellec, 1998) (Peerlings et Fleck, 2002) dans le cas des matériaux 2D et 3D respectivement, et (Bourgeois, 2000) pour les poutres périodiques en contraintes planes. Pour notre part, nous avons traité des applications de type poutre (Buannic, 2000), et plaque (Buannic et Cartraud, 2000).

En pratique, comme à l'ordre précédent, on résout  $n$  problèmes cellulaires indépendants, correspondant à un seul terme non nul dans les composantes gradient de la déformation macroscopique  $\mathbf{grad}_z \mathbf{E}$ . La solution de 7.8 a donc pour expression :

$$\mathbf{v}^{per} = \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\chi}^2(\mathbf{y}) : \mathbf{grad}_z \mathbf{E}(z_3) \quad (7.10)$$

le symbole  $\dot{\phantom{x}}$  désignant une contraction triple en homogénéisation de matériau 3D ou de plaque, et simple dans le cas de la poutre.

### 7.3 Application de la méthode X-FEM aux problèmes cellulaires du 1<sup>er</sup> ordre

Nous présentons ici une application de la méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) pour la résolution des problèmes cellulaires du 1<sup>er</sup> ordre.

J'ai travaillé dans ce domaine suite à l'arrivée au laboratoire de N. Moës, qui développe cette méthode depuis plusieurs années. Les travaux qui suivent sont réalisés dans la cadre de la thèse de M. Cloirec, commencée en octobre 2002, dirigée par N. Moës, et co-encadrée par moi-même. Je précise que je n'ai pas pris part à l'implémentation numérique.

Ces travaux sont détaillés dans l'article (Moës *et al.*, 2003), joint à ce mémoire. Ils ont également fait l'objet de plusieurs présentations dans différents congrès (Moës *et al.*, 2002), (Cartraud *et al.*, 2003).

#### Principe de la méthode et application aux problèmes cellulaires

On trouvera une présentation de la méthode X-FEM dans (Moës, 2000). Cette méthode repose sur les propriétés de la partition de l'unité (Melenk et Babuška, 1996), d'après lesquelles une approximation éléments finis peut représenter de façon exacte une fonction quelconque  $F(\mathbf{x})$ . On travaille alors avec l'interpolation :

$$\mathbf{u}^{X-FEM} = \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{u}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{enr}, \quad \mathbf{u}^{enr} = \sum_{\mathbf{J}} \mathbf{a}_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (7.11)$$

en introduisant des degrés de liberté additionnels  $\mathbf{a}_{\mathbf{J}}$  sur une partie du domaine étudié.

L'intérêt de cette formulation est qu'elle permet l'introduction de discontinuités à l'intérieur des éléments finis, ce qui facilite par conséquent le maillage. Ainsi, pour la résolution des problèmes cellulaires, on peut réaliser un maillage qui ne respecte pas les interfaces entre les différents constituants de la cellule. Les éléments traversés par une interface matériau sont alors enrichis cf.

figure 7.1(a), en choisissant une fonction  $F$  qui représente au mieux la physique du problème, en l'occurrence ici la discontinuité des déformations.

Pour la représentation géométrique de l'interface, on utilise la méthode des level-sets (fonctions de niveau) (Sethian, 1999). En pratique, l'interface matériau dans la cellule de base est décrite de façon implicite, en affectant à chaque noeud  $I$  du maillage, sa distance  $\phi_I$  à l'interface (affectée d'un signe positif ou négatif selon qu'on se situe dans l'une ou l'autre phase). On interpole ensuite la fonction de niveau en utilisant les fonctions de forme éléments finis classiques.

On exploite alors cette représentation éléments finis de l'interface pour exprimer la fonction d'enrichissement  $F(\mathbf{x})$ . Différents choix sont possibles, sachant qu'il est requis une dérivée discontinue à l'interface. Le cas test d'une inclusion en milieu infini permet de montrer que la fonction  $F(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{I}} |\phi_{\mathbf{I}}| \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) - |\sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{x})|$  (représentée dans le cas 1D figure 7.1(b)) conduit au meilleur taux de convergence. Cette convergence est d'ailleurs très proche de celle obtenue avec un maillage éléments finis qui respecte l'interface.

Du point de vue numérique, la méthode X-FEM se caractérise par un nombre de degrés de liberté par noeud variable, et une intégration numérique à effectuer de part et d'autre de la discontinuité. Pour la résolution des problèmes cellulaires d'homogénéisation périodique, c'est la méthode fondée sur la formulation variationnelle (7.2) qui a été implémentée. Le champ discrétisé étant périodique, lorsqu'un noeud sur le contour de la cellule, appartenant à un élément traversé par une interface, est enrichi, les noeuds en vis-à-vis le sont également.

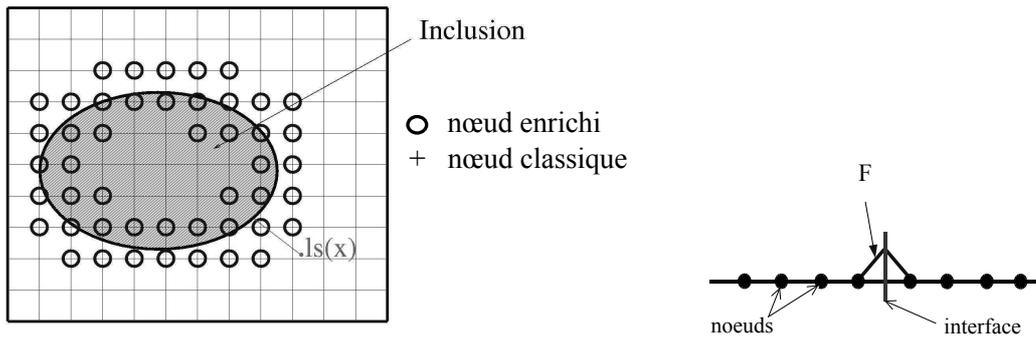


FIG. 7.1 – Principe de X-FEM et fonction d'enrichissement

### 7.3.1 Exemple d'application

Nous considérons le cas d'un matériau élastique à inclusions sphériques, réparties de façon aléatoire dans la matrice, cet exemple est tiré de (Michel *et al.*, 1999). Nous étudions donc plusieurs cellules, avec dans chaque cellule une répartition aléatoire (mais périodique) des inclusions.

La méthode X-FEM s'avère ici particulièrement intéressante, puisque le même maillage peut être utilisé pour ces différentes cellules. Il s'agit d'un maillage régulier, avec 32 éléments tétraèdre à 4 noeuds par côté, cf. figure 7.2(a). Avec ce maillage, pour 2 cellules contenant 32 inclusions, l'iso-zéro de la fonction de niveau (représentant l'interface matériau) est donnée figure 7.2(b).

Les caractéristiques mécaniques de la particule et de la matrice sont respectivement  $E_p = 70$  GPa,  $\nu_p = 0.2$  et  $E_m = 3$  GPa,  $\nu_m = 0.35$ , avec un taux d'inclusion de 26.78%. Pour la raideur homogénéisée  $a_{1111}^{hom}$ , en prenant la valeur moyenne sur différentes cellules, on obtient 7.611 GPa pour 8 particules et 7.711 pour 32 particules, soit des résultats très proches de ceux donnés dans (Michel *et al.*, 1999).

D'autres exemples sont traités dans (Moës *et al.*, 2003), joint à ce mémoire.

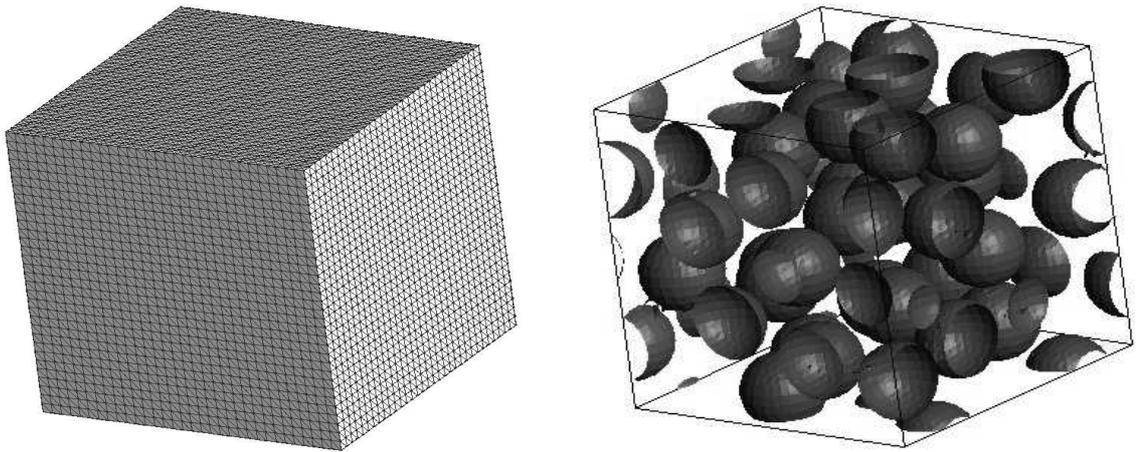


FIG. 7.2 – Maillage de la cellule et iso-zéro de la fonction de niveau

### 7.3.2 Conclusions et perspectives

Nous avons montré ici l'intérêt de la méthode X-FEM pour la résolution des problèmes cellulaires. Elle permet en effet d'obtenir une solution d'une qualité comparable à celle d'une approche éléments finis classique, en évitant la difficulté du maillage de la cellule.

D'autres travaux sont en cours concernant une autre application de la méthode X-FEM pour l'analyse multi-échelle de structures. Il s'agit d'étudier une structure contenant un détail de taille très petite devant les dimensions de la structure. L'objectif est ici de pouvoir analyser la structure avec un maillage grossier, en utilisant des fonctions d'enrichissement pour les éléments au voisinage du détail. Ces dernières sont déterminées par la résolution de problèmes locaux, posés sur un modèle fin du détail.



# Bibliographie

- Bourgeois, S. (2000). Homogénéisation d'une poutre périodique : limite des développements asymptotiques. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **328**, 719–725.
- Boutin, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 1023–1051.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2000). Higher-order asymptotic modeling for heterogeneous periodic plates. *20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics - Chicago*.
- Buannic, N., Cartraud, P., et Quesnel, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, **59**, 299–312.
- Cartraud, P., Cloirec, M., et Moës, N. (2003). Application de la méthode X-FEM pour l'analyse multi-échelle de matériaux. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume III, 307–314.
- Déborderes, O. (1989). Homogénéisation périodique. Cours, Université Laval, Québec.
- Dumontet, H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Lahellec, N. (1998). Limite de validité d'une approche par homogénéisation périodique, étude de cas. D.E.A. de Mécanique, Université Aix-Marseille II.
- Léné, F. (1984). *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Lewiński, T. (1991). Effective models of composite periodic plates - Part I. asymptotic solution. *Int. J. Solids Structures*, **27**, 1155–1172.
- Melenk, J. et Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **39**, 289–314.
- Michel, J., Moulinec, H., et Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **172**, 109–143.
- Moës, N. (2000). *Contributions au calcul des structures: Une extension de la méthode des éléments finis. Le contrôle des calculs éléments finis non linéaires*. Mémoire d'habilitation, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., et Remacle, J. (2002). A computational approach to handle complex microstructure geometries. Workshop Multi-scale Computational Mechanics for Materials and Structures, Cachan, septembre 2002.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., et Remacle, J. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **192**, 3163–3177.
- Peerlings, R. et Fleck, N. (2002). A numerical framework for homogenisation towards higher-order media. R. F. E. J. Mang, H.A., éditeur, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. <http://wccm.tuwien.ac.at>.

- Sethian, J. A. (1999). *Level Set Methods & Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Triantafyllidis, N. et Bardenhagen, S. (1996). The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *J. Mech. Phys. Solids*, **44**, 1891–1928.

## Chapitre 8

# Analyse du comportement de câbles synthétiques

Nous décrivons ci-dessous les travaux faisant l'objet de la thèse de R. Ghoreishi (démarrée en octobre 2001), et réalisés en collaboration avec l'IFREMER de Brest (P. Davies).

Ces travaux présentent par certains aspects une analogie avec la problématique de l'homogénéisation. Néanmoins, ils ne constituent pas une application de l'homogénéisation. En outre, les méthodes développées sont spécifiques aux structures étudiées, c'est pourquoi nous avons souhaité les présenter de façon indépendante du reste de ce mémoire.

### 8.1 Présentation générale

Les câbles synthétiques trouvent de nombreuses applications en mer : les cordages de bateaux de plaisance, les lignes d'ancrage de plates-formes pétrolières flottantes. . . Ils se caractérisent par une architecture très complexe. Le constituant de base (de l'aramide dans notre cas) apparaît sous forme de fibres. On réalise ensuite des brins, par un assemblage parallèle de fibres. Les brins sont alors torsadés pour former le brin assemblé, à partir duquel on réalise un toron par une nouvelle opération de tressage, cf. figure 8.1(a). Le câble est enfin fabriqué avec les torons, qui décrivent des hélices autour de l'âme, cf. figure 8.1(b).

Pour fixer les idées, pour un câble dont l'effort à la rupture correspond à une charge de 205T, le diamètre des fibres est de  $12 \mu\text{m}$ , avec un module d'Young axial d'environ 75 GPa. On compte environ 2000 fibres dans un brin, une quinzaine de brins dans un brin assemblé, et 42 brins assemblés dans un toron. Enfin, le diamètre du câble est de 64.9 mm.

En pratique, ces câbles sont sollicités en traction, et l'objectif à terme de ce travail est de pouvoir prédire leur comportement axial, avec pour seules données la loi de comportement d'un brin (plus facile à caractériser que celui d'une fibre), et la description géométrique du câble. Dans un premier temps, le comportement du brin est supposé élastique linéaire, mais le cas échéant, des effets visqueux seront pris en compte.

Il s'agit donc de "remonter" du brin au câble, en décrivant successivement les échelles intermédiaires : brin assemblé, toron. Il nous faut donc disposer de modèles de transition d'échelles, fournissant le comportement d'un constituant à partir de la description à une échelle inférieure. Le modèle complet du câble fait alors intervenir ces modèles, les résultats issus d'un modèle servant de données d'entrée à l'échelle supérieure.

Compte tenu de l'architecture du câble, deux types de modèles doivent être développés : l'un est adapté à un assemblage d'un grand nombre de constituants torsadés, cf. le toron de la figure

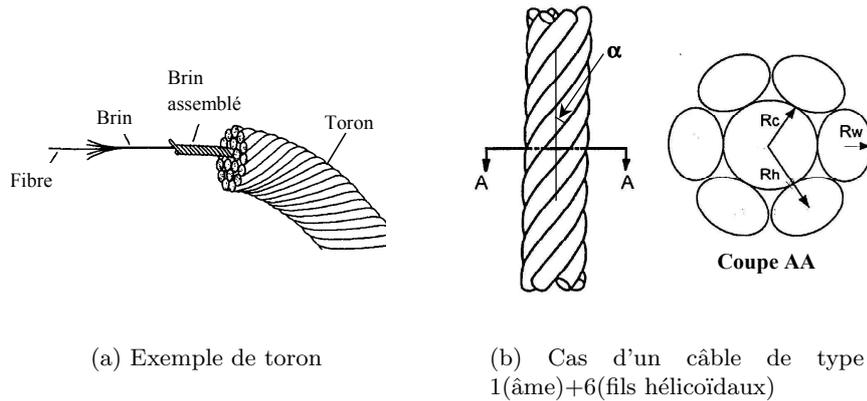


FIG. 8.1 – Architecture d'un câble

8.1(a), alors que le second est destiné à des géométries avec une âme centrale et 6 fils hélicoïdaux identiques, cf. figure 8.1(b).

Dans les deux cas, nous nous sommes orientés vers des approches analytiques, ce que nous justifions dans la section suivante où nous décrivons ces deux types de modèles.

Qui dit modèle dit validation, et dans ce domaine l'idéal est de disposer de résultats expérimentaux. Nous présenterons en section 8.3 les expériences menées et les autres études que nous avons entreprises pour valider les modèles.

Nous donnerons enfin quelques perspectives à ces travaux.

## 8.2 Description des modèles

### 8.2.1 Structure torsadée à grand nombre de sous-structures

Comme indiqué précédemment, nous cherchons ici à définir un modèle pour obtenir, par exemple, le comportement du toron à partir de sa géométrie et du comportement des brins assemblés (cf. figure 8.1(a)). Ce même modèle sera d'ailleurs utilisé également pour déterminer le comportement du brin assemblé en fonction de sa géométrie et du comportement des brins. Les constituants élémentaires de la structure étudiée sont donc en grand nombre et en contact mutuel. Leur ligne moyenne est une hélice, dont l'angle varie en fonction de la position du constituant dans la section.

Il est important de souligner que les connaissances géométriques et matérielles disponibles sur un brin se limitent à son module d'Young axial (ou sa raideur axiale) et à son diamètre. Ceci ne permet pas une description 3D et requiert donc l'utilisation de méthodes d'analyse plus simples que la mécanique des milieux continus. En outre, on connaît l'angle de l'hélice des constituants situés sur la périphérie de la structure, mais pas le détail de la composition de sa section de la structure. Il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur la géométrie. C'est ainsi que deux modèles analytiques sont utilisés. Ces modèles se distinguent par la représentation géométrique de la section, mais aussi par les hypothèses relatives au comportement mécanique des constituants.

- un premier modèle, assez rudimentaire, est inspiré des travaux de Hoppe, présentés dans (Hoppe, 1991). Dans ce modèle, on n'utilise pas de représentation formelle de la section de la structure, puisque celle-ci est décrite en tant que milieu continu. Il est cependant supposé que l'angle d'enroulement en un point matériel est proportionnel à sa distance à l'axe de la structure. On suppose d'autre part que la section de la structure reste plane après déformation, ce qui permet d'exprimer l'allongement en un point quelconque en fonction de celui de la structure. Grâce au module d'Young axial du constituant, on calcule alors la contrainte axiale locale en ce point, l'axe local étant défini par la tangente à l'hélice. Enfin, par intégration sur

la section, on détermine l'effort axial global dans la structure, en fonction de son allongement, d'où sa raideur.

Ce modèle utilise en entrée la raideur axiale du constituant, le diamètre de la structure, et l'angle d'enroulement du constituant situé sur sa périphérie. En sortie, il fournit la raideur axiale de la structure.

Ce modèle est simple, mais son principal inconvénient est qu'il se limite à l'évaluation de la raideur axiale, alors que le tressage conduit à un couplage traction/torsion.

- un second modèle, dans lequel la section de la structure est représentée par un assemblage de couches concentriques, (Raouf et Kraincanic, 1995). Avec cette approche, chaque couche est décrite en tant que membrane élastique orthotrope dans laquelle tous les constituants ont le même angle d'hélice. De plus, les contact entre les constituants d'une couche d'une part, et entre les couches d'autre part, sont pris en compte. Ce modèle fournit un comportement global couplé en traction-torsion, et on peut obtenir des bornes sur les rigidités en utilisant des hypothèses de contact collant ou glissant. Ce modèle est donc sensiblement plus élaboré que le précédent, et est d'autant plus approprié que le nombre de constituants dans une couche est important. Notons cependant qu'il passe par une description multicouche de la section, ce qui nécessite des hypothèses dans notre cas.

## 8.2.2 Structure 1+6

Nous nous intéressons ici à la modélisation du comportement d'une structure constituée d'une âme centrale, entourée de 6 fils hélicoïdaux identiques, cf. 8.1(b). Une synthèse bibliographique dans ce domaine est disponible dans (Costello, 1997) et (Nawrocki, 1997). La grande majorité des travaux est consacrée aux câbles métalliques, pour lesquels l'âme et les fils sont homogènes. Il existe des modèles analytiques, et des modèles numériques. Dans les modèles analytiques, l'âme et chacun des fils hélicoïdaux sont décrits par des poutres courbes de type Kirchhoff-Love (Costello, 1997), (Labrosse, 1998). Il existe un modèle numérique fondé sur des éléments finis poutre hélicoïdaux spécifiques (Nawrocki, 1997), mais la plupart des modèles numériques sont 3D, cf. par exemple (Jiang *et al.*, 1999).

Contrairement au cas de la structure du paragraphe précédent, la géométrie est ici parfaitement connue. Le modèle doit d'autre part exploiter les informations concernant le comportement de l'âme et du fil. Ce comportement est issu d'expériences, ou d'un modèle, tel que ceux présentés auparavant. Dans les deux cas, l'âme et le fil sont caractérisés en tant que structures, ce qui ne permet pas l'utilisation de modèles 3D. Nous nous sommes donc orientés vers un modèle analytique, développé dans (Labrosse, 1998), pour des câbles métalliques.

Dans ce modèle, une poutre courbe est utilisée pour l'âme et les fils. Les fils hélicoïdaux sont supposés ne pas se toucher mutuellement, si bien que les contacts ont lieu entre l'âme et les fils. Grâce à des hypothèses sur ces contacts, on peut exprimer la cinématique de toute la section du câble en fonction des seuls degrés de liberté de l'âme.

Pour obtenir la loi de comportement globale du câble, on utilise alors la loi de comportement intégrée des fils et de l'âme, écrites à l'origine dans le repère local des poutres, puis on intègre sur la section du câble. Pour un chargement axial, il n'y a pas de déplacement transversal du câble, et on a la forme suivante, où  $F_z$  et  $M_z$  représentent l'effort axial et le moment de torsion globaux et  $\partial_z u_z$  et  $\partial_z \theta_z$ , l'allongement et la déformation de torsion de l'âme :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{at} \\ k_{at} & k_{tt} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial_z u_z \\ \partial_z \theta_z \end{Bmatrix} \quad (8.1)$$

On note donc en général l'existence d'un couplage traction-torsion.

Comme indiqué précédemment, ce modèle, issu de (Labrosse, 1998) a été mis au point sur des câbles métalliques. Ce modèle a donc subi quelques modifications pour être adapté aux câbles synthétiques, en intégrant notamment le couplage traction-torsion dans les fils, et en négligeant la raideur des constituants en flexion. En revanche, les hypothèses sur le contact n'ont pas été remises en causes. Celles-ci sont justifiées pour un câble métallique en chargement axial, mais restent à valider dans notre cas, cf. section suivante.

### 8.3 Validation des modèles

Dans la section précédente, nous avons présenté 2 modèles pour une structure torsadée à grand nombre de sous-structures, et un modèle pour une structure 1+6.

Pour valider les deux premiers modèles, le grand nombre de constituants élémentaires rend prohibitif un modèle numérique qui devrait de plus gérer les contacts. L'approche expérimentale s'impose donc. Des premiers travaux ont été menés, les essais étant réalisés à l'IFREMER. Malheureusement, ces essais n'ont pas été concluants : grande dispersion des résultats, dus à un capteur de force non adapté à la gamme d'efforts, difficultés pour mesurer les déformations à partir d'une mesure globale, et problèmes de glissements dans les dispositifs d'accrochage des échantillons. Il est donc prévu de nouveaux essais.

En ce qui concerne le modèle de structure 1+6, une première validation expérimentale a été réalisée. Des expériences ont été effectuées à l'IFREMER sur l'âme, les fils hélicoïdaux, et le câble. Si on utilise alors comme données pour le modèle les résultats issus des essais sur l'âme et les fils, on peut calculer la raideur du câble, et la confronter aux mesures. On obtient alors une bonne corrélation modèle/expérience pour la raideur  $k_{aa}$  de (8.1), cf. figure 8.2. Pour valider complètement le modèle, il faudrait mesurer les autres termes de la matrice (8.1). Mais jusqu'à présent, nous avons rencontré des difficultés pour mesurer le moment de torsion pour un essai de traction à rotation bloquée, et pour réaliser des essais à rotation libre. D'autres essais sont donc prévus dans les mois à venir.

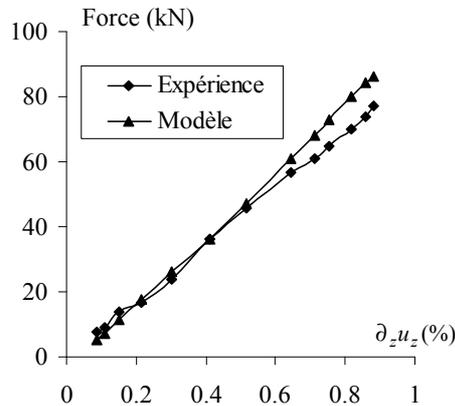


FIG. 8.2 – Modèles élément fini du câble

En vue de palier le manque de résultats expérimentaux, des calculs par éléments finis ont été réalisés. Dans un premier temps, un câble métallique a été étudié, avec un modèle 3D, l'objectif étant de définir le domaine de validité du modèle analytique, et de justifier les hypothèses sur le contact. Ces travaux ont permis de montrer que le modèle analytique était très précis, puisque pour un angle d'enroulement  $\alpha$  des hélices inférieur à  $15^\circ$ , l'écart avec les résultats du modèle numérique est de quelques %, pour tous les termes de la matrice de (8.1).

Ces travaux vont se poursuivre par la construction d'un modèle avec des éléments finis poutre, mieux adapté au câble synthétique.

## **8.4 Conclusions et perspectives**

L'objectif de ce travail étant la modélisation du comportement global du câble à partir de sa géométrie et de la loi de comportement du brin, il est aujourd'hui formellement atteint. On dispose en effet de modèles adaptés aux différents constituants du câble, qui seront utilisés en cascade pour passer du brin au câble.

Il reste cependant à valider ces modèles. Pour le modèle de la structure 1+6, nous sommes plutôt confiants, car il s'agit d'un modèle assez fin. En outre, les premières comparaisons avec l'expérience sont encourageantes. Il reste à compléter ces résultats, et à valider les premiers types de modèles pour décrire une structure torsadée à grand nombre de sous-structures, ce qui passe par la mise au point d'essais fiables.



# Bibliographie

- Costello, G. (1997). *Theory of wire rope. 2nd edition*. Springer.
- Hoppe, L. (1991). Modeling the static behavior of dyneema in wire-rope construction. Technical report, MTS RTM.
- Jiang, W., Yao, M., et Walton, J. (1999). A concise finite element model for simple straight wire rope strand. *Int. J. Mech. Sci.*, **41**, 143–161.
- Labrosse, M. (1998). *Contribution à l'étude du rôle du frottement sur le comportement et la durée de vie des câbles monocouches*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Nawrocki, A. (1997). *Contribution à la modélisation des câbles monotrons par éléments finis*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Raoof, M. et Kraincanic, I. (1995). Simple derivation of the stiffness matrix for axial/torsional coupling of spiral strands. *Computers and Structures*, **55**, 589–600.



# Conclusion Générale

La présentation de ce mémoire a pour l'essentiel suivi l'ordre chronologique.

Ainsi, après ma thèse, j'ai abordé l'étude des plaques périodiques, et ce thème m'a servi de fil conducteur pour un grand nombre de travaux menés par la suite. Dans la première partie de ce mémoire, j'ai exposé les différentes méthodes d'homogénéisation que nous avons analysées, l'objectif étant d'étudier leurs avantages et inconvénients, mais aussi leur adéquation à l'application considérée. Ceci m'a amené à un travail de synthèse bibliographique important, complété par la mise en oeuvre numérique de méthodes très diverses, dont une qui a pour point de départ un formalisme discret.

Par ailleurs, les résultats acquis lors de l'étude des panneaux alvéolaires ont pu être transposés aux matériaux cellulaires.

Ainsi, cette première partie a abouti à la sélection de la meilleure méthode d'homogénéisation, du point de vue de la précision sur les caractéristiques effectives.

La méthode retenue est fondée sur la méthode des développements asymptotiques, et pour les structures minces périodiques, on l'utilise en faisant tendre vers 0 les deux petits paramètres du problème. Au 1<sup>er</sup> ordre, cette méthode conduit à une plaque équivalente de Kirchhoff-Love, ou à une poutre équivalente de Navier-Bernoulli. Dans le cas des matériaux, une loi de comportement élastique classique est obtenue.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous avons tout d'abord mis en évidence les limites des modèles du 1<sup>er</sup> ordre, en recensant deux causes principales : l'existence d'effets de bords, et l'hétérogénéité de l'état de contraintes et de déformations macroscopique, qui résulte du chargement. Dans ce dernier cas, en effet, on fait travailler la période selon des modes non envisagés lors de la résolution des problèmes cellulaires du 1<sup>er</sup> ordre. Ces deux effets combinés peuvent entraîner une très mauvaise précision des modèles du 1<sup>er</sup> ordre, même si tous les petits paramètres du problème sont effectivement petits.

Ceci nous a amenés à proposer une modélisation asymptotique d'ordre supérieur, avec prise en compte des effets de bords.

Au chapitre 4, nous avons montré comment obtenir formellement la solution asymptotique à un ordre quelconque. Nous avons d'autre part souligné la présence de gradients de déformation macroscopiques, d'où la capacité du modèle à prendre en compte l'hétérogénéité de l'état macroscopique. Sur des structures minces, on a ainsi obtenu des théories à gradient de déformation, comme cela avait été trouvé antérieurement par d'autres auteurs sur des applications matériaux.

Nous avons également proposé une approche différente pour tenir compte des termes d'ordre supérieur, qui consiste à les faire intervenir sous la forme d'un chargement. L'intérêt de cette approche est qu'on peut calculer le développement asymptotique complet avec des équations différentielles macroscopiques identiques à celles obtenues au 1<sup>er</sup> ordre, au chargement près.

Le problème des effets de bords a été traité au chapitre 5, dans lequel nous avons adapté aux poutres périodiques une méthode initialement développée pour les plaques en 2D. Cette méthode

requiert la résolution d'au plus 6 problèmes auxiliaires, posés sur un domaine 3D hétérogène de longueur supérieure à la taille des effets de bords. Une justification du principe de Saint-Venant a été obtenue, alors que des conditions aux limites macroscopiques non classiques apparaissent dès lors que des déplacements imposés interviennent dans les conditions aux limites 3D.

Les modèles asymptotiques d'ordre supérieur avec prise en compte des effets de bords ont été appliqués à différents exemples au chapitre 6, montrant l'efficacité de l'approche pour avoir une bonne approximation de la solution 3D intérieure. Les applications que nous avons traitées sont relativement variées (poutres composites, treillis périodiques, plaque périodique) et nous avons par ailleurs essayé de mettre en jeu les gradients de déformation macroscopiques et/ou les effets de bords.

Il serait cependant souhaitable de compléter ces exemples en traitant des cas sans effets de bords. Il serait également intéressant d'envisager des chargements répartis sur la période. Nous sommes confiants dans la qualité des résultats que la méthode proposée ici permettrait d'obtenir dans ces situations.

Au vu des résultats présentés, il est bien clair à mes yeux que pour une structure hétérogène périodique, le modèle optimum correspond à une représentation 3D hétérogène au voisinage des bords et des zones à effets localisés, et au modèle macroscopique complet dans le reste de la structure (c'est ce que donnerait un indicateur d'erreur sur un calcul réalisé avec un modèle macroscopique complet utilisé pour toute la structure). Ainsi, une analyse préalable pour déterminer la taille du modèle 3D est nécessaire, et des approches fondées sur l'étude d'une période existent dans la littérature.

Pour le raccord entre les modèles 3D hétérogène et macroscopique complet, nous avons là aussi donné quelques pistes (modèles hybrides). Ceci aboutirait à une modélisation performante, avec laquelle on obtiendrait *en un seul calcul de structure* avec ce modèle hybride, une solution précise dans tout le domaine. Cette approche constituerait une amélioration par rapport à la méthode que nous avons proposée pour le traitement des effets de bords, puisque cette dernière ne permet pas une bonne évaluation de la solution au voisinage des bords.

Ainsi, malgré l'augmentation de la puissance des calculateurs, il nous paraît souhaitable de conserver un modèle macroscopique dans la région intérieure de la structure, notamment parce que les résultats sont beaucoup plus faciles à analyser par les ingénieurs. De la même manière, je pense qu'il est bon d'utiliser des modèles 2D ou 1D pour des structures minces, au lieu de faire du 3D.

Dans une optique un peu différente, remarquons que dans toute approche micro-macro, il y a en final une étape de relocalisation pour obtenir la solution à l'échelle microscopique. Pour éviter celle-ci, on peut envisager d'utiliser la méthode X-FEM, pour enrichir les éléments finis macroscopiques par des fonctions de formes issues de la résolution des problèmes cellulaires. Des travaux dans ce domaine sont actuellement en cours.

A l'exception de ma thèse et des travaux sur les coques périodiques, je me suis limité à des applications en élastostatique linéaire. Je vais dans un futur proche aborder des problèmes de dynamique rapide, en étudiant le problème de propagation d'ondes en milieu hétérogène. Il s'agit ici d'une étude préliminaire pour la modélisation du traumatisme crânien. Nous envisageons dans ce domaine l'utilisation de modèles asymptotiques d'ordre supérieur, en partant de travaux existants (dus à Boutin, Fish...) et en mettant à profit l'expérience acquise en statique (problème macroscopique complet et effets de bords). Cette étude sera menée dans le cadre d'un Post-Doc qui débute en décembre 03.

Une autre limite des travaux présentés ici est l'hypothèse de périodicité. Certes, cette hypo-

thèse est parfaitement justifiée pour les applications industrielles que j'ai traitées, mais il existe de nombreuses structures pour lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée. Dans ce cas, on peut utiliser une méthode de décomposition de domaine, qui est itérative mais qui a l'avantage de prendre automatiquement en compte les effets de bords. Nous lançons en novembre 2003 une thèse sur ce sujet, l'application visée étant un navire à passagers. Cette thèse est réalisée en collaboration avec D. Dureisseix (L.M.G.C. Montpellier) et Principia Marine. Nous envisageons dans ce cadre de développer une méthode de décomposition de domaine spécifique, prenant en compte l'aspect multi-échelle du problème (la taille caractéristique d'une sous-structure est de 3m environ, pour une longueur totale de navire de 300m).



## Annexe A

# Modélisation continue équivalente d'un treillis de barres

Cette annexe décrit la méthode de modélisation continue de structures discrètes, avec une équivalence définie sur l'énergie. Nous discutons différentes approches proposées par d'autres auteurs, et proposons quelques améliorations. Les références citées ici sont listées à la fin du chapitre 3.

Les principales étapes de cette méthode sont (Noor, 1988) :

1. Faire une hypothèse sur la forme du milieu continu équivalent.
2. Isoler une période.
3. Définir une approximation de la cinématique de la période.
4. Identifier les déformations du milieu continu équivalent.
5. Calculer ses caractéristiques effectives en utilisant l'équivalence énergétique.

A l'étape 1 (Noor, 1988), pour une structure à comportement global 1D, on postulera une théorie de poutre de Timoshenko dans le cas d'un assemblage de barres, ou une poutre micropolaire si on a des poutres (noeuds rigides).

Considérons à titre d'exemple le comportement dans le plan des périodes constituées d'un assemblage de barres données figure A.1, et dont la poutre de Timoshenko équivalente est recherchée.

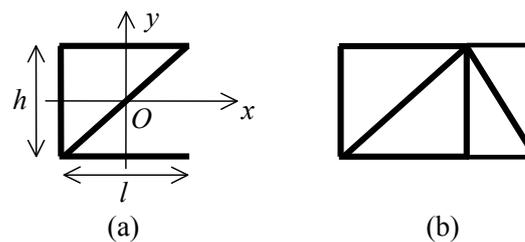


FIG. A.1 – Cellules d'un treillis périodique à (a) 1 baie, (b) 2 baies

En ce qui concerne l'étape 3, dans les travaux de Noor (Noor et Russel, 1986), on utilise la propriété que dans chaque section (à  $x$  donné), on a 4 degrés de liberté, si bien que le champ de déplacement peut être décrit à partir de 4 paramètres. On utilise alors une expression polynomiale, qui dans le cas présent est :

$$\begin{cases} u = u_0 - y\theta_z \\ v = v_0 + ye_{yy}^0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où on fait apparaître les variables cinématiques de la poutre de Timoshenko, où le symbole 0 signifie que les variables sont prises au centre O de la période, et où la notation  $\mathbf{e}$  désigne les déformations.

Le déplacement en un noeud quelconque de la période à 1 baie (cf. figure A.1(a)) est alors obtenu par un développement de Taylor de l'expression précédente, qu'on limite au premier ordre. D'où une expression fonction de 8 paramètres de la forme :

$$\begin{cases} u = u_0 - y\theta_z + x(\partial_x u_0 - y\partial_x \theta_z) \\ v = v_0 + ye_{yy}^0 + x(\partial_x v_0 + y\partial_x e_{yy}^0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ce dernier résultat est alors transformé en fonction des déformations de la poutre de Timoshenko, ce qui correspond à l'étape 4. Il vient :

$$\begin{cases} u = u_0 + xe_{xx}^0 - y\theta_z - xy\kappa^0 \\ v = v_0 + x(\gamma_{xy}^0 + \theta_z) + ye_{yy}^0 + xy\partial_x e_{yy}^0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où  $\gamma_{xy}^0$  et  $\kappa^0$  correspondent respectivement au glissement de cisaillement transverse et à la courbure.

Signalons que d'autres auteurs (Dow et Huyer, 1989) proposent de construire la cinématique approchée de la cellule à 1 baie d'une autre façon, à partir d'un développement polynômial des composantes de  $u$  et  $v$ , ce qui donnerait ici :

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

et font apparaître ensuite les déformations d'un milieu continu classique (par exemple  $a_2 = e_{xx}$ ,  $a_4 = \partial_y e_{xx}$ ). Il s'agit alors de relier ces déformations à celles de la poutre.

Plusieurs commentaires peuvent être faits à propos de ce qui précède.

### Sur l'approximation du champ de déplacement

Les expressions (A.3) et (A.4) sont polynômiales, et il est légitime de s'interroger sur les approximations qu'elles induisent par rapport à la cinématique de la période considérée en tant que treillis de barres. De ce point de vue, les barres n'étant chargées qu'aux noeuds, leurs déplacements sont linéaires suivant leur axe. Les expressions (A.3) et (A.4) sont en accord avec cette propriété pour les barres verticales et horizontales. En revanche, il est facile de voir qu'elles conduisent dans les barres obliques à un champ de déplacement quadratique en fonction de la variable suivant l'axe de la barre, ce qui est source d'approximations.

Lorsqu'on passe à une cellule à 2 baies (cf. figure A.1(b)), Noor propose de construire le champ de déplacement à partir d'un développement de Taylor d'ordre 2 de (A.1), alors que dans (Dow et Huyer, 1989) des termes en  $x^2$  et  $y^2$  sont rajoutés dans (A.4). Ainsi, dans les deux cas, on travaille avec un champ de déplacement quadratique, alors que celui-ci est localement linéaire dans chacune des barres.

C'est pourquoi nous avons proposé de travailler avec une approximation du champ de déplacement de la forme (A.4), avec un jeu de paramètres  $a_i, b_i, \in [1,4]$  propre à chaque baie de la période. Ainsi, le champ de déplacement est exact sur les barres verticales et horizontales (c'est-à-dire sur le contour de la période), et approché uniquement dans les barres obliques.

### Sur la détermination des déformations de la poutre

Dans les travaux déjà cités (Noor, 1988) (Dow et Huyer, 1989), les déformations de la poutre sont déterminées à partir des dérivées des déplacements, et correspondent de ce fait à des déformations de poutre dans la section à  $x = 0$  de la période. Cette section se situe au centre de la période, mais le choix de déformation macroscopique comme valeur de la déformation en un point paraît contestable.

Pour remédier à ce problème, à partir de (A.4), notre approche revient à considérer que cette expression, valable dans les barres, est en fait la trace d'un champ de déplacement du milieu continu recouvrant la période. Par différentiation, on obtient alors :

$$\begin{cases} u = u_0 + xe_{xx} + y(\gamma_{xy} - r_0) + xy\partial_y e_{xx} \\ v = v_0 + x(\gamma_{xy} + r_0) + ye_{yy} + xy\partial_x e_{yy} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où les composantes du mouvement de solide rigide  $u_0$ ,  $v_0$  et la rotation  $r_0$  sont définies au centre de la cellule.

Les déformations macroscopiques du milieu continu sont ensuite définies, par analogie avec la théorie de l'homogénéisation périodique par leur moyenne sur la période continue. Ceci conduit, dans le cas où l'origine de la période est définie au centre de la cellule à :

$$\begin{cases} u = u_0 + x \langle e_{xx} \rangle + y(\langle \gamma_{xy} \rangle - r_0) + x \langle y\partial_y e_{xx} \rangle \\ v = v_0 + x(\langle \gamma_{xy} \rangle + r_0) + y \langle e_{yy} \rangle + xy \langle \partial_x e_{yy} \rangle \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

avec  $\langle \cdot \rangle$  qui représente l'opérateur moyenne défini par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|S_c|} \int_{S_c} \cdot dS_c \quad (\text{A.7})$$

où  $S_c = [-l/2, l/2] \times [-h/2, h/2]$  désigne le milieu continu et  $|S_c| = lh$  la mesure de sa surface.

Si on s'intéresse alors à l'expression de l'énergie de déformation du milieu continu, on obtient :

$$\begin{cases} U_c = \frac{1}{2} \int_{S_c} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} dS_c \\ = \frac{1}{2} l (\langle N \rangle \langle e_{xx} \rangle + \langle T \rangle \langle \gamma_{xy} \rangle + \langle M \rangle \langle -\partial_y e_{xx} \rangle) \\ + \frac{1}{2} |S_c| (\langle \sigma_{yy} \rangle \langle e_{yy} \rangle + \langle x\sigma_{yy} + y\sigma_{xy} \rangle \langle \partial_x e_{yy} \rangle) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

où  $\langle N \rangle$ ,  $\langle T \rangle$  et  $\langle M \rangle$  représentent respectivement l'effort normal, l'effort tranchant, et le moment de flexion moyens sur la période de longueur  $l$ . On utilise alors cette expression pour identifier à la fois les déformations macroscopiques de poutre  $\langle e_{xx} \rangle$  en extension,  $\langle \gamma_{xy} \rangle$  de glissement au cisaillement transverse et  $\langle -\partial_y e_{xx} \rangle$  de courbure, et les contraintes intégrées macroscopiques  $\langle N \rangle$ ,  $\langle T \rangle$  et  $\langle M \rangle$ . Dans les 2 cas, on note que ces définitions correspondent à un passage à la moyenne, et que ces quantités sont mises en dualité via l'énergie de déformation.

Ceci constitue une définition cohérente des variables macroscopiques. Dans le cas d'une cellule à 1 baie, la définition précédente coïncide avec celles définies par Noor, car le champ de déplacement approché est linéaire et les moyennes correspondent aux valeurs au centre de la cellule. Dans le cas d'une cellule à 2 baies, des différences apparaissent.

La dernière étape de la méthode, notée *étape 5*, consiste à calculer les caractéristiques équivalentes du milieu continu. Pour ce faire, Noor part de l'énergie de déformation du milieu discret  $U_d = \{u_d\}^t [K_d] \{u_d\} / 2$  exprimée sur les degrés de liberté des noeuds des barres, regroupés dans  $\{u_d\}$ , et faisant intervenir la matrice raideur assemblée de la cellule  $[K_d]$ . A partir de (A.3), il existe en chaque noeud une relation qui permet d'exprimer ses déplacements en fonction des variables du milieu continu, regroupées dans un vecteur  $\{u_c\}^t = \{u_0, v_0, \theta_z, e_{xx}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa^0, e_{yy}^0, \partial_x e_{yy}^0\}$ . Ainsi, en introduisant la matrice  $[\Gamma]$  telle que  $\{u_d\} = [\Gamma] \{u_c\}$ , on peut réécrire l'énergie de déformation du milieu discret sous la forme  $U_d = \{u_c\}^t [\Gamma]^t [K_d] [\Gamma] \{u_c\} / 2$ . L'équivalence énergétique fournit alors  $U_d = lU_c$ , et Noor obtient les caractéristiques effectives en partitionnant  $\{u_c\}$  en :

- des termes associés à un mouvement de solide rigide :  $u_0, v_0, \theta_z$ , qui donnent des lignes et colonnes nulles dans la matrice raideur  $[\Gamma]^t [K_d] [\Gamma]$ .
- les déformations du milieu continu équivalent :  $\{e_{xx}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa^0\}$ .

- des termes associés à des contraintes intégrées négligeables.
- des termes à supprimer.

Dans le cas présent,  $\langle e_{yy}^0 \rangle$  et  $\langle \partial_x e_{yy}^0 \rangle$  rentrent dans ces 2 dernières catégories, et leur élimination permet de ramener l'expression de l'énergie de déformation en fonction des seules déformations de poutre. Ceci est effectué grâce à une condensation statique pour les termes relevant de la première catégorie, et en ne tenant pas compte des termes de raideurs associés aux autres.

A ce stade, soulignons que si on se réfère aux différents articles de Noor, la procédure sur ces aspects présente des variantes, mais reste le plus souvent obscure.

C'est pourquoi nous avons cherché à clarifier ce point, et faire en sorte qu'à ce niveau on opère de façon rigoureuse, en prenant en compte la périodicité de la structure.

Pour ce faire, au lieu de raisonner uniquement en termes d'énergie de déformation, on considère de plus les efforts s'exerçant aux noeuds de la période. Grâce à (A.6) et à l'équivalence énergétique, on aboutit à un système matriciel de la forme :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\} \\ E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = l \begin{Bmatrix} \{\Sigma\} \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

en notant  $\{E\}^t = \{e_{xx}^0, \gamma_{xy}^0, \kappa^0\}$  et  $\{\Sigma\}^t = \{\langle N \rangle, \langle T \rangle, \langle M \rangle\}$  les déformations et contraintes macroscopiques,  $E_1 = \langle e_{yy}^0 \rangle$  et  $E_2 = \langle \partial_x e_{yy}^0 \rangle$ ,  $F_1$  et  $F_2$  étant les termes duax dans (A.8), sachant que l'équivalence énergétique permet de relier ces termes aux efforts s'exerçant sur le contour de la période.

En exploitant alors la périodicité des déformations et l'anti-périodicité des efforts aux noeuds sur le bord de la période, on en déduit que  $E_2 = F_1 = 0$ , si bien que le comportement homogénéisé de la poutre est donné par  $\mathbf{a}^{hom} = (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})/l$ .

On a ainsi montré qu'on pouvait clairement identifier, parmi les variables intervenant dans la cinématique du milieu continu, celles qui étaient nulles, et celles qui étaient associées à un effort nul. Ces résultats ont pu être obtenus grâce à la prise en compte de la périodicité, et à la caractérisation des efforts associés à ces variables. Il s'agit là de résultats nouveaux par rapport aux travaux précédemment mentionnés.

Des méthodes d'homogénéisation plus approximatives peuvent aussi être définies à partir de (A.9).

Ainsi, si on adopte  $F_1 = F_2 = 0$ , nous avons montré que dans ce cas que la méthode d'homogénéisation coïncidait avec celle proposée dans (Sun et Liebbe, 1990). Dans cet article, l'équivalence milieu continu/treillis est définie sur les relations constitutives, et est obtenue en soumettant la cellule à des sollicitations macroscopiques élémentaires en faisant des hypothèses sur la distribution des efforts sur le bord de la période. Cette dernière approche s'apparente donc à l'approche en contraintes de la théorie des modules effectifs, cf. (Suquet, 1985). On peut aussi définir une approche en déformations en faisant dans (A.9)  $E_1 = E_2 = 0$ , ce qui revient à solliciter la cellule à des états de déformation macroscopiques élémentaires via des conditions aux limites en déplacements.

Enfin, comme en théorie d'homogénéisation, on peut classer en raideur et souplesse ces différentes méthodes entre elles. On note d'ailleurs au passage qu'avec toutes ces méthodes, on a une relation de type macro-homogénéité de Hill-Mandel qui est satisfaite puisque l'énergie de déformation donnée par (A.8) a pour expression  $U_c = l\{\Sigma\}^t\{E\}/2$ .

Tous ces résultats sont généraux et applicables dans le cas d'une cellule à 2 baies, cf. (Burgardt et Cartraud, 1999). La méthode que nous avons développée a été appliquée en statique, puis à l'étude des vibrations.

# Bibliographie

- Andrianov, I. et Awrejcewicz, J. (2001). New trends in asymptotic approaches: Summation and interpolation methods. *Appl. Mech. Rev.*, **54**, 69–92.
- Askes, H. et Metrikine, A. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 2: Static and dynamic response. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **21**, 573–588.
- Askes, H., Suiker, A., et Sluys, L. (2002). A classification of higher-order strain-gradient models - linear analysis. *Arch. Appl. Mech.*, **72**, 171–188.
- Bakhvalov, N. et Panasenko, G. (1989). *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer.
- Ben Dhia, H. (1998). Multiscale mechanical problems: the Arlequin method. *C.R.Acad.Sci. Ser. IIB*, **326**, 899–904.
- Ben Dhia, H., Durand, C., et Rateau, G. (2003). Partition 3d/coque par la méthode Arlequin. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume III, 307–314.
- Bensoussan, A., Lions, J., et Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland.
- Bonelli, S. (1993). *Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols*. Thèse, Université Aix-Marseille II.
- Bornert, M., Bretheau, T., et Gilormini, P. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires et milieux périodiques*. HERMES Science.
- Bourgeois, S. (1997). *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse, Université Aix-Marseille II.
- Bourgeois, S. (2000). Homogénéisation d'une poutre périodique: limite des développements asymptotiques. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **328**, 719–725.
- Bourgeois, S., Cartraud, P., et Débordes, O. (1998). Homogenization of periodic sandwiches. A. Vautrin, éditeur, *Mechanics of sandwich structures*, 131–138. Kluwer.
- Boutin, C. (1996). Microstructural effects in elastic composites. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 1023–1051.
- Boutin, C. et Hans, S. (2003). Homogenisation of periodic discrete medium: Application to dynamics of framed structures. *Computers and Geotechnics*, **30**, 303–320.
- Buannic, N. (1997). Homogénéisation de structures périodiques à comportement global de poutre. D.E.A., Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. (2000). *Analyse asymptotique de poutres élastiques hétérogènes*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (1999). Etude comparative de méthodes d'homogénéisation pour des structures périodiques élastiques. *Actes du 14ème Congrès Français de Mécanique - Toulouse*.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2000). Higher-order asymptotic modeling for heterogeneous periodic plates. *20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics - Chicago*.
- Buannic, N. et Cartraud, P. (2001a). Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 1: Asymptotic expansion method. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 7139–7161.

- Buannic, N. et Cartraud, P. (2001b). Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams - Part 2 : Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 7163–7180.
- Buannic, N., Cartraud, P., et L’Hostis, G. (1999). Homogénéisation de structures ou matériaux constitués de poutres. *Actes du 4ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*.
- Buannic, N., Cartraud, P., et Quesnel, T. (2003). Homogenization of corrugated core sandwich panels. *Composite Structures*, **59**, 299–312.
- Burgardt, B. et Cartraud, P. (1999). Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *Computers and Structures*, **73**, 267–279.
- Caillerie, D. (1984). Thin elastic and periodic plates. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **6**, 159–191.
- Caillerie, D. (1985). Non homogeneous plate theory and conduction in fibered composites. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 1–62. Springer-Verlag.
- Cambou, B. et Jafari, K. (1988). Modèle de comportement des sols non cohérents. *Revue Française de Géotechnique*, **44**, 43–55.
- Cartraud, P. (1997). Homogénéisation d’une poutre hétérogène selon son axe, de section et de période de dimensions comparables. *Actes du 3ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, 265–270.
- Cartraud, P. et Wielgosz, C. (1996). Numerical modelling of the elastoplastic behaviour of a gasket material. *Computational Materials Science*, **5**, 75–81.
- Cartraud, P., Wielgosz, C., et Débordes, O. (1991). Homogénéisation de composites plans sollicités hors de leur plan. *Actes du 10ème Congrès Français de Mécanique*, vol. **1**, 129–132.
- Cartraud, P., Bonelli, S., Wielgosz, C., et Débordes, O. (1993). Recalage numérique/expérimental d’une loi de comportement élastoplastique pour un constituant d’un joint de culasse. *Actes du 1er Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume vol. 1, 526–534. Hermès.
- Cartraud, P., Cloirec, M., et Moës, N. (2003). Application de la méthode X-FEM pour l’analyse multi-échelle de matériaux. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume III, 307–314.
- Chen, W. et Fish, J. (2001). A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *J. Appl. Mech.*, **68**, 153–161.
- Christensen, R. (2000). Mechanics of cellular solids and other low-density materials. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 93–104.
- Ciarlet, P. (1997). Mathematical elasticity - volume II: Theory of plates. *Studies in mathematics and its applications*, volume 27. North-Holland.
- Cioranescu, D. et Saint Jean Paulin, J. (1999). *Homogenization of Reticulated Structures*. Springer.
- Cosme, N., Chevrollet, D., Bonini, J., Peseux, B., et Cartraud, P. (2002). Prediction of transient engine loads and damage due to hollow fan blade-off. *Revue Européenne des Eléments Finis*, **11**, 651–666.
- Cosme, N., Cartraud, P., Peseux, B., Bonini, J., et Chevrollet, D. (2003). Application d’une technique d’homogénéisation à l’étude de la perte d’aube creuse en dynamique rapide. *Actes du 6ème Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume II, 181–188.
- Costello, G. (1997). *Theory of wire rope. 2nd edition*. Springer.
- Dauge, M., Gruais, I., et Rössle, A. (1999). The influence of lateral boundary conditions on the asymptotics in thin elastic plates. *SIAM J. Math. Anal.*, **31**, 305–345.
- Débordes, O. (1989). Homogénéisation périodique. Cours, Université Laval, Québec.
- Destuynder, P. (1986). *Une Théorie Asymptotique des Plaques Minces en Elasticité Linéaire*. Masson.

- Dow, J. et Huyer, S. (1989). Continuum models of space station structures. *J. Aerospace Eng.*, **2**, 220–238.
- Dumontet, H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Dureisseix, D. (2000). Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures. *Forum IPSI Phi2AS en analyse de structures*.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1991). The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects. *J. Appl. Mech.*, **58**, 175–180.
- Duva, J. et Simmonds, J. (1992). The influence of two-dimensional end effects on the natural frequencies of cantilevered beam weak in shear. *J. Appl. Mech.*, **59**, 230–232.
- Duvaut, G. (1976). Analyse fonctionnelle des milieux continus. Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. Homogénéisation. W. Koiter, éditeur, *Theoretical and applied mechanics*. North-Holland.
- Fan, H. (1989). *On the Foundations of Beam Theory*. Ph. D. thesis, University of Illinois at Chicago.
- Fish, J. et Chen, W. (2001). Higher-order homogenization of initial/boundary-value problem. *J. Eng. Mech.*, **127**, 1223–1230.
- Forest, S. (1998). Homogénéisation et mécanique des milieux continus généralisés. *Ecole d'été Méthodes d'Homogénéisation en Mécanique des Matériaux - Hyères, France*.
- Forest, S. (2002). Homogenization methods and the mechanics of generalized continua - Part 2. *Theoretical and Applied Mechanics*, **28-29**, 117–148.
- Gambin, B. et Króner, E. (1989). Higher-order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media. *Phys. Stat. Sol. (b)*, **151**, 513–519.
- Geymonat, G., Krasucki, F., et Marigo, J. (1987a). Stress distribution in anisotropic elastic beams. P. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, éditeurs, *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, 119–133. Masson.
- Geymonat, G., Krasucki, F., et Marigo, J. (1987b). Sur la commutativité des passages à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *C.R.Acad.Sci. Ser. I*, **305**, 225–228.
- Ghosh, S., Lee, K., et Raghavan, P. (2001). A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *Int. J. Solids Structures*, **38**, 2335–2385.
- Gibson, L. et Ashby, M. (1997). *Cellular solids, Structure and properties*. Second edition, Cambridge University Press.
- Goldenveizer, A., Kaplunov, J., et Nolde, E. (1993). On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells. *Int. J. Solids Structures*, **30**, 675–694.
- Gregory, R. et Wan, Y. (1984). Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *J. Elasticity*, **14**, 27–64.
- Grenestedt, J. (1999). Effective elastic behavior of some models for 'perfect' cellular solids. *Int. J. Solids Structures*, **36**, 1471–1501.
- Halphen, B. et Salençon, J. (1987). *Cours de calcul de structures anélastiques, Elastoplasticité*. presses de l'E.N.P.C.
- Hohe, J. et Becker, W. (2002). Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models, and properties. *Appl. Mech. Rev.*, **55**, 61–87.
- Hoppe, L. (1991). Modeling the static behavior of dyneema in wire-rope construction. Technical report, MTS RTM.
- Jiang, W., Yao, M., et Walton, J. (1999). A concise finite element model for simple straight wire rope strand. *Int. J. Mech. Sci.*, **41**, 143–161.
- Jurak, M. et Tutek, Z. (1989). A one-dimensional model of homogenized rod. *Glasnik Matematički*, **24**, 271–290.

- Kalamkarov, A. (1992). *Composite and reinforced elements of construction*. Wiley.
- Kalamkarov, A. et Kolpakov, A. (1997). *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Wiley.
- Kaplunov, J. D., Kossovitch, L., et Nolde, E. (1997). *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. Academic Press.
- Karpov, E., Dorofeev, D., et Stephen, N. (2002a). Characteristic solutions for the statics of repetitive beam-like trusses. *Int. J. Mech. Sc.*, **44**, 1363–1379.
- Karpov, E., Stephen, N., et Dorofeev, D. (2002b). On static analysis of finite repetitive structures by discrete fourier transform. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 4291–4310.
- Ko, W. (1980). Elastic constants for superplastically formed/diffusion-bonded sandwich structures. *A.I.A.A. J.*, **18**, 986–987.
- Kohn, R. et Vogelius, M. (1984). A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *Int. J. Solids Structures*, **20**, 333–350.
- Kohn, R. et Vogelius, M. (1986). Thin plates with rapidly varying thickness, and their relation to structural shape optimization. J. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, et J. Lions, éditeurs, *Homogenization and effective moduli of materials and Media*, 126–149. Springer.
- Kolpakov, A. (1991). Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *J. Appl. Math. Mech.*, **55**, 358–365.
- Kouznetsova, V. (2002). *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*. Ph. D. thesis, T.U. Eindhoven.
- Labrosse, M. (1998). *Contribution à l'étude du rôle du frottement sur le comportement et la durée de vie des câbles monocouches*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Ladevèze, P. et Simmonds, J. (1998). New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **17**, 377–402.
- Lahellec, N. (1998). Limite de validité d'une approche par homogénéisation périodique, étude de cas. D.E.A. de Mécanique, Université Aix-Marseille II.
- Lam, D., Yang, F., Chong, A., et Tong, P. (2003). Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, **51**, 1477–1508.
- Laroussi, M., Sab, K., et A., A. (2002). Foam mechanics: nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 3599–3623.
- Lee, U. (2000). Vibration analysis of one-dimensional structures using the spectral transfert matrix method. *Eng. Structures*, **22**, 681–690.
- Léné, F. (1984). *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse d'Etat, Université Paris 6.
- Lewiński, T. (1991a). Effective models of composite periodic plates - Part I. asymptotic solution. *Int. J. Solids Structures*, **27**, 1155–1172.
- Lewiński, T. (1991b). Effective models of composite periodic plates - Part III. two-dimensional approaches. *Int. J. Solids Structures*, **27**, 1185–1203.
- Lewiński, T. (1992). Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure. *Int. J. Solids Structures*, **29**, 309–326.
- Lewiński, T. (1995). Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure. *Int. J. Solids Structures*, **32**, 3261–3287.
- Lewiński, T. et Telega, J. (1999). *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*. World Scientific.
- L'Hostis, G. (1996). *Contribution à la conception et à l'étude de structures composites thermoélastiques*. Thèse, Université Paris 6.
- L'Hostis, G., Devries, F., et Léné, F. (1998). Méthode simplifiée pour le calcul du comportement thermoélastique de composites alvéolaires. *Revue des composites et des matériaux avancés*, **8**, 91–118.

- Melenk, J. et Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **39**, 289–314.
- Michel, J., Moulinec, H., et Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **172**, 109–143.
- Miller, R. (1994). The eigenvalue problem for a class of long, thin, elastic structures with periodic geometry. *Q. Appl. Math.*, **52**, 261–282.
- Moës, N. (2000). *Contributions au calcul des structures: Une extension de la méthode des éléments finis. Le contrôle des calculs éléments finis non linéaires*. Mémoire d'habilitation, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., et Remacle, J. (2002). A computational approach to handle complex microstructure geometries. Workshop Multi-scale Computational Mechanics for Materials and Structures, Cachan, septembre 2002.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., et Remacle, J. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **192**, 3163–3177.
- Moreau, G. (1996). *Homogénéisation de structures discrètes en élasticité et en incrémental*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Mouftakir, L. (1996). *Homogénéisation de structures ondulées*. Thèse, Université de Metz.
- Nawrocki, A. (1997). *Contribution à la modélisation des câbles monotorons par éléments finis*. Thèse, Ecole Centrale de Nantes.
- Nazarov, S. (1996). On the accuracy of asymptotic approximations for longitudinal deformation of a thin plate. *Math. Modelling Numer. Anal.*, **30**, 185–213.
- Noor, A. (1988). Continuum modeling for repetitive lattice structures. *Appl. Mech. Rev.*, **41**, 285–296.
- Noor, A. et Russel, W. (1986). Anisotropic continuum models for beamlike lattice trusses. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **57**, 257–277.
- Noor, A., Burton, W., et Bert, C. (1995). Computational models for sandwich panels and shells. *Appl. Mech. Rev.*, **155**, 155–199.
- Ostoj-Starzewski, M. (2003). Lattice models in micromechanics. *Appl. Mech. Rev.*, **55**, 35–60.
- Panasenko, G. (1999). Asymptotic partial decomposition of variational problems. *C.R.Acad.Sci. Ser. IIB*, **327**, 1185–1190.
- Panasenko, G. (2000). Method of asymptotic partial decomposition of rod structures. *Int. J. of Comput. Civil and Structural Eng.*, **1**, 57–70.
- Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K., Polyzos, D., et Beskos, D. (2003). Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *Int. J. Solids Structures*, **40**, 385–400.
- Parton, V. et Kudryavtsev, B. (1993). *Engineering Mechanics of Composite Structures*. CRC Press.
- Peerlings, R. et Fleck, N. (2002). A numerical framework for homogenisation towards higher-order media. R. F. E. J. Mang, H.A., éditeur, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*. <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- Popescu, B., Hodges, D., et K.H., L. (2000). On asymptotically correct timoshenko-like anisotropic beam theory. *Int. J. Solids Structures*, **37**, 535–558.
- Potier-Ferry, M. et Siad, L. (1992). Homogénéisation géométrique d'une tôle ondulée. *C.R.Acad.Sci. Ser. II*, **314**, 425–430.
- Pradel, F. (1998). *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse, E.N.P.C.
- Raouf, M. et Kraincanic, I. (1995). Simple derivation of the stiffness matrix for axial/torsional coupling of spiral strands. *Computers and Structures*, **55**, 589–600.

- Renton, J. (1984). The beam-like behavior of space trusses. *A.I.A.A. J.*, **22**, 273–280.
- Saada, A. et Bianchini, G. (1988). *Constitutive equations for granular non-cohesive soils*. Balkema.
- Salha, B. (1988). Éléments pour une théorie de plaques hétérogènes. *Note technique HI-71/6054, EDF/DER, Service IMA, Département MMN*.
- Sanchez-Hubert, J. et Sanchez-Palencia, E. (1992). *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'Homogénéisation*. Masson.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*, volume 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag, Berlin.
- Sanchez-Palencia, E. (1985). Boundary layers and edge effects in composites. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 122–192. Springer-Verlag.
- Schraad, M. et Triantafyllidis, N. (1997). Effects of scale size on media with periodic and nearly periodic microstructures - I macroscopic properties. *J. Appl. Mech.*, **64**, 751–762.
- Sethian, J. A. (1999). *Level Set Methods & Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Siad, L., Potier-Ferry, M., et Mouftakir, L. (1993). Homogénéisation géométrique d'un poutre épaisse ondulée. *Actes du 1er Colloque National en Calcul de Structures - Giens*, volume vol. 1, 171–177. Hermès.
- Smyshlyaev, V. et Cherednichenko, K. (2000). On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media. *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1325–1357.
- Soto, C. et Diaz, A. (1993). On the modelling of ribbed plates for shape optimization. *Struct. Optim.*, **6**, 175–188.
- Stephen, N. (1999). On the vibration of one-dimensional periodic structures. *J. of Sound and Vibration*, **227**, 1133–1142.
- Stephen, N. et Wang, P. (1996). On saint-venant's principle in pin-jointed frameworks. *Int. J. Solids Structures*, **33**, 79–97.
- Sun, C. et Liebbe, S. (1990). Global-local approach to solving vibration of large truss structures. *A.I.A.A. J.*, **28**, 303–308.
- Suquet, P. (1985). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éditeurs, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume 272 de *Lecture Notes in Physics*, 193–278. Springer-Verlag.
- Sutyryn, V. (1997). Derivation of plate theory accounting asymptotically correct shear deformation. *J. Appl. Mech.*, **64**, 905–915.
- Tollenaere, H. (1994). *Modèles bidimensionnels de tissés. Homogénéisation de treillis en vibrations libres*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Trabucho, L. et Viaño, J. (1996). Mathematical modelling of rods. P. Ciarlet et J. Lions, éditeurs, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, 487–974. North-Holland.
- Triantafyllidis, N. et Bardenhagen, S. (1996). The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models. *J. Mech. Phys. Solids*, **44**, 1891–1928.
- Tutek, Z. (1987). A homogenized model of a rod in linear elasticity. P. Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, éditeurs, *Applications of Multiple Scaling in Mechanics*, 316–331. Masson.
- Verna, P. (1991). *Modélisation continue de structures discrètes par homogénéisation : cas des treillis*. Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- Wan, F. (2003). Stress boundary conditions for plate bending. *Int. J. Solids Structures*, **40**, 4107–4123.

- Warren, W. et Kraynik, A. (1988). The linear elastic properties open-cell foams. *J. Appl. Mech.*, **55**, 341–346.
- Warren, W. et Kraynik, A. (1997). Linear elastic behavior of a low density kelvin foam with open cells. *J. Appl. Mech.*, **64**, 787–794.
- Yu, W., Hodges, D., et Volovoi, V. (2002). Asymptotic construction of Reissner-like composite plate theory with accurate strain recovery. *Int. J. Solids Structures*, **39**, 5185–5203.
- Zhu, H., Knott, J., et Mills, N. (1997). Analysis of the elastic properties of open-cell tetrakaidecahedral cells. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, 319–343.