



Transport et cohérence quantique dans les nanocircuits hybrides supraconducteur-métal

Pierre Charlat

► To cite this version:

Pierre Charlat. Transport et cohérence quantique dans les nanocircuits hybrides supraconducteur-métal. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00140666

HAL Id: tel-00140666

<https://theses.hal.science/tel-00140666>

Submitted on 9 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par :

Pierre CHARLAT

Pour obtenir le grade de Docteur
de l'Université Joseph Fourier Grenoble I
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)
(Spécialité : Physique)

Transport et cohérence quantique dans les nanocircuits hybrides supraconducteur- métal

Soutenance le 23 septembre 1997

Composition du Jury :

B. CASTAING	
T. MARTIN	Rapporteur
M. SANQUER	Rapporteur
H.J. DROUHIN	
P. PANIEZ	
B. PANNETIER	

Thèse préparée au sein du
Centre de Recherches sur les Très Basses Températures,
laboratoire associé à l'Université Joseph Fourier
C.N.R.S., 25 avenue des Martyrs, BP 166, 38042 Grenoble-Cedex 9

CHAPITRE 1

Théorie

Lorsque l'on met en contact un métal normal avec un supraconducteur, la supraconductivité modifie certaines propriétés du métal normal. Dans ce chapitre, nous étudions dans un premier temps quelles sont les propriétés du métal normal qui sont affectées par la présence de supraconductivité. Pour cela, nous nous placerons dans le cas très simple où le métal normal est dans la limite balistique, c'est-à-dire où les électrons parcourent librement le métal normal. Ceci permettra de définir des schémas de représentation qui resteront utiles dans tout le travail de thèse. Nous aborderons ensuite l'étude de ces propriétés dans le cadre d'autres théories que nous aurons le souci de présenter selon les mêmes schémas de représentation. Nous verrons que la théorie des fonctions de Green quasiclassiques, présentée au paragraphe 3, est très puissante en particulier pour décrire le cas du régime diffusif.

Le régime diffusif correspond au cas où chaque particule change de direction au bout du libre parcours élastique l_e après un choc élastique sur une impureté, et parcourt l'échantillon suivant un processus de diffusion de coefficient de diffusion $D = \frac{1}{3} v_F l_e$ (le $1/3$ pour une diffusion tridimensionnelle, c'est-à-dire si l_e est plus petit que, par exemple, la largeur des fils.). v_F est la vitesse de Fermi. Tous les échantillons étudiés au cours de ce travail sont dans cette limite diffusive, avec typiquement $l_e \approx 10$ nm, contre une longueur de l'échantillon L de l'ordre de $1 \mu\text{m}$. Ainsi, un phénomène ayant lieu sur une durée t , associée à une énergie $\varepsilon = \hbar / t$, aura pour longueur caractéristique la longueur parcourue par les particules pendant le temps $l = \sqrt{Dt}$, (ou $l = v_F t$ en limite balistique). On définit ainsi la longueur L_ε , associée à chaque énergie :

$$L_\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar D}{\varepsilon}} \quad (1.0.1)$$

A la température T , l'énergie moyenne des quasiparticules dans le système est de l'ordre de kT . Ainsi, lorsque l'on étudie des phénomènes faisant intervenir une intégration sur toutes ces

quasiparticules, apparaît la longueur thermique L_T :

$$L_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{2\pi k_B T}} \quad (1.0.2)$$

Par exemple, l'amplitude de paires décroît exponentiellement sur cette longueur, qui vaudra typiquement $0.1 \mu\text{m}$ à 1 K dans les échantillons étudiés.

La physique de ces systèmes se complique encore si l'on se rappelle que, suite par exemple à une collision sur une impureté magnétique, une particule perd la mémoire de sa phase au bout d'un temps caractéristique t_φ . Nous étudierons ici des systèmes où la longueur de l'échantillon est inférieure à L_φ , ou de l'ordre de L_φ . On aura dans la plupart des cas L_φ de l'ordre de 1 à quelques μm . Nous verrons que cette longueur fixe l'échelle pertinente des phénomènes mésoscopiques que nous étudierons. D'autres longueurs caractéristiques apparaîtront au cours du travail.

1. Métal normal au contact d'un supraconducteur

1.1. Equation de Bogoliubov-De Gennes.

La supraconductivité d'un métal est due à une attraction entre les électrons. Dans le cas où cette attraction est la même dans tout le volume de ce métal, la supraconductivité apparaît de manière identique en tout point du métal. Ce supraconducteur est alors décrit par la théorie de Bardeen, Cooper et Shrieffer [1-2] présentée en annexe. Lorsqu'un métal supraconducteur est mis en contact avec un métal normal, nous sommes au contraire dans la situation où l'attraction est nulle dans la portion de l'espace où se trouve le métal normal, alors qu'elle est non nulle dans la région où se trouve le supraconducteur. Pour tenir compte des variations spatiales du paramètre $\alpha(r)$ d'interaction, nous pouvons décrire le système par l'Hamiltonien suivant :

$$H_0 + H_{\text{int}} \quad (1.1.1)$$

où H_0 est l'Hamiltonien cinétique habituel décrivant le métal normal. H_{int} est un terme

qui décrit l'attraction qui dépend de l'espace, et sa transformée de Fourier, dans le cas où $\alpha(r)$ est constant, est le terme d'interaction de BCS donné en annexe.

On pose l'opérateur $\phi_{\uparrow}^+ = \psi_{\uparrow}^+$ et $\phi_{\downarrow}^+ = \psi_{\downarrow}^+$, ce dernier créant un trou. L'opérateur $\psi_{\sigma}^+(r)$ est l'opérateur de création d'un électron de spin σ au point r . Une approximation de champ moyen est faite en posant le paramètre d'ordre :

$$\Delta(r) = -\alpha(r) \langle \phi_{\downarrow}^+(r) \phi_{\uparrow}(r) \rangle \quad (1.1.2)$$

Le terme d'interaction est alors :

$$H_{\text{int}} = \int \Delta(r) \phi_{\uparrow}^+(r) \phi_{\downarrow}(r) dr + \int \Delta^*(r) \phi_{\downarrow}^+(r) \phi_{\uparrow}(r) dr \quad (1.1.3)$$

Les opérateurs $\phi_{\sigma}^+(r)$ que l'on a posé permettent que ce terme d'interaction conserve le nombre de particules. On obtient un Hamiltonien qui a la même forme que celui d'un ensemble de particules sans interaction qui vérifient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \varphi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_e \\ \varphi_h \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

où φ_e et φ_h sont les composantes électron et trou d'une fonction d'onde à deux composantes. μ est le potentiel chimique du supraconducteur. La matrice 2x2 est la même que celle que l'on doit diagonaliser pour exprimer le croisement de niveaux dans le cas BCS (annexe A1). Cette équation constitue l'équation de Bogoliubov-De Gennes. (BdG) [3]. C'est l'équivalent de l'équation de Schrödinger, dans laquelle la fonction d'onde n'a qu'une composante. Chaque solution dont la fréquence est reliée à l'énergie ε correspond à un état d'énergie ε .

1.1.1. Représentation du métal normal (N)

Le cas du métal normal est inclus dans l'équation de BdG (1.1.4). Il correspond simplement au cas où le paramètre d'interaction est nul, et où par conséquent le paramètre d'ordre Δ est nul. Les états propres sont alors des états où seule l'une des composantes φ_e ou φ_h est non nulle, et sont des ondes planes si les vecteurs d'ondes sont des "bons nombre quantiques". Ces ondes planes sont des électrons libres ou des "trous libres". Nous nous

trouvons ainsi naturellement dans une représentation du métal normal correspondant à la partie gauche de la figure 1.1.1, où les spins \uparrow sont représentés par une "branche d'électrons" et les spins \downarrow par une branche de trous d'énergie opposée. Les énergies sont repérées par rapport au potentiel chimique du supraconducteur. Cette représentation sera très utile dans toute la suite, car elle permettra en particulier de faire un rapprochement avec les équations d'Usadel. Si par exemple, nous représentons un métal normal qui a une différence de potentiel chimique μ_N avec le supraconducteur, et si nous nous plaçons à température nulle, alors, dans cette représentation, la branche des électrons est occupée jusqu'à μ_N , et la branche des trous est occupée jusqu'à $-\mu_N$. Nous décrirons ceci en disant que la distribution de la branche des trous est différente de celle de la branche des électrons. Si f est la fonction de Fermi-Dirac, on aura : $f_e(\varepsilon) = f(\varepsilon - \mu_N)$ dans la branche des électrons, et $f_h(\varepsilon) = f(\varepsilon + \mu_N)$ dans celle des trous. Nous écrirons toujours les potentiels chimiques par rapport à celui d'un supraconducteur.

1.1.2. Métal supraconducteur (S)

Si nous nous plaçons dans le cas d'un supraconducteur propre, et si nous cherchons des solutions à l'équation de BdG sous forme d'ondes planes $(\varphi_e e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}}, \varphi_h e^{i\mathbf{k}_h \cdot \mathbf{r}})$ d'énergie ε , alors $\mathbf{k}_e = \mathbf{k}_h$, et on obtient une relation de dispersion entre $\mathbf{k} = \mathbf{k}_e = \mathbf{k}_h$ et ε . Cette relation de dispersion correspond à un croisement de niveaux entre les branches d'électrons et de trous, exactement comme cela est illustré dans le cas de la théorie BCS exposée en annexe A1.

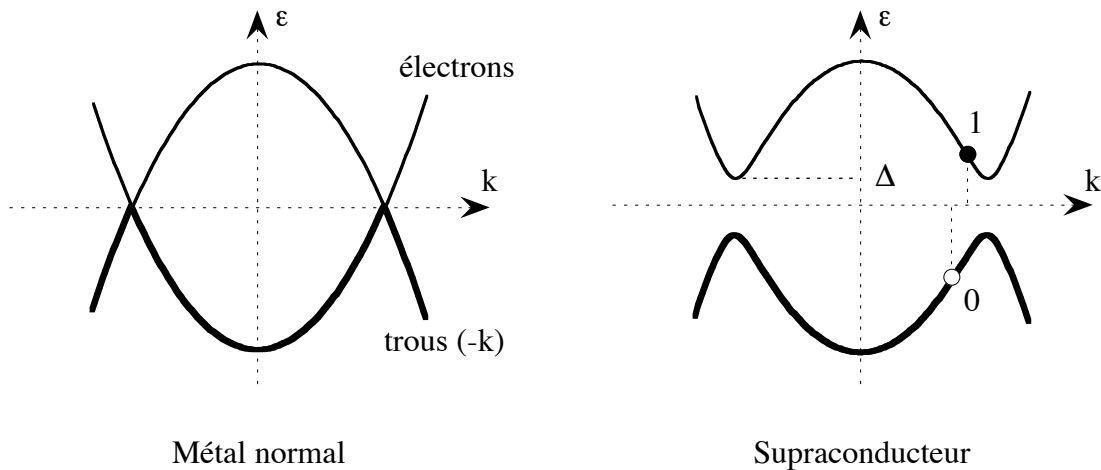


Figure 1.1.1 : A gauche, représentation d'un métal normal à l'aide d'une branche d'électrons et d'une branche de trous, dans laquelle les traits épais représentent les états occupés dans l'état fondamental. A droite, un croisement de niveaux se produit dans l'état supraconducteur, donnant lieu à l'ouverture d'un gap Δ . Deux excitations (0) et (1) du système sont représentées.

Les états propres du système sont, pour chaque valeur de k , deux mélanges d'états d'électrons et de trous, correspondant à des énergies opposées. Un gap s'ouvre entre les énergies $+\Delta$ et $-\Delta$. Les excitations (quasiparticules) du système correspondent soit à un état d'énergie positive occupé, soit à un état d'énergie négative vide. Elles sont représentées sur la figure 1.1.1.

Pour les énergies comprises entre $-\Delta$ et Δ , dans la relation de dispersion ci-dessus, il n'y a plus de k réel accessible, car l'énergie est inférieure au gap supraconducteur, mais la relation de dispersion possède encore une solution k imaginaire, qui correspond à une onde évanescente. La fonction d'onde s'évanouit donc à l'intérieur du supraconducteur, sur une longueur donnée par le vecteur d'onde issu de la relation de dispersion : $\hbar v_F / \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}$. Cette longueur est la même que la longueur ξ sur laquelle un électron évolue en trou dans un supraconducteur (annexe A1).

1.2. Réflexion d'Andréev

La réflexion d'Andréev [4] a été étudiée en particulier par Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) [5]. Pour la décrire, il faut regarder ce que devient une excitation dans le métal normal en présence d'une interface supraconductrice. La représentation proposée par BTK dans le métal normal est la représentation habituelle d'un métal normal avec une branche d'électrons seulement. Dans ce paragraphe, nous proposons plutôt la représentation du métal que nous avons décrite au paragraphe précédent, qui est naturellement impliquée par l'équation de BdG et qui permettra des comparaisons avec la théorie quasiclassique, ce qui n'est pas le cas de la représentation habituelle.

Intéressons-nous donc à une interface entre le métal normal N et le supraconducteur S que nous venons d'étudier. Pour une énergie donnée, les vecteurs propres (φ_e, φ_h) dans S ne sont pas les mêmes que dans N, et ceci va provoquer un phénomène de réflexion. Dans chaque demi-espace, la fonction d'onde d'énergie $\varepsilon < \Delta$ est la superposition des solutions possibles à cette énergie ε , soit quatre possibilités dans le métal normal, et deux seulement

dans le supraconducteur si l'on rejette les deux solutions qui croissent exponentiellement en y pénétrant. Les conditions à l'interface s'expriment comme d'habitude par la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée s'il n'y a pas de barrière de potentiel à cette interface (et un "saut" de dérivée s'il y en a une). On retrouve alors les coefficients de réflexion et de transmission pour une onde électronique incidente, calculés par BTK. Si l'énergie ε est inférieure au gap Δ , et si l'interface est parfaite, alors les probabilités de transmission sont nulles, la probabilité de réflexion spéculaire (où un électron incident est réfléchi comme électron) est nulle, et la probabilité de réflexion dans la branche opposée (un électron incident est réfléchi comme trou) est égale à 1. Cette réflexion constitue la réflexion d'Andréev. Plaçons nous dans le cas d'une interface parfaite en $x=0$ où cette réflexion se produit seule.

Notons $\begin{pmatrix} \varphi_e^+ \\ \varphi_h^+ \end{pmatrix}$ l'onde incidente : l'onde réfléchie $\begin{pmatrix} \varphi_e^- \\ \varphi_h^- \end{pmatrix}$ lui est liée par la relation ci-

dessous, obtenue à partir des conditions sur les ondes à l'interface :

$$\begin{pmatrix} \varphi_e^- \\ \varphi_h^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \exp[-i \arccos(\varepsilon / \Delta) + i\varphi] \\ \exp[-i \arccos(\varepsilon / \Delta) - i\varphi] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_e^+ \\ \varphi_h^+ \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

φ est la phase du paramètre d'ordre Δ . Le trou réfléchi emporte donc avec lui une information sur la phase du paramètre d'ordre supraconducteur. Si $\varepsilon \ll \Delta$, alors il existe un déphasage supplémentaire de $\pi/2$ entre l'électron et le trou. Ainsi, les phases de la fonction de l'électron incident et du trou réfléchi sont liées, ce qui va induire dans le métal normal les phénomènes de cohérence qui agiront en particulier sur le transport, qui est le sujet de ce travail.

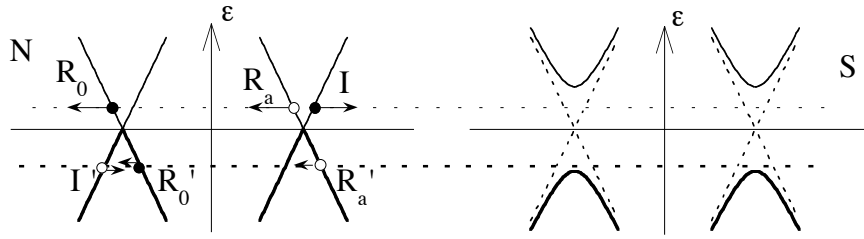


Figure 1.1.2. La réflexion d'Andréev : un électron incident (I) dans le métal normal (la flèche représente la vitesse de groupe) vient frapper l'interface NS. Il peut être réfléchi soit comme électron (R_0) s'il y a une barrière (réflexion spéculaire "habituelle") soit comme trou (R_a) dans la branche opposée (réflexion d'Andréev). Le dessin à $\epsilon < 0$ représente le même processus : la quasiparticule incidente (I') est un état vide dans la branche des trous de la "bande de valence" : c'est bien un électron.

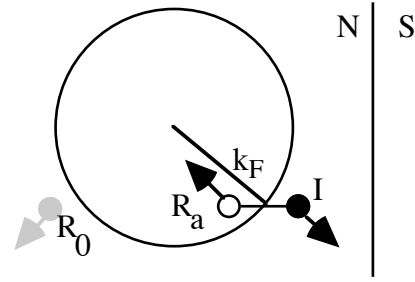
Différence des vecteurs d'onde

Si l'électron incident a un vecteur d'onde $\mathbf{k}_F + \mathbf{q} / 2$, où \mathbf{k}_F est un vecteur de Fermi et où \mathbf{q} est perpendiculaire à l'interface NS, alors le trou qui repart est associé au vecteur d'onde $\mathbf{k}_F - \mathbf{q} / 2$. Le trou réfléchi a un déphasage de $\pi/2$ (si $\epsilon \ll \Delta$) au contact de l'interface. La différence de vecteur d'onde \mathbf{q} entre l'électron et le trou crée un déphasage supplémentaire qui varie avec la distance à l'interface suivant une période égale à la longueur L_ϵ associée à l'énergie ϵ (Voir le paragraphe 1.4.). Dans le cas d'un milieu diffusif, ce déphasage supplémentaire fera disparaître la corrélation entre l'électron et le trou au bout d'un temps caractéristique \hbar / ϵ , donc sur une longueur de l'ordre de L_ϵ .

Une rétro-réflexion

Compliquons un tout petit peu le problème, en imaginant maintenant que l'électron incident n'arrive pas perpendiculairement à l'interface, c'est-à-dire par exemple que l'on rajoute une variable z au problème. Le processus est représenté sur la figure (1.1.3.).

Figure 1.1.3. L'espace à deux dimensions des vecteurs d'ondes est le plan de la feuille, l'interface N-S est verticale dans ce plan. le cercle est la surface de Fermi. La petite différence entre les vecteurs d'onde de l'électron incident et du trou réfléchi est perpendiculaire à l'interface. .



On peut imaginer que les énergies sont représentées sur une échelle perpendiculaire à la feuille pour se ramener exactement à la figure précédente (1.2.1) où l'on a rajouté une dimension dans l'espace des k du métal normal.

Les vitesses de groupe (flèches sur le schéma) de l'électron et du trou sont opposées ($k - k_F \ll k_F$) et donc la réflexion d'Andréev est une rétro-réflexion, contrairement à la réflexion spéculaire habituelle (en grisé).

"Transmission" d'Andréev

Pour des énergies supérieures au gap, les quasiparticules peuvent passer dans le supraconducteur. Il y a en plus une amplitude pour que ce passage se fasse avec changement de branche. Ainsi un électron peut être transmis en trou, et inversement, exactement comme pour la réflexion d'Andréev. On peut appeler ceci la transmission d'Andréev. Le calcul de BTK en donne les coefficients, et montre que la transmission d'Andréev est nulle en l'absence de barrière tunnel à l'interface. D'une manière générale, il faut que quelque chose renvoie le trou rétro-réfléchi dans le supraconducteur. Une barrière ou le désordre dans N peuvent jouer ce rôle.

1.3. Densité d'états

La réflexion d'Andréev agit sur les états dans le métal normal. En effet, en l'absence d'interface Normal-Supraconducteur (N-S), les états propres de N d'énergie ε sont au nombre de 4 : $(\varphi_e^-, 0)$ (électron provenant de $-\infty$), $(0, \varphi_h^-)$ et $(\varphi_e^+, 0)$, $(0, \varphi_h^+)$. Si on ajoute une telle interface, alors il n'y a que 2 états propres qui sont obligatoirement des combinaisons (électron incident trou réfléchi) ou (trou incident, électron réfléchi). Pour les retrouver, on écrit qu'ils vérifient obligatoirement l'équation (1.1.5). Ces états propres sont :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\exp\left[-i\left(\frac{\varepsilon}{\hbar v_F}\right)x\right]}{\exp\left[-i \arccos(\varepsilon / \Delta) - i\varphi + i\left(\frac{\varepsilon}{\hbar v_F}\right)x\right]} \right) \varphi_e e^{ik_F x} \text{ et symétrique } (\varphi_h) \quad (1.1.6)$$

Il y a donc deux fois moins d'états à l'énergie ε . Cela vient du fait qu'en "allumant" un paramètre d'ordre supraconducteur dans un demi-espace, on a retiré la moitié des états à cause de l'ouverture du gap, les états "provenant" du côté supraconducteur n'existant plus. Ces états ont été "renvoyés" à des énergies supérieures au gap.

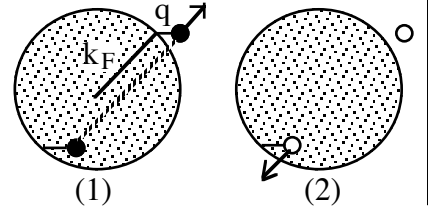
Partant d'un métal normal, si on "allume" un paramètre d'ordre supraconducteur dans un demi-espace $x > L/2$, alors on divise par deux la densité d'états sous le gap dans le métal normal. Allumons alors un deuxième paramètre d'ordre dans le demi-espace $\Delta < -L/2$. Il ne reste plus qu'un nombre fini d'états liés dans la partie restée normale, tous les états non liés ayant été rejetés au-dessus du gap.

1.4. Amplitude de paires

Paires électroniques dans le métal normal

Pour montrer que des paires électroniques se trouvent dans le métal normal, il peut être utile de retourner à la description la plus habituelle du métal normal. La réflexion d'Andréev peut alors être décrite de la manière suivante : un électron de vecteur d'onde $k_F + q/2$, au-dessus du niveau de Fermi, s'approche de l'interface. Pour pouvoir entrer dans le supraconducteur où les états sont absents à son énergie, il s'apparie avec un électron de vecteur d'onde $-k_F + q/2$, qui se trouve sous la surface de Fermi. Tous deux passent sous forme de paire dans le supraconducteur. Si on fait les comptes, après ce passage, il manque l'électron $-k_F + q/2$, qui est donc le trou rétro-réfléchi. De plus, le processus inverse de celui décrit ci-dessus est simplement le passage d'une paire $(k+q/2, -k+q/2)$ de S vers N. Ainsi, la réflexion d'Andréev est le passage de paires du supraconducteur vers le métal normal, ou inversement.

Figure 1.1.4. La sphère de Fermi dans le métal normal, pleine d'électrons est représentée en grisé. L'interface NS est verticale. La réflexion d'Andréev couple les états (1) où la paire $(k+q/2, -k+q/2)$ est occupée, et (2) où elle est vide. Les flèches représentent les vitesses de groupe.



Ce couplage entre les état (1) et (2) de la figure (1.1.3.) provient au total de l'existence d'une composante $\Delta(q)$ de vecteur d'onde q du paramètre d'ordre (voir annexe A1 où il est montré qu'une telle composante couple les états $(k+q/2, -k+q/2)$). Cette composante est rendue nécessaire car Δ n'est pas uniforme du fait de l'interface.

Une mesure des corrélations

La présence de ces paires dans ce métal normal induit une cohérence. Une mesure de cette cohérence est donnée par l'amplitude de paires F définie par :

$$F(r) = - \langle \phi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \phi_{\uparrow}(r) \rangle \quad (1.1.7)$$

On reconnaît (formule (1.1.2)) que le produit de l'amplitude de paires F avec le paramètre d'interaction donne le paramètre d'ordre. En l'absence d'interaction dans le métal normal, le paramètre d'ordre est nul, mais il existe tout de même une amplitude de paires. Chaque état contribue à l'amplitude de paires. Pour chaque état , on note f la quantité qui, multipliée par le facteur d'occupation de cet état, donne la contribution à l'amplitude de paires totale.

L'amplitude de paires due à chaque état est donnée par $-\langle \phi_{\downarrow}^{\dagger} \phi_{\uparrow} \rangle$ (de même qu'elle valait $-\langle a_{k\downarrow}^{\dagger} a_{k\uparrow} \rangle$ dans le cas de BCS, annexe A1). Elle vaut $-\varphi_h^* \varphi_e$ pour les états d'énergie ε , c'est-à-dire :

$$\exp[\mp i \arccos(\varepsilon / \Delta) + i\varphi] \exp\left[\pm 2i \left(\frac{\varepsilon}{\hbar v_F} \right) x\right] \quad (1.1.8)$$

(\pm pour les états correspondant à un électron ou un trou incident). Dans le cas où les états "électron incident" et "trou incident" ont la même distribution $f(\varepsilon)$ (ce qui est le cas à

l'équilibre, on définit alors $f(\varepsilon)$, voir annexe A1), alors l'amplitude de paires $f(\varepsilon)f(\varepsilon)$ vaut :

$$f(\varepsilon)\exp[i\varphi]\sin\left[-2\left(\frac{\varepsilon}{\hbar v_F}\right)x\right] \quad (1.1.9)$$

pour $|\varepsilon| \ll \Delta$. On obtient une variation périodique, qui est due à la légère différence de vecteur d'onde entre l'électron incident et le trou réfléchi. L'amplitude de paires atteint un maximum à la distance $\frac{\pi}{4}L_\varepsilon$, où $L_\varepsilon = \frac{\hbar v_F}{\varepsilon}$, alors qu'elle était nulle dans l'état normal. Cette longueur L_ε est celle qui a été discutée dans le paragraphe concernant les différentes longueurs. La contribution de l'énergie $|\varepsilon| \ll \Delta$ à l'amplitude de paires est nulle au contact du supraconducteur, à cause du déphasage de $\pi/2$ causé par la réflexion d'Andréev.

Bien sûr, si nous voulons l'amplitude de paires totale dans le métal normal, il ne faudra pas oublier les états d'énergies $|\varepsilon| > \Delta$, dont l'amplitude de paires n'est pas nulle au contact de l'interface !

1.5. Expression du courant

Courant porté par chaque état.

Nous pouvons calculer aussi pour chaque état le courant de "quasiparticules" c'est-à-dire le courant de probabilité de trouver soit un électron, soit un trou à un endroit donné [5]:

$$J_P = \frac{\hbar}{2im} \left[\varphi_e^* \partial_r \varphi_e - \varphi_e \partial_r \varphi_e^* \right] - \frac{\hbar}{2im} \left[\varphi_h^* \partial_r \varphi_h - \varphi_h \partial_r \varphi_h^* \right] \quad (1.1.10)$$

On peut le retrouver à partir de l'équation de Bogoliubov-De-Gennes (1.1.4) et l'expression de la probabilité $\varphi_e^* \varphi_e + \varphi_h^* \varphi_h$. Le courant de charge est :

$$J_{QN} = -e \frac{\hbar}{2im} \left[\varphi_e^* \partial_r \varphi_e - \varphi_e \partial_r \varphi_e^* \right] - e \frac{\hbar}{2im} \left[\varphi_h^* \partial_r \varphi_h - \varphi_h \partial_r \varphi_h^* \right] \quad (1.1.11)$$

On trouve à partir de (1.1.5.) que le courant de quasiparticules est nul, alors que le courant $J_{QN} = \pm e v_F$ est le courant transporté par les états du métal normal. Nous mettons ainsi en avant une propriété importante de la réflexion d'Andréev, qui est de permettre le passage de courant à travers l'interface sans qu'aucune énergie ne soit échangée entre le métal normal et le supraconducteur. Ceci est une illustration du fait que, dans un supraconducteur,

les charges et les quasiparticules se "séparent" (voir annexe A1).

Bien sûr, le problème de la conservation du courant semble posé. En effet, loin dans le supraconducteur, il ne semble plus y avoir de courant. En fait, le calcul de l'expression du courant a été fait en l'absence de paramètre d'ordre. Si on ajoute celui-ci, on obtient un terme "de source", qui réapparaîtra dans la théorie quasiclassique:

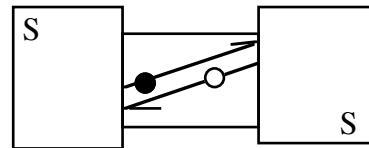
$$\partial_t Q + \partial_r J_{QN} = \frac{4e}{\hbar} \Delta \Im m(f) = -\partial_r J_S \quad (1.1.12)$$

Ceci illustre la conversion du courant normal dans N en courant supraconducteur dans S sur la longueur de cohérence ξ . Pour que le courant supraconducteur ne soit pas nul, cela suppose que la phase du Δ varie dans l'espace (voir Annexe A.1. BCS). Ceci ne pourrait se retrouver que par un calcul self-consistent. En l'absence de résolution self-consistente, nous n'avons accès qu'aux courants dans les parties "normales" d'un circuit.

Courant supraconducteur dans N

Dans un métal normal de longueur L compris entre deux supraconducteurs placés en $-L/2$ et $+L/2$, nous avons vu (1.3.) qu'il n'existe qu'un nombre discret d'états [6]. Dans le cas où les deux supraconducteurs ont le même potentiel chimique, on peut, exactement comme précédemment, déterminer complètement ces états liés, ainsi que leurs énergies propres. Ces états sont constitués par des allers et retours d'électron, puis de trou, qui se font d'une réflexion d'Andréev à l'autre (Figure 1.1.4).

Figure 1.1.4 . Dans un métal normal compris entre deux supraconducteurs, existent des états liés (état d'Andréev) constitués d'allers et retours d'électrons et de trous, qui transportent un courant à l'équilibre.



Ce qui est remarquable, c'est que ces états liés transportent chacun un courant et qu'à l'équilibre thermodynamique il existe un courant total qui dépend du déphasage entre les deux supraconducteurs, exactement de la même nature que le courant supraconducteur qui apparaît dans le cas de la théorie BCS avec $\Delta(q) \neq 0$ (voir annexe A1). Le courant total est dû au

courant porté par chaque état, multiplié par un facteur d'occupation. On peut écrire ce courant Josephson à partir d'une quantité $J(\epsilon)$ qui représente le courant total transporté au niveau d'énergie ϵ , et de la fonction de distribution à l'équilibre [7]:

$$I_S = \int J(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \quad (1.1.13)$$

Dans l'état BCS, on peut définir de même la quantité $J(\epsilon)$, qui est non nulle quand la phase de Δ varie dans l'espace. Dans certaines configurations ce courant pourra donner lieu, par exemple, à de l'effet Meissner dans le métal normal [8].

1.6. Conductance de la jonction NS balistique

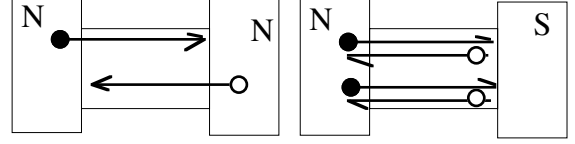
Les mesures de l'action de la réflexion d'Andréev sur le transport constitueront une partie importante de ce travail de thèse. Dans ce paragraphe, nous étudions un exemple illustratif très simple qui montre un doublement de la conductance, et qui servira à introduire la formule de Landauer que nous verrons au paragraphe suivant.

Mettons-nous à nouveau dans le cas où les propagations ne se font que selon l'axe des x , dans le métal normal. Pour mesurer la conductance, nous "branchons" un réservoir normal (N) à un potentiel chimique $+\mu$ en $x=-\infty$. En $x=+\infty$, nous branchons soit un autre réservoir N ("cas NN"), soit un supraconducteur ("cas NS"). Nous avons transformé les états (φ_e, φ_h) du système en états "de diffusion", dont la propriété est d'être en équilibre avec un réservoir. A titre d'exemple, si cet état est en équilibre avec un réservoir plein d'électrons, ceci signifie qu'il contient un électron sur une longueur de normalisation L , soit $\varphi_e \varphi_e^* = 1/L$. Le réservoir $N(-\infty)$ est donc rempli d'électrons (de trous) jusqu'à $+\mu$ ($-\mu$). Dans le cas NN, le réservoir $N(+\infty)$ est plein jusqu'à 0. Dans ce cas, nous nous rappelons qu'à chaque énergie ϵ il y a quatre états, correspondants à un électron ou un trou qui provient d'un côté ou de l'autre. Si $\epsilon > 0$ (ou $\epsilon < 0$), les états "électron (trou) provenant de $-\infty$ ($+\infty$)" transportent un courant $-\epsilon v_F / L$. Dans le cas NS, il y a deux états à chaque énergie, et l'état "électron provenant de $-\infty$ " transporte un courant $-2\epsilon v_F / L$ (le facteur 2 provient de la condition de normalisation). Dans ce raisonnement, les états occupés dont le courant est compensé par d'autres états occupés sont passés sous silence (c'est le cas pour les énergies $\epsilon < -\mu$). Enfin comme la densité d'états est $\nu = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar v_F}$, le courant total est donc :

$$I = -\frac{2e}{h}(\mu v) \text{ pour NN et } I = -2\frac{2e}{h}(\mu v) \text{ pour NS.} \quad (1.1.14)$$

Si la conductance est définie comme le rapport entre le courant et la tension μ/e , alors on voit qu'elle est doublée dans le cas S.

figure 1.1.5. Illustration du doublement de conductance d'une portion de métal normal mesuré entre un réservoir N et un supraconducteur (voir texte).



Cette expression simple de la conductance illustre la formule de Landauer (1.2.2) [9], que nous verrons dans le paragraphe suivant consacré aux matrices de diffusion.

On peut aussi calculer de la même manière que la conductivité thermique est nulle dans le cas NS.

Cependant, l'action de la réflexion d'Andréev n'est pas toujours une augmentation de conductance. Nous verrons que, si on met par exemple une barrière tunnel devant le supraconducteur, alors il pourra y avoir diminution de conductance.

2. Matrices de diffusion

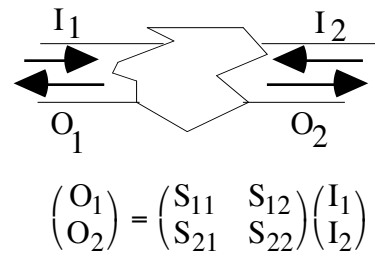
Nous avons vu que l'on peut traiter les questions relatives aux effets supraconducteurs dans le formalisme de l'équation de Bogoliubov-De-Gennes, qui est exactement identique à l'équation de Schrödinger dans le cas où il n'y a pas de supraconductivité. Grâce à cette constatation, la théorie des matrices de diffusion [9-12] permet de traiter la diffusion en présence de supraconductivité en se basant sur l'équation de Bogoliubov-De Gennes exactement de la même manière que l'on traite la diffusion dans les métaux normaux en se basant sur l'équation de Schrödinger [13]. Cette approche bénéficie d'un avantage sur la théorie quasiclassique, car elle permet d'obtenir une vision intuitive des phénomènes qui agissent sur le transport. Nous utiliserons donc cette approche dans le cas simple de la jonction NS, pour essayer de dégager une compréhension des résultats de la théorie quasiclassique.

2.1. Approche de type "Landauer"

L'idée principale de cette méthode est que l'on peut exprimer toutes les ondes sortantes d'un système en fonction des ondes entrantes. On reconstitue les états de diffusion du système en le connectant à des réservoirs présents au bout de différents fils de contact, et on calcule le transport en supposant que chaque état est en équilibre avec un réservoir particulier, le réservoir d'où il est issu. Pour étudier les phénomènes de transport, il faut supposer qu'il n'y a pas de phénomène de relaxation à l'intérieur même du système.

Les courants dans le système, et donc la conductance, sont donnés à partir des probabilités de transmission d'un fil vers les autres [9]. Ces probabilités de transmission sont données par l'intermédiaire d'une matrice dite "de diffusion", et généralement notée S , qui fournit les amplitudes sortantes en fonction des amplitudes entrantes (figure 1.2.1)

Figure 1.2.1 : matrice de diffusion pour deux fils, qui entrent dans un système quelconque. Les ondes sortantes d'un système quelconque (O) sont exprimées en fonction des ondes entrantes (I) par l'intermédiaire d'une matrice S "de diffusion".



$O_{1,2}$ et $I_{1,2}$ sont les amplitudes sortantes et entrantes, et pourront être par la suite des vecteurs comportant plusieurs composantes, comme nous le verrons dans la notion de canaux présentée ci-dessous.

La conservation du nombre de particules s'exprime par la condition S unitaire :

$$S^+ S = 1 \quad (1.2.1)$$

Par exemple, si le système est juste un morceau de fil sans interface, ceci donne $S_{12}=S_{21}=1$, et $S_{11}=S_{22}=0$.

Notion de canaux

Dans le cas d'un fil sans supraconductivité, dans le dessin ci-dessus, ne sont

représentées qu'une onde entrante et une sortante dans chaque fil. Or, on sait qu'il peut y avoir une onde correspondant à chaque vecteur d'onde k de chaque côté, c'est-à-dire beaucoup plus d'une seule pour chaque énergie ε . On parlera de canaux à chaque énergie, chacun étant associé à un vecteur d'onde différent. Comme les fils ont une section finie, les valeurs de k transverse sont quantifiées, et le nombre de canaux vaut N fini dans chaque fil. Pour les fils des échantillons présentés dans cette thèse, $N \approx 10^5$. La matrice S présentée ci-dessus est alors une matrice de dimension $N_1 + N_2$. N_1 (ou N_2) est le nombre de canaux dans 1 (ou 2). On peut se représenter ceci comme $N_1 + N_2$ fils séparés, ou on peut aussi dire que $S_{12}, S_{21}, S_{11}, S_{22}$ sont des matrices de dimensions $N_{1,2} \times N_{1,2}$. La formule de Landauer est alors :

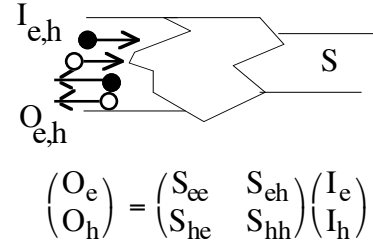
$$G = \frac{2e^2}{h} \left(\text{Tr} S_{21} S_{21}^+ \right) \quad (1.2.2)$$

Ce qui signifie que la conductance est celle des N canaux en parallèle, chacun ayant une conductance donnée par $\frac{2e^2}{h}$ fois sa probabilité de transmission. Le coefficient $\frac{2e^2}{h}$, quantum de conductance, correspond au résultat que nous avons exposé au paragraphe précédent.

Formule de BTK

Si de la supraconductivité est présente dans le système, et en l'absence de courants supraconducteurs, on peut procéder exactement de la même manière, en écartant les questions de self-consistence. On travaille cette fois avec des canaux d'électrons \uparrow et des canaux de trous \downarrow . Ainsi, chaque canal est "dédoublé", et chaque élément de la matrice S d'indice ij est transformé en quatre éléments "ee", "eh", "he" et "hh". La réflexion d'Andréev couple ces canaux (c'est-à-dire provoque une transmission des uns vers les autres, alors des éléments "eh" ou "he" sont non nuls). Par exemple, pour une jonction N-S, on prendra un système où un seul fil arrive, car aucune quasiparticule n'est transmise au supraconducteur pour des énergies inférieures au gap.

Figure 1.2.2. Matrice de diffusion dans le cas où un seul fil est en contact avec un supraconducteur par l'intermédiaire d'un Système quelconque. Le fil comprend des canaux électrons et trous. On s'est placé dans le cas où l'énergie est inférieure au gap supraconducteur .



La formule de Landauer devient celle de Blonder, Tinkham et Klapwijk (BTK) [5]:

$$G = \frac{2e^2}{h} (N - R_0 + R_a) \quad (1.2.3)$$

où $R_0 = \text{Tr}(S_{ee} S_{ee}^+)$ et $R_a = \text{Tr}(S_{he} S_{he}^+)$. Cette formule exprime que l'on a N canaux en parallèle et que la conductance de chacun est donnée par $2e^2/h$ moins une probabilité de réflexion sous forme d'électron, plus une probabilité de réflexion sous forme de trou. Lambert [11] a donné une formule générale pour le transport dans ces structures mésoscopiques. Il existe une condition supplémentaire qui est que le potentiel chimique du supraconducteur doit être nul (sinon, il faudrait écrire l'équation de Bogoliubov-De-Gennes avec un paramètre d'ordre $\Delta e^{-2i\mu(S)t/\hbar}$).

La question qui se pose alors est celle de modéliser le milieu diffusif, car c'est dans cette situation que nous nous trouvons. Nous savons qu'alors, le vecteur d'onde change collision après collision. Ainsi, la diffusion mélange les différents canaux à une énergie donnée. La solution peut être alors de choisir des matrices de diffusion particulières qui mélangent les canaux dans un cas particulier, et de recourir à la simulation numérique. On peut par exemple choisir les matrices au hasard dans un ensemble particulier [14-15].

La conductance spectrale.

La matrice S dépend en fait de l'énergie. Nous montrons qu'il existe une notion de conductance spectrale identique à celle qui apparaît dans la formulation quasiclassique.

Nous nous plaçons dans le cas où plusieurs fils, chacun portant un réservoir à un potentiel chimique différent, sont connectés à la matrice S , et il existe une symétrie entre la branche des électrons et celle des trous [11,16] (A.2.1). On note $T_{ij}(\epsilon) = \text{Tr}(S_{ij,ee}(\epsilon) S_{ij,ee}^+(\epsilon))$ qui décrit la transmission normale du fil i vers le fil j et de

même $T_{ij_a}(\varepsilon)$. On se place dans le cas particulier où $T_{ij_0}(\varepsilon) = T_{ij_0}(-\varepsilon)$ pour effectuer une comparaison avec la théorie quasiclassique. Lambert a montré (formules 4.15 à 4.20 de [11]) qu'alors le courant entrant dans chaque fil est de la forme (A.2.4):

$$I_i(\varepsilon) = \frac{2e}{h} \sum_j \left(f_{ej}(\varepsilon) - f_{hj}(\varepsilon) \right) \left(N_i \delta_{ij} - T_{ij_0}(\varepsilon) + T_{ij_a}(\varepsilon) \right) \quad (1.2.4)$$

$f_{ej}(\varepsilon) = f_j(\varepsilon - \mu_j)$ et $f_{hj}(\varepsilon) = f_j(\varepsilon + \mu_j)$ sont les fonctions de distribution déjà introduites des électrons et des trous dans le réservoir j . Pour la compatibilité avec les notations de ce chapitre voir Annexe A.2. Ceci est de la forme :

$$e\mathbf{I}(\varepsilon) = \underline{\underline{G}}(\varepsilon) \cdot \underline{f}(\varepsilon) \quad (1.2.5)$$

où les composantes du vecteur \mathbf{I} sont les courants entrants dans chaque fil, les composantes du vecteur \underline{f} sont les différences des distributions d'électrons et de trous (déséquilibre de charge) dans chaque réservoir. $\underline{\underline{G}}$ est une matrice représentant la conductance spectrale du système. Nous retrouverons une expression identique dans le cadre de la théorie des fonctions de Green quasiclassiques (1.3.29). Dans le cas très simple d'une jonction NS, il n'y a qu'un réservoir normal, et $\underline{\underline{G}}, \mathbf{I}$ et \underline{f} sont des scalaires.

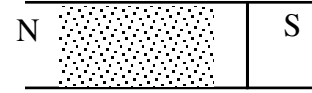
2.2. Conductance d'une jonction N-S diffusive

2.2.1. Modèle diffusif à énergie nulle

On étudie la conductance à énergie nulle de la jonction NS. C'est dans ce cas exemplaire et très simple que l'on voit apparaître la "ré-entrance", c'est-à-dire le fait que la conductance de la jonction N-S reste la même que celle d'une jonction "N-N" où un réservoir normal est mis à la place du supraconducteur.

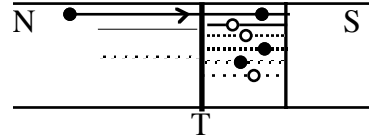
Le cas de la jonction N-S a été abondamment étudié [12,17] en particulier le cas où le métal normal est diffusif, et où l'interface N-S est parfaite.

Figure 1.2.3. Jonction NS diffusive : le métal normal contient une région diffusive (en grisé) et est mis en contact avec une interface "pure Andreev".



Pour aborder ce problème, on imagine la présence d'un petit espace libre entre la région désordonnée dans N (en hachurés) et l'interface d'Andreev parfaite avec le supraconducteur. On assimile la région désordonnée à une barrière T, qui, pour chaque canal n, a des coefficients de réflexion et de transmission r_n et t_n (en amplitude) et T_n comme probabilité de transmission.

Figure 1.2.4. Modèle pour la figure 1.1.3. Le milieu diffusif est modélisé par une barrière tunnel T dont la transmission dépend de chaque canal. Des réflexions d'Andreev multiples se produisent entre T et S.



La formule de BTK se ramène à

$$G = 4e^2/h R_a \quad (1.2.6)$$

grâce à la condition de normalisation de S. En effet, un électron incident est soit réfléchi, soit transmis, d'où $R_a + R_0 = N$ (N nombre de canaux). A énergie nulle, la réflexion d'Andreev crée un déphasage $\pi/2$ entre électrons et trous. Raisonnons pour un canal d'indice n donné. Si le trou ressort après la première réflexion d'Andreev, il a traversé deux fois la région T et a subi un déphasage de $\pi/2$: it_n^2 . Si c'est au bout de la deuxième, il y a en plus 2 réflexions sur T et 2 réflexions d'Andreev, etc... . Ainsi, l'amplitude cherchée est $it_n^2 - ir_n^2 t_n^2 + ir_n^4 t_n^2 - ir_n^6 t_n^2 + \dots$. On obtient la formule (démontrée plus rigoureusement par Beenakker) :

$$G_{NS} = 2e^2/h \sum_n \frac{2T_n^2}{(2 - T_n)^2} \quad (1.2.7)$$

la somme portant sur les N canaux. Cette formule est à comparer à $G_{NN} = 2e^2/h \sum (T_n)$ dans le cas où le réservoir de droite est normal. On peut noter que si la présence de la supraconductivité multiplie la conductance par deux dans le cas d'une transparence parfaite où $T=1$, elle la diminue au contraire beaucoup pour des transparences faibles. Ceci peut alors être interprété par une forte diminution de la densité d'états dans la partie comprise entre T et S . Cette diminution peut être regardée comme résultant du déphasage de $\pi/2$, qui crée une interférence destructive au bout de deux réflexions d'Andréev.

Si on place le milieu diffusif entre deux réservoirs N , les charges diffusent d'un côté à l'autre, et la conductance mesurée est inversement proportionnelle à la longueur de l'échantillon. Or, comme la formule de Landauer dit que cette conductance est proportionnelle au nombre de canaux qui conduisent le courant, cela veut dire que ce nombre de canaux qui traversent l'échantillon est inversement proportionnel à sa longueur L , et vaut Nl_e / L . Si chaque canal a une longueur de localisation ξ différente, alors cela signifie que l'inverse $1/\xi$ des longueurs de localisation des N canaux est uniformément réparti [18]. Bien sûr, la limite inférieure à ce raisonnement est le libre parcours, et la limite supérieure est celle du nombre de canaux. Quand la proportion de canaux qui traversent l'échantillon devient inférieure à $1/N$, alors il n'y a plus aucun canal disponible, et l'échantillon est plus long que la longueur de localisation Nl_e . Beenakker paramètre ainsi le coefficient de transmission par : $T = \cosh^{-2}(L/\xi)$, et trouve que la conductance à énergie nulle est la même dans le cas $N-N$ et dans le cas $N-S$:

$$G_{NS} = G_{NN} \quad (1.2.8)$$

Cela provient du fait que, si les canaux qui traversent complètement l'échantillon ($T \approx 1$ car $\xi \gg L$) voient leur contribution augmentée d'un facteur 2 par la présence de la supraconductivité, les autres canaux dont la transmission s'éteint exponentiellement en restant non nulle ($\xi \approx L$) voient la leur fortement diminuée. Les deux se compensent exactement. Volkov et al [19] sont arrivés à la même conclusion dans le cadre de simulations numériques. Nous verrons que la théorie quasiclassique arrive aussi à cette conclusion, qui sera aussi l'objet d'une partie du travail expérimental (chapitre 3) [20]

2.2.2. Modèle à une impureté : pic de conductance

Une partie du travail expérimental porte sur la mise en évidence d'un maximum dans la conductance différentielle du métal normal. Afin de comprendre l'existence de ce maximum, nous nous intéressons à la dépendance en énergie de la conductance de la jonction NS (conductance spectrale). Il est difficile, dans ce formalisme, de modéliser le rôle de l'énergie

dans les matrices de diffusion. Par exemple, Lambert [21] calcule ces matrices numériquement en fonction de l'énergie à partir d'un modèle de liaisons fortes, et d'un désordre diagonal (un potentiel aléatoire ajusté est affecté en chaque point du modèle de liaison forte). On peut néanmoins se faire une idée de la dépendance en énergie en reprenant le modèle de la jonction NS, avec un seul canal de coefficient de transmission T , que l'on peut imaginer représenter une impureté. On peut modéliser l'énergie en introduisant un déphasage $\varepsilon L / \hbar v_F$ pour chaque traversée de la région de longueur L séparant la barrière T et S . Cette idée peut se justifier en se rappelant que c'est le déphasage qui persiste après la réflexion d'Andréev (voir le paragraphe consacré à la réflexion d'Andréev). Ce déphasage s'ajoute au déphasage de $\pi/2$ dû à la réflexion d'Andréev. On trouve alors :

$$G \propto \frac{T^2}{(2-T)^2 + 2(1-T)\left(\cos\left(4 \frac{\varepsilon L}{\hbar v_F}\right) - 1\right)} \quad (1.2.9)$$

À énergie nulle, on retrouve bien sûr l'expression donnée par Beenakker.

Lorsque l'énergie est telle que $L = \frac{\pi}{4} \frac{\hbar v_F}{\varepsilon} = \frac{\pi}{4} L_\varepsilon$, alors la conductance G est maximum et indépendante de la transmission T du canal. Pour les valeurs de T faibles, ceci peut être regardé comme la présence d'un état d'Andréev résonnant entre T et S . On peut dire aussi que les amplitudes de réflexion d'électrons après un nombre pair de réflexions d'Andréev interfèrent destructivement, ce qui augmente la transmission, comme dans en optique dans un Fabry-Pérot. Si on considère N canaux dans un modèle où chaque canal est assimilé à une barrière à la distance L de S , on se rend compte qu'à énergie nulle, la conductance est proportionnelle au nombre $N l_e / L$ de canaux qui traversent, alors que pour l'énergie telle que $L = \frac{\pi}{4} L_\varepsilon$, cette conductance est proportionnelle au nombre de canaux. Il y a donc un pic de conductance à cette énergie. La conductance présente une série de pics, de même nature que celle décrite par Rowell et Mac Millan [22].

La valeur de L correspondant aux maxima est exactement celle où nous avons remarqué que l'amplitude de paires $f(\varepsilon)$ des états à l'énergie ε est maximum. Ce résultat correspond exactement à celui de la théorie quasiclassique, où dans un milieu diffusif, le maximum de conductance se trouve à l'endroit où l'amplitude de paires est maximum. (Figure 1.4.2.)

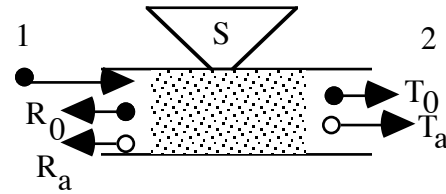
On retrouve sur cet exemple simple un pic de conductance à une énergie associée à la longueur L (l'énergie de Thouless que l'on retrouvera au long de ce travail). On peut imaginer

que, dans un milieu diffusif, la distance à mettre entre T et S pour modéliser chaque canal dépend de la distance parcourue par les quasiparticules, et que le premier pic à l'énergie de Thouless est élargie et diminué, et que les pics aux plus hautes énergies sont "brouillés".

2.2.3. Géométrie expérimentale à trois fils

Les mesures de transport qui sont présentées dans ce travail ont été conçues de façon à éviter que le courant ne passe par l'interface N-S. On mesure la résistance d'un fil N mis en contact latéral avec un supraconducteur (figure 1.2.5). Il est utile d'essayer d'établir un lien entre cette géométrie, et celle, plus simple, de la jonction N-S que nous avons étudiée jusque là.

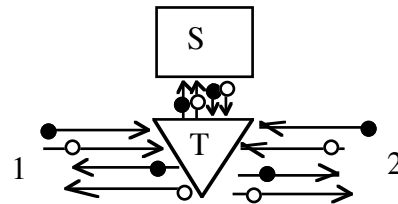
Figure 1.2.5. représentation schématique d'une mesure de transport dans N. On mesure la conductance entre 1 et 2. Un électron incident peut être réfléchi (R) ou transmis (T) comme électron (0) ou comme trou (a)



Par rapport au cas de la jonction N-S, il y a maintenant deux fils de mesure connectés au supraconducteur.

Pour modéliser ceci, on peut prendre une matrice de diffusion qui couple 3 fils, dont un fil sert à la connexion avec le supraconducteur (figure 1.2.7), cette matrice S ne couplant pas les électrons et les trous.

Figure 1.2.6 Modèle à un seul canal pour une géométrie en T. La matrice S de la région T couple trois fils. Nous choisissons aussi un modèle d'interface d'Andréev parfaite.



Si l'on se restreint à un seul canal par fil, alors la matrice S est une matrice 3x3 unitaire. Si on se place de plus dans le cas d'une symétrie entre les deux fils 1 et 2 et dans le cas d'une matrice S réelle, on peut, suivant Büttiker [23], paramétrer S à partir d'une seule variable réelle:

$$S = \begin{pmatrix} r_s & t_s & t_s \\ t_s & r_n & t_n \\ t_s & t_n & r_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_s = -\sin \chi & t_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \chi \\ r_n = \frac{1}{2}(\sin \chi - 1) & t_n = \frac{1}{2}(\sin \chi + 1) \end{cases} \quad (1.2.10)$$

L'angle χ variant de $-\pi/2$ à $\pi/2$. Lorsque $\chi = -\pi/2$, toutes les probabilités de réflexions sont égales à 1; il n'y a aucune transmission. Lorsque $\chi = 0$, on passe par une situation de fort couplage entre les canaux. Enfin, lorsque $\chi = \pi/2$, la transmission entre 1 et 2 est totale, alors que le canal venant de S est totalement réfléchi.

En notant en majuscule les probabilités associées aux amplitudes ci-dessus, on peut calculer que la conductance mesurée entre les fils 1 et 2 est donnée à énergie nulle par : (voir Annexe A.2, formule A.2.5):

$$G_s = 2(T_0 + R_a) = 2T_n + 2T_s \frac{(1 + R_s)T_s - 2t_n r_s R_s}{(1 + R_s)^2} \quad (1.2.11)$$

Pour comparaison, si on remplace le supraconducteur par un métal normal, qui laisse échapper les électrons et les trous, alors $G_n = 2T_n + T_s$. Le rapport entre ces deux valeurs montre que, pour χ compris entre $-\pi/2$ et 0, l'apparition de la supraconductivité diminue la conductance, à cause du terme $1 + R_s$ au dénominateur de (1.2.11) qui provient du déphasage de $\pi/2$ de la réflexion d'Andréev, exactement comme pour la jonction N-S (dénominateur de 1.2.7). Au contraire, la supraconductivité augmente la conductance pour $0 < \chi < \pi/2$, exactement de la même façon que pour la jonction N-S quand la transmission de la barrière est assez grande.

Dans ce modèle simple, l'augmentation de conductivité pour $0 < \chi < \pi/2$ est due au terme d'interférence positif $-2t_n r_s R_s$. Les trajectoires d'électrons qui, venant du côté 1, sont réfléchis directement vers 1 interfèrent destructivement avec les trajectoires qui subissent un nombre pair de réflexions d'Andréev avant de retourner dans 1.

Ceci pourra prudemment se généraliser au cas où l'énergie n'est pas nulle, comme nous l'avons fait pour la jonction NS. Si on choisit de modéliser l'énergie par un déphasage supplémentaire dans la partie S-T; alors la conductance ne dépend plus de χ lorsque l'énergie est telle que la longueur S-T vaut $\frac{\pi}{4} L_\epsilon$, exactement de la même manière qu'elle ne dépendait plus de T dans la jonction N-S.

3. Théorie quasiclassique

Dans l'approche par matrices de diffusion, les conductances spectrales obtenues sont des expressions où les termes d'interférence sont prépondérants, et où on n'a donc pas des règles de circuits simples. Les conductances sont difficiles à calculer. Par exemple, on ne peut pas dire que la résistance totale de deux résistances en série est la somme des résistances. Par contre, l'approche par matrices de diffusion conserve d'une part les termes non moyennés d'ensemble (comme les fluctuations de conductance) ou la localisation faible, et permet de traiter facilement les situations balistiques. Enfin, cette approche permet de garder des images physiques simples, qui peuvent permettre une bonne compréhension des cas simples.

Or, dans ce travail de thèse, nous nous intéressons surtout à des effets moyennés d'ensemble, dans la limite diffusive, et où nous avons besoin d'une méthode facile de calcul des conductances. Nous verrons que nous pourrions nous ramener à des expressions locales dans le cadre de la théorie quasiclassique dans l'approximation des régimes diffusifs, et ces expressions locales permettront d'établir des lois de circuits simples, où l'on pourra exprimer la conductance de circuits à partir d'une conductance locale "effective". Retrouver une telle expression locale à partir de la théorie des matrices de diffusion pourrait éventuellement permettre d'avoir une vision plus intuitive de la théorie quasiclassique. Une correspondance entre les deux théories peut être établie [15]. Notons en plus que la théorie quasiclassique permet de traiter des cas inaccessibles à l'approche par matrice de diffusion, comme l'existence d'interactions dans le métal normal, ou l'existence de collisions inélastiques, ou encore la présence de collisions qui renversent le spin (impuretés magnétiques).

3.1. fonctions de Green

3.1.1. Fonction de Green à l'équilibre.

On considère une particule de fonction d'onde $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Plaçons-nous dans un point de vue plus global que l'équation de Schrödinger : si l'on connaît la fonction d'onde à un instant, alors on peut la déterminer à tous les instants ultérieurs. De manière équivalente, en électromagnétisme, le principe de Huygens permet de connaître l'amplitude d'une onde monochromatique dans tout un demi-espace à partir de l'ensemble de ses valeurs dans un plan. Ainsi [24]:

$$\varphi(r', t') = \int iG(r', t', r, t) \varphi(r, t) dr \quad t' > t \quad (1.3.1)$$

En appliquant l'opérateur d'évolution, entre t et t' , $U(t', t) = \exp[-iH(t' - t)/\hbar]$ à $|\varphi(r, t)\rangle$, on obtient :

$$G(r', t', r, t) = -i\langle r' | U(t', t) | r \rangle \theta(t' - t) \quad (1.3.2)$$

La fonction θ de Heavyside signifie qu'on ne s'intéresse qu'à ce qui va vers le futur (fonction de Green retardée). Ceci va faire apparaître une distribution de Dirac δ dans sa dérivée. Pour un Hamiltonien indépendant du temps, où les états propres sont $|\varphi_n\rangle$, d'énergies E_n ,

$$G(r', t', r, t) = -i\theta(t' - t) \sum \varphi_n(r') \varphi_n^*(r) \exp\left[-iE_n(t' - t)/\hbar\right] \quad (1.3.3)$$

Le lien avec la notion mathématique de fonction de Green se retrouve par :

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} - H(r') \right] G(r', t', r, t) = \hbar \delta(t' - t) \delta(r' - r) \quad (1.3.4)$$

Le lien entre les fonctions de Green et les matrices de diffusion a été établi en particulier par Fisher et Lee[25] et Datta [26].

De plus, si on pose $T = (t' + t)/2$, et si on fait une transformation de Fourier de (1.3.3) par rapport à $t' - t$, alors la dépendance en fonction de T disparaît pour le cas stationnaire. On obtient :

$$G(r', r; \varepsilon) = \sum_n \varphi_n(r') \varphi_n^*(r) \left[\delta(\varepsilon - E_n) - i \frac{1}{\pi} P\left(\frac{1}{\varepsilon - E_n}\right) \right] \quad (1.3.5)$$

où $P()$ représente la distribution partie principale.

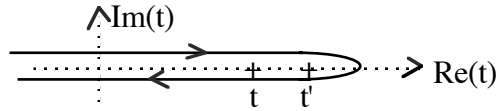
3.1.2. Fonctions de Green hors-équilibre : le formalisme de Keldysh.

L'avantage fondamental des fonctions de Green est de pouvoir ramener la description d'un système quelconque à celle d'un système simple, par exemple, des électrons libres et

indépendants, sur lequel on branche adiabatiquement, entre $t=-\infty$ et $t=0$, un Hamiltonien décrivant les impuretés et l'interaction électron-électron ou un couplage avec les phonons, etc. Ceci permet de ramener le problème à un développement en perturbations, dont il faut sommer les termes, ou au moins les termes importants. Les diagrammes de Feynman permettent de mener ce calcul à partir des fonctions de Green.

Partant d'un état fondamental $|\phi_0\rangle$, correspondant au système à $t=-\infty$, chaque terme de perturbation met en jeu la valeur moyenne d'opérateurs qui agissent l'un après l'autre dans le temps, et il est alors nécessaire de connaître l'état $|\phi_0\rangle$ à $t=+\infty$. Ceci ne pose pas de problème à l'équilibre, car l'état $|\phi_0\rangle$ est le même (à une phase près) qu'à $t=-\infty$. Par contre, pour un système hors équilibre, il n'est pas connu. L'astuce de Keldysh [27-28] est d'imaginer que l'on peut en fait "retourner" vers les temps $-\infty$ en imaginant un temps ordonné dans le plan complexe (figure 1.3.1)

Figure 1.3.1. Le parcours fléché représente l'ordre croissant du temps dans le plan complexe.



On se ramène ainsi au formalisme des fonctions de Green à l'équilibre. Ceci a un coût : comme chaque valeur du temps possède une composante imaginaire positive ou négative, les fonctions de Green prennent la forme de matrices 2x2, dont les quatre éléments peuvent s'exprimer à partir de trois indépendants, G^R, G^A , et G^K . On a ainsi :

$$G(r, t, r', t') = \begin{pmatrix} G^R & G^K \\ 0 & G^A \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} G^R = -i\theta(t-t') \langle [\psi(r, t)\psi^+(r', t')]_+ \rangle \\ G^A = i\theta(t'-t) \langle [\psi(r, t)\psi^+(r', t')]_+ \rangle \\ G^K = -i \langle [\psi(r, t)\psi^+(r', t')] \rangle \end{cases} \quad (1.3.6)$$

où $\psi^+(r, t)$ est l'opérateur création d'une particule en r à l'instant t . La signification physique de ces différents termes semble être la suivante : les deux fonctions G^R et G^A (retardée et avancée) sont les mêmes fonctions qu'à l'équilibre (fonction de Green retardée au paragraphe précédent). Pour l'imaginer, on remarque que l'application de l'anti-commutateur donne la même expression pour un état occupé et pour un état vide. En revanche, l'application du commutateur (pour G^K) fournit en plus du résultat précédent un facteur $+1$ pour un état

vide, et -1 pour un état occupé. Ainsi, les fonctions de Green retardée et avancée G^R et G^A de la partie diagonale décrivent les états du système, et la fonction de Green de Keldysh G^K décrit l'occupation de ces états.

3.1.3. Approximation quasiclassique en limite diffusive

L'approximation quasiclassique consiste à supposer que toutes les énergies caractéristiques du système sont très inférieures à l'énergie de Fermi, et donc que toutes les quantités intéressantes varient sur des distances très supérieures à la longueur de Fermi. En posant la transformée de Fourier de G par rapport à $r'-r$, et en posant $R=(r'+r)/2$, on obtient $G(R, k; \varepsilon)$. L'approximation quasiclassique consiste, pour chaque direction de k , à introduire la valeur de G moyennée sur l'ensemble des valeurs possibles de l'énergie $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m$. Cette valeur moyennée est une fonction de Green quasiclassique.

On suppose aussi que toutes les échelles de variation sont beaucoup plus grandes que le libre parcours élastique l_e . Sur ces échelles, les directions des vecteurs d'onde sont moyennées par les chocs élastiques. On introduit alors un développement de la fonction de Green en une partie sphérique, et une partie dipolaire (qui contient des courants), et on exprime tout en fonction de la partie sphérique, qui est la moyenne de la fonction de Green sur toutes les directions.

Une image de la partie sphérique peut être la suivante. Après ces deux approximations, cette partie correspond à une fonction de Green moyennée sur toutes les valeurs possibles du vecteur d'onde, ce qui revient à prendre la valeur $r-r' \approx 0$. On a perdu les variations sur des échelles $r - r' < l_e$, ainsi que les corrélations entre les fonctions de Green en différents points (par exemple, on a perdu la localisation faible). En revanche, la non-localité est éliminée car on ne retrouve plus qu'une dépendance en R . Dans le cas stationnaire et à l'équilibre, il faut écrire $r' \approx r \approx R$ dans l'équation (1.3.5.).

3.1.4. Fonctions de Green en présence de supraconductivité.

Dans le cas où de la supraconductivité est présente, les fonctions d'onde φ_n ont deux composantes [29], notées φ_{en} et φ_{hn} comme dans le paragraphe précédent, comme le montre l'équation de Bogoliubov-De Gennes (1.1.4.). Ainsi, dans le cas des fonctions de Green stationnaires et à l'équilibre, le produit $\varphi_n(R)\varphi_n^*(R)$ devient une matrice 2x2 dans l'équation

(1.3.5.).

$$\hat{G}(R; \varepsilon) = \sum_n \begin{pmatrix} \varphi_{en}(R) \varphi_{en}^*(R) & \varphi_{en}(R) \varphi_{hn}^*(R) \\ \varphi_{hn}(R) \varphi_{en}^*(R) & \varphi_{hn}(R) \varphi_{hn}^*(R) \end{pmatrix} \left[\delta(\varepsilon - E_n) - i \frac{1}{\pi} P \left(\frac{1}{\varepsilon - E_n} \right) \right] \quad (1.3.5)$$

Nous voyons clairement que la partie réelle des deux termes diagonaux est la somme des probabilités de présence des particules en R dans chaque état d'énergie ε , et donc au total la densité d'états en R. Les parties imaginaires leur sont reliées par des relations de Kramers-Kronig. Les deux autres termes, les fonctions de Green anomales, font apparaître de manière identique la quantité notée $f(\varepsilon)$ dans les paragraphes précédents.

Les fonctions de Green à l'équilibre sont devenues des matrices 2x2 pour inclure l'effet de la supraconductivité. Les fonctions de Green hors équilibre du formalisme de Keldysh, qui sont des matrices 2x2 dans le cas où il n'y a pas de supraconductivité, vont donc devenir des matrices 4x4.

3.2. Equations en limite diffusive

3.2.1. Equations d'Usadel

En appliquant les principes généraux que nous venons de présenter, on peut obtenir une description complète d'un métal en présence de supraconductivité. Nous avons vu que l'étude d'effets hors équilibre nécessite que les fonctions de Green soient des matrices 2x2. Dans le cas où la supraconductivité est présente, chaque fonction G^A, G^R et G^K du formalisme de Keldysh devient elle-même une matrice 2x2 (notée \hat{G}^A, \hat{G}^R et \hat{G}^K) et au total, le formalisme de la supraconductivité hors équilibre est un formalisme de fonctions de Green matricielles 4x4. On obtient les équations très générales que l'approximation quasiclassique permet de simplifier [30-34]. En limite diffusive, la partie sphérique de la fonction de Green matricielle 4x4, que nous noterons \tilde{G} , est locale [35-36]. Après avoir négligé les processus inélastiques dans l'échantillon, cette fonction \tilde{G} vérifie:

$$\hbar D \partial_r (\tilde{G} \partial_r \tilde{G}) - i [\tilde{H}, \tilde{G}] = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \hat{G}^R & \hat{G}^K \\ 0 & \hat{G}^A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 \\ 0 & \hat{H} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} e\varphi + \varepsilon & \Delta \\ -\Delta^* & e\varphi - \varepsilon \end{pmatrix}$$

φ est le potentiel électrostatique, et Δ le potentiel de paires. D est le coefficient de diffusion. On a en plus la condition de normalisation :

$$\tilde{G}\tilde{G} = \tilde{1} \quad (1.3.7)$$

Les processus inélastiques interviendraient dans la self-énergie $\tilde{\Sigma}$ sous la forme d'un deuxième membre $i[\tilde{\Sigma}, \tilde{G}]$. L'équation (1.3.6) est une notation matricielle 4x4, on peut la développer en 3 équations matricielles 2x2 : deux équations pour les parties diagonales "à l'équilibre", et une pour la partie "Keldysh" non diagonale. Les équations (1.3.6.) et (1.3.7) constituent les équations d'Usadel.

3.2.2. Fonctions à l'équilibre.

Les équations qui régissent les grandeurs $\hat{G}^{R,A}$ à l'équilibre sont données par les parties diagonales de l'équation (1.3.6). Chacune de ces équations est une équation matricielle 2x2. La condition générale $\hat{G}^R(\varepsilon) = -\hat{\sigma}_z \hat{G}^A(-\varepsilon) \hat{\sigma}_z$ [30,35] où $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice de Pauli) et la condition de normalisation donnent les équations (1.3.8). Grâce aux conditions (1.3.8), les équations matricielles 2x2 qui donnent les grandeurs à l'équilibre se ramènent à un ensemble de deux équations (1.3.10).

$$\hat{G}^{R,A} = \begin{pmatrix} G^{R,A} & F^{R,A} e^{i\chi^{R,A}} \\ -F^{R,A} e^{-i\chi^{R,A}} & -G^{R,A} \end{pmatrix}, \text{ et } \begin{cases} G^R(\varepsilon) = -G^A(-\varepsilon) = G(\varepsilon) = \cos\theta(\varepsilon) \\ F^R(\varepsilon) = F^A(-\varepsilon) = F(\varepsilon) = -i \sin\theta(\varepsilon) \\ \chi^R(\varepsilon) = \chi^A(-\varepsilon) = \chi(\varepsilon) \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Où $\chi^{R,A}$ est un angle complexe [35,37], qui sera relié à la phase du paramètre d'ordre. F , G et χ sont introduits pour alléger les notations.

θ est un angle complexe paramétrant les fonctions F et G grâce à la relation (1.3.9):

$$G^2 = 1 + F^2 \quad (1.3.9)$$

Dans le cas d'un métal normal en contact avec un supraconducteur, l'angle θ est appelé "angle de proximité" [40]. Nous verrons un lien entre F et l'amplitude de paires. Les équations d'Usadel à l'équilibre ont la forme suivante en l'absence de champ magnétique :

$$\begin{cases} \hbar D \left(G \partial_r^2 F - F \partial_r^2 G - FG (\partial_r \chi)^2 \right) = -2i\varepsilon F + iG \left(\Delta e^{-i\chi} + \Delta^* e^{i\chi} \right) \\ \hbar D \partial_r \left(F^2 \partial_r \chi \right) = -F \left(\Delta e^{-i\chi} - \Delta^* e^{i\chi} \right) \end{cases} \quad (1.3.10)$$

En présence de champ il faut remplacer $\partial_r \chi$ par $\partial_r \chi - 2eA$ (le potentiel vecteur est $\phi_0 / \pi A$, où ϕ_0 est le quantum de flux supraconducteur $\phi_0 = hc / 2e$). Si on prend le complexe conjugué de ces équations (1.3.10), on obtient des équations identiques si on change ε en $-\varepsilon$, F , G et χ en $-F^*$, G^* et χ^* . A condition que la self-énergie vérifie aussi cette symétrie, on obtient au total les relations suivantes, qui servent à trouver les expressions des quantités physiques :

$$\hat{G}^R = \begin{pmatrix} G & Fe^{i\chi} \\ -Fe^{-i\chi} & -G \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{G}^A = \begin{pmatrix} -G^* & -F^* e^{i\chi^*} \\ Fe^{-i\chi^*} & G^* \end{pmatrix} \quad (1.3.11)$$

3.2.3. Partie hors équilibre : fonctions de distribution.

Les effets hors équilibre sont décrits par la partie non diagonale ("Keldysh") de l'équation (1.3.6). C'est une équation matricielle 2x2. La condition de normalisation (1.3.7) permet de paramétrer la fonction \hat{G}^K en fonction de \hat{G}^R et \hat{G}^A . On fait apparaître ainsi une fonction de distribution matricielle diagonale :

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f'_e & 0 \\ 0 & f'_h \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad \hat{G}^K = \hat{G}^R \cdot \hat{f} - \hat{f} \cdot \hat{G}^A \quad (1.3.12)$$

Pour se faire une idée de ce que f'_e et f'_h représentent, on peut remarquer que s'il n'y a pas de supraconductivité, alors $G^K = f'_e (G^R - G^A) = 2f'_e \mathfrak{Im}(G)$. Or, G^K contient l'information sur l'occupation des états, et $v_0 \mathfrak{Im}(G)$ est la densité d'états. Schmid et Schön [38] ont fait le lien entre f'_e et les fonctions de distribution:

$$f'_e = 2f_e - 1 \quad (1.3.13)$$

où f_e est la distribution des électrons (même notation qu'au paragraphe précédent). On a une expression identique pour les trous. On obtient deux équations de "Boltzmann généralisées" (1.3.15).

3.2.4. Equations réduites

Les équations réduites serviront pour déterminer les quantités physiques.

Equations à l'équilibre

En remplaçant dans (1.3.10) F et G par leurs valeurs en fonction de θ , on obtient deux équations (1.3.14) écrites pour le métal normal, c'est-à-dire en l'absence de paramètre d'ordre. L_φ est la longueur de mémoire de phase, au bout de laquelle la phase est perdue à cause des impuretés magnétiques ou du champ magnétique (L_φ est associée à l'énergie notée γ dans [41]).

$$\left\{ \begin{aligned} \hbar D \partial_r^2 \theta + \left[2i\varepsilon - \hbar D \left((\partial_r \chi - 2eA)^2 + \frac{1}{L_\varphi^2} \right) \cos \theta \right] \sin \theta &= 0 \quad (a) \\ \hbar D \partial_r (\sin^2 \theta (\partial_r \chi - 2eA)) &= 0 \quad (b) \end{aligned} \right. \quad (1.3.14)$$

En présence d'un paramètre d'ordre (c'est-à-dire dans S ou s'il y a des interactions dans N), il faut écrire $(\Delta e^{-i\chi} + \Delta^* e^{i\chi}) \cos \theta$ au second membre de (1) et $-i(\Delta e^{-i\chi} - \Delta^* e^{i\chi}) \sin \theta$ au second membre de (2). Ces deux équations, additionnées de conditions aux limites, permettent de calculer θ en tous les points de l'échantillon (voir chapitre 7). Les quantités physiques pourront être déterminées à partir de θ et χ .

Equations hors-équilibre

La partie non-diagonale ("Keldysh") de l'équation (1.3.6) a la forme de deux équations de Boltzmann généralisées, dont les seconds membres sont des intégrales de collisions considérées comme nulles à l'intérieur de l'échantillon. En l'absence de paramètre d'ordre, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_r (\sigma(\varepsilon) \partial_r (f'_e - f'_h) + J(\varepsilon) (f'_e + f'_h)) &= 0 \quad (a) \\ \partial_r (\sigma'(\varepsilon) \partial_r (f'_e + f'_h) + J(\varepsilon) (f'_e - f'_h)) &= 0 \quad (b) \end{aligned} \right. \quad (1.3.15)$$

où $J(\varepsilon) = \sigma_N \Im \left(F^2 (\partial_r \chi - 2eA) \right)$

$$\sigma(\varepsilon, r) = \sigma_N \left(\Re e^2 G + \Im^2 F \cosh^2(\Im m \chi) + \Re e^2 F \sinh^2(\Im m \chi) \right),$$

$$\sigma'(\varepsilon, r) = \sigma_N \left(\Re e^2 G - \Re e^2 F \cosh^2(\Im m \chi) - \Im^2 F \sinh^2(\Im m \chi) \right).$$

σ_N est la conductivité dans l'état normal.

On a : $J(\varepsilon) = -J(-\varepsilon)$, $\sigma(\varepsilon) = \sigma(-\varepsilon)$ et : $\sigma'(\varepsilon) = \sigma'(-\varepsilon)$.

S'il y a un paramètre d'ordre, il faut ajouter au deuxième membre de la première équation (1.3.15.a) un terme "de source" $\sigma_N / \hbar D \Im \left[F \left(\Delta e^{-i\chi} + \Delta^* e^{i\chi} \right) \right] (f'_e - f'_h)$, proportionnel au paramètre d'ordre Δ , et qui représente la réflexion d'Andréev sur ce paramètre d'ordre. Nous verrons au paragraphe suivant des interprétations physiques pour $J(\varepsilon)$ et $\sigma(\varepsilon, r)$.

3.2.5. Evaluation des quantités physiques

[35, 39]

- La densité d'états est la partie réelle de G (on peut s'en faire une idée d'après les équations (1.3.5) et (1.3.11) qui concernent les fonctions de Green à l'équilibre) :

$$\nu = \nu_0 \Re(G) = \nu_0 \Re(\cos \theta) \quad (1.3.16)$$

où ν_0 est la densité d'états dans le métal normal.

- Le paramètre d'ordre est donné par l'équation de self-consistence :

$$\Delta = \alpha \nu_0 \frac{1}{4} \int d\varepsilon \left(f'_h F e^{i\chi} + f'_e F^* e^{i\chi^*} \right) \quad (1.3.17)$$

α est le paramètre d'interaction (supposé ici indépendant de l'énergie). En particulier, si nous regardons, comme dans le paragraphe (1.4.), la situation où $f'_e = f'_h = f'$, (ce qui est le cas à l'équilibre où $f'(\varepsilon) = \tanh(\varepsilon / 2k_B T)$), et comme $f' = 2f - 1$, alors : $\Delta = \alpha \nu_0 \int f(\varepsilon) \frac{1}{2} (F e^{i\chi} + F^* e^{i\chi^*}) d\varepsilon$. Nous voyons que la partie réelle de χ fournit la phase du paramètre d'ordre, après intégration sur les énergies. La quantité qui donne la contribution de chaque énergie à l'amplitude de paires quand elle est multipliée par une fonction de distribution (notée f dans les paragraphes précédents) est :

$$f = \frac{\nu_0}{2} (F e^{i\chi} + F^* e^{i\chi^*}) \quad (1.3.18)$$

$f = v_0 \Re(F)$ quand la phase est nulle (on peut s'en faire une idée d'après les équations (1.3.5) et (1.3.11)). En particulier, à l'équilibre (l'intégrale porte de $-\infty$ à $+\infty$) et si la phase est nulle :

$$\Delta = v_0 \alpha \int \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2k_B T}\right) \Im(\sin \theta) d\varepsilon \quad (1.3.19)$$

-Le potentiel électrostatique est donné par l'électroneutralité :

$$V = -\frac{1}{4e} \int v(f'_e - f'_h) d\varepsilon = -\frac{1}{2e} \int v(f_e - f_h) d\varepsilon \quad (1.3.20)$$

où v est la densité d'états déjà mentionnée, $(f_e - f_h)$ est le déséquilibre de charges. Ici, nous supposons que la phase est indépendante du temps, sans quoi il faudrait ajouter un terme proportionnel à la dérivée temporelle de la phase (voir le chapitre 5).

Dans le cas d'un réservoir normal porté à un potentiel chimique μ , on peut vérifier que l'on retrouve $V = \mu/e$. Par contre, si on se place dans un métal normal à courte distance du supraconducteur, la densité d'états est fortement diminuée [40]. Dans ce cas, une mesure de transport qui mesurerait le potentiel électrostatique V (par un couplage capacitif), et une mesure de transport qui mesurerait les fonctions de distribution (par l'intermédiaire d'un réservoir normal porté à un potentiel chimique eV) donneraient des résultats très différents [35,39]. On se placera, au cours de cette thèse, dans le deuxième point de vue.

-Le courant total provient de la partie dipolaire de la fonction de Green, et peut être exprimé en fonction de la fonction \tilde{G} moyennée. Elle peut être séparée en deux parties, l'une dépendant de $f'_e - f'_h$, et l'autre de $f'_e + f'_h$. Le courant supraconducteur est fourni par :

$$I_s = \int d\varepsilon J_s(\varepsilon) \quad \text{et} \quad J_s(\varepsilon) = J(\varepsilon) \left(\frac{f_e + f_h}{2} \right) \quad (1.3.21)$$

$J(\varepsilon) = -\Im \left(\sin^2 \theta (\partial_r \chi - 2eA) \right)$ est la même quantité que celle qui intervient dans les équations de Boltzmann (1.3.15). $J(\varepsilon)$, multiplié par la fonction de distribution donne le

courant supraconducteur $J_s(\varepsilon)$ transporté à l'énergie ε , c'est donc exactement la quantité qui avait été introduite et notée $J(\varepsilon)$ dans le paragraphe (1.5). L'équation (1.3.21) est donc à comparer avec (1.1.13). La deuxième équation à l'équilibre (1.3.14.b) apparaît alors comme la conservation d'une quantité $J(\varepsilon)$ "complexe" (en l'absence de paramètre d'ordre). A l'équilibre :

$$eI_s = \sigma_N \int \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\varepsilon}{2k_B T}\right) \Im m\left(\sin^2 \theta (\partial_r \chi - 2eA)\right) d\varepsilon \quad (1.3.22)$$

Nous pouvons remarquer qu'apparaît le gradient de la phase du supraconducteur, comme souligné dans l'annexe A1.

-Le courant "normal", est, quant à lui :

$$I_n = \int d\varepsilon J_n(\varepsilon) \quad \text{et} \quad eJ_n(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon, r) \frac{1}{2} \partial_r (f_e - f_h) \quad (1.3.23)$$

$\sigma(\varepsilon, r)$ est la même quantité que celle qui intervient dans les équations de Boltzmann (1.3.15.a). $J_n(\varepsilon)$ représente le courant transporté à l'énergie ε . Il est proportionnel au gradient du déséquilibre de charges $f_e - f_h$, et à $\sigma(\varepsilon, r)$. $\sigma(\varepsilon, r)$ apparaîtra comme une conductivité effective (paragraphe 1.3.7) à chaque énergie, qui sera reliée à la conductance spectrale (1.2.5.). Si la phase χ est partout réelle, on a :

$$\sigma(\varepsilon, r) = \sigma_N \left(\Re e^2 G + \Im m^2 F \right) = \sigma_N \cosh^2(\Im m \theta) \quad (1.3.24)$$

3.2.6. Conditions aux limites

Les structures étudiées seront en contact avec un métal normal ou un supraconducteur. Il faut des conditions aux limites pour θ et χ , ainsi que pour les fonctions de distribution.

Réservoirs

Au contact d'un réservoir N, la fonction F est nulle, et $\theta=0$.

Au contact d'un supraconducteur où un paramètre d'ordre Δ est présent, l'équation à l'équilibre (1.3.14.a) montre que la valeur de l'angle θ rejoint exponentiellement une valeur

d'équilibre sur une longueur $\sqrt{\frac{\hbar D}{\Delta}}$, que l'on reconnaît comme longueur de cohérence ξ du supraconducteur . Cette valeur à l'équilibre vérifie (en l'absence de champ magnétique) :

$$\left[2i\varepsilon - \left(\frac{\hbar D}{L_\varphi^2} \right) \cos \theta \right] \sin \theta = 2\Delta \cos \theta \quad (1.3.25)$$

En particulier, si la longueur de mémoire de phase est infinie, on a :

$$\begin{aligned} v &\propto \Re e G = |\varepsilon| / \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} \quad (\text{on reconnaît la densité d'état BCS Annexe A.1.}), \\ \Im m G &= \varepsilon / \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}, \\ f &\propto \Re e F = \Delta \operatorname{sgn}(\varepsilon) / \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2} \quad (\text{voir Annexe A.1.}), \text{ et} \\ \Im m F &= \Delta / \sqrt{\Delta^2 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Si l'énergie est très inférieure à Δ , alors $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Les fonctions de distribution pour les électrons et les trous au contact d'un réservoir N porté au potentiel V sont données par la distribution f de Fermi-Dirac, avec $f_e(\varepsilon) = f(\varepsilon - eV)$ et $f_h(\varepsilon) = f(\varepsilon + eV)$, ce qui correspond exactement à la représentation du métal normal proposée au paragraphe 1.1 de ce chapitre. Du côté supraconducteur d'une interface NS, il faut rajouter le terme "de source" $2\Delta(f'_e - f'_h)\Im m F$ à l'équation de Boltzmann (1.3.15.a) ce qui montre que le déséquilibre de charge $(f_e - f_h)$ s'atténue exponentiellement sur la longueur de cohérence (tant que la partie imaginaire de F n'est pas nulle, c'est-à-dire pour des énergies inférieures au gap). C'est la profondeur sur laquelle les électrons et les trous incidents pénètrent dans le supraconducteur lors de la réflexion d'Andréev. Ainsi, on aura $(f_e - f_h)=0$ au contact du supraconducteur.

Barrières Tunnel

Kuprianov et Lukichev [42] ont dérivé des conditions aux limites pour la fonction \tilde{G} au passage d'une barrière tunnel. Notons + et - deux côtés d'une barrière de résistance R_b . On introduit la longueur de barrière $L_t = R_b / \rho$, ρ étant la résistivité du métal. Cette longueur L_t est indépendante de la surface s de la barrière. C'est la longueur pour laquelle un fil de section s a la résistance R_b . Alors :

$$2L_t(\tilde{G}\partial_r\tilde{G}) \cdot \mathbf{n} = [\tilde{G}_-, \tilde{G}_+] \quad (1.3.26)$$

\mathbf{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à l'interface, orienté de la région - vers la région +.

Dans le cas où la phase χ est nulle, l'équation à l'équilibre (1.3.14.a) se ramène alors à la condition suivante [43], que l'on calcule aisément à partir de la relation générale ci-dessus :

$$\sin(\theta^+ - \theta^-) = L_t \partial_r \theta \quad (1.3.27)$$

On trouve, à partir de l'équation donnant les conditions de passage pour les fonctions de distribution f , que la conductance locale introduite au paragraphe précédent devient pour la barrière :

$$G_b(\varepsilon) = \frac{1}{R_b} (\Re G_- \Re G_+ + \Im F_- \Im F_+) \quad (1.3.28)$$

En l'absence de barrière, cette relation correspond à (1.3.24). Comme la densité d'états est donnée par $\Re G$, on est tenté de reconnaître dans $\Re G_- \Re G_+$ le produit des densités d'états de part et d'autre de la barrière, qui intervient habituellement dans la description "semi-conducteur" de la conductance d'une barrière tunnel [2]. Pour décrire la conductance de la barrière en présence de supraconductivité, il semble qu'il faut rajouter un deuxième produit $\Im F_- \Im F_+$. On obtient alors l'image suivante pour la conductance d'une barrière tunnel :

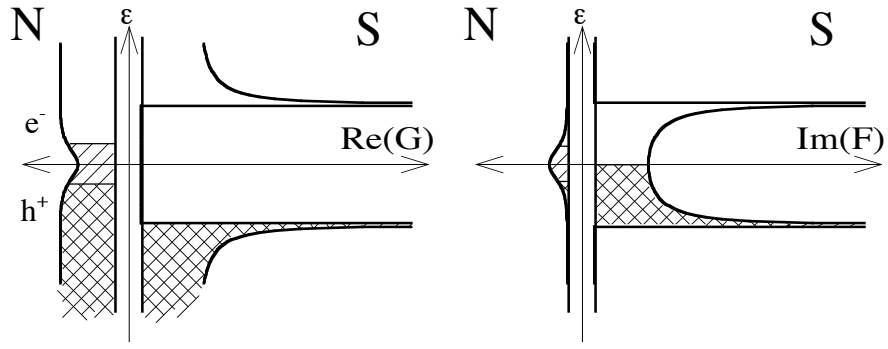


Figure 1.3.1: Modèle semi-conducteur de la conductance d'une barrière tunnel. A gauche, les densités d'états dans le métal normal et dans le supraconducteur sont représentées. Les parties hachurées dénotent les états occupés dans la branche des électrons et dans celle des trous. Il existe dans N un déséquilibre entre les populations d'électrons et de trous. La conductance de la jonction tunnel est donnée par le produit des densités d'états, c'est le terme "habituel", valable pour les très faible transparences. A droite, la conductance sous le gap est donnée en ajoutant un deuxième terme identique faisant intervenir le produit des valeurs de $\Im m F$. La valeur finie de $\Im m F$ dans le métal normal est induite par la présence du supraconducteur.

3.2.7. Conductance spectrale

La conductance d'un circuit en fonction de l'énergie ("conductance spectrale") est une notion centrale de ce travail de thèse. Nous avons déjà abordé cette notion dans le cadre des matrices de diffusion (formule (1.2.5)). Il s'agit dans ce paragraphe de montrer que la théorie quasiclassique fait aussi apparaître une notion de conductance spectrale, qui, tout comme dans le cadre des matrices de diffusion, est une conductance pour le déséquilibre de charge. La théorie quasiclassique montre que cette conductance spectrale peut être calculée par une loi de circuits simple.

Plaçons-nous, comme lorsque nous avons abordé les matrices de diffusion, dans le cas d'un métal normal en contact avec un seul supraconducteur, en l'absence de champ. Alors, $\partial_r(J_n(\epsilon)) = 0$ d'après (1.3.15.a), ce qui exprime la conservation du courant total à chaque niveau d'énergie. Dans cette perspective, σ/e apparaît comme une conductivité locale effective, qui donne un courant $J_n(\epsilon)$ en fonction du gradient du déséquilibre local $\frac{1}{2}(f_e - f_h)$ des fonctions de distribution. A partir de cette constatation, pour un circuit de proximité quelconque, on peut exprimer les courants entrants dans chaque fil par une relation :

$$e\mathbf{I}(\varepsilon) = \underline{\underline{G}}(\varepsilon) \cdot \underline{\underline{f}}(\varepsilon) \quad (1.3.29)$$

où le vecteur $\underline{\underline{f}}$ représente le déséquilibre $\frac{1}{2}(f_e - f_h)$ dans chaque réservoir, exactement de la même manière que la notion de conductance spectrale avait été introduite dans le cas des matrices de diffusion (1.2.5). La matrice $\underline{\underline{G}}$ est calculée à partir de la conductivité locale à partir d'une simple loi de circuits, en tenant compte de la condition aux limites sur les fonctions de distribution. Dans un circuit constitué de plusieurs fils, c'est une loi de circuits simple qui sert au calcul de la matrice $\underline{\underline{G}}$ et nous pourrions parler de la conductance spectrale de chaque fil du circuit, calculée à partir de la conductivité locale.

Ici, deux distributions interviennent. Or, $\sigma(\varepsilon) = \sigma(-\varepsilon)$ (1.3.15) et $(f_e - f_h)(\varepsilon) = (f_e - f_h)(-\varepsilon)$ dans les réservoirs. Ainsi, $J_n(\varepsilon) = J_n(-\varepsilon)$, car leurs équations sont les mêmes avec les mêmes conditions aux limites. On peut alors simplifier le problème en remarquant que : $2eJ_n(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon, r) \partial_r (f(\varepsilon) + f(-\varepsilon))$ où $f(\varepsilon) = \frac{1}{2}(f_e(\varepsilon) + 1 - f_h(-\varepsilon))$. Cette opération permet de revenir à la vision "habituelle" d'un métal, avec une seule branche d'électrons, et non plus une branche d'électrons et une branche "retournée" de trous. La fonction f est, dans chaque réservoir, la fonction de distribution de Fermi-Dirac habituelle. On aura alors :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{G}}(\varepsilon) \underline{\underline{f}}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.3.30)$$

La matrice $\underline{\underline{G}}$ est la même qu'en (1.3.29). On a enlevé le facteur e pour alléger la notation, ce qui revient ici. à assimiler tension et énergie ($e=1$). On a en plus $\underline{\underline{G}}(\text{état normal}) = \underline{\underline{G}}_N$, où $\underline{\underline{G}}_N$ est la conductance spectrale calculée directement à partir de la conductivité σ_N . La formule (1.3.29) sera le point de départ des calculs des conductances théoriques des échantillons.

4. Application des équations d'Usadel à la conductance d'un fil

Nous nous plaçons donc dans le régime où la longueur de collision inélastique L_{in} est beaucoup plus grande que la longueur L de l'échantillon, si bien que chaque niveau d'énergie conduit indépendamment sa part de courant. Faisons en plus l'approximation que l'échantillon est connecté à des réservoirs parfaits, où les charges sont réparties suivant la fonction de

distribution de Fermi-Dirac. Les charges sont alors injectées dans le système depuis des réservoirs à des potentiels différents, ce qui crée des courants. Pour chaque énergie ε , les valeurs $f_i(\varepsilon)$ des fonctions de distribution dans les réservoirs i déterminent le courant $I(\varepsilon)$. On note alors $\delta\sigma(\varepsilon, x) = \sigma(\varepsilon, x) - \sigma_N$ la variation locale de la conductivité de l'échantillon. On suppose en plus que cette variation de conductivité ne dépend pas des fonctions de distribution dans les réservoirs, et qu'elle est seulement donnée par la solution des équations d'Usadel à l'équilibre (1.3.14), c'est-à-dire que l'on néglige la self-consistence, qui couple les équations à l'équilibre (1.3.14) et les équations donnant les fonctions de distribution (1.3.15). On suppose donc que la supraconductivité provient d'un supraconducteur S qui a une valeur de Δ fixée a priori, et qui impose une valeur de θ indépendante des fonctions de distribution.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas simple de la conductance spectrale d'un fil diffusif entre N et S, qui correspond à la notion de "jonction N-S" diffusive étudiée au paragraphe 2. de ce chapitre.

4.1. Modèle du fil N entre un réservoir S et N.

Considérons (Figure 1.4.1) un système constitué d'un fil normal pris entre un supraconducteur et un réservoir normal. Ce modèle simple permettra de décrire qualitativement bien des résultats.

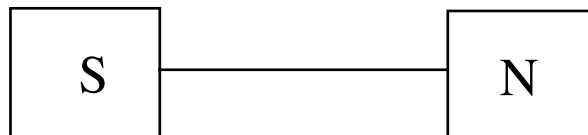


Figure 1.4.1. Un fil normal est compris entre un supraconducteur et un réservoir N.

Les charges sont injectées dans le système depuis un réservoir N à un potentiel chimique $\mu = eV$. Le courant qui passe est donc compris dans une fenêtre d'énergie $[0, \mu]$, avec un élargissement thermique kT . Pour chaque énergie ε , l'effet de proximité produit une augmentation locale de conductivité $\delta\sigma(\varepsilon, x)$, ce qui fournit la conductance spectrale $G(\varepsilon)$.

$$G(\varepsilon) = \left(\int_0^L \frac{dx}{\sigma_N + \delta\sigma} \right)^{-1} = G_N + \delta G(\varepsilon) \quad (1.4.1)$$

pour l'ensemble du fil. A partir de cette conductance spectrale et des fonctions de distribution dans les réservoirs, on pourra trouver le courant total. Le but de ce paragraphe est de décrire les propriétés de cette conductance spectrale, puis d'étudier l'influence de différents paramètres.

4.2. La conductance spectrale du fil N entre S et N.

4.2.1. Pic de conductivité à la distance L_ε

Afin d'avoir accès aux principales idées physiques, on commence par linéariser les équations d'Usadel paramétrées en θ . On suppose qu'il n'y a ni phase χ , ni paramètre d'ordre Δ , ni champ magnétique, et que la longueur L_φ est infinie. On obtient l'équation (1.4.2) qui décrit la diffusion de l'angle θ .

$$\hbar D \partial_x^2 \theta + 2i\varepsilon \theta = 0 \quad (1.4.2)$$

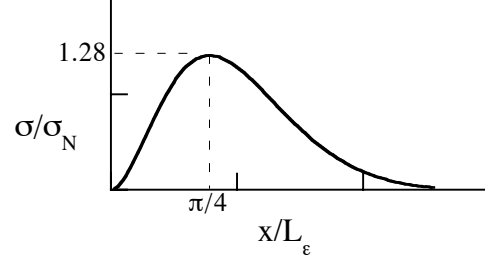
Avant toute chose, commençons par regarder quelle serait la solution de l'équation (1.4.2) pour un fil infini. Supposons que l'on s'intéresse à des énergies très inférieures au gap dans le supraconducteur ($\varepsilon \ll \Delta$), et que la barrière au contact du supraconducteur est parfaitement transparente. Ceci impose la condition : $\theta = \frac{\pi}{2}$ au contact de S (et $\theta = 0$ à l'infini). La solution est alors .

$$\theta(\varepsilon, x) = \frac{\pi}{2} e^{(i-1)\frac{x}{L_\varepsilon}} \quad (1.4.3)$$

La prise en compte du terme L_φ ajouterait simplement une coupure exponentielle à la longueur L_φ . Ici L_ε est la longueur associée à l'énergie ε , que nous avons déjà discutée (paragraphe 1.4 et 2.2.2 de ce chapitre).

$$\sigma(\epsilon, x) = \sigma_N \cosh^2 \Im \theta(\epsilon, x) = \sigma_N \cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{L_\epsilon}} \sin \frac{x}{L_\epsilon} \right) \quad (1.4.4)$$

Figure 1.4.2. Conductivité spectrale d'un fil diffusif infini en fonction de la distance x au supraconducteur .



Nous remarquons sur la figure (1.4.2) un pic à la distance $x = \frac{\pi}{4} L_\epsilon$, c'est-à-dire exactement à la distance où nous avons remarqué un maximum de l'amplitude de paires (paragraphe 1.4 et 2.2.2 de ce chapitre). Si nous calculons l'intégrale donnant la correction de conductance, nous obtenons une loi en $1 / \sqrt{\epsilon}$.

4.2.2. Pic de conductance à l'énergie de Thouless

Dans le fil infini du paragraphe précédent, les énergies les plus basses sont celles qui sont associées aux pics les plus éloignés du supraconducteur. On comprend ainsi que si quelque chose intervient à une distance L du supraconducteur (par exemple longueur de mémoire de phase, ou présence d'un réservoir normal, etc...) alors cela affectera les énergies inférieures à l'énergie de Thouless :

$$\epsilon_c = \frac{\hbar D}{L^2} \quad (1.4.4)$$

Cette énergie jouera un rôle central dans tous les effets mesurés. Elle correspond à l'énergie associée au temps que met un électron pour parcourir la longueur de l'échantillon.

Dans le cas du fil simple, la présence du réservoir N impose une condition $\theta = 0$, ce qui modifie les énergies inférieures à l'énergie associée à la longueur de l'échantillon.

La solution de l'équation d'Usadel prend une forme analytique simple dans le cas d'une équation linéarisée. La solution non linéarisée lui est très proche, et est représentée en trait plein dans la figure 1.4.3., qui représente la conductance spectrale en fonction de l'énergie.

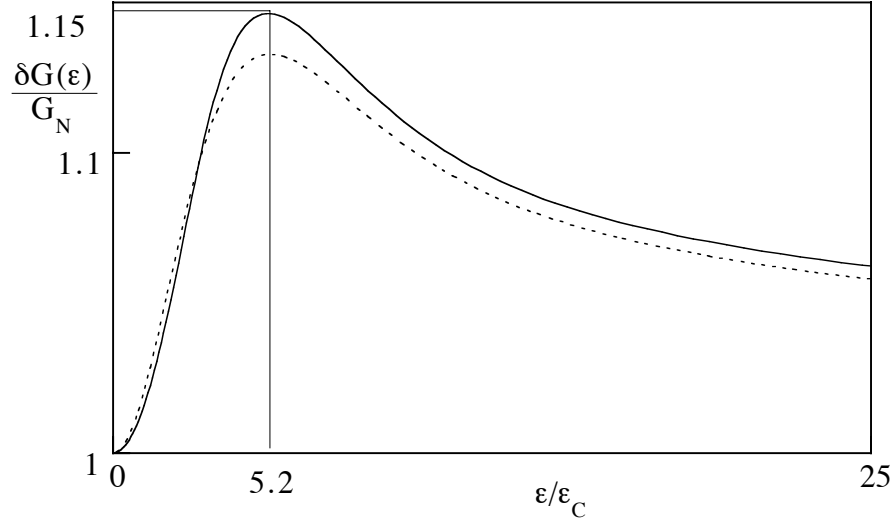


Figure 1.4.3. Conductance spectrale d'un fil normal entre S et N en fonction de l'énergie. Le résultat de l'équation linéarisée est représenté en pointillés, pour comparaison.

On obtient un maximum de conductance aux alentours de $\varepsilon \approx 5.2\varepsilon_c$, d'amplitude $\delta G / G_N \approx 15\%$. Aux hautes énergies, on a une loi $\delta G(\varepsilon) \approx 0.3\sqrt{\varepsilon_c / \varepsilon}$, car ces énergies ne sont pas affectées par la présence du réservoir normal. Par contre, la conductance à énergie nulle est exactement la valeur à l'état normal, et la conductance suit une loi $\delta G(\varepsilon) \approx 1.5 \cdot 10^{-2} (\varepsilon / \varepsilon_c)^2$ pour $\varepsilon \ll \varepsilon_c$, puis pour $\varepsilon \approx 1$ à $3 \varepsilon_c$ une description par $\delta G(\varepsilon) \approx 3 \cdot 10^{-2} (\varepsilon / \varepsilon_c)$ est raisonnable.

La "ré-entrance"

Lorsque l'énergie diminue en dessus de $\varepsilon \approx 5.2\varepsilon_c$, la conductance diminue, jusqu'à retourner à sa valeur à l'état normal. C'est cette diminution que l'on qualifiera de "ré-entrance". Ce comportement a été souligné par Nazarov [44] mais était déjà présent dans par exemple [45]. Sa mise en évidence expérimentale est faite au chapitre 3 de ce travail de Thèse [20].

4.2.3. Peut-on linéariser?

Nous avons linéarisé l'équation d'Usadel en supposant $\theta \ll 1$, et $\theta = \pi/2$ au contact du supraconducteur. Alors $F \approx -i\theta$, et au contact du supraconducteur, nous avons $F = -i$. Nous pourrions penser qu'alors ceci est équivalent à linéariser directement $\hbar D \partial_x^2 F + 2i\varepsilon F = 0$, dans l'équation d'Usadel non paramétrée en θ . Une question se pose alors : sachant que, de toutes façons, une telle linéarisation est assez "brutale", car ni 1, ni $\pi/2$ ne sont très inférieurs à 1, quel est le bon choix de la condition au contact du supraconducteur ?

-Si on linéarise l'équation paramétrée en θ , avec $\theta(S)=\pi/2$, alors on néglige un terme $(\theta - \sin \theta) \approx \frac{1}{6}\theta^3$. Ceci est un terme d'ordre 3.

-Si on linéarise directement l'équation non paramétrée, avec $F(S)=-i$, alors on néglige $\partial_r^2(F - \arg \text{sh} F) \approx \frac{1}{2}F^2 \partial_r^2 F + (\partial_r F)^2 F$. On ne peut rien dire a priori de la dérivée de F , et donc on néglige un terme d'ordre 1 !

En conclusion, on pourra choisir de linéariser l'équation d'Usadel paramétrée dans les cas où θ n'est pas trop grand au contact de S (forte barrière et/ou $\varepsilon \ll \Delta$), ainsi que dans les cas où les effets non linéaires de l'équation ne sont pas trop importants (ils sont cruciaux dans le cas de l'ouverture du gap dans la jonction SNS). En pratique, ceci est le cas dès que les circuits sont "ouverts", c'est-à-dire en contact avec des réservoirs normaux.

La solution linéarisée a été portée en pointillés sur la figure 1.4.3. On peut voir qu'elle ne modifie pas la position du maximum, et qu'elle sous estime un peu son amplitude.

4.3. L'effet de quelques paramètres.

4.3.1. Longueur de mémoire de phase finie.

(figure 1.4.4.)

Lorsque la longueur de mémoire de phase L_φ est très supérieure à la taille de l'échantillon, la conductance spectrale n'est pas modifiée, car c'est la présence du réservoir N qui limite l'effet de proximité aux basses énergies. Lorsque cette longueur devient inférieure à la longueur L du fil, c'est la longueur L_φ qui détermine l'aspect de la conductance spectrale, et les énergies inférieures à $\varepsilon_c(L_\varphi)$ (énergie associée à la longueur L_φ) sont affectées.

Dès que L_φ est supérieur à environ $2L$, la conductance spectrale rejoint celle à L_φ infini. D'un autre côté, si $L_\varphi \ll L$, la position du maximum de conductance spectrale devient alors indépendante de la longueur de l'échantillon et vaut : $1.2 \varepsilon_c(L_\varphi)$. Dès que $L_\varphi < L/2$ environ, tout se passe alors comme si la longueur du fil était de l'ordre de L_φ , et le réservoir N n'intervient plus. L'énergie de Thouless pertinente est celle qui est associée à L_φ , le facteur numérique donnant le maximum est 1.2, contre 5.2 auparavant. Si l'amplitude totale de la correction de conductance est plus faible, c'est que seulement une longueur L_φ est touchée par l'effet de proximité. Le maximum de correction de conductance pour $L_\varphi \ll L$ est de 16.5%, rapporté à la conductance d'une longueur L_φ du fil.

4.3.2. Largeur finie du fil en présence de champ magnétique

Considérons que le fil est constitué d'un film mince de largeur w , et qu'il existe un champ magnétique perpendiculaire au fil. Il faudrait en toute généralité résoudre l'équation d'Usadel dans les deux dimensions. On peut se ramener à un problème ne faisant plus intervenir que la longueur du fil [46]. En effet, on peut intégrer l'équation d'Usadel paramétrée dans la largeur du fil. On cherche à approcher la moyenne de $\left(\partial_r \chi - 2i \frac{\pi}{\phi_0} A\right)^2$ qui est le seul terme dépendant du potentiel vecteur A dans l'équation en θ (1.3.14.a).

A partir de la deuxième équation d'Usadel à l'équilibre (1.3.14.b), on peut montrer qu'il existe une solution où la phase χ ne dépend que de y et est telle que $(\partial \chi)^2 \propto y^4$, que l'on supposera très inférieur à $A^2 \propto y^2$. Dans ce cas, la moyenne cherchée vaut :

$$\frac{4\pi^2}{\phi_0^2} \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} A^2 dy = \frac{\pi^2}{3} \frac{w^2}{\phi_0^2} H^2 = \frac{\pi^2}{3} L_H^2 \quad (1.4.5)$$

Où l'on a noté $L_H = \frac{w}{\phi_0} |H|$ la longueur magnétique, dont la définition est qu'il y a un quantum de flux dans une longueur L_H de fil. Alors on a supprimé le potentiel vecteur de l'équation (1.3.14.a) en remplaçant L_φ par une longueur de mémoire de phase effective $L_{\varphi\text{eff}}$:

$$L_{\varphi\text{eff}}^{-2} = L_\varphi^{-2} + \frac{3}{\pi^2} L_H^{-2} \quad (1.4.6)$$

Ainsi, l'effet du champ magnétique est le même que celui d'une valeur finie de la longueur de la mémoire de phase, que nous venons de voir (paragraphe 4.3.1). Lorsqu'un fil est soumis à un champ magnétique, les amplitudes associées aux trajectoires d'électrons passant par un bord du fil sont déphasées par rapport à celles qui passent sur l'autre bord du fil. Ainsi, un électron perd la mémoire de sa phase dans un fil au bout d'une longueur magnétique L_H .

Conductance spectrale d'un fil N entre N et S: Différentes contributions

Figure 1.4.4. Longueur de mémoire de phase finie.

la longueur L_φ vaut 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.2 et 0.1 fois la longueur totale L du fil. En traits pointillés, la solution linéarisée est représentée. Le maximum est déplacé vers l'énergie associée à L_φ .

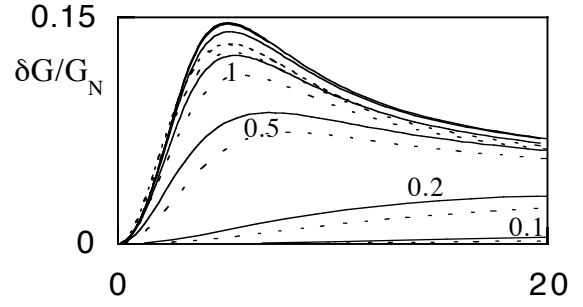


Figure 1.4.5. Section de N : le fil est compris entre S et un autre fil normal infini qui fait 1, 2, 5 et 10 fois sa section. La courbe notée ∞ est la conductance du fil connecté à un réservoir N.

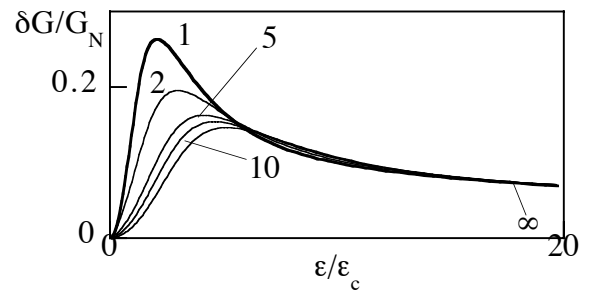


Figure 1.4.6. Faible gap supraconducteur : il vaut ∞ , 100, 50, 20, 10, 5, (2 et 1 en pointillés) fois l'énergie de Thouless sur la figure ci-contre. Une structure se développe à l'énergie du gap. La correction de conductance peut dépasser 100% si le gap est faible comparé à l'énergie de Thouless.

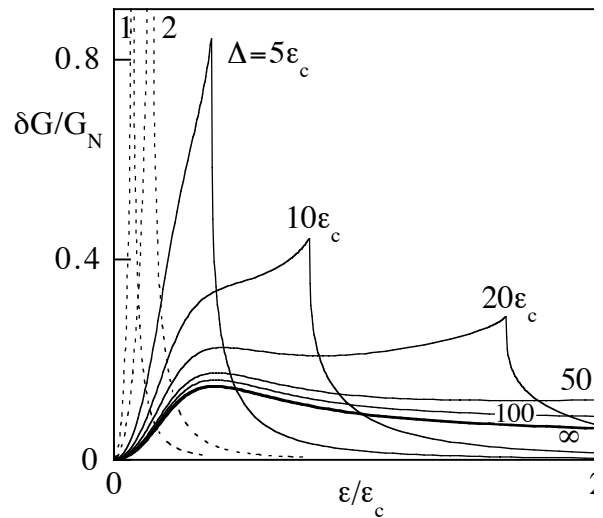
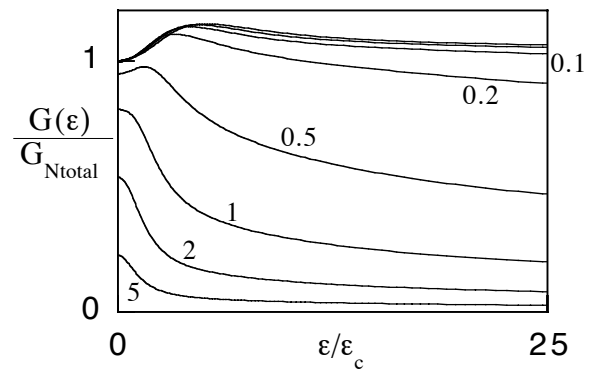


Figure 1.4.7. Présence d'une barrière tunnel à l'interface N-S, dont la résistance vaut 5, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05 fois la résistance totale du fil. On remarque que la conductance à énergie nulle n'est plus la conductance dans l'état normal., et qu'un maximum apparaît à $\varepsilon=0$ (anomalie à polarisation nulle).



4.3.3. Largeur des contacts

Figure (1.4.5.)

Intéressons-nous aux contacts qui sont notés "réservoir N" dans notre modèle de fil. Pour que la condition $\theta = 0$ soit vraiment imposée à ces contacts, il faut que ceux-ci aient une section infinie. Ceci n'est évidemment jamais expérimentalement le cas, pour des raisons d'encombrement géométrique. Ainsi, l'ensemble des courbes présentées (figure 1.4.5.) donne la conductance spectrale théorique du fil compris entre un supraconducteur et des fils de contact de différentes sections totales.

4.3.4. Effet de la présence d'une barrière à l'interface

(Figure 1.4.7.)

Lorsqu'une interface est présente entre le réservoir supraconducteur et le fil, on peut séparer sa contribution en deux effets : un effet de diminution de l'effet de proximité dans le fil, et une augmentation de la résistance de la barrière proprement dite, due à la présence du gap supraconducteur.

Le maximum de conductance à l'énergie de Thouless disparaît avant même que la résistance de la barrière n'ait atteint la moitié de celle du fil. A la place, apparaît un maximum de conductance à énergie nulle, qui correspond à la Z.B.A. (Zero bias anomaly) [47,48].

4.3.5. Effet d'un faible gap supraconducteur

(figure 1.4.6.)

Si le gap supraconducteur est un gap fini, nous pouvons calculer la conductance théorique du fil en imposant la condition $\theta = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{argth}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)$. On observe une augmentation de l'amplitude de la correction de conductance, et un pic apparaît pour des énergies proches du gap.

Nous remarquons surtout que si l'énergie de Thouless est proche du gap, l'augmentation de conductance spectrale peut dépasser 100 %.

4.4. Conductance totale d'un fil

4.4.1. Formulation

Nous considérons dans cette section, que les réservoirs sont "parfaits". On appelle "parfait" un réservoir où la fonction de distribution des électrons est exactement la distribution de Fermi-Dirac, et où la température est celle qui est indiquée par le thermomètre. C'est-à-dire que dans un tel réservoir idéal les électrons sont d'une part parfaitement thermalisés entre eux, et d'autre part parfaitement thermalisés avec le bain de phonons.

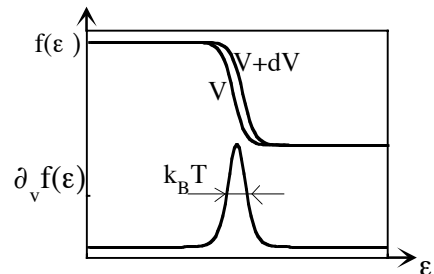
Plaçons nous à nouveau dans le cas idéal du fil entre N et S. Si f est la fonction de distribution dans le réservoir N, on a vu (1.3.30.) que le courant total s'exprime par la somme sur l'énergie de chaque courant $G(\epsilon)f(\epsilon)$. En dérivant par rapport à la tension V , on obtient :

$$\frac{dI}{dV}(V) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\epsilon) \partial_V f(\epsilon) d\epsilon \quad (1.4.7)$$

où $\partial_V f(\epsilon)$ est la dérivée par rapport à V de la fonction de distribution dans le réservoir, ("fonction pic" au bas de la figure (1.4.8), par laquelle il faut convoluer la conductance spectrale) :

$$\partial_V f(\epsilon, V) = \left[4k_B T \cosh^2 \left(\frac{\epsilon - eV}{2k_B T} \right) \right]^{-1} \quad (1.4.8)$$

Figure 1.4.8. La variation de la fonction de distribution dans N lorsque la tension passe de V à $V+dV$ (en haut) provoque une variation de courant pour les énergies comprises dans un "pic" de largeur $k_B T$ (en bas) . La conductance différentielle à V est donc la convolution de la conductance spectrale par ce pic de largeur $k_B T$



A $T=0$, la caractéristique différentielle $dI/dV(V)$ est une spectroscopie de la conductance spectrale. On peut traduire ceci de la manière suivante : lorsque l'on passe d'une tension V à $V+dV$, l'intervalle d'énergie des charges injectées passe de $[0,V]$ à $[0,V+dV]$, c'est-à-dire qu'on injecte en plus des charges entre eV et $e(V+dV)$ ce qui ajoute un courant : $dI = g(\epsilon)dV$. A plus haute température, c'est la différence des fonctions de distribution à V et $V+dV$ qui intervient, comme montré sur la figure 1.4.8.

La fonction par laquelle on convolue est un "pic" de hauteur $1/k_B T$ et de largeur $k_B T$. Cette fonction tend vers une distribution δ de Dirac lorsque T tend vers 0.

4.4.2. Conductance différentielle à différentes températures

Le graphique 1.4.9. représente la conductance différentielle théorique d'un fil N entre N et S en fonction de la tension à différentes températures. Il montre que le maximum de conductance à l'énergie de Thouless disparaît à une température "de Thouless" $k_B T \approx \epsilon_C$, et à tension nulle, on remarque un maximum pour $T \approx 5\epsilon_C / k_B$, avec une correction de conductance d'environ 9%.

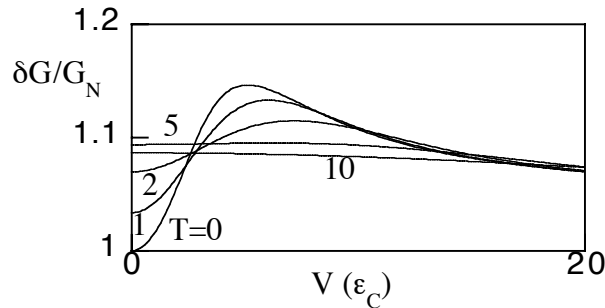


Figure 1.4.9. Conductance différentielle théorique d'un fil à différentes températures $T=0,1,2,5$ et $10 \epsilon_C / k_B$.

L'aspect de la conductance à tension nulle en fonction de $k_B T$ ressemble donc à la conductance différentielle en fonction de eV à température nulle. Ceci n'est bien sûr pas général, et par exemple une structure "pic" dans la conductance spectrale serait bien entendu élargie et aplatie. Aux basses températures, la correction de conductance spectrale est $\propto \epsilon^2$, et la correction de conductance est :

$$\delta G \propto \frac{1}{k_B T} \int_0^{k_B T} \varepsilon^2 \propto T^2 \quad (1.4.9)$$

Aux hautes températures, la correction de conductance est : $\delta G(\varepsilon) \approx 0.3 \sqrt{\varepsilon_c / \varepsilon}$

$$G \propto \frac{1}{k_B T} \int_0^{k_B T} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon_c / \varepsilon} \propto \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{k_B T}} \approx \frac{L_T}{L} \quad (1.4.10)$$

Ceci correspond à l'image "naïve" de l'effet de proximité où l'on retranche une longueur L_T à la résistance totale du fil. Cette loi en $1 / \sqrt{T}$ a été proposée par Spivak [39].

Cette méthode de calcul s'applique d'une manière très générale à des circuits quelconques (cf. Annexe A.3.).

Références bibliographiques

- [1] Bardeen Cooper et Schrieffer Phys. Rev. 108, 1175 (1957)
- [2] Tinkham, Introduction to Superconductivity, Mc Graw Hill (1996)
- [3] De Gennes, Superconductivity of metals and alloys, Addison-Wesley (1989)
- [4] Andreev, Sov. Phys. JETP 19, 1228 (1964)
- [5] Blonder, Tinkham, Klapwijk Phys. Rev. B 25, 4515 (1982)
- [6] Octavio, Tinkham, Blonder, Klapwijk, PRB, 27,6739 (1983)
- [7] Beenakker, Phys. Rev. Lett. 67,3836 (1991)
- [8] Visani, Mota, Pollini, Phys. Rev. Lett. 65, 1514 (1990)
- [9] Landauer, Physica Scripta, T42, 110 (1992)
- [10] Büttiker, Phys. Rev. B46, 12845 (1992)
- [11] Lambert, J phys cond matt 5 4187 (1993)
- [12] Beenakker *Les Houches Summer School* Session LXI (1994)
- [13] Beenakker and Van Houten, Solid state Phys., 44, Academic Press (1991)
- [14] Frahm, Brouwer, Melsen, Beenakker, Phys. Rev. Lett., 76, 2981 (1996)
- [15] Argaman, preprint cond-mat 9608084 (1996)
- [16] Datta, Bagwell, Anantram, *Scattering theory of transport for mesoscopic*

(1996)

- [17] Beenakker, Phys. Rev. B 46, 12841 (1992)
- [18] Imry, Europhys. Lett. 1, 249 (1986)
- [19] Volkov, Allsopp, Lambert [submitted to] J. Phys. Cond. Matt. (1996)
- [20] Charlat, Courtois, Gandit, Mailly, Volkov, Pannetier, Czech. J. of Phys. 46, S6 (1996)
- [21] Lambert Physica B 203, 201 (1994)
- [22] Wolf, *Principles of electron tunneling spectroscopy*, Oxford science publication, p 103
- [23] Büttiker et al PRA 30 1982 (1984)
- [24] Cohen Tannoudji, Diu, Laloë, *cours de Mécanique Quantique*, Hermann (1977)
- [25] Fisher, Lee Phys. Rev. B 23, 6851 (1981)
- [26] Datta, *Electronic transport in mesoscopic systems*, Cambridge University Press (1995)
- [27] Keldysh, Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)
- [28] Caroli and Nozières J. Physics C, C4, 916 (1971)
- [29] Schrieffer *Theory of superconductivity*, Addison-Wesley (1964)
- [30] Rammer and Smith Rev. Mod. Phys. 58, 323 (1986)
- [31] Eliashberg, Sov. Phys. JETP 34, 668 (1971)
- [32] Larkin, Ovchinnikov, Sov.Phys. JETP 41, 960 (1975)
- [33] Schmid, dans *Nonequilibrium Superconductivity, Phonons, and Kapitza Boundaries* ,
NATO Advanced Study Institute, Plenum (1981)
- [34] Usadel, Phys. Rev. Lett. 25, 507 (1970)
- [35] Stoof and Nazarov Phys. Rev. B. 53, 14496 (1996)
- [36] Volkov, Zaitsev, Klapwijk, Physica C 210, 21 (1993)
- [37] Nazarov, Phys. Rev. Lett. 73, 1420 (1994)
- [38] Schmid et Schön J. Low Temp. Phys., 20, 207 (1975)
- [39] Zhou, Spivak, Zyuzin Phys. Rev. B 55, 4467 (1995)
- [40] Guéron, Pothier, Birge, Estève, Devoret, Phys. Rev. Lett. 76, 3025 (1996)
- [41] Volkov and Zaitsev, Phys. Rev. B 53, 9267 (1996)
- [42] Kupriyanov and Lukichev, Sov. Phys. JETP 67, 1163 (1988)
- [43] Yip, Phys. Rev. B. 52, 15504 (1995)
- [44] Nazarov and Stoof Phys. Rev. Lett. 76, 823 (1996)
- [45] Volkov Phys. Lett. A 187, 404 (1994)
- [46] Pannetier, Chaussy, Rammal, Phys. Scripta, T13, 245 (1986)
- [47] Kastalsky, Kleinsasser, Greene, Bhat, Milliken, Harbison, Phys. Rev. Lett. 67, 3026
(1991)

[48] Xiong, Xiao, Laibowitz, Phys. Rev. Lett, 71, 1907 (1993)

CHAPITRE 2

Méthodes expérimentales

Les mesures de transport électrique à très basses températures demandent un soin particulier. Nous en présentons d'abord les différents points. Ensuite, la fabrication d'échantillons submicroniques fait appel à des techniques récentes de nanofabrication, et ce sont de telles techniques qui sont l'objet de la suite de ce chapitre. Enfin, la fabrication des échantillons du chapitre 5 présente la particularité supplémentaire de nécessiter la mise en oeuvre de niobium, et a été l'objet du développement d'une technique de fabrication conçue spécialement pour répondre aux particularités de ce métal.

1. Cryostat et mesure

référence [1]

Les mesures de transport ont été effectuées dans un réfrigérateur à dilution jusqu'à des températures de 22 mK [2]. L'échantillon est monté sur une platine de cuivre régulée en température. Une bobine supraconductrice permet d'appliquer un champ magnétique jusqu'à 400 mT. La bobine est munie d'un court-circuit supraconducteur, ce qui permet de piéger un champ magnétique constant. L'ensemble des appareils de mesure est piloté par informatique.

1.1. Montage d'un échantillon

Les échantillons mesurés sont très fragiles. Deux étapes sont particulièrement délicates : l'étape de soudure par ultrasons, où il faut que tout soit relié à une même masse, et la connexion dans le réfrigérateur à dilution, où une mise simultanée de tous les fils à la masse du cryostat peut se faire à la sortie du cryostat. L'échantillon est positionné dans une boîte métallique blindée thermalisée, pour limiter les effets du rayonnement environnant à 1K. Les fils de mesure, susceptibles d'apporter un rayonnement parasite qui viendrait réchauffer

l'échantillon, entrent dans ce boîtier par des filtres hyperfréquence intégrés, dont la résistance est de l'ordre de $1\text{ k}\Omega$ [1,3]. Ces filtres ont un rôle d'autant plus important que les échantillons mesurés ont une forte résistance. Pour les échantillons de faible résistance, leur présence crée un chauffage du boîtier par effet Joule lors du passage d'un courant de polarisation. Ils ont été enlevés quand ils constituaient un handicap trop grand de ce point de vue, c'est-à-dire en particulier pour l'échantillon du chapitre 3, et pour l'échantillon "boucle 10.6" du chapitre 4. La comparaison des mesures effectuées avec des échantillons de résistances et de géométries comparables a montré que ces filtres ne sont pas primordiaux pour des échantillons de $10\text{ }\Omega$. A l'entrée du cryostat, la présence de filtres RC (10 nF , $7\text{ }\Omega$) permet de filtrer chaque fil.

1.2. Mesure de transport

Deux dispositifs de mesure différents ont été utilisés. Dans les deux cas, il s'agit de techniques de mesures "4 fils".

Pour les résistances fortes, l'électronique de mesure mise au point par H.Courtois [1] a été utilisée. Un étage d'amplification et de commande bas niveau est installé directement à la sortie du cryostat, dans un boîtier blindé. Cet étage comprend une source de courant commandée en tension dont les gammes vont de 1 nA à $10\text{ }\mu\text{A}$ pour 10 V pleine échelle, qui permet d'injecter le courant de mesure, alternatif de fréquence 300 Hz , additionné d'un courant de polarisation constant. Un premier étage d'amplification du signal de tension est situé dans ce boîtier. La tension est lue par une détection synchrone après un deuxième étage d'amplification.

Pour les mesures de résistances plus faibles, un pont de mesure alternatif basse fréquence (33 Hz) F.R. (basse impédance) Barras Provence est utilisé. On peut, avec un même échantillon, passer d'un système de mesure à l'autre, à condition que les deux systèmes de mesure soient bien référencés à la masse avant l'opération (une erreur de masse a coûté la vie d'un échantillon lors de cette manoeuvre !). Un boîtier spécial permet d'injecter le courant de polarisation dans les fils de mesure à partir d'une source de courant flottante. Dans ce boîtier, des condensateurs de forte capacité ($2000\text{ }\mu\text{F}$) coupent les composantes continues sans atténuer la fréquence à 33 Hz . Ceci permet d'utiliser les fils de constantan (0.2 mm) et de cuivre (0.07 mm) qui "descendent" dans le cryostat simultanément, en ne s'inquiétant pas de l'effet thermoélectrique continu de 7 mV qui apparaît entre ces deux fils lorsque le cryostat est froid. Ces fils ont été utilisés pour les mesures multi-réservoir de l'échantillon présenté au chapitre 3.

Ces systèmes de mesure sont commandés par informatique via une interface IEEE reliée à une centrale d'acquisition de données HP 3852A et à un micro-ordinateur HP 9000-300 programmé en Basic.

1.3. Champ magnétique

Des écrans de μ -métal extérieurs permettent de limiter le champ résiduel à l'intérieur du cryostat.

Pour effectuer des mesures à différents champs magnétiques, il faut, à chaque nouvelle consigne du champ magnétique, injecter un courant égal au courant piégé, puis réchauffer le court-circuit supraconducteur. Puis, en changeant très progressivement le courant dans la bobine, on réussit à changer le champ magnétique sans que les courants de Foucault ne réchauffent trop l'échantillon. Enfin, on laisse le court-circuit se refroidir. Quand il est froid, un nouveau courant est piégé dans la bobine. Une méthode originale pour tester l'état du court-circuit supraconducteur est d'utiliser le bruit de sortie de la source de courant qui alimente la bobine. Lorsque le court-circuit est ouvert, la forte inductance (2.6 H) de la bobine fait que la tension aux bornes de celle-ci (et donc aux bornes du court-circuit) est très bruitée. Lorsque le court-circuit est fermé, la tension à ses bornes devient rigoureusement nulle, et le bruit chute brutalement. Ainsi, grâce à une mesure RMS de la tension aux bornes de la bobine, on peut déterminer l'état du court-circuit supraconducteur.

1.4. Mesure de la température

La température de la platine thermalisée sur laquelle se trouve l'échantillon est déterminée grâce à une résistance de germanium, dont la résistance est mesurée par un pont de mesure alternatif basse fréquence P.I.O. (haute impédance) Barras Provence. Cette résistance permet de mesurer la température entre 42.5 mK et 3K. En dessous de 42.5 mK, la résistance est supérieure à 1 M Ω , et au dessus de 3 K, la variation de résistance en fonction de la température devient trop faible pour une mesure précise. Lorsque la température est trop faible (ou en cas de défaillance de la résistance de germanium), une résistance de carbone 51 Ω Matsushita est utilisable de moins de 20 mK à 0.5 K.

La température de la boîte à mélange est déterminée par une mesure de susceptibilité d'un sel paramagnétique CMN, qui obéit à la loi de Curie.

2. Techniques de fabrication

Nous allons dans ce paragraphe exposer quelques principes généraux sur la fabrication d'échantillons submicroniques par la technique de lithographie électronique. Une méthode détaillée, basée sur ces principes, a été développée ensuite. Le but de ce paragraphe est de présenter les principes généraux de la lithographie, puis d'exposer la méthode de fabrication des échantillons dont les mesures sont présentées aux chapitres 3 et 4.

2.1. Principes de lithographie

2.1.1. Lithographie électronique

Lorsqu'un faisceau d'électrons frappe une couche de résine électro-sensible (c'est-à-dire un polymère) positive, les chaînes de ce polymère sont coupées en petits morceaux. Lorsque l'on plonge ensuite cette couche de résine dans un solvant dont la particularité est de pouvoir dissoudre surtout les chaînes suffisamment courtes (un développeur), alors seules les parties exposées aux électrons ("insolées") sont dissoutes. En effet, la solubilité d'un polymère dans un solvant compatible dépend de sa masse moléculaire. On forme ainsi un motif dans la résine. Notons qu'il existe des résines sensibles à autres choses qu'à des électrons, les ultra-violets sont très utilisés dans l'industrie de la micro-électronique. Notons aussi que d'autres méthodes existent pour obtenir une résine positive. Par exemple, un groupement chimique qui empêche la dissolution peut être greffé sur la résine (protection), et l'enlèvement de ce groupement par insolation provoquera une solubilité. Notons enfin qu'il existe des résines négatives, qui sont, à l'inverse, deviennent insolubles lors de l'insolation.

Ce procédé de lithographie peut être utilisé soit en gravure, soit en lift-off. En gravure, on commence par déposer la couche métallique à lithographier. On dépose ensuite la résine, que l'on lithographie. Puis on transfère le motif dans le métal par gravure chimique ou plasma réactif, et seules restent les parties du métal qui sont restées protégées par de la résine. La technique de Lift-Off consiste à déposer la résine (souvent sur une plaquette de silicium), puis à la lithographier. On évapore ensuite une couche de métal sur cette résine. Dans les endroits où la résine a été enlevée par la lithographie, le métal est posé directement sur le substrat,

alors qu'il est déposé sur la résine partout ailleurs. On dissout alors la couche de résine, et seules restent les parties qui ont été évaporées directement sur le substrat. Dans le cas de cette technique, il est nécessaire d'avoir un profil "en surplomb" des motifs dessinés dans la résine, comme montré sur le schéma 2.2.1.

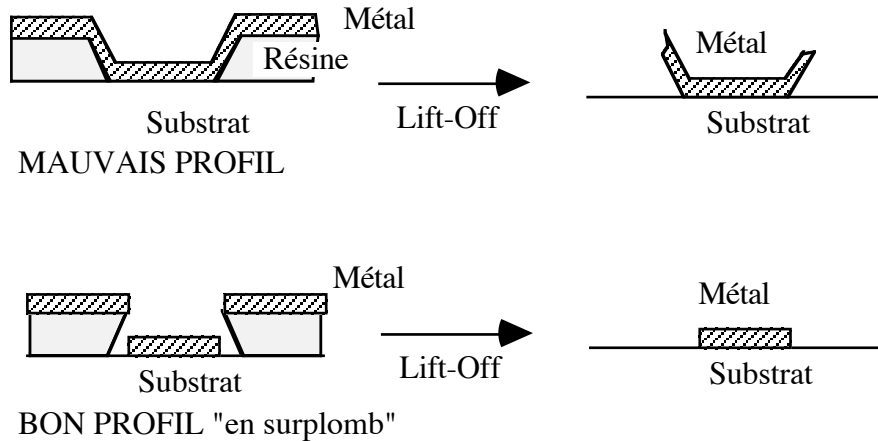


Figure 2.2.1. En haut, le profil de la résine lithographiée n'est pas correct. La couche de métal après évaporation est continue, et le lift-off ne se fait pas correctement. En bas, un profil "en surplomb" (ou au moins vertical) permet que le lift-off se passe bien.

Pour obtenir un tel surplomb un développement approprié suffit, du fait que les électrons sont rétrodiffusés par le substrat et insolent le bas de la couche de résine sur une largeur plus grande que le haut de la couche. On peut faciliter la formation d'un tel profil en utilisant une technique bicouche.

La résine électrosensible utilisée dans ce travail de thèse est le PMMA (PolyMethylMethAcrylate).

2.1.2. La couche de résine

Pour former correctement le motif désiré dans la couche de résine électrosensible, il faut commencer par étaler celle-ci. Pour effectuer cet étalement, on dissout la résine dans un solvant approprié, le chlorobenzène ($C_6H_5 - Cl$) pour le PMMA, puis on l'étale avec une "tournette", c'est-à-dire par une centrifugation. L'épaisseur de la couche obtenue dépend de la concentration de résine et de la vitesse angulaire.

Après cet étalement, la plus grande partie du solvant utilisé s'est évaporé. Il a laissé à sa

place un volume libre dans la couche de résine. C'est ici qu'intervient l'étape importante du recuit. le recuit consiste à porter la couche de résine à une température supérieure à la température T_g de la transition vitreuse, qui décrit le passage de la résine d'un état vitreux rigide à basse température à un état plastique à plus haute température, où les molécules ont plus de mobilité et où la résine peut fluier. Une minute de recuit est suffisante à une température de l'ordre de 40 à 45 °C au dessus de T_g . Le recuit rassemble plusieurs rôles [4]:

-Le premier rôle est d'éliminer les solvants résiduels. La quantité de solvant résiduel après recuit et son influence ont été très controversés. D'après L.Pain [5], les quantités résiduelles sont très faibles. La plus grande partie des solvants résiduels sont évaporés dans les premières secondes du recuit [6].

-Un second rôle est d'éliminer le volume libre laissé par le solvant. Cette opération permet une densification de l'ordre de 10 % de la couche de résine, ainsi qu'une stabilisation physique. Enfin, cette étape permet de relâcher les contraintes internes à la couche qui existent après l'étalement et l'évaporation du solvant.

-Au total, la densification et l'élimination des solvants résiduels permet de diminuer la diffusion des petites molécules à l'intérieur de la couche.

2.2. Echantillons des chapitres 3 et 4.

Les échantillons présentés dans les deux chapitres suivants ont été fabriqués au LMM à Bagneux par D.Mailly. La technique est une technique classique de lift-off sur un monocouche de PMMA, en deux étapes. Un masqueur électronique permet de dessiner le motif de Cuivre lors d'une première étape. Le dépôt du cuivre est effectué, puis on procède au lift-off de la couche de résine, pour faire ensuite le dépôt d'aluminium suivant le même procédé. Lors de ces deux étapes, la largeur des fils obtenus dans certains échantillons était parfois de moins de 40 nm.

La difficulté est d'effectuer un repositionnement à mieux que 100 nm près, grâce à des repères sur l'échantillon. Juste avant le dépôt d'aluminium, la surface de cuivre est décapée *in-situ*, à l'aide d'un canon à ions Argon (durée 15 s sous 500 V et 10 mA). Ceci permet de réaliser une interface la plus propre possible entre le cuivre et l'aluminium. L'interprétation qualitative des mesures (chapitre 3) permettra d'estimer que la résistance de l'interface est inférieure à 2 Ω environ dans le cas du "fil latéral", ceci pour une surface de l'ordre de 200nm x 80nm.

Cette technique de fabrication, qui demande de déposer chaque couche de métal successivement, a l'énorme avantage qu'elle permet de faire quasiment toutes les géométries que l'imagination fertile des expérimentateurs peut élaborer. Ce sont de telles techniques de dépôts multiples avec ré-alignement qui sont utilisées dans l'industrie de la micro-électronique pour lithographier les structures les plus complexes des microprocesseurs modernes.

3. Technique de Niobium en Lift-Off

Nous avons besoin d'une technique permettant de juxtaposer du Niobium avec un métal normal pour réaliser l'expérience concernant la relaxation des niveaux dans une jonction SNS (voir chapitre 5). Les principes généraux d'une lithographie électronique ont été présentés dans le chapitre consacré aux techniques de fabrication d'échantillons. Il s'agit, dans ce paragraphe, de développer sur ces principes généraux une technologie qui permette de fabriquer des échantillons mettant en contact du Niobium avec un métal normal. Le Niobium est nécessaire pour une température de transition T_c élevée (9.25 K dans le matériau massif). Mais il présente plusieurs problèmes spécifiques. C'est un matériau réfractaire, qui demande d'être porté à haute température pour être évaporé (près de 3000°C). Alors un rayonnement intense se dégage de la source de Niobium, qui chauffe la structure en résine. De plus le Niobium est un matériau qui piège facilement les gaz présents, et se trouve donc facilement pollué au cours de l'évaporation. Lorsqu'il est pollué, sa température de transition se trouve fortement réduite, voir annulée.

3.1. Technologie tricouche

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté le principe général d'une technique de fabrication par "lift-off". Pour pouvoir mettre deux métaux différents en contact dans une géométrie donnée, il fallait, dans les échantillons fabriqués, que l'on procède à la réalisation de l'échantillon en deux étapes complètes de lithographie. Il fallait d'abord ré-aligner

correctement le motif (à moins de 100 nm près) pour la deuxième étape, par exemple pour repositionner le supraconducteur sur le fil normal dans le cas des échantillons avec une structure en boucle. Pour avoir une bonne interface, il fallait procéder à un décapage ionique avant de déposer la deuxième couche. On peut aussi éviter ces deux étapes, en utilisant des techniques d'ombrage. Le principe d'une telle technique d'ombrage est illustré dans la figure 2.3.1.

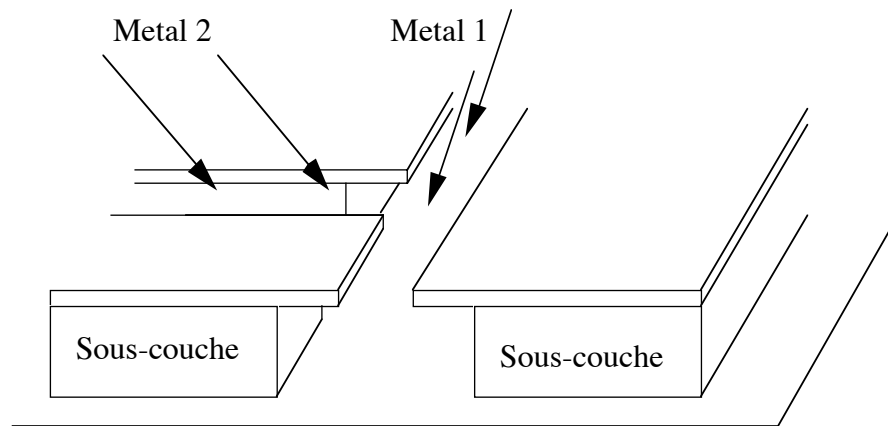


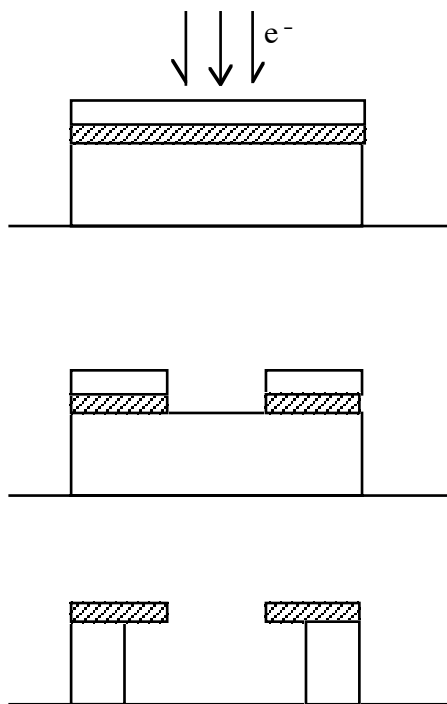
Figure 2.3.1 Le principe général d'une technique d'évaporation par ombrages. Le motif lithographié est posé sur une sous-couche qui présente une ouverture horizontale plus large que le motif, et constitue un "masque suspendu". Des évaporations directionnelles de métaux différents (numérotés 1 et 2) à travers ce masque permettent de les juxtaposer dans des géométries particulières, à la manière de peintures à travers un pochoir.

Les avantages de telles technologies sont d'abord qu'il n'y a besoin que d'une seule étape de lithographie, pour la fabrication du masque suspendu. Ainsi il n'y a pas besoin d'une deuxième lithographie qui demande un ré-alignement précis du motif. Un deuxième avantage est que l'on peut faire les évaporations des deux métaux successivement, sans mettre l'échantillon à l'air libre. On peut ainsi avoir de bonnes interfaces sans qu'un décapage de la surface du premier métal ne soit nécessaire avant le dépôt du deuxième métal, à condition, bien sûr, que le vide de l'enceinte dans laquelle se trouve l'échantillon soit suffisamment bon (Ultra-Haut-Vide). On voit aussi que les techniques d'ombrages réclament de réaliser la structure de masque suspendu, à partir d'au moins une sous-couche et une couche qui constituera le masque.

Une méthode de réalisation de tels masques est la technologie dite "Bicouche" [1], qui a l'avantage de la simplicité, mais où le rôle de sensibilité aux électrons et le rôle de masque

sont confondus. On peut difficilement, avec cette méthode, obtenir des dégagements importants et contrôlés dans la sous-couche sans que le masque ne se déforme. Une solution consiste à rajouter un degré de liberté supplémentaire en faisant remplir la fonction de masque par une couche rigide. Nous avons choisi le silicium, mais on peut aussi choisir un autre matériau, la seule condition est que l'on puisse réaliser la lithographie dans cette couche. Pour réaliser cette lithographie, on a besoin d'une couche supplémentaire de résine électrosensible, et on obtient ainsi une technologie tricouche. La technologie tricouche standard fait intervenir une couche rigide de germanium [7, 8].

Figure 2.3.2. Principe général d'une technique tricouche.



Un tricouche constitué de bas en haut d'une sous-couche, d'une couche rigide, et d'une couche électrosensible. Dans un premier temps, la couche électrosensible est insolée par un faisceau d'électrons, suivant le motif désiré.

Dans un deuxième temps, la couche électrosensible est développée. Le motif ainsi dessiné dans la résine électrosensible est ensuite transféré à la couche rigide.

Enfin, on dégage la couche inférieure sur la longueur désirée, et on enlève les restes de la couche électrosensible. On obtient ainsi le masque suspendu désiré.

Cette méthode présente de nombreux avantages. Tout d'abord, la couche électrosensible peut être très fine, ce qui permet d'affiner beaucoup les largeurs de traits. En plus de ce gain en résolution, on peut choisir la longueur sur laquelle on dégage la couche inférieure. Enfin, la faible épaisseur de la couche rigide qui constitue le masque permet des angles d'évaporation plus importants (on ne peut pas déposer sous 45° un trait de 100 nm de largeur à travers un masque qui fait plus de 100 nm d'épaisseur!). Tout cela permet une beaucoup plus grande souplesse, et une plus grande diversité dans les géométries réalisables.

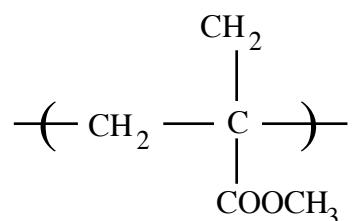
Au cours de ce travail, nous avons finalement opté pour une épaisseur de la couche

rigide de silicium de 400 Å. La lithographie de cette couche est obtenue grâce à une lithographie d'une couche de PMMA dilué à 2% dans le chlorobenzène, puis étalé à 4000 tr/mn, ce qui donne une couche de résine de 850 Å d'épaisseur. Le transfert du motif est effectué par un plasma réactif (RIE) de SF₆, dans un réacteur de marque Plassys, à une pression de 2.10⁻² mbar et une puissance de 20 W. Dans ces conditions, on obtient en 15 s une attaque directive (anisotrope) des parties de silicium qui ne sont pas protégées par la résine. L'épaisseur de la couche supérieure de PMMA doit être suffisante, car elle est attaquée elle aussi par le plasma [note 6].

La sous-couche combine deux rôles. Le premier est un rôle de séparation entre le masque et le wafer de silicium, et le second est une fonction de "lift-off" qui veut dire qu'il doit exister un solvant pour enlever la sous-couche et tout ce qui se trouve dessus, une fois l'évaporation terminée. La sous-couche doit en outre résister sans dommage à toutes les étapes du procédé, depuis l'étape de dépôt du masque, jusqu'à celle des évaporations de métaux sous angles. C'est cette sous-couche qui est l'objet des deux paragraphes suivants.

3.2. Sous-couche de PMMA

Une technique de tricouche à base de PMMA a été d'abord tentée. Attardons-nous quelques instants sur le PMMA. Il s'agit d'un polymère dont la formule chimique est la suivante :



La partie entre parenthèses représente le monomère, qui, répété un très grand nombre de fois, forme un polymère. La liaison entre les monomères peut se briser facilement, si par exemple la résine est portée à de trop hautes températures, ou si des électrons viennent frapper la résine. C'est de là que provient la fonction électrosensibilité, car ensuite on peut, grâce à un solvant, enlever les parties où les chaînes de PMMA ont été coupées en morceaux assez courts pour être facilement solubles.

La réalisation même du tricouche lui-même pose problème. En effet, la sous-couche doit résister au recuit de la couche électro-sensible. Or, un recuit doit théoriquement être fait à des températures supérieures à la température T_g de la transition vitreuse. Dans le cas du

tricouche PMMA, la sous-couche et la couche sensible sont le même matériau, et donc ont le même T_g de 110 °C environ, et la sous-couche de PMMA est dans l'état plastique où elle peut fluer et où des contraintes résiduelles éventuelles se relâchent. Ainsi, la couche supérieure de PMMA est recuite à une température inférieure à la température habituelle (à 140 °C contre 160 °C), sans quoi le tricouche se déforme et paraît frippé.

Le dégagement latéral du PMMA est obtenu en éliminant dans un premier temps les parties de la sous-couche qui ont été insolées lors de la lithographie (celles qui se trouvent juste sous les motifs). On réalise ceci en plongeant l'échantillon dans un développeur. On réalise ensuite le dégagement à l'aide d'une gravure RIE d'oxygène [note 12].

On réalise ensuite l'évaporation de Niobium. On constate que le masque s'est complètement déchiré pendant l'évaporation, et que de nombreuses cloques apparaissent sur le tricouche. Au total, la sous-couche de PMMA a une mauvaise tenue pendant l'évaporation de Niobium, probablement à cause du très fort rayonnement de la source de Niobium pendant l'évaporation. Il s'en suit un fluage de la sous-couche qui déchire le masque de silicium. Les cloques seraient, quant à elles, probablement dues à la dégradation du PMMA qui provoquerait l'émission de gaz. Des essais sur Hot-Plate montrent que les cloques apparaissent sur la couche de PMMA vers 300 °C, ce qui tendrait à faire penser que la température de l'échantillon atteint cet ordre de grandeur, à moins que la dégradation ait une autre cause que la seule température (par exemple rayons X et UV profonds émis par la source).

On constate enfin que le Niobium évaporé dans ces conditions n'est pas supraconducteur, car il a été pollué par les gaz émis par la résine.

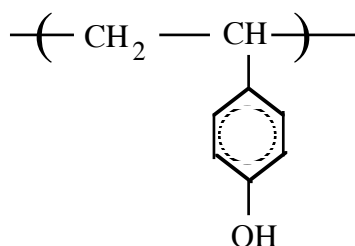
Les problèmes à répétition causés par l'évaporation de Nb sur la résine PMMA proviennent du fait que le PMMA est une bonne résine électrosensible, et que, par conséquent, elle se dégrade lorsqu'elle est soumise à des électrons, ou à une élévation de température. On peut gager qu'une telle fragilité de la résine provoque inmanquablement des dégazages qui polluent irrémédiablement le Niobium, et que la faible valeur de la température de transition vitreuse provoque des déformations. La propriété d'électrosensibilité d'une résine, qui implique qu'elle doit avoir une certaine fragilité, est donc un handicap pour une sous-couche servant à une technique de Niobium en Lift-Off.

3.3. Sous-couche thermostable

La seule justification du choix du PMMA comme sous-couche, est que cette résine est bien connue et disponible. Le PMMA n'a en revanche aucune propriété particulièrement intéressante pour en faire une sous-couche. Ce qu'on demande à une sous-couche, c'est de se résister correctement à toutes les étapes de la lithographie, de ne pas trop dégazer lors de l'évaporation du Niobium, et de pouvoir rester soluble lors de l'étape de Lift-Off. Ainsi, Harada et ses collaborateurs [9] ont choisi une sous-couche où la fonction "résistance" est assurée par une résine S-1813 (Shippely) recuite à une température telle qu'elle est réticulée (la réticulation est le fait que les chaînes de polymères se retrouvent soudées les unes aux autres, et donc que l'ensemble de la couche de résine est une gigantesque macromolécule insoluble). La fonction de solubilité pour le "lift-off" est assurée par une sous-couche très fine de PMMA. Le Niobium évaporé alors a une température de transition de 2.88 K, très loin du matériau massif. Cette valeur très faible est probablement due à la présence de PMMA. En collaboration avec P. Paniez (CNET Meylan), nous avons porté nos efforts sur la réalisation d'une sous-couche à partir d'une résine dont les propriétés seront adaptées, au premier rang desquelles, la thermostabilité, qui traduit à la fois une valeur élevée de la transition vitreuse, et aussi de la température de dégradation chimique.

3.3.1. Le PHS (poly paraHydroxyStyrène)

Un premier polymère thermostable a été tenté : le PHS, dont la formule chimique est la suivante :



Où le monomère entre parenthèses est répété n fois. Cette molécule est de la forme $(-\text{CH}_2 - \text{CHX}-)$, où X est un ici un phénol. Le PHS, qui pourrait s'appeler aussi polyvinylphénol, est donc un polystyrène auquel est ajoutée une fonction hydroxyle $-\text{OH}$ qui assure la solubilité. Trois masses moléculaires de cette résine ont été tentées : PHS $\text{mw}=23600$, PHS $\text{mw}=109000$, PHS $\text{mw}=30000$. (mw pour masse moléculaire). Le solvant utilisé pour l'étalement est le Diglyme (Ether diméthylque du diéthylène-glycol).

Avec ces trois résines, des tricouches d'excellents aspects ont été obtenus. Le PHS 23600 a été dilué dans le Diglyme à 25 %, et étalé à 4000 tr/mn, ce qui donne une couche de 1,5 μm d'épaisseur après recuit. Le PHS 109000 a été dilué à 15 % et étalé dans les mêmes conditions, ce qui fournit une couche de 0,8 μm d'épaisseur. La température de recuit est de 230 °C pendant 1 minute (la température de transition vitreuse est de l'ordre de 180 °C). A partir de 240 à 250°C, la réticulation de la couche se produit, et la rend insoluble. L'épaisseur du silicium a été choisie à 200 Å.

Aucune difficulté n'est apparue pendant l'étalement de la couche supérieure de résine PMMA, car le PHS n'est pas soluble dans le Chlorobenzène. Des essais d'évaporation de Niobium (sans précaution particulière) ont montré une excellente tenue de la sous-couche : pas de frippage, pas de cloques. Enfin, un lift-off dans l'acétone peut être effectué sans problème, à condition de n'avoir pas réticulé la couche pendant le recuit. L'évaporation du Niobium ne réticule pas le PHS. Il est possible que la réticulation observée vers 240 °C soit due à l'oxygène de l'air, qui créerait des ponts entre molécules.

L'inconvénient majeur du PHS est son incompatibilité avec le développeur et les solvants utilisés pour le rinçage. Il n'a pas été possible de développer le PMMA sans commencer à "lifter" la sous-couche, ou au moins sans l'endommager gravement. Cela vient du fait que le PHS est très facilement soluble (au moins quand il est en couche mince) dans les développeurs du PMMA que sont le cellosolve (nom commercial de l'éther monoéthylique de l'éthylène glycol) et le MIBK (MethylIsoButylKétone), ainsi que dans les solvants utilisés pour le rinçage (éthanol, isopropanol). Par contre, il n'est pas soluble dans l'eau (qui pourrait servir pour un rinçage), ni dans le chlorobenzène (voir ci-dessus).

En pratique, la sous-couche de PHS est attaquée en moins d'une minute, "en étoile" à partir des défauts de la couche protectrice de silicium, dans le MIBK et dans l'isopropanol. Le "lift-off" de la sous-couche se produit en quelques minutes dans le cellosolve. Il s'effectue très rapidement dans l'acétone, et quasi-instantanément dans l'éthanol.

Pour remédier à ce problème, plusieurs possibilités existent. D'abord, une technologie quadricouche peut permettre d'avoir une couche de protection du PHS. Ensuite, on peut essayer d'augmenter la masse moléculaire du PHS, même si le PHS 109000 ne se comporte pas mieux que le 23600. On peut aussi augmenter l'épaisseur du silicium. Enfin, on peut peut-

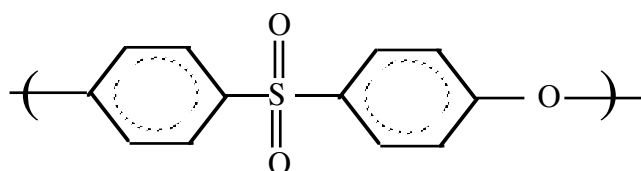
être jouer sur la masse moléculaire en se plaçant à la limite de réticulation (quelques essais ont montré que c'est très acrobatique). Une autre solution encore pourrait être de neutraliser certaines des fonctions -OH pour limiter la solubilité ("protection" de la résine), mais on risque de perdre en thermostabilité.

Notre choix est tout simplement de choisir une résine moins soluble : un Poly ether sulfones.

3.3.2. Le PES (Poly EtherSulfone)

Nous avons choisi les PES "Victrex", fabriqué par la société ICI pour une utilisation industrielle en continu à 180°C. C'est un polymère thermostable qui présente une très bonne tenue chimique.

La formule chimique de ce polyéthersulfone est la suivante :



Le monomère ci-dessus est répété n fois. Les noyaux aromatiques assurent une excellente stabilité d'où la thermostabilité. Nous avons finalement adopté une résine de forte masse moléculaire (PES Victrex 5003 P).

Cette résine est thermostable. On le voit sur la courbe 2.3.3, qui montre la valeur de sa température de transition vitreuse $T_g = 235^\circ\text{C}$, contre 120°C pour le PMMA. La dégradation se produit à partir de 420°C contre 150°C pour le PMMA.

Figure 2.3.3. Comparaison des thermogrammes du PMMA et du PES. A droite, une mesure en DSC (Differential Scanning Calorimetry) fournit l'opposé de la capacité calorifique en fonction de la température et montre les températures de transition vitreuse pour les deux résines. A gauche, une mesure de la masse totale en fonction de la température montre qu'une perte de masse se produit dès 140 à 150°C dans le cas du PMMA.

Outre la thermostabilité, le PES présente l'avantage qu'il n'est pas soluble dans les solvants utilisés habituellement pour l'étalement, puis le développement et le rinçage du PMMA. Cet avantage est surtout vrai pour la résine de masse moléculaire la plus élevée (5003 P). La résine de plus faible masse moléculaire (100 P) présente un gonflement lorsqu'on effectue un rinçage à l'éthanol ou à l'isopropanol, on élimine donc ce choix. Les deux solvants utilisés ici sont : la NMP (N-MethylPyrrolidone) et le DMSO (DiMethylSulfOxyde). On peut noter ici un autre avantage du PES : la NMP est un solvant peu volatil (que l'on peut chauffer pour un lift-off) et relativement inoffensif, alors que le Chlorobenzène par exemple est plus toxique.

Un autre avantage est la bonne qualité de la couche étalée. L'obtention d'une telle couche semble être plus difficile avec, par exemple, l'"Udel" d'Union Carbide (l'Udel est une molécule un peu différente qui contient moins de soufre). Cette remarque permet d'écarter le choix de l'"Udel".

Nous avons pu noter une électrosensibilité (négative) légère de la résine, qui provoque en particulier une réticulation partielle, que l'on peut observer dans le DMSO.

La réalisation d'un tricouche ne pose aucun problème particulier (voir le procédé complet), de même que l'étape de développement. Ceci grâce au fait qu'aucune solubilité n'a été constatée dans le Chlorobenzène, le MIBK, ou l'isopropanol pour la résine PES 5003 P.

Notons que l'on utilise des températures élevées de recuit de la sous-couche (275°C), ce qui montre la thermostabilité de la résine. Il n'y a pas de problème lors du recuit ultérieur de la couche électrosensible à 160 °C.

Les temps d'attaque RIE du masque de silicium sont inchangés par rapport au tricouche PMMA.

Le principal problème qui s'est posé dans le développement de ce procédé a été l'obtention d'un dégagement correct de la sous-couche. Des essais en RIE Oxygène ont montré que les temps d'attaque verticale (bombardement direct par le faisceau d'ions directif) sont du même ordre que pour le PMMA, mais des résidus persistent, insolubles et définitivement résistants à la RIE. Ces résidus apparaissent comme des petits tas espacés d'un peu moins de 100 nm, et dont la hauteur semble être d'un peu moins du vingtième de la couche initiale. Une mesure précise de ces restes a été effectuée à l'AFM (microscope à force atomique) qui montre une hauteur d'environ 400 Å pour une épaisseur de départ d'un micron. On peut cependant noter que ce problème se produit aussi pour le PMMA.

Le dégagement latéral (dû en particulier aux radicaux libres formés en même temps que le plasma) non directif, se fait dans des durées très longues, et à forte pression. Le dégagement le plus rapide est obtenu pour une pression de 4.10^{-1} mbar (maximum), et une puissance de 40 W (optimisée par rapport au temps d'attaque). On obtient, pour une sous-couche de 1 μm d'épaisseur, une saturation de la profondeur d'attaque au bout d'une quarantaine de minutes pour une profondeur "sous le surplomb" de 0.5 μm environ. Un phénomène de saturation existe aussi pour le PMMA. Notons qu'un fil de niobium de 0.3 μm de largeur et de 500 Å d'épaisseur, supraconducteur à 5.8 K environ, a pu être formé à deux reprises à partir d'un tricouche PES de 300 Å d'épaisseur dégagé par RIE, et malgré la présence d'un "mauvais" fond de gravure.

Ces difficultés avec les dégagements par RIE nous font préférer une méthode de dégagement humide, en plongeant l'échantillon dans un solvant approprié. L'attaque dans la NMP est très rapide, et un peu irrégulière. On se porte sur un autre solvant, le DMSO (DiMéthylSulfOxyde). Pour diminuer la vitesse d'attaque, l'idée peut être d'utiliser un co-solvant, par exemple l'éthanol. Les essais ont montré qu'il existe des résidus qui sont mal dissouts par le mélange DMSO-éthanol, alors qu'ils le sont bien par le DMSO pur.

L'utilisation d'un co-solvant ne fait pas que ralentir l'attaque : il diminue aussi la qualité de l'attaque. Pour ralentir l'attaque, on utilise alors le DMSO à son point de congélation (+18.4 °C). L'attaque est de 15 secondes pour un dégagement de 0.5 μm (25 secondes pour 0.8 μm)

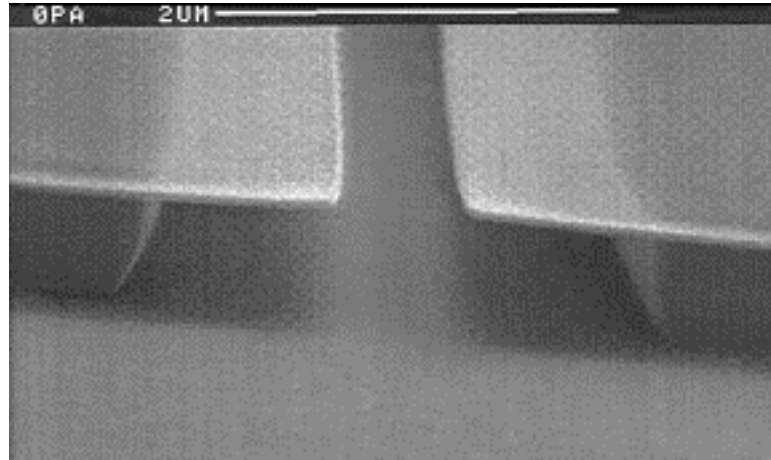


Figure :2.3.4. Un trait de 0.5 μm est lithographié dans le masque de silicium (en haut). Sous cette couche de silicium, on voit la sous-couche de résine qui est dégagée de 0.7 μm de part et d'autre du trait.

Le problème du rinçage est crucial, dans la mesure où les forces capillaires peuvent déformer le masque. Pour éviter ces déformations, la solution apportée a été de porter à 400 Å l'épaisseur du silicium (initialement de 200 Å). L'éthanol est miscible avec le DMSO en toutes proportions. Un rinçage à l'éthanol chaud a été envisagé mais le passage du bain de DMSO au bain d'éthanol chaud s'accompagne d'une attaque "en doigts" (c'est-à-dire que des galeries très profondes sont creusées dans la sous-couche sur des longueurs pouvant atteindre plus de 10 μm). Cette attaque ne se produit pas dans l'éthanol chaud pur, ni pendant le rinçage dans l'éthanol à température ambiante. Lors d'un rinçage à l'eau, la sous-couche tout entière semble se rétracter. L'explication est peut-être simplement que l'eau se glisse sous la couche de résine, provoque son décollement, et le relâchement de contraintes internes à la couche. En conclusion, on utilise un rinçage à l'éthanol à température ambiante.

Il faut s'inquiéter des résidus du PMMA, qui constituait la couche supérieure, que l'étape de gravure du silicium a laissés. La solution apportée est simplement de dissoudre ces résidus par un passage de deux minutes dans l'acétate de cellosolve.

Comme la sous-couche est mise en contact avec un solvant, celui-ci peut éventuellement rester piégé dans la couche de résine. Il suffit de faire un post-recuit ("Hard bake") à une température légèrement inférieure à la température de transition vitreuse (220 °C) pour éliminer ces solvants. Nous pouvons noter que lorsque la sous-couche est fine (0.3

μm), on peut porter la température à des valeurs supérieures à la température de transition vitreuse, sans trop déformer le motif.

Nous avons constaté que l'attaque humide laisse quelques traces de résidus non dissouts (ou re-déposés ?). Ces restes sont facilement nettoyables par une petite RIE Oxygène (réglée pour les dégagements latéraux), de deux minutes.

Cette technique tricouche à base de PES a servi à la fabrication des échantillons présentés au chapitre 5.

3.4. Validation du procédé

La dernière étape est un dégazage in situ de l'ensemble du masque, juste avant l'évaporation du niobium. Pour l'instant, pour des raisons pratiques, il est fait à 133 °C. L'idéal serait de l'effectuer vers 200 °C. La qualité du vide doit être la meilleure possible pendant l'évaporation.

Afin de tester le procédé, des fils de Niobium fins ont été réalisés. Une géométrie en réseau de fils fins (petite grille au pas de 1 μm , de 5 μm de largeur et de 10 μm de longueur) est plus facile à mesurer qu'un fil seul, trop fragile.

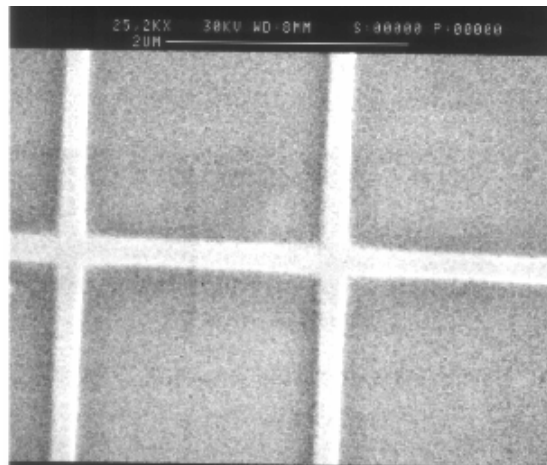


Figure :2.3.5. Fils de Niobium de 0.15 μm de largeur réalisés grâce à la technique de lift-off. La température de transition supraconductrice est de 7.1 K, et le rapport de résistivité de 1.6.

Pour des fils de $0.35\ \mu\text{m}$ de largeur et de $600\ \text{\AA}$ d'épaisseur, on obtient la courbe de résistance figure 2.3.6. en fonction de la température, qui montre une transition supraconductrice à $8.1\ \text{K}$.

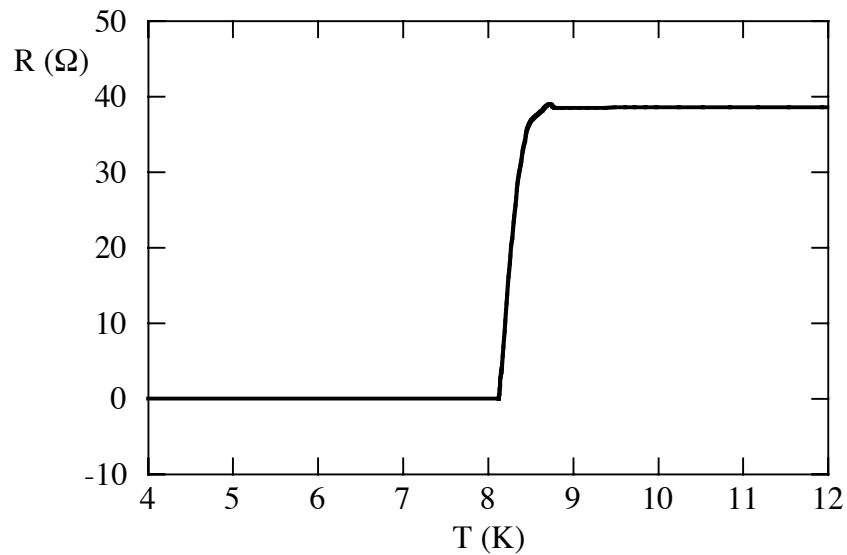
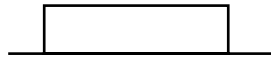


Figure 2.3.6. Résistance d'un réseau de fils de Niobium de $0.35\ \mu\text{m}$ de largeur par le procédé Lift-Off Tricouche PES en fonction de la température. La transition supraconductrice a lieu entre 8.15 et $8.5\ \text{K}$. Le rapport de résistivité est de 1.8 .

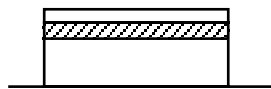
3.5. Procédé complet du tricouche PES-Si-PMMA



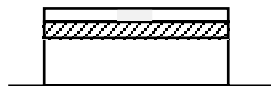
Sur plaquette de silicium [note 1] :
étalement PES 15% à 5000 tr/min [note 2]
puis [note 3]. Recuit progressif jusqu'à 150
°C, puis à 275 °C pendant 1 min [note 4]



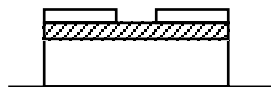
Dépot Silicium 400 Å à 1 Å/s
maximum [note 5]



Etalement PMMA 2% à 4000 tr/min
pendant 30 s. Recuit 160 °C pendant 1 min.
[note 6]



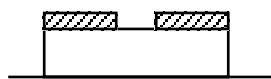
Lithographie électronique [note 7]



Développement dans MIBK mélangé à
l'isopropanol en proportions respectives de 1
pour 3, pendant 15 secondes. Rinçage
isopropanol. Séchage azote. [note 8]



Gravure RIE, gaz SF_6 , à une pression
de $2 \cdot 10^{-2}$ mbar, une puissance de 20 W
pendant 15 s [note 9].



Nettoyage des résidus de PMMA dans
l'acétate de cellosolve pendant 2 min.



Dégagement humide dans le DMSO fondant (18.4 °C) pendant 15 s [note 10]. Rincage éthanol (à la température ambiante). séchage azote. Recuit progressif jusqu'à 220 °C pendant 5 min, pour éliminer les traces de solvants, puis une RIE oxygène 4.10^{-1} mbar, 40 W, 2 mn, permet d'enlever les dernières traces de résine sous le dégagement.

Le lift-off se fait dans la NMP à 70°C en quelques instants, ou à température ambiante pendant 30 minutes environ. Un seconde d'ultrasons permet de décoller les derniers restes [note 11].

notes et remarques

1. Plaquette de silicium : La surface de la plaquette doit être très propre. Le PES dissous dans la NMP s'est parfois mal étalé sur des plaquettes usagées recyclées. Un traitement de surface pourrait éventuellement être utile (par exemple, un chauffage à haute température), ou un promoteur d'adhérence.

2. Dissolution de la résine : le PMMA est dissous dans le chlorobenzène (attention : le chlorobenzène a des effets très toxiques à long terme). Le PHS est dissous dans le Diglyme, et le PES dans la NMP (N-Méthyl-Pyrrolidone). Ces deux dernières dissolutions prennent un temps très long (plus d'une journée). Un agitateur magnétique accélère cette dissolution.

3. Étalement de la résine : une accélération angulaire de $2000 \text{ tr} / \text{s}^2$, ou éventuellement moins, permet un bon étalement préalable de la goutte (solvant+résine). Une accélération angulaire trop forte peut créer des sortes de doigts de résine qui partent radialement, tandis que la résine n'a pas le temps de mouiller toute la surface. Pour le PES, une dilution dans la NMP à 15 % et étalée à 5000 tr/mn fournit après recuit une sous-couche de $0.5 \mu\text{m}$.

4. Recuit de la sous-couche : Les recuits sont faits sur Hot-plate. Dans le cas du tricouche PMMA, ce recuit est fait à une température et sur une durée plus longue que le recuit habituellement choisi au laboratoire (à 170°C pendant 20 min). Dans le cas du tricouche PES, un recuit de 1 min semble suffisant.

5. Dépôt de silicium : Le pompage par sublimation de titane est inutile. On peut aussi

choisir de ne faire que 200 Å de silicium.

6. Recuit de la couche sensible : Dans le cas du tricouche PMMA, ce recuit est fait à une température inférieure à la température habituelle. Une température trop élevée crée un "frippage" du tricouche. Si on n'a que 200 Å de silicium, alors on peut faire une couche électrosensible plus fine encore en prenant une dilution de 1%. Le PES supporte très bien cette étape de recuit.

7. Pour une lithographie électronique à haute résolution (traits de l'ordre de 0.1 μm):

La lithographie est réalisée avec un microscope électronique à balayage de marque Cambridge S 240, piloté par micro-ordinateur grâce à un programme en constante évolution [10]. Ce microscope, même poussé aux limites de ses possibilités, est insuffisant pour voir les détails des petits échantillons qu'il a servi à fabriquer. Pour les lignes les plus fines, le diaphragme doit être minimum (de 10 μm), la résolution maximum (12), et le champ de $20 \times 20 \mu\text{m}^2$. Le codage des traits se fait sur 0.1 μm pour une dose de $120 \mu\text{C}/\text{cm}^2$. La mise au point doit être soignée, il faut faire attention à l'astigmatisme, qui peut faire par exemple que des lignes horizontales sont correctement lithographiées, tandis que les lignes verticales ne "sortent" pas. Une géométrie de plots de contact spécialement étudiée permet de ne pas trop s'inquiéter des décalages de champs (entre 2 et 5 μm) qui peuvent se produire lorsque l'on change de résolution pour la lithographie des plots de contact.

8. Développement : Ce développement peut aussi se faire avec le cellosolve, mélangé à de l'isopropanol en égales proportions, pendant 1 min.

9 RIE : Dans le cas d'un tricouche avec 200 Å de Si, le temps est de 11 s. Cette étape enlève une grande partie de la couche électrosensible de PMMA, c'est pourquoi il faut une couche sensible plus épaisse pour un silicium de 400 Å que pour un silicium de 200 Å. L'épaisseur limite pour 400 Å n'a pas encore été déterminée avec précision.

10. Dégagement humide : Ce développement se fait avec DMSO (DiMéthylSulfOxyde) dans le cas d'un tricouche PES. Les contraintes capillaires pendant le dégagement humide font qu'il est nécessaire d'avoir une couche de silicium assez épaisse. Un masque de 200 Å est plus ou moins déformé par cette étape.

11. A propos du lift-off : l'action de la NMP chaude sur les métaux déposés n'a pas encore été testée. Le lift-off se fait bien dans le DMSO, et peut-être dans le DiMéthylFormamide.

12. Dégagement par RIE Oxygène : pour la sous-couche de PMMA, on obtient 0.5 μm

de dégagement en 7 mn pour 4.10^{-1} mbar et 40 W. La vitesse d'attaque diminue progressivement et le fond de gravure n'est pas toujours parfait.

Références bibliographiques

- [1] H. Courtois, Thèse de L'Université Joseph Fourier, Grenoble (1994)
- [2] P. Gandit, Thèse de l'U.S.T.M.G. Grenoble (1983)
- [3] Martinis and Nahum, Phys. Rev. B 48, 18316 (1993).
- [4] Paniez, Festes, Chollet, Advances in Resist Technology and Processing IX, Proceeding series SPIE 1672 (1992)
- [5] L. Pain, Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (1996)
- [6] Wayne M. Moreau, *Semiconductor Lithography*, Plenum (1988)
- [7] Dolan, Dunsmuir, Physica B 7, 152 (1988)
- [8] V. Bouchiat, Thèse de l'Université Paris 6 (1997)
- [9] Harada, Haviland, Delsing, Chen, Cleason, Appl. Phys. Lett. 65, 636 (1994)
- [10] Le programme informatique de pilotage du MEB pour effectuer des lithographies électroniques est développé par J.L. Génicon

CHAPITRE 3

Conductance dans N en présence de réflexion d'Andréev

Nous avons vu au chapitre 1 (théorie) que la présence de la réflexion d'Andréev induit théoriquement une augmentation de la conductance dans le métal normal, qui présente un maximum à des énergies de l'ordre de l'énergie de Thouless, qui vaut dans un métal diffusif :

$$\varepsilon_c = \frac{\hbar D}{L^2} \quad (3.0.1.)$$

L est la longueur de l'échantillon et D le coefficient de diffusion.

Dans ce chapitre, nous mesurons la correction de conductance d'un métal normal en contact avec un supraconducteur. Nous mettrons en évidence la présence d'un maximum dans la conductance d'un échantillon spécialement dessiné. Nous ferons une comparaison détaillée avec la théorie quasiclassique, qui montrera la nécessité de tenir compte du rôle crucial tenu par les parties traditionnellement considérées comme extérieures à l'échantillon, et qui sont trop habituellement modélisées par des réservoirs parfaits.

1. Description de l'échantillon

1.1. Choix de la géométrie "en T"

Tout d'abord, nous souhaitons un fil très court, afin que la température associée à l'énergie de Thouless y soit accessible facilement. L'énergie de Thouless doit donc être supérieure à quelques μeV , pour être supérieure à l'énergie associée à une température de quelques dizaines de mK. Elle doit cependant rester très inférieure au gap du supraconducteur. De plus, nous nous attendons à un coefficient de diffusion dans le métal normal de l'ordre de quelques dizaines de cm^2 / s . Tout ceci impose que les longueurs dans

l'échantillon soient de l'ordre de quelques dixièmes de μm .

La présence d'une barrière tunnel à l'interface diminue théoriquement l'amplitude de la correction de conductance et peut même faire disparaître le maximum de conductance (voir chapitre 1). Nous optons donc pour une interface la plus transparente possible.

Nous voulons aussi éviter que le courant ne passe par l'interface, car nous souhaitons mesurer uniquement le transport dans le métal normal, et non les effets de la supraconductivité sur la conductance de la barrière. Ceci impose une géométrie "en T" (figure 3.1.1.), qui permettra de mesurer le transport dans deux des branches du T, tandis que le supraconducteur est connecté à la troisième. Le contact avec le supraconducteur est ainsi éloigné de la partie mesurée et ceci permettra de distinguer les effets de la réflexion d'Andréev sur la conductance d'un simple "court-circuit" par le supraconducteur. Chaque branche du T est connectée à un plot de contact qui est soit un métal normal, soit un supraconducteur. Cette géométrie "en T" permet aussi de faire des mesures dans des configurations où l'on peut ajuster les tensions dans les deux plots de métal normal en jouant sur les différentes valeurs des courants dans les trois fils. Nous pouvons aussi faire des mesures où le courant passe par l'interface.

Les deux plots de contact étendus (dont la largeur choisie est environ $2\ \mu\text{m}$) jouent le rôle de réservoirs et servent à assurer une mesure "2 fils". Ce choix de larges plots de contact est le résultat de plusieurs essais d'échantillons de différentes géométries. Ce choix permet de simplifier la définition des réservoirs, dont nous discuterons les effets dans le paragraphe 3.

Le modèle schématique souhaité correspond donc à la figure 3.1.1

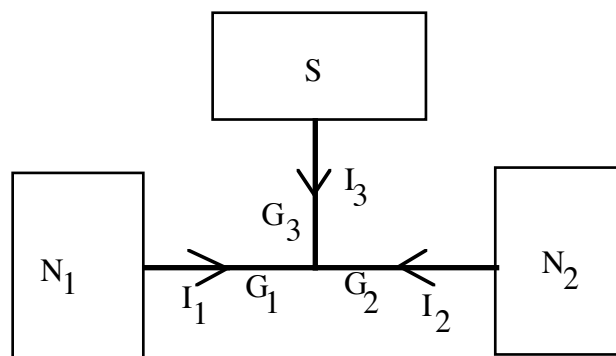


Figure 3.1.1.: Modèle schématique de l'échantillon. Les conductances sont notées G . On a $G_1 \approx G_2$. La longueur de chaque branche est de $0.2\ \mu\text{m}$.

1.2. Caractéristiques de l'échantillon.

La figure 3.1.2. répond aux exigences que nous avons définies au paragraphe 1.1.

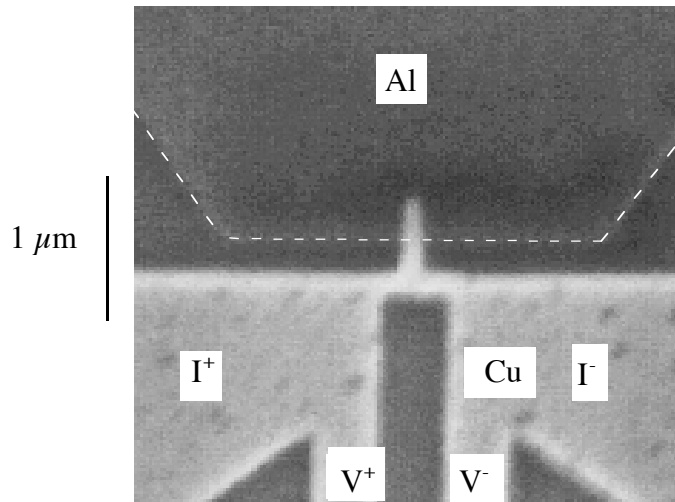


Figure 3.1.2 Photographie de l'échantillon mesuré. Un fil N (au milieu horizontalement) joint deux réservoirs N (en clair), et est mis en contact latéral avec supraconducteur (en haut). Les indications I^+ , I^- , V^+ et V^- correspondent aux fils d'amenée de courant et de mesure de la tension. Le métal normal est du cuivre. Le supraconducteur est de l'aluminium.

La fabrication de cet échantillon est exposée au chapitre 2, paragraphe 2.2. Le supraconducteur est de l'aluminium (en haut sur la photo 3.1.2), et le métal normal est du cuivre. En particulier, la qualité de l'interface est assurée par un décapage ionique in-situ, entre les évaporations des deux métaux.

-La longueur du cuivre comprise entre les deux plots de contact en cuivre est de 400 nm. La largeur des fils est d'environ 80 nm, leur épaisseur est de 50 nm.

-Par une mesure directe à haute température, on peut dire que la résistance de l'interface est inférieure à celle du fil de cuivre.

-De la résistance dans l'état normal (à 1.5 K) $R_N = 10.1 \, \Omega$, on peut déduire la résistivité $\rho = 1,0 \cdot 10^{-7} \, \Omega \text{m}$ du cuivre et donc le coefficient de diffusion $D = \frac{1}{3} \frac{m}{e^2} \frac{v_F}{N} \frac{1}{\rho} \approx 30 \, \text{cm}^2/\text{s}$ et le

libre parcours élastique moyen $l_p = 3D / v_F \approx 6\text{nm}$.

Ici, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ est la masse de l'électron, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ sa charge, $v_F = 1.5 \cdot 10^6\text{ m/s}$ la vitesse de Fermi, $N = 8.5 \cdot 10^{28}\text{ m}^{-3}$ le nombre volumique [7].

-On peut calculer l'énergie de Thouless associée à la longueur entre les deux réservoirs N et on obtient $\epsilon_c \approx 12\text{ }\mu\text{eV}$ (équation 3.0.1). Nous verrons que la correspondance avec la théorie quasiclassique est meilleure pour $\epsilon_c \approx 15.5\text{ }\mu\text{eV}$, ce qui est compatible avec l'incertitude que l'on a sur sa valeur exacte. Cette énergie correspond à une température de Thouless $\epsilon_c / k_B \approx 180\text{mK}$.

Cette énergie de Thouless est nettement inférieure au gap du supraconducteur, dont la température critique est $T_C \approx 1.25\text{K}$, ce qui dans le cadre de la théorie BCS correspondrait à un gap de $\Delta = 1.76 k_B T_C \approx 190\text{ }\mu\text{eV}$ à basse température. On a alors $\Delta / \epsilon_c \approx 12$.

1.3. Modèle

On peut mesurer avec précision les conductances G_{1N} et G_{2N} dans l'état normal de chaque branche du fil N qui est en contact avec un réservoir N en se servant du supraconducteur pour mesurer la tension dans l'état normal. En revanche on ne connaît que de manière approximative (à partir de considérations géométriques) la conductance G_{3N} de la partie du fil qui rejoint le supraconducteur. On peut s'en servir comme variable pour ajuster raisonnablement la théorie (en la choisissant entre 4 et 6 Ω). Les valeurs mesurées des deux résistances des deux branches du fil sont : $G_{1N} \approx 5.25\text{ }\Omega$, et $G_{2N} \approx 4.85\text{ }\Omega$. On peut expliquer l'amplitude de la correction de conductance observée en choisissant $G_{3N} \approx 5.45\text{ }\Omega$.

Nous verrons que la prédiction théorique ne peut expliquer l'amplitude de la correction de conductance et de la ré-entrance que si l'on tient compte du gap fini dans le supraconducteur.

Nous avons vu au cours du chapitre 1 (paragraphe 3.2.7) que l'on peut calculer la conductance totale d'un circuit à partir des conductivités spectrales locales, et d'une simple loi de circuit. Nous pouvons donc calculer, après résolution des équations d'Usadel à l'équilibre (équations 1.3.14), les conductances spectrales $G_{1,2\text{ ou }3}(\epsilon)$ de chacun des fils. Ces conductances sont données dans la figure 3.1.3.

On remarque en particulier que pour les parties du fil les plus éloignées du supraconducteur, la présence du gap ne change pas grand-chose, à l'exception d'un faible pic pour des énergies égales au gap. Par contre, l'amplitude de la correction de conductance est

beaucoup plus grande dans la partie au contact du supraconducteur. Cet aspect des corrections de conductance n'est bien entendu valable qu'aux basses températures, tant que le gap ne diffère pas trop de sa valeur à $T=0$. A plus hautes températures, il faudrait tenir compte de la fermeture du gap (disparition de la correction de conductance).

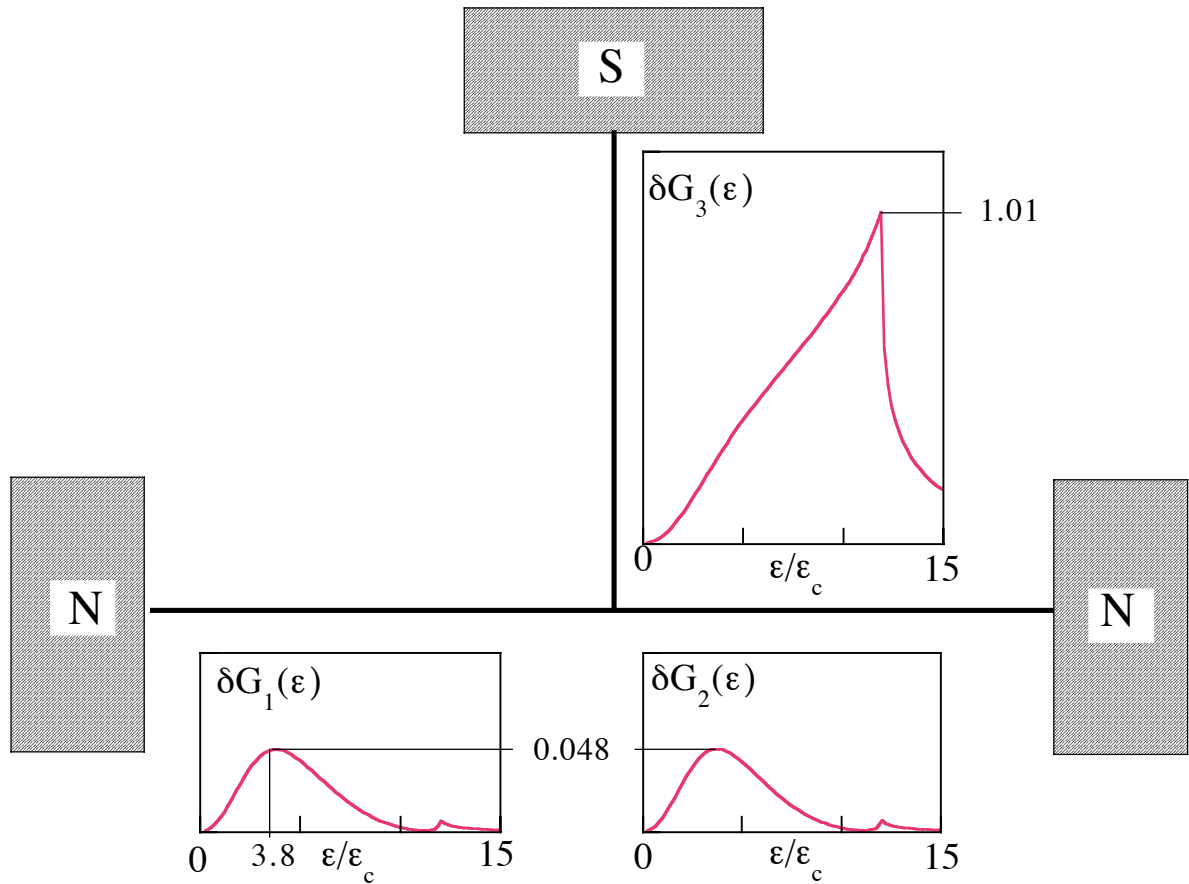


Figure 3.1.3. Représentation schématique des conductances spectrales théoriques de chaque fil en choisissant $G_{3N} \approx 5.45 \, \Omega$ et une énergie de Thouless $\epsilon_c \approx 15.5 \, \mu\text{eV}$, ceci correspond à un rapport $\Delta/\epsilon_c \approx 12$.

Des calculs ont aussi été effectués pour différentes valeurs de la barrière tunnel présente à l'interface N-S. Le résultat en est que l'amplitude de la correction de conductance diminue rapidement quand la résistance de la barrière augmente, à tel point que la ré-entrance observée disparaît dans le fil au contact du supraconducteur dès que la résistance de la barrière dépasse environ $2 \, \Omega$, ce qui permet de dire que cette résistance de barrière est probablement très inférieure à cette valeur. Ainsi, dans les calculs théoriques, la barrière a été supposée parfaitement transparente.

Les tensions dans les réservoirs sont exprimées par rapport à la tension dans S (on choisit $V_S = 0$). Le calcul de la conductance totale du circuit est exposé dans l'annexe A3. Ce calcul est effectué à partir de la formule (3.3.2) dans les cas où il n'y a pas de chauffage des réservoirs (voir paragraphe 3.2). Toutes les comparaisons entre la théorie et les mesures expérimentales sont obtenues sans paramètres libres autres que les légers ajustements déjà cités de G_{3N} et de ε_c et que la valeur de G_N a été légèrement ajustée d'un facteur (négligeable) de 10^{-3} afin d'obtenir une bonne superposition du maximum de conductance (figure 3.2.1).

2. Le pic de conductance

2.1. Pic en fonction de la température

Nous présentons dans un premier temps les mesures de conductance dans deux configurations différentes, en parallèle avec la prédiction théorique. Nous discuterons les différents points remarquables dans un deuxième temps.

2.1.1. Mesure "hors interface"

La mesure de conductance différentielle est effectuée en imposant un petit courant alternatif, le courant de mesure (voir chapitre 2), que l'on superpose au courant de polarisation I . Lorsque ce courant de polarisation est nul, on obtient la partie linéaire de la conductance en mesurant la tension à la fréquence du courant de mesure. Lorsque ce courant n'est pas nul, la conductance différentielle sera notée g_{ij} , où i et j désigneront les réservoirs entre lesquels la mesure est effectuée (1, 2 ou S).

La mesure "hors interface" consiste à effectuer une mesure entre les deux réservoirs N, c'est-à-dire que l'on impose un courant $I = I_1$, et le courant $I_3=0$. On mesure alors la tension entre N_1 et N_2 (figure 3.1.1).

Le fait que la conductance est augmentée dans cette mesure "hors-interface" montre que dans le cas d'un échantillon mésoscopique, la présence de supraconductivité peut affecter le transport "à distance" de l'interface. Cette action non locale sur la conductance, observée par Petrashov [1], a pris le nom d'effet de proximité anormal, et c'est ceci que nous qualifierons dans ce travail d'"effet de proximité".

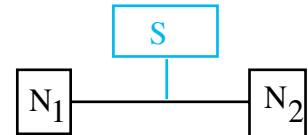
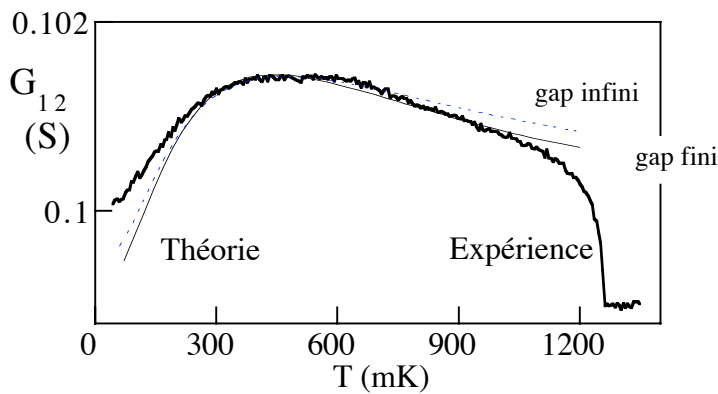
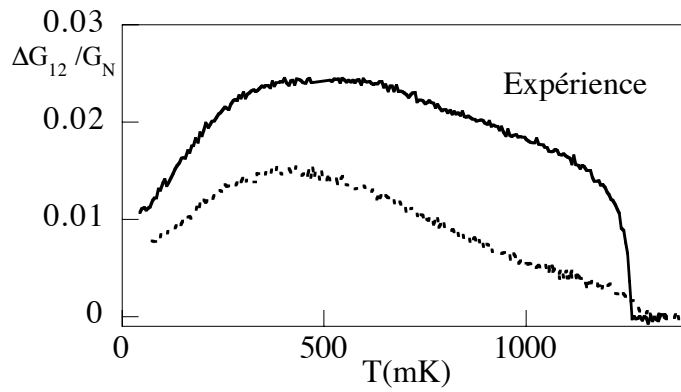


Figure 3.2.1.: En haut : conductance expérimentale à $V=0$ en fonction de la température. En traits épais, la conductance de l'échantillon présenté au paragraphe 1. En pointillés, la conductance d'un échantillon de géométrie semblable. La mesure est effectuée "hors interface" entre les deux réservoirs N (schéma de droite). L'amplitude du courant de mesure est de 200 nA, correspondant à une tension d'environ 2 μV . En bas, une comparaison avec la théorie, en choisissant une valeur finie du gap (trait continu) ou une valeur infinie (pointillés).

2.1.2. Mesure "par l'interface"

Comme le supraconducteur est connecté à un plot de contact, on peut aussi faire une mesure de conductance en imposant un courant $I=I_1 = -I_3$ (figure 3.2.3.) et en mesurant la différence de potentiel.

On obtient la mesure suivante.

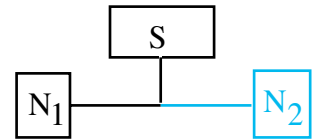
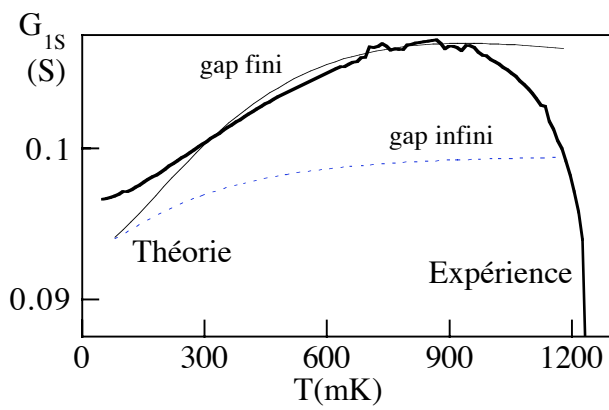
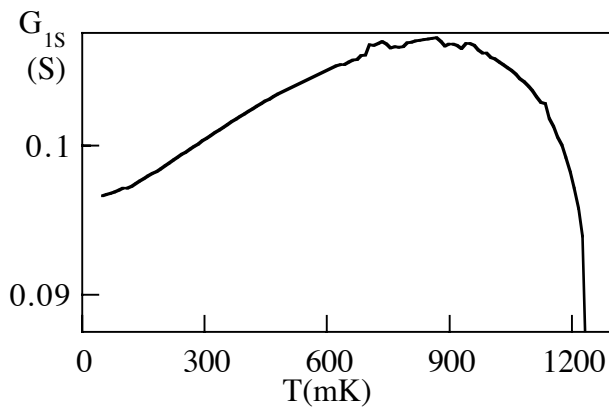


Figure 3.2.2.: En haut : conductance expérimentale à $V=0$ en fonction de la température. La mesure est effectuée "par l'interface" entre les réservoirs N_1 et S (schéma de droite). L'amplitude du courant de mesure est de 200 nA, correspondant à une tension d'environ $2 \mu V$. En bas, une comparaison avec la théorie, en choisissant une valeur finie du gap (trait continu) ou une valeur infinie (pointillés).

Dans le cas de la mesure "par l'interface", pour des raisons d'encombrement géométrique, il n'a pas été possible de mesurer la valeur de la tension de S directement au contact de l'échantillon. Ainsi, lorsque le supraconducteur passe dans l'état normal, une chute de tension apparaît dans le supraconducteur devenu normal, et la conductance mesurée (0.08 S) perd une bonne partie de sa signification : on connaît mal G_{3N} .

Il faut signaler que dans les deux mesures, un problème de régulation de la température entre 500 mK et 600 mK provoque une légère incertitude dans les abscisses de ces parties des résultats.

2.1.3. Discussion

Présence d'un pic de conductance

Lorsque T décroît, la conductance atteint un maximum (un "pic élargi") dans les deux cas, et ce maximum se situe à des valeurs bien décrites par la théorie, c'est-à-dire à $k_B T \approx 3.8 \epsilon_c$ pour la mesure "hors interface", et à des températures juste inférieures à la transition du supraconducteur pour la mesure "par l'interface". La conductance diminue ensuite lorsque la température diminue. Ce comportement non-monotone, le phénomène de ré-entrance, a été prédit théoriquement [2]. Il correspond à la partie basse énergie de la conductance spectrale, où celle-ci retourne à la valeur dans l'état normal lorsque l'énergie est inférieure à l'énergie de Thouless. La présence du maximum de conductance est nettement visible dans un échantillon de géométrie comparable et de résistance $R_N = 2.7 \, \Omega$. Notons aussi que l'amplitude de la correction de conductance est de l'ordre de quelques pour cent de la conductance totale. On observe au total un excellent accord entre la théorie et l'expérience pour des températures supérieures à 300 mK environ.

Température critique.

Lorsque T devient inférieur au T_C de l'aluminium, la conductance augmente brutalement. Dans le cas de la mesure "hors interface", ce décrochement n'est probablement pas dû à un effet de court-circuit d'une partie du fil par la présence du supraconducteur. En effet, le supraconducteur est dans une position latérale assez éloignée du fil, et d'autre part, il est très large, ce qui laisse penser qu'un éventuel effet de court-circuit se manifeste aussi dans l'état normal. On pourra l'interpréter plus simplement de la manière suivante : un gap supraconducteur apparaît dans l'aluminium, et le fil normal entre brutalement dans un régime de proximité. Il n'y a pas besoin de faire appel à un court-circuit par le supraconducteur pour expliquer le décrochement brutal à T_C : l'ouverture du gap dans le supraconducteur et l'apparition de l'effet de proximité dans le fil suffisent à rendre compte du phénomène.

Gap fini du supraconducteur.

Dans les comparaisons avec la théorie, un calcul théorique identique fait à partir d'un gap infini dans le supraconducteur est présenté. Il a été fait à partir d'une valeur de $G_{3N} \approx 4.85 \, \Omega$, sans ré-ajuster $\epsilon_C \approx 12 \, \mu\text{eV}$. On peut expliquer l'amplitude du maximum de conductance observée dans la mesure "hors interface" en prenant une valeur infinie du gap, mais la forte amplitude du maximum de conductance observée dans la mesure "par l'interface" ne peut être interprétée dans ce cadre qu'en prenant en compte l'énergie du gap.

Rappelons-nous que, dans le cas où le gap est proche de l'énergie de Thouless, la théorie

prévoit une augmentation de conductance qui peut dépasser 100%, et c'est ce qui apparaît sur le schéma des conductances spectrales des différentes parties de l'échantillon. Dans le cas de la mesure "hors interface", il y a aussi un meilleur accord aux hautes températures si le gap est pris en compte.

Qualité de l'interface.

Le bon accord entre la théorie et l'expérience permet de confirmer la bonne transparence de l'interface. Comme il n'y a pas de barrière tunnel dans la mesure "hors interface", il est normal que l'on y observe un pic de conductance. Par contre, la présence d'un maximum de conductance dans la mesure par l'interface, à la place d'une "anomalie à polarisation nulle" (ZBA :voir chapitre théorie), permet de dire après des essais pour différentes valeurs de barrière que la résistance de l'interface est inférieure à 2Ω environ dans le cas du fil latéral, ceci pour une surface de l'ordre de $200\text{nm} \times 80\text{nm}$.

2.2. Pic en fonction de la tension

La série de mesures suivante représente la conductance différentielle dans la configuration "hors interface". Elle met en avant, tout comme dans les mesures en fonction de la température, l'existence d'un maximum de conductance.

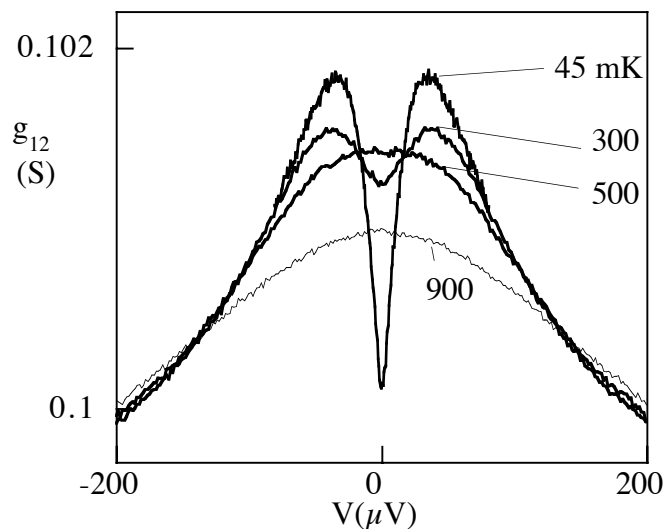


Figure 3.2.3.: Mesure "Hors-interface" de la conductance différentielle du fil , pour différentes températures. L'amplitude du courant de mesure est de 200 nA. Le maximum de conductance est bien visible dès que la température est inférieure à environ 400 mK.

On observe (figure 3.2.3.) que les mesures à basses température présentent des maxima de conductance pour des tensions de $40 \mu\text{V}$ environ, c'est-à-dire à une énergie qui est de l'ordre de l'énergie de Thouless de l'échantillon. A plus hautes températures, les formes de ces courbes s'adoucissent.

Les mesures de conductance différentielle à la température T sont théoriquement la conductance spectrale $G(\text{eV})$, mesurée avec une précision $k_B T$ en énergie. Une comparaison rapide avec les conductances différentielles théoriques d'un fil entre N et S à différentes températures (chapitre 1), montre a priori un bon aspect général.

Un raisonnement simple permet de constater qu'il y a en fait un désaccord entre la théorie et l'expérience. Le maximum se trouve à une tension $V \approx 40 \mu\text{V}$. Il faut bien remarquer que lorsque la tension mesurée est de $V = +40 \mu\text{V}$, alors elle est de $+20 \mu\text{V}$ dans un réservoir et $-20 \mu\text{V}$ dans l'autre réservoir. La conductance linéaire (c'est-à-dire à tension nulle) en fonction de la température, et la conductance différentielle en fonction de la tension sont théoriquement reliés par les relations (1.4.7 et 1.4.8) du chapitre 1, c'est-à-dire qu'elles sont données par la convolution de la conductance spectrale avec un pic de largeur $k_B T$. Il existe donc une correspondance entre la conductance différentielle en fonction de la tension à basse température (qui est la conductance spectrale) et la conductance linéaire en fonction de la température (voir Annexe A.7.). On remarque alors que le maximum en tension correspond à une énergie de $20 \mu\text{eV}$, alors que le maximum en température se produit à une énergie de l'ordre de $k_B T \approx 50 \mu\text{eV}$. Un raisonnement identique montre qu'un tel désaccord se produit aussi pour la géométrie en boucle "boucle 10.6" présentée au chapitre 4 (Annexe A.7.), et dans laquelle, pour la première fois, le maximum de conductance a été observé [3]. Dans l'échantillon "boucle 10.6", la position du pic de conductance est attendue vers 5 fois l'énergie de Thouless, soit $5.5 \mu\text{V}$ sur la courbe en tension, ce n'est pas très loin des $1.7 \mu\text{V}$ mesurés, mais il y a tout de même un écart d'un facteur 4 environ.

Le pic de conductance se trouve à une énergie bien inférieure à la valeur de 3.8 fois l'énergie de Thouless prévue par la théorie (soit $60 \mu\text{V}$). Par ailleurs, l'amplitude de ce pic ne correspond pas non plus tout à fait à ce qui était attendu. Ceci est illustré par la figure 3.2.4., où une comparaison entre théorie et expérience est effectuée. Cependant, cette comparaison permet de rendre compte de l'existence des maxima mesurés, et donne leur position et leur amplitude à un facteur 2 ou 3 près.

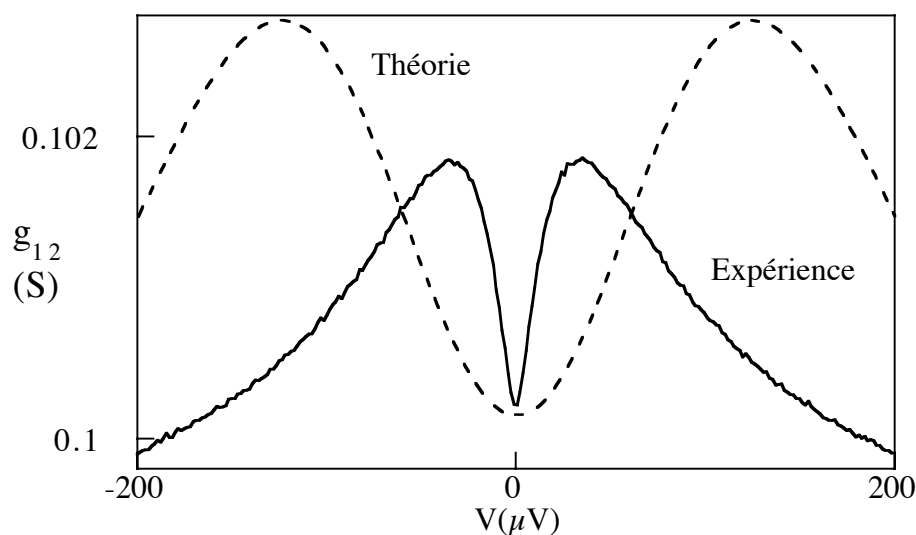


Figure 3.2.4.: Comparaison théorie-expérience pour une température de 50 mK, la température dans le calcul est $T=100$ mK (pour avoir la correspondance du point $V=0$).

L'objet du paragraphe consacré aux questions de réservoirs sera de proposer une explication cohérente pour ce désaccord. En particulier, de nouvelles mesures permettent d'écarter l'explication "triviale" qui partirait de la supposition que la conductance dépend de la température, et que lorsqu'un courant passe dans le fil, ceci ne ferait que provoquer un échauffement qui aboutirait à la conductance correspondante.

3. Rôle des réservoirs sur la distribution électronique

Le but de ce paragraphe est de proposer une explication pour les écarts constatés sur les mesures en tension entre la théorie et l'expérience. Nous en concluons en particulier que l'échantillon n'est pas uniquement la partie située "entre les fils de mesures", et que toute la partie extérieure intervient aussi. En effet, l'échantillon présenté dans ce chapitre est très sensible aux effets des réservoirs, car il a une faible résistance. Dans toutes les théories présentées, nous avons supposé que la présence du fil ne perturbait pas trop les réservoirs. Les réservoirs étaient donc considérés comme des "corps noirs" d'où les électrons sortent selon une distribution à l'équilibre de Fermi-Dirac. Dans le cas de mesures de conductances différentielles, les électrons sont injectés dans l'échantillon à des énergies différentes, ce qui agit sur la fonction de distribution.

3.1. L'effet multi-réservoir

3.1.1. Des marches dans la fonction de distribution

On se place dans le cas où il n'y a pas d'interaction dans le fil. On peut exprimer la conductance totale à partir de la loi de circuits exposée en Annexe A3.

Commençons par calculer la forme générale de la conductance que l'on mesurerait dans un tel cas. Ceci permet de donner un exemple concret du principe de calcul exposé en Annexe A.3. Si $G_1(\varepsilon)$, $G_2(\varepsilon)$ sont les conductances spectrales respectives des fils provenant des réservoirs N_1 et N_2 , on obtient l'expression matricielle suivante, où V_1 et V_2 sont les tensions dans les réservoirs, et $f(V)$ la fonction de Fermi-Dirac à la température T et au potentiel eV .

$$\begin{pmatrix} I_1(\varepsilon) \\ I_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3} \begin{pmatrix} G_1(G_3 + G_2) & -G_2G_1 \\ -G_2G_1 & G_2(G_3 + G_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(V_1) \\ f(V_2) \end{pmatrix} \quad (3.3.1.)$$

les courants totaux I_1 et I_2 étant donnés par intégration sur l'énergie.

On peut alors différentier l'expression précédente par rapport aux tensions dans les réservoirs.

Il vient la matrice des résistances :

$$\begin{pmatrix} \partial_{I_1} V_1 & \partial_{I_2} V_1 \\ \partial_{I_1} V_2 & \partial_{I_2} V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G_1(G_3 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_1) & \frac{-G_2G_1}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_1) \\ \frac{-G_2G_1}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_2) & \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_2) \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.3.2.)$$

où $*$ représente le produit de convolution.

On se place dans le cas exemplaire où un fil de conductance spectrale $G_3(\varepsilon)$ est mesuré par deux réservoirs distincts N_1 et N_2 , l'un servant à injecter le courant et l'autre à mesurer la tension. On a ainsi une géométrie qui correspond qualitativement à une mesure traditionnelle en 4 fils.

La conductance que l'on mesurerait est donnée par $(\partial_{I_1} V_2)^{-1}$:

$$\left(\partial_{I_1} V_2\right)^{-1} = \frac{-G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_2) + \frac{\frac{G_1(G_3 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_1)}{\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_1)} \frac{G_2(G_3 + G_1)}{G_1 + G_2 + G_3} * \partial_v f(V_1) \quad (3.3.3.)$$

Cette formule, déjà compliquée, ne prend pas en compte l'effet de chauffage des réservoirs, traité au paragraphe suivant. L'expression complète a cependant été calculée pour les déterminations numériques prenant aussi en compte cet effet.

Cette expression (3.3.3.) montre que les conductances spectrales dans tous les fils interviennent, ainsi que les deux tensions (différentes a priori) dans les réservoirs N_1 et N_2 . On peut illustrer cet effet par le schéma de principe suivant, où les circulations des courants à basse énergie ($0 < \varepsilon_c < eV_2$) et à haute énergie ($eV_2 < \varepsilon_c < eV_1$) sont représentées dans chaque fil, ainsi que les distributions des électrons dans les réservoirs et aux croisements des fils.

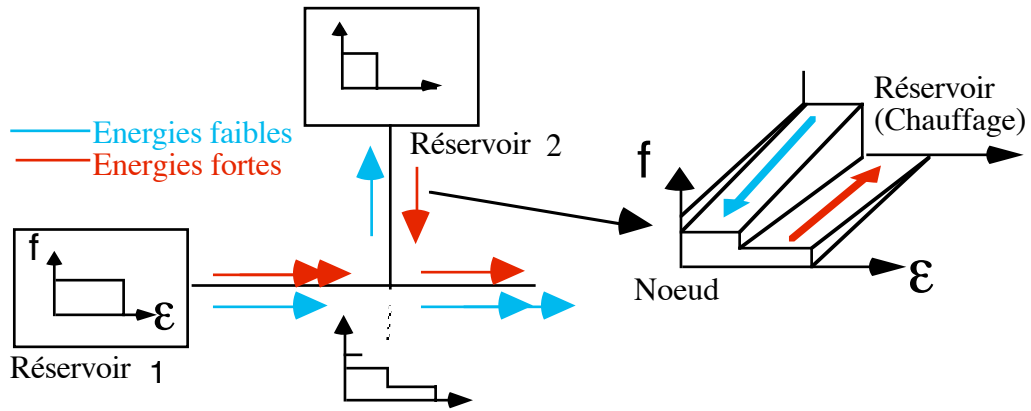


Figure 3.3.1.: Circulation des courants dans le cas particulier d'une mesure par quatre-fils. Dans le fil qui mène au réservoir dont on lit la tension, le courant est nul mais deux courants opposés coexistent. La fonction de distribution présente des marches, et les tensions dans les deux réservoirs interviennent.

La fonction par laquelle on convolue la conductance spectrale G_3 est alors la somme de deux pics, car la fonction de distribution présente deux marches au noeud (figure 3.3.1.)[4].

Chacun des pics correspond à la tension dans l'un des réservoirs. La figure (3.3.2.) représente en haut la fonction de distribution, et en bas la fonction par laquelle on convole la conductance spectrale G_3 .

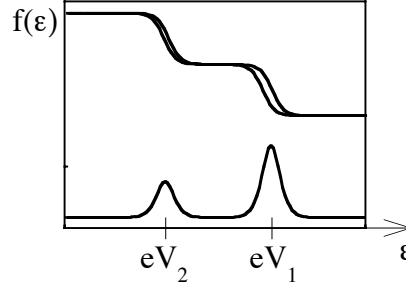


Figure 3.3.2.: Fonction de distribution (en haut) et énergies qui interviennent dans la caractéristique différentielle (en bas), en fonction de l'énergie ϵ . Chaque marche dans la fonction de distribution correspond à un pic.

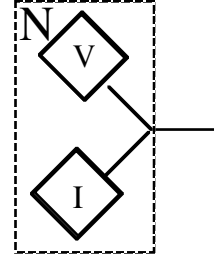
La conductance mesurée apparaît comme la somme de convolutions de la conductance spectrale, chacune faisant intervenir une des tensions de réservoirs. A température nulle, dans une configuration où plusieurs réservoirs sont connectés à plusieurs fils de conductances spectrales $G_j(\epsilon)$, la conductance est donnée par une somme de contributions dont chacune est de la forme $cG_j(eV_i)$, le coefficient c dépend de la configuration de la mesure, et les tensions V_i sont les tensions dans les réservoirs, qui varient avec les courants injectés. Nous en étudierons des exemples.

On peut enfin remarquer que si le courant injecté est nul, alors les deux tensions sont nulles. On peut montrer que l'on a alors :

$$\left(\partial_{I_1} V_2\right)^{-1} \approx G_3 * \partial_V f(0) \quad (3.3.4.)$$

c'est-à-dire qu'à $V=0$ et $I=0$, la conductance est la même que si les deux réservoirs 1 et 2 sont considérés comme étant un seul et unique réservoir (figure 3.3.3.): il n'y a pas d'effet multi-réservoir à $V=0$ (voir Annexe A.3.).

Figure 3.3.3. schéma représentant un côté d'échantillon mesuré par quatre fils. Lorsque toutes les tensions sont nulles, on peut assimiler l'ensemble des deux réservoirs (injection du courant et mesure de la tension) comme un seul et unique réservoir (en pointillés).



3.1.2. Mise en évidence de l'effet multi-réservoir

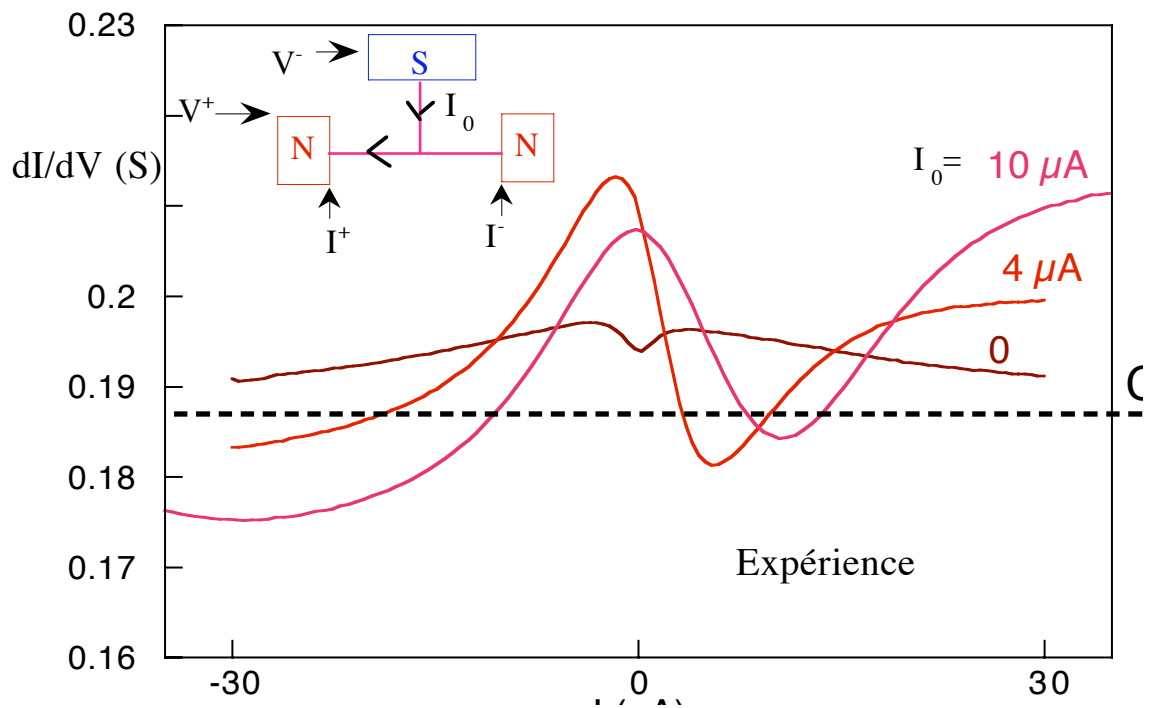
D'après le modèle des conductances spectrales des différents fils correspondant à l'échantillon mesuré ici, la correction de conductance est très faible dans les parties du fil (notées 1 et 2) les plus éloignées de S. Cette correction est beaucoup plus forte dans la partie 3, le fil proche du supraconducteur. Une idée est alors d'imposer un courant dans les parties (1 et 2) éloignées de S, et, par un autre courant dans la partie proche (3), on peut espérer obtenir des informations sur les fonctions de distribution. On se sert ainsi de la partie 3 comme d'une "sonde" qui, à l'instar d'une jonction tunnel N-I-S, a une conductance fortement dépendante de l'énergie. Nous appellerons ceci des "mesures multi-réservoir", car les tensions dans les deux réservoirs N varient. Des mesures sont présentées figure 3.3.4.: il s'agit de mesures à courant I_3 fixé, et où l'on mesure la tension V_1 en fonction du courant $I=I_2$. (voir schéma). Ces mesures ont été effectuées à 100 mK. A chaque mesure, est associé un calcul où on ne prend en compte que l'effet multi-réservoir ci-dessus, toujours avec les conductances spectrales déjà calculées. La température choisie pour les calculs est de 100 mK.

La correction de conductance spectrale est très supérieure dans le fil 3 (qui va vers le supraconducteur) à celle dans les deux autres fils qui relient les réservoirs N. L'écart par rapport à G_N provient essentiellement du fil 3. On peut alors obtenir l'aspect théorique des fonctions par lesquelles la conductance spectrale $G_3(\epsilon)$ est convoluée. Ces fonctions sont données en insert dans les figures précédentes. Elles sont représentées en fonction du courant, de telle manière que chaque pic corresponde à l'annulation de la tension dans l'un des réservoirs. Ces tensions s'expriment approximativement par :

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{1}{G_{1N}} + \frac{1}{G_{3N}} \right) I_0 - \frac{1}{G_{1N}} I \\ V_2 = \frac{1}{G_{3N}} I_0 + \frac{1}{G_{2N}} I \end{cases} \quad (3.3.5)$$

On voit sur la formule (3.3.5) que les valeurs de I pour lesquelles la tension s'annule sont proportionnelles à I_0 , et de signes opposés (insert du bas de la figure 3.3.4). Les

coefficients devant I donnent l'amplitude des pics. La présence d'un minimum de conductance spectrale à énergie nulle se traduit, à la position de chaque pic par la présence d'un minimum de conductance (qui apparaîtra comme un maximum de conductance pour un pic de coefficient négatif). Les maxima de conductance spectrale ($\approx \pm \varepsilon_c$) se trouvent de part et d'autre du minimum, ils donneront donc des maxima de conductance de part et d'autre de la position donnée par le pic (des minima pour un pic négatif). Le tout fournit la conductance théorique présentée, mais dans laquelle il est difficile d'associer les structures de la conductance à telle ou telle structure de la conductance spectrale.



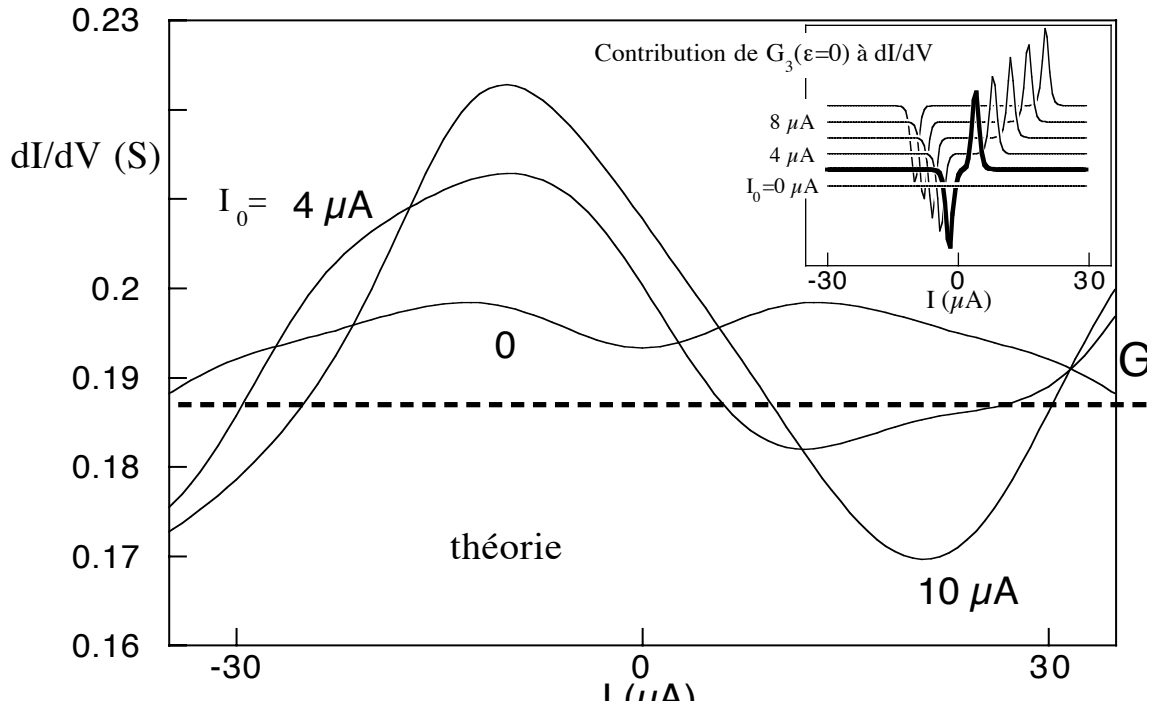


Figure 3.3.4.: Conductances différentielles expérimentales (en haut) et théoriques (en bas) à courant I_3 fixé. L'insert en haut représente la configuration de la mesure (voir texte). L'insert en bas montre comment agit la contribution de la partie 3 (la contribution la plus importante) si la conductance spectrale de cette partie était un δ de Dirac en 0. A chaque pic (de signe +) dans l'insert correspond un minimum à énergie nulle de conductance dans la courbe théorique (et un maximum pour les pics de signe -). Chaque pic correspond à l'annulation de la tension de l'un des réservoirs. Les courbes de l'insert sont décalées pour plus de lisibilité.

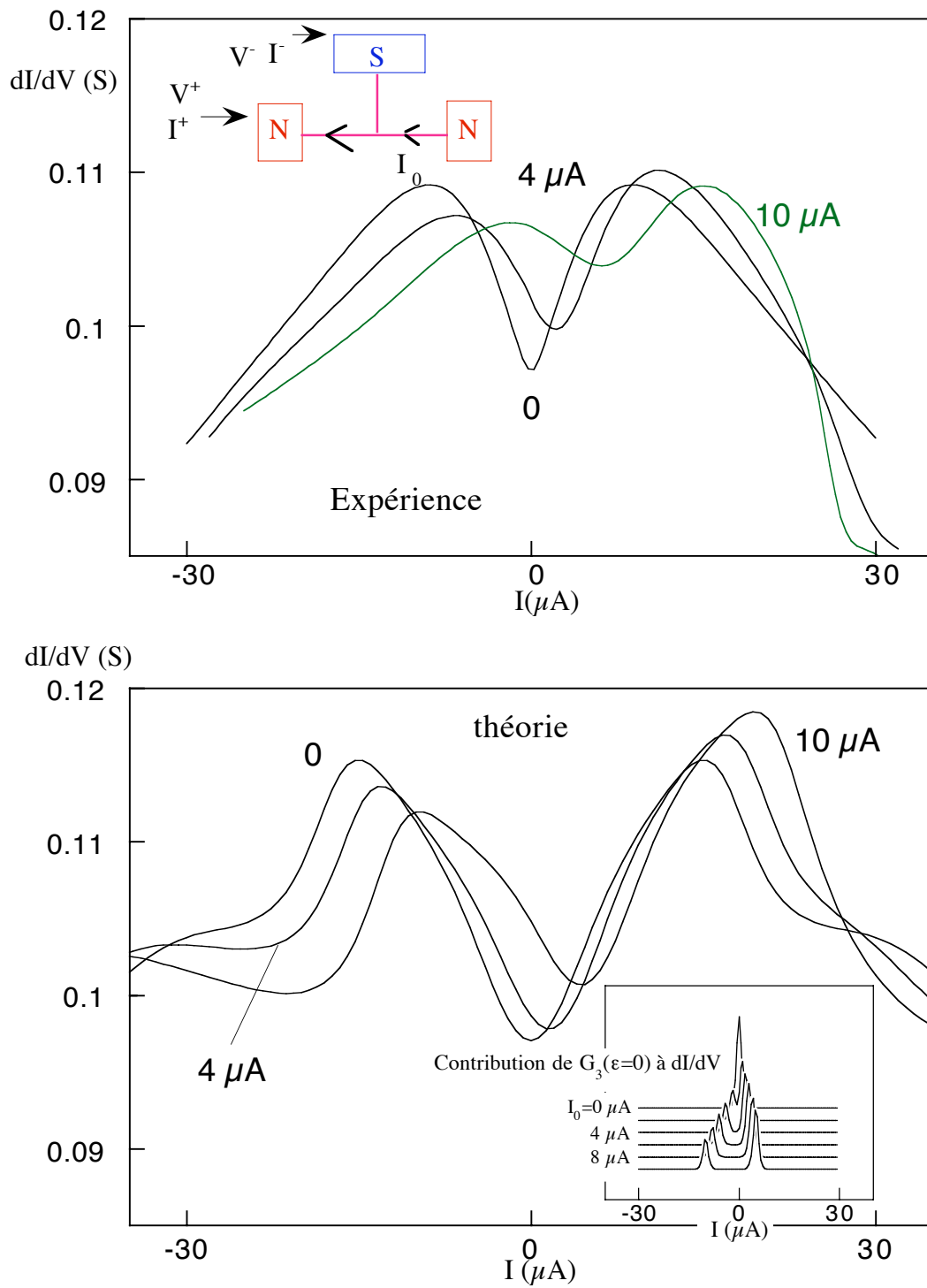


Figure 3.3.5.: Conductances différentielles expérimentales (en haut) et théoriques (en bas) à courant I_2 fixé. L'insert en haut représente la configuration de la mesure (voir texte). L'insert en bas montre comment agit la contribution de la partie 3 (voir figure 3.3.4.). A chaque pic dans l'insert correspond un minimum à énergie nulle de conductance dans la courbe théorique.

La courbe soulignée en trait gras dans l'insert de la figure (3.3.4) montre une nette composante asymétrique due à la présence de marches dans la fonction de distribution.

Avant de faire cette mesure, on avait remarqué que la caractéristique mesurée en fonction de la tension ressemblait à la conductance mesurée en fonction de la température. On pouvait alors supposer que la mesure en tension provenait uniquement d'un échauffement dû au passage du courant jusqu'à la température $T(V)$, et que la conductance mesurée $G(V)$ était en fait $G(T(V))$. Or, le fait qu'il y ait une nette composante asymétrique dans les mesures expérimentales de la figure 3.3.4. invalide cette explication. Car cette composante est le signe de la présence de marches dans la fonction de distribution. La présence de telles marches est une confirmation que les collisions inélastiques ne relaxent pas la fonction de distribution sur la longueur de l'échantillon [4].

Dans les courbes théoriques, nous pouvons reconnaître certains traits des caractéristiques mesurées. Dans la figure 3.3.4, la composante asymétrique due à la partie de l'échantillon proche de S (fil 3) s'ajoute à la contribution des parties 1 et 2, les plus éloignées de S, que l'on peut voir à courant nul.

D'autres mesures ont été faites à courant I_2 fixé où l'on mesure la tension V_1 en fonction du courant $I=I_3$ (figure 3.3.5.) la température de ces deuxièmes mesures est aussi de 100 mK. De même on arrive à rendre compte de certains traits de la mesure : décalage des deux maxima observés, diminution du maximum "à gauche", et augmentation "à droite".

Par contre, nous nous trouvons encore dans la situation où la position et l'amplitude des maxima est beaucoup trop grande. Les écarts entre théorie et expérience semblent ici toujours dans le même sens : tension des maxima trop grande, et amplitude trop élevée. Lorsque le courant est fort, l'"amortissement" dans l'expérience des structures prédites théoriquement dans la figure 3.3.5. est le signe d'un effet de chauffage. Au total, on peut affirmer que la distribution présente bien une structure "en escaliers", mais qui est élargie par la température.

3.2. Les effets de chauffage

3.2.1. Idée théorique

L'idée des effets de chauffage est que la distribution des électrons n'est pas la distribution à l'équilibre à la température indiquée par le thermomètre, et que cette distribution varie en fonction des courants injectés. On modélisera la largeur des fonctions par

une température effective. Ceci signifie que les réservoirs ne sont plus vraiment des réservoirs. Nous conserverons l'appellation de réservoir, mais en désignant cette fois la partie de l'échantillon (fil, plot de contact) qui est supposée jouer le rôle de réservoir.

Lorsqu'un courant passe dans le réservoir, plusieurs effets distincts peuvent survenir :

1/ D'abord, le potentiel chimique du réservoir peut être mal défini. En effet, il faut aux électrons une longueur de l'ordre de la longueur de collision inélastique L_{in} pour se thermaliser entre eux (on choisit dans ce raisonnement qualitatif comme définition de L_{in} la longueur sur laquelle la fonction de distribution relaxe). Si le réservoir n'a pas une conductivité suffisante, une chute de potentiel ρL_{in} a lieu sur cette longueur de collision. ρ est la résistance du réservoir par unité de longueur. Cette chute de potentiel provoque ainsi un élargissement de l'ordre de ρL_{in} de la fonction de distribution. La distribution des électrons à la sortie du réservoir n'est certes pas une distribution de Fermi-Dirac, mais on peut qualitativement dire que son élargissement correspond à une certaine "température apparente" T_{eff} . Si $L_{in} \propto T_{eff}^{-\alpha}$, alors $T_{eff} \propto I^{1/(1+\alpha)}$. Ce cas se produit en particulier si le réservoir n'est autre qu'un prolongement des fils qui constituent l'échantillon.

2./ Ensuite, le courant qui passe dans le réservoir injecte une puissance Joule ρI^2 par unité de longueur dans le réservoir. Pour estimer cette contribution, on se place dans la situation d'un réservoir isotherme, parcouru par un courant, et on néglige l'effet Joule dû à l'échantillon. La puissance Joule égale la puissance évacuée vers les phonons. Si T_e est la température des électrons, la puissance transmise aux phonons est alors : U_e / τ_{ep} où $U_e \propto T_e^2$ est l'énergie interne des électrons, et $\tau_{ep} \propto T^{-3}$ le temps moyen des collisions électron-phonon. Si T_0 est la température des phonons (des phonons au niveau de l'échantillon, mais considérons ici que c'est aussi l'indication du thermomètre). Alors :

$$\rho I^2 = I^2 / \sigma_s = s \Sigma (T_e^5 - T_0^5) \quad (3.3.5.)$$

[5] où Σ est une constante caractérisant les collisions électron-phonon, où σ est la conductivité du film, et où s est la section du réservoir. Si de plus la température des phonons est très inférieure à celle des électrons, on a plus simplement : $T_e \propto I^{2/5}$.

3/ Dans le cas mésoscopique où aucune dissipation n'a lieu dans l'échantillon, l'énergie acquise par les électrons dans l'échantillon est dissipée dans les réservoirs, puis cette énergie est évacuée dans un temps caractéristique de l'ordre du temps de collision électron-phonon. Nous nous trouvons maintenant dans la situation où la température n'est pas uniforme

dans le réservoir. La puissance apportée aux électrons est alors I^2 / G_N . On peut modéliser ceci en disant que cette puissance est apportée à une extrémité du réservoir, et est transmise aux phonons plus loin. Il faut alors résoudre l'équation de diffusion de la chaleur [6] : $\partial_x(\sigma L T_e \partial_x T_e) = \Sigma(T_e^5 - T_0^5)$, où $L = \pi^2 k_B^2 / 3e^2 = 2,45.10^{-8} \text{ W}\Omega\text{K}^{-2}$ est le nombre de Lorentz et σ la conductivité du réservoir, et avec comme condition aux limites $\sigma L T_{e0}(\partial_x T_e)_0 = I^2 / s G_N$ (entrée d'une puissance $I^2 / s G_N$ en $x=0$) et $T_e(x = \infty) = T_0$ loin dans le réservoir. En multipliant les deux membres de l'équation différentielle par $T_e \partial_x T_e$ on obtient une relation pour la température T_{e0} des électrons à la sortie du réservoir ($x=0$) :

$$\left(I^2 / s G_N\right)^2 = \frac{2}{7} \Sigma \sigma L T_e^7 - \Sigma \sigma L T_0^5 T_e^2 \quad (3.3.6.)$$

Si en plus, $T_0 \ll T_e$, alors $T_e \propto I^{4/7}$. On pourrait aussi prendre pour valeur de T , loin dans le réservoir, la valeur fournie par la loi en puissance 2/5.

4/ Enfin, un dernier phénomène de chauffage, plus trivial, peut entrer en jeu : il s'agirait d'un échauffement général de la plaquette de silicium qui supporte l'échantillon, lorsque l'on fait passer un courant, cet échauffement n'étant pas complètement vu par le thermomètre si le couplage entre celle-ci et le thermomètre n'est pas correct. La conduction thermique entre l'échantillon et le thermomètre est $\lambda(T) \propto T^\alpha$. En particulier, si le point faible est la colle (amorphe) qui maintient l'échantillon sur son support $\alpha \approx 1$, alors $T_e \propto I$.

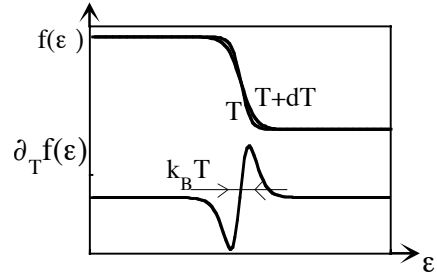
Tous ces phénomènes font que la fonction de distribution est élargie. On peut décider de modéliser ceci par une température effective du réservoir, température qui dépend du courant I qui passe dans le réservoir. Il faut noter qu'il s'agit d'un modèle pour interpréter les mesures, et que si le terme concernant la longueur L_{in} est le terme prédominant, il y a peu de raison que la fonction de distribution à la sortie du réservoir ait la forme d'une distribution de Fermi-Dirac.

Ainsi, lorsque l'on fait varier la tension dans les réservoirs, on va modifier I , donc la température effective. On obtient ainsi une température effective en fonction de la tension V appliquée. Donc on garde l'hypothèse d'une température effective T proportionnelle à I^α , et d'un potentiel chimique non modifié.

L'écart entre les fonctions de distribution à V et à $V+dV$ comporte alors un terme supplémentaire décrit par la formule 3.3.7. (en supposant $\delta G \ll G_N$) et représenté figure 3.3.6.

$$\frac{dI}{dV} \approx G_N + (\delta G * \partial_V f) + G_N \frac{dT}{dI} (\delta G * \partial_T f) \quad (3.3.7.)$$

Figure 3.3.6.: Fonctions de distribution à $T(V)$ et à $T(V+dV)$ (en haut) et fonction par laquelle il faut convoluer la conductance spectrale (en bas), en fonction de l'énergie ϵ .



Au terme habituel donné par la convolution de la conductance spectrale par une fonction "pic", il faut ajouter une convolution de la conductance spectrale par la dérivée d'une fonction "pic". Cette contribution tend vers la dérivée de la conductance spectrale lorsque T tend vers 0.

3.2.2. Affaissement et décalage du maximum

Afin de comprendre l'effet qualitatif de la prise en compte de ce terme de chauffage, regardons son effet (figure 3.3.7.) pour un fil N entre S et N, à partir de la formule (3.3.7).

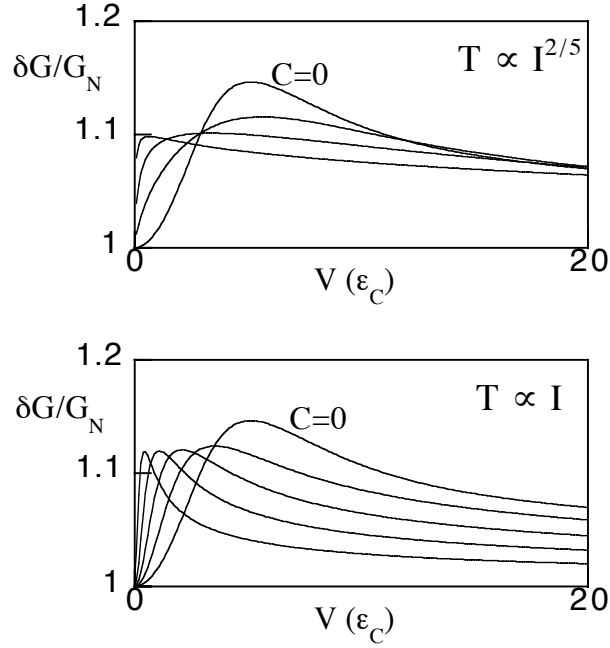


Figure 3.3.7: Exemples de conductances différentielles théoriques d'un fil N entre S et N à température nulle si la température des électrons à la sortie des réservoirs suit une loi en $I^{2/5}$ (en haut) ou est proportionnelle à I (en bas). Les conductances sont représentées dans chaque cas pour différents coefficients de proportionnalité C , qui varient entre 0 et 5 dans les deux cas. La tension V est donnée par $V = G_N I$.

On observe une diminution de la hauteur du pic observé. Lorsque l'effet devient très grand (grand facteur de proportionnalité entre T et I^α), cette hauteur tend vers une constante qui dépend de l'exposant. Enfin, la position du maximum est décalée vers les basses énergies. On remarque en plus sur les figures que la manière dont ce décalage s'effectue dépend aussi de l'exposant. Pour des valeurs faibles ($\alpha = \frac{2}{5}$), alors le maximum s'"arrondit" bien avant de se décaler. Pour des valeurs plus grandes de cet exposant, on observe surtout un phénomène de décalage.

4. Interprétation de l'ensemble des mesures

Nous avons vu que l'effet du chauffage est un décalage des maxima de conductance, exactement du même type que le décalage observé au paragraphe 2.2. Ajoutons donc un terme de chauffage des réservoirs. On ne connaît pas a priori quelle loi de puissance joue un rôle prépondérant. On peut cependant estimer les contributions de chacune d'elles : pour des réservoirs de $2\text{ }\mu\text{m}$ de largeur et de 50 nm d'épaisseur, Σ de l'ordre de $10^9\text{ Wm}^{-3}\text{K}^{-5}$ [5-6], et on calcule $\sigma \approx 10^{-7}\text{ }\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$

La contribution en puissance $4/7$ a alors une amplitude théorique de l'ordre de 0.8 K pour $I = 10\text{ }\mu\text{A}$. La contribution en puissance $2/5$ a une amplitude de l'ordre de 0.9 K pour $I = 10\text{ }\mu\text{A}$. On voit qu'alors, ces deux contributions ont théoriquement des amplitudes comparables dans les domaines de tension qui nous intéressent.

On peut alors prendre en compte cet effet de chauffage dans le calcul théorique, pour plusieurs lois de variation de la température des électrons. Comme on ne cherche qu'un effet qualitatif, on suppose que tous les réservoirs ont la même température. On ajuste approximativement l'amplitude de cette contribution afin de rendre compte de la position observée des extréma de la mesure à $I_3=I_0 = 4\text{ }\mu\text{A}$, c'est-à-dire $T_e = 3,5.10^2\text{ I}^{4/7}$, $T_e = 4,5.10^1\text{ I}^{2/5}$, $T_e = 5.10^4\text{ I}$ (unités en K et A), soit environ 0.4 K pour $10\text{ }\mu\text{A}$ pour les deux lois $4/7$ et $2/5$ et 0.5 K pour $10\text{ }\mu\text{A}$ pour la loi en I

Avec ces valeurs des amplitudes des contributions et avec la valeur de $4\text{ }\mu\text{A}$, la valeur de T_0 n'a pratiquement pas d'effet s'il est compris entre 0 et 150 mK (100 mK pour ce calcul).

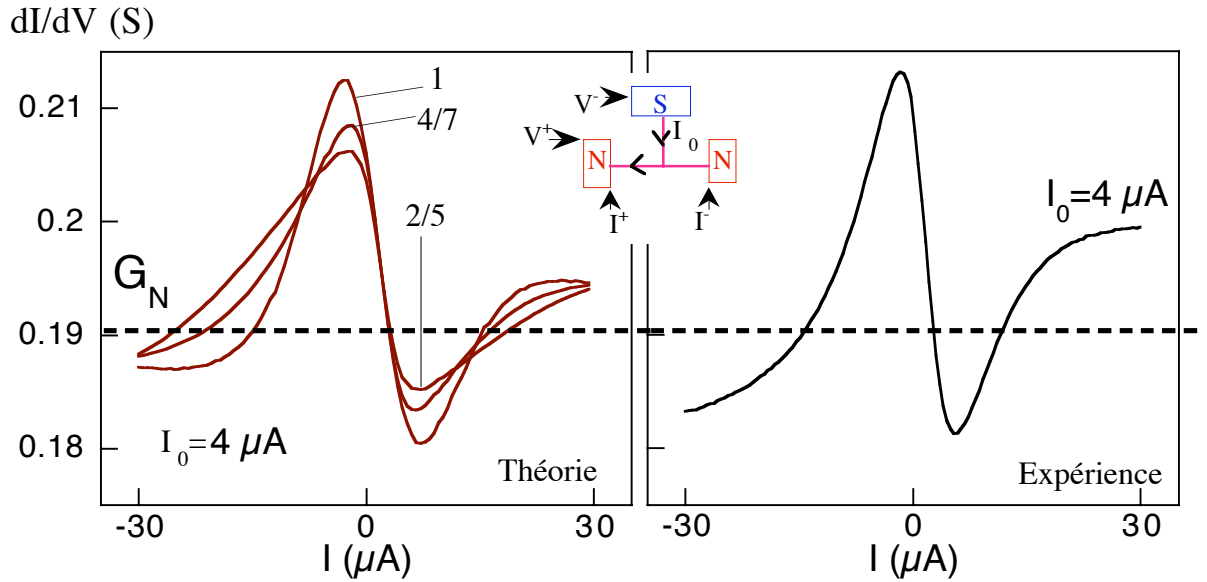


Figure 3.3.8.: Caractéristique différentielle théorique avec un courant I_3 constant de $4 \mu\text{A}$ dans les mesures multi-réservoir de la figure 3.3.4, en tenant compte, en plus du terme multi-réservoir, de l'effet de chauffage dans les réservoirs. Trois lois de variation de la température sont représentées, $T_e \propto I^{2/5}$, $T_e \propto I^{4/7}$, $T_e \propto I$. Les amplitudes sont ajustées approximativement pour rendre compte de l'abscisse des extréma de la caractéristique.

On voit d'abord (figure 3.3.8.) que les amplitudes invoquées pour ces phénomènes sont de l'ordre des amplitudes estimées plus haut. Remarquons l'amplitude de la loi $T_e \propto I$, qui semble le mieux convenir. L'intensité I_2 pour laquelle le supraconducteur transite lorsque $I_3 = 0$ est $100 \mu\text{A}$. Or, l'extrapolation de la loi $T_e \propto I$ à $100 \mu\text{A}$ donnerait $T_e = 5 \text{ K}$. Cette forte valeur exclut pour une telle loi une interprétation en termes d'échauffement général de l'échantillon. Expliquée en termes de longueur de collisions entre électrons, on obtiendrait une longueur de relaxation de la fonction de distribution L_{in} constante valant $4 \mu\text{m}$ environ [4].

On voit ensuite que l'effet qualitatif de ces phénomènes de chauffage permet de rendre compte à la fois de la position observée des extréma, de la diminution de leurs amplitudes. Notons que pour ce calcul qualitatif, il n'a pas été tenu compte d'une éventuelle température différente pour chaque réservoir.

Cet effet de chauffage permet de rendre compte qualitativement de la plupart des mesures effectuées. On ne peut cependant pas vraiment discerner entre différentes lois de variations possibles, car elles auraient des amplitudes comparables. A titre de conclusion, voici le résultat théorique obtenu pour la loi $T_e \propto I$ dans le cas des mesures de la figure 3.3.4.

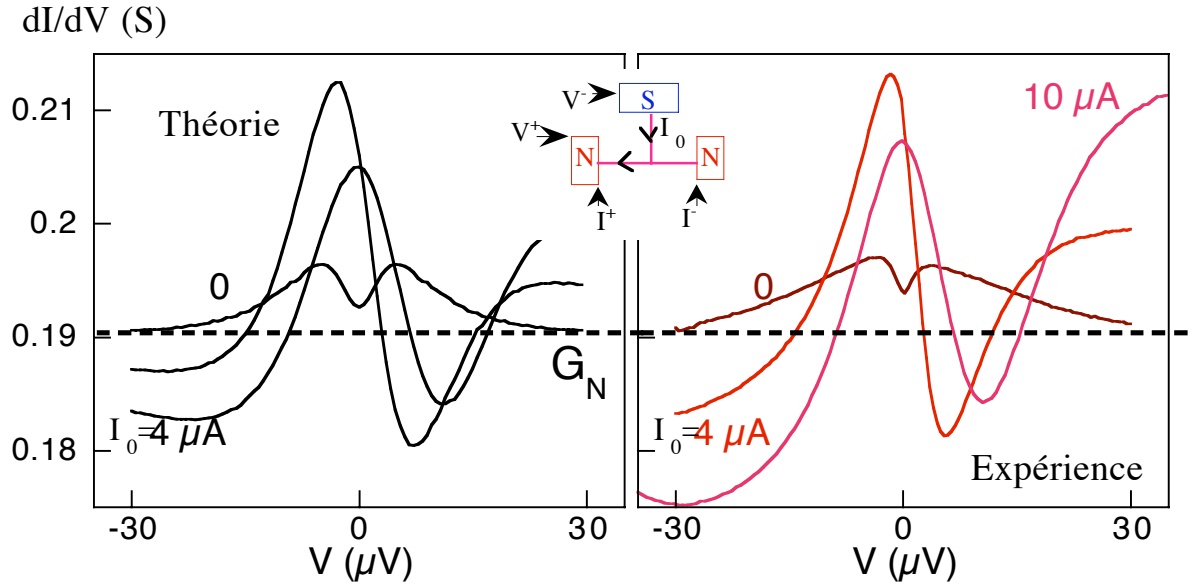


Figure 3.3.9: A gauche conductance théorique pour les mesures multi-réservoir de la figure 3.3.4, compte tenu d'un effet de chauffage $T_e \propto I$. A droite, sur la même échelle, l'expérience est rappelée pour permettre une comparaison directe.

L'accord montré sur la figure 3.3.9. n'apparaît peut-être pas formidable, mais il est néanmoins remarquable, car il ne met en jeu qu'un paramètre d'ajustement (le coefficient de la loi en température) pour expliquer qualitativement l'ensemble des mesures. En particulier, nous avons beaucoup amélioré l'accord avec l'expérience dans la mesure de la conductance différentielle "hors interface", montrée ci-dessous :

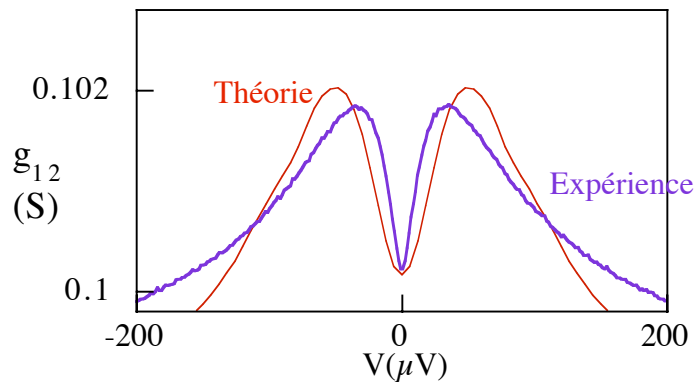


Figure 3.3.10.: Conductance différentielle "hors interface" en prenant en compte le terme de chauffage. Nous pouvons expliquer qualitativement le décalage observé au paragraphe 2.2. entre théorie et expérience.

Nous pourrions certainement améliorer de beaucoup cet accord en prenant en compte les trois lois de variation de T en fonction de I , et aussi en tenant compte des différentes températures dans les différents réservoirs. Mais avec un aussi grand nombre de paramètres, il est certain qu'un tel ajustement ne serait pas très pertinent. De plus, pour les calculs précis d'effets "de chauffage", il n'est peut-être pas très raisonnable de modéliser les réservoirs par une augmentation brutale de la section du fil : en effet, il faudrait aussi prendre en compte la forme des lignes de courant à la sortie du réservoir!

En conclusion, dans ce chapitre, nous avons mis en évidence la présence d'un maximum dans la conductance du métal normal. Nous avons montré que l'énergie caractéristique associée à ce maximum de conductance est donnée par l'énergie de Thouless. Nous avons observé que ce maximum est bien décrit par la théorie des fonctions de Green quasiclassiques en limite diffusive. Nous avons souligné le fait que, pour espérer une bonne comparaison entre la théorie et les expériences, il faut une bonne description du rôle des parties de l'échantillon qui constituent les réservoirs.

Références bibliographiques

- [1] Petrashov, Antonov, Maximov, Shaidarov, JETP Lett. 58, 551 (1994)
- [2] Nazarov, Stoof, Phys. Rev. Lett. 76, 823 (1996)
- [3] Charlat, Courtois, Gandit, Mailly, Volkov, Pannetier, Phys. Rev. Lett. 77, 4950 (1996)
- [4] Pothier, Guéron, Birge, Estève, Devoret, soumis à Phys. Rev. Lett. (1997)
- [5] Roukes, Freeman, Germain, Richardson, Ketchen Phys. Rev. Lett. 55, 422 (1985)
- [6] Steinbach, Martinis, Devoret Phys. Rev. Letter, 76, 3806 (1996)
- [7] Kittel, *Physique de l'état solide*, Dunod.

Chapitre 4

Oscillations Aharonov-Bohm

Dans le chapitre 1, nous avons vu que la réflexion d'Andréev induit une amplitude de paires dans le métal normal (paragraphe 1.4 du chapitre 1). Cette amplitude de paires est le signe d'une cohérence dans le métal normal, dont nous souhaitons mesurer les effets sur le transport dans une configuration Aharonov-Bohm. L'idée principale de cette géométrie est de faire interférer les trajectoires d'électrons passant d'un côté ou de l'autre d'une boucle. On peut agir sur la différence de phase entre un côté et l'autre en appliquant un flux magnétique dans la boucle. Dans le cas d'une boucle en métal normal, ces phénomènes d'interférence créent des oscillations périodiques de la magnétoconductance en fonction du flux magnétique. Ces oscillations ont une période h/e qui correspond à des électrons seuls, et une amplitude de l'ordre du quantum de conductance e^2/h si la taille de la boucle est très inférieure à la longueur de mémoire de phase L_φ . Dans le cas d'un métal normal à proximité d'un supraconducteur, des paires passent du supraconducteur vers le métal normal par le mécanisme de réflexion d'Andréev (voir le paragraphe 1.2 du chapitre 1) et leurs trajectoires interfèrent suivant le flux magnétique dans la boucle. Cette interférence fait intervenir deux particules, et la magnétoconductance présente des oscillations dont la période est le flux supraconducteur ϕ_0 .

$$\phi_0 = h / 2e \quad (4.0.1.)$$

Dans ce chapitre, nous mettrons ces oscillations en évidence. Nous verrons que l'amplitude de ces oscillations peut être très supérieure au quantum de conductance, et nous montrerons que cette amplitude obéit à une loi en $1/T$ en fonction de la température.

1. Géométrie en boucle

La géométrie des échantillons est celle d'un fil de cuivre (métal normal) comprenant une boucle. Le supraconducteur est posé directement sur ce fil de cuivre, et l'interface entre le supraconducteur et le métal normal est la plus transparente possible (voir chapitre 2). Le fait que le supraconducteur soit posé directement permet éviter d'avoir un éloignement trop grand entre la zone où passe le courant et le supraconducteur, ce qui augmente l'effet mesuré. Par contre, ceci nous expose à un éventuel effet de court-circuit de la partie du fil qui est située juste sous le supraconducteur. Une géométrie d'injection "en ligne" du courant est utilisée, afin d'éviter l'effet de la déformation des lignes de courant dans la largeur des fils liée à l'apparition de la supraconductivité [1]. Ceci permettra de se rapprocher d'un modèle "circuits de fils". La boucle est un carré de $0.5 \mu\text{m}$ de côté, car cette dimension est assez grande pour être sensiblement supérieure à la largeur des fils.

1.1. Un échantillon de faible conductance

Un premier échantillon dont les fils sont très fins a été mesuré. Nous l'appellerons "boucle 184" (184 fait allusion à la résistance de l'échantillon). La largeur très faible des fils permet de se rapprocher de la configuration Aharonov-Bohm théorique. On obtient une conductance totale de l'échantillon assez faible, ce qui permettra de limiter les problèmes de chauffage des réservoirs.

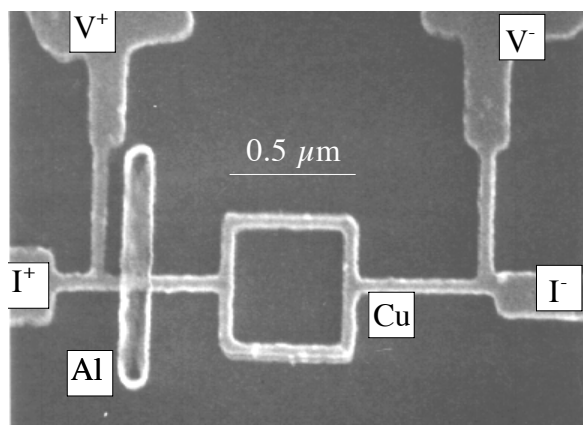


Figure 4.1.1.: Photographie d'un échantillon aux fils fins, dont la géométrie est très semblable à l'échantillon "boucle 184". Nous rappellerons cette géométrie dans les figures, par le symbole \boxplus .

La photographie (figure 4.1.1.) montrée ici n'est pas celle de l'échantillon mesuré, mais en représente la plupart des aspects. Le supraconducteur est la petite ligne verticale

d'aluminium posée en travers du fil.

1.2. Un échantillon de forte conductance

Dans l'échantillon présenté au paragraphe précédent, la valeur de la résistance, associée à la largeur estimée des fils et à leur épaisseur, était le signe d'un faible coefficient de diffusion. Nous présentons aussi un échantillon de même géométrie, mais avec des fils plus larges et plus épais, de manière à améliorer les conditions de formation des fils lors du dépôt et à limiter l'importance des bords du fil, afin d'obtenir un coefficient de diffusion plus élevé qui permette des énergies de Thouless plus facilement accessibles à l'expérience. Ceci aura aussi deux effets bénéfiques :

Tout d'abord une augmentation conséquente de la conductivité permettra de supprimer toute influence des effets de l'ordre du quantum de conductance, et permettra de séparer clairement ce qui constitue la contribution due aux effets moyennés d'ensemble que nous recherchons.

Ensuite, à temps de mémoire de phase égal, ceci permettra d'augmenter aussi la valeur de L_φ .

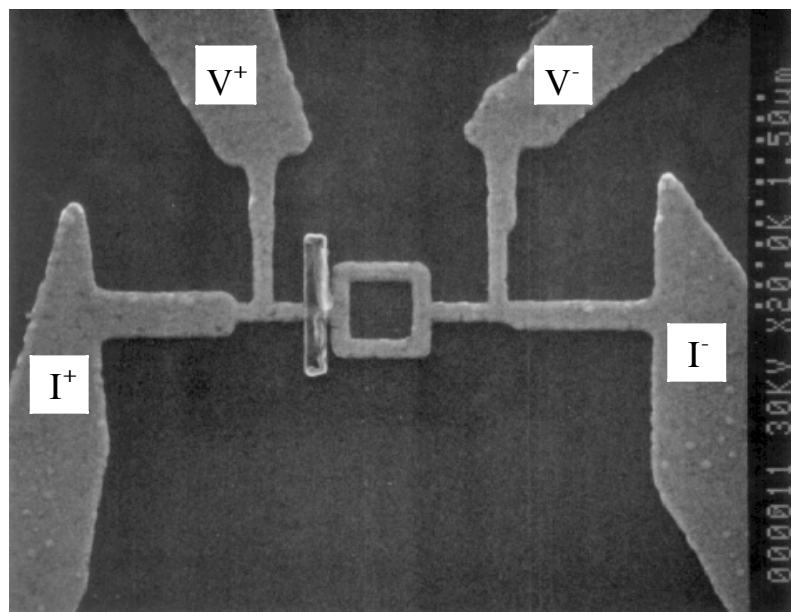



Figure 4.1.2. Photographie de l'échantillon aux fils larges. Cette photographie est celle de l'échantillon mesuré. Dans les figures, le symbole  sera utilisé.

Nous nommerons cet échantillon "boucle 10.6", par référence à sa résistance. Une photographie de cet échantillon (figure 4.1.2.) montre clairement la différence avec l'échantillon "boucle 184". De plus, la photographie montrée ici est celle de l'échantillon qui a été mesuré (la photo a été prise après la mesure), ce qui permet de mesurer la géométrie

exacte de l'échantillon.

Sur les photographies 4.1.1. et 4.1.2, les indications I^+ , I^- désignent les contacts entre lesquels le courant I est injecté, et V^+ et V^- désignent les contacts qui servent pour la mesure de la tension V . Rappelons que la mesure est effectuée en superposant un petit courant de mesure alternatif au courant de polarisation I (voir chapitre 2).

Sur les deux photographies, nous voyons que les différences principales entre les deux échantillons sont :

- Une différence de largeur des fils, avec des implications sur le coefficient de diffusion et sur la résistance totale qui est beaucoup plus grande quand les fils sont fins.
- Une position différente du supraconducteur, qui se trouve plus proche de la boucle dans le cas de "boucle 10.6".
- Dans la boucle aux fils fins "boucle 184", les parties qui lient l'échantillon mesuré aux larges plots de contact qui servent à injecter le courant ont une résistance beaucoup plus faible que celle de l'échantillon. De chaque côté, il n'y aura donc presque pas de différence de potentiel entre le réservoir qui injecte le courant et celui qui sert à mesurer la tension. On se rapproche ainsi d'une mesure en "deux fils", alors que la mesure de "boucle 10.6" est essentiellement une configuration "quatre fils" (voir annexe A.7.).

1.3. Comparaison

Donnons une comparaison entre les caractéristiques principales de l'échantillon du chapitre précédent et des deux échantillons en boucle présentés ici (figure 4.1.3.). Les différences entre les boucles et le fil sont les suivantes : le supraconducteur est un large film dans le cas du fil, alors qu'il est petit dans les boucles. Les énergies de Thouless sont beaucoup plus faibles dans les boucles, car elles sont de plus grandes dimensions que le fil.

	$R_N(\Omega)$	$e \cdot w(\text{nm}^2)$	$L(\mu\text{m})$	$D(\text{cm}^2\text{s}^{-1})$	$l_p(\text{nm})$	$\epsilon_c(\mu\text{eV})$	$\frac{\Delta G}{G_N}(\%)$
chapitre 3	10.1	50x80	0.4	30	6	12	2.5 et ≈ 9
"boucle 184"	184.1	25x50	2	30	6	0.5	7
"boucle 10.6"	10.6	40x150	2	70	13	1.1	9

Figure 4.1.3.: Tableau de caractéristiques des trois échantillons présentés.

La première colonne donne la résistance juste au-dessus de la transition du supraconducteur. La deuxième donne la section des fils. La largeur est approximative pour l'échantillon "Boucle 184". La longueur totale est donnée dans une troisième colonne. On en déduit, de la même façon que cela a été montré au chapitre précédent, le coefficient de diffusion, le libre parcours moyen, l'énergie de Thouless (4ème, 5ème et 6ème colonnes). Dans une dernière colonne, est représentée l'amplitude maximum de la correction de conductance. Pour le premier échantillon, les deux valeurs de la mesure "hors interface" et "par l'interface" sont rappelées.

2. Oscillations de magnétoconductance

2.1. Les oscillations de période $h/2e$

Dans ce paragraphe, nous choisissons de présenter en parallèle les mesures des deux échantillons "boucle 184" et "boucle 10.1". Ce choix permettra de mettre en évidence les points communs, qui proviennent de la géométrie en boucle, et permettra de distinguer et de comprendre les effets des petites différences géométriques.

2.1.1. Conductance linéaire ($V=0$)

La partie linéaire (obtenue pour un courant de polarisation $I=0$) de la magnétoconductance de "boucle 184" est représentée sur la vue tridimensionnelle figure 4.2.1.

Détaillons quelques aspects remarquables de la magnétoconductance représentée sur la Figure 4.2.1 :

Tout d'abord, quand le champ est inférieur à un champ critique, la conductance augmente brutalement. Cette augmentation prend la forme, sur la figure, d'une région de champ magnétique et de température à l'intérieur de laquelle la conductance est plus élevée. A l'extérieur de cette région, la conductance semble constante sur la figure. Ces deux régions sont limitées par une partie verticale qui donne le champ critique du supraconducteur en fonction de la température. Le champ critique élevé (60 mT à basse température) par rapport à l'échantillon du chapitre 3 (où il vaut 13 mT) s'explique par la taille très faible du

supraconducteur. Cette augmentation de conductance, qui est ce qui se voit le plus immédiatement sur la figure 4.2.1, correspond à l'action de la supraconductivité sur la conductance qui est étudiée au chapitre 3.

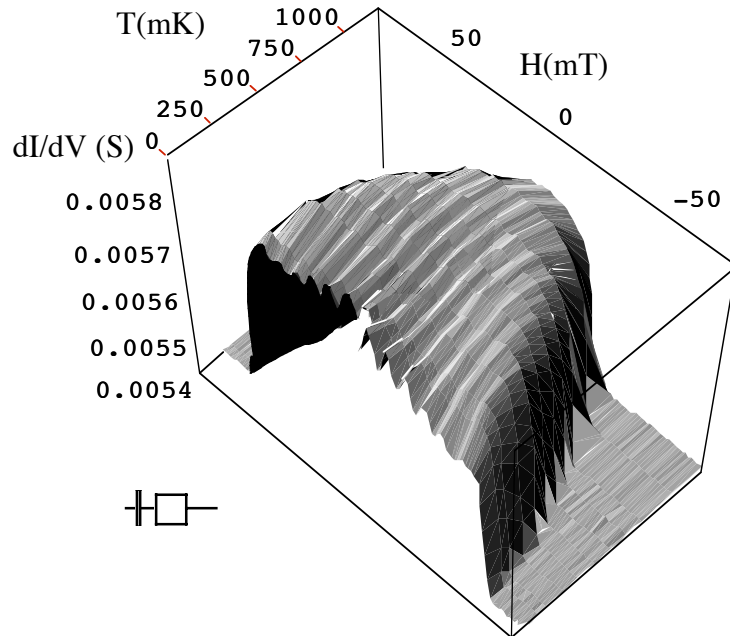


Figure 4.2.1. Vue tridimensionnelle de la magnétoconductance de l'échantillon "boucle 184", en fonction de la température.

Dans toute la région où l'augmentation de conductance se produit, nous pouvons voir nettement des oscillations de conductance. Leur période est d'environ 8.3 mT, ce qui correspond presque à un quantum de flux supraconducteur dans la boucle de $0.25 \mu\text{m}^2$. Les oscillations de magnétoconductance ont donc une période $h/2e$ [5,7]. Nous représenterons donc les autres résultats expérimentaux en fonction du rapport ϕ / ϕ_0 du flux magnétique et du quantum de flux supraconducteur. Nous pouvons enfin remarquer que les oscillations persistent à haute température, on les voit encore très bien sur la figure 4.2.1. au dessus de 1000 mK.

Ces oscillations de conductance sont présentes aussi dans l'échantillon "boucle 10.6", comme le montre la figure 4.2.2.. Cette figure met l'accent sur les oscillations de magnétoconductance de période $h/2e$, qui sont visibles dans les deux échantillons. L'amplitude des oscillations est de l'ordre de 1% à 60 mK dans le cas de fils fins "boucle 184", et est aussi d'un quantum de conductance. Dans le cas où la conductance est plus faible

"boucle 10.6", l'amplitude est de l'ordre de 3%, et de l'ordre de 120 quanta de conductance. Ainsi, il semble plus pertinent de comparer l'amplitude de ces oscillations à un certain pourcentage de la conductance totale, alors qu'il n'est pas pertinent de la comparer à un quantum de conductance. C'est donc un effet de cohérence d'ensemble. Notons K le point d'intersection de la boucle le plus éloigné du supraconducteur. Si le flux dans la boucle est entier, alors le déphasage entre les amplitudes de paires qui passent par une branche ou par l'autre est un multiple de 2π , c'est-à-dire qu'une interférence constructive se produit. Si en revanche ce flux est demi-entier, cette interférence est destructive et l'amplitude de paires est nulle dans toute la partie de fil qui se trouve au delà du point d'intersection des deux branches de la boucle. On a ainsi l'équivalent d'une géométrie de fentes d'Young, où les fentes sont constituées par les fils.

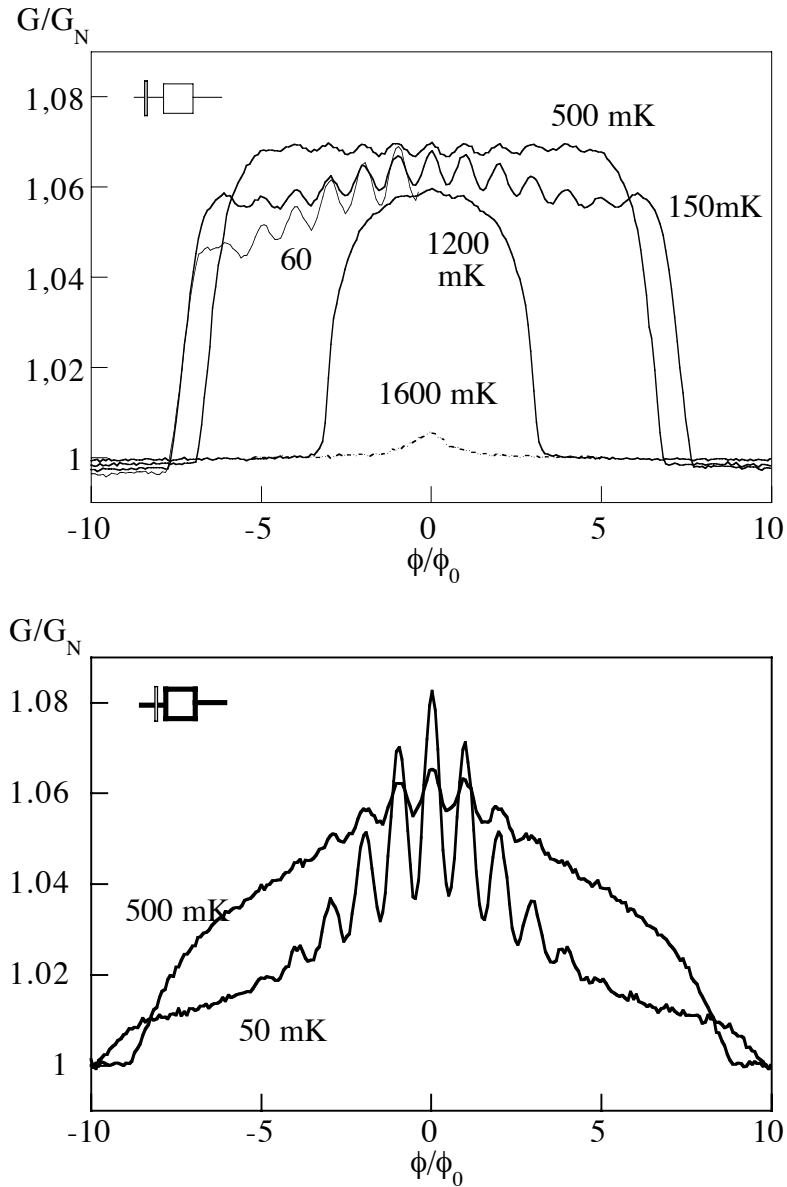


Figure 4.2.2.: Conductance à tension nulle en fonction du flux magnétique appliqué pour différentes valeurs de la température. En haut, boucle aux fils fins "boucle 184", et avec des fils larges "boucle 10.6", en bas. Le courant de mesure est de 20 nA en haut et 200 nA en bas. Les oscillations de magnétoconductance ont une période $\phi_0 = h/2e$.

Sur la figure 4.2.2., on voit nettement que l'amplitude des oscillations diminue quand le champ augmente. On pourra interpréter ceci comme un effet de largeur finie des fils, équivalent à des fentes de largeur finie dans la géométrie de fentes d'Young. Cet effet est très nettement visible sur l'échantillon aux fils larges "boucle 10.6", où dès que le flux dépasse $4\phi_0$, les oscillations disparaissent. Il l'est beaucoup moins sur celui où les fils sont fins "boucle 184". Nous n'oublierons pas cet effet lors de la comparaison entre la théorie et l'expérience.

Dans les mesures de la figure 4.2.3., qui représentent la magnétoconductance à différents flux magnétiques en fonction de la température, on observe une diminution de conductance quand la température diminue lorsque le champ est légèrement inférieur au champ critique. Ce comportement est visible aussi sur la figure 4.2.2. pour l'échantillon "boucle 10.6" : à $5\phi_0$, la conductance à 50 mK est inférieure à la conductance à 500 mK. A 50 mK et juste au-dessous du champ critique, l'augmentation de conductance n'est plus que de 1% . De même, à faible champ et à flux demi-entier, la conductance à 500 mK est supérieure à la conductance à 50 mK. Ce comportement décroissant de la conductance quand la température décroît, la "ré-entrance", est exactement celui que nous avons étudié au chapitre 3.

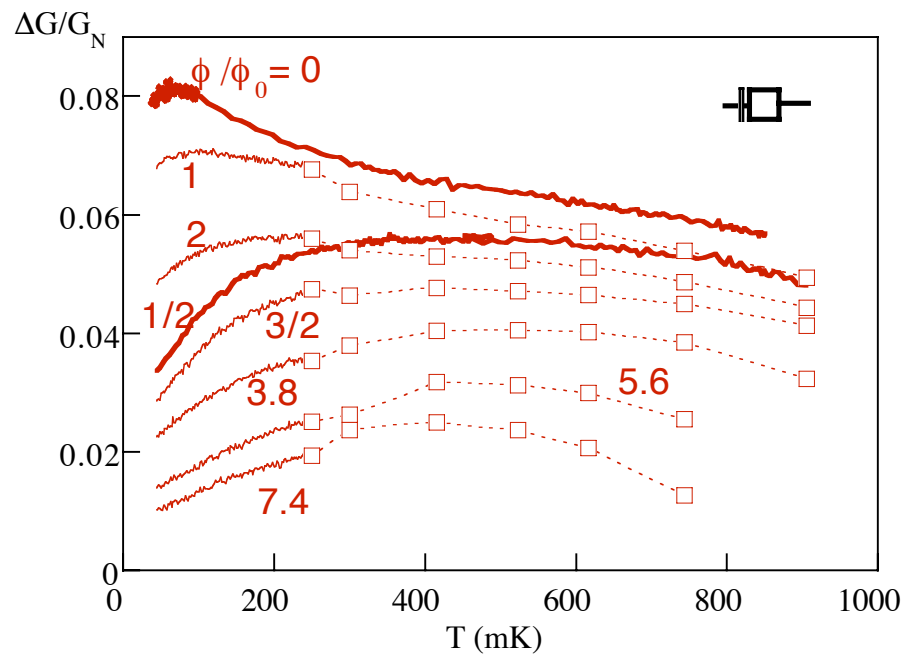


Figure 4.2.3.: Conductance en fonction de la température à différents flux magnétiques dans la boucle. Les oscillations sont bien visibles (en particulier entre les valeurs 0 et 1/2) la valeur du flux attaché à chaque mesure est représentée. Pour chacune de ces mesures, la position du maximum de conductance varie. Les carrés correspondent à des points reportés depuis les courbes de magnétoconductance.

La série de mesures de la figure 4.2.3 met en évidence en particulier des variations de la position du maximum de conductance en fonction du champ magnétique. Ce phénomène sera discuté dans la comparaison avec la théorie.

2.1.2. Décroissance en $1/T$

L'effet le plus remarquable visible sur les figures 4.2.1 et 4.2.2 est la persistance des

oscillations à haute température. Dans ce paragraphe, nous mettrons en évidence que les oscillations décroissent suivant une loi en $1/T$ quand la température augmente. Si l'on porte la différence entre les mesures à $\phi=0$ et à $\phi=1/2\phi_0$ de l'échantillon "boucle 10.6" montrés sur la figure 4.2.3., on pourra obtenir avec une bonne précision l'amplitude des oscillations. En revanche, la conductance de l'échantillon "boucle 184" présente des oscillations dont l'amplitude est plus faible et connue avec moins de précision. Pour extraire cette amplitude des données, une méthode aurait pu être de mesurer la hauteur de la composante de Fourier correspondante. Cependant, on peut juger que le nombre faible d'oscillations, ainsi que les composantes à plus longue période rendraient le résultat très imprécis. En revanche, on voit que la conductance mesurée est une fonction paire du champ appliqué. Ceci signifie que, pour les champs faibles, on peut modéliser les composantes de longue période par une relation de la forme : $G_0 \approx a + bH^2$. L'amplitude des oscillations est aussi une fonction lentement variable, que l'on peut modéliser de la même façon. Ajoutons à cela que le zéro du champ n'est pas connu avec précision. On calcule alors l'amplitude en trouvant les 6 valeurs a_1, a_3, a_4, a_5, a_6 , pour que la fonction $G \approx \left(a_1 + a_2(H - a_3)^2\right) + \left(a_4 + a_5(H - a_3)^2\right) \cos(a_6(H - a_3))$ soit la plus proche possible de la mesure.

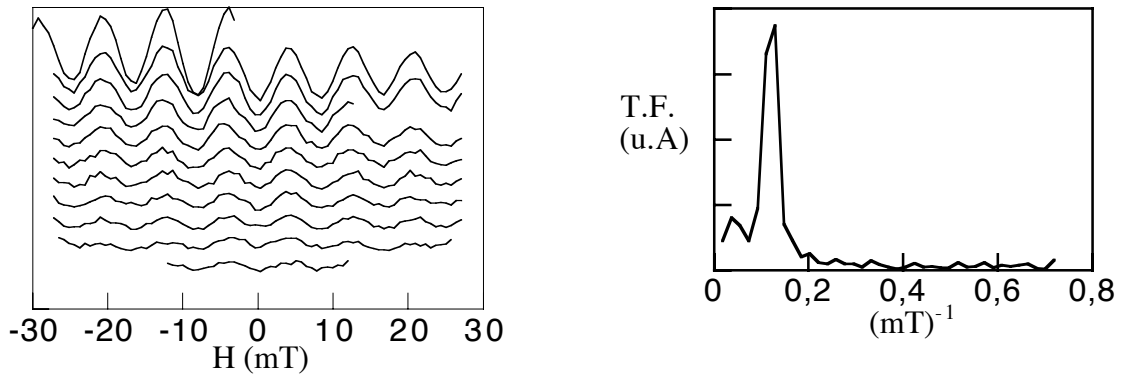


Figure 4.2.4.: Oscillations de période $h/2e$, les températures sont, de haut en bas: 60, 150, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1000 et 1200 mK. La transformée de Fourier (à droite) de ces oscillations à 150 mK ne fait pas apparaître de composante à des fréquences supérieures.

La valeur de a_4 est l'amplitude recherchée, et celle de $a_3=0.23$ mT est la valeur du "zéro" du champ. La valeur de a_6 , quant à elle, est l'inverse de la période des oscillations. On trouve une période (indépendante de la température) égale à 8.3 mT, ce qui correspond bien à un flux $h/2e$ dans la boucle de $0.5 \times 0.5 \mu\text{m}^2$. Lorsque l'on retranche la composante lentement

variable, on obtient la partie oscillante seule (figure 4.2.4.)

En particulier, la transformée de Fourier de ces oscillations ne met pas en évidence de composante de période $h/4e$. Par contre, la composante h/e semble exister ici, avec une amplitude comparable à celle que nous observerons au paragraphe suivant qui traite des oscillations h/e .

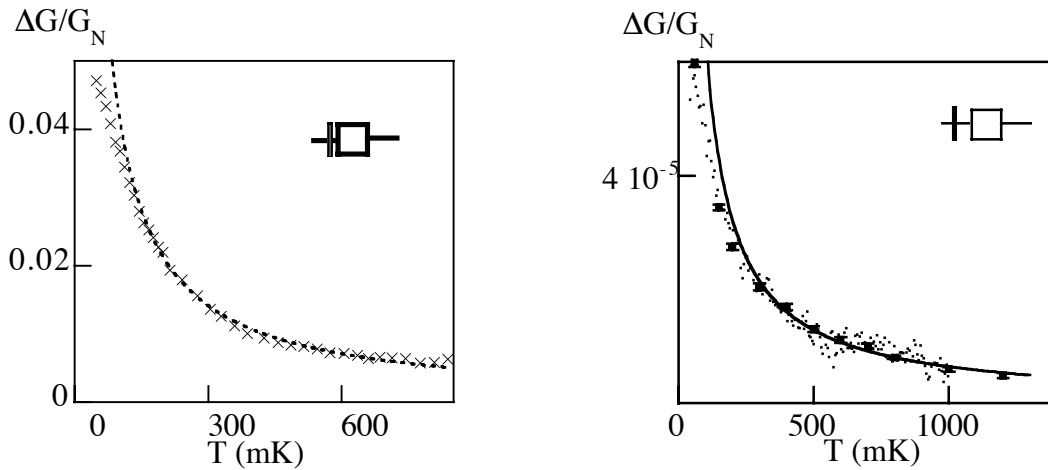


Figure 4.2.5: Amplitude des oscillations de magnétoconductance pour l'échantillon "boucle 184" à droite, où les points représentent la différence entre la mesure à flux nul et celle à $1/2$ flux, et les carrés noirs sont obtenus après traitement. A gauche, l'amplitude des oscillations dans l'échantillon "boucle 10.6". Les courbes en pointillés (à gauche) et continue (à droite) représentent des lois de décroissance en $1/T$.

La figure 4.2.5. montre l'amplitude des oscillations de conductance en fonction de la température pour les deux échantillons. Nous remarquons que, pour des températures supérieures à environ 200 mK, l'amplitude des oscillations suit une loi en $1/T$. Pour des températures inférieures, on observe dans les deux cas une déviation à basse température.

Cette amplitude des oscillations vérifie une loi de décroissance en $1/T$. Le fait que les oscillations persistent lorsque $L_T \ll L$ (L_T vaut environ $0.1 \mu\text{m}$ à 1200 mK pour l'échantillon "boucle 10.6") est le signe évident que la longueur thermique L_T (équation 1.0.2 du chapitre 1) n'est pas la longueur qui limite l'effet de proximité.

2.1.3. Conductance différentielle

La mesure de la conductance linéaire, présentée aux deux paragraphes précédents, donne seulement une description de l'action du flux magnétique dans la boucle aux énergies proche de 0. Pour avoir une idée de l'action de ce flux sur les énergies plus grandes, il faut faire une mesure de la conductance différentielle $g=dI/dV$ des échantillons. On ne s'intéresse cependant qu'aux basses tensions, c'est-à-dire aux énergies très inférieures au gap. La figure 4.2.6. représente la caractéristique différentielle de l'échantillon de faible conductance. Lorsque la tension est plus grande, des structures de plus grande amplitude apparaissent, qui seront associées à la transition du supraconducteur.

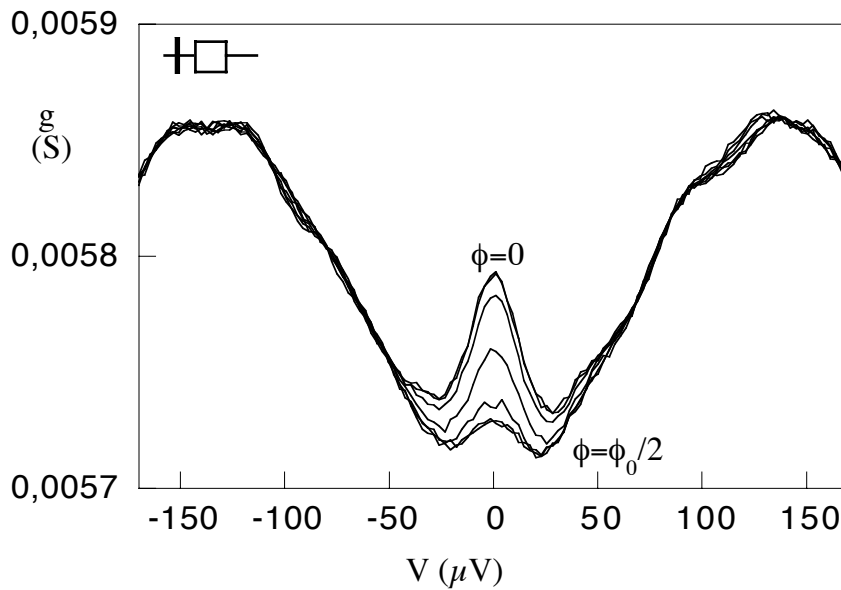


Figure 4.2.6: Conductance différentielle en fonction de la tension pour des flux magnétiques compris entre zéro et un demi quantum de flux pour la boucle aux fils fins. On remarque surtout que seules les basses énergies sont affectées par les oscillations.

Lorsque l'on mesure la conductance différentielle en fonction du champ appliqué dans l'échantillon "boucle 184" (figure 4.2.6.), on observe que seules les tensions inférieures à 40 μV environ sont affectées par la présence d'un flux magnétique dans la boucle. Ainsi, les oscillations, qui persistent à haute température, ne survivent pas quand la tension augmente. Nous verrons que le fait que les oscillations de conductance n'affectent que les basses énergies est relié à la loi de décroissance en $1/T$.

2.2. Discussion sur les oscillations $h/2e$

2.2.1. Modèle pour les boucles

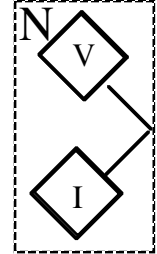
Le modèle (figure 4.2.7) que l'on propose est le suivant : il correspond à l'échantillon du chapitre 3, avec une forte dissymétrie entre les parties 1 et 2, et une partie 3 de conductance infinie.



Figure 4.2.7.: Modèle proposé pour les boucles en l'absence de flux magnétique.

G_1 et G_2 sont les conductances spectrales de chaque partie 1 et 2 et les points correspondants aux réservoirs N sont placés aux noeuds entre fils de tension et fils de courant. En effet, l'élargissement des fils (correspondant à ce point) n'est pas loin d'imposer une condition $\theta = 0$ pour l'effet de proximité (la section est d'abord multipliée par deux, puis immédiatement après le contact, il y a un fort élargissement des fils). Le point S impose une condition $\theta = \frac{\pi}{2}$. La conductance totale est le résultat des deux conductances des parties 1 et 2

en série (voir paragraphe 3 et Annexe A7). Les réservoirs N pourront éventuellement être divisés en deux réservoirs servant l'un à mesurer la tension, et l'autre à injecter le courant, selon le schéma ci-contre. En réalisant cette opération, on rajoutera ainsi un effet multi-réservoir pour chacun des réservoirs en plus des effets de chauffage.



La présence de la boucle sera modélisée comme ayant uniquement un effet sur la conductance spectrale G_2 de la partie 2. Nous aborderons cette question au paragraphe suivant.

Dans ce modèle, le courant imposé fixe d'une part la tension mesurée $V_1 - V_2$, et fixe aussi une condition sur la tension du supraconducteur, car la transparence de la barrière est faible et aucun phénomène de charge ne peut apparaître. Cette condition est $(V_S - V_1)G_1 = (V_S - V_2)G_2$ dans le cas où il n'y a pas de supraconductivité. Comme les énergies sont très inférieures au gap, aucune quasiparticule ne peut entrer dans le supraconducteur qui ne se trouve donc pas en situation de déséquilibre de charge. Nous

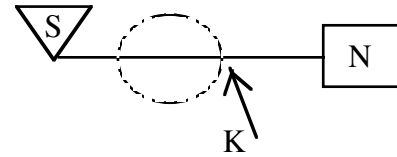
choisissons aussi que sa phase ne dépende pas du temps et nous avons donc $V_S = 0$. Ceci implique une relation simple entre les tensions dans les réservoirs et la tension mesurée : dans le cas où la conductance spectrale est constante, $V_1 = (G / G_1)V$ et $V_2 = (G / G_2)V$.

2.2.2. Pourquoi une loi en $1/T$?

Oscillations de la conductance spectrale.

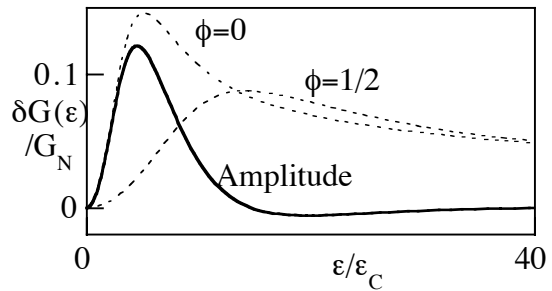
Nous nous intéressons maintenant à la conductance de la partie 2 du modèle proposé ci-dessus. La conductance spectrale de la partie 2 est celle d'un fil entre S et N comprenant une boucle. Nous modélisons un tel fil contenant une boucle d'après le schéma de la figure 4.2.7..

Figure 4.2.8.: Modélisation de la partie 2 comme un fil entre S et N comprenant une boucle. L'effet de la boucle est seulement d'imposer une condition $\theta = 0$ au point K à flux demi-entier.



Au niveau de la boucle, un doublement de la largeur du fil se produit. On négligera le fait que la conductance spectrale d'un fil qui comporte un dédoublement au milieu est un peu différente de celle d'un fil qui n'en comporte pas, car leurs aspects globaux restent les mêmes. Nous remplaçons donc la boucle (en pointillés) par un simple fil. On note K le point de la boucle opposé au supraconducteur. Lorsque le flux est nul, la conductance spectrale de ce fil est celle d'un fil SN simple. A flux demi-entier, la conductance de la partie S-K est celle d'un fil SN, tandis que celle de la partie K-N reste normale. L'amplitude des oscillations provient de la différence (en trait plein). La figure 4.2.9. montre ceci pour une longueur S-K de 0,6 fois la longueur de la partie 2 (S-N).

Figure 4.2.9.: La conductance spectrale $G_2(\epsilon)$ est représentée en pointillés pour $\phi = 0$, $\phi = 1/2$. L'amplitude des oscillations (en trait plein) provient de la différence.



Un point très important apparaît : la partie "oscillations", en traits pleins, de la conductance spectrale, s'atténue exponentiellement à haute énergie. Ainsi, les oscillations de conductance affectent seulement des énergies inférieures à l'énergie ϵ'_c associée à la longueur S-K (S est le supraconducteur). Ceci est dû au fait qu'à haute énergie, seule la région très proche de S est affectée par la supraconductivité, et peu importe alors que le point K soit présent ou non. Alors les deux lois en $1/\sqrt{\epsilon}$ à flux entier et demi-entier se compensent exactement.

Ceci correspond à ce que nous avons observé expérimentalement. En effet, pour l'échantillon "boucle 184" (paragraphe 2.1.3), les effets de chauffage dans les réservoirs sont faibles. Les oscillations disparaissent lorsque la tension dépasse $40 \mu\text{V}$, ce qui montre expérimentalement que les énergies plus élevées ne sont pas affectées. Attention cependant, car la tension est alors à peu près $40 \mu\text{V}$ dans le réservoir 2 (voir modèle figure 4.2.7.), mais elle est encore dix fois plus faible dans le réservoir 1. Il faut donc bien se garder d'accorder à ces $40 \mu\text{V}$ une valeur plus précise que seulement un ordre de grandeur.

Aux énergies inférieures à l'énergie de Thouless ϵ_c , l'amplitude devrait diminuer jusqu'à s'annuler. Nous ne le voyons pas, car dans cet échantillon, l'énergie de Thouless reste trop faible pour être accessible à l'expérience.

Conductance d'une boucle.

On se rappelle que la contribution de chaque énergie à la correction de conductance est donnée par : $\delta G(\epsilon) \partial_V f(\epsilon)$, avec $\partial_V f(\epsilon)$ une fonction "pic" de largeur kT et de hauteur $\propto 1/T$. Ainsi, lorsque $kT \gg \epsilon'_c$, seule subsiste la contribution des énergies inférieures à ϵ'_c , qui varie suivant une loi en $1/T$, car la hauteur de la fonction $\partial_V f(\epsilon)$ est en $1/T$. Alors l'amplitude des oscillations est :

$$G(0) - G(\phi_0 / 2) \propto \frac{1}{k_B T} \int_0^{\epsilon_c} d\epsilon (G(\epsilon, 0) - G(\epsilon, \phi_0 / 2)) \propto \frac{\epsilon'_c}{k_B T} \propto \frac{L_T^2}{L_{S-K}^2} \quad (4.2.1.)$$

[2], et obéit à une loi en $1/T$. Le facteur numérique proviendra de considérations géométriques précises.

Le préfacteur de la loi en $1/T$ est donné par l'intégrale de l'amplitude des oscillations de conductance spectrale comme fonction de l'énergie, multipliée par la hauteur du "pic" qui est $1/4kT$. Dans le cas où la longueur S-K est de 0.6 fois la longueur S-N, on obtient :

$\delta G / G = 0.13 \frac{\epsilon'_c}{k_B T}$, ce qui implique que $kT = \epsilon'_c$ quand l'extrapolation de la loi en $1/T$ correspond à 13 %. Pour l'échantillon aux fils larges "boucle 10.6", on trouve alors ϵ'_c de 3.3 μV , qui est très proche de la valeur calculée de 3.1 μV . Au-dessous de $T \approx 200$ mK, la loi en $1/T$ n'est plus vérifiée : on sort du régime haute température.

2.2.3. Comparaison théorie-expérience

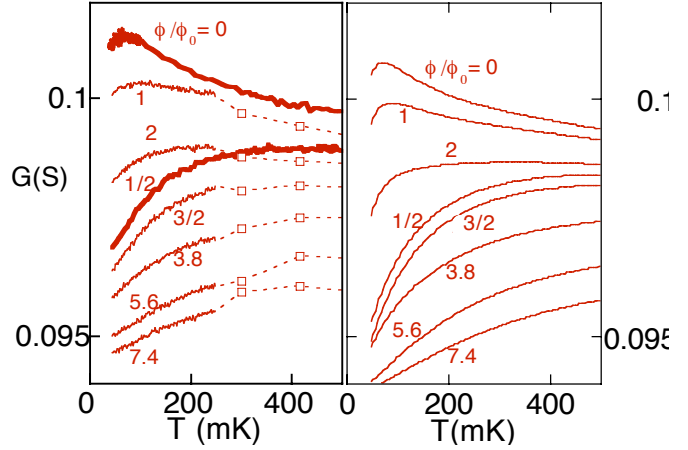
Dans ce paragraphe, nous montrons que le modèle simple proposé au paragraphe précédent suffit à rendre compte de l'ensemble des mesures de magnétoconductance linéaire effectuées sur l'échantillon "boucle 10.6" à condition de tenir compte en plus de la largeur des fils (paragraphe 4.3.2 du chapitre 1).

Choisissons donc de nous limiter au modèle très simple qui a déjà été présenté, et où l'équation d'Usadel a été linéarisée. Toutes les énergies de Thouless associées aux différentes parties de l'échantillon sont nettement inférieures au gap supraconducteur (celle associée à la partie 1 dont la longueur est de l'ordre du quart de la longueur de la partie 2 a une énergie de Thouless de 16 fois plus élevée, soit 17 μV). Le gap peut donc être considéré comme infini. Enfin, la longueur L_φ peut elle aussi être considérée comme infinie (sinon, l'amplitude de la loi en $1/T$, que nous venons de voir, serait inférieure). La barrière est elle aussi choisie comme parfaitement transparente (d'après l'échantillon du chapitre 3). On choisit 2 μm pour la longueur totale approximative de la partie 2, 0.5 μm pour la partie 1, et 1 μm pour la longueur S-K.

L'effet de la boucle est modélisé par une condition $\theta = 0$ au point K à flux demi-entier. Dans un tel modèle, la conductance serait exactement la même pour tous les flux entiers, ainsi que pour tous les flux demi-entiers, ce qui n'est pas le cas. En effet, les oscillations diminuent rapidement quand le champ augmente. Il nous faut donc prendre en compte la largeur des fils. Si on prend directement la valeur $w=150$ nm comme largeur des fils, alors la théorie prévoit une disparition des oscillations dès la deuxième oscillation. Choisissons donc de garder cette largeur des fils comme paramètre ajustable. Ce paramètre sera choisi pour rendre compte de la diminution observée des oscillations à fort champ, c'est-à-dire qu'en pratique on ajuste w de façon à obtenir la valeur mesurée du rapport $\frac{G(0) - G(1/2)}{G(3) - G(7/2)}$ à 150 mK. Pour les valeurs non entières ou demi-entières du flux, le calcul a été fait en supposant que les oscillations sont sinusoïdales si L_H est fixé. Pour les fortes valeurs des flux de la figure 4.2.10, ceci n'a guère d'importance car les oscillations ont déjà presque disparues et la condition $\theta = 0$ en K n'a plus aucun effet.

Figure 4.2.10.: Comparaison-théorie-expérience.

A gauche, les conductances à tension nulle à différents champs en fonction de la température sont rappelées. A droite, la comparaison théorique a été ajoutée, la largeur des fils a été ajustée à 65 nm, soit moins de la moitié de la longueur mesurée sur la photographie.



Plusieurs idées peuvent être mises en avant pour expliquer l'écart entre la largeur de 65 nm ajustée (Figure 4.2.10) et celle de 150 nm mesurée. Tout d'abord, il peut y avoir une erreur dans le facteur numérique devant L_H (chapitre 1). Ensuite, on voit que dans l'effet résumé par cette longueur, le rôle des bords des fils est prépondérant. Ainsi, un coefficient de diffusion plus faible sur les bords (par exemple) pourrait diminuer la largeur "effective" des fils. Pendant le dépôt, une anisotropie du métal pourrait aussi apparaître, qui pourrait éventuellement donner un coefficient de diffusion anisotrope.

Dans la comparaison qualitative donnée ci-dessus (Modèle figure 4.2.7.) et (figure 4.2.10), deux maxima de conductance interviennent, l'un associé à un maximum dans la partie 1, et l'autre dans la partie 2. Les paramètres qui gouvernent l'aspect des courbes sont la hauteur relative et la position des maxima. La hauteur relative des maxima est gouvernée par le rapport des résistances de chaque partie. En effet, le maximum est d'environ 9% pour chaque partie, sa position étant fournie par son énergie de Thouless. Si la résistance d'une partie est x fois la résistance totale, alors la hauteur du maximum de sa contribution est x fois 9%. En mesurant approximativement sur la photo, on a $x_1 = 0.2$ pour la partie 1 et $x_2 = 0.8$, et donc la contribution de la partie 1 est faible : ici, elle fait que la conductance diminue moins vite à haute température.

Sur les caractéristiques différentielles dI/dV en fonction de la tension V à différents flux magnétiques, on peut voir aussi la présence des maxima de conductance. Si nous reportons ces maxima de conductance en fonction de l'énergie associée à la température ou à la tension (divisée par 1.05 pour la tension, voir annexe A7), on obtient des oscillations du maximum de

conductance en fonction du flux magnétique (figure 4.2.11.).

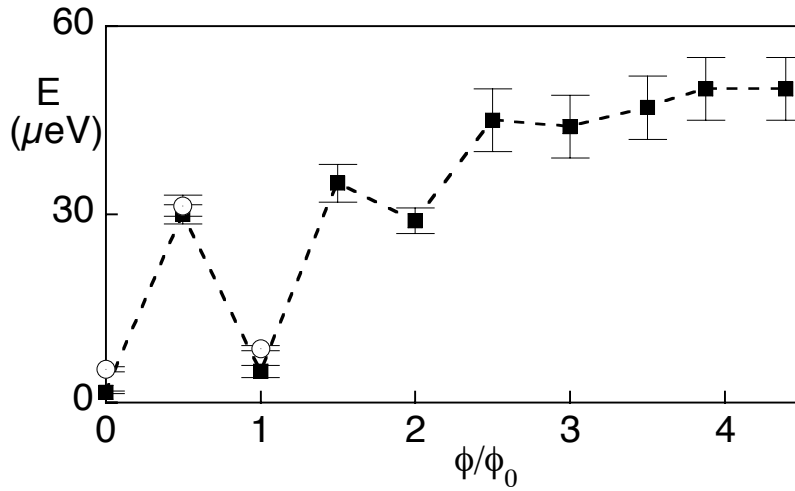


Figure 4.2.11.: Oscillations de l'énergie du maximum de conductance en fonction du nombre de quanta de flux dans la boucle. Les carrés noirs proviennent des caractéristiques différentielles en fonction de la tension à 100 mK (22 et 45 mK pour ϕ/ϕ_0 valant respectivement 0 et 1). Les cercles blancs proviennent des conductances mesurées en fonction de la température. Le décalage très net aux basses énergies correspond à un effet de réservoirs (vu au chapitre précédent).

On peut donc interpréter les variations observées de l'énergie du maximum : cette énergie correspond à l'énergie de Thouless associée à une certaine longueur dans la partie 2. A faible champ, cette longueur varie entre la longueur totale de l'échantillon à flux entier et la longueur S-K à flux demi-entier. A champ plus fort cette longueur maximale devient la longueur

L_H , et quand L_H est inférieure à la longueur S-K, les oscillations disparaissent, et l'énergie du maximum est associée à L_H . On devrait avoir une énergie de maximum proportionnelle au carré du champ appliqué, ce qui n'est pas le cas. En fait, on entre alors dans un nouveau régime où la valeur finie du gap intervient et où les approximations faites ici deviennent moins valables.

Ainsi, malgré des simplifications très fortes, en particulier sur la géométrie, nous avons pu décrire la conductance à tension nulle en fonction du champ appliqué et de la température. Le modèle très simple rend compte à la fois de l'aspect global et de l'amplitude de la correction de conductance induite par la présence du supraconducteur.

Nous pouvons voir ici que l'amplitude relative de la loi en $1/T$ pour l'échantillon "boucle 184" est inférieure à celle de l'échantillon "boucle 10.6". A partir de l'amplitude de la loi en $1/T$ de l'échantillon "boucle 184" et en appliquant la méthode de la fin du paragraphe 2.2.2., on obtient une énergie de Thouless de $0.39 \mu\text{V}$ pour la partie S-K. Ce n'est pas vraiment raisonnable, car on attend plutôt un facteur 10 par rapport à cette valeur (rappelons que ϵ'_c est associée à la longueur S-K, soit environ $1.2 \mu\text{m}$). On attend donc des oscillations supérieures d'un facteur 10 environ. On peut interpréter cet écart par la faible valeur de la longueur L_φ estimée qualitativement au paragraphe consacré aux fluctuations de conductance.

2.3. Fluctuations de conductance et oscillations h/e

Lorsque le champ magnétique dans la "boucle 184" est supérieur au champ critique, on observe des oscillations de conductance de période h/e , illustrant les interférences des électrons seuls dans la configuration Aharonov-Bohm habituelle (sans supraconducteur) (figure 4.2.12.). Ainsi, sur un même échantillon, nous pouvons observer les oscillations de période $h/2e$ et les oscillations de période h/e .

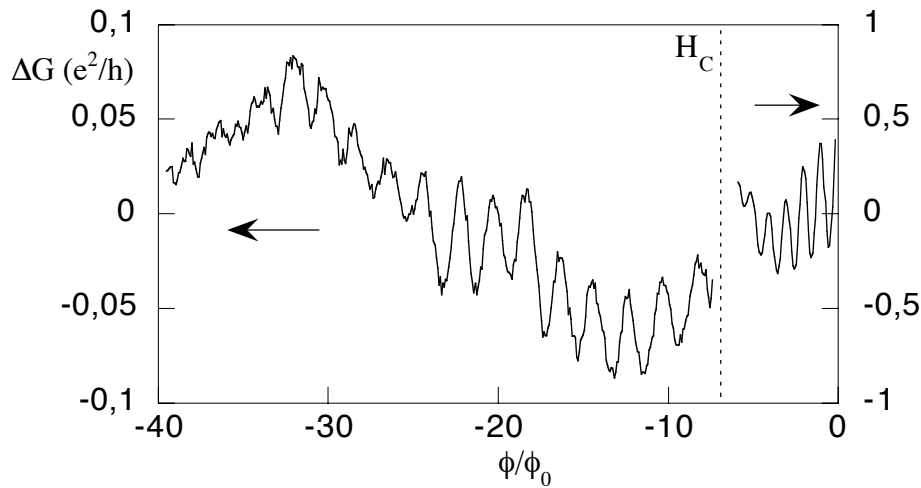
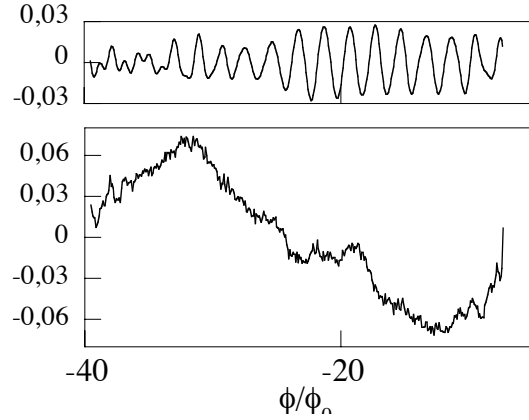


Figure 4.2.12.: Oscillations de magnétoconductance de période h/e au-dessus du champ critique (partie gauche). Dans la partie droite sont représentées les oscillations de période $h/2e$ en présence de supraconductivité, avec une échelle verticale divisée par dix, sont représentées à droite pour comparaison.

Nous pouvons remarquer que l'amplitude des oscillations h/e est plus faible d'un facteur 10 que les oscillations $h/2e$. Enfin, des fluctuations lentement variables se superposent à ces oscillations. Dans ces oscillations h/e , nous pouvons séparer la contribution en h/e des contributions des autres fréquences (figure 4.2.13.).

Figure 4.2.13.: Des oscillations se produisent avec une période h/e . (en haut) et sont superposées à une composante lentement variable (en bas). Ces deux composantes ont été séparées par un traitement de Fourier de la figure 4.2.12.



On peut distinguer deux composantes (figure 4.2.13.): d'une part, des oscillations (dont l'amplitude fluctue) se produisent avec une période h/e , ces oscillations sont associées à la présence de la boucle. Une autre composante lentement variable décrit les fluctuations universelles de conductance dans le fil. L'amplitude des oscillations de période h/e est de l'ordre de 6% d'un quantum de conductance. On peut très classiquement [3,4] tirer des informations sur la longueur L_φ à partir de la composante lentement variable.

Les fluctuations de conductance à plus basses fréquences se produisent avec un flux caractéristique (largeur à mi-hauteur de la fonction d'autocorrélation) de l'ordre de 50 mT (environ $6\phi_0$). Ce flux caractérise aussi les variations de l'amplitude des oscillations. Un tel flux correspond à 3 quanta h/e dans la boucle, ce qui correspond à un quantum de flux dans une surface 3 fois plus petite, soit $0.08 \mu\text{m}^2$. Sachant que les fils font environ 100 nm de largeur, la surface d'un fil de longueur L_φ correspond théoriquement à cette valeur (à un facteur numérique près qui dépend de la géométrie) : on obtient une valeur caractéristique d'environ $0.8 \mu\text{m}$, ce qui n'est pas très éloigné de la valeur fournie par l'interprétation des fluctuations en fonction de la tension. Enfin, les oscillations h/e ont une amplitude plus faible d'un facteur 5. Cela peut être associé au fait que l'amplitude des oscillations h/e suit une loi exponentielle e^{-L'/L_φ} ($L' \approx$ périmètre de la boucle) alors que celle des fluctuations à longue période a une loi $\sqrt{L_\varphi/L}$ ($L \approx$ longueur de l'échantillon).

Quand on regarde d'un peu plus près la mesure de la caractéristique différentielle de la "boucle 184" (figure 4.2.6.), présentée au paragraphe précédent (dépendance en tension, et aussi visible au paragraphe suivant sur les effets de réservoirs), on peut remarquer que la

caractéristique n'est pas parfaitement symétrique, et que les aspects principaux interprétés ci-dessus sont légèrement "déformés" par la présence d'une autre contribution non symétrique. Comme l'effet principal est symétrique, il est difficile de déterminer la partie symétrique de cette faible contribution. Par contre, si on ne conserve que sa partie antisymétrique, on obtient la figure 4.2.14..

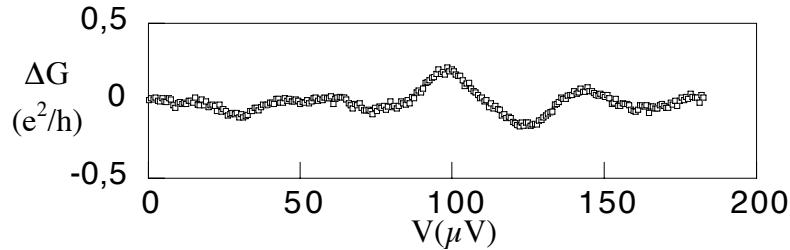


Figure 4.2.14.: Partie antisymétrique de la faible contribution qui déforme la caractéristique différentielle de la "boucle 184".

On voit que l'amplitude est d'un peu moins qu'un demi quantum de conductance.

La largeur à mi-hauteur de la fonction d'autocorrélation des fluctuations de conductance fait apparaître une tension d'un peu moins de 10 μV .

Il faut noter que cette composante antisymétrique est normalement inversée lorsqu'on échange le fil à l'extérieur du cryostat, et donc que, même si un tel échange n'a pu être fait directement au contact de l'échantillon, cet effet semble bien provenir de l'échantillon lui-même. De plus, il faut ajouter qu'un tel effet dissymétrique disparaît rapidement à plus haute température, et il n'est plus visible dès que la température dépasse environ 500 mK (soit environ 50 μV). Il faut cependant rester très prudent quant à la possibilité d'un artéfact expérimental.

Webb et collaborateurs [6] ont montré expérimentalement que la tension dans un échantillon de longueur inférieure à la longueur de mémoire de phase L_φ , en fonction du courant qui le traverse comporte une composante aléatoire dépendant de la configuration du désordre, et qui n'est pas symétrique a priori. Cette dissymétrie vient du fait qu'un changement de tension aux bornes d'un échantillon au potentiel aléatoire modifie la forme de ce potentiel (de la même manière que, dans le cas d'une diode, l'application d'une tension modifie la hauteur de la marche de potentiel), et tout se passe comme si l'on avait changé de configuration du désordre. La tension V_C d'autocorrélation est telle que IR_φ soit l'énergie de Thouless associée à la longueur L_φ (R_φ est la résistance d'une longueur L_φ) [6].

Dans cette hypothèse, $V_C \frac{L_\varphi}{L} = \varepsilon_c \frac{L^2}{L_\varphi^2}$ où ε_c est l'énergie de Thouless de l'ensemble. Comme $V_C \approx 10\varepsilon_c$, on obtient $L_\varphi \approx 0.5L$, soit un peu moins de $1 \mu\text{m}$ (la géométrie de l'échantillon complique certainement cette estimation). Ainsi une telle interprétation de la composante asymétrique peut être considérée comme raisonnable.

3. Analyse détaillée de la conductance de la boucle "184"

Nous avons insisté, à la fin du chapitre 1 et dans tout le chapitre 3, sur la présence d'un pic élargi dans la conductance d'un fil en régime de proximité. C'est effectivement ce qui a été observé dans tous les échantillons mesurés, à l'exception de l'échantillon "boucle 184". La conductance de cet échantillon semble présenter un minimum de conductance. Les premiers essais de comparaison avec la théorie quasiclassique nous ont donc fait croire, dans un premier temps, que le désaccord était complet entre la théorie et l'expérience. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'en fait, la théorie quasiclassique peut très bien expliquer l'expérience.

3.1. Un minimum de conductance

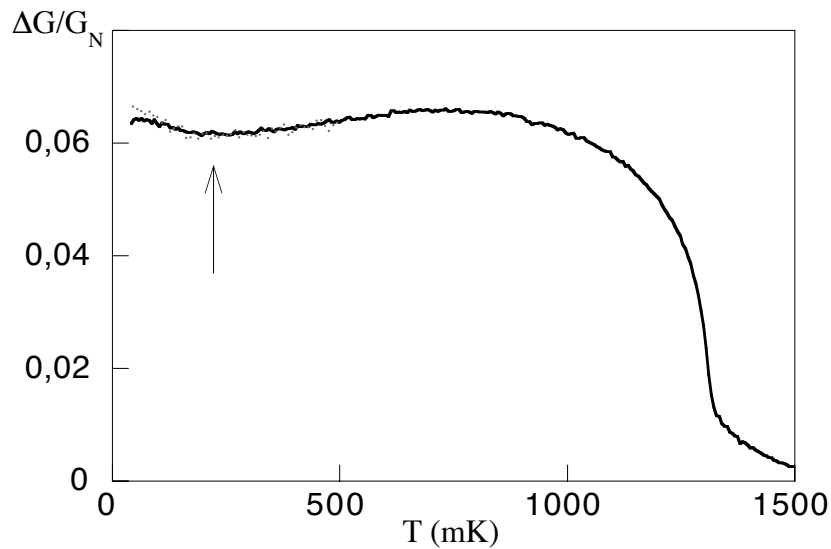


Figure 4.3.1.: Conductance de l'échantillon "boucle 184" à tension nulle en fonction de la température. La mesure en traits pleins correspond à un courant de mesure de 50 nA. Les points gris ont été mesurés à 20 nA. La flèche montre un minimum apparent de la conductance.

Aux alentours de 1350 mK (figure 4.3.1.), la conductance augmente brusquement quand la température baisse, on reconnaîtra volontiers la transition du supraconducteur. La conductance atteint ensuite un maximum vers 800 mK, puis un minimum vers 200 mK.

On retrouve une amplitude de 6 à 7%, c'est-à-dire de l'ordre de l'amplitude (9 %) prédite par la théorie quasiclassique pour un fil simple compris entre un réservoir N et un réservoir S. Par contre, si la conductance atteint bien un maximum, pour diminuer quand la température diminue, nous pouvons voir en revanche qu'elle atteint ensuite un minimum et qu'aux basses températures, elle augmente à nouveau. Par ailleurs, la température, de l'ordre de 800 mK, de ce maximum, est très supérieure à la température associée à l'énergie de Thouless.

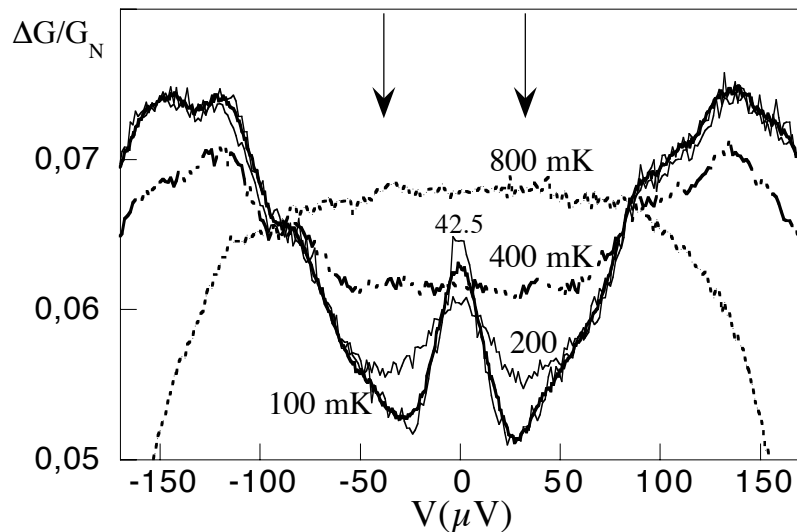


Figure 4.3.2.: Mesures des conductances différentielles à différentes températures de la "boucle 184" (courant de mesure de 20 nA, soit environ $0.4 \mu V$). Les flèches pointent la position d'un minimum de conductance.

A première vue, ces caractéristiques $G(V)$ (figure 4.3.2.) ressemblent à la caractéristique $G(T)$. A basse température, on retrouve un maximum de conductance vers $150 \mu V$, un deuxième maximum à 0, et un minimum vers $30 \mu V$.

3.2. Explication du minimum observé

Commençons par négliger les effets de réservoirs, ce qui est théoriquement correct à

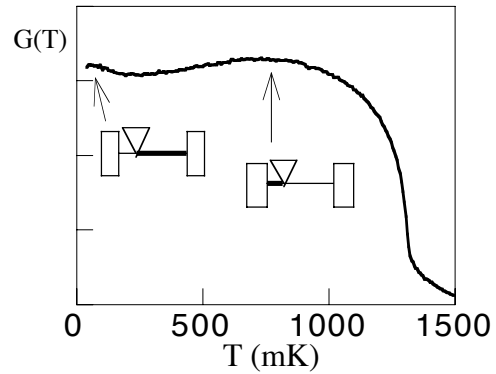
$V=0$ (voir annexe A3). S impose une condition $f_e - f_h = 0$ (voir chapitre 1). On a alors deux systèmes élémentaires (constitués chacun d'un fil compris entre N et S) en série. La partie 2 de l'échantillon contient la boucle. La correction de résistance est alors (à l'ordre 1):

$$\Delta R = \Delta R_1 + \Delta R_2 = \delta R_1 * \partial_V f(0) + \delta R_2 * \partial_V f(0) \quad (4.3.1.)$$

On voit que cette expression vaut aussi : $\Delta R = (\delta R_1 + \delta R_2) * \partial_V f(0)$, c'est-à-dire l'expression pour un fil de résistance spectrale $\delta R_1(\epsilon) + \delta R_2(\epsilon)$, où le supraconducteur n'impose aucune condition sur les fonctions de distribution. A courant nul il n'y a pas de différence entre le fait que S impose ou non une condition sur la fonction de distribution.

La conductance à tension nulle observée peut donc être interprétée de la manière suivante : la ré-entrance associée à la partie G_2 de l'échantillon n'est pas visible. Si la longueur de cette partie est de $2 \mu\text{m}$, et le coefficient de diffusion de $30 \text{ cm}^2 / \text{s}$, on obtient une énergie de Thouless correspondante de $0.5 \mu\text{eV}$ environ, donc la ré-entrance aurait peut-être pu être observée en-dessous de 25 mK (5 fois cette énergie).

Figure 4.3.3.: Interprétation du minimum de la figure 4.3.1. En fait, la caractéristique présente deux pics de conductance, chacun relié à une partie différente de l'échantillon.



Par contre, la partie correspondant à G_1 a une longueur d'environ $0.2 \mu\text{m}$, et la température associée à son énergie de Thouless est plutôt de l'ordre de 0.5 K (soit 100 fois plus, car la longueur est dix fois plus faible). Or l'énergie de Thouless est proche du gap dans le supraconducteur, la correction relative de conductance peut donc dépasser 100 % dans cette partie. (Voir chapitre 1: effet du gap supraconducteur). Si le maximum de conductance observé à $T=800 \text{ mK}$ est entièrement dû à cette partie qui participe pour environ 10% à la résistance de l'ensemble, il faut qu'à cette température, la correction de conductance atteigne

environ 70 %, ce qui est possible. La diminution de conductance entre 800 mK et 400 mK peut alors être reliée à la ré-entrance dans cette partie G_1 . Aux températures inférieures, la deuxième augmentation de conductance serait alors associée à la partie G_2 , dont l'énergie de Thouless serait trop faible pour que la ré-entrance soit visible.

Il semble aussi que, pour les géométries comparables des deux échantillons "boucle 184" et "boucle 10.6", les conductances en fonction de la température (figures 4.3.1 et 4.2.3 à $\phi = 0$) sont très différentes. En fait, ces conductances se ressemblent. Dans le cas de "boucle 10.6", le premier maximum à haute température s'est affaïssé (en raison de la longueur plus grande de la partie "1"), tandis que le deuxième maximum (associé à la partie "2" qui contient la boucle) est bien visible, car l'énergie de Thouless est plus grande dans la "boucle large". C'est ainsi que les deux mesures, qui semblent a priori très différentes, se ressemblent en fait beaucoup.

Dans les mesures en fonction de V de cet échantillon de faible conductance, le seul effet de réservoirs qui compte est l'effet multi-réservoir (voir paragraphe 6) où les tensions en différentes parties de l'échantillon interviennent. Une étude qualitative de cet effet géométrique doit contenir des indications qui permettraient de vérifier la validité de la condition $f_e - f_h = 0$ au contact du supraconducteur. On avait associé le maximum de conductance vers $V=0$ au maximum de conductance dans la partie 2: cette interprétation est renforcée du fait que les oscillations $h/2e$ affectent seulement ce pic (voir les mesures en tension des oscillations figure 4.2.6.), or c'est justement la partie 2 qui contient la boucle.

D'après l'interprétation donnée de la conductance en fonction de la température, le maximum de conductance vers 150 μV peut être attribué à la partie G_1 , alors que le deuxième maximum à 0 correspondrait à la partie G_2 , le minimum vers 30 μV étant attribuable à la ré-entrance dans la partie 1. Par contre, ici, on n'est plus dans la situation discutée plus haut, où le fait que le courant soit nul simplifiait l'interprétation. Si le supraconducteur impose une condition $f_e - f_h = 0$, on a vraiment deux systèmes élémentaires en série, ce qui donne, à l'ordre 1, l'équation (4.3.2.).

$$\frac{\Delta G_N}{G_N} \approx \frac{G_N}{G_{1N}} \frac{\delta G_1}{G_{1N}} * \partial_v f\left(\frac{G_N}{G_{1N}} V\right) + \frac{G_N}{G_{2N}} \frac{\delta G_2}{G_{2N}} * \partial_v f\left(\frac{G_N}{G_{2N}} V\right) \quad (4.3.2.)$$

Dans cette expression, on peut surtout remarquer que la tension $(G_N / G_{1N})V$ dans le réservoir 1 n'intervient que dans la partie de conductance spectrale G_1 , de même pour la

tension dans le réservoir 2. Il y a alors 2 maxima dans la conductance différentielle, l'un correspondant à $\frac{G_N}{G_{1N}} V \approx 100 \mu V$ (énergie très approximative du maximum dans la partie 1) soit $V \approx 1 \text{ mV}$ car on a $\frac{G_N}{G_{1N}} \approx 0.1$ d'où une amplitude d'environ $0.1 \times 70 \%$, c'est-à-dire 7% . L'autre maximum correspond à environ $V \approx 1 \mu V$ pour la partie 2, et d'amplitude identique ($\frac{G_N}{G_{2N}} \approx 1$). Ce raisonnement qualitatif doit être tempéré du fait qu'on n'est pas vraiment dans une mesure en "2 fils", car le réservoir qui injecte le courant dans la partie 1 a une tension 3 fois plus grande que le réservoir qui mesure la tension de ce côté (voir la photographie figure 4.1.1.). Ainsi, le premier maximum de conductance peut être plutôt vers $300 \mu V$, et ceci pourrait éventuellement correspondre au maximum observé dans l'expérience.

Si, en revanche, le supraconducteur n'impose pas correctement la condition sur les fonctions de distribution, alors on obtient à l'ordre 1 l'équation (4.3.3.).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta G_N}{G_N} \approx \frac{G_N}{G_{1N}} \frac{\delta G}{G_N} * \partial_v f\left(\frac{G_N}{G_{1N}} V\right) + \frac{G_N}{G_{2N}} \frac{\delta G}{G_N} * \partial_v f\left(\frac{G_N}{G_{2N}} V\right) \\ \text{où : } \frac{\delta G}{G_N} = \frac{G_N}{G_{1N}} \frac{\delta G_1}{G_{1N}} + \frac{G_N}{G_{2N}} \frac{\delta G_2}{G_{2N}} \text{ est la conductance spectrale de l'ensemble} \end{array} \right. \quad (4.3.3.)$$

Cette fois-ci, la tension dans chaque réservoir intervient pour l'ensemble de l'échantillon. Comme la conductance spectrale de l'ensemble présente 2 maxima, et qu'il y a deux tensions différentes, cela porterait à 4 le nombre de maxima. La tension dans le réservoir 2 fournit un maximum à $V \approx 1 \mu V$ d'amplitude d'environ 7% et un maximum à $V \approx 80 \mu V$ d'environ $0.1 \times 70 \%$, soit à nouveau 7% . Quant à la tension dans le réservoir 1, elle fournit un maximum à $V \approx 10 \mu V$ d'amplitude $\approx 0.7 \%$ et un deuxième maximum à $V \approx 1 \text{ mV}$ d'amplitude de 0.7% . Ceci semble mieux correspondre à la situation de l'expérience (car le maximum à 1 mV n'est pas visible, et celui à $10 \mu V$ serait confondu avec le maximum à $V=0$).

Ainsi, l'idée est que, en comptant le nombre et la position des maxima de conductance observés, ainsi que leur amplitude, on pourrait discuter expérimentalement la qualité de la condition imposée par le supraconducteur. On pourrait alors quantifier cet effet et en tirer des informations, par exemple sur la qualité de l'interface. Au total, il est difficile de trancher dans ce cas précis, car nous ne sommes pas tout à fait dans les conditions d'une mesure en deux fils. L'expérience va cependant plutôt dans le sens que le supraconducteur n'impose pas bien cette condition. Pour pouvoir vraiment distinguer cet effet, on pourrait mesurer un autre échantillon de géométrie "deux fils" très asymétrique.

4. Conductance à forte polarisation

Dans toutes les caractéristiques différentielles abordées dans le chapitre 3, et jusqu'ici dans le chapitre 4, nous ne nous sommes intéressés qu'aux situations de faibles tensions (faibles polarisations) car nous étions intéressés par la conductance à des énergies très inférieures au gap. Cependant, des structures supplémentaires, illustrées sur la représentation tridimensionnelle de la figure 4.4.1., apparaissent pour des fortes tensions sous la forme d'un minimum très prononcé de conductance. Pour les tensions supérieures à la tension correspondant à ce minimum, la conductance retourne à sa valeur dans l'état normal. Sur cette figure, qui représente la conductance différentielle à différents champs magnétiques de l'échantillon "boucle 184", on reconnaît les oscillations de conductance qui n'affectent que les énergies les plus faibles.

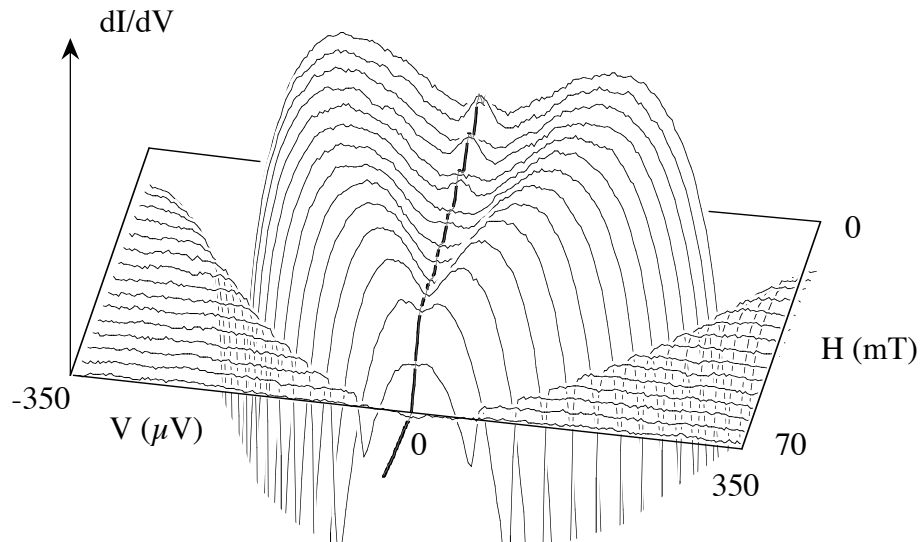


Figure 4.4.1. Conductance différentielle de l'échantillon "boucle 184" à différents champs magnétiques. On remarque surtout la présence de minima très prononcés qui marquent le retour à la conductance dans l'état normal. Le champ varie de $1/2$ quantum de flux (≈ 4.2 mT) jusqu'à 70 mT. La température de mesure est de 60 mK. Le courant de mesure est de 50 nA.

La présence des minima de conductance peut être simplement attribuée à la disparition du courant en excès associée à la disparition de la supraconductivité. Nous nommerons donc "tension critique" la tension de ce minimum. Ainsi, ces minima seraient dus à un terme supplémentaire dans l'expression de la conductance différentielle : le gap supraconducteur

varie quand la tension varie (car la température varie) et donc la conductance spectrale de l'échantillon varie elle aussi. Dans le cadre de la théorie quasiclassique, cela signifie que la conductance différentielle s'exprimerait qualitativement sous la forme :

$$\frac{dI}{dV} = \left(\frac{dI}{dV} \right)_{G(\varepsilon) \text{ fixé}} + \int \frac{dG(\varepsilon)}{dV} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.4.1.)$$

Pour appuyer cette interprétation, on peut vérifier numériquement que la valeur moyenne de la conductance différentielle entre les deux tensions extrêmes est presque exactement la conductance dans l'état normal.

La question qui se pose alors est : qu'est-ce qui fait transiter le supraconducteur?

Dans l'échantillon du chapitre 3, lorsque le courant devient de l'ordre de $100 \mu A$, on observe aussi cette transition, qui peut être observée alors qu'aucun courant ne traverse le supraconducteur. Dans cet échantillon, les tensions caractérisant cette transition sont nettement supérieures à l'énergie du gap supraconducteur. Le champ magnétique dans le supraconducteur créé par le passage du courant dans le fil qui se trouve à la distance d'environ $0.2 \mu m$ est de l'ordre de 0.1 mT à $100 \mu A$. Cette valeur est beaucoup trop faible pour pouvoir faire transiter le supraconducteur, dont le champ critique est de 13 mT . Cependant, la puissance apportée dans ces conditions est très forte (100 nW), ce qui suffit probablement à chauffer l'ensemble de l'échantillon.

Dans le cas des échantillons de géométrie en boucle, et en particulier dans l'échantillon "boucle 184", nous sommes loin d'être dans la même situation. En effet, la puissance apportée à la transition est 250 fois plus faible. De plus, on se rappelle que dans cet échantillon la supraconductivité apparaît vers 1600 mK et une transition brutale se produit vers 1350 mK . Si on choisit cette température critique, on obtient dans le cadre BCS un gap à $T=0$ de $205 \mu eV$. D'un autre côté, lorsque l'on mesure $V \approx 270 \mu V$ (tension critique à $T=0$), la tension dans le réservoir 2 est de l'ordre de $0.8 * V$ à $0.9 * V$. Cette tension est donc de l'ordre du gap de l'aluminium. Compte-tenu des imprécisions sur la géométrie exacte de l'échantillon (qui n'a pas été photographié), il est possible que la tension dans le réservoir 2 soit exactement le gap de l'aluminium.

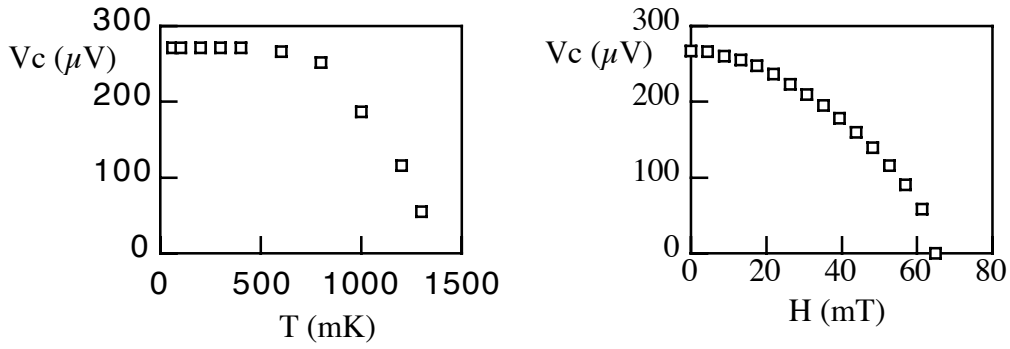


Figure 4.4.2.: Tensions critiques en fonction de la température T à $H=0$, et en fonction du champ H à $T=60$ mK. Ces courbes peuvent être interprétées comme représentant le gap du supraconducteur, à un facteur géométrique près.

Nous pouvons représenter les tensions critiques en fonction du champ magnétique à basse température (obtenues à partir de la figure 4.4.1), et les tensions critiques à champ nul en fonction de la température. On obtient les courbes de la figure 4.4.2. Dans le cadre de l'interprétation proposée ci-dessous, la courbe de la tension critique (au minimum de conductance) en fonction de la température (figure 4.4.2.) est aussi le gap supraconducteur en fonction de la température (à un facteur 0.8 à 0.9 près sur l'axe des ordonnées).

Il faut un temps assez long aux quasiparticules dans le supraconducteur pour qu'elles relaxent leur énergie vers les phonons. On peut chercher à estimer quelle est la puissance transmise aux phonons par les quasiparticules, en fonction de leur température.

Le temps caractéristique de recombinaison d'une quasiparticule dans l'aluminium est de l'ordre de [8] :

$$\tau_R \approx \tau_0 e^{\frac{\Delta}{k_B T}} \approx 2 \cdot 10^{-7} e^{\frac{\Delta}{k_B T}} \text{ (en s)} \quad (4.4.2.)$$

Dans cette expression apparaît le fait que, pour relaxer, la quasiparticule doit en trouver une autre. Elles se recombinent alors pour donner une énergie 2Δ . Ainsi, le nombre de quasiparticules qui apparaît dans ce temps est proportionnel à $e^{-\Delta/kT}$. On peut alors dire que la puissance P transmise aux phonons est de l'ordre de : U_{qp} / τ_R , où U_{qp} est l'énergie interne des quasiparticules à la température T . Si $k_B T \ll \Delta$, on a :

$$U_{qp} \approx \int 2\varepsilon N(\varepsilon) e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} d\varepsilon \quad \text{où} \quad N(\varepsilon) = N_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}} \quad (4.4.3.)$$

$N(\varepsilon)$ est la densité d'états (BCS). En faisant un développement pour $k_B T \ll \Delta$ de cette intégrale, on trouve :

$$P \approx 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{\varepsilon_F} (k_B T)^{1/2} \Delta^{3/2} \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{2\Delta}{k_B T}} \quad (4.4.4.)$$

Ceci en se servant du fait que $N_0 \approx 3/2 N / \varepsilon_F$, ε_F énergie de Fermi. On voit en particulier apparaître le facteur exponentiel. Pour estimer le facteur devant l'exponentielle, on choisit $k_B T \approx \Delta \approx 200 \mu\text{eV}$. Pour un supraconducteur de volume environ $0.05 \times 0.1 \times 1 \mu\text{m}^3$, on a pour l'aluminium $N \approx 18.10^{28} \text{ m}^{-3}$, $\varepsilon_F \approx 7 \text{ eV}$ [12], on trouve 3.10^9 Wm^{-3} , soit $1.5.10^{-11} \text{ W}$. Ce terme est bien sûr à multiplier par le terme exponentiel, puis à comparer à la puissance totale dissipée dans l'échantillon : avec un courant de l'ordre de $1 \mu\text{A}$ et une résistance de 200Ω , la puissance est de l'ordre de 2.10^{-10} W . La conclusion est la suivante : si une partie notable de la puissance Joule entre dans le supraconducteur, alors celui-ci est incapable de transmettre cette puissance aux phonons sans s'échauffer au delà de la température critique. On peut se risquer à un scénario pour la transition supraconductrice observée : tant que toutes les tensions dans les réservoirs sont inférieures (à $k_B T$ près) au gap Δ , les quasiparticules ne peuvent pénétrer dans le supraconducteur, et celui-ci ne reçoit presque aucune puissance (autrement dit, la réflexion d'Andréev transmet des charges sans échange d'énergie : voir discussion au chapitre 1, paragraphes 1.5 et 1.6). Par contre, dès que la tension dans un des réservoirs dépasse le gap, le supraconducteur reçoit une fraction notable de la puissance totale, et il transiterait immédiatement par échauffement.

Il est probable aussi qu'un déséquilibre de charges apparaisse alors dans le supraconducteur, et qu'ainsi, nous n'ayons plus la condition $V_S = 0$, ce qui complique davantage le problème. Pour en avoir le coeur net, on pourrait choisir une géométrie où le supraconducteur aurait la forme d'un plot de contact massif, percé de trous pour piéger les vortex et pour que le champ critique reste élevé, mais tout en gardant un volume suffisant pour pouvoir "éponger" la chaleur reçue par effet Joule.

On peut enfin remarquer le comportement de la conductance différentielle au-dessus de

la transition V_c . La figure (4.4.3.) représente la caractéristique différentielle dI/dV aux alentours de cette transition, renormalisée à la fois en fonction de la correction de conductance à $V=V_c$ en ordonnées, et en fonction de V_c en abscisses. La forme de cette transition reste la même jusqu'à des champs de l'ordre de 30 mT (un peu plus de $3\phi_0$), à l'exception d'un retour plus lent à la conductance normale (pour $V>V_c$) aux champs les plus faibles (inférieurs à environ $2\phi_0$). Aux plus forts champs, la forme de la transition s'élargit, mais le retour à la conductance normale reste rapide (en pointillés).

Ce comportement au-dessus de la transition peut très exactement être relié au fait que la supraconductivité ne disparaît pas immédiatement au dessus de la transition brutale vers 1350 mK (figure 4.3.1.). Cet effet disparaît quand le champ dépasse environ $2\phi_0$, comme le montre la magnétoconductance à $T=1600$ mK (figure 4.2.2.)

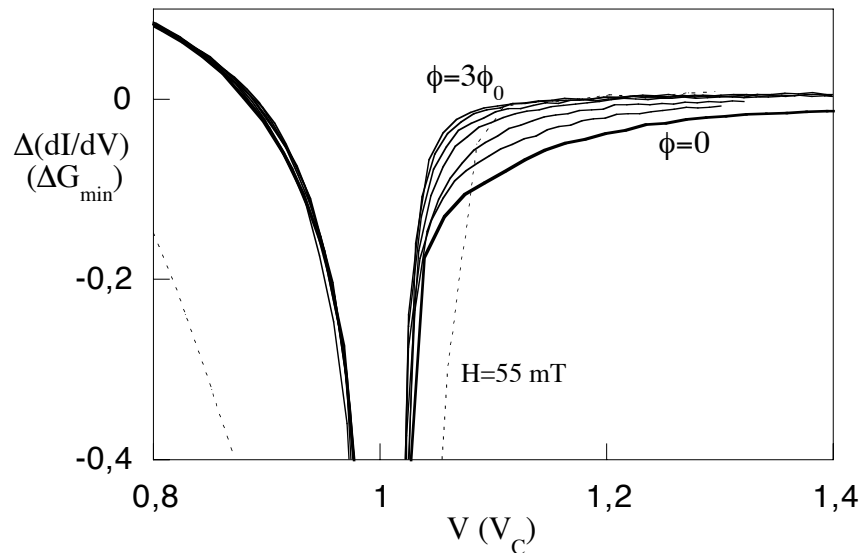


Figure 4.4.3: Transition à différents champs à $T=60$ mK, renormalisée en abscisses en fonction de la position de la tension de transition, et en ordonnées en fonction de l'amplitude du minimum de conductance. Les flux sont $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3$, (traits pleins) et $13/2 \phi_0$ (pointillés). Le courant de mesure est de 50 nA.

5. Conductance à très basse température

Dans toutes les mesures présentées, dans ce chapitre comme dans le chapitre 3, l'expérience ne montre pas un retour aux valeurs des conductances à l'état normal, mais

semble montrer une saturation à une valeur de conductance supérieure à la conductance dans l'état normal. Ainsi, pour l'échantillon "fil latéral", l'accord est excellent à des températures supérieures à 300 mK, mais l'écart se creuse aux plus basses températures : on a l'impression que la conductance à basse température ne "retourne" pas à la valeur dans l'état normal. Une des causes possibles de cet écart pourrait être que les électrons dans les réservoirs sont à une température supérieure à celle qu'indique le thermomètre, par exemple 100 mK quand le thermomètre indique 50 mK. Nous verrons en particulier un argument qui s'oppose à une telle interprétation dans le cas de l'échantillon dont les fils sont épais et qui contient une boucle "boucle 10.6"

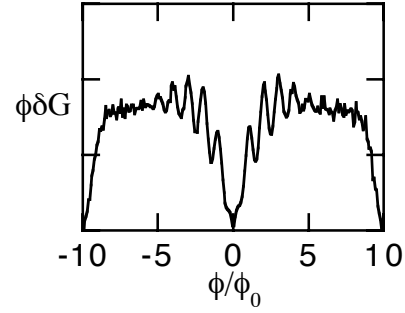
La présence de la boucle ne compte pas ici, et seul compte l'effet de la largeur des fils en présence d'un champ magnétique. A $T=50$ mK, la conductance est encore très éloignée de la conductance dans l'état normal. Les différentes prédictions théoriques montrent pourtant qu'à cette température et pour les champs assez forts, c'est-à-dire typiquement quand il n'y a plus d'oscillation, alors la conductance devrait s'approcher de la conductance normale. Supposons que cette saturation apparente soit l'effet d'une mauvaise thermalisation des électrons, et que les électrons ne soient pas à la température de 50 mK qu'indique le thermomètre, mais à une température supérieure T . Plaçons-nous à champ H , supposons que l'énergie de Thouless $\epsilon_C(L_H)$ associée à la longueur L_H soit très inférieure au gap supraconducteur (si, par exemple, L_H est supérieure à environ $0.3 \mu\text{m}$, l'énergie associée est inférieure à $30 \mu\text{V}$ environ, et les oscillations ont déjà complètement disparues.). Supposons que kT soit encore très inférieure à $\epsilon_C(L_H)$ (ce qui est visiblement le cas à fort champ où le maximum de conductance se situe plutôt vers 500 mK et plus). On a vu qu'alors la conductance spectrale tend vers une courbe universelle et ne dépend que de $\epsilon / \epsilon_C(L_H)$, et que cette courbe suit une loi quadratique à énergie proche de 0. Ainsi,

$$\delta G(\epsilon) \propto \frac{L_H}{L} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_C(L_H)} \right)^2 \propto L_H^5 \epsilon^2 \propto H^{-5} \epsilon^2 \quad (4.5.1.)$$

Après convolution par la fonction de largeur kT et de hauteur $1/kT$, on obtient la correction de conductance : $\delta G \propto H^{-5} T^2$.

Si la température T est trop grande pour que kT soit très inférieure à $\epsilon_C(L_H)$, mais reste inférieure à l'énergie du maximum de conductance, on a $\delta G(\epsilon) \propto \epsilon / \epsilon_C(L_H)$, d'où $\delta G \propto H^{-3} T$.

Figure 4.5.1.: Le produit de H par la correction de conductance à 50 mK montre une loi en $1/H$ qui invalide l'hypothèse qu'un chauffage se produit.



Pour trancher, comme on ne connaît pas a priori la température T , on regarde la dépendance en H . Ci-dessus (figure 4.5.1.) , est représenté le produit de H par la correction de conductance. à 50 mK. On obtient une loi $\delta G \propto 1/H$, mais pas une puissance -3, ni a fortiori une puissance -5. Ainsi, il semblerait que la conductance ne retourne pas à sa valeur à l'état normal, mais qu'il y ait à basse température une composante résiduelle proportionnelle à L_H , c'est-à-dire proportionnelle à la longueur de l'échantillon qui est affecté par l'effet de proximité.

Si l'apparente saturation à basse température était due uniquement au fait que la température affichée par le thermomètre n'est pas la température des électrons dans l'échantillon, alors nous observerions une loi en H^{-3} , ou H^{-5} . Ce n'est pas le cas, et le fait que la résistance résiduelle semble proportionnelle à L_H pousse à chercher d'autres explications.

Une autre possibilité est que ces écarts trouvent leur origine dans les interactions dans le métal normal [9], dont il n'a pas été tenu compte jusque-là. Cet effet d'interaction peut être pris en compte grâce au terme "de source" au second membre de l'équation "de Boltzmann" (1.3.2) du chapitre théorie. Dans le cas de la géométrie "fil latéral", où les trois fils sont identiques, on trouve [10] à $T=0$: $\Delta G / G = -0.05\lambda$ soit 0.2%. Par contre, la correction de conductance semble, dans les mesures "fil latéral", saturer à des valeurs de l'ordre d'environ 0.8 %, on obtient une valeur plus élevée d'un facteur 4, mais du même ordre de grandeur, que la prévision obtenue pour les valeurs du paramètre d'interaction données par [11]. On ne peut donc pas conclure pour l'instant. Cette possibilité mériterait une étude approfondie, et de nouvelles expériences.

6. Conclusion sur l'effet de chauffage dans les chapitres 3 et 4.

D'après l'étude sur les effets de réservoirs du chapitre 3, nous savons que les effets des réservoirs peuvent avoir des effets très importants. Nous cherchons donc à quantifier les effets de chauffage dans les échantillons.

A partir des valeurs obtenues au chapitre 3 des coefficients $C_{2/5}$, C_1 et $C_{4/7}$ pour chacune des lois de variation de la température effective T_e en fonction du courant ($T_e = C_{4/7}I^{4/7}$, $T_e = C_{2/5}I^{2/5}$ ou $T_e = C_1I$), on peut estimer si les effets de chauffage sont importants ou non. Pour se représenter cela, on peut donner la tension mesurée caractéristique pour laquelle la tension V_{res} dans les réservoirs est telle que $eV_{res} = kT_e$. On introduit un facteur géométrique f qui donne le rapport entre la tension dans les réservoirs et la tension mesurée: $V_{res} = fV$. Pour la loi en puissance 4/7, on fait l'approximation que les n réservoirs se partagent également la puissance dissipée. On considère que tous les plots de contact, dans les trois échantillons, ont la même largeur, et donc que la section s des réservoirs est proportionnelle à l'épaisseur du cuivre déposé. Enfin, on suppose que la conductivité σ est la même dans les réservoirs et dans l'échantillon (ce qui conduit à une surestimation de l'effet des réservoirs dans les cas où les fils sont fins). On obtient alors le tableau suivant (figure 4.6.1.) :

	f	n	$s(\text{nm}^2)$	$\sigma(\text{Sm}^{-1})$	$C_{4/7}$ K à 1 μA	$C_{2/5}$	C_1
Chapitre 3	0.5	2	4.10^3	10^7	0.13	0.18	0.05
boucle 184	≈ 0.9	4	2.10^3	10^7	0.3	0.24	0.1
boucle 10.6	1.05	4	$3,2.10^3$	$2,4.10^7$	0.1	0.16	0.03

	$V_{4/7}(\mu\text{V})$	$V_{2/5}(\mu\text{V})$	$V_1(\%)$
Chapitre 3	65	65	85
boucle 184	2.4	5.7	5.2
boucle 10.6	5.9	15	25

Figure 4.6.1.: Tableau des coefficients en température des différents échantillons. Le tableau en bas donne des tensions caractéristiques en dessous desquelles le chauffage apparaît., pour les lois de chauffage en puissance 2/5 et 4/7. La dernière colonne décrit la loi en puissance 1, le pourcentage donnant le rapport entre l'élargissement de la fonction de distribution et la tension.

Les coefficients $C_{2/5}$, C_1 et $C_{4/7}$ sont la température T_e pour un courant de $1 \mu\text{A}$. On remarque en particulier que les coefficients sont à peu près les mêmes pour les trois échantillons. Le deuxième tableau représente les tensions caractéristiques. On se rend compte que les effets de chauffage sont très faibles dans la boucle aux fils fins "boucle 184", ceci parce qu'on ne fait jamais passer des forts courants, du fait de la faible conductance. Ce chauffage est un peu plus grand dans l'échantillon "boucle 10.6", mais reste limité (voir Annexe A.7.). Ce chauffage était par contre beaucoup plus grand dans l'échantillon présenté au chapitre précédent. Bien sûr, ce tableau ne donne qu'un ordre d'idées, vu les approximations qui ont été faites.

Lorsque l'on cherche à mesurer des conductances différentielles d'échantillons mésoscopiques, la tentation est grande d'utiliser la géométrie "4 fils" habituelle, et d'attribuer la conductance mesurée à la seule partie placée entre les contacts de mesure de tension. Nous nous sommes efforcés de montrer que cette idée simple est très loin d'être vérifiée lorsque l'on mesure des échantillons mésoscopiques. Nous avons vu que les effets qui découlent des parties extérieures à la partie que l'on croit être celle que l'on mesure peuvent prendre des aspects multiformes et complexes.

En conclusion, dans les chapitres 3 et 4 nous avons mis en évidence les points suivants :

- La présence d'une interface N-S induit une augmentation de la conductance dans le métal normal. Cette augmentation de conductance se produit à des énergies de l'ordre de l'énergie de Thouless.
- Cette augmentation de conductance peut être reliée à une cohérence de paires dans le métal normal, cette cohérence peut être mise en évidence par une configuration Aharonov-Bohm, et se manifeste par des oscillations de période $h/2e$.
- Les effets de cohérence se manifestent à longue portée dans métal normal. Ils ne sont pas limités par la longueur thermique L_T (équation 1.0.2), mais par la longueur de mémoire de phase L_φ . Lorsque la température est élevée est que la longueur thermique est faible, les paires à énergie faible continuent de subir les interférences dues à la présence de la boucle, et contribuent proportionnellement à $1/T$ à la conductance totale.
- Nous avons mis en évidence un comportement fortement non linéaire de la conductance, ce comportement étant bien décrit par la théorie quasiclassique.
- Nous avons montré que dans les mesures de transport dans un échantillon mésoscopique de faible conductance, il est important de tenir compte des parties de l'échantillon qu'une vision naïve placerait a priori "hors-circuit", et qui font office de réservoirs.

Références bibliographiques

- [1] H. Courtois, thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble (1994)
- [2] Zhou, Spivak, Zyuzin, Phys. Rev. B 52, 4467 (1995)
- [3] Webb, Washburn, Umbach, Laibowitz, Phys. Rev. Lett. 54, 2696 (1995)
- [4] Washburn, *Mesoscopic phenomena in solids*, MPCMS volume 30, North-Holland (1991)
- [5] Petrashov, Antonov, Delsing, Cleason, Phys. Rev. Lett. 74, 5268 (1995)
- [6] Webb Phys rev B 37, 8455 (1988)
- [7] Courtois, Gandit, Mailly, Pannetier, Phys. Rev. Lett. 76, 130 (1996)
- [8] Gray, dans *Nonequilibrium Superconductivity, Phonons, and Kapitza Boundaries* ,
NATO Advanced Study Institute, Plenum (1981)
- [9] Stoof and Nazarov Phys. Rev. B. 53, 14496 (1996)
- [10] Stoof, communication privée
- [11] Mota, Visani, Pollini, J. Low Temp. Phys. 76, 465 (1989)
- [12] Kittel, *Physique de l'état solide* , Dunod.

Chapitre 5

Dynamique des niveaux d'énergie en présence de deux supraconducteurs

Nous avons vu jusque là des exemples de transport dans le régime de proximité dans le cas où un seul supraconducteur était présent. Le but de ce chapitre est de nous intéresser au cas où plusieurs supraconducteurs sont présents et peuvent être portés à des potentiels différents [1]. La géométrie de proximité la plus simple que l'on puisse obtenir dans ce cas est celle d'un fil de métal normal coincé entre deux supraconducteurs. Nous sommes ici dans le cas d'une jonction SNS longue. Dans ce cas, les états dans le métal normal dépendent de la phase relative des deux supraconducteurs. Dans le cas où le métal normal est balistique, l'énergie des niveaux d'Andréev varie en fonction de cette différence de phase, et un niveau d'Andréev croise le niveau de Fermi pour un déphasage égal à $\pm\pi$. Lorsqu'une différence de potentiel V est appliquée, la différence χ_0 de phase entre les deux supraconducteurs varie en fonction du temps avec la fréquence Josephson :

$$\frac{d\chi_0}{dt} = 2eV \quad (5.0.1.)$$

Les niveaux dans le métal normal vont varier en fonction du temps (dans l'approximation adiabatique), ce qui aura un effet sur la conductance. En effet, la distribution des électrons est "entraînée" par la variation de la densité d'états, et elle est ainsi amenée vers une distribution hors équilibre. Les collisions inélastiques agissent sur cette distribution, ce qui crée de l'entropie et ce qui contribue à la conductance (mécanisme de relaxation de Debye [2-3]). Ainsi, la mesure en continu (dc) de la conductance porte une information sur la dynamique des niveaux dans le fil métallique à la fréquence Josephson!

1. Effet de relaxation

F. Zhou et B.Spivak [4] ont montré que cette conductance fait intervenir un facteur de la forme :

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{dv(\varepsilon', \chi_0)}{d\chi_0} \right\}^2 \quad (5.1.1.)$$

où $v(\varepsilon)$ est la densité d'états. Ceci souligne le rôle crucial de l'aspect de la densité d'états en fonction de χ_0 et en particulier de sa dérivée par rapport à χ_0 . Nous verrons qu'un gap apparaît dans la densité d'états dans le métal normal (une méthode de calcul est exposée au chapitre 7 informatique), que ce gap varie en fonction de χ_0 , et que la partie de la densité d'états qui est juste au-dessus du gap doit jouer un rôle de premier plan. Ceci souligne la nécessité de connaître la densité d'états dans le métal normal.

Conditions d'observabilité

1/ Dans le cas où le métal normal est un milieu diffusif, l'approximation adiabatique, qui traduit le fait que l'information sur la phase des supraconducteurs doit se propager dans tout le métal normal avant que cette phase n'ait changé, s'exprime par :

$$eV \ll \varepsilon_C = \hbar D / L^2 \quad (5.1.2.)$$

2/ Le phénomène étudié met en jeu des collisions inélastiques. Zhou et Spivak ont montré que, lorsque la tension V est grande par rapport à la fréquence des collisions inélastiques ($eV \gg \hbar / t_{in}$), alors la contribution de l'effet de relaxation décroît comme $(\hbar / eV t_{in})^2$. Il faut donc que :

$$eV \leq \hbar / t_{in} \quad (5.1.3.)$$

3/ Il nous faut ensuite pouvoir distinguer l'effet de relaxation dans la caractéristique courant-tension. Il faut donc que la tension soit telle que le courant dans la jonction soit largement supérieur au courant critique de la jonction. De plus, il est très difficile de polariser

en tension continue faible devant $R_N I_C$ aux bornes d'une jonction Josephson, car une composante alternative apparaît, qui se superpose à la tension continue imposée, et qui fait que la phase ne varie plus linéairement dans le temps. Pour "couper" cette composante alternative, il faudrait par exemple mettre une forte capacité en parallèle avec la jonction, ce qui ne manquerait pas de poser à la fois des problèmes de fabrication, mais aussi des problèmes d'interprétation des mesures. A la place, nous choisissons d'imposer un courant continu très supérieur au courant critique. Dans la limite où l'énergie de Thouless ϵ_C est inférieure au gap (cas d'une jonction très longue) dans le supraconducteur, et dans la limite diffusive, la condition que le courant soit très supérieur au courant critique [5] se traduit par : $eV \gg e R_N I_C$, soit :

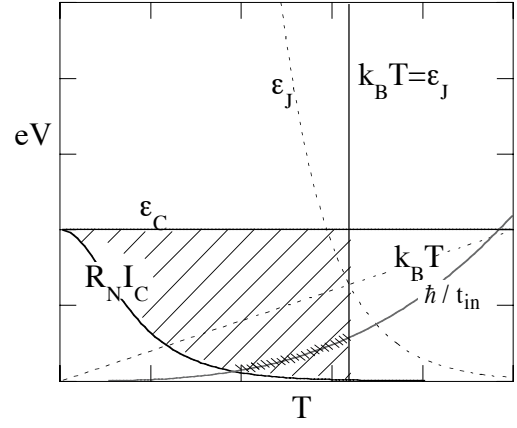
$$eV \gg \epsilon_C \exp\left(-\sqrt{\frac{k_B T}{\epsilon_C}}\right) \quad (5.1.6.)$$

4/ Enfin, il faut que les fluctuations thermiques soient assez faibles, pour que la relation entre les phases des supraconducteurs soit maintenue. Ceci se traduit par le fait que la température doit être inférieure à l'énergie Josephson ϵ_J . Dans cette condition, la largeur du fil intervient.

$$k_B T \ll \frac{2\hbar}{e^2} G_N \epsilon_C \exp\left(-\sqrt{\frac{k_B T}{\epsilon_C}}\right) \quad (5.1.7.)$$

Une dernière condition porte bien sûr sur le fait qu'il faut que la température soit inférieure à la température critique du supraconducteur. Ces conditions peuvent être résumées sur le diagramme (figure 5.1.1) représentant la tension en fonction de la température.

Figure 5.1.1 : Conditions d'observabilité de l'effet de relaxation. En abscisses, la température, en ordonnées, la tension. La région où le phénomène est observable est hachurée. Le crossover pour l'effet de relaxation se trouve autour de $eV \approx \hbar / t_{in}$ (zone finement hachurée.)



2. Densité d'états de la jonction SNS

Le programme exposé au chapitre 7 a servi à calculer les propriétés de la densité d'états de la jonction SNS.

2.1. Aspects généraux

La figure (5.2.1) montre le modèle de jonction SNS utilisé pour le calcul. Un fil de métal normal de longueur L est connecté de chaque côté à deux supraconducteurs de phases $\pm \chi_0 / 2$. Les interfaces sont supposées parfaites, les énergies considérées sont supposées très inférieures au gap.

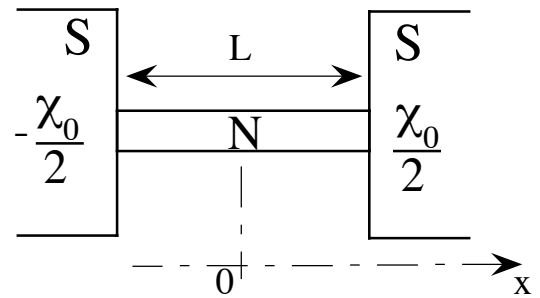


Figure 5.2.1. : Modèle de jonction SNS utilisé pour le calcul. Un fil de métal normal de longueur L est connecté de chaque côté à deux supraconducteurs de phases $\pm \chi_0 / 2$.

Enfin, on suppose que la longueur de mémoire de phase est très supérieure à L .

La figure (5.2.2) montre : à gauche, la densité d'états d'une jonction SNS, moyennée sur la longueur de l'échantillon, et à droite, la densité d'états au centre de l'échantillon, en

fonction de l'énergie. ν_0 est la densité d'états dans l'état normal.

Tout d'abord, aux hautes énergies, la densité d'états ne dépend qu'à peine de la différence des phases entre les deux supraconducteurs. Ceci peut être interprété par le fait qu'à de telles énergies, seules les parties les plus proches des supraconducteurs sont affectées par l'effet de proximité, et sur une longueur $L_\epsilon = L\sqrt{\epsilon_C/\epsilon}$. Ainsi, un côté du fil est indépendant de ce qui se passe de l'autre côté. En particulier, aux hautes énergies, la phase de chaque côté reste celle du supraconducteur le plus proche.

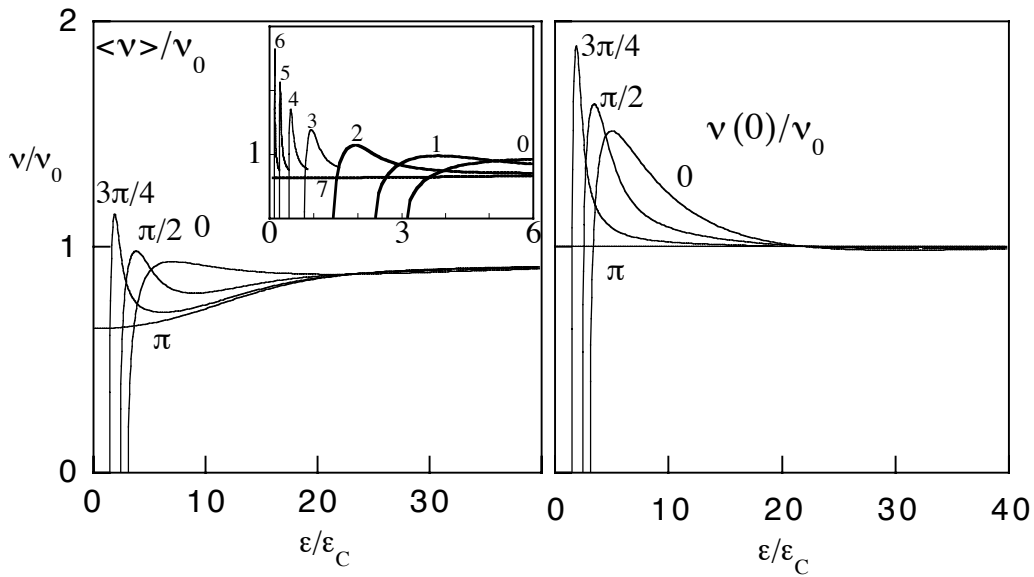


Figure 5.2.2 : A gauche: la densité d'états moyennée d'une jonction SNS . A droite, la densité d'états au centre de l'échantillon, en fonction de l'énergie. En insert, une représentation sur une échelle différente montre les comportements aux basses énergies pour des phases très proches de π . Les phases sont respectivement 0 , $\pi/2$, $3\pi/4$, $7\pi/8$, $15\pi/16$, $31\pi/32$, $63\pi/64$ et π pour les courbes numérotées de 0 à 7.

Ensuite, on peut observer que la densité d'états moyennée est inférieure à la densité d'états au milieu du fil (en $x=0$). Ceci vient du fait qu'aux contacts avec le supraconducteur, la densité d'états est nulle: les états ont été déplacés au-dessus du gap supraconducteur, supposé infini.

A $\chi_0 = \pi$, la densité d'états est exactement celle d'un fil de longueur $L/2$ compris entre un réservoir N et un réservoir S [8], car les paires de phase opposées venant d'un côté ou de l'autre interfèrent destructivement au milieu, y imposant une condition $\theta = 0$.

A $\chi_0 = 0$, nous retrouvons la densité d'états d'un fil normal de longueur $L/2$ connecté à

une extrémité à un supraconducteur, et non connecté à l'autre extrémité [6]. La condition à une extrémité non connectée s'exprime en effet comme $\partial_x \theta = 0$ et $\partial_x \chi = 0$. Or, les symétries de problème imposent $\theta(x)$ fonction paire, donc $\partial_x \theta = 0$ et $\chi(x)$ fonction impaire. Lorsque $\chi_0 = 0$, $\chi(x)=0$ par symétrie. Donc les conditions aux limites sont les mêmes pour les deux problèmes.

Un vrai gap apparaît dans le métal normal [9] aux basses énergies. Sa valeur, de $\varepsilon_g = 3.122\varepsilon_C$ à $\chi_0 = 0$, diminue quand la phase entre les deux supraconducteurs augmente (figure 5.1.4), nous verrons qu'il se ferme à $\chi_0 = \pi$ exactement. Un "pic" de plus en plus aigu apparaît dans la densité d'états au-dessus du gap. C'est donc cette partie de la densité d'états qui varie le plus en fonction du temps, et que nous allons regarder de plus près au paragraphe suivant.

2.2. Variation du gap en fonction de la phase

La figure (5.2.3) représente le gap supraconducteur en fonction de la phase. Deux courbes sont superposées, qui sont les résultats des deux méthodes de calcul exposées au chapitre 7 (respectivement aux paragraphes 1 et 2).

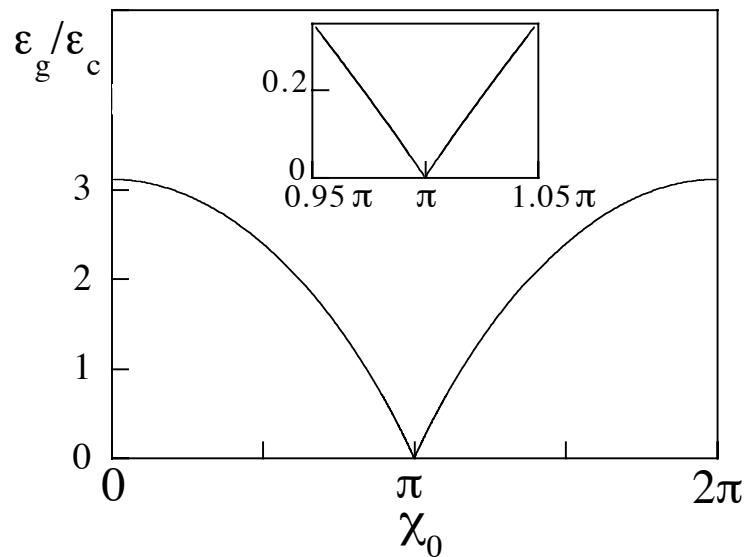


Figure 5.2.3 : Le gap en fonction de la phase. Le gap s'annule à une phase égale à π exactement, et suivant une loi linéaire montrée sous forme d'un "Zoom" en insert..

Aux faibles différences de phases, le gap suit une loi parabolique $\varepsilon_g = C_2(1 - C_1\chi_0^2)\varepsilon_C$.

La simulation numérique fournit : $C_1=0.91$ et la valeur de $C_2=3.122$ est celle du gap à phase nulle. On voit sur cette figure que le gap se ferme lorsque la phase vaut π exactement. Cette fermeture du gap se fait suivant une loi linéaire ($C_3=2.43$):

$$\varepsilon_g = C_3(\pi - \chi_0)\varepsilon_C \quad (5.2.1.)$$

Nous avons vu dans le chapitre théorie que dans une jonction SNS existent des niveaux d'Andréev, constitués d'allers et retours d'électrons et de trous qui subissent des réflexions d'Andréev successivement sur chaque interface. Nous avons vu aussi que cette réflexion d'Andréev ajoutait un déphasage de $\pi/2$ (plus la phase du supraconducteur) à chaque réflexion, qui crée une interférence destructive après deux réflexions. Ce déphasage implique en particulier qu'à énergie nulle, il n'y a pas de niveau d'Andréev, et que ceux-ci apparaissent à des énergies de l'ordre de l'énergie de Thouless, car le déphasage supplémentaire dû à une énergie finie peut créer des interférences constructives (voir dans le chapitre 1 le paragraphe 2.2.2.). En revanche, quand la différence de phase entre les deux supraconducteurs devient juste égale à π , alors les interférences sont constructives à énergie nulle (repérée par rapport à l'énergie de Fermi), et il y a un niveau d'Andréev à énergie nulle, il n'y a donc plus de gap.

La plus grande contribution à l'effet de relaxation provient de la partie de la densité d'états située juste au-dessus du gap. En effet, la dérivée y devient infinie. Si $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_g$, est infiniment petit, alors la densité d'états vérifie:

$$\frac{\delta v}{v_0} = C_4 \sqrt{\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_g}} \quad (5.2.2.)$$

Ceci est illustré sur la figure (5.2.4).

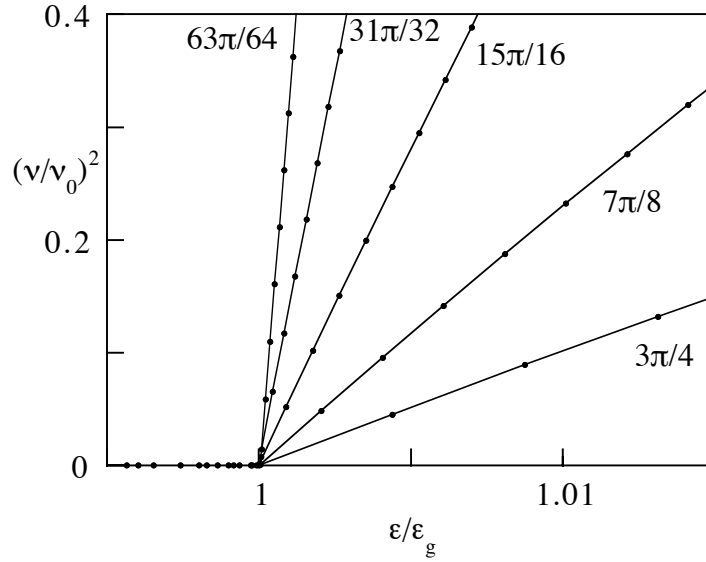


Figure 5.2.4 : Le carré de la densité d'états est représenté en fonction de l'énergie pour différentes différences de phases. L'énergie a été renormalisée en fonction de l'énergie du gap.

Nous pouvons déterminer numériquement le coefficient C_4 . Pour cette détermination, une méthode est d'abord de trouver la position du gap, puis de calculer les densités d'états $v(\epsilon)$ et $v(\epsilon + d\epsilon)$ pour ϵ juste au-dessus du gap. Un problème qui se pose est que le carré de la densité d'états, visible sur la figure (5.2.4), augmente très rapidement en fonction de l'énergie. Par exemple, pour une phase de $63\pi/64$, le carré de la densité d'états moyenne est de 3 % de la densité d'états dans l'état normal pour une énergie supérieure de seulement $10^{-5}\epsilon_C$. Si l'on trouve le gap à $10^{-5}\epsilon_C$ près, on est forcé de calculer la dérivée à $10^{-5}\epsilon_C$ au-dessus du gap pour s'assurer que l'énergie est supérieure au gap. Comme la densité d'états vaut déjà 3 %, cela signifie que l'on sous-estime systématiquement la valeur de la dérivée, et ceci d'autant plus que la phase se rapproche de π . La figure (5.2.5) fournit le résultat de ce calcul numérique de la dérivée, et décrit le comportement du coefficient C_4 en fonction de la différence de la phase avec π . Les deux axes sont des échelles logarithmiques. La droite représente une loi asymptotique de puissance $-2/3$. Ce choix de la loi de puissance $-2/3$ est une suggestion de la simulation. En effet, les pentes de la courbe suivante varient entre -0.64 et -0.65 dans la région où $\pi - \chi_0$ est compris entre 0.1 et 0.3 et sont donc proches d'une loi en $-2/3$, qui correspond à un certain ordre du développement de θ en fonction de l'énergie. En effet, on peut montrer [7] que la partie imaginaire θ_{20} de θ en $x=0$ (c'est-à-dire au milieu du métal normal) varie suivant la loi suivante:

$$\cosh \theta_{20} = B_0 (\pi - \chi_0)^{-1/3} \quad (5.2.3.)$$

Avec $B_0 = 2.21$ déterminé numériquement à partir de l'insert de la figure (5.2.5), qui montre une divergence logarithmique de pente $-1/3$ pour la dépendance de θ_{20} en fonction de l'énergie du gap.

Notons que la phase χ dans le métal normal a en général une allure assez compliquée, qu'elle comporte une partie imaginaire non nulle, et qu'elle dépend fortement de l'énergie et de la position, surtout aux énergies proches du gap.

Notons enfin que la forme du pic de la densité d'états tend, à mesure que la phase s'approche de π , vers une forme qui ressemble à une densité d'états BCS, auquel on ajoute un terme de "depairing" représenté par une longueur de mémoire de phase finie L_φ (en unités de la longueur de l'échantillon). C'est-à-dire que θ est solution de l'équation : $\left[2i\varepsilon - \frac{\hbar D}{L_\varphi^2} \cos \theta \right] \sin \theta = 2\delta \cos \theta$. δ est le paramètre d'ordre dans le supraconducteur.

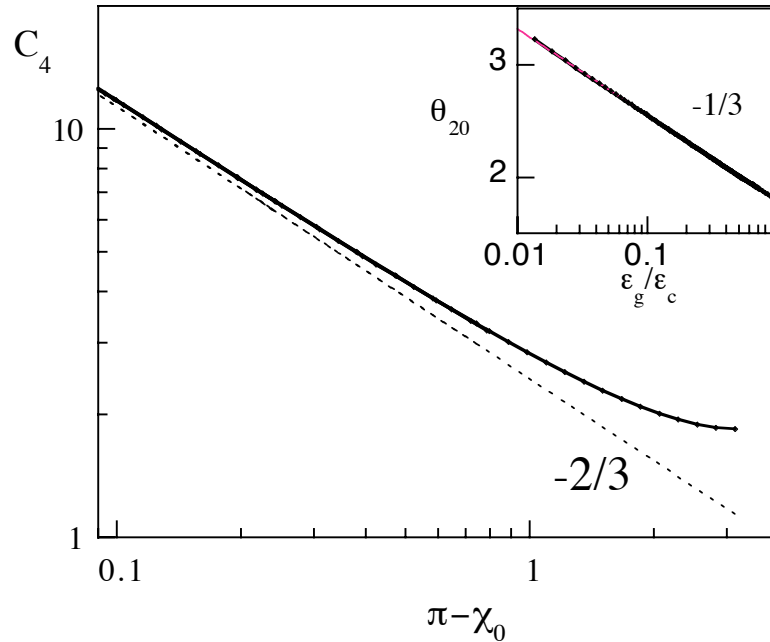
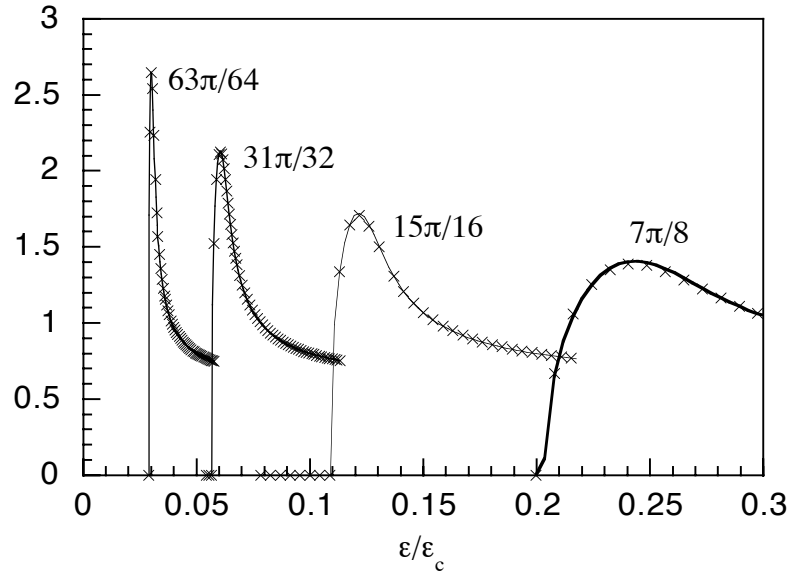


Figure 5.2.5 : Le coefficient qui donne la pente du carré de la densité d'états juste au-dessus du gap, en fonction de la phase, montre que celui-ci semble diverger suivant une loi de puissance $-2/3$. L'insert montre une dépendance logarithmique de θ_{20} en fonction de l'énergie.

La figure 5.2.6. montre un excellent accord entre la densité d'états BCS avec depairing et la densité d'états moyenne dans la jonction SNS obtenue à partir de la solution de l'équation d'Usadel . On se rend compte que la valeur de L_φ varie comme $L_\varphi \propto (\pi - \chi_0)^{-1}$, tandis que $\delta \propto (\pi - \chi_0)$. Ceci est une autre illustration de la façon dont le coefficient C_4 diverge quand la phase tend vers π . Cet accord avec BCS est vrai aussi au milieu de l'échantillon. Par contre, l'accord est assez mauvais à phase nulle. L'idée physique est probablement que la réflexion d'Andréev couple des niveaux qui ne sont pas symétriques par renversement du temps (voir chapitre 1), mais que les niveaux couplés par la réflexion d'Andréev se rapprochent de cette symétrie quand l'énergie se rapproche du niveau de Fermi, d'où la divergence de L_φ quand le gap se ferme car les états d'Andréev rejoignent le niveau de Fermi.



χ_0	δ	L_φ	ε_g
$7\pi/8$	0.96	15.5	0.81
$15\pi/16$	0.48	30.4	0.44
$31\pi/32$	0.24	60.2	0.225
$64\pi/64$	0.12	120	0.116

Figure 5.2.6 : Le schéma ci-dessus montre la comparaison entre la densité d'états BCS avec depairing (lignes continues) et la densité d'états moyenne obtenue à partir de la solution de l'équation d'Usadel (croix). δ , L_φ et ε_g sont respectivement le paramètre d'ordre, la longueur de mémoire de phase, et le gap donnés par les meilleurs ajustements. Les unités sont la longueur L et l'énergie de Thouless. La qualité de l'ajustement s'accroît quand la phase s'approche de π . La densité d'états BCS est multipliée par 0.636, qui est la densité d'états moyenne à énergie nulle et phase égale à π .

3. Choix techniques

La condition (5.1.3.) est la plus limitante, car elle demande de mesurer des tensions très faibles. Le système de mesure actuel a un bruit de l'ordre de $1 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$. Deux solutions sont alors possibles : soit on envisage de travailler avec des résistances très faibles, ce qui permettrait d'utiliser un système de mesure différent, soit on décide de travailler avec $V > 0.1 \mu\text{V}$ environ. En prenant la valeur de $1 / t_{\text{in}} \approx 0,91.10^7 T^3$ (T en K), cette condition devient :

$$T > 1.3 \text{ K} \quad (5.3.1.)$$

De ce point de vue, les conditions d'observabilité seront d'autant meilleures que la température sera élevée. Cet argument suffit à diriger le choix vers la fabrication d'échantillons à base de Niobium, qui est supraconducteur à 9.25 K dans l'état massif.

La deuxième contrainte est que cette tension soit inférieure à l'énergie de Thouless, et donc que l'énergie de Thouless soit assez élevée. Avec les métaux que nous évaporons couramment (argent, cuivre), on a $\epsilon_c \approx 10 \mu\text{eV}$ pour une longueur $L \approx 0.5 \mu\text{m}$ (voir les échantillons présentés aux chapitres 3 et 4). Les deux autres conditions sont réalisées assez facilement si la résistance est assez faible (de l'ordre de 1Ω).

3.1. Fabrication d'une jonction SNS

Le choix du niobium interdit les techniques tricouches à base de PMMA, car le PMMA n'est pas thermostable. Nous avons développé une technique à base de résine thermostable (voir chapitre 2).

Le choix du métal normal s'est porté sur le cuivre. Des évaporations d'argent ont été essayées, mais l'argent se dépose sous forme de gouttelettes dont la taille avoisine 100 nm environ. Il est donc délicat d'obtenir un échantillon continu et surtout homogène. Le masque utilisé pour la technique tricouche est celui présenté sur la figure (5.3.1.).

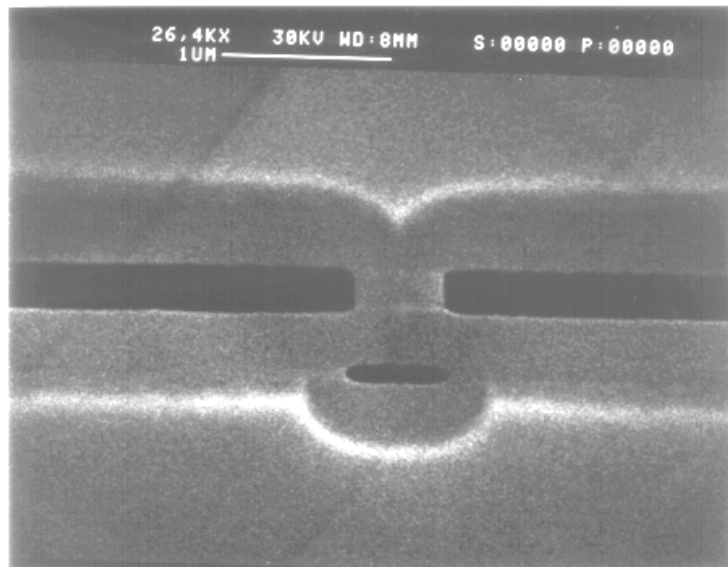


Figure 5.3.1 : Masque suspendu pour la fabrication d'une jonction SNS. Les ouvertures du masque de silicium apparaissent en noir. Le dessin est lithographié dans la couche de silicium. A travers cette couche de silicium, on aperçoit le rebord de la sous-couche de résine (rebord lumineux sur la photo). La couche de silicium constitue donc un masque suspendu. La longueur entre les deux ouvertures horizontales est de $0.5\ \mu\text{m}$.

Le principe de fabrication repose sur une évaporation verticale de niobium, et une évaporation oblique (de bas en haut sur la figure 5.3.1.) de métal normal. Le dépôt obtenu est schématisé sur la figure 5.3.2.

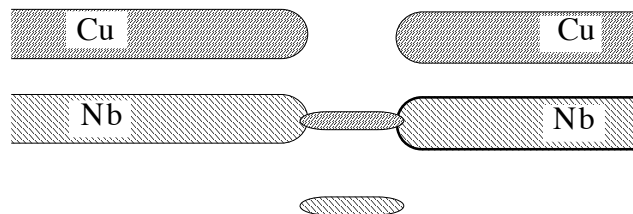


Figure 5.3.2. Schéma du dépôt obtenu à partir du masque de la figure 5.3.1. Un fil de cuivre de $0.5\ \mu\text{m}$ de longueur est connecté entre deux fils de niobium.

3.2. Echantillon pour la mesure de densité d'états.

Il s'agit non seulement de faire une jonction SNS, mais d'y ajouter une jonction tunnel pour mesurer la densité d'états dans le métal normal de la jonction SNS. Il faut aussi pouvoir contrôler la phase des supraconducteurs, grâce à une structure en boucle dans laquelle on mettra un flux magnétique. Par contre la présence de Niobium n'est pas obligatoire, car la densité d'états devra être mesurée à très basse température.

Tout ceci est réalisable avec la technologie tricouche et des évaporations sous angles, grâce au masque de silicium montré sur la photo 5.3.3.

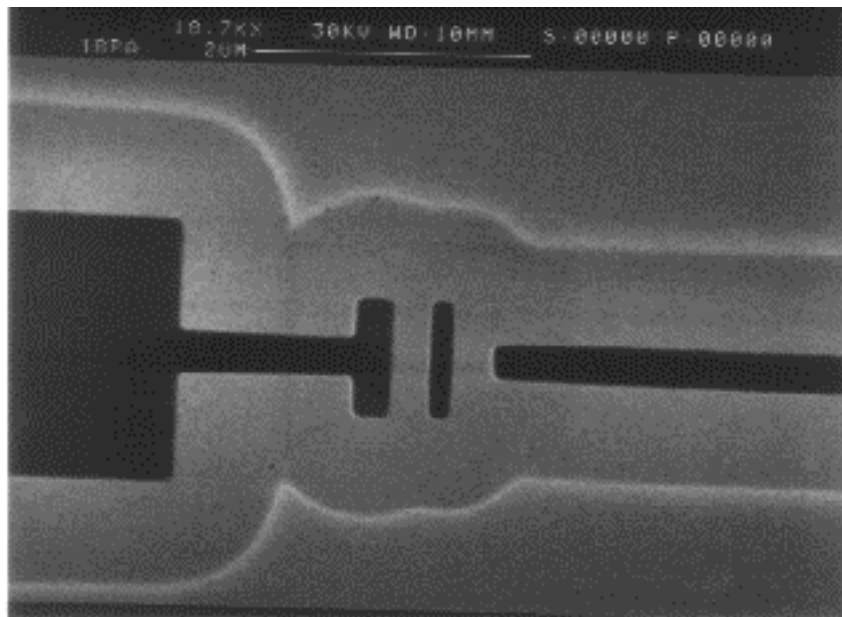


Figure 5.3.3 Masque réalisé avec la technologie tricouche et des évaporations sous angles. Les ouvertures dans le silicium apparaissent en noir, et le rebord de la sous-couche est le halo clair. Le dégagement de la sous couche est de $0.7\ \mu\text{m}$.

A partir de ce masque, on peut obtenir une boucle de supraconducteur (ici, de l'aluminium), fermée par un fil de cuivre (voir figure 5.3.4.) dont on mesure la densité d'états par une jonction Tunnel réalisée par une couche d'aluminium que l'on oxyde complètement. Les paramètres pour obtenir la jonction (épaisseur de la couche à oxyder) dans cette géométrie sont encore à régler. Avec un angle d'évaporation de 57° , trois évaporations successives de $17\ \text{\AA}$ d'aluminium suivies à chaque fois d'une oxydation dans 6 mbar d'oxygène pur pendant 3 minutes permettent d'obtenir des jonctions dont la résistance est de

quelques dizaines de $k\Omega$.

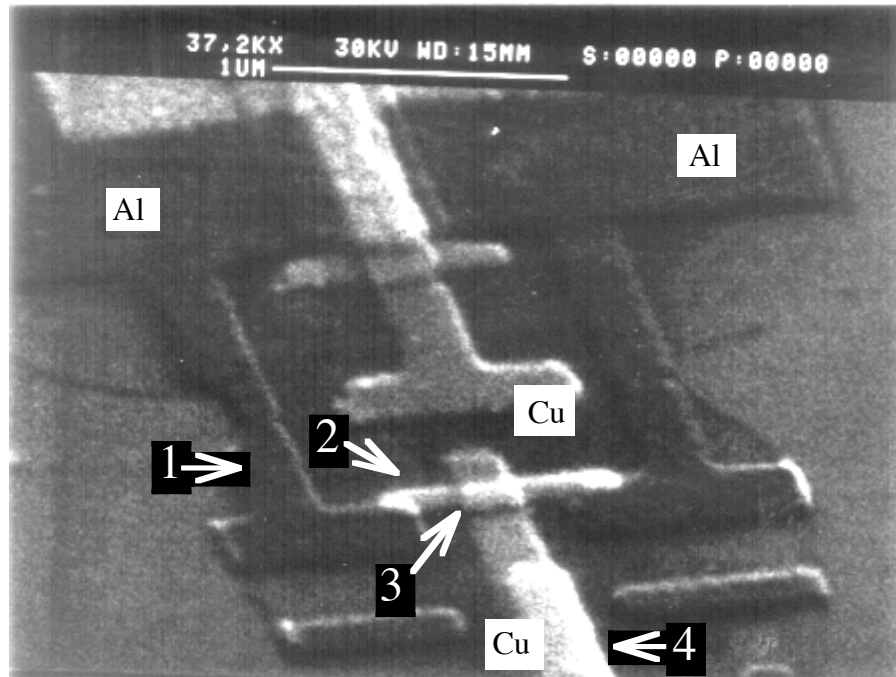


Figure 5.3.4. échantillon pour la mesure de la densité d'états d'une jonction SNS. Une boucle en aluminium (1) est fermée par un fil de cuivre. On mesure la densité d'états en mesurant la caractéristique différentielle entre l'aluminium et le "doigt" de cuivre (4), car une jonction tunnel (3) est comprise entre les fils (2) et (4).

(A suivre...)

Références bibliographiques

- [1] Højgaard, Fensen et Lindelof, J. Low Temp. Phys. 23, 469 (1976)
- [2] Wider
- [3] Tinkham
- [4] Zhou, Spivak, JETP Lett. 63, 369 (1997)
- [5] Wilhelm, Zaikin, Schön, J. Low. Temp. Phys. 106, 305 (1997) et Wilhelm, Zaikin, Schön, Czech. J. Phys. 46, supplément S4, 2395 (1996).
- [6] Zirnbauer, Altland, Phys. Rev. Lett. 76, 3420 (1996)
- [7] Zhou, Charlat, Pannetier, Spivak, soumis à J. Low. Temp. Phys.
- [8] Golubov, Wilhelm, Zaikin, preprint
- [9] Frahm, Brouwer, Melsen, Beenakker Phys. Rev. 76, 2981 (1996)

Chapitre 6

Développement d'un dispositif d'injection d'oxygène pur dans la chambre ultra-haut-vide

Pour maîtriser la fabrication de jonctions tunnel, il est nécessaire de contrôler l'étape de fabrication de la couche isolante. A cette fin, il faut pouvoir contrôler la pénétration d'oxygène dans le bâti de dépôt, ainsi que la qualité de l'oxygène. Nous travaillons dans le contexte d'une fabrication de jonctions tunnel sous ultra-haut vide (UHV), afin d'avoir un parfait contrôle de la qualité de l'interface. Pour avoir un ordre d'idée des phénomènes de pollution, il faut se rappeler qu'il faut environ une seconde pour polluer une surface dans un vide de 10^{-6} torr, il faut donc une pression partielle de gaz autres que l'oxygène (vapeur d'eau notamment) très nettement inférieure à cette valeur pour être sûr de bien contrôler le processus d'oxydation. Le bâti UHV utilisé est un bâti Riber. Dans un tel bâti, toute graisse ou trace de doigt, plus généralement, toute trace d'un produit à forte pression de vapeur saturante est proscrite. Après chaque ouverture, un étuvage d'au moins 48 heures à une température de 250 °C est nécessaire pour faire dégazer les parois. Le bâti est équipé d'une pompe ionique, et d'une pompe à sublimation de titane. Un sas, équipé d'une pompe turbo Varian V60, permet d'introduire des échantillons dans l'UHV sans ouvrir à chaque fois. Si on cherche à introduire de l'oxygène par une vanne, même d'excellente qualité, alors inmanquablement cette vanne sépare l'UHV de zones non étuvées, et mal pompées (tuyaux, etc..), et on introduit avec l'oxygène d'autres gaz dont on ne contrôle ni la nature, ni la quantité. L'idée vient alors d'une vanne qui ne laisserait passer que de l'oxygène très pur. Ce chapitre décrit donc les différents points du développement d'un nouveau type de vanne sélectif pour faire entrer de l'oxygène pur dans le bâti UHV.

Un phénomène connu est celui de la perméation des gaz à travers certains métaux, en particulier, celle de l'oxygène à travers l'argent chauffé. Une idée pour faire pénétrer de l'oxygène dans le bâti est donc de fabriquer une paroi d'argent séparant l'intérieur du bâti de l'air extérieur. En chauffant cette paroi, on pourrait extraire l'oxygène de l'air pour le faire pénétrer dans le bâti. On réaliserait ainsi une vanne sélective [1].

Afin de prouver la faisabilité d'une telle vanne, et d'en explorer les possibilités et difficultés, un premier prototype a été réalisé.

1. Perméation de l'oxygène

Le phénomène de diffusion des gaz à travers les métaux est précédé d'une dissolution à l'interface sous haute pression. Lorsque l'interface basse pression présente une solution saturée, le gaz est restitué par celle-ci. La diffusion des gaz suit d'autre part les lois suivantes:

- Dans un mélange de gaz, si un seul d'entre eux peut diffuser, il le fait comme s'il était seul.
- Elle s'opère suivant la loi de Fick suivant la relation :

$$\Pi(T) = a\sqrt{pT}e^{-b/T} \quad (6.1.1.)$$

où T est la température, p la pression, et Π le coefficient de perméabilité.

-En pratique [2] on peut négliger le terme en \sqrt{T} dans la formule ci-dessus. Pour la diffusion de l'oxygène à travers l'argent, on obtient:

$$Q = \frac{\sqrt{pS}}{e} a.e^{-227.10^3/T} \quad (6.1.2)$$

où S est la surface de la paroi, e son épaisseur, T la température en K. a est un coefficient numérique. La diffusion de l'oxygène est donc proportionnelle au rapport $\frac{S}{e}$. La diffusion de l'oxygène dans l'argent n'est pas une diffusion au sens habituel du terme (ce n'est pas une diffusion où les molécules d'oxygène subissent des chocs successifs sur les atomes d'argent). Il s'agit d'une diffusion par réaction chimique, et la valeur de 22700 correspond à l'enthalpie de réaction.

2. Choix du dispositif

La vanne doit répondre aux contraintes suivantes :

-Tout d'abord, elle doit être compatible avec la technologie ultra-haut-vide (UHV): L'étanchéité à l'hélium (et aux gaz autres que l'oxygène) doit être telle que les fuites ne soient pas mesurables avec le spectromètre de masse, soit $< 2.10^{-10}$ mbar.l.s⁻¹, que la paroi soit froide ou chaude.

-La compatibilité avec l'UHV impose que les matériaux en contact avec le vide aient une faible pression de vapeur saturante (c'est-à-dire inférieure à environ 10^{-11} torr), sinon on polluerait irrémédiablement le bâti. Ceci interdit la plupart des brasures qui pourraient être utilisées pour souder la paroi d'argent au reste du bâti.

-La compatibilité UHV interdit des géométries qui seraient difficiles à pomper (espaces presque fermés, longs tuyaux).

-La paroi doit pouvoir résister à la pression atmosphérique, et en même temps être assez mince pour que l'oxygène entre en quantité suffisante.

-On veut pouvoir chauffer la paroi d'argent, mesurer sa température et la contrôler.

-Il faut que l'ensemble résiste à une utilisation répétée.

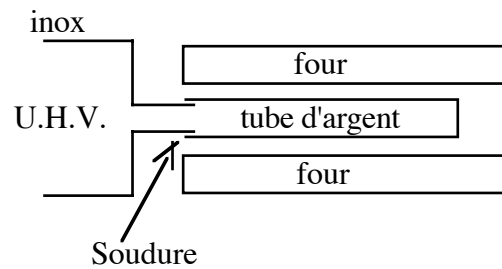
-La géométrie de la paroi d'argent doit être choisie de préférence en fonction de l'argent disponible dans le commerce. On a alors le choix entre feuilles et tubes.

Dans le cas d'une membrane circulaire (choix de la feuille), la résistance de la paroi à la pression est proportionnelle à $\frac{\sqrt{S}}{e}$, alors que le débit est proportionnel à $\frac{S}{e}$, ce qui signifie que si l'on fixe par choix une certaine résistance à la pression, le débit d'oxygène que l'on obtient est proportionnel à \sqrt{S} .

Dans le cas d'un tube de longueur L, et de diamètre d, la résistance de la paroi est proportionnelle à $\frac{d}{e}$, et le débit est proportionnel à $\frac{Ld}{e}$. Pour une résistance à la pression fixée, le débit obtenu est proportionnel à L, donc à S. Cette géométrie est plus intéressante en termes de surface utilisée. Ce cas correspond aussi à celui d'une membrane qui recouvrirait une fente de longueur L et de largeur d.

Le problème qui se pose aussi est celui de l'étanchéité entre paroi d'argent et paroi du bâti. On voit que sur ce point, on a intérêt à avoir un bord de paroi le moins long possible. D'autre part, une géométrie circulaire peut faciliter les choses. Dans le cas de la membrane circulaire, la longueur du bord pour une résistance donnée est proportionnelle au débit, alors qu'elle est indépendante du débit dans le cas d'un tube. Le choix se porte donc sur une géométrie en tube. Le tube choisi est un tube de 5 mm de diamètre extérieur et de 0.25 mm d'épaisseur de paroi (tube 4,5x5) à un coût d'environ 1000 FF par mètre.

Figure 6.2.1: schéma de principe du dispositif. Le tube d'argent est soudé sur le bâti U.H.V., et placé dans un four.



La figure 6.2.1. montre le schéma de principe du dispositif d'introduction d'oxygène, et souligne les deux difficultés qui seront l'objet des deux paragraphes suivants : la réalisation du four et la soudure avec le bâti.

3. Soudure argent-inox par magnétoformage

La soudure par une brasure classique n'est pas possible pour l'UHV, du fait de la présence d'éléments trop volatils dans la brasure. Par ailleurs, le corps du bâti est en acier inoxydable ("inox"), et la technique de soudure TIG (c'est-à-dire soudure par arc électrique sous gaz inerte) de l'inox sur lui-même est très bien maîtrisée, alors que l'on ne maîtrise pas la soudure de qualité UHV de l'inox sur d'autres matériaux, par exemple sur le cuivre. On souhaite donc réaliser une soudure du tube d'argent sur un tube d'inox. Pour fermer l'autre bout du tube, la soudure de l'argent sur lui-même après pincement du tube est aisée, et fournit facilement la qualité UHV.

Différentes techniques ont été essayées, et sont présentées en annexe A.5. On a conclu de premiers essais qu'il fallait absolument que la soudure soit refroidie.

Une méthode de soudure radicalement différente des méthodes présentées en annexe a finalement été adoptée : le magnétoformage. Cette méthode n'est adaptée qu'aux géométries de révolution. Son principe (figure 6.3.1.) est de bobiner un bon conducteur (par exemple un fil de cuivre) autour de la région à souder, après l'avoir préalablement enserrée dans un morceau de tube épais, bon conducteur et malléable (ici du cuivre recuit) appelé "propulseur". On décharge alors brutalement dans cette bobine un condensateur de forte capacité. Les courants de Foucault induits dans le propulseur, et le champ créé dans la bobine provoquent une très forte répulsion entre le propulseur et la bobine (loi de Lenz). Cette force déforme brutalement le propulseur et le rétrécit violemment sur la zone à souder. Accessoirement,

cette force volatilise du même coup la bobine (ce n'est pas obligatoire, des techniques existent où celle-ci est réutilisable).

Des tentatives préliminaires ont été effectuées où un tube d'inox était simplement emmanché dans le tube d'argent, puis où le tout était glissé dans le propulseur. De cette manière, aucune soudure étanche n'a été réussie. On obtient cependant de bonnes liaisons mécaniques, mais si on réalise une coupe longitudinale de ces liaisons, toutes les pièces se séparent, ce qui montre que les différents matériaux sont seulement serrés les uns sur les autres, mais sans aucun "collage". L'argent étant un matériau assez "mou", il pourrait servir de "joint" dans ce procédé, par exemple par l'adjonction d'un bord usiné coupant autour du tube d'inox. Cette possibilité serait intéressante à explorer. (moitié basse de la figure 6.3.1.)

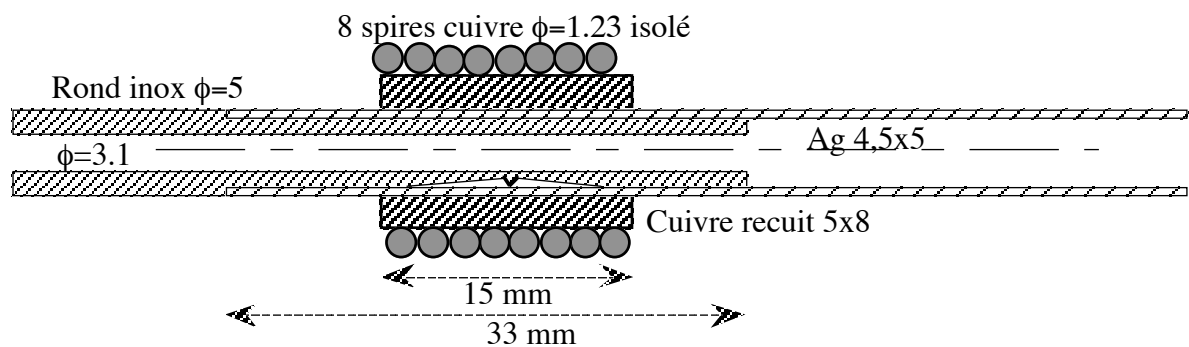


Figure 6.3.1 : Moitié haute: obtention par magnétoformage d'une liaison mécanique. La tension de l'impulsion est de 5.5 V. Moitié basse : une possibilité non explorée de liaison étanche en se servant de l'argent comme joint (on a usiné un "couteau" circulaire autour du rond d'inox).

Une méthode pour obliger les matériaux à se coller les uns aux autres est de créer un déplacement pendant le magnétoformage (figure 6.3.2). Un usinage conique de la pièce en inox, avec un angle de l'ordre d'une dizaine de degrés peut créer un tel déplacement.

Ce déplacement provoque une soudure des matériaux. C'est cette technique qui a été retenue (figure 6.3.3). La soudure obtenue est étanche, a bel aspect, et enfin, la liaison mécanique avec le propulseur permet de souder facilement un radiateur pour éviter que la soudure ne chauffe.

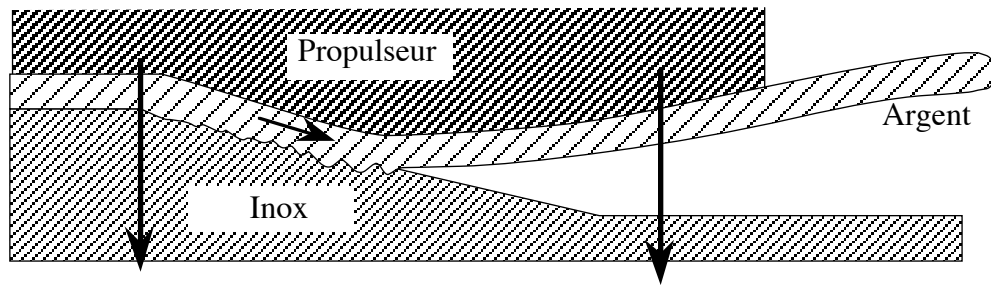


Figure 6.3.2 : Obtention d'un déplacement par un usinage conique de l'inox. Le mouvement vertical du propulseur a une composante parallèle à la surface du cône (voir texte).

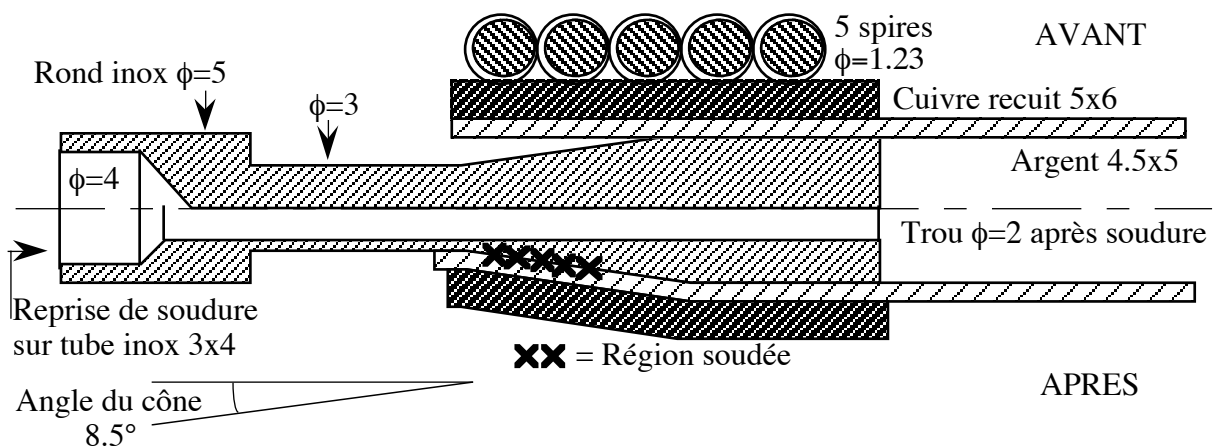


Figure 6.3.3 : Solution retenue. En haut : avant l'opération. En bas : après. La zone soudée se trouve dans la partie fine du cône. Le trou $\phi=2$ est percé après la soudure, car lorsqu'on le fait avant il se trouve partiellement obturé par les déformations dues à la soudure. La soudure résiste à l'usinage. La tension de charge du condensateur est de 10V.

Essayons d'analyser un peu la soudure ainsi obtenue. On peut l'observer de deux manières :

- En essayant d'arracher le tube d'argent après en avoir découpé une bande longitudinale (technique d'épluchage) : il n'y a pas collage sur la partie la plus large du cône. Puis, progressivement, l'épluchage devient difficile, voire presque impossible (l'argent se déchire plutôt que de se décoller). On peut ensuite observer ce qui reste au microscope électronique (figure 6.3.4 : photo de droite). La partie droite est une vue avec les électrons rétrodiffusés. L'argent apparaît en clair et l'inox en sombre. On observe des rides régulières perpendiculaires au déplacement (le déplacement a eu lieu parallèlement à l'axe du cône). L'argent est surtout resté accroché sur les sommets des rides.

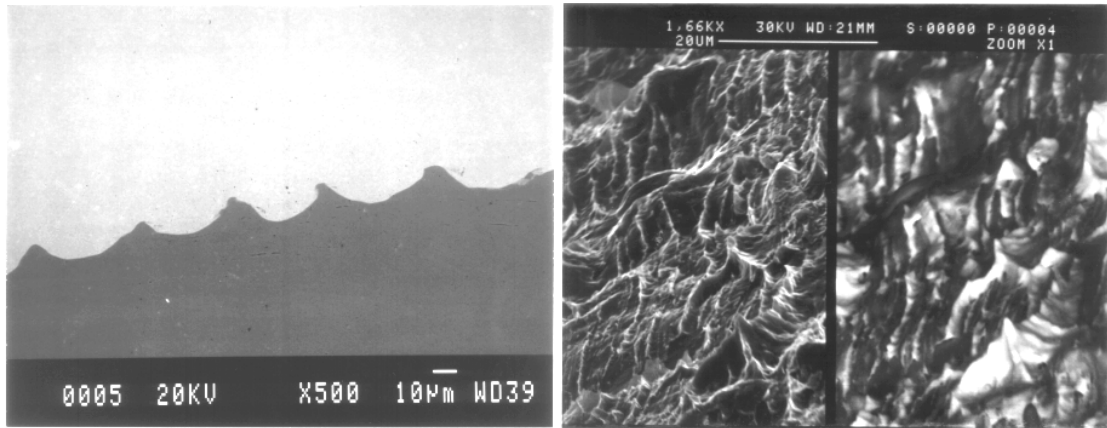


Figure 6.3.4 : Photographies de la soudure. A droite : vue au microscope électronique avec les électrons rétrodiffusés. A gauche : vue au microscope électronique à balayage après coupe longitudinale et polissage.

-Au microscope électronique à balayage après coupe longitudinale et polissage (figure 6.3.4, photo de gauche) , on observe que dans la zone soudée, l'inox présente un relief de vagues successives et régulières, un peu à la manière des rides que les courants marins dessinent sur le sable. La longueur d'onde est de $30\ \mu\text{m}$ environ et l'amplitude est d'une dizaine de μm . Par endroits, on observe des zones mixtes argent-inox au niveau des sommets des vagues. Une analyse plus fine de ces régions montre qu'il ne s'agit pas du tout d'un alliage, mais simplement de billes d'inox de tailles de l'ordre du micron réparties dans une matrice d'argent. A l'analyse, il n'y a pas de trace mesurable d'argent dans ces billes d'inox, et réciproquement. Il faut noter que les endroits où ces zones mixtes sont les plus nombreuses (dans la partie fine du cône) ne sont pas celles où l'épluchage est le plus difficile. A l'épluchage, les zones qui semblent les mieux soudées sont celles où les vagues ont le plus d'amplitude.

Après la soudure et après avoir réalisé le trou dans la pièce d'inox (voir figure 6.3.3.), on soude à l'étain un radiateur en cuivre qui permettra d'éviter que la soudure soit chauffée.

4. Mise au point du four.

L'argent étant un excellent conducteur de chaleur, on pourrait penser a priori qu'il suffit de chauffer un point du tube d'argent pour que l'ensemble soit à une température à peu près uniforme. Des essais préliminaires ont montré qu'il n'en était rien et que la très faible épaisseur de l'argent, associée au fait que la paroi est refroidie par l'air ambiant, font qu'il est

nécessaire de chauffer l'ensemble uniformément. En effet, dans le premier montage d'essai, 30 mm de tube d'argent étaient placés au bout de 100 mm de tube d'inox 3.6x4, et le tube d'argent était chauffé par une résistance placée à son extrémité. Lorsque la température à l'extrémité était de l'ordre de 600 °C, la chute de température dans le tube d'argent était de l'ordre de 150 °C par cm. Il a donc été nécessaire de concevoir un four adapté.

4.1. Quel four veut-on?

Il faut dans un premier temps définir les contraintes qui s'imposent pour les caractéristiques du four :

- La température de fonctionnement du four doit pouvoir porter l'argent à une température suffisamment élevée, de l'ordre de 600 °C à 700 °C. Une température de l'argent plus élevée peut poser problème, d'une part parce qu'il faut absolument que le tube résiste à la pression atmosphérique, et surtout parce qu'au-delà de 800 °C l'argent s'évapore théoriquement à un rythme qui limiterait la durée de vie du dispositif;

- Lors d'un essai où le dispositif de chauffage était fixé sur le tube, on a pu constater la fragilité de celui-ci dès que sa température s'élève : dès environ 500 °C le tube a commencé à plier sous le poids, et une fuite est apparue au niveau du pli. Ceci souligne la nécessité absolue que le four dispose d'un maintien mécanique autonome;

- On veut pouvoir contrôler la température du tube d'argent, et ceci implique que le four réagisse dans un temps caractéristique suffisamment faible (au plus quelques minutes);

- Le fonctionnement du four doit pouvoir se faire sans détérioration en présence d'oxygène;

- La température doit être uniforme à quelques degrés près sur plusieurs centimètres.

4.2. Conception du four.

Le four est constitué de :

- Une paroi interne,
- Une résistance chauffante,
- Une paroi extérieure,
- Un maintien mécanique.

Pour fabriquer les parois du four, il faut un matériau qui a une bonne tenue à haute température et sous oxygène. Dans ce rôle, on a choisi des tubes de Quartz directement disponibles dans le commerce. La paroi interne doit contenir le tube d'argent 4.5x5, et on a choisi un tube de Quartz 6x8.

Pour le choix de la résistance, l'impératif est que celle-ci soit répartie uniformément le long du four : le quartz ne peut remplir un rôle d'uniformisation de la chaleur, car il est très mauvais conducteur de celle-ci. Une idée est donc de bobiner uniformément une résistance autour du tube de quartz qui sert de paroi interne. Nous avons utilisé un fil de thermocoax (où la résistance se trouve dans une gaine) car on peut alors faire un bobinage à spires jointives sans se poser de question. On a donc choisi de bobiner 2 m de thermocoax de 1 mm de diamètre autour du tube de Quartz de 6x8. Sa résistance est de 26 Ω .

Pour la paroi extérieure, nous avons opté pour un tube de Quartz 12x15. Sa faible conductivité thermique servira d'une part à conserver des points d'attache assez froids, et d'autre part à limiter les pertes, et donc la puissance nécessaire pour atteindre la température souhaitée. Un problème se pose tout de même : il faut réaliser une liaison mécanique entre cette paroi et le bobinage. Or, si le quartz a une très bonne tenue en température, en revanche il ne se dilate pratiquement pas, et il est très fragile. Ainsi, des contraintes dues à des différences de dilatation peuvent le briser. Il faut donc réaliser cette liaison mécanique sans que la dilatation inévitable de la résistance fasse éclater le tube de quartz. Pour cela, on a choisi la solution de coincer une couche de laine de quartz entre la bobine et la paroi extérieure. Cette couche réalise une liaison mécanique par frottements car elle est coincée. D'autre part, elle peut se déformer et absorber la différence de dilatation. Elle a en plus l'intérêt d'isoler thermiquement l'extérieur et l'intérieur du four.

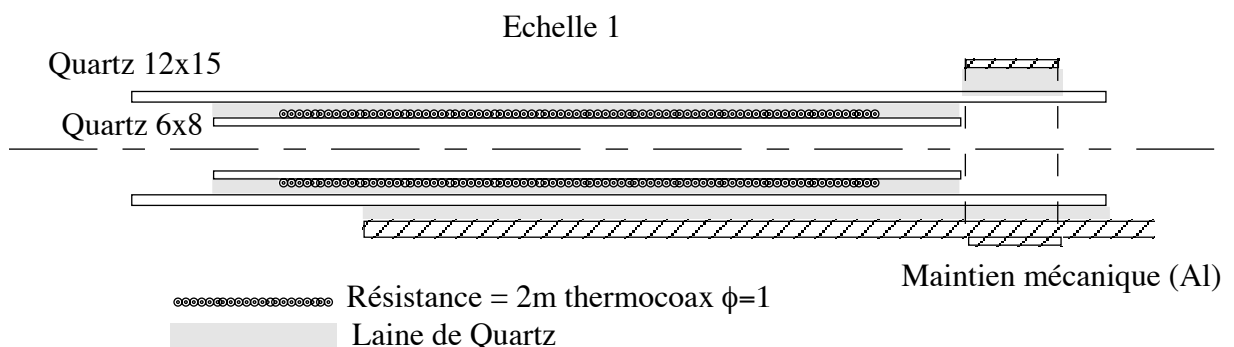


Figure 6.4.1 : Schéma du four à l'échelle 1 (voir texte): la longueur extérieure du tube de quartz est de 130 mm.

Enfin, le maintien mécanique est assuré par une cornière en aluminium. La liaison mécanique entre aluminium et quartz est réalisée par coinçage de laine de quartz, toujours pour des raisons de dilatation.

4.3. Caractéristiques du four.

Nous avons mesuré le temps de montée en température. Lorsqu'on modifie brutalement la tension, la température du four va rejoindre la température d'équilibre suivant une loi expérimentalement très proche d'une exponentielle (figure 6.4.3). On peut alors parler d'une constante de temps caractéristique des variations de la température du four (tableau figure 6.4.2). Lorsque le four est vide, les constantes de temps qui caractérisent la montée en température sont d'environ 1 minute, et de l'ordre de cinq minutes pour le refroidissement. En présence du tube d'argent, le refroidissement est plus rapide. En particulier, il faut une trentaine de secondes pour passer d'une température supérieure à 600 °C, où le phénomène de perméation se produit, à moins de 400 °C où il devient négligeable. Les constantes de temps sont donc suffisamment courtes pour que l'on puisse contrôler en temps réel. Cette facilité d'emploi et cette rapidité ont permis des opérations comme des recuits, ou comme la soudure de l'emplacement du thermomètre (paragraphe suivant).

Pour un fonctionnement à vide vers 600 °C, on obtient une température constante à 10° près sur environ 4 cm, et à 3 ° près sur environ 2 cm. (figure 6.4.4).

	montée	descente
Four seul	de 23°C à 700°C 1 mn 15 s	de 700°C à 23°C 5 mn 40 s
Four + Argent	de 28°C à 605°C 1 mn 45 s	de 605°C à 28°C 4 mn 05 s

Figure 6.4.2 : Constantes de temps du four vide, et température d'équilibre en fonction de la puissance fournie pour une température extérieure de 23 °C (four seul) et de 28°C (avec argent). La tension d'alimentation est d'environ 45 V.

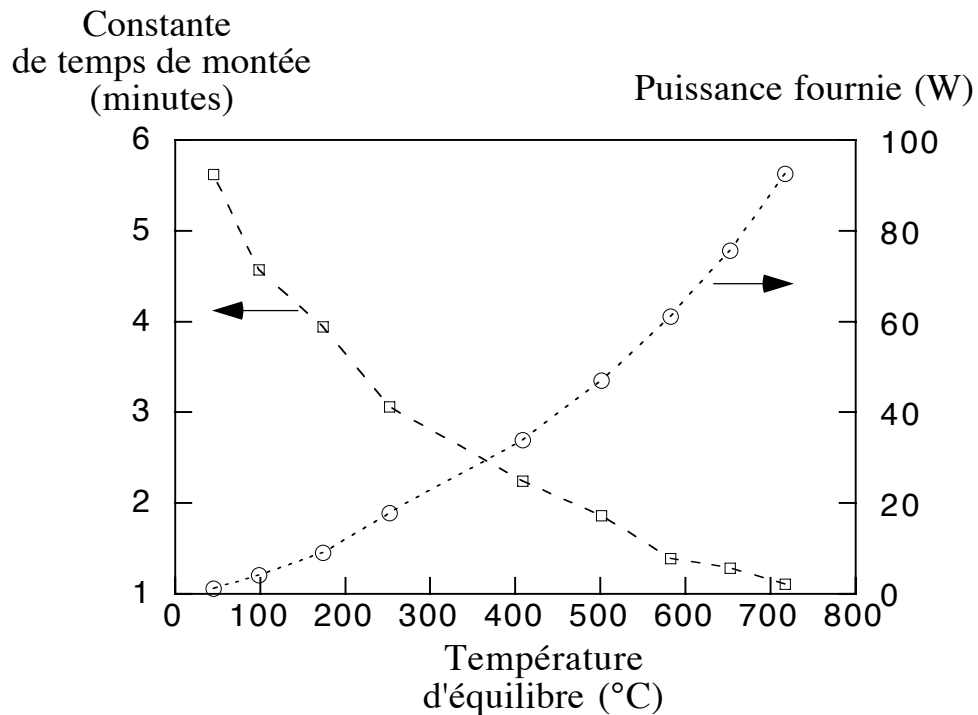


Figure 6.4.3 : puissance fournie en fonction de la température d'équilibre du four vide. On a représenté aussi la constante de temps caractérisant la vitesse de montée en température.

Lors d'un fonctionnement à l'équilibre de l'ensemble du dispositif dans les conditions du schéma 6.4.4., on mesure des températures de l'ordre de 60 à 70 °C en différents points du radiateur, de 90 °C dans l'inox au niveau de la soudure, et des températures d'environ 150 °C au niveau de la cornière de maintien. La température extérieure du tube de quartz est variable : de 30 °C aux extrémités jusqu'à tout de même 360 °C au niveau de la zone chaude. Enfin, lors de prochains essais, il faudra faire en sorte que le tube d'argent soit plus long, et remplisse mieux la zone chaude du four.

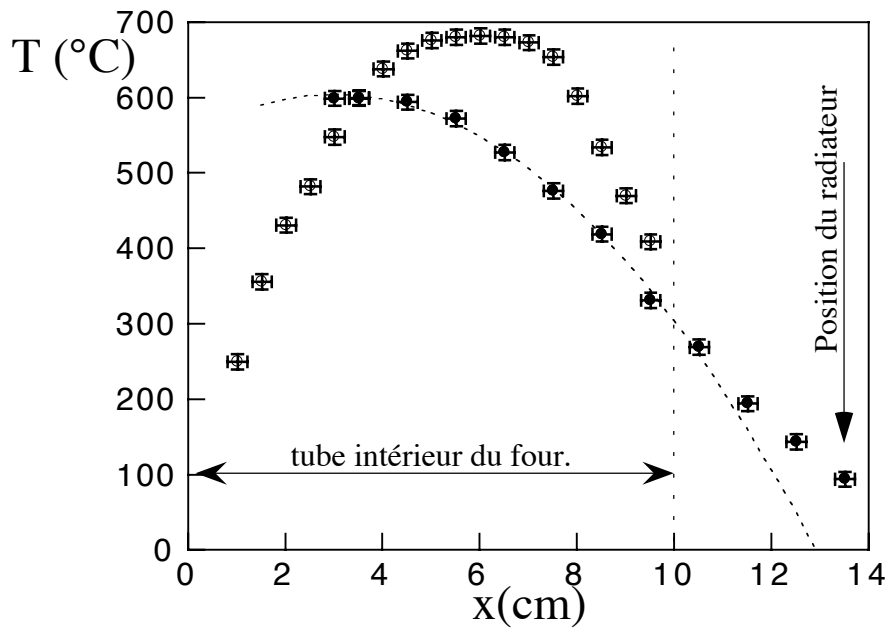


Figure 6.4.4 : Les ronds vides représentent la température à l'intérieur du four, pour un fonctionnement à vide. Les ronds pleins représentent la température du tube d'argent une fois installé. Les tensions d'alimentation du four sont de 45V dans les deux cas. La température de l'argent à l'intérieur du four suit une loi parabolique avec un maximum à l'extrémité du tube (dérivée nulle), ce qui signifie que l'argent reçoit une puissance constante par unité de longueur à l'intérieur du four. Ce n'est pas la situation optimale où la température de l'argent serait constante sur une large plage. Le thermomètre est placé à environ 1 cm de l'extrémité du tube.

4.4. Mesure de la température du tube d'argent.

Les températures du tube d'argent ont été mesurées à l'aide d'un thermocouple glissé à l'intérieur du tube d'argent. On espère ainsi qu'en chaque point, le tube constitue un "four" qui maintient l'extrémité du thermocouple à la température de l'argent. Malheureusement, une fois le dispositif monté sur le bâti UHV, il faudrait faire un passage spécial pour mettre le thermocouple dans l'UHV. Une autre solution est de loin préférable : mesurer la température à l'extérieur du tube. Le problème est alors que si on glisse un thermomètre entre l'argent et la paroi interne du four, celui-ci n'indique pas la température de l'argent, mais une température comprise entre celle du four et celle de l'argent, et on obtient facilement des écarts de plus de 100 °C selon que l'extrémité du thermocouple touche l'argent ou le quartz.

On a alors l'idée d'emprisonner le thermocouple dans une petite cage collée au tube d'argent et thermalisée à celui-ci. La question est : comment réaliser une liaison correcte entre cette cage et le tube d'argent ?

En effet, on peut facilement construire une petite cage à partir d'une petite plaque de métal qu'on collerait sur le tube d'argent. En récupérant un petit morceau d'argent résidu d'un essai précédent, en le recuisant (dans notre four à 700 °C environ) puis en le façonnant, on obtient une petite plaque de métal, prévue juste pour laisser place au thermocouple, et qu'il reste à souder sur le tube. On ne peut évidemment pas utiliser la technique de soudure bord-à-bord de l'argent sur lui-même. La technique employée ici s'approche d'une technique de fritté (photographies 6.4.5.). Il s'agit d'un collage par laque d'argent. Le principe est le suivant : la laque d'argent est constituée de particules dont la taille avoisine le micron, additionnées d'un solvant. On commence par déposer une goutte de laque sur la surface à coller. On assure ensuite un bon contact mécanique entre les pièces à coller, par exemple en les enserrant dans du fil d'inox (que l'on pourra enlever après l'opération). On met ensuite le tout dans le four, d'abord quelques instants autour de 200 °C pour sécher correctement la laque (évaporation du solvant), puis à 820 °C pendant environ 20 mn. Il ne faut pas trop serrer le fil, car l'argent se dilate beaucoup au cours de l'opération, et l'oxydation de l'inox peut alors laisser de vilaines traces noires. Les particules d'argent de la laque s'agglutinent entre elles et forment un excellent lien mécanique.

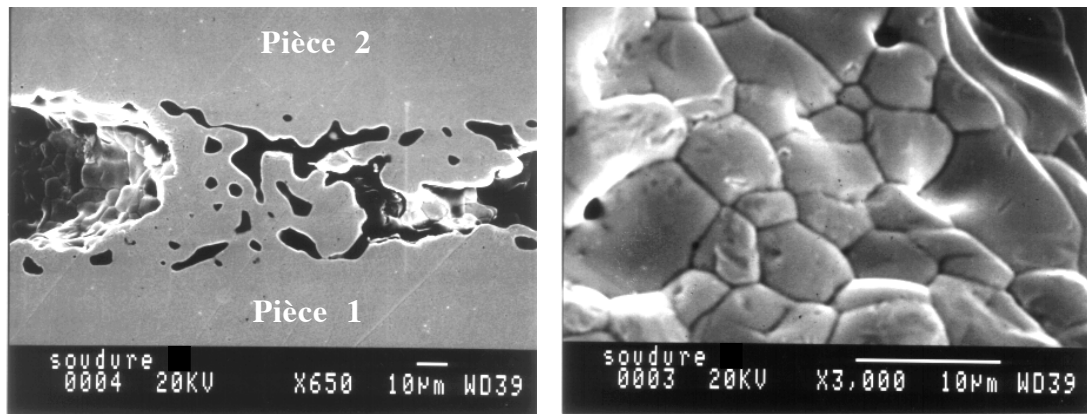


Figure 6.4.5 : Photographies au microscope électronique de la soudure par laque d'argent, après polissage. A gauche, on peut voir que les particules de la laque se sont rassemblées en des sortes de filaments qui constituent des ponts entre les pièces à souder . A droite, on peut voir que les particules qui constituaient la laque ont été soudées entre elles.

5. Résultats

5.1. Mesure des débits d'oxygène

5.1.1. Mesures en dynamique dans le sas.

On vérifie à l'aide d'un spectromètre de masse que le système permet bien d'introduire de l'oxygène pur. Dans un premier temps, on cherche à estimer la quantité et la qualité de l'oxygène entrant par le dispositif, en mesurant la pression d'équilibre en présence d'un pompage continu. La méconnaissance des caractéristiques exactes des pompes et des jauges en fait une méthode relativement imprécise. A l'aide d'un spectromètre de masse quadrupolaire, de marque Balzers [3] avec un filament de tungstène, nous avons pu analyser qualitativement les gaz. On a d'abord fait fonctionner le système en pompant en continu avec une pompe turbo Varian V60, dans le sas du bâti UHV. On fait le choix d'essais sur le sas pour de nombreuses raisons : d'abord, le choix d'un petit volume facilite la mesure, ensuite le fait que les parois du sas soient inactives nous évite d'avoir à prendre en compte les bilans des échanges avec celles-ci. Enfin, comme nous ne sommes pas encore très sûr de la qualité de la

soudure, et de la résistance mécanique de l'argent, ceci permet d'éviter un accident dans l'enceinte UHV. On obtient le relevé suivant (figure 6.5.1) de pression totale en fonction de la température du tube d'argent (Jauge Penning, dont la sensibilité vaut 1 pour l'oxygène).

Dans ce relevé, on peut voir que la pression augmente dans le sas lorsque l'argent est chauffé. De plus, la variation observée de la pression est proportionnelle à la hauteur du pic d'oxygène $m=32$ lue sur le spectromètre de masse (seuls les pics 32 et 16, dus à l'oxygène ont une hauteur importante). Le constructeur n'indique pas la puissance de pompage de la pompe turbo pour l'oxygène, mais il indique en revanche une puissance constante de 10^{-7} à 10^{-3} mbar pour H_2 (45 l/s), He (55 l/s), N_2 (65 l/s). Ainsi, on peut estimer que la puissance de pompage est probablement constante pour l'oxygène. En ce cas, l'augmentation de pression mesurée est proportionnelle au débit de l'oxygène à travers l'argent. On obtient une loi de la forme attendue, c'est-à-dire une loi d'activation thermique. Mais on obtient une énergie d'activation correspondant à une température d'environ 11500 K, soit presque exactement la moitié de ce qui est donné dans la littérature, c'est-à-dire 22700 K [4], et entre 21 800 K et 25300 K [2,5-6].

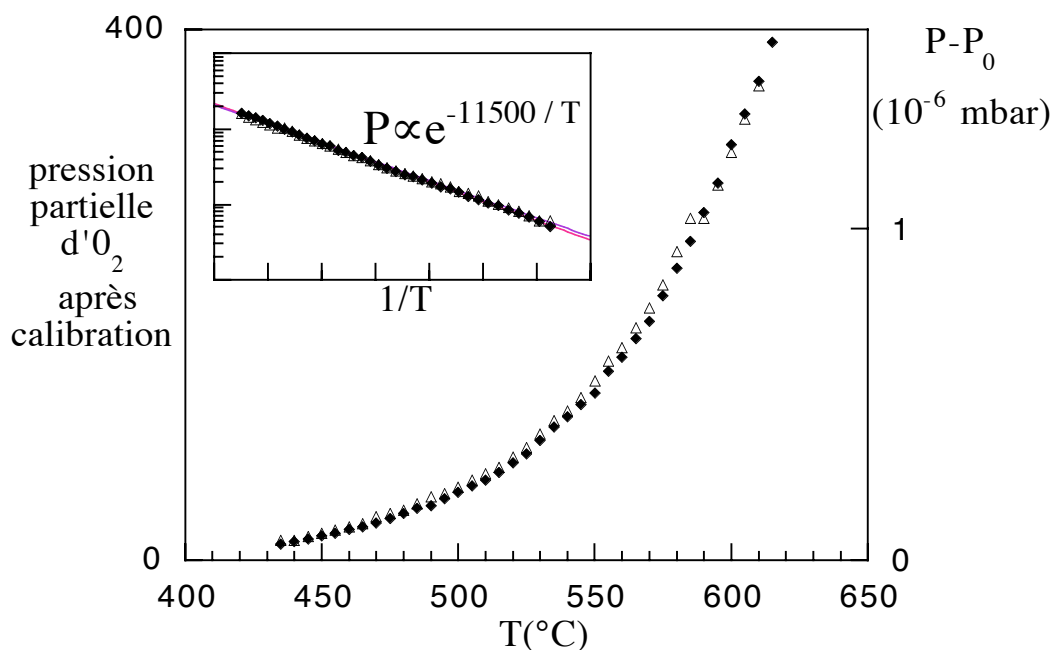


Figure 6.5.1 : Les triangles noirs (échelle de droite) représentent la pression lue sur la jauge en fonction de la température du tube d'argent. La pression à froid de $0.2 \cdot 10^{-6} \text{ mbar}$ a été retranchée. La hauteur du pic d'oxygène lue sur le spectromètre de masse est proportionnelle à cette différence de pression. Le facteur qui intervient dans l'exponentielle est presque exactement la moitié de celui qui était attendu .

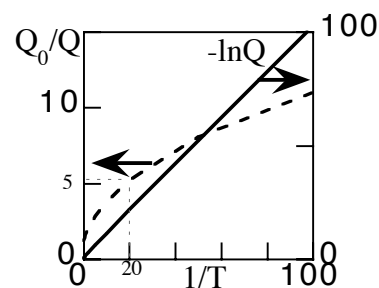
Cette différence ne peut pas être expliquée par le fait que la température du tube n'est pas uniforme. En effet, si on modélise dans le tube d'argent un profil de température de la forme : $T_0(1 - x^2/L^2)$ (ce qui est raisonnable sachant que de toute façon, la plus grande contribution vient de la partie chaude), le débit est :

$$Q \propto \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{1-x^2} \frac{1}{T}\right) dx \quad (6.5.1.)$$

(T renormalisé en unités d'énergie d'activation).

En notant que $-\ln Q_0 = 1/T$, si la température était uniforme, on peut alors comparer $-\ln Q$ et $1/T$. On remarque alors que la pente de $-\ln Q$ en fonction de $1/T$ n'est pas visiblement modifiée. Par contre, on peut estimer que la non-uniformité de la température pour des rapports de $1/T$ de l'ordre de 20 fait perdre un facteur environ 5 dans la quantité d'oxygène transmis (en pointillés sur la figure 6.6.2).

Figure 6.5.2 : Rapport Q_0/Q entre les débits pour une température constante du tube, et pour un profil parabolique de température. La pente de courbe $-\ln Q$ en fonction de $1/T$ est la même que celle de $-\ln Q_0$.



5.1.2. Mesures dans la chambre UHV.

Des mesures ont été faites en présence d'un pompage continu (par la pompe ionique) directement dans le bâti, afin d'avoir un excellent vide résiduel et de pouvoir déceler

éventuellement l'entrée d'autres gaz. Dans le vide résiduel, on mesure des traces d'hydrogène, de vapeur d'eau, et d'oxydes de carbone. On obtient ainsi des mesures avec un pompage différent des quantités d'oxygène entrant.

On observe aussi une légère augmentation avec la température des quantités d'autres gaz présents dans le bâti, et à 620 °C on a triplé la quantité de CO₂ résiduel présent dans le bâti. La pression résiduelle est de 3.10^{-9} torr (essentiellement de l'hydrogène) avant l'expérience. L'énergie obtenue d'activation est à peu près la même (11400 K).

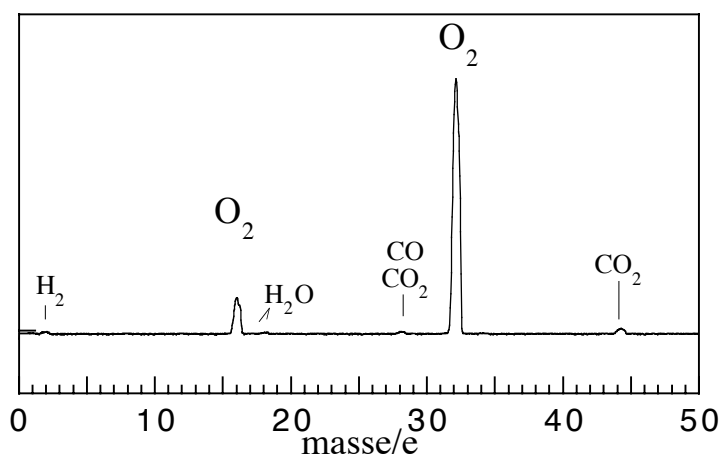


Figure 6.5.3 : Mesure du vide lorsque le tube d'argent est chauffé à 620°C. Le pompage continu assure un vide de $8.2 \cdot 10^{-8}$ torr, essentiellement de l'oxygène.

La présence d'oxydes de carbone semble liée à celle de l'oxygène (figure 6.5.4.). La pression dans le bâti atteint $8.2 \cdot 10^{-8}$ torr à 620 °C, contre une variation de pression de $1.6 \cdot 10^{-6}$ mbar avec la pompe turbo. On en déduit au passage que la puissance de pompage de la pompe ionique est environ 15 fois plus élevée que la turbopompe (pour ce débit d'oxygène).

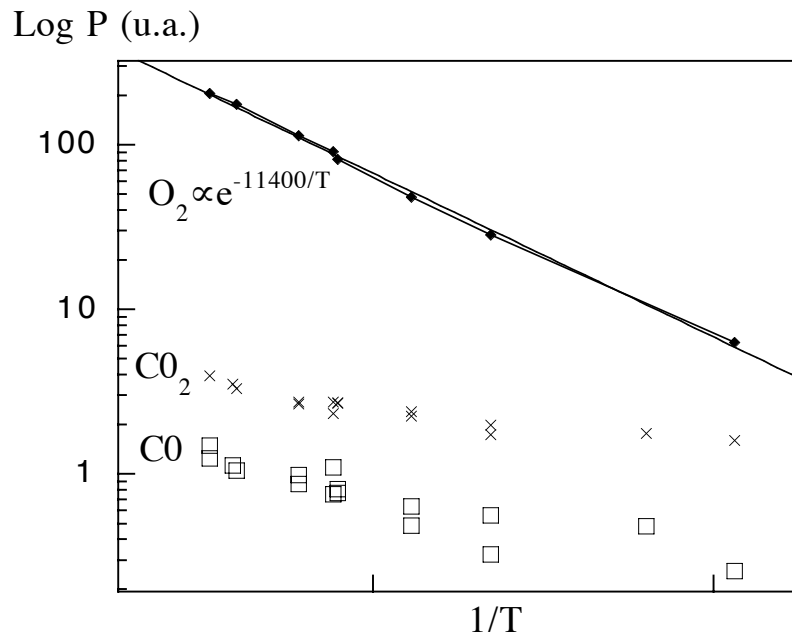


Figure 6.5.4: Les logarithmes des quantités des gaz présents dans le bâti sont portés en fonction de l'inverse de la température de l'argent (en K). On remarque une faible augmentation des quantités d'oxydes de carbone. Nous verrons que ces oxydes ne viennent probablement pas de la vanne argent, mais plus probablement des filaments, ou des parois.

5.1.3. Mesures en statique.

Des mesures sans pompage ont été réalisées ensuite, dans le cadre d'essais pour oxyder une couche d'aluminium. On commence par faire une évaporation d'aluminium "frais", ce qui nous met dans les conditions d'une oxydation. Nous allons voir que cette évaporation fait que les parois sont très actives et pompent abondamment de l'oxygène. On chauffe le tube d'argent à une température de 620 °C (48 V). On relève ensuite la pression totale en fonction du temps, et les pressions partielles des différents gaz.

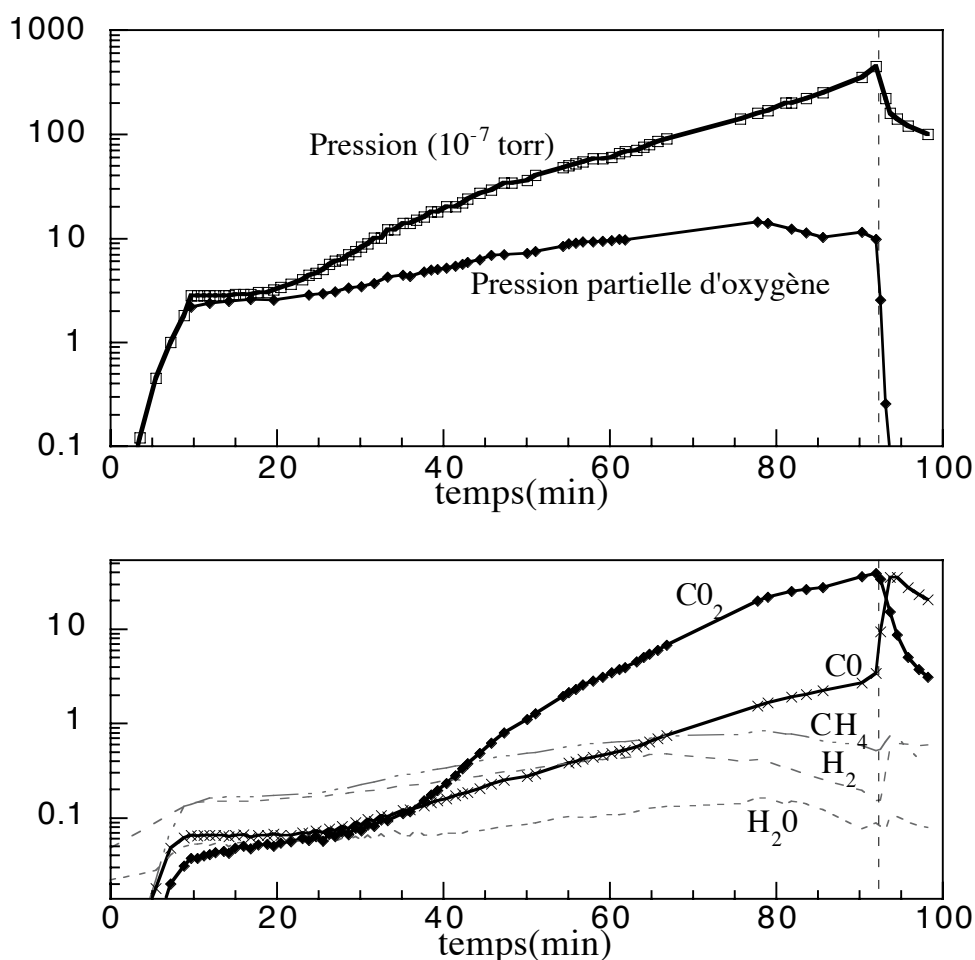


Figure 6.5.5 : Mesure de la composition du vide en fonction du temps lorsque de l'oxygène entre de manière continue (620 °C). L'apport d'oxygène est coupé au bout de 90 mn (pointillés). En haut, la hauteur du pic d'oxygène est représentée dans des unités arbitraires, et la pression présente en particulier un plateau pendant les vingt premières minutes autour de $p=2 \cdot 10^{-7}$ torr. En bas, l'évolution des quantités d'autres gaz présents dans le bâti, dans des unités arbitraires.

Lorsque l'oxygène commence à entrer, on remarque que la quantité de la plupart des autres gaz présents augmente très légèrement. Ensuite, pendant environ un quart d'heure, la pression totale reste constante à $2 \cdot 10^{-7}$ torr (environ) et le vide reste composé presque uniquement d'oxygène. Pendant cette phase, tout le gaz entrant est pompé par les parois. Puis, à la fin de cette période, la pression et la quantité d'oxygène augmentent très rapidement. Lorsque la pression atteint environ 10^{-6} torr, les quantités d'oxydes de carbone augmentent brutalement. Une demi-heure plus tard, la pression atteint 10^{-5} torr environ, et la quantité d'oxygène présent dans le bâti se stabilise, voire diminue légèrement, pendant que les pressions partielles des oxydes de carbone augmentent fortement. Au bout d'une heure et

demie, les gaz résiduels sont composés essentiellement de dioxyde de carbone, le monoxyde de carbone restant à une quantité relativement plus faible. Lorsque la pression atteint environ $5 \cdot 10^{-5}$ torr, c'est-à-dire au bout d'une heure et demi, on stoppe l'entrée d'oxygène, et on observe alors d'une part une disparition très brutale de la totalité de l'oxygène présent. En même temps, on observe une chute brutale de la quantité de dioxyde de carbone présent, et son remplacement par du monoxyde de carbone. Il faut noter que dans certains cas, cette étape s'est produite avec augmentation de pression (quand il y avait peu d'oxygène présent juste avant l'arrêt). On observe alors une réaction chimique dont le bilan est du type : $\text{CO}_2 + \text{C} \rightarrow 2\text{CO}$. Ce comportement des oxydes de carbone semble étroitement lié à la présence des filaments en tungstène de la jauge d'une part, et du spectromètre de masse d'autre part. Si on les stoppe tous deux pendant quelques instants, on peut observer une augmentation momentanée de la quantité d'oxygène quand on les rallume. On est cependant bien obligé de les maintenir en marche si on veut mesurer quelque chose (et si on veut être sûr de ne pas les griller en les rallumant en présence de fortes pressions d'oxygène) !

Des mesures ont cependant pu être effectuées sans spectromètre ni jauge à ultra-vide, au moyen d'une jauge capacitive "baratron", qui donne une mesure absolue de la pression. sensible de 10^{-4} à 1 torr. Au bout de 220 minutes, la pression dans le bâti est de $6,3 \cdot 10^{-3}$ mbar. L'augmentation de pression est alors de $2,9 \cdot 10^{-3}$ mbar par heure. Lorsque l'on stoppe l'entrée d'oxygène, la pression se met à diminuer de $2,7 \cdot 10^{-3}$ mbar par heure, ce qui donne accès au pompage par les parois, et ainsi au débit de gaz : $\varphi_0 = 1,6 \cdot 10^{-6} V \text{ mbar/s}$, où V est le volume du bâti. Comme le volume V (mal connu) est d'environ 50 l, le débit est donc d'environ $8 \cdot 10^{-5}$ mbar l/s (à 620 °C). C'est exactement le résultat fourni par la pompe turbo si sa puissance de pompage est de 50 l/s.

5.2. La question de l'"étouffement du tube"

L'espace qui sépare le tube de la paroi intérieure du four est de 0,5 mm. Le tube d'argent chauffé transmet l'oxygène dans le bâti, mais pas l'azote. Si la convection est faible dans ce petit espace (pour des raisons géométriques) et si la diffusion de l'oxygène est insuffisante, on peut se trouver dans une situation où il n'y a plus que de l'azote au contact du tube, qui ne transmet alors plus rien à l'intérieur du bâti. Dans l'hypothèse "au pire", où la convection ne joue pas, un petit modèle simple donne : $\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Pi_0}{beD} \sqrt{P}$, où P est la pression partielle d'oxygène, D le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'air, Π_0 est la perméabilité de l'argent pour $P=1$; b l'épaisseur de l'espace qui entoure le tube d'argent, e l'épaisseur du tube

d'argent, et d son diamètre extérieur. On obtient deux régimes limites séparés par une valeur caractéristique de débit : $\varphi_1 = \frac{4}{3} D \frac{2\pi db}{L} P_0$. L est dans ce modèle la demi-longueur de tube chauffé. P_0 est la pression partielle de l'oxygène dans l'air.

-si $\varphi_0 \ll \varphi_1$, alors $\varphi_0 \approx \frac{2\pi dL}{e} \Pi_0 \sqrt{P_0}$. Il n'y a pas d'étouffement..

-si $\varphi_0 \gg \varphi_1$, alors $\varphi_0 \approx 2\pi d \sqrt{\frac{4}{3} \frac{bD}{e}} \sqrt{\Pi_0} (P_0)^{\frac{3}{4}}$. C'est le régime d'étouffement, où l'entrée de l'oxygène dans le bâti est limitée par sa diffusion dans l'air.

Dans le régime d'étouffement, l'entrée d'oxygène est proportionnelle à $\sqrt{\Pi_0}$, ce qui a pour conséquence de donner un facteur 1/2 dans l'énergie d'activation apparente. Il y a peu de chance que ce soit ceci qui explique l'écart le facteur 1/2 entre l'énergie d'activation observée et celle donnée dans la littérature (voir plus haut) car avec la géométrie ci dessus, $P_0=200$ mbar, $D(620^\circ\text{C})=3,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $L \approx 5$ cm et $2\pi db=7 \text{ mm}^2$, on obtient comme débit limite environ 10^{-3} mbar l/s, c'est-à-dire qu'il manque un facteur 10 pour atteindre le régime d'étouffement. De plus, le passage au régime d'étouffement n'a pas été observé, malgré les très faibles débits observés autour de 400° C .

5.3. L'oxydation de la couche d'aluminium.

5.3.1. Mesure de l'oxydation

On fait entrer l'oxygène dans le bâti après avoir effectué une évaporation d'aluminium. On veut savoir quelle quantité d'aluminium est oxydée. Pour cela, le cristal de quartz qui est utilisé pour mesurer les épaisseurs des couches peut être employé. La variation de fréquence suit une loi linéaire en fonction de l'épaisseur déposée. Pour une densité de matériau égale à 1, l'épaisseur déposée est de -1.275 Å/Hz . Une mesure grossière est donnée facilement par l'électronique de mesure habituelle (temps de mesure = 1 s) pour une densité de 2,4 et un tooling factor de 100 %. Comme les temps caractéristiques sont longs, il faut maintenir le quartz à une température constante pour limiter les dérives (par une circulation d'eau).

On peut obtenir une information beaucoup plus précise en utilisant un fréquencesmètre pour mesurer directement la fréquence du quartz, de l'ordre de 5 MHz, avec des temps de mesure plus longs.

La relation à appliquer est qu'une diminution de fréquence de 1 Hz correspond à $0,53 \text{ Å}$ d'aluminium oxydé. C'est aussi la précision maximum pour un temps de mesure de 1 s. Avec un temps de mesure de 10 s, la précision est dix fois plus grande.

Dans les minutes qui suivent la fin de l'évaporation de la couche fraîche d'aluminium, l'indication du quartz chute d'environ 5 Å (en épaisseur équivalente d'aluminium oxydé). Cette chute peut avoir pour cause un dégazage éventuel ou un refroidissement du cristal. Il convient d'attendre alors que l'indication soit stabilisée (environ une demi-heure). Cette attente pourrait nuire à la qualité de la jonction, et il faudrait la réduire, ou avoir un vide inférieur à environ 10^{-9} torr (il faut 20 minutes pour polluer une surface à cette pression). On introduit ensuite l'oxygène, et on observe une augmentation de la masse portée par le quartz. Lorsque l'on recommence à pomper, l'augmentation observée reste stable.

5.3.2. Collage des molécules d'oxygène sur les parois.

On souhaite estimer si le mécanisme mis en place est utilisable pour oxyder les couches d'aluminium. Au bout de 220 minutes, la pression est de $6,3 \cdot 10^{-3}$ mbar au lieu des $2,1 \cdot 10^{-2}$ mbar attendus à partir du débit du dispositif. Donc $1,5 \cdot 10^{-2}$ mbar ont été absorbés par les parois. Ce phénomène de pompage est plus important encore au début du processus, quand tout l'oxygène entrant est immédiatement pompé par les parois, interdisant à la pression de s'élever (phase en plateau le premier quart d'heure). Si φ_0 est le débit d'oxygène pompé par les parois à la pression p_0 . On cherche d'abord à déterminer qualitativement le nombre moyen de chocs n subi par une molécule d'oxygène avant de se "coller" sur une paroi.

Si les molécules se collaient immédiatement à la paroi, on aurait une puissance de pompage de $\frac{1}{4}sv_m$, s étant la surface et $v_m \approx 450$ m/s la vitesse moyenne des molécules. On obtient alors :

$$n \approx \frac{1}{4}Sv_m \frac{\varphi_0}{p_0} \quad (6.5.2.)$$

Pour voir si ce résultat est solide, on le confronte à d'autres estimations. En effet, il faut un temps $\frac{p_0}{\varphi_0} V$ pour vider le volume V , et on peut ainsi estimer à $v_m \frac{p_0}{\varphi_0} V$ la longueur parcourue par les molécules avant collage. Si l_m est la longueur moyenne qui sépare deux collisions sur les parois, on a :

$$n \approx \frac{V}{l_m} v_m \frac{p_0}{\varphi_0} \quad (6.5.3.)$$

Une source d'oxygène débite φ_0 sur 2π stéradians. Ainsi, une jauge placée à la distance d de cette source mesure une pression de l'ordre de $\frac{\varphi_0}{2\pi V_m d^2}$. Si les rebonds sur les parois sont assimilables à autant de sources réparties à une distance moyenne l_m de la jauge, on obtient finalement :

$$n \approx \frac{1}{4} s v_m \frac{\varphi_0}{p_0} \approx \frac{V}{l_m} v_m \frac{p_0}{\varphi_0} \approx 2\pi v_m \frac{p_0}{\varphi_0} l_m^2 \quad (6.5.4.)$$

On peut ajouter qu'à 620 °C, on avait observé que la pression était stabilisée aux alentours de $1,6 \cdot 10^{-6}$ mbar. On peut ainsi retrouver une relation entre la puissance de pompage de la pompe turbo et le volume du bâti. De même, on peut aussi estimer à combien correspond la puissance de pompage des parois, et la puissance de pompage de la pompe ionique ($8,2 \cdot 10^{-8}$ torr).

On vérifie alors à partir d'une estimation "raisonnable" du volume du bâti, que les autres valeurs obtenues sont elles aussi raisonnables. On aura ainsi une estimation à peu près correcte pour n dans la phase plateau à environ $2 \cdot 10^{-7}$ torr (Comme on cherche un résultat qualitatif, compte n'a pas été tenu du facteur 0,85 de sensibilité de la jauge à l'oxygène).

Dans l'hypothèse d'un volume $V=35$ l, on obtient : $l_m \approx 17$ cm; $S \approx 0,8$ m²; et une puissance de pompage de la pompe turbo de 35 l/s. Le débit est alors de $5,6 \cdot 10^{-5}$ mbar l/s. On a alors $n \approx 330$ chocs.

Les environ 300 chocs sont ici comptés sur l'ensemble de la surface du bâti.

Au bout de 220 minutes, dans le volume V du bâti $1,5 \cdot 10^{-2}$ mbar ont été absorbés par les parois, ce qui représente $6,0 \cdot 10^{-7}$ mol/l à 300 K. Dans le même temps, le quartz indique une augmentation de $8,5 \text{ \AA}$ (± 1) d'aluminium oxydé. Si cette indication est correcte, on a ainsi $6,4 \cdot 10^{-5}$ mol/m² de gaz qui ont été pompées par la surface aluminisée. Dans l'hypothèse $V=35$ l, ceci correspond à 40 % de la surface du bâti couverte d'aluminium pendant l'évaporation. On peut considérer cette valeur comme "raisonnable". On a alors un nombre de chocs moyen des molécules d'oxygène sur l'aluminium de l'ordre de 120 à 130 avant absorption.

6. Conclusion

Ce premier dispositif a montré qu'il est possible de faire entrer de l'oxygène ultra-pur dans l'ultra-haut-vide grâce à une vanne à l'argent. Nous avons montré aussi que l'action des parois est essentielle et est un handicap, car il faut entrer des grandes quantités d'oxygène avant de saturer les parois. Il est probable que les parois ont un rôle dans la présence des oxydes de carbone détectés [7], ainsi que les filaments des appareils de mesure. Si nous voulons oxyder 25 Å d'aluminium dans un temps raisonnable par cette méthode, il faut gagner d'abord sur la quantité d'oxygène entrant, en gagnant en uniformité de la température de la paroi d'argent et en modifiant sa géométrie. En particulier, une technique de "gauffrage", comme montré dans le dessin de la figure 6.6.1, peut permettre d'augmenter la surface en gardant une bonne résistance à la pression atmosphérique et en ménageant des canaux pour le pompage (flèches sur le dessin).

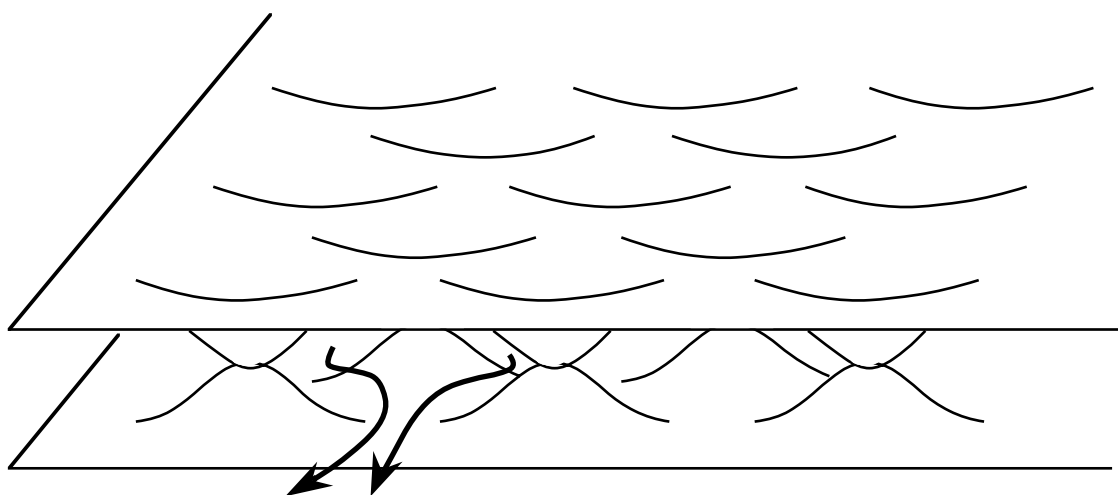


Figure 6.6.1 : Une technique de "gauffrage" de l'argent. Une feuille d'argent est emboutie de manière à former des bosses face-à-face, en la serrant sur un "moule" constitué d'une grille de cuivre préalablement laminée et nettoyée à l'acide, que l'on retire ensuite. Le vide se trouve entre les deux feuilles d'argent, et les bosses ménagent des canaux de pompage. Les flèches soulignent les chemins empruntés par les gaz pendant un tel pompage.

Une telle technique est actuellement en cours de développement. On peut aussi gagner

sur la quantité de métal frais que l'on "barbouille" à l'intérieur du bâti à chaque évaporation. Pour ceci, un cache a été mis en place dans le bâti UHV.

Pour l'instant, nous avons pu oxyder de manière très contrôlée une dizaine d'Å d'aluminium en quelques heures, à l'aide d'une entrée d'oxygène ultra-pur, ce qui montre les possibilités d'une vanne basée sur le principe d'une diffusion de l'oxygène à travers l'argent. Un contrôle de l'oxydation peut être effectuée grâce au cristal de quartz.

Références bibliographiques

- [1] Roger Morin, IRMI Marseille, communication privée
- [2] *Nouveau traité de chimie minérale*, tome III, Masson (1957)
- [3] Le spectromètre de masse a été prêté par J.P.Nozières.
- [4] Cours de technique du vide M.Guisset, Ingénieur à l'Institut des Sciences Nucléaires de Grenoble (IN2P3-CNRS-UJF) 1991
- [5] Johnson et Larose, J. Am. Chem. Soc. 46-1377 (1924) et 49-312 (1927)
- [6] Spencer, J. Chem. Soc. 123-2124 (1923)
- [7] J.C.Thouroude, communication privée

Chapitre 7

Méthode numérique

1. Algorithme de résolution des équations d'Usadel

1.1. Introduction

On a vu que les équations d'Usadel permettent de déterminer la densité d'états et la conductivité spectrale (conductivité en fonction de l'énergie en chaque point de l'échantillon) (voir chapitre 1). Différentes géométries d'échantillons peuvent se présenter, avec éventuellement plusieurs supraconducteurs maintenus à des phases différentes. Il a donc été nécessaire d'élaborer un programme qui fournit une solution numérique des équations d'Usadel dans différentes géométries.

Les équations d'Usadel peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \hbar D \partial_r^2 \theta + \left[2i\epsilon - \frac{\hbar D}{L_{in}^2} - \hbar D \left((\partial_r \chi - 2e\mathbf{A})^2 + \frac{1}{L_\varphi^2} \right) \cos \theta \right] \sin \theta \right\} = 0 \quad (1) \quad (7.1.1.)$$

$$\left| \partial \left(\sin^2 \theta (\partial_r \chi - 2e\mathbf{A}) \right) \right| = 0 \quad (2)$$

(voir chapitre 1).

Le but de ce chapitre est de déterminer numériquement les valeurs de θ en chaque point d'un échantillon. Les géométries qui ont été étudiées sont des géométries de circuits, constitués de fils de section G_i et de réservoirs (N ou S) où une condition aux limites sur θ est imposée. On ne s'intéresse qu'aux situations où les fils sont N sans interaction e-e. (En présence d'interaction, il faut ajouter le terme $2\Delta \cos \theta$ au second membre de l'équation (7.1.1. (1)),

avec Δ déterminé de manière self-consistante grâce à la fonction de distribution). Négliger ce terme permet d'avoir un modèle où la densité d'états et la conductance spectrale (données par $\text{Re}(\cos\theta)$ et par $\cosh^2(\text{Im}\theta)$) sont alors indépendantes des fonctions de distribution des électrons (qui donnent accès à la température, aux potentiels chimiques, etc...).

Principe général

On cherche à déterminer θ en N points de l'échantillon, c'est-à-dire à déterminer un vecteur $(\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N)$, qui représente les évaluations de la fonction $\theta_i = \theta(r_i)$ aux points $r_1 \ r_2 \ \dots \ r_N$ de discrétisation de la fonction $\theta(r)$. Notons $\underline{\theta} = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N)$ ce vecteur cherché.

A la fonction $\theta(r)$, on peut associer la fonction $f(\theta)$ définie par :

$$(f(\theta))(r) = D\partial_r^2\theta(r) + \left[2i\varepsilon - \frac{\hbar D}{L_{\text{in}}^2} - \left((\partial_r\chi(r) - 2e\mathbf{A})^2 + \frac{\hbar D}{L_{\varphi}^2} \right) \cos\theta(r) \right] \sin\theta(r) \quad (7.1.2.)$$

pour les valeurs de r situées dans l'échantillon, où la fonction $\chi(r)$ est associée à la fonction $\theta(r)$ grâce à l'équation de conservation (2). On définit de plus :

$$(f(\theta))(\text{réservoir}) = \theta(\text{réservoir}) - \theta_0(\text{réservoir}) \quad (7.1.3.)$$

sur les bords, c'est-à-dire dans les réservoirs qui fournissent les conditions aux limites $\theta_0(\text{réservoir})$. On a $\theta_0(\text{réservoir } N) = 0$ pour un réservoir normal et :

$$\theta_0(\text{réservoir } S) = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{argth}\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right) \quad \text{si } L_{\text{in}} = L_{\varphi} = \infty \quad \text{dans } S. \quad (7.1.4.)$$

(voir chapitre 1). En général, on prendra $\varepsilon \ll \Delta$ d'où $\theta_0(\text{réservoir } S) = \frac{\pi}{2}$.

Grâce à cette définition, les équations d'Usadel se ramènent à :

$$(f(\theta))(r) = 0 \quad \text{pour tout } r. \quad (7.1.5.)$$

On peut évaluer cette fonction en M points $r'_1 \ r'_2 \ \dots \ r'_M$ (pas forcément identiques aux N points d'évaluation de θ). On obtient ainsi un vecteur $\underline{f}(\underline{\theta})$, où la fonction vectorielle \underline{f}

associe un vecteur de dimension M à tout vecteur $\underline{\theta}$ de dimension N . A condition que les points correspondant aux réservoirs fassent partie de ces M points, on peut obtenir une solution approchée $\underline{\theta}$ de l'équation d'Usadel en résolvant l'équation $\underline{f}(\underline{\theta}) = \underline{0}$. C'est l'algorithme de résolution d'une telle équation qui est exposé au paragraphe suivant. Il a été utilisé dans le cas particulier de l'équation d'Usadel.

1.2. Algorithme de résolution

1.2.1. Base de l'algorithme

La méthode présentée ici a aussi été utilisée pour l'ajustement de paramètres dans le cas où $M \neq N$, avec N nombre de paramètres, ou pour des déconvolutions.

Il s'agit d'une méthode itérative. A chaque itération nous devons choisir le vecteur $\underline{\theta}_{n+1}$ en fonction du vecteur $\underline{\theta}_n$ (il faut se rappeler que chaque vecteur $\underline{\theta}_n$ contient N points d'évaluation de la fonction $\theta(r)$). Pour cela, nous considérons que la fonction $\underline{f}(\underline{\theta})$ est localement linéaire; on obtient ainsi une application linéaire tangente.

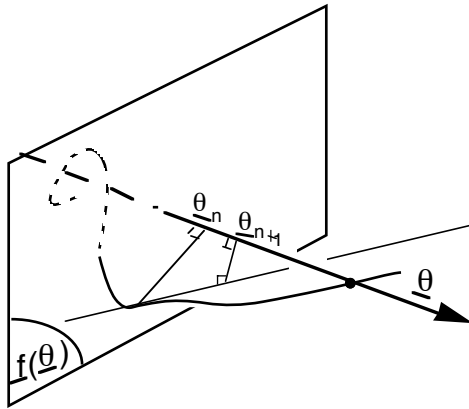


Figure 7.1.1 : La courbe représente $\underline{f}(\underline{\theta})$ en fonction de $\underline{\theta}$ dans le cas $N=1$ et $M=2$. Le schéma décrit la manière de calculer la valeur de $\underline{\theta}_{n+1}$ en fonction de $\underline{\theta}_n$.

A chaque itération, on choisit le point $\underline{\theta}_{n+1}$ dont l'image par l'approximation linéaire de $\underline{f}(\underline{\theta})$ est la plus proche de zéro (ou égale à zéro).

On choisit alors le point $\underline{\theta}_{n+1}$ comme étant celui qui serait la solution si la fonction \underline{f} était linéaire. Notons $\underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n)$ l'application linéaire tangente en $\underline{\theta}_n$. On a pour approximation linéaire de \underline{f} la fonction affine qui associe à $\underline{\theta}$ le point $\underline{f}(\underline{\theta}_n) + \underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \cdot (\underline{\theta} - \underline{\theta}_n)$. Ici, le vecteur $\underline{f}(\underline{\theta}_n)$ est de dimension M , $(\underline{\theta} - \underline{\theta}_n)$ est un vecteur de dimension N , et $\underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n)$ est une matrice de M lignes et N colonnes. Le point $\underline{\theta}_{n+1}$ est alors obtenu par :

$$\underline{\theta}_{n+1} = \underline{\theta}_n - \left[\left(\underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right) \cdot \left(\underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right)^T \right]^{-1} \cdot \left(\underline{\partial}_{\underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right) \cdot \underline{f}(\underline{\theta}_n) \quad (7.1.6.)$$

où il faut inverser une matrice de dimension N . La notation $^t()$ désigne la transposition. On peut remarquer que dans le cas où $N=M$, on obtient l'expression plus simple :

$$\underline{\theta}_{n+1} = \underline{\theta}_n - \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right)^{-1} \cdot \underline{f}(\underline{\theta}_n) \quad (7.1.7.)$$

En pratique c'est dans la situation $N=M$ que nous allons le plus souvent travailler.

1.2.2. Rapidité de convergence et temps de calcul

Dans le cas $M=N$, supposons que la solution cherchée soit $\underline{\theta}$ et qu'à l'étape $\underline{\theta}_n$, la solution $\underline{\theta}_n$ soit à une distance $\|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}\|$ de la solution. En supposant raisonnablement que la fonction \underline{f} et sa dérivée restent régulières près de la solution, on obtient, en remarquant que $\underline{f}(\underline{\theta}) = \underline{0}$, $\|\underline{\theta}_{n+1} - \underline{\theta}\| = \left\| \underline{\theta}_n - \underline{\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right)^{-1} \cdot (\underline{f}(\underline{\theta}_n) - \underline{f}(\underline{\theta})) \right\|$. En développant $(\underline{f}(\underline{\theta}_n) - \underline{f}(\underline{\theta}))$, le terme d'ordre 1 se simplifie et on obtient l'existence d'un coefficient α tel que :

$$\|\underline{\theta}_{n+1} - \underline{\theta}\| \leq \alpha \|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}\|^2 \quad (7.1.8.)$$

En pratique, l'erreur est élevée au carré à chaque étape, ce qui signifie qu'une fois que l'on est assez proche de la solution, la convergence est très rapide, et on obtient la solution en un nombre très limité d'itérations.

Pour effectuer une itération, il faut :

- Déterminer la matrice $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right)$: une détermination analytique de cette matrice est en principe possible. Cependant, la méthode qui a été adoptée ici est celle d'une détermination numérique. Il faut pour cela calculer $\underline{f}(\theta_1 + d\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N)$, puis $\underline{f}(\theta_1 \quad \theta_2 + d\theta_2 \quad \dots \quad \theta_N)$, jusqu'à $\underline{f}(\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N + d\theta_N)$, soit N évaluations de la fonction \underline{f} . Comme $\underline{f}(\underline{\theta})$ a N composantes, cela implique un coût en $O(N^2)$ opérations pour déterminer cette matrice (sauf bien sûr si la fonction \underline{f} demande plus de $O(N)$ opérations pour une évaluation).

- Calculer l'inverse de la matrice $\left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n) \right)$. Cette matrice n'a, a priori, aucune symétrie particulière exploitable, cette inversion coûte $O(N^3)$ opérations. (La méthode du pivot partiel de Gauss a été employée). C'est souvent cette inversion qui prend le plus de temps au cours de chaque itération.

1.2.3. Choix du point de départ

La plus grande faiblesse de l'algorithme présenté ci-dessus est que, tant que le résultat $\underline{\theta}_n$ de l'itération n n'est pas assez proche de la solution, le processus peut très bien ne pas converger. En particulier, si $\det\left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} \underline{f}(\underline{\theta}_n)\right)$ est proche de zéro, le résultat de l'itération $n+1$ peut très bien s'éloigner catastrophiquement de la solution cherchée. On voit ainsi qu'il faut une valeur de $\underline{\theta}_0$ au départ du processus itératif qui ne soit pas trop éloignée de la solution.

Une possibilité qui a été utilisée dans un premier temps est celle de partir de la solution de l'équation d'Usadel linéarisée, que l'on peut déterminer analytiquement. Cependant, si cette méthode convient bien lorsque la géométrie n'est pas compliquée (fil simple entre un réservoir S et un réservoir N par exemple), en pratique, elle s'avère difficile à mettre en oeuvre : d'une part, la complexité de la solution analytique expose à bien des erreurs dans le calcul, et d'autre part, une fois cette solution calculée, il est difficile de s'assurer qu'on n'a pas fait d'erreur en la programmant! Enfin, cette méthode n'aboutit généralement pas lorsque la géométrie implique la présence de plusieurs supraconducteurs de phases différentes (par exemple, une jonction SNS).

1.2.4. Une méthode peu sensible au choix du point de départ

On a vu que l'étape qui coûte souvent le plus cher en temps de calcul est l'inversion de matrice. Une fois cette matrice inversée et $\underline{\theta}_{n+1}$ trouvé, on a déterminé une direction $\underline{\theta}_{n+1} - \underline{\theta}_n$ dans l'espace des vecteurs $\underline{\theta}$. Par quelques évaluations supplémentaires de la fonction $\underline{f}(\underline{\theta})$ le long de cette direction, on cherche le minimum de $\|\underline{f}(\underline{\theta})\|$ sur la droite passant par $\underline{\theta}_{n+1}$ et $\underline{\theta}_n$. On obtient ainsi le point $\underline{\theta}_{n+1}'$ défini par $\underline{\theta}_{n+1}' = \omega \underline{\theta}_{n+1} + (1 - \omega) \underline{\theta}_n$, ω étant tel que $\|\underline{f}(\omega \underline{\theta}_{n+1} + (1 - \omega) \underline{\theta}_n)\|$ soit minimum [1].

L'avantage fondamental de cette amélioration est que, outre une augmentation sensible de la vitesse de convergence, la solution de l'étape $n+1$ est obligatoirement plus proche de la condition $\underline{f}(\underline{\theta}) = \underline{0}$ que la solution de l'étape n . Ainsi, on peut en général partir d'une valeur $\underline{\theta}_0$ choisie au hasard, et le processus ira automatiquement trouver une solution. Pour la résolution de l'équation d'Usadel, on constate de rares cas où le processus converge vers un minimum local, et où on ne trouve pas de solution. Pour sortir de ce minimum local, une fluctuation aléatoire autour de la valeur de $\underline{\theta}_{n+1}'$ suffit généralement pour débloquent le processus.

1.2.5. Fluctuations aléatoires

Dans de nombreux cas, on cherche à déterminer non pas une solution de l'équation d'Usadel dans un cas particulier (par exemple pour une énergie donnée ϵ), mais un ensemble

de solutions (par exemple toutes les solutions de l'équation pour ε variant de 0 à $10E_C$ par pas de $0.01E_C$) Dans ce cas, il est souvent efficace de partir de la solution ε pour calculer la solution $\varepsilon + \text{pas}$.

Cependant, dans certains cas particuliers (par exemple une jonction SNS près du gap), une telle méthode n'est pas la plus efficace, probablement à cause de la forme mathématique des différentes solutions. Dans de tels cas, il est souvent plus judicieux de faire fluctuer la solution à chaque étape pour tomber plus sûrement dans la zone de convergence du processus. A la place de $\underline{\theta}_{n+1}$ on choisit alors $\underline{\theta}_{n+1}''$ défini par :

$$\begin{cases} \underline{\theta}_{n+1}'' = \underline{\theta}_{n+1}' + t_n \underline{A} & \text{ou} & \underline{\theta}_{n+1}'' = \underline{\theta}_{n+1}' + t_n \left\| \underline{f}(\underline{\theta}_{n+1}') \right\| \underline{A} \\ t_{n+1} = r t_n \end{cases} \quad (7.1.9.)$$

$\underline{\theta}_{n+1}'$ est la solution de l'étape 1.2.4. Le vecteur \underline{A} est choisi de manière aléatoire et r est un coefficient inférieur à 1. Les choix de t_0 et de r permettent de régler l'efficacité de la méthode. Cette amélioration n'a été utilisée que de manière limitée (jonctions SNS près du gap).

1.3. Mise en oeuvre

1.3.1. Discrétisation

On travaille avec $M=N$, et dans une situation où les M points d'évaluation de la fonction $f(\theta)$ sont les mêmes que les points d'évaluation de θ . Pour l'instant, les points d'évaluation ont toujours été choisis de la manière suivante : si le circuit est constitué de p fils, on appelle "noeuds" les points suivants :

- Les réservoirs S ou N,
- Les points de contact entre les p fils (noeuds dits "libres")
- Les points où l'on veut exploiter une symétrie particulière (exemple : le milieu d'une jonction SNS).

On note q le nombre de noeuds. On choisit alors q points d'évaluation sur les noeuds, et on répartit les $N-q$ autres points sur les q fils en conservant la longueur dx qui sépare chaque point de ses voisins (cela nécessite parfois d'arrondir la longueur des fils) (figure 7.1.2). Cette répartition rend plus facile et plus précise l'évaluation de la dérivée $\partial_1^2 \theta$.

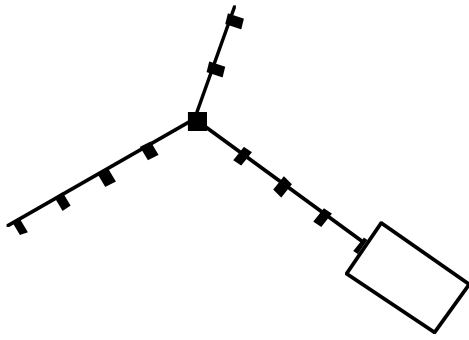


Figure 7.1.2 : Illustration de la manière dont on répartit les N points d'évaluation dans le circuit. Le rectangle représente un réservoir, et les points sont répartis de manière équidistante.

Il s'agit de déterminer la fonction $f(\underline{\theta})$ pour la géométrie décrite ci-dessus. Or on a vu que les équations d'Usadel font intervenir deux quantités qui sont θ et χ . On pourrait bien sûr estimer qu'il y a deux vecteurs inconnus $\underline{\theta}$ et $\underline{\chi}$, poser comme nouveau vecteur inconnu de dimension $2N$: $\underline{\theta}' = (\theta_1 \dots \theta_N \chi_1 \dots \chi_N)$, et exprimer les deux équations d'Usadel. Malheureusement, cela conduirait à travailler avec $2N$ inconnues au lieu de N , soit environ 8 fois plus de temps (et 4 fois plus environ en occupation mémoire...). Pour éviter cela on remarque que la deuxième équation $\partial(\sin^2 \theta (\partial_r \chi - 2e\mathbf{A})) = 0$ permet d'obtenir χ en fonction de θ . On remarque d'abord que cette équation est une équation de conservation. Posons sur chaque fil d'indice i la quantité: $I_i = \sin^2 \theta (\partial \chi - 2e\mathbf{A})$. La partie imaginaire de I_i est le courant supraconducteur transporté à l'énergie ε . I_i est ainsi une constante le long de chaque fil. Pour se débarrasser du terme en \mathbf{A} , posons aussi $\partial \chi_{i0} = 2e\mathbf{A}$, ce qui est possible indépendamment sur chaque fil. On a alors $I_i = \sin^2 \theta \partial(\chi - \chi_{i0})$, c'est-à-dire encore :

$$\Sigma_i = \left(\int \frac{dx}{\sin^2 \theta} \right)^{-1} \quad (7.1.10.)$$

et $I_i = (\Delta\chi - \Delta\chi_{i0})\Sigma_i$

L'intégration est faite du début à la fin du fil, où $\Delta\chi_{i0} = \int 2e\mathbf{A}dx$ et où $\Delta\chi$ représente la différence de phase entre une extrémité et l'autre. On obtient alors une relation entre les phases des différents noeuds. Pour un noeud j , notons $j_1 \ j_2 \dots$ les noeuds qui sont reliés au noeud j par q' fils. On a:

$$\chi_j = \frac{\sum_{k=0}^{q'} G_k \Sigma_k (\chi_{j_k} + \Delta\chi_{k0})}{\sum_{k=0}^{q'} G_k \Sigma_k} \quad (7.1.11.)$$

Où G_i est la section des fils dans l'état normal.

Si θ est donné, les phases aux noeuds "libres" étant alors les inconnues, on peut ainsi les retrouver en exprimant la formule de Millmann sous forme matricielle (figure 7.1.3.), puis en inversant une matrice ayant pour dimension le nombre de noeuds "libres". Pour plus de détails, se reporter au calcul des fonctions de distribution aux noeuds "libres" en fonction des fonctions de distribution dans les réservoirs, annexe A3. Ce problème ne se pose évidemment pas dans le cas de géométries simples où il n'y a pas de noeud "libre". Pour les fils reliés à un

réservoir normal, on a $I_i = 0$ car $\sin^2 \theta = 0$ au contact du réservoir, d'où $\Sigma_i = 0$

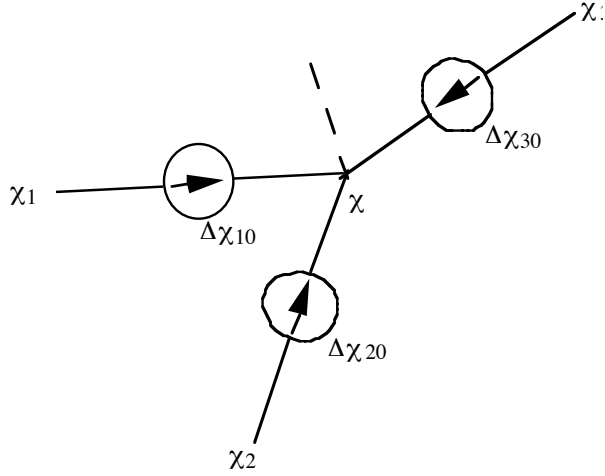


Figure 7.1.3 : On peut remarquer que la formule (3) ressemble à la formule de Millmann où la phase jouerait le rôle d'une tension, où le potentiel vecteur jouerait le rôle d'une source de tension sur chaque fil, où I_i ressemble à un courant, et Σ_i à une conductance, $\sin^2 \theta$ étant dans ce formalisme une "conductivité locale".

Voici alors comment on exprime la fonction f : si θ est donné, on commence par calculer Σ_i , puis on résout l'équation (3) et on obtient I_i par l'équation (7.1.10.). Enfin, $f(\theta)$ est définie par :

$$D\partial_r^2\theta + \left[2i\varepsilon - \frac{\hbar D}{L_{in}^2} - \frac{\hbar D}{L_{\varphi}^2} \cos\theta \right] \sin\theta - I_i^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = f(\theta) \quad (7.1.12.)$$

On réécrit ceci sous la forme : $\partial_r^2\theta + U_i(\theta) = f'(\theta)$, en renormalisant l'équation et en notant :

$$U_i(\theta) = \left[2i\varepsilon' - \frac{1}{L_{in}^2} - \frac{1}{L_{\varphi}^2} \cos\theta \right] \sin\theta - I_i'^2 \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \quad (7.1.13.)$$

où l'énergie ε' est écrite en unité d'énergie E_C associée à la longueur unité choisie (longueur de l'échantillon).

1.3.2. Calcul numérique des différents termes

On obtient le terme $\partial_r^2\theta(r_i)$ sur les fils par : $\partial_r^2\theta(r_i) = \frac{1}{dx^2} (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i)$.

Il reste à déterminer ce terme au niveau des noeuds "libres". La condition sur θ au noeud j peut être retrouvée à partir de l'équation d'Usadel (1.3.14.) et est : $\sum_{k=0} G_k (\partial_r \theta)_k = 0$.

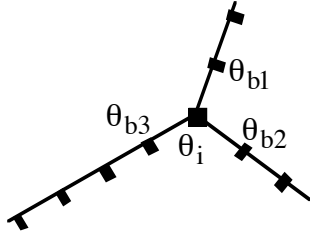


Figure 7.1.4 : Notations employées à proximité d'un noeud. θ_j désigne la valeur de θ au niveau du noeud. θ_{b_k} désigne la valeur de θ sur le bord de chaque fil k à dx du noeud.

On pourrait discrétiser cette équation sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k (\theta_j - \theta_{b_k}) = 0 \quad (7.1.14.)$$

Malheureusement, cela reviendrait d'une part à négliger, sur chaque fil et sur la longueur dx proche du noeud, le terme en $\partial_r^2 \theta$. D'autre part, une telle discrétisation fournit une mauvaise approximation des dérivées premières aux noeuds. On peut alors remarquer que deux bonnes approximations des dérivées première et seconde sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r^2 \theta(r_i) \approx \frac{1}{dx^2} (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) \\ \partial_r \theta(r_i) \approx \frac{1}{2dx} (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \end{array} \right. \quad (7.1.15.)$$

en combinant ces équations, on obtient : $\partial_r^2 \theta(r_i) - \frac{2}{dx^2} \partial_r \theta(r_i) \approx \frac{2}{dx^2} (\theta_{i-1} - \theta_i)$. En appliquant la condition au noeud, on obtient la discrétisation suivante :

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k \left(\frac{2}{dx^2} (\theta_{b_k} - \theta_j) + U_k(\theta_j) \right) = (f(\theta))(\text{noeud } j) \quad (7.1.16.)$$

On peut remarquer qu'en appliquant cette formule à un point quelconque d'un fil, considéré comme un noeud d'où deux fils identiques partiraient, on retrouve l'expression

$$\frac{1}{dx^2}(\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) + U(\theta_i) = (f(\theta))(r_i) \quad (7.1.17.)$$

qui est l'expression de la discrétisation dans un fil.

Note: on pourrait à partir de ce principe choisir des pas dx_j différents sur chaque fil (et même des variations de dx le long d'un fil). En ce cas, il conviendrait de prendre :

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k \left(\frac{1}{dx_k} (\theta_{b_k} - \theta_j) + \frac{dx_k}{2} U_k(\theta_j) \right) = (f(\theta))(\text{noeud } j) \quad (7.1.18.)$$

Il faut aussi calculer le terme $\Sigma_i = \int \frac{dx}{\sin^2 \theta}$. Pour cela, le plus simple est l'approximation de la méthode des trapèzes qui consiste à écrire :

$$\Sigma_i = \sum_{j=\text{debut du fil}}^{\text{fin du fil}} c_j \frac{dx}{\sin^2 \theta_j} \quad (7.1.19.)$$

où début du fil et fin du fil sont les noeuds aux extrémités des fils, $c_j = 0.5$ à ces extrémités, et $c_j = 1$ partout ailleurs. La question se pose de la précision de cette méthode, car dans de nombreux cas, il peut se faire que θ_j se rapproche dangereusement de 0.

1.3.3. Estimation succincte des erreurs

Une fois que l'on a réussi à résoudre l'équation $f(\underline{\theta}) = \underline{0}$, on essaie de connaître l'écart, à l'ordre le plus bas en dx , entre $\underline{\theta}$ calculé et la solution mathématique $\theta(r)$. Cet écart est donné par : $\underline{\Delta\theta} = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} f(\underline{\theta}) \right)^{-1} \cdot \underline{\Delta f}(\underline{\theta})$, où $\underline{\Delta f}(\underline{\theta})$ est le vecteur représentant les erreurs commises en chaque point sur l'évaluation de f . On a : $\partial_r^2 \theta(r_i) \approx \frac{1}{dx^2} (\theta_{i+1} + \theta_{i-1} - 2\theta_i) + dx^2 \frac{1}{12} \partial_r^4 \theta(r_i)$, soit une erreur proportionnelle à dx^2 . Il faut noter que si les intervalles dx ne sont pas constants, on perd en précision car on obtient un terme proportionnel à dx .

Une source plus importante d'erreurs est dans le calcul de Σ_i . On peut cependant écrire :

$$\Sigma \approx \sum_{j=\text{debut du fil}}^{\text{fin du fil}} c_j \frac{dx}{\sin^2 \theta_j} - \frac{1}{24} \frac{\partial_r^2 \sin^2 \theta(r_j)}{\sin^4 \theta_j} dx^3 + \frac{1}{12} \frac{(\partial_r \sin^2 \theta(r_j))^2}{\sin^6 \theta_j} dx^3 \quad (7.1.20.)$$

(en négligeant, dans cette formule, la question des bords du fil). Ici aussi, l'erreur est proportionnelle à dx^2 . Comme on pouvait le pressentir, cette erreur devient énorme quand θ_j se rapproche de zéro. Heureusement, on peut ici facilement évaluer les dérivées $\partial_r^2 \sin^2 \theta(r_i)$ et $\partial_r \sin^2 \theta(r_i)$ numériquement. On peut alors appliquer la formule (7.1.20.) complète pour les cas où plus de précision est souhaitée, et l'erreur commise est reportée à l'ordre supérieur. D'autre part, l'évaluation du terme d'erreur proportionnel à dx^2 peut servir à déterminer les cas où la solution trouvée risque d'être entachée de trop d'erreur, et de prendre les mesures qui s'imposent (augmentation du nombre N de points d'évaluation par exemple, ou simplement rejet de la solution "par précaution").

1.3.4. Les barrières tunnel

On a vu (voir chapitre 1) que la condition de part et d'autre d'une barrière tunnel peut s'exprimer sous la forme d'un rapport entre le saut de θ de part et d'autre de la barrière, et la dérivée $\partial_r \theta$.

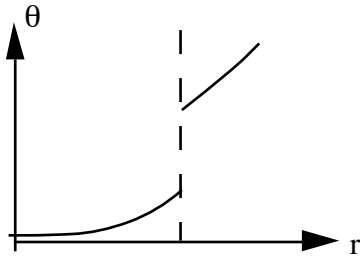


Figure 7.1.5 : Illustration de la condition de part et d'autre d'une barrière tunnel. Le sinus du saut de θ est proportionnel à la dérivée, et à la résistance de la barrière.

On a ainsi : $\sin(\theta^+ - \theta^-) = R \partial_r \theta$. Dans le cas, qui a été programmé pour l'instant, où dx est constant et où on a placé une barrière R_k à l'extrémité de chaque fil, on obtient (voir Annexe A.6.)

- aucun changement par rapport à (7.1.17.) à l'intérieur de chaque fil.
- aux extrémités des fils,

$$\frac{\theta_{i-1} - \theta_i}{dx^2} + \frac{\sin(\theta(\text{noeud } j) - \theta_i)}{dx(dx \cos(\theta(\text{noeud } j) - \theta_i) + R_k)} + U(\theta_i) = (f(\theta))(r_i) \quad (4 \text{ bis}) \quad (7.1.21.)$$

- aux noeuds,

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k \left(\frac{\sin(\theta_{b_k} - \theta_j)}{dx_k \cos(\theta_{b_k} - \theta_j) + R_k} + \frac{dx_k}{2} U_k(\theta_j) \right) = (f(\theta))(\text{noeud } j) \quad (7.1.22.)$$

1.3.5. Une variante plus rapide

Il n'est pas obligatoire d'utiliser le vecteur $\underline{\theta}$ décrit ci-dessus directement comme inconnue. En effet, on peut se donner comme inconnues :

- les valeurs de θ aux q noeuds,
- les différences des valeurs de θ sur chaque fil à la distance dx du noeud "gauche", avec les valeurs de θ au noeud "gauche",
- les valeurs de Σ sur les p fils.

A partir de ces 2p+q inconnues, on peut retrouver $\underline{\theta}$ partout à partir de l'équation (7.1.17.) de discrétisation, de proche en proche par : $\theta_{i+1} = -\theta_{i-1} + 2\theta - U(\theta_i)$.

Notons $\underline{\theta}_{bis}$ le vecteur représentant ces inconnues. On commence par retrouver $\underline{\theta}$ à partir de $\underline{\theta}_{bis}$, puis le vecteur $\underline{f}_{bis}(\underline{\theta}_{bis})$ est donné par :

- les p différences entre les valeurs proposées de Σ sur les fils et les valeurs obtenues une fois que $\underline{\theta}$ a été calculé.
- les q valeurs de $\underline{f}(\underline{\theta})$ aux noeuds.
- les p valeurs de $\underline{f}(\underline{\theta})$ sur chaque fil, à la distance dx du noeud "droit".

On travaille alors avec $N=2p+q$. Ceci permet d'éviter l'inversion d'une matrice trop grande. Alors, les étapes limitant la vitesse à chaque étape sont proportionnelles au nombre de points de discrétisation. En pratique cette méthode a l'avantage d'être beaucoup plus rapide lorsque l'on travaille avec un grand nombre de points de discrétisation, et surtout de demander beaucoup moins de place en mémoire. elle n'est pas moins précise, car les conditions $\underline{f}_{bis}(\underline{\theta}_{bis})=0$ et $\underline{f}(\underline{\theta})=0$ sont complètement équivalentes.

Elle a en revanche l'inconvénient qu'il est plus difficile de trouver un point de départ permettant au processus de converger. De même, il est alors nécessaire de choisir des pas de

balayage modérés si on ne veut pas "perdre" la solution. De plus, il y a un plus grand nombre d'opérations à effectuer pour l'estimation de $f_{\text{bis}}(\theta_{\text{bis}})$ que pour $f(\theta)$, si bien que la convergence n'est pas toujours plus rapide.

Le plus gros inconvénient est que l'algorithme ne converge plus si ε , ou le nombre de points dans un fil, est trop grand. Si les p valeurs de $f(\theta)$ sur chaque fil sont choisies avec vingt chiffres significatifs seulement, alors l'écart minimum relatif de 10^{-20} se propage exponentiellement, si bien qu'aucune valeur ne peut alors convenir, et l'algorithme ne converge pas. Typiquement, cela se produit avec $N=2000$ pour $\varepsilon \approx 15$. Cette valeur limite est nettement inférieure dans le cas où les calculs sont faits avec 64 bits de précision (15 digits).

Cette variante a été utilisée abondamment quand la précision souhaitée demandait un grand nombre de points d'évaluation, et que l'énergie restait faible (cas de la jonction SNS près du gap).

1.4. Programmation et exemples

Le programme a été rédigé en langage C++, car l'aspect modulaire de la programmation par objets permet une grande souplesse de programmation, et permet des structures de données plus lisibles, et donc des codes plus clairs et plus faciles à corriger ou à modifier. D'autre part, la surcharge d'opérateurs permet aussi d'écrire des codes plus clairs (opérations sur les nombres complexes par exemple).

1.4.1. Structures de données

Tout d'abord, un module définit les nombres complexes et les opérations sur ceux-ci. Ensuite, un autre définit les vecteurs et les matrices (de réels et de complexes), et quelques opérations nécessaires (en particulier l'inversion d'une matrice). Un autre module définit quelques opérations élémentaires sur des fonctions (procédure de recherche d'extrémum en particulier). Ensuite, un objet "équation vectorielle" qui utilise ces définitions est défini. Cet objet contient l'adresse de la fonction vectorielle dont il faut trouver un zéro, l'adresse de ses paramètres, des valeurs utiles au calcul (précision, pas utilisé pour l'estimation numérique de la matrice dérivée, condition d'arrêt, etc...) et l'algorithme de résolution. De cet objet, on fait dériver les objet particuliers "équation vectorielle avec accélération de convergence" ou "ajustement de paramètres", etc...

Il suffit maintenant de donner à l'objet "équation vectorielle avec accélération de convergence" la fonction dont il faut trouver le zéro. Pour calculer celle-ci, on définit des

objets "noeuds" , qui contiennent une information de type (normal, supra, "libre", etc...), une information sur la phase en ce point, et des pointeurs sur les fils qui y sont accrochés. On définit de même des objets "fils", qui contiennent des informations sur la section, la longueur, le rapport entre le déphasage $\Delta\chi_{i0}$ et le champ extérieur, etc..., ainsi que des pointeurs sur les noeuds à ses extrémités. Un objet "répartiteur" englobe tout ceci et attribue à chacun de ces noeuds et fils une place (c'est-à-dire des indices $r_i \quad r_{i+1} \quad \dots$) dans le vecteur $\underline{\theta}$. On peut lui rajouter aussi les conditions "extérieures" sur l'énergie à laquelle on effectue le calcul ou le champ extérieur. On obtient ainsi un objet "équation d'Usadel" dont la fonction principale est de calculer $\underline{f}(\underline{\theta})$. Pour ce calcul, une procédure permet d'abord de calculer la phase des différents noeuds "libres" en fonction de $\underline{\theta}$. A charge ensuite à chaque noeud ou fil de calculer la partie du vecteur $\underline{f}(\underline{\theta})$ qui lui a été attribuée par le "répartiteur".

A tout ceci, on ajoute des objets de type "solution" qui contiennent le nombre N de points, la solution à l'équation d'Usadel, et l'ensemble des fonctions qui permettent le calcul de quantités physiques (densité d'états, conductivité,...) à partir de cette solution. Cet objet contient aussi une méthode pour changer le nombre de points en gardant sa solution, ce qui peut permettre des perfectionnements de l'algorithme où on commence par chercher une solution grossière avec N petit, puis où on affine cette solution en augmentant progressivement N.

Pour les fonctions d'affichage des résultats, de manipulations de fichiers et de fenêtres, la bibliothèque "Manip" créée au laboratoire [2] a été utilisée.

1.4.2. Résolution pour fil N entre réservoirs N et S

On utilise le programme dans le cas d'un simple fil entre un noeud de type N et un noeud de type S. L'équation a été résolue pour N=100 sur Macintosh Quadra 650 (microprocesseur 68040 avec coprocesseur). Le temps pour une étape de calcul est d'environ une minute, et on arrive au résultat au bout d'environ trois minutes (trois itérations) pour chaque valeur de l'énergie, lorsque l'on repart de la solution précédente. Dans un tel cas, la matrice à inverser est très "creuse", ce qui pourrait améliorer éventuellement de beaucoup l'efficacité de l'inversion si on utilisait un algorithme qui exploite cette propriété.

Les représentations de nombres réels sont faites sur 80 bits, ce qui fournit une vingtaine de chiffres significatifs dans les calculs.

Les conditions d'arrêt choisies sont généralement : $\max(|\underline{\theta}_n - \underline{\theta}_{n-1}|, |\underline{f}(\underline{\theta}_n)|) < 10^{-10}$,

et pour l'évaluation des dérivées, on choisit généralement $d\theta_i = 10^{-7}\theta_i$ (sans effet sur la précision du résultat, mais seulement éventuellement sur la convergence).

1.4.3. Jonction SNS

Un gap apparaît dans la jonction SNS. Juste au-dessus du gap, un pic existe, de plus en plus aigu à mesure que la phase s'approche de π .

D'une manière générale, les problèmes de calcul numérique se font de plus en plus sentir à mesure que la phase s'approche de π . Ils apparaissent à deux endroits:

-Très près du gap, à cause de la singularité mathématique qui fait que l'algorithme converge difficilement.

-Au pied à haute énergie du pic de la densité d'états. Dans cette partie, il existe une valeur de x où θ s'approche très près de 0. De ceci, découle que le calcul de l'intégrale $\Sigma = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sin^2 \theta}$ est très imprécis, et des "fausses" solutions de l'équation d'Usadel apparaissent, solutions dans lesquelles l'erreur commise sur Σ est très grande. Une caractéristique de telles fausses solutions est qu'elles ne sont pas conservées si on augmente de nombre de points. Pour les éliminer, nous admettons comme critère que la différence relative entre les intégrales à l'ordre 1 et à l'ordre 2 (voir le paragraphe 1.3.3.) ne doit pas dépasser typiquement $2 \cdot 10^{-3}$, pour que ce problème n'apparaisse pas pour des valeurs de $\pi - \chi_0 > \pi / 64$. A cette valeur de la phase, pour qu'il existe des solutions avec une erreur inférieure à $2 \cdot 10^{-3}$, il faut choisir au moins $N=2000$. Ce grand nombre de points nécessite l'utilisation de la variante du paragraphe 1.3.5., et ceci n'est possible que parce que les énergies sont faibles. Cette variante n'est plus utilisable à haute énergie, mais là les problèmes numériques sont moins graves et on peut utiliser $N=100$.

2. Cas de la jonction SNS sous le Gap

On a vu, d'après la simulation numérique, qu'un gap s'ouvre dans le métal normal d'une jonction SNS. On a vu aussi que ce gap dépend de la différence de phase entre les deux supraconducteurs, et que la détermination numérique de ce gap par la méthode du chapitre précédent est difficile. En effet, pour chaque valeur de la différence de phases, il faut calculer la solution pour de nombreuses énergies d'essai, et déterminer le gap en réalisant par exemple une dichotomie sur l'énergie, ou une recherche d'un extrémum (par exemple le maximum

de $\Im m(\theta)$). Lorsque la différence de phases se rapproche de π , la précision souhaitée demande de plus en plus de points, et la proximité du gap fait que le processus itératif "perd" facilement la zone de convergence d'une énergie à l'autre. Tout ceci a nécessité la mise au point d'une deuxième méthode numérique radicalement différente, spécialement pour ce cas particulier. Enfin, la comparaison entre deux méthodes différentes est efficace pour détecter des erreurs éventuelles.

On se place dans le cas d'une géométrie où un fil N est compris entre deux supraconducteurs de phases différentes, et dans le cas où $L_{in} = L_{\varphi} = \infty$. On cherche à caractériser les solutions de l'équation d'Usadel lorsque l'énergie ε est inférieure à l'énergie du gap E_g . On peut exprimer cette condition par : $\theta_1 = \Re e(\theta) = \frac{\pi}{2}$ en tous les points de l'échantillon. On peut alors substituer $\theta = \frac{\pi}{2} + i\theta_2$ dans les équations d'Usadel.

2.1. Principe du calcul

On peut remarquer qu'il existe une intégrale première à l'équation d'Usadel dans laquelle on a substitué la valeur de I :

$$(\partial_r \theta)^2 + (\Delta \chi)^2 \left(\int \frac{dx}{\sin^2 \theta} \right)^{-2} \frac{1}{\sin^2 \theta} - 4i\varepsilon \cos \theta = \text{constante} \quad (7.2.1.)$$

Après substitution de $\theta = \frac{\pi}{2} + i\theta_2$, et en notant θ_{20} la valeur de θ_2 au milieu de la jonction, on obtient :

$$(\partial_r \theta_2)^2 = -(\Delta \chi)^2 \left(\int \frac{dx}{\text{ch}^2 \theta_2} \right)^{-2} \left(\frac{1}{\text{ch}^2 \theta_{20}} - \frac{1}{\text{ch}^2 \theta_2} \right) + 4\varepsilon (\text{sh} \theta_2 - \text{sh} \theta_{20}) \quad (7.2.2.)$$

en utilisant la propriété de symétrie qui fournit $\partial_r \theta = 0$ au centre de la jonction.

Posons : $\Sigma = \int \frac{dx}{\text{ch}^2 \theta_2}$ et la fonction $f(\theta_{20}) = 4\varepsilon \Sigma^2$.

On obtient une définition implicite de la fonction $f(\theta_{20})$:

$$1 = \int_0^{\theta_{20}} \left(\text{ch}^2 \theta_2 \sqrt{f(\theta_{20}) (\text{sh} \theta_{20} - \text{sh} \theta_2) - (\Delta \chi_0)^2 \left(\frac{1}{\text{ch}^2 \theta_{20}} - \frac{1}{\text{ch}^2 \theta_2} \right)} \right)^{-1} d\theta_2 \quad (7.2.3.)$$

On peut calculer numériquement la fonction $f(\theta_{20})$. Il suffit pour cela d'utiliser le programme de calcul d'une intégrale (voir annexe A4), puis de résoudre l'équation (l'algorithme de Newton est exactement l'algorithme présenté au paragraphe 1 avec $M=N=1$).

En posant alors :

$$g(\theta_{20}) = \int_0^{\theta_{20}} \left(\left(\text{sh}\theta_{20} - \text{sh}\theta_2 \right) - \frac{(\Delta\chi_0)^2}{f(\theta_{20})} \left(\frac{1}{\text{ch}^2\theta_{20}} - \frac{1}{\text{ch}^2\theta_2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta_2 \quad (7.2.4.)$$

valeur que l'on peut alors déterminer, on obtient la valeur de ε en fonction de θ_{20} par : $\varepsilon = \frac{1}{4} \left(g(\theta_{20}) \right)^2$. En particulier, le maximum de g (que l'on sait calculer numériquement car c'est utilisé en 1.2.4 [1].) donne l'énergie du gap.

2.2. Comparaison avec la méthode du paragraphe 1.

Nous avons ainsi deux méthodes distinctes pour calculer la valeur du gap de la jonction SNS. La première est celle que nous venons de voir, et la deuxième est basée sur la résolution directe de l'équation d'Usadel. Pour chaque valeur de la phase, on résoud l'équation d'Usadel pour différentes énergies. En choisissant convenablement les valeurs successives de l'énergie, on arrive à encadrer la valeur du gap. Cette méthode présente l'avantage de donner accès aux valeurs de l'équation d'Usadel immédiatement supérieures au gap, et elle sert en particulier à déterminer les comportements asymptotiques immédiatement au-dessus du gap. En revanche elle présente l'inconvénient d'être très lente, car elle nécessite de résoudre de nombreuses fois l'équation d'Usadel pour chaque valeur de la phase. En outre, le gap supraconducteur se trouve justement sur une singularité mathématique, et l'algorithme de résolution, bien que très robuste, converge mal. Un deuxième inconvénient est que cette singularité devenant de plus en plus aiguë quand la phase s'approche de $\Delta\chi_0 = \pi$, la convergence est de plus en plus mauvaise.

La méthode utilisée dans ce paragraphe a, quant à elle, l'inconvénient de ne pas donner accès au-dessus du gap. Un deuxième inconvénient est que l'intégrale qui entre dans le calcul présente un "pic" très prononcé et qu'il faut se méfier de réaliser cette intégration avec une grande précision.

3. Calcul de caractéristiques

Une fois les équations d'Usadel résolues, on obtient la densité d'états en chaque point de l'échantillon, ainsi qu'une conductivité locale effective $\sigma(\epsilon)$ qui dépend de l'énergie. On suppose dans cette partie un circuit composé de fils N mis en contact avec un supraconducteur S unique. Les réservoirs N sont portés à des températures T_i et à des potentiels chimiques $\mu_i = eV_i$, où les V_i sont les tensions dans les réservoirs. Ces températures et tensions imposent des fonctions de distribution aux niveaux des réservoirs. Rappelons qu'on a supposé de plus qu'il n'y a pas de collision inélastique dans l'échantillon, mais uniquement au niveau des réservoirs où se jouent les processus qui d'une part thermalisent les électrons entre eux, et d'autre part thermalisent les électrons avec le bain de phonons, chaque canal d'énergie transportant alors indépendamment sa part de courant. On peut dès lors parler de conductance totale $G_k(\epsilon)$ pour chaque énergie et pour chaque fil : c'est la conductance spectrale des fils décrite dans le chapitre théorique :

$$G_k(\epsilon) = G_k \left(\int \frac{dx}{\sigma(x, \epsilon)} \right)^{-1} \quad (7.3.1.)$$

où G_k représente la section du fil k .

De cette façon, une fois obtenues les conductances totales sur chaque fil, on peut obtenir des relations très simples entre les courants dans les fils d'une part et les tensions et températures dans les réservoirs d'autre part. Le but de ce chapitre est d'exposer succinctement la méthode de calcul de la matrice des conductances spectrales $\underline{\underline{G}}(\epsilon)$ décrite au chapitre 1 et d'exposer comment on peut calculer numériquement les caractéristiques, afin de confronter cette théorie avec les expériences.

3.1. Principe du calcul

La matrice $\underline{\underline{G}}(\epsilon)$ est obtenue à partir des conductances spectrales $G_k(\epsilon)$ à partir d'une loi de circuit simple en se rappelant que $G_k(\epsilon)$ est une conductance pour le déséquilibre de charges $f = f_e - f_h$.

Pour un noeud j , notons $j_1 \ j_2 \ \dots$ les noeuds qui sont reliés au noeud j par q' fils. A partir du théorème de Millmann, on a une relation pour le déséquilibre de charges f_j au noeud

j:

$$f_j(\varepsilon) = \frac{\sum_{k=0}^{q'} g_k(\varepsilon) f_{jk}(\varepsilon)}{\sum_{k=0}^{q'} g_k(\varepsilon)} \quad (7.3.2.)$$

On utilise la même appellation de noeuds "libres" qu'au paragraphe 1. On cherche à exprimer les courants à partir des déséquilibres de charges dans les réservoirs. On peut ré-exprimer cette équation sous la forme :

$$f_{j \text{ libre}}(\varepsilon) - \frac{\sum_{k \text{ libre}} G_k(\varepsilon) f_{jk \text{ libre}}(\varepsilon)}{\sum_{k=0}^{q'} G_k(\varepsilon)} = \frac{\sum_{k \text{ réservoir}} G_k(\varepsilon) f_{jk \text{ réservoir}}(\varepsilon)}{\sum_{k=0}^{q'} G_k(\varepsilon)} \quad (7.3.3.)$$

c'est-à-dire sous la forme $\underline{\underline{M}}_l \underline{f}_l = \underline{\underline{M}}_r \underline{f}_r$, où le vecteur \underline{f}_r est un vecteur de dimension q_r qui représente les q_r réservoirs du système, et où le vecteur \underline{f}_l de dimension q_l qui représente les q_l noeuds "libres". En posant $\underline{\underline{M}}_f = \underline{\underline{M}}_l^{-1} \underline{\underline{M}}_r$, on obtient : $\underline{f}_l(\varepsilon) = \underline{\underline{M}}_f(\varepsilon) \cdot \underline{f}_r(\varepsilon)$. C'est exactement par ce mécanisme qu'on a pu calculer au chapitre précédent la phase aux noeuds "libres" en fonction de la phase aux différents réservoirs.

On peut alors exprimer, pour les p fils d'indice j, les différences de fonctions de distribution sous forme matricielle $(f_{\text{gauche}}(\varepsilon) - f_{\text{droite}}(\varepsilon))_j = (\underline{\underline{M}}(\varepsilon) \cdot \underline{f}_r(\varepsilon))_j$, où la matrice $\underline{\underline{M}}$ a p lignes et q_r colonnes. Il faut noter que la matrice $\underline{\underline{M}}$ dans ce modèle est indépendante des fonctions de distribution dans les réservoirs. On a alors : $I_j(\varepsilon) = G_j(\varepsilon) (\underline{\underline{M}}(\varepsilon) \cdot \underline{f}_r(\varepsilon))_j$. C'est ainsi que l'on détermine la matrice de conductances $\underline{\underline{G}}(\varepsilon)$ qui sert de point de départ à la méthode de calcul du circuit présentée en Annexe A3 : $\underline{\underline{G}}_{ij}(\varepsilon) = \underline{\underline{M}}_{ij}(\varepsilon) G_i(\varepsilon)$.

Jusqu'à présent, les expressions de la matrice $\underline{\underline{M}}$ et donc de $\underline{\underline{G}}$ n'ont pas été calculées numériquement, mais ont été déterminées "à la main" pour chaque géométrie rencontrée. On voit cependant qu'il faut savoir calculer des intégrales de la forme : $\int g(\varepsilon) \partial_V f(\varepsilon) d\varepsilon$ et $\int g(\varepsilon) \partial_T f(\varepsilon) d\varepsilon$, où $g(\varepsilon)$ provient de combinaisons entre les différentes valeurs des conductances spectrales obtenues d'après la solution des équations d'Usadel, et ne dépend donc que de la géométrie du système.

3.2.1. Calcul des intégrales

On doit calculer des intégrales de la forme :

$$(g * \partial_V f)(T, V) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) \frac{1}{4kT} \frac{1}{\cosh^2 \frac{eV - \varepsilon}{2kT}} d\varepsilon \quad (7.3.4.)$$

et

$$(g * \partial_T f)(T, V) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) \frac{1}{4kT^2} \frac{-eV + \varepsilon}{\cosh^2 \frac{eV - \varepsilon}{2kT}} d\varepsilon \quad (7.3.5.)$$

où $*$ est le produit de convolution. La fonction $\left(4kT \cosh^2 \frac{eV - \varepsilon}{2kT}\right)^{-1}$ a un "pic" très prononcé autour de la valeur $\varepsilon = eV$. De plus, l'intervalle d'intégration est infini, ce qui ne peut pas manquer de poser des problèmes d'évaluation.

En posant le changement de variable : $\xi = \tanh \frac{eV - \varepsilon}{2kT}$, on se ramène à des intégrales définies sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$(g * \partial_V f)(T, V) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g\left(eV - kT \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\right) d\xi \quad (7.3.6.)$$

et

$$(g * \partial_T f)(T, V) = -\frac{k}{2} \int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) g\left(eV - kT \ln\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\right) d\xi \quad (7.3.7.)$$

Ainsi, on cherche à intégrer des fonctions sur un intervalle aux bords duquel elle n'est pas définie. De plus, l'évaluation de la fonction à intégrer demande parfois de nombreuses opérations : il faudra donc minimiser le nombre d'évaluations de la fonction.

L'algorithme récursif de calcul des intégrales est donné en Annexe A.4. Les avantages sont surtout que le nombre d'étapes nécessaires à une évaluation précise est très limité (erreur inversement proportionnelle au cube du nombre de points d'évaluations), que la fonction peut être définie sur un intervalle ouvert, et enfin que l'algorithme va automatiquement subdiviser plus finement les endroits où la fonction a des variations rapides.

La programmation de cette intégration a été utilisée dans beaucoup d'autres cas (par

exemple, dans le cas de la jonction SNS sous le gap).

3.2.2. Evaluation des fonctions à intégrer

Le calcul numérique des fonctions notées ci-dessus $g(\epsilon)$ n'est pas aisé : il demande de connaître la solution des équations d'Usadel à chaque énergie ϵ . Pour éviter de passer trop de temps à ces évaluations, une solution choisie a été de tabuler les conductances $g_k(\epsilon)$ pour un nombre fini d'énergies, en prenant soin d'effectuer un plus grand nombre d'évaluations dans les régions où les variations sont les plus rapides. Comme ceci, les équations d'Usadel sont résolues une fois pour toutes. On peut ainsi mémoriser les fonctions $g_k(\epsilon)$ comme un ensemble d'abscisses et d'ordonnées, et retrouver chaque valeur par extrapolation entre deux points après une recherche par dichotomie parmi les différentes abscisses.

Notes

[1] La recherche d'extrémum est effectuée de manière itérative. A partir de 3 points, on trouve un point plus proche de l'extrémum en supposant que la fonction dont il faut trouver l'extrémum est localement une parabole.

[2] La bibliothèque "Manip" a été programmée par L.Puech et A.Benoit.

Conclusion

Dans ce travail de thèse, nous avons dans un premier temps tenté de décrire de manière cohérente les théories en vigueur qui permettent de décrire des échantillons de taille mésoscopique où un supraconducteur est mis en contact avec le métal normal. Des mesures ont été effectuées dans le cas d'échantillons diffusifs, qui mettent en évidence un comportement fortement non linéaire de la conductance différentielle. Nous avons montré expérimentalement, en particulier, qu'un maximum de conductance apparaît pour les énergies de l'ordre de l'énergie de Thouless, qui est l'énergie associée au temps que mettent les électrons à parcourir l'échantillon. Nous avons constaté expérimentalement, par des mesures dans la configuration Aharonov-bohm, que cette augmentation de conductance est due à la cohérence induite dans le métal normal par la présence du supraconducteur. Nous avons montré que cette cohérence est une cohérence à longue portée, c'est à dire que la cohérence des électrons d'énergie proches de l'énergie de Fermi persiste même lorsque la température est proche de la température de transition du supraconducteur. Nous avons remarqué un bon accord avec la théorie des fonctions de Green quasiclassiques. Nous avons souligné l'importance primordiale des parties de l'échantillon souvent considérées comme extérieures et modélisées trop souvent par des réservoirs parfaits.

Au cours de ce travail, une technique permettant la fabrication d'échantillon comprenant du niobium à des échelles très inférieures au micron a été développée. Cette technique Tricouche permet de déposer plusieurs métaux, dont le Niobium, de manière auto-alignée. Une autre technique originale, permettant d'introduire de l'oxygène ultra-pur dans un bâti à Ultra-Haut-Vide à partir de l'air, a été élaborée afin de permettre un meilleur contrôle de l'oxydation des barrières Tunnel. Cette technique sera l'objet de développements futurs. Enfin, un programme a été écrit en langage C++ et permet d'effectuer des comparaisons entre théorie et expériences dans des géométries de nanocircuits quelconques.

Nous avons enfin préparé les premiers échantillons pour des expériences futures concernant la mesure de la densité d'états dans une jonction SNS en fonction de la différence des phases des deux supraconducteurs, ainsi que la mesure de l'effet de relaxation dans la Jonction SNS soumise à l'effet Josephson alternatif.

ANNEXES

A.1. L'état BCS

Le but de cette annexe est de présenter la théorie BCS, à l'aide des schémas de représentation introduits au chapitre théorie, de manière à effectuer des comparaisons.

Plaçons-nous dans le cas d'un métal massif. Le point de départ de la théorie BCS est une interaction attractive électron-électron, qui se traduit par le hamiltonien suivant, écrit en seconde quantification. Les opérateurs $c_{k\sigma}^+$ sont les opérateurs de création d'un électron de spin σ , et de vecteur d'onde k .

$$H - \mu N = \sum_{k\sigma} \xi_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - \alpha \sum_{qkk} c_{k+q/2\uparrow}^+ c_{-k+q/2\downarrow}^+ c_{-k'+q/2\downarrow} c_{k'+q/2\uparrow} \quad (A.1.1)$$

Ici, μ est le potentiel chimique, N est l'opérateur nombre de particules. Le premier terme décrit le hamiltonien cinétique habituel. Les énergies ξ_k sont les énergies des états d'indice k , et sont repérées par rapport au potentiel chimique. On commence par faire une approximation de champ moyen. Dans une telle approximation, il est nécessaire de fixer a priori la symétrie du système. On pose $\Delta(q) = -\alpha \Sigma < c_{-k+q/2\downarrow} c_{k+q/2\uparrow} >$. Δ est le paramètre d'ordre supraconducteur. Dans un premier temps, on prend $q=0$ (paramètre d'ordre de vecteur d'onde nul). Notons $\Delta(0)=\Delta$. Pour se ramener à un formalisme où le hamiltonien conserve le nombre de particules, introduisons un nouvel opérateur fermion : $a_{k\uparrow}^+ = c_{k\uparrow}^+$ (créé un électron en $k\uparrow$) et $a_{k\downarrow}^+ = c_{-k\downarrow}^+$ (un trou en $k\downarrow$). C'est équivalent à l'introduction des opérateurs $\phi_\sigma^+(r)$ dans le chapitre théorie. On peut se représenter alors le métal normal comme dans le chapitre théorie (paragraphe 1.1., figure (1.1.1))

$$H - \mu N = \sum_k \xi_k a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} + \sum_k -\xi_k a_{k\downarrow}^+ a_{k\downarrow} + \sum_k \Delta a_{k\uparrow}^+ a_{k\downarrow} + \sum_k \Delta^* a_{k\downarrow}^+ a_{k\uparrow} \quad (A.1.2)$$

à une énergie constante près.

On voit que ce terme supplémentaire couple les états de même k des deux branches, avec une énergie Δ . Il se produit donc un croisement de niveaux, et les états propres du système sont alors des mélanges d'états d'électrons et de trous, un gap s'ouvre entre $-\Delta$ et $+\Delta$. Les représentations du supraconducteur et du métal normal sont alors exactement les mêmes que celle de la figure (1.1.1) du chapitre 1. On peut même caractériser ces états propres : la matrice 2×2 à diagonaliser est :

$$\begin{pmatrix} \xi_k & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

Cette matrice est exactement la matrice (1.1.4) du chapitre 1.

La diagonalisation est très facile si Δ est réel positif en posant l'angle θ_k tel que $\sin 2\theta_k = \Delta / \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$ et $\cos 2\theta_k = -\xi_k / \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2}$. On trouve des énergies propres $\pm \sqrt{\Delta^2 + \xi_k^2} = \pm \epsilon_k$, associées aux états propres $(\cos \theta_k a_{k\uparrow}^+ + \sin \theta_k a_{k\downarrow}^+) |0\rangle$ et $(-\sin \theta_k a_{k\uparrow}^+ + \cos \theta_k a_{k\downarrow}^+) |0\rangle$. L'état $|0\rangle$ représente l'état sans électron $+k\uparrow$, ni trou $-k\downarrow$.

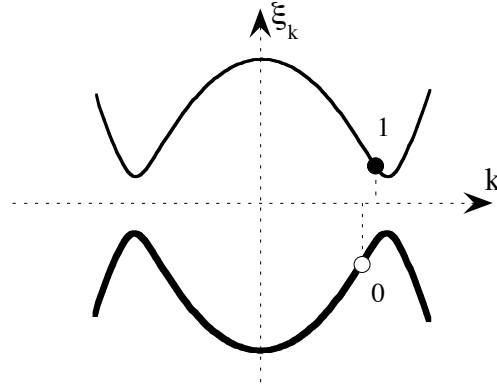
L'état fondamental est alors celui où tous les états d'énergie inférieure à μ sont remplis. On obtient :

$$\prod (u_k a_{k\downarrow}^+ + v_k a_{k\uparrow}^+) |0\rangle \quad \text{où} \quad u_k = \sin \theta_k \quad \text{et} \quad v_k = \cos \theta_k \quad (\text{A.1.4})$$

où l'état $|0\rangle$ est cette fois défini par $|0\rangle = \prod c_{-k\downarrow}^+ |\phi_0\rangle$, c'est-à-dire sans électron \uparrow , ni trou \downarrow , l'état $|\phi_0\rangle$ est l'état vide d'électron. On obtient l'état fondamental $\prod (u_k + v_k c_{k\uparrow}^+ c_{k\downarrow}^+) |\phi_0\rangle$, qui est l'état BCS "habituel". Dans cet état fondamental, l'occupation des niveaux électroniques individuels n'est pas la distribution de Fermi à température nulle. Ceci montre que la transition de l'état normal vers l'état supraconducteur coûte de l'énergie cinétique. On voit aussi que la charge associée à chaque état propre est donnée par : $v_k^2 - u_k^2$ pour les énergies négatives, et $u_k^2 - v_k^2$ pour les énergies positives. Ainsi, la charge totale n'est pas bien définie dans cette description. Pour qu'elle le soit, comme dans le cas où s'intéresse au blocage de Coulomb, l'état fondamental est donné par la somme d'états fondamentaux avec Δ complexe de phase entre zéro et 2π , projetée sur la charge. On se rend compte alors que la projection de l'état de base décrit ici sur les états de charge impaire est nulle, et donc qu'un tel état fondamental n'existe que pour un nombre pair

d'électrons (notion de paires de Cooper). Si le nombre d'électrons est impair, il restera alors toujours au moins une excitation dans le métal.

Dans cette description, les excitations du système correspondent pour chaque valeur de k à : soit le niveau le plus bas est vidé (0), soit le plus haut est rempli (1). Le schéma ci contre montre une représentation de ces excitations. On retrouve les formules de Bogoliubov :



$$\begin{aligned}\gamma_{k0}^+ &= (v_k a_{k\uparrow}^+ + u_k a_{k\downarrow}^+)^+ \\ &= v_k a_{k\uparrow} + u_k a_{k\downarrow} = u_k c_{-k\downarrow}^+ + v_k c_{k\uparrow}^+ \\ \gamma_{k1}^+ &= -u_k a_{k\uparrow}^+ + v_k a_{k\downarrow}^+ = v_k c_{-k\downarrow} - u_k c_{k\uparrow}^+\end{aligned}$$

qui donnent les opérateurs de création et d'annihilation de ces excitations (quasiparticules). Les quasiparticules portent une charge non nulle, ce qui pourra provoquer des déséquilibres de charge dans le supraconducteur. Par exemple, une quasiparticule correspondant à un état d'énergie négative vide (cercle vide sur le schéma) contient une charge $u_k^2 - v_k^2$, qui n'est pas entière. Cette "séparation" de la charge et du nombre de quasiparticules est illustrée en particulier dans le fait que les charges ne diffusent pas de la même façon que les quasiparticules (chapitre 1, paragraphe 1.5)

On voit que l'énergie minimum des quasiparticules est Δ , la valeur de Δ étant fournie par self-consistance, en reprenant la définition de Δ :

$$\Delta = -\alpha \sum \langle a_{k\downarrow}^+ a_{k\uparrow} \rangle = -\alpha \sum u_k v_k \langle \gamma_{k0} \gamma_{k0}^+ \rangle + \alpha \sum u_k v_k \langle \gamma_{k1}^+ \gamma_{k1} \rangle.$$

Les termes $\langle \gamma_{k0} \gamma_{k0}^+ \rangle$ et $\langle \gamma_{k1}^+ \gamma_{k1} \rangle$ représentent respectivement l'occupation des états $\epsilon_k < 0$, et $\epsilon_k > 0$. Si on note $f(\epsilon_k)$ la distribution de Fermi-Dirac à la température T , et $f(\epsilon_k > 0) = -u_k v_k$, $f(\epsilon_k < 0) = v_k u_k$ (pour chaque état plein, on a $f(k) = -\langle a_{k\downarrow}^+ a_{k\uparrow} \rangle$), alors on obtient:

$$\Delta = \alpha \sum f(\epsilon_k) f(k) \quad (A.1.5)$$

La somme porte sur tous les états. Ainsi, f est une quantité qui, multipliée par la fonction de distribution, donne la contribution de chaque état à l'amplitude de paires totale. Si l'occupation de états ne dépend que de leur énergie (par exemple à l'équilibre), on peut même définir $f(\epsilon)$ comme la somme de tous les $f(k)$ pour ϵ_k entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$, transformant la somme sur les états en intégrale sur l'énergie. $f(\epsilon)$ représente une quantité qui, multipliée par

la fonction de distribution, donne la contribution de chaque énergie à l'amplitude de paires totale (de la même manière que la densité d'états, multipliée par la fonction de distribution, donne la contribution de chaque énergie au nombre total de particules). Le paramètre d'ordre Δ est l'amplitude de paires multipliée par le paramètre d'interaction, comme dans le paragraphe (1.4.) du chapitre 1 (théorie). L'équation (A.1.4) est à comparer avec l'équation (1.3.17) du chapitre 1.

Notons que, comme $f(\epsilon_k < 0) = 1 - f(\epsilon_k > 0)$, on a aussi $\Delta = \alpha \Sigma (1 - 2f(\epsilon_k)) f(k)$, si la somme porte sur les excitations.

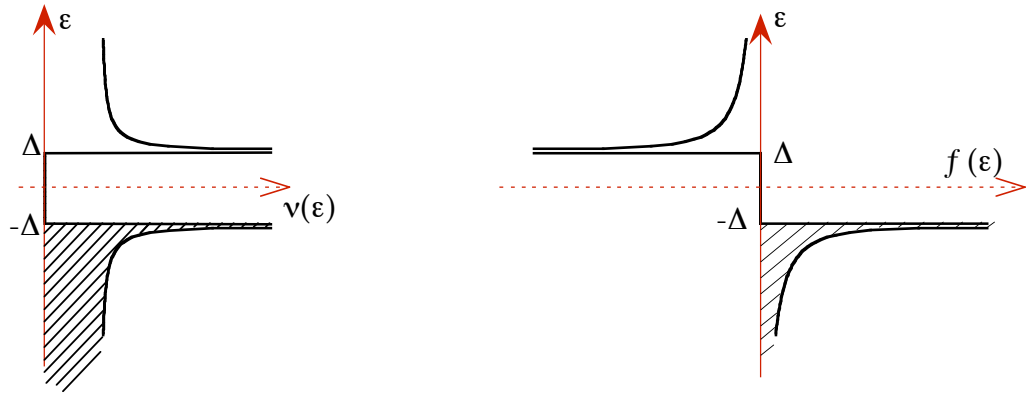


Figure A.1.1. : A gauche, la densité des états en fonction de leur énergie. L'énergie est représentée sur une échelle verticale, tandis que la densité d'états est en abscisse. Les états pleins (à température nulle) sont représentés en hachurés. On obtient ainsi une représentation de type "semi-conducteur". A droite, la quantité $f(\epsilon)$ est représentée de la même manière. En particulier, la présence d'une quasiparticule (par exemple un état d'énergie positive occupé) diminue l'amplitude de paires, car alors $f(\epsilon) < 0$.

L'existence d'un courant supraconducteur correspond au cas plus général où le vecteur d'onde de Δ n'est pas nul, On peut refaire exactement le même travail, mais en posant $a_{k\uparrow}^+ = c_{k+q/2\uparrow}^+$ et $a_{k+q/2\downarrow}^+ = c_{-k+q/2\downarrow}^-$. On remarque d'abord que si on applique un opérateur translation, d'un vecteur r , à la définition de $\Delta(q)$, alors un déphasage e^{iqr} apparaît, ce qui justifie l'appellation de q "vecteur d'onde de Δ ". De même, il se produit un croisement

de niveaux, et les énergies propres sont $\varepsilon_{k\pm}$, données sur le schéma (figure A.1.2).

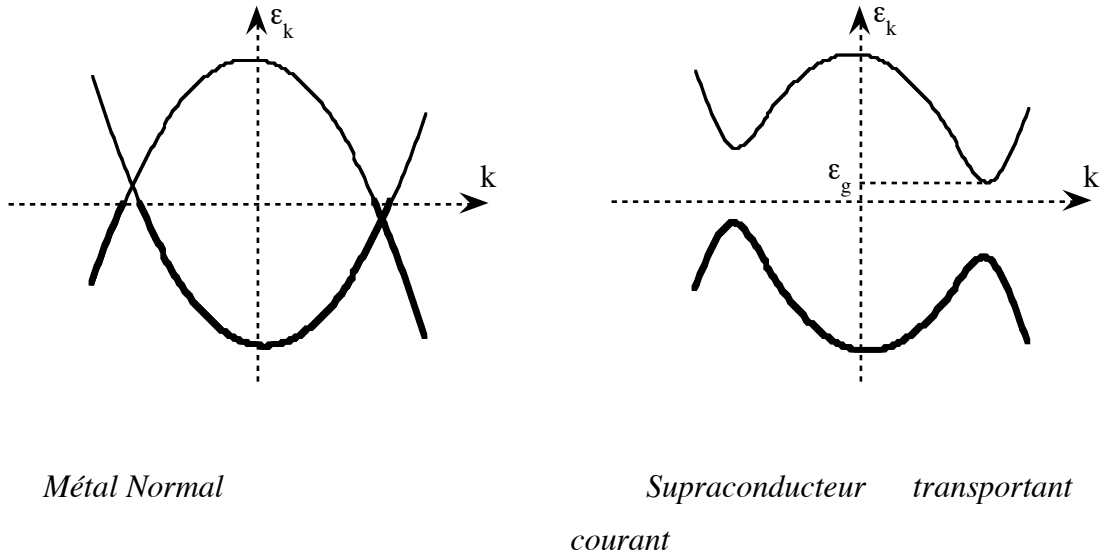


Figure A.1.2 : Energies propres ε_k en fonction du vecteur d'onde k . On voit le croisement des niveaux.

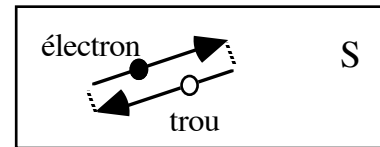
Les états propres ont exactement la même expression, en remplaçant Δ par $|\Delta|$ et ξ_k par $\xi'_k = \frac{1}{2}(\xi_{-k+q/2} + \xi_{k+q/2})$ (on a $\xi'_k \approx \xi_k$). C'est-à-dire que l'on a : $\sin 2\theta_k = |\Delta| / \sqrt{|\Delta|^2 + \xi_k'^2}$, et $\cos 2\theta_k = -\xi'_k / \sqrt{|\Delta|^2 + \xi_k'^2}$. Si on définit le déphasage φ par $\Delta = |\Delta|e^{i\varphi}$, alors les états propres sont donnés comme précédemment par les opérateurs $\gamma_{k0} = v_k a_{k\uparrow}^+ + u_k a_{k\downarrow}^+$ et $\gamma_{k1}^+ = -u_k^* a_{k\uparrow}^+ + v_k^* a_{k\downarrow}^+$, où cette fois-ci, $u_k = e^{i\varphi/2} \sin \theta_k$ et $v_k = e^{-i\varphi/2} \cos \theta_k$. L'interprétation physique pour les nombres u_k et v_k est qu'il s'agit, pour chaque état propre, de l'amplitude pour trouver un électron ou un trou. Remarquons ensuite que l'énergie minimum d'une excitation ε_g , c'est-à-dire le gap, est inférieure au potentiel de paires Δ . Si on fait un calcul complet self-consistent de Δ , on peut trouver qu'il existe certaines conditions pour lesquelles $\varepsilon_g = 0$, mais où Δ n'est pas nul (supraconductivité gapless)[1]. Dans cet état fondamental, la somme des courants transportés à une énergie donnée n'est pas nulle. Il y a ainsi un courant supraconducteur dans l'état fondamental, qui est un courant à l'équilibre. On peut définir une quantité $J(\varepsilon)$ qui représente le courant transporté à l'énergie ε lorsque les états sont pleins. Multipliée par une fonction de distribution, $J(\varepsilon)$ donne la contribution de chaque énergie au courant supraconducteur total, on pourrait le représenter en fonction de l'énergie de la même manière que f ou que la densité d'états. Ce courant supraconducteur est lié à une variation spatiale de la phase de Δ .

Enfin, le spectre des excitations est décalé de part et d'autre de la surface de Fermi, et on peut en déduire que dans ce cas, la densité d'états est élargie par rapport au cas sans courant : cela vient du fait que les états couplés par Δ ne sont plus des états symétriques par renversement du temps.

Dans le cas d'un supraconducteur diffusif massif, la représentation précédente est encore valable : il suffit de remplacer les états de vecteurs d'onde $k \uparrow$ et $-k \downarrow$ par les états propres du système dans l'état normal d'indices $j \uparrow$ et $-j \downarrow$, symétriques par renversement du temps [2].

Mettons dans le système un électron dans un état $j \uparrow$ à l'instant $t=0$. Du fait de la supraconductivité, cet état n'est pas un état propre du système, mais est la superposition des deux états propres $|-\rangle = \gamma_{j0}|0\rangle$ et $|+\rangle = \gamma_{j1}^+|0\rangle$ qui sont eux-mêmes des superpositions d'états $|e\rangle = a_{j\uparrow}^+|0\rangle$ et $|h\rangle = a_{j\downarrow}^+|0\rangle$. Ainsi, l'état évolue en fonction du temps. Dans la situation Δ réel, les probabilités sont $1 - 4F^2(\epsilon)\sin^2(\epsilon t / \hbar)$ pour $|e\rangle$ et $4F^2(\epsilon)\sin^2(\epsilon t / \hbar)$ pour $|h\rangle$. Ainsi, notre électron se voit régulièrement transformé en trou (symétrique par renversement de temps).

De plus cette transformation régulière se fait avec une fréquence ϵ / \hbar , c'est-à-dire sur une longueur typique $\hbar v_F / \epsilon$. Pour les états



tels que $\xi_j \ll \Delta$, alors $\epsilon \approx \Delta$ et cette longueur typique est $\hbar v_F / \Delta$ dans le cas d'un supraconducteur propre, et $\sqrt{\hbar D / \Delta}$ dans le cas d'un supraconducteur diffusif. C'est la longueur de cohérence ξ du supraconducteur.

[1] Bardeen, Rev. Mod. Phys. 34, 667 (1962)

[2] Anderson, J. Phys. Chem. Solids 11, 26, (1959)

A.2. Conductance spectrale d'un circuit

On se propose de faire apparaître une notion conductance dépendant de l'énergie (conductance spectrale) dans un circuit quelconque constitué de plusieurs fils normaux qui sont connectés à un système quelconque dans le cas où un supraconducteur est présent. On mettra aussi en avant les formules qui servent au calcul des courants dans chaque fil dans un tel cas.

Dans le cas où la supraconductivité est présente, on peut alors généraliser la formule de Landauer (en calculant le courant qui entre par chaque fil). Nous notons $S_{ij,ee}$, $S_{ij,eh}$, $S_{ij,he}$ et $S_{ij,hh}$ les matrices qui décrivent les transmissions des fils i vers les fils j). Une symétrie existe entre les branches "électrons" et "trous" :

$$S_{ij,ee}(\varepsilon) = \left[S_{ij,hh}(-\varepsilon) \right]^* \quad \text{et} \quad S_{ij,eh}(\varepsilon) = - \left[S_{ij,he}(-\varepsilon) \right]^* \quad (\text{A.2.1.})$$

Le courant qui entre dans le fil i est [1,2]: $I_i = \int I_i(\varepsilon) d\varepsilon$, où $I_i(\varepsilon)$ est le courant transporté à chaque niveau d'énergie, et où :

$$I_i(\varepsilon) = \frac{2e}{h} \sum_j f_{ej} \text{Tr} \left(\delta_{ij} - S_{ij,ee} S_{ij,ee}^+ + S_{ij,he} S_{ij,he}^+ \right) - \frac{2e}{h} \sum_j f_{hj} \text{Tr} \left(\delta_{ij} - S_{ij,hh} S_{ij,hh}^+ \right) \quad (\text{A.2.2.})$$

$f_{ej}(\varepsilon) = f_j(\varepsilon - \mu_j)$ et $f_{hj}(\varepsilon) = f_j(\varepsilon + \mu_j)$ sont les fonctions de distribution des électrons et des trous dans le réservoir j . Mis sous cette forme, le courant à chaque énergie est la somme de deux termes. Le premier terme décrit la partie du courant due à l'injection, à partir de chaque réservoir j , d'électrons dans le système qui arrivent dans le brin i sous la forme d'électrons (signe -) ou de trous (signe +). Pour faire apparaître une conductance spectrale, on peut noter $T_{ij0}(\varepsilon) = \text{Tr}(S_{ij,ee}(\varepsilon) S_{ij,ee}^+(\varepsilon))$ et supposer que $T_{ij0}(\varepsilon) = T_{ij0}(-\varepsilon)$ de même pour $T_{ijA}(\varepsilon)$ (A pour Andréev). Si cette deuxième égalité n'est pas vérifiée, on peut calculer la somme des courants en ε et en $-\varepsilon$ et faire apparaître une conductance spectrale comprenant à la fois les deux contributions des niveaux ε et $-\varepsilon$. Il vient :

$$I_i(\epsilon) = \frac{2e}{h} \sum_j \left(f_{ej}(\epsilon) - f_{hj}(\epsilon) \right) \left(N_i \delta_{ij} - T_{ij0}(\epsilon) + T_{ijA}(\epsilon) \right) \quad (\text{A.2.3.})$$

Où N_i est le nombre de canaux.

Notons que, dans le cas où l'énergie est nulle (partie linéaire de la conductance à température nulle), la formule (A.2.1) devient :

$$I_i = \frac{2e}{h} \sum_j \mu_j \text{Tr} \left(\delta_{ij} - S_{ij,ee} S_{ij,ee}^+ + S_{ij,he} S_{ij,he}^+ \right) \quad (\text{A.2.4.})$$

Où les μ_j sont les potentiels chimiques dans les différents réservoirs.

[1] T.Martin, communication privée

[2] Lambert, J phys cond matt 5 4187 (1993)

A.3. Calcul de la conductance d'un circuit de proximité quelconque où un seul supraconducteur est présent

On cherche à déterminer les caractéristiques différentielles théoriques obtenues en imposant des courants ou des tensions à partir de réservoirs normaux. On note V_i les tensions dans les réservoirs (comptées par rapport à la tension du supraconducteur), I_i les courants sortant de chacun des réservoirs, f_i les fonctions de distributions et T_i les températures dans les réservoirs. Ces températures dépendent a priori de l'ensemble des courants (ou des tensions) par l'intermédiaire de différents phénomènes de chauffage (voir chapitre 3). Dans ce paragraphe, on utilise des notations matricielles condensées qui permettent de présenter les calculs de manière synthétique. Il est bien entendu que ces calculs ont été faits in extenso pour chaque géométrie calculée.

On peut exprimer les N courants I_i comme dépendant linéairement des N fonctions de distribution $f_i(\varepsilon)$. Pour chaque géométrie, on peut alors déterminer une matrice $\underline{\underline{G}}$ de dimension N telle que $\underline{I}(\varepsilon) = \underline{\underline{G}}(\varepsilon) \cdot \underline{f}(\varepsilon)$, le vecteur \underline{I} étant défini par $(I_1 \ I_2 \ \dots \ I_N)$, de même pour le vecteur \underline{f} . La méthode de calcul de $\underline{\underline{G}}$ est exposée au chapitre 7 (consacré à la résolution numérique).

Les courants dans chaque fil peuvent être déterminés par $\underline{I} = \int \underline{\underline{G}}(\varepsilon) \underline{f}(\varepsilon) d\varepsilon$.

Si on note $\underline{\underline{\partial_V f}}(\varepsilon)$ et $\underline{\underline{\partial_T f}}(\varepsilon)$ les matrices diagonales $(\partial_V f(V_1, T_1) \ \dots \ \partial_V f(V_N, T_N))$ et $(\partial_T f(V_1, T_1) \ \dots \ \partial_T f(V_N, T_N))$ où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B} \partial_T f(V, T) &= \frac{\varepsilon - eV}{4k_B^2 T^2} \left(\cosh^2 \left(\frac{\varepsilon - eV}{2k_B T} \right) \right)^{-1} \\ \frac{1}{e} \partial_V f(V, T) &= \frac{1}{4k_B T} \left(\cosh^2 \left(\frac{\varepsilon - eV}{2k_B T} \right) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3.1.})$$

En différentiant l'équation donnant l'expression de \underline{I} , il vient :

$$\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} = \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) + \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} \quad (\text{A.3.2.})$$

C'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} = \left[\underline{\underline{1}} - \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} \right]^{-1} \cdot \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \quad (\text{A.3.3.})$$

En règle générale, on impose des courants dans les fils (par exemple 0 pour un réservoir non connecté) et on mesure les tensions correspondantes. On obtient alors la matrice des résistances :

$$\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{V}} = \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right)^{-1} - \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right)^{-1} \cdot \left(\int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} \quad (\text{A.3.4.})$$

Si en plus, on suppose que la supraconductivité apporte une correction petite à la matrice des conductances spectrales : $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}} + \delta \underline{\underline{G}}$. Si on note $\underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{N}}} = \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}}^{-1}$, alors la supraconductivité provoque une augmentation de résistance $\delta \underline{\underline{R}} = -\underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}}^{-1} \cdot \delta \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}}^{-1}$. On obtient :

$$\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} \approx \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}} + \int \delta \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon + \left(\int \delta \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}} \quad \text{pour les conductances} \quad (\text{A.3.5.})$$

et

$$\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{V}} \approx \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{N}}} + \int \delta \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{N}}} \, d\varepsilon + \left(\int \delta \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{G}}_{\underline{\underline{N}}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{T}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon \right) \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} \quad \text{pour les} \quad (\text{A.3.6.})$$

résistances.

En conclusion, on peut calculer les conductances d'un circuit quelconque à partir d'un formalisme matriciel. En particulier, si tous les courants sont nuls, alors la température dans les différents réservoirs est minimum et $\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{I}}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}}$, et on a l'expression simple $\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} = \int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} \, d\varepsilon$ pour $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{0}}$. Ceci a pour conséquence que les effets de chauffage disparaissent lorsque toutes les tensions sont nulles. Enfin, lorsque $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{0}}$, on a aussi $\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{f}} = \partial_V f(0) \cdot \underline{\underline{1}}$, où $\partial_V f(0)$ est la fonction "pic" centrée en 0 et de largeur kT , et $\underline{\underline{1}}$ est la matrice identité. Alors $\underline{\underline{\partial}}_{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{I}} = \int \partial_V f(0) \cdot \underline{\underline{G}} \, d\varepsilon$. Ceci signifie que la matrice des conductances est simplement la matrice des conductances spectrales, convoluée par la fonction "pic". Il n'y a donc pas d'effet multi-réservoir à $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{0}}$. Au total, il n'y a pas d'effet de réservoirs quand

toutes les tensions sont nulles.

A.4. Calcul d'intégrales

Sur un intervalle de longueur dx compris entre x et $x+dx$, on sait calculer l'intégrale dI en faisant l'approximation que la fonction f est localement une parabole, en évaluant la fonction en deux points seulement de l'intervalle : $f_g = f(x + \gamma dx)$ et $f_d = f(x + (1 - \gamma)dx)$ avec $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Une approximation possible de l'intégrale dans cet intervalle est alors $dI \approx dx \frac{1}{2}(f_g + f_d)$. On remarque qu'en découpant cet intervalle en $x + \delta dx$ et en $x + (1 - \delta)dx$, on obtient trois intervalles g de x à $x + \delta dx$, m de $x + \delta dx$ à $x + (1 - \delta)dx$ et d de $x + (1 - \delta)dx$ à $x+dx$ dans lesquels on peut obtenir par la même méthode une évaluation plus précise de dI . Si $\delta = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, Les valeurs f_d et f_g qui ont déjà été calculées peuvent resservir, car f_d correspond à f_g dans l'intervalle d , et f_g correspond à f_d dans l'intervalle g . Ainsi, on construit un algorithme récursif :

- évaluation de l'intégrale de a à b , à partir de f_d et f_g (et $dI \approx (b-a)\frac{1}{2}(f_d + f_g)$):
 - évaluer $f_{gg} = f(a + (b-a)(\delta - \gamma))$, $f_{mg} = f(a + \delta + \gamma(b-a)(1 - 2\delta))$,
 $f_{dd} = f(b - (b-a)(\delta - \gamma))$, $f_{md} = f(b - \delta + \gamma(b-a)(1 - 2\delta))$
 - en déduire les intégrales dI_m , dI_d , et dI_g .
 - Si la précision atteinte, évaluée en comparant dI avec $dI_m + dI_d + dI_g$, est suffisante, alors le résultat est : $dI_m + dI_d + dI_g$,
 - sinon, le résultat est la somme suivante :
 - l'évaluation de l'intégrale de a à $a + (b-a)\delta$, à partir de f_{gg} et f_g ,
 - + l'évaluation de $a + (b-a)\delta$ à $b - (b-a)\delta$, à partir de f_{mg} et f_{md} ,
 - + l'évaluation de l'intégrale de $b - (b-a)\delta$ à b à partir de f_d et f_{dd} .

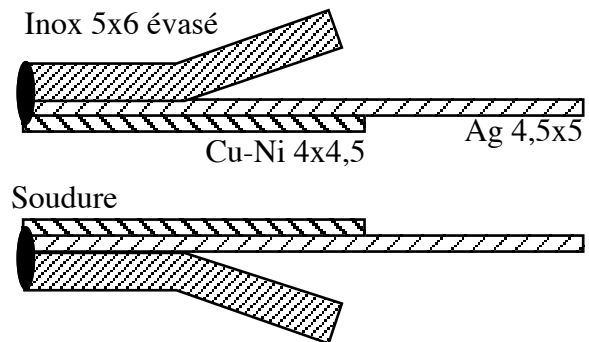
A.5. Techniques de soudure d'un tube d'argent

A.5.1. Soudure directe de l'argent sur l'inox

Prenons une paroi de 0.25 mm d'argent en contact avec une paroi de 0.5 mm d'inox et essayons de réaliser une soudure TIG bord à bord. La température de fusion de l'argent est de 960 °C et celle de l'inox est d'environ 1400 °C. Lorsque la température dépasse 960 °C, l'argent fond, et parce qu'il est un excellent conducteur de chaleur (le meilleur de tous les métaux), une partie importante de l'argent fond d'un seul coup. La paroi d'argent s'"effondre" instantanément et quitte le contact avec la paroi d'inox. On constate à cette occasion que l'argent en fusion mouille assez mal l'inox (formation de gouttelettes). Pour faire face à cette difficulté, on a retenu la solution d'emprisonner l'argent en fusion entre deux parois : une paroi de cuivre-nickel comme tube intérieur et la paroi d'inox à l'extérieur. Le cuivre-nickel a été choisi comme paroi intérieure surtout parce que l'on peut disposer facilement de tubes de cuivre-nickel de diamètre extérieur 4.5 mm.

Figure A.5.1 : Schéma de principe de la soudure étanche Ag - inox. L'étanchéité est de qualité UHV, mais l'aspect général de la soudure est assez "sale", avec des irrégularités et des traces d'oxydation.

La soudure inox-inox (pour la reprise sur inox 5x6 évasé) à proximité a provoqué des fuites, probablement dans cette soudure.



A.5.2. Utilisation d'une brasure argent-cuivre

Une brasure argent-cuivre, constituée exclusivement d'argent et de cuivre dans les proportions eutectiques Ag 71%, Cu 29% a un point de fusion de 778 °C, c'est-à-dire

inférieur à la fois à la température de fusion du cuivre, de l'argent et de l'inox. On peut dès lors espérer braser l'argent et l'inox de cette façon. De plus, la maîtrise d'une technique à base de cette brasure pourrait permettre pour l'UHV des soudures étanches de type cuivre-inox.

Des essais de brasure d'un tube de cuivre sur un tube d'inox ont été effectués à titre préliminaire. Un tube inox 5x6 est emmanché dans un tube de cuivre 6x8. La brasure est fondue au chalumeau. La soudure qui en résulte est étanche et le reste après un passage au chalumeau ou un refroidissement brutal dans l'azote liquide.

On essaie maintenant de braser l'argent sur l'inox (figure A.5.2). On choisit pour cela un tube d'inox 5x6 sur lequel on pourra faire une reprise de soudure. On l'évase pour laisser la place au cordon de brasure, puis on emmanche le tube d'argent 4.5x5 dans lequel se trouve, au niveau de la brasure, un tube de cuivre nickel de 4x4.5 de longueur 9 mm, lequel n'est probablement pas nécessaire à la soudure, mais a un rôle de maintien mécanique. On utilise alors la brasure (plus un décapant approprié) et on obtient une soudure étanche à l'hélium, et qui reste étanche après quelques traitements thermiques.

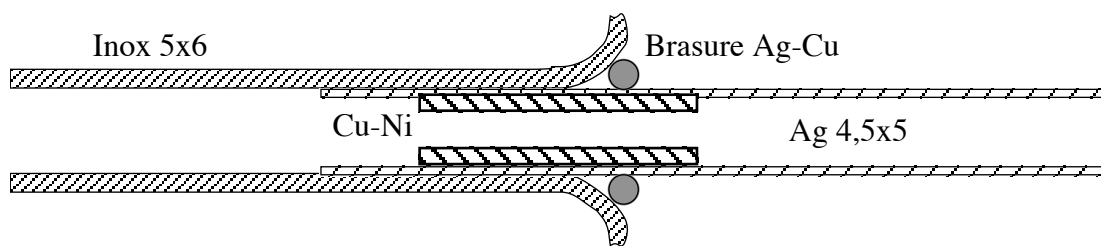


Figure A.5.2 : Dessin de la soudure expliquée dans le texte ci-dessus.

Comme le tube d'argent devra être chauffé, il est a priori préférable de le relier au bâti par un mauvais conducteur de la chaleur. On a donc utilisé la géométrie suivante (figure A.5.3), où on a emmanché le tube d'argent sur un tube d'inox 3.6x4 évasé, après l'avoir évasé pour mettre la brasure. La soudure précédente a été un peu simplifiée, le tube d'inox est dans le tube d'argent. Il n'y a plus de Cu-Ni. La soudure obtenue avait, ici aussi, un vilain aspect, mais était complètement étanche. Un premier montage a été fabriqué à partir de cette soudure.

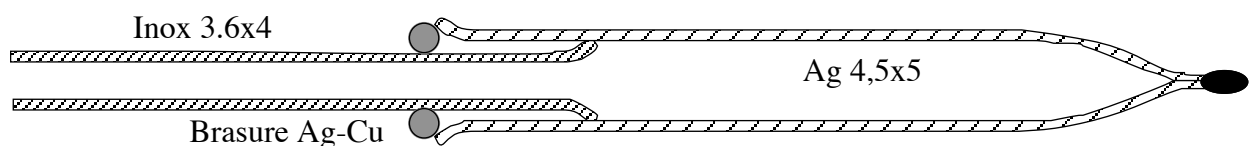


Figure A.5.3 : Dessin de la soudure expliquée dans le texte ci-dessus.

Malheureusement, après quelques heures d'utilisation aux alentours de 550 °C à 600 °C, la soudure a commencé à fuir. Lors de cette première expérience, on a pu constater le passage d'un gaz à travers le dispositif lorsque celui-ci était chaud. L'apparition de la fuite n'a pas laissé le temps de quantifier cette entrée de gaz. Peut-être ne s'agissait-il que d'une fuite à chaud? Cependant, cette fuite a permis de prendre conscience d'un aspect incontournable du problème. Supposons qu'une quantité appréciable d'oxygène traverse la paroi d'argent lorsqu'elle est chaude (c'est depuis le début notre hypothèse de travail), si la soudure est chauffée en même temps que la paroi d'argent, de l'oxygène va immanquablement traverser l'argent au niveau de la soudure. Si le matériau sur lequel l'argent est soudé peut s'oxyder (et c'est le cas de l'inox, ceci d'autant plus qu'il est chaud), alors son oxydation provoquera probablement la fuite de la soudure... Pour éviter ceci, qui explique peut-être l'apparition de la fuite observée, alors il faut : - soit souder l'argent sur un matériau qui ne s'oxyde pas , - soit éviter que la soudure ne soit chauffée en même temps que le tube d'argent.

A.6.Discrétisation des barrières tunnel

Une barrière tunnel de résistance R qui interrompt un fil impose la condition $\sin(\theta^+ - \theta^-) = R\partial_r\theta$. Supposons que sur chaque élément de longueur dx entre r_i et r_{i+1} se trouve une barrière $R_{i+0.5}$. A partir de la relation : $\sin(\theta_{i+1} - \theta_i - dx\partial_r\theta) = R\partial_r\theta$ que l'on développe à dx petit, on obtient en chaque point r_i les approximations suivantes pour les dérivées première et seconde :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r^2\theta(r_i) \approx \frac{\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)}{dx(dx\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + R_{i+0.5})} + \frac{\sin(\theta_{i-1} - \theta_i)}{dx(dx\cos(\theta_{i-1} - \theta_i) + R_{i-0.5})} \\ \partial_r\theta(r_i) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)}{dx\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + R_{i+0.5}} - \frac{\sin(\theta_{i-1} - \theta_i)}{dx\cos(\theta_{i-1} - \theta_i) + R_{i-0.5}} \right) \end{array} \right. \quad (A.6.1.)$$

Partant de ces approximations, on obtient la condition suivante en procédant exactement de la même façon qu'en 1.3.3 dans le chapitre 7 (consacré à la résolution numérique), c'est-à-dire en éliminant $\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) / (dx\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + R_{i+0.5})$:

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k \left(\frac{\sin(\theta_{b_k} - \theta_j)}{dx_k \cos(\theta_{b_k} - \theta_j) + R_k} + \frac{dx_k}{2} U_k(\theta_j) \right) = (f(\theta))(\text{noeud } j) \quad (A.6.2.)$$

où on a placé une barrière de résistance R_k à l'extrémité de chaque fil à une distance $dx/2$ du noeud j . On obtient aussi le long du fil :

$$\frac{\sin(\theta_{i-1} - \theta_i)}{dx(dx\cos(\theta_{i-1} - \theta_i) + R_{i-0.5})} + \frac{\sin(\theta_{i+1} - \theta_i)}{dx(dx\cos(\theta_{i+1} - \theta_i) + R_{i+0.5})} + U(\theta_i) = (f(\theta)) \quad (A.6.3.)$$

Dans le cas, qui a été programmé pour l'instant, où dx est constant et où on a placé une barrière R_k à l'extrémité de chaque fil, on obtient :

-aucun changement par rapport à (7.1.17.) à l'intérieur de chaque fil. En effet, on prend toutes les résistances des barrières égales à 0. La différence avec l'expression précédente est de l'ordre dx^2 , c'est-à-dire de l'ordre de l'erreur déjà commise dans l'expression

de (7.1.17.).

-aux extrémités des fils,

$$\frac{\theta_{i-1} - \theta_i}{dx^2} + \frac{\sin(\theta(\text{noeud } j) - \theta_i)}{dx(dx \cos(\theta(\text{noeud } j) - \theta_i) + R_k)} + U(\theta_i) = (f(\theta))(r_i) \quad (\text{A.6.4.})$$

-aux noeuds,

$$\sum_{k=0}^{q'} G_k \left(\frac{\sin(\theta_{b_k} - \theta_j)}{dx_k \cos(\theta_{b_k} - \theta_j) + R_k} + \frac{dx_k}{2} U_k(\theta_j) \right) = (f(\theta))(\text{noeud } j) \quad (\text{A.6.2.})$$

Le cas où χ n'est pas nul n'a pas encore été programmé dans le cas de barrières.

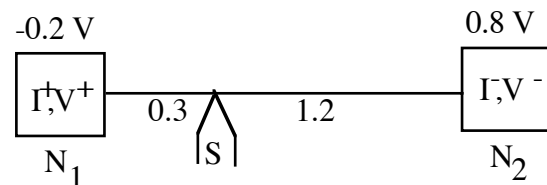
A.7.Compléments à la PRL

Dans ce paragraphe, après avoir présenté la publication dans laquelle le phénomène de ré-entrance a été mesuré pour la première fois, nous ajoutons un complément. En effet, l'échantillon présenté dans cette publication ("boucle 10.6") était mesuré en "quatre-fils". Nous avons vu au chapitre 3 qu'une telle configuration complique beaucoup la géométrie. Le but du complément est de décrire comment on peut rendre compte de l'effet multi-réservoir par un facteur géométrique 1.05.

Passage de 4 à 2 réservoirs dans "boucle 10.6"

Nous avons vu qu'il n'y a pas d'effet de réservoir à tension nulle, nous ne nous sommes donc pas inquiétés de ce problème lorsque nous avons comparé la théorie et les résultats expérimentaux à tension nulle. Nous cherchons à passer de la situation compliquée où 4 réservoirs sont présents, à celle, plus simple, où il y a seulement 2 réservoirs. Nous utilisons le modèle de la figure (A.7.1) qui est le modèle à 2 réservoirs utilisé dans le chapitre 4 et dans l'article, et où les réservoirs correspondent aux positions des prises de tension.

Figure A.7.1 : Schéma à deux réservoirs de l'échantillon "boucle 10.6" présenté au chapitre 4 et dans l'article.



Un deuxième modèle plus précis prend en compte l'effet multi-réservoir. On modélise l'échantillon suivant le schéma suivant (figure A.7.2) où l'on considère que les réservoirs sont les 4 grands plots de contact visibles sur la photo (figure 4.1.2).

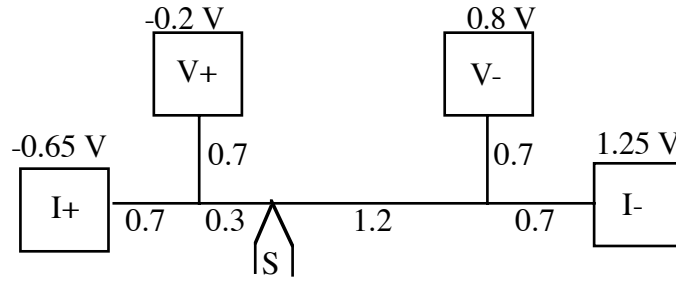


Figure A.7.2 : Valeurs estimées des résistances des différentes parties de l'échantillon d'après la photographie de l'échantillon . L'unité choisie est la résistance d'un fil de 1 μm de longueur. Les tensions dans les différents réservoirs sont indiquées. V est la tension mesurée .

On peut faire l'approximation que les corrections de conductances se limitent aux parties 1 (résistance 0.3) et 2 (résistance 1.2), à cause de l'élargissement et du doublement des fils. Notons $\delta_1(V) = (\delta G_1 / G_1) * \partial_V f(V)$ et $\delta_2(V) = (\delta G_2 / G_2) * \partial_V f(V)$ les corrections relatives de conductance pour chaque partie de fil à une tension V entre les réservoirs notés $V+$ et $V-$. On obtient à l'ordre 1 en la correction de conductance l'équation (A.7.1.):

$$\frac{\delta G}{G} \approx 0.5 \delta_2(1.25 \text{ V}) + 0.3 \delta_2(0.8 \text{ V}) + 0.15 \delta_1(0.65 \text{ V}) + 0.05 \delta_1(0.2 \text{ V}) \quad (\text{A.7.1.})$$

où apparaissent les valeurs des tensions dans les différents réservoirs. On peut remarquer que si $V=0$, alors on est ramené à $0.8 \delta_2 + 0.2 \delta_1$, c'est-à-dire à l'approximation (faite jusqu'ici) de deux réservoirs en considérant les réservoirs $I+, V+$ et leurs deux fils de résistance 0.7 (voir schéma) comme un réservoir unique et de même pour $I-, V-$ et leurs deux fils de résistance 0.7.

La partie principale de la correction de la conductance (figure A.7.3), lorsque la tension V n'est pas nulle, provient de deux contributions venant de la partie 2, mais avec des tensions de 1.25V, 0.8V et des coefficients respectifs d'environ 0.5, et 0.3.

La somme de ces deux contributions est presque équivalente à une seule contribution avec une tension 1.05V. La conductance en fonction de la tension obtenue à très basse température peut alors être considérée comme la conductance spectrale de l'échantillon à l'énergie 1.05 V. On peut utiliser cette conductance spectrale "expérimentale" pour recalculer la courbe qu'elle implique en fonction de la température. La figure (A.7.4) montre la comparaison entre la courbe expérimentale de la conductance en fonction de la température et la courbe obtenue à partir de la conductance spectrale expérimentale.

Figure A.7.3 : Correction de la conductance. La correction totale représentée en trait épais correspond à la somme de la contribution de tension 1.25V et de la contribution de tension 0.8V, représentées en trait fin.

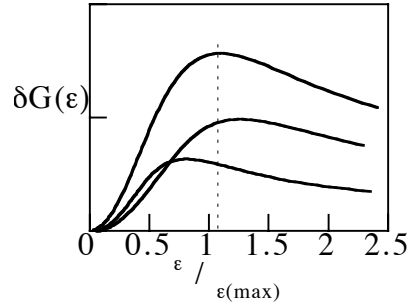
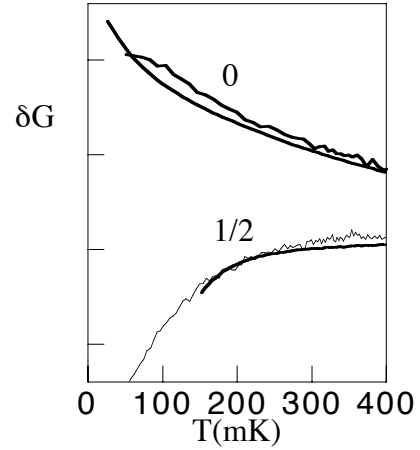


Figure A.7.4 : Comparaison entre la courbe expérimentale de la conductance en fonction de la température (trait fin), et la courbe obtenue à partir de la conductance spectrale expérimentale (trait épais), à flux nul et à demi-flux.



Aux hautes températures, l'accord n'est pas mauvais. Aux températures plus basses, le décalage dû aux effets de chauffage persiste.

En conclusion, parce que les tensions dans les 4 réservoirs ne sont pas très différentes, et parce que la conductance spectrale ne présente pas de structure très aiguë (pas de "pic"), alors nous pouvons rendre qualitativement compte de l'effet multi-réservoir par un facteur géométrique (1.05). Il reste les écarts dus aux effets de " chauffage".

In this work, we study how the conductance of a mesoscopic-scale normal metal circuit is modified by the action of a superconductor. First we describe different existing theories, and then we present very low temperature (down to 20 mK) measurements demonstrating the non-local effects appearing in the conductance of the normal metal induced by the superconductivity. We show that the metallic conductance is strongly energy dependant, and that the energy scale is the Thouless energy. In an Aharonov-Bohm geometry, interference experiments demonstrate the long range quantum coherence of electron pairs ($2e$) in the normal metal. The experimental results are explained in detail in the framework of the quasiclassical Green's functions theory. Comparison with theory shows the important influence of the reservoir-like external parts of the sample. We present a novel technology allowing the fabrication on hybrid Niobium-Copper mesoscopic structures. In order to control the formation of oxide barriers, we developed an Ultra-High-Vacuum valve extracting pure Oxygen from the ambient air. A C++ program is described used for the calculation of the conductance of any hybrid circuit made of normal and superconducting metal. When two superconductors, connected through a normal metal, are held at a constant voltage, the a.c. Josephson effect modulates the energy-dependant density of states in the normal metal. We propose an experiment which will evidence the influence of the variations of the density of states on the transport properties of the electrons.

Keywords :

Superconductivity
Quantum coherence
Mesoscopic physics
Nanofabrication
Tunnel junctions
Josephson effect
Nanocircuits
Hot electrons

Nous avons étudié l'action à l'échelle mésoscopique de la présence d'un supraconducteur sur la conductance d'un circuit de métal normal. Après une discussion de différentes théories concernant ce sujet, nous présentons des mesures à très basse température (20 mK) mettant en évidence l'action non locale de la supraconductivité sur la conductance métallique. Nous montrons que la conductance du métal normal est alors fortement dépendante de l'énergie des électrons, l'énergie caractéristique étant l'énergie de Thouless. Une expérience d'interférence effectuée dans la configuration Aharonov-Bohm met en évidence la portée de la cohérence quantique de paires d'électrons dans le métal normal. Nous effectuons une comparaison détaillée avec la théorie des fonctions de Green quasiclassiques. Cette comparaison met en évidence le rôle important joué par les parties extérieures de l'échantillon qui constituent les réservoirs. Nous présentons une technique originale de fabrication d'échantillons mésoscopiques hybrides de Niobium et de Cuivre. De plus, afin de pouvoir contrôler la formation des barrières tunnel, nous avons développé une vanne permettant de maîtriser l'entrée, dans une enceinte à Ultra-Vide, d'oxygène pur à partir de l'air. Nous décrivons un programme écrit en langage C++, qui permet de calculer la conductance d'un circuit hybride quelconque composé de métal normal et de supraconducteur. Dans le cas où deux supraconducteurs sont présents à des tensions différentes, l'effet Josephson alternatif module la densité d'états dans le métal normal. Nous présentons une expérience, en cours de développement, visant à mesurer les effets de ces variations de la densité d'états sur le transport.

Mots-clés :

Supraconductivité

Cohérence quantique

Physique mésoscopique

Nanofabrication

Jonctions tunnel

Effet Josephson

Nanocircuits

Electrons chauds