



Caractérisation numérique et expérimentale du champ magnétique B.F. généré par des systèmes électrotechniques en vue de la modélisation des courants induits dans le corps humain

Riccardo Scorretti

► To cite this version:

Riccardo Scorretti. Caractérisation numérique et expérimentale du champ magnétique B.F. généré par des systèmes électrotechniques en vue de la modélisation des courants induits dans le corps humain. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2003. Français. NNT : . tel-00140131

HAL Id: tel-00140131

<https://theses.hal.science/tel-00140131>

Submitted on 5 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE de LYON

par

Riccardo Scorretti

CARACTÉRISATION NUMÉRIQUE ET
EXPÉRIMENTALE DU CHAMP MAGNÉTIQUE
B.F. GÉNÉRÉ PAR DES SYSTÈMES
ÉLECTROTECHNIQUES EN VUE DE LA
MODÉLISATION DES COURANTS INDUITS
DANS LE CORPS HUMAIN

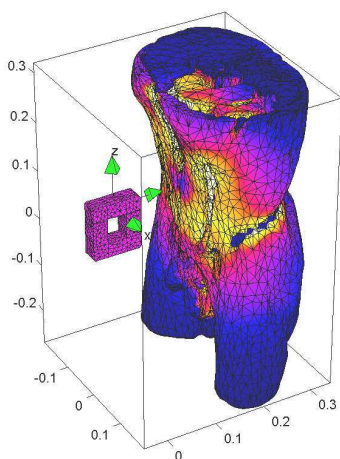
*soutenue le 11 décembre 2003
devant la commission d'examen :*

MM.

J.-L. Coulomb
A. Kost
J.-P. Masson
M. Nadi
I. Magne
N. Burais

Professeur - LEG
Professeur - BTU
Professeur - CEGELY
Professeur - LIEN
Ingénieur - EDF DER
Maître de conférence - CEGELY

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Président
Examineur
Examineur



à Edith Dahan, et sa famille

La liste des personnes qui m'ont été proches, et qui d'une manière ou d'une autre m'ont aidé tout le long de ma thèse, est beaucoup trop longue pour que je la reporte ici. Cependant, il y a certaines personnes que je tiens absolument à mentionner : il s'agit de Mme Edith Dahan et de sa famille.

Lorsque je suis arrivé en France en novembre 2000, je me trouvais dans une bien triste situation, tant sur le plan financier que du point de vue personnel. C'est à ce moment qu'Edith m'a accueilli dans sa propre famille. Elle a été pour moi une seconde mère. Elle m'a logé, nourri et écouté lorsque j'avais besoin de me confier.

Sans elle, je ne sais pas si j'aurais été capable de porter à terme cette thèse.

Riccardo Scorretti

*Thinking is the hardest work there is,
which is probably the reason why so few
engage in it.*

Henry Ford

Table des matières

Introduction générale	1
1 Champs et santé : entre inquiétudes et questions ouvertes	3
1.1 Introduction	3
1.2 Interactions entre les champs électromagnétiques et les systèmes vivants	4
1.2.1 Applications médicales	4
1.2.2 Études épidémiologiques	6
1.2.3 Études de nature biologique	7
1.2.4 Conclusion	8
1.3 Le contexte normatif	8
1.3.1 Un peu d'histoire	8
1.3.2 Le standard IEEE C95.1-1999	9
1.3.3 Les recommandations ICNIRP du 1998	11
1.3.4 Les enjeux pour l'industrie électrique	16
1.4 Conclusions	19
2 Modélisation des champs de fuite par voie numérique	21
2.1 Introduction	21
2.2 Étude préliminaire des champs de fuite	21
2.2.1 Décroissance en fonction de la distance	25
2.2.2 Influence de l'épaisseur des entrefers	29
2.2.3 Influence de la perméabilité	32
2.2.4 Modélisation 2D ou 3D ?	35
2.3 Vers une modélisation simplifiée	40
2.3.1 Représentations du champ réduit	40
2.3.2 Première modélisation à travers les charges fictives	43
2.4 Modèle des réluctances généralisé (MRG)	46
2.4.1 Modélisation des fuites	46
2.4.2 L'équation du flux à travers les sections	48
2.4.3 Formulation matricielle	49
2.4.4 Implémentation numérique	50
2.5 Applications	52
2.5.1 Le système rayonnant avec entrefer	52
2.5.2 Le transformateur cuirassé (B)	54
2.5.3 Influence du nombre de sections N_S	57
2.6 Prise en compte explicite du théorème d'Ampère	59
2.6.1 Application au système avec entrefer	62
2.6.2 Application au transformateur cuirassé (B)	63
2.7 Conclusions	65

3	Modélisation des champs de fuite avec une démarche expérimentale	69
3.1	Introduction	69
3.2	Caractérisation expérimentale des fuites	69
3.2.1	Modèles de fuites	70
3.2.2	Comparaison avec le cas statique	71
3.3	Réalisation du système de mesure	72
3.3.1	Choix et réalisation du capteur	73
3.3.2	Le système d'acquisition	77
3.3.3	Le système de positionnement	81
3.3.4	Validation du système de mesure	82
3.4	Modèles dipolaires	84
3.4.1	Estimation d'un dipôle équivalent	84
3.4.2	Estimation d'une spire équivalente	87
3.5	Le modèle multipolaire	91
3.5.1	Définition et propriétés des multipôles	91
3.5.2	Choix optimal du centre du développement	93
3.5.3	Influence des points de mesure	99
3.5.4	Prise en compte du bruit	104
3.6	Premières applications à des dispositifs réels	110
3.6.1	Le transformateur cuirassé	110
3.6.2	La bobine à noyau de fer 3D (C)	112
3.7	Conclusions	112
4	Modélisation des phénomènes induits dans le corps humain	115
4.1	Introduction	115
4.2	Spécificités de la modélisation dans la matière vivante	116
4.2.1	Absence d'une échelle spécifique	116
4.2.2	Les propriétés électriques	117
4.2.3	Formulation quasi-statique ou propagation d'onde?	117
4.2.4	Difficulté de l'expérimentation <i>in vivo</i>	118
4.3	Modélisation des phénomènes induits basses fréquences	118
4.3.1	Systèmes haute tension, faible courant	119
4.3.2	Systèmes basse tension, fort courant	120
4.4	Formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$	122
4.4.1	Formulation forte	123
4.4.2	Formulation faible	123
4.4.3	Résolution	125
4.4.4	Validation	125
4.5	Premières applications	128
4.5.1	Influence de la décroissance du champ	131
4.5.2	Le rôle de l'hétérogénéité	133
4.5.3	Exemple d'application à un dispositif réaliste	135
4.5.4	Applications dans un contexte normatif	138
4.6	Conclusion	139
	Conclusion	141
A	La législation italienne en matière de protection contre les radiations non-ionisantes	143

B	Calcul d'inducteurs filaires par Biot-Savart, et autres calculs techniques	145
B.1	Champ généré par un fil rectiligne de longueur finie	145
B.2	Champ généré par une spire circulaire	145
B.3	Calcul d'inducteurs massifs	146
B.4	Calcul d'intégrales de la forme $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$	147
B.4.1	Calcul de $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$ sur un rectangle	147
B.4.2	Calcul de $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$ sur un triangle	148
B.5	Champ généré par une distribution surfacique rectangulaire . . .	150
C	Grandeurs électriques de quelques tissus du corps humain entre 10 Hz et 100 kHz	153
	Références	157

Sommaire des rappels

Formulations quasi-statiques	23
Méthodes numériques en électromagnétisme	37
Les multiplieurs de Lagrange	62
Élaboration numérique du signal	79
Algorithmes d'optimisation	96
Méthodes de régularisation	100
Estimation par maximum de vraisemblance	104
La méthode des impédances	122
La méthode du Gradient Conjugué	126

Préambule

J'ai souhaité ce mémoire le plus simple possible à lire. J'ai choisi de réserver une grande place sur le bord extérieur de chaque page pour les annotations, les renvois, et des explications complémentaires du texte, afin de ne pas l'alourdir excessivement.

Pour la même raison, je n'ai pas voulu rédiger de longues parties entièrement consacrées à des rappels théoriques - ce qui serait, à mon avis, écrire des mauvais résumés de bon livres. À la place, j'ai préféré présenter seulement les *idées principales* qui permettent de suivre le fil du raisonnement, sans trop rentrer dans les détails : le lecteur plus intéressé pourra utiliser les nombreuses références. Pour faciliter la lecture "en diagonale", ces parties de synthèse bibliographique se glissent au milieu du texte principal sous la forme d'encadrés en double colonne. J'ai choisi cette solution pour faire en sorte que le lecteur trouve ces rappels là où il peut avoir envie de les lire, sans pour autant interrompre la lecture du texte principal.

J'ai réservé les annexes pour des parties techniques plus détaillées ou des approfondissements, qui ne peuvent trouver leur place dans un encadré à cause de leur plus grande complexité, mais surtout parce qu'ils n'ont pas pour vocation de faciliter la lecture du texte principal.

Notations

Ici sont énumérés tous les symboles utilisés dans la suite. Les symboles soulignés indiquent des grandeurs complexes en régime harmonique.

SYMBOLE	SIGNIFICATION
$\vec{E}$	champ électrique
$\vec{H}$	champ magnétique
$\vec{H}_0$	champ magnétique généré par un système inducteur dans le vide (champ d'excitation)
$\vec{H}_{red} = \vec{H} - \vec{H}_0$	champ magnétique réduit par rapport au champ d'excitation
$\vec{H}_{mes}$	champ magnétique mesuré
$\vec{H}_{co}$	champ magnétique généré par une spire
$\vec{H}_{MP}$	champ magnétique généré par un multipôle
$\vec{B}$	induction magnétique
$\vec{B}_0$	induction magnétique générée par un système inducteur dans le vide (champ d'excitation, par abus du langage)
$\vec{B}_{red} = \vec{B} - \vec{B}_0$	induction magnétique réduite par rapport au champ d'excitation
$\vec{D}$	induction électrique
$\vec{M}$	aimantation
$\langle \vec{M} \rangle = \iiint_{\Omega} \vec{M} d\Omega$	moment magnétique équivalent
$\vec{m}$	moment de dipôle magnétique
$\vec{A}$	potentiel vecteur magnétique
$\vec{T}$	potentiel vecteur électrique
ϕ	potentiel scalaire (électrique ou magnétique), flux magnétique
ψ	potentiel scalaire magnétique réduit
ε	permittivité
μ	perméabilité magnétique (absolue ou relative), ou écart type
μ_0	perméabilité magnétique dans le vide
μ_r	perméabilité magnétique relative
μ_{ch}	perméabilité magnétique de la charge
μ_{no}	perméabilité magnétique du noyau
$j = \sqrt{-1}$	unité imaginaire
$\omega = 2\pi f$	pulsation
I	courant
NI	nombre d'Ampère-tours
$\mathcal{R}_{air}$	réluctance du tube de flux dans l'air
$\mathcal{R}_{FE}$	réluctance du tube de flux dans le matériel magnétique
S	section du tube de flux, ou surface d'une section
Ξ	
P	puissance rayonnée

SAR	taux d'absorption spécifique
$\vec{J}$	densité de courant
$\vec{J}_s$	densité de courant (terme source)
$\vec{J}_i$	densité de courant induit
$\vec{J}_c$	densité de courant de conduction
$\vec{J}_d$	densité de courant de déplacement
$\vec{J}_{FE}$	densité de courant calculée avec la méthode des éléments finis
J_{max}	intensité maximale de la densité de courant
J_{moy}	intensité moyenne de la densité de courant
$\mathcal{J}$	fonction de coût
$\underline{Z}$	impédance
f	fréquence
T	période
T_e	période d'échantillonnage
t	temps
s_{ref}	signal mesuré par le capteur de référence
s_{mes}	signal mesuré par le capteur de mesure
Δt	largeur de la fenêtre temporelle, ou décalage temporel
Σ	section équivalente au corps humain
σ	conductivité, valeur singulière, écart type
ρ	densité de charge, ou distance du centre dans le plan xy
R	rayon, ou rapport de transduction $\frac{K}{G}$ (cf. pag. 83)
Ω	région volumique, ou domaine de résolution
$\Gamma = \partial\Omega$	frontière de la région volumique Ω
Γ_{lat}	frontière latérale d'un élément du circuit magnétique
Ξ	section transverse d'un élément du circuit magnétique
$\vec{n}$	vecteur de norme unitaire normale à Γ orienté vers l'extérieur
Ω_m	région volumique magnétique où $\vec{J} = 0$
Ω_c	région volumique conductrice ($\sigma \neq 0$)
$\Omega_s = \Omega - \Omega_m$	complément de Ω_m par rapport à Ω
Λ	parcours fermé à l'intérieur de Ω_m
$\vec{r}$	vecteur position
$r = \ \vec{r}\ $	longueur du vecteur position
d	demi-longueur du fil rectiligne
h	épaisseur d'entrefer
α	paramètre de régularisation
$\varpi = \iint_{\Gamma} \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} d\Gamma$	angle solide
N	ordre d'un multipôle, ou nombre de points d'un signal échantillonné
N_S	nombre de sections $\Xi_{1...N_S}$ du circuit magnétique
N_P	nombre de mesures

$N_k(x, y, z)$	fonctions d'interpolation
σ^*	densité surfacique de charges fictives (potentiel de simple couche)
τ	densité surfacique de dipôles fictifs (potentiel de double couche)
Φ	flux magnétique à travers une section Ξ
Φ_0	flux magnétique à travers une section Ξ généré par le système inducteur dans le vide (cf. éq. 2.53)
Φ_{ch}	flux magnétique à travers une section Ξ généré par les charges fictives (cf. éq. 2.54)
$\Delta\Phi$	flux magnétique qui globalement entre dans un élément du circuit magnétique (cf. éq. 2.45)
Q	quantité de charge fictive à l'intérieur d'un élément
Q_S	quantité de charge fictive sur la surface d'un entrefer
Φ	vecteur des flux à travers les sections Xi
Φ_0	vecteur des flux à travers les sections Xi par le seul système inducteur dans le vide
I	matrice identité
$K(k)$	intégrale elliptique de première espèce (cf. éq. B.9)
$E(k)$	intégrale elliptique de deuxième espèce (cf. éq. B.10)
K	coefficient de transduction (cf. pag. 81)
G_1, G_2	gains des amplificateurs intégrateurs
$C_{xy}(\tau)$	fonction d'intercorrélation
$\hat{C}_{xy}(\tau)$	fonction d'intercorrélation estimée
$C_{xx}(\tau)$	fonction d'autocorrélation
$\hat{C}_{xx}(nT_e)$	fonction d'autocorrélation approchée
$\delta(t)$	impulsion de Dirac
$\sqcup_T(t) = \sum_k \delta(t + kT)$	peigne de Dirac
P_x	puissance moyenne du signal
φ	azimuth
θ	zenith
$P_n^m(x)$	fonctions associées de Legendre (cf. pag. 98)
$Y_n^m(\theta, \varphi)$	fonctions harmoniques sphériques (cf. pag. 98)
C_n^m	coefficients du développement multipolaire
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	distribution gaussienne de moyenne μ et écart type σ
$p(x)$	fonction densité de probabilité
$\mathcal{E}[x]$	valeur attendue de la variable x
$\text{var}[x]$	variance de la variable x
$\hat{x}_{MV}$	estimation à plus grande vraisemblance de x
w	fonction de pondération
$\chi[]$	facteur d'erreur

“I have tried to avoid long numerical computations, thereby following Riemann’s postulate that proofs should be given through ideas and not voluminous computations”

David Hilbert

Introduction générale

Nous vivons dans un environnement électromagnétique. Dans la vie de tous les jours nous sommes exposés en permanence à des champs électromagnétiques d’origine naturelle, mais aussi artificielle ; ces derniers résultant de l’utilisation toujours croissante de l’énergie électrique. Ceci soulève des questions sur les éventuels effets de l’exposition à ces champs sur la santé humaine.

L’exposition à des champs électromagnétiques basse fréquence induit la circulation de courants dans le corps humain. Il est bien établi que ces courants provoquent des effets mineurs (réversibles) d’ordre visuel à partir d’une densité de courant J de 100 mA m^{-2} . Pour des fréquences élevées, l’exposition à des champs se traduit par un réchauffement de la partie du corps exposée.

Ces effets à court terme sont relativement connus ; en revanche, il n’y a pas de consensus de la part de la communauté scientifique sur les effets à long terme, et ceci en dépit des nombreuses études menées depuis plus de 30 ans.

Le “risque électromagnétique” a été très médiatisé dans ces dernières années. Les gouvernements sont en train de revoir à la baisse les limites d’exposition, sur la base du principe de précaution. En basse fréquence, ces limites, qui portent sur l’induction magnétique B et la densité de courant J , ont été définies sur la base de seuils biologiques et de calculs analytiques simples, avec des coefficients de sécurité.

La mesure de l’induction B seule ne suffit pas pour quantifier le niveau des courants induits car B varie rapidement en proximité de la source rayonnante (où l’exposition est la plus élevée) mais aussi à cause de la complexité intrinsèque du corps humain. D’un autre côté, la densité de courant induit J n’est pas directement mesurable à l’intérieur du corps humain.

Il est donc nécessaire de disposer d’outils suffisamment précis pour calculer la densité de courant J dans le corps humain en présence de sources électromagnétiques. De tels travaux ont été réalisés pour des hautes fréquences, sous l’impulsion du récent développement de la téléphonie mobile.

Dans ce contexte, ce travail de thèse est donc consacré au développement de modèles et outils numériques permettant la simulation en basse fréquence (50 Hz – 100 kHz) des phénomènes induits dans le corps humain.

Dans le premier chapitre nous avons voulu bien situer le contexte de mon étude, en commençant par identifier les systèmes rayonnants industriels et domestiques. Nous avons passé en revue la bibliographie existante sur le thème “champs et santé”, avec une attention particulière pour les effets biologiques. Nous avons ensuite présenté et comparé deux propositions normatives récentes : les recommandations du comité ICNIRP (1998) et celles du groupe de travail IEEE-C95.1 (1999). De cette analyse il apparaît l’existence de deux probléma-

CHAPITRE UN

tiques :

- déterminer la répartition du champ rayonné par un appareil électrique (champ de fuite)
- calculer les courants induits qui en résultent dans le corps humain

CHAPITRE DEUX

Après avoir étudié l'influence de divers paramètres sur la variation spatiale du champ de fuite, nous avons recensé les méthodes numériques aptes à calculer ce champ pour des systèmes *connus*. Cette étude montre que ces méthodes en l'état ne sont pas adaptées au calcul des champs dans l'air, car trop coûteuses.

Nous présentons donc un modèle 3D ne prenant en compte que les aspects essentiels de la géométrie du système, beaucoup moins coûteux et suffisamment précis. Dans ce modèle, qui s'inspire du concept de circuit magnétique, le champ dans l'air est calculé à partir d'une représentation en termes de charges magnétiques fictives. Ce modèle a été validé sur des structures géométriques simples, de type bobine + circuit magnétique (+ entrefer).

CHAPITRE TROIS

Cependant, dans la réalité l'exposition aux champs en milieu industriel ou domestique est souvent due à des sources dont la structure est *inconnue*. Nous avons donc développé un système expérimental, dans l'objectif de connaître le champ en n'importe quel point à partir d'un nombre minimum de mesures localisées. Pour ceci nous avons développé divers modèles de la source rayonnante s'appuyant sur les notions de dipôle et multipôle.

Nous nous sommes consacrés aux divers problèmes d'estimation (influence du choix des mesures, prise en compte du bruit). Le problème étant mal conditionné, nous avons été amenés à mettre en œuvre des techniques de régularisation. La faisabilité a été démontrée sur des structures rayonnantes simples.

CHAPITRE QUATRE

Enfin, nous présentons dans le chapitre quatre une formulation 3D adaptée pour calculer les courants induits dans le corps humain, à partir de la connaissance des champs de fuite. Cette formulation a été implémentée dans un code aux éléments finis, dans lequel le domaine de résolution est limité au seul corps humain : ceci permet de modéliser ce dernier avec des géométries simples, mais aussi avec des structures anatomiques réalistes où les valeurs des conductivités des divers organes sont prises en compte.

Différentes situations d'exposition du corps aux rayonnements issus de sources simples filaires, et à des sources plus réelles ont pu être ainsi simulées, et les applications dans un contexte normatif et industriel sont particulièrement importantes.

“L’électrotechnique est une matière difficile, car les champs on ne les voit pas. Et lorsque on les voit, c’est trop tard !”

Augustin Moraru

1

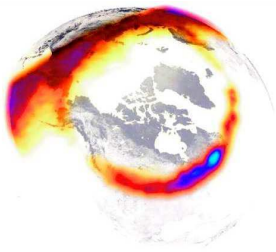
Champs et santé : entre inquiétudes et questions ouvertes

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présentons la problématique des interactions entre les champs électromagnétiques et le corps humain. À l’heure actuelle les effets des champs électromagnétiques sur la santé sont très méconnus : si l’existence d’effets à court terme est prouvée, les mécanismes physiques à travers lesquels ces effets ont lieu demeurent en grande partie inexpliqués. Ceci n’empêche pas que les champs électromagnétiques soient utilisés à des fins diagnostiques (par exemple l’IRM) et thérapeutiques (magnétothérapie, hyperthermie)... en revanche, les connaissances sur les effets à long terme sont beaucoup plus incertaines. En particulier, les champs basse fréquence seraient mis en cause pour une éventuelle relation avec certains types de leucémie infantile.

Nous avons d’abord exposé les résultats des différentes études épidémiologiques et biologiques sur l’interaction entre les champs électromagnétiques et les systèmes vivants. Ces résultats sont controversés, et ont donné lieu à des prises de position différentes sur la dangerosité des champs. Ceci est l’une des difficultés qui s’oppose à la définition de normes industrielles en matière de protection contre les radiations non-ionisantes.

Nous avons ensuite présenté et comparé deux propositions normatives : les recommandations du comité international ICNIRP, et celles du groupe de travail C95 de IEEE. Ces deux propositions adoptent substantiellement la même démarche, qui est basée sur une *double voie* pour les situations d’exposition volontaire (dans un cadre professionnel) et non volontaire (grand public). Enfin, nous avons résumé (en annexe) l’évolution de la législation italienne, car elle est un exemple très représentatif des difficultés et des contradictions du contexte actuel.



L'aurore boréale (ici vue de l'espace) est une manifestation très spectaculaire du champ magnétique terrestre : c'est grâce à celui-ci que le plasma en provenance de l'espace accélère et parvient ainsi à ioniser les atomes de la ionosphère.

1.2 Interactions entre les champs électromagnétiques et les systèmes vivants

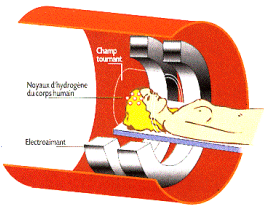
Nous vivons dans un environnement électromagnétique : nous sommes exposés en permanence à des champs électromagnétiques naturels, mais aussi artificiels (tab. 1.1).

Le champ électrique naturel est de l'ordre de $100\text{--}200\text{ V m}^{-1}$, mais il peut atteindre des valeurs de l'ordre de 10 kV m^{-1} pendant un orage. Le champ magnétique terrestre est d'environ $50\text{ }\mu\text{T}$. Ces champs naturels sont essentiellement des champs statiques, alors que la plupart des champs d'origine artificielle sont alternatifs.

Les mécanismes à travers lesquels l'interaction entre les champs magnétiques et les systèmes vivants a lieu dépendent de la fréquence du champ. À haute fréquence, les effets thermiques peuvent devenir importants : dans ce cas l'intensité de cette interaction est caractérisée par le taux spécifique d'absorption (SAR). Le principal mécanisme d'interaction entre le champ magnétique basse fréquence et les systèmes biologiques semble être l'induction de courants dans les tissus. Ces courants, selon la fréquence et l'intensité, peuvent produire des effets biologiques transitoires, tels que l'apparition d'effets visuels (magnétophosphènes) ou l'excitation neuro-musculaire[Arn01] (et, pour des grandes intensités, la fibrillation cardiaque). À côté de ces effets, il existe certainement d'autres effets à court terme, et peut-être à long terme, sur la santé humaine. Malheureusement, ces effets sont à l'heure actuelle très peu connus, la seule certitude étant qu'il ne s'agit pas d'effets thermiques¹.

1.2.1 Applications médicales

Les champs électromagnétiques sont utilisés dans le domaine médical à des fins diagnostiques (IRM) et thérapeutiques (magnétothérapie, hyperthermie). Pour toutes ces applications il est fondamental de connaître les phénomènes électromagnétiques à l'intérieur du corps humain, pour pouvoir les maîtriser.



Imagerie par résonance magnétique

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est indiscutablement la "reine" parmi les techniques d'imagerie médicale. Le principe de fonctionnement de l'IRM[Dem99] consiste d'abord à aimanter le corps humain par le biais d'un champ magnétique statique uniforme très intense (de l'ordre du Tesla), auquel vient s'ajouter une onde radiofréquence (20-400 MHz) accordée sur la fréquence de résonance des atomes d'hydrogène (fréquence de Larmor) :

$$f_L = 2\pi\gamma B$$

γ étant le rapport gyromagnétique, qui ne dépend que du type de noyau des atomes. Les atomes d'hydrogène entrent en résonance, et lorsque le champ alternatif est brutalement interrompu il est possible de mesurer la perturbation

¹A ma connaissance, le seul effet (nuisible) connu, associé à un mécanisme thermique, est l'augmentation des cas de cataracte parmi les opérateurs radar dans les années 50. Dans ce cas là il s'agit de fréquences (et puissances) bien plus élevées[Sin97].

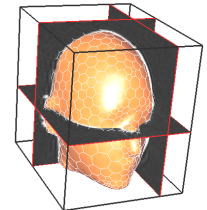
TAB. 1.1 – Systèmes rayonnants BF domestiques et industriels

SOURCE DU CHAMP	FRÉQUENCE	INDUCTION MAGNÉTIQUE
Sèche-cheveux	50 Hz	2000 μ T à 3 cm 30 μ T à 30 cm
Rasoir électrique	50 Hz	1500 μ T à 3 cm
Fours à micro-ondes	50 Hz	8 μ T à 30 cm
Photocopieuse	50 Hz	9 μ T à 15 cm
Lampes fluorescents	50 Hz	2 μ T à 30 cm
Téléviseurs	50 Hz 15 - 50 kHz	0.15 μ T à 1 m 0.04 μ T à 30 cm
Perceuse	50 Hz	800 μ T à 3 cm 3.5 μ T à 30 cm
Four à induction	≤ 10 kHz	1-6 mT
Arcs de soudage	≤ 50 Hz	5.8 mT à 100 cm
Magnétothérapie	1 - 75 Hz	de 1 à 30 μ T
Stimulation transcraniennes	25 Hz	2 T
TGV	50 Hz	50 μ T
Bus électriques	50 Hz	9 μ T
lignes aérienne 110 kV	50 Hz	1.3 μ T à 10 m
lignes aérienne 380 kV	50 Hz	6 μ T à 20 m
Poste transformateur aérien	50 Hz	≤ 6 μ T à 2 m

Sources : [INR95, BBE03, INI94, NIE02]

du champ magnétique due aux vibrations de ces atomes².

Pour obtenir des images localisées, on joue sur le fait que la fréquence de résonance f_L dépend de l'intensité du champ magnétique. On superpose alors un gradient statique de champ pour moduler cette fréquence, selon l'endroit où l'on souhaite mettre en résonance les atomes.



La magnétothérapie

La magnétothérapie est une thérapie pour le soin des fractures, qui consiste à immerger le membre fracturé dans un champ magnétique basse fréquence assez intense. L'efficacité de ce type de thérapie est prouvée. En revanche, le mécanisme qui en est à la base demeure assez méconnu. L'explication la plus vraisemblable est que les courants induits facilitent le transport des ions calcium vers le membre fracturé, en accélérant ainsi la soudure de la fracture[Sin97].

²Le principe de la résonance magnétique nucléaire a été découvert par Bloch et Purcell (Prix Nobel de Physique en 1952). En 2003 le Prix Nobel de Médecine a été assigné à Lauterbur et Mansfield pour leurs travaux sur l'IRM. Curieusement, l'un des pionniers de l'IRM, l'Américain R. Damadian, considéré par beaucoup comme le véritable père de cette technique, a été oublié par le jury du Nobel.



Traitement du cancer par hyperthermie



Autre exemple, l'hyperthermie est une technique pour le traitement du cancer qui consiste à chauffer de manière sélective les tissus malades avec une radiation électromagnétique, dont la fréquence est liée à la profondeur de la tumeur[Sia02]. La difficulté de la technique consiste à bien cibler la partie du corps à chauffer pour ne pas endommager les tissus sains qui se trouvent à proximité. Cette technique ne constitue pas toute seule une thérapie, mais sert à améliorer l'efficacité d'autres traitements, et notamment la chimiothérapie.

1.2.2 Études épidémiologiques

De nombreuses études épidémiologiques ont été menées pour vérifier la présence d'effets nuisibles à court, mais surtout à long terme, sur la santé humaine. Une grande majorité de ces études portent sur une éventuelle relation entre les champs électromagnétiques basse fréquence et l'émergence de cas de cancer.

La première étude[WL79] de Wertheimer et Leeper date de 1979, et suggère l'existence d'une relation entre la proximité des lignes haute tension et l'apparition de cas de leucémie infantile. Depuis, de nombreuses études se sont succédées. Dans ces études, le niveau d'exposition est estimé par des méthodes diverses. Certaines sont basées sur des calculs qui prennent en compte la distance et/ou la configuration des lignes, et dans quelques cas aussi la charge des lignes. D'autres prennent comme mesure de l'exposition une quantité globale appelée *wire-codes* qui caractérise les lignes haute-tension. D'autres encore sont basées sur des mesures de champs sur un temps limité. A première vue, ces études semblent confirmer l'existence d'un risque accru d'un facteur d'environ 1.5, à proximité des lignes haute-tension. Par contre, dans certaines de ces études la corrélation entre l'augmentation des cas de cancer et les niveaux de champs mesurés n'est pas mise en évidence. D'autres études ont été menées, dans le but de rechercher un lien avec l'utilisation de certains appareils, principalement des couvertures chauffantes[PMPY⁺88, SJK90], mais aussi sèche-cheveux et télévisions[LTB⁺91]. Les résultats de ces études sont controversés. Des essais pour corréler la proximité des lignes haute-tension avec d'autres facteurs, tels que la pollution de l'air, ont donné des résultats également négatifs. C'est pourquoi le Comité de l'Académie Nationale des Sciences³, dans son rapport de 1996 a conclu que les enfants vivant à proximité de lignes haute-tension sont effectivement sujets à un risque accru vis-à-vis de la leucémie, même si ce risque ne semble pas être directement lié à l'exposition au champ électromagnétique[NAS96].

D'une façon générale, la faiblesse de toutes ces études est que le nombre de cas examinés est nécessairement petit⁴, et par conséquence les marges d'erreur sont importantes. De plus, il s'ajoute la difficulté d'estimer à long terme le niveau d'exposition effectif des individus. Par exemple, une étude[LHK⁺97] réalisée aux États-Unis sur 638 cas de leucémie - ce qui est déjà une taille tout à fait respectable pour ce type d'étude - estime que le risque associé à un niveau d'exposition de 0.2 μ T à 60 Hz est accru d'un facteur compris (avec une confiance

³National Academy of Sciences Committee (U.S.A.)

⁴Selon le rapport ISTISAN 95/29 de l'Institut Supérieur de Santé (Italie), le nombre d'italiens exposés à un niveau de plus de 0.4 μ T a été, dans la période 1990-1992, de moins de 200.000 individus. Dans la même période, le nombre estimé de cas de leucémie infantine dus à l'exposition à un champ magnétique de 0.2 μ T était compris entre 0 et 7 enfants[Cat01].

de 95%) entre 0.86 et 1.76, en comparaison avec un niveau d'exposition de moins de $0.065 \mu\text{T}$. De plus, dans cette étude, aucune corrélation n'a été trouvée lorsque l'exposition est caractérisée à partir de *wire-codes*, ce qui remet en question une partie des études effectuées précédemment.

D'autres études ont été menées pour essayer de mettre en relation l'apparition de cas de cancer avec les métiers liés à l'électricité[Mil82, FPS⁺93, TGM⁺94, SL95]. La principale source de données a été des bases de données composées de certificats de décès. Ces études, prises globalement, suggèrent une augmentation du risque de cancer parmi les travailleurs de l'électricité. Ces résultats ne sont pas cohérents pour ce qui concerne les types de cancer. De plus, l'éventuelle présence sur le lieu de travail d'autres facteurs cancérigènes, par exemple l'exposition à des solvants à base de benzène, n'a pas été vérifiée.

D'autres études visant à établir une relation entre l'exposition aux champs électromagnétiques et des pathologies liées à la grossesse[BBH⁺95, NRP4a], ou à la dépression nerveuse ont donné des résultats généralement négatifs.

1.2.3 Études de nature biologique

Des recherches ont été menées sur des cultures de cellules, des animaux, et sur des sujets humains (volontaires) dans le but de connaître les effets de l'exposition à des ondes électromagnétiques sur les êtres vivants. De petites altérations du rythme cardiaque ont été observées[CGCG92] suite à une exposition simultanée à un champ électrique (9 kV m^{-1}) et magnétique ($20 \mu\text{T}$) à 60 Hz. Étrangement, cette variation n'est plus observée pour des niveaux inférieurs ou supérieurs de ces champs. Des courants induits suffisamment intenses peuvent stimuler les tissus nerveux et musculaires[Ber92, Ten96]. Le seuil d'excitation neuromusculaire est approximativement 100 mA m^{-2} dans la bande 10-1000 Hz. Il est vraisemblable que même des courants n'atteignant pas ce seuil d'excitation aient des effets sur les processus biologiques.

Un champ électrique de l'ordre de 10 mV m^{-1} à très basse fréquence, correspondant à une densité de courants d'environ 2 mA m^{-2} , peut entraîner l'arrêt de la production nocturne de la mélatonine[Ten96]. Il a été suggéré que, chez les rongeurs, ceci ait un effet promoteur (pas initiateur) sur le cancer de la poitrine[Ste87, SDT⁺92]. Cependant, d'autres études semblent indiquer que l'exposition, intermittente[GCR⁺96] ou permanente[GCR97, SLT97], à des champs électromagnétiques, n'aurait pas un effet significatif sur le niveau de mélatonine dans le sang, chez les êtres humains.

Beaucoup d'études existent sur les effets *in vitro* de champs électromagnétiques. Certaines de ces études portent sur le transport et la concentration de l'ion Ca^{++} à l'intérieur des cellules[WL90]. D'autres portent sur l'activité de certains enzymes liés à la prolifération cellulaire et à la promotion tumorale[BPA87], comme l'omithine-décarboxylase (ODC). D'autres études sont nécessaires avant de pouvoir conclure sur les effets *in vivo* de champs électromagnétiques sur l'activité de l'ODC.

Un résultat important est que les champs électromagnétiques basse fréquence ne produisent pas d'altération de l'ADN et de la chromatine[NRP92, Ten96], et donc n'entraînent pas (ou du moins, pas directement) de mutations et/ou de transformations néoplastiques. D'autres études *in vivo* confirment cette hypothèse[MSM⁺91]. Par ailleurs, dans cette même étude[MSM⁺91], aucun effet

(ni initiateur, ni promoteur) des ondes électromagnétiques vis-à-vis du cancer n’a pu être mis en évidence.

1.2.4 Conclusion

Les résultats de toutes ces études, pris dans leur intégralité, sont controversés. C’est pourquoi dans son dernier rapport de 1998, le Comité International pour la Protection vis-à-vis des Radiations Non-Ionisantes (ICNIRP) a estimé qu’il n’y pas de preuve, au delà de tout raisonnable doute, que l’exposition à des champs électromagnétiques basse fréquence soit à l’origine de l’apparition de cas de cancer[ICN98]. Une année après, le programme de recherche⁵ EMF-RAPID mené aux U.S.A. par l’Institut National des Sciences de la Santé Environnementale (NIEHS), est parvenu à des conclusions tout-à-fait similaires[NIE99] :

“The scientific evidence suggesting that ELF-EMF exposure pose any health risk is weak. [...] The lack of connection between the human data and the experimental data ... severely complicates the interpretation of these results. [...] given the weak magnitude of these increased risks, some other factor or common source of error could explain these findings. However, no consistent explanation other than exposure to ELF-EMF has been identified.”

Ce bref résumé sur l’état de l’art en matière de recherche médicale, montre que l’effet de l’exposition à des ondes électromagnétiques basse fréquence sur le cancer (si jamais il y en a) serait de type promoteur ou co-promoteur, mais pas initiateur. C’est-à-dire, l’exposition à des champs basse fréquence ne serait pas à l’origine, à elle toute seule, du cancer ; elle pourrait, tout au plus, accélérer le développement d’une tumeur déjà existante. Je me dois de souligner que ni l’une, ni l’autre hypothèse (tout comme les hypothèses contraires, d’ailleurs) ne sont, à l’heure actuelle, démontrées.

1.3 Le contexte normatif

1.3.1 Un peu d’histoire

Les premières recommandations pour limiter l’exposition humaine aux radiations électromagnétiques non ionisantes remontent aux années 50. Plus exactement, en 1953 la U.S. Navy recommandait[MMP01] de limiter la densité de puissance du champ électromagnétique à 10 mW cm^{-2} . Cette valeur était déduite sur la base des effets thermiques globaux, et concernait essentiellement des radiations haute fréquence (10 MHz – 10 GHz), car à cette époque la principale source de radiations non ionisantes était celle des systèmes radar. Dans la même période, l’U.R.S.S. a établi des normes beaucoup plus restrictives, sur la base de possibles effets non thermiques[Sin97]. Les normes russes imposaient aussi une limite à la densité de puissance - limite qui dans le plus restrictif des cas était de $10 \mu\text{W cm}^{-2}$. Comme on peut le constater, les normes américaines et russes étaient basées sur deux approches diamétralement opposées (modèle thermique pour les Américains, modèle non thermique pour les Soviétiques), et différaient

⁵Pour l’anecdote, ce programme de recherche, voté par le Congrès dans l’*Energy Policy Act* de 1992 et conclu en 1999, a coûté aux contribuables américains la bagatelle d’à peu près 45.000.000\$

de trois ordres de grandeur. Curieusement, les autres états qui ont instauré des normes (Canada, Suède, Pologne et Tchécoslovaquie⁶) semblent avoir suivi des critères géopolitiques plutôt que scientifiques[Sin97].

En 1959 le comité C95, sponsorisé par la U.S. Navy et la IEEE, a été fondé pour étudier le problème. En 1966 ce comité a formalisé les recommandations de 1953 dans son premier standard ANSI C95.1-1966. Une évolution mineure a paru en 1971, avec l'introduction de limitations sur $\|\vec{E}\|^2$ et $\|\vec{H}\|^2$. L'édition de 1982 comporte des évolutions substantielles : des limitations sont aussi imposées sur le taux d'absorption spécifique (SAR), les valeurs limites deviennent fonction de la fréquence. Ces valeurs limites ont été partiellement reprises en 1986 dans les recommandations du NCRP[MMP01]. Enfin, cette édition est basée non seulement sur le modèle thermique, mais aussi sur des modifications du comportement liés à la nourriture, chez les animaux. Il faudra attendre 1991 pour que la quatrième édition[IEE99] de ce standard (IEEE C95.1-1991) introduise des limitations sur les courants induits. Les dernières éditions de ce standard sont le IEEE C95.1-1999 pour la bande 3000 Hz – 300 GHz, et le IEEE C95.6-2002 pour la bande 0 – 3000 Hz.

Au niveau européen, la première initiative à signaler est la formation en 1974 d'un groupe de travail sur les radiations non ionisantes (NIR) de la part de l'Association Internationale pour la Protection contre les Radiations (IRPA), rebaptisée INIRC en 1977, puis ICNIRP en 1992. Ce groupe de travail a publié des recommandations en 1988, 1990 et 1998[ICN98] concernant l'exposition à des champs variables dans le temps, et en 1994 concernant les champs statiques. Sont dignes d'être cités aussi le programme de recherche européen COST 244 bis, les multiples travaux du Bureau National de Protection contre les Radiations (NRPB, United Kingdom), et le programme de recherche EMF de l'Organisation Mondiale pour la Santé (OMS).

1.3.2 Le standard IEEE C95.1-1999

L'édition de 1999 du standard américain[IEE99] porte sur la bande de fréquence 3 kHz – 300 GHz. La discussion qui suit est limitée à la bande qui nous concerne, c'est-à-dire au plus 3 kHz – 1 MHz. Ce standard fait la distinction entre environnements contrôlés, et non contrôlés. Sont appelés "environnements contrôlés" les endroits où les personnes sont conscientes du fait qu'elles peuvent être exposées à des rayonnements élevés, et notamment les lieux de travail (bien évidemment, tous les autres endroits sont considérés non contrôlés). Les grandeurs électriques prises en considération sont :

- le champ électrique $\|\vec{E}\|$
- le champ magnétique $\|\vec{H}\|$
- le courant I , mesuré à travers chaque pied⁷
- la puissance rayonnée P
- le taux d'absorption spécifique SAR
- la densité de courant $\|\vec{J}\|$

⁶Par ordre décroissant, selon la densité de puissance admise par leurs lois respectives.

⁷A ce sujet, le document [IEE99] précise (au milieu de la pag. 14) que "[...] *Commercial instruments with a flat frequency response between 3 kHz and 100 MHz are beginning to come available for this purpose, as are instruments with shoe-insertable sensors for personnel mobility*". Malheureusement je ne suis parvenu à retrouver aucune image d'un tel appareil.



IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.

Ce standard préconise deux façons pour établir le respect des limitations :

- a) des limites d'exposition maximales⁸ à ne pas dépasser sont définies par rapport aux champs électriques et magnétiques (fig. 1.1) et au courant (fig. 1.2).
- b) Toutefois, le dépassement de ces limites est admis, à condition que d'autres limitations sur le SAR, ou la densité de courant soient respectées⁹ (fig. 1.3).

Les limites d'exposition maximales pour les champs électrique et magnétique (fig. 1.2), et pour le courant (fig. 1.3) sont reportées dans le tableau (1.2)

TAB. 1.2 – Limites d'exposition maximales (IEEE C95.1-1999)

FRÉQUENCE [MHz]	CHAMP ÉLECTRIQUE [Vm ⁻¹]	CHAMP MAGNÉTIQUE [Am ⁻¹]
0.003 – 0.1	614	163
0.1 – 3.0	614	16.3/ <i>f</i>
	COURANT [mA]	
0.003 – 0.1	1000 <i>f</i>	
0.1 – 100	100	

Les valeurs limites pour les champs sont définies en moyennant les champs dans l'espace sur une surface Σ équivalente à la section du corps humain, et dans le temps sur une fenêtre temporelle $\Delta t = 6 \text{ min}$:

$$\langle E \rangle = \sqrt{\frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Sigma} \|\vec{E}\|^2 d\Sigma dt}$$

$$\langle B \rangle = \sqrt{\frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Sigma} \|\vec{B}\|^2 d\Sigma dt}$$

De même, la valeur limite pour le courant est définie par rapport à la valeur de I moyennée sur une fenêtre temporelle Δt . La façon de calculer cette valeur moyennée dépend de la fréquence :

pour $f < 100 \text{ kHz}$:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta t} |I(t)| dt$$

où $\Delta t = 1 \text{ s}$

pour $f \geq 100 \text{ kHz}$:

$$\langle I \rangle = \sqrt{\frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta t} |I(t)|^2 dt}$$

où $\Delta t = 6 \text{ min}$

⁸ *Maximum permissible exposure (MPE)*

⁹ *Exclusions*

Pour des fréquences f inférieures à 450 kHz, il n'est pas nécessaire de mesurer le courant (fig. 1.2) : pour que la situation d'exposition soit conforme au standard il suffit que les champs électrique et magnétique respectent ces gabarits (fig. 1.1). Pour des fréquences supérieures, la mesure du courant peut devenir nécessaire même si les niveaux des champs sont inférieurs aux gabarits.

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, la situation d'exposition peut quand même être conforme au standard. Pour cela, il faut distinguer deux cas, selon la fréquence :

- si la fréquence f est inférieure à 100 kHz, il faut prouver que la densité de courant J , moyennée sur la surface de 1 cm^2 dans le temps de 1 s, est inférieure à $35f\text{ mA cm}^{-2}$.
- Pour des fréquences supérieures à 100 kHz, il faut que le taux d'absorption spécifique (SAR) soit globalement¹⁰ inférieur à 0.4 W kg^{-1} , et localement¹¹ inférieur à 8 W kg^{-1} . De plus, il faut que le gabarit sur le courant soit quand même respecté. Font exception mains, poignets, pieds et chevilles, pour lesquelles la limite pour le SAR est plus élevée (20 W kg^{-1}).
- Dans les deux cas, le niveau d'exposition est quand même conforme au standard, si la puissance rayonnée P est inférieure à 7 W, à condition que la structure rayonnante se trouve à plus de 2.5 cm du corps.

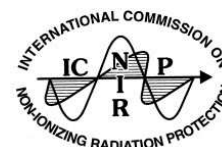
Les gabarits reportés correspondent à des environnements contrôlés. Ceux qui correspondent à des environnements non contrôlés sont en général plus restrictifs.

Le choix qui a amené le comité à la définition de ces valeurs limites a été prise sur la base de considérations sur les effets thermiques des ondes électromagnétiques, et sur la base de la littérature existante sur l'électrostimulation, et en particulier [Ber85]. Le comité n'a pas retenu fondées les informations scientifiques qui indiqueraient que, dans la bande de fréquences 3 kHz – 300 GHz, il y a des risques à long terme pour la santé liés à une exposition prolongée aux radiations électromagnétiques.

1.3.3 Les recommandations ICNIRP du 1998

Les recommandations¹² du comité ICNIRP[ICN98] portent sur la bande de fréquence 1 Hz – 300 GHz. Comme pour le standard IEEE C95.1-1999, la discussion qui va suivre est limitée aux basses fréquences, dans ce cas 1 Hz – 10 MHz. Tout comme le standard IEEE, une distinction est faite entre l'exposition dans un cadre professionnel¹³ et le grand public¹⁴.

Le critère principal qui détermine la conformité d'une situation d'exposition est le respect de certaines *restrictions de base*¹⁵. Ces restrictions de base (tab. 1.3) portent sur les grandeurs physiques suivantes :



ICNIRP: International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection

¹⁰Valeur moyennée sur l'intégralité du corps, et sur un temps de 6 min.

¹¹Valeur moyennée sur un cube de 1 cm^3 contenant au moins 1 g de tissu, et sur un temps de 6 min.

¹²Guidelines

¹³Occupational exposure

¹⁴General public

¹⁵Basic restrictions

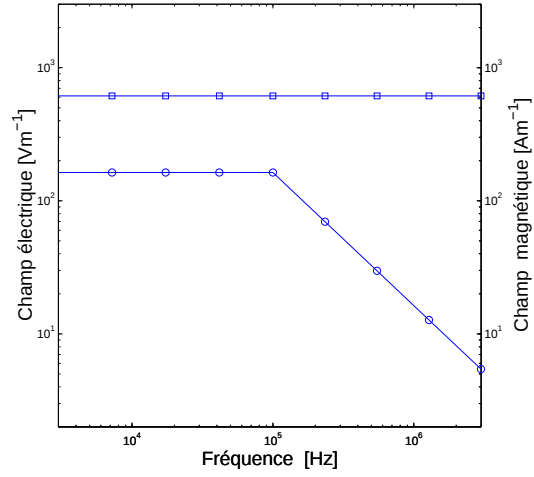


FIG. 1.1 – IEEE C95.1-1999, gabarit du champ électrique ($\square$), et magnétique ($\circ$) dans un cadre professionnel

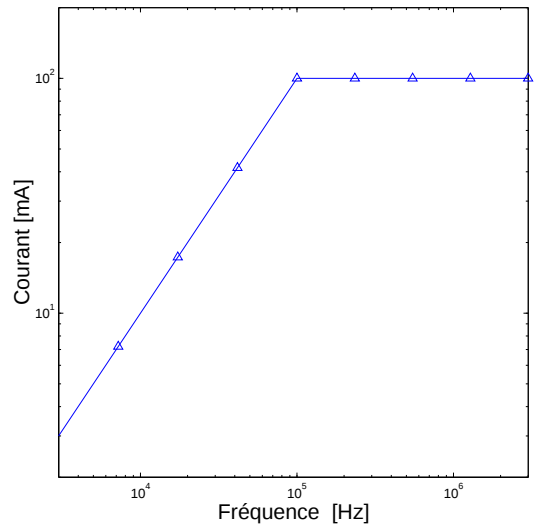


FIG. 1.2 – IEEE C95.1-1999, gabarit du courant, mesuré à travers chaque pied, dans un cadre professionnel

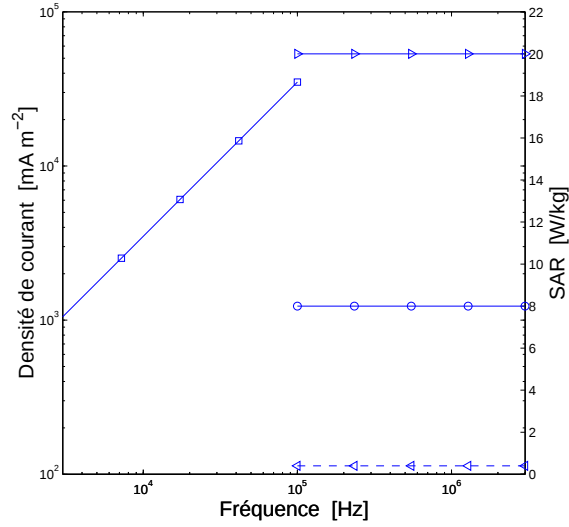


FIG. 1.3 – IEEE C95.1-1999, gabarit du SAR ($\triangleleft$ = globale, $\circ$ = locale, $\triangleright$ = mains, poignets, pieds et chevilles), et de la densité de courant ($\square$), dans un cadre professionnel

- la densité de courant J , jusqu'à 10 MHz
- le taux d'absorption spécifique SAR , à partir de 100 kHz

Les valeurs limites reportées dans le tab. (1.3) sont à comparer avec des grandeurs moyennées. Dans le cas du SAR, il faut considérer la valeur moyennée dans le temps sur 6 min, et dans l'espace sur une masse de 10 g de tissu. Pour la densité de courant, il faut d'abord moyenner sur une surface de 1 cm^2 normale à $\vec{J}$, et ensuite considérer la valeur quadratique moyenne sur un temps de 6 min.

Les gabarits à respecter pour ces grandeurs (fig. 1.4) ont été fixés par le comité sur la base de considérations sur les effets à court terme de l'exposition aux ondes électromagnétiques :

TAB. 1.3 – Restrictions de base (ICNIRP 1998)

FRÉQUENCE [Hz]	SAR [W kg^{-1}]	DENSITÉ DE COU- RANT [mA m^{-2}]
0 – 1 Hz		40
1 – 4 Hz		$40/f$
4 Hz – 1 kHz		10
1 – 100 kHz		$f/100$
	0.4 globale	
0.1 – 10 MHz	10 tête, thorax et ventre	$f/100$
	20 bras, jambes	

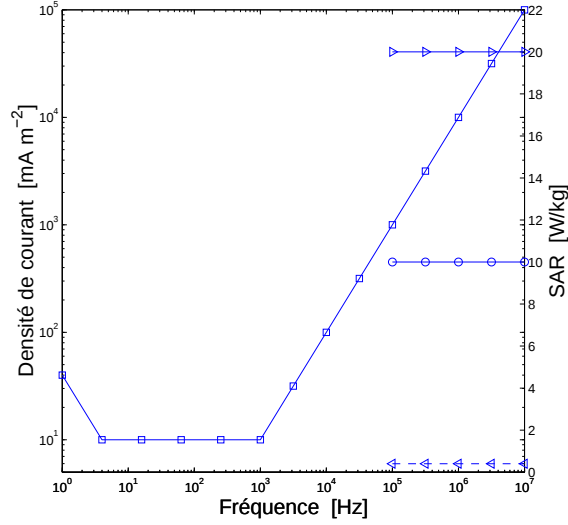


FIG. 1.4 – ICNIRP (1998), gabarit du SAR ($\triangleleft$ = globale, $\circ$ = tête, thorax et ventre, $\triangleright$ = bras et jambes), et de la densité de courant ($\square$), dans un cadre professionnel (valeurs quadratiques moyennes)

- l'exposition continue pour 30 min à une onde électromagnétique d'une fréquence de 10 MHz à quelques GHz, avec un SAR globalement égal à 4 W kg^{-1} , produit le réchauffement du corps de plus de 1 C° . Il a donc été convenu de prendre un facteur 10 de sécurité : $SAR \leq 0.4 \text{ W kg}^{-1}$
- dans le but d'éviter des effets mineurs réversibles, il a été choisi de limiter la densité de courant J à 10 mA m^{-2} , ce qui correspond à $1/10$ du seuil d'excitation neuro-musculaire

Le comité n'a pas considéré que les informations scientifiques concernant des éventuels effets à long terme liés à l'exposition prolongée à des radiations électromagnétiques étaient suffisamment prouvées.

La mesure directe dans le corps humain du SAR ou de la densité de courant est impossible. C'est pourquoi des limites sont données aussi pour des grandeurs plus facilement mesurables : le champ électrique et le champ magnétique. Ces limites, appelées *niveaux de référence*¹⁶, ont été déterminées sur la base de calculs simplifiés, en supposant des conditions d'exposition maximale. De cette façon, lorsque les champs électrique et magnétique respectent ces gabarits (fig. 1.5), on est assuré que la situation d'exposition est conforme aux recommandations. Dans le cas contraire, il faut vérifier le respect des restrictions de base avec des moyens appropriés.

Dans le cas du champ magnétique basse fréquence, le corps humain est modélisé par un disque homogène et isotrope de rayon R et de conductivité σ (fig. 1.6). L'induction magnétique B est supposée être uniforme et normale au disque. La

¹⁶Reference levels

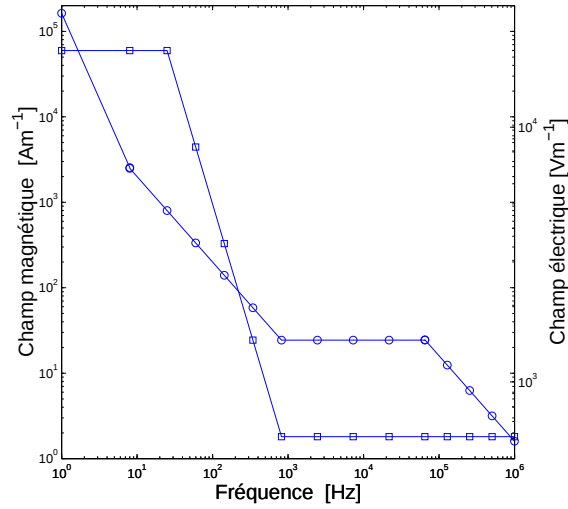


FIG. 1.5 – ICNIRP (1998), gabarit du champ électrique ($\square$), et magnétique ($\circ$), dans un cadre professionnel

densité de courant à la surface du disque peut être calculée analytiquement :

$$J = \pi R f \sigma B$$

D'autres modèles plus complexes (sphéroïdes[Rei89], modèles anatomiques homogènes[XS94]) ont été utilisées. Ces calculs indiquent qu'un champ uniforme $B = 100 \mu\text{T}$ à la fréquence industrielle (50–60 Hz) induit une densité de courant moyenne de l'ordre de $J_{\text{moy}} = 0.2 - 0.3 \text{ mA m}^{-2}$, avec une valeur de pointe de $J_{\text{max}} = 2 - 3 \text{ mA m}^{-2}$ dans les zones périphériques du corps où la conductivité choisie est de l'ordre de $\sigma = 0.2 \text{ S m}^{-1}$.

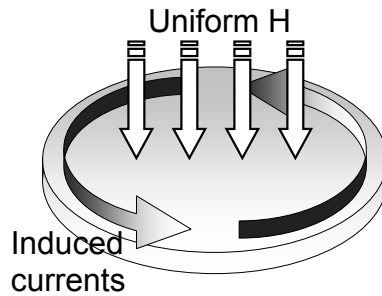


FIG. 1.6 – ICNIRP (1998), modélisation simplifiée : le corps humain (le disque) est soumis à un champ magnétique uniforme et perpendiculaire

Les valeurs reportées concernent le cadre professionnel ; pour le grand public un facteur de sécurité supplémentaire 5 est ajouté (c'est-à-dire, tous les gabarits sont réduits d'un facteur 5). A titre indicatif, à la fréquence industrielle (50 Hz)

le niveau de référence pour l'induction magnétique est de $500\text{ }\mu\text{T}$ dans le cadre professionnel, et $100\text{ }\mu\text{T}$ pour le grand public.

Si l'on compare le standard proposé par le IEEE avec celui proposé par le ICNIRP (dans la bande $3\text{ kHz} - 1\text{ MHz}$), certains points en commun sautent aux yeux. D'abord, l'approche suivie par les deux standards est substantiellement la même : des gabarits différents sont définis pour le cadre professionnel et pour le grand public¹⁷. Des limites d'exposition sont données pour des grandeurs facilement mesurables (champs électrique et magnétique, courant électrique). Le dépassement de ces limites d'exposition est permis, à condition que d'autres limites sur des grandeurs non mesurables (SAR, densité de courant) soient respectées.

Les gabarits reportés dans les deux standards sont assez proches pour le champ électrique et le SAR. Par contre, les limites pour la densité de courant (fig. 1.7) et le champ magnétique (fig. 1.8) diffèrent de plus d'un ordre de grandeur.

Ensuite, les deux standards font référence à des grandeurs moyennées dans l'espace et le temps, définies à peu près de la même façon.

Les deux comités se sont basés sur des effets thermiques, ou sur des effets mineurs, à court terme, et réversibles sur le système neuro-musculaire. Des effets à long terme n'ont pas été suffisamment prouvés pour être pris en considération dans la définition des limites d'exposition.

1.3.4 Les enjeux pour l'industrie électrique

Les recommandations de l'IEEE et de l'ICNIRP que je viens de présenter n'ont pas de valeur légale : il appartient aux divers organismes politiques de légiférer en la matière. Ces organismes politiques donnent à leur tour un mandat à d'autres organisations, qui ont pour but de rédiger les futures normes industrielles qui sont en cours de définition, et qui, elles, font référence à ces recommandations.

Au niveau européen, l'organisme qui s'occupe de l'harmonisation des normes en matière d'électrotechnique est le CENELEC. En particulier, le comité TC 106X (anciennement TC 211) du CENELEC s'occupe de la normalisation en matière d'exposition humaine aux ondes électromagnétiques. En 1995 ce comité a proposé deux pré-normes[E95] basées sur les recommandations ICNIRP du 1990. Ces pré-normes ont été rendues obsolètes par l'approbation en 1999 par le Conseil des Ministres de la Communauté Européenne de la recommandation 1999/519/CE[G.U99], qui propose un cadre harmonisé pour limiter l'exposition du grand public aux ondes électromagnétiques, et qui reprend en substance le document de l'ICNIRP du 1999. Il faut préciser que les états membres de l'Union Européenne ont le choix d'incorporer ou non cette recommandation dans leur propre code de lois, ou éventuellement de l'adopter sous une forme modifiée - ce qui ajoute un niveau supplémentaire d'indétermination.

A niveau international, l'organisme qui s'occupe de la normalisation dans le domaine de l'électrotechnique est la Commission Électrotechnique Internationale (CEI). Le CENELEC et le CEI travaillent dans un rapport de coopération,

¹⁷C'est ce que l'on appelle "*two tier standard*" dans la littérature anglophone.

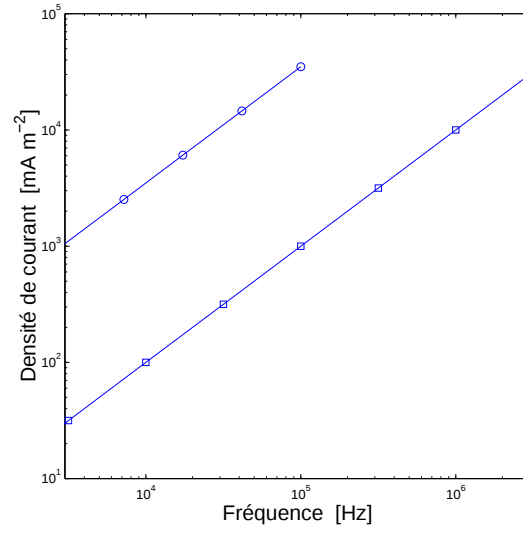


FIG. 1.7 – Comparaison entre les standards IEEE C95.1-1999 (○) et ICNIRP 1998 (□) : densité de courant

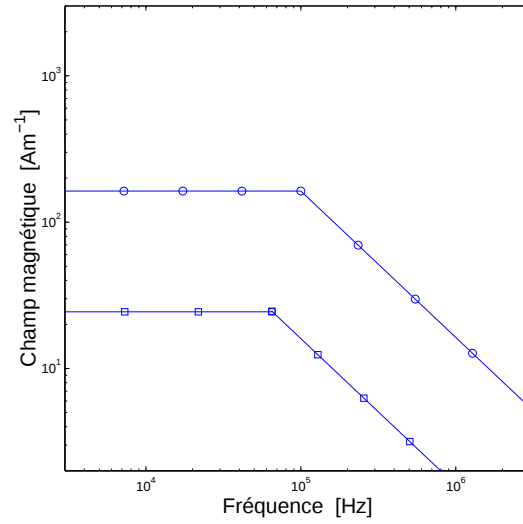


FIG. 1.8 – Comparaison entre les standards IEEE C95.1-1999 (○) et ICNIRP 1998 (□) : champ magnétique

sur la base des accords de Dresde. A l'heure actuelle, cette coopération semble être dans une phase d'impasse : récemment le comité TC 106 de la CEI n'a pas accepté le document EN 50357, qui est la première norme européenne publiée par le TC 106X - la pierre d'achoppement étant le fait que d'une façon générale le CEI ne fonde pas ses projets de normes sur le travail de l'ICNIRP.

A ces difficultés d'ordre politique, s'ajoutent d'autres problèmes de nature plus technique. D'abord, les situations d'exposition (position de la personne exposée, conditions de fonctionnement de la source du champ) et la procédure de mesure à suivre (nombre et position des points de mesure, mesure ponctuelle ou intégrée) ne sont pas définies dans la recommandation. Je ferais observer qu'il ne s'agit pas de "se mettre d'accord" sur quelque détail de procédure : en basse fréquence, l'exposition a lieu en conditions de champ proche, et donc la répartition des champs électrique et magnétique au voisinage de la source du champ est très compliquée, et en général ne peut pas être calculée analytiquement. Le choix de la méthode de mesure n'est donc pas banal en soi. Il faut ajouter que cette méthode de mesure, pour être réalistiquement applicable, ne doit pas être chère, et donc relativement simple. Du fait que la répartition du champ est compliquée, la définition de conditions d'exposition précises est importante.

CHAMP PROCHE: *région proche du système rayonnant, où le champ électromagnétique n'a pas les caractéristiques d'une onde plane*

Les recommandations définissent des valeurs de référence pour le champ électrique et magnétique. Or, ces valeurs de référence ont été choisies (au moins dans le document de l'ICNIRP) en supposant que le champ soit uniforme - ce qui est fort peu vraisemblable, puisqu'on est en champ proche. Pour cette raison, ces valeurs de référence risquent d'être trop restrictives[GBD00].

$$J = \pi R f \sigma B$$

Les recommandations permettent le dépassement de ces valeurs de référence, à condition de pouvoir prouver que les restrictions de base sur la densité de courant sont respectées. Malheureusement on ne peut pas mesurer des densités de courant directement dans le corps humain, donc la seule solution est de recourir à la modélisation numérique. C'est bien ici le revers de la médaille, car cette modélisation pose des problèmes tout à fait particuliers[BBG98] : quel modèle adopter pour le corps humain ? Faut-il choisir un modèle 3D, ou bien peut-on se contenter d'un modèle simplifié en 2D ? Quelle formulation, et quelle technique numérique va-t-on utiliser ? A côté de ces questions (soit-disant) classiques, se posent d'autres interrogations de nature plus fondamentale[SSB⁺03, NBP⁺03] : comment estimer les paramètres électriques du corps ? Quelle formulation faut-il utiliser ? Comment interpréter les résultats ?

Enfin, la plupart des logiciels commerciaux de calcul en électromagnétisme sont conçus pour donner des résultats précis à l'intérieur des dispositifs modélisés. Par conséquent, il peuvent se révéler peu adaptés pour des calculs dans l'air. La méthode des éléments finis est particulièrement concernée, du fait que le maillage d'un grand volume d'air est nécessaire. Quelles sont les particularités de ce type de calcul, lorsque l'objectif est de calculer des grandeurs électriques dans l'air ? Y a-t-il des approches plus adaptées (moins coûteuses, plus précises) pour ce type de calculs ?

Il est clair que cette situation d'incertitude ne peut que nuire à l'industrie électrique, pour laquelle il est vital de connaître quelles sont les contraintes à respecter pour qu'un produit soit commercialisable. En effet, il est possible de limiter les champs de fuite à l'extérieur d'un dispositif, mais il est impossible de les éliminer complètement. Mais jusqu'à quel point faut-il prendre des précau-

tions pour limiter ces fuites ? En l'absence de réponses à ces questions, les états risquent de prendre comme base pour la législation les valeurs de référence, ce qui impliquerait des contraintes trop importantes pour l'industrie électrique.

1.4 Conclusions

Du fait de l'augmentation toujours croissante de l'utilisation de l'énergie électrique, la société a commencé à s'interroger sur les éventuels effets sur la santé. En dépit des nombreux études menées depuis plus de 30 ans, les résultats demeurent controversés, en particulier sur d'éventuels effets cancérogènes des ondes électromagnétiques basse fréquence.

Sur la base du principe de précaution, les gouvernements sont en train de modifier les normes en matière de protection envers les radiations non ionisantes. A l'état actuel, ces normes définissent des valeurs limites pour le champ magnétique (valeurs de référence) et pour les courants induits dans le corps humain (restrictions de base), avec des coefficients de sécurité différents, selon que l'exposition ait lieu dans un cadre professionnel ou pas.

Ces normes sont inadaptées, car elles sont basées sur les hypothèses que le champ est uniforme, et que le corps humain est homogène : de ce fait, le niveau d'exposition peut être surestimé.

Cette constatation fait apparaître deux problématiques :

- déterminer la répartition du champ rayonné par un appareil électrique (champ de fuite)
- calculer les courants induits qui en résultent dans le corps humain

Ces problématiques se retrouvent dans différents domaines autres que le nôtre, par exemple dans le domaine médical (développement de systèmes IRM, magnétothérapie).

“Everything should be made as simple as possible, but not simpler.”

Albert Einstein

“All models are wrong. Some are useful.”

George E.P. Box

2

Modélisation des champs de fuite par voie numérique

2.1 Introduction

Dans un premier temps nous étudions par simulation numérique classique la répartition des champs de fuite autour de quelques systèmes électrotechniques représentatifs. Nous nous intéressons à l’influence de divers paramètres, en particulier sur la décroissance du champ. Outre des informations préliminaires sur le phénomène, cette étape montre que l’utilisation de logiciels de calcul classiques est inadaptée (parce que trop coûteuse) à l’étude de ces fuites.

Nous présentons donc un modèle qui ne prend en compte que les aspects essentiels de la structure du système rayonnant. Ce modèle s’inspire du concept de réluctance (pour le calcul du flux magnétique sur les sections du circuit), mais à la différence de celui-ci, il permet de calculer aussi le champ de fuite, en s’appuyant sur le concept de charges magnétiques fictives.

Ce modèle a été validé sur des structure simples, de type bobinage + circuit (+ entrefer). Les résultats obtenus montrent qu’il est possible d’obtenir des valeurs approchées du champ de fuite à un coût très modéré.

2.2 Étude préliminaire des champs de fuite

Le champ magnétique basse fréquence peut être analysé sous deux points de vue différents : d’un côté on a la répartition du champ dans l’espace, et de l’autre son évolution temporelle. Dans la plupart des cas, les systèmes rayonnants ont un comportement périodique (à l’exception des transitoires). Une décomposition en série de Fourier suffit donc largement à caractériser l’évolution temporelle des grandeurs électriques. Par contre la répartition spatiale du champ nécessite une analyse plus détaillée.

Nous avons donc commencé par étudier cette répartition pour un certain nombre de dispositifs suffisamment représentatifs. Dans cette première phase l'objectif sera de rechercher les points communs entre les différents cas étudiés, et d'analyser l'influence de certains paramètres significatifs sur la répartition et l'intensité du champ dans l'air.

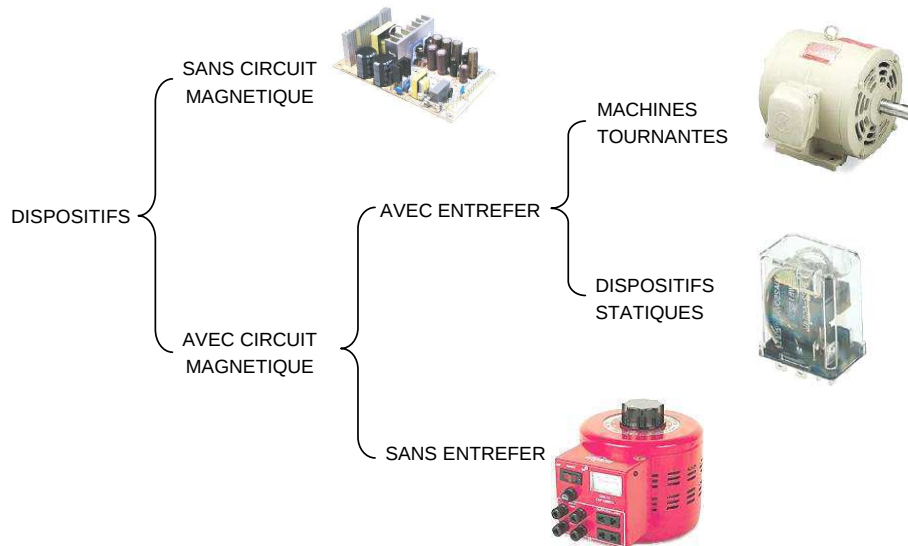
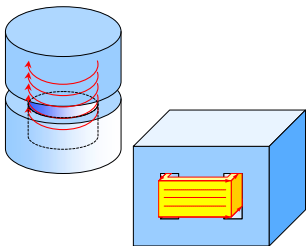


FIG. 2.1 – Classification des dispositifs électriques basse fréquence

En fig. 2.1 est représentée une possible classification des dispositifs électriques. Parmi les dispositifs sans circuit magnétique (ou avec un circuit magnétique ponctuel par rapport à la taille du dispositif) on peut classer les dispositifs antivolt et les alimentations à découpage. La répartition spatiale du champ rayonné par ces dispositifs peut être calculée par Biot-Savart[CP03]. Il s'agit donc d'un problème relativement simple, à condition de maîtriser le fonctionnement interne de l'appareil.

Dans la classe des dispositifs avec circuit magnétique on trouve les transformateurs et les moteurs électriques. La répartition du champ généré par ce type d'appareils est compliquée par la présence de matériaux magnétiques, et ne peut être calculée que numériquement.

cf. pag. 67



Nous avons donc choisi d'étudier les quatre dispositifs suivants :

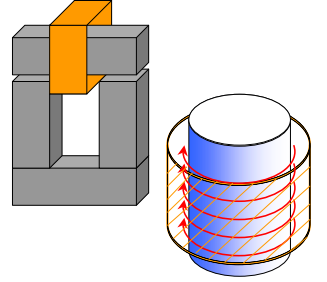
A une bobine à noyau de fer axisymétrique

B un transformateur cuirassé

C une bobine à noyau de fer 3D

D un système de chauffage par induction

Pour les calculs numériques nous avons utilisé les logiciels de calcul aux éléments finis FLUX2D et FLUX3D[CED].



FORMULATIONS QUASI-STATIQUES

Dans la modélisation des phénomènes électromagnétiques en électrotechnique, on adopte des formulations de type *quasi-statique*. Celles-ci consistent à écrire les équations de Maxwell en négligeant les courants de déplacement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_s + \vec{J}_i \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.4)$$

L'implication physique de cette hypothèse est que les variations des grandeurs électriques sont ressenties instantanément dans tout le domaine d'étude. Le champ électromagnétique se comporte donc selon un modèle de diffusion[Far93] : c'est bien ce qui caractérise le *champ proche*. Ces modèles sont valables tant que les distances sont très petites par rapport à la longueur d'onde (dans le vide, 300 m à 1 MHz).

FORMULATION MAGNÉTODYNAMIQUE EN POTENTIEL VECTEUR :

Soit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; à partir de (2.1) on

obtient :

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\phi\right) \quad (2.5)$$

Le potentiel scalaire ϕ dépend de la densité de charge ρ , par l'intermédiaire de (2.4). On peut prouver[SC] que si ρ est nulle (ce qui est souvent le cas), en prenant pour $\vec{A}$ la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ on obtient que le potentiel ϕ est identiquement nul. L'expression précédente devient donc :

$$\vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt} \quad (2.6)$$

La densité de courant peut être écrite comme :

$$\vec{J} = \vec{J}_s - \sigma \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (2.7)$$

On remarquera que dans cette expression on a supposé que la densité de courant source $\vec{J}_s$ est connue, et ne dépend pas des autres grandeurs électriques - ce qui est une approximation.

En remplaçant (2.7) et $\vec{H} = \frac{\vec{A}}{\mu}$ dans (2.3) on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \sigma \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{J}_s \quad (2.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.9)$$

En régime harmonique, les grandeurs $\vec{A}$ et $\vec{J}_s$ sont remplacées par des phasors :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + j\omega\sigma \vec{A} = \vec{J}_s \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.11)$$

La résolution numérique requiert alors trois inconnues complexes par nœuds.

Dans le cas où les matériaux ne soient pas conducteurs ($\sigma = 0$), le temps t n'intervient plus dans les équations (2.8), (2.9). On retrouve ainsi la formulation magnétostatique :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{J}_s \quad (2.12)$$

FORMULATION MAGNÉTO-DYNAMIQUE EN POTENTIEL SCALAIRE :

Soit Ω une région non conductrice (donc $\vec{J}_i = 0$). Si aucune densité de courant $\vec{J}_s$ n'est présente dans Ω , l'éq. 2.2 dévient $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$. On peut donc représenter le champ magnétique par intermédiaire d'un potentiel scalaire ϕ :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.13)$$

ce qui, en utilisant la relation $\vec{B} = \mu\vec{H}$ et (2.3), donne :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla}\phi) = 0 \quad (2.14)$$

Si à l'intérieur de Ω la densité de courant $\vec{J}_s$ n'est pas nulle (à cause, par exemple, de la présence de bobinages) il est encore possible, dans certains cas, de se servir de potentiels scalaires. Soit $\vec{H}_0 = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}_s \times \vec{r}}{r^3} d\Omega$ le champ magnétique généré par $\vec{J}_s$ dans le vide ; on peut écrire le champ magnétique total comme la somme de $\vec{H}_0$ plus le champ réduit $\vec{H}_{red}$:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_{red} \quad (2.15)$$

Il en découle que $\vec{\nabla} \times \vec{H}_{red} = 0$, puisque $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H}_0 = \vec{J}_s$. Donc $\vec{H}_{red}$ peut être représenté avec un potentiel scalaire ψ , que l'on appelle *potentiel réduit* :

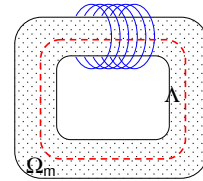
$$\vec{H}_{red} = -\vec{\nabla}\psi \quad (2.16)$$

À partir de cette équation et de (2.3) on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}_0) \quad (2.17)$$

À l'intérieur de matériaux magnétiques, $\vec{H}_0$ et $\vec{H}_{red}$ sont de signe opposé, et du même ordre de grandeur. C'est pourquoi l'application de (2.17) dans des régions avec $\mu_r \gg 1$ conduit à de très mauvais résultats. Pour pallier à ce problème[Pis82], il faut partager le domaine $\Omega = \Omega_m \cup \Omega_s$ en une partie magnétique où il n'y ait pas de courants Ω_m , dans laquelle on pourra appliquer (2.14), et la partie restante Ω_s , dans laquelle on va appliquer (2.17). À la frontière entre Ω_m et Ω_s on imposera la continuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$, et de la composante normale de $\vec{B}$.

Cette méthode en double potentiel est applicable, à condition qu'il n'existe pas à l'intérieur de Ω_m de parcours fermés Λ tels que $\oint_{\Lambda} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \neq 0$, comme dans le cas suivant[Bos] :



Supposons maintenant que à l'intérieur du domaine Ω existe une région Ω_c dont la conductivité $\sigma \neq 0$. Soit $\vec{J}_i = \vec{\nabla} \times \vec{T}$, et supposons que $\vec{J}_s = 0$ dans Ω_c . A partir de (2.2) on obtient :

$$\vec{H} = \vec{T} - \vec{\nabla} \phi \quad (2.18)$$

A partir de (2.1) et de (2.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{T} \right) = \\ - \frac{d}{dt} \left[\mu \left(\vec{T} - \vec{\nabla} \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{T}) \quad (2.20)$$

La résolution numérique de (2.14), (2.17) et (2.19)-(2.20) requiert une inconnue par nœud dans Ω_m et Ω_s , et quatres inconnues par nœud dans Ω_c .

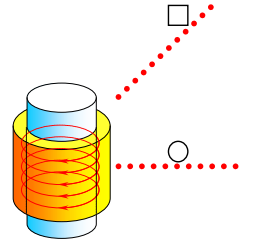
Les formulations en potentiel vecteur sont très utilisées en 2D, mais s'avèrent très coûteuses en 3D. Dans ce cas, des formulations en potentiel scalaire doivent être utilisées, si possible.

2.2.1 Décroissance en fonction de la distance

Une information importante sur les champs rayonnés est la rapidité avec laquelle le champ s'affaiblit, lorsque l'on s'éloigne de la source du champ. Il est bien connu qu'à grande distance le champ rayonné par certains systèmes filaires décroît en fonction de la distance r selon une loi de puissance, dont l'exposant dépend du type de système : $1/r$ pour un fil infini, $1/r^2$ pour deux fils infinis parcourus par des courants opposés, $1/r^3$ pour une spire.

En fig. 2.2 est représentée en échelle logarithmique l'induction magnétique générée dans l'air par le système de chauffage par induction (dispositif D), en fonction de la distance du dispositif.¹ Le champ a été calculé suivant deux directions d'éloignement différentes (symboles $\circ$ et $\square$). L'allure rectiligne des deux courbes indique qu'à grande distance le champ généré par ce système décroît selon une loi de puissance. Sur le même graphique est représentée l'induction générée par une spire de 32 mm de rayon, parcourue par un courant judicieusement choisi (symboles $+$ et Δ). On remarque qu'à partir d'environ 20 cm il devient difficile de faire la différence entre le champ généré par le dispositif et celui de la spire, qui décroît en $1/r^3$.

On remarquera aussi que l'une des deux courbes ($\circ$) est légèrement incurvée vers la fin ($r \simeq 1000$ mm). Il s'agit d'une imprécision numérique, liée au fait que l'infini est pris en compte de façon approchée, en imposant des conditions de Dirichlet sur la frontière du domaine de résolution (on retrouve la même imprécision pour le champ généré par la spire, qui a été calculé de la même façon).



¹Formulation magnétodynamique axisymétrique (19086 éléments d'ordre 2, pour 1/2 de la géométrie). Prise en compte de l'infini par Dirichlet. Paramètres : $\mu_{ch} = 100$, $\sigma_{ch} = 5 \cdot 10^6 \text{ S m}^{-1}$, $\mu_{no} = 1000$

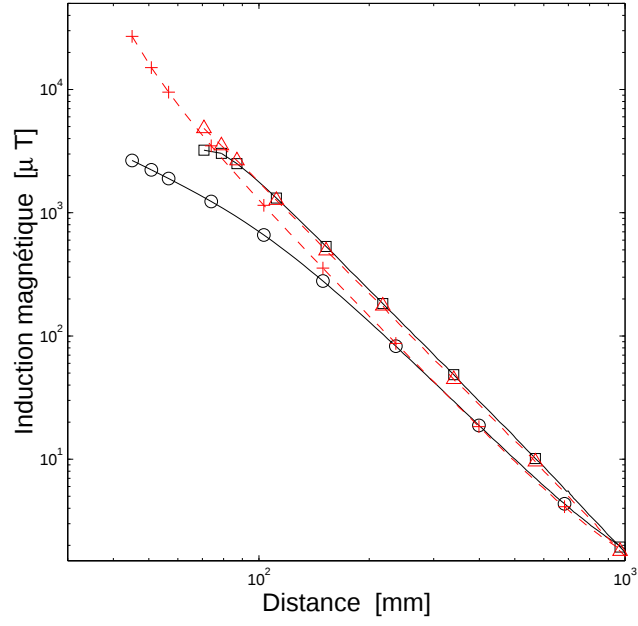


FIG. 2.2 – Champ généré dans l'air par le dispositif (D) de chauffage par induction ($\circ, \square$), et par une spire ($+, \Delta$).

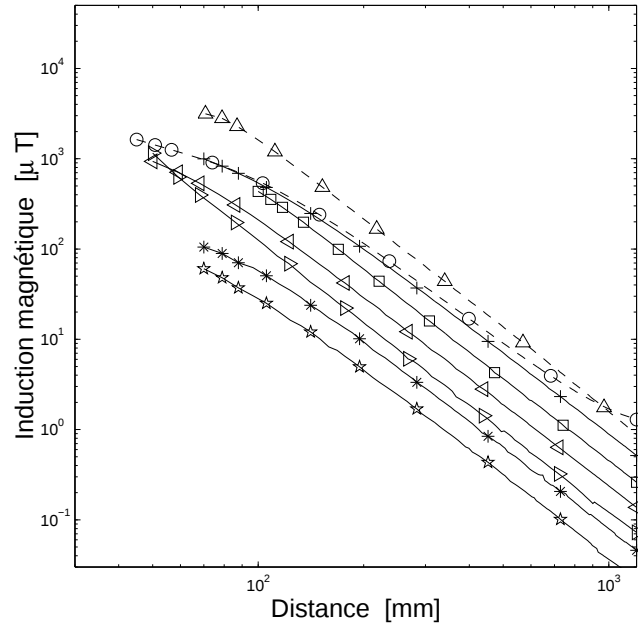


FIG. 2.3 – Champ généré dans l'air par les dispositifs modélisés : ($\circ, \triangleright$) = dispositif A. ($+, \square$) = dispositif B. ($*, \star$) = dispositif C. ($\circ, \Delta$) = dispositif D.

Pour vérifier que la décroissance en $1/r^3$ n'est pas spécifique au dispositif de chauffage par induction (D), on a tracé en fig. 2.3 l'induction magnétique générée dans l'air par ce même dispositif (traits discontinus) avec celle générée par les autres dispositifs A², B³ et C⁴ (traits continus). On observe que le champ généré par tous ces dispositifs décroît de la même manière, c'est à dire en $1/r^3$. On observe aussi que les courbes correspondant aux dispositifs A, B, C, pour lesquelles l'infini a été pris en compte avec la technique de la boîte infinie[IMBS90], sont bien rectilignes (mis à part une ondulation numérique) : ceci confirme que la distorsion qu'on a observé dans le cas précédent (o), est bien due aux conditions aux limites de type Dirichlet.

La décroissance en $1/r^3$ a déjà été observée expérimentalement[ZSV97, YK01], et semble être le type de décroissance le plus commun. Pour comprendre la raison de ce comportement, on peut écrire[Dur68] l'induction magnétique $\vec{B}$ comme somme du champ généré par les bobinages $\vec{B}_0$ (*champ d'excitation*) plus le champ réduit $\vec{B}_{red}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{red} \quad (2.21)$$

La composante $\vec{B}_{red}$ due à l'aimantation du matériau peut s'écrire en fonction de l'aimantation $\vec{M}$:

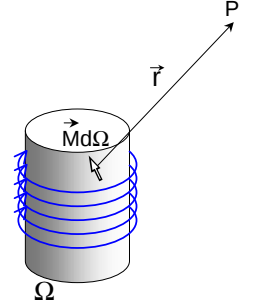
$$\vec{B}_{red} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (2.22)$$

À grande distance du dispositif, le vecteur $\vec{r}$ ne varie pas beaucoup d'une partie à l'autre du noyau Ω , et donc en première approximation il peut être sorti de l'intégrale :

$$\vec{B}_{red} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\vec{M} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right] \quad (2.23)$$

où $\langle \vec{M} \rangle = \iiint_{\Omega} \vec{M} d\Omega$ le moment dipolaire équivalent. Cette équation signifie que si $\langle \vec{M} \rangle \neq 0$, à grande distance le champ réduit peut être approché avec le champ d'un dipôle magnétique, tout comme le champ $\vec{B}_0$ généré par les bobinages. Ceci explique pourquoi la décroissance en $1/r^3$ est si commune. Une décroissance d'ordre supérieur est observée lorsque le moment dipolaire équivalent $\langle \vec{M} \rangle$ est nul, comme c'est le cas pour des machines qui présentent des symétries particulières[SK01].

Pour ce qui concerne l'ordre de grandeur du champ réduit par rapport au champ des bobinages, aucune tendance n'a pu être mise en évidence : pour le dispositif (A) le champ de réaction est très largement dominant, alors que pour les dispositifs (B) et (C) ces deux composantes sont du même ordre de grandeur.



Le champ réduit $\vec{B}_{red}$ est exprimé comme la résultante du champ généré par un grand nombre de dipôles $\vec{M} d\Omega$.

²Formulation magnétostatique 3D en potentiels scalaires (82184 éléments d'ordre 2, pour 1/8 de la géométrie). Prise en compte de l'infini avec la boîte infinie. Paramètres : $\mu_{no} = 100$, $h = 2$ mm

³Formulation magnétostatique 3D en potentiels scalaires (43433 éléments d'ordre 2, pour 1/8 de la géométrie). Prise en compte de l'infini avec la boîte infinie. Paramètres : $\mu_{no} = 100$

⁴Formulation magnétostatique 3D en potentiels scalaires (42315 éléments d'ordre 2). Prise en compte de l'infini avec la boîte infinie. Paramètres : $\mu_{no} = 100$, $h = 2$ mm

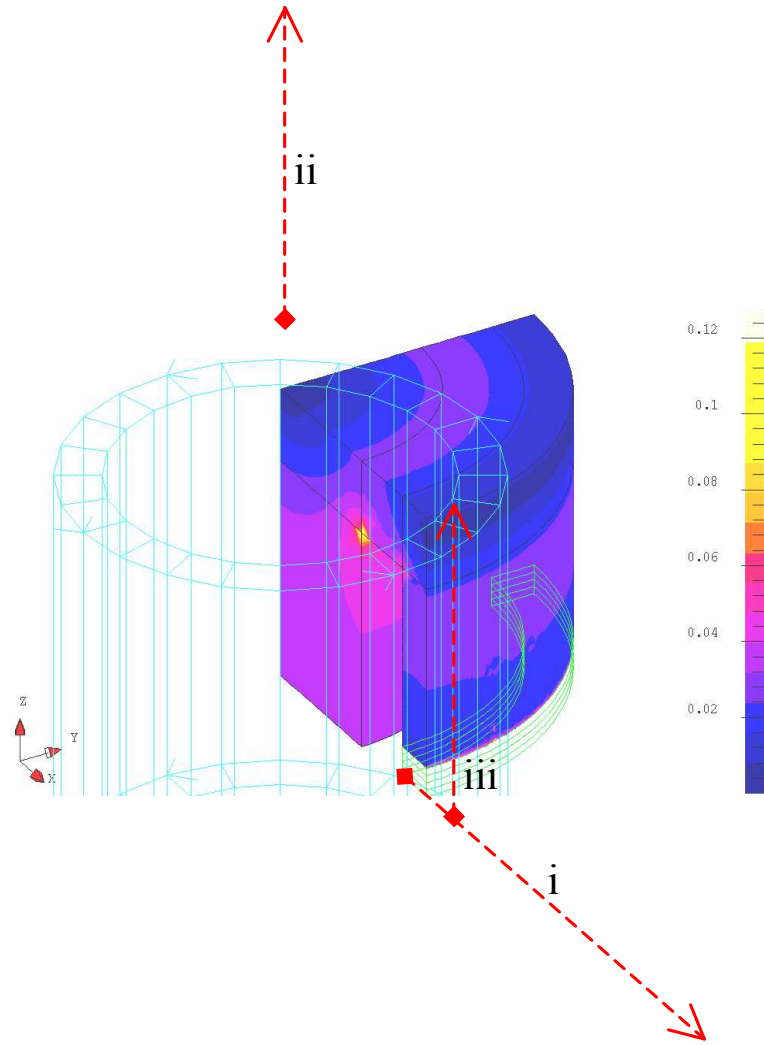


FIG. 2.4 – Induction sur la surface du dispositif inducteur (A) pour une épaisseur d'entrefer $h = 10$ mm. Les trois flèches représentent les directions le long desquelles l'induction a été calculée. On peut observer que l'entrefer est composé de cinq couches minces : ceci permet de modifier l'épaisseur de l'entrefer h de façon non continue entre 2 mm et 10 mm sans reconstruire le maillage.

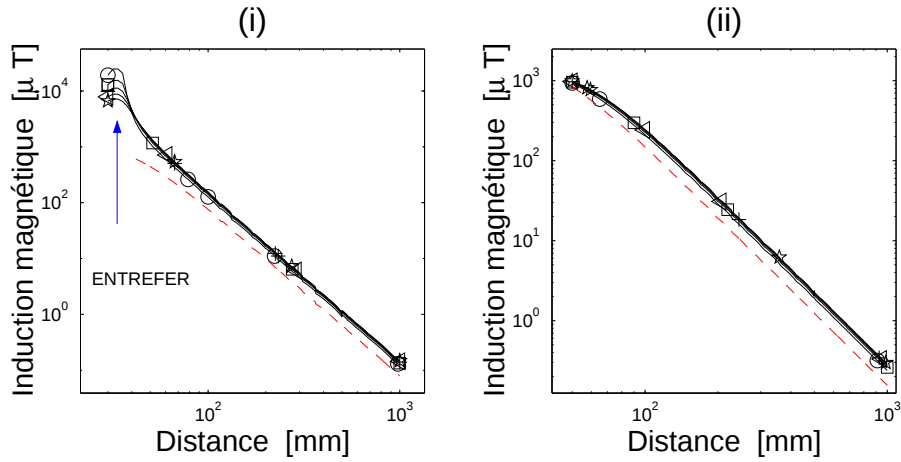


FIG. 2.5 – Induction générée par le dispositif inducteur (A) le long de la direction i (gauche) et ii (droite) pour différentes valeurs de l'épaisseur d'entrefer h : (o) = 2 mm, ($\square$) = 4 mm, (+) = 6 mm, ($\triangleleft$) = 8 mm, ($\star$) = 10 mm. La ligne discontinue correspond au cas où il n'y a pas d'entrefer.

2.2.2 Influence de l'épaisseur des entrefers

Les dispositifs A (inducteur) et C (circuit magnétique) permettent d'étudier l'effet de l'épaisseur d'un entrefer h , sur la répartition du champ dans l'air. L'induction magnétique générée par le dispositif inducteur (A) a été calculée le long de trois directions (fig. 2.4) :

- i sur le plan de symétrie du système, à partir de l'intérieur de l'entrefer.
- ii sur l'axe de révolution du dispositif
- iii parallèlement à l'axe de révolution, à proximité de l'entrefer

L'induction magnétique a été calculée pour une épaisseur d'entrefer h comprise entre 2 mm et 10 mm. On peut observer qu'à proximité de l'entrefer (fig. 2.5 gauche) les courbes sont très bien séparées les unes des autres. Par contre, dès qu'on s'éloigne de l'entrefer, les courbes se rapprochent et deviennent rapidement difficiles à distinguer. Une analyse plus attentive montre qu'au dehors de l'entrefer, le champ augmente faiblement avec l'épaisseur h de celui-ci. Par exemple, dans le tableau suivant est reportée la valeur de l'induction calculée à l'intérieur de l'entrefer, à 1 m de distance dans la direction (i) et (ii) :

ENTREFER [mm]	INDUCTION [μ T]		
	à l'entrefer	à 1 m en dir. (i)	à 1 m en dir. (ii)
2 mm	24755	0.122	0.238
4 mm	15462	0.134	0.256
6 mm	11224	0.140	0.272
8 mm	8773	0.144	0.280
10 mm	7184	0.147	0.286

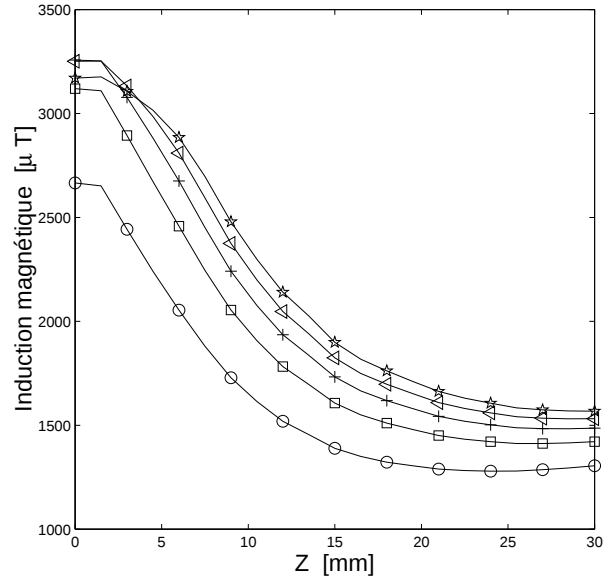


FIG. 2.6 – Induction générée par le dispositif inducteur (A) le long de la direction (iii) pour différentes valeurs de l'épaisseur d'entrefer h : (○) = 2 mm, (□) = 4 mm, (+) = 6 mm, (◁) = 8 mm, (★) = 10 mm.

Le calcul du champ le long de la direction (iii) confirme cette tendance (fig. 2.6). Des calculs similaires sur le dispositif inducteur (C) ont également donné le même résultat (fig. 2.7).

Les simulations que l'on vient de faire nous indiquent que l'influence de l'épaisseur de l'entrefer h sur le champ magnétique dans l'air est relativement faible (de l'ordre de quelques %). Par contre, on observe une grande variation si l'on élimine complètement l'entrefer (ligne discontinue en fig. 2.4). On en déduit que l'influence de l'entrefer sur le champ dans l'air est d'autant plus élevée, que son épaisseur est réduite.

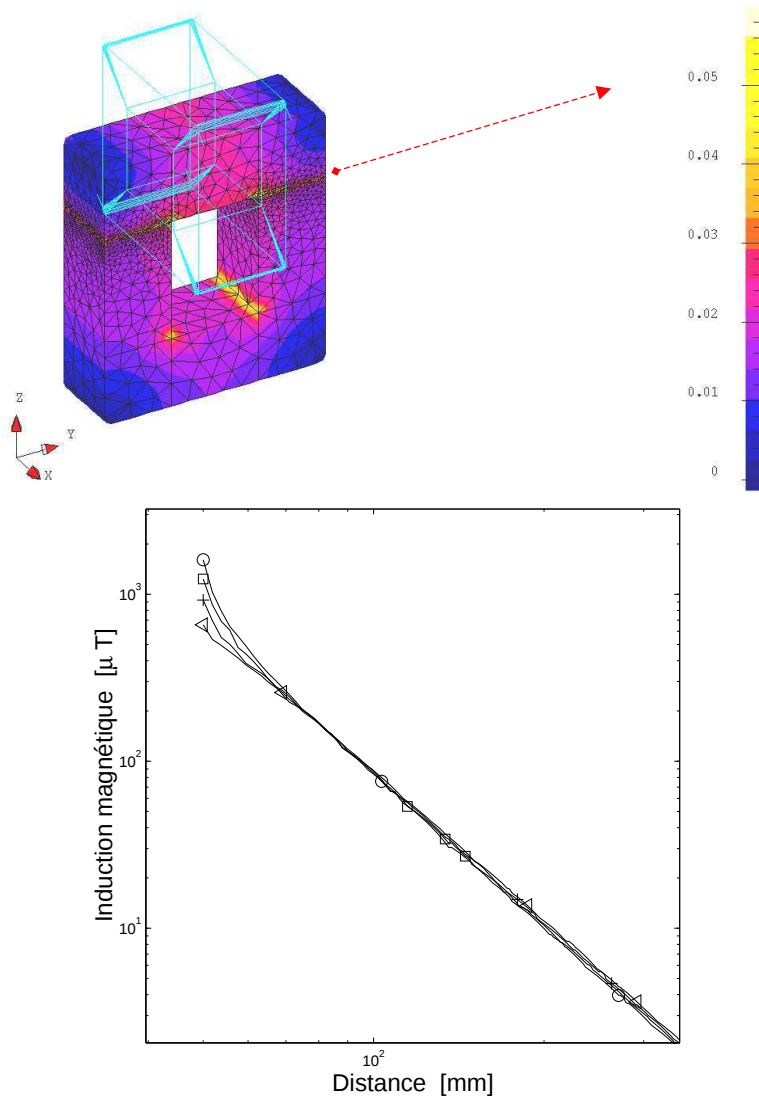


FIG. 2.7 – dispositif inducteur (C). Haut : induction magnétique à la surface du dispositif pour un entrefer de 0.5 mm. Bas : induction magnétique calculée le long de la flèche pour différentes valeurs de l'épaisseur d'entrefer h : ($\circ$) = 2 mm, ($\square$) = 1 mm, (+) = 0.5 mm, ($\triangleleft$) = 0.2 mm. La variation de l'épaisseur de l'entrefer a été obtenue en modifiant chaque fois la géométrie du système.

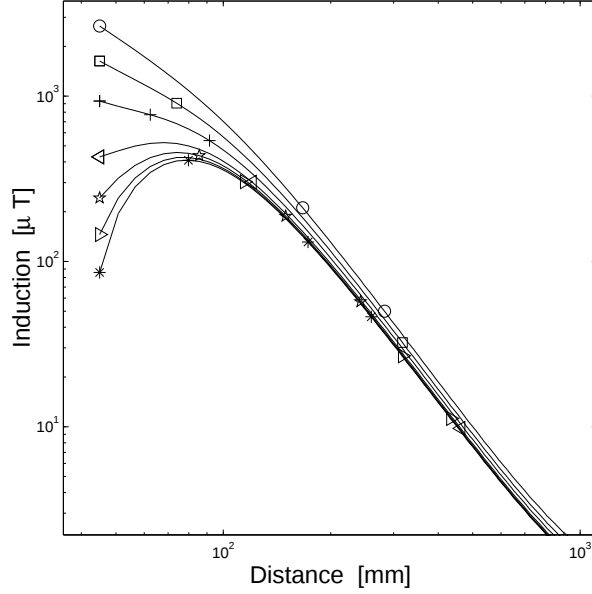
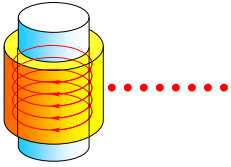


FIG. 2.8 – induction générée sur le plan de symétrie par le dispositif de chauffage par induction (D), pour différentes valeurs de la perméabilité de la charge μ_{ch} : ($\circ$) = 100, ($\square$) = 200, (+) = 400, ($\triangleleft$) = 1000, ($\star$) = 2000, ($\triangleright$) = 4000, (*) = 10000.

2.2.3 Influence de la perméabilité



Pour étudier l'influence des propriétés magnétiques des matériaux qui composent les dispositifs, on a calculé le champ généré par le dispositif de chauffage par induction (D), en faisant varier la perméabilité relative de la charge μ_{ch} entre 100 et 10000. Dans ces premières simulations, on a supposé que le matériau reste linéaire, et que le système fonctionne en régime sinusoïdal. En fig. 2.8 est tracée l'induction magnétique générée par le dispositif de chauffage par induction (D) sur le plan de symétrie.

On constate que le champ est plus sensible aux variations de la perméabilité à une distance rapprochée du dispositif, alors qu'à grande distance les courbes se rapprochent. En particulier, à partir d'environ 15 cm les courbes correspondant à $\mu_{ch} \geq 1000$ sont confondues. On retrouve le même comportement si l'on calcule le champ dans d'autres directions, et pour les autres dispositifs. On a vérifié que ce comportement n'est pas spécifique aux matériaux linéaires : même avec des matériaux non linéaires en conditions de saturation élevée, on observe que le champ à grande distance ne dépend que très faiblement des caractéristiques des matériaux qui composent le système[SBM03].

Cette information est très intéressante, car dans la pratique on connaît rarement avec précision les caractéristiques des matériaux, d'autant plus que celles-ci peuvent varier en fonction de la température. De plus, si l'on souhaite connaître le champ généré par un système électromagnétique dans une région où l'on sait *a priori* que les caractéristiques des matériaux n'ont que peu d'influence, on pourrait se contenter d'un calcul linéaire, ou bien utiliser le principe de super-

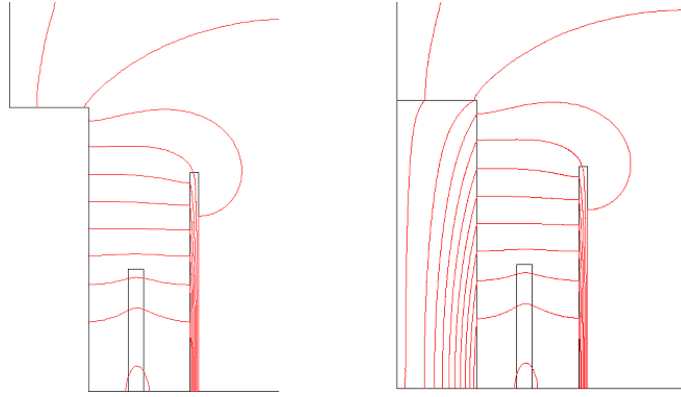


FIG. 2.9 – le dispositif de chauffage par induction (D) est modélisé en imposant le champ normal sur le noyau (gauche), et en imposant $\mu_{no} = 1000$ comme perméabilité du noyau (droite).

position, si les sources du champ sont multiples. Ce fait pourrait revêtir un intérêt tout-à-fait particulier pour des problèmes d'optimisation, où il peut y avoir nécessité d'exécuter la simulation d'un système électromagnétique à plusieurs reprises, pour différentes valeurs des paramètres à optimiser.

Une explication intuitive de ce comportement est que lorsque la perméabilité est suffisamment élevée, le champ à l'interface entre l'air et le matériel magnétique est presque orthogonal. Donc on peut penser à éliminer du domaine de résolution le matériau magnétique, et à imposer un champ normal à l'interface entre celui-ci et l'air : on parviendrait ainsi à calculer l'état-limite vers lequel tend le champ magnétique lorsque la perméabilité augmente indéfiniment.

Pour vérifier si cette idée est viable, j'ai essayé de modéliser avec cette approche le système de chauffage par induction. La figure 2.9 représente les lignes de flux dans le cas où la perméabilité relative du noyau est $\mu_{no} = 1000$ (droite), et dans le cas où des conditions de Neumann sont imposées sur la frontière noyau-air (gauche). La ressemblance entre les deux dessins est évidente.

En figure 2.10 (gauche) on a tracé l'induction calculée sur le plan de symétrie pour différentes valeurs de μ_{no} , et en imposant les conditions de Neumann ($\star$ = état-limite). On constate que lorsque la perméabilité augmente, à grande distance l'induction s'approche de la courbe limite. Curieusement, on constate (fig. 2.10, droite) que lorsque la perméabilité augmente, en tout point l'induction B semble s'approcher de la valeur-limite B_∞ selon une loi de puissance :

$$\left| \frac{B_\infty - B}{B_\infty} \right| = k \left(\frac{1}{\mu_{no}} \right)^\alpha$$

$\alpha = 0.98 \simeq 1$ étant la valeur estimée de l'exposant.

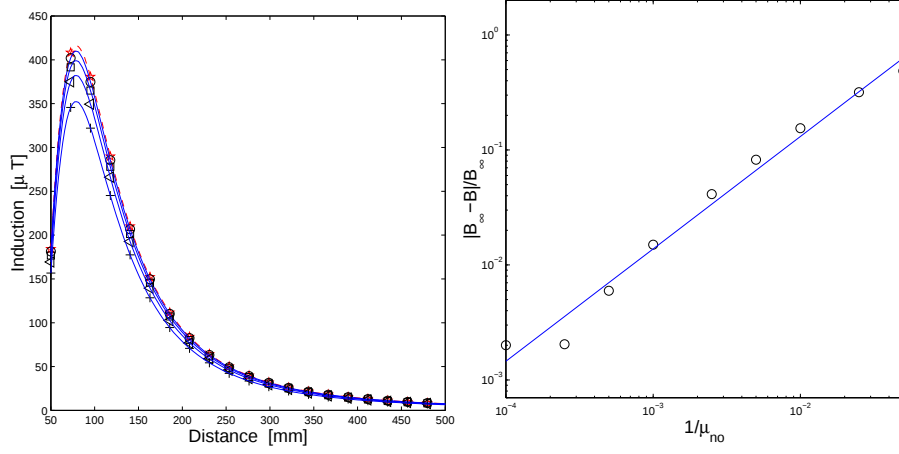


FIG. 2.10 – Gauche : induction générée par le dispositif (D) pour $\mu_{no} = 100$ (+), $\mu_{no} = 200$ (◁), $\mu_{no} = 400$ (◻), $\mu_{no} = 1000$ (◦), et valeur limite (*). Droite : scaling de $\left| \frac{B_{\infty} - B}{B_{\infty}} \right|$ en fonction de $\frac{1}{\mu_{no}}$ (valeurs moyennées).

Une explication très simple de ce phénomène peut être la suivante. Considérons un tube de flux qui s'étend en partie dans l'air, et calculons le flux ϕ :

$$\phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{FE} + \mathcal{R}_{air}}$$

$\mathcal{R}_{FE}$ et $\mathcal{R}_{air}$ étant la réluctance de la partie du tube dans le matériau magnétique et dans l'air respectivement. Dans la limite pour $\mu_r \rightarrow \infty$, la réluctance $\mathcal{R}_{FE}$ de la partie du tube dans le matériel magnétique tend vers zéro comme $1/\mu_r$, et la valeur limite du flux est :

$$\phi_{\infty} = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{air}}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi - \phi_{\infty}}{\phi_{\infty}} \right| &= NI \left(\frac{1}{\mathcal{R}_{air}} - \frac{1}{\mathcal{R}_{FE} + \mathcal{R}_{air}} \right) = \\ &= \frac{NI \mathcal{R}_{FE}}{\mathcal{R}_{air}(\mathcal{R}_{FE} + \mathcal{R}_{air})} \simeq \\ &= \frac{NI}{\mathcal{R}_{air}^2} \mathcal{R}_{FE} \propto \frac{1}{\mu_r} \end{aligned}$$

Donc l'induction $B \simeq \mu_0 \frac{\phi}{S}$ aussi s'approche de la valeur limite selon la loi d'échelle :

$$\left| \frac{B - B_{\infty}}{B_{\infty}} \right| \propto \frac{1}{\mu_r}$$

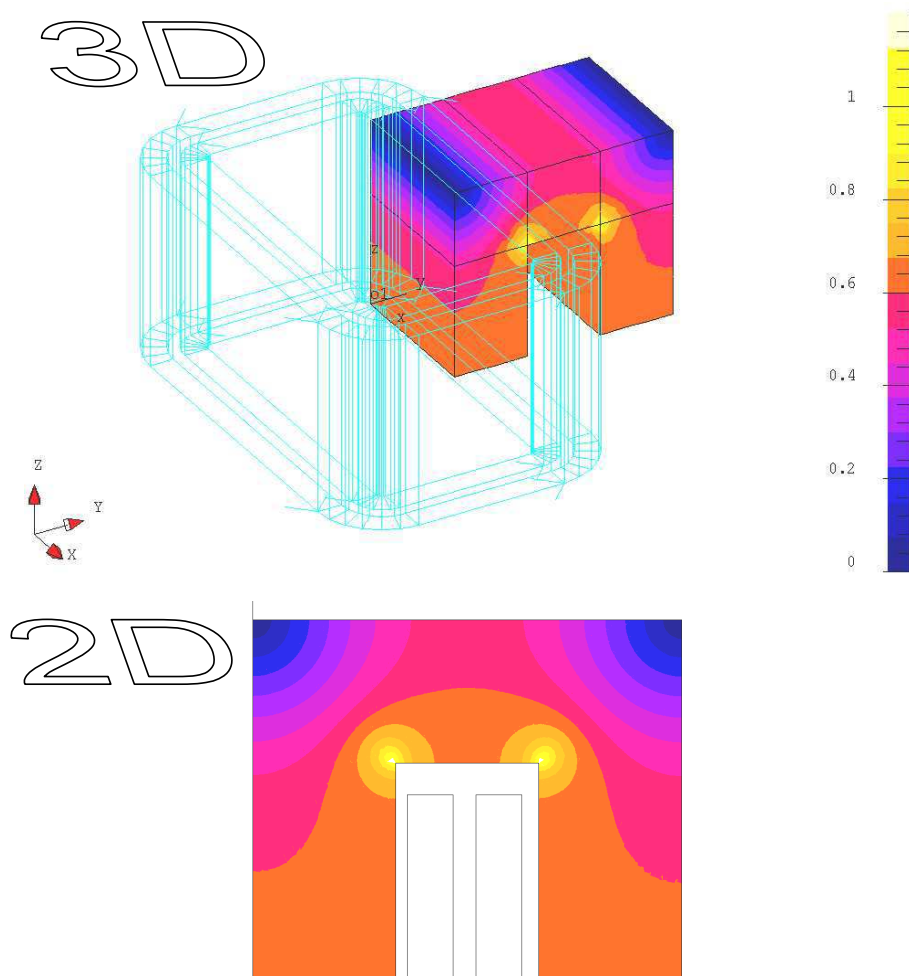


FIG. 2.11 – induction magnétique à la surface du transformateur (dispositif B) calculée par modélisation 2D (en bas) et 3D (en haut).

2.2.4 Modélisation 2D ou 3D ?

La modélisation 3D des dispositifs électrotechniques est coûteuse en terme de ressources matérielles (logiciels, matériel informatique) et humaines (formation de l'utilisateur). C'est pourquoi dans la pratique on a recours à la modélisation 2D chaque fois que la possibilité se présente. Il est donc important de savoir s'il est possible de modéliser les fuites en 2D, et avec quelle erreur.

Dans la fig. 2.11 est dessinée la répartition de l'induction magnétique à la surface du noyau du transformateur (B), calculée par modélisation 2D (en bas) et 3D (en haut), et tracée avec la même échelle de couleurs. Il semblerait que les résultats obtenus par modélisation 2D et 3D soient quasiment identiques :

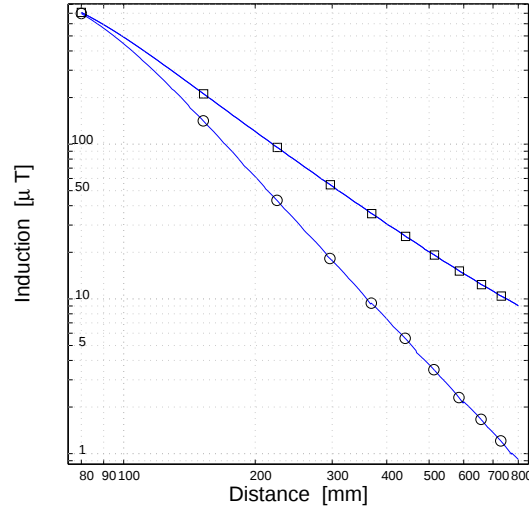
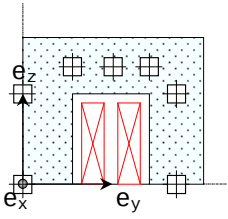


FIG. 2.12 – induction magnétique dans l’air calculée par modélisation 2D ($\square$) et 3D ($\circ$).



Position des points où l’induction est calculée ($x = 0$)

COMPARAISON ENTRE LE CALCUL 2D ET 3D			
Y [mm]	Z [mm]	INDUCTION 2D [T]	INDUCTION 3D [T]
0.0	0.0	0.53874	0.611185
0.0	38.0	0.502664	0.504558
25.0	50.5	0.57326	0.574460
37.5	50.5	0.60370	0.605249
50.0	50.5	0.57330	0.571656
62.5	38.0	0.57284	0.571458
62.5	0.0	0.60544	0.605716

En réalité, si l’on compare les valeurs de l’induction dans l’air (fig. 2.12) on s’aperçoit que le calcul 2D est totalement faux dans l’air, dès que l’on s’éloigne un peu du dispositif : les valeurs ne sont pas proches de celles obtenues par modélisation 3D, mais surtout on ne retrouve pas la “bonne” décroissance en $1/r^3$. Ceci s’explique très simplement. Tout d’abord, lorsqu’on calcule dans l’air on est *intrinsèquement* dans une configuration 3D, car l’air n’a pas de symétries particulières. Deuxièmement, la fonction de Green[MT76] pour l’équation de Laplace n’est pas la même en 2D et en 3D : ceci explique pourquoi l’induction calculée par modélisation 2D décroît comme $1/r^2$ plutôt que comme $1/r^3$.

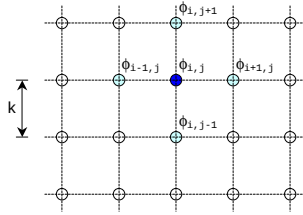


DIFFÉRENCES FINIES (DF) :

La méthode des différences finies[TH00] est l'une des premières méthodes numériques à avoir été appliquée en génie électrique. Le principe de base de cette méthode consiste à discrétiser le domaine de résolution avec une grille, et d'approcher l'équation sous forme différentielle sur chaque nœud de la grille. Par exemple, en 2D l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ devient :

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

$\xleftrightarrow{h}$



L'équation aux dérivées partielles est ainsi transformée en un système algébrique linéaire creux. Si cette méthode est *en principe* relativement simple à mettre en œuvre, des problèmes peuvent se poser[BLT94] lorsqu'on doit gérer des géométries compliquées (discrétisation de la frontière, conditions d'interface).

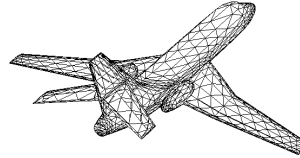
ÉLÉMENTS FINIS (EF) :

Une grande partie de ces problèmes peuvent être surmontés avec la méthode des éléments finis[NB92]. Cette méthode est basée sur une formulation

variationnelle[Fin72] du problème : par exemple, l'équation de Laplace peut être exprimée en forme équivalente à travers le principe de moindre énergie :

$$\phi = \arg \min \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi d\Omega$$

L'inconnue du problème (dans ce cas le potentiel ϕ) est définie sur les nœuds ou sur les arêtes d'un maillage[FG99], qui est construit de façon à reproduire fidèlement la géométrie du système.



La méthode des éléments finis conduit, comme la méthode des DF, à un système creux. L'avantage principal par rapport à celle-ci est que pour le même nombre de degrés de liberté la géométrie est mieux prise en compte.

ÉQUATIONS INTÉGRALES DE FRONTIÈRE (EIF) :

La méthode des DF et celle des EF requièrent toutes deux que le domaine de résolution soit étendu à tout l'espace, ce qui implique une très grande quantité de mémoire pour stocker les variables. De plus, la construction d'un maillage 3D de bonne qualité est une opération très compliquée[FG99]. L'atout principal de la méthode des équations intégrales de frontière est que l'inconnue du problème est définie seulement sur la frontière de chaque région : par conséquent, seul un maillage surfacique est nécessaire.

Le principe de base de cette méthode[Hun01] est que la grandeur inconnue ϕ peut être calculée dans tout point de l'espace Ω , à condition de connaître ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω . Or, n'importe quelle combinaison de ϕ et $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ n'est pas admise sur Γ : ces deux grandeurs sont liées l'une à l'autre par une condition de compatibilité. Par exemple, dans le cas de l'équation de Laplace en 3D cette condition est[Leg96] :

$$\varpi\phi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\Gamma$$

ϖ étant l'angle solide[Dur64] en tout point de Γ . Ainsi, si l'on impose ϕ sur la frontière (conditions de Dirichlet) on peut calculer $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, et vice versa.

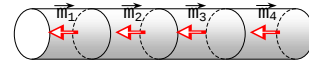
Dans la pratique, l'inconnue est interpolée sur la frontière grâce à un maillage surfacique. La méthode conduit à un système linéaire plein, mais de taille réduite par rapport aux méthodes des DF et EF. La principale difficulté de cette méthode est qu'elle requiert le calcul par voie numérique d'intégrales singulières.

La méthode des équations intégrales de frontière paraît donc bien adaptée au calcul de grandeurs électromagnétiques dans l'air. En contrepartie, elle n'est applicable que si le problème est linéaire. Il est possible de surmonter cette difficulté en couplant des éléments finis (à l'intérieur de régions non linéaires) avec des équations intégrales de frontière.

MÉTHODE DES MOMENTS (MOM) :

Dans la méthode des EIF l'aspect physique des phénomènes électromagnétiques est plus ou moins caché par le formalisme mathématique très

complexe. Au contraire, la méthode des moments[Ban96] consiste à discrétiser les régions "matériels" en petits morceaux, à l'intérieur de chacun desquels est localisée une "source simple". Chacune des sources interagit avec toutes les autres. Ainsi, grâce au principe de superposition, on parvient à un système linéaire plein dont les inconnus sont précisément les sources. Par exemple, dans un problème de magnétostatique[CRC02] on peut prendre comme source du champ des dipôles magnétiques $\vec{m}$, localisés à l'intérieur des régions magnétiques. Le champ réduit est ainsi calculé comme la somme des contributions de chaque dipôle.

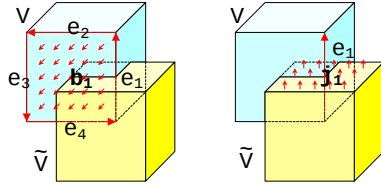


TECHNIQUE DES INTÉGRAUX FINIS (TIF) :

Les méthodes précédentes sont fondées sur les équations de Maxwell en forme différentielle. De ce fait, des problèmes peuvent se poser lorsque l'on a à faire à des discontinuités (interfaces, angles aigus, ...), où les opérateurs différentiels ne sont pas bien définis[Bos]. Une famille de méthodes récentes (technique des intégraux finis[Wei77, CW01], méthode des cellules[Ton01]) est basée sur les équations de Maxwell en forme intégrale, ce qui permet de s'affranchir de ce type de problèmes.

Ces méthodes utilisent *deux* maillages : un maillage primal et son dual (par exemple, une triangulation de Delaunay et le pavage correspondant de Voronoï).

Certaines grandeurs sont définies sur le maillage primal (tension électrique e , flux magnétique b), d'autres sur le maillage dual (courant $\tilde{j}$). Chacune des équations de Maxwell en forme intégrale est discrétisée sur un seul des deux maillages, *sans introduire d'approximations*. Les lois constitutives des matériaux forment la liaison nécessaire entre les deux maillages.



Par exemple, la loi de Faraday $\oint_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma$ est discrétisée sous la forme :

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = -\frac{db_1}{dt}$$

e_k et b étant respectivement les tensions entre les nœuds et le flux magnétique à travers les faces de l'élément primal V . La loi d'Ohm est discrétisée sous la forme :

$$\frac{\tilde{j}}{A} = \sigma \frac{e}{L}$$

L étant la longueur de l'arrêt concernée, et A la surface de la face de l'élément. L'intérêt de ces méthodes est que des approximations sont introduites seulement dans la définition des lois constitutives des matériaux.

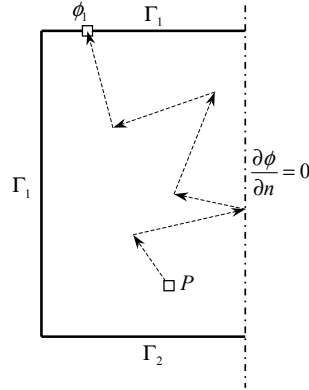
MÉTHODE MONTECARLO :

Cette méthode, à vrai dire assez "exotique", est basée sur l'analogie entre l'électromagnétisme et... le phénomène de diffusion d'un gaz [Kat44, Far93].

Bien que cette comparaison puisse paraître pour le moins bizarre, elle est fondée sur le fait que le champ magnétique en régime quasi-statique est modélisé par l'équation de Laplace (eq. 2.14 lorsque μ est constante), qui décrit également les phénomènes de diffusion. Supposons donc que l'on veuille calculer le potentiel ϕ en un point P , sachant que le modèle du système est :

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi = \phi_1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \phi = \phi_2 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

La méthode consiste à simuler des chemins aléatoires à partir du point P . Chaque trajectoire s'arrête lorsque l'on "tombe" sur un point à Dirichlet (Γ_1 ou Γ_2), et rebondit sur la frontière Γ_3 :



On répète l'opération N fois, en prenant soin de stocker la valeur ϕ_k du potentiel sur chaque point d'arrivée du chemin. La valeur du potentiel au point P est enfin estimée comme la moyenne de ϕ_k :

$$\phi(P) = \frac{\sum \phi_k}{N}$$

Une extension de cette méthode [Dav03] de calculer les grandeurs électriques qui permet de résoudre des problèmes en seulement quelques points, à priori plus complexes a été présentée récemment sans construire le maillage, et avec une précision variable (proportionnellement à $\sqrt{N}$). L'intérêt de cette méthode intrinsèquement parallèle est qu'il est possible

2.3 Vers une modélisation simplifiée

Jusqu'à présent on a utilisé des logiciels de calcul par éléments finis pour étudier les champs de fuite. Ces logiciels sont très performants, mais aussi, comme l'on a déjà eu occasion de remarquer, coûteux.

Cependant, on a pu observer qu'à partir d'une certaine distance, pourtant bien approchée du dispositif, l'allure de ces champs est relativement simple. C'est pourquoi on a cherché une modélisation qui, au prix de quelques approximations, permet d'obtenir des résultats à un coût (temps de calcul, mémoire) inférieur aux méthodes classiques.

Pour atteindre cet objectif, il fallait s'orienter vers une méthode qui ne prenne en compte que les aspects essentiels de la géométrie du système, et qui donc ne nécessite pas de maillage 3D. D'un point de vue d'électrotechnicien, il serait pratique de disposer d'un outil semblable à la méthode des réductances, qui permet de décrire le système en termes de tubes de flux et entrefers. Or, la méthode des réductances est intrinsèquement inadaptée pour calculer des grandeurs dans l'air, car l'une des hypothèses est l'absence de fuites. On a donc cherché à suivre la même approche que cette méthode, mais en y ajoutant la possibilité de prendre en compte les fuites. Pour ceci il est indispensable de modéliser le champ réduit.

2.3.1 Représentations du champ réduit

Soit $\vec{H}$ le champ magnétique généré par un dispositif. Rappelons que l'on peut décomposer ce champ en la somme du champ $\vec{H}_0$ généré par les bobinages dans le vide, et le champ réduit $\vec{H}_{red}$ qui est du à la présence de matériau magnétique :

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_{red} \quad (2.24)$$

Il existe différentes façons de représenter la réaction d'induit $\vec{H}_{red}$, chacune d'entre elles présente ses propres avantages et inconvénients.

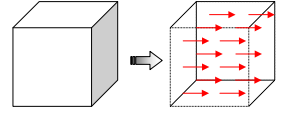
NOTATIONS

Dans la suite on va supposer que le matériau magnétique occupe le volume Ω , ayant $\Gamma = \partial\Omega$ pour frontière. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur. On va appeler $P \equiv (x, y, z)$ un point quelconque de l'espace, $Q \equiv (x', y', z')$ un point quelconque de Ω , $\vec{r}$ le vecteur $\overrightarrow{QP}$ et $r = \|\vec{r}\|$ son module. Dorénavant les variables x' , y' et z' joueront le rôle de variables d'intégration. Afin d'éviter toute ambiguïté, et seulement si nécessaire, on va préciser avec les symboles $\vec{\nabla}_P$ et $\vec{\nabla}_Q$ si les opérateurs différentiels sont calculés par rapport à P ou à Q .

Distribution volumique de dipôles

Cette représentation est la plus intuitive, et dérive directement de la définition (ou de l'interprétation, selon l'approche que l'on adopte) du vecteur aimantation $\vec{M}$ comme densité volumique de moment de dipôle. On a déjà eu l'occasion d'utiliser cette représentation au paragraphe 2.2.1 :

$$\vec{H}_{red} = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (2.25)$$



Cette représentation n'est pas très commode, du fait qu'elle comporte une intégrale volumique. Une parade[MPPS02, CRC02] consiste à concentrer dans un seul point un dipôle équivalent $\vec{m} = \iiint_{\Omega} \vec{M} d\Omega$.

Distribution de courants

Le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ généré par le matériau peut s'écrire comme[Dur68] :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{M} \times \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega = \quad (2.26)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{M} \times \vec{\nabla}_Q \frac{1}{r} d\Omega = \quad (2.27)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \vec{\nabla}_Q \times \vec{M} - \vec{\nabla}_Q \times \frac{\vec{M}}{r} \right) d\Omega \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}}{r^3} &= -\vec{\nabla}_P \frac{1}{r} = \vec{\nabla}_Q \frac{1}{r} \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{F}) &= f\vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla} f \end{aligned}$$

Si le point P se trouve à l'extérieur de Ω cette intégrale n'est pas singulière, et l'on peut appliquer le théorème du rotationnel[Pus91] :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \vec{\nabla}_Q \times \vec{M} d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{M}}{r} \times \vec{n} d\Gamma \quad (2.29)$$

On peut prouver⁵ que cette équation est valable partout, donc même à l'intérieur de Ω . Si l'on suppose que le matériau est linéaire et isolant, alors $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$, donc l'expression précédente se réduit à la seule intégrale de surface :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{M}}{r} \times \vec{n} d\Gamma \quad (2.30)$$

$$\vec{H}_{red} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.31)$$

Ceci peut être interprété comme le potentiel vecteur généré par une nappe de courant circulant sur Γ , de densité :

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{n} \quad (2.32)$$

Distribution de charges fictives

Le potentiel scalaire magnétique réduit ψ généré par le matériau magnétique peut s'écrire comme [Dur68] :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{M} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega = \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \vec{M} \cdot \vec{\nabla}_Q \frac{1}{r} d\Omega = \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \left(\vec{\nabla}_Q \cdot \frac{\vec{M}}{r} - \frac{1}{r} \vec{\nabla}_Q \cdot \vec{M} \right) d\Omega \quad (2.35)$$

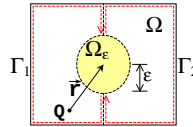
Si le point P se trouve à l'extérieur de Ω cette intégrale n'est pas singulière, et l'on peut appliquer le théorème de la divergence [Pus91] :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(-\vec{\nabla}_Q \cdot \vec{M})}{r} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{r} d\Gamma \quad (2.36)$$

Si l'on suppose que le matériau est linéaire et isolant, alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, donc l'expression précédente se réduit à la seule intégrale de surface :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{r} d\Gamma \quad (2.37)$$

⁵On a : $\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}}{r} d\Omega = \iiint_{\Omega_{\epsilon}} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}}{r} d\Omega - \iint_{\Gamma_1} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} d\Gamma - \iint_{\Gamma_2} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} d\Gamma - \iint_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} d\Gamma$ étant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Sur Ω_{ϵ} $\vec{M}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{M}$ sont presque constants pour $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$, donc : $\iiint_{\Omega_{\epsilon}} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}}{r} d\Omega \simeq \vec{\nabla} \times \vec{M} \iiint_{\Omega_{\epsilon}} \frac{1}{r} d\Omega - \vec{M} \times \iint_{\Omega_{\epsilon}} \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega = 0$ et $\iint_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} d\Gamma \simeq \vec{M} \times \iint_{\Gamma_{\epsilon}} \frac{\vec{n}}{r} d\Gamma = 0$. Donc $\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M}}{r} d\Omega = -\iint_{\Gamma} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} d\Gamma$. QED



$$\vec{H}_{red} = -\vec{\nabla}\psi \quad (2.38)$$

Ceci peut être interprété comme le potentiel généré par une distribution surfacique de charges fictives, de densité :

$$\sigma^* = \vec{M} \cdot \vec{n} \quad (2.39)$$

Mathématiquement, σ^* s'appelle aussi *potentiel de simple couche*.

On peut prouver[Dur68] que cette représentation continue à être valable partout, à condition de modifier (2.38) comme :

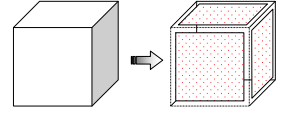
$$\vec{H}_{red} = -\left(\frac{\varpi}{4\pi}\vec{M} + \vec{\nabla}\psi\right) \quad (2.40)$$

$\varpi = \iint_{\Gamma} \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Gamma$ étant l'angle solide[Dur64]. En particulier, à l'intérieur de Ω on a :

$$\vec{H}_{red} = \vec{M} - \vec{\nabla}\psi \quad (2.41)$$

et en chaque point régulier de Γ :

$$\vec{H}_{red} = \frac{1}{2}\vec{M} - \vec{\nabla}\psi \quad (2.42)$$



POINT RÉGULIER: un point P d'une surface Γ se dit *régulier* si Γ admet un plan tangent en P

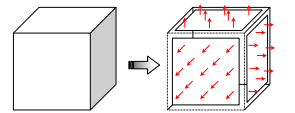
On remarquera qu'en toute rigueur (2.36) et (2.37) ne sont pas correctes : en effet, le potentiel ψ ainsi calculé n'est pas le même que celui calculé avec (2.33), qui est un "vrai" potentiel réduit (c'est bien pour cela que (2.38) n'est valable qu'à l'extérieur de Ω). Néanmoins, on continuera à utiliser cette notation, tout en gardant à l'esprit cette différence.

Distribution de dipôles fictifs

Il existe également la possibilité de modéliser le champ réduit dans l'air[Leg96] à travers une distribution surfacique de dipôles normaux à Γ :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{(\tau \vec{n}) \cdot \vec{r}}{r^3} d\Gamma \quad (2.43)$$

où $\tau = \psi$ est la densité de dipôles, appelée aussi *potentiel de double couche*.



2.3.2 Première modélisation à travers les charges fictives

Je me suis orienté dès le début vers une représentation en termes de charges fictives. Tout d'abord, parce qu'il est relativement facile de calculer le champ et le potentiel ψ généré par des distributions surfaciques de charges : des formules analytiques exactes existent pour des triangles et des rectangles (voir annexe B). Ensuite, l'application de cette représentation aux circuits magnétiques avec entrefer semble être particulièrement intéressante.

Considérons un tel système, constitué d'un noyau magnétique, une bobine et un entrefer. On sait que si la perméabilité du matériau est suffisamment élevée, les lignes de flux sont presque parallèles à la ligne moyenne du circuit, et traversent perpendiculairement l'entrefer. Donc on peut modéliser le champ

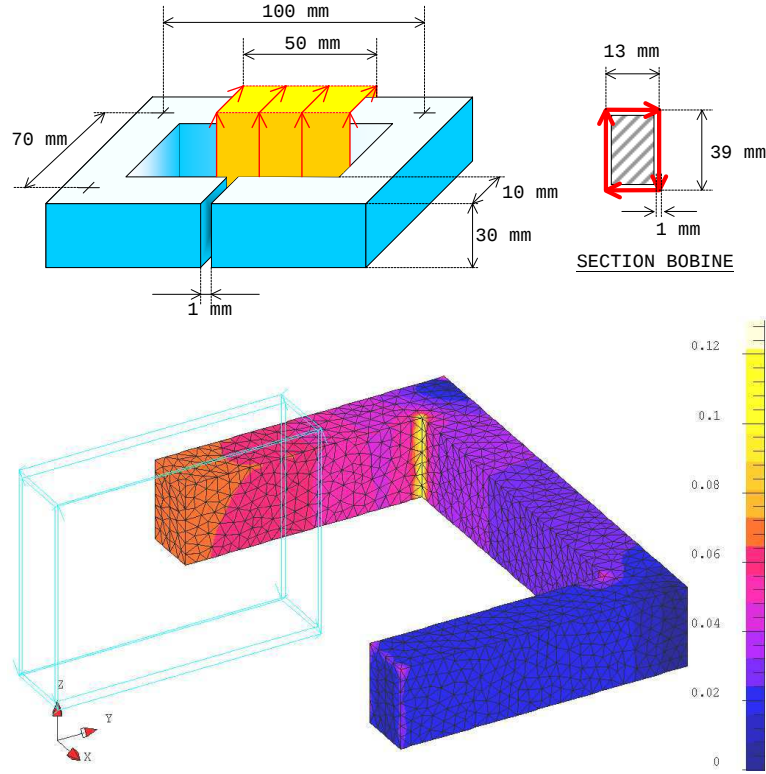
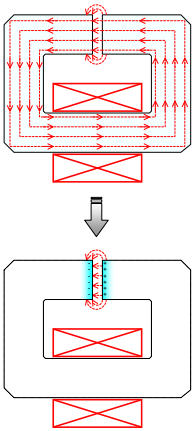


FIG. 2.13 – Haut : cotes du système rayonnant (noyau : $\mu_r = 100$, $\sigma = 0 \text{ Sm}^{-1}$, bobine : $NI = 100 \text{ A}$). Bas : induction à la surface du noyau (1/4 de la géométrie), calculée avec FLUX3D : formulation magnétostatique en potentiels scalaires (72196 éléments), prise en compte de l'infini avec boîte infinie.



à proximité de l'entrefer avec une double couche de charges fictives (positives d'un coté, négatives de l'autre), plus le champ généré par le bobinage.

On peut estimer grossièrement la quantité de charge qu'il faudrait placer sur chaque côté de l'entrefer. Soit $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ le flux magnétique à travers l'entrefer, et S la surface de l'entrefer. Si l'on suppose que dans l'entrefer le champ est réparti uniformément, on peut calculer l'induction $B = \frac{\Phi}{S}$, et donc l'aimantation M , qui d'après (2.39) coïncide avec la densité de charge :

$$\sigma^* \simeq \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi}{S} \quad (2.44)$$

On pourrait même penser à calculer le flux Φ par la méthode des réluctances, et appliquer ensuite (2.44) et (2.38) pour calculer le champ réduit dans l'air.

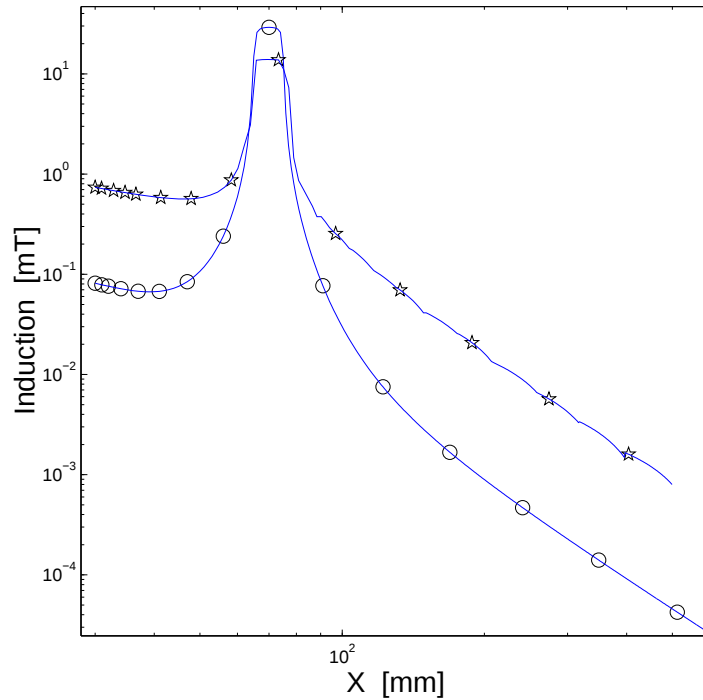
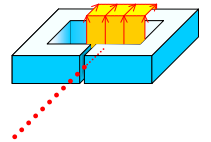


FIG. 2.14 – Induction magnétique calculée le long d’une droite qui passe au centre de l’entrefer ($x = 50$ mm) : $\circ$ = méthode des réluctances et (2.44), $\star$ = FLUX3D.

Pour vérifier cette hypothèse on a pris comme système rayonnant le circuit de la fig. 2.13 (noyau + entrefer + bobinage), que l’on a modélisé avec FLUX3D. Je rappelle que l’on suppose que le matériau est non conducteur et linéaire.

On a tracé en fig. 2.14 l’induction magnétique calculée le long d’une droite qui traverse l’entrefer. Le résultat est très décevant : bien que l’allure des deux courbes soit la même, l’induction obtenue avec FLUX3D est d’un ordre de grandeur supérieure à celui obtenu avec la méthode des réluctances et (2.44). Il fallait pourtant s’y attendre : ce modèle est bien trop simpliste pour représenter la complexité du système.



On remarquera que l’induction varie grandement d’une partie à l’autre du noyau : elle est maximale sous la bobine, et moindre à l’entrefer. La méthode des réluctances est intrinsèquement incapable de prendre en compte ces variations, car le circuit magnétique est modélisé avec des tubes de flux sans fuites. La valeur Φ ainsi calculée est une sorte de valeur moyenne du flux tout le long du circuit magnétique : le flux à l’entrefer calculé avec FLUX3D est bien *plus petit* que celui-ci.

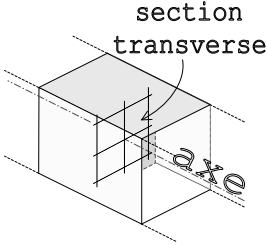
Néanmoins, on ne peut que constater que même à partir d’une valeur du Φ plus importante, on a sous-estimé d’un ordre de grandeur les fuites dans l’air. Le problème n’est donc pas la méconnaissance du flux à l’entrefer : même si l’on avait disposé par un moyen quelconque (mesure directe, modélisation, ...) de la

bonne valeur de Φ à l'entrefer, on n'aurait pas été capable de calculer l'induction dans l'air avec la seule (2.44).

Ceci nous indique qu'on ne peut pas se contenter de modéliser les fuites à l'entrefer, et qu'il faut donc adopter un modèle plus complexe, qui prenne en compte les variations de flux tout le long du noyau.

2.4 Modèle des ré reluctances généralisé (MRG)

Afin de prendre en compte les fuites de flux le long de tout le circuit magnétique il faut affaiblir quelques-unes des hypothèses sur lesquelles est fondée la méthode des ré reluctances classique. On va donc repartir sur la base des hypothèses suivantes :



- i à l'intérieur du matériel magnétique, le champ magnétique est en tout point parallèle à l'axe du circuit magnétique.
- ii sur chaque section transverse du circuit, le champ magnétique est normal et uniformément reparté sur toute la surface de la section.
- iii le matériau est homogène, isotrope, linéaire et non conducteur.

2.4.1 Modélisation des fuites

Considérons un élément quelconque du circuit magnétique, et soit Γ sa frontière, où $\Gamma = \Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \dots \cup \Gamma_{lat}$. Puisque le flux magnétique total à travers Γ est forcément nul, on a :

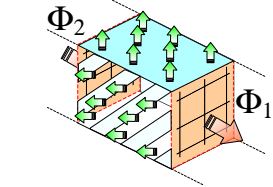
$$\iint_{\Xi_1} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \iint_{\Xi_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \dots + \iint_{\Gamma_{lat}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$$

$\vec{n}$ étant le vecteur normal à Γ , orienté vers l'extérieur. Donc, chacun des termes $\iint_{\Xi_k} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ coïncide à un signe près avec les flux Φ_k : en particulier, les flux sortants de l'élément sont à prendre avec le signe +, et ceux entrants avec le signe -. On peut écrire le bilan de flux plus simplement comme :

$$\iint_{\Gamma_{lat}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \sum_{\text{entrant}} \Phi - \sum_{\text{sortant}} \Phi = \Delta\Phi \quad (2.45)$$

Cette écriture signifie tout simplement que le flux magnétique à travers la surface latérale de chaque élément est égal à la différence entre le flux qui entre et celui qui sort des sections transverses à l'axe du circuit magnétique. Cette quantité est encore proportionnelle à la quantité de charge fictive qui est à répartir sur la surface Γ_{lat} :

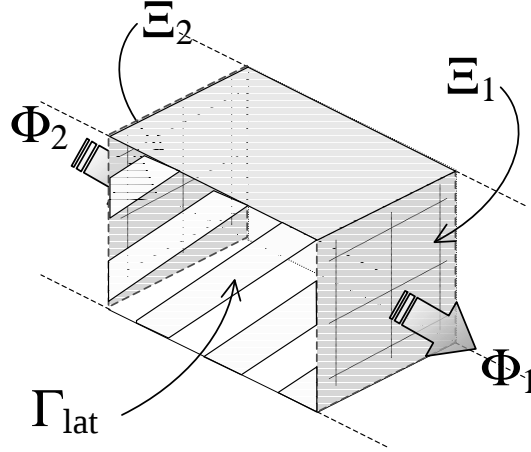
$$\begin{aligned} Q &= \iint_{\Gamma_{lat}} \sigma^* dS = \iint_{\Gamma_{lat}} \vec{M} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \iint_{\Gamma_{lat}} \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \Delta\Phi \end{aligned} \quad (2.46)$$



EXEMPLE: dans ce cas
 $\iint_{\Gamma_{lat}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = +\Phi_2 - \Phi_1$

NOTATIONS

Supposons le partage du noyau magnétique en morceaux, que l'on va dorénavant appeler *éléments*. Chaque élément a la forme d'un parallélépipède, et est séparé des éléments adjacents et des entrefers par des *sections* transverses à l'axe du circuit. On va indiquer chaque section avec le signe Ξ :



Chaque section possède une orientation, arbitrairement choisie, qui lui est propre. De cette façon, le flux magnétique $\Phi = \iint_{\Xi} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ à travers la section Ξ est, selon l'orientation de celle-ci, entrant ou sortant de l'élément. Par exemple, dans le dessin précédent l'orientation de Ξ_1 et Ξ_2 est choisie d'une façon telle que Φ_2 entre dans l'élément et Φ_1 en sort.

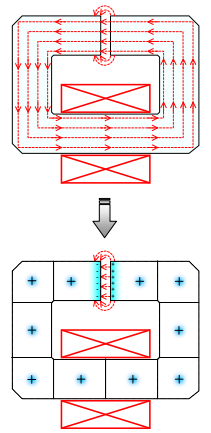
La frontière de chaque élément est donc composée d'un certain nombre de sections (deux dans la plus part des cas), et d'une surface latérale que l'on va indiquer avec Γ_{lat} .

Enfin, on va nommer N le nombre d'éléments, et N_S le nombre total de sections.

Jusqu'ici on n'a pas fait d'approximation ; le problème est que, bien que l'on dispose d'une expression *exacte* pour la quantité de charge Q , on ne sait pas comment la répartir sur Γ_{lat} . Dans un premier temps on va donc concentrer toute la charge Q au centre de l'élément, ce qui permet de calculer simplement le potentiel ψ :

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (2.47)$$

En résumant, afin de modéliser le champ réduit, le circuit magnétique est partagé en éléments, séparés par des sections. On va placer au centre de chaque élément une charge Q proportionnelle à la somme algébrique des flux qui entrent (+) et qui sortent (−) de l'élément. Pour modéliser le(s) entrefer(s), on va répartir uniformément sur chaque coté de l'entrefer une charge Q_S proportionnelle au flux, prise avec le signe + du côté où le flux est sortant, et avec le signe −



du côté où le flux est entrant :

$$Q_S = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \Phi \quad (2.48)$$

On remarquera qu'ainsi la distribution des charges fictives $\{Q, Q_S\}$, et par conséquent le champ réduit $\vec{H}_{red}$, ne dépendent que des flux $\{\Phi\}$ à travers les sections $\{\Xi\}$. On va donc prendre ces flux comme inconnues du problème.

2.4.2 L'équation du flux à travers les sections

Pour que le problème soit bien posé il faut imposer des conditions qui relient l'ensemble des flux $\{\Xi\}$ entre eux et au champ généré par les bobinages. On va donc repartir de la décomposition (2.24) en champ d'excitation $\vec{H}_0$ et champ réduit $\vec{H}_{red}$. A l'intérieur du noyau on a :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}_{red} = \\ &\vec{H}_0 + \vec{M} - \vec{\nabla} \psi = \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\vec{H}_0 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \vec{H} - \vec{\nabla} \psi \quad (2.50)$$

En mettant en évidence $\vec{H}$ on parvient à :

$$\vec{H} = \mu_r (\vec{H}_0 - \vec{\nabla} \psi) \quad (2.51)$$

Cette équation est valable en n'importe quel point à l'intérieur du noyau. Pour faire paraître le flux magnétique, il suffit d'intégrer sur chaque section Ξ :

$$\iint_{\Xi} \mu_0 \vec{H} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Xi} \mu_0 \mu_r (\vec{H}_0 - \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{n} dS$$

soit :

$$\Phi = \mu_r (\Phi_0 + \Phi_{ch}) \quad (2.52)$$

Φ_0 et Φ_{ch} étant définis comme :

$$\Phi_0 = \iint_{\Xi} \vec{B}_0 \cdot \vec{n} dS \quad (2.53)$$

$$\Phi_{ch} = -\mu_0 \iint_{\Xi} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} dS \quad (2.54)$$

L'interprétation des quantités Φ_0 et Φ_{ch} est simple : Φ_0 est le flux à travers Ξ de l'induction générée par les bobinages dans le vide, et Φ_{ch} est le flux du champ généré par les charges fictives. Plus important, on remarquera qu'ainsi le flux magnétique à travers Ξ est relié *linéairement* aux flux à travers toutes les autres sections par l'intermédiaire du terme Φ_{ch} . On reviendra plus tard sur le caractère linéaire de cette relation.

L'équation précédente est valable pour toutes les sections Ξ qui sont interposées entre deux éléments, mais pas pour celles qui se trouvent sur un entrefer. Pour ces dernières on peut faire un raisonnement tout à fait similaire, mais en gardant à l'esprit que cette fois-ci les points se trouvent à l'interface matériau-air :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}_{red} = \\ &\vec{H}_0 + \frac{1}{2}\vec{M} - \vec{\nabla}\psi =\end{aligned}\quad (2.55) \quad \text{cf. éq. 2.42}$$

$$\vec{H}_0 + \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r}\vec{H} - \vec{\nabla}\psi \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} (\vec{H}_0 - \vec{\nabla}\psi) \quad (2.57)$$

donc, après intégration, on parvient à l'équation suivante, qui est valable pour les flux à travers les entrefers :

$$\Phi = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} (\Phi_0 + \Phi_{ch}) \quad (2.58)$$

2.4.3 Formulation matricielle

On a évoqué tout à l'heure que les équations (2.52) et (2.58) ont un caractère linéaire. Ici on va éclaircir ce point, et mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire. A cette fin, supposons que l'on numérote dans un ordre arbitraire les sections $\{\Xi_k\}_{k=1\dots N_S}$ et les flux respectifs $\{\Phi_k\}_{k=1\dots N_S}$, et on définisse les vecteurs des flux :

$$\Phi = (\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_{N_S})' \in \mathbb{R}^{N_S} \quad (2.59)$$

$$\Phi_0 = (\Phi_{01} \Phi_{02} \dots \Phi_{0N_S})' \in \mathbb{R}^{N_S} \quad (2.60)$$

Pour chaque élément on a besoin d'exprimer la différence entre le flux total entrant et sortant. Ceci peut se faire à l'aide de la matrice $\Delta \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N_S}$ définie de la manière suivante :

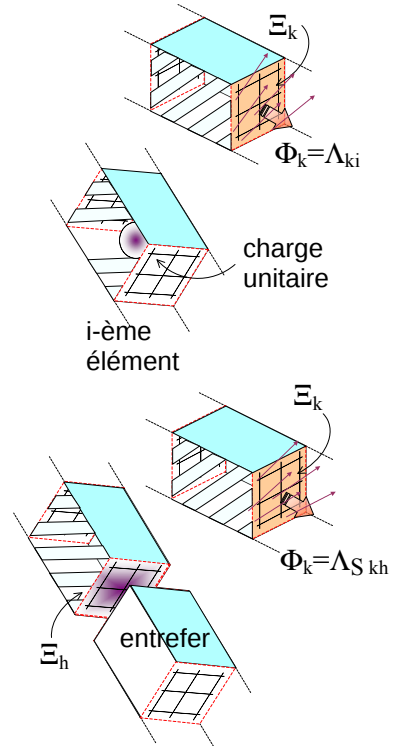
$$\Delta_{ik} = \begin{cases} +1 & \text{si } \Phi_k \text{ rentre dans le } i\text{-ème élément} \\ -1 & \text{si } \Phi_k \text{ sort du } i\text{-ème élément} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.61)$$

Donc le vecteur $\Delta\Phi \in \mathbb{R}^N$ représente le flux qui rentre globalement à l'intérieur de chaque élément à travers les sections qui lui sont adjacentes. Remarquons que la matrice Δ ne dépend que de la *topologie* du système, et non de la géométrie (c'est-à-dire, Δ dépend de la façon dont les éléments sont connectés entre eux, et non pas de leur position spatiale).

Définissons encore les matrices $\Lambda \in \mathbb{R}^{N_S} \times \mathbb{R}^N$ et $\Lambda_S \in \mathbb{R}^{N_S} \times \mathbb{R}^{N_S}$ suivantes :

$$\Lambda_{ki} = \text{flux généré à travers } \Xi_k \text{ par une charge unitaire située au centre du } i\text{-ème élément} \quad (2.62)$$

$$\Lambda_{S kh} = \text{flux généré à travers } \Xi_k \text{ par une charge unitaire uniformément répartie sur } \Xi_h, \text{ si cette dernière se trouve sur un entrefer, 0 autrement} \quad (2.63)$$



La signification physique de ces matrices est simple : elles représentent les flux générés par des sources unitaires, et donc permettent de calculer le champ réduit.

Enfin, soit $\mathbf{I}$ la matrice identité, et $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{N_S} \times \mathbb{R}^{N_S}$ une matrice diagonale, avec $\kappa_{kk} = \mu_r$ ou $\frac{2\mu_r}{\mu_r+1}$ selon que Ξ_k se trouve à l'intérieur du matériau, ou sur un entrefer. On peut réécrire (2.52) et (2.58) de façon matricielle :

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\kappa} [\boldsymbol{\Phi}_0 + (\boldsymbol{\Lambda}_S \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Phi})] \quad (2.64)$$

d'où, après avoir mis en évidence le vecteur $\boldsymbol{\Phi}$ (inconnue du problème) :

$$[\mathbf{I} - \boldsymbol{\kappa} (\boldsymbol{\Lambda}_S + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Delta})] \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\Phi}_0 \quad (2.65)$$

On peut observer que le problème est bien posé : on a autant d'inconnues que d'équations indépendantes. On remarquera aussi que la somme de toutes les charges fictives est intrinsèquement nulle : les charges réparties sur les entrefers sont opposées deux à deux (le flux sort d'un côté de l'entrefer et rentre de l'autre), et la somme de celles localisées à l'intérieur des éléments est également nulle car $\sum_{h=1}^N \sum_{k=1}^{N_S} \Delta_{hk} = 0$.

2.4.4 Implémentation numérique

Pour pouvoir résoudre le système linéaire (2.65) il faut d'abord calculer les matrices $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}_S$ et $\boldsymbol{\Phi}_0$. Sur le plan théorique, le calcul du champ généré par les bobinages et par les charges fictives, bien qu'assez technique, est connu depuis longtemps [Dur64, Dur68] et ne présente pas de réelles difficultés. Les détails de ces calculs sont présentés dans l'annexe B.

Par contre, en pratique c'est bien le calcul de ces matrices qui constitue la partie la plus lourde du calcul complet. Ceci est surtout dû au fait qu'une *intégration surfacique* est requise pour chaque terme de ces matrices. Il existe peut-être des artifices mathématiques pour ramener ces intégrales surfaciques à des intégrales linéaires, mais je n'ai pas fait de recherches dans ce sens car je me suis d'abord intéressé au principe de la méthode en tant que telle.

Ces intégrales surfaciques ont donc été calculées avec une formule de Gauss réursive classique [PTVF92]. Cette méthode d'intégration permet d'intégrer des fonctions *non singulières* avec une très bonne précision.

Il est important de remarquer que ces matrices contiennent toute l'information sur la géométrie du système : à ce stade, les caractéristiques du matériau - c'est-à-dire la perméabilité μ_r - interviennent seulement sur la matrice $\boldsymbol{\kappa}$. Donc, une fois les matrices $\boldsymbol{\Gamma}$, $\boldsymbol{\Gamma}_S$ et $\boldsymbol{\Phi}_0$ calculées, on peut résoudre le problème pour une valeur de μ_r quelconque au prix de quelques multiplications matricielles et de la résolution du système linéaire.

Le système linéaire que l'on obtient est un système plein, mais avec un nombre d'inconnues N_S très modéré. De ce fait, sa résolution est quasi instantanée, et ne pose aucun problème de stabilité numérique. Enfin, une fois ce système résolu, le champ magnétique peut être calculé partout dans l'air avec (2.24) et (2.38).

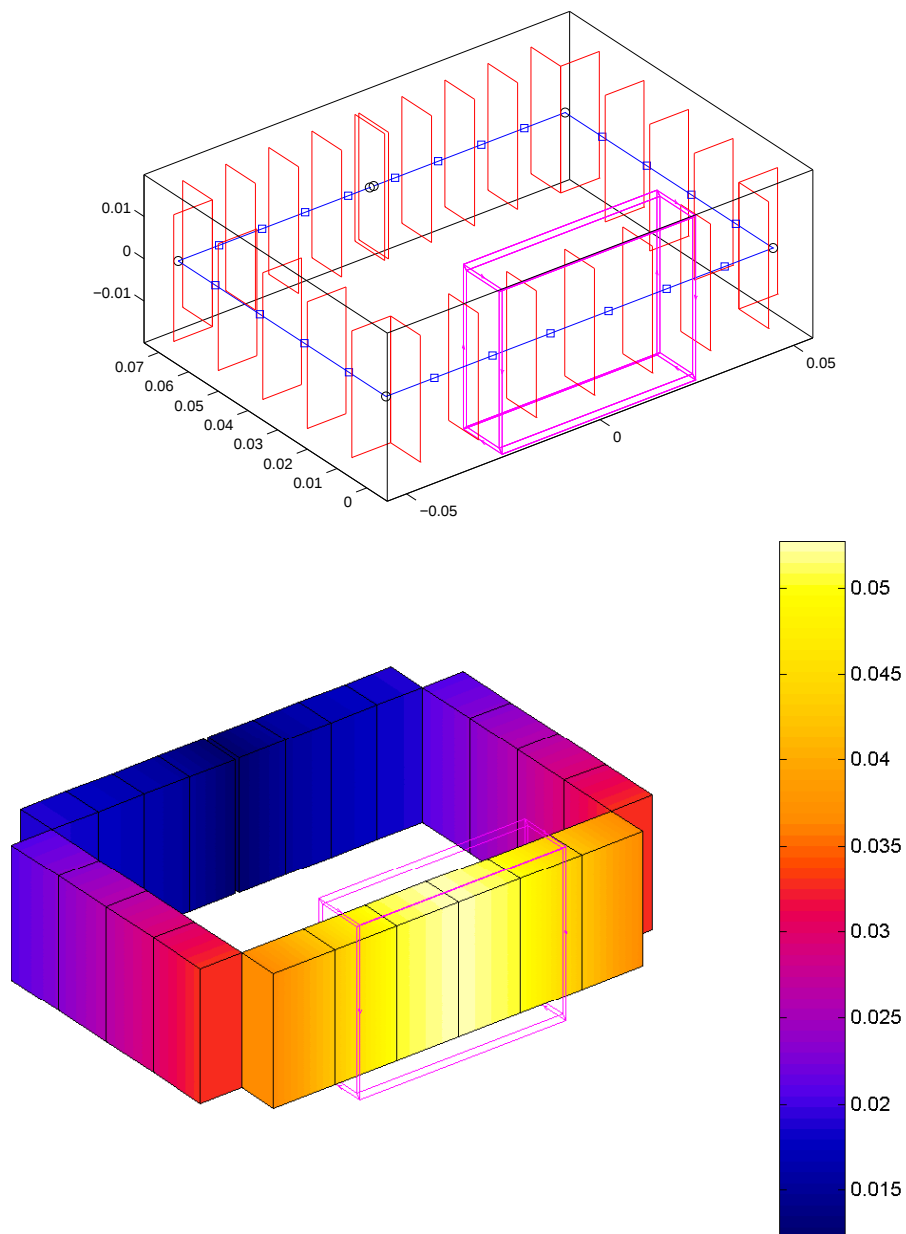


FIG. 2.15 – (Haut) Discretisation du système rayonnant : on peut observer la bobine, les 27 sections dans lesquelles est discrétisé le circuit magnétique, et la position des charges fictives ($\square$), concentrées au centre de chaque élément. (Bas) Induction (en Tesla) calculée le long du circuit magnétique, les coins n'étant pas représentés.

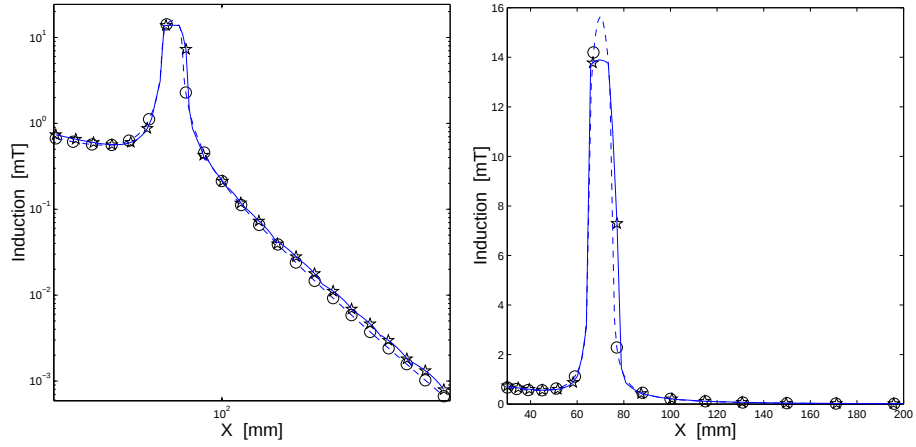


FIG. 2.16 – Induction magnétique calculée le long d’une droite orientée selon la direction X, passant par le centre de l’entrefer (o = MRG, $\star$ = FLUX3D) en échelle logarithmique (gauche) et linéaire (droite)

2.5 Applications

2.5.1 Le système rayonnant avec entrefer

Il s’agit maintenant de tester la précision et la fiabilité de la méthode que l’on vient de présenter. Pour cela, on va repartir du même système rayonnant (fig. 2.13) que l’on a déjà utilisé précédemment. Le circuit magnétique est discrétisé en $N_S = 27$ sections (fig. 2.15, en haut). Le problème est résolu en seulement quelques secondes sur un PENTIUM IV à 2 GHz. Le coût de ce calcul en terme de mémoire requise est également réduit⁶.

Champ à l’intérieur du circuit :

On peut constater que les variations du flux à l’intérieur du circuit magnétique sont cohérentes avec la théorie : le flux est maximal sous la bobine, et moindre à l’entrefer. Par contre, il y a un écart relativement important entre les valeurs calculées :

INDUCTION [mT]		
	À L’ENTREFER	SOUS LA BOBINE
FLUX3D :	13.9	64.8
MRG :	12.3	52.7

⁶A titre de référence, une matrice de 27×27 réels en double précision requiert 5832 octets.

Champ dans l'air :

Ensuite on a calculé l'induction dans l'air dans les mêmes points que l'on avait pris précédemment. Si l'on compare le premier calcul (fig. 2.14) avec ce dernier (fig. 2.16) le progrès est évident : mise à part une imprécision à l'entrefer, l'induction calculée avec la méthode proposée coïncide presque avec celle calculée avec FLUX3D, qui a été obtenue à un coût de calcul très nettement supérieur.

On observe un écart assez marqué entre les deux calculs au centre de l'entrefer (fig. 2.16, à droite) : l'induction calculée avec FLUX3D est très plate, alors que celle fournie par notre calcul est plus importante et présente un pic. Ceci est probablement dû à la proximité des charges fictives situées dans les éléments adjacents de l'entrefer.

On a vérifié que même dans d'autres directions les résultats sont proches de ceux obtenus avec FLUX3D. En fig. 2.17 on a tracé l'induction calculée le long d'une droite à la hauteur de l'entrefer, orientée selon la direction Y, en échelle logarithmique et linéaire.

En fig. 2.18 on a tracé l'induction calculée le long d'une droite orientée selon la direction Z qui passe par le centre du circuit magnétique, toujours en échelle logarithmique et linéaire.

On peut observer que l'écart entre les deux courbes semble être assez modéré. Cette impression est en partie due au fait que la pente des courbes est très raide, car le champ décroît très rapidement lorsque l'on s'éloigne du dispositif. Si l'on prend FLUX3D comme référence, cet écart est de l'ordre de 10-20%, ce qui n'est quand même pas négligeable.

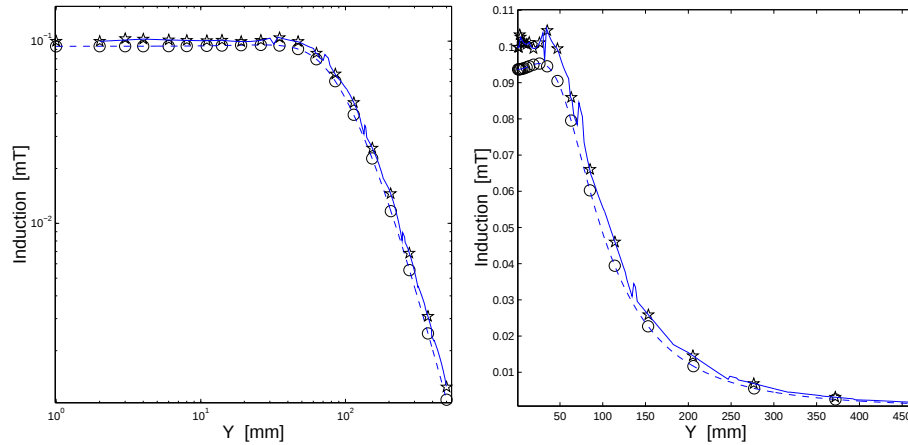
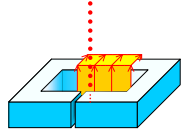
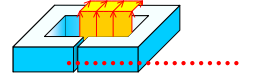
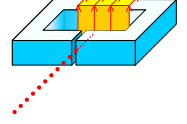


FIG. 2.17 – Induction magnétique calculée le long d'une droite orientée selon la direction Y ($\circ$ = MRG, $\star$ = FLUX3D) en échelle logarithmique (gauche) et linéaire (droite).

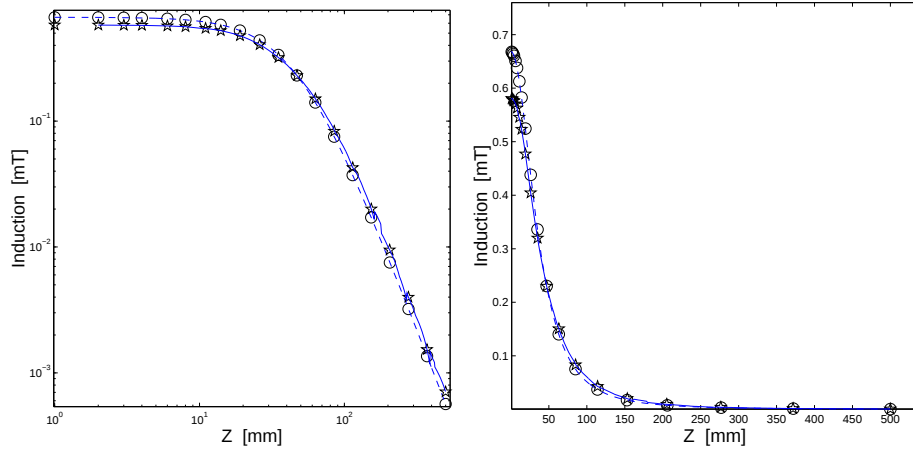


FIG. 2.18 – Induction magnétique calculée le long d’une droite orientée selon la direction Z ($\circ$ = MRG, $\star$ = FLUX3D) en échelle logarithmique (gauche) et linéaire (droite).

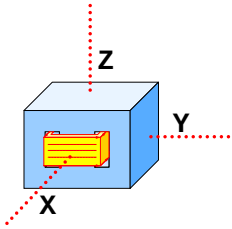
2.5.2 Le transformateur cuirassé (B)

Comme deuxième application nous avons choisi un dispositif sans entrefer : la transformateur cuirassé (B). En fig. 2.19 est tracée l’induction magnétique dans le noyau du transformateur (dispositif B), calculée avec $N_S = 23$ sections. La perméabilité du noyau est $\mu_{no} = 100$.

Champ à l’intérieur du circuit :

On observe également un écart entre les niveaux de champ à l’intérieur du noyau (plus fort sous la bobine) :

INDUCTION [mT]		
	COLONNE EXTÉRIEURE	COLONNE CENTRALE
FLUX3D :	58.2	77.4
MRG :	65.4	70.0



Champ dans l’air :

En fig. 2.20 on a tracé l’induction calculée dans l’air autour du transformateur selon les trois directions principales. L’écart entre les valeurs fournies par notre modèle et FLUX3D est plus important par rapport au cas précédent.

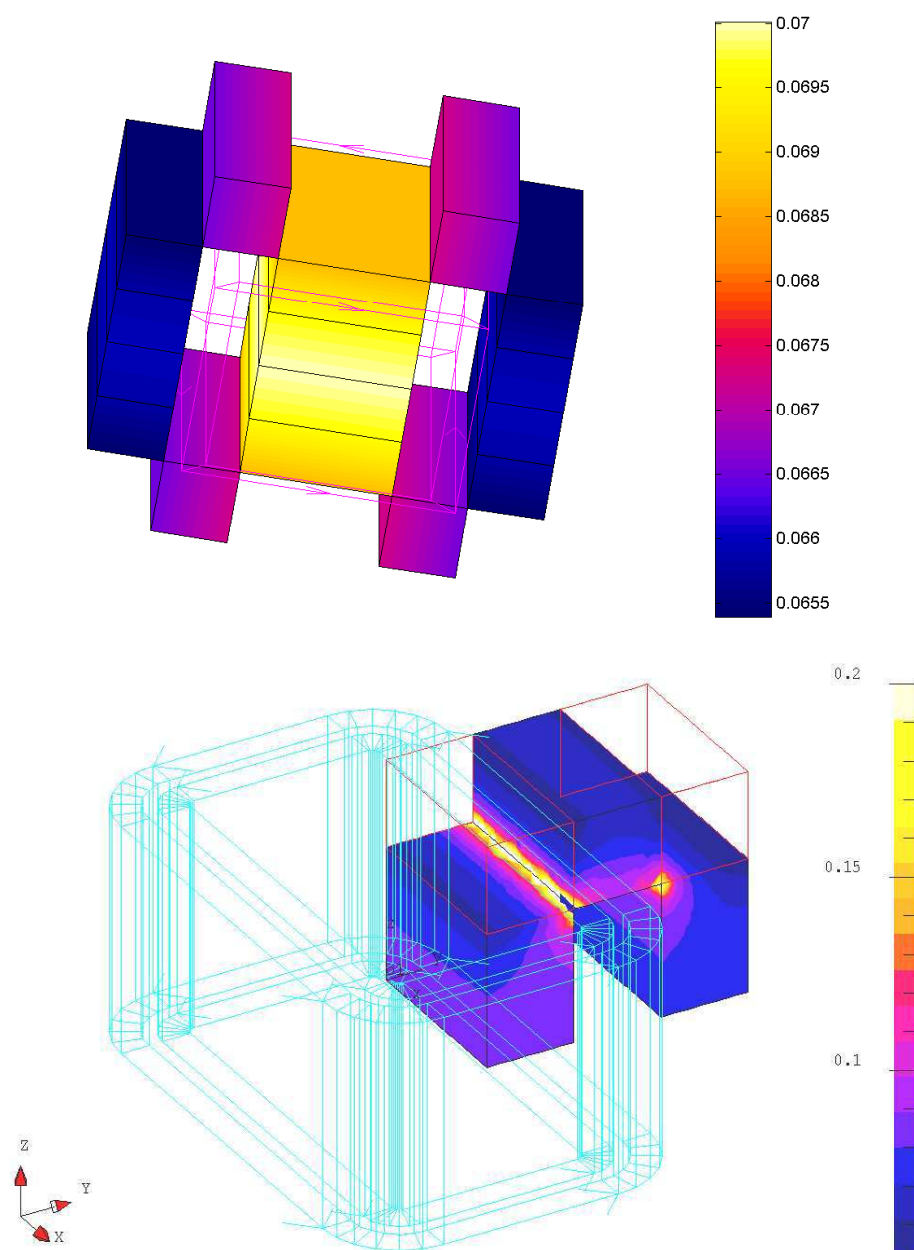


FIG. 2.19 – Induction magnétique (en Tesla) calculée dans le noyau du transformateur (B), les coins n'étant pas représentés. Le système est simulé avec la méthode des réluctances généralisée (Haut), et avec FLUX3D (bas).

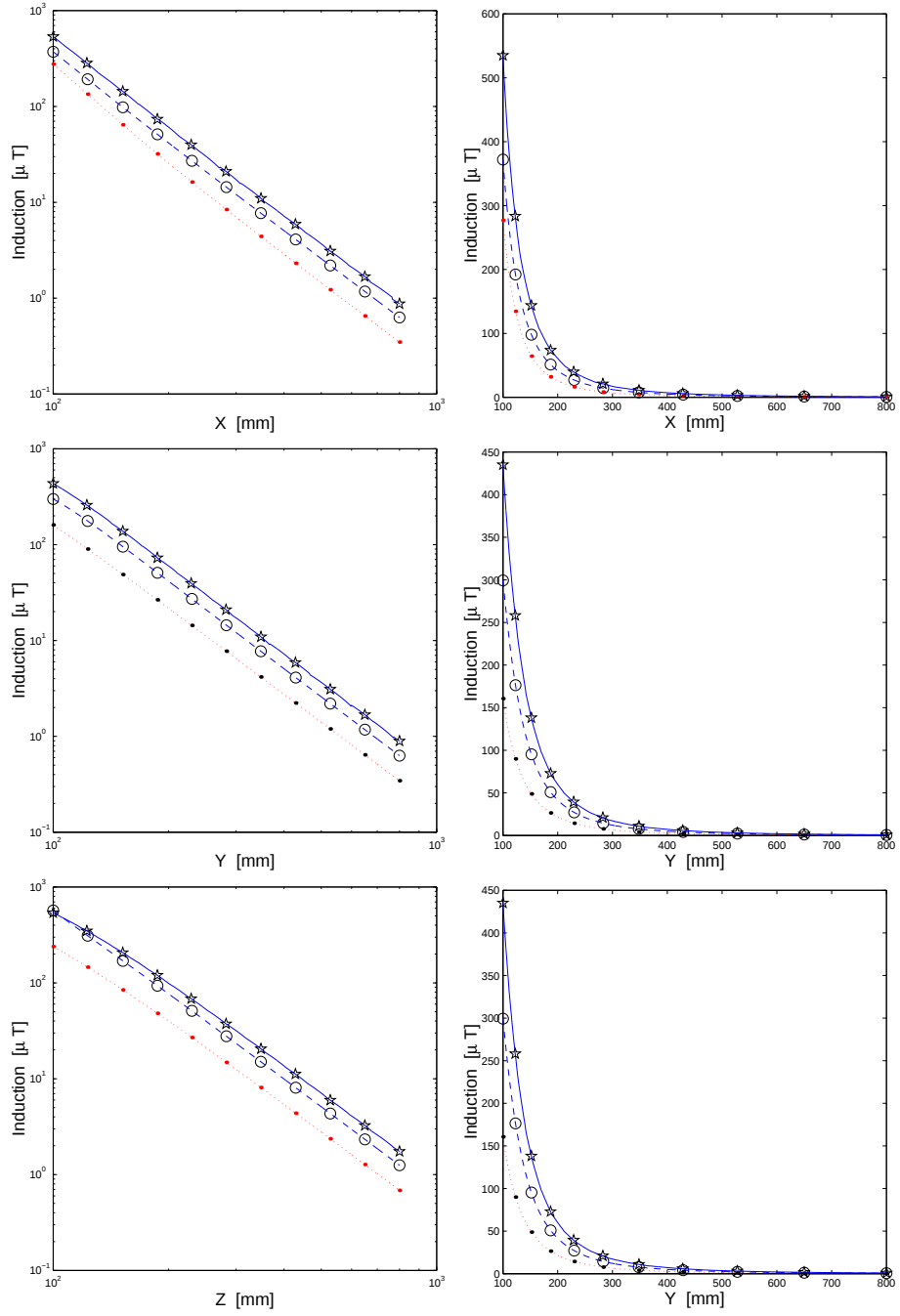


FIG. 2.20 – Induction magnétique autour du transformateur calculée le long d'une droite orientée selon les directions X (en haut), Y (au milieu) et Z(en bas), en échelle logarithmique (à gauche) et linéaire (à droite) : ($\circ$) = MRG, ($\star$) = FLUX3D. A titre de comparaison, l'induction générée par la bobine dans le vide est représentée par la ligne pointillée.

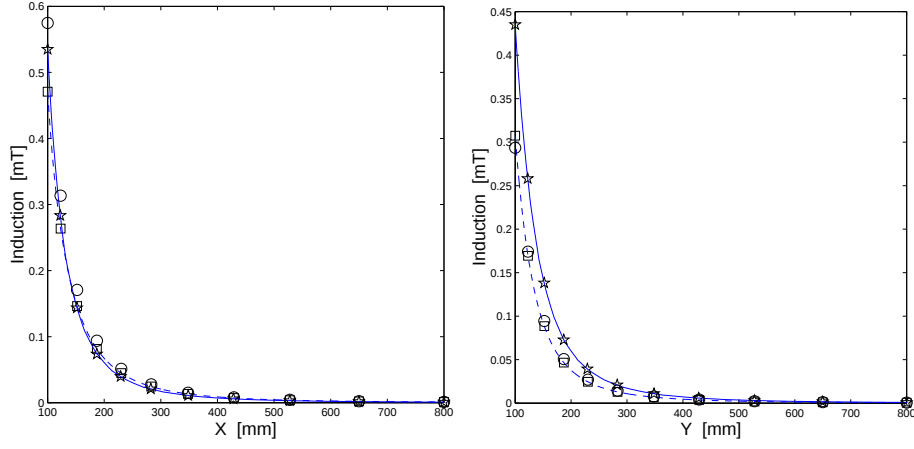


FIG. 2.21 – Induction magnétique autour du transformateur calculée le long d'une droite orientée selon les directions X (à gauche) et Y (à droite) en échelle linéaire : (○) = MRG pour $N_S = 23$, (□) = MRG pour $N_S = 14$, (★) = FLUX3D

2.5.3 Influence du nombre de sections N_S

Pour vérifier l'influence du nombre de sections sur la précision du calcul, on a recalculé le modèle du transformateur pour différentes valeurs du nombre de sections N_S :

INDUCTION [mT]	COLONNE EXTERNE	COLONNE CENTRALE
FLUX3D :	58.2	77.4
$N_S = 14$:	47.7	50.5
$N_S = 23$:	65.4	70.0
$N_S = 39$:	67.5	72.1
$N_S = 71$:	67.9	72.5

Pour $N_S = 14$ les résultats sont très proches de ceux obtenus précédemment pour $N_S = 23$ dans l'air (fig. 2.21), mais très différents à l'intérieur du circuit magnétique. On remarquera que, bien que ces valeurs soient différentes dans l'absolu, la différence entre l'induction dans la colonne centrale et dans la colonne externe ne change pas énormément dans les cas $N_S = 14$ et $N_S = 23$ (entre 3 et 5 mT). Ceci explique en partie pourquoi l'induction dans l'air est à peu près la même : en effet, on peut penser décomposer le noyau en quatre parties, comme dans la fig. 2.22. On voit bien que lorsque le flux dans la colonne centrale (Φ_1 en figure) est plus important que celui dans la colonne externe (Φ_2), on peut modéliser la réaction d'induit en remplaçant chaque morceau par une charge fictive $Q = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} (\Phi_1 - \Phi_2)$. C'est donc cette différence $\Phi_1 - \Phi_2$, et non *cf. éq. 2.46* les valeurs Φ_1 et Φ_2 prises singulièrement, qui détermine les fuites.

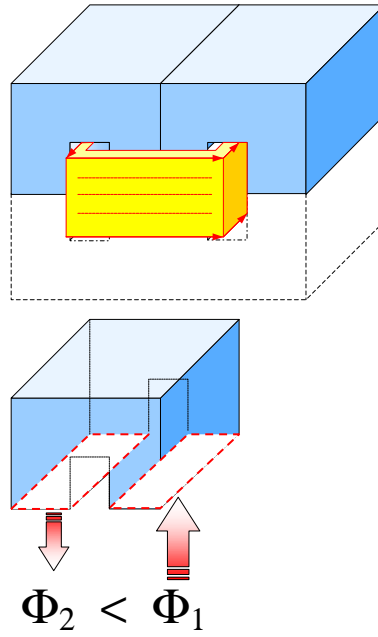


FIG. 2.22 – Le champ dans l'air dépend fortement de la différence entre les flux dans les diverses parties du circuit magnétique.

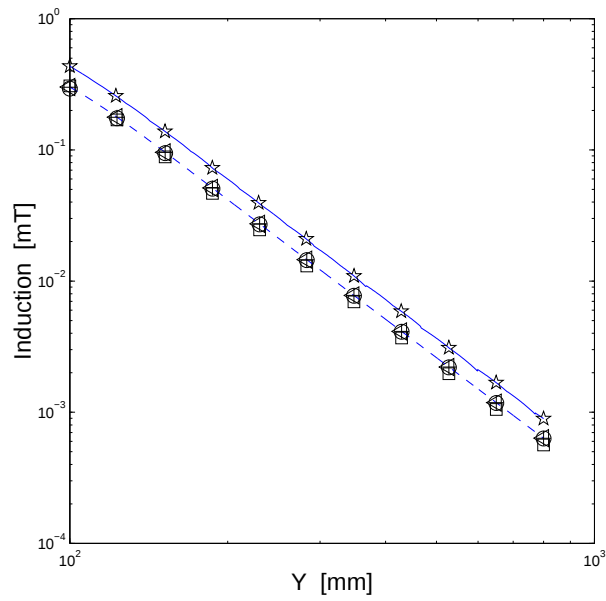


FIG. 2.23 – Induction magnétique autour du transformateur calculée le long d'une droite orientée selon la direction Y en échelle logarithmique : (o) $N_S = 23$, ($\square$) $N_S = 14$, (+) $N_S = 39$, (<) $N_S = 71$, ($\star$) = FLUX3D

Pour des valeurs de N_S plus importantes ($N_S = 39$, $N_S = 71$), on observe que les valeurs de flux dans le circuit magnétique, et par conséquent le champ dans l'air, ne changent pas de manière significative (fig. 2.23), à condition de ne pas augmenter excessivement le nombre de sections.

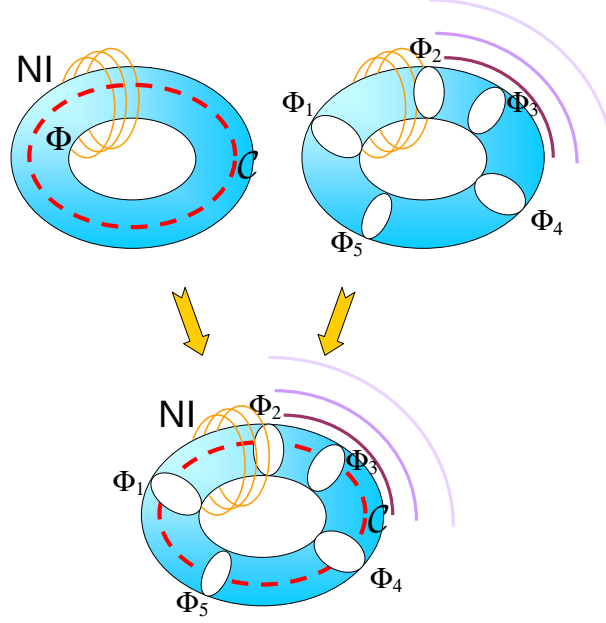


FIG. 2.24 – Approche suivie pour le développement du modèle des réluctances généralisé (MRG)

2.6 Prise en compte explicite du théorème d'Ampère

Dans la méthode des réluctances on suppose pouvoir identifier des tubes de flux parfaits, et l'on calcule ces flux à partir du seul théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (2.66)$$

Le modèle que l'on vient de présenter consiste à découper le circuit magnétique en plusieurs éléments, et à imposer une condition de bilan de flux sur chaque section entre les éléments. Il pourrait être profitable d'ajouter une condition sur la circulation du champ, comme dans la méthode des réluctances, pour améliorer la précision (fig. 2.24).

Reprenons l'équation du problème en forme matricielle (2.65), reportée ici pour commodité :

$$[I - \kappa (\Lambda_S + \Lambda\Delta)]\Phi = \kappa\Phi_0$$

Cette équation constitue un système linéaire carré $N_S \times N_S$. L'ajout d'autres conditions est donc problématique, car ce système devient alors surdéterminé.

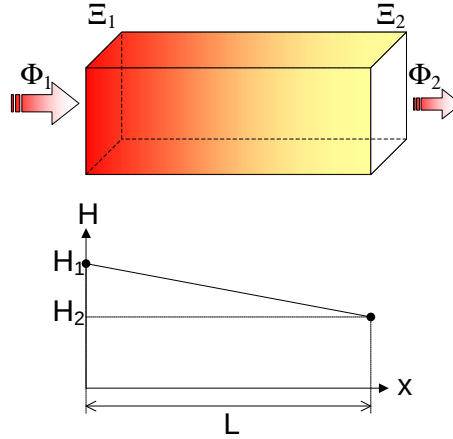
cf. pag. 46

Pour résoudre ce problème, on pourrait penser ajouter simplement les nouvelles équations à l'ensemble des autres, et résoudre le système au sens des moindres carrés. Cette solution n'est pas très élégante, d'autant plus que toutes les équations auraient alors la même importance. Par contre, on pourrait raisonnablement penser que des conditions sur la circulation du champ soient plus "fiables", c'est-à-dire moins approchées, par rapport à d'autres équations qui sont fondées sur beaucoup d'approximations.

Une autre possibilité est de faire en sorte que le théorème d'Ampère (2.66) soit imposé en tant que contrainte forte, le système de départ (2.65) étant résolu au sens des moindres carrés. Pour ceci, il faut d'abord exprimer (2.66) en fonction des flux Φ_k à travers les sections Ξ_k du circuit. Soit $\mathcal{C}$ un chemin à l'intérieur du circuit magnétique, et supposons vouloir calculer la circulation du champ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Considérons l'un des éléments dans lequel est subdivisé le noyau. Supposons que cet élément soit à peu près rectiligne, et soient Ξ_1 et Ξ_2 les deux seules sections qui séparent cet élément du reste du noyau. Supposons qu'à l'intérieur de cet élément le champ magnétique varie de manière linéaire entre les deux sections : $H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu_0 \mu_r S_1}$ sur Ξ_1 et $H_2 = \frac{\Phi_2}{\mu_0 \mu_r S_2}$ sur Ξ_2 :



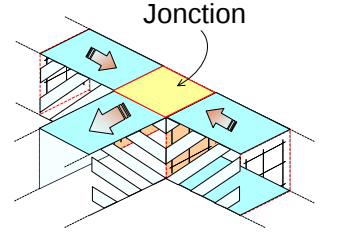
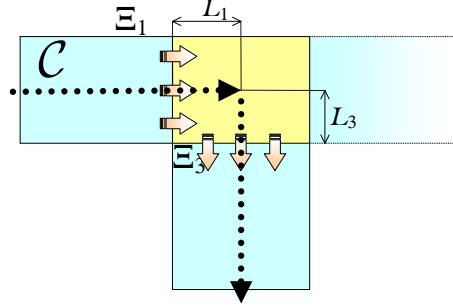
Si l'on choisit judicieusement les signes des grandeurs Φ_1 et Φ_2 , la contribution de cet élément à la circulation du champ est alors :

$$\int_0^L H dx \simeq \frac{L}{2\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\Phi_1}{S_1} + \frac{\Phi_2}{S_2} \right)$$

L étant la longueur de l'élément, S_1 et S_2 les surfaces de Ξ_1 et Ξ_2 respectivement.

Dans le cas des éléments qui ne peuvent pas être considérés rectilignes, comme c'est le cas des points de jonction entre branches rectilignes, on va supposer que le champ est constant le long de chaque branche. Par exemple, dans le cas suivant la contribution de l'élément de jonction serait :

$$\frac{L_1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi_1}{S_1} + \frac{L_3}{\mu_0 \mu_r} \frac{\Phi_3}{S_3}$$



On voit donc que l'on peut exprimer le théorème d'Ampère (2.66) à travers une équation linéaire par rapport à Φ , en ajoutant les contributions des divers éléments traversés par le chemin $\mathcal{C}$. Notons l'ensemble de ces équations (une pour chaque chemin) comme :

$$\Upsilon \Phi = N I \quad (2.67)$$

On est donc en mesure de reformuler le problème sous la forme d'un problème de minimisation avec contrainte :

$$\begin{aligned} \Phi &= \arg \min \| [I - \kappa (\Lambda_S + \Lambda_\Delta)] \Phi - \kappa \Phi_0 \|^2 \\ &| \quad \Upsilon \Phi = N I \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dans cette formulation, le rôle de la fonction à minimiser est de déterminer la répartition du flux à l'intérieur du circuit magnétique, alors que la contrainte va jouer sur la valeur moyenne du flux. On remarquera que la méthode des réluctances pourrait être formulée de façon tout à fait similaire, en modifiant la manière dont le flux doit être reparti :

$$\begin{aligned} \Phi &= \arg \min \| \Delta \Phi \|^2 \\ &| \quad \Upsilon \Phi = N I \end{aligned}$$

Ce problème peut être résolu avec la méthode des multiplieurs de Lagrange, et pratiquement revient à résoudre un système linéaire, dont la taille est un peu plus grande que celle du système d'origine (2.65).

Pour distinguer la formulation ainsi modifiée de la formulation "originale" (MRG), on va l'indiquer comme MRGm (soit MRG modifié).



LES MULTIPLIEURS DE LAGRANGE

Le théorème des multiplieurs de Lagrange[MT76] exprime une condition nécessaire, mais pas suffisante pour qu'un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ soit un minimum ou un maximum de la fonction $f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, soumis à la contrainte $L(\mathbf{x}) = 0$, où $L : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$. En autres termes, cette méthode sert pour trouver des "candidats" pour le problème d'optimisation avec M contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \arg \min f(\mathbf{x}) \\ \lfloor \quad & L(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où l'on sait à priori qu'un et un seul minimum existe, la méthode va forcément trouver ce minimum.

La méthode consiste à rechercher les valeurs de $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+M}$ pour lesquelles le différentiel de la fonction

$f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot L(\mathbf{x})$ s'annule : les points $\mathbf{x}$ ainsi trouvés sont les candidats, alors que les multiplicateurs $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^M$ sont des valeurs qui n'ont pas d'intérêt en tant que tels.

Dans le cas où le problème d'optimisation est :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \arg \min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \\ \lfloor \quad & \mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{d} \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ étant des matrices. Après quelques calculs, on parvient au système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 2\mathbf{A}'\mathbf{A} & -\mathbf{L}' \\ \mathbf{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{A}'\mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

qui une fois résolu, donne l'unique solution du problème.

2.6.1 Application au système avec entrefer

cf. fig. 2.13

Le système rayonnant avec entrefer a été recalculé avec la méthode modifiée. La répartition de l'induction à l'intérieur du noyau magnétique est dessinée en fig. 2.25 pour le modèle MRG originale (gauche) et pour la version MRGm modifiée (droite). On peut observer une légère variation de la répartition du champ, surtout près de l'entrefer. Dans le tableau qui suit sont reportées les valeurs d'induction à l'entrefer et sous la bobine, calculées avec le modèle MRG "original" (eq. 2.65, $N_S = 23$), le modèle MRGm modifié (eq. 2.68, $N_S = 23$), et, à titre de comparaison, avec la méthode des réductances classique et FLUX3D :

INDUCTION [mT]		
	DANS L'ENTREFER	SOUS LA BOBINE
FLUX3D	13.9	64.8
MRG	12.3	52.7
MRG MODIFIÉ	18.1	54.7
MÉTH. RÉDUCTANCES	28.6	28.6

On observe que la méthode des réductances fournit une valeur moyenne de l'induction. Cette valeur est comprise entre les valeurs d'induction à l'entrefer

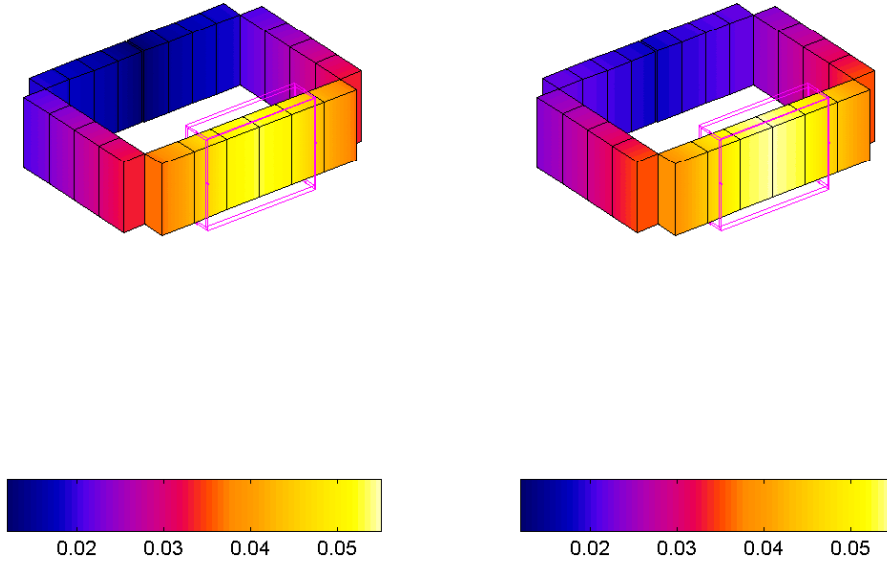


FIG. 2.25 – Induction magnétique à l'intérieur du noyau magnétique. Gauche : MRG (éq. 2.65), droite : MRG modifié (éq. 2.68)

(valeur minimale) et sous la bobine (valeur maximale) calculées avec les autres méthodes.

Maintenant, si l'on observe les valeurs calculées dans l'air (fig. 2.26), on constate que l'effet de prendre en compte explicitement le théorème d'Ampère introduit des petites modifications dans les valeurs calculées, et pas toujours dans le bon sens. En particulier, l'écart entre les valeurs d'induction à l'entrefer calculées avec FLUX3D et celles calculées avec notre méthode augmente.

Enfin, on peut observer que notre méthode tend à sous-estimer les valeurs d'induction dans l'air par rapport à FLUX3D.

2.6.2 Application au transformateur cuirassé (B)

Comme pour le cas précédent, on a reportés dans le tableau qui suit les valeurs d'inductions à l'intérieur du noyau, calculées avec différentes méthodes :

INDUCTION [mT]		
	COLONNE EXTÉRIEURE	COLONNE CENTRALE
FLUX3D	58.2	77.4
MRG	65.4	70.0
MRG MODIFIÉ	60.6	65.3
MÉTH. RÉLUCTANCES	62.5	62.5

Les valeurs de l'induction calculées en prenant en compte explicitement le théorème d'Ampère (MRGm) sont plus cohérentes avec la valeur moyenne

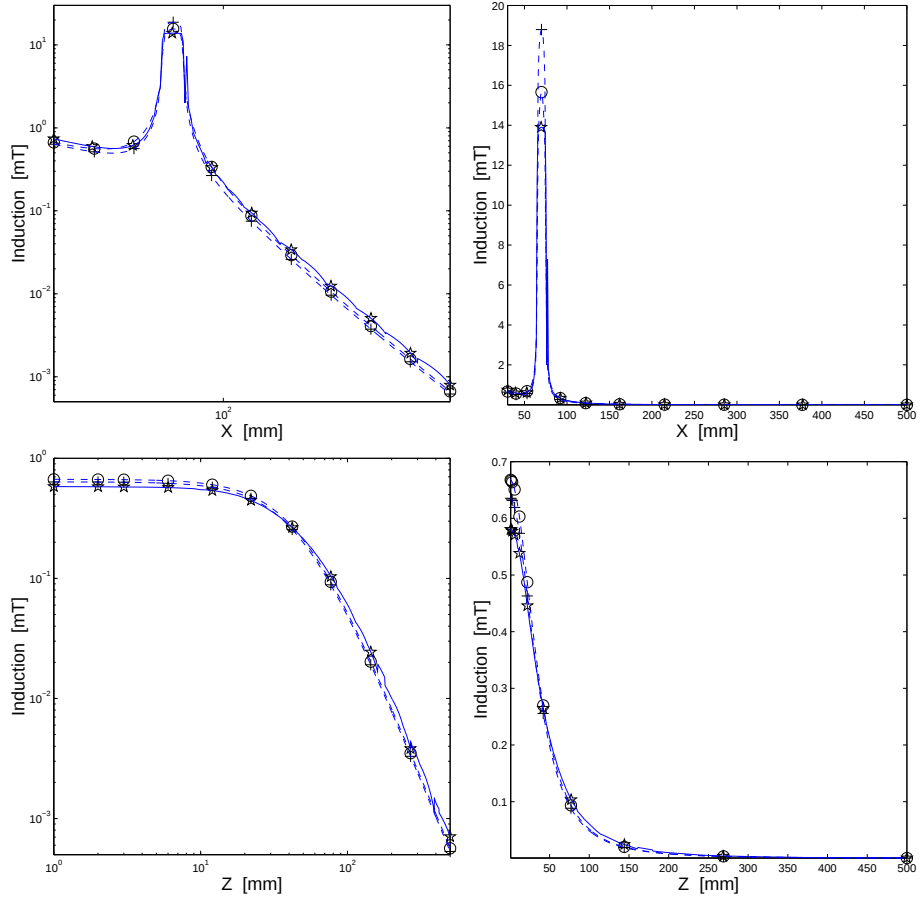


FIG. 2.26 – Induction magnétique près du système rayonnant avec entrefer, calculée le long d'une droite orientée selon les directions X (en haut) et Z (en bas) en échelle logarithmique (à gauche) et linéaire (à droite) : (○) = MRG, (+) = MRG modifié, (★) = FLUX3D.

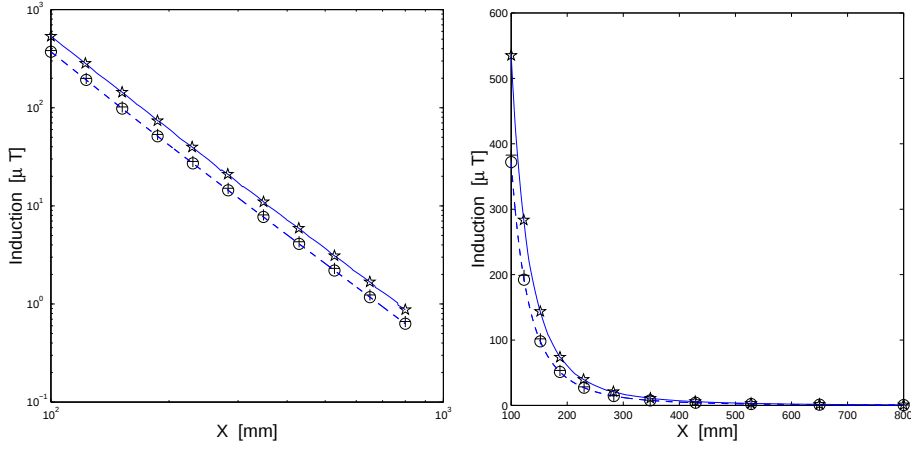


FIG. 2.27 – Induction magnétique près du transformateur calculée le long d'une droite orientée selon la direction X en échelle logarithmique (à gauche) et linéaire (à droite) : (o) = MRG (éq. 2.65), (+) = MRG modifié (éq. 2.68), (★) = FLUX3D.

(62.5 mT) calculée avec la méthode des réluctances. Par contre, les valeurs obtenues avec la méthode MRG sont constamment plus élevées par rapport à cette valeur moyenne.

Si les résultats obtenus avec la méthode modifiée paraissent plus satisfaisants à l'intérieur du circuit magnétique, on observe quasiment aucune différence dans l'air (fig. 2.27). La raison est simple : dans ce cas, où il n'y a pas d'entrefer, le rayonnement ne dépend que de la *variation de flux* le long du circuit magnétique. En gros, le seul effet d'imposer que le théorème d'Ampère soit respecté a été de "remonter" la valeur moyenne du flux, sans modifier la façon dont le flux est réparti à l'intérieur du circuit ; le rayonnement n'a donc pas été modifié.

Enfin, on aura remarqué que notre méthode tend à sous-estimer les valeurs d'induction dans l'air, par rapport à FLUX3D, comme pour le cas du système d'essai vu précédemment.

2.7 Conclusions

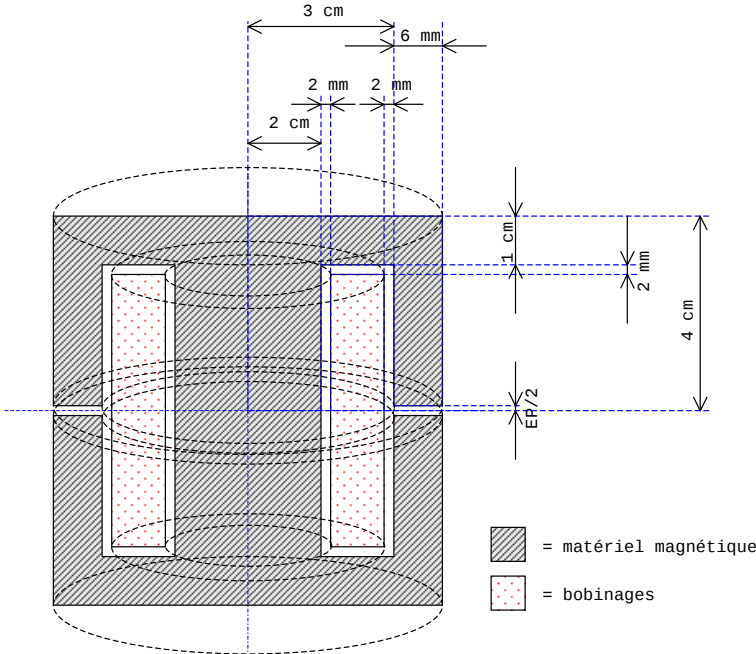
Dans ce chapitre on a présenté un modèle 3D pour calculer à moindre coût les champs de fuite générés par des systèmes rayonnants du type circuit magnétique + bobinages + entrefer. Ce modèle, qui s'appuie sur le concept de charges magnétiques fictives pour la modélisation du champ généré par le matériau aimanté (champ réduit), est aussi capable de fournir le flux dans les sections du circuit magnétique.

Nous avons testé ce modèle avec deux structures simples : un système avec entrefer et un transformateur cuirassé. Les résultats ont été comparés avec un calcul 3D classique obtenu avec le logiciel FLUX3D. L'écart entre ces deux calculs est de l'ordre de 10% pour le système avec entrefer, et 40% pour le transformateur, qui, du fait de sa structure (pas d'entrefer, bobinage au centre du dispo-

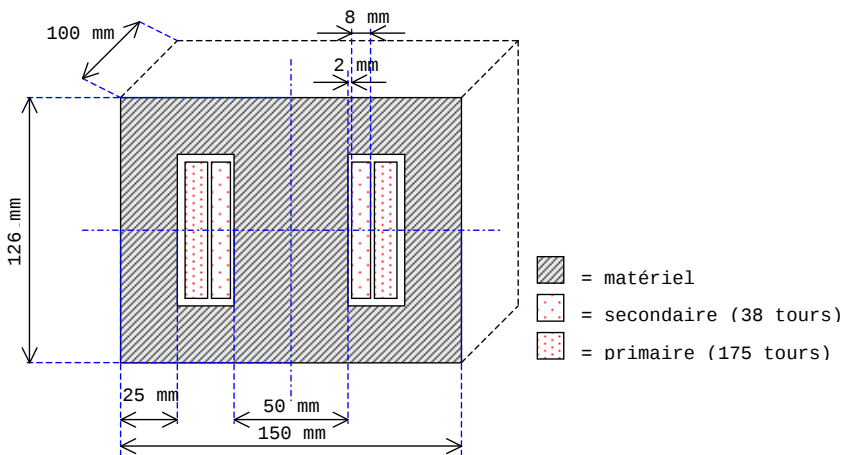
sitif), ne rayonne pas beaucoup. En revanche, le calcul de ces systèmes peut se faire avec quelques dizaines d'inconnues, et ne requiert que quelques secondes. De plus, aucun maillage surfacique ou volumique n'est requis.

D'ores et déjà, ce modèle peut être utilisé en l'état pour des structures simples. Cependant, sa précision peut être améliorée, tout en conservant la simplicité et le faible coût de calcul, qui sont les spécificités de ce modèle. Une telle amélioration passe nécessairement par une meilleure prise en compte du champ réduit, et peut-être par une description plus fine de la répartition du phénomène électromagnétique sur les sections du circuit magnétique.

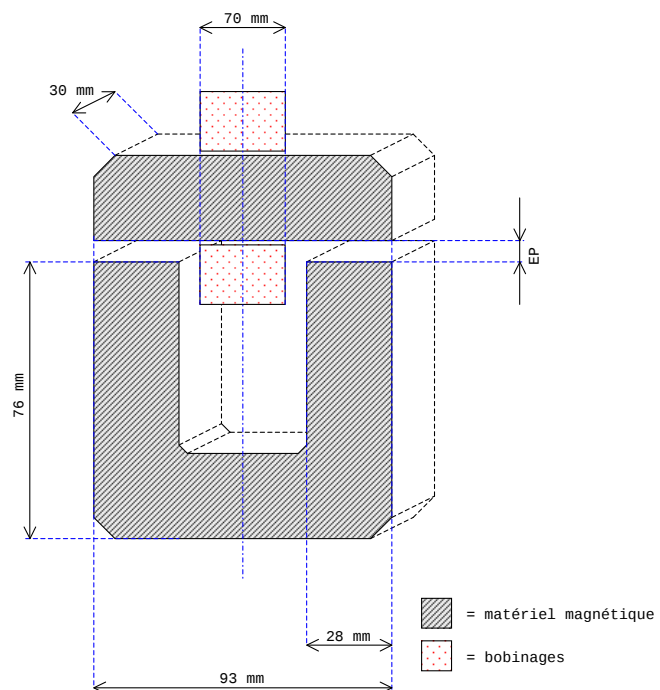
DISPOSITIF A



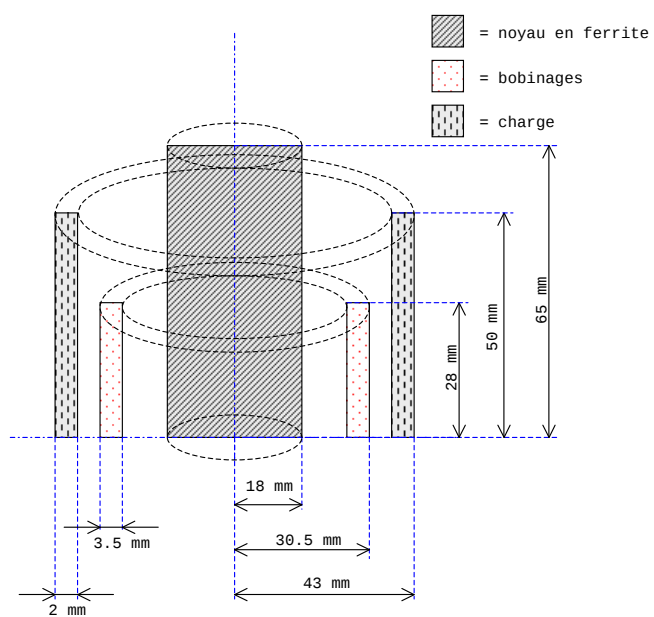
DISPOSITIF B



DISPOSITIF C



DISPOSITIF D



“An approximate answer to the right question is worth a great deal more than a precise answer to the wrong question.”

John Tukey

3

Modélisation des champs de fuite avec une démarche expérimentale

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la modélisation des champs de fuite générés par des dispositifs *connus*. Nous allons maintenant aborder l’aspect expérimental. L’objectif est de déterminer le champ magnétique autour d’un dispositif *inconnu* à partir de quelques mesures réalisées à proximité de ce dernier : il s’agit d’un problème inverse.

Nous avons commencé cette étude en passant en revue les divers modèles pour caractériser le champ magnétique dans l’air. Beaucoup de ces modèles ont été utilisés pour caractériser des champs statiques, alors que notre problématique requiert de caractériser des champs alternatifs. Dans ce cas, le type de mesure à réaliser n’est pas du tout le même : en effet il est nécessaire de connaître le module, mais aussi la *phase* du champ. Pour ceci nous avons mis au point une technique de mesure originale, qui s’appuie sur la mesure simultanée du champ en deux endroits.

Avec ce système de mesure nous étudions le problème de l’identification des paramètres de sources équivalentes (dipôles, spires, et multipôles), d’abord par simulation et ensuite avec des dispositifs réels. Ce problème d’estimation peut s’avérer mal conditionné : pour palier ce problème, diverses techniques de régularisation sont utilisées.

3.2 Caractérisation expérimentale des fuites

La caractérisation du rayonnement de dispositifs électriques à partir de mesures de champ est toujours nécessaire pour valider les résultats de simulations

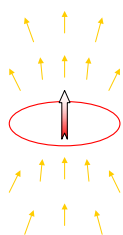
cf. pag. 32

numériques, et devient la seule voie praticable lorsqu'on ne dispose pas d'informations suffisantes pour construire un modèle numérique. Ceci est souvent le cas pour les caractéristiques des matériaux magnétiques, bien que ce paramètre ait un intérêt limité si la perméabilité est suffisamment élevée.

Mais la caractérisation expérimentale des champs de fuite est aussi un *réel besoin industriel* : elle est nécessaire pour établir la conformité des appareils et des produits aux normes. Dans ce contexte il est souhaitable que l'entière procédure de caractérisation (mesure, élaboration et exploitation des résultats) soit la plus simple possible.

3.2.1 Modèles de fuites

On trouve dans la littérature plusieurs modèles pour les champs de fuite, à partir d'un simple dipôle, pour arriver à des modèles très élaborés qui requièrent la connaissance précise de la géométrie du système rayonnant.

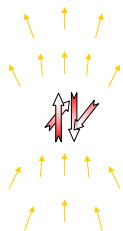


cf. pag. 145

Modèles dipolaires :

Le modèle de champ le plus simple consiste à remplacer la source de rayonnement par un dipôle[ZSV97, YK01], ou par une spire circulaire[RK00]. L'intérêt de ce modèle réside dans sa simplicité : des formules analytiques sont connues depuis très longtemps pour ces systèmes. Le modèle de la spire présente un degré de liberté supplémentaire par rapport au dipôle, mais est moins immédiat à calculer. Ce modèle est bien adapté à la caractérisation du champ magnétique à une distance comparable à la taille de l'appareil, mais peut s'avérer très imprécis à des distances rapprochées.

cf. pag. 25



Développement multipolaire :

L'extension "naturelle" du modèle dipolaire est le développement multipolaire[Dur68]. Pratiquement, le dispositif est remplacé avec un multipôle qui, du fait du plus grand nombre de degrés de liberté, permet une reconstruction assez fidèle du champ à des distances plus rapprochées par rapport à un simple dipôle. Il existe plusieurs genres de développements multipolaires[Leg96, Lyo94], selon le système de coordonnées choisi.

Représentation en terme de grandeurs surfaciques :

Il est possible de représenter le champ dans l'air à partir de grandeurs surfaciques, parmi lesquelles la densité de charges fictives, dipôles fictifs, ou encore à partir de la composante normale de l'induction et du potentiel scalaire. Cette approche requiert une connaissance assez détaillée de la géométrie du système ; en particulier un maillage surfacique est rendu nécessaire. Dans [Cha01] une représentation en termes de charges fictives est utilisée pour reconstruire le champ statique à l'extérieur d'une coque magnétique, à partir de mesures de champ à l'intérieur de la coque. Dans [Leg96] la représentation en termes de distribution multipolaire est adaptée à la géométrie de la source du champ (toujours statique) par un processus d'orthonormalisation des fonctions harmoniques sphériques.

Ces deux travaux se situent dans le contexte de la discrétion de navires militaires. Bien que les méthodes développées puissent a priori être étendues au cas de champs variables dans le temps, et appliquées à d'autres dispositifs



cf. pag. 41-43

(pourvu que l'on dispose d'une connaissance très détaillée de la géométrie), il ne sont pas bien adaptées au contexte dans lequel on s'est placé, à cause de leur complexité très élevée.

3.2.2 Comparaison avec le cas statique

Il existe beaucoup de travaux sur la caractérisation expérimentale de champs statiques. Le fait de travailler en statique offre un avantage très intéressant : un même capteur peut être déplacé dans l'espace pour mesurer le champ dans des endroits différents. Dans le cas de champs variables avec le temps ceci n'est généralement pas vrai, car il faut prendre en compte non seulement l'intensité du champ, mais aussi la *phase*[Lyo94].

Par exemple, on ne peut pas mesurer deux composantes du champ dans un même endroit en deux temps différents, et les additionner pour connaître l'intensité du champ. Par contre, si l'on savait à priori que la direction du champ ne change pas dans le temps, on serait autorisé à additionner judicieusement ces composantes, c'est-à-dire, de façon telle que le champ résultant ait toujours la même direction. On pourra ainsi remonter à l'intensité du champ, mais il y aura toujours une indétermination sur la direction.

Même si l'on disposait d'un capteur triaxial, on ne serait pas beaucoup avancé, car on ne pourrait pas mettre en relation facilement les valeurs de champ mesurées en temps différents en plusieurs endroits. Il faudra donc se résigner à l'idée qu'il est impossible de connaître la répartition du champ avec un seul capteur, car on n'est pas capable de synchroniser les signaux mesurés à des temps différents.

Supposons maintenant que la variation temporelle du champ soit périodique et que la période T soit la même partout, comme c'est le cas dans la plupart des systèmes que l'on rencontre dans la pratique. Dans ce cas il est possible de surmonter cette difficulté en utilisant non pas un, mais *deux* capteurs.

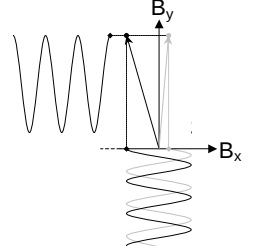
Supposons que l'on fixe l'un des deux capteurs à proximité du dispositif, dans un endroit où le signal à mesurer soit propre, et que l'on déplace l'autre dans les différents endroits où l'on veut connaître le champ. On va appeler *capteur de référence* le capteur fixe, et *capteur de mesure* le capteur mobile. L'idée est d'utiliser le capteur de référence comme une sorte d'horloge, qui va nous permettre de reconstruire la phase du champ mesuré par le capteur de mesure.

Pour comprendre comment cela peut se faire, imaginons que l'on mesure le champ dans un premier endroit P_1 , et que l'on enregistre simultanément les signaux $s_{ref}(t|1)$ et $s_{mes}(t|1)$ mesurés respectivement par le capteur de référence et par le capteur de mesure. Maintenant imaginons que l'on déplace le capteur de mesure dans un autre endroit P_2 , et que l'on effectue une deuxième mesure ; soient $s_{ref}(t|2)$ et $s_{mes}(t|2)$ les signaux mesurés.

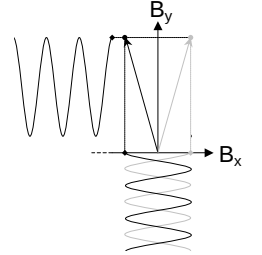
Le champ étant périodique, les signaux mesurés par le capteur fixe doivent être identiques, mis à part un éventuel décalage temporel Δt (fig. 3.1) :

$$s_{ref}(t|1) = s_{ref}(t'|1) = s_{ref}(t' + \Delta t|2)$$

où $t' = t - \lfloor \frac{t}{T} \rfloor T$ est le temps "retranché" sur une seule période. Ce décalage temporel Δt , qui peut être facilement calculé, est exactement le même pour les



sans connaître la phase des signaux, on ne peut pas calculer l'intensité du champ



Si les signaux sont déphasés de 0 ou 180 degrés, la direction du champ est constante

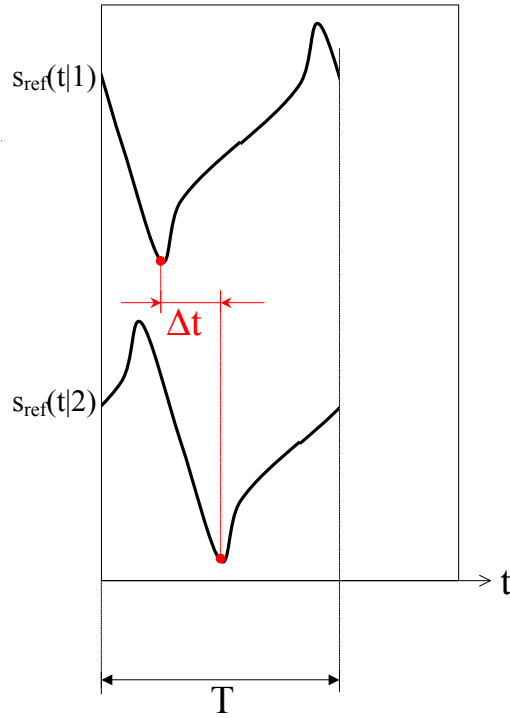


FIG. 3.1 – Les signaux mesurés par le capteur de référence en temps différents sont identiques, à un décalage Δt près.

signaux mesurés par le capteur de mesure. En d'autres termes, si l'on avait pu mesurer le champ *simultanément* en P_1 et P_2 , les signaux que l'on aurait obtenus seraient $s_{mes}(t'|1)$ et $s_{mes}(t' + \Delta t|2)$.

La procédure de mesure consiste donc à enregistrer le signal mesuré par le capteur de référence à un instant quelconque, et à l'utiliser comme référence pour synchroniser les signaux mesurés par le capteur de mesure. L'idée d'utiliser une telle technique a été déjà utilisée dans [ZSV97], mais dans ce travail le signal de référence était le courant absorbé au secteur, ce qui en limite l'utilisation aux cas où la fréquence du champ rayonné est très précisément un multiple de 50 Hz.

3.3 Réalisation du système de mesure

Il a fallu réaliser un système de mesure adéquat pour mesurer le champ magnétique à proximité de dispositifs rayonnants. Le cahier des charges retenu est le suivant :

- bande de fréquences : de 50 Hz jusqu'à quelques 100 kHz
- possibilité de mesurer et enregistrer deux signaux au même temps
- possibilité de connaître précisément la position des points de mesure
- possibilité d'automatiser le plus possible la procédure entière de mesure

3.3.1 Choix et réalisation du capteur

Les champs magnétiques à mesurer sont variables dans le temps. Après quelques essais, on a vérifié que ces champs ont une intensité tout à fait respectable (de l'ordre de 10-100 μT), et en tout cas largement supérieure au niveau du bruit électromagnétique de l'environnement. Il existe plusieurs catégories de capteurs à faible coût qui s'adaptent à ces conditions[Rip01], et principalement magnétorésistances, à effet Hall et de type inductif.

On a écarté les magnétorésistances car elles ne sont pas sensibles à la direction du champ, et en plus elles peuvent présenter des problèmes de stabilité thermique. Les capteurs à effet Hall sont également sensibles à la température, et fournissent un signal plus bruité par rapport à des capteurs de type inductif. En revanche, ils ont l'avantage de mesurer des champs de façon très ponctuelle et de pouvoir mesurer des champs statiques, ce qui n'est pas le cas pour les capteurs de type inductif. Enfin, les capteurs de type inductif sont très sensibles et très stables en température, les seuls problèmes pouvant venir de l'électronique associée. Le fait de mesurer la tension induite aux bornes d'une bobine constitue un désavantage, car la mesure que l'on fait n'est pas ponctuelle. D'un autre côté, cette opération de moyennage, et l'intégration utilisée à récupérer la valeur du champ, ont pour effet de fournir un signal très propre.

Les champs à mesurer étant alternatifs, j'ai choisi d'adopter des capteurs de type inductif, que j'ai réalisés à partir de matériel disponible au sein du laboratoire.

Étalonnage de la bobine

La bobine de chacun des capteurs, représenté en fig. 3.2, comporte 500 tours. L'induction magnétique B_{mes} est obtenue en intégrant la tension V mesurée aux bornes de la bobine :

$$B_{mes} = K \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

La bobine a été étalonnée en utilisant des bobines d'Helmoltz alimentées avec un courant imposé. L'induction magnétique au centre de la bobine a été calculée à partir du courant et, pour plus de sécurité, mesurée avec un instrument de précision, fonctionnant avec un capteur à effet Hall (fig. 3.3). L'étalonnage a été fait pour des fréquences comprises entre 50 Hz jusqu'à 3 kHz à cause des limites de l'électronique qui alimente les bobines d'Helmoltz. La valeur du coefficient K que l'on a calculée à partir de ces mesures est :

$$K = 20.14 \pm 0.16 [\text{TV}^{-1}\text{s}^{-1}]$$

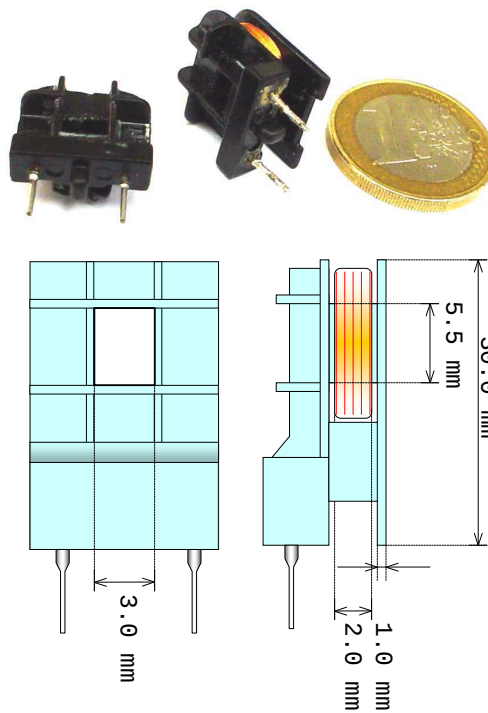


FIG. 3.2 – les deux bobines utilisées pour construire les capteurs

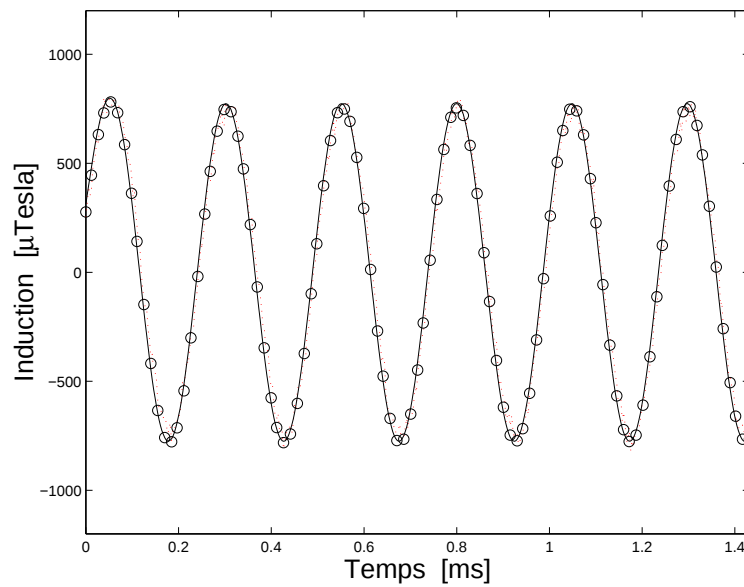


FIG. 3.3 – étalonnage de la bobine pour une fréquence de 3 kHz : (ligne continue) = induction générée par les bobines d’Helmoltz, (ligne pointillée) = induction mesurée avec le gaussmètre, ($\circ$) = induction mesurée à partir de la tension aux bornes de la bobine

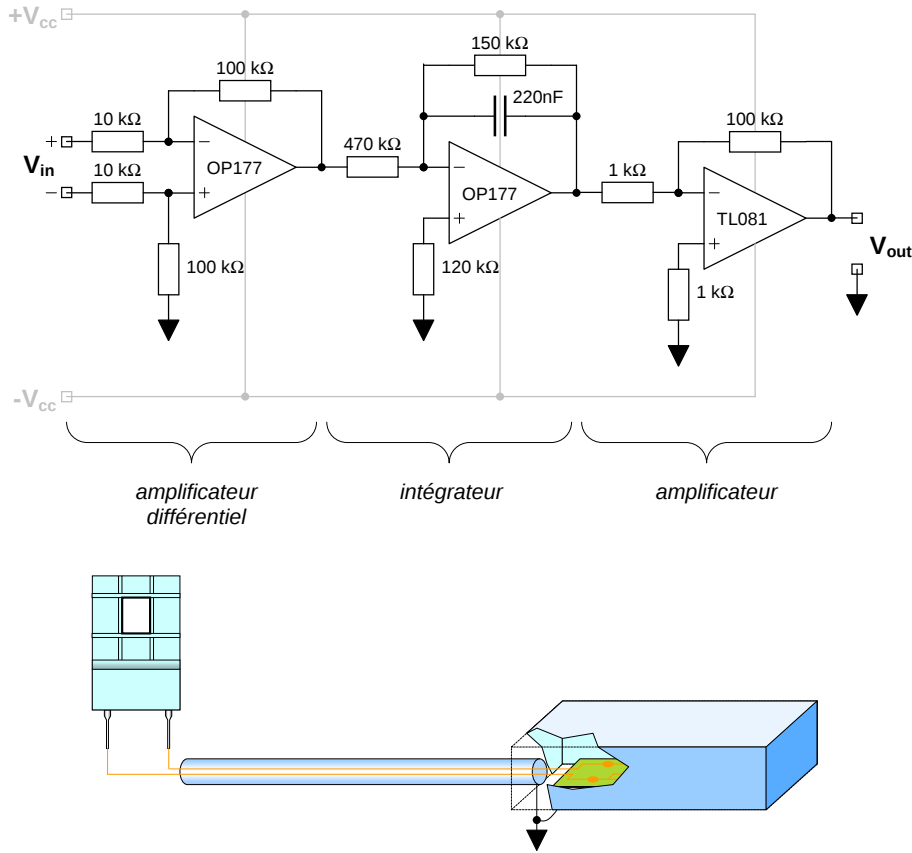


FIG. 3.4 – Circuit électronique du capteur (une seule voie)

Électronique du capteur

La tension récupérée aux bornes de la bobine est amplifiée et intégrée par le circuit électronique en fig. 3.4 (une voie pour chaque bobine). La fréquence de coupure inférieure a été fixée à 5 Hz. Ce circuit est alimenté par une batterie de ± 12 V pour éviter toute interférence avec l'alimentation. Pour éviter d'amplifier aussi le bruit électrique à 50 Hz, le circuit est contenu dans une boîte métallique reliée à la masse. Le câble entre la bobine et cette boîte est blindé, le blindage étant relié à la masse. Les deux bornes de la bobine sont à potentiel flottant ; leur différence de potentiel est amplifiée par le premier étage du circuit, de type différentiel.

Le gain de l'amplificateur que l'on avait initialement prévu de réaliser était compris entre 4 et $5 \cdot 10^4$. D'après nos mesures, les gains que l'on a obtenus sont : $G_1 = 42321$ et $G_2 = 48093$ à 1 kHz. La valeur de la composante de l'induction normale au plan de la bobine s'obtient à partir de la tension $V_{out} = G \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau$ à la sortie du circuit électronique :

$$B_{mes} = R \cdot V_{out} \quad (3.2)$$

$R = \frac{K}{G}$ étant le rapport de transduction.

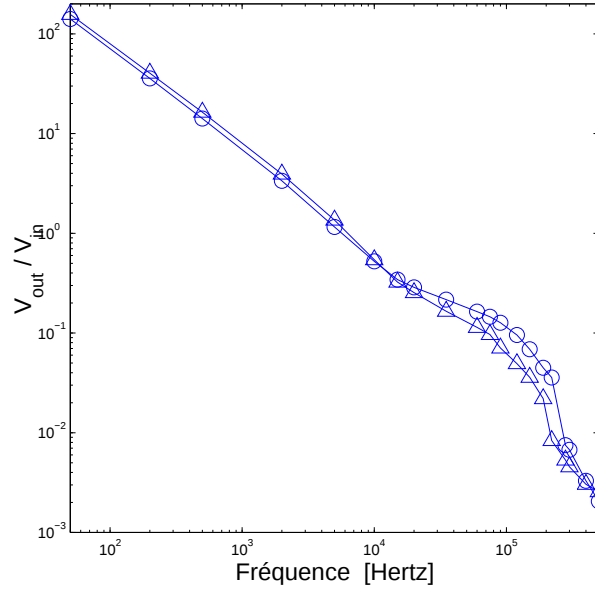


FIG. 3.5 – réponse en fréquence des deux voies du circuit électronique : (○) = première voie, (△) = deuxième voie

La réponse en fréquence des deux voies du circuit a été mesurée (fig. 3.5). Le circuit se comporte comme un intégrateur jusqu'à presque 10 kHz : après cette fréquence on observe une déviation, pour laquelle je n'ai pas trouvé d'explication. Cet effet imprévu fait que la bande de fréquences où le capteur est fiable est limitée à quelques kHz. Une possibilité pour étendre la bande utile serait de compenser cette distorsion de façon numérique en phase de post-traitement du signal. Je n'ai pas retenu cette solution par manque de temps, mais aussi parce qu'il aurait fallu changer le matériel que j'ai utilisé pour l'étalonnage, la bande de celui-ci étant limitée à 3 kHz.

La valeur nominale du rapport de transduction R est : $R_1 = 4.76 \cdot 10^{-4} [\text{TV}^{-1}]$ pour la première voie, et $R_2 = 4.19 \cdot 10^{-4} [\text{TV}^{-1}]$ pour la deuxième voie. Dans la bande 50 – 3000 Hz ce rapport varie en fonction de la fréquence dans une marge de 10% par rapport à sa valeur moyenne. On a donc étalonné l'ensemble bobine et électronique en cascade pour la deuxième voie, que l'on va utiliser pour le capteur de mesure (tab. 3.1).

À titre d'exemple, en fig.3.6 on a superposé l'induction magnétique au centre des bobines d'Helmoltz, et la tension V_{out} à la sortie du circuit, à la fréquence de 1000 Hz.

TAB. 3.1 – Étalonnage de la deuxième voie du capteur

FRÉQUENCE [Hz]	R_2 [TV ⁻¹]	DEV. STD. [TV ⁻¹]
50	$4.1107 \cdot 10^{-4}$	$0.3169 \cdot 10^{-4}$
200	$4.0331 \cdot 10^{-4}$	$0.1127 \cdot 10^{-4}$
500	$4.0256 \cdot 10^{-4}$	$0.0770 \cdot 10^{-4}$
1000	$4.0380 \cdot 10^{-4}$	$0.0888 \cdot 10^{-4}$
1500	$4.0657 \cdot 10^{-4}$	$0.1326 \cdot 10^{-4}$
3000	$4.2978 \cdot 10^{-4}$	$0.3145 \cdot 10^{-4}$

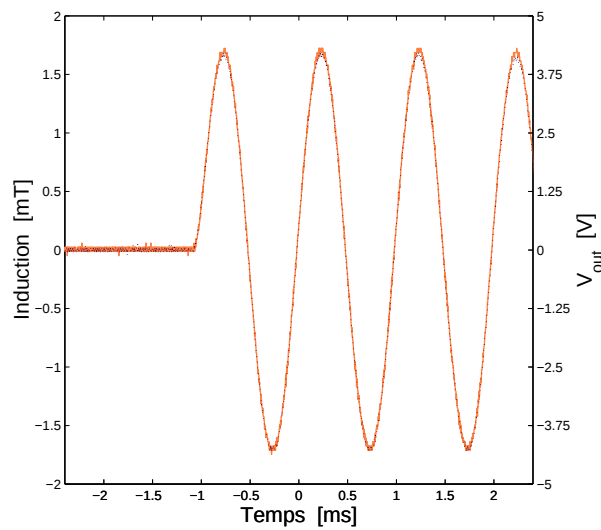


FIG. 3.6 – Induction magnétique et tension mesurée à la sortie du circuit électronique pour la deuxième voie, à la fréquence de 1000 Hz.

3.3.2 Le système d'acquisition

Les deux signaux en sortie de la boîte des capteurs sont envoyés par des câbles coaxiaux à un oscilloscope numérique¹, qui est relié à un ordinateur portable² à travers l'interface IEEE-488[IEE87]. Cette liaison permet l'importation des signaux échantillonnés, et le traitement numérique des données. Cette phase de post-traitement des signaux est exécutée quasiment en temps réel, et a été mise en œuvre en utilisant le logiciel de calcul MATLAB. Ce dernier s'occupe également du contrôle des divers instruments (fig. 3.7).

¹Modèle TEKTRONIX TDS210.

²Modèle IBM THINKPAD 560Z, 64Mb de RAM, processeur PENTIUM II à 233 MHz.

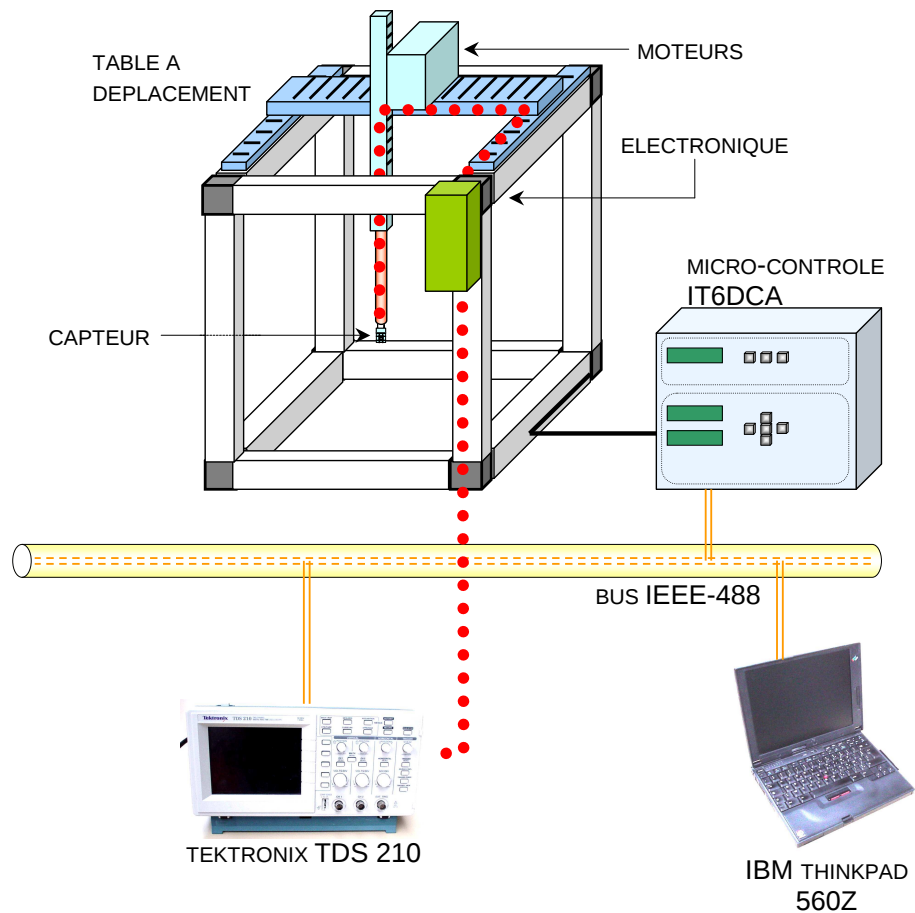


FIG. 3.7 – Le système expérimental.

Le post-traitement des signaux consiste en trois phases :

- i amélioration de la qualité du signal
- ii extraction de la phase
- iii décomposition en série de Fourier

Dans une première phase, la période du signal de référence est estimée, et le rapport signal sur bruit est augmenté grâce à une opération de moyennage synchrone[ML95]. Ensuite on calcule le décalage temporel Δt entre le signal de référence tout juste mesuré, et un signal de référence que l'on aura enregistré au tout début de la procédure de mesure. Enfin, on calcule la décomposition en série de Fourier du signal de mesure : en général les premières cinq harmoniques suffisent à caractériser l'évolution temporelle du signal.



CONCEPT DE CORRÉLATION :

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux réels à puissance moyenne infinie (comme c'est le cas des signaux périodiques ou aléatoires). Définissons la *fonction d'intercorrélacion* comme :

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t-\tau)dt \quad (3.3)$$

Dans le cas de signaux échantillonnés, la fonction d'intercorrélacion est calculée de façon approchée comme :

$$\hat{C}_{xy}(nT_e) = \frac{1}{N-n} \sum_k x(kT_e)y[(k-n)T_e] \quad (3.4)$$

T_e étant la période d'échantillonnage, et N le nombre de points.

D'un point de vue physique, cette fonction peut représenter l'échange d'énergie ou d'information, ou encore la ressemblance entre les deux signaux. On retrouve comme cas particulier la *fonction de corrélation* $C_{xx}(\tau)$, celle-ci étant l'intercorrélacion d'un signal $x(t)$ avec lui-même.

Dans le cas d'un signal aléatoire, la corrélation nous indique combien la valeur du signal au temps t est liée à la valeur au temps $t + \tau$. Pour un *bruit blanc* la fonction de corrélation est une impulsion de Dirac $\delta(\tau)$; ceci signifie que la valeur du bruit à l'instant t n'est pas du tout liée aux valeurs du bruit en tout autre instant temporel.

En toute rigueur, ces définitions ne peuvent être retenues qu'à condition que d'éventuels signaux aléatoires soient stationnaires et ergodiques. On va quand même les prendre pour bonnes ; le lecteur intéressé peut

s'adresser vers les nombreux textes spécialisés[ML95, OS75].

PROPRIÉTÉS DE LA CORRÉLATION :

La corrélation est maximale à retard nul (pour $\tau = 0$), et représente la puissance du signal P_x :

$$|C_{xx}(\tau)| \leq C_{xx}(0) = P_x$$

Cette propriété va être précieuse pour estimer la période d'un signal, ou le retard entre deux signaux identiques.

La corrélation d'un signal périodique est elle même périodique. La corrélation d'un signal aléatoire normalement décroît rapidement lorsque τ augmente.

L'intercorrélacion entre un signal $x(t)$ et un bruit $b(t)$ non biaisé est nulle :

$$C_{xb}(\tau) = 0$$

ce qui permet d'écrire la corrélation d'un signal bruité $s(t) = x(t) + b(t)$ comme :

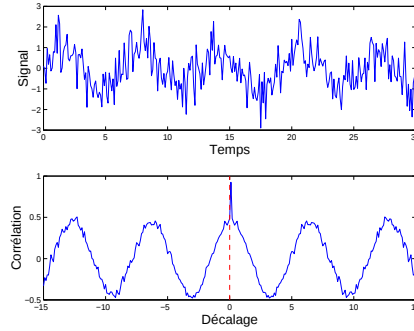
$$C_{ss}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau) \quad (3.5)$$

L'intercorrélacion de deux signaux périodiques est nulle si les périodes sont incommensurables. Enfin, l'intercorrélacion d'un signal $x(t)$ de période T avec un peigne de Dirac $\sqcup\sqcup_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t + kT)$ ayant la même période est le signal d'origine, à un facteur $\frac{1}{T}$ près :

$$C_{x\sqcup\sqcup_T}(\tau) = \frac{1}{T}x(\tau) \quad (3.6)$$

ESTIMATION DE LA PÉRIODE :

Soit $s(t) = x(t) + b(t)$ un signal périodique bruité, et supposons d'en vouloir calculer la période T . D'après (3.5) la corrélation $C_{ss}(\tau)$ est la somme de la corrélation du signal $C_{xx}(\tau)$ et de la corrélation du bruit $C_{bb}(\tau)$ qui décroît rapidement vers zéro lorsque $|\tau|$ augmente. Or, le signal $x(t)$ étant périodique, sa corrélation $C_{xx}(\tau)$ l'est aussi. De plus, elle a exactement un maximum par période en $\tau = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$:

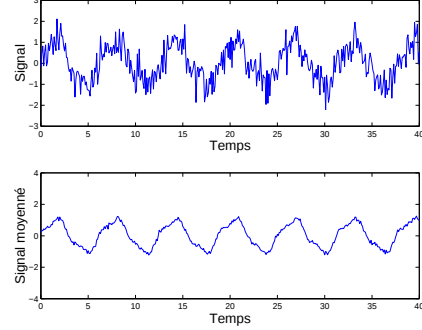


La méthode consiste donc à calculer la corrélation du signal, et à en rechercher les maximums, en prenant garde du fait que pour $\tau = 0$ le terme $C_{bb}(0)$ risque d'être important.

MOYENNAGE SYNCHRONE :

Supposons d'avoir enregistrées N_p périodes du signal bruité $s(t) = x(t) + b(t)$, de période T connue. Le rapport signal sur bruit peut être amélioré par une opération de moyennage entre les périodes enregistrées. D'un point de vue formel ceci revient à calculer l'intercorrélation entre le signal $s(t)$ et un peigne de Dirac de période T :

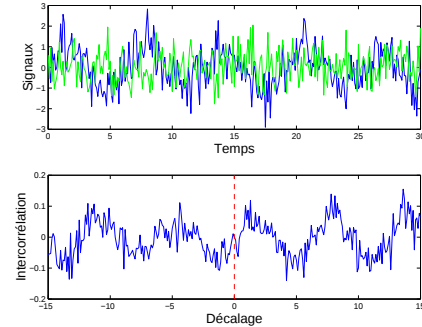
$$T \cdot C_{s \sqcup T}(\tau) \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N_p-1} s(\tau + kT) \quad (3.7)$$



D'après (3.5) cette opération est "transparente" pour le signal périodique, alors que la variance du bruit est réduite d'un facteur N_p . De plus, les éventuels signaux périodiques ayant une période non multiple de T sont très atténués.

MESURE DU RETARD :

Soient $x(t) + b(t)$ et $y(t) = \alpha x(t - \Delta t) + b(t)$ deux signaux bruités identiques (à un facteur α près), mais décalés l'un par rapport à l'autre ; supposons vouloir estimer ce décalage temporel Δt . On se rend compte que l'intercorrélation $C_{xy}(\tau) = \alpha C_{xx}(\tau - \Delta t) + C_{bb}(\tau)$ est maximale pour $\tau = \Delta t$ ($\tau = \Delta t \pm kT$ dans le cas de signaux périodiques). La méthode consiste alors à calculer l'intercorrélation et à rechercher les maxima :



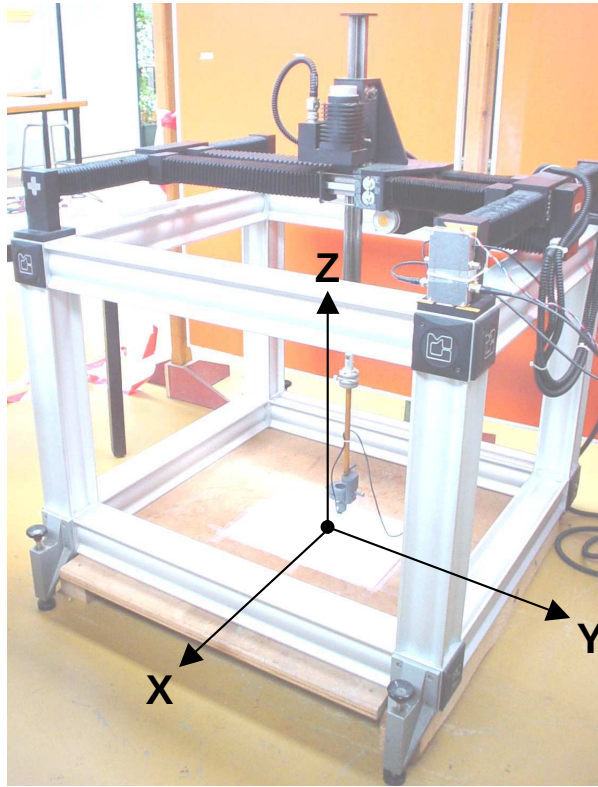


FIG. 3.8 – La table à déplacement et le référentiel

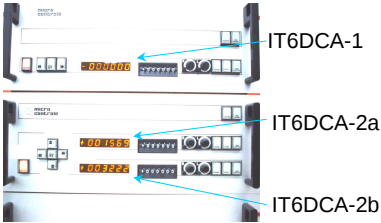
3.3.3 Le système de positionnement

Le capteur de mesure est fixé à l'extrémité d'une tige en bakélite, qui est à son tour fixée sur un bras mécanique d'une table à déplacement (fig. 3.8). Des moteurs pas-à-pas permettent de déplacer le capteur en 3D avec une finesse de 1/10 de mm dans le plan horizontal (XY), et de 1/100 de mm selon l'axe vertical (Z). Un contrôleur électronique³ relié au bus IEEE s'occupe de manière autonome de la commande des moteurs. Le support du capteur permet d'orienter manuellement le capteur, et de mesurer en des temps différents les diverses composantes du champ. Ces composantes peuvent ensuite être réunies pour obtenir une mesure vectorielle.

Dans cette phase la difficulté principale a été de déterminer avec précision la position du capteur par rapport à celle de la source du champ. J'ai donc fixé un référentiel sur le plancher de la table à déplacement, et j'ai étalonné la position du capteur pour les trois directions principales. Le contrôleur permet de compter le nombre d'impulsions qui sont envoyées aux moteurs pas-à-pas, et de placer le bras mécanique dans une position précise. Au début de la procédure de mesure le bras mécanique est positionné en ce point, et les compteurs d'impulsions sont remis à zéro. À partir de cette position, le nombre d'impulsions qu'il faut

³Modèle MICRO-CONTRÔLE IT6DCA-1 pour l'axe vertical, et IT6DCA-2 pour les deux axes dans le plan horizontal

envoyer aux trois moteurs pour que le capteur soit positionné dans l'origine du référentiel fixé est reporté dans le tab. 3.2.



TAB. 3.2 – Valeurs des compteurs à l'origine du référentiel

ORIENTATION	IT6DCA-2A	IT6DCA-2B	IT6DCA-1
X	2079	3045	-12038
Y	1386	3444	-12038
Z	1569	3022	-6100

Le moteur IT6DCA-1 est associé à l'axe Z, les deux moteurs IT6DCA-2a et IT6DCA-2b sont associés respectivement aux axes X et Y.

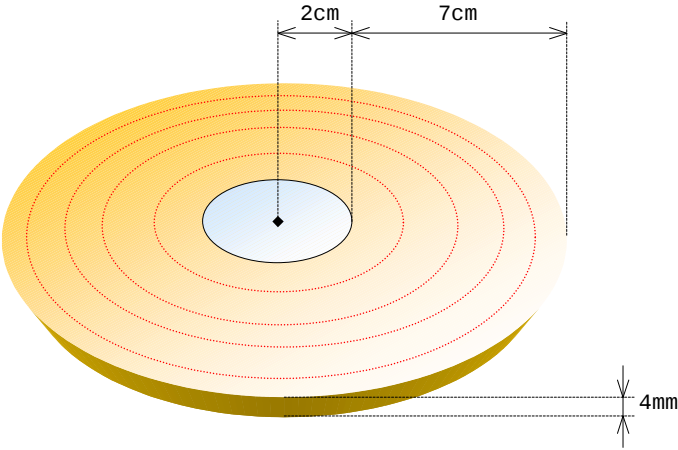


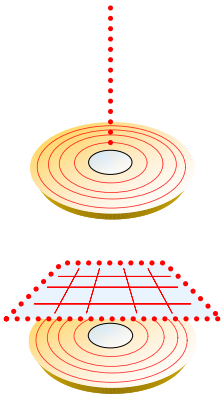
FIG. 3.9 – L'inducteur de type "pancake" utilisé pour la validation (23 tours)

3.3.4 Validation du système de mesure

Pour valider le système dans son intégralité (capteur, positionnement, post-traitement du signal) on a mesuré le champ d'un inducteur de type "pancake" (fig. 3.9), dont le champ peut être calculé analytiquement.

On a donc mesuré l'induction sur l'axe de l'inducteur ($I = 0.23\text{ A}$, $f = 277\text{ Hz}$), et on a comparé les mesures avec le calcul analytique (fig. 3.10). L'écart entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées est inférieur à 5%.

Ensuite on a mesuré l'induction sur un plan normal à l'axe de l'inducteur. Les résultats de cette mesure et du calcul analytique sont reportés en fig. . Ces résultats valident le système de mesure.



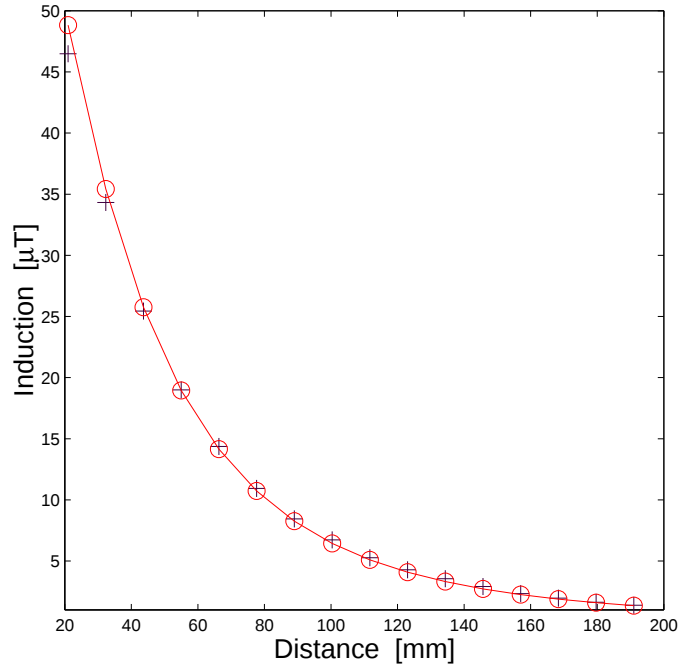


FIG. 3.10 – Induction sur l’axe de l’inducteur : (o) = calcul analytique, (+) = valeurs mesurées.

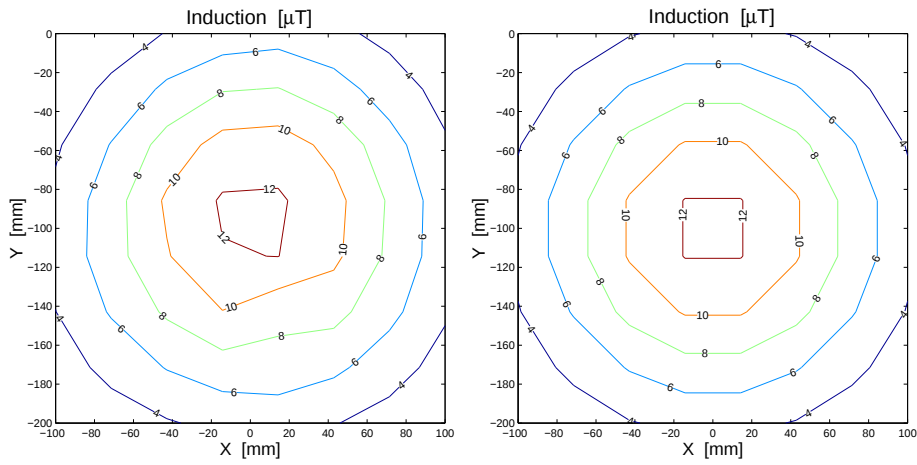


FIG. 3.11 – Induction sur le plan normal à l’axe de l’inducteur : valeurs mesurées (gauche) et calcul analytique (droite).

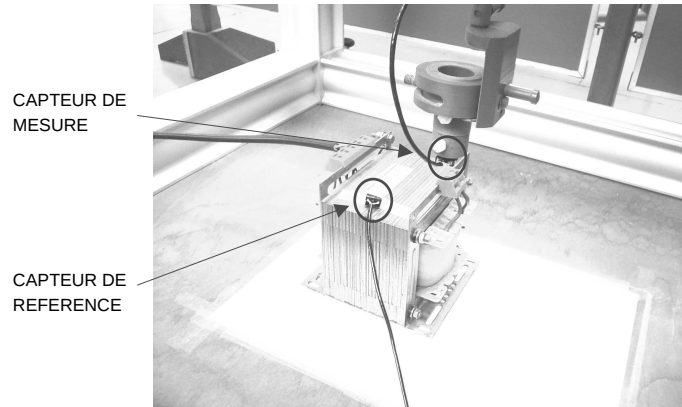


FIG. 3.12 – Mesures sur le transformateur. On peut observer le capteur de référence fixé sur le noyau, et le capteur de mesure au bout de son support.

3.4 Modèles dipolaires

Le premier dispositif étudié expérimentalement est un transformateur cuirassé monophasé⁴ fonctionnant à vide (fig. 3.12), dont la géométrie est celle du dispositif (B) étudié numériquement. Le courant mesuré à vide est de 0.93 A (valeur crête). L'induction a été mesurée en s'éloignant du dispositif le long d'une droite, et sur un plan au dessus du dispositif.

cf. pag. 22, 67

En fig. 3.13 est tracée l'évolution temporelle de l'induction (gauche) et la décomposition harmonique de celle-ci (droite). On a pu constater que dans toutes les mesures la répartition des harmoniques est la même. Chaque composante harmonique peut être étudiée séparément des autres, en vertu du principe de superposition. Dans la suite on ne va donc s'intéresser qu'à l'harmonique fondamentale (50 Hz), car on sait à l'avance que les résultats seront les mêmes pour toutes les autres harmoniques, à un facteur multiplicatif près.

3.4.1 Estimation d'un dipôle équivalent

Le modèle le plus simple du champ dans l'air est, comme on l'a déjà dit, le modèle dipolaire. Dans ce modèle, la répartition spatiale du champ est décrite par l'expression suivante :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] \quad (3.8)$$

$\vec{m}$ étant le moment dipolaire, et r la distance du centre du dispositif. En régime harmonique, l'expression est la même, à condition de considérer que le champ et le moment magnétique sont des vecteurs complexes :

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\underline{\vec{m}} \cdot \underline{\vec{r}}) \underline{\vec{r}}}{r^5} - \frac{\underline{\vec{m}}}{r^3} \right] \quad (3.9)$$

⁴Transformateur d'isolation BOIGE&VIGNAL de 0.63 kVA

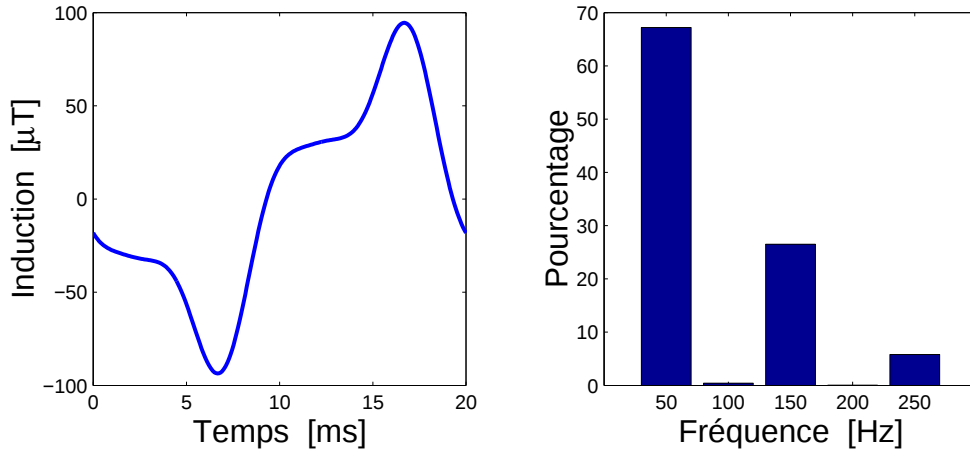


FIG. 3.13 – Droite : évolution temporelle de l'induction sur une période, mesurée au voisinage du transformateur. Droite : décomposition harmonique du signal.

L'évolution temporelle du champ est alors décrite par :

$$\vec{H}(t) = \Re \left[\vec{H} \cdot \exp j\omega t \right] \quad (3.10)$$

On peut développer (3.8) pour mettre en évidence la dépendance linéaire entre le champ magnétique $\vec{H}$ et le moment $\vec{m}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{H_x}{r^5} \\ \frac{H_y}{r^5} \\ \frac{H_z}{r^5} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} & \frac{3xy}{r^5} & \frac{3xz}{r^5} \\ \frac{3yx}{r^5} & \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} & \frac{3yz}{r^5} \\ \frac{3zx}{r^5} & \frac{3zy}{r^5} & \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$$

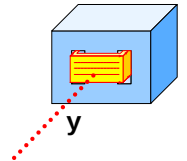
où $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le problème de l'estimation du dipôle magnétique équivalent à partir de N mesures vectorielles du champ revient à résoudre un système linéaire :

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{h}$$

où $\mathbf{m} = [m_x \ m_y \ m_z]'$, $\mathbf{h} = [\underline{H}_x(P_1) \ \underline{H}_y(P_1) \ \underline{H}_z(P_1) \ \underline{H}_x(P_2) \ \dots \ \underline{H}_z(P_N)]' \in \mathbb{C}^{3N}$ est obtenu à partir des mesures de champs dans des endroits différents $P_1 \dots P_N$, et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^3$ est obtenue en répliquant N fois la matrice plus en haut. Ce système est surdéterminé, et peut être résolu avec la méthode des moindres carrés :

$$\mathbf{m} = \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{h} \quad (3.11)$$

On a utilisé le champ mesuré le long d'une droite orientée selon la direction Y (par rapport aux axes en fig. 3.8) pour estimer le dipôle équivalent au transformateur. En fig. 3.14 est tracée l'intensité de l'induction mesurée le long de



cf. pag. 67

cette droite, au même temps que l'induction générée par le dipôle équivalent. On constate que dans ce cas il y a un bon accord entre les mesures et le modèle, à des distances qui, comparées aux dimensions du transformateur, sont quand même bien rapprochées.

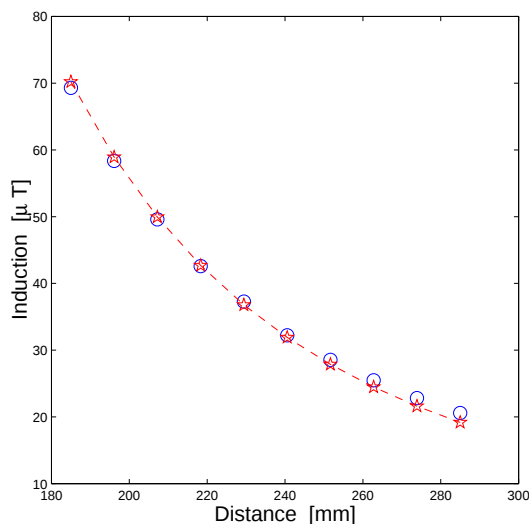
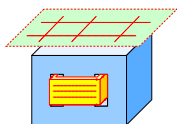


FIG. 3.14 – Induction magnétique le long d'une droite orientée selon la direction Y : ($\circ$) = mesures, ($\star$) = modèle dipolaire.



Par contre, si l'on compare les résultats fournis par ce même modèle avec l'induction mesurée sur un plan situé au dessus du transformateur, on observe un écart important (fig. 3.15). Le nombre de conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$ est estimé à environ 2 : la matrice n'est donc pas mal conditionnée. L'explication de cet écart est que le modèle dipolaire n'est pas valable à ces distances. Ce modèle n'est quand même pas à négliger, car il pourrait encore se révéler intéressant dans les cas où il est vraisemblable que l'exposition ait lieu dans une direction particulière, par exemple dans le cas d'un écran vidéo ou d'un sèche-cheveux.

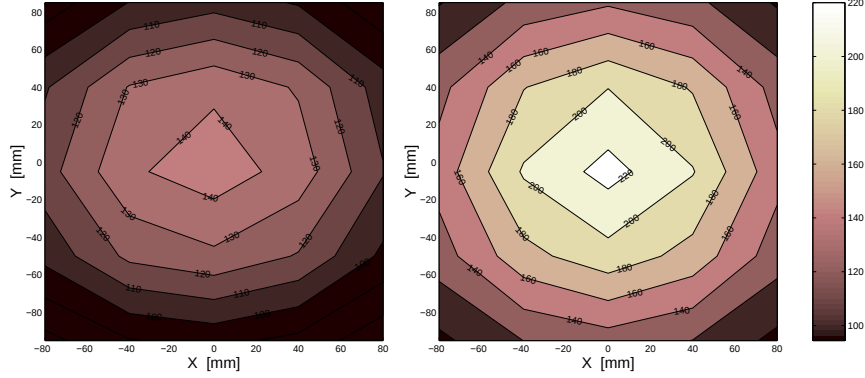


FIG. 3.15 – Induction magnétique sur un plan au dessus du transformateur : mesures (gauche), et valeurs calculées à partir du dipôle estimé précédemment (droite).

3.4.2 Estimation d'une spire équivalente

L'autre modèle de type dipolaire est celui de la spire, que l'on va supposer localisée au centre du transformateur. Le champ magnétique généré par une spire circulaire parcourue par un courant *statique* unitaire est exprimé par les équations (B.6)-(B.8), reportées ici par commodité :

cf. pag. 145

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_\rho \vec{e}_\rho + H_z \vec{e}_z \\ H_\rho &= \frac{kz}{4\pi\rho\sqrt{a\rho}} \cdot \left[-K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right] \\ H_z &= \frac{k}{4\pi\sqrt{a\rho}} \cdot \left[K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right]\end{aligned}$$

avec $k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}}$, $K(k)$ et $E(k)$ étant les intégrales elliptiques de première et deuxième espèce [SL99]. On observe tout de suite un inconvénient de ce modèle : les équations du champ ne sont pas linéaires par rapport au rayon a , ce qui implique la nécessité d'employer une méthode d'optimisation non linéaire. Par contre le courant I peut être estimé très simplement pour un rayon a donné, car le champ dépend linéairement du courant. La méthode pour estimer les paramètres de ce modèle consiste alors à estimer le rayon a en minimisant l'erreur quadratique moyenne avec une méthode d'optimisation non linéaire quelconque, et à calculer le courant I qui en découle.

On a repris les mêmes mesures utilisées pour estimer un dipôle équivalent, et on a estimé le rayon et le courant de la spire équivalente au transformateur. les résultats sont présentés en fig. 3.16 et 3.17.

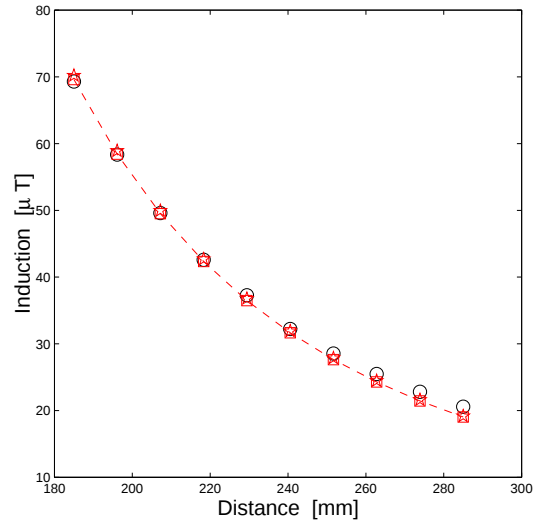


FIG. 3.16 – Induction magnétique le long d’une droite orientée selon la direction Y : ($\circ$) = mesures, ($\star$) = dipôle, ($\square$) = spire.

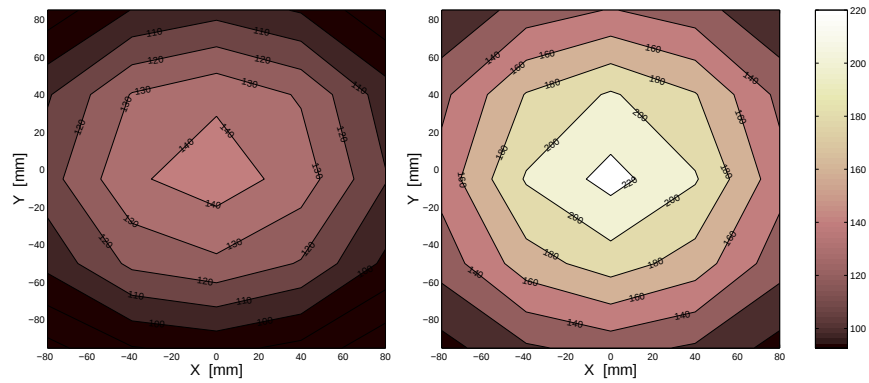
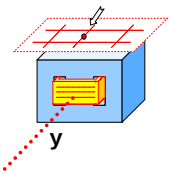


FIG. 3.17 – Induction magnétique sur un plan au dessus du transformateur : mesures (gauche), et valeurs calculées à partir de la spire équivalente (droite).

En regardant ces dernières figures, il est naturel de se poser des questions sur l’opportunité de mettre en œuvre le modèle de la spire, plus compliqué par rapport au simple dipôle.



Maintenant ajoutons un point supplémentaire à l’ensemble des mesures utilisées pour estimer les paramètres du dipôle et de la spire équivalente. Supposons que l’on prenne la nouvelle mesure sur le plan au dessus du transformateur, et comparons les résultats obtenus avec ces deux modèles (fig. 3.18 et 3.19).

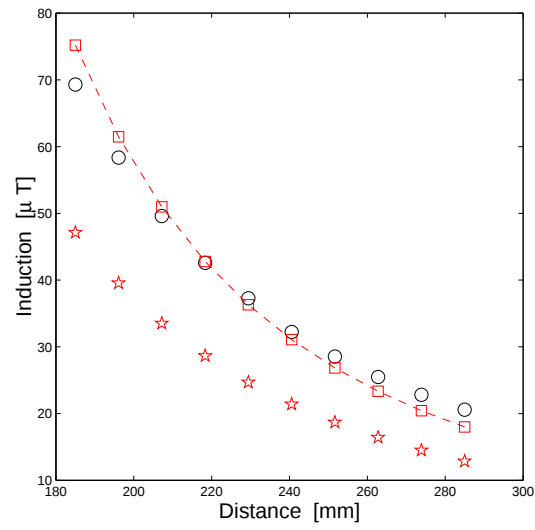


FIG. 3.18 – Induction magnétique le long d’une droite orientée selon la direction Y : $(\circ)$ = mesures, $(\star)$ = dipôle, $(\square)$ = spire.

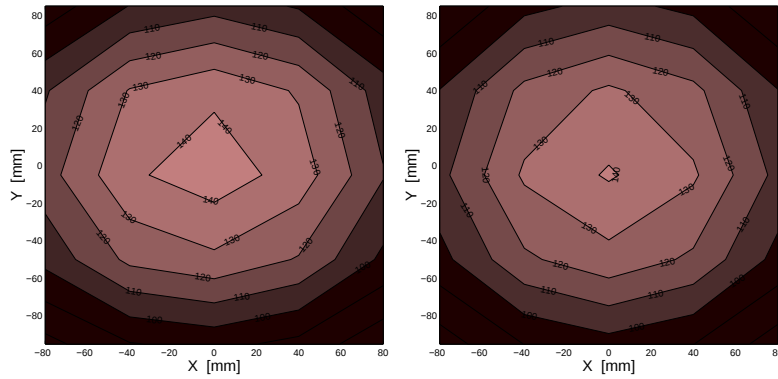
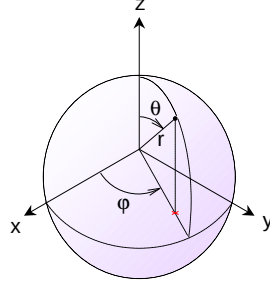


FIG. 3.19 – Induction magnétique sur un plan au dessus du transformateur : mesures (gauche), et valeurs calculées à partir de la spire équivalente, estimée avec un point supplémentaire (droite).

Il est évident que cette fois-ci le degré de liberté supplémentaire de la spire s’est avéré précieux, car nous disposons de points de mesure *mieux placés* - et donc plus riches d’information.

NOTATIONS

Il est fort regrettable qu'il existe diverses notations pour les coordonnées sphériques[WRb]. Dans la suite on va adopter la convention suivante :



$$\begin{cases} x &= \cos \varphi \sin \theta \\ y &= \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \cos \theta \end{cases}$$

Les angles φ et θ sont appelés respectivement *azimuth* et *zenith*. Attention à ne pas confondre ϕ = potentiel scalaire magnétique, et φ = azimuth !

Les polynômes de Legendre[WRa] $P_n(x)$, les fonctions associées de Legendre $P_n^m(x)$, et les harmoniques sphériques[WRc] $Y_n^m(\theta, \varphi)$ sont d'autres sources d'ambiguïté, à cause des multiples conventions. Dans la suite on va adopter les définitions suivantes :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.12)$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (0 \leq m \leq n) \quad (3.13)$$

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\varphi} \quad (3.14)$$

On peut étendre la définition de $P_n^m(x)$ à des valeurs de m comprises dans la plage $-n \leq m \leq 0$ de la manière suivante :

$$P_n^{-|m|}(x) = (-1)^{|m|} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{|m|}(x)$$

D'après ces définitions, la dérivée de $P_n^m(x)$ s'écrit comme :

$$\frac{dP_n^m(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{mxP_n^m(x) + (n+m)(n-m+1)\sqrt{1-x^2}P_n^{m-1}(x)}{1-x^2} & 1 \leq m \leq n \\ -\frac{P_n^1(x)}{\sqrt{1-x^2}} & m = 0 \end{cases}$$

3.5 Le modèle multipolaire

Les prestations des modèles dipolaires que l'on vient de voir peuvent être satisfaisantes dans beaucoup de cas réels (exposition relativement distante, ou dans une direction particulière), à condition de bien choisir les points où l'on mesure le champ. Cependant il peut se présenter des cas où un simple modèle dipolaire n'est plus suffisant, notamment en condition d'exposition rapprochée du dispositif, et pour des systèmes où la décroissance du champ n'est pas en $\frac{1}{r^3}$.

De plus, dans l'exemple d'application précédent on a implicitement admis connaître a priori la position, et dans le cas de la spire l'orientation aussi, du dipôle équivalent. Or ceci n'est pas toujours le cas : par exemple, des pièces magnétiques (boîtier, pièces mécaniques, ...) peuvent déformer la répartition du champ d'une telle façon que l'on est incapable de déterminer intuitivement la position du dipôle équivalent. Ou bien, on pourrait tout simplement être dans l'impossibilité de connaître les détails du système rayonnant.

3.5.1 Définition et propriétés des multipôles

Le problème devient plus difficile, car d'un côté il faut avoir recours à des modèles plus compliqués, et de l'autre le nombre de paramètres à estimer augmente. Le modèle multipolaire que l'on va adopter est l'extension logique des modèles dipolaires.

Pour introduire le concept de multipôle, il faut repartir du potentiel scalaire ϕ , qui dans le vide et en absence de courant obéit à l'équation de Laplace [Far93], ici écrite en coordonnées sphériques :

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

Considérons des conditions de Dirichlet ($\phi = \phi_0(\theta, \varphi)$) imposées sur une sphère entourant le dispositif, et soit à déterminer le potentiel ϕ à l'extérieur de cette sphère. Dans un premier temps, on va ajouter l'hypothèse que le système est axisymétrique : donc la dépendance de φ disparaît. En appliquant la méthode de séparation de manière judicieuse [Far93] on obtient :

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)$$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R &= 0 & \text{équation d'Euler} \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin\theta \Theta &= 0 & \text{équation de Legendre} \end{aligned}$$

En imposant $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0$ on obtient que $R(r) \propto \frac{1}{r^{n+1}}$. La solution de l'équation de Legendre est un peu plus laborieuse : en opérant la substitution $x = \cos\theta$, on parvient à la conclusion que $\Theta(\theta) \propto P_n(\cos\theta)$. Donc le potentiel scalaire ϕ dans le cas axisymétrique peut être écrit sous la forme du développement multipolaire suivant :

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad (3.15)$$

où ρ est le rayon de la sphère sur laquelle le potentiel est imposé, et C_n sont des coefficients homogènes à un courant.

Dans le cas général, on peut toujours appliquer la méthode de séparation des variables à l'équation de Laplace. L'expression du développement que l'on obtient est alors plus compliquée [Dur68] :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.16)$$

Ces dernières équations (3.15) et (3.16) ne sont valables que pour $r \geq \rho$, c'est à dire à l'extérieur de la sphère sur laquelle les conditions à Dirichlet ont été imposées. On aura remarqué que le potentiel, et donc le champ magnétique, dépendent linéairement des coefficients $\{C_n^m\}$: ceci nous simplifie beaucoup la tâche, qui consiste à estimer ces coefficients à partir de mesures de champ ponctuelles. En régime harmonique, ces coefficients deviennent complexes.

Enfin, on va énoncer ici une dernière propriété qui nous sera précieuse dans la suite. On sait qu'à partir de l'ensemble des coefficients $\{C_n^m\}$ le champ magnétique peut être obtenu assez facilement en calculant le gradient du potentiel, c'est à dire :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.17)$$

Or, ces mêmes coefficients permettent d'obtenir directement un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ de la manière suivante [Lor01] :

$$\vec{A} = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n C_n^m \vec{r} \times \vec{\nabla} Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.18)$$

Estimation des coefficients du multipôle en absence de bruit

D'après (3.17) la relation entre le champ magnétique et les coefficients du multipôle est linéaire. Donc en principe, il suffit de disposer d'un nombre N_P suffisant de mesures pour composer un système linéaire, qui une fois résolu va donner ces coefficients. En développant (3.17), on peut exprimer le champ magnétique en coordonnées sphériques de la façon suivante :

$$\vec{H} = \underline{H}_r \vec{e}_r + \underline{H}_\varphi \vec{e}_\varphi + \underline{H}_\theta \vec{e}_\theta$$

$$\underline{H}_r = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (3.19)$$

$$\underline{H}_\theta = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \quad (3.20)$$

$$\underline{H}_\varphi = -\sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial Y_n^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (3.21)$$

Pour chaque point de mesure on peut écrire ces équations sous forme matricielle comme :

$$\mathbf{A_P} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \underline{H_r} \\ \underline{H_\theta} \\ \underline{H_\varphi} \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{A_P} \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{N_C}$ est une matrice qui dépend du point de mesure et $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{N_C}$ est le vecteur composé par les coefficients, N_C étant le nombre de coefficients.

Le problème ainsi formulé requiert la connaissance des composantes du champ en coordonnées sphériques, ce qui oblige dans la plus grande majorité des cas à effectuer des mesures 3D du champ. Une possibilité pour s'affranchir de cette contrainte est de reformuler le problème dans un repère cartésien. Pour ceci il suffit d'observer que l'on peut exprimer les composantes du champ par rapport à un repère cartésien comme :

$$\begin{pmatrix} \underline{H_x} \\ \underline{H_y} \\ \underline{H_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{e}_r & \underline{e}_\varphi & \underline{e}_\theta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{H_r} \\ \underline{H_\varphi} \\ \underline{H_\theta} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underline{e}_r & \underline{e}_\varphi & \underline{e}_\theta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A_P} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \underline{H_x} \\ \underline{H_y} \\ \underline{H_z} \end{pmatrix}$$

Le système final $\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{h}$ peut être ainsi composé en prenant pour chaque point de mesure les équations correspondantes aux composantes cartésiennes effectivement mesurées. Ce système peut être résolu avec la méthode des moindres carrés.

cf. éq. 3.11

Calcul du potentiel vecteur généré par le multipôle

Pour calculer le potentiel vecteur $\vec{A}$ il suffit de développer (3.18) de la manière suivante :

$$\vec{A} = \underline{A_r} \vec{e}_r + \underline{A_\varphi} \vec{e}_\varphi + \underline{A_\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\underline{A_r} = 0 \quad (3.22)$$

$$\underline{A_\varphi} = -\mu_0 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial Y_n^m(\theta, \theta)}{\partial \theta} \quad (3.23)$$

$$\underline{A_\theta} = \mu_0 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n \sin \theta} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial Y_n^m(\theta, \theta)}{\partial \phi} \quad (3.24)$$

3.5.2 Choix optimal du centre du développement

Même si un multipôle est en principe capable de représenter n'importe quelle source de rayonnement, dans la pratique on est vite limité par la nécessité de tronquer les termes d'ordre plus élevé dans (3.16). En effet le nombre N_C de coefficients $\underline{C}_n^m$ d'un développement d'ordre N est $N_C = \sum_{n=1}^N 1 + 2n \propto N^2$: ce nombre va donc "exploser" si l'on augmente de manière déraisonnée l'ordre du développement.

N	nombre de termes
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48

Une solution pour éviter d'introduire des termes d'ordre élevé est de choisir le centre du développement de façon judicieuse. Pour nous rendre compte de ceci, considérons à titre d'exemple le cas d'une simple spire dans l'air. Supposons que cette spire ait un rayon $R = 25$ cm, et que le rayon que nous avons choisi pour le multipôle soit $\rho = 50$ cm. Enfin, supposons pouvoir mesurer le champ magnétique en 22 points distincts, répartis à une distance de 1 m du centre de la spire (fig. 3.21, gauche). Si à partir de ces mesures on estime les coefficients multipolaires $\underline{C}_n^m$ jusqu'à l'ordre $N = 5$, on constate que le résultat dépend de la position de la spire par rapport au centre du multipôle. Plus précisément, dans cet exemple les différentes positions du centre de la spire par rapport à celui du multipôle sont reportées dans le tableau suivant :

	δx	δy	δz
1)	0	0	0
2)	0	0	+100 mm
3)	+100 mm	0	0
4)	+100 mm	0	+100 mm

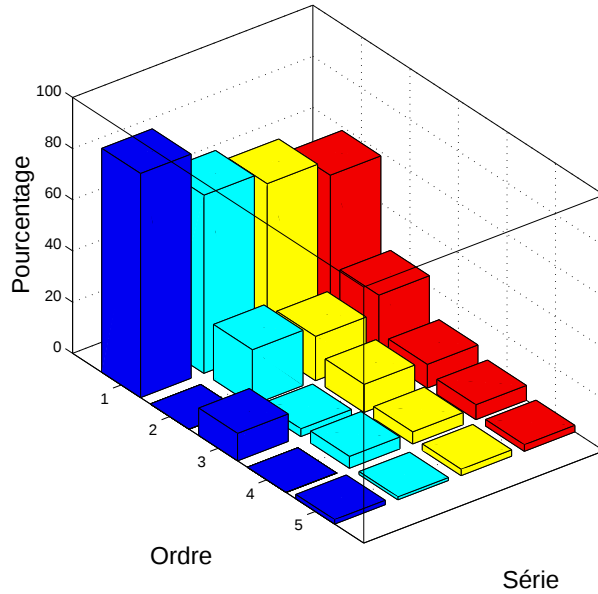


FIG. 3.20 – Répartition des harmoniques pour différentes positions de la spire.

La répartition des harmoniques est tracée en fig. 3.20 pour chacun des développements obtenus (la première série est celle de gauche, la quatrième celle la plus à droite). Pour chaque série, la répartition des harmoniques a été calculée avec la formule suivante :

$$\text{POURCENTAGE} = \frac{\sqrt{\sum_{m=-n}^n |\underline{C}_n^m|^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=-n}^n |\underline{C}_n^m|^2}} \times 100\%$$

On constate que si la spire est parfaitement centrée dans le multipôle, le développement multipolaire est substantiellement composé de termes du premier et du troisième ordre. Lorsque l'on déplace la spire, de telle façon qu'elle va se trouver en position de plus en plus excentrique par rapport au centre du multipôle, on constate que la répartition des harmoniques évolue vers des termes d'ordre supérieur : autrement dit, on a besoin d'harmoniques de plus en plus compliquées pour représenter le champ rayonné par la même spire. Une situation similaire se retrouve dans le domaine du traitement des signaux lorsque l'on essaie de calculer la FFT d'une fonction à l'origine périodique, en prenant un nombre non entier de périodes.

Cette représentation n'est pas seulement plus coûteuse, mais aussi plus imprécise[STNB03] : dans le cas le plus défavorable ($\delta x = \delta z = 100$ mm) on obtient une erreur maximale de 31% avec 35 coefficients, estimés à partir des 22 mesures 3D (fig. 3.21, droite). A titre de comparaison, lorsque la spire est bien centrée cette erreur est inférieure à 0.3% avec un développement du troisième ordre (15 coefficients) obtenu à partir de ces mêmes mesures. On voit donc que l'on a tout intérêt à choisir le centre du développement multipolaire de manière optimale !

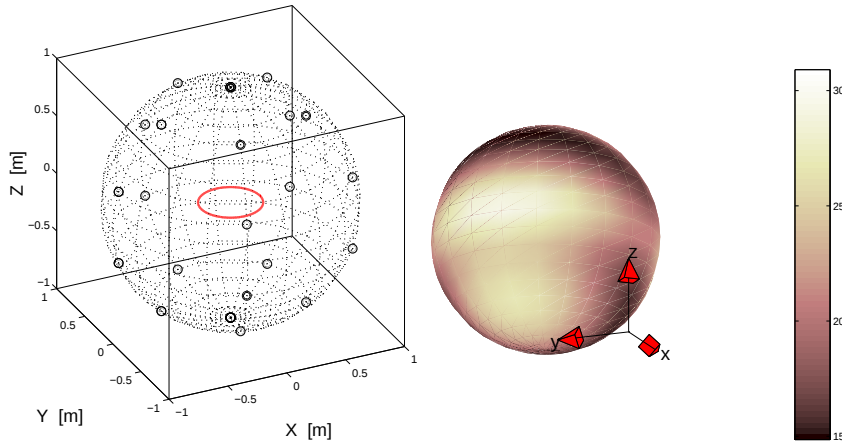
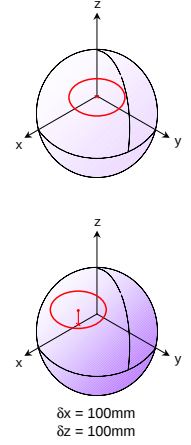


FIG. 3.21 – Gauche : la spire, source du champ magnétique et les points où la mesure est simulée. Droite : erreur relative % obtenue lorsque la spire se trouve décalée de $\delta x = \delta z = 100$ mm par rapport au centre du multipôle.

L'approche que j'ai adoptée pour choisir le centre du développement consiste à utiliser un algorithme d'optimisation. La fonction à minimiser est l'écart quadratique entre le champ $\vec{H}_{MP}$ généré par le multipôle équivalent, et celui généré par le dispositif :

$$\mathcal{J} = \sum_{k=1}^{N_P} \|\vec{H} - \vec{H}_{MP}\|^2 \quad (3.25)$$

N_P = nombre de mesures

Pour une première évaluation des besoins et des performances de cette méthode j'ai continué à utiliser comme système rayonnant la spire en fig. 3.21



ALGORITHMES D'OPTIMISATION

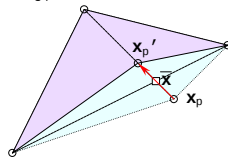
Il existe plusieurs algorithmes d'optimisation, qui peuvent être classifiés sur la base de critères divers : algorithmes déterministes ou stochastiques, qui requièrent ou pas le calcul de différentiels, qui sont capables de trouver des minima locaux ou globaux, etc. Il n'existe pas d'algorithmes d'optimisation universels : tout algorithme possède ses spécificités qui font en sorte qu'il peut être plus ou moins *adapté* (peu coûteux, plus précis, plus fiable) à tel ou tel autre problème.

ALGORITHME DE NELDER-MEAD :

L'algorithme de Nelder-Mead[NM65] est un algorithme d'optimisation déterministe qui recherche des minima locaux d'une fonction objectif $\mathcal{J}(\mathbf{x})$.

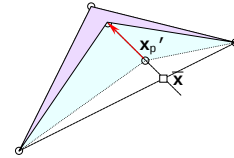
L'algorithme démarre avec N points $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$, qui forment les sommets d'un polytope (*simplexe*). À chaque pas de l'algorithme l'un de ces sommets est modifié selon les règles suivantes :

- *réflexion* : on cherche à substituer le point le "plus mauvais" entre les sommets $\mathbf{x}_p$ avec son symétrique $\mathbf{x}'_p$ par rapport au barycentre du simplexe : $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum \mathbf{x}_k$

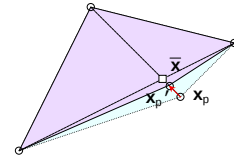


- *expansion* : si le point $\mathbf{x}'_p$ ainsi déterminé est meilleur que tous les autres ($\mathcal{J}(\mathbf{x}'_p) \leq \mathcal{J}(\mathbf{x}_k) \forall k$), on continue à chercher des points dans la même direction. Autrement, si ce point est quand même meilleur que $\mathbf{x}_p$ la substitution est acceptée ($\mathbf{x}_p \leftarrow \mathbf{x}'_p$) et

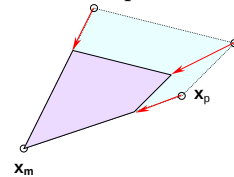
un nouveau pas peut commencer.



- *contraction* : Par contre, si $\mathbf{x}'_p$ est encore pire que $\mathbf{x}_p$ ($\mathbf{x}'_p > \mathbf{x}_p$), on essaie de rapprocher ce dernier du barycentre $\bar{\mathbf{x}}$.



- *rétrécissement* : Si même cet essai échoue, on rapproche tous les sommets vers le meilleur, et on recommence un nouveau pas.



De cette manière l'algorithme essaie de "façonner" le simplexe sur la forme d'une "vallée" de la fonction objectif, menant vers le minimum cherché. Plusieurs améliorations, comme l'expansion optimisée[MLC87], ont été proposées pour rendre plus performant cet algorithme, appréciable pour sa relative simplicité, et pour le fait qu'il ne requiert pas le calcul du différentiel de la fonction objectif.

ALGORITHMES GÉNÉTIQUES :

Les algorithmes génétiques sont une classe de méthodes inventées par le groupe de Holland [Hol75] vers la moitié des années 70, qui servent à rechercher le maximum global d'une fonction $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ strictement positive, appelée *fonction d'adaptation* dans le jargon. L'idée de base consiste à générer de manière aléatoire un certain nombre de points $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$ (*individus*) et de les faire évoluer par le biais d'un ensemble d'*opérateurs génétiques* de façon à simuler le mécanisme de l'évolution naturelle.

Dans les algorithmes à *codage réel* les individus sont représentés directement par des n-uplets de nombres en virgule flottante, chacune d'elles étant est un jeu de paramètres admissibles [Tak03]. À chaque pas, la fonction d'adaptation $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}(\mathbf{x}_k)$ est calculée pour chaque individus de la population.

Ensuite certains individus sont choisis pour prendre part à la reproduction; le mécanisme de *sélection* est conçu de telle manière que les individus "meilleurs" (les plus adaptés) aient une plus grande probabilité d'être sélectionnés par rapport aux autres.

Avant de procéder à la sélection le jeu des valeurs $\{\mathcal{F}_k\}$ est remis à l'échelle, afin d'éviter qu'un "super-individus" écrase tous les autres, causant ainsi une convergence précoce vers un faux maximum. Des stratégies spécifiques [Gol89] existent pour préserver une certaine diversité à l'intérieur de la population (*nichage*, *spéciation*, *migration*), ou pour conserver les individus meilleurs (*élitisme*).

Les individus sélectionnés sont ensuite partagés en couples, et de nouveaux individus sont générés en mélangeant les

caractéristiques de leurs parents (*croisement*). Le croisement peut être fait de plusieurs façons. Une méthode très simple consiste à générer les nouveaux individus ($\mathbf{x}'_1$ et $\mathbf{x}'_2$) sur l'axe qui relie les deux parents $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ (*croisement barycentrique*) :

$$\mathbf{x}'_1 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha_1) \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{x}'_2 = \alpha_2 \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha_2) \mathbf{x}_2$$

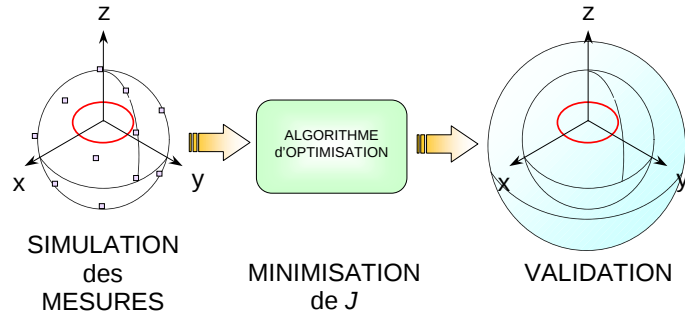
Les valeurs α_1 et α_2 peuvent être choisies de façon complètement aléatoire, ou de manière à orienter les nouveaux individus vers le parent meilleur.

Les nouveaux individus sont ainsi introduits dans la population, en même temps que d'autres individus en sont exclus. De temps en temps des modifications aléatoires sont introduites (*mutations*) dans le but d'explorer des nouvelles solutions et d'enrichir le "patrimoine génétique" de la population.

Une description plus détaillée du fonctionnement des algorithmes génétiques demanderait beaucoup trop d'espace, d'autant plus qu'un nombre énorme d'améliorations ont été proposées. Cette classe d'algorithmes trouve son point fort dans sa *robustesse* et dans son attitude à rechercher des extrema globaux. En dépit de son apparente simplicité, les performances que l'on peut obtenir avec ces algorithmes sont étroitement liées au paramétrage de ceux-ci, et à la connaissance préalable que l'on a du problème à résoudre.

Comparaison entre deux algorithmes d'optimisation

Pour minimiser la fonction d'erreur $\mathcal{J}$ on avait à disposition l'algorithme standard de MATLAB de type simplexe de Nelder-Mead⁵[NM65, LRWW98], et un algorithme génétique[Hol75, Tak03] à codage réel. Ces deux algorithmes répondent à des besoins différents : le premier requiert d'évaluer la fonction à optimiser un nombre relativement réduit de fois, mais peut se laisser piéger assez facilement par des minima locaux. Par contre le deuxième est plus robuste, a priori plus adapté pour des fonctions compliquées ; en contrepartie il est aussi plus coûteux en termes de nombre d'évaluations de la fonction à minimiser.



On a simulé des mesures de champ sans bruit sur les 22 points repartis tout autour de la spire (fig. 3.21, gauche) et on a cherché la position optimale du centre d'un développement d'ordre 3 en utilisant les deux algorithmes. Ensuite on a évalué la qualité des résultats obtenus sur la base de l'erreur relative %, calculée sur une surface sphérique située à 1.5 m du centre de la spire. Nous avons comparé les prestations des deux algorithmes en termes de précision, et de nombre d'évaluations de la fonction $\mathcal{J}$ requises. Pour vérifier la fiabilité des résultats on a répété chaque simulation plusieurs fois.

Dans l'absolu, les deux algorithmes donnent de très bon résultats : l'écart entre les champs magnétiques $\vec{H}$ et $\vec{H}_{MP}$ à 1.5 m est généralement inférieur à 1 – 2%. Il s'agit là d'une configuration idéale particulièrement favorable, soit pour l'absence de bruit et la position des points de mesure.

Par contre, la comparaison entre les algorithmes d'optimisation utilisés met en évidence de grandes différences entre les performances de ceux-ci. L'algorithme génétique a demandé à évaluer la fonction de coût $\mathcal{J}$ 195 000 fois (soit en moyenne 1950 fois pour chaque simulation), alors que pour l'algorithme de Nelder-Mead 13 866 évaluations ont suffi. De plus, si l'on observe la distribution statistique de l'erreur maximale (toujours à 1.5 m du centre de la spire) on constate que ce dernier algorithme s'avère plus précis que l'algorithme génétique (fig. 3.22).

Le seul défaut que l'on peut attribuer à l'algorithme de Nelder-Mead est que de temps en temps il n'arrive pas à "trouver son chemin", alors que l'algorithme génétique arrive toujours à fournir une solution raisonnable. Si des problèmes

⁵Cet algorithme, appelé aussi *amoeba algorithm* dans [PTVF92], ne doit pas être confondu avec l'algorithme du simplexe, inventé par G. Dantzig en 1947 pour résoudre des problèmes de programmation linéaire.

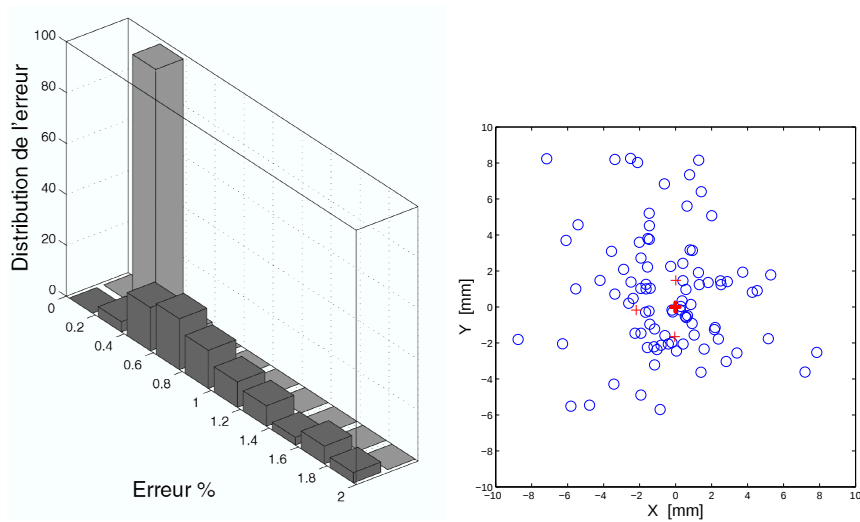


FIG. 3.22 – Gauche : distribution statistique de l'erreur dans le cas de l'algorithme génétique (devant), et de Nelder-Mead (derrière) pour 100 réalisations. Droite : projection sur le plan XY des centres optimaux trouvés par les deux algorithmes ($\circ$ = algorithme génétique, $+$ = algorithme de Nelder-Mead)

de convergence devaient se poser, une solution possible consisterait à effectuer quelques pas de l'algorithme génétique, et d'utiliser ce résultat comme point de départ pour l'algorithme de Nelder-Mead.

La conclusion que l'on peut tirer de cette comparaison est que dans ce cas le problème n'est pas suffisamment compliqué pour justifier l'adoption d'un algorithme génétique, si ce n'est pour amorcer d'autres algorithmes de type déterministe.

3.5.3 Influence des points de mesure

Dans la section précédente on a considéré que l'on était capable de mesurer le champ dans n'importe quel endroit de l'espace, et plus en particulier sur une sphère entourant la source du rayonnement. Dans la réalité on est toujours soumis à des contraintes qui font qu'en général on ne pourra pas mesurer le champ n'importe où. Pour cette raison on a étudié l'influence du *nombre* et de la *position* des points de mesure sur la qualité des nos résultats.

Positionnement des points de mesure sur un plan

On a testé le comportement des algorithmes d'identification en simulant une mesure parfaite en 3D sur 9 points, situés sur un plan au dessus de la source du champ (fig. 3.23) à une hauteur de 1, 2 et 4 m.

Les algorithmes ont fonctionné sans problème, donnant les mêmes résultats que ceux obtenus lorsque les points des mesure étaient repartis sur une sphère. $9 \times 3 = 27$ mesures. Il faut remarquer que l'on dispose d'un nombre de mesures très largement supérieur à celui des inconnues. 15 inconnues

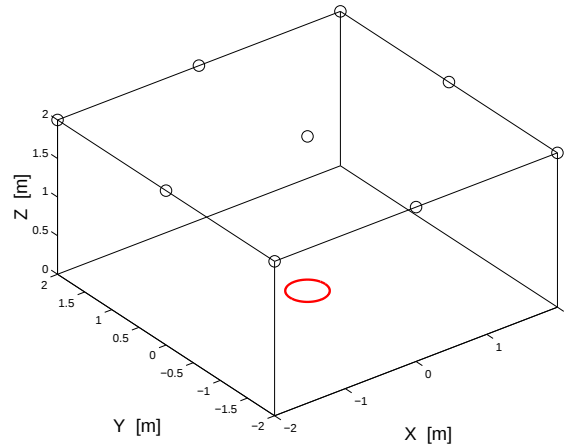


FIG. 3.23 – Position des points de mesure sur un plan au dessus de la spire.

$9 \times 2 = 18$ mesures.

On a alors simulé la mesure des seules composantes du champ H_y et H_z ; même dans ces conditions on dispose encore d'un nombre de mesures supérieur à celui des inconnues. Cette fois-ci les algorithmes d'estimation ont donné des résultats complètement faux : l'erreur sur la reconstruction du champ était de l'ordre de 200%, avec des pointes de 800% ! L'utilisation de l'algorithme génétique n'a pas arrangé la situation.

L'explication de ce fait est que la matrice $\mathbf{A}$ du système est très mal conditionnée, l'estimation du nombre de conditionnement étant de l'ordre de 10^{17} . Le problème n'est donc pas la convergence de l'algorithme d'optimisation, mais le fait que la composante H_x était très riche en information. Un remède possible consiste à mettre en œuvre une méthode de régularisation. On a donc réitéré les mêmes simulations, mais cette fois-ci en utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) tronquée pour résoudre le système linéaire. En particulier, on a exclu les contributions des valeurs singulières inférieures à $10^{-4}\sigma_{max}$, σ_{max} étant la plus grande valeur singulière. Après cette modification on a obtenu une erreur inférieure à 0.5% et une très bonne localisation de la spire.



MÉTHODES DE RÉGULARISATION

La définition de *problème bien posé* a été donnée par le mathématicien Hadamard en 1915. Selon cette définition[Had23], une équation :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

est bien posée si la solution *existe*, est *unique* et si elle est *stable*. Dans les cas où l'une de ces conditions n'est pas vérifiée le problème est mal posé : c'est cruellement le cas pour beaucoup de problèmes inverses !

Face à cette difficulté, les solutions consistent à modifier légèrement le problème en s'appuyant sur une quelque connaissance *a priori* de la solution. De cette façon on obtient un nouveau problème bien posé, dont la solution est proche de celle du problème original.

DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES (SVD) :

Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ peut être décomposée dans le produit suivant :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$$

où $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sont des matrices unitaires, et la matrice $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ peut être écrite comme :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

la sous-matrice $\mathbf{\Sigma}$ étant diagonale. Cette expression n'est valable que pour $n \geq m$ (dans le cas inverse il existe une représentation similaire). Les éléments diagonaux $\sigma_1 \dots \sigma_m$ de $\mathbf{\Sigma}$ s'appellent *valeurs singulières*. Il est possible de vérifier[Vog02] que la solution du problème au sens des moindres carrés peut être obtenue comme :

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}^H \mathbf{b}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{q}$$

Dans le cas de problèmes sous-dimensionnés ($n < m$) ces expressions donnent la solution de norme minimale. On s'aperçoit que lorsqu'une valeur singulière σ_k devient trop petite, $\mathbf{x}$ devient très instable, car toute imprécision dans p_k est "amplifiée" d'un facteur $\frac{1}{\sigma_k}$. La solution consiste alors à

éliminer la contribution de ces valeurs singulières. Cette méthode s'appelle *décomposition en V.S. tronquée*.

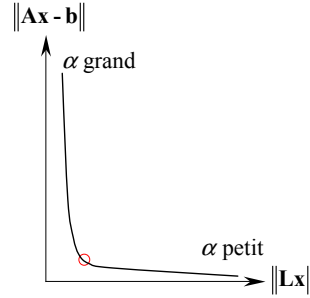
MÉTHODE TIKHONOV :

L'approche de la méthode Tikhonov[TA76] consiste à pénaliser des comportements retenus erronés, ou physiquement privés de sens en introduisant un terme de pénalisation $\mathbf{Lx}$. En pratique le problème original devient un problème de minimisation paramétré :

$$\mathbf{x} = \arg \min \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \alpha \|\mathbf{Lx}\|^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^H \mathbf{L} \right)^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{b}$$

où α s'appelle *paramètre de régularisation*. Par exemple, si l'on souhaite que la solution ait une norme réduite on prendra $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ (régularisation d'ordre 0). Si le problème est effectivement mal posé, on obtiendra une courbe en forme de "L" en faisant varier α :



La valeur optimale pour α s'obtient alors en cherchant le "coude" de la courbe[HO93]. Il est possible de prouver[Vog02] que pour $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ cette approche revient à augmenter les valeurs singulières de la manière suivante :

$$\sigma_k \leftarrow \frac{\sigma_k^2 + \alpha}{\sigma_k^2} \sigma_k$$

$$4 \times 3 = 12 \text{ mesures}$$

On a ensuite testé le fonctionnement des algorithmes dans le cas où le nombre de mesures est inférieur à celui des inconnues. On a simulé l'estimation à partir de seulement 4 mesures sans bruit, les points de mesure étant situés sur les sommets d'un carré à 2 m au dessus de la source du champ.

Pour ceci on a utilisé encore la décomposition SVD tronquée, car le système s'avère très mal conditionné. Cette fois-ci l'erreur a été de l'ordre de 4% (fig. 3.24) pour la valeur du seuil de $10^{-4}\sigma_{max}$. L'erreur devient de l'ordre de 22% si les coefficients du multipôle sont estimés à partir des seules composantes $\underline{H}_y$ et $\underline{H}_z$.

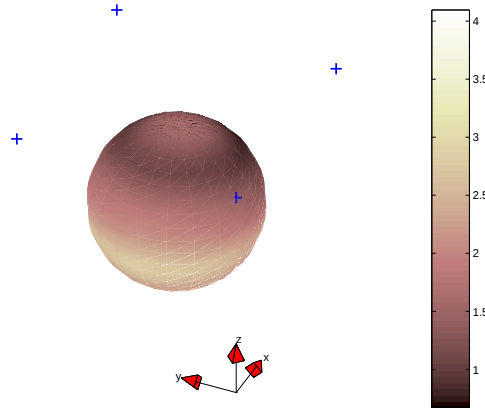


FIG. 3.24 – Erreur relative % lorsque les coefficients du multipôle sont estimés à partir des quatre points de mesure, ici visualisés avec des signes (+).

Le fait que l'algorithme d'optimisation parvienne quand même à bien localiser le centre de la spire signifie que l'erreur que l'on obtient est due intégralement au manque d'informations sur le rayonnement du système. Ceci est confirmé par le fait que la répartition des harmoniques est pratiquement identique dans le cas où le multipôle est parfaitement localisé au centre de la spire. Il est donc difficilement envisageable de diminuer ultérieurement cette erreur, à moins de connaître a priori davantage d'informations sur la source du rayonnement.

Positionnement des points de mesure sur une droite

On a testé le comportement des algorithmes d'identification en simulant une mesure parfaite en 3D sur 11 points, situés le long d'une droite alignée avec le centre de la spire (fig. 3.25), à une distance comprise entre 1 et 2 m du centre de la spire.

$$11 \times 3 = 33 \text{ mesures}$$

En dépit du grand nombre de mesures le problème est très mal conditionné. L'adoption de la décomposition SVD tronquée parvient à ramener cette erreur à des niveaux acceptables (de l'ordre de 10%).

On constate que cette fois-ci la localisation est moins bonne par rapport aux cas précédents ; on a alors ajouté quelques pas de l'algorithme génétique avant de démarrer l'algorithme de Nelder-Mead pour essayer d'améliorer la convergence de ce dernier.

Cet artifice conduit à une amélioration des performances (fig. 3.26, gauche).

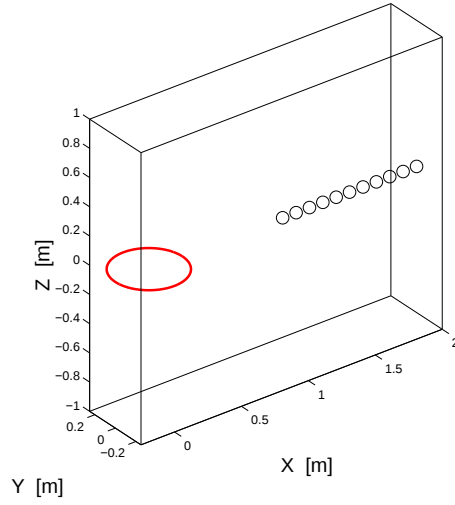


FIG. 3.25 – Position des points de mesure sur une droite alignée avec le centre de la spire.

Ceci peut s'expliquer très simplement par le fait qu'avec cette collocation des points de mesure on "explore" une plage extrêmement réduite de l'angle solide, et donc on ne dispose pas de la quantité d'information suffisante pour pouvoir reconstruire correctement le comportement du multipôle sur tous les 4π sté-

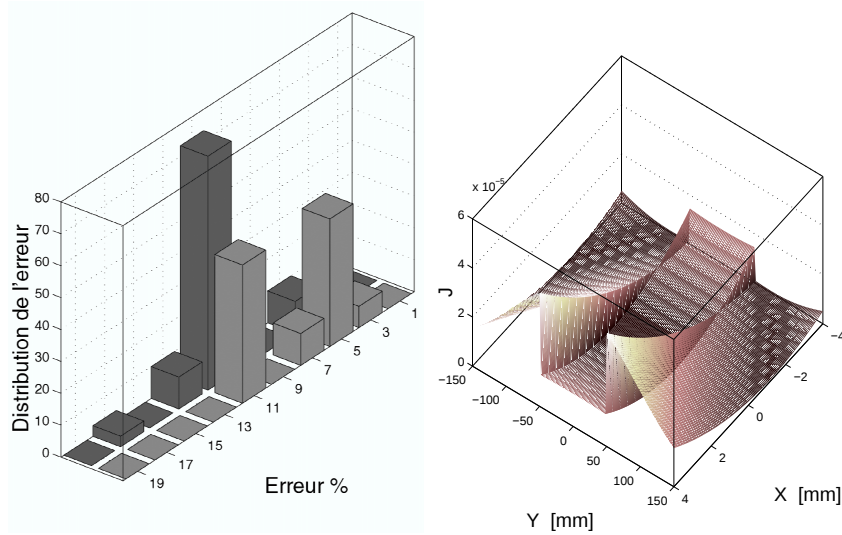


FIG. 3.26 – Gauche : distribution statistique de l'erreur sur 30 réalisations dans le cas où l'algorithme de Nelder-Mead est démarré après 10 pas de l'algorithme génétique (devant) ou directement (derrière). Droite : fonction objectif $\mathcal{J}(x_0, y_0, z_0)$ à minimiser évaluée pour $z_0 = 0$.

cf. pag. 95

dians. Ce manque d'information se réfléchit sur la fonction objectif, qui devient alors très compliquée : en particulier on observe la présence d'une vallée centrale, séparée de deux vallées latérales par des parois très hautes (fig. 3.26, droite). En démarrant l'algorithme de Nelder-Mead à partir de la solution obtenue avec quelques pas de l'algorithme génétique on a plus de chances de "tomber" dans la vallée centrale : c'est pourquoi dans ce dernier cas la distribution de l'erreur comporte deux pics nettement séparés au niveau de 11% et 5% d'erreur.

3.5.4 Prise en compte du bruit

on se rappellera qu'en réalité c'est le flux qui est mesuré, l'induction étant supposée uniforme.

Jusqu'à présent on a simulé des mesures parfaites ; or, dans la réalité des erreurs de mesure sont inévitables. Ces erreurs peuvent venir de la présence de sources rayonnantes autres que le dispositif étudié, mais aussi des imprécisions dans l'étalonnage de la position et de l'orientation du capteur, du caractère non ponctuel de la mesure, du bruit électrique du circuit, etc. En parallèle à cette difficulté due aux erreurs de mesure, un nouveau besoin vient s'ajouter au cahier des charges : il ne suffit pas d'estimer une valeur pour les coefficients du multipôle, il faut aussi connaître la variance d'une telle estimation. La solution consiste à adopter la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance



ESTIMATION PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

VARIABLES ALÉATOIRES COMPLEXES : Soient $u, v \in \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles, distribuées selon une loi gaussienne avec variance $\frac{\sigma^2}{2}$:

$$u \sim \mathcal{N}(\mu_u, \frac{\sigma^2}{2})$$

$$v \sim \mathcal{N}(\mu_v, \frac{\sigma^2}{2})$$

On peut prouver que la variable complexe $x = u + jv \in \mathbb{C}$ suit une distribution gaussienne avec variance σ^2 :

$$x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$$

où $\mu_x = \mu_u + j\mu_v$.

INÉGALITÉ DE CRAMER-RAO :

Supposons vouloir calculer une estimation $\hat{x}$ d'un paramètre x à partir de l'observation d'une autre variable aléatoire y , et soit $p(y|x_0)$ la densité de pro-

babilité d'observer une valeur de y donnée, avec $x = x_0$. Par exemple, si $x = I$ est un courant et $y = V$ la tension mesurée aux bornes d'une résistance R , alors :

$$p(V|I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(V - RI)^2}{2\sigma^2} \right]$$

σ^2 étant la variance du bruit de mesure supposé gaussien.

Il est possible de prouver[SS89] que la variance de n'importe quel estimateur non biaisé est supérieure à :

$$\text{var} [\hat{x}] \geq \mathcal{E} \left[\frac{1}{(\partial \ln p(y|x)/\partial x)^2} \right]$$

Des inégalités similaires existent pour des grandeurs vectorielles et/ou complexes.

Cette inégalité délimite la précision que l'on peut espérer d'obtenir. Un estimateur qui atteint ces performances se dit *efficient*.

LE CONCEPT DE VRAISEMBLANCE :
Considérons l'estimateur défini de la manière suivante :

$$\hat{x}_{MV} = \arg_x \max p(y|x)$$

cet estimateur est dit *du maximum de vraisemblance*. Pour en comprendre la signification reprenons l'exemple précédent : dans ce cas là on aurait :

$$\hat{I}_{MV} = \frac{V}{R}$$

Autrement dit, on prend comme estimation du courant I la valeur pour laquelle il est plus probable d'obtenir la tension V que l'on a mesurée.

Dans le cas d'un problème d'estimation linéaire *avec bruit gaussien* : $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{b}$ l'estimateur $\hat{x}_{ML}$ coïncide avec la solution au sens des moindres carrés :

$$\hat{x}_{ML} = \left(\mathbf{A}^H \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (3.26)$$

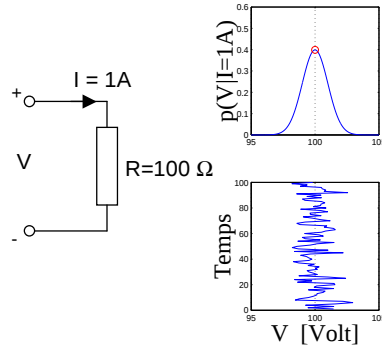
La variance du bruit σ^2 peut être estimée comme :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-m} \mathbf{y}^H \left[\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \right]^{-1} \mathbf{y} \quad (3.27)$$

N étant le nombre d'équations du problème, et m la dimension de $\mathbf{x}$. Enfin, on parvient à estimer la matrice de variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{x}}$ comme :

$$\text{var}[\hat{\mathbf{x}}] = \sigma^2 (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \quad (3.28)$$

L'intérêt de l'estimateur du maximum de vraisemblance est qu'il est efficient : donc on ne peut pas espérer trouver un meilleur estimateur.



Pour évaluer a priori l'effet du bruit sur la qualité de l'estimation, on a simulé des mesures bruitées en ajoutant une quantité b aléatoire à chaque composante du champ :

$$b \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$$

L'écart type de b que l'on a choisi est de 5% de l'amplitude de chaque composante.

Il est intéressant d'observer que l'effet du bruit n'est pas le même, selon le nombre et la position des points de mesure. Le cas le plus favorable reste, comme on aurait pu s'y attendre, celui où les points sont répartis sur une sphère : dans ce cas l'erreur que l'on obtient sur 30 réalisations de la simulation est de $6\% \pm 15\%$. A l'opposé, la configuration la plus défavorable est celle où les points sont disposés le long d'une droite, où même en utilisant la décomposition SVD tronquée on obtient des erreurs très élevées ($740\% \pm 460\%$).

Il est aussi intéressant d'observer que l'erreur s'avère inférieure lorsque les

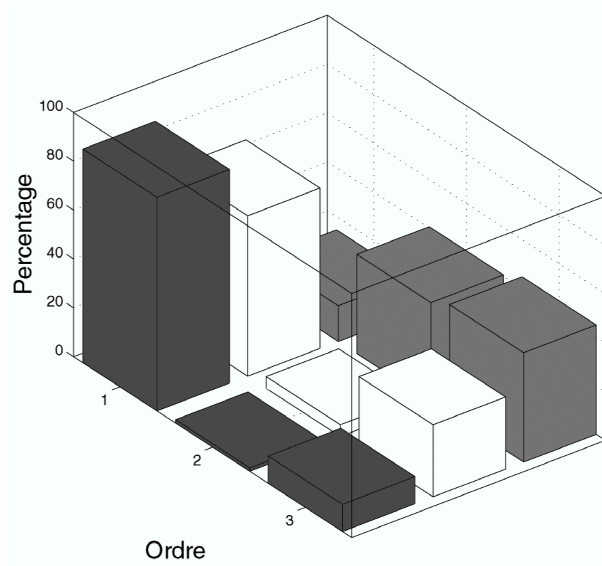


FIG. 3.27 – Distribution des harmoniques dans les cas d’une estimation à partir de mesures bruitées, les points de mesure étant disposés sur une sphère (à gauche), sur un plan (au milieu) ou sur une droite (à droite).

coefficients sont estimés à partir de 4 points seulement ($45\% \pm 15\%$) au lieu de 9 ($93\% \pm 40\%$, comme on aurait pu le supposer : ceci est bien signe que le problème est mal conditionné.

Si maintenant nous tournons notre attention vers la répartition des harmoniques, on remarque que dans les cas où l’erreur est plus importante cette distribution est complètement différente par rapport à celle que l’on avait calculée au tout début : en particulier le caractère dipolaire de la spire a totalement disparu dans les cas où les points sont alignés le long d’une droite (fig. 3.27).

cf. pag. 95

Estimation des coefficients du multipôle en présence de bruit

Cette dernière observation met en évidence la “clé” que l’on va utiliser pour essayer d’améliorer la précision de l’algorithme d’estimation : lorsque dans un développement multipolaire les coefficients des harmoniques d’ordre élevé sont importants, il est très probable que l’estimation soit faussée par le bruit, ou par un mauvais choix du centre du développement. Il faut donc modifier l’algorithme d’estimation de manière à “privilégier” les termes d’ordre inférieur ; pour ceci on va mettre en œuvre une régularisation à la Tikhonov[TA76].

On a vu plus haut qu’en absence de bruit il est possible de calculer les coefficients du multipôle à travers un système linéaire de la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{h}$$

$\mathbf{c} \in \mathbb{C}^{N_C}$ étant le vecteur composé par les coefficients à estimer, et $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{N_P}$ le vecteur composé par les mesures de champ. On va reformuler ce problème comme

cf. pag. 92

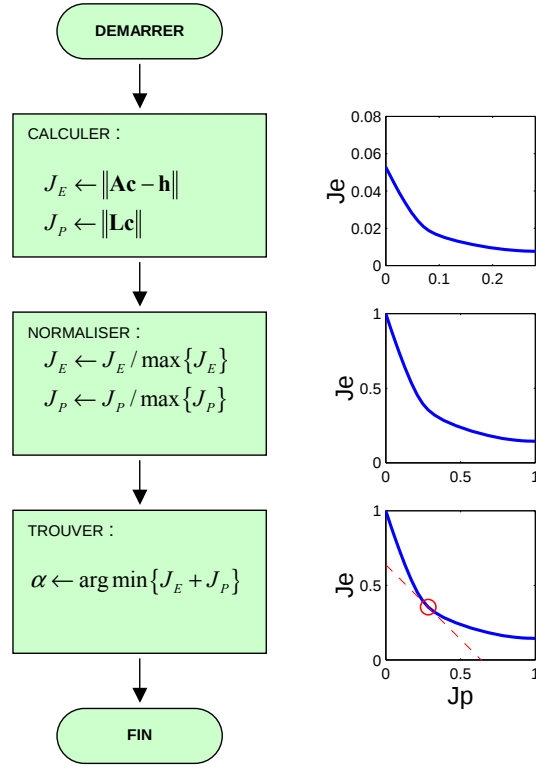


FIG. 3.28 – Algorithme pour déterminer la valeur optimale de α .

un problème de minimisation, où l'on aurait ajouté un terme de pénalisation :

$$\mathbf{c} = \arg \min \{ \|\mathbf{Ac} - \mathbf{h}\|^2 + \alpha \|\mathbf{Lc}\|^2 \} \quad (3.29)$$

On n'a pas vraiment de pistes pour choisir la matrice $\mathbf{L}$, si ce n'est que les harmoniques d'ordre élevés doivent être pénalisés par rapport aux harmoniques d'ordre moins élevé. Si l'on connaissait à priori des informations sur le dispositif, on pourrait essayer de déterminer cette matrice de manière adaptée, mais ici on va supposer que ce n'est pas le cas. On a donc essayé plusieurs matrices dans le but d'en trouver une qui pourrait nous convenir. Après quelques "tâtonnements", on a adopté de façon provisoire la matrice suivante :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & (n-1)^2 & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & & (N-1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

De cette manière les coefficients dipolaires ($n = 1$) ne sont pas concernés, alors que chaque coefficient C_n^m d'ordre $n \geq 2$ va être pénalisé à raison de $(n-1)^4 |C_n^m|^2$.

Pour déterminer la valeur optimale du paramètre de régularisation α on a adopté l’algorithme en fig. 3.28, qui consiste à normaliser la courbe à “L”, et rechercher le point où la courbe est tangente à une droite à 45 degrés.

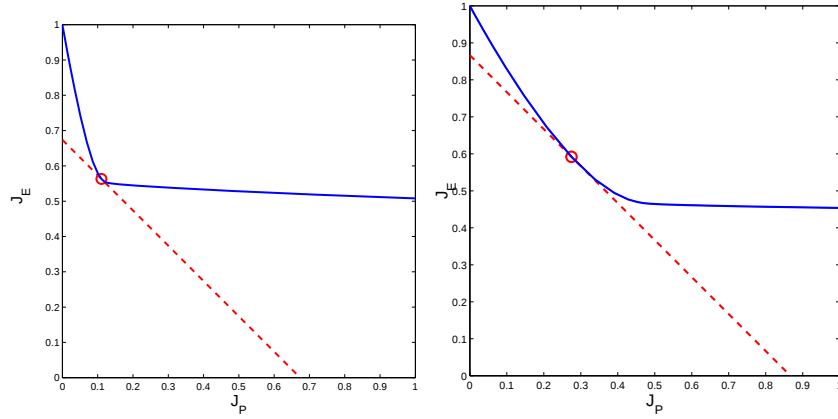


FIG. 3.29 – Deux cas de fonctionnement de la méthode Tikhonov.

Cette méthode est très empirique, et à vrai dire je n’ai pas d’explication rigoureuse sur son fonctionnement. On peut observer que dans le cas où la courbe à “L” présente un coude très prononcé, on parvient à une très bonne localisation de ce coude (fig. 3.29, gauche). Par contre, si la courbe à “L” est un peu lissée et le coude pas très prononcé, cette méthode a tendance à fournir des valeurs de α relativement importantes (fig. 3.29, droite) : autrement dit, en cas de “doute” elle oriente l’algorithme vers une action de régularisation très forte, plutôt que vers un comportement conservatif. Cette attitude pourrait expliquer pourquoi l’algorithme d’estimation semble posséder de bonnes caractéristiques de robustesse.

Les simulations numériques, indiquent que cet algorithme d’estimation conduit à une très nette amélioration des performances. Dans ces simulations seule la méthode d’optimisation de Nelder-Mead a été utilisée. Ces simulations ont été répétées 60 fois pour chaque configuration, dans le but de tester la fiabilité et la reproductibilité des résultats. On a résumé dans le tableau suivant les erreurs maximales obtenues avec la méthode de la factorisation SVD tronquée et avec la méthode Tikhonov :

CONFIGURATION DE MESURE	FACTORISATION SVD TRONQUÉE	MÉTHODE TIKHONOV
22 points sur une sphère	6% $\pm$ 15%	18% $\pm$ 16%
9 points sur un plan	93% $\pm$ 40%	9% $\pm$ 10%
4 points sur un plan	45% $\pm$ 15%	6% $\pm$ 1.3%
11 points sur une droite	740% $\pm$ 640%	62% $\pm$ 193%

Seul le cas où les 22 points sont répartis sur une sphère pose quelque problème, mais là la configuration est telle que l’on n’avait pas besoin d’utiliser

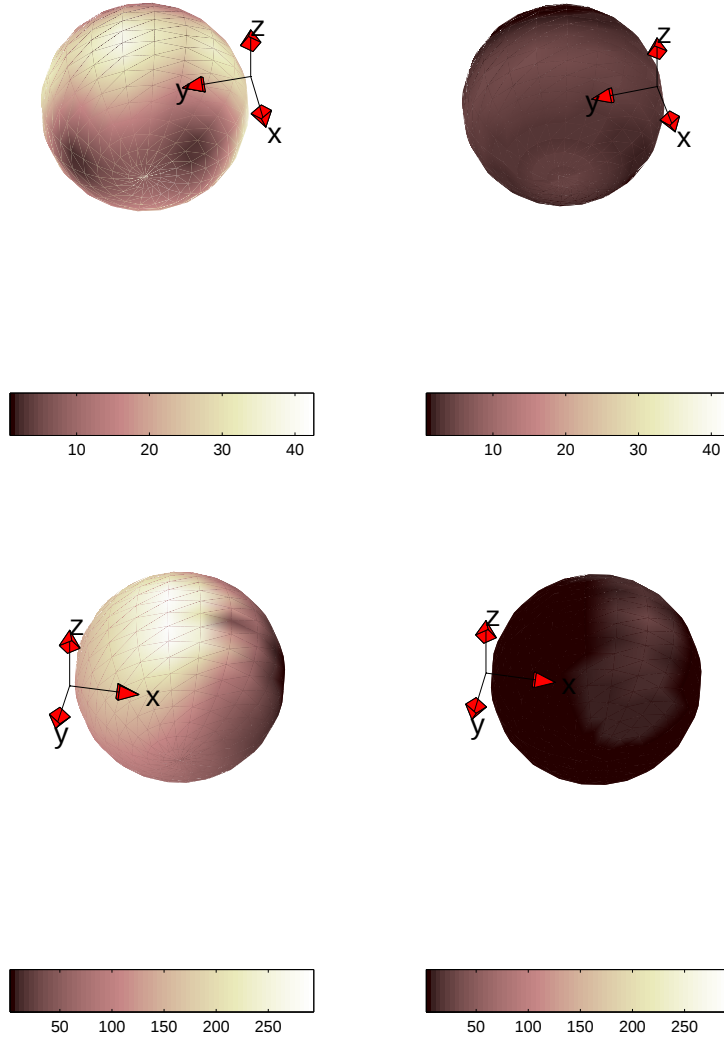


FIG. 3.30 – Erreur % calculée sur une sphère de rayon 1.5 m pour deux réalisations de la simulation. En haut, les points de mesure se trouvent sur un plan au dessus de la source du champ ; en bas, ils sont alignés sur une droite. Dans ces deux configurations, l'erreur a été calculée à partir des résultats obtenus par décomposition SVD tronquée (gauche) et avec la méthode Tikhonov (droite).

la méthode de régularisation. De plus, cette mauvaise performance est due en partie à des problèmes de convergence de l'algorithme de Nelder-Mead : si l'on exclut les réalisations où le centre du multipôle n'a pas été bien localisé l'erreur tombe à $10\% \pm 1\%$. Le même cas de figure se retrouve dans le cas où les points sont alignés sur une droite, où l'erreur tombe à $17\% \pm 8\%$ une fois écartées les

réalisations où le centre n'a pas été bien localisé. Quelques pas de l'algorithme génétique avant de démarrer l'algorithme de Nelder-Mead pourraient aider à résoudre ce problème de convergence.

3.6 Premières applications à des dispositifs réels

cf. pag. 84

La méthodologie d'identification que nous avons présentée a été testée avec le transformateur cuirassé, en utilisant les mesures déjà utilisées précédemment, et avec la bobine (C) à noyau de fer de type U+I.

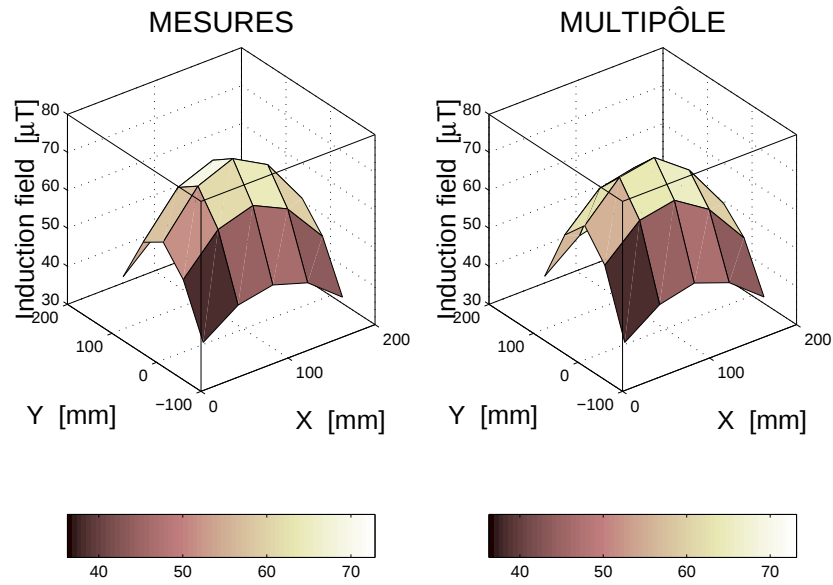
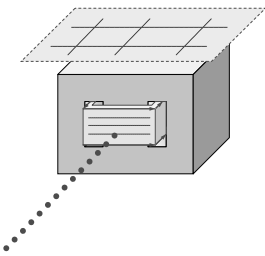


FIG. 3.31 – Induction magnétique sur le plan au dessus du transformateur. Gauche : valeurs de B mesurées. Droite : valeurs de B calculées avec un multipôle du 3^{ème} ordre, identifié avec la méthode des moindres carrés.



3.6.1 Le transformateur cuirassé

Nous avons déjà mesuré le champ magnétique $\vec{H}$ sur un plan au dessus du transformateur (25 points), et le long d'une droite (10 points). Les signaux enregistrés sont composés de cinq composantes fréquentielles, multiples de la fondamentale (50 Hz). Seule la composante fondamentale a été prise en compte.⁶

On a donc utilisé le champ mesuré en 25 points sur le plan pour estimer les coefficients d'un multipôle. Ensuite on a comparé le champ mesuré le long de la droite avec celui généré par le multipôle équivalent.

⁶Ceci n'est pas limitatif, d'autant plus qu'on a vérifié que pour ce dispositif le spectre du signal est le même d'un point de mesure à l'autre.

On a d'abord essayé d'identifier un multipôle du troisième ordre avec la méthode des moindres carrés pour l'estimation des coefficients, et l'algorithme de Nelder-Mead pour optimiser le choix du centre du développement.

La reconstruction du champ sur le plan au dessus du transformateur ne pose aucun problème (fig. 3.31). En revanche la validation le long de la droite est beaucoup moins bonne (fig. 3.32, courbes $\square$ et $\triangle$).

Une augmentation de l'ordre du multipôle produit des résultats d'encore moins bonne qualité : il faut donc utiliser des techniques de régularisation.

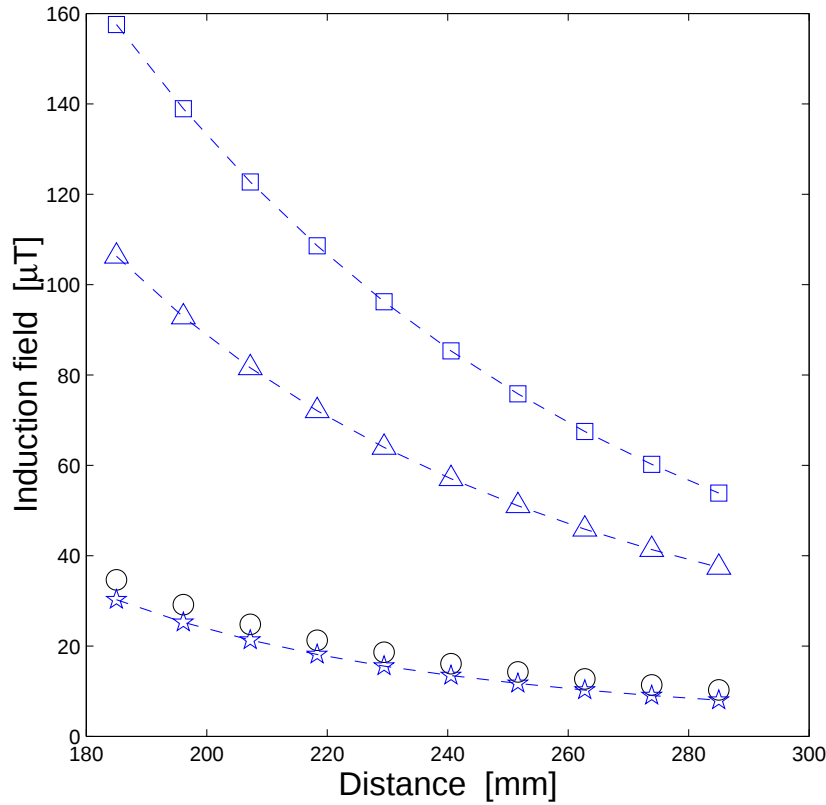


FIG. 3.32 – Induction magnétique générée par le transformateur le long de la droite : (o) = valeurs mesurées, ($\square$) = multipôle estimé à partir de 6 points avec la méthode des moindres carrées, ($\triangle$) = multipôle estimé à partir de 25 points avec la méthode des moindres carrées, ($\star$) = multipôle estimé à partir de 25 points avec la méthode Tikhonov.

La méthode par décomposition SVD tronquée, que nous avons essayée en premier, n'a pas permis d'obtenir une amélioration significative de la précision.

Nous avons donc essayé la méthode de Tikhonov. Cette fois-ci l'amélioration obtenue a été très importante : l'erreur maximale est passée de 300% à presque 20%. (fig. 3.32, courbe $\star$).

3.6.2 La bobine à noyau de fer 3D (C)

Nous avons mesuré le champ magnétique $\vec{H}$ sur un plan au dessus du transformateur (64 points), et le long d'une droite (15 points).

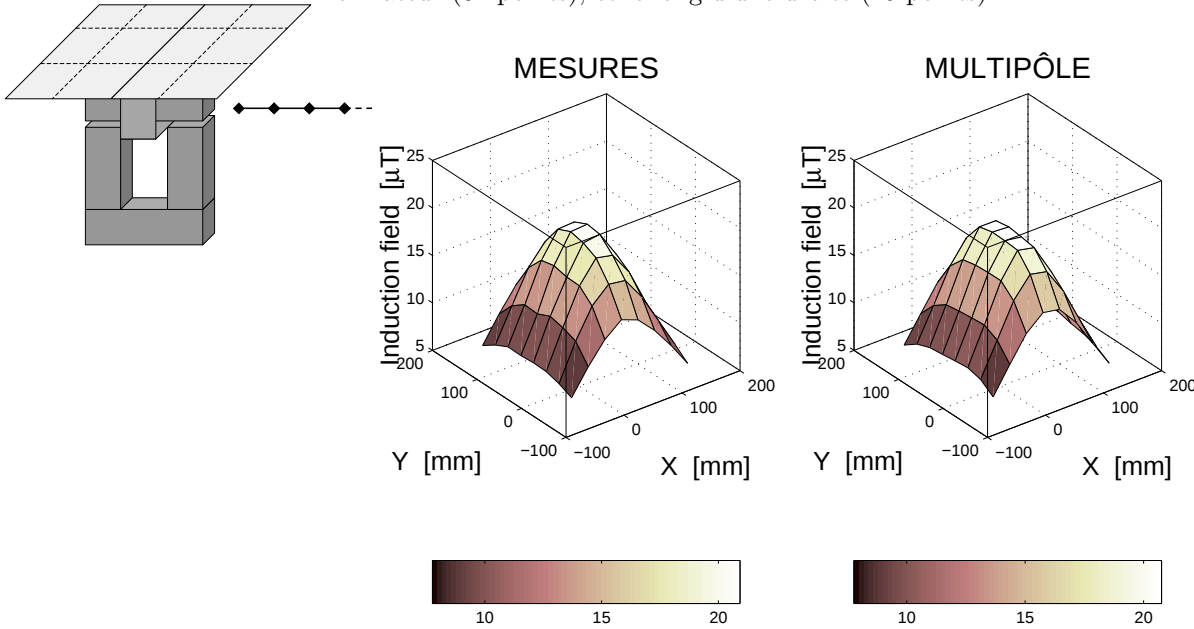


FIG. 3.33 – Induction magnétique sur le plan au dessus du système inducteur (C). Gauche : valeurs de B mesurées. Droite : valeurs de B calculées avec un multipôle du 3^{ème} ordre, identifié avec la méthode des moindres carrés à partir de 9 points du plan.

Dans ce cas, la solution obtenue à partir de 9 points seulement (parmi les 64 points du plan) avec la méthode des moindres carrés est déjà très précise, et ne nécessite pas de régularisation (fig. 3.33 et fig. 3.34, courbe +).

En revanche, si l'on utilise tous les 64 points à disposition, la solution est beaucoup moins précise (fig. 3.34, courbe $\square$). Nous avons déjà rencontré ce type de comportement en simulation avec la spire.

cf. pag. 105,106

Nous avons donc régularisé ce problème par la méthode de la décomposition SVD avec $\alpha = 10^{-2}$ comme paramètre de régularisation (fig. 3.34, courbe $\triangleleft$), et par la méthode de Tikhonov (fig. 3.34, courbe $\star$).

On constate que ces deux méthodes fournissent des solutions très améliorées par rapport à la méthode des moindres carrés.

3.7 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons abordé le problème de la caractérisation des champs de fuite avec une démarche expérimentale. Nous avons montré qu'il est nécessaire de connaître le module du champ, mais aussi sa phase : pour ceci

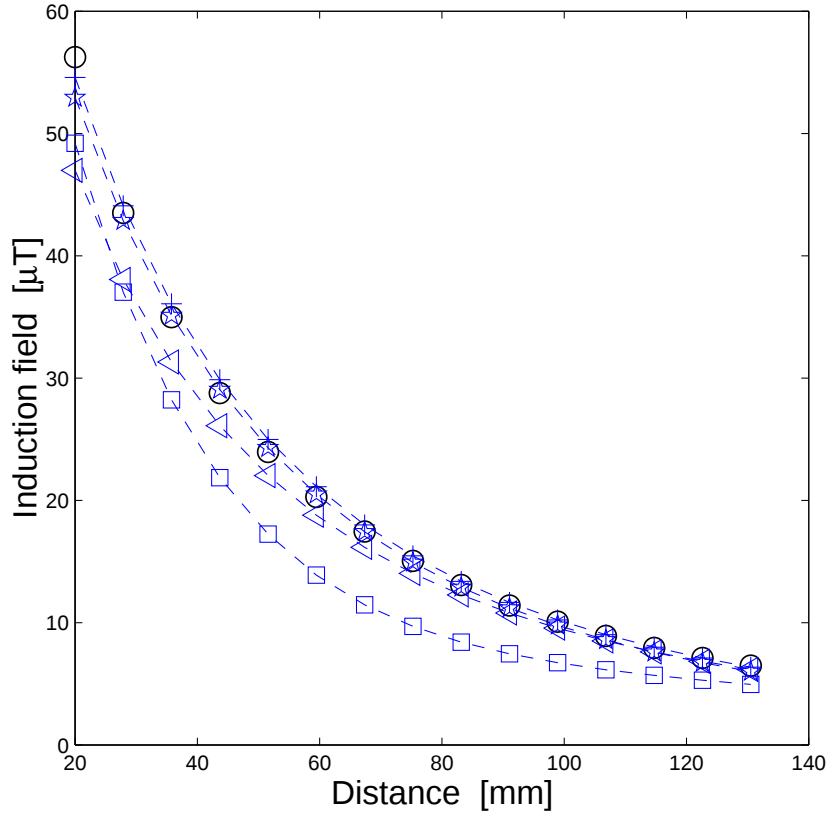


FIG. 3.34 – Induction magnétique générée par le système inducteur (C) le long de la droite : ($\circ$) = valeurs mesurées, (+) = multipôle estimé à partir de 9 points avec la méthode des moindres carrées, ($\square$) = multipôle estimé à partir de 64 points avec la méthode des moindres carrées, ($\triangleleft$) = multipôle estimé à partir de 64 points avec la décomposition SVD, ($\star$) = multipôle estimé à partir de 64 points avec la méthode Tikhonov.

nous avons mis au point une technique de mesure originale.

Ensuite nous avons établi une *méthodologie* permettant de caractériser les champs de fuite à travers un modèle de source équivalente, qui s'appuie sur le concept de multipôle.

Des techniques d'optimisation automatiques ont été utilisées pour augmenter les performances de ce modèle, en termes de précision et simplicité (= coût).

L'identification des paramètres de cette source étant un problème généralement mal posé, nous avons développé et utilisé diverses techniques de régularisation.

La viabilité de cette technique a été prouvée, d'abord par simulation avec une source simple (une spire en air), et ensuite expérimentalement avec deux cas réels.

“... from the time of Kepler to that of Newton, and from Newton to Hartley, not only all things in external nature, but the subtlest mysteries of life and organization, and even of the intellect and moral being, were conjured within the magic circle of mathematical formulae.”

Samuel T. Coleridge

4

Modélisation des phénomènes induits dans le corps humain

4.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents nous avons traité la modélisation des champs de fuites, respectivement avec une démarche numérique et expérimentale. Dans ce dernier chapitre, nous présentons un code de calcul 3D, permettant de modéliser les phénomènes induits dans le corps humain par le champ rayonné par des dispositifs réalistes. Le champ rayonné peut être caractérisé par :

- des calculs analytiques (dispositifs connus de type filaire)
- un calcul 3D “direct” (dispositifs connus avec pièces magnétiques)
- une source rayonnante équivalente (dispositifs inconnus)

Cette modélisation présente des particularités, liées à la complexité et à la spécificité du corps humain. De ce fait, deux problématiques se présentent :

- quelle formulation adopter ?
- quel modèle pour le corps humain ?

Une formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$, qui permet de limiter le domaine de résolution au seul corps humain, a été mis en œuvre avec la méthode des éléments finis.

Nous avons utilisé le code développé pour étudier l’influence de la décroissance du champ et de l’hétérogénéité du corps humain sur les phénomènes induits. Pour ceci, deux modèles du corps humain ont été utilisés : un modèle géométrique simplifié, et une structure anatomique plus réaliste dans laquelle les propriétés électriques des différents organes sont prises en compte.

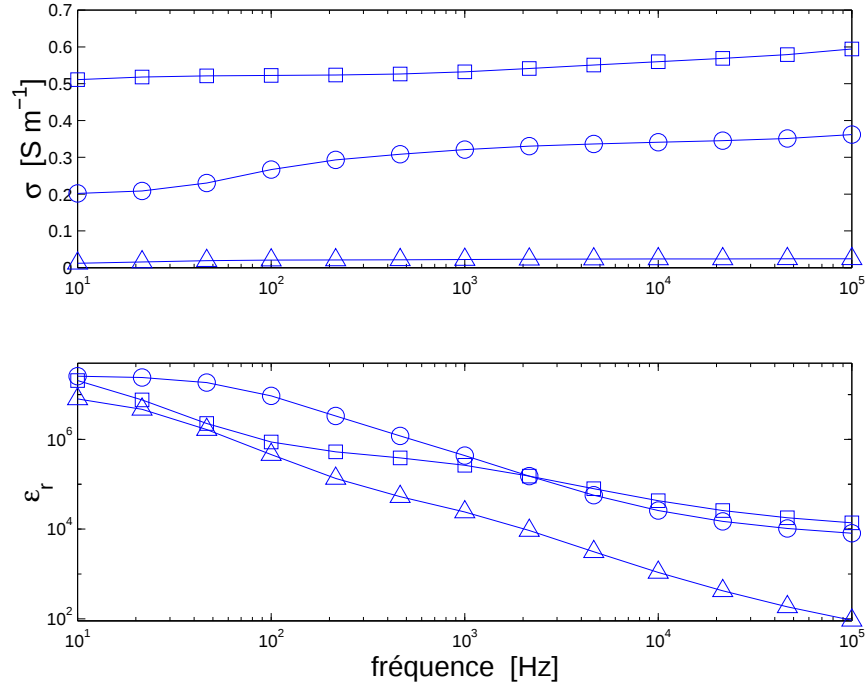


FIG. 4.1 – Conductivité et permittivité (en échelle logarithmique) de quelques tissus représentatifs du corps humain en fonction de la fréquence : (○) = muscle, (△) = graisse, (□) = intestin.

4.2 Spécificités de la modélisation dans la matière vivante

La modélisation des phénomènes électromagnétiques dans la matière vivante est une direction de recherche qui reçoit de nos jours beaucoup d'intérêt. Cette modélisation requiert une attention toute particulière, en raison des spécificités de la matière vivante.

4.2.1 Absence d'une échelle spécifique

A différence des dispositifs électrotechniques classiques, où il est possible de définir de manière précise une échelle spatiale, dans le cas du corps humain ceci est clairement impossible : non seulement la *géométrie*, mais aussi les *phénomènes physiques* et la manière de les appréhender ne sont pas les mêmes à l'échelle macromoléculaire (protéines, ADN, enzymes, ...), cellulaire, ou encore à l'échelle des différents tissus et organes.

Ceci pose des problèmes d'interprétation des résultats, car avec une approche "classique" on ne peut calculer que des *valeurs moyennes* à l'échelle macroscopique. Par exemple, on sait très bien définir une densité de courant à l'échelle d'un organe, mais on ne sait pas comment ce passage du courant s'effectue au niveau des vaisseaux sanguins qui traversent cet organe.

4.2.2 Les propriétés électriques

La matière vivante possède des propriétés électriques très particulières, et en tout cas très différentes des matériaux classiques de l'électrotechnique.

<http://safeemf.iroefi.cnr.it/tissprop/>

Encore une fois, il est important de souligner que l'on ne peut mesurer que des valeurs moyennes macroscopiques, la matière vivante n'étant pas homogène. En particulier, les valeurs que l'on peut trouver dans [GGC96, GLG96a, GLG96b] ont été obtenues avec des mesures d'impédance *in vitro*, par identification d'un schéma équivalent simpliste de type R-C parallèle.

Ces valeurs des propriétés électriques peuvent varier beaucoup en fonction de l'intensité des champs et de la fréquence (fig. 4.1) :

- La permittivité ϵ_r est très élevée à basse fréquence, et décroît très rapidement en fonction de celle-ci. Des valeurs aussi élevées à basse fréquence ne peuvent s'expliquer qu'en supposant un certain mécanisme lié à l'hétérogénéité des tissus vivants.
- La conductivité σ est très faible, et tend à augmenter lentement avec la fréquence.
- La perméabilité μ_r est unitaire.

Enfin, les propriétés électriques de la matière vivante dépendent de la quantité d'eau dans les tissus [NBP⁺03] : c'est pourquoi elles peuvent varier en fonction de l'activité de l'organisme - et en particulier elles changent rapidement après la mort, ce qui complique beaucoup la mesure.

4.2.3 Formulation quasi-statique ou propagation d'onde ?

Le fait que la permittivité soit aussi élevée à basse fréquence rend problématique le choix de la formulation à adopter. Si l'on écrit les équations de

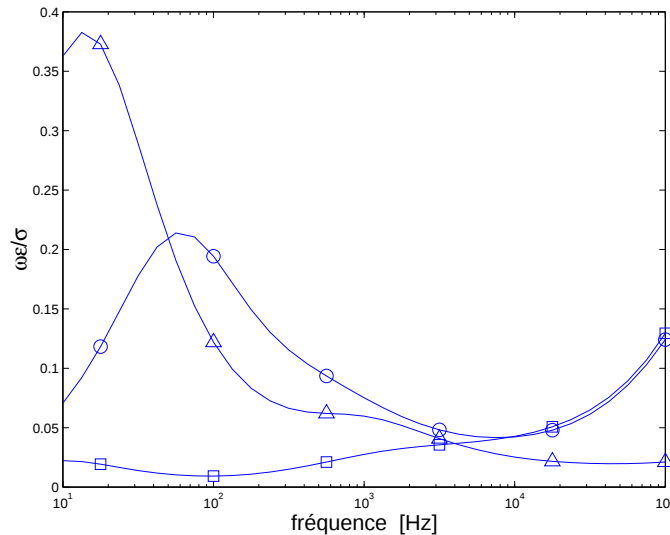


FIG. 4.2 – Variation du rapport $\frac{\omega\epsilon}{\sigma}$ en fonction de la fréquence : (○) = muscle, (Δ) = graisse, (□) = intestin.

Maxwell avec une représentation fréquentielle, le rapport entre l'intensité des courants de déplacement $\vec{J}_d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow j\omega\epsilon \vec{E}$ et de conduction $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ est donné par $\frac{\omega\epsilon}{\sigma}$. Or, à cause de la valeur exceptionnellement élevée de la permittivité, les courants de déplacement commencent à être non négligeables à des fréquences très inférieures à 100 KHz par rapport à d'autres systèmes classiques (fig. 4.2). En conséquence, la séparation entre l'approche quasi-statique et celle de propagation d'onde devient plus floue, même si les distances en jeu sont beaucoup plus réduites par rapport à la longueur d'onde du champ.

4.2.4 Difficulté de l'expérimentation *in vivo*

La mesure de grandeurs électriques aussi faibles que des courants induits à l'intérieur d'un être vivant est difficile, car il faut arriver à distinguer ces courants de l'activité électrique naturelle de la matière vivante.

À côté de ce volet technique, il en existe un autre de nature éthique : on n'a pas le droit (heureusement) de faire n'importe quelle manipulation sur des êtres vivants, ce qui impose des contraintes supplémentaires.

Pour toutes ces raisons, à ma connaissance il n'existe pas à l'heure actuelle de réelle possibilité de valider les modèles numériques basse fréquence avec des mesures *in vivo*.



4.3 Modélisation des phénomènes induits basses fréquences

Il existe deux situations d'exposition humaine à des champs électromagnétiques basse fréquence :

Valeurs typiques à 20 m
d'une ligne 400 kV,
1000 A : $E = 1 \text{ kV m}^{-1}$,
 $B = 6 \mu T$

- systèmes haute tension, faible courant : c'est le cas des lignes électriques HT. Dans cette situation on considère que l'effet du champ électrique est prépondérant par rapport au champ magnétique.
- systèmes basse tension, fort courant : c'est le cas de la plupart des appareils électriques domestiques et industriels. Dans cette situation, c'est le champ magnétique qui est considéré comme prépondérant.

Le couplage entre ces champs et le corps humain entraîne la circulation de courants induits à l'intérieur du corps humain. Cependant, les phénomènes physiques mis en jeu sont complètement différents, selon que l'exposition soit due au champ électrique ou magnétique : de ce fait, l'approche de la modélisation est complètement différente dans ces deux cas.

En basse fréquence, et en absence de courants induits de forte intensité, le champ électrique et magnétique sont découplés l'un de l'autre. Si l'on suppose qu'au moins en première approximation le comportement de la matière vivante est linéaire, les effets de ces deux champs sur le corps humain peuvent être étudiés indépendamment l'un de l'autre.

4.3.1 Systèmes haute tension, faible courant

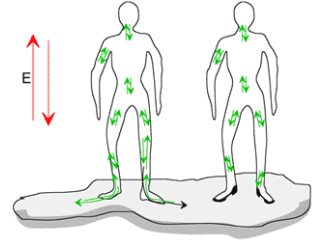
Lorsque le corps humain est exposé à un champ électrique, des mécanismes de couplage ont lieu :

- déplacement de charges mobiles (électrisation)
- création et orientation de dipôles électriques (polarisation).

En basse fréquence, les valeurs de la permittivité des différents organes sont extrêmement élevées : l'interaction champ-corps humain est donc très forte. Cette interaction a pour effet la génération d'une densité de charge surfacique ρ_s importante, qui affaiblit fortement le champ électrique à l'intérieur du corps humain.

Cependant, lorsque le champ électrique est alternatif, ces phénomènes d'électrisation et de polarisation deviennent périodiques, et sont à l'origine de courants induits à l'intérieur du corps humain :

- le déplacement des charges mobiles se traduit par un courant de conduction
- le retournement des dipôles se traduit par un courant de déplacement.



Modélisation numérique

Bien qu'il soit possible de calculer ces densités de courant avec une formulation électrodynamique classique [CIY⁺84], ceci n'est pas la meilleure solution car il faudrait prendre en compte *en même temps* la source du champ et le corps humain. De ce fait, la complexité de la géométrie qu'il est possible de modéliser est limitée par la quantité de mémoire requise. De plus, la présence de matériaux avec propriétés électriques très différentes peut poser des problèmes d'instabilité numérique.

Pour contourner ce problème, des formulations adaptées ont été développées. Ces formulations sont basées sur le fait que, à cause de la très grande permittivité de la matière vivante, le champ électrique est perpendiculaire à la surface du corps humain. Ceci permet de calculer le champ rayonné et les phénomènes induits indépendamment l'un de l'autre.

Par exemple, dans [DCS98], un premier calcul est effectué avec la technique des différences finies dans le domaine du temps (FDTD) pour déterminer le champ électrique $\vec{E}_{ext}$ à l'extérieur du corps humain. Pour ceci, le corps humain est remplacé par une surface équipotentielle Γ :

$$\vec{E}_{ext} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_{ext} &= 0 \\ \phi_{ext} &= 0 \end{cases} \text{ sur } \Gamma \quad (4.2)$$

La densité de charge ρ_s sur la surface du corps humain Γ est alors calculée à partir du champ électrique extérieur :

$$\rho_s = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext} \cdot \vec{n} \quad (4.3)$$

Un deuxième calcul est alors effectué avec la technique des différences finies en potentiel scalaire (FDSP) pour déterminer le champ électrique $\vec{E}_{int}$ à l'intérieur du corps humain, et donc la densité de courant de conduction $\vec{J} = \sigma \vec{E}_{int}$:

$$\vec{E}_{int} = -j\omega \vec{\nabla} \phi_{int} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \phi_{int}) &= 0 \\ \sigma \frac{\partial \phi_{int}}{\partial n} &= -\rho_s \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.5)$$

σ étant la conductivité du corps humain. Dans ce travail les courants de déplacement ont été considérés négligeables.

D'autres approches consistent à calculer la charge surfacique par le biais d'un ensemble de sources équivalentes[ABIM00], ou avec une formulation intégrale[CCL86]. Une fois que cette charge a été calculée, la répartition des courants à l'intérieur du corps humain est calculée à partir de l'équation de continuité :

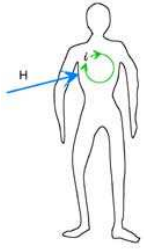
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

4.3.2 Systèmes basse tension, fort courant

Lorsque le corps humain est exposé à un champ magnétique variable dans le temps, un champ électrique est induit en tout point par effet de la loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Ce champ électrique alternatif soutient des courants de conduction, et entraîne des phénomènes de polarisation. Ces phénomènes sont eux-mêmes alternatifs, et donc se traduisent en des courants de déplacement.



Modélisation numérique

Comme pour le cas précédent, il est tout à fait possible de calculer les phénomènes induits dans le corps humain avec une formulation magnétodynamique classique. L'inconvénient de cette approche est que l'on est obligé de prendre en compte en même temps la source du champ et le corps humain, avec tous les problèmes qui en découlent (grande occupation de mémoire, instabilités numériques possibles).

Des formulations adaptées ont été développées, dans l'objectif de séparer le calcul du champ rayonné, de celui des courants induits dans le corps humain. Ces formulations sont basées sur le fait que la perméabilité de la matière vivante est unitaire ; donc la présence du corps humain ne produit pas de modifications sur un champ magnétique statique. De plus, la "réaction d'induit" du corps humain est négligeable à basse fréquence, à cause de la faible conductivité des tissus (de l'ordre de 0.4 S m^{-1} , voir tab. 4.1) De ce fait, le champ rayonné peut être déterminé en absence du corps humain, soit avec un calcul classique, soit

TAB. 4.1 – Conductivité de quelques tissus du corps humain[GLG96a]

	10 Hz	100 Hz	1 kHz	10 kHz	100 kHz	1 MHz
GRAISSE	0.01221	0.02081	0.02240	0.02383	0.02441	0.02508
MUSCLE	0.20197	0.26671	0.32115	0.34083	0.36185	0.50268
OS	0.02003	0.02006	0.02016	0.02043	0.02079	0.02435
REINS	0.05441	0.10216	0.11274	0.13774	0.17134	0.27823
FOIE	0.02771	0.03813	0.04138	0.05350	0.08457	0.18665
SANG	0.70000	0.70000	0.70000	0.70004	0.70292	0.82211
INTESTIN	0.51113	0.52241	0.53236	0.55967	0.59420	0.86488
RATE	0.20278	0.20558	0.20758	0.21303	0.21890	0.23608
VEINES	0.25055	0.27789	0.30709	0.31308	0.31870	0.32671
AORTE	0.25055	0.27789	0.30709	0.31308	0.31870	0.32671

avec une démarche expérimentale. Il est ensuite possible de déterminer les phénomènes induits à l'intérieur du corps humain avec un calcul, dont le domaine de résolution peut se limiter à la seule matière vivante.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour calculer les phénomènes induits. En littérature on trouve principalement des travaux sur les différences finies[GBR⁺99, DCS99, DCS02], les éléments finis[RMRW92, MNB⁺93, WE94] *cf. pag. 37* et la méthode des impédances[HITY95, DG85, SZ96].

La méthode des différences finies et celle des éléments finis sont basées sur une même formulation $\phi - \mathbf{A}$. Cette formulation, qui sera décrite en détail plus loin, requiert la connaissance du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$. Par contre, la méthode des impédances est basée sur les équations de Maxwell en forme intégrale, et le champ magnétique $\vec{H}$ peut être employé directement comme terme source.

Dans la méthode des différences finies et celle des impédances la géométrie du corps humain est discrétisée en plusieurs unités de volume cubiques (*voxels* = VOLUME cell ELEMENT). Ceci permet de construire rapidement la structure du corps à partir de coupes IRM. En revanche, un très grand nombre de voxels (de l'ordre de quelques millions) est nécessaire pour obtenir une géométrie réaliste.

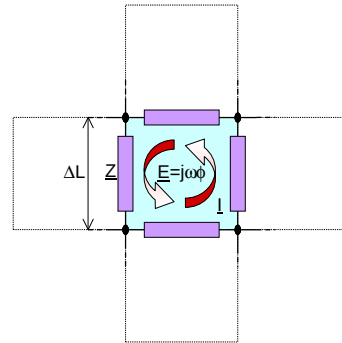
Dans la méthode des éléments finis, la géométrie est discrétisée en s'appuyant sur un maillage, qui est composé de tétraèdres, hexaèdres ou cubes de forme et taille diverses. Grâce à la plus grande souplesse de cette structure, un nombre d'éléments beaucoup moins élevé est nécessaire pour obtenir une description suffisamment précise de la géométrie du corps humain. En revanche, la construction de la structure géométrique du corps humain est beaucoup plus compliquée, et requiert donc un travail important. Ce travail est préalable à la phase de calcul proprement dite, et doit être effectué une seule fois.



LA MÉTHODE DES IMPÉDANCES

La méthode des impédances[DG85] consiste à construire un réseau électrique représentatif de la matière vivante et à appliquer les équations de Kirchhoff. Pour ceci, le volume occupé par la matière vivante est décomposé en voxels rectangulaires (ou cubiques en 3D). Chaque sommet des voxels est remplacé par un nœud. Également, chaque arête des voxels est remplacée par une impédance $Z = \frac{1}{\sigma + j\omega\epsilon} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta S}$, où ΔL et ΔS représentent respectivement la longueur de l'arête correspondante, et la section du voxel. Les inconnues du problème sont les courants I dans les anneaux formés par les arêtes de chaque voxel. L'équation imposée pour

chaque voxel est la loi de Kirchhoff, où une force électromotrice $\underline{E} = j\omega\phi$ est imposée, conformément à la loi d'induction de Faraday.



4.4 Formulation spéciale $\phi - A$

Nous avons développé un code de calcul 3D aux éléments finis pour simuler les phénomènes induits dans le corps humain. Ce code s'appuie sur une formulation spéciale $\phi - A$, qui présente deux avantages par rapport aux formulations $A - AV$ et $T - \phi - \psi$ classiques :

- le domaine de résolution est limité au seul corps humain
- une seule inconnue complexe par nœud est nécessaire, au lieu de quatre.

Les hypothèses que nous avons retenues sont les suivantes :

- pas de phénomènes de propagation d'onde $\Rightarrow$ approche quasi-statique
- régime harmonique $\Rightarrow \frac{d}{dt} \Leftrightarrow j\omega$
- champ magnétique rayonné $\Rightarrow$ il est caractérisé par le potentiel vecteur $\vec{A}$, dont la connaissance en tous les nœuds du maillage est requise.
- réaction d'induit du corps humain négligeable $\Rightarrow$ le champ rayonné peut être calculé à part (en absence du corps humain).
- les courants de déplacement ont été négligés $\Rightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$

4.4.1 Formulation forte

Soit Ω le volume occupé par le corps humain, et $\Gamma = \partial\Omega$ sa frontière. Supposons avoir calculé à part un potentiel vecteur $\vec{A}$, correspondant au champ magnétique rayonné. Ceci peut se faire avec un calcul direct 3D, soit en identifiant les coefficients d'une source équivalente. On peut donc écrire le rotationnel *cf. éq. 3.18* du champ électrique comme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

d'où :

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \quad (4.6)$$

La grandeur ϕ est un potentiel scalaire électrique, qui dépend de la jauge choisie pour $\vec{A}$ et des conditions à la frontière. Ce potentiel scalaire est l'inconnue du problème. Une fois ce potentiel obtenu, il est simple de calculer la densité de courant induit dans le corps humain :

$$\vec{J} = -\sigma \left(j\omega \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \right) \quad (4.7)$$

En remplaçant cette expression de la densité de courant dans l'équation de conservation de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{\nabla} \phi \right) = -j\omega \vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{A} \right) \quad (4.8)$$

Cette dernière équation est valable partout à l'intérieur de Ω , à condition de définir les opérateurs différentiels au sens des distributions[Bos, Sch66]. En outre, à l'interface entre deux milieux Ω_1 et Ω_2 avec conductivités $\sigma_1 \neq \sigma_2$ la densité de courant doit satisfaire la condition de continuité de la composante normale :

$$\left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1 \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (4.9)$$

Les conditions à imposer à la frontière Γ peuvent être déduites de cette dernière relation, où l'on posera $\sigma_1 = 0$:

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} = -j\omega \vec{A} \cdot \vec{n} \quad (4.10)$$

L'ensemble des équations (4.8)-(4.10) constitue une formulation forte du problème.

4.4.2 Formulation faible

Soit $\mathcal{W}^+$ l'ensemble des fonctions $\underline{w} : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continues et différentiables, et $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $\underline{w} : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continues et différentiables par morceaux. Après avoir multiplié (4.8) par une fonction $\underline{w} \in \mathcal{W}^+$ et intégré sur Ω on obtient :

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left[\sigma \vec{\nabla} \phi + j\omega \sigma \vec{A} \right] \underline{w} d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

Supposons pour l'instant que σ soit constante sur Ω (c'est-à-dire, que le corps humain soit homogène) : en intégrant par parties le membre gauche de (4.11) on obtient :

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} d\Omega = \\ & \iint_{\Gamma} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} \cdot \vec{n} d\Gamma - \iiint_{\Omega} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \cdot \vec{\nabla} \underline{w} d\Omega \end{aligned} \quad (4.12)$$

et si l'on tient compte de la condition à la frontière (4.10) on peut écrire :

$$\iiint_{\Omega} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \cdot \vec{\nabla} \underline{w} d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

En effet, on peut montrer que toute fonction $\underline{\phi}$ qui satisfait cette condition pour *n'importe quelle* fonction $\underline{w} \in \mathcal{W}^+$ est aussi solution du problème (4.8)-(4.10), à condition que σ soit constante sur Ω .

Considérons d'abord le sous-ensemble des fonctions $\underline{w} \in \mathcal{W}^+$ t.q. $\underline{w} = 0$ sur Γ . D'après (4.12) on a :

$$\iint_{\Gamma} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0$$

donc :

$$\iiint_{\Omega} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \cdot \vec{\nabla} \underline{w} d\Omega = - \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} d\Omega = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{W}^+$$

ce qui implique que $\vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} \right) = -j\omega \vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{\underline{A}} \right)$. On peut ainsi réécrire (4.11) comme :

$$\iint_{\Gamma} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} \cdot \vec{n} d\Gamma - \iiint_{\Omega} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega\sigma \vec{\underline{A}} \right] \cdot \vec{\nabla} \underline{w} d\Omega = 0$$

Si l'on impose maintenant la condition (4.12) dans le cas général où $w \neq 0$ sur Γ , il est immédiat de prouver que la condition $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -j\omega \vec{\underline{A}} \cdot \vec{n}$ sur Γ doit aussi être vérifiée.

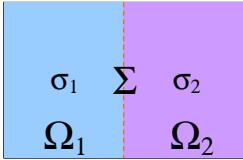
Maintenant on va montrer que si l'on impose (4.13) pour toute fonction $\underline{w} \in \mathcal{W}$, alors la condition d'interface (4.9) est aussi vérifiée. Pour ceci, supposons pour simplicité que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Appelons :

$$\Sigma = \Omega_1 \cap \Omega_2$$

l'interface entre Ω_1 et Ω_2 , et soient :

$$\Gamma_1 = \Gamma \cap \Omega_1$$

$$\Gamma_2 = \Gamma \cap \Omega_2$$



les parties restantes de la frontière de Ω_1 et Ω_2 respectivement. Appliquons (4.12) séparément sur Ω_1 et Ω_2 pour mettre en évidence l'intégrale de surface sur Σ . En répétant un raisonnement similaire on obtient :

$$\iint_{\Sigma} \left[\sigma_1 \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega \sigma_1 \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} \cdot \vec{n}_1 d\Sigma + \iint_{\Sigma} \left[\sigma_2 \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega \sigma_2 \vec{\underline{A}} \right] \underline{w} \cdot \vec{n}_2 d\Sigma = 0$$

d'où, après avoir remarqué que $\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega \sigma \vec{\underline{A}} = \vec{\underline{J}}$ et $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$, on arrive à l'expression suivante, qui doit être valable pour toute fonction $\underline{w} \in \mathcal{W}$:

$$\iint_{\Sigma} \left(\vec{\underline{J}}_2 - \vec{\underline{J}}_1 \right) \underline{w} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0$$

Donc $\left(\vec{\underline{J}}_2 - \vec{\underline{J}}_1 \right) \cdot \vec{n} = 0$.

En résumant, le problème de départ (4.8)-(4.10) peut s'exprimer sous forme faible de la manière suivante :

$$\iiint_{\Omega} \left[\sigma \vec{\nabla} \underline{\phi} + j\omega \sigma \vec{\underline{A}} \right] \cdot \vec{\nabla} \underline{w} d\Omega = 0 \quad \forall \underline{w} \in \mathcal{W} \quad (4.14)$$

$\mathcal{W}$ étant l'ensemble des fonctions $\underline{w} : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continues et différentiables par morceaux.

4.4.3 Résolution

Puisque le potentiel scalaire ϕ est continu sur Ω , on a choisi de programmer la formulation en utilisant des éléments nodaux classiques[Hug87]. Le domaine Ω a donc été discrétisé avec des éléments tétraédriques du premier ordre, et l'équation (4.14) est imposée en s'appuyant sur la méthode de Galerkin[Bos]. La matrice du système linéaire ainsi obtenu est symétrique, définie positive : la méthode du gradient conjugué[BBC⁺94] s'avère bien adaptée pour résoudre ce type de système linéaire. Ce code de calcul a été réalisé en partie à partir de modules développés au sein du CEGELY, notamment pour ce qui concerne la résolution du système linéaire.

4.4.4 Validation

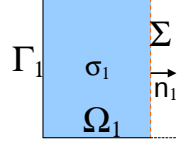
Pour valider ce code de calcul, nous avons comparé les résultats obtenus avec des formules analytiques et avec une formulation numérique classique, implémentée dans le logiciel aux éléments finis FLUX3D[CED]. *cf. pag. 23*

Comparaison avec une solution analytique

Considérons le problème de calculer les courants induits dans une sphère homogène par un gradient de champ magnétique. Pour cette configuration particulière, et sous les mêmes approximations qui ont servi pour développer la formulation spéciale $\phi - \underline{\mathbf{A}}$, il existe des solutions analytiques exactes[BBB02]. *cf. pag. 122*

Dans le cas d'un gradient de champ orienté selon la direction Z :

$$\vec{\underline{B}} = G_z z \vec{e}_z$$





LA MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ

La méthode du Gradient Conjugué (GC) est une méthode itérative, non stationnaire, qui s'avère particulièrement adaptée pour résoudre des systèmes linéaires creux $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ où la matrice $\mathbf{A}$ est définie positive. L'idée de base est de partir d'un point $\mathbf{x}_0$ quelconque, et de s'approcher à chaque pas vers la solution du système par des directions de descente $\mathbf{p}_k$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

À la différence d'autres méthodes (comme la méthode de Jacobi ou de Gauss-Seidel, dites stationnaires) la direction de descente $\mathbf{p}_k$ est modifiée à chaque pas de l'algorithme :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_{k-1} \mathbf{p}_{k-1}$$

où $\mathbf{r}_k = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_k$ est dit *résidu*. Les coefficients α_k et β_{k-1} sont choisis de manière optimale, de sorte à minimiser à chaque pas le résidu $\mathbf{r}_k$ dans la

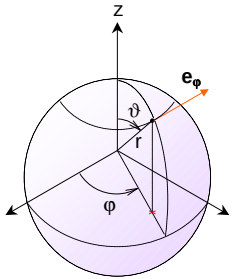
norme induite par $\mathbf{A}$ [BBC⁺94] :

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_{k-1}^H \mathbf{r}_{k-1}}{\mathbf{p}_k^H \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$$

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{r}_{k-1}^H \mathbf{r}_{k-1}}{\mathbf{r}_{k-2}^H \mathbf{r}_{k-2}}$$

Il est possible de montrer qu'avec ce choix la direction de descente $\mathbf{p}_k$ au pas k est orthogonale à toutes les autres directions employées aux pas précédents (= on ne descend jamais par le même chemin).

De plus, la convergence de la méthode vers la solution du système est *garantie*, et le nombre d'itérations nécessaires est proportionnel à $\sqrt{\kappa_2}$, κ_2 étant le nombre de conditionnement spectral de la matrice $\mathbf{A}$. Des préconditionneurs peuvent être utilisés pour réduire ce nombre de conditionnement, et accélérer ainsi la convergence de l'algorithme.



cf. pag.98

la densité de courant induit est égale à :

$$\underline{\vec{J}} = -\frac{j\sigma\omega}{4} G_z r^2 \sin(2\theta) \vec{e}_\varphi \quad (4.15)$$

On a donc simulé cette configuration, et on a comparé la densité de courant $\underline{\vec{J}}_{FE}$ fournie par le code de calcul développé, avec cette solution analytique. Cette comparaison a été répétée pour différents maillages de la sphère. Pour quantifier la précision de la solution nous avons pris comme critère le facteur d'erreur suivant :

$$\chi[J] = \frac{1}{\max \|\underline{\vec{J}}_{FE}\|} \iiint_{\Omega} \|\underline{\vec{J}} - \underline{\vec{J}}_{FE}\| d\Omega \quad (4.16)$$

Une quantité similaire est définie pour le potentiel scalaire ϕ :

$$\chi[\phi] = \frac{1}{\max |\underline{\phi}|} \iiint_{\Omega} |\phi - \phi_{FE}| d\Omega \quad (4.17)$$

Cette comparaison montre (tab. 4.2) que le résultat converge vers la solution exacte si l'on augmente la finesse du maillage, ce qui valide la méthode sous

les mêmes hypothèses que nous avons retenues pour développer la formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$.

TAB. 4.2 – Facteur d’erreur χ en fonction de la finesse du maillage

NOMBRE DE NŒUDS EN SURFACE	NOMBRE TOTAL DE NŒUDS	NOMBRE DE D’ÉLÉMENTS	FACTEUR D’ERREUR $\chi[\phi]$	FACTEUR D’ERREUR $\chi[J]$
100	132	427	2.31%	3.81%
200	229	651	2.86%	3.99%
400	510	1676	1.64%	2.28 %
500	1775	9075	0.45%	2.20%
850	2982	15309	0.38%	1.75%

Comparaison avec une formulation classique

Pour tester les limites de validité de la formulation spéciale on a comparé les résultats obtenus avec cette formulation, et avec la formulation magnétodynamique classique $\mathbf{T} - \phi - \psi$, implantée dans le logiciel FLUX3D. La configuration simulée est une sphère homogène de conductivité σ , exposée au champ généré par une spire circulaire (fig. 4.3). La sphère est maillée avec 15309 éléments tétraédriques (du deuxième ordre avec FLUX3D, du premier ordre avec le code de calcul développé).

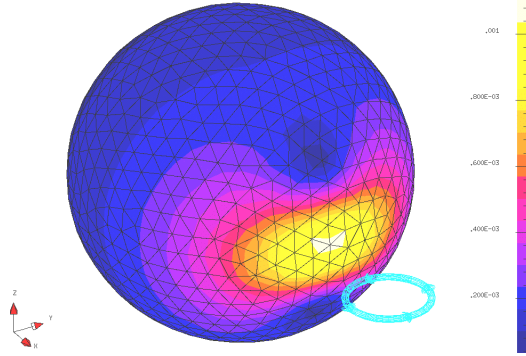


FIG. 4.3 – Champ électrique induit à la surface d’une sphère de conductivité $\sigma = 1 \text{ S m}^{-1}$ et rayon $a = 100 \text{ mm}$ par une spire circulaire (fréquence $f = 100 \text{ kHz}$).

Les simulations ont été répétées pour différentes valeurs du produit σf (f étant la fréquence). Pour chaque simulation, on a calculé l’écart entre les solutions ϕ_{3D} et ϕ_{FE} obtenues avec ces deux formulations, et donc le facteur d’erreur $\chi[\phi]$, qui dans ce cas est défini comme :

$$\chi[\phi] = \frac{1}{\max |\phi_{3D}|} \iiint_{\Omega} |\phi_{3D} - \phi_{FE}| d\Omega$$

où ϕ_{3D} est le potentiel calculé par FLUX3D.

cf. tab. 4.1 pag. 121

Cette comparaison (fig. 4.4) montre que la limite de validité de la formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$ se situe dans la plage $10^6 \leq \sigma f \leq 10^7 \text{ S m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ceci est attribuable au fait que lorsque la fréquence augmente, la réaction d'induit du corps humain n'est plus négligeable.

Compte tenu que la conductivité des tissus est inférieure à 1 S m^{-1} , on est assuré de la validité de cette formulation jusqu'à au moins 100 kHz.

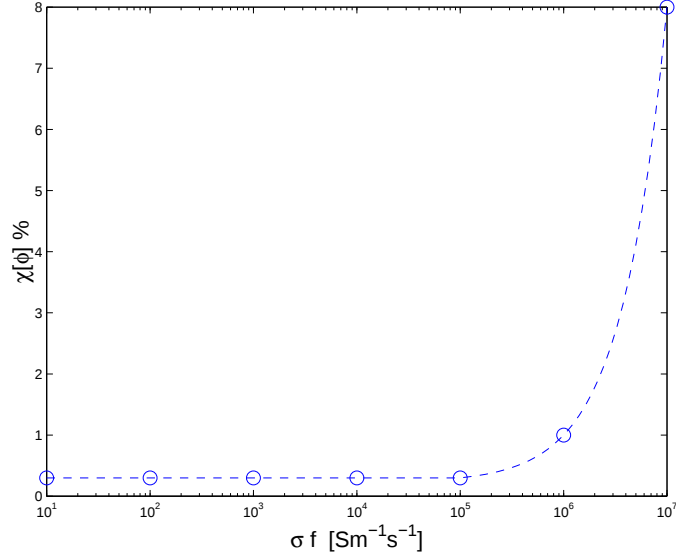


FIG. 4.4 – Comparaison avec une formulation classique : facteur d'erreur $\chi[\phi]$ en fonction de σf .

4.5 Premières applications

Nous avons utilisé ce code de calcul pour étudier la répartition des phénomènes induits à l'intérieur du corps humain. En particulier, nous nous sommes intéressés à deux aspects basiques :

- influence de la décroissance du champ
- influence de l'hétérogénéité du corps

Pour ceci, des conditions d'exposition, à la fois simples et représentatives de situations réelles, ont été simulées. Enfin, un exemple d'application à une source réaliste est présenté.

Ces premiers résultats n'ont pas la prétention d'être exhaustifs, mais plutôt de montrer une *méthodologie* (fig. 4.5) par laquelle il devient possible de modéliser de manière efficace les phénomènes induits dans le corps humain.

Modèle du corps humain

Pour calculer les courants induits par des dispositifs électriques de manière réaliste nous avons utilisé le modèle anatomique 3D développé pendant la thèse de N. Siauve[Sia02]. Ce modèle a été obtenu à partir de coupes scanner avec le logiciel AMIRA[Sof00], et est composé de onze tissus biologiques différents. Le maillage a été réalisé avec FLUX3D, et comporte 182650 éléments tétraédriques du premier ordre (fig. 4.6, 4.7).

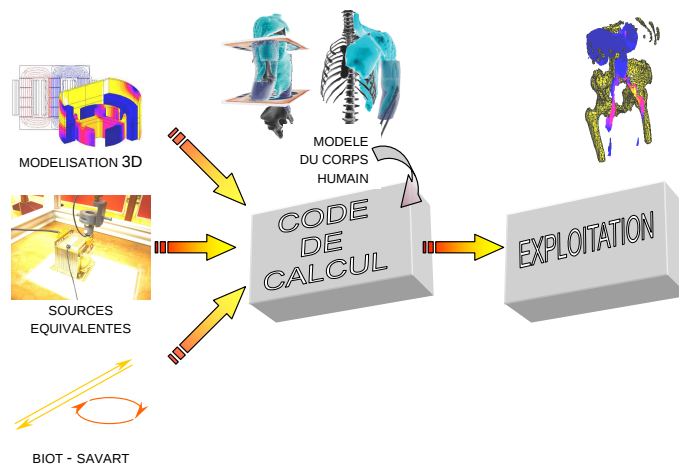
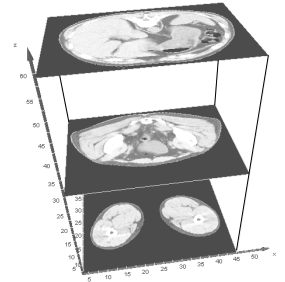


FIG. 4.5 – Méthodologie pour calculer les courants induits dans le corps humain

Prise en compte du champ-source

Pour pouvoir calculer les phénomènes induits, la connaissance du potentiel vecteur magnétique est requise. Différentes approches sont alors possibles, selon le type du dispositif rayonnant et les informations disponibles :

- Sources de type filaires connues : le potentiel vecteur magnétique peut être calculé à partir de l'équation de Biot-Savart (application : dispositifs antivol, lignes électriques).
- Dispositifs inconnus : un multipôle équivalent peut être identifié à partir de mesures de champ avec les techniques présentées dans le chapitre précédent.
- Dispositifs connus : si des informations suffisantes sur la source du champ sont disponibles, le champ de fuite peut être calculé par modélisation 3D, précise ou approchée (comme présentée dans le chapitre 2). Dans ce cas, on calcule le potentiel vecteur $\vec{A}$ à l'emplacement du corps humain.

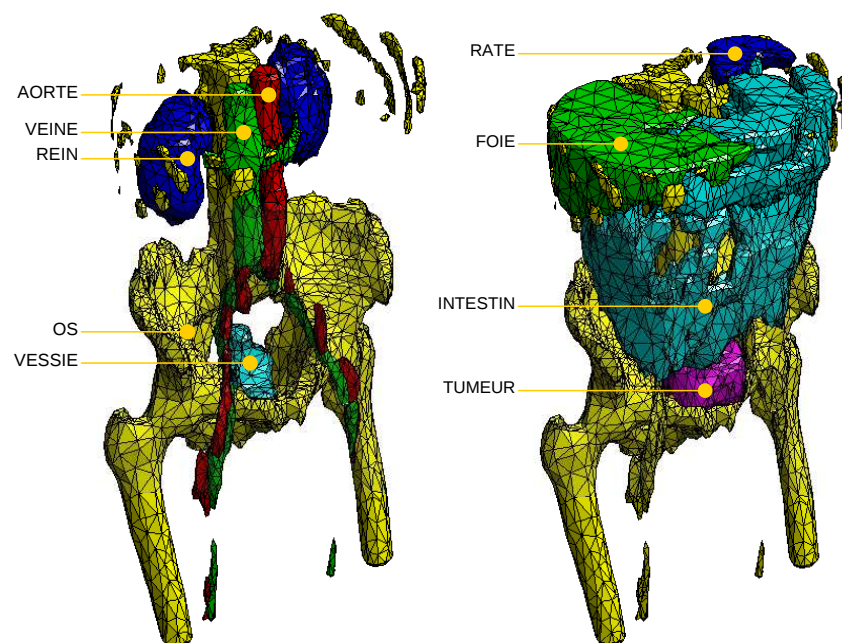


FIG. 4.6 – Modèle anatomique du corps humain (organes internes).

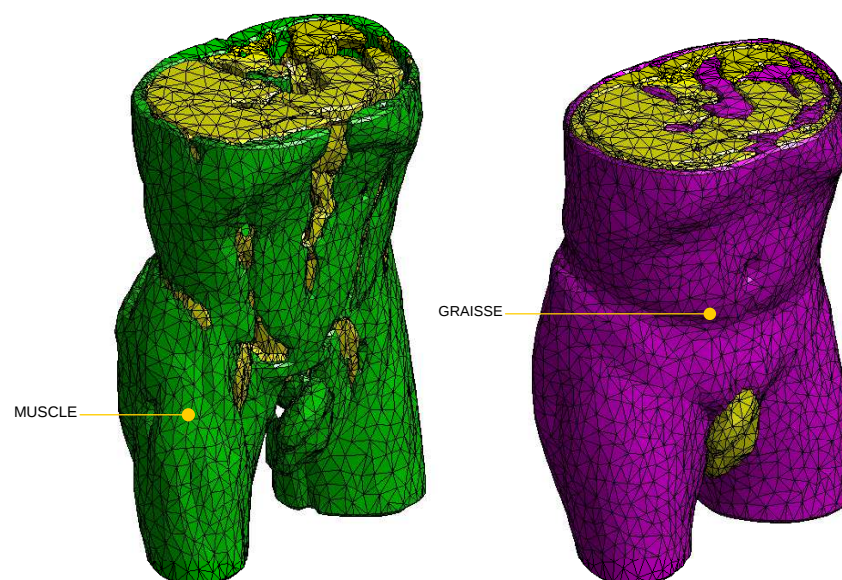


FIG. 4.7 – Modèle anatomique du corps humain (muscle et graisse).

Exploitation des résultats

L'exploitation des résultats de calcul sur des géométries compliquées n'est pas intuitive, et nécessite des moyens appropriés. Les logiciels commerciaux dont nous disposions n'étaient pas bien adaptés, d'une part à cause de problèmes de format de fichiers, mais surtout parce qu'ils ne permettent pas de fusionner dans un même projet des calculs issus de simulations différentes. On a donc été amené à écrire notre propre logiciel d'exploitation, sous la forme d'une toolbox pour MATLAB.

4.5.1 Influence de la décroissance du champ

Nous avons étudié les phénomènes induits dans le corps humain par les systèmes filaires suivants, placés à proximité du corps (environ 300 mm) :

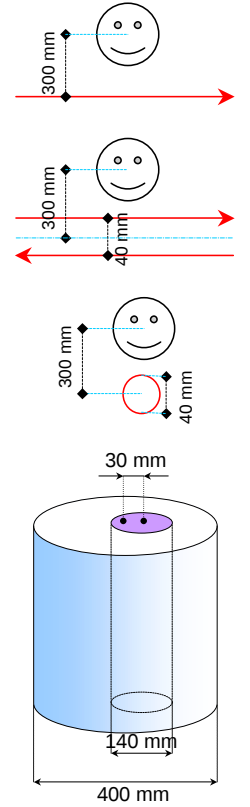
- i un fil rectiligne parcouru par un courant unitaire ($H \propto \frac{1}{r}$)
- ii deux fils rectilignes parcourus par des courants unitaires de sens opposé, parcourus par des courants opposés ($H \propto \frac{1}{r^2}$)
- iii une spire de rayon 20 mm, parcourue par un courant unitaire ($H \propto \frac{1}{r^3}$)

Le champ généré à proximité par ces sources est non uniforme, et représentatif de systèmes réels - en particulier celui rayonné par la spire. On espère ainsi mettre en évidence les traits généraux des phénomènes induits dans le corps humain.

Pour nos simulations, nous avons dans un premier temps utilisé une structure géométrique très simplifiée. Cette structure est constituée d'un cylindre de rayon $\rho_1 = 200$ mm et conductivité $\sigma_1 = 0.4 \text{ S m}^{-1}$, à l'intérieur duquel se trouve un deuxième cylindre de rayon $\rho_2 = 70$ mm et conductivité $\sigma_2 = 0.04 \text{ S m}^{-1}$, décalé de 30 mm par rapport au premier. En faisant varier les conductivités σ_1 et σ_2 des deux cylindres on peut simuler un "corps" homogène, ou bien la présence d'une région peu conductrice (os, graisse) à l'intérieur du corps[RMRW92].

Cette structure présente deux points d'intérêt : elle permet de faire abstraction de la complexité du corps humain, et donc facilite la compréhension de la répartition des phénomènes en fonction de σ . Elle pourrait constituer un "modèle" intermédiaire (peu coûteux) entre les modèles anatomiques 3D[DCS02, CDDS02], et les modèles 2D[BBG98, GBD00].

Les résultats obtenus montrent que, selon la décroissance du champ, la répartition des courants n'est pas la même : dans le cas où le champ est généré par un seul fil (décroissance en $\frac{1}{r}$) la densité de courant est plus uniformément répartie, alors que dans le cas où le champ est généré par deux fils ou par une spire (décroissance en $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{r^3}$ respectivement) les phénomènes électromagnétiques sont beaucoup plus concentrés à proximité de la source du champ (fig. 4.8).



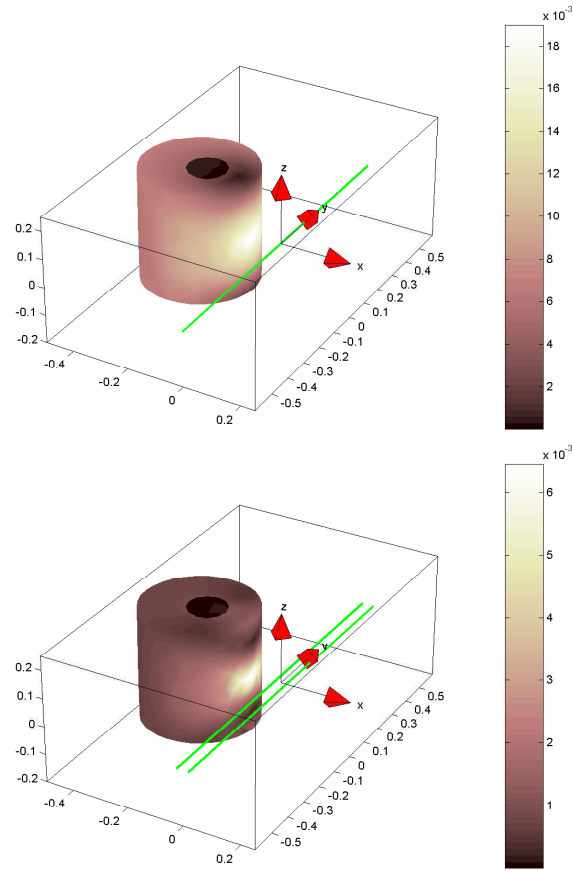
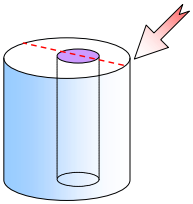


FIG. 4.8 – Densité de courant (en mA m^{-2}) induite dans le corps humain, modélisé avec un cylindre, par un et deux fils (paramètres : $I = 1 \text{ A}$ crête, $f = 50 \text{ Hz}$, $\sigma_1 = 0.4 \text{ Sm}^{-1}$, $\sigma_2 = 0.04 \text{ Sm}^{-1}$).



Cependant, la répartition des courants induits est loin d'être intuitive. Par exemple, dans le cas où le champ est généré par deux fils, on observe que la densité de courant induit sur la face supérieure du cylindre décroît avec la distance de la source, et présente un pic du côté de la source, alors que dans le cas d'un seul fil c'est exactement l'inverse.

La répartition des courants induits dans le modèle anatomique du corps humain est beaucoup plus compliquée à cause de la grande hétérogénéité du modèle (fig. 4.9), et encore plus à cause de la présence de régions faiblement conductrices (os, graisse). Comme dans le cas précédent, on constate que la répartition des courants induits dans les organes internes dépend fortement de la décroissance du champ (fig. 4.10), avec la différence que cette fois-ci on observe la présence de points chauds, très localisés quelque part à la frontière entre deux régions avec conductivités très différentes. (le point indiqué avec une flèche en fig. 4.9).

cf. tab. 4.1 pag. 121

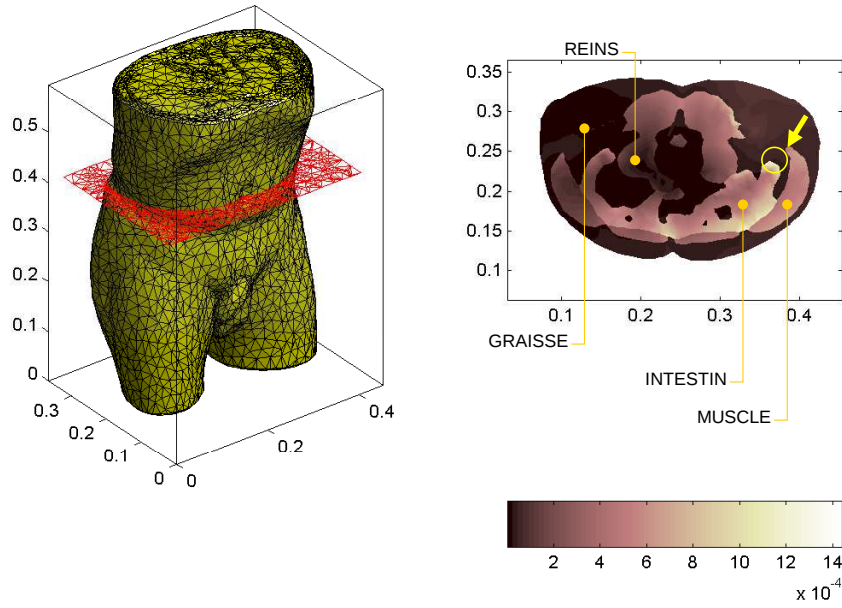


FIG. 4.9 – Densité de courant (en mA m^{-2}) induite dans le corps humain par deux fils rectilignes parcourus par un courant de 1 A (valeur crête) à 50 Hz. La flèche indique un point chaud dans l'intestin, où la densité de courant est très supérieure par rapport au voisinage.

4.5.2 Le rôle de l'hétérogénéité

La présence de ces points chauds s'explique par la grande hétérogénéité du corps humain. Nous avons effectué des simulations dans les mêmes conditions d'exposition, mais en prenant une même conductivité moyenne $\sigma = \sigma_1 = 0.4 \text{ S m}^{-1}$ pour tous les organes du corps. Cette valeur a été choisie car elle représente une valeur intermédiaire entre les organes moyennement conducteurs ($\sigma \simeq 0.2 \text{ S m}^{-1}$) et le sang qui est très conducteur ($\sigma \simeq 0.7 \text{ S m}^{-1}$).

On constate que cette fois-ci la répartition des courants induits à la surface du corps possède la même allure que dans le cas de la structure cylindrique (fig 4.11). Si l'on compare les valeurs de la densité de courant induit J dans ces deux géométries, on observe qu'à égale conductivité, la densité de courant induit est plus importante de 50% dans le cas de la structure cylindrique que dans le cas du corps humain. Ceci est normal, car la section du cylindre est plus grande que celle du corps humain.

Si maintenant on passe à l'étude des courants induits sur un plan de coupe, on observe que les valeurs maximales de J sont localisées à la surface du corps, mais pas forcément dans le point le plus proche de la source du champ, où le champ est plus intense (fig. 4.12). En revanche, à l'intérieur du corps les variations de J sont beaucoup moins brusques de celles observées dans le cas hétérogène (fig. 4.12).

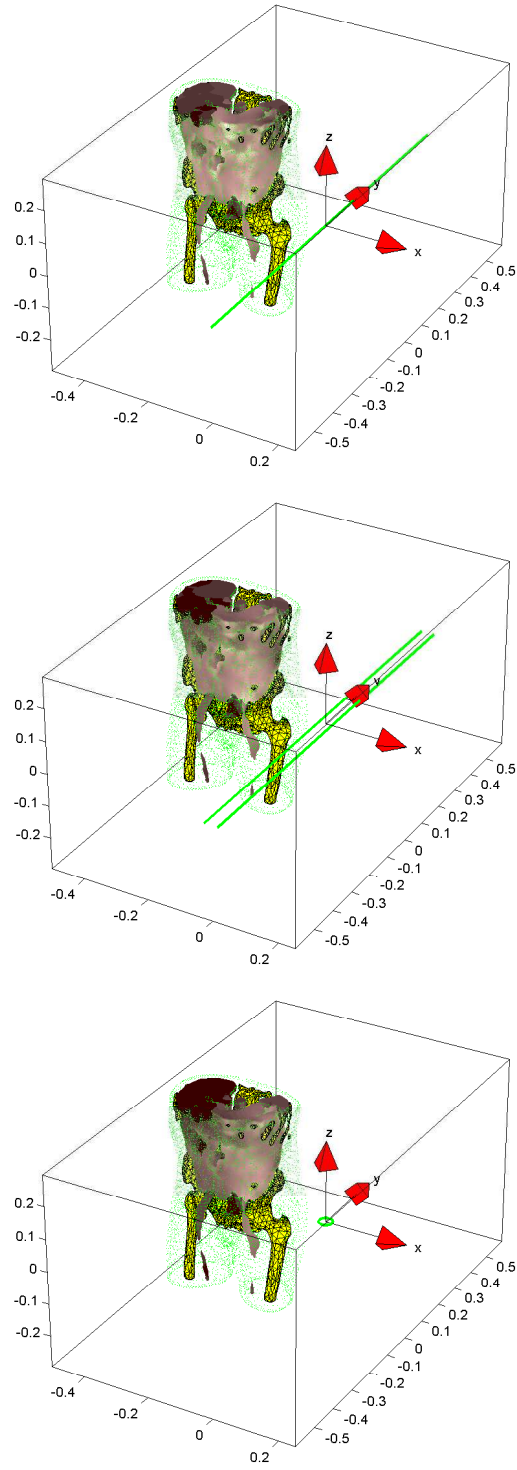


FIG. 4.10 – Densité de courant induite dans les organes internes pour différents types de source (valeurs de J normalisées entre 0 et 1).

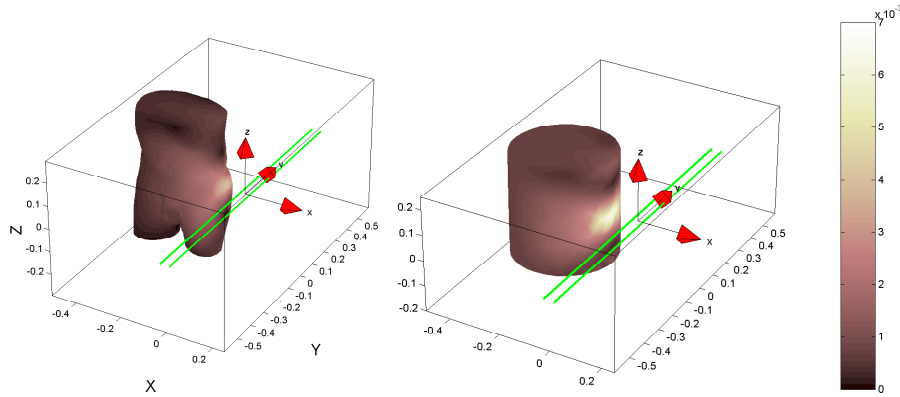


FIG. 4.11 – Densité de courant induite (en $\text{mA}\cdot\text{m}^{-2}$) dans le modèle anatomique et dans le modèle cylindrique, la conductivité $\sigma = 0.4 \text{ Sm}^{-1}$ étant homogène.

La présence de points chauds à l'intérieur du corps s'explique donc par le fait que les régions faiblement conductrices (graisse et os) contraignent les courants à passer par des passages relativement étroits, ce qui conduit à une augmentation de J localisée en ces points. Ceci comporte de multiples implications :

- les points chauds étant déterminés principalement par le voisinage des os ou de la graisse, ils se trouvent principalement à la *périphérie* des organes vitaux. Cette information pourrait s'avérer intéressante pour les chercheurs qui s'occupent du problème de l'interaction entre champs magnétiques et santé.
- Dans la construction d'un modèle anatomique, il est important de bien prendre en compte les couches de graisse, car elles sont déterminantes dans la répartition des courants. Une solution élégante pour éviter d'augmenter le nombre de degrés de liberté de manière démesurée pourrait être d'introduire des conditions d'interface spéciales pour prendre en compte les couches minces.
- Le même problème se représente pour certains organes à la géométrie compliquée, et notamment les intestins : si l'on modélise ces organes comme une masse monolithique, sans prendre en compte leur structure tubulaire (et leur contenu...), on risque de fausser la répartition des courants induits.

4.5.3 Exemple d'application à un dispositif réaliste

Nous présentons maintenant un exemple d'application avec un dispositif plus réaliste : un système de cuisson par induction. Nous avons choisi ce dispositif parce que, à cause de sa structure (présence de pièces magnétiques, entrefer très important) il se prête bien pour l'étude des champs de fuite.

La distance entre l'inducteur et le récipient est de 6 mm

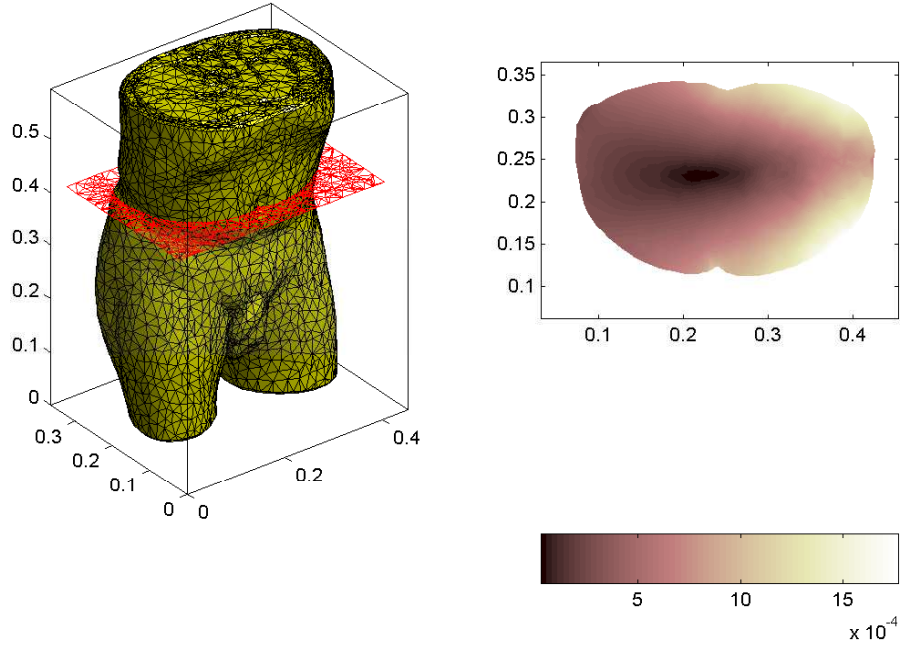
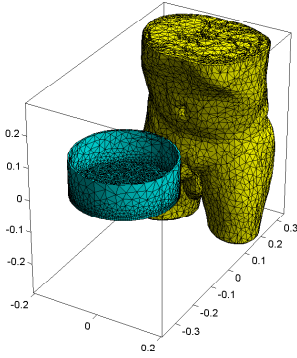


FIG. 4.12 – Densité de courant (en mA m^{-2}) induit dans le corps humain par deux fils rectilignes parcourus par un courant de 1 A (valeur crête) à 50 Hz. Le corps humain est modélisé comme un objet homogène de conductivité $\sigma = 0.4 \text{ S m}^{-1}$.



Ce système de cuisson à induction est composé de l'inducteur et d'un récipient. Le système inducteur est constitué d'un bobinage de type pancake, dans lequel circule un courant sinusoïdale de 300 At à 20 kHz, et de six éléments en ferrite ($\mu_r = 1000$, $\sigma = 0$), qui contribuent à la canalisation du flux magnétique. Le récipient est modélisé avec un cylindre creux en acier ($\mu_r = 400$, $\sigma = 4 \cdot 10^6 \text{ S m}^{-1}$).

L'ensemble inducteur + récipient est modélisé avec FLUX3D (fig. 4.14) en utilisant 79329 éléments volumiques du premier ordre, et la formulation $\mathbf{T} - \phi - \psi$ en potentiels scalaires magnétiques, potentiel vecteur électrique. Le corps humain est remplacé par une boîte d'air, où la formulation en potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ est utilisée. Ce potentiel $\mathbf{A}$ est ensuite exporté dans un fichier, et interpolé en tous les nœuds de la géométrie du corps humain, qui est placé à 20 cm du bord du récipient.

La densité de courant induit dans le corps est montrée sur divers plans de coupe en fig. 4.13. On constate que la répartition des courants à l'intérieur du corps ressemble à celle calculée précédemment dans le cas d'exposition à des sources filaires. En particulier, on retrouve des points chauds localisés en certaines zones du corps (vessie, intestin) plus conductrices que d'autres. Ces points ont tendance à se concentrer à la périphérie des organes, et non à l'intérieur de ceux-ci.

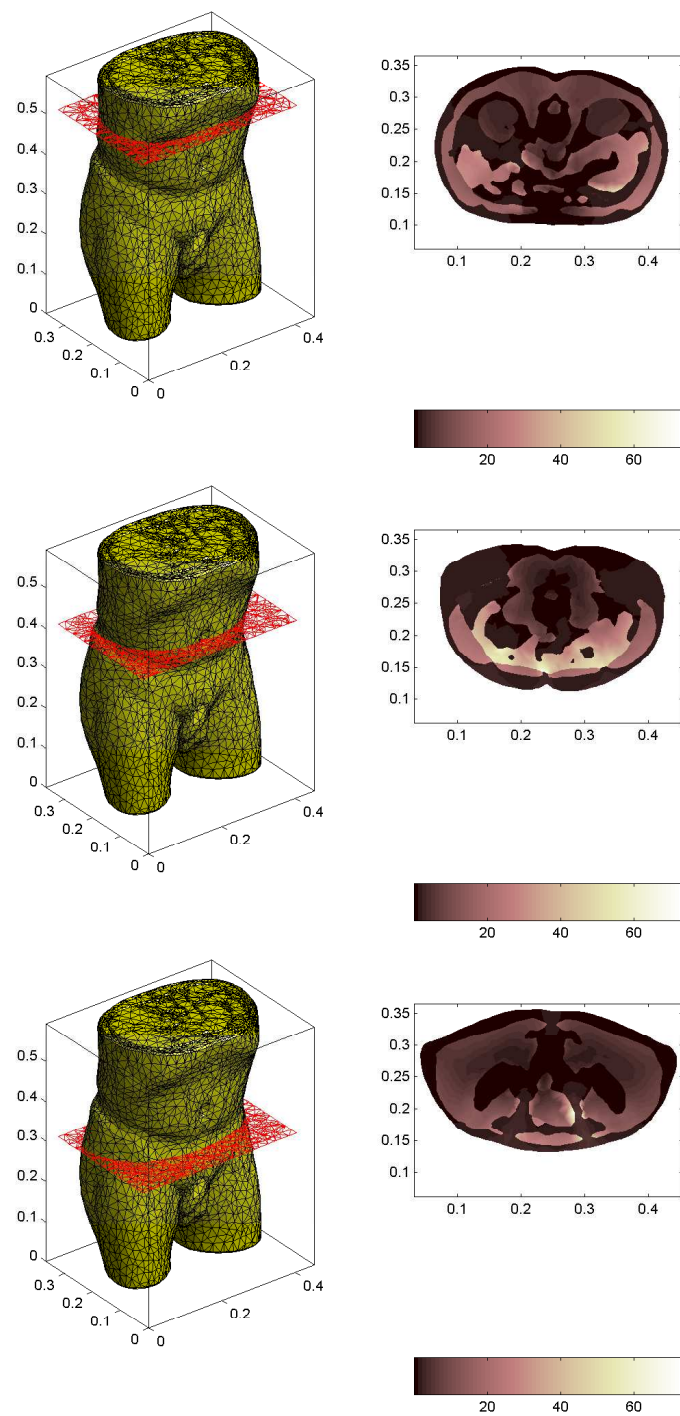


FIG. 4.13 – Densité de courant (en mA m^{-2}) induite dans le corps humain par le système de cuisson à induction.

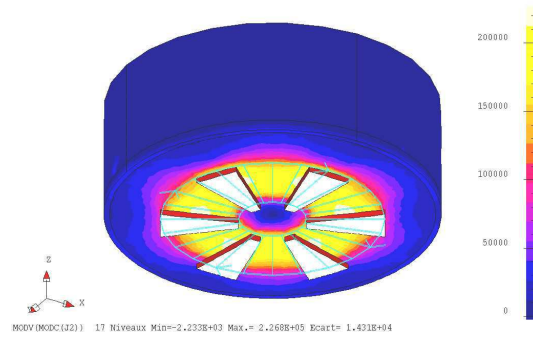


FIG. 4.14 – Modèle du système de cuisson par induction (le dégradé représente la densité de courant induit dans le récipient).

4.5.4 Applications dans un contexte normatif

Ces premières informations numériques pourraient être utilisées pour la définition de normes industrielles. Par exemple, l'on pourrait penser assimiler les dispositifs rayonnants à des source-type, et établir en conséquence des valeurs de référence pour le champ magnétique à ne pas dépasser. De cette manière on prendrait en compte non seulement la *valeur maximale* du champ, mais aussi la *décroissance* de celui-ci.

On pourrait également penser normaliser une structure géométrique simplifiée pour simuler les phénomènes induits dans le corps humain, au lieu d'utiliser des modèles anatomiques très précis.

Ce type de simplifications introduirait des imprécisions par rapport à un “vrai” calcul 3D. En contrepartie elles permettraient de définir des normes *simples*, mais suffisamment précises, qui pourraient être appliquées dans un cadre industriel à un coût modéré.

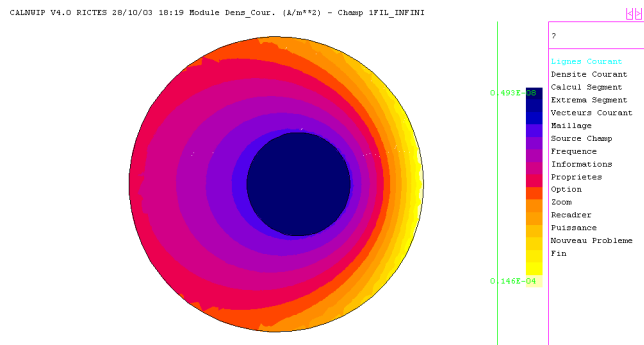


FIG. 4.15 – Densité de courant (valeurs efficaces, en $A\ m^{-2}$) calculé en 2D.

A titre d'exemple, nous avons simulé en 2D l'exposition de la structure cylindrique au champ généré par un fil rectiligne, que nous avons déjà simulé

précédemment en 3D. Pour ceci, nous avons utilisé un module dont la formulation appelée $T - H_{ex}$ en 2D s'apparente à la formulation $\phi - \mathbf{A}$ en 3D. Sur le plan de symétrie du cylindre, ce calcul 2D donne le même résultat (à 5% près) que notre calcul 3D (fig. 4.15).

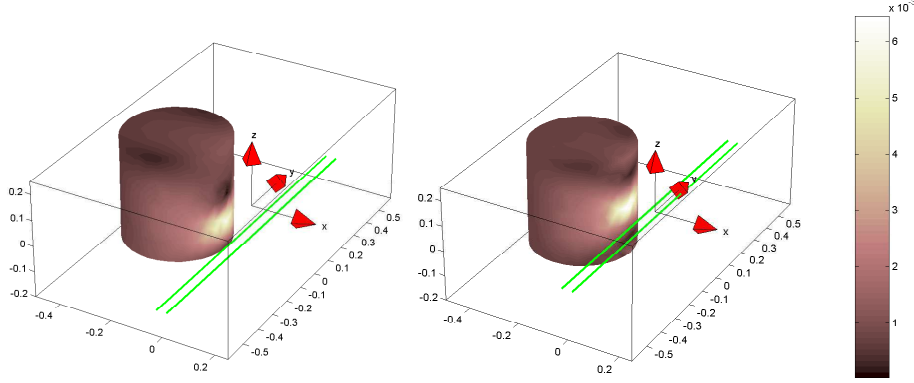
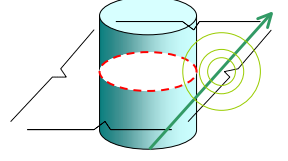
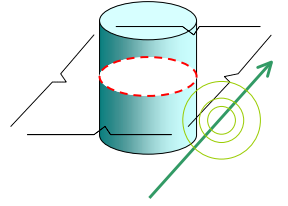


FIG. 4.16 – Densité de courant induite (en mA m^{-2}) dans le cylindre homogène pour deux positions de la source du champ (un fil).

Lorsque le fil se trouve sur le plan de symétrie, on est en conditions d'exposition maximale (pour la même distance de la source du champ). Si l'on déplace le fil de ce plan, les valeurs de J calculées diminuent, mais l'écart avec le cas précédent reste modéré.

Par exemple, en fig. 4.16 on a tracé la densité de courant induit à la surface du cylindre dans le cas où le fil se trouve sur le plan de symétrie, et lorsqu'il est décalé de 100 mm de celui-ci. L'écart entre les valeurs maximales de J calculées en ces deux configurations est de 8%. De plus, cet écart va dans le sens du principe de précaution, car avec le calcul 2D on a surestimé la densité de courant.



4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthodologie pour calculer les phénomènes induits dans le corps humain. Pour ceci, une formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$ a été mise en œuvre en 3D avec la méthode des éléments finis. Il est ainsi possible de modéliser les courants induits dans le corps humain par des sources filaires simples, mais aussi par des systèmes complexes.

Avec le code de calcul développé, nous avons montré que la décroissance du champ et l'hétérogénéité du corps humain jouent un rôle important dans la répartition et l'intensité des phénomènes induits. D'ores et déjà on peut envisager d'utiliser cette méthodologie et certains résultats dans un contexte normatif et industriel. Ces résultats confirment la complexité des phénomènes, et la nécessité d'effectuer de nombreuses simulations complémentaires.

“Prediction is very difficult, especially about the future.”

Niels Bohr

Conclusion

Au cours de ce travail de thèse, nous nous sommes consacrés à l’étude des champs magnétiques “de fuite”, et des phénomènes induits qui en résultent dans le corps humain.

Dans un premier temps, nous avons effectué une étude bibliographique sur les applications médicales des ondes électromagnétiques, leurs effets sur la santé, et les normes en matière de protection envers les radiations non ionisantes. Cette étude fait apparaître deux problématiques :

- comment caractériser les champs dits “de fuite” ?
- comment modéliser les phénomènes induits par ceux-ci à l’intérieur du corps humain ?

Nous avons ensuite utilisé le logiciel FLUX3D pour effectuer une analyse préliminaire des champs de fuite à proximité de dispositifs électrotechniques en fonctionnement. Cette analyse montre que les logiciels de ce type ne sont pas bien adaptés pour nos problématiques, car ils fournissent des résultats précis à l’intérieur des dispositifs, alors que nous sommes intéressés aux champs extérieurs.

Nous avons donc développé des modèles 3D permettant de caractériser les champs rayonnés par des systèmes électrotechniques à moindre coût. Deux approches sont possibles :

- si le dispositif rayonnant est *connu*, les champs de fuite sont calculés à partir d’une description sommaire de la géométrie du système.
- si le dispositif rayonnant est *inconnu*, les paramètres d’une source équivalente (dipôles, spires ou multipôles) sont estimés à partir de mesures à proximité du système.

Les résultats fournis par ces modèles peuvent être utilisés pour calculer les phénomènes induits dans le corps humain par ces champs. Dans cet objectif, nous avons mis en œuvre avec la méthode des éléments finis une formulation spéciale $\phi - \mathbf{A}$ qui permet de limiter le domaine de résolution au seul corps humain.

Ces modèles ont été validés sur des systèmes rayonnants simples (de type circuit magnétique + bobinages + entrefer) et avec une structure réaliste du corps humain, obtenue à partir de coupes IRM.

On peut déjà envisager d'utiliser l'ensemble de ces modèles en l'état, dans un contexte normatif et industriel :

- pour préciser la répartition des phénomènes induits dans le corps humain, et en particulier l'emplacement où la densité de courant J est maximale, dans le cas d'expositions "classiques",
- pour vérifier la conformité aux normes de systèmes électriques rayonnants,
- pour aider à l'élaboration de normes plus réalistes.

Ces modèles ne sont qu'au début de leur développement, et beaucoup de possibilités restent à explorer. La précision des modèles que nous avons présentés dans le chapitre 2, doit être améliorée. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse que la connaissance du seul flux magnétique $\Phi = \iint_{\Xi} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma$ suffit pour caractériser les champs de fuites, par l'intermédiaire de distributions de charges magnétiques fictives.

En l'état, ces charges fictives sont concentrées en quelques points à l'intérieur du circuit magnétique. Ce choix, qui avait été fait dans un souci de simplicité, nécessite d'être remis en question : en effet, il est plus réaliste de supposer que cette charge est répartie sur la surface du circuit magnétique.

Les techniques d'identification de sources équivalentes, que nous avons mis au point dans le chapitre 3, sont basées sur l'hypothèse que l'évolution temporelle du champ rayonné est sinusoïdale. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il peut être nécessaire de prendre en compte la présence de plusieurs sources rayonnantes en même temps.

Les techniques de régularisation nécessitent une réflexion approfondie : les choix que nous avons faits pour la valeur de α et pour la fonction de pénalisation doivent être reconsidérés sur des bases plus rigoureuses. En outre, l'utilisation d'algorithmes génétiques multi-objectifs pourrait nous ouvrir de nouvelles perspectives.

Pour ce qui concerne la modélisation des phénomènes induits, la validation expérimentale est le problème principal : on n'est pas capable, à l'heure actuelle, de mesurer de si faibles courants induits dans le corps humain.

Deux autres points me semblent particulièrement importants :

- il serait important de prendre en compte *en même temps* l'exposition aux champs électrique et magnétique,
- le modèle du corps humain que nous avons utilisé n'est pas adapté à notre problématique, car la structure particulière de certains organes (notamment les intestins) n'est pas prise en compte. La construction de modèles réalistes du corps humain est un problème difficile, car des compétences dans de multiples domaines sont nécessaires (modélisation, médecine et techniques de l'imagerie).



La législation italienne en matière de protection contre les radiations non-ionisantes

L'Italie est un cas emblématique du contexte actuel en matière de protection contre les radiations non-ionisantes. En effet, en l'espace de 11 ans la législation italienne a basculé de la quasi-absence de toute limitation, vers une réglementation parmi les plus restrictives en Europe.

Dans la période de l'après-guerre, toute réglementation en matière de protection contre les radiations non-ionisantes était absente dans le code de loi italien - comme la plupart des autres nations, à quelques exceptions près. Jusqu'en 1992, la seule apparition de réglementation se trouve dans un décret de 1968, qui fixe à L. 300 (à peu près 1 FF de l'époque) la somme versée à titre d'indemnité de risque journalier pour les fonctionnaires concernés[Sin97].

La première loi où l'on nomme la

"nécessité de fixer des limites pour l'exposition de la population aux champs électriques et magnétiques" se trouve dans la loi de 1992 du gouvernement Andreotti¹. Cette loi[G.U92] fixe les limites d'exposition aux champs à fréquence industrielle générés par des lignes électriques haute-tension, et elle ne s'applique pas aux professionnels. Les limites d'exposition définies par la loi sont :

- 5 kV m⁻¹ pour le champ électrique, et 100 μ T pour le champ magnétique, en cas d'exposition prolongée
- 10 kV m⁻¹ pour le champ électrique, et 1000 μ T pour le champ magnétique, en cas d'exposition limitée à quelques heures par jour.

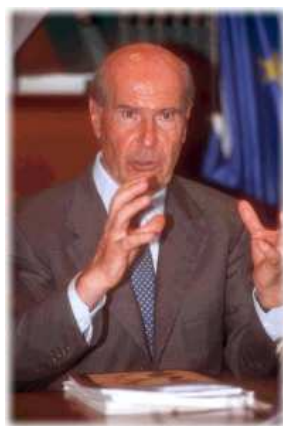
Le cap suivant est la loi 381-98 de

¹A l'époque le ministre de la santé était le très controversé Mr. De Lorenzo.

1998 du gouvernement Prodi. Cette loi[G.U98] fixe les limites d'exposition aux radio-fréquences (100 kHz – 300 GHz) :

f [MHz]	E [Vm ⁻¹]	B [μT]
0.1 – 0.3	60	75.40
0.3 – 3000	20	0.0628
3000 – 300000	40	0.1257

Ces valeurs sont des valeurs quadratiques, moyennes sur une section équivalente au corps humain, dans un intervalle temporel de 6 min. La loi précise que *la conception et la réalisation des systèmes fixes de télécommunication [...] doit se faire de façon à générer les valeurs du champ électromagnétique les plus bas possibles [...] afin de minimiser l'exposition de la population.* La loi précise également qu'en cas de bâtiments où il est prévu que la population demeure pour plus de 4 heures, les limites baissent à 6 V m⁻¹ pour le champ électrique, et 0.0201 μT pour le champ magnétique, pour *n'importe quelle* fréquence! Des limitations pour la densité de puissance sont également fixées à partir de 3 MHz.



Le doct. Veronesi, Ministre de la Santé en 2001

En 2001 le gouvernement Amato approuve une nouvelle loi[G.U01] des-

tinée à réglementer la bande de fréquences 0 Hz – 300 GHz, et qui s'adresse aux installations civiles et militaires, au grand public comme aux professionnels. Dans cette loi le terme "pollution électromagnétique" paraît explicitement. La loi arrête aussi la création d'un cadastre national des sources de champ électromagnétique, et la promotion de la recherche scientifique afin d'approfondir les connaissances sur le risque cancérigène des radiations électromagnétiques.

Cette loi ne fixait pas elle-même les limites d'exposition, mais précise que ces limites seront fixées *dans un temps de 60 jours par un arrêté du Président du Conseil, sous proposition du Ministre de l'Environnement, de concert avec le Ministre de la Santé.* Or, il se trouve qu'à l'époque le Ministre de la Santé, M. Veronesi, était un cancérologue de grande renommée : celui-ci s'est farouchement opposé aux limites d'exposition (très faibles) proposées par le Ministre de l'Environnement, M. Bordon et par d'autres parlementaires[Fot99]. Il en a suivi une vive polémique, qui a agité le monde politique pour quelque temps. Mais puisque l'avis du Ministre de la Santé était quand même fondamental, et la législature était arrivée à terme, rien n'a été décidé.

L'arrêté qui fixe les limites d'exposition actuelles a été enfin émis le 23 février 2003 par le gouvernement Berlusconi. L'arrêté, qui adopte la Recommandation européenne, fixe comme limite d'exposition 100 μT, mais en plus établit que dans le cas des lignes haute tension[...] *à titre de mesure préventive envers de possibles effets à long terme, éventuellement liés à l'exposition à des champs magnétiques à fréquence industrielle*, dans habitations et écoles, la limite est baissée à 10 μT, avec un objectif de qualité de 3 μT.

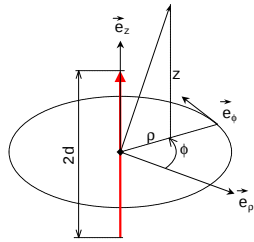
B

Calcul d'inducteurs filaires par Biot-Savart, et autres calculs techniques

B.1 Champ généré par un fil rectiligne de longueur finie

L'expression du champ $\vec{H}$ généré par un fil rectiligne de longueur finie $2d$, parcouru par un courant unitaire, est [Gar81] :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_\phi \vec{e}_\phi \\ H_\phi &= \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{d-z}{\sqrt{\rho^2+(d-z)^2}} + \frac{d+z}{\sqrt{\rho^2+(d+z)^2}} \right]\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$



B.2 Champ généré par une spire circulaire

Soit a le rayon d'une spire circulaire centrée à l'origine, parcourue par un courant unitaire. Le potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$ généré par cette spire en un point quelconque peut se calculer à partir de la loi de Bio-Savart :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\vec{l} \quad (\text{B.2})$$

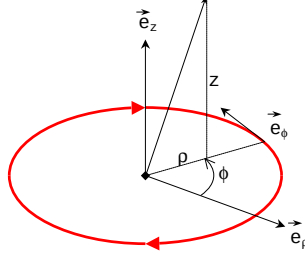
Cette intégrale peut s'exprimer en forme fermée à travers les intégrales elliptiques [Dur68] :

$$\vec{A} = A_\phi \vec{e}_\phi \quad (\text{B.3})$$

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{k\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \cdot \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right] \quad (\text{B.4})$$

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}} \quad (\text{B.5})$$

(ρ, z) étant les coordonnées du point dans un repère cylindrique, $K(k)$ et $E(k)$ les intégrales elliptiques[SL99] respectivement de première et deuxième espèce.



Par conséquent le champ magnétique peut s'exprimer comme :

$$\vec{H} = H_\rho \vec{e}_\rho + H_z \vec{e}_z \quad (\text{B.6})$$

$$H_\rho = \frac{kz}{4\pi\rho\sqrt{a\rho}} \quad (\text{B.7})$$

$$H_z = \frac{k}{4\pi\sqrt{a\rho}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right] \quad (\text{B.8})$$

Ces formules présentent une singularité lorsqu'on s'approche de l'axe $\rho = 0$. Cette singularité, gênante du point de vue numérique, peut être évitée en adoptant la définition de Carlson[PTVF92] pour les intégrales elliptiques :

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} = R_F(0, 1-k^2, 1) \quad (\text{B.9})$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi = R_F(0, 1-k^2, 1) - \frac{k^2}{3} R_D(0, 1-k^2, 1) \quad (\text{B.10})$$

où :

$$R_F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \quad (\text{B.11})$$

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t+z)\sqrt{(t+x)(t+y)(t+z)}} \quad (\text{B.12})$$

A partir de ces définitions on obtient des formules équivalentes à (B.3)-

(B.8), qui ne présentent pas de singularité en $\rho = 0$:

$$A_\phi = \frac{2\mu_o a}{\pi\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \quad (\text{B.13})$$

$$\left[\frac{1}{3} R_D(0, 1-k^2, 1) - \frac{1}{2} K(k) \right]$$

$$H_\rho = \frac{az}{\pi\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \quad (\text{B.14})$$

$$\left[-\frac{2}{3[(a+\rho)^2 + z^2]} R_D(0, 1-k^2, 1) + \frac{1}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right]$$

$$H_z = \frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right] \quad (\text{B.15})$$

B.3 Calcul d'inducteurs massifs

Soit Ω le volume occupé par les conducteurs qui composent l'inducteur, et soit $\vec{J}$ la densité de courant en tout point de Ω . Le champ magnétique généré par un inducteur massif s'écrit dans le cas le plus général à l'aide d'une intégrale volumique :

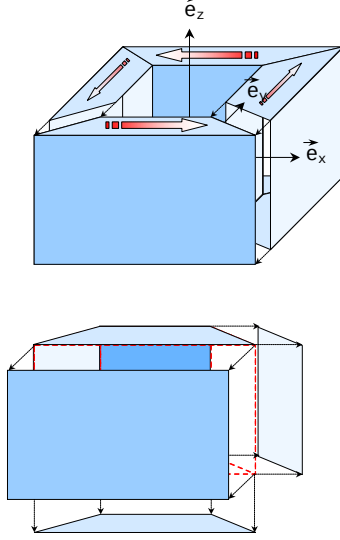
$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_\Omega \vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{B.16})$$

Supposons pouvoir décomposer Ω en un ensemble de sous-domaines $\{\Omega_k\}$, à l'intérieur de chacun desquels la densité de courant $\vec{J}$ est constante. L'intégrale (B.16) peut alors se transformer en la somme de plusieurs intégrales surfaciques, qui sont bien évidemment plus simples à calculer[Gre95] :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_\Omega \vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_k \vec{J}_k \times \iiint_{\Omega_k} \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_k \vec{J}_k \times \iint_{\Gamma_k} \frac{1}{r} \vec{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$\Gamma = \partial\Omega$ étant la frontière de Γ , et $\vec{n}$ la normale à Γ orientée vers l'extérieur.

Selon le type d'inducteur que l'on veut calculer, $\{\Omega_k\}$ est composé de parallélépipèdes et/ou prismes, et donc Γ se décompose en un ensemble de rectangles et triangles :



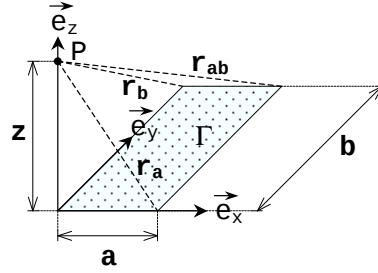
Le problème est donc ramené au calcul sur des rectangles et des triangles d'intégrales de la forme : $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$. On remarquera au passage que ceci correspond au potentiel généré par une distribution surfacique de charges.

B.4 Calcul d'intégrales de la forme $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$

Soit Γ le domaine d'intégration, $P \equiv (x, y, z)$ le point où l'on veut calculer la valeur de l'intégrale, et $Q \equiv (x', y', z')$ un point quelconque de Γ . Dorénavant les variables x' , y' et z' seront les variables d'intégration, et donc $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Pour simplifier les idées, on va également supposer que Γ appartient au plan xy .

B.4.1 Calcul de $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$ sur un rectangle

Soit Γ un rectangle de côtés a et b . Considérons d'abord le cas où le point P se trouve sur l'axe z (donc $x = y = 0$) :



Soit :

$$r_a = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (\text{B.18})$$

$$r_b = \sqrt{z^2 + b^2} \quad (\text{B.19})$$

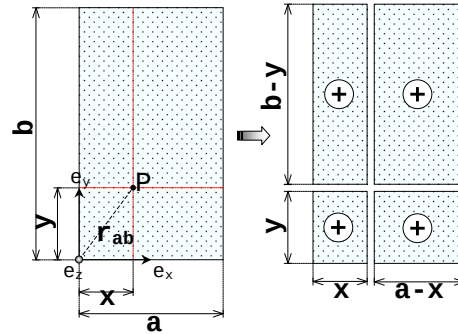
$$r_{ab} = \sqrt{z^2 + a^2 + b^2} \quad (\text{B.20})$$

Dans ce cas l'intégrale vaut :

$$R(0, 0, z) = a \ln \frac{r_{ab} + b}{r_a} + (\text{B.21})$$

$$b \ln \frac{r_{ab} + a}{r_b} - z \arctan \frac{ab}{z r_{ab}}$$

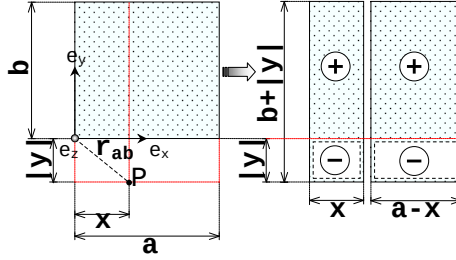
Dans le cas général, le rectangle Γ est décomposé en la somme et/ou différence de quatre rectangles, qui peuvent être calculés avec (B.21). Par exemple, supposons que la projection de P sur le plan xy se trouve à l'intérieur de Γ :



Dans ce cas on doit additionner les contributions des quatre rectangles :

$$R(x, y, z) = R(x, y, z) + (B.22) \\ R(a - x, y, z) + R(x, b - y, z) + \\ R(a - x, b - y, z)$$

Dans l'exemple suivant, la projection P se trouve au dessous de Γ (donc $y < 0$) :

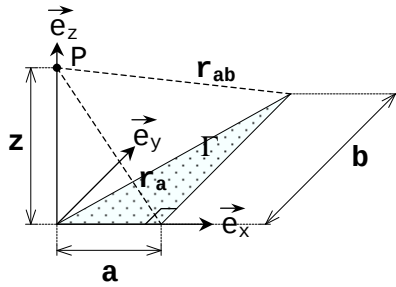


Dans ce cas on trouve :

$$R(x, y, z) = R(x, b - y, z) - (B.23) \\ R(a - x, b - y, z) - R(x, -y, z) - \\ R(a - x, -y, z)$$

B.4.2 Calcul de $\iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$ sur un triangle

Supposons d'abord que Γ soit un triangle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit mesurent a et b . On pourra toujours supposer sans perdre de généralité que l'un des sommets du triangle se trouve à l'origine (une simple translation suffit pour se mettre dans cette condition). Dans un premier temps supposons que le point P se trouve sur l'axe z :

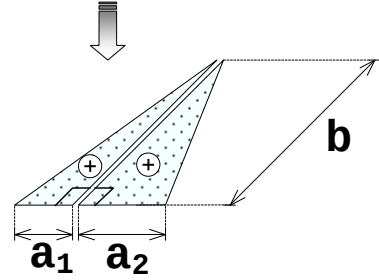
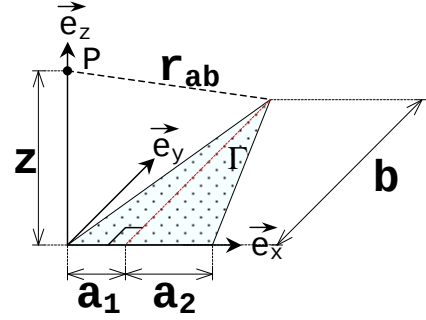


Dans ce cas, l'intégrale vaut :

$$TR(z|a, b) = a \ln \frac{b + r_{ab}}{r_a} - (B.24) \\ z \arctan \frac{ab}{r_{ab}z + r_a^2}$$

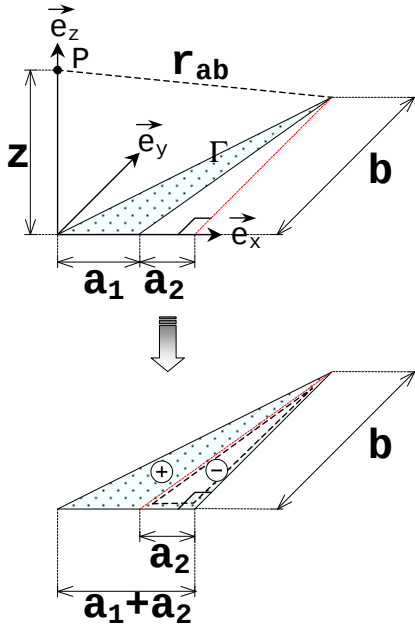
r_a et r_{ab} étant définis comme dans (B.18) et (B.20) respectivement.

Supposons maintenant que Γ soit un triangle quelconque, P étant toujours sur l'axe z . Ce cas peut se ramener au cas précédent en décomposant Γ dans la somme ou la différence de deux triangles rectangles, selon que le triangle possède un angle obtus ou pas.



Si tous les angles sont aigus, on doit additionner les contributions des deux triangles :

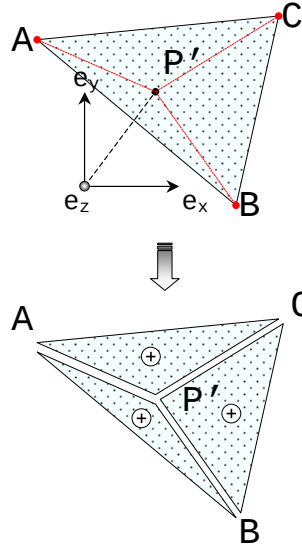
$$T(0, 0, z) = TR(z|a_1, b) + (B.25) \\ TR(z|a_2, b)$$



Dans le cas contraire, il faut soustraire les deux contributions :

$$T(0, 0, z) = TR(z|a_1 + a_2, b) - (B.26) \\ TR(z|a_2, b)$$

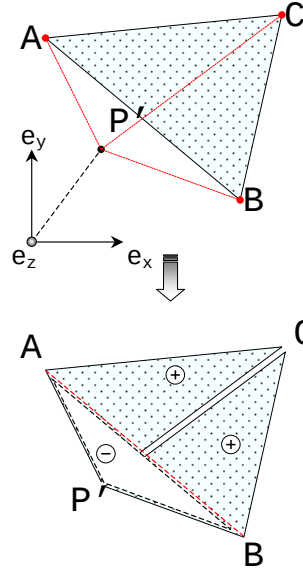
Nous sommes enfin prêts à résoudre le cas général, c'est à dire lorsque P ne se trouve pas sur l'axe z . Le cas général se ramène à la somme et/ou différence des contributions des trois triangles, que l'obtient en prenant comme sommets la projection de P sur le plan xy (appelons P' cette projection) et deux des sommets du triangle original. Ces triangles peuvent être calculés par (B.25) ou (B.26). La position de P' est déterminante ; par exemple, dans le cas suivant P' se trouve à l'intérieur du triangle ABC :



Il suffit donc d'additionner les trois contributions ; la seule difficulté consiste à calculer les valeurs des paramètres z , a_1 et a_2 pour chacun de ces triangles :

$$T(P|ABC) = T(ABP') + \\ T(BCP') + T(ACP')$$

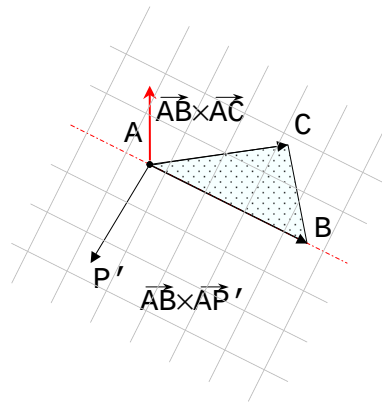
Par contre, dans le cas suivant il faut réfléchir un peu plus :



On trouve :

$$T(P|ABC) = -T(ABP') + T(BCP') + T(ACP')$$

D'une façon générale, pour connaître le signe de la contribution d'un triangle quelconque, ABP' par exemple, il suffit de vérifier si la projection P' se trouve du même côté que le sommet restant (dans ce cas C) par rapport à la droite AB . Ceci se fait très simplement à travers le produit vectoriel :



Si $\overrightarrow{AP'} \times \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP'} \times \overrightarrow{BC}$ n'ont pas le même sens, alors P' et C ne sont pas du même côté : il faut donc soustraire la contribution $T(ABP')$. Donc la formule générale est :

$$T(P|ABC) = \chi_{AB}T(ABP') + \chi_{BC}T(BCP') + \chi_{AC}T(ACP') \quad (\text{B.27})$$

χ_{AB} , χ_{BC} et χ_{AC} étant :

$$\chi_{AB} = \text{sign} \left[(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP'}) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \right] \quad (\text{B.28})$$

$$\chi_{BC} = \text{sign} \left[(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP'}) \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}) \right] \quad (\text{B.29})$$

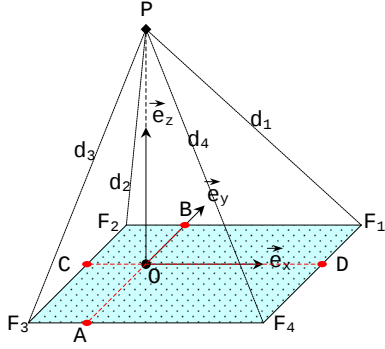
$$\chi_{AC} = \text{sign} \left[(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP'}) \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}) \right] \quad (\text{B.30})$$

B.5 Champ généré par une distribution surfacique rectangulaire

Pour calculer le champ généré par une distribution de charge surfacique, uniformément répartie sur un rectangle on pourrait tout simplement dériver les expressions du potentiel que nous venons de trouver. Cependant cette opération est longue et fastidieuse : on préfère donc utiliser une méthode plus astucieuse et élégante.

Considérons un rectangle $\Gamma = F_1F_2F_3F_4$, et supposons que l'on veuille calculer le champ dans un point P quelconque :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \iint_{\Gamma} \frac{1}{r} d\Gamma$$



Composantes H_x et H_y

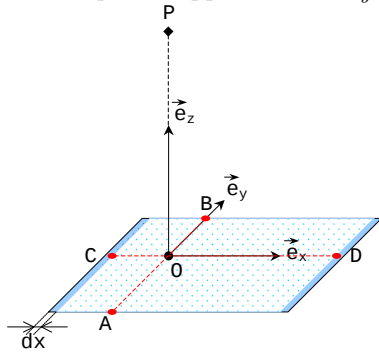
Soit ψ le potentiel généré par la distribution. La composante H_x correspond à :

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \simeq -\frac{\psi(x+dx) - \psi(x)}{dx}$$

La différence $\psi(x+dx) - \psi(x)$ peut se calculer comme le potentiel généré par deux rubans d'épaisseur dx situés aux extrémités de Γ , soit F_4F_1 et F_3F_2 . En passant à la limite pour $dx \rightarrow 0$ on obtient [Dur64] :

$$H_x = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(d_4 + \overline{AO})(d_2 + \overline{BO})}{(d_3 + \overline{AO})(d_1 + \overline{BO})} \quad (\text{B.31})$$

$\overline{AO}$ et $\overline{BO}$ étant des grandeurs algébriques dont le signe dépend de l'orientation des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BO}$ par rapport à $\vec{e}_y$:



Par exemple, dans cette situation on a : $\overline{AO} > 0$ et $\overline{BO} < 0$.

Avec un raisonnement identique on obtient l'expression pour la compo-

sante H_y du champ :

$$H_y = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(d_4 + \overline{DO})(d_2 + \overline{CO})}{(d_3 + \overline{CO})(d_1 + \overline{DO})} \quad (\text{B.32})$$

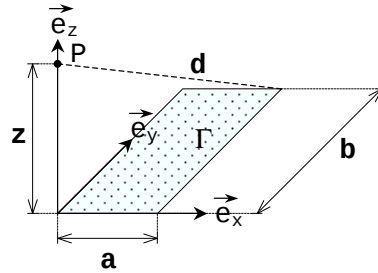
Composante H_z

La dernière composante du champ H_z peut s'écrire en fonction de l'angle solide ϖ sous lequel le point P est vu par Γ :

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{r}}{r^3} d\Gamma \cdot \vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_z}{r^3} d\Gamma = \\ &= \frac{\varpi}{4\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Dans le cas où le point P se trouve sur la verticale d'un sommet d'un rectangle de côtés a, b , l'angle solide vaut :

$$\varpi = \arctan \left(\frac{ab}{rz} \right) \quad (\text{B.34})$$



Dans le cas général la valeur de H_z se calcule en ajoutant et retranchant des rectangles, de manière similaire à la section B.4. Par exemple, dans le cas où le point O se trouve à l'intérieur du rectangle, on a :

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{4\pi} \left[\arctan \left(\frac{\overline{OD} \cdot \overline{OB}}{zd_1} \right) + \right. \\ &\quad \arctan \left(\frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}{zd_2} \right) + \\ &\quad \arctan \left(\frac{\overline{OC} \cdot \overline{OA}}{zd_3} \right) + \\ &\quad \left. \arctan \left(\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OD}}{zd_4} \right) \right] \end{aligned}$$

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$ étant des grandeurs sans signe.

C

Grandeurs électriques de quelques tissus
du corps humain entre 10 Hz et 100 kHz

CONDUCTIVITÉ en (S m^{-1}) [GLG96a]					
FRÉQUENCE	GRAISSE	MUSCLE	OS	REINS	FOIE
$1.00 \cdot 10^1$	0.0122	0.2020	0.0756	0.0544	0.0544
$1.59 \cdot 10^1$	0.0142	0.2048	0.0780	0.0599	0.0599
$2.51 \cdot 10^1$	0.0167	0.2112	0.0796	0.0699	0.0699
$3.98 \cdot 10^1$	0.0188	0.2240	0.0805	0.0830	0.0830
$6.31 \cdot 10^1$	0.0201	0.2442	0.0809	0.0947	0.0947
$1.00 \cdot 10^2$	0.0208	0.2667	0.0810	0.1022	0.1022
$1.59 \cdot 10^2$	0.0212	0.2845	0.0811	0.1060	0.1060
$2.51 \cdot 10^2$	0.0214	0.2964	0.0812	0.1079	0.1079
$3.98 \cdot 10^2$	0.0217	0.3056	0.0813	0.1091	0.1091
$6.31 \cdot 10^2$	0.0220	0.3138	0.0814	0.1106	0.1106
$1.00 \cdot 10^3$	0.0224	0.3211	0.0815	0.1127	0.1127
$1.59 \cdot 10^3$	0.0228	0.3271	0.0817	0.1160	0.1160
$2.51 \cdot 10^3$	0.0232	0.3316	0.0820	0.1205	0.1205
$3.98 \cdot 10^3$	0.0235	0.3352	0.0822	0.1260	0.1260
$6.31 \cdot 10^3$	0.0237	0.3381	0.0824	0.1318	0.1318
$1.00 \cdot 10^4$	0.0238	0.3408	0.0826	0.1377	0.1377
$1.59 \cdot 10^4$	0.0240	0.3435	0.0828	0.1437	0.1437
$2.51 \cdot 10^4$	0.0241	0.3463	0.0831	0.1497	0.1497
$3.98 \cdot 10^4$	0.0242	0.3497	0.0833	0.1561	0.1561
$6.31 \cdot 10^4$	0.0243	0.3544	0.0836	0.1631	0.1631
$1.00 \cdot 10^5$	0.0244	0.3619	0.0839	0.1713	0.1713

CONDUCTIVITÉ en (S m⁻¹) [GLG96a]

FRÉQUENCE	SANG	INTESTIN	RATE	VEINES	VESSIE
$1.00 \cdot 10^1$	0.7000	0.5111	0.0396	0.2505	0.2505
$1.59 \cdot 10^1$	0.7000	0.5159	0.0500	0.2514	0.2514
$2.51 \cdot 10^1$	0.7000	0.5192	0.0650	0.2533	0.2533
$3.98 \cdot 10^1$	0.7000	0.5210	0.0799	0.2576	0.2576
$6.31 \cdot 10^1$	0.7000	0.5219	0.0902	0.2659	0.2659
$1.00 \cdot 10^2$	0.7000	0.5224	0.0957	0.2779	0.2779
$1.59 \cdot 10^2$	0.7000	0.5230	0.0983	0.2899	0.2899
$2.51 \cdot 10^2$	0.7000	0.5239	0.0997	0.2984	0.2984
$3.98 \cdot 10^2$	0.7000	0.5255	0.1007	0.3030	0.3030
$6.31 \cdot 10^2$	0.7000	0.5283	0.1018	0.3055	0.3055
$1.00 \cdot 10^3$	0.7000	0.5324	0.1030	0.3071	0.3071
$1.59 \cdot 10^3$	0.7000	0.5375	0.1044	0.3084	0.3084
$2.51 \cdot 10^3$	0.7000	0.5431	0.1059	0.3097	0.3097
$3.98 \cdot 10^3$	0.7000	0.5488	0.1075	0.3109	0.3109
$6.31 \cdot 10^3$	0.7000	0.5543	0.1091	0.3120	0.3120
$1.00 \cdot 10^4$	0.7000	0.5597	0.1108	0.3131	0.3131
$1.59 \cdot 10^4$	0.7001	0.5650	0.1126	0.3141	0.3141
$2.51 \cdot 10^4$	0.7002	0.5706	0.1145	0.3152	0.3152
$3.98 \cdot 10^4$	0.7005	0.5768	0.1167	0.3163	0.3163
$6.31 \cdot 10^4$	0.7012	0.5842	0.1192	0.3175	0.3175
$1.00 \cdot 10^5$	0.7029	0.5942	0.1222	0.3187	0.3187

PERMITTIVITÉ RELATIVE [GLG96a]					
FRÉQUENCE	GRAISSE	MUSCLE	OS	REINS	FOIE
$1.00 \cdot 10^1$	7974000	25700000	10020000	27990000	27990000
$1.59 \cdot 10^1$	6147000	24980000	5715000	25150000	25150000
$2.51 \cdot 10^1$	3940000	23340000	2756000	20050000	20050000
$3.98 \cdot 10^1$	2107000	20060000	1207000	13330000	13330000
$6.31 \cdot 10^1$	1002000	14940000	509600	7307000	7307000
$1.00 \cdot 10^2$	457100	9329000	217000	3518000	3518000
$1.59 \cdot 10^2$	214100	5110000	97570	1634000	1634000
$2.51 \cdot 10^2$	109000	2700000	48740	802300	802300
$3.98 \cdot 10^2$	62300	1462000	27990	449000	449000
$6.31 \cdot 10^2$	38740	803500	18080	293000	293000
$1.00 \cdot 10^3$	24100	434900	12320	212900	212900
$1.59 \cdot 10^3$	13990	231200	8381	160000	160000
$2.51 \cdot 10^3$	7529	123600	5581	117900	117900
$3.98 \cdot 10^3$	3903	68550	3671	83490	83490
$6.31 \cdot 10^3$	2028	40500	2434	57250	57250
$1.00 \cdot 10^4$	1085	25910	1658	38750	38750
$1.59 \cdot 10^4$	605	18060	1176	26410	26410
$2.51 \cdot 10^4$	354	13630	874	18420	18420
$3.98 \cdot 10^4$	216	11010	682	13270	13270
$6.31 \cdot 10^4$	138	9324	556	9906	9906
$1.00 \cdot 10^5$	93	8089	472	7652	7652

PERMITTIVITÉ RELATIVE [GLG96a]					
FRÉQUENCE	SANG	INTESTIN	RATE	VEINES	VESSIE
$1.00 \cdot 10^1$	5260	20510000	43300000	10000000	10000000
$1.59 \cdot 10^1$	5260	11890000	35860000	9854000	9854000
$2.51 \cdot 10^1$	5260	5974000	25080000	9504000	9504000
$3.98 \cdot 10^1$	5260	2870000	14330000	8729000	8729000
$6.31 \cdot 10^1$	5260	1469000	6970000	7247000	7247000
$1.00 \cdot 10^2$	5260	873100	3117000	5092000	5092000
$1.59 \cdot 10^2$	5260	617100	1378000	2936000	2936000
$2.51 \cdot 10^2$	5260	492700	636700	1451000	1451000
$3.98 \cdot 10^2$	5259	411700	320800	668600	668600
$6.31 \cdot 10^2$	5259	338500	178200	308700	308700
$1.00 \cdot 10^3$	5259	264000	106800	149000	149000
$1.59 \cdot 10^3$	5258	193300	67120	76050	76050
$2.51 \cdot 10^3$	5257	134300	43420	40630	40630
$3.98 \cdot 10^3$	5255	90940	28820	22520	22520
$6.31 \cdot 10^3$	5252	61760	19680	12930	12930
$1.00 \cdot 10^4$	5248	43050	13890	7691	7691
$1.59 \cdot 10^4$	5241	31280	10160	4743	4743
$2.51 \cdot 10^4$	5230	23860	7720	3026	3026
$3.98 \cdot 10^4$	5212	19110	6092	1990	1990
$6.31 \cdot 10^4$	5179	15990	4987	1344	1344
$1.00 \cdot 10^5$	5120	13850	4222	930	930

Bibliographie

- [ABIM00] G. Ala, P. Buccheri, M. Inzerillo, and S. Mangione. Shielding effects of buildings on HV electric field human exposure. *COMPEL*, 19(2) :683–691, 2000.
- [Arn01] C. Arnoux. Détermination des courants induits dans le corps humain situé à proximité d’une ligne de transport électrique. Travail de fin d’étude (tfe), Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [Ban96] R. Bancroft. *Understanding electromagnetic scattering using the moment method : a practical approach*. Artech House, Boston (USA), 1996.
- [BBB02] M. Bencsik, R. Bowtell, and R.M. Bowley. Electric fields induced in a spherical volume conductor by temporally varying magnetic field gradients. *Physics in Medicine and Biology*, 47 :557–576, 2002.
- [BBC⁺94] R. Barrett, M. Berry, T. Chan, J. Demmel, J.M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van des Vorst. *Templates for the solution of linear systems : building blocks for iterative methods*. SIAM, Philadelphia, PA (USA), 1994. Disponible gratuitement sur le site www.netlib.org/templates/Templates.html.
- [BBE03] BBEMG. Electricité et santé. <http://www.bbemg.ulg.ac.be/indexfr.htm>, (2003).
- [BBG98] N. Burais, P. Baraton, and J.Y. Gaspard. Modélisation numérique des courants induits dans le corps humain par des dispositifs électromagnétiques dans la gamme des fréquences intermédiaires. In *Proceedings du 9^{ème} colloque international sur la Compatibilité Electromagnétique*, Brest (France), Juin 1998.
- [BBH⁺95] M.B. Bracken, K. Belanger, K. Hellendrand, L. Duglosz, T.R. Holford, J.E. McSharry, K. Addesso, and B. Leaderer. Exposure to electromagnetic fields during pregnancy with emphasis on electrically heated beds : association with birthweight and intrauterine growth. *Epidemiol.*, 6 :263–270, 1995.
- [Ber85] J.H. Bernhardt. *The impact of proposed radio-frequency radiation standards on military operations*, chapter Evaluation of human exposures to low frequency fields, pages 8–1 to 8–18. Number 138 in AGARD Lecture Series. NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development (AGARD), 7 rue Ancelle, 92200 Neuilly sur Seine (France), 1985.
- [Ber92] J.H. Bernhardt. Basic criteria on ELF standards : worldwide achievements in public and occupational health protection against ra-

- diation. In International Radiation Protection Association, editor, *Proceedings of the Eighth International Congress of the IRPA*, pages 933–936, Geneva (Suisse), 1992. International Radiation Protection Association.
- [BLT94] K.J. Binns, P.J. Lawrenson, and C.W. Trowbridge. *The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields*, chapter 8, pages 227–231. John Wiley & sons, Chichester (UK), 1994.
- [Bos] A. Bossavit. Modèles et modélisation en électrotechnique. Techniques de l’Ingénieur, traité Génie Électrique [E 1 207].
- [BPA87] C.V. Byus, S.E. Pieper, and W.R. Adey. The effects of low-energy 60 Hz environmental electromagnetic fields upon the growth-related enzyme ornithine decarboxylase. *Carcinogenesis*, 8 :1385–1389, 1987.
- [Cat01] M. Cattaneo. Elettrosmog tra lettere e proclami. *Le Scienze*, 393 :20–23, mai 2001.
- [CCL86] K.M. Chen, H.R. Chuang, and C.J. Lin. Quantification of interaction between ELF-LF electric fields and human bodies. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 33(8) :1273–1276, 1986.
- [CDDS02] K. Caputa, P.J. Dimbylow, T.W. Dawson, and M.A. Stuchly. Modelling fields induced in humans by 50/60 Hz magnetic fields : reliability of the results and effects of model variations. *Physics in Medicine and Biology*, 47 :1391–1398, 2002.
- [CED] CEDRAT. 2D/3D FEM software products developed by INPG/LEG and CEDRAT.
- [CGCG92] M.R. Cook, C. Graham, H.D. Cohen, and M.M. Gerkovich. A replication study of human exposure to 60-Hz fields : effects on neurobehavioural measures. *Bioelectromagnetics*, 13 :261–285, 1992.
- [Cha01] O. Chadebec. *Modélisation du champ magnétique induit par des tôles : identification de l’aimantation*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Grenoble, Juin 2001.
- [CIY⁺84] A. Chiba, K. Isaka, Y. Yokoi, M. Nagata, M. Kitagawa, and T. Matsuo. Application of finite element method to analysis of induced current densities inside human model exposed to 60-hz electric field. *IEEE Trans. Paw. App. Sys.*, 103(7) :1895–1902, 1984.
- [CP03] J.L. Cocquerelle and C. Pasquier. *Rayonnement électromagnétique des convertisseurs à découpage*. EDP sciences, Les Ulis (France), 2003.
- [CRC02] O. Chadebec, L.L. Rouve, and J.L. Coulomb. New methods for a fast and easy computation of stray fields created by wound rods. *IEEE Trans. Mag.*, 38(2) :517–520, March 2002.
- [CW01] M. Clemens and T. Weiland. Discrete electromagnetics : Maxwell’s equation tailored to numerical simulations. *ICS Newsletters*, 8(2), July 2001.
- [Dav03] K. Davey. Working field theory problems with random walks. In *Proceedings of 14th COMPUMAG Conference*, Saratoga Springs, NY (USA), July 2003.

- [DCS98] T.W. Dawson, K. Capita, and M.A. Stuchly. Hight-resolution or-dan dosimetry for human exposure to low-frequency electric fields. *IEEE Trans. Pow. Del.*, 13(2) :366–373, 1998.
- [DCS99] T.W. Dawson, K. Caputa, and M.A. Stuchly. Organ dosimetry for human exposure to non-uniform 60-Hz magnetic fields. *IEEE Trans. Pow. Del.*, 14(4) :1234–1239, October 1999.
- [DCS02] T.W. Dawson, K. Caputa, and M.A. Stuchly. Magnetic field expo-sures for UK live-line workers. *Physics in Medicinde and Biology*, 47 :995–1012, 2002.
- [Dem99] R.J. Demeure. Physique IRM-IRM d’aujourd’hui et de demain. *Louvain Med.*, 118 :107–113, 1999.
- [DG85] J.F. Deford and OM.P. Gandhi. An impedance method to calcu-late currents induced in biological bodies exposed to quasi-static electromagnetic fields. *IEEE Trans. EMC*, 27(3) :168–173, August 1985.
- [Dur64] E. Durand. *Electrostatique*, volume 1. Masson, Paris (France), 1964.
- [Dur68] E. Durand. *Magnétostatique*. Masson, Paris (France), 1968.
- [E95] ENV50166-1 and 2. Exposition humaine aux champs magnétiques hautes fréquences (0 – 10 khz et 10 khz – 300 ghz), 1995.
- [Far93] S.J. Farlow. *Partial differential equations for scientists and engi-neers*. Dover, New York (USA), 1993.
- [FG99] P.J. Frey and P.L. George. *Maillages : applications aux éléments finis*. Hermes, Paris (France), 1999.
- [Fin72] B.A. Finlayson. *The method of weighted residuals and variational principles*. Academic Press, New York (USA), 1972.
- [Fot99] T. Foti. Norme per la tutela dall’ inquinamento elettromagnetico. Progetto di legge N. 4036, 1999.
- [FPS⁺93] B. Floderus, T. Persson, C. Stenlund, A. Wennberg, A. Ost, and Knave B. Occupational exposure to electromagnetic fields in rela-tion to leukemia and brain tumors : a case control study in Sweden. *Cancer Causes and Control*, 4 :465–476, 1993.
- [Gar81] F. Gardiol. *Electromagnétisme*, volume III of *Traité d’Electricité*. Ed. Georgi, St Saphorin (Suisse), 1981.
- [GBD00] J.Y. Gaspard, N. Burais, and F. Deschamps. Exposition des per-sonnes aux champs électromagnétiques : de nouvelles contraintes pour l’industrie électrique. In *Proceedings du 10^{ème} colloque inter-national sur la Compatibilité Electromagnétique*, Clermont-Ferrand (France), Mars 2000.
- [GBR⁺99] F. Gustrau, A. Bahr, M. Rittweger, S. Goltz, and S. Eggert. Simu-lation of induced current densities in the human body at industrial induction heating frequencies. *IEEE Trans. EMC*, 41(4) :480–486, November 1999.
- [GCR⁺96] C. Graham, M.R. Cook, D.W. Riffle, M.M. Gerkovich, and H.D. Cohen. Nocturnal melatonin levels in human vounteers exposed to intermittent 60 Hz magnetic fields. *Bioelectromagnetics*, 17 :263–273, 1996.

- [GCR97] C. Graham, M.R. Cook, and D.W. Riffle. Nocturnal melatonin levels during continuous magnetic field exposure. *Bioelectromagnetics*, 18 :166–171, 1997.
- [GGC96] C. Gabriel, S. Gabriel, and E. Corthout. The dielectric properties of biological tissues : I. litterature. *Physics in Medicine & Biology*, 41 :2231–2249, 1996.
- [GLG96a] C. Gabriel, R.W. Lau, and S. Gabriel. The dielectric properties of biological tissues : II. measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz. *Physics in Medicine & Biology*, 41 :2251–2269, 1996.
- [GLG96b] C. Gabriel, R.W. Lau, and S. Gabriel. The dielectric properties of biological tissues : III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in Medicine & Biology*, 41 :2271–2293, 1996.
- [Gol89] D.E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization et machine learning*. Addison-Wesley, Boston, MA (USA), 1989.
- [Gre95] E. Greifenstein. *Calcul du champ de Biot et Savart dû à des conducteurs massifs*. Diplome de d.e.a., Ecole Centrale de Lyon, 1995.
- [G.U92] G.U. Limiti massimi di esposizione ai campi elettrico e mangetico generati alla frequenza industriale nominale (50 hz) negli ambienti abitativi e nell’ambiente esterno. *Gazzetta Ufficiale*, 104, 6 mai 1992.
- [G.U98] G.U. Regolamento recante norme per la determinazione dei tetti di radiofrequenza compatibili con la salute umana. *Gazzetta Ufficiale*, 257, 3 novembre 1998.
- [G.U99] G.U.C.E.N. Recommandation du Conseil, du 12 juillet 1999, relative à la limitation de l’exposition du public aux champs électromagnétiques (de 0 Hz à 300 GHz). *Journal Officiel du Conseil de l’Union Européenne*, 199 :59–70, juillet 1999.
- [G.U01] G.U. Legge quadro sulla protezione delle esposizioni a campi elettrici, magnetici ed elettromagnetici. *Gazzetta Ufficiale*, 36, 22 février 2001.
- [Had23] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, 1923.
- [HITY95] N. Hayashi, K. Isaka, H. Tarao, and Y. Yokoi. Numerical calculation of induced electric field and currents on simple models of multi-medium biological systems using the impedance method. In *Proceedings of the 9th ISH Symposium*, pages 8355–1 :4, Graz (Austria), August 28 - September 1 1995.
- [HO93] C. Hansen and D. O’Leary. The use ot the L-curve in regularization of discrete ill-posed problems. *J. Sci. Computat.*, 14 :1487–1503, 1993.
- [Hol75] J.H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. Michigan Press University, Ann Arbor, MI (USA), 1975.

- [Hug87] T.J.R. Hughes. *The finite element method (linear static and dynamic finite element analysis)*. Dover, Mineola, NY (USA), 1987.
- [Hun01] P. Hunter. FEM/BEM notes. Disponible gratuitement à l'adresse <http://www1.esc.auckland.ac.nz/Academic/Texts/fembemnotes.pdf>, 2001.
- [ICN98] ICNIRP. Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz). *Health Phys.*, 74(4) :494–552, 1998.
- [IEE87] IEEE. IEEE standard digital interface for programmable instrumentation. IEEE std 488.1-1987, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1987.
- [IEE99] IEEE. IEEE standard for safety levels with respect to human exposure to radio frequency electromagnetic fields, 3 kHz to 300 GHz. IEEE std c95.1, 1999 edition, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1999.
- [IMBS90] J.F. Imhoff, G. Meunier, X. Brunotte, and J.C. Sabonnadière. An original solution for unbounded electromagnetic 2D- and 3D- problems throughout the finite element method. *IEEE Trans. Mag.*, 26(5) :1659–1661, September 1990.
- [INI94] INIRC. Visual display units : radiation protection guidance. Occupational safety and health series No. 70, International Labour Office, Geneva (Suisse), 1994.
- [INR95] INRS. Champs électriques, champs magnétiques, ondes électromagnétiques (guide à l'usage du médecin du travail et du préventeur. ED 785, Paris, 1995.
- [Kat44] S. Katatuni. Two dimensional brownian motion and harmonic functions. *Proceedings of the Imperial Academy of Japan*, XX(9) :706–714, November 1944.
- [Leg96] M. Legris. *Identification de l'état magnétique d'un système ferromagnétique à partir de mesures du champ proche*. PhD thesis, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG), 1996.
- [LHK⁺97] M.S. Linet, E.E. Hatch, R.A. Kleinerman, L.L. Robinson, W.T. Kaune, D.R. Friedman, R.K. Severson, C.M. Haines, C.T. Hartsock, S. Niwa, S. Wacholder, and R.E. Tarone. Residential exposure to magnetic fields and acute lymphoblastic leukemia in children. *New Eng. J. Med.*, 337 :1–7, 1997.
- [Lor01] J. Lorange. *Couplage des inductances par rayonnement magnétique. Etude théorique et expérimentale*. PhD thesis, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG), 2001.
- [LRWW98] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, and P.E. Wright. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex algorithm in low dimensions. *SIAM J. Optimization*, 9(1) :112–147, 1998.
- [LTB⁺91] S.J. London, D.C. Thomas, J.D. Bowman, E. Soble, T.C. Cheng, and J.M. Peters. Exposure to residential electric and magnetic fields and risk of childhood leukemia. *Am. J. Epidemiol.*, 86 :923–937, 1991.

- [Lyo94] C.E. Lyon. *Modeling of magnetic fields generated by low frequency sources using multipole techniques*. Ph.d. thesis, Washington State University - School of EECS, Pullman, WA (USA), 1994.
- [Mil82] S.Jr. Milham. Mortality from leukemia in workers exposed to electrical and magnetic fields. *New. Engl. J. Med.*, 307, 1982.
- [ML95] J. Max and J.L. Lacoume. *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod, Paris, 5^{ème} edition, 1995.
- [MLC87] S. Marsili-Libelli and M. Castelli. An adaptative search algorithm for numerical optimization. *Appl. Math. Comp.*, 23 :341–357, 1987.
- [MMP01] P.A. Mason, M.R. Murphy, and R.C. Petersen. IEEE EMF health & safety standards. In *Proceedings of the Asian and Oceanian Regional EMF Scientific Meeting*, 2001.
- [MNB⁺93] G.A. Mouchawar, J.A. Nyenhuis, J.D. Bourland, L.A. Geddes, D.J. Schaefer, and M.E. Riehl. Magnetic stimulation of excitable tissue : calculation of induced eddy-currents with a three-dimensional finite-element model. *IEEE Trans. Mag.*, 29(6) :3355–3357, November 1993.
- [MPPS02] A. Moraru, A. Panaitescu, I. Panaitescu, and A. Soci. Magnetic field around the aluminium electrolysis cells. *COMPEL*, 21(4) :615–623, 2002.
- [MSM⁺91] J. McLean, M.A. Stuchly, R.E. Mitcher, D. Wilkinson, H. Yang, M. Goddard, D.W. Lecuyer, M. Schunk, E. Callary, and D. Morrison. Cancer promotion in a mouse-skin model by a 60-Hz magnetic field : II. tumor development and immune response. *Bioelectromagnetics*, 12 :273–287, 1991.
- [MT76] J.E. Marsden and A.J. Tromba. *Vector calculus*, chapter 7, pages 451–466. W.H. Freeman and company, New-York (USA), 2^{ème} edition, 1976.
- [NAS96] NAS. Possible health effects of exposure to residential electric and magnetic fields. Technical report, U.S. National Academy of Science / National Research Council, Washington, D.C. (USA), 1996.
- [NB92] Ida ; N. and J.P.A. Bastos. *Electromagnetics and calculation of fields*. Springer-Verlag, New York (USA), 1992.
- [NBP⁺03] L. Nicolas, N. Burais, C. Poignard, R. Scorretti, and N. Siauue. Interactions between electromagnetic fields and biological tissues : questions, answers and future trends. *ICS Newsletter*, 10(2) :4–9, July 2003.
- [NIE99] NIEHS. Health effects from exposure to power-line frequency electric and magnetic fields. Niehs report, National Institute of Environmental Health Sciences (NIEHS)/ National Institutes of Health (NIH), P.O. Box 12233 Research Triangle Park, NC 27709, 1999.
- [NIE02] NIEHS. EMF associated with the use of electric power : questions and answers. disponible sur le site [http ://www.niehs.nih.gov/emfrapid](http://www.niehs.nih.gov/emfrapid), June 2002.
- [NM65] J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7 :308–313, 1965.

- [NRP92] NRPB. Electromagnetic fields and the risk of cancer. report of an Advisory Group on Non-ionising Radiation. NRPB Document 3(1), National Radiological Protection Board, Chilton (UK), 1992.
- [NRP4a] NRPB. Health effects related to the use of visual display units. report by the Advisory Group on Non-ionising Radiation. NRPB Document 5(2), National Radiological Protection Board, Chilton (UK), 1994a.
- [OS75] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Digital signal processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (USA), 1975.
- [Pis82] S. Pissanetzky. Solution of three-dimensional, anisotropic, non-linear problem of magnetostatics using two potentials, finite and infinite multipolar elements and automatic mesh generation. *IEEE Trans. Mag.*, 18(2) :346–350, 1982.
- [PMPY+88] S. Preston-Martin, J.M. Peters, M. Yu, D.H. Garabrant, and J.D Bowman. Myelogenous leukemia and electric blanket use. *Bioelectromagnetism*, 9 :207–213, 1988.
- [PTVF92] H.W. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New-York (USA), second edition, 1992.
- [Pus91] C. Pusterle. *Analyse vectorielle des champs : méthodes pour la physique*. Masson, Paris (France), 1991.
- [Rei89] J.P. Reilly. Peripheral nerve stimulation by induced electric currents : exposure to time-varying magnetic fields. *Med. Biol. Eng. Computing*, 3 :101–109, 1989.
- [Rip01] P. Ripka. *Magnetic sensors and magnetometer*. Artech house, Norwood, MA (USA), 2001.
- [RK00] H.O. Rouß and U. Kampet. Numerical calculation of current densities induced in the human body caused by low frequency inhomogeneous magnetic sources. In *Verfahren der Kleinheubacher Tagung*, September 2000.
- [RMRW92] W. Renhart, C.A. Magele, K.R. Richter, and R. Wach, P. Stollberger. Application of eddy current formulations to magnetic resonance imaging. *IEEE Trans. Mag.*, 28(2) :1517–1520, March 1992.
- [SBM03] R. Scorretti, N. Burais, and J.P. Masson. Study of the magnetic field surrounding electrical devices for computation of induced currents in the human body. Submitted to International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2003.
- [SC] J.C. Sabonnadière and J.L. Coulomb. Calcul des champs électromagnétiques. Techniques de l'Ingénieur, traité Génie Électrique [D 3 020].
- [Sch66] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris (France), 1966.
- [SDT+92] R.G. Stevens, S. Davis, D.B. Thomas, L.E. Anderson, and B.W. Wilson. Electric power, pineal function and the risk of breast cancer. *The FASEB Journal*, 6 :853–860, 1992.

- [Sia02] N. Siauve. *Modélisation par éléments finis des phénomènes électromagnétiques en hyperthermie et optimisation des applicateurs*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, Ecully (France), 2002.
- [Sin97] G. Sinigaglia. *Le onde radio e la salute*. C&C Edizioni Radioelettroniche, Faenza (Italia), 2 edition, 1997.
- [SJK90] D.A. Savitz, E.M. John, and R.C. Kleckner. Magnetic field exposure from electric appliances and childhood cancer. *Am. J. Epidemiol.*, 131 :763–773, 1990.
- [SK01] S. Salon and O.M. Kwon. External fields of permanent magnet motors. In *Proceedings of 13th COMPUMAG Conference*, volume III, pages 58–59, Evian (France), July 2001.
- [SL95] D.A. Savitz and D.P. Loomis. Magnetic field exposure in relation to leukemia and brain cancer mortality among electric utility workers. *Am. J. Epidemiol.*, 141 :123–134, 1995.
- [SL99] M.R. Spiegel and J. Liu. *Formules et tables de mathématique*. Schaum's. McGraw-Hill, London (UK), 2^{ème} edition, 1999.
- [SLT97] B. Selmaoui, J. Lambrozo, and Y. Touitou. Magnetic fields and pineal functions in humans : evaluation of nocturnal acute exposure to extremely low frequency magnetic fields on serum melatonin and urinary 6-sulfatoxymelatonin circadian rhythms. *Life Sci.*, 58 :1539–1549, 1997.
- [Sof00] Template Graphics Software. AMIRA, 1999-2000.
- [SS89] T. Soderstrom and P. Stoica. *System identification*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (USA), 1989.
- [SSB⁺03] N. Siauve, R. Scorretti, N. Burais, L. Nicolas, and A. Nicolas. Electromagnetic fields and human body : a new challenge for the electromagnetic computation. *COMPEL*, 22(3) :457–469, 2003.
- [Ste87] R.G. Stevens. Electric power use and breast cancer : a hypothesis. *Am. J. Epidemiol.*, 125 :556–561, 1987.
- [STNB03] R. Scorretti, R. Takahashi, L. Nicolas, and N. Burais. Optimal characterisation of LF magnetic field using multipoles. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Electric and Magnetic Fields*, Aachen (DE), October 2003.
- [SZ96] M.A. Stuchly and S. Zhao. Magnetic field-induced currents in the human body in proximity of power lines. *IEEE Trans. Pow. Del.*, 11(1) :102–108, January 1996.
- [TA76] A. Tikhonov and V. Arsénine. *Méthode de résolution des problèmes mal posés*. Editions MIR, Moscou (USSR), 1976.
- [Tak03] R. Takahashi. Notas de aula de otimização multiobjetivo. Disponible gratuitement sur le site [http ://www.mat.ufmg.br/~taka](http://www.mat.ufmg.br/~taka), (2003).
- [Ten96] T.S. Tenforde. *Interaction of ELF magnetic fields with living systems*, pages 185–230. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

- [TGM⁺94] G. Thériault, M. Goldberg, A.B. Miller, B. Armstrong, P. Guénel, J. Deadman, E. Imbernon, T. To, A. Chevalier, D. Cyr, and C. Wall. Cancer risks associated with occupational exposure to magnetic fields among electric utility workers in Ontario and Quebec, Canada and France - 1970-1989. *Am. J. Epidemiol.*, 139 :550–572, 1994.
- [TH00] A. Taflové and S.C. Hagness. *Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method*. Artech House, Boston (USA), 2^{ème} édition, 2000.
- [Ton01] E. Tonti. Finite formulation of electromagnetic field. *ICS Newsletters*, 8(1), March 2001.
- [Vog02] C.R. Vogel. *Computational methods for inverse problems*. SIAM, 2002.
- [WE94] W. Wang and S.R. Eisenberg. A three-dimensional finite element method for computing magnetically induced currents in tissues. *IEEE Trans. Mag.*, 30(6) :5015–5023, 1994.
- [Wei77] T. Weiland. A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields. *Electronics and communications (AEÜ)*, 31 :116 ff., 1977.
- [WL79] N. Wertheimer and E. Leeper. Electrical wiring configurations and childhood cancer. *Am. J. Epidemiol.*, 109 :273–284, 1979.
- [WL90] J. Walleczek and R.P. Liburdy. Non-thermal 60 Hz sinusoidal magnetic field exposure enhances $^{45}\text{Ca}^{2+}$ uptake in rat thymocytes : dependence on mitogen activation. *FEBS Letters*, 271 :157–160, 1990.
- [WRa] Wolfram-Research. Legendre polynomial. Disponible gratuitement sur le site mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html.
- [WRb] Wolfram-Research. Spherical coordinates. Disponible gratuitement sur le site mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html.
- [WRc] Wolfram-Research. Spherical harmonic. Disponible gratuitement sur le site mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html.
- [XS94] W. Xi and M.A. Stuchly. High spatial resolution analysis of electric currents induced in men by ELF magnetic fields. *Appl. Comput. Electromagn. Soc. J.*, 9 :127–134, 1994.
- [YK01] K. Yamazaki and T. Kawamoto. Simple estimation of equivalent magnetic dipole moment to characterize ELF magnetic fields generated by electrical appliances incorporating harmonics. *IEEE Trans. EMC*, 43(2) :240–245, May 2001.
- [ZSV97] L.E. Zaffanella, T.P. Sullivan, and I. Visintainer. Magnetic field characterization of electrical appliances as point sources through in situ measurements. *IEEE Trans. Pow. Del.*, 12(1) :443–450, January 1997.

Titre : Caractérisation numérique et expérimentale du champ magnétique B.F. généré par des systèmes électrotechniques en vue de la modélisation des courants induits dans le corps humain

Mots clés : Champ magnétiques B.F., exposition humaine, champs de fuite, modélisation, source équivalente, problème inverse, éléments finis.

Résumé :

Ce travail de thèse est consacré au développement de modèles et outils numériques permettant la simulation dans la gamme des fréquences 50 Hz – 100 kHz des phénomènes induits par des champs magnétiques dans le corps humain. Pour cela, il existe deux problématiques principales :

- Déterminer la répartition du champ rayonné (ou champ de fuite) par un appareil électrique .
- Calculer les courants induits qui en résultent dans le corps humain.

Après avoir étudié l'influence de divers paramètres sur la répartition des champs de fuite générés par les systèmes électrotechniques, nous avons recensé les méthodes numériques aptes à calculer ce champ pour des systèmes connus. Cette étude montre que ces méthodes en l'état ne sont pas adaptées au calcul des champs dans l'air, car trop coûteuses. Nous présentons donc un modèle 3D ne prenant en compte que les aspects essentiels de la géométrie du système, beaucoup moins coûteux et suffisamment précis. Dans ce modèle, le champ de fuites est calculé à partir d'une représentation en termes de charges magnétiques fictives. Ce modèle a été validé sur des structures géométriques simples, de type bobine + circuit magnétique + entrefer.

L'exposition aux champs en milieu industriel ou domestique est également due à des sources dont la structure est inconnue. Nous avons donc développé un système expérimental, permettant de caractériser le champ de fuites à partir d'un nombre minimum de mesures localisées. Pour cela, nous avons développé divers modèles de la source rayonnante s'appuyant sur les notions de dipôle et multipôles. Nous nous sommes consacrés au divers problèmes d'estimation (influence du choix des mesures, prise en compte du bruit). Le problème étant mal conditionné, des techniques de régularisation ont été mises en œuvre. La faisabilité a été démontrée sur des structures rayonnantes simples.

Enfin, nous présentons une formulation 3D adaptée pour calculer les courants induits dans le corps humain, à partir de la connaissance des champs de fuites. Cette formulation a été implémentée dans un code aux éléments finis, dans lequel le domaine de résolution est limité au seul corps humain : ce code permet de modéliser des structures anatomiques réalistes où les valeurs des conductivités des divers organes sont prises en compte.

Différentes situations d'exposition du corps aux rayonnements issus de sources simples filaires, et à des sources réelles ont pu être ainsi simulées, et les applications notamment dans des contextes normatif et industriel sont particulièrement importantes.

Direction de recherche :

M. Jean-Pierre Masson, Professeur
CEntre de Génie Electrique de LYon (CEGELY), UMR - CNRS 5005
Université Claude Bernard Lyon I - bât. Omega
43 boul. du XI Novembre 1918, 69622 Villeurbanne CEDEX, France

M. Noël Burais, Maître de Conférence
CEntre de Génie Electrique de LYon (CEGELY), UMR - CNRS 5005
Ecole Centrale de Lyon
36 av. Guy de Collongue, 69134 Ecully CEDEX, France

Contact : rscorret@conmet.it