



**HAL**  
open science

# Modèle numérique de conduction surfacique dans les dispositifs bidimensionnels - Prise en compte de non-linéarités

Zié Yeo

► **To cite this version:**

Zié Yeo. Modèle numérique de conduction surfacique dans les dispositifs bidimensionnels - Prise en compte de non-linéarités. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 1997. Français. NNT : . tel-00140119

**HAL Id: tel-00140119**

**<https://theses.hal.science/tel-00140119>**

Submitted on 5 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

Présentée devant

**L'ECOLE CENTRALE DE LYON**

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR**  
(Arrêté du 30/03/1992)

**Spécialité: Génie Electrique**

Préparée au sein de

**L'ECOLE DOCTORALE**

**ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE**

**DE LYON**

par

**YEO Zié**

---

**Modèle numérique de conduction surfacique dans les  
dispositifs bidimensionnels - Prise en compte de non  
linéarités**

---

*Soutenue le 25 mars 1997 devant la commission d'examen :*

**JURY : MM**

<b>C. HURAUX</b>	Professeur - Université Paul Sabatier	<b>Président, rapporteur</b>
<b>Ph. AURIOL</b>	Professeur - ECL - CEGELY	<b>Examineur</b>
<b>B. BANDELIER</b>	Professeur - Université Paris Sud	<b>Rapporteur</b>
<b>X. BRUNOTTE</b>	Docteur - CEDRAT S.A.	<b>Examineur</b>
<b>F. BURET</b>	Maître de Conférences - ECL - CEGELY	<b>Examineur</b>
<b>L. KRÄHENBÜHL</b>	Directeur de Recherche CNRS - ECL - CEGELY	<b>Examineur</b>

*à ma famille*

*à Kassélé, Zanga, Nawa*

*à tous mes amis*

## **Avant-propos**

*Ce travail a été réalisé à l'école doctorale d'Electronique, d'Electrotechnique et d'Automatique de Lyon. Je remercie le Professeur A. NICOLAS, directeur du CEGELY et le Professeur Ph. AURIOL, directeur de la formation doctorale, qui m'ont accueilli dans ce laboratoire.*

*Je remercie Monsieur le Président et Messieurs les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers Monsieur F. BURET, Maître de conférences et Monsieur L. KRÄHENBÜHL, directeur de recherche CNRS, qui m'ont constamment guidé au cours de ce travail par leurs conseils éclairés. Je tiens à les remercier vivement.*

*Je remercie également tout le personnel du laboratoire (chercheurs, techniciens et personnel administratif) et mes camarades chercheurs pour l'ambiance, agréable et favorable au travail, qu'ils ont su créer.*

*L'aboutissement de ce travail a aussi bénéficié du soutien moral de ma famille et de mes amis en Côte d'Ivoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.*

# TABLE DES MATIERES

<b>RESUME</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>I. LES COUCHES SEMI-CONDUCTRICES DANS LES APPAREILLAGE HT</b>	<b>5</b>
<b>I.1 Introduction</b>	<b>6</b>
<b>I.2. Pollution des interfaces isolantes</b>	<b>6</b>
I.2.1 Origine de la couche polluante	6
I.2.2 Conséquences	7
I.2.3 Etudes	9
<b>I.3. Revêtements semi-conducteurs</b>	<b>10</b>
<b>I.4. Etude de la contrainte diélectrique : le modèle réseau</b>	<b>12</b>
<b>I.5 Conclusion</b>	<b>14</b>
<b>II. MODELISATION</b>	<b>15</b>
<b>II.1 Introduction</b>	<b>16</b>
<b>II.2. Le modèle de Maxwell</b>	<b>16</b>
II.2.1 Formulation générale	19
II.2.2 Problème statique	22
II.2.3 Conditions aux limites	25
II.2.4 Conditions d'interfaces	25
<b>II.3 Modèle de conduction surfacique</b>	<b>29</b>
II.3.1 Modèle général	30
II.3.2 Modèles 2D et axisymétrique	33
II.3.3 Modèle non linéaire	35
<b>II.4 Conclusion</b>	<b>36</b>
<b>III. METHODES NUMERIQUES</b>	<b>37</b>
<b>III.1. Introduction</b>	<b>38</b>
<b>III.2 Méthode des différences finies</b>	<b>38</b>
III.2.1 Maillage de la géométrie	38

III.2.2 Transformation de l'équation différentielle	39
<b>III.3 Méthode des éléments finis</b>	<b>42</b>
III.3.1 Découpage en éléments finis	42
III.3.2 Approximation	43
<b>III.4. Méthode des charges équivalentes</b>	<b>46</b>
III.4.1 Localisation des charges	46
III.4.2 Calcul des charges fictives	47
<b>III.5 Equations intégrales de frontière</b>	<b>49</b>
III.5.1 Fonctions de Green	49
III.5.2 Méthode des distributions	51
III.5.3 Méthode de l'identité de Green	52
III.5.4 Fonctions de Green en 2D plan et axisymétrique	54
III.5.5 Problème ouvert	57
III.5.6 Discrétisation	58
III.5.7 Etude des singularités	60
<b>III.6 Conclusion</b>	<b>62</b>
<b>IV. RESOLUTION DE LA CONDUCTION SURFACIQUE</b>	<b>65</b>
<b>IV.1 Introduction</b>	<b>66</b>
<b>IV.2 Retour sur l'équation intégrale</b>	<b>66</b>
IV.2.1 Point d'intégration sur une interface conductrice	67
IV.2.2 Point singulier sur une interface conductrice	68
<b>IV.3 Forme faible des équations de conduction</b>	<b>72</b>
<b>IV.4 Résolution du problème linéaire</b>	<b>74</b>
IV.4.1 Discrétisation	75
IV.4.2 Assemblage	77
<b>IV.5 Résolution du problème non linéaire</b>	<b>78</b>
IV.5.1 Discrétisation	78
IV.5.2 Assemblage	80
IV.5.3 Résolution	81
<b>IV.6 Autres méthodes de résolution</b>	<b>83</b>
IV.6.1 Méthode variationnelle	83
IV.6.2 Méthode intégrale	84
<b>IV.7 Conclusion</b>	<b>86</b>

<b>V. RESULTATS ET VALIDATIONS</b>	<b>87</b>
<b>V.1 Introduction</b>	<b>88</b>
<b>V.2 Intérêt de la couche conductrice</b>	<b>88</b>
<b>V.3 Vérification préliminaire</b>	<b>92</b>
<b>V.4 Problème à deux dimensions</b>	<b>97</b>
V.4.1 Modèle linéique	97
V.4.2 Conduction linéaire	99
V.4.3 Conduction non linéaire	107
<b>V.5 Problème axisymétrique</b>	<b>115</b>
V.5.1 Modèle linéique	116
V.5.2 Conduction linéaire	119
V.5.3 Conduction non linéaire	125
<b>V. 6 Conclusion</b>	<b>130</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>131</b>
<b>REFERENCES</b>	<b>133</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>137</b>

## **Résumé**

Certains dispositifs électrotechniques présentent une couche de faible conductivité et de faible épaisseur qui modifie considérablement les répartitions des potentiels et des champs électriques. Cette situation se rencontre, par exemple, dans l'étude des isolateurs pollués ou des traversées comportant un revêtement semi-conducteur. La zone conductrice a une épaisseur très faible devant les autres dimensions du système et il est difficile d'en tenir compte, telle quelle, dans une méthode numérique.

Ce travail est consacré à la modélisation (2D et 3D axisymétrique) d'une couche conductrice présente à l'interface de deux diélectriques. Celle-ci est simulée par une surface munie d'une conductivité surfacique qui peut dépendre ou non du champ électrique. Les équations qui caractérisent le modèle ont été implantées dans un logiciel de calcul de champ basé sur la méthode des équations intégrales de frontière.

Le premier chapitre décrit les divers phénomènes physiques liés à la présence d'une couche conductrice entre deux isolants. Le second chapitre rappelle d'abord les résultats très classiques sur les équations de Maxwell. Ensuite, il établit une équation de conservation de l'électricité au niveau de la zone conductrice. Le troisième chapitre passe en revue les différentes méthodes numériques généralement utilisées en électrotechnique. Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique. Le cinquième chapitre présente les résultats et la validation du nouveau module logiciel.

Les résultats obtenus, dans le cas d'une configuration simplifiée, sont en accord avec la solution analytique (problème linéaire) et la solution numérique (problème non linéaire).

## **Abstract**

Some electrical engineering devices present a lightly conducting layer with a dim thickness which modifies considerably the electric potential and field distribution. This situation occurred, for example, when studying polluted insulators or feedthrough ones that include semi conducting coatings. The conducting zone has a very dim thickness with regard to the other sides of the system and it is difficult to take it into account, as it is, in a numeric resolution.

This work deals with the modelling of a conducting layer (2D and 3D axisymmetric) present at the interface of two dielectrics. This one is simulated by a surface supplied with surface conductivity which can depend or not on the electric field. The model's equations were embedded in a field computation software based on the boundary element method.

The first chapter describes the various physical phenomena related to the presence of a conducting layer between two insulators. The second chapter remembers firstly, the classic results on the Maxwell equations. Then, it establishes an equation of the electricity conservation in the conducting zone. The third chapter goes through the different numeric methods generally used in electrical engineering. The fourth chapter deals with the numeric resolution. The fifth chapter presents the results and the validation of the software.

The obtained results, in a simplified geometry, agree with the analytic solution (linear problem) and the numeric solution (non linear problem).



## INTRODUCTION

La tenue aux contraintes diélectriques est un des problèmes que l'on doit prendre en compte dans la conception des systèmes haute tension. En effet, l'isolation introduit des contraintes importantes dans la détermination des paramètres dimensionnels globaux. La grande majorité des dispositifs électrotechniques peut se modéliser de manière simple pour évaluer les contraintes diélectriques : électrodes à potentiel fixé ou flottant et milieu diélectrique à permittivité constante. On a alors affaire à un problème purement électrostatique. Cependant, certains dispositifs présentent des particularités qui obligent à développer des modèles de comportements diélectriques plus complexes, par exemple en présence des matériaux diélectriques non linéaires. Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes qui présentent des régions faiblement conductrices dans la mesure où, pour les fréquences considérées, celles-ci ne peuvent être considérées comme équipotentielles. Ces régions modifient profondément la répartition des potentiels. En électrotechnique, cette situation se rencontre dans deux cas caractéristiques : les dépôts de pollution d'une part, les revêtements semi-conducteurs<sup>(1)</sup> (peinture, ruban) d'autre part. Dans ces deux cas, les régions conductrices sont d'épaisseur très faible devant les dimensions du système, ce qui va conduire à une modélisation particulière (description surfacique).

Plusieurs études ont déjà permis d'aborder ce type de modèles [4, 24, 43, 51]. Le CEGELY<sup>(2)</sup> a développé deux logiciels de calcul de champs basés sur les intégrales de frontière. Le premier, PHI3D, est conçu pour les structures tridimensionnelles. Un "module pollution", qui traite les couches conductrices, a été intégré dans ce logiciel [41]. Pour l'instant ce module n'a pas été étendu aux problèmes non linéaires dans la zone conductrice, à cause

des temps de calculs importants associés aux résolutions 3D et, parce qu'il a paru plus raisonnable, dans un premier temps, d'aborder ces non linéarités en 2D. Le deuxième logiciel, BEM2D, a été développé pour les problèmes à deux dimensions ou à trois dimensions avec symétrie axiale [13]. Il nous a été proposé de développer les formulations 2D et axisymétrique à partir de la formulation 3D de la conduction surfacique, d'étendre ces formulations aux problèmes non linéaires et d'implanter les équations correspondantes dans le logiciel BEM2D.

Dans un premier chapitre, nous allons présenter les principaux cas de conduction surfacique. Ceux-ci sont modélisés au second chapitre à l'aide des équations de Maxwell. Les équations obtenues sont généralement résolues par des méthodes numériques qui font l'objet du troisième chapitre. Les deux derniers chapitres traitent de l'implantation logiciel et de la validation des résultats.

---

<sup>(1)</sup> Faible conductivité électrique

<sup>(2)</sup> Centre de Génie Electrique de Lyon

**I. LES COUCHES SEMI-CONDUCTRICES DANS LES  
APPAREILLAGES HT**

## **I.1 INTRODUCTION**

Une couche conductrice, à l'interface de deux diélectriques, modifie la répartition des contraintes électriques. Cette modification, dans le cas de la pollution des isolateurs, diminue les performances de tenue en tension. Dans le cas des revêtements, utilisés par exemple sur certaines traversées, la couche conductrice améliore les performances en abaissant les contraintes en champ.

Dans ce chapitre, nous décrivons dans un premier temps ces types de configurations et les conséquences sur la tenue en tension des systèmes d'isolation. Ensuite, nous exposons les études et les modèles qui les concernent.

## **I.2 POLLUTION DES INTERFACES ISOLANTES**

Certains dispositifs électrotechniques (disjoncteurs, chaînes d'isolateurs, parafoudres, etc.) comportent des interfaces soumises aux conditions atmosphériques et celles-ci peuvent influencer leur comportement [17, 19, 23, 50]. En effet, les dépôts de pollution, et ceux-ci sont d'origines très diverses, modifient, généralement en la dégradant, la fiabilité des systèmes isolants.

### **I.2.1 Origine de la couche polluante**

La nature des particules qui constituent le dépôt de pollution dépend des conditions environnementales. On distingue essentiellement trois cas : les pollutions désertiques, les

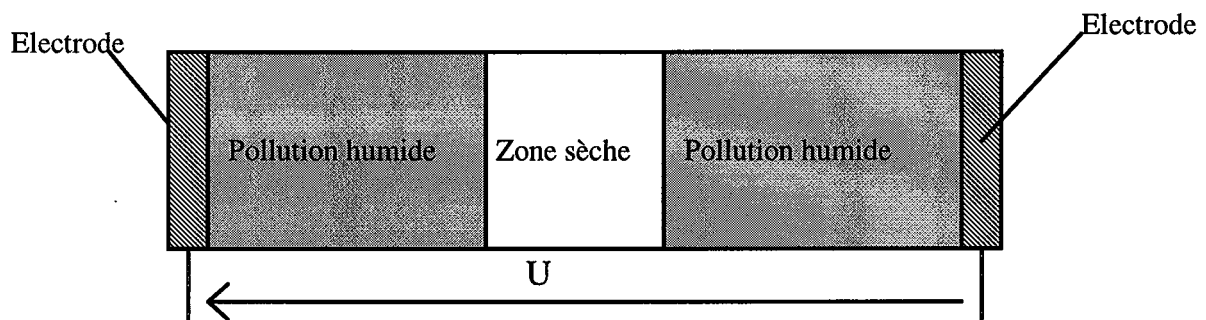
pollutions marines et les pollutions industrielles. Dans les régions désertiques, les particules de sable, entraînées par le vent, se déposent sur les interfaces isolantes et y construisent progressivement une couche solide [18]. Par contre, en bordure de mer, ce sont les embruns marins qui sont responsables de la formation de la couche. Celle-ci est alors essentiellement constituée de sel. Au voisinage des usines métallurgiques ou chimiques, les isolants peuvent se recouvrir de poussières (résidus de l'activité industrielle). La nature des polluants est donc très variée et les mécanismes de formation de la couche, en raison de leur complexité et de leur caractère aléatoire, se prêtent difficilement à une modélisation mathématique. Tous les travaux visant à l'étude de la formation d'une couche de pollution ont été presque exclusivement expérimentaux. Toutefois des modèles mathématiques de l'état de couche de pollution existent et tiennent compte de l'aspect aléatoire et de la dynamique du phénomène [31].

La couche de pollution, en présence d'humidité, se transforme en électrolyte et permet la circulation d'un courant de fuite [35]. Cette humidité peut provenir de la rosée, des buées ou d'une phase de condensation. Les courants de fuite qui découlent de la présence de cette couche modifient les contraintes électriques dans le système HT, s'accompagnent de phénomènes thermiques [24] et conduisent à de nombreuses conséquences.

### **I.2.2 Conséquences**

Dans les régions côtières, désertiques ou fortement industrialisées, les systèmes d'isolations doivent être renforcés. Car, les ouvrages installés dans ces régions sont sujets à des incidents graves dus aux contournements des isolants.

Une couche uniforme et légèrement conductrice devrait améliorer la tenue en tension d'une structure de type isolateur. En effet, le courant de fuite dans cette couche impose une répartition de tension plus linéaire que la répartition électrostatique. Dans le cas de la pollution, la couche n'est pas uniforme et elle conduit généralement à une détérioration des performances du système d'isolation. Les courants de fuite conduisent à des échauffements locaux et à la formation de bandes sèches [34]. La figure (fig. I.1) schématise l'état de la surface d'un isolateur en présence d'une zone sèche.



*Fig. I.1 - Pollution humide et zone sèche*

Les zones de pollution humides sont conductrices et la différence de potentiel qui se trouvait entre les électrodes, avant la formation des bandes sèches, se retrouve plus ou moins aux bornes des différentes zones sèches. En se plaçant dans la situation particulière où la tension aux bornes d'une zone sèche est supérieure à sa tension disruptive, il va y avoir amorçage d'un arc local. La tension de service se retrouve aux bornes des autres zones sèches, augmentant ainsi la tension à leurs bornes. Le processus peut se poursuivre jusqu'au contournement de la dernière zone sèche. On obtient alors le claquage de l'intervalle entre électrodes et la mise hors service de l'ensemble de l'installation.

Le dépôt de polluant à la surface des isolants modifie la répartition électrostatique des potentiels, pouvant ainsi conduire à des conséquences graves pour la fiabilité et la durée de vie des systèmes. Pendant la phase de conception, il est donc nécessaire de tenir compte du comportement des isolants sous pollution.

### **I.2.3 Etudes**

Face aux conséquences de la pollution, de nombreuses études expérimentales ont été entreprises [40, 43]. Elles se classent en deux catégories : les essais sur site et les essais en laboratoire. Chacune de ces catégories a ses avantages et ses inconvénients.

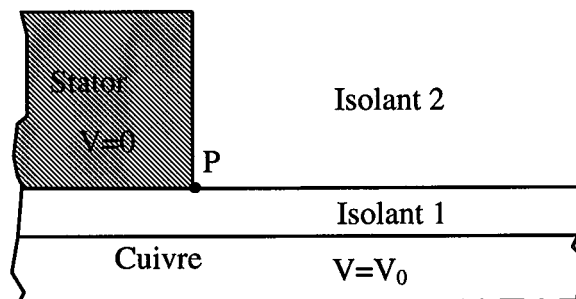
Les essais sur site consistent à observer le comportement d'un dispositif exposé dans ses conditions d'exploitations. Les résultats fournis par une telle étude reflètent la réalité. La pollution est un phénomène à évolution lente puisque due à une accumulation progressive de dépôts. Plusieurs années sont parfois nécessaires pour avoir des résultats sur sites [9]. Ce temps est considéré comme trop long et les chercheurs ont envisagé de faire des essais en laboratoire. Ceux-ci consistent à reproduire en laboratoire les conditions de la pollution naturelle. Le principe est d'accélérer le dépôt de polluant sur les interfaces des isolants. Les méthodes couramment utilisées sont la méthode de la couche solide et la méthode du brouillard salin. Ces essais permettent d'obtenir des résultats et d'effectuer des comparaisons plus rapidement et plus facilement. En simulant la pollution en laboratoire, on s'écarte un peu des conditions réelles d'exploitations mais on gagne beaucoup de temps. Les essais, sur site ou en laboratoire étant onéreux, des modèles mathématiques sont souvent élaborés [27, 40, 49].

Les essais sur site, les essais en laboratoire et les modèles sont complémentaires. En effet, les modèles et les essais en laboratoire peuvent apporter des informations intéressantes à une série limitée d'essais in situ. Notre étude doit nous permettre de progresser au niveau des modèles permettant de calculer les distributions de champs dans les systèmes pollués.

### I.3 REVETEMENTS SEMI-CONDUCTEURS

Dans un système HT, le passage d'une isolation à fortes contraintes (à huile, isolant solide, gaz comprimé) à une isolation à faibles gradients (air) s'accompagne généralement d'une mauvaise répartition des lignes équipotentielles [22, 30]. Pour résoudre ce problème, il a été développé des systèmes que l'on appelle "traversée" et qui permettent une répartition acceptable de la tension dans le milieu le moins performant. Pour illustrer notre propos nous allons décrire sommairement ce qui se passe au niveau des têtes de bobines d'une machine tournante moyenne tension (quelques kV).

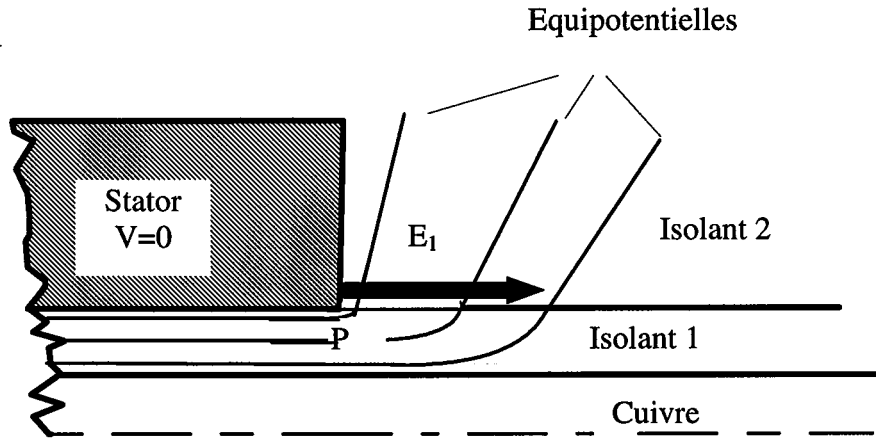
Au niveau de la tête du bobinage d'une machine tournante, deux isolants sont en présence (fig. I.2).



*Fig. I.2 - Schéma de la tête de bobine*

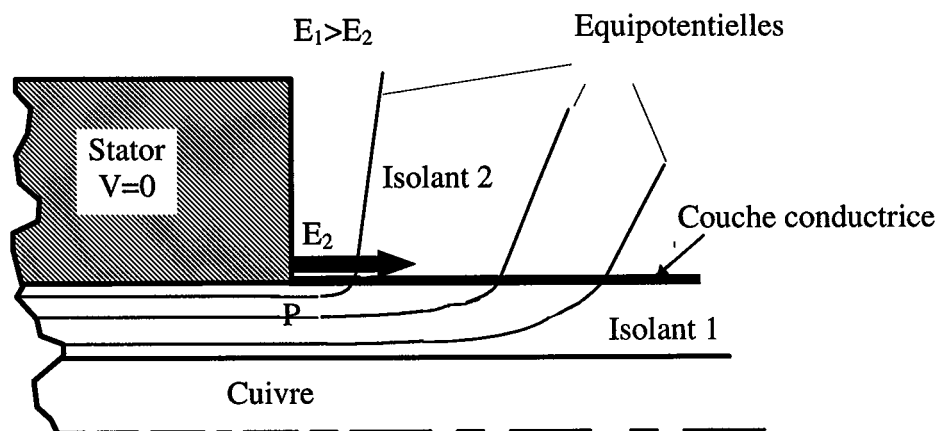


La répartition du potentiel au voisinage du point P peut être représentée de façon schématique sur la figure (fig. I.3).



*Fig. I.3 - Répartition des équipotentiels au voisinage de P*

Le potentiel décroît très vite dans le voisinage du stator et entraîne des contraintes très élevées. Ce qui peut entraîner des amorçages locaux. Pour résoudre ce problème, les constructeurs appliquent une couche faiblement conductrice (peinture, vernis, ruban, etc.) à la surface de l'isolant (fig. I.4).

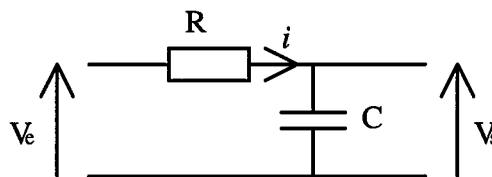


*Fig. I.4 - Equipotentiels en présence d'une couche conductrice*

La couche conductrice, à la surface de l'isolant, réduit le gradient de potentiel ( $E_1 > E_2$ ) et donc le risque de décharges partielles. Nous nous intéresserons à la modification de la répartition des potentiels due à la présence de la couche de revêtement semi-conducteur.

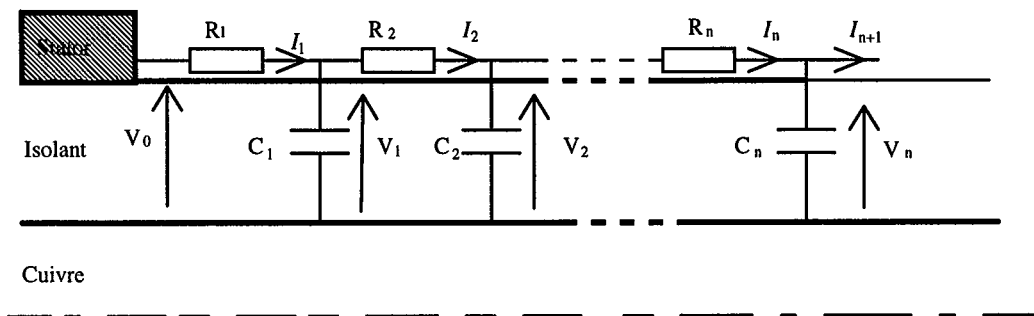
#### I.4 ETUDE DE LA CONTRAINTE DIELECTRIQUE : LE MODELE RESEAU

Pour déterminer la répartition des contraintes dans les dispositifs en présence de zones conductrices, le modèle réseau est le plus simple. Il consiste à découper le système en une succession de cellules élémentaires (fig. I.5).



*Fig. I.5 - Cellule élémentaire*

Chaque cellule élémentaire est composée d'une résistance simulant la couche conductrice et d'une capacité représentant l'isolant. En appliquant le modèle réseau à l'étude de la tête de bobine, on obtient le schéma de la figure (fig. I.6).



*Fig. I.6 - Schéma équivalent*

Pour chaque cellule, on peut écrire une équation sur les tensions et une équation sur les courants. Elles sont regroupées comme suit :

$$\begin{array}{l}
 \text{Equations des tensions :} \\
 \\
 \text{Equations des courants :}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 V_1 + R_1 I_1 = V_0 \\
 V_2 + R_2 I_2 = V_1 \\
 \dots \\
 V_k + R_k I_k = V_{k-1} \\
 \dots \\
 V_{n-1} + R_{n-1} I_{n-1} = V_{n-2} \\
 V_n + R_n I_n = V_{n-1}
 \end{array} \right.
 \left\{ \begin{array}{l}
 I_1 - C_1 \frac{dV_1}{dt} = I_2 \\
 I_2 - C_2 \frac{dV_2}{dt} = I_3 \\
 \dots \\
 I_k - C_k \frac{dV_k}{dt} = I_{k+1} \\
 \dots \\
 I_{n-1} - C_{n-1} \frac{dV_{n-1}}{dt} = I_n \\
 I_n - C_n \frac{dV_n}{dt} = I_{n+1} = 0
 \end{array} \right.$$

Ces deux ensembles d'équations permettent de former un système différentiel du premier ordre qui se met sous la forme :

$$[C] \left\{ \frac{dV}{dt} \right\} + [K] \{V\} = \{V_c\}$$

[C] est une matrice fonction des capacités, [K] une matrice fonction des résistances et {V<sub>c</sub>} le vecteur des potentiels connus. La solution de ce système donne la répartition du potentiel {V} le long de la couche conductrice.

## I.5 CONCLUSION

La présence d'une couche faiblement conductrice à l'interface d'un matériau isolant modifie profondément la répartition des potentiels. Cette situation se rencontre dans le cas de la pollution et dans celui des revêtements semi-conducteurs. Dans le cas de la pollution, la couche n'est pas uniforme et elle entraîne des conséquences néfastes sur la fiabilité et la durée de vie des dispositifs. Dans le cas d'un revêtement semi-conducteur, la couche est réputée conduire à une homogénéisation de la contrainte en champ, encore améliorée par la caractéristique non linéaire de la conductivité des revêtements utilisés<sup>(1)</sup>.

Dans certaines configurations simples, un modèle de réseau permet de déterminer les contraintes électriques sur la couche conductrice. Ces solutions simples seront utilisées pour valider les modèles numériques plus généraux que nous allons présenter aux chapitres suivants.

---

<sup>(1)</sup> Nous pourrions le vérifier au chapitre V

**II. MODELISATION**

## **II.1 INTRODUCTION**

En électrotechnique, les dispositifs de puissance tels que les moteurs, les transformateurs et les appareils de coupure font intervenir des phénomènes thermiques, des phénomènes mécaniques et des phénomènes électromagnétiques [21]. Nous cherchons ici à modéliser les phénomènes électromagnétiques, mais il est important de garder à l'esprit qu'ils sont étroitement liés aux autres phénomènes.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord rappeler le modèle de Maxwell, les différentes formulations et les équations qui en résultent. Le cas particulier du régime statique sera étudié. Ensuite, nous proposerons un modèle de la zone conductrice qui considère cette dernière comme une interface et nous établirons la condition d'interface correspondante.

## **II.2 LE MODELE DE MAXWELL**

Deux entités, le champ électrique et le champ magnétique, interviennent directement dans la phase de conception des dispositifs électrotechniques. L'existence du champ électrique est mise en évidence par l'intermédiaire des forces qu'il exerce sur les particules électriquement chargées. De même, le champ magnétique est perçu par l'intermédiaire de ses variations spatiales (observation d'une aiguille aimantée) et temporelle (mesure d'une f.é.m). Maxwell, en 1873, a regroupé en quatre équations, deux de couplage (II.1) et (II.2) et deux de conservation (II.3) et (II.4), le comportement de ces deux champs. Ce modèle, bien qu'il soit centenaire, est encore en vigueur (car sa validité n'a jamais été mise en défaut) et constitue les lois générales de l'électromagnétisme. On peut écrire ces équations sous forme différentielle

ou sous forme intégrale. On passe de la forme différentielle à la forme intégrale en utilisant les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski.

Forme différentielle

Forme intégrale

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1a})$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II.1b})$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2a})$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II.2b})$$

$$\mathbf{div} \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{II.3a})$$

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\Omega} \rho \, dv \quad (\text{II.3b})$$

$$\mathbf{div} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.4a})$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{II.4b})$$

Où	<b>E</b> : Champ électrique	(V.m <sup>-1</sup> )
	<b>D</b> : Induction électrique	(C.m <sup>-2</sup> )
	<b>H</b> : Champ magnétique	(A.m <sup>-1</sup> )
	<b>B</b> : Induction magnétique	(T)
	<b>J</b> : Densité volumique de courant	(A.m <sup>-2</sup> )
	<b>ρ</b> : Densité volumique de charges	(C.m <sup>-3</sup> )
	<b>t</b> : temps	(s)

Dans les équations (II.3b) et (II.4b),  $\Omega$  désigne un volume et S la surface fermée qui le délimite (fig. II.1). Dans les équations (II.1b) et (II.2b),  $\Gamma$  désigne un contour fermé et S la surface qui s'appuie sur celui-ci (fig. II.2).

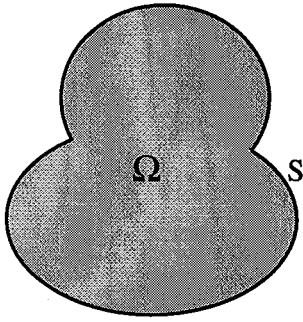


Fig. II.1 - Surface et volume associé

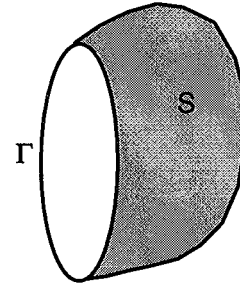


Fig. II.2 - Contour et surface associée

A ces équations, il convient d'ajouter les relations constitutives qui traduisent la réaction des matériaux sous l'action des champs : en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$ , il apparaît une densité de dipôles électriques (polarisation  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ) dans les diélectriques. De même, sous l'action d'un champ magnétique  $\mathbf{H}$ , il apparaît une densité de moments magnétiques (aimantation  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ ) dans les matériaux magnétiques. La réaction d'un conducteur à l'application d'un champ électrique est traduite par la loi d'Ohm généralisée. Le tableau (II.1) rassemble les relations constitutives pour les différents types de matériaux.

	Champ	Relation constitutive
Matériaux diélectriques	$\mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$
Matériaux magnétiques	$\mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$
Matériaux conducteurs	$\mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

Tableau II.1 - Relations constitutives des matériaux

$\mu$  : Perméabilité magnétique ( $\text{H.m}^{-1}$ )

$\epsilon$  : Permittivité électrique ( $\text{F.m}^{-1}$ )



$\sigma$  : Conductivité électrique (S.m<sup>-1</sup>)

$\mathbf{P}$  : Densité de dipôles électriques

$\mathbf{M}$  : Densité de moments magnétiques

$\chi_e$  : Susceptibilité électrique

$\chi_m$  : Susceptibilité magnétique

Les grandeurs  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ , et  $\chi$  rendent compte des propriétés physiques de l'espace. Ce sont des fonctions de la position et leurs valeurs numériques en un point vont dépendre du matériau. Dans le cas général, ces grandeurs sont des tenseurs pour tenir compte de l'effet d'anisotropie des systèmes. Elles peuvent être des scalaires, modélisant le comportement de matériaux isotropes. Elles peuvent aussi dépendre des champs pour les matériaux non linéaires.

### II.2.1 Formulation générale

L'utilisation directe des équations de Maxwell dans une méthode numérique de résolution n'est pas aisée. Elle nécessite la prise en compte des quatre équations avec toutes les inconnues. Il est préférable de choisir une inconnue en potentiel (scalaire ou vectoriel) qui permet de transformer les équations de Maxwell. Le choix d'un potentiel conduit à une formulation donnée. Ainsi, la formulation en potentiel vecteur aboutit à une équation en  $\mathbf{A}$  et la formulation en potentiel scalaire donne une équation en  $V$ . Nous développons ici la formulation en potentiel scalaire électrique. L'annexe [A.1] développe la formulation en potentiel vecteur.

Si  $\mathbf{K}$  est un vecteur et  $\varphi$  un scalaire, les identités suivantes sont toujours vérifiées :

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot K}) = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} \varphi) = \mathbf{0} \quad (\text{II.6})$$

En comparant (II.5) et II.4a), on déduit que :

$$\mathbf{rot K} = \mathbf{B} \quad (\text{II.7})$$

Dans ce cas, le vecteur  $\mathbf{K}$  est communément noté  $\mathbf{A}$  et on l'appelle potentiel vecteur magnétique. Si on remplace l'expression de  $\mathbf{B}$  dans la relation (II.1a) on obtient :

$$\mathbf{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{II.8})$$

Comparons maintenant (II.6) et (II.8). On déduit que :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{grad} \varphi \quad (\text{II.9})$$

Dans ce cas, le scalaire  $\varphi$  est communément noté  $V$  et on l'appelle potentiel scalaire électrique. En tenant compte de la relation constitutive dans les matériaux diélectriques et en introduisant (II.9) dans (II.3a) on obtient :

$$\varepsilon \left[ \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \cdot \mathbf{A}) \right] + \mathbf{grad} \varepsilon \cdot \left[ \mathbf{grad} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = -\rho \quad (\text{II.10})$$

Dans un milieu homogène, la permittivité est une constante et on pourra écrire :

$$\varepsilon \left[ \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{div} \cdot \mathbf{A}) \right] = -\rho \quad (\text{II.11})$$

Pour définir complètement une fonction vectorielle, il faut connaître son rotationnel et sa divergence. C'est d'ailleurs ce que donnent les équations de Maxwell. Elles donnent la divergence et le rotationnel du champ électrique et du champ magnétique. Nous connaissons

(II.7) le rotationnel du vecteur  $\mathbf{A}$  et il faut aussi fixer sa divergence. L'entité  $\mathbf{A}$  n'est en fait qu'un simple artifice mathématique permettant de simplifier les formulations des problèmes en électromagnétisme. Toute expression de  $(\mathbf{div. A})$  est utilisable mais certains choix ont le mérite de simplifier les formulations. Dans le cas de l'équation (II.11) la plus simple expression revient à utiliser la jauge de Coulomb [10] qui suppose que le vecteur  $\mathbf{A}$  est à flux conservatif.

$$\mathbf{div. A} = 0 \quad (\text{II.12})$$

On obtient alors l'équation de Poisson pour le potentiel scalaire électrique :

$$\varepsilon \Delta V = -\rho \quad (\text{II.13})$$

Comme nous le disions plus haut, d'autres expressions de  $(\mathbf{div. A})$  peuvent être utilisées, notamment celle donnée par la jauge de Lorentz [20] :

$$\mathbf{div. A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{II.14})$$

En utilisant cette jauge, l'équation (II.11) devient :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{Avec } c^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$$

Cette équation régit la répartition spatiale et temporelle du potentiel scalaire électrique dans un objet qui obéit aux hypothèses précédemment posées à savoir l'homogénéité et l'isotropie. Une équation similaire peut être obtenue (annexe [A.1]) pour le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (\text{II.16})$$

La constante  $c$  dans les équations (II.15) et (II.16) a une signification physique. Ces équations sont en fait celles d'une onde de célérité  $c$  se propageant dans le milieu caractérisé par  $\varepsilon$  et  $\mu$ . Si on note  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  la permittivité relative et la perméabilité relative du milieu, on peut écrire :

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad (\text{II.17})$$

$c_0$  étant la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide caractérisé par  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ . Pour compléter notre étude, signalons que d'autres formulations existent telle que la formulation en potentiel vecteur électrique (**T**) [37].

Dans la formulation en potentiel scalaire, chaque point est caractérisé par une seule valeur numérique tandis que la formulation en potentiel vecteur utilise trois inconnues (les trois composantes du vecteur **A**) par point. Pour cela, si le problème à résoudre le permet, la formulation en potentiel scalaire sera préférée. Dans le cas où le domaine d'étude offre des symétries (inducteur de chauffage par induction, noyau de transformateur, ...) ou des invariances (pièces suffisamment longues), le potentiel vecteur a une seule composante et la formulation en potentiel vecteur se ramène, en quelques sortes, à une formulation en potentiel scalaire. Pour certaines applications, électrostatiques ou magnétostatiques, ou pour des problèmes à fréquences faibles, la formulation en potentiel scalaire et la formulation en potentiel vecteur se simplifient.

## **II.2.2 Problème statique**

Pour les applications électrostatiques et magnétostatiques, les champs sont créés par des sources (charges, courants, dipôles, différences de potentiel) dont les valeurs et les

positions ne varient pas en fonction du temps. Les termes qui dépendent du temps, dans les équations de Maxwell, s'annulent. Cela donne naissance à des modèles plus simples. Les équations (II.1a) et (II.2a) deviennent :

$$\mathbf{rot E} = \mathbf{0} \quad (\text{II.18})$$

$$\mathbf{rot H} = \mathbf{J} \quad (\text{II.19})$$

Dans l'hypothèse où les propriétés physiques sont des constantes, les formulations conduisent à l'équation de Poisson pour le potentiel scalaire (II.20) et pour le potentiel vecteur magnétique (II.21).

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{II.20})$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\text{II.21})$$

Si les diélectriques sont dépourvus de charges et les matériaux magnétiques sont sans courants, on aboutit aux équations de Laplace pour le potentiel scalaire électrique (II.22) et pour le potentiel vecteur magnétique (II.23).

$$\epsilon \Delta V = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{A} = 0 \quad (\text{II.23})$$

La résolution de (II.23) revient à déterminer les trois composantes du vecteur  $\mathbf{A}$ . Elle est donc beaucoup plus longue et onéreuse que celle de (II.22). Une formulation en potentiel scalaire réduit permet d'éviter ce problème [11]. On considère que le champ magnétique est composé de deux parties : le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  et le champ induit  $\mathbf{H}_i$ . On sépare la cause de son effet.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_i \quad (\text{II.24})$$

Le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$ , en un point P, est donné par la loi de Biot et Savart (II.25) qui caractérise l'influence directe des courants sur le milieu environnant en considérant qu'il n'a pas de réaction.

$$\mathbf{H}_0(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{J}(Q)\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (\text{II.25})$$

avec  $r = |PQ|$

$\mathbf{J}(Q)$  la densité de courant au point d'intégration Q

Le champ induit, qui est la réaction du milieu, dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que :

$$\text{rot } \mathbf{H}_i = \mathbf{0} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Soit } \mathbf{H}_i = -\text{grad} V_m \quad (\text{II.27})$$

$V_m$  étant le potentiel scalaire magnétique, exprimé en Ampère.

A partir de (II.4a) on a :

$$\text{div.}(\mu \text{grad } V_m) = 0 \quad (\text{II.28})$$

qui, pour  $\mu$  constant dans un milieu, est l'équation de Laplace pour le potentiel scalaire magnétique.

On peut aussi utiliser la formulation statique quand les phénomènes étudiés sont à variation temporelle sinusoïdale de longueur d'onde suffisamment grande devant les dimensions du domaine d'étude. En effet, si le potentiel,  $V$  ou  $\mathbf{A}$ , est une fonction sinusoïdale de fréquence  $f$ , la quantité

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{II.29})$$

représente la longueur d'onde et l'équation (II.16) peut s'écrire :

$$\Delta \mathbf{A} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (\text{II.30})$$

En fonction de la valeur numérique de  $\lambda$  (qui dépend de  $f$ ,  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$ ) et des dimensions de la pièce étudiée, on peut négliger les variations temporelles (second terme de (II.30)) devant les variations spatiales (premier terme de (II.30)).

### **II.2.3 Conditions aux limites**

Il existe plusieurs solutions aux équations différentielles précédemment définies. On aura besoin de conditions aux limites pour déterminer une solution unique. Ces conditions aux limites sont principalement de deux types : la condition de Dirichlet et la condition de Neumann. La condition de Dirichlet impose la valeur du potentiel (exemple : surfaces des conducteurs, surfaces équipotentiels, limites infinies du domaine d'étude). La condition de Neumann impose la valeur de la dérivée normale du potentiel (exemple : plan de symétrie, surfaces à flux imposé). Les conditions de Dirichlet et de Neumann sont dites homogènes si les valeurs imposées sont nulles. Elles sont dites non homogènes dans le cas contraire.

### **II.2.4 Conditions d'interfaces**

L'équation (II.22) ou (II.23) a été obtenue en émettant l'hypothèse que les propriétés physiques  $\epsilon$  et  $\mu$  sont des constantes. Cette équation n'est donc valable que pour des milieux homogènes et isotropes. Dans le cas où plusieurs milieux coexistent, l'équation n'est plus vraie

dans l'ensemble du domaine d'étude. Il faut alors chercher une solution dans chaque milieu et lier les différentes solutions par des conditions d'interfaces. Pour les établir, on utilise la forme intégrale des équations de Maxwell en régime statique.

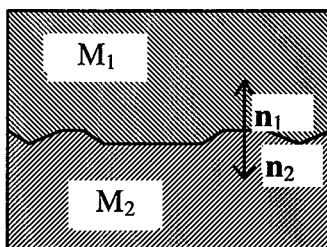
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II.32})$$

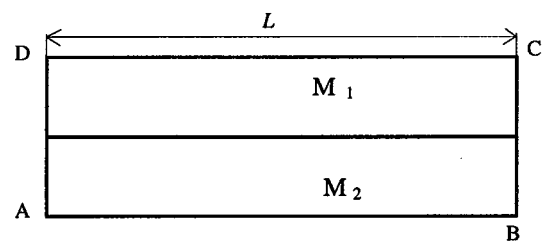
$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\Omega} \rho \, dv \quad (\text{II.33})$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{II.34})$$

Considérons l'interface  $S$  (fig. II.3) entre deux milieux ( $M_1$  et  $M_2$ ) de propriétés physiques  $(\epsilon_1, \mu_1)$  et  $(\epsilon_2, \mu_2)$ . Appelons  $E_i$ ,  $H_i$  et  $n_i$  le champ électrique, le champ magnétique et la normale dans le milieu  $i$ . Le produit scalaire et le produit vectoriel des champs avec la normale à l'interface fournissent les composantes normales et tangentes à l'interface, relativement au milieu considéré.



*Fig. II.3 - définition de l'interface*



*Fig. II.4 - définition de l'élément de surface*

Considérons un élément de surface  $\Delta S$  délimité par le contour  $L_o=ABCD$  (fig. II.4). On suppose que les distances  $BC$  et  $DA$  sont suffisamment petites et on négligera la circulation des champs sur ces tronçons. Il ne reste plus que la circulation sur le segment  $L$ .



$$\oint_{L_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{n}_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.35})$$

$$\oint_{L_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_L (\mathbf{n}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{H}_2) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.36})$$

La densité de courant est composée de deux parties : d'une part, il y a la densité volumique de courant  $\mathbf{J}_v$  et d'autre part il y a la densité surfacique de courant  $\mathbf{J}_s$  sur l'interface. Evaluons maintenant le flux de  $\mathbf{J}$  à travers l'élément de surface  $\Delta S$ .

$$\iint_{\Delta S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Delta S} \mathbf{J}_v \cdot d\mathbf{s} + \int_L \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.37})$$

Les tronçons BC et DA sont faibles devant AB et CD.  $\Delta S$  l'est également. Le premier terme du membre de droite de la relation (II.37) peut être négligé. On a :

$$\iint_{\Delta S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_L \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.38})$$

D'après les relations (II.31), (II.32), (II.35) à (II.38), on aura :

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \quad (\text{II.39})$$

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{H}_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_s \quad (\text{II.40})$$

Ces deux équations traduisent la continuité de la composante tangentielle du champ électrique et la discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

Considérons maintenant un élément de volume délimité par la surface  $\Delta S$  des six faces du parallélépipède (fig. II.5).

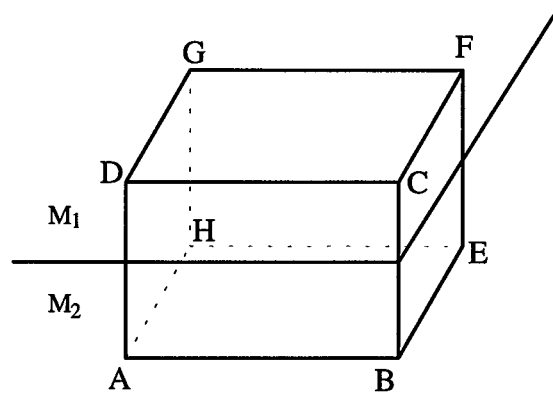


Fig. II.5 - définition de l'élément de volume

Les distances BC et DA sont supposées faibles devant AB et CD. On néglige les flux qui sortent des surfaces BCFE, ADGH, ABCD et EFGH. Il ne reste plus que le flux à travers la surface que nous noterons  $S_0 =$  surface ABEH. On a alors :

$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_0} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2) ds \quad (\text{II.41})$$

$$\oiint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_0} (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2) ds \quad (\text{II.42})$$

La densité de charges est composée de deux parties : d'une part, il y a la densité volumique de charges  $\rho_v$  et d'autre part il y a la densité surfacique de charges  $\rho_s$  sur l'interface. On peut donc écrire la relation suivante.

$$\iiint_{\Delta v} \rho dv = \int_{\Delta v} \rho_v dv + \int_{S_0} \rho_s ds \quad (\text{II.43})$$

L'élément de volume est faible et le premier terme du membre de droite de la relation (II.43) peut être négligé. On a donc :

$$\iiint_{\Delta v} \rho dv = \int_{S_0} \rho_s ds \quad (\text{II.44})$$

D'après les relations (II.33), (II.34), (II.41) à (II.44) on aura :

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \quad (\text{II.45})$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_s \quad (\text{II.46})$$

Ces deux équations traduisent la continuité de la composante normale de l'induction magnétique et la discontinuité de la composante normale de l'induction électrique.

Nous avons défini la conduction surfacique comme étant une situation dans laquelle il y avait circulation d'un courant de conduction dans une zone de faible épaisseur (Chap. I). Ensuite, on a vu que les phénomènes électromagnétiques peuvent être modélisés par des équations différentielles. Quelles sont celles qui gouvernent la conduction surfacique? C'est pour donner une réponse à cette question que nous allons proposer un modèle de surface pour simuler la zone conductrice.

### **II.3 MODELE DE CONDUCTION SURFACIQUE**

L'étude de l'influence d'une couche conductrice sur les répartitions de champ, dans une structure donnée, pose le problème de la représentation de la zone conductrice. En effet, il est nécessaire de pouvoir distinguer différents degrés de conduction de la couche. Pour ce faire plusieurs paramètres peuvent être utilisés. Citons par exemple le courant de fuite [51], la densité de poussière équivalente, la quantité de sel équivalente et la conductivité électrique surfacique [25]. Parmi tous ces paramètres, aussi significatifs les uns que les autres, il faut faire un choix en fonction de l'étude que l'on souhaite réaliser. Nous calculerons des valeurs de champs et de potentiels. La conductivité électrique semble plus appropriée parce que directement liée à ces grandeurs électriques (loi d'Ohm). Dans l'étude de la conduction surfacique, on peut considérer la zone conductrice comme un volume et y résoudre l'équation

de Laplace. Les solutions obtenues par cette méthode sont peu précises et personne n'y a vraiment recours. En effet, dans la pratique, la zone conductrice a une épaisseur très faible (moins d'un millimètre) devant les autres dimensions des objets étudiés (de l'ordre du mètre pour les isolateurs). Seule l'élaboration de modèle simulant la zone conductrice donne des résultats encourageants. Nous voulons construire un modèle de la zone conductrice qui devra pouvoir prendre en compte ses non linéarités. Une étude faite au CEGELY [41] a déjà utilisé la conductivité, comme paramètre physique, pour modéliser la conduction surfacique dans les problèmes linéaires tridimensionnels. La zone conductrice y est caractérisée par une surface munie d'une conductivité électrique et d'une condition d'interface.

### II.3.1 Modèle général

Pour établir la condition d'interface dans un problème tridimensionnel, considérons un dispositif constitué de deux milieux  $M_1$  et  $M_2$  séparés par une zone conductrice d'épaisseur  $h$ , de densité volumique de courant  $\mathbf{J}_v$  et de conductivité volumique  $\sigma_v$  (fig. II.6).

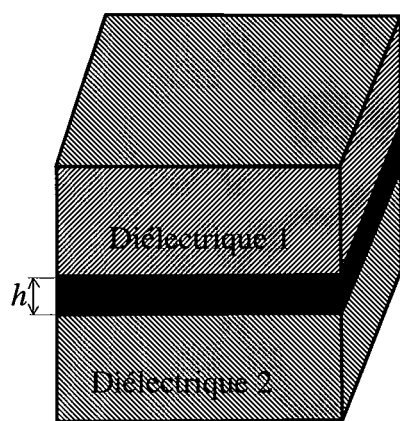


Fig. II.6 - Configuration réelle

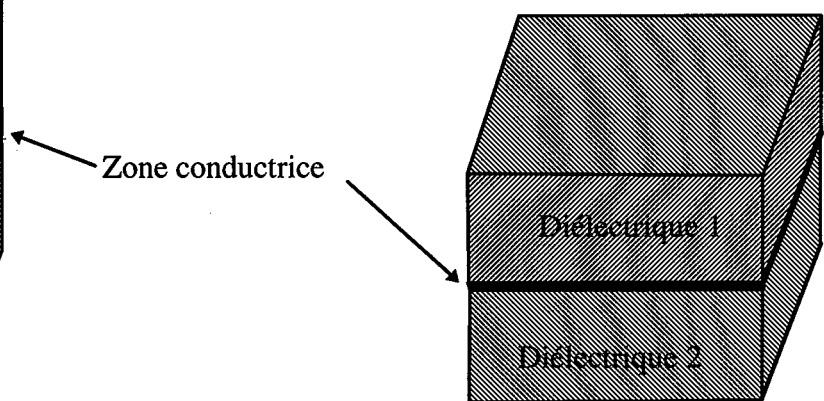


Fig. II.7 - Modèle de la zone conductrice

Dans la zone conductrice on peut écrire la forme locale du théorème d'ampère (II.2a).

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{II.47})$$

La divergence d'un rotationnel est toujours nulle et on a :

$$\text{div.} \left( \mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.48})$$

Soit en prenant l'intégrale dans tout le volume :

$$\iiint_{\Omega} \text{div.} \left( \mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv = 0 \quad (\text{II.49})$$

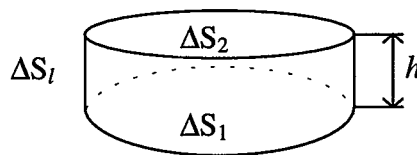
L'épaisseur de la zone conductrice est très faible et on peut l'assimiler à une interface (fig. II.7). On introduit alors la densité surfacique de courant  $\mathbf{J}_s$  et la conductivité surfacique  $\sigma_s$ , telles que :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_v h \quad (\text{A.m}^{-1}) \quad (\text{II.50})$$

$$\sigma_s = \sigma_v h \quad (\text{S}) \quad (\text{II.51})$$

Considérons un élément de volume cylindrique, découpé dans la zone conductrice et délimité par l'élément de surface  $\Delta S$  constitué par les deux surfaces de bases ( $\Delta S_1$  et  $\Delta S_2$ ) et la surface latérale  $\Delta S_l$  (fig. II.8).

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_l \quad \text{et} \quad \Omega = h \Delta S_1$$



**Fig. II.8 - Élément de volume**

Dans l'équation (II.49), on remplace  $\mathbf{J}_v$  selon l'expression (II.50) et on applique le théorème de la divergence au second terme.

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{div} \cdot \left( \mathbf{J}_v + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv = \iint_{\Delta S_1} (\mathbf{div} \cdot \mathbf{J}_s) ds + \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} \right) \quad (\text{II.52})$$

$\Delta S_1$  est suffisamment petit pour que  $\mathbf{div} \cdot \mathbf{J}_s$  y soit constant. On aura alors :

$$\iint_{\Delta S_1} \mathbf{div} \cdot \mathbf{J}_s ds = \mathbf{div} \cdot \mathbf{J}_s \Delta S_1 \quad (\text{II.53})$$

Comme  $h$  est petit, la surface est assimilée à  $\Delta S_1$  ( $=\Delta S_2$ ). Le flux de  $\mathbf{D}$  à travers la surface latérale peut être négligé.

$$\iint_{\Delta S} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = (D_{n1} + D_{n2}) \Delta S_1 \quad (\text{II.54})$$

$\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant de la surface qui délimite le volume  $\Omega$ .  $D_n$  est la composante normale de  $\mathbf{D}$ . L'équation (II.49) devient :

$$\mathbf{div} \cdot (\mathbf{J}_s) + \frac{\partial}{\partial t} (D_{n1} + D_{n2}) = 0 \quad (\text{II.55})$$

Cette relation est localement vérifiée. Pour l'écrire de façon globale, nous la multiplions par un ensemble de fonctions  $W$ , linéairement indépendantes, et nous prenons l'intégrale sur la surface conductrice.

$$\int_S W \left[ \mathbf{div} \cdot (\mathbf{J}_s) + \frac{\partial}{\partial t} (D_{n1} + D_{n2}) \right] ds = 0 \quad (\text{II.56})$$

La relation (II.56) traduit la conservation du courant dans la zone conductrice. Elle nous servira de condition d'interface.

### II.3.2 Modèles 2D et axisymétrique

En électrotechnique, de nombreuses études sont faites en utilisant des configurations 2D ou axisymétriques. Nous limiterons notre étude à ces deux cas.

Un problème dans lequel toutes les grandeurs physiques sont invariantes par une translation suivant une direction peut être réduit à un problème à deux dimensions (2D). Tout plan perpendiculaire à cette direction peut être choisit comme plan d'étude. L'étude des pièces dites "suffisamment longues" peut se ramener à ce cas.

Considérons le problème invariant suivant l'axe  $z$ , (fig. II.9).

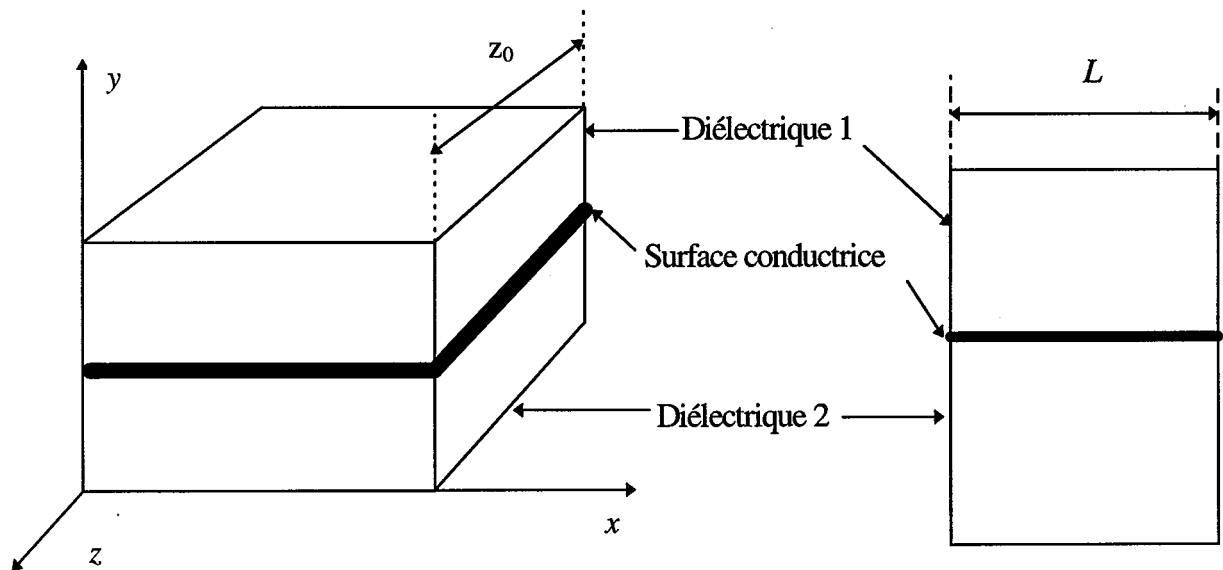


Fig. II.9 - Modèle 3D

Fig.II.10 - Modèle 2D

Un élément de surface appartenant à la surface conductrice s'exprime par :

$$ds = dz dl \quad (\text{II.57})$$

Le problème étant invariant suivant  $z$ , nous faisons une pré-intégration sur  $z$  et l'étude se ramène au schéma de la figure (fig. II.10). L'équation (II.56) devient :

$$z_0 \int_L W \left[ \text{div.}(\mathbf{J}_s) + \frac{\partial}{\partial t}(D_{n1} + D_{n2}) \right] dl = 0 \quad (\text{II.58})$$

Dans un problème axisymétrique toutes les grandeurs physiques sont invariantes par une rotation autour d'un axe. Tout demi-plan défini par cet axe peut être choisi comme plan d'étude et le problème se ramène à un problème à deux dimensions.

Considérons un problème invariant par une rotation autour de l'axe  $z$  (fig. II.11).

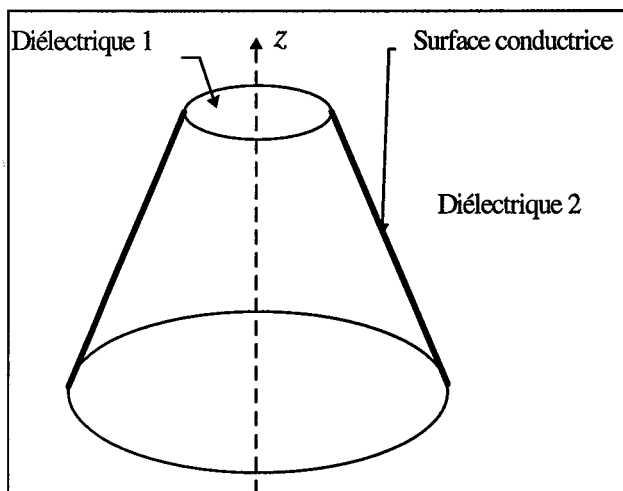


Fig. II.11 - Modèle 3D

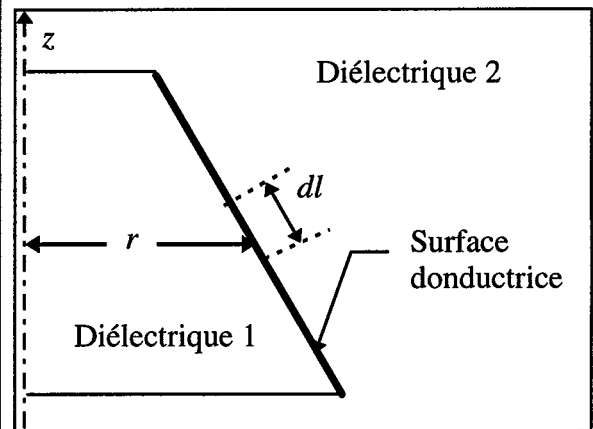


Fig. II.12 - Modèle axisymétrique

Un élément de surface appartenant à la surface conductrice s'exprime par :

$$ds = rd\phi dl \quad (\text{II.59})$$

Le problème étant invariant suivant  $\phi$ , nous faisons une pré-intégration sur  $\phi$  et l'étude se ramène au schéma de la figure (fig. II.12). L'équation (II.56) devient :



$$2\pi \int_L rW \left[ \mathbf{div} \cdot (\mathbf{J}_s) + \frac{\partial}{\partial t} (D_{n1} + D_{n2}) \right] dl = 0 \quad (\text{II.60})$$

Les équations (II.58) (resp. (II.60)) sont les conditions d'interfaces du problème à deux dimensions (resp. axisymétrique). Nous verrons au chapitre IV leur intégration dans une méthode de résolution.

### II.3.3 Modèle non linéaire

Dans les équations (II.58) et (II.60), intervient la densité surfacique de courant. Nous pouvons l'exprimer en fonction de la conductivité surfacique et du champ tangentiel à l'interface conductrice (loi d'Ohm).

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s \mathbf{E}_t \quad (\text{II.61})$$

Deux situations peuvent alors être envisagées : dans le cas d'un problème linéaire, la conductivité sera une constante. Tous les coefficients des équations différentielles seront des constantes. Si le problème est non linéaire, la conductivité sera une fonction du champ électrique et certains coefficients dépendront des inconnues. Dans ce dernier cas, nous définirons la conductivité comme une fonction du module du champ tangentiel :

$$\sigma_s = f(|E_t|) \quad (\text{II.62})$$

La loi de variation de la conductivité est supposée connue. Dans le cas des revêtements semi-conducteurs, cette fonction est de type exponentiel. Pour les calculs nous utiliserons l'expression suivante :

$$\sigma_s = \sigma_0 \exp(\alpha |E_t|) \quad (\text{II.63})$$

où  $\alpha$  et  $\sigma_0$  sont des constantes positives.

## II.4 CONCLUSION

La modélisation des phénomènes électromagnétiques peut se faire à partir des équations de Maxwell. Celles-ci, associées aux "relations constitutives", permettent d'établir plusieurs types de formulations, en potentiel scalaire ou en potentiel vecteur. Ces formulations conduisent à des équations aux dérivées partielles auxquelles il faut associer des conditions aux limites et des conditions d'interfaces.

Pour modéliser les phénomènes de conduction surfacique, nous avons remplacé la zone conductrice par une surface munie d'une conductivité : le modèle élaboré est donc une condition d'interface entre deux milieux séparés par la surface conductrice. Pour les problèmes linéaires, la conductivité est une constante<sup>(1)</sup>. Dans le cas d'un problème non linéaire, la conductivité dépend du champ tangentiel à l'interface conductrice.

Les équations qu'on obtient par la modélisation des phénomènes électromagnétiques ont une forme simple, mais elles n'ont le plus souvent pas de solution analytique lorsqu'on les applique à des situations réelles. On a alors recours aux méthodes numériques pour les résoudre.

---

<sup>(1)</sup> On veut dire par là qu'elle ne dépend pas du champ. Par contre, dans la mesure où le "pré processeur" utilisé le permet, la conductivité peut varier le long de la couche conductrice. Elle peut aussi être uniforme.

**III. METHODES NUMERIQUES**

### **III.1 INTRODUCTION**

Si les équations aux dérivées partielles décrivant le comportement électrostatique des dispositifs électrotechniques sont simples, la complexité géométrique de ces dispositifs et les éventuelles non linéarités, conduisent à faire appel aux méthodes numériques pour résoudre ces équations. En effet, les méthodes analytiques ou semi-analytiques (méthode des images, transformations conformes, séparation des variables [5]) trouvent rapidement leurs limites.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques méthodes numériques qui permettent de résoudre les équations différentielles du chapitre précédent. Nous présenterons, en particulier, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des charges équivalentes et la méthode des intégrales de frontière.

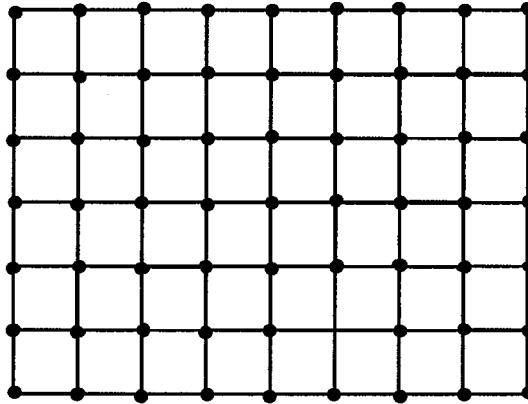
### **III.2 METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

La méthode des différences finies a été, historiquement, la première méthode connue pour calculer, sur ordinateur, la solution d'une équation différentielle [8]. Elle consiste à remplacer, dans les équations aux dérivées partielles et dans les conditions aux limites, les dérivées par des différences finies calculées sur les nœuds d'un maillage.

#### **III.2.1 Maillage de la géométrie**

La résolution d'une équation par la méthode des différences finies revient à remplacer la recherche d'une solution continue par la solution en un certain nombre de points. Toute

distribution de points dans l'espace peut être utilisée. L'utilisation d'un maillage régulier permet d'avoir, en tous les points, la même forme pour les équations. La résolution du problème se simplifiera par la même occasion. Le plus simple de ces maillages réguliers est le maillage en carré (fig. III.1).



*Fig. III.1 - Maillage carré*

Chaque point est situé sur un des sommets d'un carré. Il existe d'autres maillages réguliers comme le maillage en triangles équilatéraux et en hexagones équi-angulaires [5].

### **III.2.2 Transformation de l'équation différentielle**

Dans le cas du maillage carré, on peut extraire un point numéroté 0 et ses quatre voisins numérotés de 1 à 4 (fig. III.2). Chacune des branches de l'étoile a une longueur égale à  $h$ .

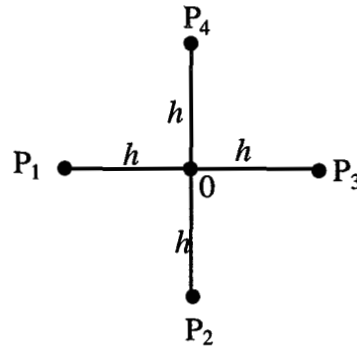


Fig. III.2 - Point central et ses voisins

En un point quelconque du segment P<sub>1</sub>-P<sub>3</sub>, le potentiel V peut être exprimé en fonction du potentiel au point 0 et de ses dérivées successives. On utilise pour cela le développement en série de Taylor au voisinage du point 0 ( $x=x_0$ ).

$$V = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial x^n} \Big|_{x_0} \right) \quad (\text{III.1})$$

Pour le point P<sub>1</sub> on a :  $x = x_0 - h$  et

$$V_1 = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial x^n} \Big|_{x_0} \right) \quad (\text{III.2})$$

Pour le point P<sub>3</sub> on a :  $x = x_0 + h$  et

$$V_3 = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial x^n} \Big|_{x_0} \right) \quad (\text{III.3})$$

En prenant  $h$  suffisamment petit, on peut négliger les termes d'ordre supérieur à deux.

Soit :

$$V_1 = V_0 - h \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{III.4})$$

$$V_3 = V_0 + h \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (\text{III.5})$$

En faisant la somme membre à membre de ces deux équations on aura :

$$h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_1 + V_3 - 2V_0 \quad (\text{III.6})$$

Le même raisonnement, sur le segment  $[P_2 P_4]$ , conduit à

$$h^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = V_2 + V_4 - 2V_0 \quad (\text{III.7})$$

Si on cherche à résoudre l'équation de Laplace qui s'exprime en coordonnées cartésiennes par

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.8})$$

alors, on remplace les différentes dérivées en utilisant les expressions (III.6) et (III.7).

Ce qui conduit à

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 = 0 \quad (\text{III.9})$$

Si on écrit cette équation, en prenant successivement tous les points comme centre d'une étoile, on obtient un système algébrique qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (\text{III.10})$$

où  $\{X\}$  est un vecteur constitué par les inconnues en potentiel de tous les points intérieurs au domaine.

La méthode des différences finies fait une approximation des opérateurs d'une équation différentielle par des différences finies calculées aux nœuds d'un maillage. On peut aussi faire une approximation de la fonction inconnue d'une équation différentielle. Cette méthode est connue sous l'appellation de méthode des éléments finis.

### **III.3 METHODES DES ELEMENTS FINIS**

La méthode des éléments finis a d'abord été appliquée pour résoudre les équations d'élasticité et de mécanique des structures [36, 45, 48, 52]. Plus tard elle a été adaptée à l'électromagnétisme [6]. L'idée de la méthode est de chercher une solution approchée à une équation différentielle. La complexité des géométries fait qu'il est très difficile, le plus souvent impossible, de trouver une approximation de la solution dans tout un domaine d'étude. Pour contourner cette difficulté on subdivise le domaine en sous domaines, appelés éléments, sur lesquels il est plus facile de faire l'approximation.

#### **III.3.1 Découpage en éléments finis**

La division du domaine en éléments finis constitue la première étape d'une résolution par éléments finis. Chaque élément est représenté par des points, appelés nœuds géométriques. Le découpage doit faire une partition du domaine d'étude. Les éléments finis utilisés, pour discrétiser le domaine, sont généralement regroupés par familles topologiques : segments, triangles, quadrilatères, tétraèdres, parallélépipèdes, prismes. Les figures (fig. III.3) et (fig. III.4) donnent une représentation de ces éléments pour une et deux dimensions.



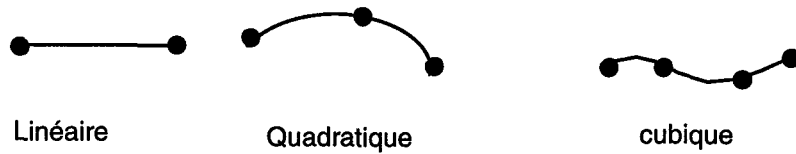


Fig. III.3 - Eléments à une dimension

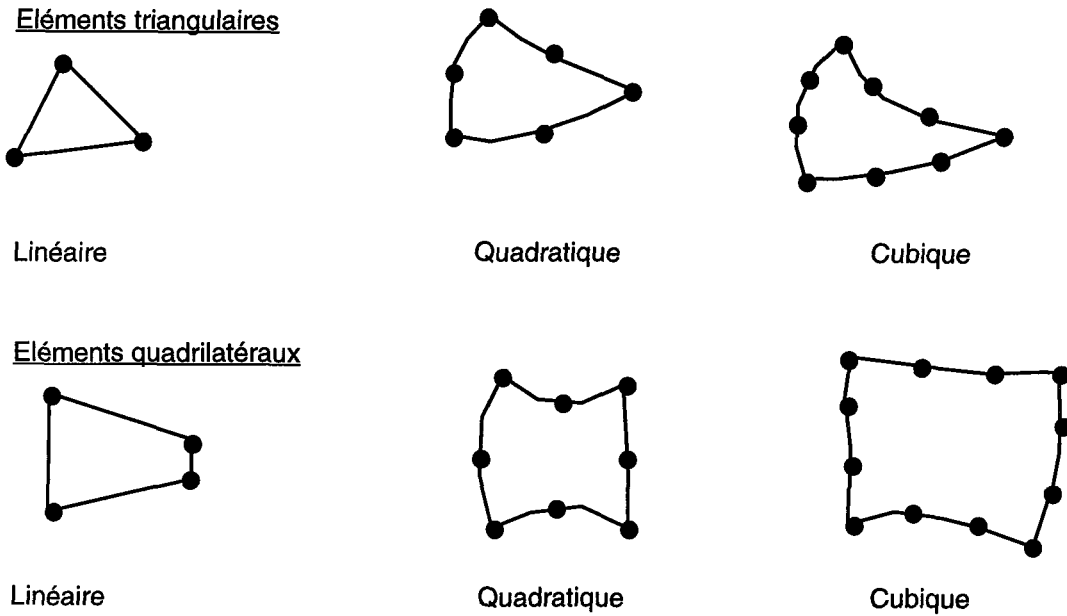


Fig. III.4 - Eléments à deux dimensions

A chaque élément, on associe aussi des nœuds d'interpolations où l'inconnue sera calculée. Quand les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolations, les éléments sont dits isoparamétriques.

### III.3.2 Approximation

Sur chacun des éléments issus de la subdivision, la fonction qui modélise le phénomène est définie par une interpolation polynomiale.

$$v = \sum_{i=1}^{N_n} N_i V_i \quad (\text{III.11})$$

$N_n$  est le nombre de nœuds d'interpolations. Les fonctions  $N_i$  sont appelées fonctions d'interpolations et les  $V_i$  les valeurs nodales. L'ordre du polynôme dépend du type d'élément. Pour un élément quadratique à une dimension, décrit par l'abscisse curviligne  $\mu \in [-1, 1]$ , les fonctions d'interpolations sont connues [15] :

$$\begin{cases} N_1(\mu) = \frac{1}{2} \mu(\mu - 1) \\ N_2(\mu) = 1 - \mu^2 \\ N_3(\mu) = \frac{1}{2} \mu(\mu + 1) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

Pour illustrer nos propos sur la méthode des éléments finis, prenons l'exemple de l'équation de Poisson (II.20) et cherchons une approximation  $\tilde{V}$  de  $V$  qui minimise la quantité  $R$  telle que :

$$R = \left( \Delta \tilde{V} + \frac{\rho}{\varepsilon} \right) \quad (\text{III.13})$$

Parmi toutes les méthodes qui permettent d'annuler une grandeur dans un domaine  $\Omega$ , la méthode des résidus pondérés est bien connue et très souvent utilisée [15]. On choisit un ensemble de fonctions linéairement indépendantes  $W_n$ , appelée fonctions de projections, et on annule toutes les intégrales (III.14) sur chacun des éléments finis.

$$I_n = \int_{\Omega_e} W_n R \, d\Omega \quad (\text{III.14})$$

On obtient ainsi une formulation intégrale de la méthode des éléments finis. La méthode des résidus pondérés conduit à des sous méthodes (collocation par point, collocation par sous domaine, Galerkin, moindre carrée), selon le choix des fonctions de pondération.

Parmi toutes ces méthodes, la méthode de Galerkin est la plus utilisée. Elle consiste à prendre les mêmes expressions pour les fonctions de projections et les fonctions d'interpolations.

$$N_i(\mu) = W_i(\mu) \quad (\text{III.15})$$

Pour chaque élément, on annule les  $n$  intégrales (III.14) qui correspondent aux  $n$  fonctions de projections. On obtient un ensemble de  $n$  équation à  $n$  inconnues. Ce système peut s'écrire sous une forme matricielle

$$[A_e] \{V_e\} = \{b_e\} \quad (\text{III.16})$$

$[A_e]$  est la matrice associée à l'élément considéré. Ses coefficients sont fonctions des coordonnées des nœuds de l'élément. Les composantes de  $\{V_e\}$  sont les inconnues aux nœuds du même élément. Le vecteur  $\{b_e\}$  tient compte des éventuelles conditions aux limites sur certains nœuds de l'élément considéré. En écrivant (III.16) pour tous les éléments, on obtient un système d'équations algébriques dont la solution fournit la répartition du potentiel dans le domaine étudié.

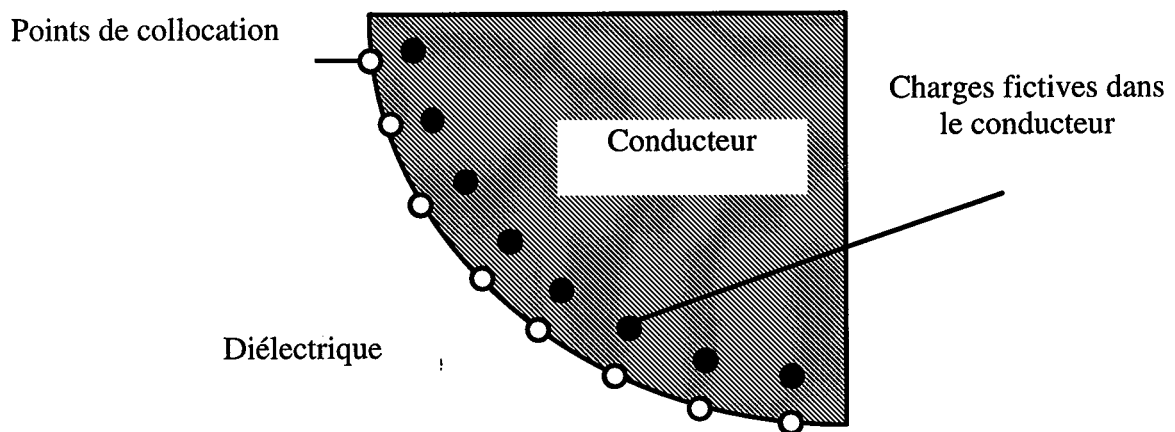
La méthode des éléments finis utilise une approximation par morceau de la fonction inconnue pour résoudre une équation différentielle. On peut aussi utiliser les équivalences physiques pour chercher la solution d'une équation aux dérivées partielles. La méthode des charges équivalentes en est une bonne illustration.

### **III.4 METHODES DES CHARGES EQUIVALENTES**

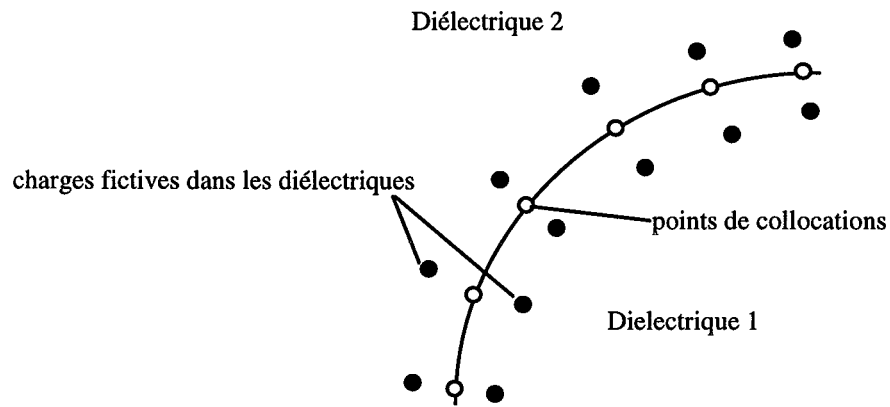
Le principe de la méthode des charges équivalentes est de simuler les distributions superficielles de charges des objets conducteurs et des interfaces par un ensemble discret de charges fictives [46]. Ces charges fictives sont ensuite calculées de façon à reproduire, le mieux possible, les potentiels imposés en certains points appelés points de collocation. La nature discrète des charges fictives pose le problème de leurs localisations.

#### **III.4.1 Localisation des charges**

Les charges fictives doivent être placées dans l'espace en respectant les équations à résoudre, les conditions aux limites et les conditions d'interfaces. Les charges, qui simulent les objets conducteurs, sont placées à l'intérieur de ceux-ci (fig. III.5). Par contre les charges, qui modélisent les interfaces, sont placées dans les diélectriques (fig. III.6), de part et d'autre de l'interface.



*Fig. III.5 - Charges fictives et points de collocation d'un conducteur*



**Fig. III.6 - Charges fictives et points de collocation d'une interface**

En plaçant des charges dans les diélectriques, l'équation de Laplace n'y est plus vérifiée. Il convient donc d'exclure de l'expression du potentiel, pour tout milieu, la contribution des charges fictives placées dans celui-ci. Outre le nombre de charges, leur localisation influence la précision des calculs [26]. Après la localisation des charges fictives, il faut les déterminer de façon à ce que les conditions aux limites soient respectées, le mieux possible.

### **III.4.2 Calcul des charges fictives**

Trois formes de charges sont souvent utilisées pour modéliser les surfaces conductrices et les interfaces entre les diélectriques : les charges ponctuelles, les segments de droites et les anneaux chargés d'une densité linéique de charges. L'utilisation de ces trois types de charges de forme simple suffit, dans la plupart des cas, pour modéliser les dispositifs haute tension. Le choix de la forme des charges n'est pas, à priori, lié à la forme des géométries. Pour des raisons pratiques, quand la géométrie est de forme cylindrique on utilisera des segments de droites chargées. De même, pour une géométrie sphérique, l'utilisation des anneaux peut vite satisfaire les conditions aux limites. Une combinaison adéquate des trois formes peut être

employée pour simuler des géométries de formes complexes. Le calcul du potentiel crée par chacune des trois formes de charges est exposé dans les annexes [A.2] à [A.3]. Son expression de la forme :

$$V = Cq \quad (\text{III.17})$$

où  $C$  est un coefficient et  $q$  la valeur de la charge.

Chaque charge fictive crée au point d'observation une contribution partielle. Il faut alors faire la somme des participations de toutes les charges et on obtient une expression du type :

$$V = \sum_{i=1}^{N_c} C_i q_i \quad (\text{III.18})$$

où  $N_c$  est le nombre total de charges,  $q_i$  les valeurs inconnues des charges fictives et  $C_i$  des coefficients dépendants des types de charges et de leurs positions.

On écrit cette équation en un ensemble de points appartenant aux conducteurs et aux interfaces (points de collocations) et on obtient un système d'équations algébriques (III.19) dont les inconnues sont les charges fictives.

$$V_{j(j=1, N_c)} = \sum_{i=1}^{N_c} C_{ij} q_i \quad (\text{III.19})$$

Ce système peut être résolu par les méthodes classiques (ex : élimination de Gauss). La solution permet de déterminer les valeurs des charges  $q_i$  en fonction des valeurs imposées du potentiel  $V_j$ . Plus, le nombre de charges fictives sera élevé, mieux les conditions aux limites et les conditions d'interfaces seront respectées et mieux les charges décriront le système réel. Après la résolution de (III.19), la recherche de la solution en potentiel devient un simple

calcul. Il s'agit de réécrire l'expression (III.19) pour n'importe quel point de la structure, les quantités  $q_i$  n'étant plus des inconnues.

La méthode des charges équivalentes simule les charges superficielles inconnues par des charges fictives. La solution de l'équation différentielle en un point est la superposition de l'effet des charges fictives. Une dernière catégorie de méthode permet de mettre l'équation différentielle locale sous forme intégrale.

### **III.5 EQUATIONS INTEGRALES DE FRONTIERE**

La méthode des intégrales de frontière permet d'exprimer la solution d'une équation aux dérivées partielles sous la forme d'une intégrale prise sur les contours du domaine d'étude. Elle fait l'objet de nombreux développements [4, 7, 12, 28, 33] et est très utilisée pour la résolution des problèmes tridimensionnels. Il existe deux formulations de cette méthode basées sur l'inversion des opérateurs qui gouvernent les équations locales : la méthode des distributions et la méthode de Green. Ces deux méthodes utilisent les fonctions de Green.

#### **III.5.1 Fonctions de Green**

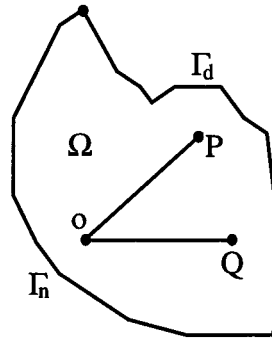
Cherchons, dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_d + \Gamma_n$  (fig. III.7), la solution de l'équation suivante :

$$\Delta V = 0 \quad \text{dans le domaine } \Omega$$

avec les conditions aux limites

$$V = V_0 \quad \text{sur la portion } \Gamma_d$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \Psi_0 \quad \text{sur la portion } \Gamma_n$$



**Fig. III.7 - Point d'observation et point d'intégration**

On peut chercher cette solution sous la forme suivante [16] :

$$V(P) = \int_{\Gamma_d} V(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} d\gamma + \int_{\Gamma_n} G(P, Q) \frac{\partial V}{\partial n}(Q) d\gamma \quad (\text{III.20})$$

$G$  étant une fonction des coordonnées de deux points  $P$  et  $Q$ . Le point  $P$  est le point d'observation et le point  $Q$  le point d'intégration. Par définition  $G$  est la fonction de Green de ce problème et elle est solution de l'équation :

$$\Delta G(P, Q) = \delta(P, Q) \quad (\text{III.21})$$

$\delta(P, Q)$  est la distribution de Dirac définie telle que :

$$\delta(P, Q) = 0 \quad \text{si } P \neq Q$$

$$\int_{\Omega} \delta(P, Q) d(P, Q) = 1$$

En trois dimensions, dans l'hypothèse où  $\Gamma$  est rejeté à l'infini, la fonction de Green est le potentiel créé en un point  $P$  par une charge ponctuelle  $\epsilon$  placée en  $Q$ .



$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi|PQ|} \quad (\text{III.22})$$

Par soucis de clarté et de simplicité des formules, on notera :

$$G(P, Q) = G \quad (\text{III.23})$$

$$|PQ| = r \quad (\text{III.24})$$

### III.5.2 Méthode des distributions [2]

Dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , considérons l'équation de Poisson

$$\Delta V = f \quad (\text{III.25})$$

et cherchons une solution de cette dernière sous la forme  $hV$  avec  $h$  une distribution telle que :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ 1/2 & \text{si } x \in \Gamma \\ 1 & \text{si } x \in \Omega \text{ et } x \notin \Gamma \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Si  $G$  est une fonction de Green du laplacien ( $\Delta G = \delta$ ) alors la solution de (III.25) est un produit de convolution.

$$hV = \Delta(hV) * G \quad (\text{III.27})$$

soit

$$hV = \mathbf{div}(\mathbf{grad}(hV)) * G = (h\Delta V) * G + (\mathbf{grad}V \cdot \mathbf{grad}h) * G + (\mathbf{div}(V\mathbf{grad}h)) * G \quad (\text{III.28})$$

$\mathbf{grad}h$  est une distribution superficielle :

$$\mathbf{grad}h = -\delta_s \mathbf{n} \quad (\text{III.29})$$

où  $\delta_s$  est la distribution de Dirac sur la surface  $\Gamma$  du domaine et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure.

L'équation (III.28) devient

$$hV = (h\Delta V) * G - (\delta_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} V) * G - (\mathbf{div} \cdot (\delta_s \mathbf{n} V)) * G \quad (\text{III.30})$$

soit, en appliquant la définition de la convolution

$$hV = \iiint_{\Omega} fG dv + \iint_{\Gamma} \left( \frac{\partial G}{\partial n} V - \frac{\partial V}{\partial n} G \right) d\gamma \quad (\text{III.31})$$

On obtient l'expression générale du potentiel  $V$  dans le domaine  $\Omega$  et sur sa frontière  $\Gamma$  en fonction des sources volumiques  $f$ , des sources superficielles dipolaires  $\partial V / \partial n$  et des sources superficielles  $V$ .

### III.5.3 Méthode de l'identité de Green

En appliquant le théorème de la divergence (aussi appelé théorème d'Ostrogradski) à un vecteur  $\mathbf{K}$  dans un domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  on a :

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{div} \cdot \mathbf{K} dv = \oiint_{\Gamma} \mathbf{K} \cdot \mathbf{ds} \quad (\text{III.32})$$

Si le vecteur  $\mathbf{K}$  est défini par un couple de scalaires  $(V, G)$  tel que :

$$\mathbf{K} = V \mathbf{grad} G - G \mathbf{grad} V \quad (\text{III.33})$$

on obtient la seconde identité de Green :

$$\iiint_{\Omega} (V \Delta G - G \Delta V) dv = \oiint_{\Gamma} (V \mathbf{grad} G - G \mathbf{grad} V) \cdot \mathbf{ds} \quad (\text{III.34})$$

on montre (annexe [A.4]) que cette relation peut se mettre sous la forme :

$$c_p V = \iiint_{\Omega} G \Delta V dv + \int_{\Gamma} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma \quad (\text{III.35})$$

$$\text{avec } c_p = \iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma$$

$\partial/\partial n$  désigne la projection du gradient sur la normale à la frontière. Le terme  $c_p$  est proportionnel à l'angle solide sous lequel d'un point P on voit le contour  $\Gamma$ . Sa valeur est connue [16]. En deux dimensions, on a :

$$c_p = -\frac{\alpha}{2\pi} \quad (\text{III.36})$$

$\alpha = 0$  si le point d'observation est à l'extérieur du domaine  $\Omega$ . Si le point d'observation est sur la frontière  $\Gamma$ ,  $\alpha$  est l'angle, mesuré en radian, que font les tangentes de part et d'autre du point d'observation.  $\alpha = 2\pi$  si le point est à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

On retrouve la formulation obtenue par la méthode des distributions. Ce résultat est général : le point d'observation peut être à l'intérieur du domaine ou être sur ses frontières. Si dans l'équation (III.35),  $V$  désigne le potentiel scalaire électrique, on peut remplacer le laplacien du potentiel par sa valeur, en fonction du type d'équation (Laplace ou Poisson). Pour le problème de type Poisson,  $\Delta V = -\rho/\epsilon$ , le terme  $\iiint_{\Omega} G \Delta V dv$  représente le potentiel créé par une distribution volumique de charge  $\rho$ . Dans le cas d'un problème de type Laplace, ce terme est nul et on aura :

$$c_p V = \iint_{\Gamma} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds \quad (\text{III.37})$$

En toute logique, cette équation écrite en un point n'est pas équivalente à l'équation de Laplace écrite au même point [33]. Si on compare (III.37) à l'identité de Green, on constate qu'on a plutôt l'équivalence suivante :

$$e.i.f.en P_i \Leftrightarrow I_i = \iiint_{\Omega} \Delta V G_{P_i} dv = 0 \quad (III.38)$$

Ecrire l'équation (III.37) en plusieurs points revient donc à annuler plusieurs intégrales  $I_i$ . Cette équivalence montre que la méthode des équations intégrales de frontière est une méthode projective et les fonctions de projections sont alors les fonctions de Green.

Pour résoudre un problème par la méthode des équations intégrales de frontière, on utilise les fonctions de Green. Pour chaque type de problème, il faut donc définir les fonctions de Green qui lui sont associées. En ce qui nous concerne, nous nous intéresserons aux problèmes infiniment longs ou tridimensionnels avec symétrie axiale.

### III.5.4 Fonctions de Green en 2D plan et axisymétrique

Dans un problème à deux dimensions, le potentiel et sa dérivée normale sont invariants lors d'une translation suivant l'axe perpendiculaire au plan d'étude. Si  $L$  est la projection de  $\Gamma$  dans le plan d'étude, on peut écrire l'équation (III.37) sous la forme

$$c_p V = \oint_L \left\{ V \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial n} dz \right) - \frac{\partial V}{\partial n} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} G dz \right) \right\} dl \quad (III.39)$$

et faire de façon analytique l'intégration par rapport à la variable de symétrie  $z$ .

$$\text{Posons :} \quad G_{2d} = \int_{-\infty}^{+\infty} G dz \quad (III.40)$$

$$F_{2d} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial n} dz \quad (III.41)$$

L'équation (III.39) devient :

$$CV_P = \int_L \left( F_{2d} V - G_{2d} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dl \quad (\text{III.42})$$

Cette équation est du même type que (III.37).  $G_{2d}$  est la fonction de Green pour les problèmes à deux dimensions. On montre [33] que

$$G_{2d} = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{r_\infty}{r} \right) \quad (\text{III.43})$$

$$F_{2d} = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{r}|}{r^2} \quad (\text{III.44})$$

où  $r_\infty$  est pris suffisamment grand devant la plus grande dimension de la pièce étudiée.

Dans un problème axisymétrique, le potentiel et sa dérivée normale sont invariants lors d'une rotation autour de l'axe de symétrie. Si une courbe  $L$  génère le contour  $\Gamma$  par une rotation autour de l'axe de symétrie, on peut écrire l'équation (III.37) sous la forme :

$$c_p V = \oint_L \left\{ V \left( \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial G}{\partial n} d\varphi \right) - \frac{\partial V}{\partial n} \left( \int_{-\pi}^{+\pi} G d\varphi \right) \right\} dl \quad (\text{II.45})$$

et faire de façon analytique l'intégration par rapport à la variable de symétrie.

Posons :

$$G_{ax} = \int_{-\pi}^{+\pi} G d\varphi \quad (\text{III.46})$$

$$F_{ax} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial G}{\partial n} d\varphi \quad (\text{III.47})$$

l'équation (III.45) devient (III.48) qui est du même type que (III.37).

$$CV_P = \int_L \left( F_{ax} V - G_{ax} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dl \quad (\text{III.48})$$

$G_{ax}$  est la fonction de Green pour les problèmes tridimensionnels avec symétrie axiale.

Avec les notations de la (fig. III.8), on montre [33] que :

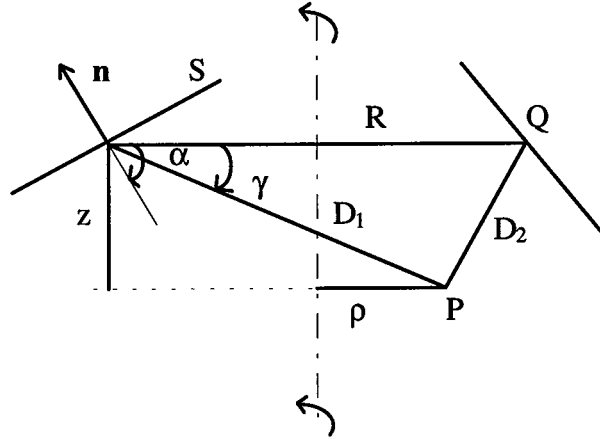


Fig. III.8

$$G_{ax} = \frac{R}{\pi D_1} K(k^2) \quad (\text{III.49})$$

$$F_{ax} = \frac{\text{Cos}\alpha}{2D_1} K(k^2) + \frac{D_1 \text{Cos}\alpha - 2R \text{Cos}(\alpha - \gamma)}{2D_2^2} E(k^2) \quad (\text{III.50})$$

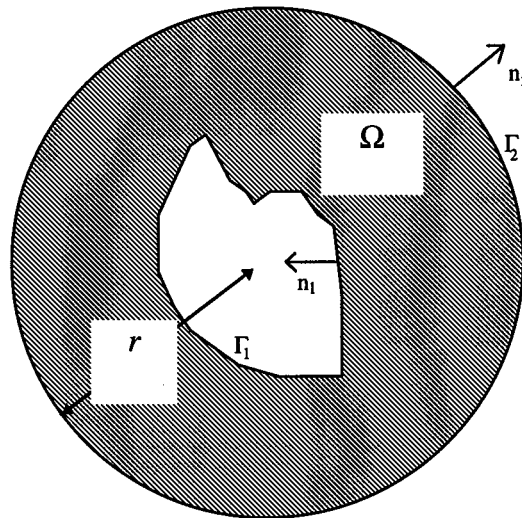
$$\text{avec } \begin{cases} k^2 = \frac{4R\rho}{D_1^2} \\ K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \text{Sin}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\ E(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \text{Sin}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

$K(k^2)$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

$E(k^2)$  est l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce.

### III.5.5 Problème ouvert

La méthode des équations intégrales de frontière est particulièrement bien adaptée à la résolution des problèmes ouverts. Dans les méthodes à maillages massifs (Eléments finis, différences finies) le domaine d'étude est limité par une frontière externe sur laquelle on définit des conditions aux limites. Pour résoudre un problème ouvert avec l'une de ces méthodes, il est nécessaire d'utiliser un artifice qui n'est pas intrinsèque à la méthode [29]. Avec les équations intégrales de frontière, ce problème n'est plus posé. On travaille sur les frontières et on peut très bien imaginer que le domaine n'a qu'une frontière interne. La frontière externe étant rejetée à l'infini. Considérons l'exemple de la figure (fig. III.9).



*Fig. III.9 - définition du problème ouvert*

Le domaine d'étude est limité par une frontière  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  et l'équation (III.37) se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & V \left( \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma + \oint_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma \right) = \\
 & \oint_{\Gamma_1} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma + \oint_{\Gamma_2} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma
 \end{aligned} \tag{III.52}$$

Ce qui nous intéresse, c'est ce que devient cette équation quand  $\Gamma_2$  est rejetée à l'infini. Nous faisons le raisonnement dans le cas tridimensionnel où  $\Gamma_2$  est une sphère. L'aire de la surface  $\Gamma_2$  varie proportionnellement à  $r^2$ . Dans le même temps les termes  $V \partial G / \partial n$  et  $G \partial V / \partial n$  varient en  $r^{-3}$ . Donc l'intégrale du second membre sur  $\Gamma_2$ , proportionnelle à  $r^{-1}$ , tendra vers zéro quand  $\Gamma_2$  sera à l'infini. On montre (annexe[A.5]) que l'intégrale sur  $\Gamma_2$ , dans le premier membre, vaut "1". L'équation (III.52) devient :

$$(1 + c_p) V = \int_{\Gamma_1} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma \tag{III.53}$$

On constate peu de changement entre (III.53) et (III.37). On ajoute simplement "1" au coefficient du potentiel. On peut donc utiliser la même équation et les mêmes procédures de calcul pour les problèmes ouverts que pour les problèmes fermés.

### III.5.6 Discrétisation

Pour résoudre l'équation (III.37) de façon numérique, il faut la discrétiser en faisant une approximation des grandeurs physiques et géométriques. Dans l'étude des problèmes à deux dimensions ou axisymétriques, les frontières sont des lignes. L'ordre deux étant l'ordre minimum pour décrire des lignes courbes, on subdivise ces contours en éléments quadratiques à une dimension (§III.3). On fait une approximation des grandeurs physiques  $V$ ,  $\Psi = \partial V / \partial n$  en utilisant les fonctions d'approximations  $(N_1, N_2, N_3)$  définies au paragraphe (§ III.3).



$$V(\mu) = \sum_{i=1}^3 N_i(\mu) V_i \quad (\text{III.54})$$

$$\Psi(\mu) = \sum_{i=1}^3 N_i(\mu) \Psi_i \quad (\text{III.55})$$

Les  $V_i$  et les  $\Psi_i$  sont les valeurs nodales du potentiel et du champ normal.

L'équation intégrale (III.37) se met alors sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{N_{el}} \sum_{j=1}^3 [(V_j - V_i) I_1 - \Psi_j I_2] = 0 \quad (\text{III.56})$$

$$I_1 = \int_{-1}^1 N_j \frac{\partial G}{\partial n_j} J_k(\mu) d\mu \quad (\text{III.57})$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 N_j G J_k(\mu) d\mu \quad (\text{III.58})$$

où  $N_{el}$  désigne le nombre d'éléments et  $J_k(\mu)$  le jacobien de la transformation des coordonnées globales en coordonnées locales pour le  $k^{\text{ième}}$  élément et pour la valeur  $\mu$  de la coordonnée curviligne. Les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  sont calculées à l'aide d'une quadrature de Gauss.

$$\int f(x) dx = \sum w_i f(x_i) \quad (\text{III.59})$$

où les  $w_i$  et les  $x_i$  sont connues [1].

L'équation (III.37), écrite dans toutes les régions et discrétisée comme il vient d'être montré, nous conduit à un système d'équations algébriques qui se met sous une forme matricielle :

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (\text{III.60})$$

où  $\{X\}$  représente le vecteur des inconnues en  $V$ , et  $\partial V / \partial n \cdot \{B\}$  est un vecteur qui tient compte des conditions aux limites.

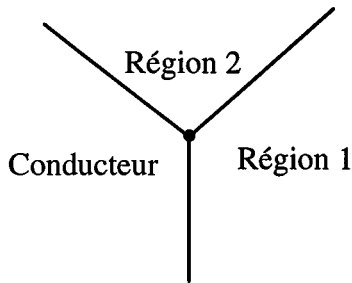
### III.5.7 Etude des singularités

Au cours de la résolution d'un problème par équations intégrales de frontière, il apparaît des singularités dans le calcul des expressions (III.57) et (III.58) quand le point d'intégration est proche du point d'observation, ou confondu avec lui. Pour l'intégrale  $I_2$  (III.58), en 2D, la singularité est évidemment de type logarithmique. En axisymétrique, l'intégrale elliptique de première espèce qui intervient dans (III.57) peut se mettre sous la forme d'un développement limité [1] :

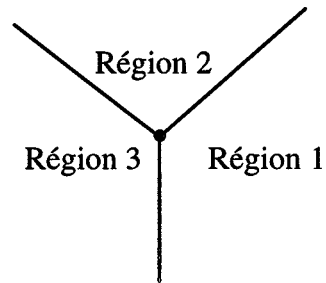
$$K(k^2) = \sum_{i=1}^n a_i (1-k^2)^i - \sum_{i=1}^n b_i (1-k^2)^i \ln(1-k^2) \quad (\text{III.61})$$

et on voit apparaître, aussi, une singularité de type logarithmique quand le point d'intégration s'approche du point d'observation c'est-à-dire quand  $k^2$  tend vers 1. L'intégration directe par une quadrature de Gauss donnerait des résultats peu précis. Une solution a été proposée [13]. Celle-ci consiste à extraire la singularité si le point d'intégration et le point d'observation sont confondus et à faire une intégration adaptative quand les points sont proches l'un de l'autre. L'intégration adaptative consiste à subdiviser l'élément en sous éléments jusqu'à ce que le point d'observation puisse être considéré comme suffisamment éloigné de tous les sous éléments. On définit pour cela une zone de protection pour chaque élément à l'intérieur de laquelle le point d'observation ne doit pas se trouver.

Outre les singularités dans les intégrales (III.57) et (III.58), on peut rencontrer d'autres singularités aux points anguleux appartenant à plusieurs régions (fig. III.10) et (fig. III.11).

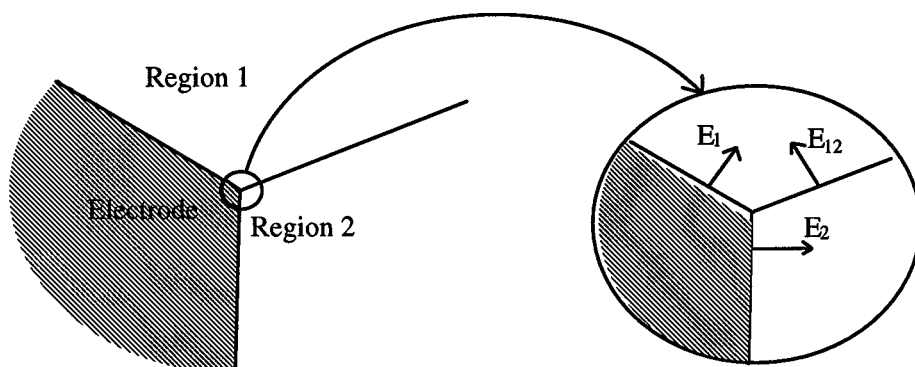


*Fig. III.10 - Point double*



*Fig. III.11 - Point triple*

Le problème de singularité est dû au fait qu'on doit intégrer  $\partial V / \partial n$  sur chaque frontière jusqu'au point singulier. On a alors besoin d'une discrétisation de  $\partial V / \partial n$  sur chacune des frontières. L'approximation choisie étant nodale, on a autant de valeur de  $\partial V / \partial n$  que de frontières concourantes en ce point. Comme l'équation intégrale est écrite en chaque noeud, on aura un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations. Dans la configuration de la figure (fig. III.12) nous aurons deux équations (une par région) et trois inconnues (la dérivée normale sur chaque interface).



*Fig. III.12 - Singularité géométrique*

Pour équilibrer le système il est nécessaire d'avoir une équation supplémentaire. Une équation a été proposée par M. Defourny [14]. Celle-ci est obtenue à partir d'un développement en série de fourrier du potentiel autour du point singulier. Dans le cas de la figure (fig. III.12), elle est de la forme :

$$C_1 E_1 + C_2 E_2 + \left( C_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_2 \right) E_{12} = 0 \quad (\text{III.62})$$

$$\text{avec } C_i = \frac{1 - \cos n^* \alpha_i}{\sin n^* \alpha_i}$$

les constantes  $n^*$  dépendent des propriétés physiques et des angles d'ouvertures des régions. Les grandeurs  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_{12}$  sont les inconnues, champs normaux, sur les segments de l'électrode et sur l'interface.

### **III.6 CONCLUSION**

Les méthodes numériques utilisées en électromagnétisme peuvent être classées en trois grandes catégories.

La première est constituée par les méthodes aux différences finies. Les opérateurs différentiels sont remplacés par des différences finies évaluées aux nœuds d'un maillage et on recherche la solution d'un système simplifié. Quand les formes des contours sont compliquées, on peut difficilement faire un maillage régulier.

La seconde catégorie est constituée par les méthodes aux éléments finis. Cette fois, c'est la solution de l'équation différentielle qui est approchée dans chaque élément. Cette méthode est très bien adaptée pour décrire les géométries de formes complexes. Dans ces

deux catégories, les approximations sont faites dans tout l'espace et cela constitue un handicap pour la résolution de problèmes non bornés.

Dans la dernière catégorie, on trouve la méthode des charges équivalentes et la méthode des équations intégrales de frontière. La solution de l'équation différentielle est présentée comme la somme de solutions élémentaires. La recherche de la solution est ramenée sur les frontières et le nombre d'inconnues est considérablement réduit. Cette méthode est donc très pratique pour l'étude des problèmes tridimensionnels et s'adapte de façon naturelle à la résolution des problèmes ouverts. De plus, tous les phénomènes étant, avec cette méthode, ramenés aux frontières des dispositifs étudiés, la prise en compte de comportements particuliers sur certaines surfaces est aisée. C'est en particulier le cas de la conduction surfacique qui nous préoccupe dans ce travail.

**IV. RESOLUTION DE LA CONDUCTION SURFACIQUE**

## **IV.1 INTRODUCTION**

Dans le chapitre précédent, nous avons indiqué quelques méthodes susceptibles d'être utilisées pour résoudre les équations différentielles issues de la modélisation. Parmi toutes ces méthodes, nous avons choisi la méthode des intégrales de frontière. Cette dernière, est, en effet, une des spécialités du CEGELY qui dispose, en particulier, du moyen de calcul BEM2D<sup>(1)</sup> [13] dédié aux problèmes à deux dimensions (plan ou axisymétrique). L'un des objectifs de ce travail étant de doter ce programme de la capacité de prendre en compte les revêtements faiblement conducteurs, un modèle spécifique a été développé. Pour ce faire, il a été nécessaire de réécrire la forme intégrale de la solution de l'équation de Laplace pour tenir compte des surfaces conductrices. L'objet de ce chapitre est d'expliquer ces modifications et de montrer comment les équations d'interfaces sont implantées dans ce logiciel. Nous terminerons ce chapitre en rappelant d'autres façons d'appliquer les méthodes numériques du chapitre III pour résoudre le problème de conduction surfacique.

## **IV.2 RETOUR SUR L'EQUATION INTEGRALE**

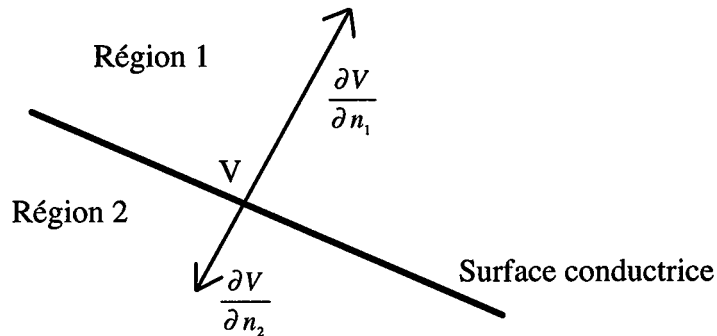
Dans le chapitre III, nous avons établi la solution de l'équation de Laplace sous sa forme intégrale et nous avons étudié les singularités. Quelques développements sont à faire quand le point d'intégration ou le point singulier est sur une surface conductrice.

---

<sup>(1)</sup> Ce logiciel est intégré à l'environnement FLUX2D [44]

### IV.2.1 Point d'intégration sur une interface conductrice

Pour une interface classique, dépourvue de charges, on a deux inconnues par noeud : le potentiel et la composante normale du déplacement électrique qui sont continus de part et d'autre de l'interface. Quand on a une densité de charges sur l'interface, le potentiel reste une grandeur continue mais la composante normale de l'induction électrique devient discontinue. Pour tous les nœuds de la surface conductrice (fig. IV.1), on aura donc trois inconnues :  $V$ ,  $\partial V / \partial n_1$  et  $\partial V / \partial n_2$ .



**Fig. IV.1 - Inconnues de l'interface conductrice**

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{\partial V}{\partial n_1} \\ \Psi_2 = \frac{\partial V}{\partial n_2} \end{array} \right. \text{ et}$$

$$\Theta = \varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 \quad (\text{IV.1})$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont les permittivités diélectriques des deux milieux ;  $\partial V / \partial n_1$  et  $\partial V / \partial n_2$  sont les dérivées normales du potentiel. Nous calculerons  $\Theta$  et l'une des dérivées normales. Si on



choisit l'une des régions (la région 1 par exemple) comme région de référence, les inconnues seront  $V$ ,  $\Theta$  et  $\Psi_1$ . Dans l'autre région, la dérivée normale du potentiel pourra être déduite de la relation (IV.1). L'équation intégrale se met sous la forme (IV.2) dans la région de référence et (IV.3) dans l'autre région.

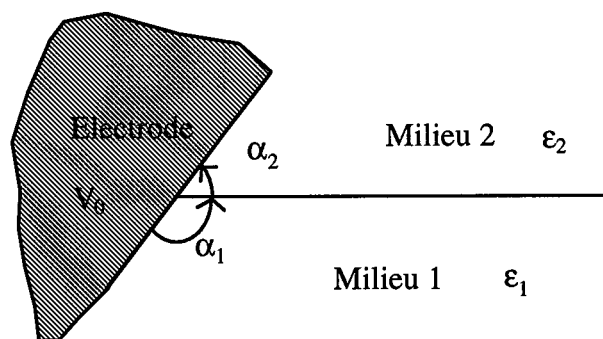
$$c_p V = \int_L \left( V \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \Psi_1 \right) dl \quad (IV.2)$$

$$c_p V = \int_L \left( V \frac{\partial G}{\partial n_2} + G \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Psi_1 - \frac{G}{\epsilon_2} \Theta \right) dl \quad (IV.3)$$

#### IV.2.2 Point singulier sur une interface conductrice

Quand le point singulier appartient à une interface conductrice, l'équation (III.62) doit être réécrite pour tenir compte de la discontinuité du champ normal. Nous donnons ci-après un développement permettant d'obtenir une équation supplémentaire.

Soit la configuration de la figure (IV.2) : un point commun à l'électrode et deux milieux. Chaque milieu est caractérisé par sa permittivité et un angle d'ouverture.



**Fig. IV.2 - Point double**

Au voisinage du point singulier, le potentiel peut être représenté par un développement en série [16].

$$V(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (\text{IV.4})$$

Dans la région 1, on écrira :

$$V_1(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_{1n} \cos n\theta + b_{1n} \sin n\theta) \quad (\text{IV.5})$$

comme  $V_1(r, 0)$  est aussi le potentiel de l'électrode, on aura :

$$V_1(r, 0) = V_0 \Rightarrow a_{1n} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

donc, dans la région 1, le potentiel s'exprime par

$$V_1(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n b_{1n} \sin n\theta \quad (\text{IV.7})$$

Dans la région 2, on écrira :

$$V_2(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_{2n} \cos n\theta + b_{2n} \sin n\theta) \quad (\text{IV.8})$$

comme  $V_2(r, \alpha_2)$  est aussi le potentiel de l'électrode, on aura :

$$V_2(r, \alpha_2) = V_0 \Rightarrow a_{2n} \cos n\theta + b_{2n} \sin n\theta = 0 \quad (\text{IV.9})$$

La condition de passage, sur le potentiel, à l'interface impose d'avoir

$$V_1(r, \alpha_1) = V_2(r, 0) \quad (\text{IV.10})$$

soit

$$a_{2n} = b_{1n} \sin n\alpha_1 \quad (\text{IV.11})$$

En remplaçant l'expression de  $a_{2n}$  dans (IV.9), on a :

$$b_{2n} = -\frac{\cos n\alpha_2}{\sin n\alpha_2} \sin n\alpha_1 b_{1n} \quad (\text{IV.12})$$

Tous les coefficients qui interviennent dans le développement du potentiel au voisinage du point singulier s'expriment donc en fonction de  $b_{1n}$ . En récapitulant, le potentiel s'écrit alors :

$$\text{région 1 :} \quad V_1(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n b_{1n} \sin n\theta \quad (\text{IV.13})$$

$$\text{région 2 :} \quad V_2(r, \theta) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n b_{1n} \sin n\alpha_1 (\cos n\theta + k_n \sin n\theta) \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{avec } k_n = -\frac{\cos n\alpha_2}{\sin n\alpha_2}$$

Calculons maintenant le champ électrique. Il s'exprime par

$$E(r, \theta) = \begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

Dans la région 1, on aura :

$$E_1(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_{1n} r^{n-1} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

Dans la région 2

$$E_2(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_{1n} r^{n-1} \sin n\alpha_1 \begin{Bmatrix} \cos n\theta + k_n \sin n\theta \\ k_n \cos n\theta - \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

On peut vérifier la conservation de la composante tangentielle du champ électrique au passage de l'interface. Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux composantes normales que nous noterons  $q$ . Au voisinage immédiat du point singulier,  $r$  est très petit et on peut arrêter le développement à l'ordre un. A partir des équations (IV.16) et (IV.17), on a :

$$q_1(\theta) = b_{11} \cos \theta \quad (\text{IV.18})$$

$$q_2(\theta) = b_{11} \sin \alpha_1 (k_1 \cos \theta - \sin \theta) \quad (\text{IV.19})$$

Les expressions suivantes dérivent de (IV.18) et (IV.19).

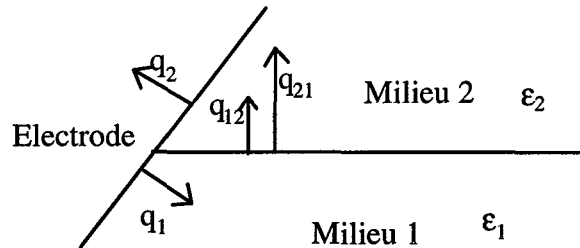
$$q_1 = q_1(0) = b_{11} \quad (\text{IV.20})$$

$$q_{12} = q_1(\alpha_1) = q_1 \cos \alpha_1 \quad (\text{IV.21})$$

$$q_{21} = q_2(0) = k_1 q_1 \quad (\text{IV.22})$$

$$q_2 = q_2(\alpha_2) = q_1 (k_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) \quad (\text{IV.23})$$

Toutes ces inconnues sont représentées sur la figure (fig. IV.3).



**Fig. IV.3 - Inconnues au point singulier**

En plus des équations (IV.20) à (IV.23), nous avons la discontinuité du champ normale.

$$\varepsilon_1 q_{12} + \varepsilon_2 q_{21} = \Theta \quad (\text{IV.24})$$

A partir des relations (IV.20) à (IV.24), on peut trouver plusieurs équations reliant les champs qui interviennent au point singulier. Par exemple, les expressions (IV.22) et (IV.24) permettent d'écrire :

$$\varepsilon_1 q_{12} + \varepsilon_2 q_1 k_1 = 0 \quad (\text{IV.25})$$

On peut aussi rechercher une relation qui fait intervenir toutes les inconnues du point singulier. Pour cela, remplaçons (IV.22) dans (IV.23) et on aura :

$$q_2 = q_{21} \cos \alpha_2 - q_1 \sin \alpha_2 \quad (\text{IV.26})$$

en tenant compte de (IV.24), on a :

$$\varepsilon_2 \sin \alpha_2 q_1 + \varepsilon_2 q_2 + \varepsilon_1 \cos \alpha_2 q_{12} - \cos \alpha_2 \Theta = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Cette relation est du même type que (III.62). On peut l'écrire comme suit :

$$C_1 q_1 + C_2 q_2 + C_{12} q_{12} + C_\theta \Theta = 0 \quad (\text{IV.28})$$

avec  $C_1 = \varepsilon_2 \sin \alpha_2$

$$C_2 = \varepsilon_2$$

$$C_{12} = \varepsilon_1 \cos \alpha_2$$

$$C_\theta = -\cos \alpha_2$$

La relation (IV.28) sera l'équation supplémentaire qui servira à équilibrer le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

### **IV.3 FORME FAIBLE DES EQUATIONS DE CONDUCTION**

Les équations de conduction ou conditions d'interfaces telles qu'elles sont présentées au paragraphe (§II.3) ne peuvent être traitées par les moyens informatiques. Il faut les discrétiser. Avant de faire cette discrétisation, nous allons réduire leur niveau de dérivation en recherchant une forme dite "faible".

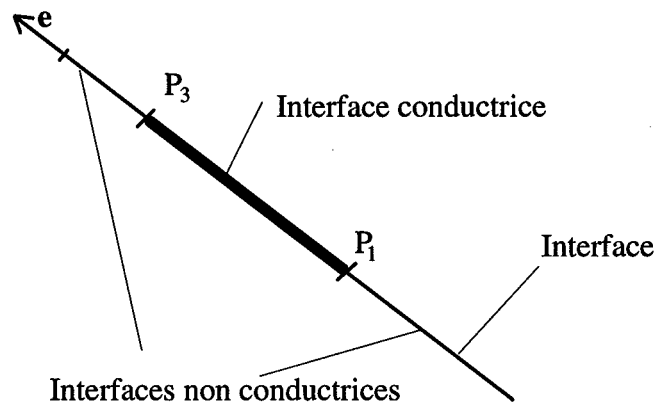
Pour un scalaire  $\alpha$  et un vecteur  $\mathbf{K}$  on a :

$$\alpha \operatorname{div} \mathbf{K} = \operatorname{div}(\alpha \mathbf{K}) - \mathbf{K} \cdot \operatorname{grad} \alpha \quad (\text{IV.29})$$

en faisant  $\mathbf{K} = -\sigma \operatorname{grad} V$  et  $\alpha = W$ , l'équation (II.58) s'écrit :

$$\int_L W \frac{\partial \Theta}{\partial t} dl + \int_L \sigma \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} W dl - \int_L \operatorname{div} \cdot (W \sigma \operatorname{grad} V) dl = 0 \quad (\text{IV.30})$$

La couche conductrice est définie par ses extrémités  $P_1$  et  $P_3$  et un vecteur unitaire  $\mathbf{e}$  orienté dans le sens du parcours des éléments (fig. IV.4).



*Fig. IV.4 - Définition du segment conducteur*

Le dernier terme de l'équation précédente devient :

$$\int_L \operatorname{div} \cdot (W \sigma \operatorname{grad} V) = (W \sigma \operatorname{grad} V|_{P_3} - W \sigma \operatorname{grad} V|_{P_1}) \cdot \mathbf{e} \quad (\text{IV.31})$$

En faisant  $\mathbf{K} = -\sigma \operatorname{grad} V$  et  $\alpha = rW$  dans l'expression (IV.29), l'équation (II.60) devient :

$$\int_L r W \frac{\partial \Theta}{\partial t} dl + \int_L \sigma \operatorname{grad} V \cdot (r \operatorname{grad} W + W \operatorname{grad} r) dl - \int_L \operatorname{div} \cdot (W r \sigma \operatorname{grad} V) dl = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Avec les notations de la figure (fig. IV.4), le dernier terme de cette équation s'écrit :

$$\int_L \mathbf{div.}(Wr\sigma \mathbf{grad}V) = \left( Wr\sigma \mathbf{grad}V|_{P_3} - Wr\sigma \mathbf{grad}V|_{P_1} \right) \cdot \mathbf{e} \quad (\text{IV.33})$$

#### IV.4 RESOLUTION DU PROBLEME LINEAIRE

Dans le problème linéaire, la conductivité est une constante. La forme d'onde du potentiel et du champ sera la même que celle de la condition aux limites sur l'électrode haute tension. En régime sinusoïdal, on pourra remplacer la dérivée temporelle en utilisant la notation complexe.

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \equiv j\omega\Theta \quad (\text{IV.34})$$

$\omega$  étant la pulsation du signal et  $j$  l'unité imaginaire. Les grandeurs physiques seront donc des complexes. On notera  $V_r, \Theta_r, \psi_r$ , et  $V_i, \Theta_i, \psi_i$  les valeurs réelles et imaginaires de  $V, \Theta$  et  $\psi$ . Du fait de la séparation des variables en partie réelle et partie imaginaire, les équations (IV.30) et (IV.32) peuvent être réécrites :

équation 2D :

$$\begin{cases} -\omega \int_L W\Theta_i dl + \sigma \int_L \mathbf{grad}V_r \cdot \mathbf{grad}W dl - \sigma \int_L \mathbf{div.}(W \mathbf{grad}V_r) dl = 0 \\ \omega \int_L W\Theta_r dl + \sigma \int_L \mathbf{grad}V_i \cdot \mathbf{grad}W dl - \sigma \int_L \mathbf{div.}(W \mathbf{grad}V_i) dl = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

équation axisymétrique :

$$\begin{cases} -\omega \int_L rW\Theta_i dl + \sigma \int_L \mathbf{grad}V_r \cdot (r \mathbf{grad}W + W \mathbf{grad}r) dl - \sigma \int_L \mathbf{div.}(Wr \mathbf{grad}V_r) dl = 0 \\ \omega \int_L rW\Theta_r dl + \sigma \int_L \mathbf{grad}V_i \cdot (r \mathbf{grad}W + W \mathbf{grad}r) dl - \sigma \int_L \mathbf{div.}(Wr \mathbf{grad}V_i) dl = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

#### IV.4.1 Discrétisation

Pour discrétiser ces équations, on découpe la longueur du segment conducteur en éléments linéiques d'ordre deux. Sur chacun de ces éléments, on utilise les approximations suivantes :

$$V(\mu) = \sum_{j=1}^3 N_j(\mu) V_j \quad (\text{IV.37})$$

$$r(\mu) = \sum_{j=1}^3 N_j(\mu) R_j \quad (\text{IV.38})$$

$$\Theta(\mu) = \sum_{j=1}^3 N_j(\mu) \Theta_j \quad (\text{IV.39})$$

$V_j, R_j, \Theta_j$  sont les valeurs nodales de  $V, R$  et  $\Theta$ . Les fonctions  $N_j$  sont définies au paragraphe (§III.3.2). Les termes gradients sont approchés de la façon suivante :

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial l} = \frac{\partial \mu}{\partial l} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} V_j \quad (\text{IV.40})$$

$$\text{grad}r = \frac{\partial r}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial l} = \frac{\partial \mu}{\partial l} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} R_j \quad (\text{IV.41})$$

$$\text{grad}W = \frac{\partial W}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial l} \quad (\text{IV.42})$$

Les expressions (IV.37) à (IV.42) sont valables pour les parties réelles et les parties imaginaires. Remplaçons ces expressions dans les équations (IV.39) et (IV.40). Ce qui nous donne pour la fonction de projection  $W_i$  :



$$\begin{cases} \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{j=1}^3 X_{ej} \Theta_{rej} + \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{j=1}^3 V_{iej} (Y_{ej} + Z_{ej}) = 0 \\ - \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{j=1}^3 X_{ej} \Theta_{iej} + \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{j=1}^3 V_{rej} (Y_{ej} + Z_{ej}) = 0 \end{cases} \quad (IV.43)$$

où  $N_{el}$  est le nombre d'éléments. Les expressions de  $X_{ej}$ ,  $Y_{ej}$  et  $Z_{ej}$ , en 2D, sont :

$$X_{ej} = \omega \int_{-1}^{+1} W_i N_j(\mu) J_e(\mu) d\mu$$

$$Y_{ej} = \sigma \int_{-1}^{+1} \frac{\partial W_i}{\partial \mu} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \frac{1}{J_e(\mu)} d\mu$$

$$Z_{ej} = -\sigma \left[ \frac{W_i}{J_e(\mu)} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \right]_{P_1}^{P_3}$$

$J_e(\mu)$  est le jacobien de la transformation des coordonnées globales en coordonnées locales. Pour le problème axisymétrique, les expressions de  $X_{ej}$ ,  $Y_{ej}$  et  $Z_{ej}$ , sont :

$$X_{ej} = \omega \int_{-1}^{+1} r(\mu) W_i N_j(\mu) J_e(\mu) d\mu$$

$$Y_{ej} = \sigma \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \left[ r(\mu) \frac{\partial W_i}{\partial \mu} + W_i \frac{\partial r(\mu)}{\partial \mu} \right] \frac{1}{J_e(\mu)} d\mu$$

$$Z_{ej} = \sigma \left[ r(\mu) \frac{W_i}{J_e(\mu)} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \right]_{P_1}^{P_3}$$

**Remarque :** Le terme  $Z_{ej}$  de l'équation (IV.43) correspond physiquement au courant qui serait injecté dans la couche aux extrémités de celle-ci. Nous émettons l'hypothèse de sa nullité aux extrémités libres de la couche (c'est-à-dire qui ne sont pas en contact avec une électrode). Ce terme ne sera pris en compte que si l'élément a une extrémité en contact avec une électrode. C'est donc, logiquement, le premier ou le dernier noeud de l'élément qui sera concerné.

#### IV.4.2 Assemblage

Le système matriciel à résoudre est constitué de deux parties : l'une est issue de l'équation intégrale et l'autre de l'équation de conduction. L'équation intégrale sera discrétisée, comme au paragraphe (§III.5.4), et assemblée pour donner une matrice [I]. Nous nous intéressons ici à l'assemblage de l'équation de conduction. Pour les éléments quadratiques à une dimension (trois nœuds), on a trois fonctions de projections. L'expression (IV.43) est écrite pour chacune de ces fonctions. Si on considère un élément  $e$  les équations écrites peuvent se mettre sous une forme matricielle :

$$[A_{rv}]\{V_{re}\} - [A_{i\theta}]\{\Theta_{ie}\} = 0 \quad (IV.44)$$

$$[A_{iv}]\{V_{ie}\} + [A_{r\theta}]\{\Theta_{re}\} = 0 \quad (IV.45)$$

Les vecteurs  $\{V_{ie}\}$  et  $\{\Theta_{ie}\}$  sont les valeurs imaginaires nodales. Les vecteurs  $\{V_{re}\}$  et  $\{\Theta_{re}\}$  sont les valeurs réelles nodales. Les coefficients des matrices  $A_{rv}$ ,  $A_{iv}$ ,  $A_{i\theta}$  et  $A_{r\theta}$  sont tels que :

$$A_{r\theta}(i, j) = A_{i\theta}(i, j) = X_{ej} \Big|_{W=W_i}$$

$$A_{rv}(i, j) = A_{iv}(i, j) = (Y_{ej} + Z_{ej})_{W=W_i}$$

L'équation de conduction sera ainsi assemblée pour donner une matrice [C]. La matrice globale a la structure suivante :

	$\text{Re}(V, \frac{\partial V}{\partial n})$	$\text{Re}(\Theta)$	$\text{Imag}(V, \frac{\partial V}{\partial n})$	$\text{Imag}(\Theta)$
Equations intégrales	$I_1$	$I_2$	0	0
Equations de conduction	0	$C_1$	$C_2$	0
Equations intégrales	0	0	$I_1$	$I_2$
Equations de conduction	$C_2$	0	0	$-C_1$

**Tableau IV.1 - Matrice globale du système linéaire**

Nous avons résolu ce système par élimination de Gauss mais il aurait pu être résolu par d'autres méthodes de résolution de système linéaire.

#### IV.5 RESOLUTION DU PROBLEME NON LINEAIRE

Quand la conductivité n'est pas constante, comme nous l'avons envisagé au paragraphe (§II.3.3), il y aura établissement d'un régime non linéaire et on ne peut plus utiliser la relation (IV.38). Nous allons remplacer la dérivée temporelle de  $\Theta$ , selon la méthode d'Euler implicite [15], par :

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{t+\Delta t} = \frac{\Theta(t + \Delta t) - \Theta(t)}{\Delta t} \quad (\text{IV.46})$$

Pour alléger les écritures posons :

$$\Theta(t) = \Theta_1 \text{ et } \Theta(t + \Delta t) = \Theta_2$$

$$V(t) = V_1 \text{ et } V(t + \Delta t) = V_2$$

les équations (IV.30) et (IV.32) deviennent alors :

équation 2D :

$$\int_L W \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Delta t} dl + \int_L \sigma \mathbf{grad} V_2 \cdot \mathbf{grad} W dl - \int_L \mathbf{div}.(W \sigma \mathbf{grad} V_2) dl = 0 \quad (\text{IV.47})$$

Equation axisymétrique :

$$\int_L r W \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\Delta t} dl + \int_L \sigma \mathbf{grad} V_2 \cdot (r \mathbf{grad} W + W \mathbf{grad} r) dl - \int_L \mathbf{div}.(Wr \sigma \mathbf{grad} V_2) dl = 0 \quad (\text{IV.48})$$

#### IV.5.1 Discrétisation

Comme dans le cas du problème linéaire, les intégrations vont être faites sur des éléments linéiques d'ordre deux avec les mêmes fonctions d'interpolations. Pour la fonction de projection  $W_i$  et pour l'élément  $e$ , les équations (IV.47) et (IV.48) s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^3 X_{ej} \Theta_{2ej} + \sum_{j=1}^3 V_{2ej} (Y_{ej} + Z_{ej}) = f_i \quad (\text{IV.49})$$

Dans un problème 2D, les coefficients  $X_{ej}$ ,  $Y_{ej}$  et  $Z_{ej}$  sont définis comme suit :

$$X_{ej} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-1}^{+1} W_i N_j J_e(\mu) d\mu$$

$$Y_{ej} = \int_{-1}^{+1} \sigma(\mu) \frac{\partial W_i}{\partial \mu} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \frac{1}{J_e(\mu)} d\mu$$

$$Z_{ej} = - \left| \sigma(\mu) \frac{W_i}{J_e(\mu)} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \right|_R^P$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{-1}^{+1} W_i \left( \sum_{j=1}^3 N_j \Theta_{1ej} \right) J_e(\mu) d\mu$$

Pour le problème axisymétrique, les coefficients  $X_{ej}$ ,  $Y_{ej}$  et  $Z_{ej}$  sont définis par les relations suivantes :

$$X_{ej} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-1}^{+1} r(\mu) W_i N_j J_e(\mu) d\mu$$

$$Y_{ej} = \int_{-1}^{+1} \sigma(\mu) \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \left[ r(\mu) \frac{\partial W_i}{\partial \mu} + W_i \frac{\partial r(\mu)}{\partial \mu} \right] \frac{1}{J_e(\mu)} d\mu$$

$$Z_{ej} = - \left[ r(\mu) \sigma(\mu) \frac{W_i}{J_k(\mu)} \frac{\partial N_j}{\partial \mu} \right]_{R_1}^{R_3}$$

$$f_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{-1}^{+1} r(\mu) W_i \left( \sum_{j=1}^3 N_j \Theta_{1ej} \right) J_e(\mu) d\mu$$

La remarque faite sur le problème linéaire, concernant le terme  $Z_{ej}$  est aussi valable pour le problème non linéaire.

#### IV.5.2 Assemblage

Comme dans le problème linéaire, la matrice globale sera constituée de deux parties et nous nous intéressons à l'assemblage de l'équation de conduction. Pour l'élément  $e$  et pour les trois fonctions de projections, l'équation (IV.49) s'écrit sous forme matricielle.

$$[A_v] \{V_{2e}\} + [A_\theta] \{\Theta_{2e}\} = \{F\} \quad (\text{IV.50})$$

$$A_\theta(i, j) = X_{ej} \Big|_{w=W_i}$$

$$A_v(i, j) = \left( Y_{ej} + Z_{ej} \right)_{w=w_i}$$

$$F(i) = f_i$$

La matrice globale a la structure suivante :

	$V, \frac{\partial V}{\partial n}$	$\Theta$
Equations intégrales	$I_1$	$I_2$
Equation de conduction	$C_1$	$C_2$

**Tableau IV.2 - Matrice globale du système non linéaire**

La conductivité est définie par (II.63) et certains coefficients de la matrice dépendent de la solution du problème. La recherche d'une solution sera faite en utilisant une méthode de résolution de système non linéaire.

### IV.5.3 Résolution

Pour résoudre le système non linéaire, nous avons utilisé la méthode de substitution avec un algorithme pas à pas dans le temps. Le principe de cette méthode est de calculer une variation  $\Delta x$  de la solution à partir de la connaissance de  $X_{i-1}$ . On obtient alors une nouvelle estimation  $X_i$  de la solution telle que :

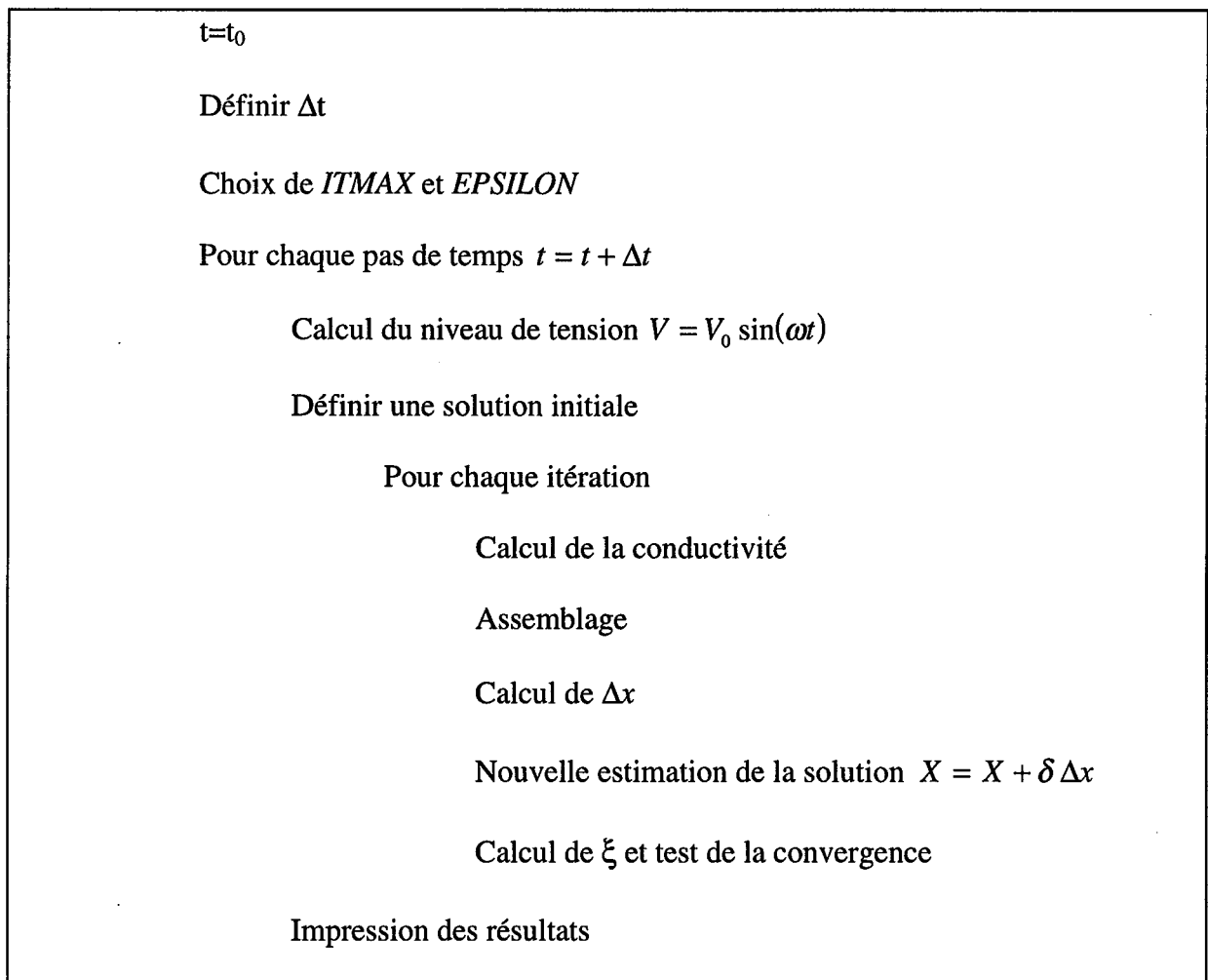
$$X_i = X_{i-1} + \delta \Delta x \quad (IV.51)$$

$\delta$  est le facteur de relaxation. Il permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence.

Pour tester la convergence du système, on calcule un nombre  $\xi$  tel que :

$$\xi = \frac{|\Delta x|}{|X_i|} \quad (\text{IV.52})$$

ce nombre devra être inférieur à une valeur précédemment choisie. Nous devons donc connaître un certain nombre de paramètres avant d'utiliser cette méthode : nous devons fixer un nombre maximum d'itérations, *ITMAX*, pour chaque pas de temps et un nombre suffisamment petit, *EPSILON*, qui permettra de tester la convergence. L'algorithme est celui de la figure (fig. IV.3).



**Fig. IV.3 - Algorithme de substitution**

## IV.6 AUTRES METHODES DE RESOLUTION

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré qu'en appliquant la méthode des intégrales de frontière et des éléments finis linéiques sur l'interface, on peut résoudre le problème de conduction surfacique. Cette façon de procéder n'est pas la seule.

### IV.6.1 Méthode variationnelle

Une formulation variationnelle de la méthode des éléments finis peut être utilisée pour résoudre le problème de la conduction surfacique [32]. On ajoute alors, à la fonctionnelle d'énergie du système, une fonctionnelle spécifique à la zone conductrice.

L'équation qui est résolue est celle de Laplace dans les diélectriques (IV.53) et dans les conducteurs (IV.54).

$$\varepsilon \Delta V = 0 \quad (\text{IV.53})$$

$$\sigma \Delta V = 0 \quad (\text{IV.54})$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité électrique du milieu,  $\sigma$  sa conductivité électrique et  $V$  le potentiel scalaire électrique.

Pour résoudre ces équations à l'aide de la méthode des éléments fins, on découpe le domaine d'étude en plusieurs éléments sur lesquels on fait une approximation de l'inconnue (§ II.5.2). Dans chaque élément, on minimise ensuite une fonctionnelle qui représente l'énergie dans les diélectriques (IV.55) et dans les conducteurs (IV.56).

$$F_d = \frac{1}{2} \int_e \varepsilon (\text{grad } V)^2 dv \quad (\text{IV.55})$$



$$F_c = \frac{1}{2} \int_e \sigma (\text{grad } V)^2 dv \quad (\text{IV.56})$$

Si la zone conductrice est considérée comme une région à part entière, ces deux équations suffisent pour déterminer la répartition du potentiel dans tout l'espace. La zone conductrice a une épaisseur si faible qu'elle pose des problèmes de maillages et occasionne des erreurs numériques. Pour contourner ces difficultés, on considère que la couche est confondue avec une surface et on définit une fonctionnelle liée à l'énergie surfacique dissipée :

$$F_s = \frac{1}{2} \int_e \sigma_s (\text{grad}_s V)^2 ds \quad (\text{IV.57})$$

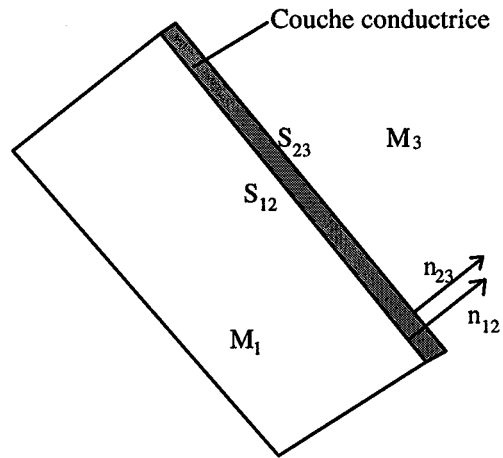
où  $\sigma_s$  est la conductivité surfacique définie par la relation (II.51).

Il faudra minimiser une fonctionnelle, correspondant à la somme des trois fonctionnelles  $F_d$ ,  $F_c$  et  $F_s$ , par rapport aux variables nodales. Ce qui conduit à la construction des matrices élémentaires pour tous les éléments. Un assemblage qui tient compte des conditions aux limites conduit à un système matriciel dont la solution fournit la distribution du potentiel dans tout le domaine d'étude.

#### **IV.6.2 Méthode intégrale**

L'application du théorème de Green a permis d'exprimer la solution de l'équation de Laplace sous forme intégrale (§III.5). On peut donc écrire cette intégrale dans chaque milieu pour obtenir un ensemble d'équations qui gouverne la répartition du potentiel dans le domaine d'étude. Cette méthode ne garantit pas de bons résultats dans le cas de la conduction surfacique. La difficulté est contournée en prenant des inconnues intermédiaires [47].

Considérons un domaine d'étude constitué de deux milieux diélectriques ( $M_1$  et  $M_3$ ) de permittivités électriques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_3$  séparés par une couche de permittivité électrique  $\epsilon_2$  (fig. IV.5).



**Fig. IV.5 - Problème avec une couche conductrice**

Si on écrit l'équation intégrale (III.37) dans chacun des trois milieux, on montre qu'un ensemble de deux équations régit les densités de charges sur les interfaces de la zone conductrice [38]. Avec les notations de la figure (IV.5) ces deux équations s'écrivent respectivement (IV.58) pour un point d'observation sur  $S_{12}$  et (IV.59) pour un point d'observation sur  $S_{23}$ .

$$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \sigma_s(P) + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \int_S \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds = 0 \quad (\text{IV.58})$$

$$\frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{2} \sigma_s(P) + (\epsilon_2 - \epsilon_3) \int_S \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds = 0 \quad (\text{IV.59})$$

avec  $S = S_{12} + S_{23}$ ,  $G$  la fonction de Green et  $\partial G / \partial n$  sa dérivée normale. Dans le cas de la conduction surfacique où la couche a une faible épaisseur, il apparaît des singularités, dans le calcul des intégrales, qui conduisent à des erreurs d'ordre numérique. On introduit donc deux autres inconnues qui correspondent à la somme et à la différence des densités de charges de deux points opposés de la surface et on montre que la seule connaissance de la somme suffit pour déterminer le potentiel en tout point de la couche [38]

L'étude de la couche conductrice peut donc être faite par les méthodes aux éléments finis ou par les méthodes intégrales. Toutefois, pour tenir compte de la faible épaisseur de la couche, il est nécessaire de fournir des efforts supplémentaires de formulation, de programmation et de résolution.

#### **IV.7 CONCLUSION**

La résolution du problème de conduction surfacique, par la méthode des équations intégrales de frontière, nous a conduit à modifier l'équation intégrale pour pouvoir prendre en compte la discontinuité du champ électrique normal.

D'autre part, l'équation d'interface particulière associée à la couche conductrice a été écrite sous forme faible et discrétisée à l'aide d'éléments finis linéiques. L'ensemble a été intégré dans le logiciel BEM2D, et nous présentons au chapitre suivant les résultats obtenus.

## **V. RESULTATS ET VALIDATIONS**

## **V.1 INTRODUCTION**

Les équations discrétisées du modèle de surface conductrice ayant été intégrées dans un programme d'équations intégrales de frontière, il reste à tester le nouvel outil numérique obtenu. Pour ce faire, nous utiliserons une géométrie simple, pour laquelle une solution analytique peut être établie tant en 2D qu'en axisymétrique, lorsque la couche conductrice est uniforme et indépendante du champ. Pour la même géométrie, et dans le cas non linéaire (conductivité électrique dépendant du champ), nous établirons une comparaison de résultats par rapport à la solution numérique à une dimension. Nous vérifierons aussi, dans ce cas, que les couches conductrices non linéaires volontairement déposées ont bien l'effet attendu : distribution linéaire du potentiel, et donc uniformisation du champ tangentiel.

## **V.2 INTERET DE LA COUCHE CONDUCTRICE**

Tout le long de ce document, notamment aux chapitres I et II, nous avons dit qu'une couche légèrement conductrice, à l'interface de deux diélectriques, était susceptible d'améliorer les performances du système d'isolation en réduisant les contraintes tangentielles. A l'aide du logiciel BEM2D, nous sommes en mesure de calculer cette contrainte et donc de pouvoir quantifier la réduction du champ tangentiel.

Considérons la géométrie de la figure (fig. V.1). Elle est constituée d'une plaque mince, d'épaisseur  $a$ , recouverte partiellement par une surface conductrice de longueur  $L$  et de conductivité  $\sigma$  [3].

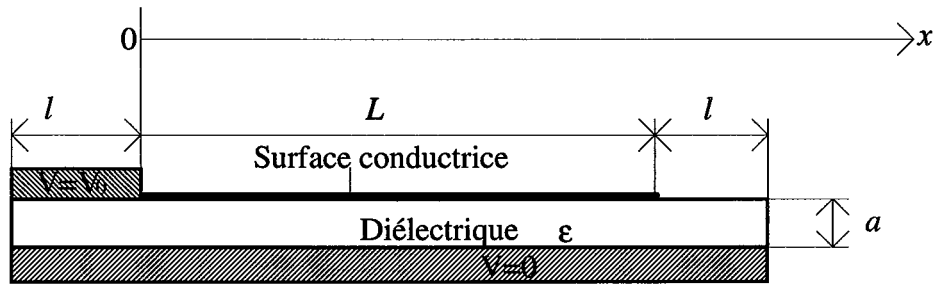


Fig.V.1 - Définition de la géométrie

$$\begin{cases} l = 50 \text{ mm} \\ L = 200 \text{ mm} \\ a = 5 \text{ mm} \\ \epsilon = 4\epsilon_0 \\ f = 50 \text{ Hz} \end{cases}$$

Nous avons calculé le champ tangentiel le long de la surface conductrice dans trois situations : interface sans conductivité, interface munie d'une conductivité constante  $\sigma_0$  et interface avec une conductivité non linéaire  $\sigma_0 \exp(\alpha|E_t|)$ . Si  $E_{max}$  est la valeur maximale du champ tangentiel pour la conductivité constante  $\sigma_0$ , nous choisissons le coefficient  $\alpha$  tel que pour la même valeur du champ on ait une augmentation de 25% de la conductivité dans le cas du problème non linéaire. On a donc :

$$\alpha = \frac{\ln 1,25}{E_{max}} \quad (\text{V.1})$$

Les calculs sont faits avec  $\sigma_0 = 1 \text{ nS}$  et les résultats sont représentés sur les figures (fig. V.2) à (fig. V.4). Pour  $E_{max} = 5 \text{ kV m}^{-1}$ , nous avons  $\alpha = 4,46 \cdot 10^{-5}$ .

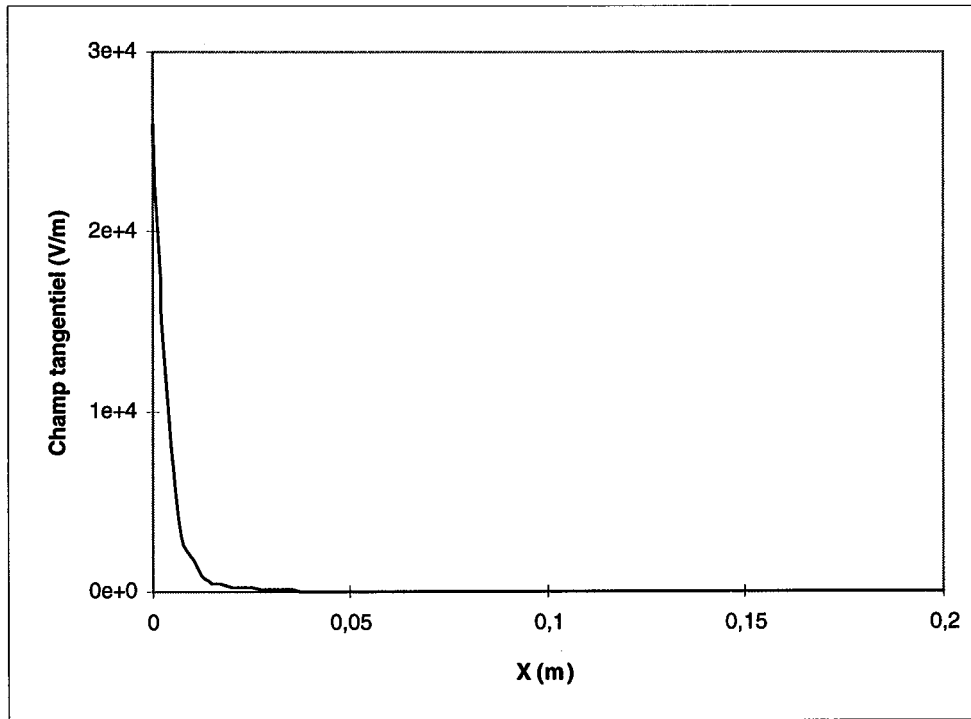


Fig. V.2 - Champ tangentiel sur l'interface (sans conductivité  $V_0=100V$ )

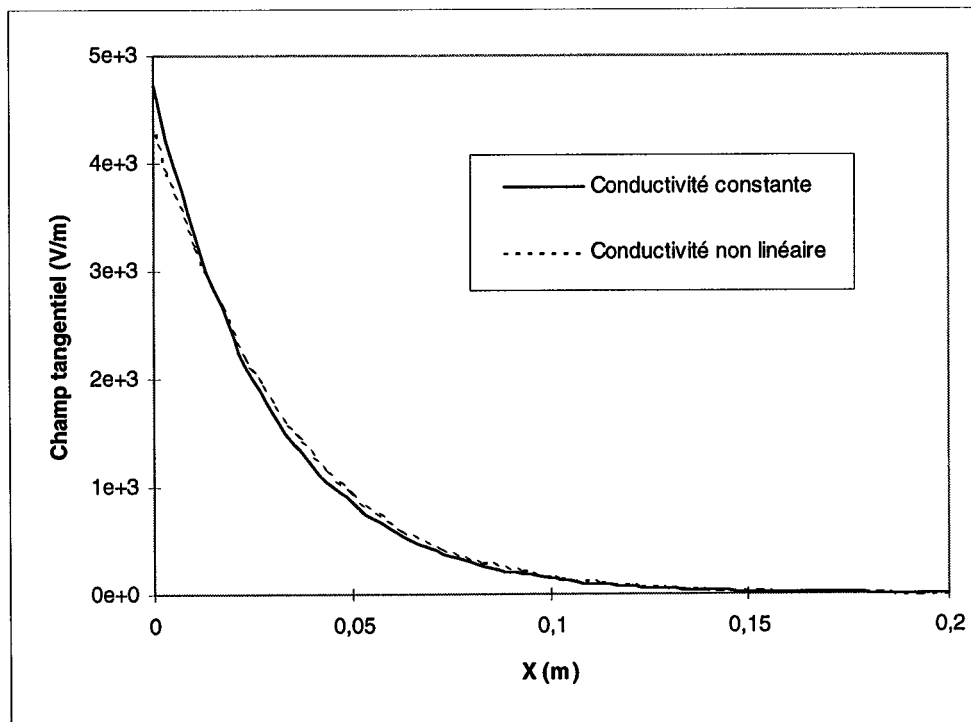


Fig. V.3 - Champ tangentiel sur l'interface conductrice ( $V_0=100 V$ )

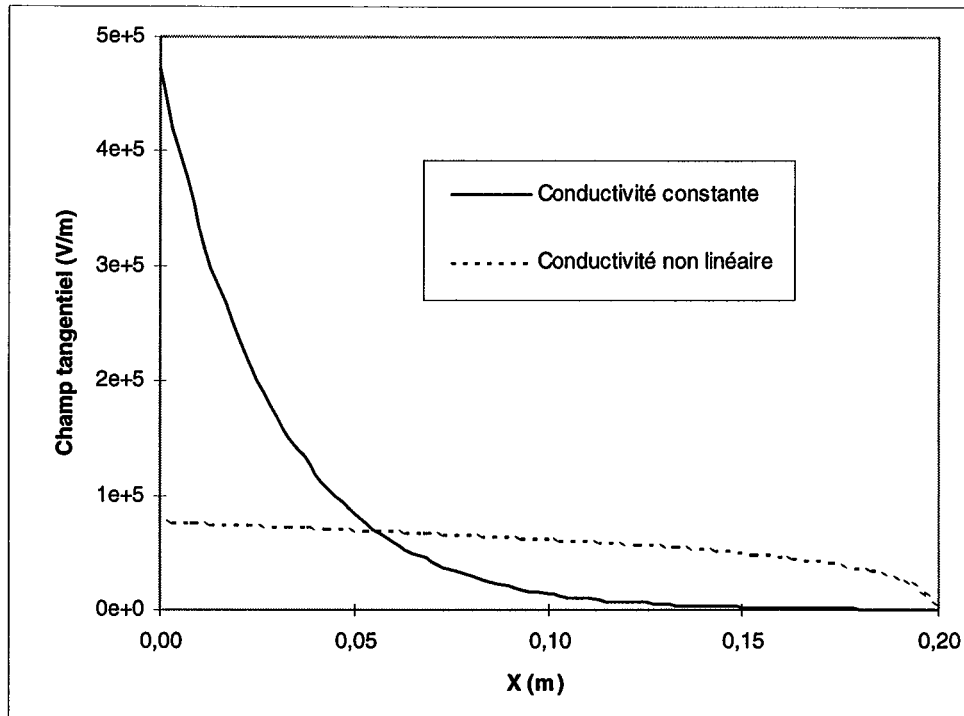


Fig. V.4 - Champ tangentiel sur l'interface conductrice ( $V_0=10$  kV)

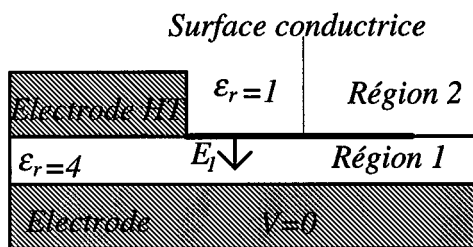
A faible niveau de tension ( $V_0=100$  V), la valeur maximale du champ tangentiel est relativement élevée ( $\approx 25$  kV m<sup>-1</sup>) dans le cas d'une interface classique<sup>(1)</sup>. Pour le même niveau de tension, l'utilisation d'une conductivité permet de baisser cette valeur à environ 5 kV m<sup>-1</sup> (fig. V.3). On vérifie qu'à faible niveau de tension, on reste dans la zone linéaire de la caractéristique  $\sigma = f(|E_t|)$  et que les valeurs maximales du champ tangentiel restent sensiblement les mêmes selon que la conductivité est une constante ou une fonction du champ électrique (fig. V.3). A tension élevée ( $V=10$  kV), la conductivité non linéaire permet de baisser la contrainte maximale de près de 70 % (fig. V.4). Le champ tangentiel est plus uniforme sur la couche. Ce résultat permet de justifier l'utilisation des couches conductrices dans les appareillages HT (chapitre I).

<sup>(1)</sup> Interface sans conductivité correspondant au problème statique.

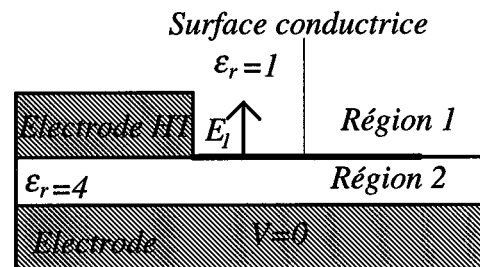


### V.3 VERIFICATION PRELIMINAIRE

Dans le paragraphe (§IV.2.1), nous avons choisis  $V$ ,  $\partial V / \partial n_1$  et  $\Theta$  comme inconnues. Au lieu de calculer  $\partial V / \partial n_1$ , on aurait pu choisir  $\partial V / \partial n_2$ . On peut donc opérer successivement ces deux choix et vérifier si on trouve la même valeur de  $\Theta$  et de  $V$ . Cela permet aussi de voir si la relation (IV.1) est vérifiée. Dans le code de calcul, nous prenons la région de plus petit numéro comme région de référence. Nous allons donc définir deux problèmes ayant les mêmes propriétés physiques et les mêmes maillages mais dont l'ordre de numérotation est inversé (fig.V.5) et (fig. V.6).



*Fig. V.5 - Problème 1*



*Fig. V.6 - Problème 2*

La résolution de ces deux problèmes permet d'obtenir toutes les inconnues sur la surface conductrice ; à savoir le champ normal ( $\partial V / \partial n_1$  et  $\partial V / \partial n_2$ ), le potentiel  $V$  et la densité de charges  $\Theta$ . Nous allons faire les comparaisons pour deux conductivités : conductivité 1 et conductivité 2. Leurs valeurs numériques sont respectivement 1 nS et 1  $\mu$ S. Elles sont dans l'intervalle des valeurs de conductivité souvent rencontrées sur les isolateurs pollués [42]. Les figures (V.7) et (V.8) montrent l'évolution du potentiel le long de la surface conductrice. La densité surfacique de charges  $\Theta$  est représentée sur figures (V.9) et (V.10).

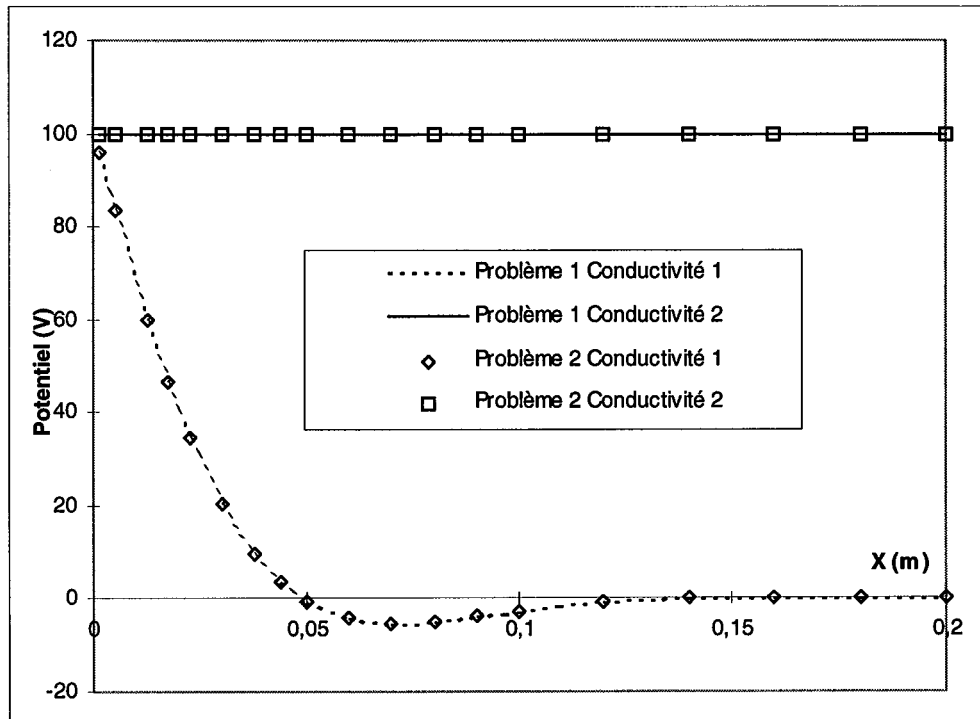


Fig. V.7 - Valeurs réelles du potentiel

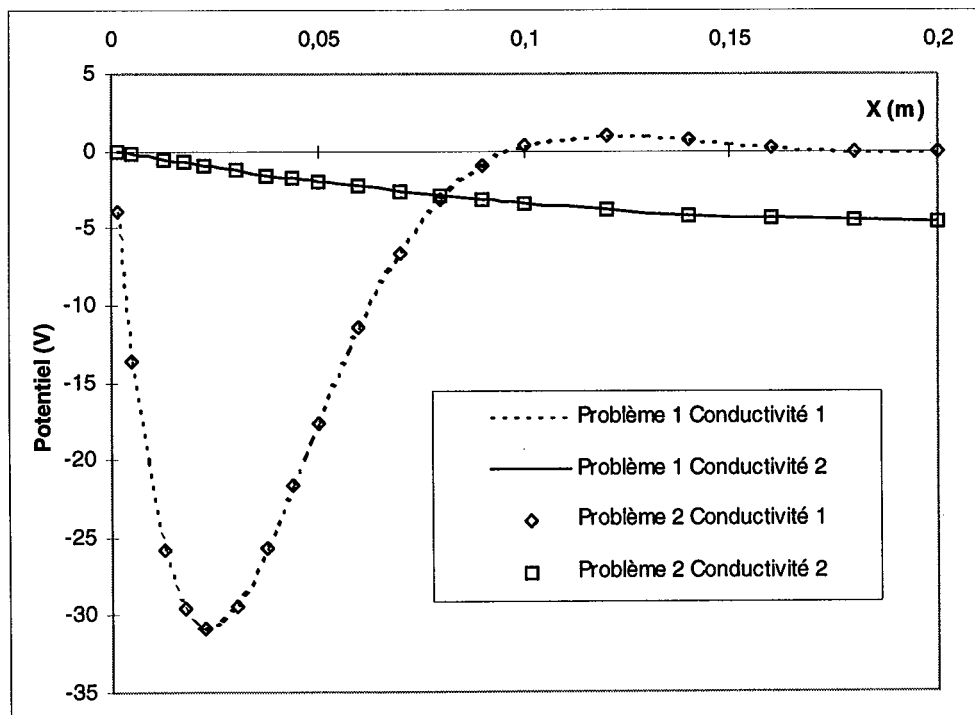


Fig. V.8 - Valeurs imaginaires du potentiel

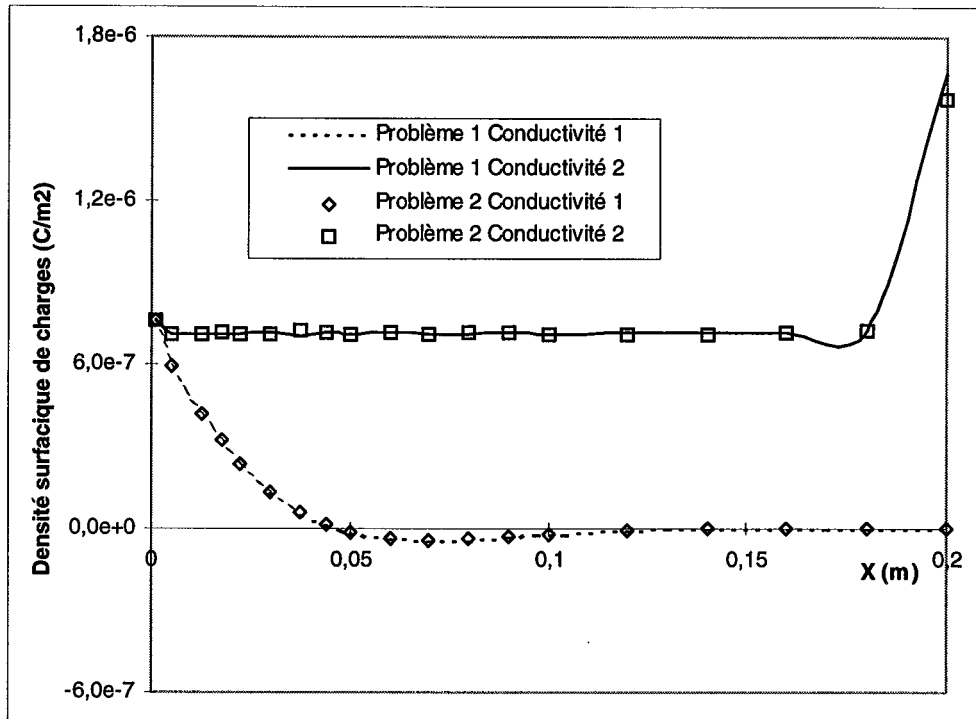


Fig. V.9 - Valeurs réelles de  $\Theta$

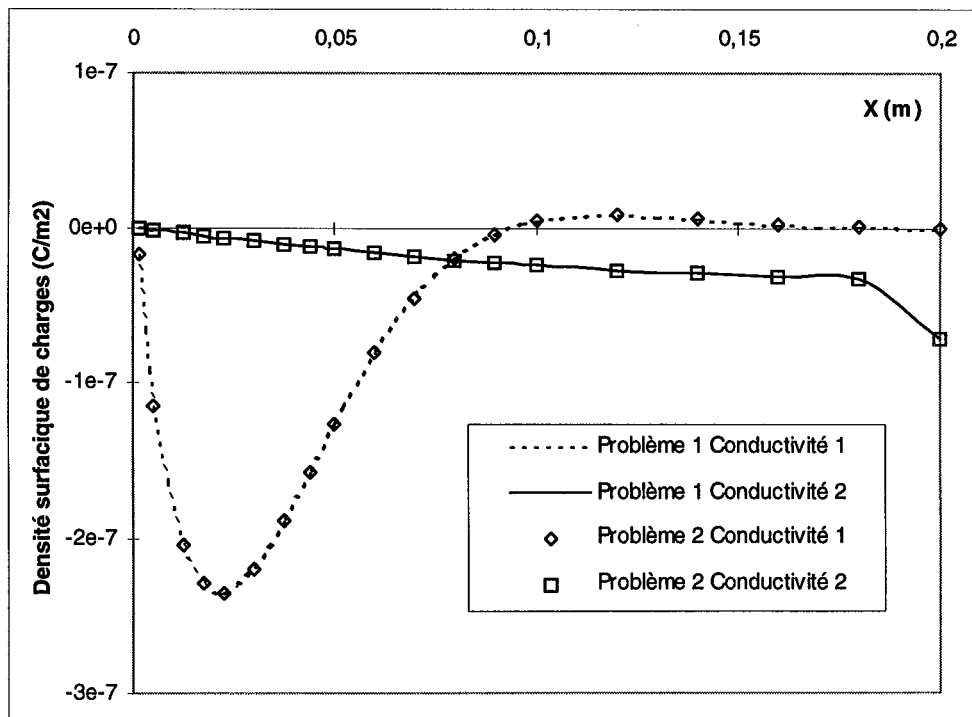
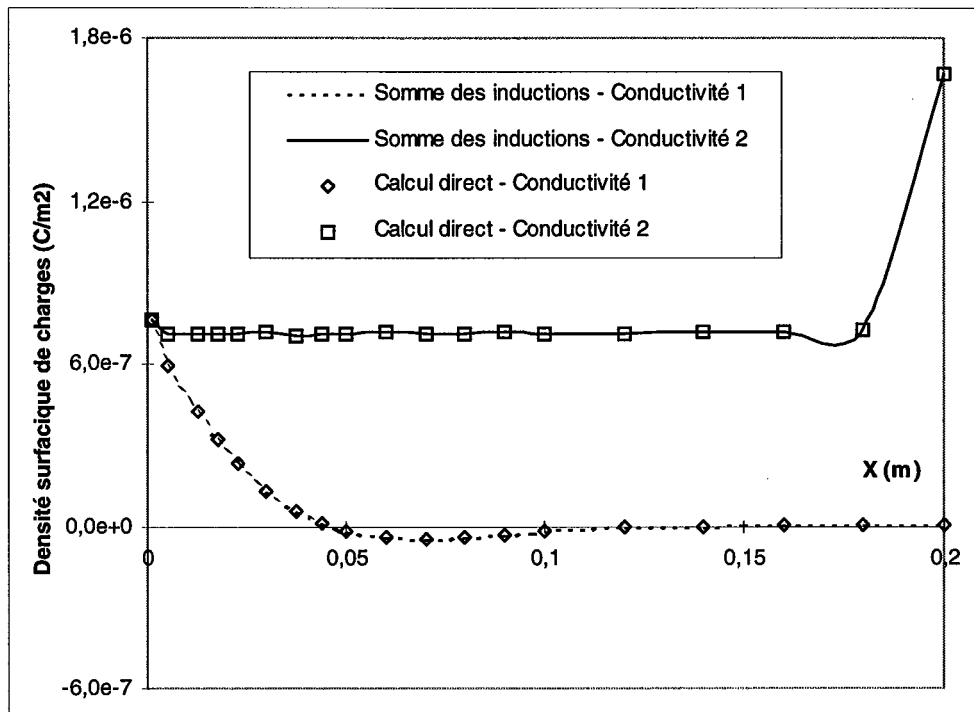


Fig. V.10 - Valeurs imaginaires de  $\Theta$

On obtient les mêmes valeurs de  $V$  et  $\Theta$  dans les deux cas. Le résultat du calcul ne dépend pas de la numérotation des régions. On s'assure ainsi que les calculs sont bien menés. Puisque nous avons les valeurs du champ normal dans les deux régions, voyons si la relation (IV.1) est vérifiée. Pour cela, on trace sur un même graphique, (fig.V.11) et (fig. V.12), les valeurs de  $\Theta$  et  $(\epsilon_1 E_{n1} + \epsilon_2 E_{n2})$ .



*Fig. V.11 - Valeurs réelles*

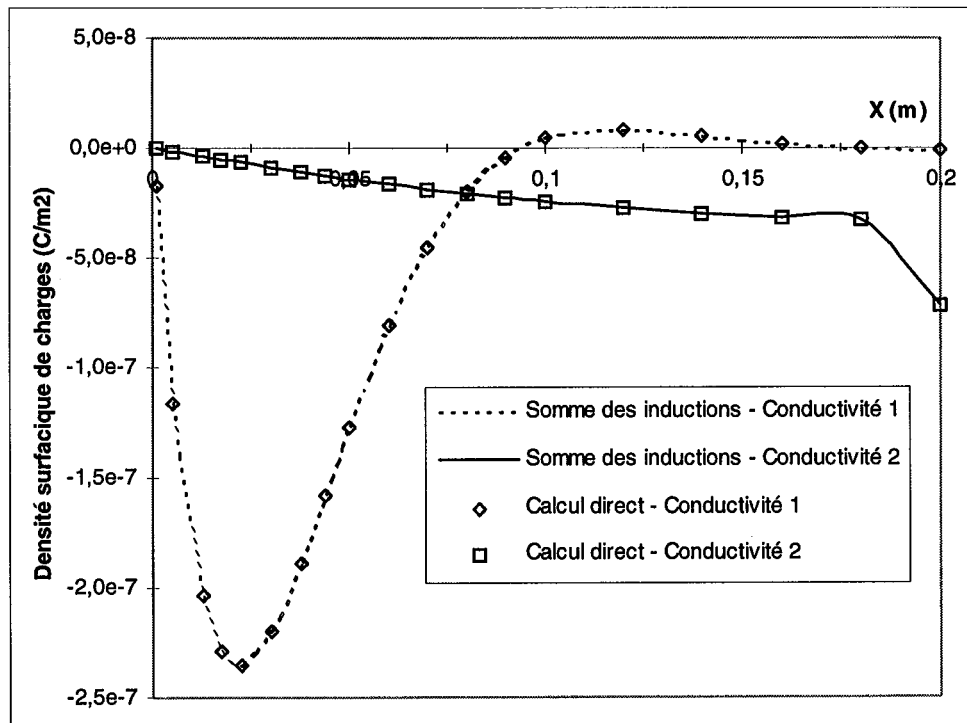


Fig. V.12 - Valeurs imaginaires

On obtient les mêmes valeurs pour  $\Theta$  et  $(\epsilon_1 E_{n1} + \epsilon_2 E_{n2})$ . La relation (IV.1) est vérifiée. Ce qui permet, à nouveau, de confirmer que notre formulation donne les mêmes résultats quelle que soit la numérotation des régions. Ces résultats permettent aussi de dire que le choix de la variable champ normal ( $\partial V / \partial n_1$  ou  $\partial V / \partial n_2$ ) n'a pas d'importance sur les résultats obtenus.

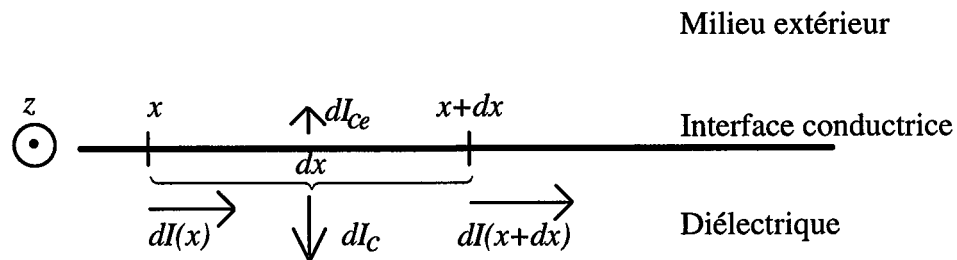
## V.4 PROBLEME A DEUX DIMENSIONS

Pour tester notre formulation, sur le problème à deux dimensions, nous allons utiliser la géométrie de la figure (fig. V.1). Nous calculerons les distributions de potentiels et de champs normaux dans le cas d'un problème linéaire et dans le cas d'un problème non linéaire. Les résultats seront comparés avec ceux d'un modèle linéique.

### V.4.1 Modèle linéique

Le modèle de la figure (fig. V.1) peut être étudié à l'aide d'une équation différentielle mono dimensionnelle que nous allons établir.

Considérons un élément de surface,  $ds = dx dz$ , de la surface conductrice (fig. V.13). Quatre courants interviennent : le courant de conduction  $dI(x)$  qui arrive en  $x$ , le courant de conduction  $dI(x+dx)$  qui sort en  $x+dx$ , le courant capacitif  $dI_{ce}$  qui s'échappe dans le milieu extérieur et le courant capacitif  $dI_c$  qui entre dans le diélectrique.



*Fig. V.13 - Élément de surface et courants mis en jeu*

Pour établir un modèle linéique, nous allons supposer que l'épaisseur du diélectrique est très faible et que le courant qui s'échappe dans le milieu extérieur est négligeable. Les trois autres courants s'écrivent :

$$dI_c = \frac{\partial D}{\partial t} dx dz \quad (\text{V.2})$$

$$dI(x) = J(x) dz \quad (\text{V.3})$$

$$dI(x+dx) = J(x+dx) dz = \left( J(x) + \frac{\partial J(x)}{\partial x} dx \right) dz \quad (\text{V.4})$$

La conservation du courant s'écrit :

$$dI(x) = dI_c + dI(x+dx) \quad (\text{V.5})$$

Comme l'épaisseur du diélectrique est faible, on peut approcher le champ normal par

$$E_n = \frac{V}{a} \quad (\text{V.6})$$

Le courant capacitif s'exprime alors par

$$dI_c = \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} dx dz \quad (\text{V.7})$$

L'équation de conservation (V.5) du courant devient

$$\frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.8})$$

En tenant compte de (II.61), cette équation devient :

$$\frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{V.9})$$

Cette équation différentielle, à une dimension, permet de déterminer la répartition du potentiel le long de la surface conductrice. Nous allons la résoudre dans le cas d'un problème linéaire et dans le cas d'un problème non linéaire.

#### V.4.2 Conduction linéaire

Pour les problèmes de conduction linéaire, la conductivité est une constante et l'équation (V.8) devient :

$$\frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{V.10})$$

Nous avons cherché la solution analytique de l'équation (V.10) en régime sinusoïdal. Le potentiel de l'électrode HT est de la forme :

$$V = V_0 \sin \omega t \quad (\text{V.11})$$

On utilise la notation complexe (IV.38) et l'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - j \frac{\varepsilon \omega}{a \sigma} V = 0 \quad (\text{V.12})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} V(x=0) = V_0 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x=L) = 0 \end{cases}$$

la solution de (V.12) s'écrit :

$$V(x) = V_0 \frac{\cosh[(1+j)k(L-x)]}{\cosh[(1+j)kL]} \quad (\text{V.13})$$



$$\text{avec } k = \sqrt{\frac{\omega\epsilon}{2a\sigma}}$$

et on peut séparer la partie réelle de la partie imaginaire

$$V_r(x) = V_0 \frac{\cosh[k(2L-x)]\cos(kx) + \cos[k(2L-x)]\cosh(kx)}{2[\cosh^2(kL) - \sin^2(kL)]} \quad (\text{V.14})$$

$$V_i(x) = V_0 \frac{\sinh[k(2L-x)]\sin(kx) + \sin[k(2L-x)]\sinh(kx)}{2[\cosh^2(kL) - \sin^2(kL)]} \quad (\text{V.15})$$

D'après (V.5), la partie imaginaire  $E_{ni}$  et la partie réelle  $E_{nr}$  du champ normale s'écrivent :

$$E_{nr}(x) = \frac{V_r(x)}{a} \quad (\text{V.16})$$

$$E_{ni}(x) = \frac{V_i(x)}{a} \quad (\text{V.17})$$

La solution analytique étant connue (V.13) à (V.17), nous la comparons avec les valeurs (potentiels et champs normaux) fournies par BEM2D. Les figures (fig. V.14) et (fig. V.15) représentent les valeurs du potentiel pour les deux conductivités (§V.3), en fonction de la position  $x$  repérée par rapport à l'électrode. De même, les figures (fig. V.16) et (fig. V.17) représentent les valeurs du champ normal pour les mêmes conductivités.

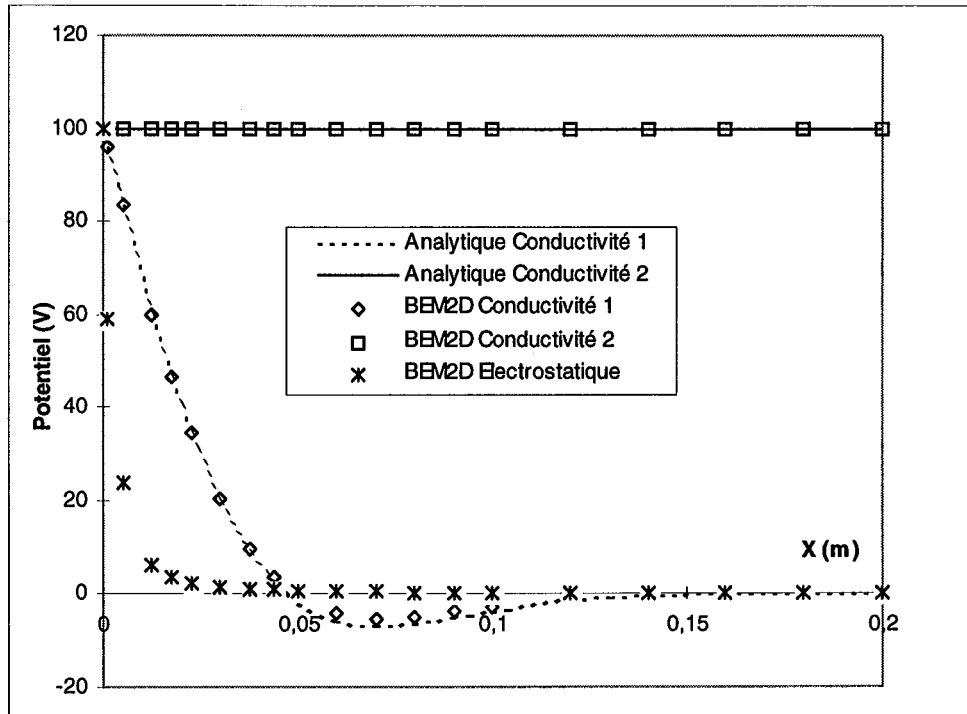


Fig. V.14 - Valeurs réelles du potentiel

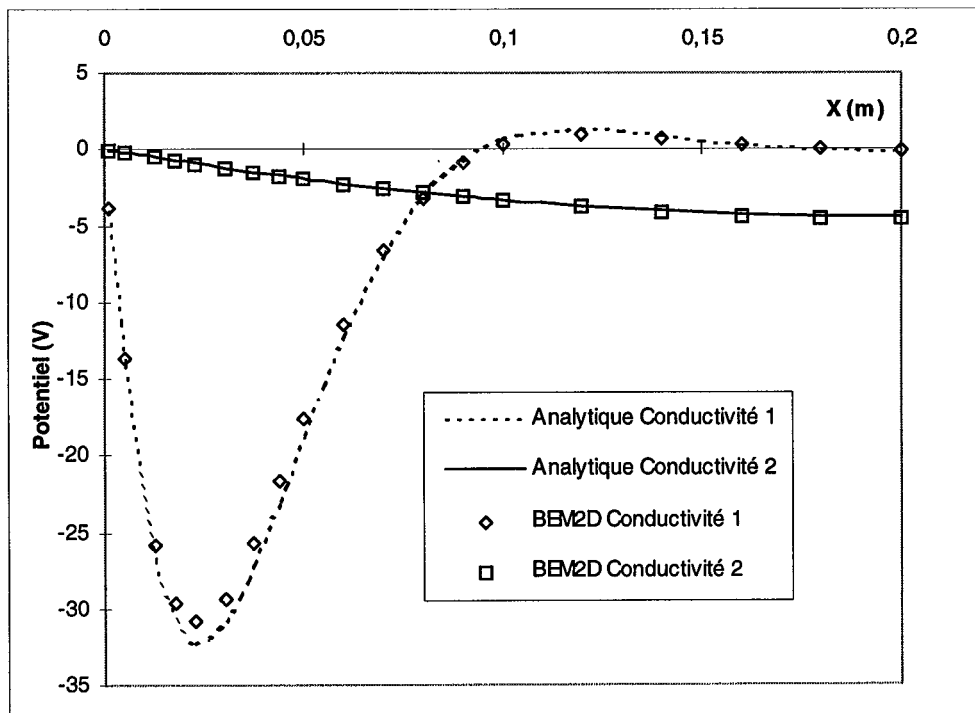


Fig. V.15 - Valeurs imaginaires du potentiel

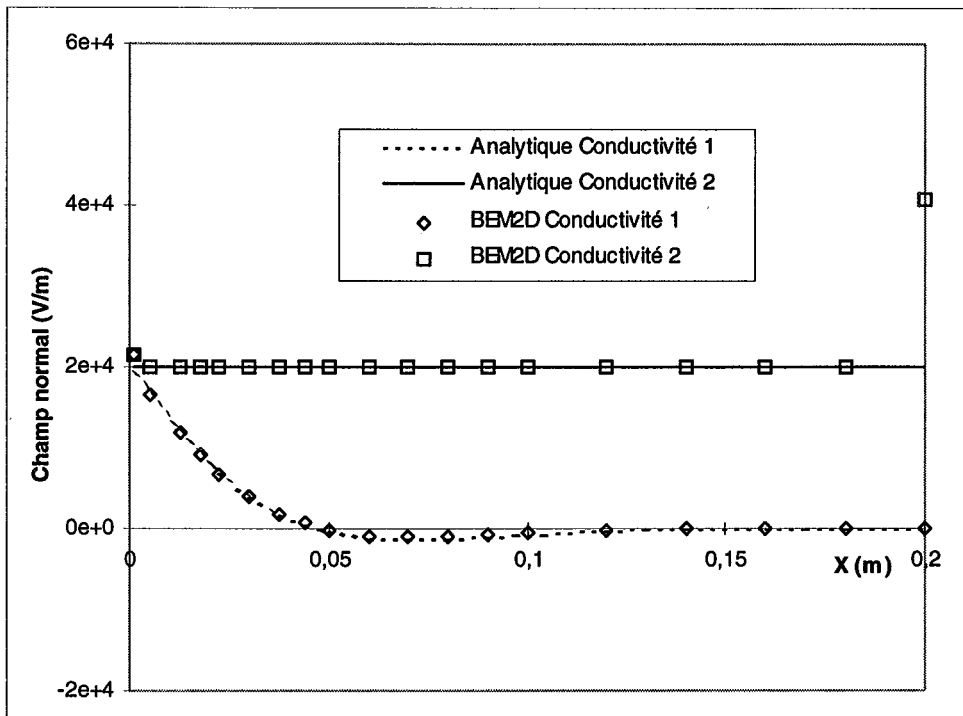


Fig. V.16 - Valeurs réelles du champ normal

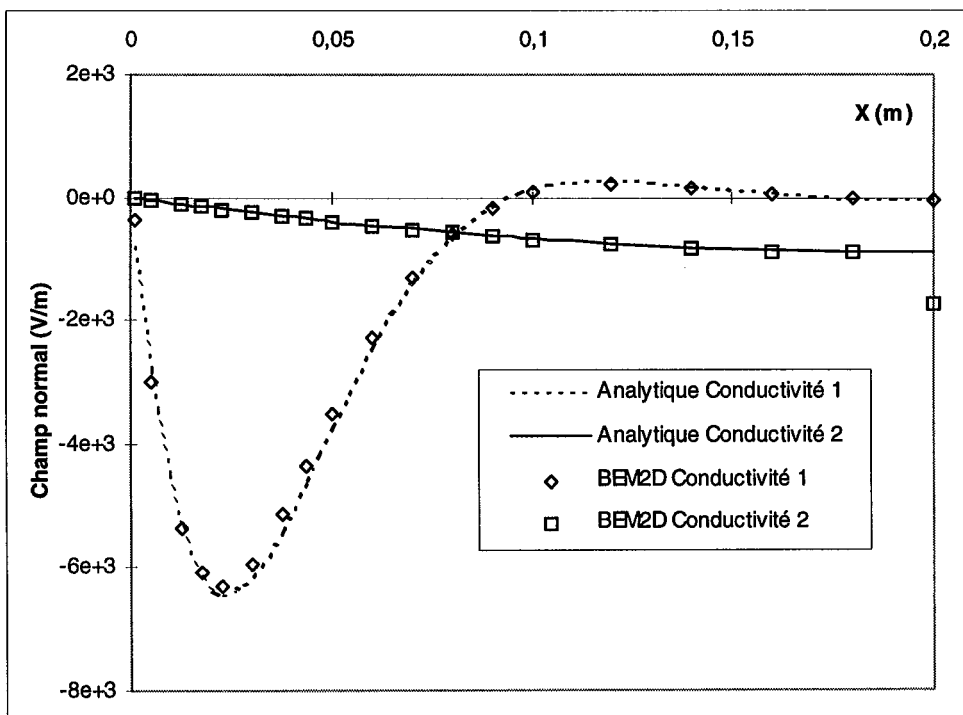
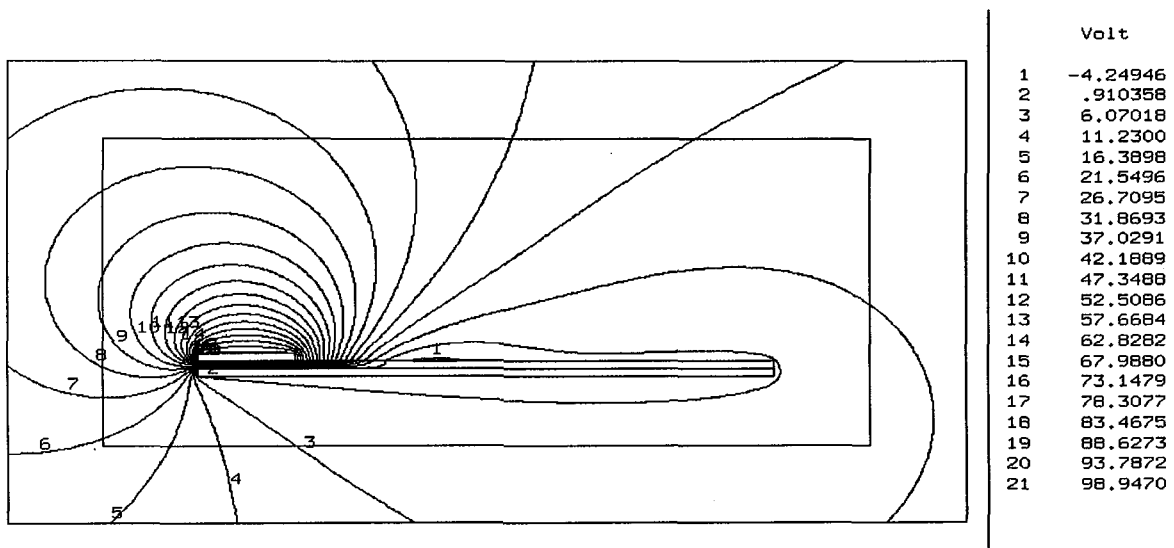


Fig. V.17 - Valeurs imaginaires du champ normal

Les courbes du champ normal et du potentiel ont la même allure. Dans le cas du calcul analytique, ce résultat est une conséquence de la relation (V.5). Pour le calcul BEM2D, cette proportionnalité permet de vérifier l'hypothèse (V.5). Pour une conductivité relativement élevée (conductivité 2), la partie imaginaire du potentiel est pratiquement nulle et la couche conductrice se comporte comme une équipotentielle. La valeur imaginaire du champ normal est aussi très faible et sa valeur réelle est pratiquement constante (cette constante correspond au champ électrique entre deux plaques portées à une différence de potentiel de  $V_0$ ). Sur la figure (fig. V.14) on a aussi représenté l'évolution du potentiel pour le problème électrostatique (surface sans conductivité). Pour une conductivité relativement faible (conductivité 1), la répartition du potentiel se rapproche de la répartition électrostatique. Pour les deux conductivités, les résultats de BEM2D (potentiel et champ normal) sont en relation étroite avec la solution analytique. L'allure des équipotentiels est donnée sur les figures (fig. V.18) pour la conductivité 1 et (fig. V.19) pour la conductivité 2.



**Fig. V.18 - Equipotentiels pour la conductivité 1**

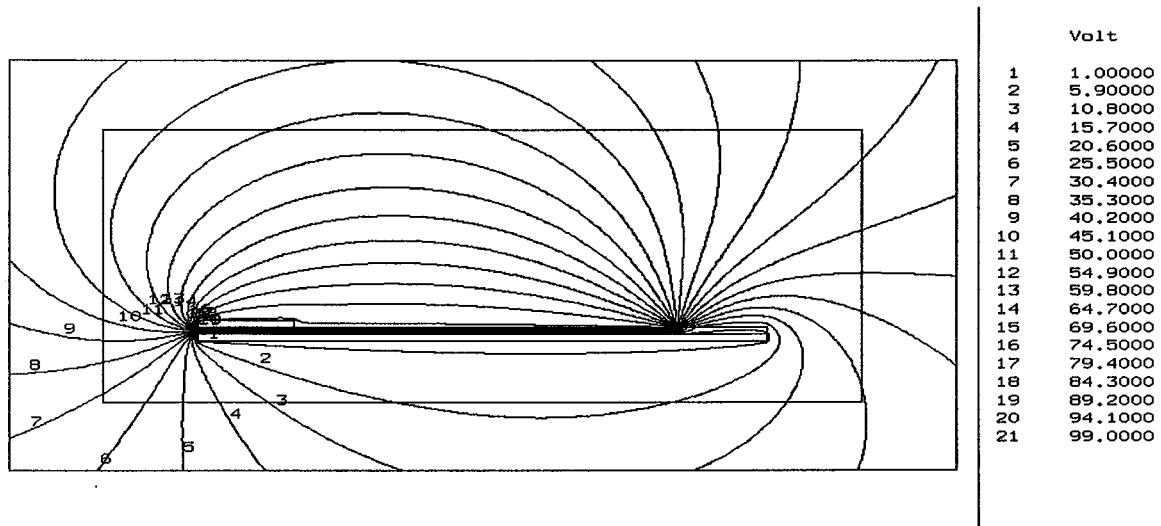


Fig. V.19 - Equipotentiellles pour la conductivité 2

Evaluons maintenant la quantité  $\Delta v$  (*resp.*  $\Delta e$ ) qui correspond à la différence entre les valeurs du potentiel (*resp.* du champ) de la solution analytique et celles de BEM2D, rapportées à la valeur maximale du potentiel (*resp.* du champ normal).

$$\Delta v = \frac{V_{Analytique} - V_{Bem2d}}{V_{max}} \quad (V.18)$$

$$\Delta e = \frac{E_{Analytique} - E_{Bem2d}}{E_{max}} \quad (V.19)$$

où  $V_{max} = 100V$  et  $E_{max} = \frac{V_{max}}{a} = 20 \text{ kVm}^{-1}$ . Calculons d'abord  $\Delta v$  et  $\Delta e$  pour la conductivité la conductivité 1. Les figures (fig. V.20) et (fig. V.21) représentent le résultat de ce calcul.

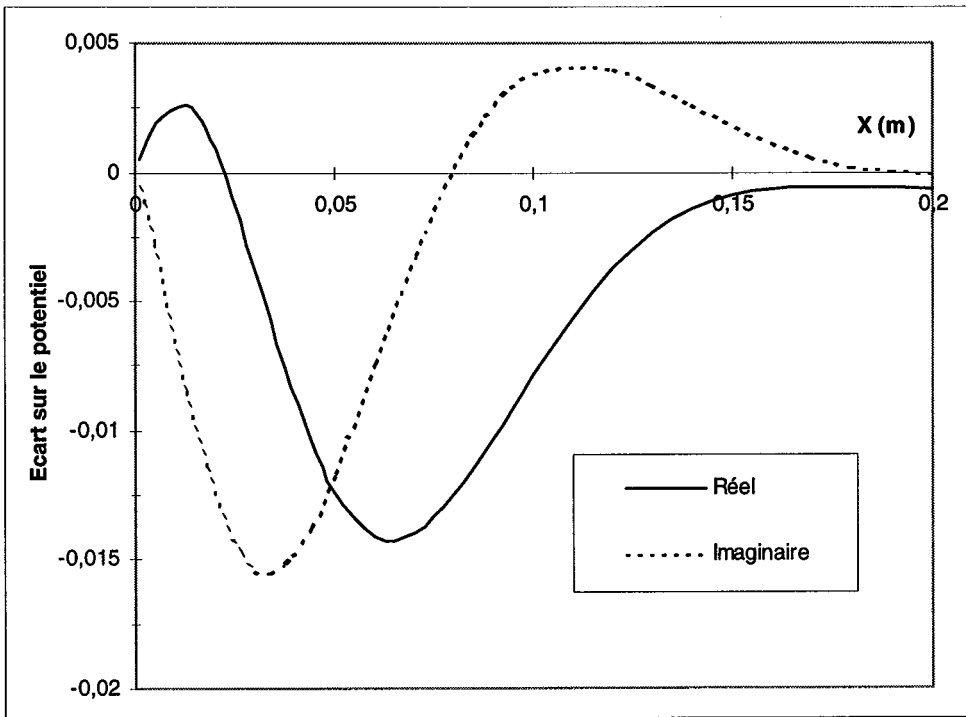


Fig. V.20 -  $\Delta v$  le long de la couche (conductivité 1)

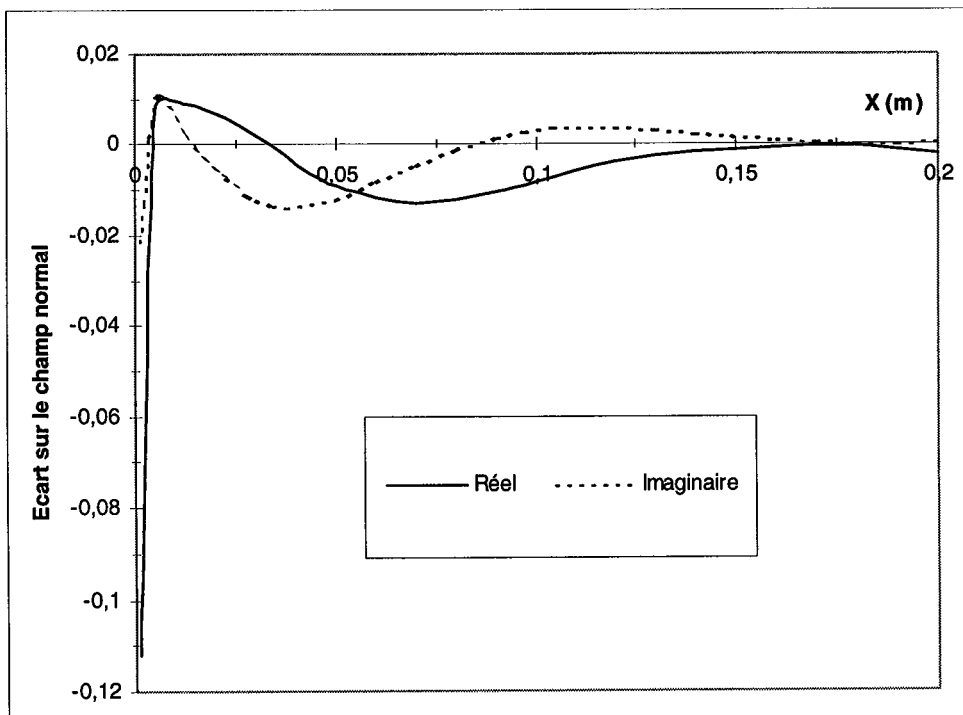
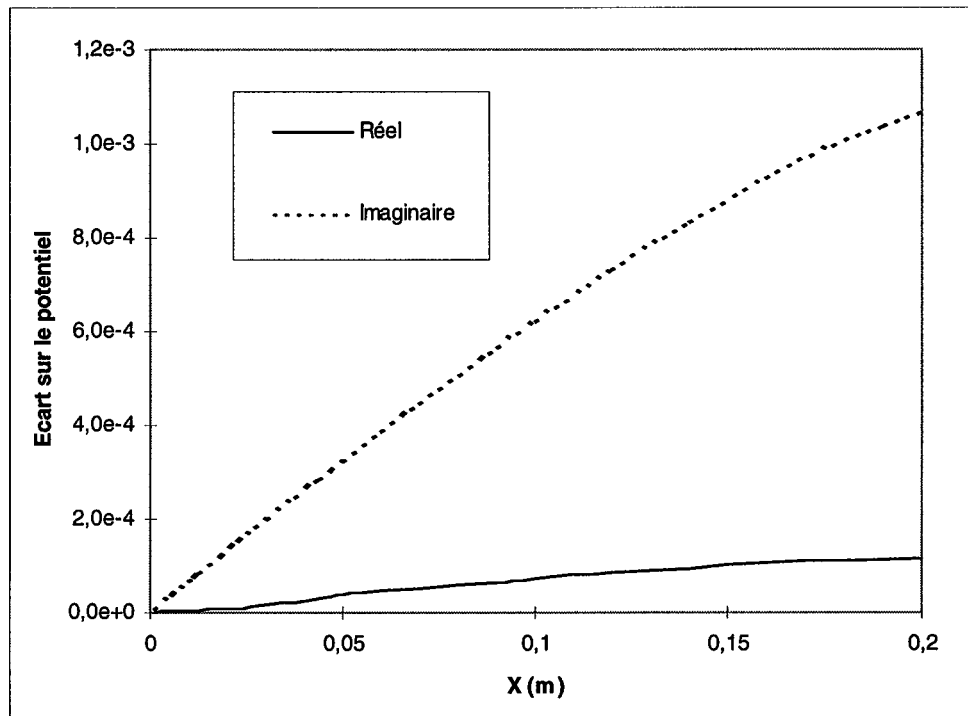


Fig. V.21 -  $\Delta e$  le long de la couche (conductivité 1)

Dans le calcul du potentiel, de faibles différences sont observées entre les valeurs analytiques et les valeurs de BEM2D. Ces différences sont plus importantes quand le potentiel passe par un extremum. Le même constat peut être fait sur le calcul du champ normal. En plus, nous pouvons remarquer que les différences sur le calcul du champ normal sont plus prononcées au point de contact avec l'électrode. A faible conductivité, un effet de pointe se manifeste au point de contact avec l'électrode. Cet effet n'est pas pris en compte dans le modèle analytique. Calculons maintenant les expressions (V.18) et (V.19) pour la conductivité 2. Le résultat est représenté sur les figures (fig. V.22) et (fig. V.23).



*Fig. V.22 -  $\Delta v$  le long de la couche (conductivité 2)*

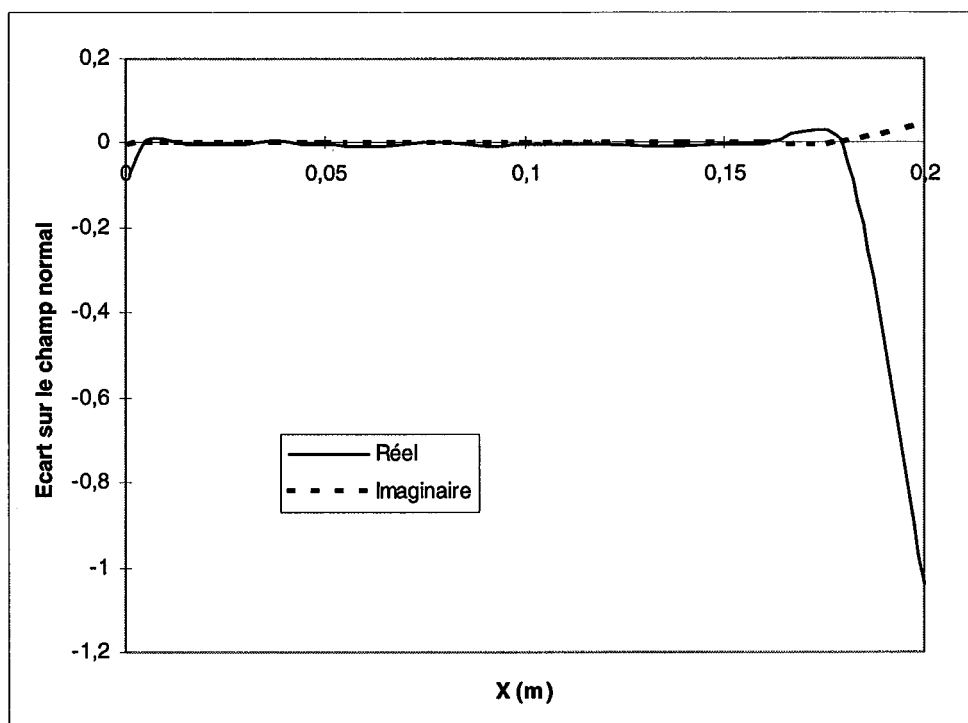


Fig. V.23 -  $\Delta e$  le long de la couche (conductivité 2)

Pour les fortes conductivités, les valeurs maximales de  $\Delta v$  et  $\Delta e$  sont observées à l'extrémité de la couche conductrice. Quand la conductivité est élevée, la couche devient un prolongement de l'électrode et un effet de pointe se manifeste à son extrémité.

#### V.4.3 Conduction non linéaire

Pour valider les procédures du calcul non linéaire, nous avons utilisé trois conductivités dont les paramètres sont définis dans le tableau (V.1).



	$\sigma_0(x1E-9 \text{ S})$	$\alpha(x1E-5)$
Conductivité 1	1	0
Conductivité 2	1000	0
Conductivité 3	1	4,46

**Tableau V.1 - Paramètres des conductivités**

Pour chacune de ces conductivités, nous allons représenter l'évolution du potentiel en fonction du temps et en trois points  $P_1, P_2, P_3$ . Le premier est proche de l'électrode ( $x=3,33 \text{ mm}$ ), le second est au milieu de la couche conductrice ( $x=100 \text{ mm}$ ) et le troisième est proche de l'extrémité de la couche ( $x=196,67 \text{ mm}$ ). L'étude des conductivités 1 et 2 correspond au problème linéaire précédemment résolu. Nous allons le résoudre à nouveau avec les procédures de calcul du problème non linéaire. La solution "non linéaire" passe par un régime transitoire quand la conductivité est faible (conductivité 1). La durée du régime transitoire dépend de la position du point d'observation (fig. V.24 à fig. V.26).

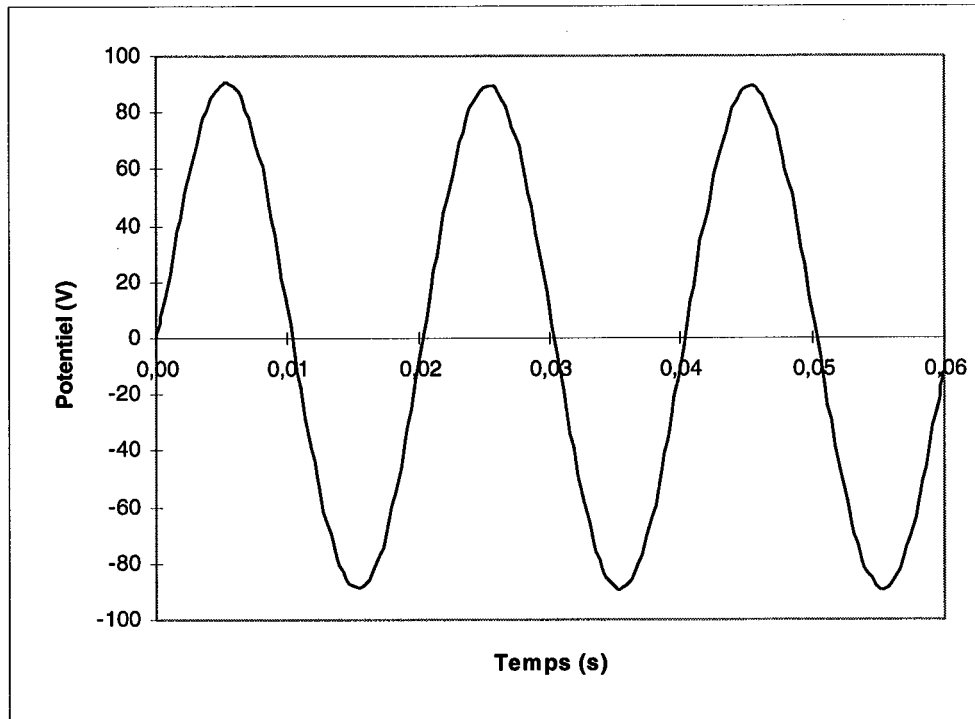


Fig. V.24 - Régime transitoire au point  $P_1$

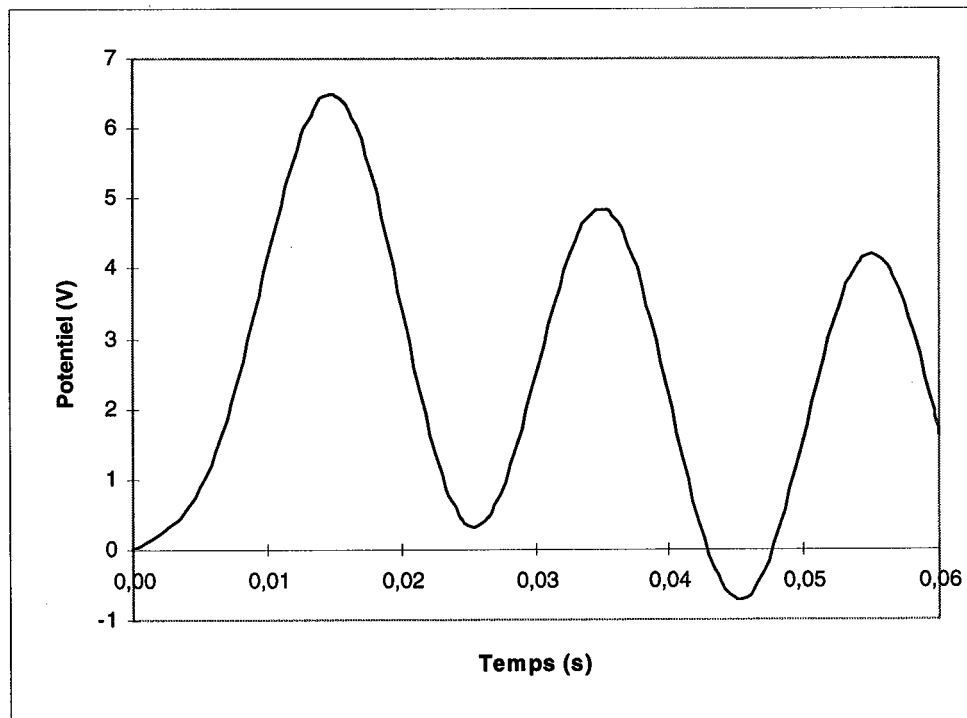
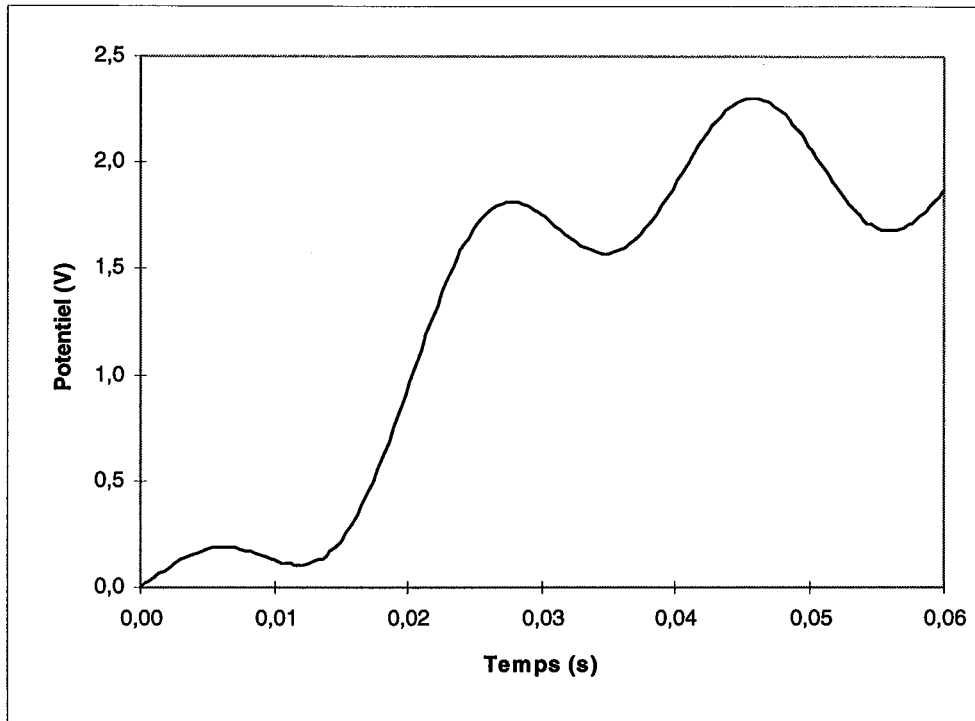


Fig. V.25 - Régime transitoire au point  $P_2$



*Fig. V.26 - Régime transitoire au point P<sub>3</sub>*

Quand le régime permanent est atteint, on compare la valeur maximale de la solution linéaire obtenue par la relation (V.20) avec la valeur maximale de la solution "non linéaire".

$$V_l = \sqrt{V_{réel}^2 + V_{imag}^2} \quad (V.20)$$

Le tableau (V.2) donne la valeur numérique  $V_l$  de (V.20) et la valeur crête  $V_{nl}$  du régime permanent pour les trois points. La comparaison est faite en calculant une différence rapportée à  $V_{max}$  selon la relation suivante :

$$\Delta v = \frac{V_l - V_{nl}}{V_{max}} \quad (V.21)$$

	Conductivité 1			Conductivité 2		
$x$ (mm)	3,33	100	196,67	3,33	100	196,67
$V_{réel}$ (V)	88,87	-2,71	0,30	99,99	99,88	99,83
$V_{imag}$ (V)	-9,75	0,30	-0,09	-0,15	-3,39	-4,53
$V_l$ (V)	89,30	2,72	0,31	99,99	99,94	99,93
$V_{nl}$ (V)	89,14	Régime permanent		99,99	99,79	99,77
$\Delta v$ (x 1E-3)	1,6	non atteint		0	1,5	1,6

**Tableau V.2**

Pour les faibles conductivités (conductivité 1), le régime transitoire est très long aux points éloignés de l'électrode ( $V_{nl}$  et  $\Delta v$  ne sont pas calculés). Les différences entre les valeurs de la résolution linéaire et celles de la résolution "non linéaire" sont faibles si on les compare à  $V_{max}$ . Toutefois, elles sont plus grandes aux points de singularités signalés au paragraphe (§V.4.2 ). On peut donc considérer qu'à conductivité constante, la résolution linéaire et la résolution "non linéaire" conduisent aux mêmes résultats.

Dans le cas des problèmes de conduction non linéaire, la conductivité n'est plus une constante. Nous l'avions exprimé en fonction du champ tangentiel à la surface conductrice (§II.3). L'équation (V.9) ne peut être résolue analytiquement. Il faut recourir à une résolution numérique. Pour obtenir une solution numérique de l'équation (V.9), nous allons utiliser une méthode aux éléments finis à une dimension. La dérivée temporelle est remplacée par une différence finie et on applique la méthode de substitution avec un algorithme pas à pas dans le

temps. Si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux instants consécutifs de discrétisation,  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs des inconnues correspondantes, alors l'équation (V.9) devient :

$$\frac{\varepsilon}{a} \left[ \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \right] - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{V.22})$$

On multiplie cette équation par une famille de fonctions de projections  $W$  et on prend l'intégrale sur la longueur  $L$  de la surface conductrice.

$$\frac{\varepsilon}{a} \int_L W \left[ \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \right] dx - \int_L W \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} dx - \int_L \sigma W \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} dx = 0 \quad (\text{V.23})$$

Une intégration par partie du dernier terme de cette équation permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\varepsilon}{a} \int_L W \left( \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \right) dx - \left[ \sigma W \frac{\partial V_2}{\partial x} \right]_{P_1}^{P_3} + \int_L \sigma \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} dx = 0 \quad (\text{V.24})$$

Les points  $P_1$  et  $P_3$  ont la même définition qu'en (§III.3.4). On découpe la longueur  $L$  en éléments finis quadratiques à une dimension et on utilise les fonctions d'interpolations définies en (§II.4.3). Sur un élément fini, considérant la fonction de projection  $W_i$ , l'équation (V.24) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{a} \int_{-1}^{+1} \left( W_i \sum_{j=1}^3 N_j V_{2j} \right) \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu - \left[ \sigma W_i \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} V_{2j} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} \right]_{\mu_1}^{\mu_3} \\ & + \int_{-1}^{+1} \sigma \frac{\partial W_i}{\partial \mu} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} V_{2j} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x} d\mu = \frac{\varepsilon}{a} \int_{-1}^{+1} W_i \left( \sum_{j=1}^3 N_j V_{1j} \right) \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

La remarque faite au paragraphe (§IV.4.1) est aussi valable. L'équation (V.25) est d'abord assemblée sur les éléments et l'assemblage de toutes les matrices élémentaires permet de construire le système matriciel global dont la solution est la répartition du potentiel sur l'interface à l'instant  $t_2$ .

Pour la conductivité 3, nous avons effectué une simulation durant trois périodes ( $T=60$  ms,  $V=10$  kV,  $f=50$ Hz). La durée du régime transitoire des points éloignés de l'électrode nous a conduit à considérer des nœuds dans la première moitié du segment conducteur. On prendra donc un point  $P_4$  ( $x=50$  mm) situé entre les points  $P_1$  et  $P_2$ . Les valeurs du potentiel obtenues par BEM2D et celles de la solution à une dimension sont représentées sur la figure (fig. V.27). La figure (V.28) représente la densité de courant au point  $P_4$ .

Ces graphes montrent une bonne concordance entre les résultats de BEM2D et la solution de l'équation différentielle à une dimension. La conductivité non linéaire impose une distorsion, caractéristique de la non linéarité, sur le potentiel et la densité de courant. Cette distorsion, tout comme le régime transitoire, dépend de la position du point d'observation sur la couche. Pour pouvoir calculer ces courbes, nous avons fait une discrétisation temporelle assez fine (500 échantillons par période). Nous avons pris un coefficient de relaxation de  $\delta=0,125$ . On considère que la solution converge si  $\xi$  (cf. IV.52) est inférieur à 1%. Les temps de calculs sont donc assez longs (environ 10 heures CPU pour les trois périodes) et nous avons limité l'étude aux premières périodes.

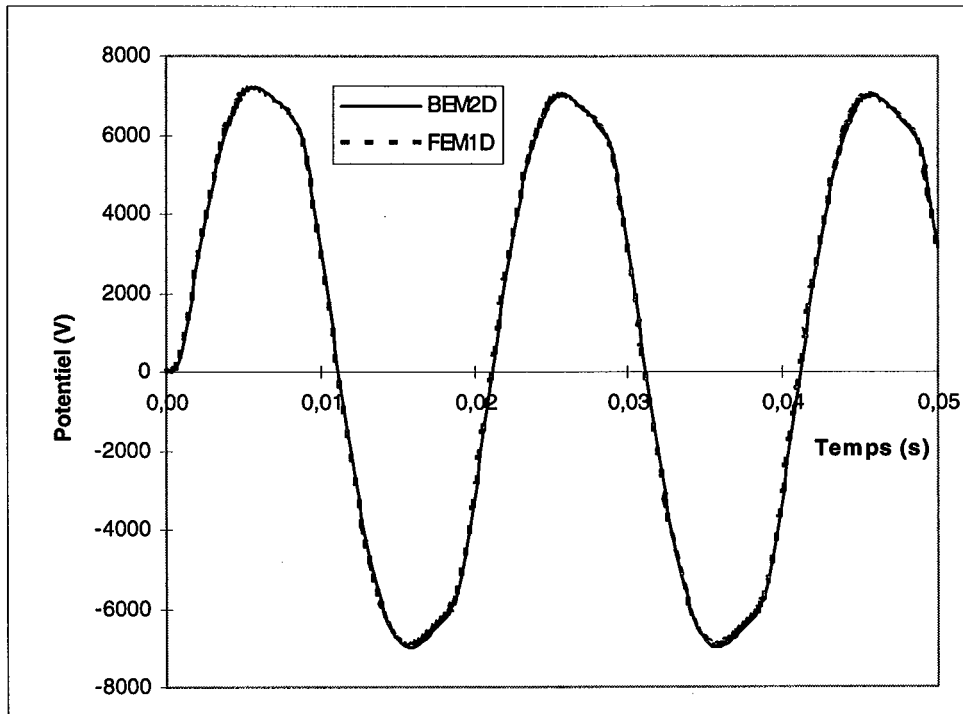


Fig. V.27 - Potentiel au point P<sub>4</sub>

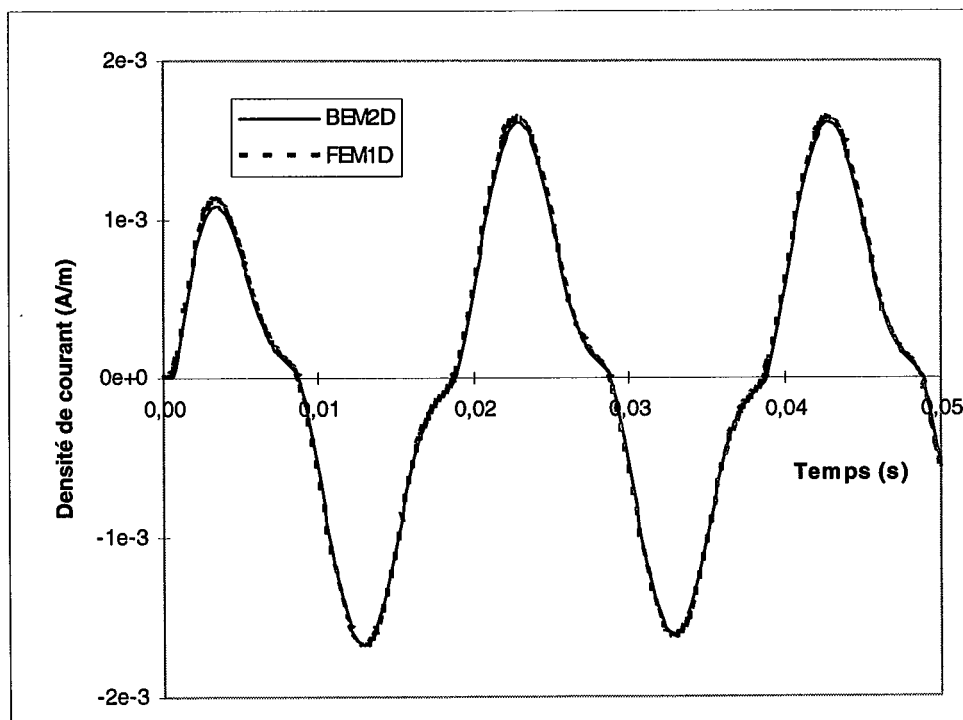
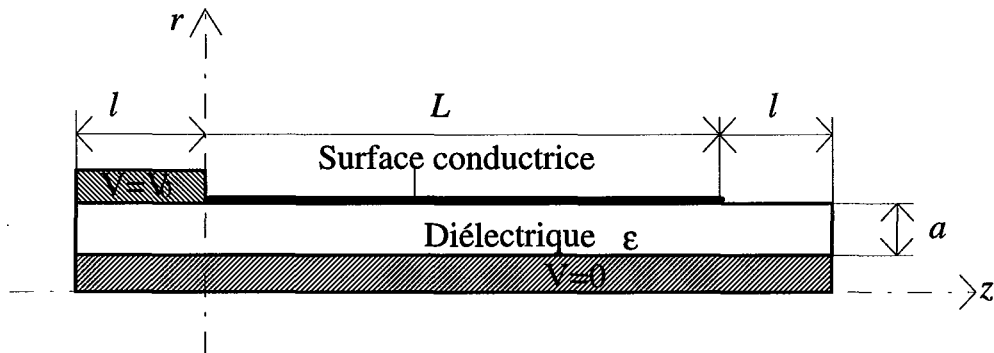


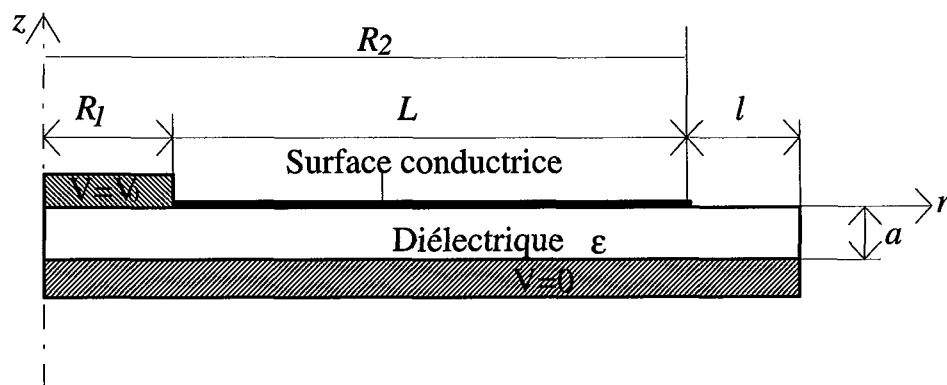
Fig. V.28 - Courant au point P<sub>4</sub>

## V.5 PROBLEME AXISYMETRIQUE

Pour tester la formulation de la conduction surfacique, sur le problème axisymétrique, nous allons utiliser deux géométries. Dans la première (fig. V.29), la surface conductrice est parallèle à l'axe de révolution. Ce problème diffère très peu du problème à deux dimensions. Nous noterons A1 ce problème. Dans la deuxième géométrie (fig. V.30), la surface conductrice est perpendiculaire à l'axe de révolution. Nous noterons A2 ce problème.



*V.29 - Géométrie du problème A1*



*Fig. V.30 - Géométrie du problème A2*

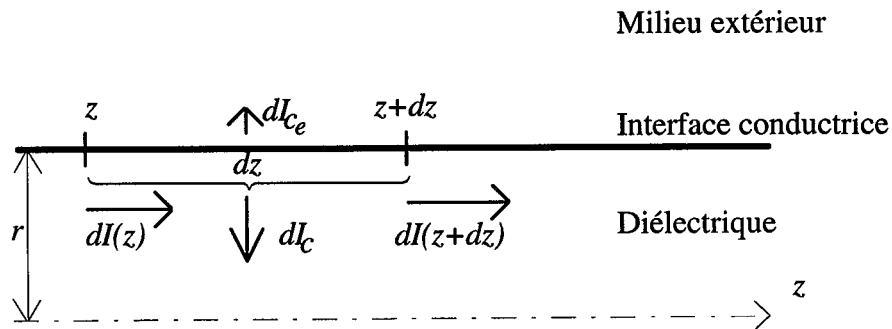


Nous calculerons les distributions de potentiels et de champs normaux dans le cas d'un problème linéaire et dans le cas d'un problème non linéaire. Les résultats seront comparés avec ceux d'un modèle linéique.

### V.5.1 Modèle linéique

Les deux modèles précédents peuvent être étudiés à l'aide d'une équation différentielle mono dimensionnelle. Nous allons d'abord établir cette équation dans le cas du problème A1 et ensuite nous ferons de même pour le problème A2.

Considérons un élément de surface  $ds = r d\phi dz$  de la surface conductrice (fig. V.31). Quatre courants interviennent : le courant de conduction  $dI(z)$  qui arrive en  $z$ , le courant de conduction  $dI(z+dz)$  qui sort en  $z+dz$ , le courant capacitif  $dI_{ce}$  qui s'échappe dans le milieu extérieur et le courant capacitif  $dI_c$  qui entre dans le diélectrique.



*Fig. V.31 - Élément de surface du problème A1 et courants mis en jeu*

Pour établir un modèle linéique, nous allons supposer que l'épaisseur du diélectrique est très faible et que le courant qui s'échappe dans le milieu extérieur est négligeable. Les trois autres courants s'écrivent :

$$dI_c = \frac{\partial D}{\partial t} r d\varphi dz \quad (\text{V.26})$$

$$dI(z) = J(z) r d\varphi \quad (\text{V.27})$$

$$dI(z + dz) = J(z + dz) r d\varphi = \left( J(z) + \frac{\partial J(z)}{\partial z} dz \right) r d\varphi \quad (\text{V.28})$$

La conservation du courant s'écrit :

$$dI(z) = dI_c + dI(z + dz) \quad (\text{V.29})$$

Comme l'épaisseur du diélectrique est faible, nous utiliserons (V.6) et le courant capacitif s'exprime alors par

$$dI_c = \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} r d\varphi dz \quad (\text{V.30})$$

L'équation de conservation (V.29) du courant devient

$$\frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial J(z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.31})$$

En tenant compte de (II.61), cette équation devient :

$$\frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{V.32})$$

Cette équation différentielle, à une dimension, permet de déterminer la répartition du potentiel le long de la surface conductrice sur le problème A1. Elle est identique à (V.9) et elle est donc déjà résolue.

Intéressons-nous maintenant au problème A2. Considérons un élément de surface  $ds = r d\varphi dr$  de la surface conductrice (fig.V.32). Quatre courants interviennent : le courant de

conduction  $dI(r)$  qui arrive en  $r$ , le courant de conduction  $dI(r+dr)$  qui sort en  $r+dr$ , le courant capacitif  $dI_{ce}$  qui s'échappe dans le milieu extérieur et le courant capacitif  $dI_c$  qui entre dans le diélectrique.

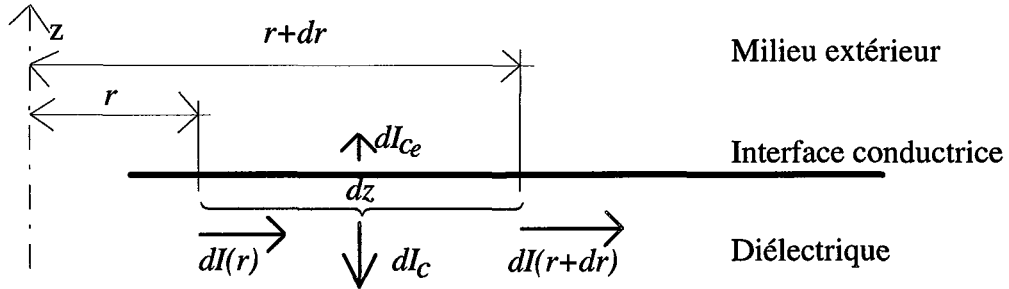


Fig. V.32 - Élément de surface du problème A2 et courants mis en jeu

Pour établir un modèle linéique, nous allons supposer que l'épaisseur du diélectrique est très faible et que le courant qui s'échappe dans le milieu extérieur est négligeable. Les trois autres courants s'écrivent :

$$dI_c = \frac{\partial D}{\partial t} r d\varphi dr \quad (\text{V.33})$$

$$dI(r) = J(r) r d\varphi \quad (\text{V.34})$$

$$dI(r+dr) = (r+dr) d\varphi J(r+dr) = (r+dr) d\varphi \left( J(r) + \frac{\partial J(r)}{\partial r} dr \right) \quad (\text{V.35})$$

La conservation du courant s'écrit :

$$dI(r) = dI_c + dI(r+dr) \quad (\text{V.36})$$

Comme l'épaisseur du diélectrique est faible, nous utiliserons (V.6) et le courant capacitif s'exprime alors par

$$dI_c = \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} r d\phi dr \quad (\text{V.37})$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre trois, l'équation de conservation (V.36) du courant devient :

$$r^2 \frac{\partial J(r)}{\partial r} + rJ(r) + r^2 \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.38})$$

En tenant compte de (II.61), cette équation devient :

$$r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \sigma \frac{\partial V}{\partial r} \right) + r\sigma \frac{\partial V}{\partial r} - r^2 \frac{\varepsilon}{a} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.39})$$

Cette équation différentielle, à une dimension, permet de déterminer la répartition du potentiel le long de la surface conductrice du problème A2. Nous allons la résoudre dans le cas d'un problème linéaire et dans le cas d'un problème non linéaire.

### **V.5.2 Conduction linéaire**

Dans le cas d'un problème linéaire la conductivité est une constante et l'équation (V.39) devient :

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + r \frac{\partial V}{\partial r} - r^2 \frac{\varepsilon}{a\sigma} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{V.40})$$

Nous avons cherché la solution analytique de l'équation (V.40) en régime sinusoïdal. Le potentiel de l'électrode HT est de la forme (V.11) et on utilise la notation complexe (IV.38). L'équation (V.40) se met sous la forme :

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + r \frac{\partial V}{\partial r} + k^2 r^2 V = 0 \quad (\text{V.41})$$

avec  $k^2 = -j \frac{\omega \epsilon}{a \sigma}$  ;  $j$  est l'unité imaginaire et  $\omega$  la pulsation.

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit [1]:

$$V(r) = A J_0(kr) + B Y_0(kr) \quad (\text{V.42})$$

où  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre zéro.  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes qui sont déterminées à l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} V(r = R_1) = V_0 \\ \frac{\partial V}{\partial r}(r = R_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{V.43})$$

On obtient :

$$A = V_0 \frac{Y_1(kR_2)}{J_0(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_2)Y_0(kR_1)} \quad (\text{V.44})$$

$$B = V_0 \frac{-J_1(kR_2)}{J_0(kR_1)Y_1(kR_2) - J_1(kR_2)Y_0(kR_1)} \quad (\text{V.45})$$

où  $J_1$  et  $Y_1$  sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre un.

La solution analytique étant connue (V.42), nous allons la comparer aux résultats de BEM2D. Les calculs sont faits avec les mêmes valeurs de conductivité utilisées dans le cas du problème 2D. Les figures (fig. V.33) à (fig. V.36) représentent les valeurs du potentiel le long de la surface conductrice.

Nous pouvons retenir la même conclusion sur le comportement de la surface conductrice à faible ou à forte conductivité. Dans les deux problèmes, les résultats de BEM2D

sont assez proches de la solution analytique. Les figures (Fig. V.37) à (Fig. V.40) représentent les équipotentielles.

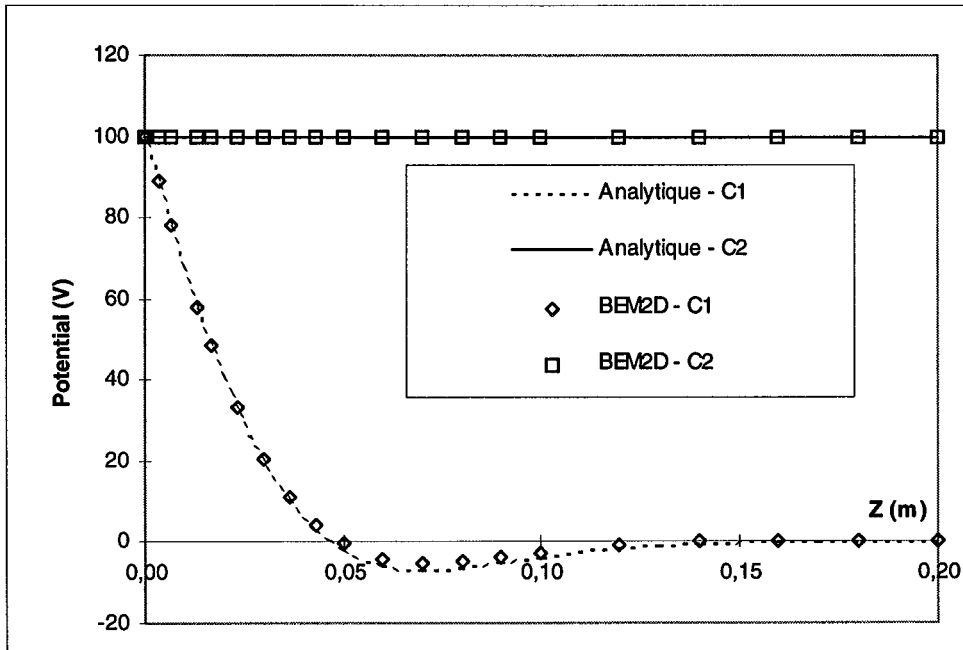


Fig. V.33 - Valeurs réelles du potentiel (problème A1)

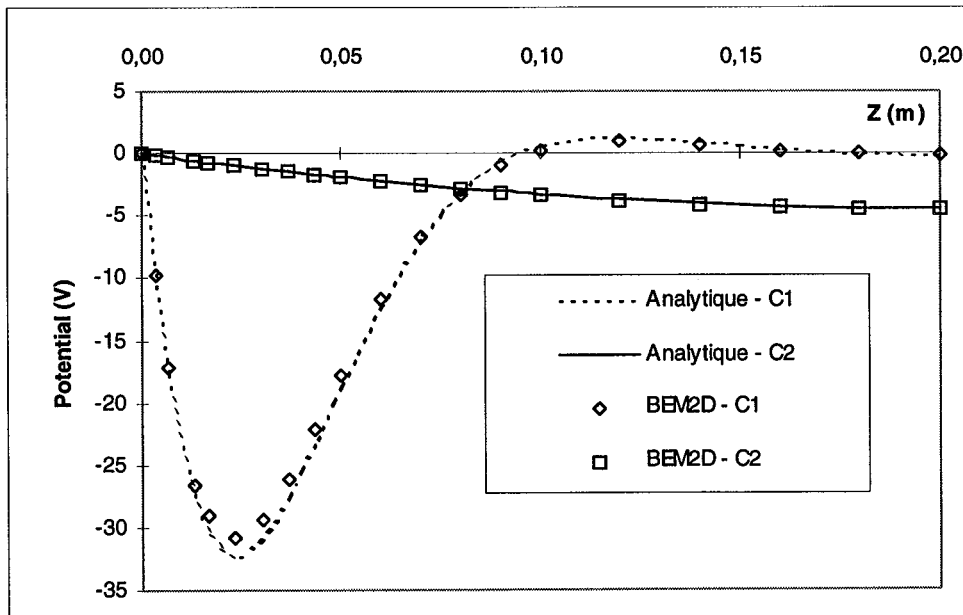


Fig. V.34 - Valeurs imaginaires du potentiel (problème A1)

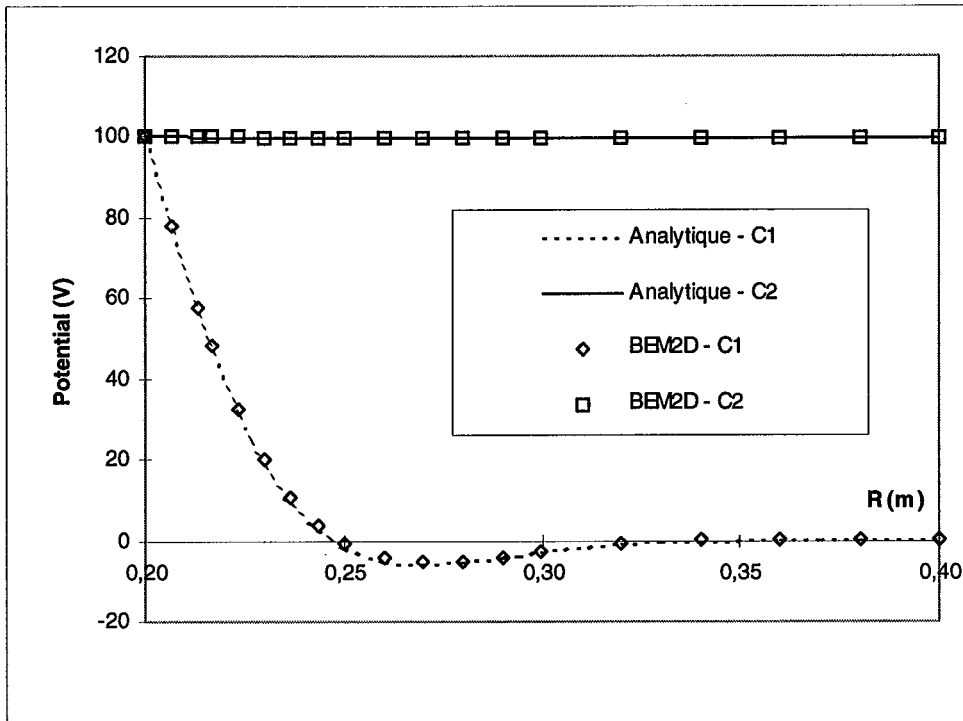


Fig. V.35 - Valeurs réelles du potentiel (problème A2)

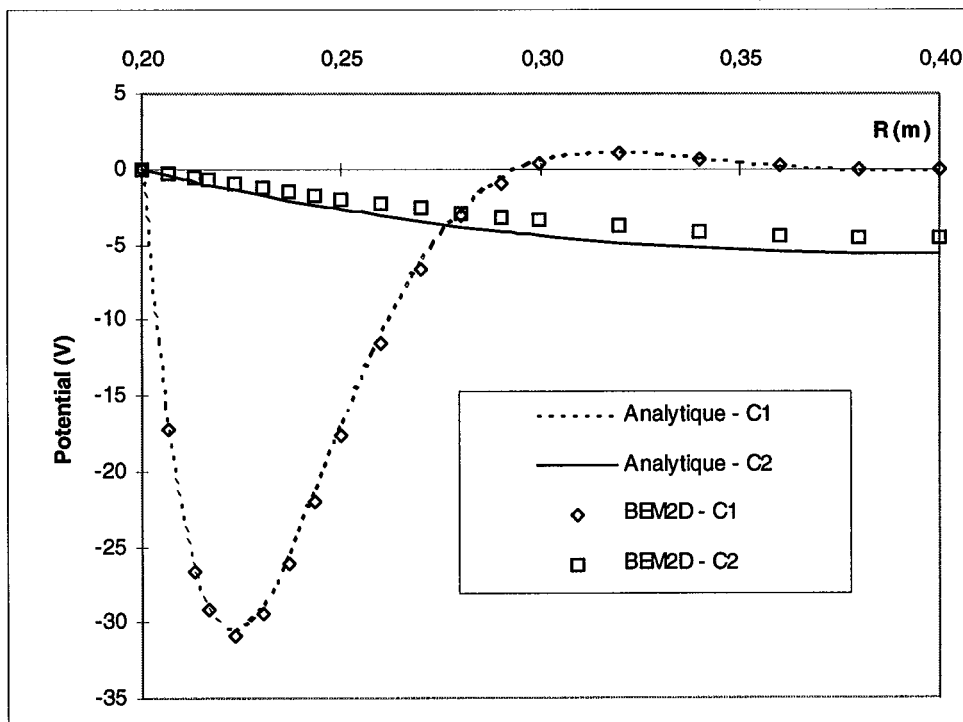


Fig. V.36 - Valeurs imaginaires du potentiel (problème A2)

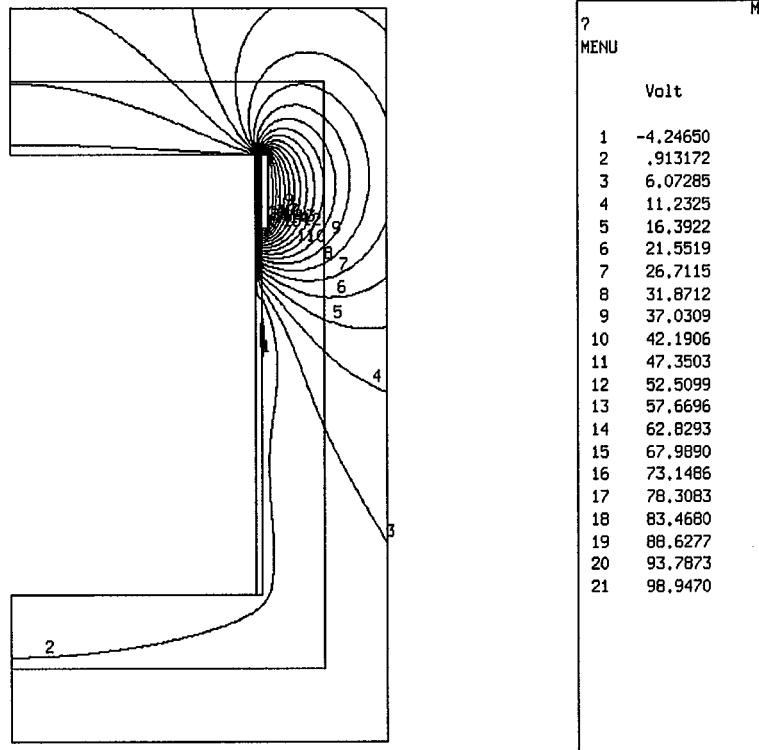


Fig. V.37 - Equipotentiellles pour le problème A1 (conductivité 1)

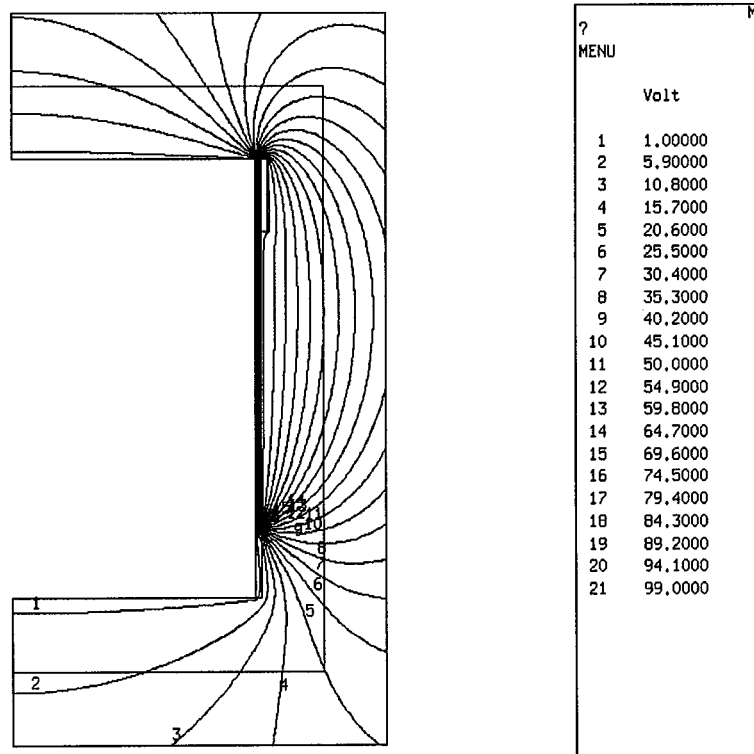


Fig. V.38 - Equipotentiellles pour le problème A1 (conductivité 2)



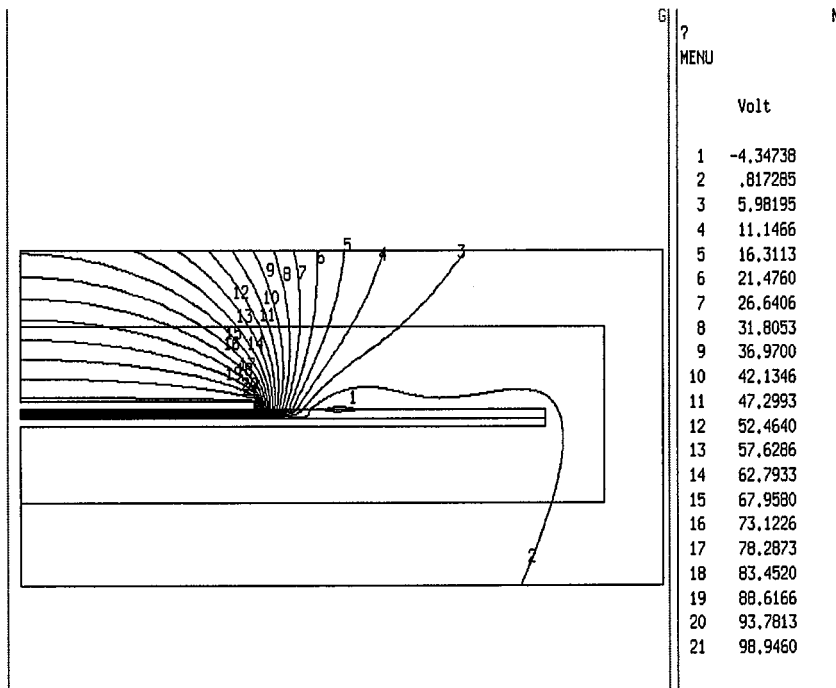


Fig. V.39 - Equipotentielles pour le problème A2 (conductivité 1)

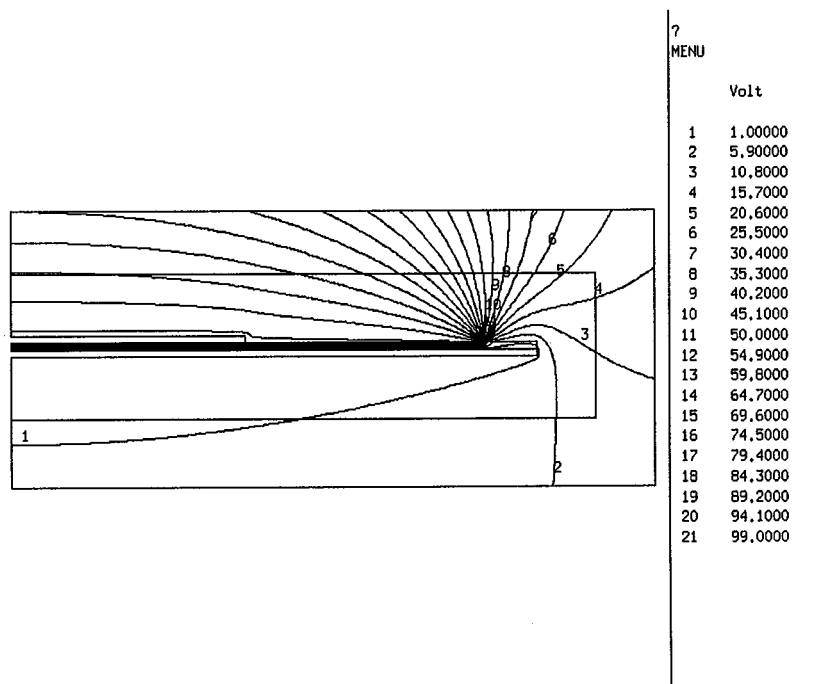


Fig. V.40 - Equipotentielles pour le problème A2 (conductivité 2)

### V.5.3 Conduction non linéaire

Dans le cas des problèmes de conduction non linéaire, la conductivité n'est plus une constante. Nous cherchons, comme dans le cas du problème 2D, une solution numérique à l'équation (V.39). Si  $t_1$  et  $t_2$  sont deux instants consécutifs de discrétisation,  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs des inconnues correspondantes, alors l'équation (V.39) devient

$$r \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial V_2}{\partial r} + r \sigma \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + \sigma \frac{\partial V_2}{\partial r} - r \frac{\varepsilon}{a} \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = 0 \quad (\text{V.46})$$

On multiplie cette équation par une famille de fonctions de projections  $W$  et on prend l'intégrale sur la longueur  $L$  de la surface conductrice.

$$\int_L r W \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial V_2}{\partial r} dr + \int_L r W \sigma \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} dr + \int_L \sigma W \frac{\partial V_2}{\partial r} dr - \frac{\varepsilon}{a} \int_L r W \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} dr = 0 \quad (\text{V.47})$$

Une intégration par partie du second terme de cette équation permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\varepsilon}{a} \int_L r W \left( \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \right) dr - \left[ r \sigma W \frac{\partial V_2}{\partial r} \right]_{P_1}^{P_3} + \int_L \sigma r \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial V_2}{\partial r} dr = 0 \quad (\text{V.48})$$

Les points  $P_1$  et  $P_3$  ont la même définition qu'en (§III.3.4). On découpe la longueur  $L$  en éléments finis quadratiques à une dimension et on utilise les fonctions d'interpolations définies en (§II.4.3). Sur un élément fini, considérant la fonction de projection  $W_m$ , l'équation (V.48) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{a} \int_{-1}^{+1} \left( r W_m \sum_{j=1}^3 N_j V_{2j} \right) \frac{\partial r}{\partial \mu} d\mu - \left[ r \sigma W_m \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} V_{2j} \right) \frac{\partial \mu}{\partial r} \right]_{\mu_1}^{\mu_3} \\ & + \int_{-1}^{+1} r \sigma \frac{\partial W_m}{\partial \mu} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \mu} V_{2j} \right) \frac{\partial \mu}{\partial r} d\mu = \frac{\varepsilon}{a} \int_{-1}^{+1} r W_m \left( \sum_{j=1}^3 N_j V_{1j} \right) \frac{\partial r}{\partial \mu} d\mu \end{aligned} \quad (V.49)$$

La remarque du paragraphe (IV.4.1) est aussi valable. L'équation (V.49) est d'abord assemblée sur les éléments et l'assemblage de toutes les matrices élémentaires permet de construire le système matriciel global dont la solution est la répartition du potentiel sur l'interface à l'instant  $t_2$ .

Pour les calculs, nous avons utilisé les trois conductivités du tableau (V.1). Pour chacune de ces conductivités, nous allons représenter l'évolution du potentiel en fonction du temps et en trois points  $P_1, P_2, P_3$ . Le premier est proche de l'électrode ( $z= 3,33 \text{ mm}$  pour le problème A1 et  $r=203,33 \text{ mm}$  pour le problème A2), le second est au milieu de la couche conductrice ( $z= 100 \text{ mm}$  pour le problème A1 et  $r=300 \text{ mm}$  pour le problème A2) et le troisième est proche de l'extrémité de la couche ( $z=196,67 \text{ mm}$  pour le problème A1 et  $r=396,67 \text{ mm}$  pour le problème A2). Comme dans le problème 2D, l'étude des conductivités 1 et 2 correspond au problème linéaire précédemment résolu. Nous allons le résoudre à nouveau avec les procédures de calcul du problème non linéaire. Quand le régime permanent est atteint, on compare la valeur maximale de la solution linéaire obtenue par la relation (V.24) avec la valeur maximale de la solution "non linéaire". Le tableau (V.2) donne la valeur numérique  $V_l$  de l'expression (V.20) et la valeur crête  $V_{nl}$  du régime permanent pour les trois points. La comparaison est faite en utilisant (V.21).

Les valeurs de ces tableaux indiquent qu'à conductivité constante, la résolution linéaire et la résolution "non linéaire" conduisent aux mêmes résultats. Pour la conductivité 3, nous

avons effectué une simulation durant trois périodes ( $T=60\text{ ms}$ ,  $V=10\text{ kV}$ ,  $f=50\text{Hz}$ ) et nous représentons le potentiel et la densité de courant au point  $P_4$ ,  $z=50\text{ mm}$  pour le problème A1 et  $r=250\text{ mm}$  pour le problème A2, (fig. V.41 à fig. V.44).

	Conductivité 1			Conductivité 2		
$z\text{ (mm)}$	3,33	100	196,67	3,33	100	196,67
$V_{réel}\text{ (V)}$	88,82	-2,77	0,29	99,99	99,88	99,84
$V_{imag}\text{ (V)}$	-9,70	0,26	0,09	-0,15	-3,36	-4,50
$V_l\text{ (V)}$	89,35	2,78	0,72	99,99	99,94	99,94
$V_{nl}\text{ (V)}$	89,19	Régime permanent non atteint		99,99	99,79	99,78
$\Delta v\text{ (x }1\text{E-3)}$	1,6			0	1,5	1,6

**Tableau V.3 - Problème A1**

	Conductivité 1			Conductivité 2		
$r\text{ (mm)}$	203,33	300	396,67	203,33	300	396,67
$V_{réel}\text{ (V)}$	88,76	-2,77	0,25	99,99	99,87	99,82
$V_{imag}\text{ (V)}$	-9,76	0,35	-0,09	-0,15	-3,39	-4,54
$V_l\text{ (V)}$	89,29	2,97	0,21	99,99	99,93	99,92
$V_{nl}\text{ (V)}$	89,13	Régime permanent non atteint		99,99	99,78	99,77
$\Delta v\text{ (x }1\text{E-3)}$	1,6			0	1,5	1,5

**Tableau V.4 - Problème A2**

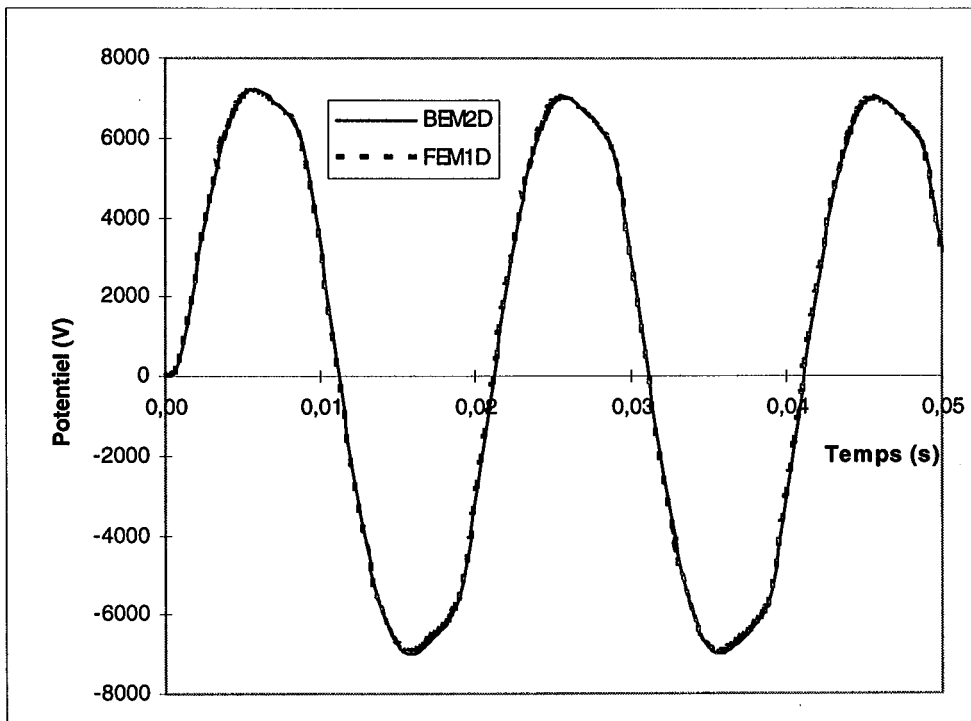


Fig. V.41 - Potentiel au point P<sub>4</sub> (Problème A1)

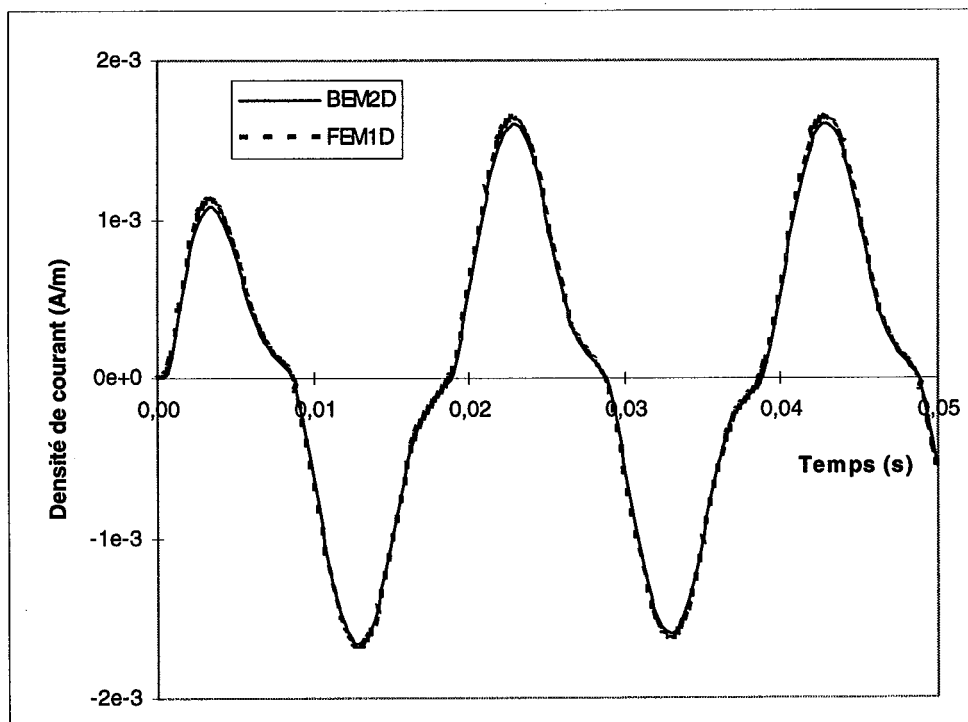


Fig. V.42 - Densité de courant au point P<sub>4</sub> (Problème A1)

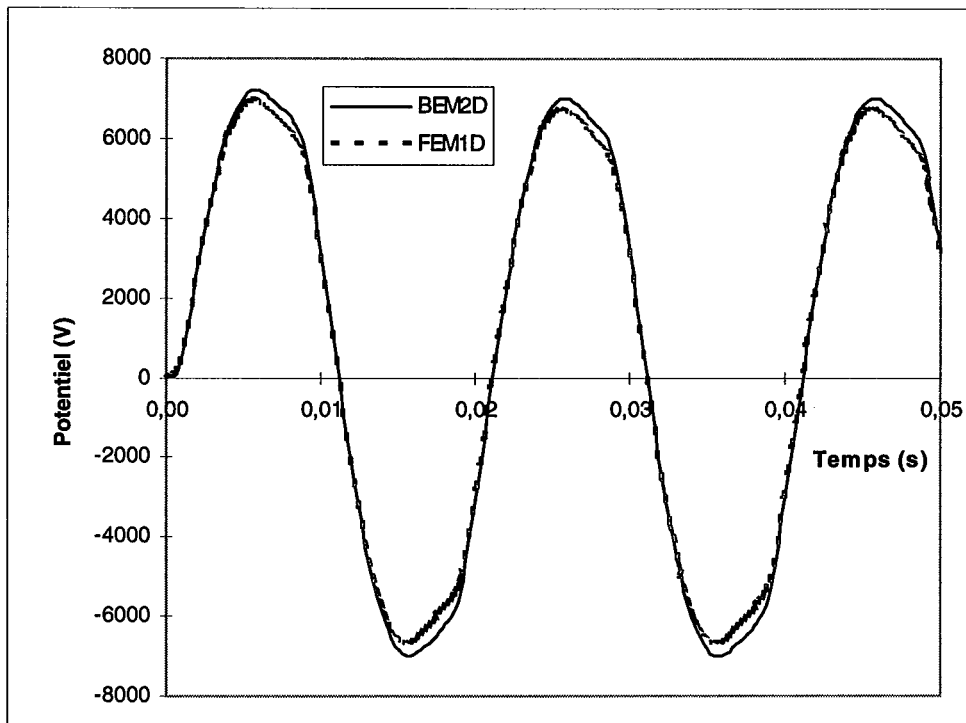


Fig. V.43 - Potentiel au point P<sub>4</sub> (Problème A2)

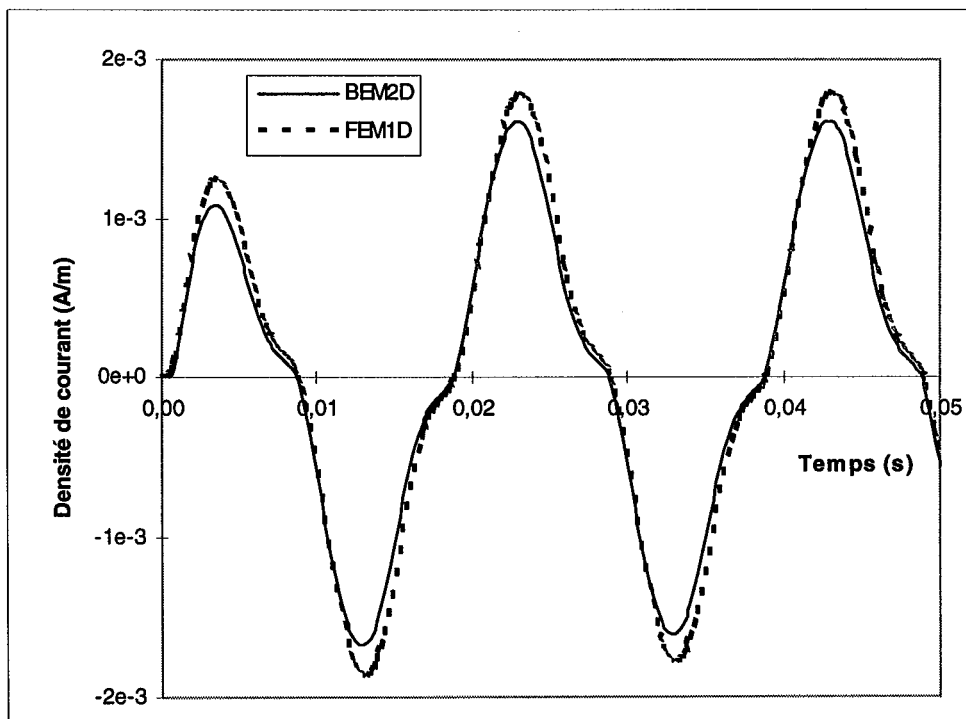


Fig. V.44 - Densité de courant au point P<sub>4</sub> (Problème A2)

Comme dans le problème 2D, les valeurs de la solution à une dimension et celles de BEM2D sont concordantes ; le régime transitoire, mieux perceptible sur les courbes de la densité de courant, dépend de la position du point d'observation ; les courbes du potentiel et de la densité de courant comportent une distorsion, caractéristique de la non linéarité.

## **V.6 CONCLUSION**

Pour valider le modèle de conduction surfacique et son implantation numérique, nous avons utilisé la solution d'une équation différentielle établie dans le cas d'une géométrie simple.

La solution analytique de l'équation différentielle a permis de vérifier les résultats de la résolution du problème dans le cas linéaire.

Dans le cas non linéaire, on a eu recours à une résolution numérique de l'équation différentielle.

## CONCLUSION

La présence d'une couche conductrice à la surface d'un isolant modifie la répartition des contraintes en tension. Pour déterminer la nouvelle répartition du potentiel, nous avons proposé un modèle qui caractérise la couche conductrice par une surface munie d'une conductivité, qui peut éventuellement dépendre du champ électrique (conductivité non linéaire). Notre étude s'est limitée aux problèmes 2D plan et tridimensionnels avec symétrie axiale. Les équations mathématiques qui caractérisent le modèle peuvent être résolues par des méthodes numériques. Nous avons choisi, pour notre part, la méthode des intégrales de frontière qui permet de se contenter d'une description surfacique des objets modélisés. Pour valider les résultats, nous avons utilisé l'équation différentielle obtenue dans le cas d'une géométrie simple. Pour le problème de conduction linéaire (conductivité constante), les résultats sont en accord avec la solution analytique. Dans le cas d'un problème de conduction non linéaire, notre modèle a été validé à l'aide de la solution numérique à une dimension de cette équation différentielle.

Nous avons par ailleurs pu vérifier l'utilité des couches non linéaires déposées pour uniformiser le champ électrique, par exemple sur les barres des machines et les traversées.

Il est nécessaire d'améliorer ce travail pour réduire les temps de calcul. Pour ce faire, il faudra notamment optimiser le facteur de relaxation, le pas d'échantillonnage et le critère de convergence. Il est aussi souhaitable que ce travail soit soutenu par une validation expérimentale.



## REFERENCES

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", Dover Publication Inc. New York, 1970.
- [2] B. Ancelle, "Emploi de la méthode des équations intégrales de frontière et mise en œuvre de la conception assistée par ordinateur dans le calcul des systèmes électromagnétiques", Thèse de doctorat, Grenoble, France, 1979.
- [3] O. W. Andersen, "Finite element solution of complex potential electric fields", IEEE transactions on power apparatus and systems, Vol. PAS-96, N° 4, July /August 1977, pp. 1156-1161.
- [4] D. Beatovic, P.L. Levin, S. Sadovic, R. Hutnak, "A Galerkin formulation of the boundary element method for two dimensional and axi-symmetric problems in electrostatics", 7<sup>th</sup> ISHVE, August 26-30, 1991.
- [5] K.J. Binns and P.J. Lawrenson, "Analysis and computation of electric and magnetic field problems", Pergamon Press ltd, 1973.
- [6] A. Bossavit, C. Emson, I. D. Mayergoyz, "Méthodes numériques en électromagnétisme", Editions Eyrolles, Paris, 1991.
- [7] C. A. Brebia, "The boundary element method for engineers", Pentech press, London, 1980.
- [8] G. Chavent, "Méthodes aux différences finies", Techniques de l'ingénieur, A550, 1993.
- [9] P. Claverie, Y. Porcheron, "Les phénomènes de pollution des isolateurs et l'isolement des ouvrages en régions polluées", R.G.E. tome 82 N°3, Mars 1973, pp. 166-183.
- [10] J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "Calcul des champs électromagnétiques", Techniques de l'ingénieur, D1, D3020, 1988.
- [11] J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadière, "CAO en électrotechnique", Hermes Publishings, Paris, 1985.
- [12] J. Daffe, R.G. Olsen, "An integral equation technique for solving rotationally symmetric electrostatic problems in conducting and dielectric material", IEEE Trans. on Power apparatus and systems, Vol.pas-98, N°5 Sept/Oct 1979, pp. 1609-1616.
- [13] J. A. De Vasconcelos, "Optimisation de forme des structures électromagnétiques", thèse de doctorat, école centrale de Lyon, Lyon, France, 1994.
- [14] M. Defourny, "Contraintes diélectriques, éléments de frontières, optimisation des isolations", Thèse, Université de Liège, 1987.

- [15] G. Dhatt, G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S. A. Editeur, Paris, 1984.
- [16] E. Durand, "Electrostatique", Masson et Cie, 1964.
- [17] H. A. El-Behairy, A. A. Dahab, L. A. Elzeftawy, "Effect of environmental contamination on the field distribution on polymer insulating material", 7<sup>th</sup> ISHVE, August 26-30, 1991.
- [18] M. M. El Sayed, A. H. Sedeek, O. El Gendy, H. Said, M. Awad, I. F. Hasshad, S. El-Debeiky, "Influence of sand storms on insulation failure of A.C. transmission lines", 9<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1995.
- [19] K. Feser, W. Köhler, D. Qiu, K. Chrzan, "Behavior of zinc oxide surge arresters under pollution", IEEE transactions on power delivery, Vol.6 N°2, April 1991, pp. 688-695.
- [20] G. Fournet, "Différents aspects de l'électromagnétisme", Techniques de l'ingénieur, D1, D1024, 1992.
- [21] R. Fournié, "Contraintes en service. Mise en oeuvre. Essais", Technique de l'ingénieur, D216, 1988.
- [22] P. Fursac, "Bobinages des machines tournantes", Techniques de l'ingénieur, D439, 1978.
- [23] S. Gopal, Prof. Y. N. Rao, "Flashover phenomena of polluted insulators", IEE Proceedings, Vol 131, Pt.C, N°4, July 1984, pp. 140-143.
- [24] Gopal H. G., G. R. Nagabhushana, "A circuit model to find the voltage and temperature distribution on the surface of a polluted insulator", 9<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1995.
- [25] S. M. Gubanski, J. G. Wankowicz, "Distribution of natural pollution surface layers on silicone rubber insulators and their UV absorption", IEEE Transaction on Electrical Insulation, Vol. 24 N° 4, August 1989, pp. 689-697.
- [26] M. Guillen, "Réalisation et validation d'un modèle numérique hybride basé sur la méthode des équations intégrales de frontière et la méthode des charges équivalentes pour le calcul des champs électriques tridimensionnels", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 1993.
- [27] Z. Haznadar, K. Sokolija, S. Sadovic, "Dynamic model of pollution flashover", 6<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1989.
- [28] Huang Q. S., "Applications nouvelles de la méthode des équations intégrales de frontière en électrotechnique", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 1987.
- [29] J. F. Imhoff, G. Meunier, X. Brunote and J.C. Sabonnadière, "An original solution for unbounded electromagnetic 2D and 3D problems throughout the finite element method", IEEE trans. on magnetics. Vol. 26 N° 5, September 1990, pp. 1659-1661.

- [30] Ph. Jouclar, "Postes sous enveloppes métalliques", Techniques de l'ingénieur, D4590.
- [31] Kaluzny A. J., Szewc B., Ptak J., "The modeling method evaluating the exploitation conditions of overhead H.V. insulators in polluted areas", 9<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1995.
- [32] S. Kato, H. Kokai, Y. Nakajima, T. Kouno, "Finite element method for the calculation of potentiel distribution to the porcelain insulator with semiconducting surface layer", 3<sup>th</sup> ISHVE, August 28-31, 1979.
- [33] L. Krahenbühl, "La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique", Thèse de doctorat - ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 1983.
- [34] J.O. Loberg, E.C. Salthouse, "Dry-band growth on polluted insulation" IEEE trans. EI. Vol. 6. N° 3 September 1971, pp. 136-141.
- [35] A. Mekhaldi, S. Bouazabia, "Conduction phenomena on polluted insulating surfaces under AC high voltages", 9<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1995.
- [36] A. R. Mitchell & R. Wait, "The finite element method in partial differential equations", John Wiley & sons, London, 1977.
- [37] A. Nicolas, "Application de la méthode des équations intégrales de frontière à la modélisation des phénomènes d'induction", thèse de docteur d'état, Ecole centrale de Lyon, Lyon, France, 1983.
- [38] R. G. Olsen, "Integral equations for electrostatics problems with thin dielectric or conducting layers", IEEE Transactions on Electrical Insulation, Vol. EI-21, August 1986, pp. 565-573.
- [39] M. R. Raghuevar, E. Kuffel, "Experimental and analytical studies of factors which affect flashover voltage of polluted insulation surfaces ", IEEE trans Pas 74, Jan/Feb 1974, pp. 312-320.
- [40] A. M. Rizk, "Modèles mathématiques du contournement des isolateurs sous pollution", Electra, Numéro 78, octobre 1981, pp. 71-103.
- [41] J. L. Rasolonjanahary, "Modélisation par la méthode des équations intégrales de frontière de phénomène de conduction surfacique sur les isolateurs pollués", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, 1992.
- [42] J. L. Rasolonjanahary, L. Krähenbühl, A. Nicolas, "Computation of electrical fields and potential on polluted insulators using a boundary elements method", IEEE transactions on magnetic, Vol. 28 N°2, March 1992, pp. 1473-1476.
- [43] Z. Renyu, Z. Deheng, W. Xiaotao, "Configuration effect on dc flashover on polluted insulators", IEEE Transaction on Electrical Insulation, Vol. 25 N° 3, June 1990, pp. 575-581.

- [44] J. C. Sabonnadière, G. Meunier, B. Morel, "Flux: a general finite elements package for 2D electromagnetic fields", *IEEE trans. On magnetics*, 18, pp. 411-415, 1982.
- [45] P. P. Silvester & R.L. Ferrari, "Finite element for electrical engineers", Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [46] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiss, "A charge simulation method for the calculation of high voltage fields", *IEEE trans. pass 93*, Sept - Oct 1974, pp. 1660-1668.
- [47] A. Skopec, J. G. Wankowicz, B. Sikorski, "Electrical field calculation for an axially-symmetric insulator with surface contamination", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 1 N° 2, April 1994, pp. 332-339.
- [48] G. Strang, G. J. Fix, "An analysis of the finite element method", Prentice-Hall, Inc, Englewood cleffs, N. J., 1973.
- [49] R. Sundararajan and R. S. Gorur, "Dynamic arc modeling of pollution flashover of insulators under dc voltage", *IEEE Transactions on electrical insulation*, Vol. 28, N° 2, April 1993, pp. 209-218.
- [50] R. Wilkins, "Flashover voltage of high-voltage insulators with uniform surface-pollution films", *Proc. IEE*, Vol. 116, N° 3, March 1969, pp. 457-465.
- [51] G. Zhicheng, D. Ying, C. Goushun, "The method to assess the withstand voltage of polluted insulator", 9<sup>th</sup> ISHVE, August 28-September 1, 1995.
- [52] Zienkiewicz, "La méthode des éléments finis", Ediscience, Paris, 1973.

## ANNEXES

### A.1 FORMULATION EN POTENTIEL VECTEUR

Dans la formulation en potentiel scalaire, l'inconnue est le potentiel scalaire électrique. Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  sera l'inconnue de la formulation en potentiel vecteur. Introduisons (II.7) et (II.9) dans (II.2a). On aura pour  $\mu$  constant :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{grad} V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$\mathbf{rot}(\mathbf{rot})$  est une identité connue :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

$$\text{Soit : } \Delta \mathbf{A} - \mathbf{grad} \left( \mathbf{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

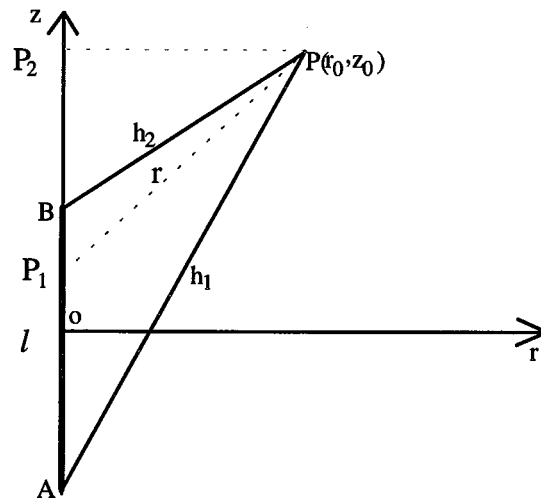
En utilisant la jauge de Lorentz (II.14) on obtient l'équation de Helmholtz pour le potentiel vecteur magnétique :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\text{avec } c^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$$

Cette équation régit la répartition spatiale et temporelle du potentiel vecteur magnétique dans un objet qui obéit aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

## A.2 POTENTIEL CREE PAR UN SEGMENT DE DROITE CHARGE



Soit  $dz$  un élément du segment chargé d'une densité linéique de charges  $\lambda$ . Cet élément crée un potentiel  $dV$  tel que:

$$dV = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon r}$$

le potentiel crée par tout le segment vaut

$$V = \int_{-l/2}^{+l/2} dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{r}$$

Dans le triangle  $P_1P_2P$ , on a:

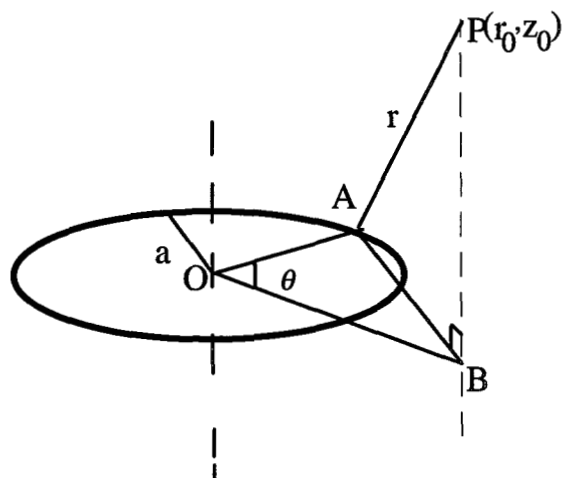
$$r = \sqrt{r_0^2 + (z_0 - z)^2}$$

$$\text{posons } Z = z_0 - z$$

$$\text{soit } V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{z_0+l/2}^{z_0-l/2} \frac{dz}{\sqrt{r_0^2 + Z^2}}$$

$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left( \frac{2(z_0 + h_2) - l}{2(z_0 + h_1) + l} \right)$$

### A.3 POTENTIEL CREE PAR UN ANNEAU CHARGE



Soit  $dl$  un élément de l'anneau

$$dl = a d\theta$$

cet élément crée au point P un potentiel  $dV$  tel que

$$dV = \frac{\lambda a d\theta}{4\pi\epsilon r}$$

le potentiel crée par tout le segment vaut

$$V = \int_{-1/2}^{+1/2} dV = \frac{a\lambda}{4\pi\epsilon} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r}$$

Dans le triangle OAB on a

$$[AB]^2 = [OB]^2 + [OA]^2 - 2[OB] * [OA] * \cos\theta = a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\theta$$

Dans le triangle ABP on a:

$$[AP]^2 = [AB]^2 + [BP]^2 \Rightarrow r = z_0^2 + a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\theta$$

$$V = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{z_0^2 + a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\theta}}$$

Cette fonction est paire et on peut faire l'intégrale sur la moitié de l'intervalle. Posons aussi

$$\theta = \pi - 2\phi$$

$$V = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{z_0^2 + (a + r_0)^2 - 4ar_0 \sin^2 \phi}}$$

$$\text{en posant } r_1^2 = z_0^2 + (a + r_0)^2$$

$$\text{et } k^2 = \frac{4ar_0}{r_1^2}$$

le potentiel s'écrit sous la forme

$$V = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon r_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon r_1} K(k^2)$$

$K(k^2)$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce.



#### A.4 FORMULATION DE GREEN

Reprenons l'expression (III.34) et faisons la projection des termes **grad** sur la normale de la limite  $\Gamma$ . On obtient alors :

$$\iiint_{\Omega} V \Delta G dv = \iiint_{\Omega} G \Delta V dv + \iint_{\Gamma} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma$$

$G$  est une fonction de Green du Laplacien

$$\Delta G = \delta$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. On montre [16] que :

$$\iiint_{\Omega} V \Delta G dv = V \iiint_{\Omega} \Delta G dv$$

En remplaçant le laplacien par **div.grad** l'équation précédente peut s'écrire

$$\iiint_{\Omega} V \Delta G dv = V \iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma$$

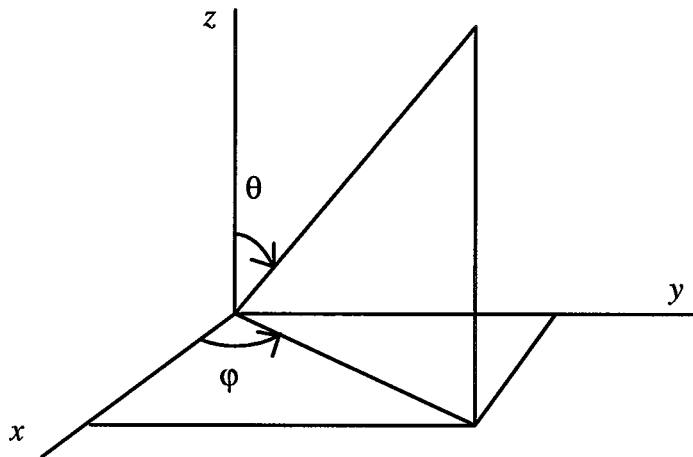
le terme  $\iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma$  est proportionnel à l'angle solide sous lequel le point  $P$  voit le contour  $\Gamma$ .

Posons  $c_p = \iint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma$ , l'équation (III.34) devient

$$c_p V = \iiint_{\Omega} G \Delta V dv + \iint_{\Gamma} \left( V \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\gamma$$

### A.5 CALCUL DE L'INTEGRALE $\int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma$

Dans le cas tridimensionnel,  $\Gamma_2$  est une sphère de rayon  $r$ .



$$G = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\mathbf{nr}}{4\pi r^3}$$

Avec les notations de la figure ci dessus, on a:

$$d\gamma = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\text{donc } \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial n} d\gamma = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{r}{r^3} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

**Titre :**

Modèle numérique de conduction surfacique dans les dispositifs bidimensionnels. Prise en compte de non-linéarités.

*Numerical model of surface conduction in 2D HV devices - Taking into account of non-linearity*

**Mots clés :**

Haute-tension ; conduction de surface ; pollution ; non-linéaire ; équations intégrales de frontière ;

**Résumé :**

Certains dispositifs électrotechniques présentent une couche de faible conductivité et de faible épaisseur qui modifie considérablement les répartitions des potentiels et des champs électriques. Cette situation se rencontre, par exemple, dans l'étude des isolateurs pollués ou des traversées comportant un revêtement semi-conducteur. La zone conductrice a une épaisseur très faible devant les autres dimensions du système et il est difficile d'en tenir compte, telle quelle, dans une méthode numérique. Ce travail est consacré à la modélisation (2D et 3D axisymétrique) d'une couche conductrice présente à l'interface de deux diélectriques. Celle-ci est simulée par une surface munie d'une conductivité surfacique qui peut dépendre ou non du champ électrique. Les équations qui caractérisent le modèle ont été implantées dans un logiciel de calcul de champ basé sur la méthode des équations intégrales de frontière.

Le premier chapitre décrit les divers phénomènes physiques liés à la présence d'une couche conductrice entre deux isolants. Le second chapitre rappelle d'abord les résultats très classiques sur les équations de Maxwell. Ensuite, il établit une équation de conservation de l'électricité au niveau de la zone conductrice. Le troisième chapitre passe en revue les différentes méthodes numériques généralement utilisées en électrotechnique. Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique. Le cinquième chapitre présente les résultats et la validation du nouveau module logiciel. Les résultats obtenus, dans le cas d'une configuration simplifiée, sont en accord avec la solution analytique (problème linéaire) et la solution numérique (problème non linéaire).

---

**Direction de recherche :**

Ph.. Auriol, Professeur des Universités

F. Buret, Maître de Conférence – Francois.Buret@ec-lyon.fr – <http://www.ampere-lab.fr>

Laboratoire Ampère - UMR CNRS n° 5005

Ecole Centrale de Lyon – 69134 Ecully Cedex – France – <http://www.ec-lyon.fr>