



HAL
open science

Une stratégie d'identification robuste pour la localisation et la rupture

Hong-Minh Nguyen

► **To cite this version:**

Hong-Minh Nguyen. Une stratégie d'identification robuste pour la localisation et la rupture. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2006. Français. NNT : . tel-00140895

HAL Id: tel-00140895

<https://theses.hal.science/tel-00140895>

Submitted on 10 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par
Hong-Minh NGUYEN

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :
**Une stratégie d'identification robuste
pour la localisation et la rupture**

Thèse soutenue le 15 Décembre 2006 à l'ENS de Cachan
devant le Jury composé de MM. :

S. ANDRIEUX	Ingénieur de recherche, HDR - EDF R&D	Président
A. CORIGLIANO	Professeur - Politecnico di Milano	Rapporteur
P. VILLON	Professeur - UTC	Rapporteur
S. MAISON LE POËC	Ingénieur de recherche - EADS CCR	Examineur
O. ALLIX	Professeur - ENS de Cachan	Directeur de thèse
P. FEISSEL	Maître de Conférences - UTC	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)

*à ma famille
et à Hanoi, mon pays natal*

“ The world is big and there's lots to do ”

KIM

C'est avec un grand plaisir que je remercie les personnes, qui de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail de recherche.

Tout d'abord, je tiens à remercier Olivier ALLIX, pour la confiance qu'il m'a accordée dès le début et le long des trois années, pour son encouragement dans les moments difficiles et en particulier pour sa qualité d'encadrement. Sans lui, ce travail n'aurait pas vu le jour.

J'adresse un remerciement sincère à Pierre FEISSEL, qui m'a appris la rédaction d'un document scientifique et avec qui la discussion est toujours riche et agréable. Je le remercie également pour sa gentillesse et sa disponibilité surtout dans la période à la fin de thèse.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude aux membres de mon jury : à Stéphane ANDRIEUX pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury ; à Pierre VILLON et Alberto CORIGLIANO pour avoir accepté une lourde tâche de lire et de juger mon travail ; à Serge MAISON LE-POEC pour s'être intéressé et donner sa vision "industriel" à ce travail.

Un grand merci à toutes les personnes au LMT Cachan pour la très bonne ambiance aussi bien de travail que de détente, avec qui j'ai partagé de beaux moments de discussion, et à qui m'ont aidé à la relecture du rapport et à la préparation de la soutenance. Je remercie notamment Phillipe C., David V., Olivier D., François, PAP, Delphine, Alain, Germain, Hugo, David N., Jayant, Mathilde, l'équipe du code EF en Matlab : Pierrot, Manu, Gilles et nos secrétaires : Françoise, Évelyne, Lydia et Dominique. Je n'oublierai jamais l'ambiance au petit dej', au centre de calcul, au séminaire et autour du bar.

Merci à mes camarades universitaires, de DEA et à mes amis proches, avec qui mon séjour en France est toujours agréable même si c'est loin de la famille. Merci bien sûr à ma "PP" pour son soutien et sa disponibilité.

Enfin, j'exprime toutes mes reconnaissances à mes parents et à ma petite sœur pour leur amour, leur encouragement et leur soutien éternel, malgré la distance, le long de toutes ces années.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
Partie I Identification - État de l'art	7
1 Quelques approches inverses et méthodes de traitement numérique	11
1.1 Motivation expérimentale	13
1.2 Problème d'identification : contexte général	14
1.2.1 Caractéristiques du problème direct	16
1.2.2 Caractéristiques du problème inverse	17
1.3 Approches pour la résolution du problème d'identification	17
1.3.1 Approches inverses	18
1.3.1.1 Approche par champs auxiliaires	18
1.3.1.2 Approches variationnelles	18
1.3.2 Techniques de régularisation	23
1.3.2.1 Méthode de quasi-réversibilité	24
1.3.2.2 Méthodes de régularisation de Tikhonov	24
1.3.2.3 Le filtre de Kalman	27
1.3.3 Choix de la méthode d'identification	29
1.4 Méthode d'Erreur en Relation de Comportement modifiée	29
1.4.1 Formulation	30
1.4.2 Procédure de résolution	31
1.5 Outils d'optimisation utilisés pour la méthode d'ERdC modifiée	33
1.5.1 Optimisation sans contrainte	33
1.5.1.1 Méthodes basées sur le gradient	34
1.5.1.2 Méthodes de Newton	34
1.5.1.3 Choix de la méthode d'optimisation sans contrainte	35
1.5.2 Optimisation sous contraintes : quelques grandes approches	35

1.5.2.1	Extension de l'optimisation sans contrainte	36
1.5.2.2	Méthodes duales - introduction d'un Lagrangien	38
1.5.2.3	Formulation Hamiltonienne - Principe de maximum de Pontryagui	44
1.5.2.4	Programmation dynamique	44
1.5.2.5	Choix de la méthode d'optimisation sous contraintes	46
1.6	Conclusion	46
2	Acquis de l'identification par l'ERdC modifiée	49
2.1	Problème d'identification du matériau élastique	50
2.2	Résolution du problème inverse par l'ERdC modifiée	51
2.3	Méthodes de résolution du problème de base	52
2.3.1	Méthodes de résolutions globales en temps	54
2.3.1.1	Méthode des éléments finis temporels	54
2.3.1.2	Méthode de l'assemblage global en temps	56
2.3.1.3	Commentaires	56
2.3.2	Méthodes de résolutions locales en temps	57
2.3.2.1	Méthode de la matrice de transition	57
2.3.2.2	Méthode itérative	58
2.3.2.3	Approche basée sur l'équation algébrique de Riccati	59
2.4	Estimation de la robustesse de la méthode d'identification	62
2.5	Minimisation par rapport aux paramètres matériau	63
2.6	Conclusion	64
 Partie II		
	Identification robuste par l'ERdC modifiée	67
3	Problème d'identification du matériau élastique : Traitement robuste	71
3.1	Problème d'identification dans le cas 1D élastique	73
3.1.1	Fabrication des mesures	74
3.1.1.1	Fabrication des mesures non perturbées	74
3.1.1.2	Fabrication des perturbations	75
3.1.2	Rappel du processus d'identification	76
3.1.3	Résolution robuste du problème de base	76
3.1.3.1	Approche basée sur l'équation différentielle de Riccati	78
3.1.3.2	Approche hybride	85
3.1.3.3	Études sur les champs solution du problème de base	89
3.1.4	Identification du module d'Young	91
3.1.5	Comparaison avec les solutions obtenues par le filtre de Kalman	92
3.1.6	Conclusion sur le cas 1D élastique	95
3.2	Extension au cas 2D élastique linéaire	96
3.2.1	Présentation du problème d'identification	96
3.2.1.1	Fabrication des mesures	96

3.2.1.2	Influence des paramètres sur les conditions aux limites	98
3.2.2	Problème de base	98
3.2.3	Identification des paramètres matériau élastique	99
3.2.4	Conclusion sur le cas 2D élastique	100
3.3	Extension au cas 1D élastique hétérogène	100
3.3.1	Stratégie de minimisation de la fonction coût	101
3.3.2	Remarque	103
3.3.3	Conclusion sur le cas 1D élastique hétérogène	103
3.4	Conclusion	104
4	Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité	105
4.1	Présentation du problème d'identification	107
4.2	Formulation du problème inverse	108
4.2.1	Formulation	108
4.2.2	Erreur de modèle	109
4.2.3	Processus de résolution du problème inverse	110
4.3	Méthode LATIN pour le problème direct	111
4.3.1	Séparation des difficultés	111
4.3.2	Approche itérative en deux étapes	112
4.4	Résolution du problème de base	115
4.4.1	Séparation des difficultés	115
4.4.2	Approche itérative en deux étapes	116
4.4.3	Caractéristique de la direction de recherche	118
4.4.4	Conclusion sur la résolution du problème de base	120
4.5	Application au cas 1D viscoplastique	122
4.5.1	Présentation du problème d'identification	122
4.5.1.1	Fabrication des mesures	122
4.5.1.2	Remarque sur le choix du type de chargement	124
4.5.1.3	Pertinence de la gamme de paramètres étudiée	124
4.5.1.4	Remarque sur les oscillations numériques	126
4.5.2	Formulation du problème inverse	127
4.5.3	Résolution du problème de base	127
4.5.3.1	Erreur aux moindres carrés sur la vitesse des variables internes	128
4.5.3.2	Erreur aux moindres carrés sur les variables internes	136
4.5.3.3	Conclusion	139
4.5.4	Identification des paramètres viscoplastiques	139
4.5.4.1	Pour des mesures fabriquées par un plateau en effort	139
4.5.4.2	Pour des mesures fabriquées par un demi-sinus en effort	141
4.6	Conclusion	141

5	Identification des paramètres de rupture de composite	143
5.1	Présentation du modèle de composite	145
5.1.1	Composite stratifié : constitution et modélisation	145
5.1.1.1	Modèle du pli élémentaire	146
5.1.1.2	Modèle de l'interface	148
5.1.2	Difficulté rencontrée pour la simulation jusqu'à la rupture . . .	149
5.1.2.1	Modèles à discontinuité	150
5.1.2.2	Limiteurs de localisation en espace	150
5.1.2.3	Limiteurs de localisation en temps	152
5.1.3	Pertinence de la loi d'évolution utilisée	154
5.2	Présentation du problème d'identification	157
5.2.1	Paramètres à identifier	157
5.2.2	Pertinence de la gamme de paramètres étudiée	157
5.2.3	Choix de l'essai d'identification	157
5.2.4	Fabrication des mesures	159
5.3	Formulation du problème inverse	160
5.4	Résolution du problème de base	163
5.4.1	Séparation des difficultés	164
5.4.2	Résolution itérative en deux étapes	164
5.4.2.1	Étape locale	164
5.4.2.2	Étape globale	165
5.4.2.3	Critère de convergence	168
5.4.2.4	Étape de relaxation	168
5.4.3	Convergence de la stratégie de résolution du problème de base .	169
5.4.4	Études des champs solution du problème de base	172
5.4.4.1	Pour des paramètres matériau de référence et des me- sures non perturbées	172
5.4.4.2	Pour de mauvais paramètres matériau et des mesures non perturbées	173
5.5	Identification des paramètres de l'effet retard	174
5.6	Conclusion	175
	Conclusion	177
A	Traiter le problème de base dans le cas endommageable	179
A.1	Système d'équations non linéaires	180
A.2	Résolution du problème par la stratégie LATIN adaptée :	183
	Annexes	179
	Bibliographie	189

Table des figures

1.1	Essai aux barres d'Hopkinson verticales à EADS CCR et schéma du montage	13
1.2	Problème de référence associé au problème d'identification	15
1.3	Procédure de résolution du problème inverse formulé par la méthode d'ERdC modifiée	32
2.1	Problème d'identification dans le cas 1D en élasticité	50
2.2	Essai numérique dans le cas 1D en élasticité	51
2.3	Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé au cours des itérations	59
2.4	Déplacement et multiplicateur de Lagrange associés obtenus par l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde : $T = 10 T_0$	61
2.5	Fonction coût pour différents niveaux de perturbation - cas 1D élastique (T_0 est le temps d'un aller d'onde)	62
2.6	Fonctions coût pour un temps d'étude intermédiaire : $T = 3,5 T_0$ - cas 1D élastique	63
2.7	Poutre élastique hétérogène par bloc	64
2.8	Identification des modules d'Young de la poutre hétérogène par la méthode de descente à pas fixe - [Fei03]	64
3.1	Problème d'identification dans le cas 1D en élasticité	73
3.2	Essai numérique dans le cas 1D	74
3.3	Conditions aux limites non perturbées obtenues par un chargement de type demi-sinus en effort	74
3.4	Conditions aux limites non perturbées obtenues par un chargement de type plateau en effort	75
3.5	Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% - cas 1D élastique	76
3.6	Norme de la solution analytique de la matrice de Riccati $K(t)$ et estimateur d'erreur dans le cas du module d'Young de référence $E = E_0$	81
3.7	Comparaison de la solution numérique obtenue par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 à la solution analytique de la matrice de Riccati $K(t)$ (3.19)	81

3.8	Comparaison de la solution numérique par le schéma hormographique [Dub00] pour un pas de temps dt et $\frac{dt}{4}$ à la solution analytique de $K(t)$ (3.19)	83
3.9	Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$	84
3.10	Norme de la solution analytique de matrice de Riccati $K(\tau)$ dans le cas du module d'Young de référence $E = E_0$	87
3.11	Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche hybride avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$	88
3.12	Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche hybride avec un mauvais module d'Young $E = 1,5 E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$	90
3.13	Distribution de l'erreur de modèle en espace et en temps avec un mauvais module d'Young $E = 1,5 E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$	90
3.14	Fonction coût pour différents niveaux de perturbation - cas 1D élastique	91
3.15	Fonction coût pour différents niveaux de perturbation pour un temps d'étude intermédiaire : $T = 3,5 T_0$ - cas 1D élastique	91
3.16	Modules d'élasticité obtenus par le filtre de Kalman étendu pour des mesures perturbées à différents niveaux	94
3.17	Modules d'élasticité obtenus par le filtre de Kalman étendu pour des mesures perturbées à 10 % - Influence du choix des matrices de covariance	95
3.18	Problème d'identification dans le cas 2D élastique	96
3.19	Essai numérique dans le cas 2D élastique	97
3.20	Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% à un coin de la plaque pour un temps d'étude $T = 0,095 ms$	97
3.21	Déplacements obtenus avec différents jeux de paramètres E et ν au coin M de la plaque	98
3.22	Déplacements au point M dans le cas des paramètres matériau de référence et de mesures non perturbées	99
3.23	Fonctions coût pour des mesures perturbées à différents niveaux - cas 2D élastique	100
3.24	Poutre élastique hétérogène par bloc	101
3.25	Convergence de la stratégie combinée pour des mesures non perturbées	102
4.1	Problème d'identification d'un comportement non linéaire décrit par des variables internes	107
4.2	Représentation schématique du principe de la méthode LATIN	112

4.3	Étape locale à l'itération n	117
4.4	Étape globale à l'itération n	117
4.5	Problème d'identification dans le cas 1D viscoplastique	122
4.6	Essai numérique dans le cas 1D viscoplastique	122
4.7	Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% pour un chargement de type plateau en effort - cas 1D viscoplastique	123
4.8	Énergie dissipée et énergie élastique obtenues par des calculs directs pour différents types de chargement - cas 1D viscoplastique	124
4.9	Courbe contrainte - déformation à proximité de la zone d'application des efforts de la poutre pour différents jeux de paramètres du matériau - chargement de type <i>demi-sinus</i>	125
4.10	Courbe contrainte - déformation au milieu de la poutre pour différents jeux de paramètres du matériau - chargement de type <i>plateau</i>	125
4.11	Contrainte à la section à proximité de l'encastrement - chargement de type demi-sinus	126
4.12	Déformation plastique au cours des itérations pour les paramètres matériau de référence $k_v = k_{v0}$, $n_v = n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre	132
4.13	Déformation plastique au cours des itérations pour un mauvais jeu de paramètres $k_v = 1,5 k_{v0}$, $n_v = 1,5 n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre	133
4.14	Indicateur d'erreur pour différents jeux de paramètres matériau et différents niveaux de perturbation de mesures - chargement de type plateau	134
4.15	Déformation plastique obtenue par le problème de base et son erreur relative par rapport à celle de référence dans le cas des paramètres matériau de référence et de mesures non perturbées	135
4.16	Conditions aux limites mesurées et reconstruites pour un mauvais jeu de paramètres matériau : $k_v = 1,5 k_{v0}$, $n_v = 1,4 n_{v0}$ et des mesures non perturbées	136
4.17	Convergence de la stratégie de résolution du problème de base formulé par l'erreur aux moindres carrés sur les variables internes pour différents jeux de paramètres matériau - cas 0D viscoplastique	137
4.18	Convergence de la stratégie de résolution du problème de base formulé par l'erreur aux moindres carrés sur les vitesses de variables internes pour différents jeux de paramètres matériau - cas 0D viscoplastique	138
4.19	Vitesse de déformation plastique au cours des itérations pour des paramètres matériau de référence $k_v = k_{v0}$, $n_v = n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre	138
4.20	Surfaces représentant la fonction coût - cas viscoplastique	140
4.21	Fonction coût pour différents niveaux de perturbations avec le chargement de type plateau - cas viscoplastique	140
4.22	Fonction coût pour différents niveaux de perturbations avec le chargement de type demi sinus - cas viscoplastique	141

5.1	Constitution du composite stratifié à fibres longues	145
5.2	Méso-constituants du composite stratifié : le pli et l'interface	146
5.3	Directions d'orthotropie de l'interface interlaminaire	148
5.4	Modes de rupture de l'interface	149
5.5	Essai numérique dans le cas 1D endommageable	154
5.6	Champs solution du problème direct	155
5.7	Endommagement à l'instant final pour le modèle avec effet retard et avec différents maillages	156
5.8	Endommagement à l'instant final pour le modèle classique et avec différents maillages	156
5.9	Problème d'identification dans le cas 1D endommageable	157
5.10	Influence de τ_c sur la réponse de la barre composite	158
5.11	Influence de a sur la réponse de la barre composite	158
5.12	Problème d'identification pour une poutre à deux matériaux	159
5.13	Essai numérique pour la poutre à deux matériaux	159
5.14	Champs solution du problème direct pour la poutre à deux matériaux .	160
5.15	Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20%	161
5.16	Influence de l'étape de relaxation sur la convergence de la stratégie de résolution du problème de base pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées	169
5.17	Variables d'endommagement à proximité de l'encastrement au cours des itérations pour des paramètres matériau de référence $\tau_c = \tau_{c0}$, $a = a_0$ et de mesures non perturbées	170
5.18	Convergence de la stratégie LATIN pour différents jeux de paramètres matériau et différents niveaux de perturbation de mesures	171
5.19	Champ d'endommagement obtenu par le problème de base et son erreur relative par rapport à celui de référence dans le cas des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées	172
5.20	Différence relative entre \dot{d} et \dot{d}^e pour des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées	173
5.21	Différence relative entre \dot{d} et \dot{d}^e pour de mauvais paramètres matériau : $a = a_0$, $\tau_c = 0,5 \tau_{c0}$	173
5.22	Surfaces représentant la fonction coût - cas 1D endommageable	174
5.23	Fonction coût pour différents niveaux de perturbations - cas 1D endommageable	175

Liste des tableaux

2.1	Relations fiables et non fiables dans le cas de l'élasticité linéaire	51
3.1	Propriétés matériau élastique	73
3.2	Estimation du coût de calcul de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati	85
3.3	Coût de calcul de différentes approches	88
3.4	Comparaison numérique de différentes approches avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$	89
3.5	Coût de calcul des méthodes de minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau (T_0 est le temps d'un aller d'onde) . .	103
4.1	Relations fiables et non fiables dans le cas non linéaire	108
4.2	Propriétés matériau viscoplastique	123
4.3	Relations fiables et non fiables dans le cas viscoplastique	127
5.1	Propriétés matériau composite	154
5.2	Relations fiables et non fiables dans le cas de l'endommagement	161

Introduction

La modélisation et la simulation réaliste de la rupture sont un enjeu fort du “Virtual-Testing” en particulier en dynamique (impact d’oiseau, essais de crash, tenue à la chute d’objets ...). C’est d’ailleurs l’un des domaines où la simulation non linéaire avec endommagement et rupture est la plus utilisée d’un point de vue industriel en raison de la complexité des essais et de leur difficulté d’exploitation. À ces difficultés expérimentales, s’ajoute le coût important de ces essais, aussi l’obtention de simulations prédictives et réalistes de la rupture dynamique de structure est un réel enjeu. Cependant, de nombreux obstacles restent à surmonter avant de pouvoir prétendre réellement atteindre cet objectif.

L’un d’entre eux concerne la caractérisation de la réponse statique et dynamique d’un matériau dans la phase d’instabilité qui précède la rupture. Dans la suite, cette phase sera aussi qualifiée de post-pic car elle fait suite en général au passage du “maximum” de la “courbe contrainte-déformation”.

La difficulté de cette caractérisation tient tout d’abord au fait que la phase conduisant à la rupture s’accompagne d’une très forte localisation des déformations. Les essais en phase post-pic sont donc hétérogènes et les méthodes de dépouillement classiques exploitant des mesures uniquement globales inadaptées. La seconde est que la phase de rupture engendre le plus souvent des perturbations importantes au niveau de l’ensemble de la structure, les conditions aux limites ne sont alors pas précisément connues.

C’est à certains aspects de base liés à cette question que cette thèse est consacrée. Son objectif est de proposer une stratégie robuste pour l’identification en dynamique transitoire de lois de comportement gouvernant la réponse matériau jusqu’à la rupture. Elle doit donc permettre à la fois le traitement des essais dynamiques hétérogènes et l’identification à partir de mesures fortement corrompues. En raison de la complexité du problème général présenté ci-dessus, un problème modèle encore fort éloigné des applications potentielles nous a servi de guide.

Parmi les méthodes inverses consacrées à l’identification de lois de comportement, l’approche variationnelle basée sur la fonctionnelle des moindres carrés directes et l’approche par champs auxiliaires sont les plus utilisées [Cai94] [Mah96] [Cal80] [And92]. En revanche, pour des mesures fortement corrompues, le caractère mal posé du problème inverse joue un rôle prédominant, ce qui nécessite l’usage de techniques de régularisation. Différentes techniques ont été proposées comme les méthodes de régularisation de Tikhonov [Tik77] [Bad91] [Cim01], le filtre de Kalman [Kal60] [And89] [Cor04] ou

la méthode de quasi réversibilité [Lio67] [Bou05]. Cependant, ces méthodes, qui nécessitent une connaissance *a priori* sur les perturbations pour être efficaces et fiables, semblent difficiles à appliquer dans notre contexte, où aucune information *a priori* sur les perturbations n'est connue. Ceci nous a conduit à étudier la méthode d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC) développée depuis une vingtaine d'années en recalage de structure dans le domaine vibratoire [Lad83] [Cho98] [Der04].

L'idée de la méthode d'ERdC est de séparer les relations théoriques et expérimentales intervenant dans le problème inverse en deux groupes : le groupe qui se compose des relations considérées comme fiables et le groupe qui est constitué des relations les moins fiables. Dans toute la démarche, le groupe fiable est vérifié exactement et forme ainsi un espace de contraintes, tandis que le groupe non fiable est simplement vérifié au mieux, au travers de la minimisation d'une fonctionnelle coût. Ainsi sont recherchés les champs mécaniques (contrainte, déplacement ...) et les paramètres matériau à identifier qui minimisent une erreur dite Erreur en Relation de Comportement modifiée tout en vérifiant les équations du groupe fiable.

Dans le cas de la détermination de paramètres matériau à partir d'essais en dynamique transitoire, nous avons choisi de regrouper dans le groupe fiable les équations d'équilibre intérieur, les conditions initiales et la partie préalablement et valablement identifiée des relations de comportement, tandis que le groupe non fiable est constitué des relations de comportement restant à identifier et des mesures corrompues, typiquement constituées des conditions aux limites de l'éprouvette.

Afin de résoudre ce problème, un processus de minimisation en deux étapes, alternant minimisation par rapport aux champs mécaniques et minimisation par rapport aux paramètres matériau, est utilisé :

- pour un jeu de paramètres matériau donné, les mesures sont confrontées au modèle, au travers d'un "problème de base", dont les champs solution sont un compromis entre modèle et mesures. Il s'agit d'un problème de minimisation sous contraintes sur des champs mécaniques ;
- à l'aide des champs solution obtenus dans la première étape, les paramètres matériau sont identifiés, par minimisation d'une fonction coût. Il s'agit d'un problème de minimisation sans contraintes.

Une première étude [All03] [Fei03] a permis d'explorer les idées de la méthode proposée et d'en estimer la pertinence. Le cadre d'étude était alors fort simplifié et portait sur l'identification du module d'Young d'une barre élastique en dynamique à partir de mesures redondantes à ses extrémités. Ce travail, bien que très éloigné du problème d'identification à la rupture, a permis de mettre en évidence le comportement très robuste de cette version de la méthode de l'ERdC modifiée face à des perturbations de mesures de plus de 40% en dynamique transitoire. Une des principales difficultés rencontrée alors concernait le problème de base. Il s'agit en effet de résoudre un problème de propagations d'ondes directe et rétrograde couplées avec des conditions initiales pour le problème direct et des conditions finales pour le problème rétrograde. Le couplage de ces deux problèmes induit la présence de solutions exponentiellement

croissantes parmi les solutions de l'équation homogène associée au problème de base. La première méthode de résolution testée a consisté à prédire les conditions initiales manquantes grâce à la matrice de transition, mais cette méthode valable que pour des temps d'étude très courts. En exploitant l'invariance du système au cours du temps, une seconde méthode basée sur l'équation *algébrique* de Riccati [Arn84] a permis sa résolution pour des temps d'étude suffisamment grands. Cependant, ces stratégies de résolution ne permettent pas de traiter le problème dans un cas général.

Le pari à l'origine de cette thèse est qu'il devait être possible d'étendre la stratégie d'identification et les méthodes de résolution développées dans les travaux précédents aux cas d'essais de rupture dynamique très perturbés.

Il s'agissait en particulier d'essayer de :

- garantir la robustesse des outils numériques de résolution, notamment pour le problème de base ;
- proposer une stratégie adaptée au cadre des comportements non linéaires ;
- discuter et mettre en place son application dans le cas particulier de la rupture.

Le traitement numérique d'un problème de base non linéaire devant d'une manière ou d'une autre passer par sa linéarisation, il a été décidé de poursuivre l'effort sur la résolution du problème de base dans le domaine linéaire afin d'en garantir la robustesse dans le cas général.

La première contribution de cette thèse réside donc dans le développement, exploitant les travaux de la littérature, d'une méthode de traitement numérique robuste [Ngu05] [All05a] dans le cas élastique. Cette méthode est également basée sur l'équation de Riccati permettant le découplage des équations directes et adjointes [Vau69] [And89] [For02], comme dans [Fei03]. Toutefois, pour ne pas se limiter au domaine de validité de l'équation algébrique de Riccati, la résolution de l'équation différentielle de Riccati est étudiée. Des différentes méthodes mises en œuvre à partir de la littérature [Vau69] [And89] [Dub00], deux méthodes sont finalement retenues et permettent de résoudre le problème de base pour des temps d'étude quelconques ; la première est une méthode numérique basée sur le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 et la seconde exprime la solution analytique à l'aide de la solution de l'équation algébrique de Riccati [And89].

La seconde contribution, qui est aussi la contribution principale de ce travail, porte sur l'extension de la stratégie d'identification proposée en élasticité à des cas non linéaires [All05b] [Ngu06]. Ceci demande de mener une réflexion autour des trois points suivants :

- définition des groupes de relations fiables et non fiables ;
- choix de la fonctionnelle coût et des contraintes ;
- stratégie de résolution du problème formulé.

Ces trois points sont en fait liés et en particulier la possibilité de résolution du problème de base dépend des deux premiers choix. Comme nous le verrons, c'est en réalité ce dernier aspect qui a déterminé le choix de la fonctionnelle coût.

Une fois la séparation en deux groupes décidée, le choix de la fonctionnelle et des

contraintes reste une question ouverte. Une limitation importante est la prise en compte des outils de résolution disponibles pour le problème de base, pour lequel on s'attend à rencontrer les mêmes difficultés liées aux instabilités numériques, éventuellement accentuées en raison des instabilités matérielles. Il semble donc pertinent d'appuyer la stratégie de résolution sur les outils robustes mis en place pour les problèmes linéaires, qui sont en fait dédiés à la minimisation de critères quadratiques sous contraintes linéaires et en particulier les équations d'équilibre interne en dynamique. Ceci nous guidera donc vers le choix de fonctionnelles quadratiques.

En terme de résolution, les approches incrémentales restent locales en temps et ne permettent donc pas une formulation linéarisée de minimisation globale sur le temps. En revanche, le caractère non-incremental de la méthode LATIN [Lad99a] apparaît intéressant en vue de la résolution du problème posé. L'idée de cette méthode itérative est de fournir à chaque itération une approximation des solutions du problème en tout point de l'espace et du temps. Elle s'appuie sur la séparation des équations à résoudre en deux groupes :

- un groupe d'équations locales en variables d'espace, éventuellement non linéaires ;
- un groupe d'équations linéaires, éventuellement globales en variables d'espace.

Pour un problème direct, le premier groupe définit un espace s'appuyant sur la relation de comportement et le deuxième, formé des équations restantes, définit un espace d'admissibilité. L'introduction de directions de recherche permet alors de converger vers la solution correspondant à l'intersection des deux espaces en trouvant une solution alternativement dans un groupe puis dans l'autre, de façon itérative.

Dans le cadre du problème inverse, une difficulté est de définir l'espace des relations de comportement, alors que celles-ci ne sont en fait jamais (sauf exception) vérifiées lors de l'ensemble des étapes associées au processus de minimisation. Le choix dans ce travail est de définir cet espace comme *un espace de relation de comportement relâchée*, en introduisant une variable d'état de comportement relâchée. Les deux espaces sont alors définis de la manière suivante :

- espace de relation de comportement relâchée reprenant les relations de comportement non linéaires et relâchées ;
- espace admissible dont les éléments sont solutions d'un problème de minimisation sous la partie linéaire des contraintes.

Le passage d'un espace à l'autre peut alors se faire en introduisant des directions de recherche, de façon analogue à ce qui est fait pour un problème direct.

La stratégie d'identification est tout d'abord mise en œuvre en non linéaire dans un cas viscoplastique. La stratégie de résolution du problème de base converge et l'identification est pertinente jusqu'à des niveaux de perturbation des mesures de l'ordre de 40%.

L'application de la stratégie à un comportement à rupture dédié aux composites [All97] soulève des difficultés supplémentaires et en particulier la prise en compte de conditions d'inégalité sur la variable d'endommagement. Cette partie est très récente et pour la stratégie numérique mise en place, qui permet de vérifier ces contraintes, nous n'avons pas été en mesure de prouver l'optimalité de la solution construite.

L'approfondissement de ces questions permettra peut-être d'améliorer les résultats obtenus, qui nous apparaissent néanmoins satisfaisants, puisque la stratégie de résolution du problème de base proposée converge et l'identification des paramètres du modèle d'endommagement à taux limité se fait correctement même pour des mesures perturbées.

Ce rapport s'articule donc autour de cinq chapitres, regroupés en deux parties :

Les deux premiers chapitres forment **une première partie** qui reprend les acquis bibliographiques ainsi que ceux propres à cette étude.

Le premier chapitre présente une motivation expérimentale de cette étude, puis, une étude bibliographique sur les méthodes d'identification des paramètres matériau ainsi que sur les techniques du traitement du bruit. Notre choix s'oriente vers la méthode d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC) modifiée, qui semble bien adaptée au problème d'identification à la rupture. Des grandes méthodes d'optimisation sans et avec contraintes, qui sont nécessaires pour la résolution par l'ERdC modifiée, sont abordées dans la dernière partie du chapitre.

Le deuxième chapitre rappelle les premiers résultats d'identification par l'ERdC modifiée en élasticité obtenus dans [Fei03] [All03]. Les avantages et les inconvénients des méthodes de traitement numérique utilisées sont étudiés.

Les trois chapitres suivants forment **la deuxième partie** qui correspond au cœur de ce travail.

Le troisième chapitre propose pour le traitement numérique l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati, qui est robuste en élasticité et extensible au cas de la rupture. Sa robustesse est ensuite testée dans les cas $2D$ élastique et $1D$ élastique hétérogène.

Dans le cas élastique, l'invariance du système dans le temps permet d'exploiter l'équation algébrique de Riccati, dans la partie du domaine où la solution de l'équation différentielle est stationnaire. Ceci est valable suffisamment avant le temps final d'étude. Il est alors possible de réduire le coût de calcul en proposant une approche hybride, qui ne résout l'équation différentielle de Riccati que pour la dernière partie du temps d'étude.

Afin de montrer l'extensibilité de l'approche basée sur l'équation de Riccati à des cas plus complexes se rapprochant d'un essai réel par exemple sur composites, la stratégie proposée est appliquée dans un cas $2D$ en élasticité. Sa mise en œuvre ne fait apparaître aucune difficulté supplémentaire. La méthode de traitement numérique proposée semble s'affranchir du problème d'instabilité que doit surmonter la résolution du problème de base en élasticité.

Une autre amélioration par rapport aux travaux précédents concerne la stratégie de minimisation par rapport aux paramètres matériau. Une combinaison de

la méthode de gradient à pas optimal et de la méthode de quasi Newton a été retenue. Cette approche est illustrée dans le cas $1D$ en élasticité hétérogène et conduit à des résultats très satisfaisants.

Le quatrième chapitre est consacré à l'extension de la stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée du cas de l'élasticité aux cas non linéaires [Ngu06]. La formulation générale du problème ainsi que le traitement numérique, basé sur la méthode LATIN et l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati, sont établis pour un comportement non linéaire décrit par des variables internes. La stratégie d'identification est ensuite appliquée dans le cas viscoplastique et s'avère robuste face aux perturbations de mesures.

Le cinquième chapitre présente l'application de la stratégie d'identification au cas d'un comportement à la rupture correspondant à celui d'un composite stratifié. Les difficultés associées à ce problème sont discutées et la robustesse de la méthode est également confirmée dans ce cas.

Première partie

Identification - État de l'art

Dans cette première partie, nous nous intéressons aux méthodes d'identification inverse des paramètres matériau pour des mesures redondantes et perturbées ainsi qu'aux méthodes de traitement numérique associées. Deux chapitres seront consacrés à cette partie :

- Le premier chapitre situera le problème traité dans le contexte général du problème inverse. Puis, à partir de là, une bibliographie des méthodes spécifiques pour ce problème sera présentée, avant de s'orienter vers la méthode d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC) modifiée.
- Le deuxième chapitre rappelle les acquis de l'identification par l'ERdC modifiée dans le cas $1D$ élastique.

Quelques approches inverses et méthodes de traitement numérique

Dans ce premier chapitre, la motivation expérimentale de cette étude est d'abord présentée. À partir de celle-ci, l'enjeu du problème traité est fixé et le contexte général du problème d'identification étudié est ensuite décrit. Différentes approches inverses pour résoudre ce problème ainsi que plusieurs techniques de régularisation sont alors abordées. La méthode choisie est la méthode d'Erreur en Relation de Comportement modifiée qui fait appel à un problème de minimisation avec et sans contraintes. Quelques grandes méthodes de minimisation sont donc rappelées à la fin du chapitre.

Sommaire

1.1	Motivation expérimentale	13
1.2	Problème d'identification : contexte général	14
1.2.1	Caractéristiques du problème direct	16
1.2.2	Caractéristiques du problème inverse	17
1.3	Approches pour la résolution du problème d'identification	17
1.3.1	Approches inverses	18

1.3.2	Techniques de régularisation	23
1.3.3	Choix de la méthode d'identification	29
1.4	Méthode d'Erreur en Relation de Comportement modifiée .	29
1.4.1	Formulation	30
1.4.2	Procédure de résolution	31
1.5	Outils d'optimisation utilisés pour la méthode d'ERdC modifiée	33
1.5.1	Optimisation sans contrainte	33
1.5.2	Optimisation sous contraintes : quelques grandes approches . . .	35
1.6	Conclusion	46

1.1 Motivation expérimentale

Le point de départ de ce travail a été une tentative d'identification d'un modèle de comportement de composites stratifiés en dynamique à partir de l'essai mené à EADS CCR (Suresnes) présenté figure 1.1. Il s'agissait plus précisément d'identifier les effets de vitesse dans la phase post-pic [All97]. Notons que cet essai n'avait pas été conçu pour des identifications aussi précises, ce qui explique pour partie les difficultés rencontrées alors. Ce type d'essais, appelés essais aux barres d'Hopkinson ou Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB) en anglais, est développé depuis une cinquantaine d'années. Son principe dans le cas général et ses applications peuvent être trouvés dans [Zha96] ou [Gar00]. Ici, les principes sont présentés en s'appuyant sur le moyens d'essai alors disponible chez EADS CCR.

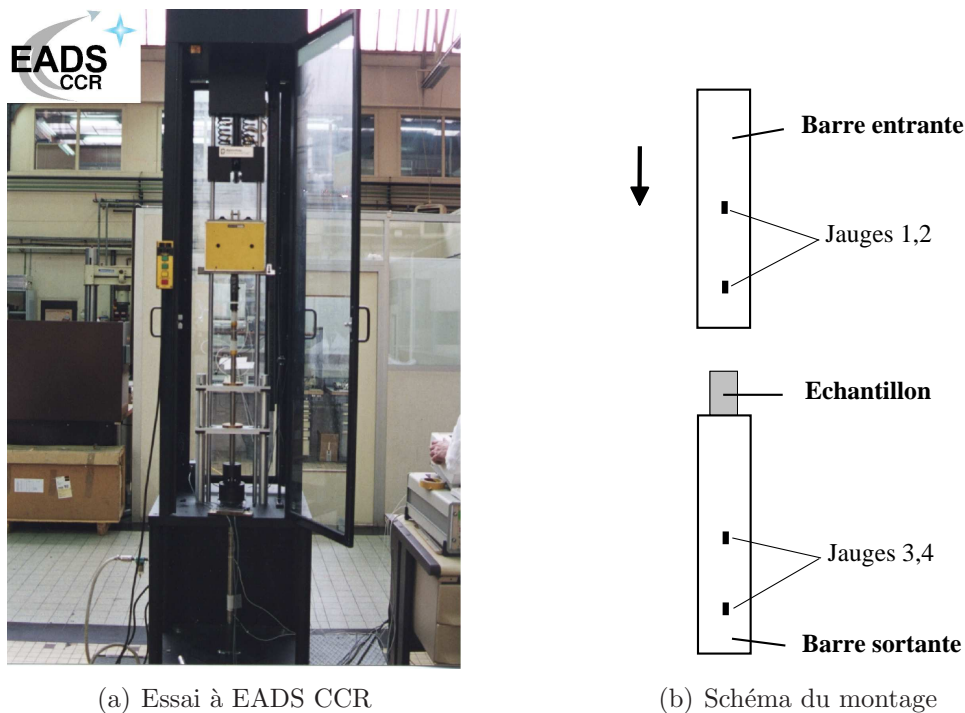


Figure 1.1 – Essai aux barres d'Hopkinson verticales à EADS CCR et schéma du montage

Le principe de l'essai est que la barre, dite “entrante”, impacte l'échantillon et y génère une onde, appelée onde incidente. À l'interface avec l'éprouvette, une partie de l'onde se réfléchit (onde réfléchie) et une autre est transmise dans l'éprouvette, puis dans la barre sortante (onde transmise). À partir de mesures aux moyens de jauges collées sur les barres, il est théoriquement possible de calculer les contraintes et les vitesses aux frontières de l'éprouvette, pour en déduire (en faisant une hypothèse d'homogénéité de l'échantillon) la courbe “contrainte-déformation”. Outre cette hypothèse, il est généralement supposé que la propagation d'ondes est unidimensionnelle. Lorsqu'une de

ces hypothèses n'est pas satisfaite, il est nécessaire d'utiliser une approche inverse pour exploiter l'essai (voir [Rot94] pour le détail).

Pour les essais réalisés à EADS CCR sur les composites, il existe une différence notable entre les sections de l'éprouvette et des barres d'un point de vue de la forme et de la surface. Il est donc difficile de remonter à la réponse globale de l'échantillon à partir des mesures aux jauges. Il est de plus très difficile d'identifier les paramètres caractérisant l'effet de vitesse de la phase post-pic du composite car l'essai devient très hétérogène avant la rupture de l'éprouvette. L'ensemble de ces raisons a fait que les mesures des forces et des vitesses entrantes et sortantes étaient extrêmement perturbées et se sont avérées inexploitable.

Il est probable que des essais beaucoup plus adaptés comme ceux utilisant des barres d'Hopkinson avec adaptation d'impédance comme cela est fait par exemple pour des matériaux de type mousse [Zha05] améliorerait la situation. Il reste néanmoins que la caractère très brutal de la rupture des composites nous semble malgré tout constituer une difficulté d'importance même avec de fortes précautions expérimentales. De plus, la thématique d'exploitation d'essais en présence de mesures corrompues ne se limite pas à l'essai présenté ici. En effet, les essais de rupture dynamique sont le plus souvent sous-exploités du fait des corruptions de mesures malgré leur coût et leur richesse potentielle. Dans ce contexte très large, nous nous restreignons dans la suite de cette thèse au cas de l'identification de paramètres à partir de mesures :

- redondantes en effort et en déplacement (ou vitesse) ;
- connues (normalement en moyennes) sur une partie de la frontière ;
- fortement corrompues ;
- et où aucune information *a priori* sur la corruption de mesures n'est connue.

1.2 Problème d'identification : contexte général

Le domaine d'application des problèmes inverses d'identification est très large : mécanique, acoustique, électronique, magnétique, physique... Dans le seul domaine mécanique, différents types de problèmes inverses sont couramment considérés :

- identification des paramètres d'une loi de comportement :
 - modules élastiques [Cal80] [Ike90] [Con95] [Gré96] [Rot96] [All03] ;
 - paramètres de (visco)plasticité [Cai94] [Aok98] [Con01] [Gré06] ;
 - paramètres d'endommagement [Cha03] [Cor04] [Cor05] ;
 - ...
- recalage des structures en vibration [Lad94] [Cho98] [Gol96] [Moi97] ;
- identification des sources ou des conditions aux limites dans les zones inaccessibles [Gue89] [Cim00] [Con03] [Bou05] ;
- identification d'une partie de la frontière de structure : détection de fissures, de cavités ou d'inclusions [And92] [And99] [Bui04] [Bon05] ;
- identification des contraintes résiduelles [Ork96] [Bou98].

Chacun de ces problèmes nécessite des méthodes de résolution spécifiques. Dans le cadre de cette étude, seule l'identification des paramètres de loi de comportement à partir de conditions aux limites redondantes sur une partie de la frontière est étudiée.

Considérons le problème d'évolution sur l'intervalle de temps $[0, T_{final}]$ d'une structure occupant le domaine Ω , avec les conditions limites sur la frontière $\partial\Omega$:

$$\partial\Omega = \partial_{u \setminus f}\Omega \cup \partial_{uf}\Omega \cup \partial_{f \setminus u}\Omega \cup \partial_\emptyset\Omega$$

- sur $\partial_{u \setminus f}\Omega$, les déplacements sont imposés et égaux au champ surfacique \tilde{u}_d ;
- sur $\partial_{f \setminus u}\Omega$, les efforts sont imposés et égaux au champ surfacique \tilde{f}_d ;
- sur $\partial_{uf}\Omega$, les déplacement \tilde{u}_d et les efforts \tilde{f}_d sont imposés ;
- sur $\partial_\emptyset\Omega$, aucune condition aux limites n'est donnée.

Le cas réellement traité dans ce travail correspond au cas particulier où $\partial_\emptyset\Omega$ est vide et le caractère mal posé du problème provient de la redondance d'information sur $\partial_{uf}\Omega$.

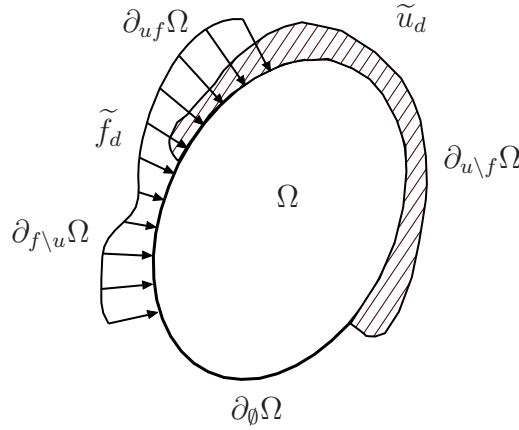


Figure 1.2 – Problème de référence associé au problème d'identification

Le problème inverse consiste ici à chercher le(s) “meilleur(s)” paramètre(s) p à partir de :

- l'équation d'équilibre :

$$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0 \quad (1.1)$$

- les relations de comportement :

$$\sigma|_t = \mathcal{A}((\dot{\epsilon}(u)|_\tau, p) ; \quad \tau \leq t) \quad (1.2)$$

- les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_u\Omega = (\partial_{u \setminus f}\Omega \cup \partial_{uf}\Omega) \\ \sigma n &= \tilde{f}_d \quad \text{sur} \quad \partial_f\Omega = (\partial_{f \setminus u}\Omega \cup \partial_{uf}\Omega) \end{aligned} \quad (1.3)$$

– les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_{(t=0)} &= u_0 \\ \dot{u}_{(t=0)} &= \dot{u}_0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Le caractère mal posé du problème tel qu’il est défini précisément par Hadamard [Bui93], c’est à dire la non satisfaction en même temps de l’existence, de l’unicité et de la continuité de la solution par rapport aux données, prend alors tout son rôle. Pour le problème inverse, ce caractère mal posé, comme on le verra plus loin (section 1.2.2), viens de la redondance, de la perturbation des mesures et de la pauvreté du modèle matériau. C’est la raison pour laquelle ce problème est transformé en un problème d’optimisation, où il s’agit de chercher le(s) “meilleur(s)” paramètre(s) p à un sens qu’il reste à définir.

Avant d’étudier plus précisément les caractéristiques de ce type de problème inverse, il est nécessaire de considérer celles du problème direct. Celles-ci sont présentées dans la section suivante 1.2.1.

1.2.1 Caractéristiques du problème direct

Le problème direct consiste à chercher, pour un jeu de paramètre(s) p fixé(s) caractérisant le comportement du matériau, les champs solution u vérifiant :

- l’équation d’équilibre (1.1) ;
- les relations de comportement (1.2) ;
- les conditions aux limites (1.3) ;
- les conditions initiales (1.4).

Dans le cas élastique, la relation de comportement s’écrit simplement : $\sigma = \mathbb{E} : \epsilon(u)$.

Le problème direct est bien posé au sens de Hadamard [Bui93] si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout \tilde{f}_d et \tilde{u}_d , il existe une solution u ;
- cette solution est unique ;
- la dépendance de la solution u vis-à-vis des données \tilde{f}_d, \tilde{u}_d est continue.

De nombreux résultats existants ont montré que le problème direct avec les conditions aux limites présentées figure 1.2 est bien posé si des conditions aux limites suffisantes (un vecteur d’information) sont connues sur toute la frontière et également si elles ne sont pas redondantes : $\partial_\emptyset\Omega = \partial_{u,f}\Omega = \emptyset$. Les données doivent bien sur vérifier des conditions de régularité dépendant de l’espace dans lequel est recherché la solution. Par exemple pour un problème tridimensionnel, les données au frontière appartienne pour les composantes des déplacements à $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et les composantes des densité surfacique d’effort à $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Un bilan assez complet sur les caractères du problème direct pour le matériau élastique est trouvé dans [Kup79]. Dans le cas non linéaire, les travaux de Necas, Hlavacek [Nec81] et de Ladevèze [Lad99a] confirment ces caractéristiques pour la classe de matériau satisfaisant le critère de Drucker [Dru64].

Dans notre contexte où les mesures obtenues par l’essai aux barres d’Hopkinson sont redondantes, le problème direct devient mal posé au sens de Hadamard car la

condition d'existence de la solution u n'est pas vérifiée au moins dans le cas général. Le détail de cette démonstration se trouve dans [Rot96] ou [Fei03].

1.2.2 Caractéristiques du problème inverse

Le problème inverse d'identification de paramètres matériau, comme son problème direct, a fait l'objet de nombreuses études. Une présentation assez complète de ses caractéristiques, ainsi que des méthodes de résolution associées, peuvent être trouvées dans les ouvrages de Tikhonov et Arsenin [Tik77], de Badeva et Morozov [Bad91], de Bui [Bui93] ou récemment dans l'article de synthèse de Bonnet et Constantinescu [Bon05] pour le problème d'identification en élasticité.

Les travaux de la littérature [Ike90] [Con95] [Bon05] ont montré que le problème inverse est mal posé au sens de Hadamard dans le cas élastostatique lorsqu'un champ de propriété en espace $E(x)$ est recherché. Il faut, en général, introduire des connaissances *a priori* sur ce champ pour que la solution du problème soit unique.

En dynamique transitoire ou dans le cas où le comportement matériau est non linéaire, à notre connaissance, peu de travaux théoriques portent sur le caractère du problème inverse.

Cependant, du point de vue de la résolution du problème inverse, le fait que le modèle matériau n'est jamais parfait ainsi que la redondance et la forte perturbation des conditions aux limites obtenues à partir de l'essai aux barres d'Hopkinson posent souvent des problèmes d'unicité et de continuité de la solution [Rot96]. Il faut donc utiliser non seulement une approche inverse mais également des techniques de régularisation pour stabiliser la résolution. Dans les parties suivantes, des approches pour résoudre le problème inverse et des techniques de régularisation seront donc étudiées.

1.3 Approches pour la résolution du problème d'identification

La résolution du problème d'identification des paramètres matériau peut s'effectuer par des approches directes ou inverses. Parmi les premières, citons la méthode des champs virtuels [Gré96] [Cha03] [Gré06], qui cherche à déterminer directement les paramètres à partir du principe des puissances virtuels en choisissant judicieusement un champ virtuel grâce aux mesures expérimentales des champs. L'avantage de cette méthode réside dans le coût de calcul car l'identification des paramètres est effectuée de façon directe. Cependant, pour des essais hétérogènes, surtout jusqu'à la rupture, et des mesures classiques par jauges comme dans notre cas, ce type de méthode est difficile à appliquer. Le choix de la méthode d'identification tend donc vers une approche inverse. Dans la partie suivante, différentes approches inverses seront présentées.

1.3.1 Approches inverses

Les approches inverses peuvent être regroupées en deux grandes familles : les approches par champs auxiliaires et les approches variationnelles.

1.3.1.1 Approche par champs auxiliaires

L'approche par champs auxiliaires a été appliquée à l'identification du tenseur d'élasticité d'un milieu homogène [Cal80] [Ike90] ou à la détection de fissures enfermées à l'intérieur d'un solide élastique à partir de mesures surabondantes en thermique [And92] ou en mécanique [And99] [Bui04] sur toute la frontière extérieure du milieu.

Afin de faciliter la présentation de ces approches, considérons ici l'exemple dans [And99] pour la détection de fissures à l'intérieur d'un solide élastique à partir des mesures surabondantes en déplacement \tilde{u}_d et en effort \tilde{f}_d sur l'ensemble de la frontière $\partial\Omega$. Une fonctionnelle basée sur le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti est tout d'abord introduite :

$$RG(v) = \int_{\partial\Omega} (\tilde{f}_d \cdot v - \tilde{u}_d \cdot \sigma(v) \cdot n) ds \quad (1.5)$$

avec v un champs de déplacement vérifiant la relation de comportement et l'équation d'équilibre dans le milieu Ω :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma(v)) = 0 \\ \sigma(v) = \mathbb{E} : \epsilon(v) \end{cases} \quad (1.6)$$

La fonctionnelle $RG(v)$ s'annule si le milieu est non fissuré (et si les mesures sont non perturbées). Si le milieu est fissuré, cette fonctionnelle n'est pas nulle et peut être exprimée en fonction des variables caractérisant une ou des fissures. Ceci permet donc de détecter directement ces fissures lorsque les champs de mesures choisies les excitent.

L'extension de la méthode à la détection des fissures en dynamique peut être trouvée dans [Bui04].

Remarques :

L'approche par champs auxiliaires introduit un point de vue intéressant et différent de ceux présentés ci-après. Cependant, elle n'est établie que pour des mesures surabondantes sur toute la frontière du milieu, ce qui n'est pas le cas pour les essais aux barres d'Hopkinson, dans lesquels les conditions aux limites en déplacement ne sont pas connues sur la partie latérale de l'éprouvette. De plus, les conditions aux limites utilisées sont normalement non perturbées et cette approche, à notre connaissance, n'est pas encore appliquée pour des matériaux dont le comportement est non linéaire.

1.3.1.2 Approches variationnelles

Les approches variationnelles cherchent à construire une fonction coût du champ de paramètres à identifier, qui doit être minimisée pour obtenir les solutions du problème inverse et qui n'a en général pas une forme explicite des paramètres à identifier.

Contrairement à l'approche par champs auxiliaires, la mise en œuvre de ces méthodes est itérative. Dans la littérature, trois grands types de fonctionnelles peuvent être considérés.

I. Fonctionnelle des moindres carrés directs

Dans cette approche, une sollicitation (en effort, en déplacement, en vitesse ...) est utilisée afin de calculer à travers le modèle tous les champs solution en fonction des paramètres matériau. Puis, une fonctionnelle aux moindres carrés, qui s'appuie sur l'écart entre les mesures expérimentales et les quantités calculées précédemment, est définie et minimisée par rapport aux paramètres matériau afin de trouver les paramètres optimaux.

Un exemple typique de cette approche se trouve dans l'article de Mahnken et Stein [Mah96], dans lequel les auteurs cherchent à identifier les paramètres du modèle viscoplastique de Chaboche à partir des mesures en effort sur un essai quasi-statique sollicité en déplacement ou en déformation. Le problème d'identification consiste à trouver le paramètre p minimisant la fonctionnelle aux moindres carrés directs sur les efforts :

$$\mathbf{Trouver} \quad p_{opt} = \underset{p}{\text{Arg min}} J(\sigma(p), p), \quad J(\sigma(p), p) = \int_{\partial_f \Omega} \left| \sigma n - \tilde{f}_d \right|^2 ds \quad (1.7)$$

où σ est dépendant du paramètre p et calculé à partir :

$$\begin{aligned} - \text{ des conditions aux limites en déplacement : } & u = \tilde{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_u \Omega \\ - \text{ de l'équation d'équilibre : } & \text{div}(\sigma) = 0 \\ - \text{ des relations de comportement : } & \sigma|_t = \mathcal{A}((\dot{\epsilon}(u)|_\tau, p) ; \quad \tau \leq t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le problème de minimisation (1.7) peut être résolu grâce à un calcul de sensibilité de la fonctionnelle J aux paramètres p [Mah96] ou par la méthode de l'état adjoint [Con01]. Ces méthodes permettent dans ce cas d'obtenir le gradient de la fonction coût J par rapport aux paramètres matériau p à travers la résolution de problèmes directs standards du même type que le problème (1.8). Un code de calcul existant pour le problème direct peut donc être appliqué directement, ce qui est un grand avantage de cette fonctionnelle.

Dans la plupart des cas, l'essai est piloté par des sollicitations contrôlées, qui sont donc considérées comme fiables et vérifiées exactement. Les mesures, quant à elles, sont moins fiables et vérifiées au mieux. Cependant, dans certains essais comme l'essai aux barres d'Hopkinson, la séparation "sollicitation - mesure" est moins explicite car les deux conditions aux limites en effort et en vitesse sont "mesurées" aux extrémités de l'éprouvette. Le choix de "sollicitation - mesure" dépend de la confiance que l'on accorde à chaque quantité.

L'application de cette approche est fréquente dans plusieurs domaines. En mécanique, citons quelques exemples : l'identification de manière automatique des paramètres d'une loi de comportement, qui a été mise en œuvre dans un logiciel appelé SIDOLO [Cai94], l'identification des paramètres d'une loi viscoplastique de Norton-Hoff par des mesures sur des essais d'indentation [Con01], des chargements thermiques dans les zones inaccessibles [Con03] ...

Remarques :

La fonctionnelle des moindres carrés directs a le grand avantage de permettre d'utiliser directement un code de calcul existant pour le problème direct au cours de la résolution du problème inverse. Cependant, dans le plupart des cas, le problème inverse utilisant cette fonctionnelle est souvent mal posé vis-à-vis des perturbations de mesure. Il est donc nécessaire de faire appel à une technique de régularisation.

II. Fonctionnelle des moindres carrés pour la reconstruction d'état

Dans les cas où les conditions aux limites sont bruitées et manquantes dans les zones inaccessibles, Guerrier [Gue89], Cimetière & al [Cim00] ont proposé une fonctionnelle aux moindres carrés sur les deux types de conditions aux limites (par exemple en effort et en déplacement), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de séparation explicite "solicitation - mesure". Dans ce cas, l'outil de moindres carrés est utilisé, comme en contrôle optimal, pour reconstruire des champs mécaniques et pas uniquement pour quantifier la qualité du modèle.

Afin d'illustrer la fonctionnelle des moindres carrés dans ce cadre, reprenons ici l'exemple de Cimetière & al [Cim00] pour l'identification des conditions aux limites manquantes sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière d'un domaine régi par les équations du problème du Laplacien. Dans le problème traité, les données surabondantes sur le reste de la frontière $\partial_1\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_2\Omega$ sont le déplacement et sa dérivée normale. Le problème d'identification consiste à chercher le champ u à partir des équations :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u = \tilde{u}_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{u}'_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

Le problème (1.9) est mal posé. Cimetière & al [Cim00] ont proposé de le remplacer par la minimisation par rapport à u de la fonctionnelle suivante, en vérifiant l'équation $\Delta u = 0$:

$$J(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = \int_{\partial_1\Omega} |u - \tilde{u}_d|^2 ds + \int_{\partial_1\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - \tilde{u}'_d \right|^2 ds + g(u, \frac{\partial u}{\partial n}) \quad (1.10)$$

où $g(u, \frac{\partial u}{\partial n})$ est un terme de régularisation, que nous allons détailler dans la section 1.3.2.2.III, et qui est ajouté pour stabiliser la solution obtenue.

Dans d'autres travaux tel que [Gue89], la nécessité de l'utilisation d'une technique de régularisation pour ce type de fonctionnelle est également constatée surtout lorsque les mesures sont perturbées.

Remarques :

Cette fonctionnelle nous conduit à une minimisation sous contraintes menant à un système d'équations directes et adjointes couplées lorsqu'on utilise la méthode

de l'état adjoint. Dans le cas dynamique, il est nécessaire de prendre en compte des conditions initiales et finales en temps, ce qui pose des difficultés numériques pour la résolution. Cependant, l'idée de vérifier au mieux les deux conditions aux limites (en déplacement et en dérivée normale du déplacement) est intéressante et semble naturelle lorsque ces conditions aux limites sont perturbées. En ce sens, elle est donc proche de l'idée de la méthode d'erreur en relation de comportement présentée dans la section 1.3.1.2.III.b.

III. Fonctionnelles énergétiques

À la différence des fonctionnelles aux moindres carrés, qui cherchent des paramètres matériau ou des champs solution minimisant la distance entre la réponse du modèle et les mesures, les fonctionnelles énergétiques se basent sur un écart entre des champs solution admissibles, qui sont construits à la fois à partir des mesures et du modèle.

Ce type de fonctionnelle a initialement été proposé dans le domaine de la vérification [Lad75], sous le nom de **concept d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC)**, afin d'estimer la qualité de la solution obtenue par une méthode Éléments Finis. Puis, elle a été appliquée au recalage des structures dans le domaine vibratoire, afin de corriger les masses et raideurs des modèles, en supposant les fréquences propres comme fiables [Lad83]. Dans cette application, ce concept est modifié pour tenir compte des perturbations de mesures d'essai. Nous parlons alors de **la fonctionnelle d'ERdC modifiée**.

Indépendamment de ces travaux, une fonctionnelle similaire a été proposée en électrostatique, sous le nom de **fonctionnelle de Kohn-Vogelius**, afin de déterminer la distribution intérieure de la conductivité électrique d'un milieu à partir des mesures de potentiel et de voltage sur sa frontière [Koh84]. Dans ce travail, les résultats mathématiques forts sur la nature du problème inverse, ainsi que les caractéristiques de la solution obtenue par la méthode de résolution numérique proposée sont établis.

Pour présenter les idées de ces fonctionnelles, nous nous appuyons ici sur le travail de Bui [Bui93] et Constantinescu [Con95] pour l'identification de champ de module élastique \mathbb{E} à partir de mesures surabondantes à la frontière en effort et en déplacement. Le champ de module \mathbb{E} est recherché par la minimisation de la fonctionnelle coût sur ce champ de module \mathbb{E} et également les champs de déplacement et d'effort appartenant des espaces admissibles :

$$\begin{aligned} J(u_{CA}, \sigma_{SA}, \mathbb{E}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\mathbb{E}^{-1/2} : \sigma_{SA} - \mathbb{E}^{1/2} : \epsilon(u_{CA}) \right)^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sigma_{SA} - \mathbb{E} : \epsilon(u_{CA}) \right) : \mathbb{E}^{-1} : \left(\sigma_{SA} - \mathbb{E} : \epsilon(u_{CA}) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (1.11)$$

où,

$$\begin{aligned} - U_{CA} &= \left\{ u \in H^1(\Omega) / u = \tilde{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega, \right\} \\ - \Sigma_{SA} &= \left\{ \sigma \in H_{div}(\Omega) / \sigma \cdot n = \tilde{f}_d \text{ sur } \partial_f \Omega, \quad \text{div } \sigma = 0 \text{ pour } x \in \Omega \right\} \end{aligned}$$

Dans le cas électrostatique ou élastostatique, les études précédentes [Koh84] [Bui93] [Con95] ont montré que les champs solution statiquement et cinématiquement admissibles sont indépendants. Ils peuvent donc être calculés séparément et directement par la résolution d'un problème direct de Neumann et d'un autre de Dirichlet. Une stratégie d'identification a été étudiée dans [Koh84] et reprise en mécanique dans [Con95]. Elle consiste à calculer, pour un champ de module élastique \mathbb{E} , les champs solution statiquement admissibles à partir du problème direct de Neumann et les champs solution cinématiquement admissibles à partir du problème direct de Dirichlet. Puis, à partir de ces champs solution admissibles, la fonctionnelle de Kohn-Vogelius est estimée, puis minimisée par rapport à \mathbb{E} .

Dans le cas dynamique, les champs solution dynamiquement et cinématiquement admissibles ne sont plus indépendants puisque l'équation d'équilibre les couple. Il existe dans ce cadre différentes propositions d'extension de la fonctionnelle énergétique.

Une extension "directe" des travaux de [Koh84] [Bui93] [Con95] au cas dynamique transitoire est trouvée dans [Rot94] [Rot96] pour l'identification du module élastique E à partir des résultats d'un essai aux barres d'Hopkinson horizontales et dans [Sat01] pour l'identification du champ de module \mathbb{E} d'un disque $2D$ à partir de mesures redondantes à sa frontière. Dans ce cas, le calcul inverse se divise en deux problèmes directs l'un de Neumann et l'autre de Dirichlet pour un champ de module élastique \mathbb{E} . Un écart entre ces champs solution directs obtenus, par exemple la fonctionnelle de Kohn-Vogelius, est défini, puis minimisé par rapport aux paramètres matériau afin de trouver les paramètres optimaux. Cependant, Feissel [Fei03], Allix & al [All03], en identifiant le module d'Young d'une barre élastique, ont montré que cette méthode fonctionne avec des mesures non perturbées ou faiblement perturbées mais qu'elle n'est plus valide lorsque la perturbation des mesures est de l'ordre de 10%. En effet, la séparation du problème inverse en deux calculs directs peut paraître arbitraire et ne respecte pas strictement l'esprit des fonctionnelles énergétiques car les champs solution dynamiquement et cinématiquement admissibles sont couplés par l'équation d'équilibre. De plus, le fait de vérifier exactement les conditions aux limites dans ces deux calculs directs et de minimiser directement l'écart entre leurs deux champs solution empêche l'utilisation d'une technique de régularisation, qui s'avère nécessaire dans le cas de données perturbées.

Feissel [Fei03], Allix & al [All03], à partir des travaux en recalage des structures [Lad83] [Lad94], ont donc proposé une extension de la méthode d'ERdC modifiée au cas dynamique transitoire. Le problème d'identification du module élastique s'écrit alors :

Trouver les champs σ_{DA} , u_{CA} et le module E minimisant :

$$J(\sigma_{DA}, u_{CA}, E) = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma - E \epsilon) E^{-1} (\sigma - E \epsilon) d\Omega dt + \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega_f} d_f(\sigma.n, \tilde{f}_d) ds + \int_{\partial\Omega_u} d_u(u, \tilde{u}_d) ds \right) dt$$

sous les contraintes :

$$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad u_{(t=0)} = u_0, \quad \dot{u}_{(t=0)} = \dot{u}_0 \quad (1.12)$$

où $d_f(\sigma, \tilde{f}_d)$ et $d_u(u, \tilde{u}_d)$ représentent les distances de la solution aux mesures en effort et en déplacement.

Les termes de distance de mesures jouent un rôle de régularisation qui est très important surtout dans le cas de mesures fortement perturbées. Feissel [Fei03] a montré que la fonctionnelle avec termes de mesures (1.12) permet d'identifier le module E pour des mesures perturbées à 40%. Cependant, sans termes de mesures, elle ne fonctionne que pour des mesures perturbées jusqu'à 20% (même si ce résultat est meilleur que celui obtenu par la méthode de [Rot96] [Sat01]).

Une démarche similaire à l'ERdC modifiée est trouvée dans le travail de Orkisz et Skrzat [Ork96] pour la reconstruction des champs de contraintes résiduelles à travers la minimisation d'une fonctionnelle composée de deux termes, l'un représentant l'erreur de mesures expérimentales et l'autre l'erreur du modèle théorique. L'importance de tenir compte de toute l'information expérimentale et théorique dans un seul calcul pour la qualité de l'identification est également mise en avant dans l'article.

Remarques :

L'avantage des fonctionnelles énergétiques réside dans l'introduction d'une fonction coût s'appuyant sur un contenu énergétique plus riche que les moindres carrés directs. On s'attend donc à ce que la première présente moins de minima locaux que la deuxième, ce qui rend plus facile la minimisation. Parmi les fonctionnelles proposées en dynamique transitoire, la fonctionnelle basée sur l'ERdC modifiée [All03] [Fei03] semble fournir des résultats d'identification du module élastique les plus robustes vis-à-vis de fortes perturbations des mesures. En revanche, cette fonctionnelle demande de résoudre un problème de minimisation sous contraintes et empêche l'utilisation directe d'un code de calcul existant pour le problème direct.

1.3.2 Techniques de régularisation

Lorsque le problème inverse devient mal posé, ce qui est malheureusement souvent le cas, il est nécessaire d'utiliser une technique pour rendre le problème à nouveau bien posé. De nombreux travaux existants cherchent à résoudre ce problème dans tous

les domaines : mathématique, mécanique, physique ... et peuvent se séparer en deux grandes familles : les méthodes déterministes et les méthodes probabilistes. Les premières, à notre connaissance, peuvent se regrouper en deux catégories : les méthodes de quasi-réversibilité [Lio67] et les techniques de régularisation de Tikhonov [Tik77]. Les méthodes probabilistes, quant à elles, sont assez nombreuses, parmi lesquelles l'approche la plus connue des filtres de Kalman [Kal60].

L'étude de ces méthodes et la possibilité de leur application à notre problème sont présentées dans la partie suivante.

1.3.2.1 Méthode de quasi-réversibilité

La méthode de quasi-réversibilité (QR) est étudiée mathématiquement pour les problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles [Lio67] [Lio68]. À notre connaissance, la plupart de ses applications en mécanique a pour objectif de déterminer les conditions aux limites manquantes, par exemple pour le problème inverse du Laplacien [Bui93] [Bou05], ou de détecter les zones plastiques dans une structure [Bou98]. Le point commun de ces problèmes réside dans la connaissance de conditions aux limites surabondantes (éventuellement perturbées) sur une partie de la frontière de la structure et également dans le manque de connaissance sur les conditions aux limites sur le reste de la frontière.

Considérons le problème du Laplacien (1.9) présenté dans la section 1.3.1.2.II, dans lequel les conditions aux limites en déplacement et leurs dérivées normales sont connues sur la partie $\partial_1\Omega$ de la frontière et inconnues sur le reste $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$.

L'idée de la méthode de quasi-réversibilité est de remplacer le problème du Laplacien avec l'opérateur d'ordre 2 Δu par un autre avec un opérateur d'ordre 4 paramétré par un petit paramètre ϵ , qui est bien posé au sens de Hadamard et qui donne la solution u_ϵ dépendant du paramètre ϵ . Lorsque le domaine Ω_ϵ tend vers Ω , c'est-à-dire que ϵ tend vers 0, nous obtenons la solution du problème du Laplacien $u = u_{(\epsilon \rightarrow 0)}$.

Remarques :

L'utilisation de la méthode de QR peut être envisagée dans notre contexte pour identifier la zone de rupture d'une éprouvette. Cependant, pour un comportement non linéaire, il est difficile de formuler le problème sous la forme du Laplacien. Ceci est également plus compliqué dans le cas de la dynamique transitoire. De plus, dans le contexte de l'essai aux barres d'Hopkinson, les conditions aux limites ne sont pas surabondantes sur toute la frontière car sur la partie latérale de l'éprouvette, nous n'avons que des conditions en effort : $\sigma.n = 0$. Pour toutes ces raisons, la méthode de QR n'est pas retenue pour la suite.

1.3.2.2 Méthodes de régularisation de Tikhonov

L'idée de la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas de modifier légèrement l'opérateur pour trouver un problème bien posé comme la méthode de QR, mais

de stabiliser les solutions du problème inverse régularisé vis-à-vis de faibles variations des données. Cette méthode est proposée par Tikhonov [Tik77] dont l'idée de départ est présentée dans la partie suivante.

I. Méthode de régularisation de Tikhonov classique

La méthode de régularisation de Tikhonov "classique" a initialement été proposée pour les problèmes inverses linéaires de type : $AX = B$ avec des connaissances *a priori* sur la solution : $X \sim X_0$.

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste à chercher une solution faisant un compromis entre la vérification du modèle et la connaissance *a priori* sur la solution. Elle est définie comme l'intersection C des deux convexes suivants :

$$C = \left\{ X \mid \|AX - B\| \leq \epsilon_1 \right\} \cap \left\{ X \mid \|X - X_0\| \leq \epsilon_2 \right\} \quad (1.13)$$

où les coefficients ϵ_1, ϵ_2 représentent les tolérances accordées à la solution X par rapport au modèle et à la connaissance *a priori* X_0 .

Lorsque le domaine C n'est pas vide, la solution régularisée au sens de Tikhonov existe et il est facile de montrer qu'elle est la solution du problème de minimisation suivant avec $\alpha = \epsilon_1^2/\epsilon_2^2$:

$$\min_X J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 \quad (1.14)$$

Le paramètre α , appelé paramètre de régularisation de Tikhonov, représente le compromis entre l'exactitude vis-à-vis du modèle et la proximité par rapport à la solution donnée X_0 . Le choix de ce paramètre est assez délicat et dépend de la confiance accordée au modèle ainsi que de la connaissance *a priori* sur la solution donnée. α petit va rendre le problème instable, alors que s'il est grand, la solution obtenue s'approche de X_0 mais vérifie moins le modèle (mécanique). La solution régularisée au sens de Tikhonov est donc paramétrée par le coefficient α :

$$X_\alpha = X_0 - (A^T A + \alpha I_d)^{-1} A^T (A X_0 - B) \quad (1.15)$$

Une méthode usuelle pour choisir le paramètre de régularisation optimal α est le principe de sélection de Morozov (the discrepancy principle) [Bad91], qui consiste à déterminer α à partir des connaissances *a priori* sur l'amplitude d'erreur du système $AX = B$, notée δ dans l'équation (1.16). En utilisant ce principe, le problème inverse (1.14) s'écrit comme deux problèmes successifs :

$$\begin{cases} X_\alpha = \underset{X}{\text{Arg min}} J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 \\ \alpha_X = \left\{ \alpha \mid |AX - B| = \delta \right\} \end{cases} \quad (1.16)$$

Il a été démontré mathématiquement que ce principe converge toujours pour un problème inverse linéaire mal posé au sens de Hadamard [Bad91]. Des propositions

d'amélioration de la vitesse de convergence peuvent être trouvées dans l'ouvrage d'Engl & al [Eng96].

D'autre part, le choix du type de terme de régularisation au sens de Tikhonov est assez varié (sur X ou \dot{X} ...) et fait l'objet des travaux dans littérature [Tik77] [Bad91] [Eng96]. Ce choix dépend du type de problèmes traités, de connaissances *a priori* possédées.

L'application de la technique de régularisation de Tikhonov est très importante en mécanique et a donné lieu à beaucoup de travaux. Citons ici quelques exemples : l'identification de contraintes dans un structure élastoplastique à partir de mesures (partielles) sur le champ de déplacement [And95] ou encore l'identification des charge-ments thermiques dans les zones inaccessibles à partir des mesures surabondantes sur le reste de la frontière [Con03].

Remarques :

Bien que la technique de régularisation de Tikhonov classique soit intéressante, elle a besoin de connaissances *a priori* sur la perturbation des conditions aux limites, qui est supposée difficile à connaître dans notre contexte. Cette technique n'est donc pas retenue pour ce travail.

II. Méthode de régularisation itérative de Tikhonov

Une version améliorée de la méthode de régularisation de Tikhonov "classique" a été proposée dans la littérature [Eng96]. Elle consiste à mettre à jour les connaissances sur la solution donnée du problème inverse de façon itérative. Cette méthode est donc appelée méthode de régularisation itérative de Tikhonov.

Nous reprenons le problème inverse linéaire présenté ci-dessus (section 1.3.2.2.I.a). L'application de la méthode de régularisation de Tikhonov "classique" conduit à la minimisation de la fonction suivante :

$$\min_X J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 \tag{1.17}$$

La méthode de régularisation itérative de Tikhonov cherche à résoudre successivement le problème (1.17) dans lequel, à chaque itération, la connaissance de la solution donnée X_0 est mise à jour par la solution de l'itération précédente. Par exemple, à l'itération i , le problème de minimisation s'écrit :

$$\min_{X^i} J(X^i) = \|AX^i - B\|^2 + \alpha \|X^i - X^{i-1}\|^2 \tag{1.18}$$

Il a été démontré que la méthode converge lorsque le paramètre α tend vers zéro [Eng96]. Par contre, à notre connaissance, aucun résultat de convergence n'est établi pour un α fixé.

De plus, afin de choisir le paramètre de régularisation α , cette méthode a besoin de connaissances *a priori* sur l'erreur de modèle ($AX - B$), ce qui est équivalent à la connaissance sur le niveau de perturbation de mesures dans notre problème. Elle est

donc difficile à appliquer dans notre contexte.

III. Méthode de régularisation évanescence

Un des inconvénients des méthodes de régularisation de Tikhonov est d'avoir besoin de connaissances *a priori* sur la solution ou sur les perturbations des mesures, ce qui est souvent délicat. La question se pose donc : "Est ce que l'idée de Tikhonov est utilisable dans ce contexte?"

Une réponse peut être trouvée dans les travaux de Cimetière & al [Cim00] [Cim01] dans lesquels les auteurs ont proposé une méthode de régularisation évanescence pour identifier les conditions aux limites manquantes sur la partie $\partial_2\Omega$ de la frontière d'un domaine régi par les équations du problème du Laplacien (1.9) présenté dans la section 1.3.1.2.II.

La méthode de régularisation évanescence est itérative. Elle consiste à chaque étape à minimiser une fonctionnelle de type des moindres carrées régularisée par la distance entre les solutions de cette étape et celles de l'étape précédente. À l'étape $(i + 1)$, la méthode cherche donc $\left(u^{i+1}, \frac{\partial u^{i+1}}{\partial n}\right)$ tel que :

$$J\left(u^{i+1}, \frac{\partial u^{i+1}}{\partial n}\right) \leq J\left(u^i, \frac{\partial u^i}{\partial n}\right) \quad (1.19)$$

avec :

$$J\left(v, \frac{\partial v}{\partial n}\right) = \int_{\partial_1\Omega} \left[(v - \tilde{u}_d)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial n} - \tilde{u}'_d\right)^2 \right] ds + c \int_{\partial\Omega} \left[(v - u^i)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u^i}{\partial n}\right)^2 \right] ds$$

où c est le paramètre de régularisation et $\left(u^i, \frac{\partial u^i}{\partial n}\right)$ ont été calculés à l'étape i .

Cimetière & al [Cim00] [Cim01] ont montré mathématiquement que le problème régularisé est bien posé et que la stratégie converge toujours. Le point très intéressant qu'il faut noter ici est que ce résultat de convergence est vrai pour toute valeur de c , autrement dit, aucune information supplémentaire n'est nécessaire ici.

Remarques :

Cette méthode présente une manière intéressante de traiter les conditions aux limites surabondantes et perturbées sans avoir besoin de connaissances *a priori* sur la perturbation. Cependant, elle a toujours été appliquée en élastostatique jusqu'à présent. Son extension et ses démonstrations mathématiques de convergence dans le cas dynamique ou pour un comportement non linéaire n'ont pas été étudiées.

1.3.2.3 Le filtre de Kalman

a. Présentation du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman [Kal60] [Bry75] [And89] est une méthode classique dans le domaine de l'automatique, où le problème est donc exprimé sous la forme d'un problème

de contrôle optimal régi par une équation d'état et une équation d'observation écrit ici en temps discret :

$$\begin{cases} X_{i+1} = g(X_i) \\ Y_{i+1} = C X_{i+1} \end{cases} \quad (1.20)$$

avec,

- X_i : le vecteur d'état à l'instant i , l'inconnue du problème ;
- Y_i : la mesure du système à l'instant i .

Avec une erreur du modèle ou des perturbations des mesures Y , le problème (1.20), qui consiste à chercher le vecteur d'état X , est normalement un problème mal posé. L'idée du filtre de Kalman est de tenir compte directement des perturbations dans les équations d'état et d'observation. Le système (1.20) devient donc :

$$\begin{cases} X_{i+1} = g(X_i) + n_v^i \\ Y_{i+1} = C X_{i+1} + n_w^{i+1} \end{cases} \quad (1.21)$$

où, n_v et n_w représentent l'erreur sur le modèle et sur l'observation Y .

En supposant que ces perturbations sont gaussiennes, centrées, blanches ou colorées, le problème consiste à chercher le vecteur \hat{X} pour que la variance $P = \mathbb{E}(\hat{X} - X)$ soit minimale, avec X le vecteur vérifiant l'équation déterministe : $X_{i+1} = g(X_i)$.

Le filtre de Kalman peut être interprété de façon déterministe comme le problème de minimisation de la fonction aux moindres carrés suivante :

$$\min_{X_{i+1}} \int_i^{i+1} \frac{1}{2} \left\{ \left(X_{i+1} - g(X_i) \right) V^{-1} \left(X_{i+1} - g(X_i) \right) + \left(Y_{i+1} - C X_{i+1} \right) W^{-1} \left(Y_{i+1} - C X_{i+1} \right) \right\} d\tau \quad (1.22)$$

V, W sont les matrices de covariance des bruits n_v et n_w . Il nous faut donc connaître *a priori* ces matrices afin d'appliquer le filtre de Kalman.

Le filtre de Kalman a initialement été établi dans le cadre des systèmes linéaires [Kal60] puis adapté pour des systèmes non linéaires [Bry75] [And89]. Pour ces derniers, différentes variantes ont été proposées, parmi lesquelles le filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter, EKF) [Bry75] est souvent utilisé. Les détails de ces méthodes se trouvent dans [Kal60] [Bry75] [And89] ou [dL96].

b. Application au problème d'identification des paramètres matériau

Afin d'appliquer le filtre de Kalman aux problèmes d'identification, toutes leurs équations doivent être réécrites sous la forme classique (1.20) du contrôle optimal car le filtre de Kalman ne reconstruit que le vecteur d'état. Les paramètres recherchés sont donc considérés comme une fonction du temps et ajoutés dans le vecteur d'état X . La résolution du problème ainsi formulé permettra d'obtenir les paramètres à identifier.

Dans le domaine de la mécanique des structures, l'application du filtre de Kalman est assez importante. Citons ici les travaux de Aoki & al [Aok98] pour l'identification des paramètres matériau élastoviscoplastique à partir des essais aux barres d'Hopkinson, de Massart [Mas05] pour l'optimisation des déformations différées du béton, ou

de Corigliano et Mariani [Cor04] pour l'identification des paramètres d'une loi de comportement matériau non linéaire. Cependant, ces travaux se placent dans le contexte où les matrices de covariance V, W sont connues *a priori*.

Remarques :

Le filtre de Kalman est une méthode probabiliste intéressante pour l'identification à partir de mesures perturbées grâce aux informations *a priori* sur l'erreur de mesures expérimentales et de modèle théorique. Cependant, dans le cas de nos essais, où les signaux entrant et sortant du système sont fortement perturbés et où aucune information *a priori* n'est connue, la méthode du filtre de Kalman ne peut pas s'appliquer de façon optimale. Toutefois, elle a tout de même été testée pour l'identification du module d'élasticité (section 3.1.5) en supposant que les niveaux de bruit sont connus, ce qui est possible ici grâce à la fabrication numérique du problème direct. Cette méthode se montre dans ce cas moins robuste que la méthode basée sur l'erreur en relation de comportement.

En dehors du filtre de Kalman, dans la catégorie des méthodes probabilistes, différentes approches sont proposées [Tar05]. Cependant, elles s'appuient également sur des informations *a priori* sur les perturbations de mesures qui sont supposées inconnues dans notre contexte.

1.3.3 Choix de la méthode d'identification

Dans ce chapitre, différentes approches de résolution du problème inverse et différentes techniques de régularisation ont été présentées. Chacune d'entre elles possède des avantages et des inconvénients.

Cependant, dans le contexte de l'essai des barres d'Hopkinson verticales, qui nous intéresse, où les mesures sont fortement corrompues et aucune information *a priori* sur ces perturbations n'est connue, l'approche basée sur l'erreur en relation de comportement [Lad83] semble la plus convenable dans le cas de l'élasticité et également dans le cas non linéaire. Elle sera détaillée dans la suite.

1.4 Méthode d'Erreur en Relation de Comportement modifiée

Le concept d'Erreur en Relation de Comportement (ERdC) est présenté pour la première fois dans la thèse de Ladevèze [Lad75] dans l'objectif d'estimer la qualité de la solution obtenue par une méthode Éléments Finis. Dans le domaine de la vérification, le concept a été étendu aux matériaux dont le comportement est non linéaire et dépendant du temps [Lad85] [Lad99b].

En parallèle avec ces travaux, l'ERdC a été appliquée au recalage de structures en vibration pour l'analyse modale, afin de corriger les masses et raideurs des modèles

[Lad83]. Son idée est de séparer les relations théoriques et expérimentales en deux groupes : le groupe fiable, qui se compose de l'équation d'équilibre ; le groupe non fiable, qui est constitué des relations de comportement et des mesures. Les mesures sont considérées non fiables afin de tenir compte des perturbations des mesures de l'essai, surtout dans le cas dynamique. C'est la raison pour laquelle cette méthode est appelée méthode de l'ERdC modifiée.

Le premier groupe d'équations sera vérifié exactement, tandis que le deuxième sera vérifié au mieux. Le problème à résoudre est donc de minimiser une fonction coût formulée à partir du groupe non fiable en vérifiant le groupe fiable pour définir des champs mécaniques admissibles et identifier le comportement matériau.

L'application de la méthode en recalage se trouve également dans [Lad94]. Elle s'étend ensuite au recalage de l'amortissement et des non linéarités de structures ou des paramètres de liaison [Cho98]. L'étude de l'ERdC dans ces deux domaines a été étendue récemment au cadre stochastique. Citons ici les travaux de Ladevèze, Deraemaeker & al [Lad03a] [Der04] [Lad06] qui consistent à caractériser les inconnues du problème par des paramètres probabilistes. Il faut noter également qu'il existe dans la littérature des méthodes de recalage similaires à la méthode d'ERdC modifiée. Citons ici par exemple les travaux de Golinval et Collignon [Gol96] ou de Moine, Billet et Aubry [Moi97].

En dehors de ces deux domaines, l'ERdC a également été appliquée en contrôle actif des structures pour déterminer la position optimale des capteurs et des actionneurs piézoélectriques dans une structure légère [For02] et en dynamique transitoire afin d'identifier les paramètres de la loi de comportement à partir des données de l'essai aux barres d'Hopkinson [All03] [Fei03] [All05a]. Cependant, ces travaux sont limités aux temps d'étude courts et pour un matériau élastique. Cette thèse, en continuant ce travail, va étudier la méthode pour des temps d'étude quelconques et pour des matériaux dont le comportement est non linéaire.

1.4.1 Formulation

Dans le cadre général de l'identification des paramètres de la loi de comportement pour le cas de la dynamique transitoire, différentes formulations du problème d'identification par l'ERdC modifiée sont possibles comme on le verra aux chapitres 4 et 5. Pour faciliter la présentation de la méthode d'ERdC modifiée, dans ce premier chapitre, la formulation suivante du problème est retenue :

Trouver les champs σ , ϵ et le(s) paramètre(s) p minimisant :

$$J(\sigma, \epsilon, p) = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(\sigma, \epsilon, p) d\Omega dt + \frac{r}{1-r} \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega_f} d_f(\sigma, \tilde{f}_d) ds + \int_{\partial\Omega_u} d_u(u, \tilde{u}_d) ds \right) dt$$

sous les contraintes :

$$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad u_{(t=0)} = u_0, \quad \dot{u}_{(t=0)} = \dot{u}_0 \quad (1.23)$$

Parmi les termes de la fonction coût $J(\sigma, \epsilon, p)$:

- $\mathcal{D}(\sigma, \epsilon, p)$ représente l'erreur en relation de comportement ou l'erreur de modèle ;
- d_f et d_u expriment l'erreur de mesures en effort et en déplacement. Typiquement, elles sont prise comme suit :

$$\begin{cases} d_f(\sigma, \tilde{f}_d) = (\sigma n - \tilde{f}_d)^2 \\ d_u(u, \tilde{u}_d) = (u - \tilde{u}_d)^2 \end{cases}$$

Dans le problème (1.23), le terme $\frac{r}{1-r}$, avec le paramètre r compris entre 0 à 1, joue un rôle de pondération entre les deux termes de l'erreur. Pour de petites valeurs de r , les distances aux mesures sont relâchées, c'est-à-dire que la confiance porte sur le modèle. A l'inverse, si r est grand, on fait confiance aux mesures en relâchant le modèle. Aux limites, si $r = 0$ ou $r = 1$, le problème devient trivial, une infinité de solutions est trouvée car toutes les entrées sont dans la fonction coût. Il faut donc choisir un poids raisonnable pour bien identifier les paramètres du modèle.

Deraemaeker & al [Der04] ont étudié l'influence du poids $\frac{r}{1-r}$ choisi sur la qualité du résultat de minimisation de la fonction coût en présence d'incertitudes de mesures dans le problème de recalage de masse et de raideur de structure en vibration. Dans ce cas, une fois les termes adimensionnés et le niveau de perturbation de mesure inconnu, le fait de choisir $r = 0.5$ donne une bonne insensibilité de la fonction coût J face aux incertitudes de mesure.

En dynamique transitoire, Feissel, Allix, Nguyen [Fei05] et Feissel [Fei06] ont montré que le choix de $r = 0.5$ n'est pas forcément le meilleur pour identifier le module d'élasticité. Leur proposition est de résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle d'ERdC modifiée pour un jeu de paramètre p donné avec $r = 0.5$, puis grâce aux champs solution obtenus, minimiser une fonction coût composée seulement de l'erreur de modèle. Bien que ce choix soit intéressant, il rend complexe la résolution du problème d'identification. Dans l'objectif d'étudier la méthode pour des temps d'étude quelconques et pour le comportement non linéaire, ce travail utilisera toujours $r = 0.5$.

1.4.2 Procédure de résolution

La minimisation de la fonction coût $J(\sigma, \epsilon, p)$ par rapport au(x) paramètre(s) p nous conduit à un problème de minimisation globale en temps et non linéaire sous contraintes et ceci même dans le cas élastique.

Comme ce qui a été fait dans le domaine du recalage [Lad94], [Cho98] ou dans l'identification du module élastique en dynamique transitoire [All03] [Fei03], nous proposons donc de procéder de manière itérative en deux étapes (figure 1.3).

La première consiste à résoudre le problème pour un paramètre p fixé, appelé le problème de base, puis la deuxième évalue la fonction coût en fonction du paramètre matériau en vue de la minimiser.

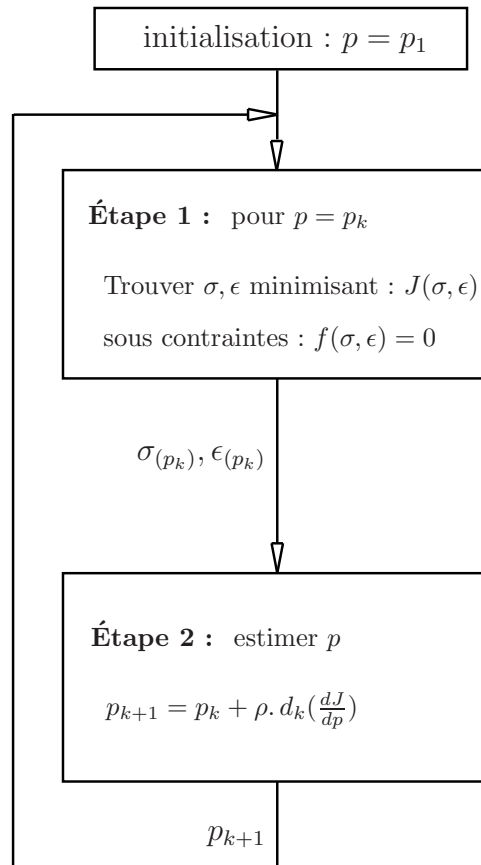


Figure 1.3 – Procédure de résolution du problème inverse formulé par la méthode d’ERdC modifiée

I. Résolution du problème de base pour un paramètre p fixé :

Le problème de base associé au problème (1.23) s'écrit comme suit :

Trouver les champs σ, u minimisant :

$$J(\sigma, u) = \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(\sigma, \epsilon, p) d\Omega dt + \frac{r}{1-r} \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega_f} d_f(\sigma, \tilde{f}_d) ds + \int_{\partial\Omega_u} d_u(u, \tilde{u}_d) ds \right) dt$$

sous les contraintes :

$$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad u_{(t=0)} = u_0, \quad \dot{u}_{(t=0)} = \dot{u}_0 \quad (1.24)$$

Dans le cas élastique, le problème devient un problème d'optimisation quadratique linéaire. La résolution de ce problème permettra alors d'attaquer plus facilement le problème de minimisation non linéaire rencontré lors de l'identification des paramètres d'un comportement non linéaire par l'ERdC modifiée.

II. Estimation des paramètres du matériau par l'évaluation de la fonction coût grâce aux champs solution du problème de base. Le problème à résoudre consiste à chercher un meilleur jeu de paramètre(s) p :

$$p_{k+1} = p_k + \rho \cdot d_k \left(\left. \frac{dg(p)}{dp} \right|_{p=p_k} \right) \quad \text{avec : } g(p) = J(\sigma(p), \epsilon(p), p) \quad (1.25)$$

Appliquant la méthode de l'état adjoint [Con01] [Fei03], le gradient de la fonction coût par rapport au(x) paramètre(s) matériau p peut être calculé explicitement à partir du champ solution du problème de base.

1.5 Outils d'optimisation utilisés pour la méthode d'ERdC modifiée

La résolution du problème d'identification par la méthode d'ERdC nécessite donc des méthodes de minimisation sous contraintes (pour le problème de base) et sans contrainte (pour l'étape d'identification des paramètres matériau). Les méthodes d'optimisation sans et avec contraintes sont donc étudiées ci-après.

1.5.1 Optimisation sans contrainte

La deuxième étape de la stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée consiste à évaluer la fonction coût par rapport aux paramètres matériau. Il s'agit alors d'un problème de minimisation sans contrainte, dans lequel seul le gradient de la fonction coût est connu grâce à la solution du problème de base.

Ce type de problème s'écrit simplement :

$$\mathbf{Trouver} : \quad p_{opt} = \underset{p}{\text{Arg min}} J(p) \quad (1.26)$$

La résolution itérative de ce problème peut être résumée par les trois étapes suivantes pour une itération typique k :

- recherche d’une direction de descente d_k ;
- calcul d’un pas de descente ρ_k selon la direction d_k pour minimiser la fonction $J(p_k + \rho_k d_k)$;
- actualisation pour l’itération suivante : $p_{k+1} = p_k + \rho_k d_k$.

La deuxième étape est un problème de minimisation unidimensionnelle, dont la résolution peut simplement s’effectuer avec une technique de recherche linéaire avec un critère d’Armijo [Cul94] [Fle87].

La première étape, quant à elle, fait l’objet de différents travaux dans la littérature. Ces méthodes d’optimisation peuvent être regroupées en deux grandes familles :

1.5.1.1 Méthodes basées sur le gradient

Ces méthodes cherchent à calculer les directions de descente à partir de gradient de la fonction afin de la minimiser. Citons donc les méthodes suivantes :

a. Méthode de gradient à pas optimal

La direction de descente utilisée dans cette méthode est celle opposée au gradient de la fonction : $d_k = -\nabla J(p_k)$.

La convergence de cette méthode est rapide lorsqu’on est loin du minimum de la fonction coût. Par contre, elle est très lente lorsqu’on s’approche du minimum car le gradient devient petit dans cette zone.

b. Méthode de gradient conjugué

Cette méthode a initialement été proposée pour la minimisation d’une fonction coût quadratique, puis étendue à des fonctions quelconques [Cul94] [Fle87]. L’idée de cette méthode réside dans la recherche de la direction de descente conjuguée à celles des itérations précédentes, ce qui permet de conserver la vitesse de convergence dans la zone proche du minimum.

Il existe différentes variantes des méthodes du gradient ci-dessus comme la méthode de descente à pas fixe, dans laquelle la direction de descente est celle opposée du gradient de la fonction et le pas de descente est choisi et fixé pour l’ensemble du processus de minimisation.

1.5.1.2 Méthodes de Newton

Ces méthodes [Cul94] [Fle87] consistent à déterminer la direction et le pas de descente pour que le gradient de la fonction approximée soit nul. Pour cela, il suffit d’approximer la fonction coût par son développement limité à l’ordre 2. La direction de descente est donc calculée à l’aide du gradient et du hessien de la fonction.

Il existe des variantes de la méthode de Newton, qui cherchent à approximer le hessien (ou son inverse) grâce au gradient de la fonction. Il s’agit alors des méthodes

appelées de quasi-Newton. Dans notre contexte, où les hessiens ne sont pas connus, ces méthodes semblent parfaitement adaptées.

La convergence de ce type de méthodes est rapide même dans la zone proche du minimum de la fonction. Cependant, elles demandent un hessien, ou son approximation, défini positif, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans les zones loin du minimum.

1.5.1.3 Choix de la méthode d'optimisation sans contrainte

Après avoir discuté des avantages et des inconvénients des méthodes d'optimisation sans contrainte, les deux méthodes suivantes peuvent être utilisées dans notre contexte afin de minimiser la fonction coût par rapport aux paramètres matériau.

- la méthode de gradient à pas optimal dans la zone loin du minimum et la méthode de quasi-Newton dans la zone proche du minimum ;
- la méthode de gradient conjugué.

1.5.2 Optimisation sous contraintes : quelques grandes approches

Le problème formulé à partir de l'approche basée sur l'Erreur en Relation de Comportement [Lad83] [All03] [All05a] se trouve toujours sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes en dynamique, qui peut donc se ramener à un problème de contrôle optimal. La résolution de ce type de problème est l'objectif de très nombreux travaux dans la littérature. Une présentation exhaustive de toutes ces méthodes est donc difficile. Dans ce chapitre, seules des grandes méthodes et la possibilité de les appliquer dans les deux contextes auxquels on s'intéresse, précisés ci-dessous, seront considérées. Les cas étudiés sont :

- pour un matériau élastique :

Le problème à résoudre est de minimiser une fonction coût quadratique sous des contraintes *linéaires* et différentielles en temps.

$\text{Trouver } (u, y) \text{ minimisant : } \int_0^T \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} u Q u + \frac{1}{2} y R y \right] d\Omega dt$ $\text{sous les contraintes : } \begin{cases} \dot{u} + A u + B y - c = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (1.27)$
--

- pour un matériau dont le comportement est non linéaire :

Le problème à résoudre est de minimiser une fonction coût non linéaire sous des

contraintes *non linéaires* et différentielles en temps.

$$\begin{array}{l}
 \text{Trouver } (u, y) \text{ minimisant : } \int_0^T \int_{\Omega} J(u, y) d\Omega dt \\
 \text{sous les contraintes : } \begin{cases} \dot{u} + g(u, y) = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}
 \end{array} \quad (1.28)$$

Le lien entre ces deux formulations et les problèmes inverses traités par l'ERdC modifiée sera précisé dans les chapitres 2, 3, 4 et 5.

1.5.2.1 Extension de l'optimisation sans contrainte

I. Méthode de gradient projeté

La méthode de gradient projeté [Dos88] [Cul94] est une méthode itérative qui consiste pour chaque itération à minimiser la fonction coût $J(q)$ avec q une variable globale en temps et en espace, puis de vérifier les contraintes. Le cas des contraintes linéaires est d'abord étudié. Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\text{Trouver } q \text{ minimisant : } J(q) \quad \text{sous les contraintes : } Aq - b = 0 \quad (1.29)$$

Le problème est initialisé par une solution q_0 vérifiant les contraintes ($Aq - b = 0$), par exemple : $q_0 = A^T(AA^T)^{-1}b$

Supposons que la solution q_k de l'itération k est connue, une "meilleure" solution q_{k+1} tel que $J(q_{k+1}) < J(q_k)$ vérifiant les contraintes ($Aq - b = 0$) est donc cherchée.

Une méthode de descente en se basant sur le gradient de la fonction coût $J(q)$ est mise en œuvre. Cependant, la direction de descente utilisée n'est pas l'opposée de la direction tangente $g_k = -\frac{\partial J}{\partial q}$ comme dans le cas de la minimisation de la fonction $J(q)$ sans contrainte. Elle est choisie comme la projection de g_k sur l'espace des contraintes :

$$d_k = -P g_k \quad (1.30)$$

où P est un projecteur : $P = Id - A^T(AA^T)^{-1}A$

L'avantage de cette direction d_k est lié au fait que la contrainte est toujours vérifiée :

$$A d_k = -A P g_k = -A \left(Id - A^T(AA^T)^{-1}A \right) g_k = 0 \quad (1.31)$$

La solution q_{k+1} est donc calculée par :

$$q_{k+1} = q_k + \alpha d_k \quad (1.32)$$

où α est le pas de descente, qui est déterminé par une méthode de descente classique comme descente à pas fixe, à pas optimal ou encore gradient conjugué ...

Le calcul s'arrête lorsqu'on atteint le minimum de la fonction coût selon la direction projetée.

a. Pour le problème de minimisation sous contraintes linéaires :

Afin d'appliquer la méthode de gradient projeté au problème (1.27), le problème est écrit sous une forme globale en espace et en temps. Il est donc projeté dans un espace Éléments Finis :

$$u(x, t) = \Phi(x)U(t) \quad \text{et} \quad y(x, t) = \Phi(x)Y(t)$$

En temps où l'espace des contraintes est une fonction différentielle, il est nécessaire d'écrire ces contraintes globalement en temps en utilisant un schéma d'intégration d'ordre 1 comme Euler ou une méthode d'éléments finis temporels.

$$q = [U_1 \quad Y_1 \quad U_2 \quad Y_2 \quad \dots \quad U_N \quad Y_N]^T$$

b. Pour le problème de minimisation dans le cas non linéaires :

Les contraintes dans le cas (1.28) deviennent non linéaires et locales en espace. L'écriture directe du problème global en temps et en espace sous la forme (1.29) est donc difficile. Il faut ainsi soit déterminer un projecteur sur l'espace des contraintes non linéaires, soit linéariser ce problème de minimisation pour trouver un problème similaire au cas linéaire où la méthode des Éléments Finis et un schéma d'intégration temporelle sont ensuite utilisés.

La première approche semble difficile en pratique surtout pour notre problème non linéaire par lequel l'espace et le temps sont couplés.

La deuxième approche nous laisse penser aux méthodes incrémentales [Bat82] [Sim98] ou à la méthode à grand incrément de temps (méthode LATIN) [Lad85] [Lad99a]. Les méthodes incrémentales consistent à résoudre localement en temps le problème, tandis que la méthode de gradient projeté traite le problème global en temps, elles sont donc difficiles à utiliser dans ce cas. Pour la méthode LATIN, le problème est traité à chaque itération sur tout l'intervalle du temps d'étude où l'on va donc résoudre à chaque itération un problème de minimisation sous contraintes linéaires.

Remarques :

L'avantage de la méthode de gradient projeté est de ne pas augmenter la taille de l'espace des inconnues car il n'est pas nécessaire d'introduire des multiplicateurs de Lagrange pour chaque contrainte.

Cependant, elle traite le problème globalement en temps ce qui peut en rendre délicate.

II. Méthode de pénalisation

Les résultats mathématiques de la méthode de pénalisation [Cul94] [Fle87] sont initialement établis pour un problème statique, c'est-à-dire, le problème de la forme

suivante :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u, y) \text{ minimisant : } & \int_0^T \int_{\Omega} J(u, y) d\Omega dt & (1.33) \\ \text{sous les contraintes : } & g(u, y) = 0 \end{aligned}$$

La méthode de pénalisation [Cul94] [Fle87] consiste à remplacer le problème de minimisation sous contraintes (1.33) par un problème de minimisation sans contraintes :

$$\text{Trouver } (u, y) \text{ minimisant : } \int_0^T \int_{\Omega} \left[J(u, y) + \frac{1}{\epsilon} F(g(u, y)) \right] d\Omega dt \quad (1.34)$$

où,

- $\frac{1}{\epsilon} F(g(u, y))$ est le terme de pénalisation ;
- $F(g(u, y)) = 0$ si et seulement si : $g(u, y) = 0$.

Dans [Cul94] [Fle87], les auteurs ont montré que :

- le problème (1.34) admet une solution $(u_{\epsilon}, y_{\epsilon})$ bornée si l'espace des contraintes $g(u, y) = 0$ est convexe et fermé ;
- la solution $(u_{\epsilon}, y_{\epsilon})$ converge vers (u, y) lorsque ϵ tend vers 0^+ .

L'application de cette méthode pour la résolution du problème inverse se trouve par exemple dans le travail de Pang et Tin-Loi [Pan01] afin d'identifier les paramètres d'un modèle élastoplastique.

Remarques :

La méthode de pénalisation a l'avantage de ne pas augmenter la taille de l'espace des inconnues comme la méthode de gradient projeté et la solution approchée $(u_{\epsilon}, y_{\epsilon})$ existe toujours.

Cependant, rien dans la théorie ne nous permet de savoir *a priori* la valeur de ϵ nécessaire pour obtenir une précision souhaitée de la solution. De plus, le fait d'utiliser ϵ petit risque de mener à des difficultés numériques. C'est la raison pour laquelle la méthode de pénalisation n'est pas étudiée par la suite.

1.5.2.2 Méthodes duales - introduction d'un Lagrangien

I. Méthode de Lagrangien

Cette méthode se base sur la recherche du point selle du lagrangien associé au problème d'optimisation sous contraintes. Le problème (1.27) ou (1.28) est alors équivalent

au problème :

Trouver u^*, y^*, λ^* tel que :

$$\begin{cases} (u^*, y^*) = \underset{u, y}{\text{Arg min}} L(u, y, \lambda^*) \\ \lambda^* = \underset{\lambda}{\text{Arg max}} L(u^*, y^*, \lambda) \end{cases} \quad (1.35)$$

avec,
$$L(u, y, \lambda) = \int_0^T \int_{\Omega} [J(u, y) + \lambda^T (\dot{u} + g(u, y))] d\Omega dt$$

Afin de résoudre le problème (1.35), la méthode de calcul des variations est utilisée en considérant que les variables u, y, λ sont indépendantes.

$$\begin{aligned} \delta L(u, y, \lambda) = 0 = & \int_0^T \int_{\Omega} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial J}{\partial u} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^T \lambda \right] d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \dot{u}^T \lambda d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \delta y^T \left[\left(\frac{\partial J}{\partial y} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^T \lambda \right] d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \lambda^T [\dot{u} + g(u, y)] d\Omega dt \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie,

$$\int_0^T \delta \dot{u}^T \lambda dt = - \int_0^T \delta u^T \dot{\lambda} dt + [\delta u^T \lambda]_0^T$$

le système d'équations obtenu à chaque instant $t \in [0, T]$ a pour l'expression :

$$\begin{cases} -\dot{\lambda} + \left(\frac{\partial J}{\partial u} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^T \lambda = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial J}{\partial y} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^T \lambda = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad y = \underset{y}{\text{Arg min}} L \\ \dot{u} + g(u, y) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (1.36)$$

avec des conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 \\ \lambda(x, T) = 0 \end{cases}$$

Le système (1.36) est un système d'équations directes et adjointes couplées avec des conditions initiales en u et des conditions finales en λ . Étant appelé "problème avec des conditions aux limites aux deux bouts" ou "two point boundary value problem" en anglais, ce problème est le sujet de nombreux travaux qui peuvent être regroupés en deux grandes familles de méthodes :

a. Traitement *séparé ou successif* des problèmes direct et adjoint

Cette méthode, qui consiste à traiter itérativement le problème, s'appuie sur l'algorithme suivant :

+ L'initialisation s'effectue par une loi $y(t) = y_0$.

+ À l'étape k , le champ $y_k(t)$ est connu. Le champ $u_k(t)$ est déterminé à l'aide de l'équation directe et de la condition initiale en temps :

$$\dot{u} + g(u, y) = 0 \quad \text{avec : } u(0) = u_0 \quad (1.37)$$

+ L'équation adjointe est ensuite résolue de façon rétrograde en temps avec la condition finale en temps afin d'obtenir $\lambda_k(t)$:

$$-\dot{\lambda} + \left(\frac{\partial J}{\partial u} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^T = 0 \quad \text{avec : } \lambda(T) = 0 \quad (1.38)$$

+ Une méthode de descente pour le lagrangien associé L en fonction de y ($y = \text{Arg min}_y L$) comme la méthode de gradient à pas optimal, de gradient conjugué [Las67] ou une méthode de Newton [Cul94] [Bry75] est enfin utilisée pour trouver un $y_{k+1}(t)$ "meilleur" que $y_k(t)$. Comme dans le cas de l'optimisation sans contrainte, la méthode de gradient converge rapidement lorsqu'on est loin de la solution et lentement lorsqu'on s'approche de la solution. Par contre, la méthode de Newton converge mieux dans la zone à proximité de la solution mais elle risque de mener à un point singulier lorsqu'elle est appliquée loin de la solution, là où le Hessien n'est pas défini positif. La méthode de gradient conjugué ou une combinaison de la méthode de gradient à pas fixe avec la méthode de quasi-newton semblent les meilleures approches dans ce cas. Des études détaillées de ces méthodes avec des exemples pour des problèmes de contrôle optimal se trouvent dans l'article de Lasdon & al [Las67] ou dans l'ouvrage de Bryson and Ho [Bry75].

En mécanique, ce type de méthodes est utilisé afin d'identifier des paramètres matériau viscoplastique à partir d'un essai d'indentation qui est un essai de contact en quasi statique. Citons ici le travail de Constantinescu et Tardieu [Con01]. Les auteurs ont résolu successivement les problèmes direct et adjoint afin de calculer le gradient de la fonction coût en fonction du paramètre matériau.

La résolution itérative de ces deux problèmes permet d'utiliser les méthodes incrémentales pour l'identification dans le cas de l'élasticité, de comportements non linéaires, en statique ou en dynamique.

Nous avons donc appliqué cette méthode à la résolution du problème d'identification formulé par l'ERdC modifiée dans le cas de l'élasticité. Cependant, le résultat obtenu (section 2.3.2.2) montre que cet algorithme diverge après quelques itérations car certaines solutions en u et λ du système d'équations homogènes associé à (1.36) ont des formes exponentielles croissantes, ainsi une petite erreur de la première solution va créer des grandes erreurs après une itération et la stratégie itérative diverge donc rapidement. C'est pourquoi, cette famille de méthodes n'est pas étudiée dans le cas non linéaire.

b. Traitement *parallèle* des problèmes direct et adjoint

b1. Pour le problème de minimisation sous contraintes linéaires :

Le système (1.36) s'écrit alors sous la forme issus de (1.27) pour chaque point dans l'espace $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} -\dot{\lambda} + Q u + A^T \lambda = 0 \\ R y + B^T \lambda = 0 \\ \dot{u} + A u + B y - C = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

avec des conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 \\ \lambda(x, T) = 0 \end{cases}$$

Ce problème est toujours un problème d'équations directes et adjointes couplées mais il est *linéaire*. Différentes méthodes pour le résoudre sont étudiées en détail dans les chapitres 2 et 3.

b2. Pour le problème de minimisation dans le cas non linéaires :

Le système d'équations (1.36) est alors non linéaire, ce qui amplifie la difficulté du traitement parallèle du problème direct et adjoint [Bry75] [Ngu06]. Sa résolution est une partie principale de cette thèse avec le développement d'une méthode itérative issue de l'idée de la méthode LATIN [Lad99a], qui consiste à linéariser le problème sur tout le temps d'étude et qui est développée dans les chapitres 4 et 5.

Remarques :

La méthode de Lagrangien a l'inconvénient d'ajouter des multiplicateurs de Lagrange λ à l'espace des inconnues, ce qui va conduire à une augmentation du coût de calcul et des mémoires occupées.

Cependant, elle nous permet de traiter localement en temps des problèmes de contrôle optimal car leur représentation globale sur le temps n'est pas toujours évidente.

II. Méthode de Lagrangien augmenté

La méthode de Lagrangien augmenté [Pic98] [Cul94] est une combinaison de la méthode de Lagrangien et de la méthode de pénalisation afin d'assurer la différentiabilité du lagrangien associé. Le système d'équation s'écrit alors :

$$\begin{cases} L(u, y, \lambda) = \int_0^T \int_{\Omega} \left[J(u, y) + \lambda^T (\dot{u} + g(u, y)) + \frac{1}{2\epsilon} \| \dot{u} + g(u, y) \|^2 \right] d\Omega dt \\ \lambda^* = \text{Arg max}_{\lambda} L(\lambda, u^*, y^*) \\ u^*, y^* = \underset{u, y}{\text{Arg min}}_{\lambda} L(\lambda^*, u, y) \end{cases} \quad (1.40)$$

où ϵ est un coefficient pondérant le terme de pénalisation.

La condition de stationnarité du lagrangien nous donne :

$$\begin{aligned} \delta L(u, y, \lambda) = 0 = & \int_0^T \int_{\Omega} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial J}{\partial u} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^T \left(\lambda + \frac{1}{\epsilon} (\dot{u} + g(u, y)) \right) \right] d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \delta y^T \left[\left(\frac{\partial J}{\partial y} \right)^T + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^T \left(\lambda + \frac{1}{\epsilon} (\dot{u} + g(u, y)) \right) \right] d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \dot{u}^T \left(\lambda + \frac{1}{\epsilon} (\dot{u} + g(u, y)) \right) d\Omega dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \delta \lambda^T (\dot{u} + g(u, y)) d\Omega dt \end{aligned}$$

L'intégration par partie est ensuite utilisée afin d'éliminer la partie $\delta \dot{u}^T$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta \dot{u}^T \left[\lambda + \frac{1}{\epsilon} (\dot{u} + g(u, y)) \right] dt = & - \int_0^T \delta u^T \left(\dot{\lambda} + \frac{1}{\epsilon} (\ddot{u} + \frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}) \right) dt \\ & + \left[\delta u^T \left(\lambda + \frac{1}{\epsilon} (\dot{u} + g(u, y)) \right) \right]_0^T \end{aligned}$$

Le système d'équations obtenu est différentiel d'ordre 2 et la vitesse à l'instant final $\dot{u}(T)$ apparaît comme une inconnue du problème. Le problème devient compliqué même dans le cas d'élasticité.

Remarques :

La méthode de Lagrangien augmenté a tous les avantages et inconvénients de la méthode de Lagrangien. De plus, elle rend le problème toujours différentiable et elle peut accélérer la résolution en forçant la solution initiale près de la solution du problème.

Cependant, le fait que le Lagrangien associé de notre problème soit souvent différentiable et la difficulté de résolution des équations obtenues citée ci-dessus ne nous encouragent pas à étudier cette méthode.

III. Méthode de Lagrange Newton

La méthode de Lagrange Newton (ou programmation quadratique séquentielle ou *sequential quadratic programming (SQP)* en anglais) [Fle87] a pour but de linéariser le problème de minimisation sous contraintes non linéaire. Elle est bien adaptée pour les problèmes du type :

$$\text{Trouver } q \text{ minimisant : } J(q) \quad \text{sous les contraintes : } g(q) = 0 \quad (1.41)$$

Le Lagrangien associé au problème (1.41) s'écrit alors :

$$L(q, \lambda) = J(q) + \lambda^T g(q) \quad (1.42)$$

Son développement à l'ordre 2 au voisinage de point (q^k, λ^k) devient donc :

$$\begin{aligned}
 L(q, \lambda) &= L(q_k, \lambda_k) + (q - q_k)^T \frac{\partial L(q_k, \lambda_k)}{\partial q} + (\lambda - \lambda_k)^T \frac{\partial L(q_k, \lambda_k)}{\partial \lambda} \\
 &\quad + \frac{1}{2} (q - q_k)^T \frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q^2} (q - q_k) + (q - q_k)^T \frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q \partial \lambda} (\lambda - \lambda_k) \\
 &= L(q_k, \lambda_k) + (q - q_k)^T \left(\frac{\partial J(q_k)}{\partial q} + \lambda_k^T \frac{\partial g(q_k)}{\partial q} \right) + (\lambda - \lambda_k)^T g(q_k) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (q - q_k)^T \frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q^2} (q - q_k) + (q - q_k)^T \frac{\partial g(q_k)}{\partial q} (\lambda - \lambda_k)
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

La condition d'optimalité du lagrangien ($\delta L = 0$) nous donne un système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q^2} (q - q_k) + \frac{\partial g(q_k)}{\partial q} \lambda = 0 \\ g(q_k) + \frac{\partial g(q_k)}{\partial q} (q - q_k) = 0 \end{cases} \tag{1.44}$$

En notant $\delta = (q - q_k)$, ce système est équivalent au problème de minimisation sous contraintes linéaires :

$$\begin{aligned}
 \text{Trouver } \delta \text{ minimisant : } & \left[\delta^T \frac{\partial J(q_k)}{\partial q} + \delta^T \frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q^2} \delta \right] \\
 \text{sous les contraintes : } & g(q_k) + \frac{\partial g(q_k)}{\partial q} \delta = 0
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Le problème (1.45) peut être résolu par la méthode de gradient projeté ou des méthodes itératives spécifiques comme les méthodes d'Usawa ou d'Arrow-Hurwicz [Cul94].

Dans certains cas où le Lagrangien $L(x, \lambda)$ est une fonction singulière, le calcul du Hessien exact $\frac{\partial^2 L(q_k, \lambda_k)}{\partial q^2}$ est impossible. Différents auteurs ont étudié des méthodes de quasi-Newton ou de régions de confiance afin d'avoir des moyens robustes pour traiter le problème de minimisation sous contraintes non linéaires algébriques. Une étude détaillée de l'application de ces méthodes dans ce cas se trouve dans l'ouvrage de Fletcher [Fle87].

Pour un problème avec des contraintes différentielles tel que le problème de contrôle optimal thermique, Gill & al [Gil00] ont proposé d'écrire d'abord le problème global en espace par la méthode des différences finies, puis d'utiliser un schéma d'intégration pour discrétiser les contraintes différentielles. Le problème de minimisation sous contraintes non linéaires obtenu est ensuite traité par la méthode SQP.

Cependant, le fait d'écrire le problème global en espace et en temps est difficile pour les problèmes non linéaires en espace et en temps comme le nôtre, c'est pourquoi la méthode SQP n'est pas utilisée dans le cadre de cette thèse.

1.5.2.3 Formulation Hamiltonienne - Principe de maximum de Pontryagui

La résolution du problème (1.28) peut passer par le principe de maximum de Pontryagui qui est un équivalent du calcul de variations [Cul94]. D'abord, une fonction de Pontryagui, qui est appelée souvent l'extension Hamiltonienne ou simplement Hamiltonien, est introduite :

$$H(u, y, \lambda) = \int_0^T \int_{\Omega} \left[-J(u, y) + \lambda^T g(u, y) \right] d\Omega dt \quad (1.46)$$

Le principe de maximum de Pontryagui montre que la solution du problème (1.28) est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial u} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial u} \end{cases} \quad (1.47)$$

avec des conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0 \\ \lambda(x, T) = 0 \end{cases}$$

Le système (1.47) est tout à fait équivalent au système d'équation (1.36) qui est la formulation lagrangienne du principe de maximum.

Dans le cadre de ce travail, la formulation lagrangienne est préférée car elle peut s'écrire pour d'autres problèmes comme la minimisation sous des contraintes d'inégalité ou différentielles d'ordre 2.

1.5.2.4 Programmation dynamique

La programmation dynamique [dL96] [Cul94] est bien adaptée à l'optimisation séquentielle, c'est-à-dire, pour des problèmes de minimisation d'une fonction coût séparable en temps. Pour illustrer l'idée de la méthode, dans un premier temps, son application au problème en temps discret est présentée :

$$\begin{aligned} \text{Trouver : } \quad I(u_{(0)}^*) &= \min_{y_{(0)}, \dots, y_{(T)}} \sum_{t=0}^T J(u_{(t)}, y_{(t)}) & (1.48) \\ \text{sous les contraintes : } \quad &\begin{cases} u_{(t+1)} = g(u_{(t)}, y_{(t)}) \\ u_{(0)} = u_0 \end{cases} \end{aligned}$$

La programmation dynamique est basée sur le principe d'optimalité de Bellman [Bel65] qui consiste à dire que si $y_{(0)}^*, \dots, y_{(t)}^*, \dots, y_{(T)}^*$ sont les solutions du problème

(1.48) , $y_{(t)}^*, \dots, y_{(T)}^*$ sont également les solutions du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver : } \quad I(u_{(t)}^*) &= \min_{y_{(t)}, \dots, y_{(T)}} \sum_{\tau=t}^T J(u_{(\tau)}, y_{(\tau)}) & (1.49) \\ \text{sous les contraintes : } \quad &\begin{cases} u_{(\tau+1)} = g(u_{(\tau)}, y_{(\tau)}) \\ u_{(\tau)} = u_{(\tau)}^* \end{cases} \end{aligned}$$

Ce principe nous permet de séparer la minimisation (1.48) en T problèmes de minimisation successifs en opérant de façon rétrograde en temps.

Par exemple, lorsque $y_{(t)}^*, \dots, y_{(T)}^*$ sont connues, la recherche de la solution $y_{(t-1)}^*$ est effectuée comme suit :

$$\begin{aligned} I_{(t-1)} = I(u_{(t-1)}^*) &= \min_{y_{(t-1)}, y_{(t)}, \dots, y_{(T)}} \sum_{\tau=t-1}^T J(u_{(\tau)}, y_{(\tau)}) \\ &= \min_{y_{(t-1)}} \left[J(u_{(t-1)}, y_{(t-1)}) + \sum_{\tau=t}^T J(u_{(\tau)}, y_{(\tau)}) \right] \\ &= \min_{y_{(t-1)}} J(u_{(t-1)}, y_{(t-1)}) + \sum_{\tau=t}^T J(u_{(\tau)}, y_{(\tau)}) \\ &= \min_{y_{(t-1)}} J(u_{(t-1)}, y_{(t-1)}) + I(u_{(t)}^*) \end{aligned}$$

En remarquant que $u_{(t)}^* = g(u_{(t-1)}, y_{(t-1)})$, le problème revient à minimiser la fonction coût en fonction du $y_{(t-1)}$. Ceci va nous donner la relation analytique entre $y_{(t-1)}^*$ et $u_{(t-1)}^*$. Le minimum $I_{(t-1)}$ n'est donc exprimé qu'en fonction de $u_{(t-1)}^*$.

En résumé, la programmation dynamique se compose de deux étapes :

– Étape de descente :

on résout T problèmes de minimisation de l'instant final à l'instant initial afin de trouver la relation de récurrence entre $y_{(t)}^*$ et $u_{(t)}^*$ qui minimise la fonction coût $J(u_{(t)}, y_{(t)})$. Le minimum $I_{(t)}$ s'exprime donc en fonction de $u_{(t)}^*$.

– Étape de montée :

à partir de la condition initiale en temps $u_{(0)}^* = u_0$, les solutions u^*, y^* du problème sont déterminées pour tout l'intervalle de temps d'étude.

a. Pour le problème de minimisation sous contraintes linéaires :

Dans ce cas, la contrainte s'écrit : $u_{(t+1)} = A u_{(t)} + B y_{(t)}$

La relation de récurrence entre $y_{(t)}^*$ et $u_{(t)}^*$ est toujours linéaire. Le minimum $I(u_{(t)}^*)$ peut donc toujours s'écrire sous la forme : $I(u_{(t)}^*, t) = \frac{1}{2} u_{(t)}^* P_t u_{(t)}^*$

Les matrices P_t et P_{t+1} sont liées dans ce cas par une équation de Riccati en temps discret. Ceci montre que pour le problème linéaire quadratique, les trois méthodes :

la méthode de Lagrangien, la formulation Hamiltonnienne et la programmation dynamique sont équivalentes.

b. Pour le problème de minimisation dans le cas non linéaire :

Dans le cas non linéaire de minimisation, nous devons résoudre une équation non linéaire à chaque piquet de temps pour trouver une relation analytique de $y^*(t)$ en fonction de $u^*(t)$. Cette relation analytique est difficile à trouver et de temps en temps compliquée car elle n'est pas une forme harmonique.

Remarques :

La programmation dynamique en général s'applique à des problèmes d'optimisation séquentielle pour des contraintes linéaires. Elle est adaptée aux problèmes de petite taille en raison du coût de calcul et de mémoire occupée.

Dans le cas d'un problème continu en temps, il faut le discrétiser par le schéma d'Euler explicite afin de trouver la forme (1.48). Ceci pose la question de la qualité des résultats. Différents auteurs ont étudié cette approche et proposé des améliorations de la précision de la méthode soit en considérant le problème en temps continu [dL96] [Cul94] soit par l'utilisation d'un schéma d'ordre plus élevé pour les contraintes [Nor04].

Cependant, les autres inconvénients de la programmation dynamique rendent la méthode difficile d'emploi dans notre contexte.

1.5.2.5 Choix de la méthode d'optimisation sous contraintes

Parmi les méthodes de la minimisation avec contraintes étudiées, la méthode de Lagrangien (ou méthode de l'état adjoint) semble la plus intéressante dans notre contexte. Cependant, dans le cas de l'identification des paramètres de lois de comportement non linéaires, le problème à résoudre devient un problème d'optimisation sous contraintes non linéaires en dynamique. Il nous faut donc utiliser non seulement la méthode de l'état adjoint mais également une stratégie de résolution afin de linéariser le problème en temps.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le contexte du problème traité ainsi que des méthodes inverses pour le résoudre sont d'abord présentés. Le choix de la méthode d'identification se tente vers l'approche basée sur le concept d'Erreur en Relation de Comportement, ce qui pose des problèmes de minimisation avec et sans contraintes. Différentes méthodes d'optimisation sont donc résumées dans un second temps. Nous retenons la méthode de Lagrangien pour l'optimisation avec contraintes et une combinaison de la méthode de gradient à pas optimal avec la méthode quasi Newton ou la méthode de gradient conjugué pour l'optimisation sans contrainte.

La première application de l'ERdC à l'identification en dynamique transitoire sera rappelée dans le chapitre suivant.

Acquis de l'identification par l'ERdC modifiée

Dans ce chapitre, la première application de l'ERdC modifiée pour l'identification en dynamique transitoire est rappelée [Fei03] [All03]. Sa formulation et les difficultés de résolution associées sont présentées. Enfin, des méthodes de traitement numérique sont résumées afin de situer le travail précédent et d'estimer la possibilité de l'extension au cas non linéaire.

Sommaire

2.1	Problème d'identification du matériau élastique	50
2.2	Résolution du problème inverse par l'ERdC modifiée	51
2.3	Méthodes de résolution du problème de base	52
2.3.1	Méthodes de résolutions globales en temps	54
2.3.2	Méthodes de résolutions locales en temps	57
2.4	Estimation de la robustesse de la méthode d'identification	62
2.5	Minimisation par rapport aux paramètres matériau	63
2.6	Conclusion	64

La méthode d'identification basée sur l'Erreur en Relation de Comportement modifiée à partir de conditions aux limites fortement perturbées a tout d'abord été étudiée dans le cas d'un matériau élastique. Le travail a été initié dans la thèse de Feissel [Fei03] dans laquelle différentes formulations et méthodes de résolution du problème sont considérées. Les résultats obtenus montrent que la stratégie d'identification proposée semble robuste face aux perturbations de mesures. Cependant, le travail de [All03] n'est valable que pour des temps d'étude courts ou pour des temps d'étude suffisamment longs en élasticité à cause des problèmes d'instabilité du traitement numérique. De plus, son extension au cas non linéaire semble difficile.

Ces formulations et ces méthodes de résolution du problème sont résumées dans ce chapitre avant de proposer des stratégies de résolution robustes dans le cas linéaire et non linéaire dans les chapitres suivants.

2.1 Problème d'identification du matériau élastique

Le problème inverse pour cette partie se place dans le contexte de l'identification du module d'élasticité d'une poutre élastique linéaire à partir des conditions aux limites en effort et en déplacement sur un intervalle de temps $[0, T]$ (figure 2.1).

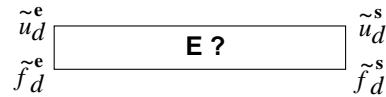


Figure 2.1 – Problème d'identification dans le cas 1D en élasticité

avec,

- E : le module d'élasticité de la poutre ;
- \tilde{u}_d : les conditions aux limites en déplacement ;
- \tilde{f}_d : les conditions aux limites en effort.

Les équations régissant le système sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Équation d'équilibre :} & \rho \ddot{u} - \sigma_{,x} = 0 \quad \forall x \in]0, L[\\ \text{Relation de comportement :} & \sigma = E u_{,x} \\ \text{Conditions initiales :} & u(x, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \\ \text{Conditions aux limites :} & u(0, t) = \tilde{u}_{0d}, \quad \sigma(0, t) S = \tilde{f}_{0d} \quad \text{à } x = 0 \\ & u(L, t) = \tilde{u}_{Ld}, \quad \sigma(L, t) S = \tilde{f}_{Ld} \quad \text{à } x = L \end{array}$$

Afin de créer les mesures expérimentales, un premier calcul est effectué avec le module d'élasticité de référence E_0 . Pour cela, le calcul décrit dans la figure 2.2 est considéré et résolu en utilisant la méthode des éléments finis avec un schéma explicite. Les efforts et les déplacements obtenus aux deux extrémités de la poutre sont ensuite utilisés comme conditions aux limites du problème d'identification.

Pour tester la robustesse de la méthode d'identification, une perturbation sur les conditions aux limites en efforts et en vitesse peut être ajoutée.

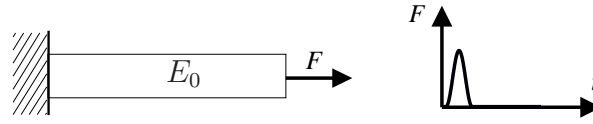


Figure 2.2 – Essai numérique dans le cas 1D en élasticité

2.2 Résolution du problème inverse par l'ERdC modifiée

En appliquant le concept d'Erreur en Relation de Comportement [Lad83] pour formuler le problème inverse, les équations du problème sont d'abord divisées en deux groupes :

<i>Fiable</i>		<i>Non fiable</i>
Équilibre :	$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0$	Relation de comportement : $\sigma = E \epsilon$
Conditions initiales :	$u(x, 0) = u_0$ $\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0$	Conditions aux limites : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d

Tableau 2.1 – Relations fiables et non fiables dans le cas de l'élasticité linéaire

Le problème inverse est donc formulé de la manière suivante :

Trouver les champs u , σ , u_d , f_d et le module E minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \mathcal{D}(\sigma, \epsilon(u), E) dx + \frac{\alpha}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L + \frac{\beta}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$u \in \mathcal{U}_{Ad}(u_d), \quad \sigma \in \mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) \quad (2.1)$$

où les espaces introduits sont définis par :

- $\mathcal{U}_{Ad}(u_d) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u = u_d \text{ sur } x \in \{0, L\} \text{ et } u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0 \right\}$; on dira encore que u est CA, c'est-à-dire Cinématiquement Admissible ;
- $\mathcal{D}_{Ad}(f_d, u) = \left\{ \sigma \in H_{div}(\Omega) / \sigma.n = f_d \text{ sur } x \in \{0, L\}, \rho \ddot{u} - \text{div}(\sigma) = 0 \text{ sur } x \in [0, L] \right\}$; on dira encore que σ est DA, c'est-à-dire Dynamiquement Admissible ;

avec,

- $\mathcal{D}(\sigma, \epsilon(u), E)$: l'erreur de modèle ou l'erreur en relation de comportement, dans [Fei03] [All03] l'erreur de Legendre - Fenchel a été prise ;
- u_d et f_d : les conditions aux limites reconstruites en déplacement et en effort en $x = 0$ et $x = L$;

- α et β : les coefficients pondérant les termes d'erreur de mesures par rapport à l'erreur de modèle ;
- pour tout $f : \left| f \right|_0^L = f(0) + f(L)$.

Le processus de minimisation de la fonction coût ci-dessus se divise en deux étapes :

- résolution du problème de base avec un module E fixé ;
- évaluation de la fonction coût grâce aux champs solution du problème de base afin d'identifier le module E .

La grande difficulté de la minimisation réside dans la résolution du problème de base même dans le cas de l'élasticité linéaire. Dans la section 2.3, cette difficulté ainsi que des méthodes de résolution proposées dans [Fei03] seront présentées.

2.3 Méthodes de résolution du problème de base

Le problème de base dans le cas de l'élasticité linéaire s'écrit alors :

Trouver les champs u, σ, u_d, f_d minimisant :

$$J(u, \sigma, u_d, f_d) = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} E^{-1} (\sigma - E \epsilon)^2 dx + \frac{\alpha}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L + \frac{\beta}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad u(x, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \quad (2.2)$$

Le problème (2.2) est ensuite projeté dans un espace Éléments Finis classique où le champ de déplacement est écrit :

$$\begin{cases} u(x) = [\Phi(x)]U(t) \\ \epsilon(u(x)) = [B(x)]U(t) \end{cases}$$

où,

- U est le vecteur des degrés de liberté du champ de déplacement u ;
- $[\Phi(x)]$ est la matrice des fonctions de forme ;

En posant V le vecteur des degrés de liberté du champ de déplacement v tel que $\sigma = E \epsilon(v)$, le problème de base dans un espace EF devient donc :

Trouver les champs U, V, F minimisant :

$$J(U, V, F) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (U - V)^T K (U - V) + \frac{\alpha}{2} (\Pi U - \tilde{U}_d)^2 + \frac{\beta}{2} (\Pi F - \tilde{F}_d)^2 \right] dt$$

sous les contraintes :

$$M \ddot{U} + K V = F, \quad U(0) = U_0, \quad \dot{U}(0) = \dot{U}_0 \quad (2.3)$$

où les notations suivantes sont utilisées :

$$\begin{cases} [M] = \int_{\Omega} [\Phi(x)]^T \rho [\Phi(x)] dx, & \tilde{U}_d = \begin{bmatrix} \tilde{u}_d|_0 \\ \tilde{u}_d|_L \end{bmatrix} \\ [K] = \int_{\Omega} [B(x)]^T E [B(x)] dx, & \tilde{F}_d = \begin{bmatrix} \tilde{f}_d|_0 \\ \tilde{f}_d|_L \end{bmatrix} \\ \Pi U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{Ne} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.4)$$

Le problème (2.3) est ensuite écrit sous la forme d'un problème du premier ordre appelé modèle d'état :

Trouver les champs q, e minimisant :

$$J(q, e) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} e^T R e + \frac{1}{2} (C q - \tilde{U}_d)^T Q (C q - \tilde{U}_d) \right] dt$$

sous les contraintes :

$$\dot{q} = A q + G e + B \tilde{F}_d, \quad q(0) = q_0 \quad (2.5)$$

où,

$$\begin{cases} q = \begin{bmatrix} U \\ \dot{U} \end{bmatrix}, & e = \begin{bmatrix} V - U \\ \Pi F - \tilde{F}_d \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}, & B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\Pi^T \end{bmatrix}, & C = [\Pi \ 0], \\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K & M^{-1}\Pi^T \end{bmatrix}, & R = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \beta \Pi \Pi^T \end{bmatrix}, & Q = [\alpha \Pi \Pi^T] \end{cases}$$

Le problème (2.5) est un problème de minimisation d'une fonction coût quadratique sous contraintes linéaires, appelé **problème quadratique linéaire**, ce qui a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature [Bry75] [And89] [Cul94].

En introduisant un multiplicateur de Lagrange, le problème (2.5) devient la recherche du point selle de la fonctionnelle L :

$$L(q, e, \Lambda) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} e^T R e + \frac{1}{2} (C q - \tilde{U}_d)^T Q (C q - \tilde{U}_d) + \Lambda^T (\dot{q} - A q - G e - B \tilde{F}_d) \right] dt$$

L'expression de la stationnarité de L ($\delta L = 0$) permet d'aboutir au système suivant :

$$\begin{cases} e = R^{-1} G^T \Lambda \\ \dot{q} = A q + G e + B \tilde{F}_d \\ \dot{\Lambda} = C^T Q C q - A^T \Lambda - C^T Q \tilde{U}_d \end{cases} \quad (2.6)$$

avec les conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ \Lambda(T) = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations obtenu s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq + GR^{-1}G^T\Lambda + B\tilde{F}_d \\ \dot{\Lambda} = C^TQCq - A^T\Lambda - C^TQ\tilde{U}_d \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} q(0) = q_0 \\ \Lambda(T) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Le système d'équations (2.7) se compose d'une équation directe couplée avec une équation rétrograde. Ce couplage empêche l'application directe des méthodes de résolution incrémentale "classique". Différentes méthodes spécifiques sont donc proposées dans la thèse de Feissel [Fei03]. Elles peuvent être regroupées en deux grandes familles :

- les méthodes de résolution **globales** en temps, qui cherchent à exprimer le système d'équations (2.7) sur tout le temps d'étude comme une forme linéaire et globale en temps afin de tenir compte des conditions initiales et finales ;
- les méthodes de résolution **locales** en temps, qui cherchent à résoudre les équations (2.7) de façon locale en temps en utilisant des schémas d'intégration numérique.

2.3.1 Méthodes de résolutions globales en temps

Afin de présenter l'idée des méthodes de résolution globales en temps, le système d'équations (2.7) est d'abord réécrit sous une forme simple :

$$\dot{X} = H X + S \quad (2.8)$$

en posant :

$$X = \begin{bmatrix} q \\ \Lambda \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} A & GR^{-1}G^T \\ C^TQC & -A^T \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} B\tilde{F}_d \\ -C^TQ\tilde{U}_d \end{bmatrix}$$

Les méthodes globales en temps consistent à transformer l'équation différentielle (2.8) en une forme discrète en temps assemblée sur l'ensemble de l'intervalle d'étude. Ainsi les conditions aux limites en temps peuvent être prises en compte lors de la résolution.

2.3.1.1 Méthode des éléments finis temporels

Cette méthode cherche à appliquer l'idée de la méthode des Éléments Finis appliquée à un domaine temporel afin d'exprimer l'équation (2.8) sous forme discrète. De manière similaire à ce qui se passe dans l'espace avec la méthode des EF, l'équation (2.8) est multipliée par un champ virtuel en temps X^* et intégrée sur le temps pour en obtenir la forme faible :

$$\int_0^T (\dot{X} - H X - S) X^* dt = 0 \quad \forall X^* \quad (2.9)$$

Ensuite, une interpolation des variables X et X^* entre deux piquets de temps t_1, t_2 est définie. Ici, l'interpolation linéaire est utilisée :

$$X = X_1 \left(1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) + X_2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) \quad (2.10)$$

L'équation (2.9) s'exprime donc en fonction des variables aux piquets de temps :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{X} - H X - S) X^* dt = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -I_d & I_d \\ -I_d & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2H & H \\ H & 2H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2Id & Id \\ Id & 2Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

L'équation s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} D_e \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} C_e \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

avec,

$$D_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -I_d & I_d \\ -I_d & I_d \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2H & H \\ H & 2H \end{bmatrix}, \quad R_e = \frac{\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2Id & Id \\ Id & 2Id \end{bmatrix}$$

L'assemblage de toutes les matrices élémentaires en temps D_e, C_e permet d'aboutir à une équation globale en temps :

$$D X = C S \quad (2.11)$$

ou :

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \Lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_N \\ \Lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_N \end{bmatrix}$$

Après avoir pris en compte les conditions aux limites en temps ($q(0) = q_0, \Lambda(N) = 0$), la matrice D est inversée afin de déterminer les champs solution sur tout le temps d'étude.

Remarques :

Il existe une autre version de la méthode des EF temporels pour notre problème. Il s'agit de traiter le système d'équations différentielles d'ordre 2 en introduisant un multiplicateur de Lagrange au problème (2.3). Dans ce cas, les inconnues du problème sont le déplacement, le multiplicateur de Lagrange et la vitesse à l'instant final $\dot{U}(T)$. Dans cette version, le vecteur des inconnues est de taille plus petite que celui de la version présentée ci-dessus. Cependant, leurs avantages et leurs inconvénients sont les mêmes.

2.3.1.2 Méthode de l'assemblage global en temps

Dans cette méthode, la transformation de l'équation différentielle (2.8) en une forme discrète s'effectue en utilisant un schéma d'intégration temporelle. Pour notre cas, comme l'équation (2.8) est différentielle d'ordre 1, la θ -méthode est choisie :

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{dt} = (1 - \theta)\dot{X}_n + \theta\dot{X}_{n+1} \quad (2.12)$$

L'équation (2.8) s'écrit alors à l'instant t_{n+1} :

$$(I_d - \theta dt H)X_{n+1} - [I_d + (1 - \theta)dt H]X_n = [(1 - \theta)S_n + \theta S_{n+1}]dt \quad (2.13)$$

ou bien :

$$D X_{n+1} + E X_n = R_n \quad (2.14)$$

avec,

$$\begin{cases} D = (I_d - \theta dt H) \\ E = -[I_d + (1 - \theta)dt H] \\ R_n = [(1 - \theta)S_n + \theta S_{n+1}]dt \end{cases} \quad (2.15)$$

L'assemblage de toutes les équations de récurrence nous conduit à une équation linéaire globale en temps (et en espace) :

$$\begin{bmatrix} D & E & & & & \\ & D & E & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & D & E & \\ & & & & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_N \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

En ajoutant les conditions initiales en q et les conditions finales en Λ , le système obtenu est un système linéaire de $2N$ équations avec $2N$ inconnues. Il "suffit" donc d'inverser une matrice globale en temps (et espace) afin de trouver les champs solution du problème.

Remarques :

Dans [Fei03], l'auteur, en traitant le problème avec le système d'équations différentielles d'ordre 2, a utilisé d'autres schémas d'intégration comme le schéma de Newmark. Ceci permet d'obtenir une précision d'ordre plus élevé. Cependant, ses autres caractéristiques sont les mêmes que celles de la version présentée dans cette section.

2.3.1.3 Commentaires

Les méthodes globales en temps nous permettent de résoudre le problème de base dans le cas du comportement linéaire. En revanche, le fait de traiter le problème de façon globale en temps va introduire une dimension supplémentaire au problème à

résoudre, ce qui pose des difficultés de mémoire de stockage et de coût de calcul. Il s'agit donc de traiter un problème linéaire de grande taille. Pour s'affranchir de cette difficulté, différentes méthodes spécifiques sont envisageables. Citons ici les méthodes de résolution indirecte des systèmes linéaires comme la méthode de gradient conjugué (avec préconditionneur) [Dos88] ou les méthodes de décomposition de domaine avec les techniques d'accélération de type Krylov [Saa96].

Cependant, l'extension de ces méthodes au cas de l'endommagement est assez délicate car le comportement est fortement non linéaire.

Dans les chapitres 4 et 5, une stratégie de type LATIN [Lad99a], qui consiste à linéariser le problème de façon globale en temps, est proposée. Le problème peut donc être formulé sous une forme similaire à (2.11), (2.16). Dans ce cas, les matrices élémentaires en temps D_e dépendent du temps ce qui rend plus délicat l'application des méthodes de résolution indirecte du problème linéaire citées ci-dessus.

2.3.2 Méthodes de résolutions locales en temps

2.3.2.1 Méthode de la matrice de transition

L'idée de la méthode de matrice de transition est de prédire la condition initiale de la variable duale Λ afin de calculer sa valeur à l'instant final. La condition finale $\Lambda(T) = 0$ va nous permettre de déterminer cette condition initiale prédite. À partir des conditions initiales en q et Λ , tous les champs solution du système (2.7) sont calculés facilement.

Afin d'appliquer la méthode de matrice de transition, nous partons de l'équation discrétisée en temps (2.13), qui est réécrite sous la forme :

$$X_{n+1} = D_e X_n + R_n \quad (2.17)$$

où,

$$\begin{cases} D_e = (I_d - \theta dt H)^{-1} [I_d + (1 - \theta) dt H] \\ R_n = (I_d - \theta dt H)^{-1} [(1 - \theta) S_n + \theta S_{n+1}] dt \end{cases}$$

La solution à l'instant final est alors exprimée en fonction de la valeur initiale :

$$X_N = D X_1 + R \quad (2.18)$$

avec,

$$D = D_e^{N-1} \quad \text{et} \quad R = \sum_{i=1}^N D_e^{i-1} R_n^{N-i} \quad (2.19)$$

De façon plus précise, l'équation (2.18) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} q_N \\ \Lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Les conditions initiales en Λ se trouvent donc à partir de l'équation précédente grâce aux conditions initiales en q et aux conditions finales en Λ :

$$\Lambda_1 = D_{22}^{-1} [\Lambda_N - D_{21} q_1 - R_2] \quad (2.21)$$

Lorsque toutes les conditions initiales en q et Λ sont connues, les solutions à chaque instant sont donc déterminées facilement à l'aide des équations de récurrence (2.17).

Cette méthode est beaucoup plus légère que les méthodes de résolution globales en temps. Cependant, elle présente une grande sensibilité à la précision numérique. En effet, les solutions des équations homogènes associées au problème ont une forme exponentielle croissante et décroissante (voir [Fei03] pour le détail dans le cas $0D$), ce qui amplifie les erreurs de prédiction des conditions initiales manquantes $\Lambda(0)$. D'un point de vue numérique, cela se traduit par la présence de valeurs propres à la fois supérieures et inférieures à 1 dans la matrice de récurrence D_e entre deux piquets de temps t et $(t + 1)$. En conséquence, la matrice à inverser D_{22} est de plus en plus mal conditionnée lorsque le temps d'étude augmente. Cette instabilité de la méthode de matrice de transition est observée dans le travail précédent [Fei03] [All05a] et aussi dans les problèmes d'automatique [Bry75]. Il faut remarquer que dans [Fei03] [All05a], la méthode de matrice de transition est appliquée pour la version du système d'équations différentielles d'ordre 2.

En résumé, à cause de l'instabilité du système d'équations directes et adjointes couplées, la méthode de matrice de transition ne fonctionne que pour les temps d'étude courts.

2.3.2.2 Méthode itérative

Le système d'équations à résoudre (2.7) est un système d'équations directes et adjointes couplées. Une méthode de résolution qui se pose de manière naturelle est de résoudre itérativement les équations directes et adjointes.

- Le calcul s'initialise par une fonction $\Lambda^0(t)$;
- À l'itération i , les équations directes en q sont résolues avec les conditions initiales ($q(0) = q_0$) et le champ de Λ obtenu de l'étape précédente :

$$\begin{cases} \dot{q}^i = Aq^i + GR^{-1}G^T\Lambda^{i-1} + B\tilde{F}_d \\ q^i(0) = q_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

- Puis, les équations adjointes en Λ sont résolues avec les conditions finales ($\Lambda(T) = 0$) et le champ de q qui vient d'être obtenu :

$$\begin{cases} \dot{\Lambda}^i = C^TQCq^i - A^T\Lambda^i - C^TQ\tilde{U}_d \\ \Lambda^i(T) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

La résolution itérative continue ainsi jusqu'à convergence.

Afin de tester la qualité de cette méthode, le cas $0D$ du problème est traité. C'est le cas d'un problème d'un système masse - ressort à un degré de liberté. Le vecteur

d'état q , qui se compose du déplacement et de sa vitesse, dépend seulement du temps : $q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$. La variable duale a donc deux composantes.

La figure 2.3 représente le déplacement x et le multiplicateur de Lagrange associé Λ au cours des itérations dans le cas où le problème de base est résolu pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées. L'initialisation s'effectue avec une valeur très proche de la solution exacte, identiquement nulle : $\Lambda^0 = 1e^{-3}$. Il est clair que la différence entre les solutions obtenues au cours des itérations augmente rapidement. Ceci s'explique par le fait que les solutions analytiques des équations homogènes associées au problème ont une forme exponentielle croissante et décroissante [Fei03], autrement dit, avec une petite erreur au départ de Λ ou de q , l'erreur est amplifiée rapidement au long du temps d'étude. La méthode itérative diverge alors après quelques itérations.

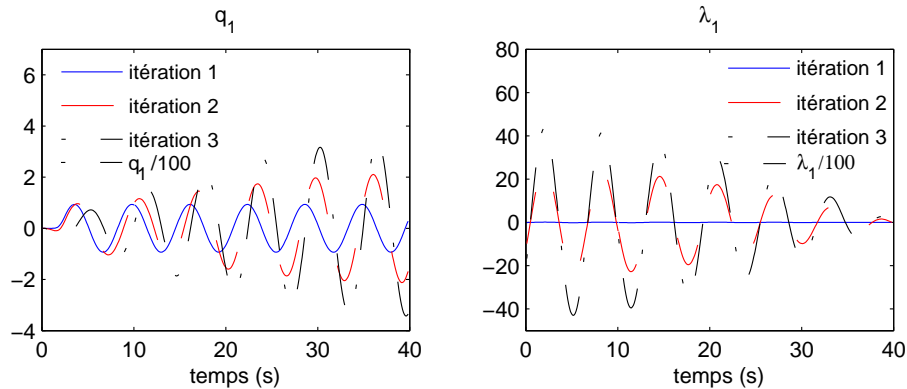


Figure 2.3 – Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé au cours des itérations

Remarques :

Comme cela a été présenté dans la section 1.5.2.2.I, dans [Bry75] et [Cul94], les auteurs ont proposé d'appliquer la méthode itérative pour le système d'équations (2.6). Pour chaque itération, nous allons résoudre les deuxième et troisième équations du système (2.6) afin de trouver q et Λ . La variable e est déterminée par la minimisation de la fonctionnelle L en fonction de la variable e seule en appliquant une méthode de gradient ou de Newton. Cependant, il est facile de démontrer que cette stratégie itérative est tout à fait équivalente à celle présentée ci-dessus en utilisant la méthode de gradient à pas optimal ou la méthode de Newton.

2.3.2.3 Approche basée sur l'équation algébrique de Riccati

Comme l'instabilité des méthodes de résolution du problème de base vient du couplage des équations directes et adjointes, dont les solutions des équations homogènes associées ont une forme exponentielle croissante et décroissante, la méthode basée sur

l'équation de Riccati cherche donc à découpler ces équations directes et adjointes. Une fois le découplage fait, le problème est résolu de manière classique à l'aide de schémas d'intégration en temps.

Afin de pouvoir découpler l'équation directe de l'équation rétrograde du système (2.7), une relation linéaire entre q et λ est introduite :

$$\Lambda(t) = -K(t)q(t) + d(t) \quad (2.24)$$

Il faut noter que cette forme linéaire est démontrée mathématiquement dans [And89].

Après avoir injecté la relation (2.24) dans le système (2.7), trois équations (2.25) pour quatre inconnues Λ, q, d, K sont obtenues :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = -K(t)q(t) + d(t) \\ \dot{q} + (-A + GR^{-1}G^TK)q - GR^{-1}G^Td - B\tilde{F}_d = 0 \\ \left[\dot{d} + (A^T - KGR^{-1}G^T)d - KBu + C^TQ\tilde{U}_d \right] + \\ \quad + \left[\dot{K} + KA + A^TK - KGR^{-1}G^TK + C^TQC \right] q = 0 \end{cases} \quad \text{avec, } \begin{cases} q(0) = q_0 \\ \Lambda(T) = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

La matrice K peut être choisie de telle sorte que la dernière équation d'évolution permette de découpler q et d . Le système (2.25) devient alors un système de quatre équations avec quatre inconnues :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = -K(t)q(t) + d(t) \\ \dot{q} + [-A + GR^{-1}G^TK]q - GR^{-1}G^Td - B\tilde{F}_d = 0 \\ \dot{d} + [A^T - KGR^{-1}G^T]d - KB\tilde{F}_d + C^TQ\tilde{U}_d = 0 \\ \dot{K} + KA + A^TK - KGR^{-1}G^TK + C^TQC = 0 \end{cases} \quad \text{avec, } \begin{cases} q(0) = q_0 \\ d(T) = 0 \\ K(T) = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

La difficulté posée ici est de résoudre la dernière équation, appelée équation différentielle de Riccati. Une fois cela fait, les solutions en q et d vont être successivement obtenues par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.

Dans [For02] et [Fei03], les auteurs ont considéré que pour les temps d'étude suffisamment long $\dot{K} = 0$. C'est une hypothèse classique, qui est souvent utilisée dans les problèmes de contrôle optimal. L'équation obtenue devient l'équation algébrique de Riccati :

$$KA + A^TK - KGR^{-1}G^TK + C^TQC = 0 \quad (2.27)$$

a. Résolution de l'équation algébrique de Riccati

De nombreuses méthodes de calcul de la solution de l'équation algébrique de Riccati existent et permettent de déterminer de façon efficace cette solution. Dans [For02] et [Fei03], seule la méthode de *LQR* (Linear Quadratic Regulator) [Arn84], qui est très robuste et qui a été implantée dans la commande *LQR* de Matlab, est utilisée. L'idée de cette méthode est de déterminer la solution de l'équation algébrique de Riccati par la décomposition de la matrice Hamiltonnienne sous la forme de Schur, qui est numériquement préférée. Cette décomposition s'écrit :

$$H = \begin{bmatrix} -A & -GR^{-1}G^T \\ -C^TQC & A^T \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ 0 & L_{22} \end{bmatrix} U \quad (2.28)$$

où L est la forme de Schur de la matrice H et U est orthogonale.

Cette relation implique :

$$\begin{bmatrix} -A & -GR^{-1}G^T \\ -C^TQC & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}^T \\ U_{12}^T \end{bmatrix} = U^T \begin{bmatrix} L_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} -AU_{11}^T - GR^{-1}G^T U_{12}^T = U_{11}^T L_{11} \\ -C^TQC U_{11}^T + A^T U_{12}^T = U_{12}^T L_{11} \end{cases} \quad (2.30)$$

En posant :

$$K = U_{12}^T (U_{11}^{-1})^T \quad (2.31)$$

le système d'équations (2.30) devient :

$$KA - KGR^{-1}G^T K + A^T K + C^TQC = 0$$

La matrice K donnée par (2.31) correspond donc à la solution de l'équation algébrique de Riccati. Il faut noter que cette méthode fonctionne bien même si la matrice Hamiltonnienne est non diagonalisable.

b. Illustration et commentaire

Illustrée sur l'exemple présenté dans la section 2.1, l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati donne des erreurs vers le temps final, c'est-à-dire, dans la partie $[T_f - \Delta t, T_f]$, où l'on voit bien que le multiplicateur de Lagrange n'est pas nul (figure 2.4). Ceci est dû à la non-validité de l'hypothèse de constance de la matrice K dans la dernière partie du temps d'étude.

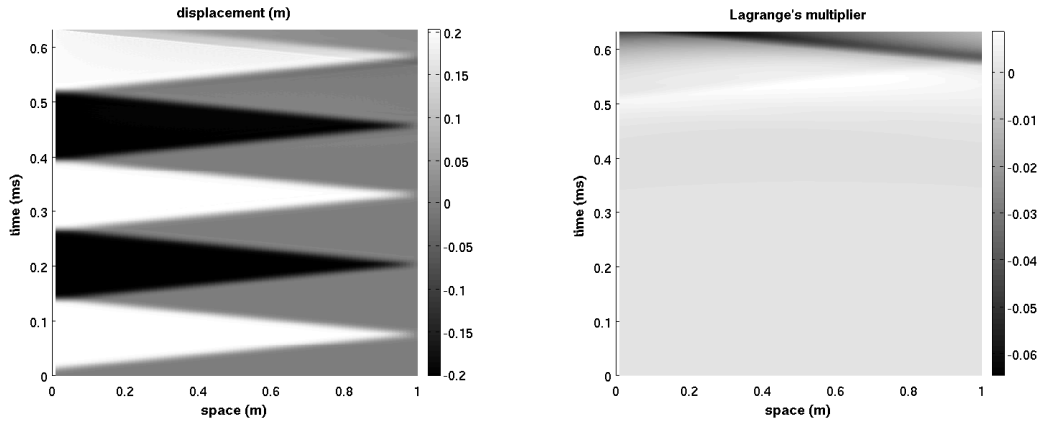


Figure 2.4 – Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde : $T = 10T_0$

Formosa & al [For02] et Feissel [Fei03] ont proposé d'éliminer la dernière partie du temps d'étude pour ne conserver que le reste de la solution du problème, qui est correct. Autrement dit, la méthode n'est valable que pour des temps d'étude suffisamment longs. De plus, l'extension de cette méthode au cas de l'endommagement à effet retard est difficile car les paramètres à identifier interviennent à la fin du temps d'étude avant la rupture. D'autre part, comme on le verra dans les chapitres 4 et 5 pour le cas non linéaire, les matrices A , G dépendent du temps, autrement dit, la méthode LQR ne peut pas être utilisée. L'extension de l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati au cas non linéaire est alors très difficile.

2.4 Estimation de la robustesse de la méthode d'identification

La stratégie d'identification proposée dans [Fei03] [All03] basée sur l'ERdC modifiée est illustrée sur l'exemple présenté dans la section 2.1. Les fonctions coût tracées pour des mesures perturbées à différents niveaux (figure 2.5) montrent que leurs minima se trouvent toujours au module de référence E_0 même pour des mesures perturbées à 60%. Autrement dit, la stratégie d'identification formulée par l'ERdC et traitée par l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati fonctionne bien pour les temps d'étude courts et longs.

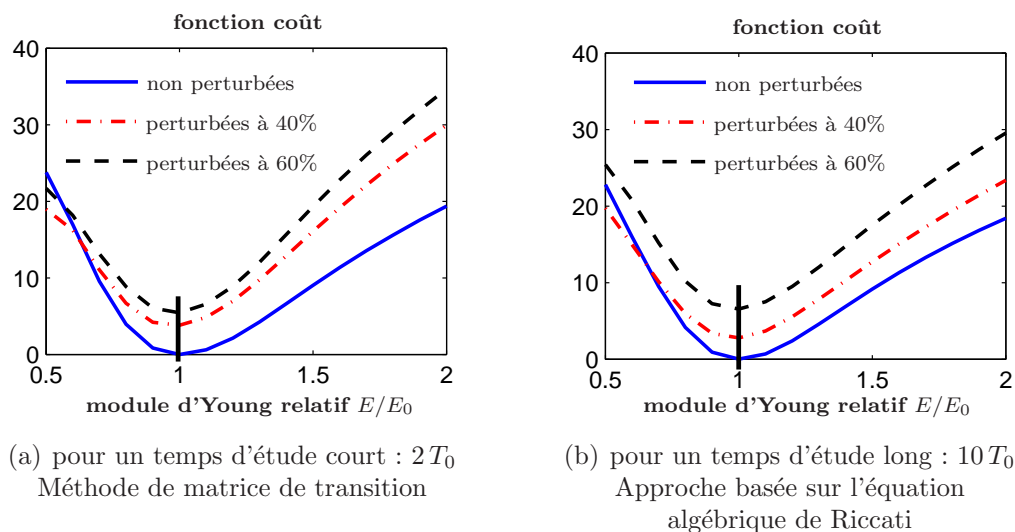


Figure 2.5 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbation - cas 1D élastique (T_0 est le temps d'un aller d'onde)

Dans cette stratégie, le traitement numérique du problème se base sur :

- la méthode de matrice de transition pour les temps d'étude courts ;
- l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati pour les temps d'étude longs.

Une question se pose donc de savoir si ces méthodes sont capables de traiter le problème pour des temps d'étude intermédiaires. Afin d'y répondre, les deux méthodes proposées sont testées pour un temps d'étude correspondant à 3,5 allers d'onde : $T = 3,5T_0$ avec des mesures exactes et perturbées à différents niveaux.

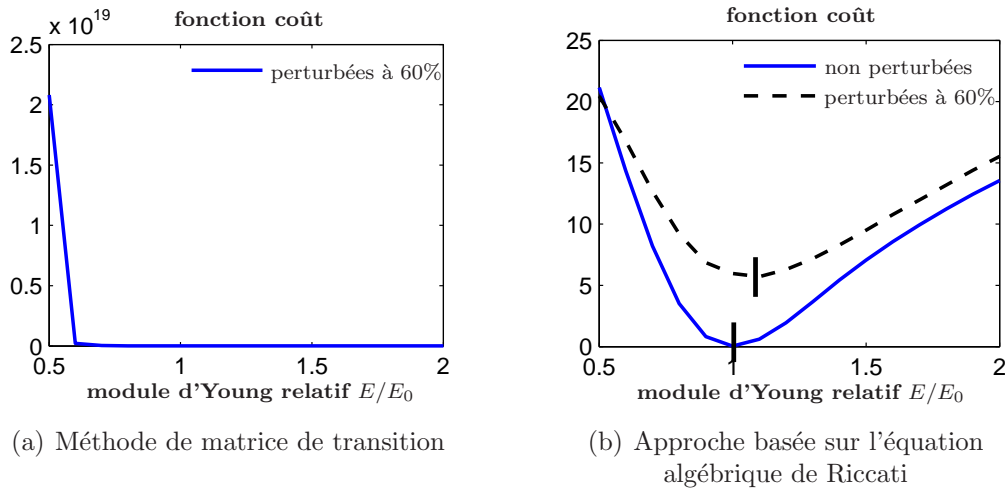


Figure 2.6 – Fonctions coût pour un temps d'étude intermédiaire : $T = 3,5T_0$ - cas 1D élastique

Les fonctions coût obtenues, qui sont présentées figure 2.6, montrent que la méthode d'identification proposée dans [Fei03] basée sur l'équation algébrique de Riccati est efficace pour des mesures non perturbées. Cependant, elle fonctionne beaucoup moins bien pour des mesures fortement perturbées.

En effet, lorsque la dernière partie de la solution du problème de base est éliminée à cause de la non validité de l'hypothèse de constance de la matrice de Riccati sur la fin du temps d'étude, nous perdons une partie des informations obtenues. Si le reste est suffisamment grand, l'identification fonctionnera bien. Au contraire, s'il devient petit, la méthode fournira de mauvais résultats du module d'élasticité, surtout pour des mesures fortement perturbées.

2.5 Minimisation par rapport aux paramètres matériau

Dans la section précédente, une estimation de la fonction coût en fonction des paramètres matériau a été faite. En revanche, afin d'identifier d'une façon quantitative les paramètres, la mise en œuvre d'une stratégie de minimisation de la fonction coût à l'aide du gradient déterminé à partir des champs solution du problème de base est nécessaire. Dans [Fei03], une méthode de descente à pas fixe est utilisée. Afin de montrer ses avantages et ses inconvénients, nous rappelons ici les résultats dans un cas plus

complexe que l'élasticité homogène. Il s'agit du cas de l'élasticité hétérogène d'une poutre constituée de quatre morceaux dont les modules d'Young sont différents (figure 2.7). Pour ce problème, l'objectif est de trouver ces quatre modules de la poutre en supposant que la position des blocs est connue.

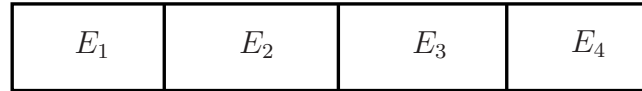
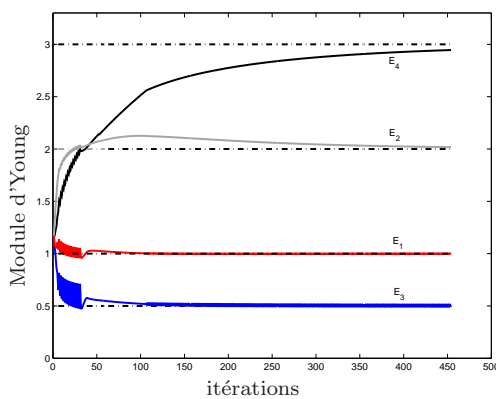
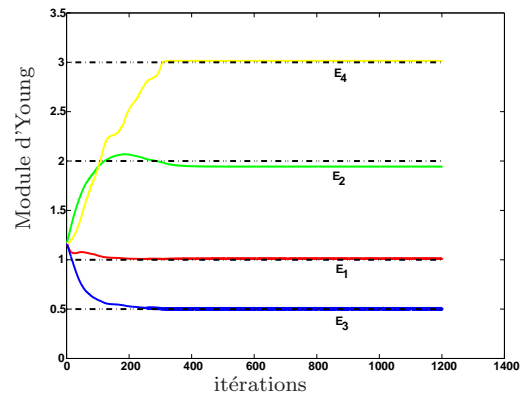


Figure 2.7 – Poutre élastique hétérogène par bloc

La fabrication des mesures ainsi que la formulation du problème et la méthode de résolution du problème de base sont similaires à celles utilisées dans le cas de l'élasticité homogène. L'étape d'identification s'effectue grâce à une méthode de descente à pas fixe. Les quatre modules identifiés au cours des itérations sont présentés figure 2.8.



(a) pour des mesures non perturbées



(b) pour des mesures perturbées à 5%

Figure 2.8 – Identification des modules d'Young de la poutre hétérogène par la méthode de descente à pas fixe - [Fei03]

Il est clair que cette méthode est simple à mettre en œuvre. Cependant, elle converge très lentement surtout à proximité de la solution car le gradient devient très petit. Il sera donc nécessaire d'étudier une méthode de minimisation plus efficace.

2.6 Conclusion

Ce chapitre rappelle le travail précédent concernant l'application de l'ERdC modifiée à l'identification du module d'Young d'une poutre en élasticité linéaire ainsi que

ses premiers résultats très encourageants. Le problème formulé est un problème de minimisation d'une fonction coût qui se compose d'une erreur de modèle et d'une erreur de mesures en vérifiant l'équation d'équilibre et les conditions initiales en temps. La résolution de ce problème est itérative en deux étapes :

- résolution du problème de minimisation pour un jeu de paramètres fixé ;
- estimation d'un meilleur jeu de paramètres matériau grâce aux champs solution obtenus dans la première étape.

La résolution du problème dans la première étape, appelé problème de base, nous conduit à un problème de propagation d'ondes directes et adjointes couplées. Ceci pose une difficulté liée à la présence d'exponentielles croissantes parmi les solutions de l'équation homogène associée. Feissel [Fei03], Allix & al [All03] ont proposé une méthode basée sur la matrice de transition pour les temps d'étude courts et une approche basée sur l'équation algébrique de Riccati pour les temps d'étude longs. Cependant, ces méthodes ont de grands inconvénients :

- elles ne permettent pas de traiter le problème pour les temps d'étude intermédiaires ;
- leur extension aux cas non linéaires est difficile car le système est dépendant du temps ;
- le fait de couper la dernière partie de la solution dans l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati rend difficile l'identification des paramètres à effet retard du méso-modèle de l'endommagement des composites stratifiés car ces paramètres n'interviennent qu'à la fin du temps d'étude.

Quant à la deuxième étape, les auteurs ont utilisés la méthode de descente à pas fixe. Celle-ci n'est cependant pas très performante.

En résumé, les premiers résultats d'identification à partir de mesures fortement corrompues grâce à l'ERdC modifiée sont très remarquables [Fei03], [All03]. Cependant, il subsiste encore des problèmes à résoudre, en particulier au niveau du traitement numérique. Ceci constitue l'objectif des travaux présentés dans la deuxième partie.

Deuxième partie

**Identification robuste par l'ERdC
modifiée**

Dans cette deuxième partie, nous apporterons des réponses aux questions restantes suite au premier travail [All03] [Fei03], puis développerons la méthode d'identification dans les cas non linéaires. La présentation de ces travaux sera écrite dans trois chapitres :

- Le chapitre 3 présentera une méthode de traitement numérique robuste dans le cas élastique.
- Le chapitre 4 consistera à étendre la stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée aux cas non linéaires. Son application au cas viscoplastique sera également présentée.
- Le chapitre 5 s'attaquera enfin au problème d'identification des paramètres de rupture d'un composite par l'ERdC modifiée.

Problème d'identification du matériau élastique : Traitement robuste

Dans ce chapitre, deux méthodes de traitement robuste du problème de base dans le cas de l'élasticité sont proposées [Ngu05] [All05a]. Elles sont ensuite étendues au cas 2D afin de vérifier leur robustesse. Une méthode performante de minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau est également présentée à la fin de ce chapitre.

Sommaire

3.1	Problème d'identification dans le cas 1D élastique	73
3.1.1	Fabrication des mesures	74
3.1.2	Rappel du processus d'identification	76
3.1.3	Résolution robuste du problème de base	76
3.1.4	Identification du module d'Young	91
3.1.5	Comparaison avec les solutions obtenues par le filtre de Kalman	92
3.1.6	Conclusion sur le cas 1D élastique	95
3.2	Extension au cas 2D élastique linéaire	96
3.2.1	Présentation du problème d'identification	96
3.2.2	Problème de base	98

3.2.3	Identification des paramètres matériau élastique	99
3.2.4	Conclusion sur le cas 2D élastique	100
3.3	Extension au cas 1D élastique hétérogène	100
3.3.1	Stratégie de minimisation de la fonction coût	101
3.3.2	Remarque	103
3.3.3	Conclusion sur le cas 1D élastique hétérogène	103
3.4	Conclusion	104

Comme le chapitre 2 l'a mis en avant, les méthodes de résolution du problème de base étudiées dans [Fei03] [All03] ne permettent pas de traiter le problème pour des temps d'étude quelconques dans le cas de l'élasticité linéaire. De plus, leur extension aux cas non linéaires semble difficile. Dans ce chapitre, une méthode de traitement robuste est d'abord étudiée dans le cas élastique. Grâce à cette méthode, l'identification basée sur l'ERdC modifiée fonctionne bien, même pour des mesures fortement perturbées. Sa comparaison avec le filtre de Kalman, dans le cas où les connaissances *a priori* sur les perturbations de mesures sont connues, confirme la robustesse de la stratégie d'identification proposée. Puis, cette robustesse est vérifiée dans les cas plus complexes de l'élasticité 1D hétérogène et de l'élasticité 2D avant de s'étendre aux cas non linéaires.

3.1 Problème d'identification dans le cas 1D élastique

Le contexte du problème traité consiste toujours en l'identification du module d'élasticité d'une poutre élastique linéaire à partir des conditions aux limites en effort et en déplacement sur un intervalle de temps $[0, T]$ (figure 3.1).

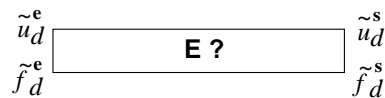


Figure 3.1 – Problème d'identification dans le cas 1D en élasticité

Les mesures expérimentales sont fabriquées par un calcul direct avec les paramètres matériau de référence présentés dans le tableau 3.1. Les perturbations sont ensuite ajoutées à ces mesures afin de tester la robustesse de la méthode d'identification proposée. Comme toutes ces fabrications sont numériques, différents choix du calcul direct et de la perturbation sont possibles. Ceci fait l'objet de la discussion ci-après (section 3.1.1).

Module d'Young :	$E_0 = 200 \text{ GPa}$
Coefficient de Poisson :	$\nu_0 = 0,3$
Densité :	$\rho = 800 \text{ kg.m}^{-3}$

Tableau 3.1 – Propriétés matériau élastique

3.1.1 Fabrication des mesures

3.1.1.1 Fabrication des mesures non perturbées

Le calcul direct utilisé pour créer les mesures exactes simule une poutre de section $S = 1 \text{ cm}^2$, de longueur $L = 100 \text{ cm}$, encadrée d'un côté et sollicitée en effort de l'autre, avec une valeur maximale $F_{max} = 20 \text{ kN}$ (figure 3.2). Le type de chargement en effort peut être :

- un demi sinus ;
- un plateau.

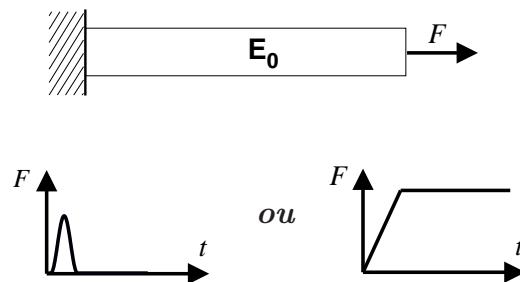


Figure 3.2 – Essai numérique dans le cas 1D

La barre est discrétisée par 100 éléments linéaires à deux nœuds, de taille égale, un schéma explicite pour les déplacements est ensuite utilisé et permet d'obtenir des conditions aux limites pour un temps d'étude $T = 0.63 \text{ ms}$ équivalent à 10 aller d'ondes dans la barre (figures 3.3, 3.4).

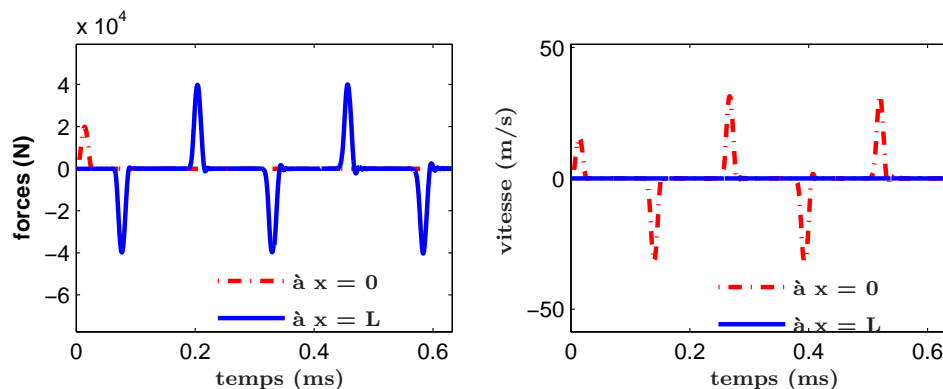


Figure 3.3 – Conditions aux limites non perturbées obtenues par un chargement de type **demi-sinus** en effort

Il est clair que les mesures obtenues par un plateau en effort se rapproche d'avantage de celles obtenues à partir des essais aux barres d'Hopkinson (même si un plateau en

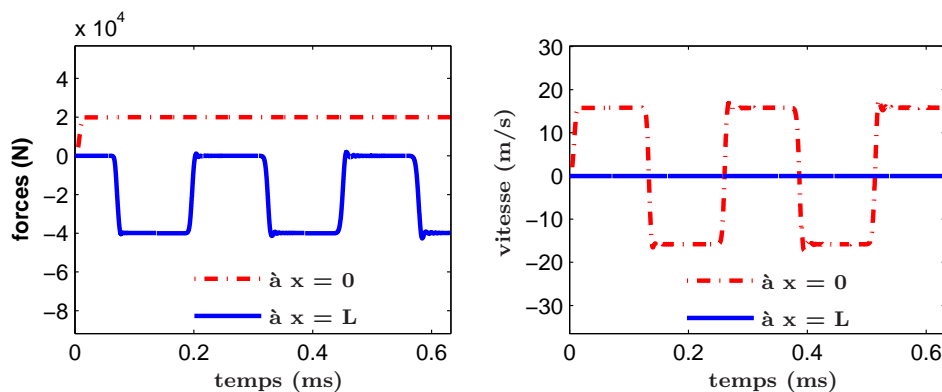


Figure 3.4 – Conditions aux limites non perturbées obtenues par un chargement de type **plateau** en effort

vitesse fournirait des mesures plus proche encore). En revanche, le chargement de type demi-sinus en effort est plus simple et permet de comprendre le phénomène de propagation d'ondes dans la barre. Comme le cas de l'élasticité est un premier développement de la stratégie d'identification basée sur l'ERdC à partir des mesures corrompues en dynamique transitoire, un chargement de type demi-sinus en effort est donc retenu pour les exemples de ce chapitre.

3.1.1.2 Fabrication des perturbations

À partir des conditions aux limites non perturbées fabriquées par le calcul direct, des perturbations sont ajoutées afin de tester la robustesse de la méthode. La grande question posée est : "À quelles quantités de la condition aux limites, les perturbations doivent-elles être ajoutées ?"

Dans [Fei03] [All03], le choix a été de perturber les mesures en effort et en déplacement. Ceci ne semble pas correspondre à ce qui se passe dans les essais aux barres d'Hopkinson où les efforts et les vitesses de déplacement sont mesurés D'autre part, d'un point de vue théorique, des déplacements correspondant au signal perturbé par un bruit blanc seraient physiquement liés à un saut de l'énergie, ce qui est à la fois très sévère et peu réaliste. De plus, dans le problème dynamique, les efforts et les vitesses de déplacement sont directement liés, autrement dit, une perturbation ajoutée aux efforts est équivalente à une autre ajoutée aux vitesses. Pour toutes ces raisons, dans le reste de ce travail, les perturbations des mesures vont porter sur les efforts et les vitesses de déplacement. Ces perturbations peuvent être de type bruit blanc uniforme ou gaussien. Par la suite, seules les dernières sont retenues pour faciliter les études probabilistes. En revanche, les perturbations uniformes peuvent tout à fait être utilisées sans poser de problème à la stratégie d'identification proposée. Une mesure en effort perturbée à 20% représente donc un bruit blanc gaussien de moyenne nulle dont l'écart-type est de 20% de l'effort maximum obtenu aux deux extrémités de la barre. Un exemple typique

des conditions aux limites perturbées à 20% est présenté dans la figure 3.5.

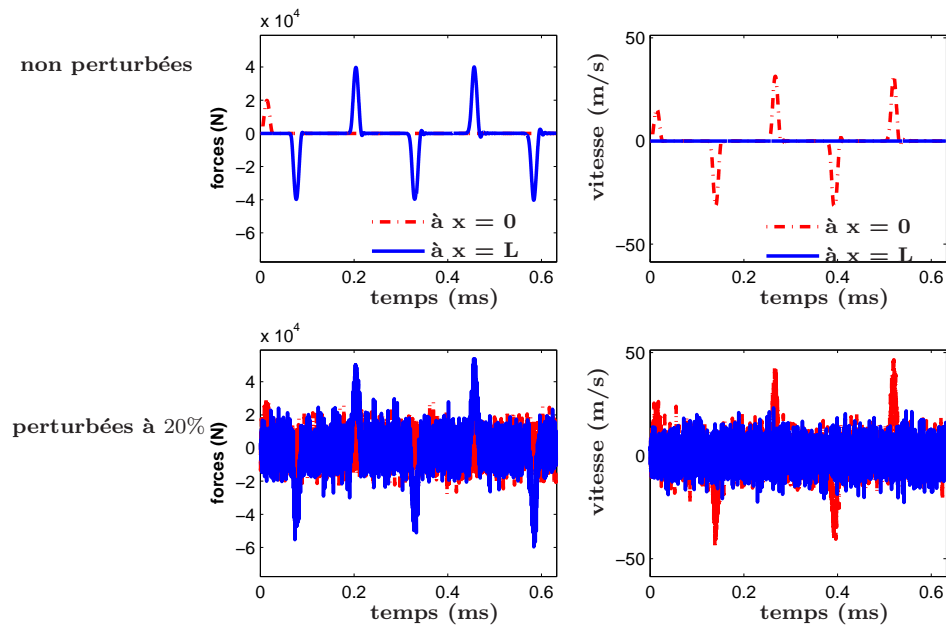


Figure 3.5 – Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% - cas 1D élastique

3.1.2 Rappel du processus d'identification

Le problème d'identification du module d'élasticité de la poutre, qui est formulé par l'ERdC modifiée, est un problème de minimisation sous contraintes (section 2.2). Il est alors résolu en deux étapes :

- Résolution du problème de base, il s'agit d'un problème de minimisation sous contraintes pour un module E fixé ;
- Évaluation de la fonction coût grâce aux champs solution du problème de base afin d'identifier le module E .

3.1.3 Résolution robuste du problème de base

Comme présenté à la section 2.2, le problème de base associé à la stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée s'écrit :

Trouver les champs u, σ, u_d, f_d minimisant :

$$J(u, \sigma, u_d, f_d) = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} E^{-1} (\sigma - E \epsilon)^2 dx + \frac{\alpha}{2} |(f_d - \tilde{f}_d)|_0^L + \frac{\beta}{2} |(u_d - \tilde{u}_d)|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$-\rho \ddot{u} + \operatorname{div}(\sigma) = 0, \quad u(x, 0) = u_0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \quad (3.1)$$

Le changement de variables et le calcul du Lagrangien associé tel que cela a été présenté dans la section 2.3 permettent alors d'aboutir au système d'équations directes et adjointes couplées suivant :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq + GR^{-1}G^T\Lambda + B\tilde{F}_d \\ \dot{\Lambda} = C^TQCq - A^T\Lambda - C^TQ\tilde{U}_d \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} q(0) = q_0 \\ \Lambda(T) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Parmi les méthodes présentées dans le chapitre précédent, l'idée de la séparation des équations directes et adjointes par l'équation de Riccati semble la plus intéressante. Rappelons ici les équations obtenues après le découplage :

$$\begin{cases} \Lambda(t) = -K(t)q(t) + d(t) \\ \dot{q} + [-A + GR^{-1}G^TK]q - GR^{-1}G^Td - B\tilde{F}_d = 0 \\ \dot{d} + [A^T - KGR^{-1}G^T]d - KB\tilde{F}_d + C^TQ\tilde{U}_d = 0 \\ \dot{K} + KA + A^TK - KGR^{-1}G^TK + C^TQC = 0 \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} q(0) = q_0 \\ d(T) = 0 \\ K(T) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La grande difficulté réside dans la résolution de manière "exacte" et robuste de la dernière équation du système ci-dessus. Il s'agit en fait d'une équation matricielle et différentielle, appelée **équation différentielle de Riccati** :

$$\dot{K} + KA + A^TK - KGR^{-1}G^TK + C^TQC = 0 \quad (3.4)$$

Dans le cas élastique où les matrices A, G, R, Q, C sont constantes, la solution en $K(t)$ se compose de deux parties : une correspondant à la réponse transitoire et une correspondant à la réponse stationnaire du système. Des techniques adaptées issues du contrôle optimal permettent d'obtenir soit la solution transitoire [Vau69] [And89] [Dub00], soit la solution stationnaire [Arn84] [For02]. L'obtention de la solution transitoire peut être très coûteuse. Ainsi, on peut chercher à exploiter la nature de la solution pour proposer une approche appelée "hybride", qui consiste à calculer la solution exacte dans la partie transitoire et la solution approchée dans la partie stationnaire afin de réduire le coût de calcul dans le cas élastique. Deux points concernant la résolution de l'équation de Riccati (3.4) sont alors abordés dans la partie suivante :

- La résolution numérique de l'équation différentielle de Riccati ;
- L'approche hybride, couplant différents types de résolutions dans le but de réduire les coûts de calcul.

3.1.3.1 Approche basée sur l'équation différentielle de Riccati

Qu'elle soit couplée avec une autre méthode ou non, la première difficulté consiste à résoudre l'équation différentielle de Riccati (3.4). Pour cela, les trois méthodes suivantes ont été étudiées :

- Formule exponentielle des invariants de sous-espace ;
- Solution transitoire exprimée à partir de la solution de l'équation algébrique de Riccati ;
- Méthodes numériques.

Une fois l'équation (3.4) résolue, les solutions en q et d du système (3.3) vont être successivement obtenues en utilisant un schéma d'intégration numérique comme la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

I. Formule exponentielle des invariants de sous-espace

La plupart des méthodes de résolution de l'équation (3.4) se base sur la séparation du système (3.2) en deux parties : la partie stable, qui est associée à des solutions exponentielles décroissantes et la partie instable, qui est associée à des solutions exponentielles croissantes ; puis la première partie est traitée dans le sens direct en temps et la deuxième dans le sens rétrograde [Vau69].

Le système (3.2) est réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & -GR^{-1}G^T \\ -C^TQC & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B\tilde{F}_d \\ C^TQ\tilde{U}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La matrice H , appelée matrice Hamiltonnienne, est ensuite diagonalisée :

$$H = \begin{bmatrix} -A & -GR^{-1}G^T \\ -C^TQC & A^T \end{bmatrix} = V J V^{-1} \quad (3.6)$$

où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le vecteur $[q \ \Lambda]$ est alors exprimé dans la base des vecteurs propres comme suit :

$$\begin{bmatrix} q \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ \Lambda' \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

L'introduction de (3.6) et de (3.8) dans (3.5) permet d'aboutir à l'équation :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}' \\ \dot{\Lambda}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & -J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ \Lambda' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ce qui donne la solution :

$$\begin{bmatrix} q' \\ \Lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{J_1(T-t)} & 0 \\ 0 & e^{-J_2(T-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'(T) \\ \Lambda'(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} q'(T) \\ \Lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-J_1(T-t)} & 0 \\ 0 & e^{-J_2(T-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q' \\ \Lambda'(T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Avec le changement de variable :

$$\begin{cases} \Lambda = K q + d \\ \Lambda' = K' q' + d' \end{cases} \quad (3.12)$$

la solution $K(t)$ de l'équation différentielle de Riccati est déterminée à partir des équations (3.8) et (3.11). Elle s'écrit alors :

$$\begin{cases} K = (V_{21} - V_{22} K') (V_{11} - V_{12} K')^{-1} \\ K' = e^{-J_2(T-t)} V_{22}^{-1} V_{21} e^{-J_1(T-t)} \end{cases} \quad (3.13)$$

La solution obtenue, qui est exprimée sous forme analytique, est donc exacte. En revanche, cette méthode, en se basant sur la diagonalisation de la matrice Hamiltonnienne, n'est plus applicable dans le cas où la matrice Hamiltonnienne n'est pas diagonalisable comme dans le cas unidimensionnel de la poutre.

II. Solution transitoire exprimée à partir de la solution de l'équation algébrique de Riccati

L'idée de cette méthode [And89] est d'exprimer la solution de l'équation différentielle de Riccati sous forme analytique à partir de celle de l'équation algébrique de Riccati pour se ramener, par un changement de variable, à une équation différentielle linéaire, dont la solution analytique est connue.

Supposons que $K(t)$ et K_c sont respectivement les solutions de l'équation différentielle et algébrique de Riccati :

$$\begin{cases} \dot{K} + KA + A^T K - KGR^{-1}G^T K + C^T QC = 0 \\ K_c A + A^T K_c - K_c GR^{-1}G^T K_c + C^T QC = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

La différence entre ces deux équations forme une nouvelle équation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(K - K_c) + (K - K_c)(A - GR^{-1}G^T K_c) + (A^T - K_c GR^{-1}G^T)(K - K_c) \\ - (K - K_c)GR^{-1}G^T(K - K_c) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

En posant :

$$\begin{cases} X = (K - K_c)^{-1} \\ F = A - GR^{-1}G^T K_c \end{cases}$$

l'équation (3.15) s'écrit :

$$-\dot{X} + FX + XF^T - GR^{-1}G^T = 0 \quad (3.16)$$

Si X_c est la solution de l'équation algébrique associée :

$$FX + XF^T - GR^{-1}G^T = 0 \quad (3.17)$$

nous pouvons déduire que :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(X - X_c) + F(X - X_c) + (X - X_c)F^T = 0 \\ X(T) = (-K_c)^{-1} \end{cases} \quad (3.18)$$

La solution de l'équation (3.18) devient alors :

$$X(t) - X_c = e^{F(t-T)} [X(T) - X_c] e^{F^T(t-T)}$$

La solution de l'équation différentielle de Riccati s'écrit donc :

$$K(t) = K_c + e^{-F^T(t-T)} \{e^{-F(t-T)} X_c e^{-F^T(t-T)} - K_c^{-1} - X_c\}^{-1} e^{-F(T-t)} \quad (3.19)$$

Comme pour la méthode précédente, l'avantage de cette méthode est de donner une forme analytique de la solution. Cependant, la diagonalisation de la matrice Hamiltonienne n'est pas nécessaire.

À l'instant $(T - \Delta t)$, la matrice $K(t)$ vaut :

$$\begin{aligned} K_{(T-\Delta t)} &= K_c + e^{-F^T(-\Delta t)} \{e^{-F(-\Delta t)} X_c e^{-F^T(-\Delta t)} - K_c^{-1} - X_c\}^{-1} e^{-F(-\Delta t)} \\ &= K_c + \{X_c + e^{-F \Delta t} (-K_c^{-1} - X_c) e^{-F^T \Delta t}\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

En remarquant que toutes les valeurs propres de la matrice F sont négatives, on peut déduire que les termes $e^{-F \Delta t}$ et $e^{-F^T \Delta t}$ tendent vers l'infini pour un intervalle de temps Δt suffisamment grand, c'est-à-dire que la matrice $K_{(T-\Delta t)}$ tend vers la matrice constante K_c quand Δt augmente. Afin d'étudier la convergence de la solution analytique de l'équation différentielle de Riccati $K_{analy.}(t)$ vers la solution de l'équation algébrique de Riccati K_c , un estimateur d'erreur est introduit :

$$er = \frac{\|K_{analy.} - K_c\|}{\|K_{analy.}\|} \quad (3.21)$$

Cette convergence est illustrée figure 3.6, où la norme de $K(t)$ et l'estimateur d'erreur sont présentés en fonction du temps pour le module d'Young de référence $E = E_0$. Cet exemple confirme encore une fois la conclusion théorique du fait que la solution transitoire converge vers la solution algébrique après un petit intervalle de temps Δt . Il faut noter ici que la convergence dépend du système et de Δt , mais pas du temps d'étude T_f . Cette remarque est très importante pour la partie suivante (section 3.1.3.2).

III. Méthodes numériques

L'équation différentielle de Riccati peut être résolue de façon discrète en utilisant un schéma numérique. Dans ce travail, les deux schémas suivants ont été retenus :

a. Schéma de Runge-Kutta

L'équation différentielle de Riccati (3.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{K} = f(K) = -(KA + A^T K - KGR^{-1}G^T K + C^T Q C) \\ K(T) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

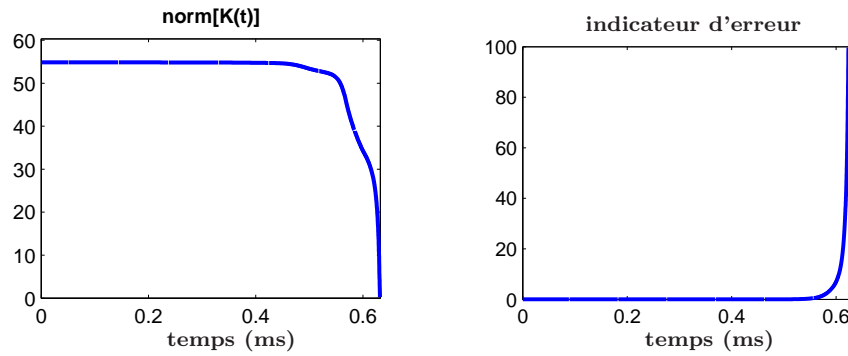


Figure 3.6 – Norme de la solution analytique de la matrice de Riccati $K(t)$ et estimateur d'erreur dans le cas du module d'Young de référence $E = E_0$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 de la variable matricielle K , qui peut être résolue par la méthode de Runge-Kutta dans laquelle la précision obtenue est d'ordre 4.

Afin d'étudier la qualité de la solution obtenue, la matrice $K(t)$ est comparée avec la solution analytique (3.19). Un estimateur d'erreur similaire à celui utilisé dans la section précédente (3.21) est alors introduit :

$$er = \frac{\|K_{analy.} - K_{num}\|}{\|K_{analy.}\|} \quad (3.23)$$

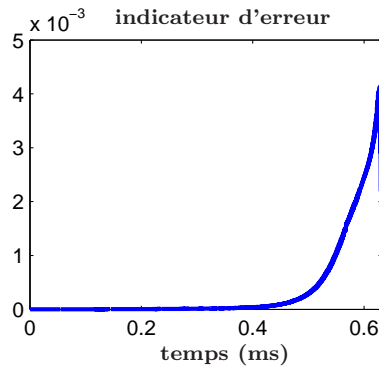


Figure 3.7 – Comparaison de la solution numérique obtenue par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 à la solution analytique de la matrice de Riccati $K(t)$ (3.19)

La figure 3.7 illustre la bonne qualité de la solution obtenue par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 en faisant la comparaison avec la solution analytique de référence (3.19).

Un autre avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle peut fonctionner même dans le cas où les coefficients A , G , R , C , Q de l'équation de Riccati (3.4) sont dépendants du temps (chapitres 4 et 5).

En revanche, il faut assurer la condition de stabilité car ce schéma d'intégration est de toute façon explicite. Cette condition de stabilité est assez délicate à déterminer surtout dans le cas d'une équation matricielle comme celle de Riccati. Au cours de ce travail, aucun cas d'instabilité lors de la résolution de l'équation différentielle de Riccati n'a été remarqué. Nous pouvons donc supposer que le pas de temps utilisé, qui respecte la condition de Courant, vérifie la condition de stabilité du schéma de Runge-Kutta.

b. Schéma homographique

La résolution numérique de l'équation différentielle de Riccati (3.4) peut être également effectuée par un schéma d'intégration numérique, appelé schéma homographique [Dub00], afin de garantir la stabilité de la résolution.

L'équation (3.4) est d'abord réécrite en temps rétrograde :

$$\begin{cases} \tau = T - t \\ \frac{dK}{d\tau} - K(\tau)A - A^T K(\tau) + K(\tau)GR^{-1}G^T K(\tau) - C^T QC = 0 \\ K(\tau = 0) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Puis un scalaire strictement positif μ est défini pour que la matrice $[\mu I - A - A^T]$ soit définie et positive. Une autre matrice symétrique définie positive est ensuite introduite : $M = \frac{1}{2}\mu I - A$. La matrice A peut alors être décomposée en deux parties :

$$A = A^+ - A^- \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A^+ = \frac{1}{2}\mu I \\ A^- = M \end{cases}$$

Dubois et Saidi [Dub00] ont défini un schéma numérique pour l'équation (3.24) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(K_{i+1} - K_i) + \frac{1}{2}(K_i GR^{-1}G^T K_{i+1} + K_{i+1} GR^{-1}G^T K_i) + (M^T K_{i+1} + K_{i+1} M) \\ = \mu K_i + C^T QC \end{aligned} \quad (3.25)$$

En notant :

$$\begin{cases} S_{i+1} = \frac{1}{2}I + \frac{\Delta t}{2}GR^{-1}G^T K_i + \Delta t M \\ Y_{i+1} = K_i + \mu \Delta t K_i + \Delta t C^T QC \end{cases}$$

l'équation (3.25) devient :

$$S_{i+1}^T K_{i+1} + K_{i+1} S_{i+1} = Y_{i+1} \quad (3.26)$$

Cette équation, appelée équation de Lyapunov pour l'inconnue K_{i+1} , peut être résolue par l'algorithme proposé par Bartels et Stewart [Bar72] et implanté dans la fonction **LYAP** de Matlab. Afin d'étudier la qualité de la solution obtenue par ce

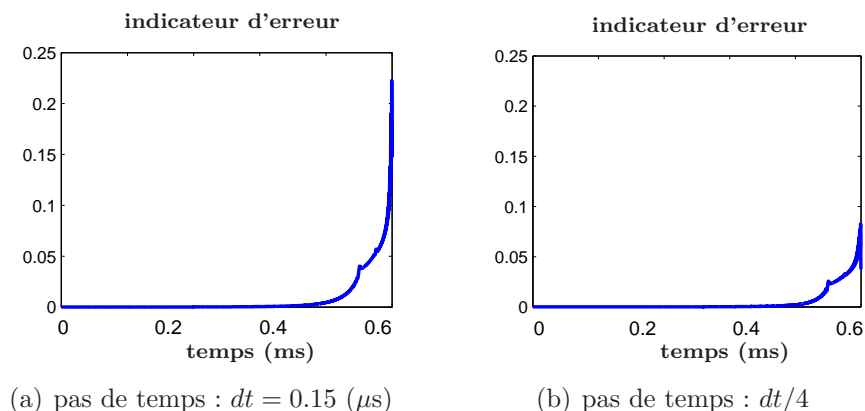


Figure 3.8 – Comparaison de la solution numérique par le schéma homographique [Dub00] pour un pas de temps dt et $\frac{dt}{4}$ à la solution analytique de $K(t)$ (3.19)

schéma, la matrice $K(t)$ est comparée avec la solution analytique (3.19) à l'aide de l'indicateur (3.23).

La figure (3.8a) montre que l'erreur de la solution numérique obtenue par le schéma homographique [Dub00] est plus grande que celle obtenue par le schéma de Runge Kutta d'ordre 4. Cela s'explique par le fait que la précision du schéma homographique n'est que d'ordre 1. D'autre part, comme ce schéma est implicite, cette méthode est plus coûteuse que celle utilisant un schéma explicite comme Runge-Kutta.

On constate également que l'erreur de la solution numérique se localise vers l'instant final. En fait, ce résultat est prévu à partir de la forme exponentielle décroissante de la solution analytique (3.19). Cette décroissance, qui est vraiment rapide dans la partie finale du temps d'étude $[T_f - \Delta t, T_f]$, demande une discrétisation temporelle fine pour un schéma numérique. Lorsque un pas de temps quatre fois plus petit $dt/4$ est utilisé pour le schéma homographique, le résultat obtenu (figure 3.8b) est meilleur que celui pour un pas de temps dt (figure 3.8a). Cependant, bien que cette erreur diminue, elle reste assez grande (10%). C'est pourquoi le schéma homographique n'est plus utilisé pour la suite de ce travail.

IV. Choix de la méthode de résolution, illustration et commentaire

Parmi les méthodes de résolution de l'équation différentielle de Riccati (3.4) étudiées dans cette partie, la solution analytique exprimée à partir de la solution de l'équation algébrique de Riccati semble la meilleure car elle donne les résultats les plus précis. Cependant, elle ne peut pas être appliquée aux équations dont les coefficients A , G , R , C , Q sont dépendants du temps, ce qui est le cas rencontré pour l'identification des comportements non linéaires par l'ERdC modifiée (chapitre 4, 5). Dans ce type de contexte, la méthode numérique basée sur le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 semble la plus convenable.

Afin de montrer les avantages de l'approche basée sur l'équation de Riccati par rapport aux méthodes présentées dans [Fei03], qui ont été rappelées dans le chapitre 2, l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati est illustrée sur l'exemple de la poutre élastique avec le module d'Young de référence E_0 , des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$.

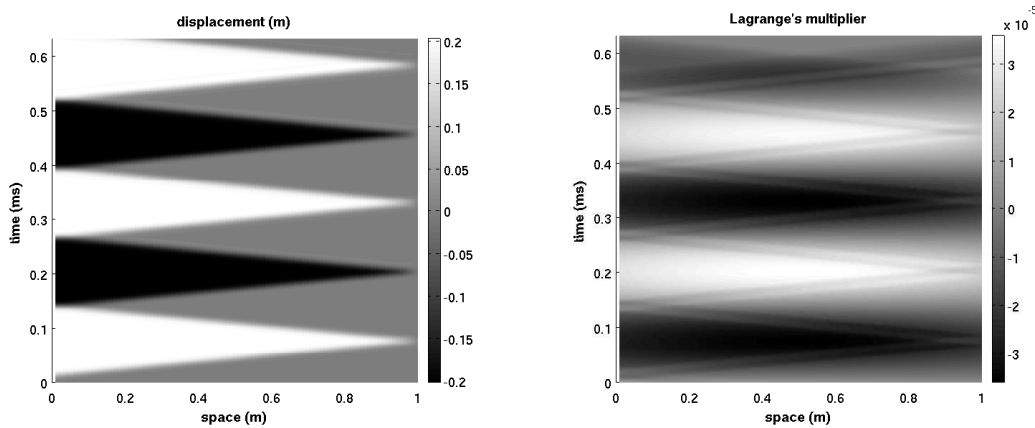


Figure 3.9 – Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$

Dans le cas des mesures non perturbées et du module d'Young de référence $E = E_0$, le multiplicateur de Lagrange est théoriquement nul, ce qui n'est pas vraiment le cas ici, même numériquement. Cependant, il est assez petit (de l'ordre de 10^{-5}). Cette erreur peut s'expliquer par l'incompatibilité entre le schéma utilisé pour la fabrication des mesures (schéma Newmark explicite) et celui du problème inverse (schéma de Runge-Kutta d'ordre 4).

En résumé, cette approche est :

- d'une part meilleure que la méthode de matrice de transition, car elle est capable de traiter le problème pour les temps d'étude longs ;
- d'autre part meilleure que celle basée sur l'équation algébrique de Riccati, car elle exploite également les informations jusqu'à la fin du temps d'étude.

Elle est alors valide pour des temps d'étude quelconques et semble extensible aux cas non linéaires.

Cependant, cette approche, malgré ses avantages, pose un problème de coût de calcul et de mémoire occupée à cause du calcul et du stockage de la valeur exacte de la matrice de Riccati $K(t)$ à chaque piquet de temps. Le tableau 3.2 montre que le nombre des opérations exécutées et le mémoire occupée augmentent de façon linéaire en fonction du nombre de pas temps et de façon quadratique en fonction du nombre de degrés de liberté. Le coût de calcul peut donc devenir très important dans les cas complexes.

Approche basée sur l'équation différentielle de Riccati		solution analytique	solution numérique Runge-Kutta 4
<i>multiplier</i>	des matrices $[2 N_{ddl}, 2 N_{ddl}]$	$7 N_t$	$14 N_t$
<i>diviser</i>	des matrices $[2 N_{ddl}, 2 N_{ddl}]$	$N_t + 2$	2
<i>diagonaliser</i>	des matrices $[2 N_{ddl}, 2 N_{ddl}]$	4	0
<i>stocker</i>	des matrices $[2 N_{ddl}, 2 N_{ddl}]$	$N_t + 10$	$N_t + 10$

Tableau 3.2 – Estimation du coût de calcul de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati

Dans le cas de l'élasticité, ce point peut être amélioré par une méthode appelée "approche hybride" présentée dans la partie suivante.

3.1.3.2 Approche hybride

L'idée de cette approche réside dans la remarque exprimée précédemment sur le fait que, dans le cas du problème d'identification du module d'élasticité formulé par l'ERdC modifiée où les coefficients A , G , Q , R , C de l'équation de Riccati sont constants, la solution de l'équation différentielle de Riccati $K(t)$ se compose de deux parties : une constante sur le début de l'intervalle d'étude et une autre exponentielle croissante sur la fin de l'intervalle. L'approche consiste alors à déterminer la première partie de la matrice de Riccati K grâce à l'équation algébrique de Riccati et la deuxième par une autre méthode de résolution. Concernant la dernière, les trois solutions suivantes sont considérées :

I. Combinaison avec l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati

De façon naturelle, la dernière partie de la solution est calculée par l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati. L'approche hybride [Ngu05] est en fait vue comme l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati, où $K(t)$ est gardée égale à la matrice constante K_c dans la partie $[0, T - \Delta t]$ de l'intervalle d'étude. En pratique, le calcul de la matrice $K(t)$ est effectué à partir de l'instant final et arrêté au moment où sa différence relative avec la matrice constante K_c (équation 3.21) est inférieure à 10^{-2} . Cette approche, qui est assez légère et qui donne des résultats assez précis, peut tout à fait s'étendre aux cas de géométries plus complexes. L'étude de son coût de calcul et de sa précision est développée dans la section 3.1.3.2.IV.

II. Combinaison avec la méthode de matrice de transition

Cette approche [All05a] est basée sur l'idée que les erreurs de l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati se localisent vers le temps final, dans une partie courte de l'intervalle d'étude où la méthode de matrice de transition fonctionne bien. Elle consiste donc à déterminer la dernière partie des solutions par la méthode de matrice de transition. Cette approche se compose alors de deux étapes. D'abord, le calcul est

effectué en utilisant l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati. La taille de zone erronée $[T_f - \Delta t, T_f]$ est déterminée une seule fois pour toute la stratégie d'identification par la comparaison de la matrice constante K_c avec la matrice $K(t)$ calculée par une des méthodes présentées ci-dessus. Ensuite, les solutions à $(T_f - \Delta t)$ sont utilisées comme conditions initiales pour la méthode de matrice de transition. Les champs solution sont obtenus en raccordant les deux champs solution ainsi calculés. Il faut remarquer que la détermination de la zone erronée $[T_f - \Delta t, T_f]$ peut être également effectuée à travers le calcul du résidu de l'équation d'équilibre [Ngu04].

Bien que cette approche soit plus légère que la précédente, elle n'est pas développée dans la suite car la sensibilité de la matrice de transition à l'intervalle de temps d'étude et à la discrétisation en espace va limiter son application aux cas complexes.

III. Combinaison avec la méthode de Riccati en temps rétrograde

L'idée de la méthode est de traiter le problème également en temps rétrograde pour que les erreurs provoquées par l'approche basée sur l'équation algébrique de Riccati se localisent vers l'instant initial. Ainsi, nous disposons de deux solutions : l'une avec des erreurs vers l'instant final et l'autre avec des erreurs vers l'instant initial. La combinaison est effectuée en conservant les solutions sur les parties de bons résultats des deux approches basées sur l'équation algébrique de Riccati en temps direct et rétrograde. L'approche en temps rétrograde est décrite ci-après.

Tout d'abord, le système (3.2) est écrit en temps rétrograde $\tau = T - t$:

$$\begin{cases} e(\tau) = R^{-1}G^T\Lambda(\tau) \\ -\frac{dq(\tau)}{d\tau} = Aq(\tau) + GR^{-1}G^T\Lambda(\tau) + B\tilde{F}_d(\tau) \\ -\frac{d\Lambda(\tau)}{d\tau} = C^TQCq(\tau) - A^T\Lambda(\tau) - C^TQ\tilde{U}_d(\tau) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec les conditions aux limites en temps :

$$\begin{cases} q_{(\tau=T)} = q_0 \\ \Lambda_{(\tau=0)} = 0 \end{cases}$$

Après avoir effectuée un changement de variable : $q(\tau) = K(\tau)\Lambda(\tau) + d(\tau)$, le découplage des équations obtenues permet donc d'aboutir au système :

$$\begin{cases} q = K\Lambda + d \\ \dot{\Lambda} + (-A^T + C^TQC)K\Lambda - C^TQCd - C^TQ\tilde{U}_d = 0 \\ \dot{d} + [A - KC^TQC]d + B\tilde{F}_d + KC^TQ\tilde{U}_d = 0 \\ \dot{K} + AK + KA^T - KC^TQC + GR^{-1}G^T = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

où,

$$\begin{cases} \Lambda(\tau = 0) = 0 \\ d(\tau = T) = q_0 \\ K(\tau = T) = 0 \end{cases}$$

Le système d'équations (3.28) est résolu comme pour la méthode de Riccati en temps direct en supposant que K est constante pour les temps d'étude longs. Cette hypothèse provoque des erreurs lorsque $\tau \rightarrow T_f$, c'est-à-dire, quand $t \rightarrow 0$.

Afin d'étudier la zone de mauvais résultats dans ce cas, l'équation différentielle de Riccati en temps rétrograde, c'est-à-dire la dernière équation du système (3.28), est résolue en utilisant la solution analytique exprimée à partir de la solution de son équation algébrique (section 3.1.3.1.II). La norme de la matrice $K(\tau)$ en fonction du temps est présentée sur la courbe 3.10.

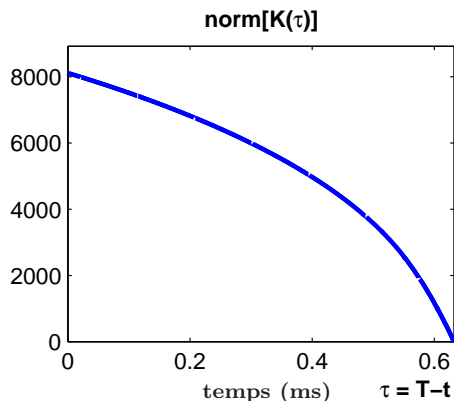


Figure 3.10 – Norme de la solution analytique de matrice de Riccati $K(\tau)$ dans le cas du module d'Young de référence $E = E_0$

La figure 3.10 montre que l'intervalle de temps d'étude dans ce cas n'est pas suffisamment long pour que la matrice $K(\tau)$ converge vers une matrice constante K_{τ_c} . Ceci est dû à la présence importante de valeurs propres proches de zéro du système rétrograde rendant la décroissance exponentielle très lente. La combinaison des deux approches basées sur l'équation algébrique de Riccati n'est donc pas retenue pour la suite.

IV. Choix de l'approche hybride, illustration et commentaire

Parmi les approches hybrides traitées dans cette partie, seule l'approche hybride basée sur le couplage de l'équation différentielle et de l'équation algébrique de Riccati peut fonctionner correctement dans le cas 1D et s'étendre aux cas de géométrie plus complexe. Afin de montrer les avantages de cette approche, elle est illustrée sur le même exemple que l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati (section 3.1.3.1). Il s'agit de la résolution du problème de base pour une poutre élastique avec des mesures non perturbées et le module d'Young de référence $E = E_0$.

La figure 3.11 présente les champs solution obtenus par l'approche hybride où le multiplicateur de Lagrange est de l'ordre de 10^{-5} , c'est-à-dire du même ordre de grandeur que dans le cas de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati (section 3.1.3.1.II), qui est prise comme référence. L'approche hybride permet donc de résoudre correctement le problème de base. De plus, elle est peu coûteuse et occupe peu de

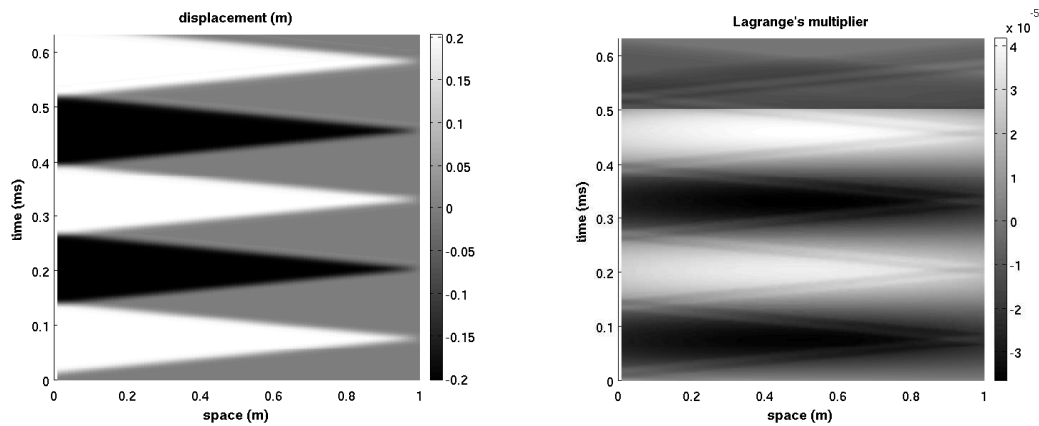


Figure 3.11 – Déplacement et multiplicateur de Lagrange associés obtenus par l'approche hybride avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$

mémoire. La comparaison de ces deux approches est présentée dans le tableau 3.3, dans lequel ΔN_t est le nombre de pas de temps correspondant à l'intervalle de temps $[T_f - \Delta t, T_f]$, où la matrice $K(t)$ ne peut pas être considérée comme constante. Puis, le tableau 3.4 donne un exemple numérique de leur coût de calcul, de leur mémoire occupée et de leur précision dans le cas du module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et d'un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$.

Approche		basée sur l'équation différentielle de Riccati	hybride
multiplier	des matrices $[2N_{ddl}, 2N_{ddl}]$	$7.N_t$	$\frac{\Delta N_t}{4} + 2.N_t$
diviser	des matrices $[2N_{ddl}, 2N_{ddl}]$	$N_t + 2$	$\Delta N_t + 2$
diagonaliser	des matrices $[2.N_{ddl}, 2.N_{ddl}]$	4	4
stocker	des matrices $[2.N_{ddl}, 2.N_{ddl}]$	$N_t + 10$	$\Delta N_t + 10$

Tableau 3.3 – Coût de calcul de différentes approches

Il est clair que la précision des deux approches est presque la même. Cependant, le coût de calcul et la mémoire occupée par l'approche hybride sont plus faibles que ceux de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati. Ces avantages s'accroissent avec l'augmentation de l'intervalle de temps d'étude car le nombre de pas de temps ΔN_t ne dépend pas du temps d'étude.

L'approche hybride basée sur les équations différentielle et algébrique de Riccati est donc choisie pour la résolution du problème de base dans le cas de l'élasticité.

Approches	basée sur l'équation différentielle de Riccati	hybride
Temps de résolution du problème de base	13min.CPU	3min.CPU
Mémoire occupée	1500MB	350MB
Valeur de fonction coût à $E = E_0$, mesures non perturbées	$1.5 * 10^{-8}$	$1.67 * 10^{-8}$

Tableau 3.4 – Comparaison numérique de différentes approches avec le module d'Young de référence $E = E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$

3.1.3.3 Études sur les champs solution du problème de base

Afin d'étudier les champs solution du problème de base, nous nous intéressons d'abord au cas du module d'Young de référence $E = E_0$ et avec des mesures non perturbées. C'est un cas idéal dans lequel la solution du problème de base coïncide avec celle du calcul direct pour la fabrication des conditions aux limites. Les champs solution obtenus sont en effet dynamiquement et cinématiquement admissibles et vérifient également la relation de comportement. Dans ce cas, la solution du problème de référence et celle du problème de base doivent être identiques puisque la première minimise la fonction coût en l'annulant. En revanche, les parties précédentes ont montrées que numériquement les erreurs entre ces champs solution ne sont pas nulles (Figures 3.9, 3.11). En fait, ces erreurs viennent de la différence entre les schémas d'intégration utilisés dans le problème direct pour la fabrication des mesures et dans le problème de base. Cependant, elles sont considérées comme suffisamment petites en les comparant aux erreurs obtenues pour la gamme de paramètres matériau ou de perturbations de mesures traitée.

Le deuxième cas intéressant à étudier est le cas d'un mauvais module d'Young et de mesures non perturbées. Ce module provoque une vitesse des ondes dans la barre différente de celle du calcul direct, c'est-à-dire que le comportement du matériau devient incompatible avec les mesures, qui sont fabriquées par le calcul direct. Alors, les champs solution du problème de base ne vérifient exactement ni la relation de comportement ni les mesures, autrement dit, les erreurs de modèle et de mesure ne sont plus nulles.

La figure 3.12 représente les champs de déplacement et de multiplicateur de Lagrange associé pour des mesures non perturbées et un module d'élasticité plus raide que celui de référence : $E = 1.5E_0$.

Les champs d'erreur du modèle sont illustrés figure 3.13.

Comme attendu, les erreurs ne sont pas nulles dans le cas d'un mauvais paramètre E . De plus, pour les mesures fabriquées par un chargement demi-sinus en effort, elles se localisent le long des trajets d'onde, autrement dit, les erreurs caractérisant le modèle se situent dans les zones où les informations du système se propagent.

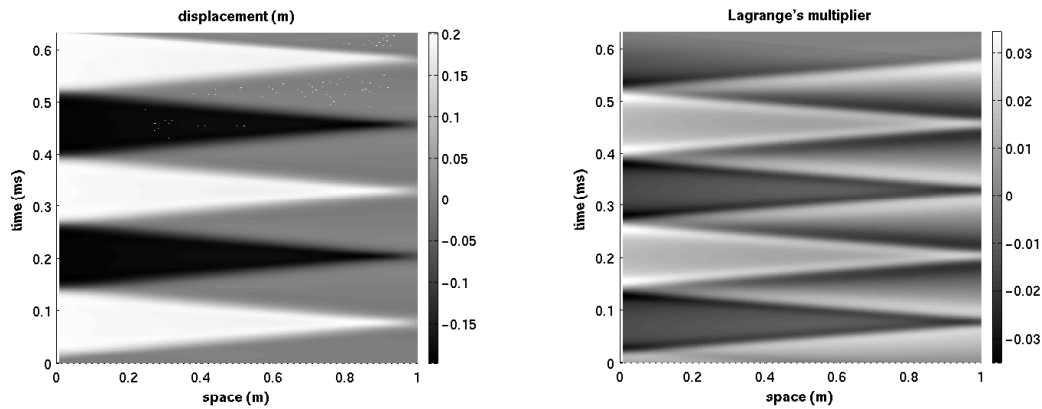


Figure 3.12 – Déplacement et multiplicateur de Lagrange associé obtenus par l'approche hybride avec un mauvais module d'Young $E = 1,5 E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$

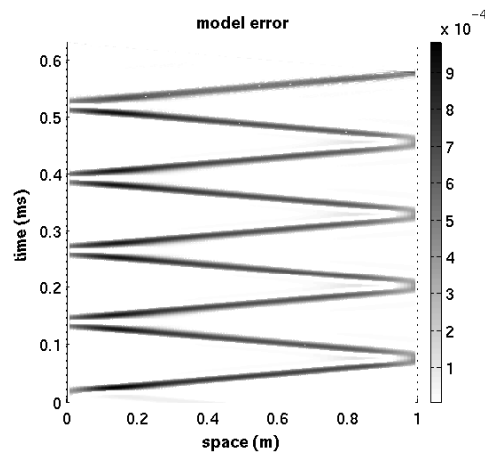


Figure 3.13 – Distribution de l'erreur de modèle en espace et en temps avec un mauvais module d'Young $E = 1,5 E_0$, des mesures non perturbées et un temps d'étude correspondant à 10 allers d'onde $T = 10 T_0$

3.1.4 Identification du module d'Young

Dans le cas d'une poutre élastique unidimensionnelle, où un seul paramètre matériau est à identifier, la fonction coût peut être présentée en fonction de ce paramètre, qui est ici le module élastique de la poutre.

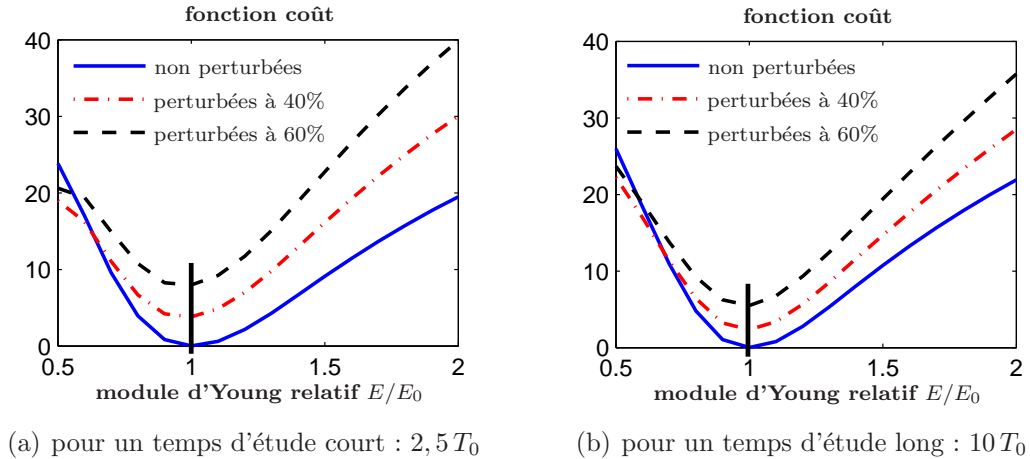


Figure 3.14 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbation - cas 1D élastique

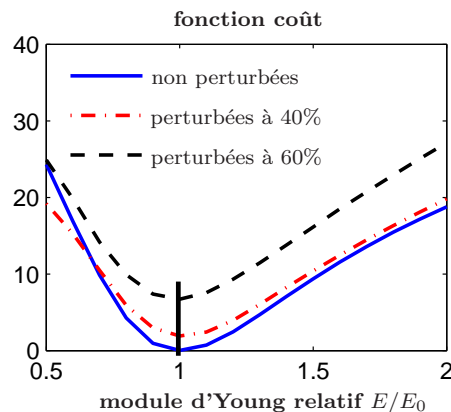


Figure 3.15 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbation pour un temps d'étude intermédiaire : $T = 3,5 T_0$ - cas 1D élastique

La figure 3.14 montre que le minimum de la fonction coût se trouve toujours à $E = E_0$ pour des perturbations de mesures jusqu'à 60% quelque soit le temps d'étude.

Afin de mettre en évidence la pertinence de l'approche proposée, l'exemple pour un temps d'étude intermédiaire $T = 3,5 T_0$ (section 2.4), par lequel l'échec des méthodes de traitement numérique développées dans [Fei03] a été mis en avant, est reconsidéré. Les résultats d'identification obtenus par cette approche sont présentés dans la figure

3.15. Il est clair que le module d'élasticité est bien identifié même pour des mesures perturbées à 60%, ce qui n'étaient pas le cas dans la figure 2.6.

En comparant la forme des fonctions coût pour différents temps d'étude (figure 3.14, 3.15), le module d'élasticité E semble mieux identifié pour des temps d'étude longs. De plus, l'écart entre les fonctions coût obtenues à partir des mesures perturbées à différents niveaux pour un temps d'étude long est plus petit que celui pour un temps d'étude court, autrement dit, plus le temps d'étude augmente, plus la fonction coût est insensible au bruit de mesure. Ceci s'explique par le fait que plus le temps d'étude augmente, plus il y a d'information sur le comportement du matériau qui est reçue.

La méthode d'identification proposée est donc robuste face aux incertitudes de mesures dans le cas 1D.

3.1.5 Comparaison avec les solutions obtenues par le filtre de Kalman

Afin de montrer la performance de la stratégie d'identification proposée dans ce contexte, sa solution est comparée à celle obtenue par une méthode stochastique classique : le filtre de Kalman étendu [Kal60] [Bry75] [And89] [Cor04]. L'exemple utilisé est celui décrit dans la section 3.1. Il s'agit d'un problème d'identification du module d'Young d'une poutre élastique à partir de conditions limites fortement perturbées. Il faut remarquer que cette méthode n'est *a priori* pas utilisable dans ce contexte car elle demande des informations *a priori* sur les perturbations de mesures. Cependant, pour pouvoir mettre en œuvre cette méthode, nous supposons que le niveau de perturbations est connu du fait de la fabrication numérique des essais.

Tout d'abord, les équations du problème sont projetées dans un espace Éléments Finis, avec U le vecteur de déplacement nodal :

$$\begin{cases} M\ddot{U} + EK_0U = \tilde{F}_d \\ \tilde{U}_d = \Pi U \end{cases} \quad (3.29)$$

où $K_0 = K/E$ et \tilde{U}_d, \tilde{F}_d correspondent aux mesures en déplacement et en effort.

La forme classique du filtre de Kalman est en temps discret. Le schéma des différences centrées est donc utilisé, ce qui permet d'aboutir au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - U_{n-1} - dt^2M^{-1}EK_0U_n + dt^2M^{-1}\tilde{F}_{dn} \\ \tilde{U}_{dn} = \Pi U_n \end{cases} \quad (3.30)$$

Afin d'adapter ce problème d'identification au problème de reconstruction d'état par filtrage de Kalman, le module E est considéré comme une inconnue en temps et ajouté au vecteur d'état du problème. Le calcul commence par une valeur initiale E_1 , qui est dans le cas général erronée ($E_1 \neq E_0$). Il faut également lui associer une équation d'état (3.31) dans l'idée que le paramètre matériau est indépendant du temps :

$$E_{t+1} = E_t \quad (3.31)$$

Le système (3.29) s'écrit donc sous une forme classique de contrôle à l'instant t :

$$\begin{cases} q_{t+1} = g(q_t, \tilde{X}_t) \\ \tilde{Y}_t = H q_t \end{cases} \quad (3.32)$$

avec,

$$\begin{cases} \tilde{Y} = \tilde{U}_d \\ \tilde{X} = \tilde{F}_d \\ H^T = [\Pi \ 0 \ 0] \\ q_t^T = [U_t \ U_{t-1} \ E_t] \\ g(q_n) = \begin{bmatrix} 2U_t - E_t dt^2 M^{-1} K_0 U_t - U_{t-1} + dt^2 M^{-1} \tilde{X}_t \\ U_t \\ E_t \end{bmatrix} \end{cases}$$

Dans le formalisme de l'automatique,

- \tilde{X} correspond aux entrées du système ;
- \tilde{Y} correspond aux sorties du système ;
- q est le vecteur d'état.

Ce système d'équations déterministes est tout à fait équivalent au problème de départ, il s'agit d'un problème mal posé. Le filtre de Kalman étendu consiste à prendre en compte l'erreur sur le module E à identifier, les perturbations sur les entrées et les sorties dans le calcul en écrivant le système (3.32) sous une forme stochastique :

$$\begin{cases} q_{t+1} = g(q_t, \tilde{X}_t) + n_q + n_v \\ \tilde{Y}_t = H q_t + n_w \end{cases} \quad (3.33)$$

dans laquelle, n_q , n_v , n_w représentent respectivement l'erreur de modèle, de l'entrée et de la sortie. Elles sont supposées être des bruits blancs, gaussiens avec des matrices de covariance Q , V , W .

À partir du système (3.33), qui est une forme classique du contrôle, le filtre de Kalman étendu (EKF) peut être appliqué. Son détail est décrit dans l'algorithme 1.

Dans un premier temps, les matrices de covariance Q , V , W sont supposées connues à partir de la fabrication numérique de l'essai. Les résultats d'identification par le filtre de Kalman étendu pour différents niveaux de perturbation des mesures sont présentés figure 3.16 dans laquelle la valeur d'intérêt est le module d'élasticité à l'instant final $E(t_f)$.

Il est clair que le module d'élasticité $E(t)$ converge de façon très rapide vers le module de référence E_0 pour des mesures non perturbées. La convergence est plus lente pour des mesures perturbées à 10%. Cela veut dire que, dans ce cas, il faut exploiter plus d'informations de mesures et du modèle afin d'identifier correctement le paramètre matériau. En revanche, la méthode de filtrage de Kalman diverge pour des mesures fortement perturbées, même si l'initialisation est effectuée à proximité du module de référence E_0 . Elle n'est alors plus efficace pour ce problème.

Dans un deuxième temps, nous étudions le problème dans le cas où aucune information sur les bruits n'est connue. Le filtre de Kalman étendu est donc appliqué pour

Algorithme 1 Filtre de Kalman étendu (EKF)

• **Initialisation :**

$$\hat{q}_0 = \mathbb{E}[q_0]$$

$$\hat{P}_0 = \mathbb{E}[(q_0 - \hat{q}_0)(q_0 - \hat{q}_0)^T]$$

• **À l'instant $t_i \in [0, T_f]$:**

1. Étape de prédiction :

$$q_i^- = g(q_i, \tilde{X}_i)$$

$$P_i^- = F_i P_{i-1} F_i^T + Q + V$$

où $F_i = \nabla_q g(q_i)$

2. Étape de correction :

$$q_i = q_i^- + G_i(\tilde{Y}_i - H q_i^-)$$

$$P_i = (I_d - G_i H) P_i^-$$

où $G_i = P_i^- H^T (H P_i^- H^T + W)^{-1}$

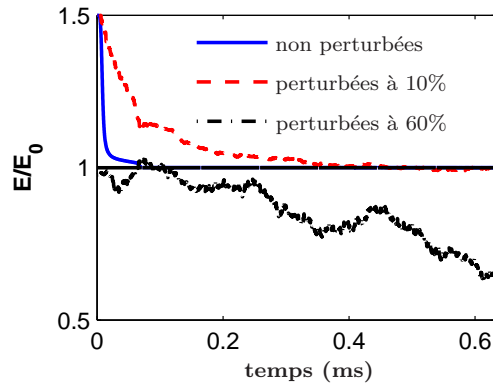


Figure 3.16 – Modules d'élasticité obtenus par le filtre de Kalman étendu pour des mesures perturbées à différents niveaux

différentes matrices de covariance. La figure 3.17 présente la convergence de la méthode pour des mesures perturbées à 10% avec deux hypothèses de matrice de covariance : l'une correspond à un bruit de 2% et l'autre correspond à un bruit de 10%. Il est clair que la convergence de la méthode dépend fortement du choix de ces matrices. Autrement dit, les résultats d'identification peuvent être complètement faux lorsque les matrices de covariance sont mal choisies.

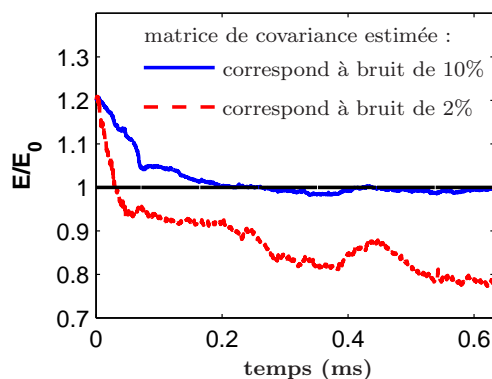


Figure 3.17 – Modules d'élasticité obtenus par le filtre de Kalman étendu pour des mesures perturbées à 10 % - Influence du choix des matrices de covariance

Il faut noter qu'il existe sans doute des versions plus performantes du filtre de Kalman par exemple le filtre de Kalman sans biais (Unscented Kalman Filters, UKF) [Jul97] [Cor05]. Son idée réside dans l'estimation des matrices de covariance P_i sans utiliser le gradient F_i (voir l'algorithme 1). De plus, la précision obtenue pour cette version est d'ordre 3, ce qui est plus élevé que pour le filtre de Kalman étendu (précision d'ordre 1). Cependant, la connaissance sur les bruits est toujours importante pour ces versions du filtre de Kalman. C'est pourquoi elles sont difficiles à appliquer dans notre contexte.

3.1.6 Conclusion sur le cas 1D élastique

Cette partie a consisté dans un premier temps à proposer une méthode de traitement robuste du problème de base, qui est l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati. La difficulté principale rencontrée réside dans la résolution de cette équation. Afin de s'en affranchir, différentes méthodes de la littérature ont été testées avant de porter notre choix sur la solution analytique exprimée à partir de la solution de l'équation algébrique de Riccati ou la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Une difficulté demeure cependant du fait du coût de calcul et de l'espace nécessaire en mémoire. C'est pourquoi, dans un deuxième temps, une approche hybride, qui est la combinaison de l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati et celle basée sur l'équation algébrique de Riccati, est étudiée dans l'objectif de diminuer le coût de calcul.

Une fois le problème de base résolu, l'identification à l'aide de la stratégie basée sur l'ERdC modifiée devient très robuste face aux perturbations de mesures. Sa comparaison avec la méthode des filtres de Kalman étendus a encore une fois confirmé sa robustesse dans notre contexte.

3.2 Extension au cas 2D élastique linéaire

3.2.1 Présentation du problème d'identification

Pour traiter des essais réels sur les composites stratifiés, il est nécessaire de s'intéresser aux cas $2D$ ou $3D$. Le premier pas dans ce sens est de s'assurer que les méthodes développées dans le cas linéaire, qui seront la base des algorithmes en non linéaire, restent pertinents dans le cas $2D$.

Toujours dans l'idée de traiter les essais aux barres d'Hopkinson, l'exemple considéré dans cette section est celui d'une plaque élastique, dont deux bords opposés sont libres et deux autres sont sollicités en efforts et en déplacements. Notre objectif est l'identification du module d'Young et du coefficient de Poisson de la plaque à partir de mesures redondantes sur ces deux bords opposés (figure 3.18).

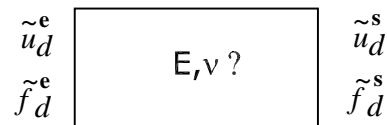


Figure 3.18 – Problème d'identification dans le cas 2D élastique

3.2.1.1 Fabrication des mesures

Ces mesures sont fabriquées comme dans le cas 1D par un calcul direct avec des paramètres matériau E_0, ν_0 (tableau 3.1) et un effort de traction appliqué (figure 3.19) dont la valeur maximum est de 200 kN/m .

La plaque utilisée est de dimension ($10\text{cm} \times 50\text{cm}$) et d'épaisseur 1 cm . Après avoir maillé la plaque par (5×50) éléments quadratiques de taille égale et utilisé un schéma d'intégration explicite de Newmark, la simulation directe fournira des mesures exactes pour le problème d'identification. Puis, des perturbations de type gaussien sont ajoutées à ces mesures exactes afin de tester la robustesse de la stratégie proposée. Dans ce cas, les perturbations sont indépendantes les unes des autres en temps et en espace, tandis qu'elles n'étaient indépendantes qu'en temps dans le cas 1D. Un exemple des mesures obtenues pour différents niveaux de perturbation au point M de la plaque est présenté figure 3.20.

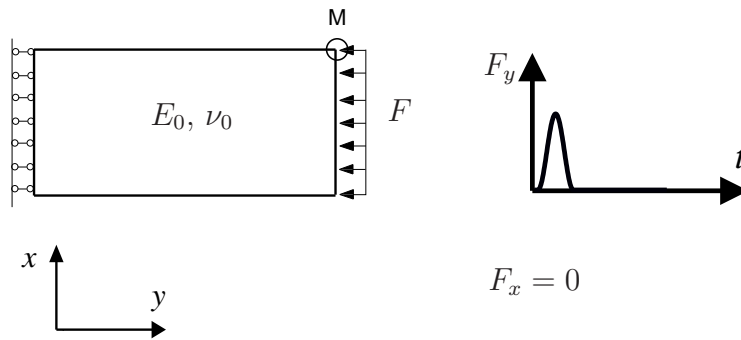
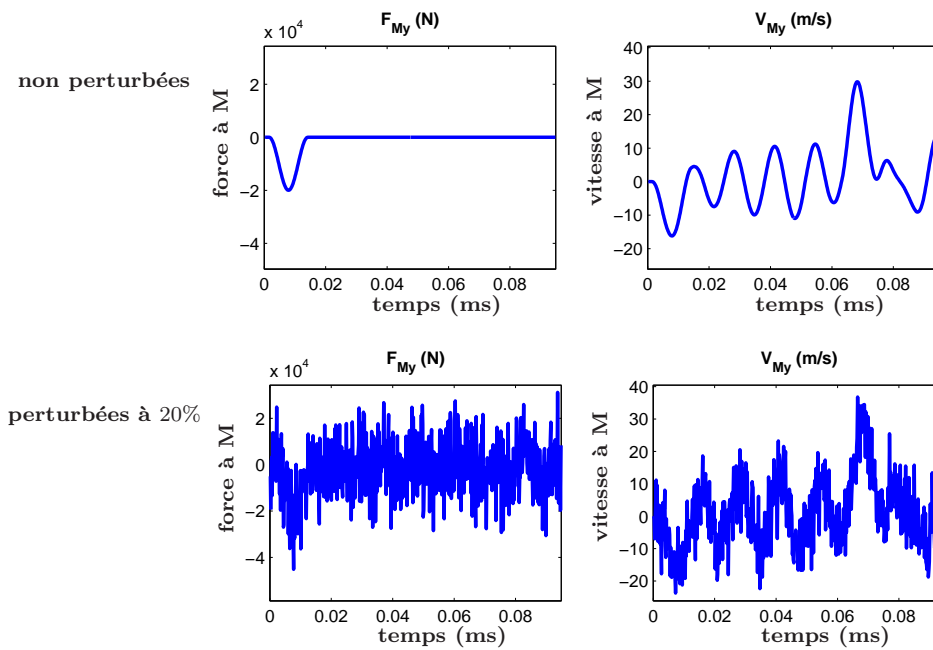


Figure 3.19 – Essai numérique dans le cas 2D élastique

Figure 3.20 – Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% à un coin de la plaque pour un temps d'étude $T = 0,095 \text{ ms}$

3.2.1.2 Influence des paramètres sur les conditions aux limites

À la différence du problème 1D élastique linéaire, le problème inverse dans ce cas consiste à identifier deux paramètres matériau : E et ν . Il est donc nécessaire d'étudier la sensibilité des conditions aux limites aux paramètres. La figure 3.21 représente les déplacements au point M obtenus pour le même calcul direct décrit dans la section 3.2.1.1 avec différents jeux de paramètres E et ν .

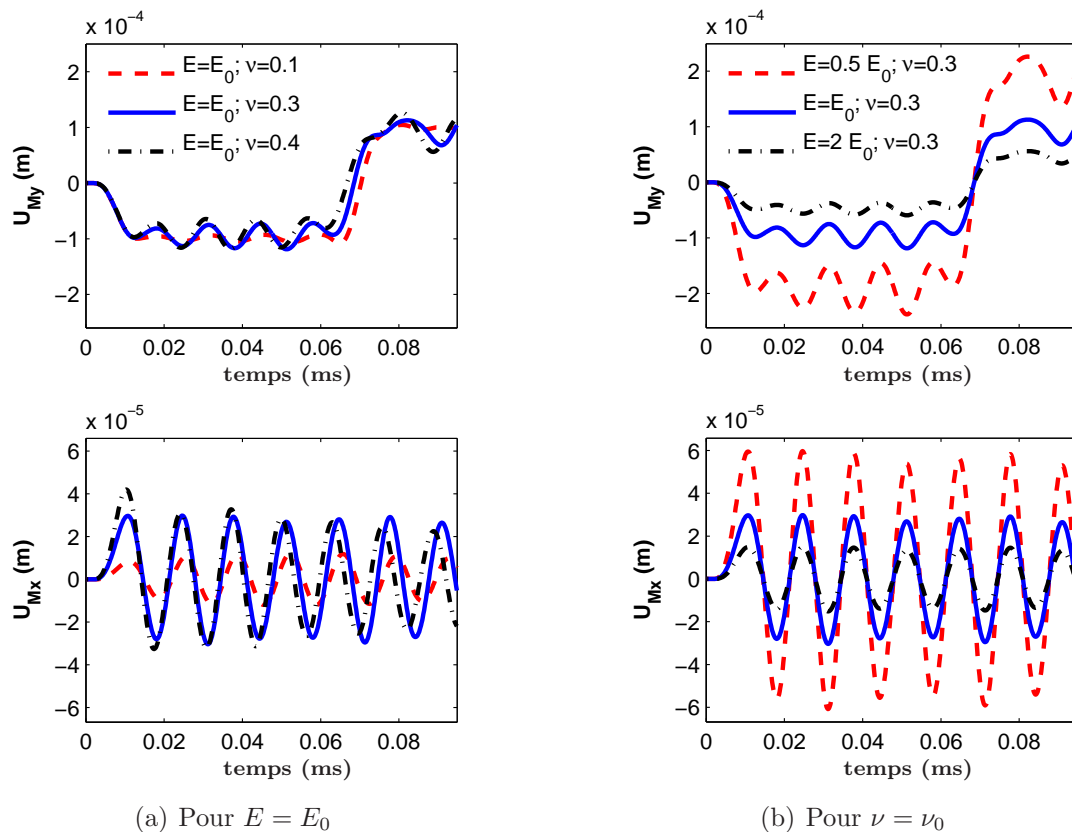


Figure 3.21 – Déplacements obtenus avec différents jeux de paramètres E et ν au coin M de la plaque

Il est clair que l'influence du coefficient de Poisson sur les mesures est beaucoup moins importante que celle du module d'Young pour l'essai de type traction-compression tel que celui des barres d'Hopkinson. Il est donc probable que le coefficient de Poisson soit difficile à identifier à partir d'un essai aux barres d'Hopkinson.

3.2.2 Problème de base

La formulation du problème de base dans ce cas est tout à fait équivalente à celle du cas 1D élastique. Le problème de base reste donc un problème de minimisation sous contraintes linéaires pour un jeu de paramètres E et ν . L'approche basée sur l'équation

de Riccati est alors utilisée pour le résoudre. Il faut noter qu'en terme de mise en œuvre de l'approche dans un code EF sous Matlab, le programme est le même que celui dans le cas 1D élastique.

Afin de valider la qualité de la solution obtenue, le problème de base est résolu dans un cas où les solutions de référence sont connues. C'est le cas des paramètres matériau de référence ($E = E_0$, $\nu = \nu_0$) avec des mesures non perturbées. La figure 3.22 représente les déplacements à un coin de la plaque pour le problème de base et le calcul de référence. Il est clair que ces deux champs solution obtenus sont identiques, ce qui confirme la qualité de l'approche basée sur l'équation de Riccati pour la résolution du problème de base.

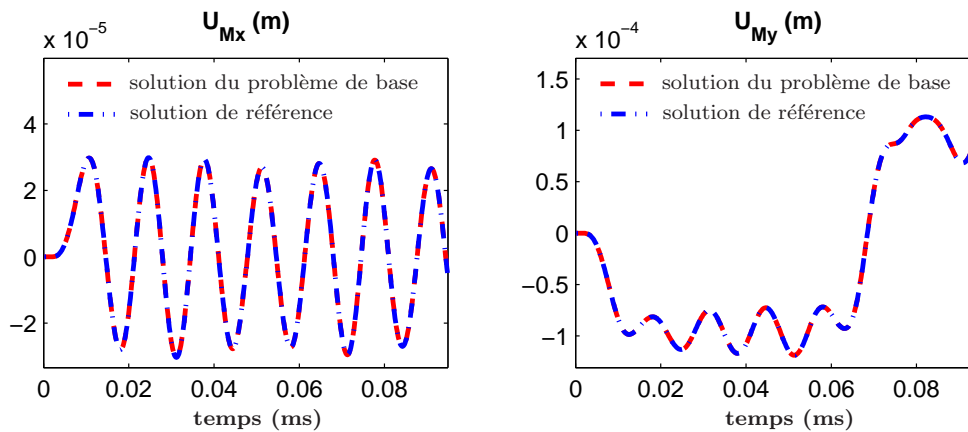


Figure 3.22 – Déplacements au point M dans le cas des paramètres matériau de référence et de mesures non perturbées

3.2.3 Identification des paramètres matériau élastique

La stratégie d'identification est appliquée à l'exemple décrit précédemment (section 3.2.1.1). Les courbes d'identification sont présentées figure 3.23 pour des mesures perturbées à différents niveaux. La figure représente deux coupes de la surface représentant la fonction coût, la première pour le coefficient de Poisson de référence $\nu = \nu_0$, la deuxième pour le module d'Young de référence $E = E_0$.

Cette figure montre que la stratégie proposée permet d'identifier le module d'Young pour des mesures perturbées jusqu'à 20%. Cependant, cette méthode fonctionne moins bien pour l'identification du coefficient de Poisson. L'explication réside dans le fait que ce coefficient influence moins les conditions aux limites du fait de la nature de l'essai, comme cela a été expliqué précédemment. Ce point se retrouve également dans la comparaison des fonctions coût en fonction du module E et du coefficient ν . Pour des mesures non perturbées, la première est de l'ordre de 10^{-3} , tandis que la deuxième est de l'ordre de 10^{-5} . Autrement dit, les erreurs associées à la fonction coût caractérisent

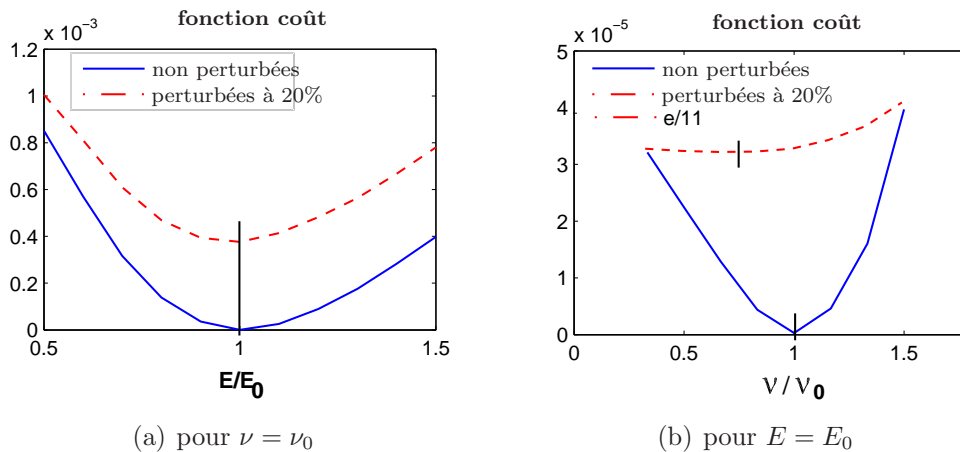


Figure 3.23 – Fonctions coût pour des mesures perturbées à différents niveaux - cas 2D élastique

essentiellement le module d'Young. Il est donc difficile d'identifier le coefficient de Poisson à partir de ce type de l'essai.

3.2.4 Conclusion sur le cas 2D élastique

Cette partie a mis en évidence la relative simplicité de l'implantation de la stratégie d'identification pour un cas de géométrie plus complexe en s'appuyant sur un code existant (sous Matlab) au LMT Cachan. Cela permet de traiter un cas avec un nombre de degrés de liberté plus important que dans le cas de la poutre unidimensionnelle. Aucune difficulté numérique supplémentaire n'a été rencontrée dans ce cas, confirmant ainsi la robustesse de l'approche basée sur l'équation de Riccati pour le traitement des instabilités rencontrées dans la résolution du problème de base par la méthode de l'état adjoint. De plus, les résultats d'identification sont également encourageants même si le coefficient de Poisson n'est pas bien identifié, ce qui est principalement une question de choix d'un essai pertinent.

3.3 Extension au cas 1D élastique hétérogène

Dans cette section, l'exemple d'une poutre élastique hétérogène, constituée de quatre blocs dont les modules sont différents et présenté dans la section 2.5, est reconsidéré (figure 3.24). Le problème d'identification consiste à chercher les modules d'Young de la poutre en connaissant leur distribution spatiale.

L'objectif de cette partie ne réside pas dans l'étude de l'extensibilité de la méthode de résolution du problème de base proposée au cas plus complexe d'une poutre hétérogène. Il se concentre sur un algorithme performant de minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau.



Figure 3.24 – Poutre élastique hétérogène par bloc

3.3.1 Stratégie de minimisation de la fonction coût

Dans [Fei03], une méthode de descente à pas fixe est utilisée. Cependant, comme illustré au chapitre 2, cette méthode risque de converger lentement, ce qui conduit à un nombre important de résolutions du problème de base. Le coût de calcul devient en conséquence trop important.

Afin d'améliorer ce point faible, une combinaison de la méthode de descente à pas optimale et de la méthode BFGS [Bry75] [Cai94] est étudiée. L'avantage de cette version est de profiter des points forts de chaque méthode en éliminant leurs points faibles. En effet, la méthode de descente à pas optimale en se basant sur le gradient de la fonction coût permet de converger rapidement lorsqu'on est loin de la solution. Cependant, elle est de moins en moins efficace lorsqu'on s'approche de la solution car le gradient devient de plus en plus petit. En revanche, une méthode de type quasi-Newton comme la méthode BFGS converge de façon quadratique à proximité de la solution. Au contraire, en se basant sur le calcul du hessien de la fonction coût, la méthode BFGS risque de diverger loin de la solution lorsque le hessien n'est pas forcément défini positif.

La minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau est effectuée d'abord par la méthode de descente à pas optimal, puis par la méthode BFGS lorsque le gradient de la fonction coût est inférieure à une valeur choisie, par exemple 10^{-2} dans notre algorithme. Le calcul est arrêté si la différence relative entre les paramètres matériau obtenus pour deux itérations successives vérifie un critère d'arrêt proposé. Le détail de la stratégie de minimisation est décrit dans l'algorithme 2.

La convergence de la stratégie combinée de la méthode de gradient à pas optimal et de la méthode BFGS est d'abord présentée dans le cas de mesures non perturbées pour des temps d'étude court et long (figure 3.25). Leur coût de calcul ainsi que la précision de leurs résultats sont regroupées dans le tableau 3.5 afin de comparer avec les résultats obtenus dans [Fei03].

Il est clair que la stratégie combinée est beaucoup plus performante que la méthode de descente à pas fixe. Le gain obtenu dans ce cas au niveau du nombre de résolutions du problème de base est d'environ six fois, ce qui est tout à fait remarquable en temps de calcul. Ce gain est d'autant plus important dans des cas plus complexes.

En comparant les résultats d'identification et le nombre de résolutions du problème de base de la stratégie combinée en fonction du temps d'étude, nous observons de meilleurs résultats pour un temps d'étude long. Ceci s'explique par le fait que plus le temps d'étude augmente, plus il y a d'informations sur le comportement du matériau dans les mesures, et donc les paramètres matériau sont mieux identifiés.

Algorithme 2 Stratégie de minimisation de la fonction coût par rapport aux modules des blocs E

• **Initialisation** : $E = E_{ini}$

Calcul de la fonction coût $J(E_{ini})$ et de son gradient $\nabla_E J(E_{ini})$ par la résolution du problème de base ;

• **Minimisation de la fonction coût par la méthode de descente à pas optimal** :

boucle

→ Calcul de la fonction coût $J(E)$ et de son gradient $\nabla_E J(E)$;

→ Direction de descente donnée par la direction opposée du gradient de la fonction coût ;

→ Recherche linéaire : critère d'Amijo \Rightarrow nouveau jeu de paramètre E ;

→ critère d'arrêt : $\nabla_E J(E) < 10^{-2}$

fin boucle

• **Minimisation de la fonction coût par la méthode BFGS** :

boucle

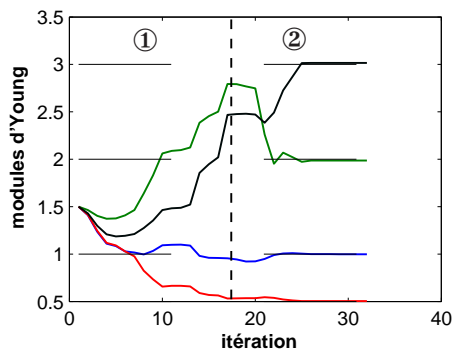
→ Calcul de la fonction coût $J(E)$ et de son gradient $\nabla_E J(E)$;

→ Approximation du hessien de la fonction coût et calcul de la direction de descente ;

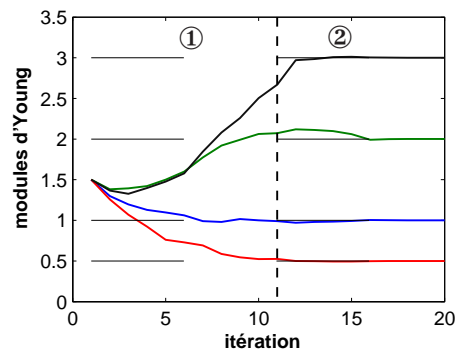
→ Recherche linéaire : critère d'Amijo \Rightarrow nouveau jeu de paramètre E ;

→ Critère d'arrêt : $\frac{E_i - E_{i-1}}{E_{ini}} < 10^{-5}$;

fin boucle



(a) Pour un temps d'étude : $T = 3T_0$



(b) Pour un temps d'étude : $T = 10T_0$

Figure 3.25 – Convergence de la stratégie combinée pour des mesures non perturbées
 ① : méthode de gradient à pas optimal
 ② : méthode BFGS

Méthodes	Descente à pas fixe pour $T = 1,5 T_0$ (selon [Fei03])	Stratégie combinée pour $T = 3T_0$	Stratégie combinée pour $T = 10 T_0$
Itération	500	32	20
Nombre de résolution du problème de base	500	80	38
Erreur	1%	1%	0.2%

Tableau 3.5 – Coût de calcul des méthodes de minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau (T_0 est le temps d'un aller d'onde)

3.3.2 Remarque

L'application de la méthode d'ERdC modifiée au problème de recalage de masse et de raideur des structures en vibration [Lad94] est effectuée de manière itérative. Chaque itération se compose de deux étapes suivantes :

- Localisation des zones les plus erronées de la structure ;
- Correction des zones les plus erronées.

La première étape consiste à estimer la qualité des paramètres obtenus à l'étape précédente en utilisant la carte d'erreur, afin de sélectionner les paramètres les plus faux pour les corriger dans la deuxième étape. C'est alors une façon d'ajouter une information supplémentaire sur le modèle à ce problème de recalage mal posé, la régularisation du problème se faisant ainsi au travers de l'algorithme de recalage.

Pour appliquer cette méthode à l'identification des modules d'élasticité dans le cas d'une poutre hétérogène en dynamique transitoire, il est possible de localiser les zones les plus fausses à l'aide de la carte d'erreur ou du gradient de la fonction coût. Cependant, comme illustré figure 3.13, les erreurs ou les informations sur le modèle se propagent le long des trajets d'onde. Ainsi les zones correspondant aux bons paramètres peuvent être polluées par l'erreur des zones avec des mauvais paramètres. De plus, le fait de calculer des erreurs en espace intégrées sur le temps peut fournir des informations tout à fait fausses. Par exemple, dans le cas de la poutre unidimensionnelle présenté figure 3.13, en appliquant le processus de localisation ci-dessus, les modules d'élasticité de la poutre sont erronés à un même niveau sur les quatre blocs pour un temps d'étude $T = 10T_0$, où T_0 est le temps d'un aller d'onde. Cependant, pour un temps d'étude $T = 9,5T_0$, une moitié de la poutre a les modules plus faux que l'autre. Ce processus de localisation et de correction ne peut donc pas être appliqué directement dans le cas dynamique transitoire.

3.3.3 Conclusion sur le cas 1D élastique hétérogène

Cette partie a permis de mettre en œuvre une stratégie de minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau à partir des champs solution du

problème de base. La méthode proposée est une combinaison de la méthode de descente à pas optimal et de la méthode BFGS afin de profiter de leurs avantages respectifs. Cette méthode s'avère beaucoup plus performante que la méthode de descente à pas fixe utilisée dans le travail précédent [Fei03].

3.4 Conclusion

Ce chapitre s'est intéressé au traitement numérique robuste de la stratégie d'identification basée sur la méthode d'ERdC modifiée dans le cas de l'élasticité. Pour cela, il faut avoir une méthode permettant de s'affranchir des problèmes d'instabilité rencontrés dans la résolution du problème de base et une stratégie performante pour minimiser la fonction coût par rapport aux paramètres matériaux.

En effet, la résolution du problème de base par la méthode de l'état adjoint conduit à un système d'équations directes et adjointes couplées avec des conditions initiales et finales en temps, ce qui pose un problème d'instabilité liée à la présence de solutions exponentielles croissantes parmi les solutions de l'équation homogène associée à ce système d'équations. Dans ce chapitre, une méthode issue du contrôle optimal basée sur l'équation différentielle de Riccati, qui consiste à séparer les équations directes et adjointes par l'introduction de nouvelles variables, est proposée. Elle semble robuste quelques soit le temps d'étude. De plus, dans le cas de l'élasticité, une amélioration du coût de calcul par une approche appelée "hybride" est étudiée. Elle est également testée dans le cas 2D sans poser de difficulté supplémentaire.

Une fois le problème de base bien résolu, la stratégie d'identification basée sur l'ERdC fonctionne bien, même pour des mesures perturbées jusqu'à 60%.

Enfin, la question de la stratégie de minimisation par rapport aux paramètres matériau a été étudiée dans le cas plus complexe d'une poutre élastique hétérogène. La stratégie utilisée, qui est la combinaison d'une méthode de descente à pas optimal et une méthode de type BFGS, s'avère performante dans le contexte traité.

Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

Dans ce chapitre, la formulation du problème d'identification dans le cas non linéaire est étudiée [Ngu06] ainsi que son traitement numérique robuste adapté. Puis, leur application au cas viscoplastique est effectuée. Les résultats d'identification obtenus encourageants sont présentés à la fin du chapitre.

Sommaire

4.1	Présentation du problème d'identification	107
4.2	Formulation du problème inverse	108
4.2.1	Formulation	108
4.2.2	Erreur de modèle	109
4.2.3	Processus de résolution du problème inverse	110
4.3	Méthode LATIN pour le problème direct	111

4.3.1	Séparation des difficultés	111
4.3.2	Approche itérative en deux étapes	112
4.4	Résolution du problème de base	115
4.4.1	Séparation des difficultés	115
4.4.2	Approche itérative en deux étapes	116
4.4.3	Caractéristique de la direction de recherche	118
4.4.4	Conclusion sur la résolution du problème de base	120
4.5	Application au cas 1D viscoplastique	122
4.5.1	Présentation du problème d'identification	122
4.5.2	Formulation du problème inverse	127
4.5.3	Résolution du problème de base	127
4.5.4	Identification des paramètres viscoplastiques	139
4.6	Conclusion	141

Encouragée par la robustesse de la méthode d'identification basée sur l'ERdC modifiée dans le cas élastique face à des mesures fortement perturbées, l'extension de la méthode au cas non linéaire est étudiée dans ce chapitre. La difficulté principale réside dans le choix de l'erreur de modèle et dans le développement d'une méthode de résolution du problème de base associé. Ce problème de base est un problème non linéaire de propagation d'ondes direct et adjoint couplé avec des conditions initiales et finales en temps, appelé simplement "problème aux deux bouts non linéaire". Il pose non seulement le même problème d'instabilité liée au couplage des problèmes direct et adjoint que dans le cas élastique, mais aussi la difficulté associée au comportement non linéaire. Afin d'utiliser l'approche basée sur l'équation de Riccati développée dans le chapitre 3, il est nécessaire d'approximer le problème de base non linéaire par des problèmes linéaires successifs. Comme l'approche basée sur l'équation de Riccati traite le problème de façon globale en temps, chaque approximation doit être effectuée en tous points de la structure et sur tout l'intervalle de temps.

Dans un premier temps, une première formulation de la stratégie d'identification ainsi que sa méthode de traitement numérique seront développées de façon générale pour un comportement non linéaire décrit par des variables internes. Puis, dans un second temps, la stratégie sera appliquée à un cas de comportement non linéaire, où la question de la rupture n'intervient pas, le cas de la viscoplasticité.

4.1 Présentation du problème d'identification

Nous nous plaçons ici dans le contexte d'identification à la rupture, dans lequel seuls les paramètres des lois d'évolution caractérisant l'effet de vitesse sont recherchés. Les lois d'état, quant à elles, sont normalement identifiées à partir d'essais statiques. Comme en élasticité (section 3.2.1.1), l'exemple traité dans ce chapitre est celui d'une poutre unidimensionnelle avec des mesures redondantes en effort et en déplacement à ses deux extrémités : \tilde{f}_d et \tilde{u}_d .

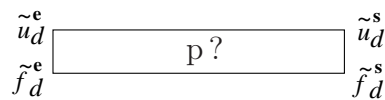


Figure 4.1 – Problème d'identification d'un comportement non linéaire décrit par des variables internes

Les équations régissant le système sont :

- Équation d'équilibre :

$$\int_0^L [\rho \ddot{u} u^* + \sigma \epsilon(u^*)] dx - \left| f_d u^* \right|_0^L = 0 \quad \forall u^* \quad (4.1)$$

- Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \tilde{u}_d & \text{à } x &= \{0, L\} \\ f_d(x, t) &= \tilde{f}_d & \text{à } x &= \{0, L\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

- Conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, & \dot{u}(x, 0) &= \dot{u}_0 \\ \epsilon_p(x, 0) &= 0, & X(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

- Relation de comportement :

Nous étudions dans cette partie un problème d'identification de paramètres pour une classe de comportements matériau non linéaires de type (visco)plastique. Pour cette classe, il est toujours possible d'écrire les lois d'état sous une forme linéaire par une formulation normale (voir par exemple [Lad85] [Lad99a] pour le détail). La relation de comportement dans ce cas s'écrit alors :

- Lois d'état :

$$\begin{aligned} \sigma &= E(\epsilon - \epsilon_p) \\ Y &= hX \end{aligned} \quad (4.4)$$

- Lois d'évolution :

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p \\ -\dot{X} \end{bmatrix} = B_{(p)} \left(\begin{bmatrix} \sigma \\ Y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} B_{1(p)}(\sigma, Y) \\ B_{2(p)}(\sigma, Y) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

4.2 Formulation du problème inverse

4.2.1 Formulation

Le problème inverse dans ce cas est mal posé comme dans le cas élastique à cause des conditions aux limites redondantes et bruitées \tilde{f}_d, \tilde{u}_d . De manière analogue à ce qui a été fait dans le cas du problème élastique, une formulation se basant sur la minimisation de l'Erreur en Relation de Comportement modifiée [Lad83] associée au problème inverse est introduite. Comme seul le paramètre p caractérisant les lois d'évolution est recherché, les équations d'équilibre, les lois d'état et les conditions initiales sont à mettre dans le groupe fiable. Les lois d'évolution et les conditions aux limites sont considérées comme non fiables, ce qui amène à la séparation en deux groupes suivante (tableau 4.1).

<i>Fiable</i>	<i>Non fiable</i>
Équilibre : $-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0$	Cond. aux limites : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d
Loi d'état : $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p)$ $Y = hX$	Loi d'évolution : $\dot{\epsilon}_p = B_1(\sigma, Y)$ $-\dot{X} = B_2(\sigma, Y)$
Cond. initiales : $u(x, 0) = u_0, \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0$	

Tableau 4.1 – Relations fiables et non fiables dans le cas non linéaire

Le problème inverse s'exprime alors :

Trouver les champs $u, \sigma, Y, \epsilon_p, X, u_d, f_d$ et le paramètre p minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \mathcal{D}(\sigma, Y, \epsilon_p, X) dx + \frac{\alpha}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L + \frac{\beta}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L \right\} dt \quad (4.6)$$

sous les contraintes :

$$u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad Y = h X$$

où $\mathcal{D}(\sigma, Y, \epsilon_p, X)$ est l'erreur de modèle liée au fait que les lois d'évolution sont relâchées.

4.2.2 Erreur de modèle

Plusieurs choix pour l'erreur de modèle sont possibles, parmi lesquels, citons :

I. Erreur aux moindres carrés

Cette erreur est définie simplement par l'écart aux moindres carrés sur les lois d'évolution, qui sont relâchées dans la résolution du problème inverse :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \left[\dot{\epsilon}_p - B_1(\sigma, Y) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[-\dot{X} - B_2(\sigma, Y) \right]^2 \quad (4.7)$$

Bien qu'elle soit celle qui s'appuie le moins sur un contenu mécanique, cette erreur est la plus simple à mettre en œuvre.

II. Erreur au sens de Drucker

L'usage de l'erreur au sens de Drucker se limite aux matériaux non adoucissant pour garantir sa positivité, ce qui ne permet pas de traiter la rupture. C'est pourquoi, cette erreur n'est plus étudiée dans le cadre de ce travail.

III. Erreur de Legendre-Fenchel

L'erreur de Legendre-Fenchel, qui se base sur les potentiels de dissipation associés aux lois d'évolution, semble posséder le plus fort contenu mécanique. Comme ce qui a été fait dans le cadre de l'estimation d'erreur [Lad99b], l'erreur de Legendre-Fenchel est formulée de la façon suivante :

$$\mathcal{D} = \varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X}) + \varphi^*(\sigma, Y) - \sigma : \dot{\epsilon}_p - R(-\dot{X}) \quad (4.8)$$

où $\varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X})$ et $\varphi^*(\sigma, Y)$ sont les potentiels de dissipation, qui sont définis par exemple pour un matériau viscoplastique de Prandtl-Reuss comme suit :

$$\begin{cases} \varphi^*(\sigma, Y) = \frac{k_v}{n_v + 1} \left\langle \frac{|\sigma| - Y - R_0}{k_v} \right\rangle_+^{n_v + 1} \\ \varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X}) = R_0 \dot{X} + k_v \frac{n_v}{n_v + 1} (\dot{X})^{n_v + 1} + \Psi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X}) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $\Psi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{p})$ la fonction indicatrice du convexe $e : |\dot{\epsilon}_p| - \dot{p} \leq 0, Tr[\dot{\epsilon}_p] = 0$

IV. Choix de l'erreur de modèle

Pour tous les types d'erreur présentés, le problème formulé est un problème de minimisation non linéaire sous contraintes, ce qui est beaucoup plus compliqué que le problème inverse quadratique linéaire du cas élastique (chapitre 3 - section 3.1.3).

Afin d'appliquer ce qui a été fait dans ce dernier aux cas non linéaires, nous cherchons à exprimer le problème (4.6) sous la forme d'une minimisation d'une fonction quadratique sous des contraintes non linéaires, puis à le linéariser pour obtenir un problème quadratique linéaire.

Pour cela, les deux groupes de variables suivants sont d'abord définis :

- ϵ_p et X vérifiant les lois d'état :
$$\begin{cases} \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p) \\ X = hY \end{cases}$$
- ϵ_p^e et X^e vérifiant les lois d'évolution :
$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{X}^e \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \sigma \\ Y \end{bmatrix}$$

L'erreur de modèle sera exprimée en fonction de ces groupes de variables. Pour cela, l'erreur en dissipation semble difficile à utiliser, tandis que l'erreur aux moindres carrés est bien adaptée. Deux variantes de cette dernière peuvent être considérées :

a. Moindres carrés sur la *vitesse* des variables internes :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e)^2 + \frac{1}{2} \left[-\dot{X} - (-\dot{X}^e) \right]^2 \quad (4.10)$$

b. Moindres carrés sur les variables internes :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\epsilon_p - \epsilon_p^e)^2 + \frac{1}{2} \left[-X - (-X^e) \right]^2 \quad (4.11)$$

Parmi ces deux erreurs aux moindres carrés, la première représente mieux le fait que les lois d'évolution sont relâchées dans la résolution du problème inverse, puisque les lois d'évolution portent sur la vitesse des variables internes. La deuxième, qui est basée sur les variables internes elles-mêmes, moyennera en fait l'erreur liée aux lois d'évolution relâchées et sera donc moins sensible aux paramètres. Ainsi, le problème inverse formulé à partir de la deuxième erreur aux moindres carrés fournira des résultats d'identification moins bons que celui basé sur la première. Cela est illustré plus loin (section 4.5.3).

4.2.3 Processus de résolution du problème inverse

La résolution du problème inverse (4.6) est effectuée comme dans le cas de l'élasticité par un processus en deux étapes :

- résolution du problème de base pour des paramètres p fixés ;
- évaluation de la fonction coût J (problème 4.6) grâce aux champs solution du problème de base afin d'identifier les paramètres du matériau en la minimisant.

La difficulté principale réside dans la résolution du problème de base, qui est un problème de minimisation sous contraintes en non linéaire. La discussion dans la section 1.5.2 du chapitre 1 a montré la nécessité d'utiliser une méthode tel que la méthode LATIN [Lad85] [Lad99a], qui est développé pour le problème direct, pour linéariser le problème sur tout l'intervalle de temps d'étude afin d'appliquer ce qui a été développé dans le cas élastique.

Une fois la solution du problème de base déterminée, la minimisation de la fonction coût par rapport aux paramètres matériau sera réalisée comme dans le cas de l'élasticité par l'approche combinée d'une méthode de descente à pas optimal et de la méthode BFGS sans poser aucune difficulté supplémentaire.

Avant de discuter de l'adaptation de la méthode LATIN au problème inverse (section 4.4), la méthode LATIN est d'abord présentée pour le problème direct (section 4.3).

4.3 Méthode LATIN pour le problème direct

La méthode LATIN [Lad85], c'est-à-dire *L*Arge *T*ime *I*Ncrement *m*ethod en anglais, ou *méthode à grand incrément de temps* en français, a été développée au LMT Cachan depuis une vingtaine d'années pour la résolution de problèmes directs non linéaires. Une présentation complète de cette méthode se trouve dans [Lad99a]. Dans cette partie, seuls les points principaux de la méthode LATIN seront présentés pour la simulation d'une poutre encastree d'un côté et soumise à un chargement en effort de l'autre.

L'idée de la méthode LATIN est de partir d'une approximation parfois grossière de la solution du problème en tous points de la structure et sur tout l'intervalle de temps, puis de chercher à améliorer automatiquement la qualité de la solution à travers une succession d'itérations. Nous disposons donc d'une solution approchée en tous points de l'espace et sur tout l'intervalle de temps. Le caractère non incrémental de la méthode LATIN est sa différence principale par rapport aux méthodes classiques [Bat82] [Sim98], qui consistent à construire la solution du problème pas de temps par pas de temps.

La méthode LATIN se base sur les trois principes suivants :

principe 1 : séparation des difficultés ;

principe 2 : réalisation d'une approche itérative en deux étapes ;

principe 3 : utilisation d'approximations temps-espace pour le traitement du problème global défini sur l'espace - temps.

Parmi ces principes, le dernier semble difficile à appliquer aux problèmes en dynamique, car l'espace et le temps sont couplés dans ce cas. Seuls les deux premiers seront utilisés dans ce travail.

4.3.1 Séparation des difficultés

Afin d'éviter un traitement simultané des caractères non linéaire et global en temps du problème, le premier principe de la méthode LATIN consiste à séparer les équations

en deux groupes :

- un groupe d'équations locales en variables d'espace, éventuellement non linéaires. Il s'agit ici des lois d'évolution.

L'ensemble des solutions de ce premier groupe d'équation définit un espace, noté Γ :

$$\Gamma = \left\{ \hat{s} = (\hat{\epsilon}_p, \hat{X}, \hat{\sigma}, \hat{Y}) \mid \hat{s} \text{ vérifie (4.5)} \right\} \quad (4.12)$$

- un groupe d'équations linéaires, éventuellement globales en variables d'espace.

Il se compose de :

- l'équation d'équilibre ;
- les lois d'état ;
- les conditions initiales ;
- les conditions aux limites.

L'ensemble des solutions du deuxième groupe d'équations définit un espace d'admissibilité noté A_d :

$$A_d = \left\{ s = (\epsilon_p, X, \sigma, Y, u, f_d, u_d) \mid \begin{array}{l} s \text{ vérifie (4.1), (4.3), (4.4), } u_d = \tilde{u}_d \text{ à } x = 0, \\ \text{et } f_d = \tilde{f}_d \text{ à } x = L \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

La solution s_{ex} du problème direct est alors à l'intersection de ces deux espaces :

$$s_{ex} = \Gamma \cap A_d \quad (4.14)$$

4.3.2 Approche itérative en deux étapes

Le second principe de la méthode LATIN consiste à proposer une résolution itérative entre les deux espaces A_d et Γ pour s'approcher au fur et à mesure de la solution s_{ex} du problème. Ceci est effectué en deux étapes pour chaque itération. Supposons la solution à l'itération n connue, une solution s_{n+1} plus proche de s_{ex} est cherchée à travers :

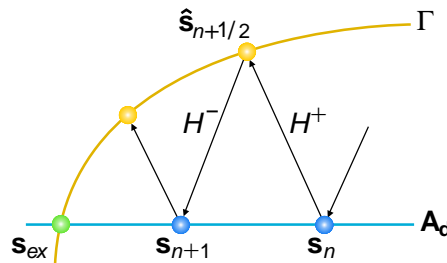


Figure 4.2 – Représentation schématique du principe de la méthode LATIN

a. Étape locale :

Dans cette étape, les équations non linéaires et locales en espace de l'espace Γ sont résolues suivant une direction de recherche notée H^+ . Ceci correspond en fait à un espace linéaire qui transmet les informations de la solution de l'espace A_d de l'itération précédente à l'espace Γ . Dans cet espace,

- les données sont : $s_n = (\epsilon_{pn}, X_n, \sigma_n, Y_n)$;
- les variables cherchées sont : $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p, \hat{X}, \hat{\sigma}, \hat{Y})$;
- les équations à résoudre s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_p \\ -\hat{X} \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_p - \epsilon_{pn} \\ -(\hat{X} - X_n) \end{bmatrix} = H^+ \begin{bmatrix} \hat{\sigma} - \sigma_n \\ \hat{Y} - Y_n \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

La direction de recherche H^+ déterminée à l'étape précédente peut être choisie comme une :

- Direction verticale : $(H^+)^{-1} = 0$
Ceci implique : $\begin{cases} \hat{\sigma} = \sigma_n \\ \hat{Y} = Y_n \end{cases}$
Les éléments $\hat{s}_{n+1/2}$ de l'espace Γ sont alors calculés de manière explicite avec cette direction de recherche.
- Direction conjuguée à la direction de descente H^- : $H^+ = (H^-)^T$
L'avantage de cette direction est de permettre une convergence plus rapide de la stratégie itérative LATIN [Lad99a]. Cependant, elle nous conduit à résoudre une équation non linéaire en chaque point de l'espace et du temps après avoir utilisé un schéma d'intégration d'ordre 1, par exemple la θ -méthode.
- D'autres directions de recherche H^+ sont considérées dans la littérature. Cependant, elles sont moins efficaces que la direction verticale en terme de mise en œuvre et que la direction conjuguée à la direction de descente en terme de vitesse de convergence. Les études détaillées de ces directions de recherche se trouvent dans [Lad99a].

b. Étape globale :

La recherche des nouveaux éléments s_{n+1} dans l'espace A_d est réalisée suivant une direction H^- à partir de l'espace Γ . Dans cet espace,

- les données sont : $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p, \hat{X}, \hat{\sigma}, \hat{Y})$;
- les variables cherchées sont : $s_{n+1} = [\epsilon_{pn+1}, X_{n+1}, \sigma_{n+1}, Y_{n+1}]$

- les équations à résoudre sont :

$$\begin{cases} -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0 \\ \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p) \\ Y = h X \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{p_{n+1}} - \hat{\epsilon}_p \\ -(\dot{X}_{n+1} - \hat{X}) \end{bmatrix} = H^- \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \hat{\sigma} \\ Y_{n+1} - \hat{Y} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.16)$$

La direction de recherche H^- est déterminée à partir des éléments de l'espace Γ . Le système d'équation obtenu est donc global en espace mais *linéaire*. Il est donc résolu en utilisant la méthode des EF et un schéma d'intégration temporelle tel que la méthode des trapèzes ou la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Le choix de la direction de recherche H^- a fait l'objet de nombreuses études [Lad99a], qui montrent que l'utilisation de la direction tangente par rapport à l'espace Γ conduit à la convergence la plus rapide pour la stratégie itérative LATIN.

c. Test de convergence :

Pour une méthode itérative comme la méthode LATIN, il est nécessaire d'obtenir une estimation de la qualité de la solution calculée afin d'avoir un critère d'arrêt. Différents indicateurs d'erreur sont étudiés dans [Lad99a]. Leur idée est la même. En fait, les éléments s_n de l'espace A_d vérifient toujours l'équation d'équilibre et les lois d'état. La qualité de la solution globale est alors estimée à partir de la non-vérification des équations non linéaires de l'espace Γ , qui correspondent aux lois d'évolution. Cette non satisfaction peut être quantifiée :

- grâce à l'erreur en dissipation :

$$\epsilon^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L \left[\varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X}) + \varphi^*(\sigma, Y) - \sigma : \dot{\epsilon}_p + R\dot{X} \right] dx}{\int_0^T \int_0^L \left[\varphi(\dot{\epsilon}_p, -\dot{X}) + \varphi^*(\sigma, Y) \right] dx dt} \right] \quad (4.17)$$

- grâce à l'introduction des éléments s_{n+1} dans les lois d'évolution :

$$\begin{cases} \epsilon_1^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L [\dot{\epsilon}_p - B_1(\sigma, Y)]^2 dx}{\int_0^T \int_0^L [(\dot{\epsilon}_p)^2 + (B_1(\sigma, Y))^2] dx dt} \right] \\ \epsilon_2^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L [\dot{X} - B_2(\sigma, Y)]^2 dx}{\int_0^T \int_0^L [\dot{X}^2 + (B_2(\sigma, Y))^2] dx dt} \right] \end{cases} \quad (4.18)$$

Entre ces deux types d'indicateur d'erreur, le premier présente le plus fort contenu mécanique, tandis que le deuxième est le plus facile à mettre en œuvre. Leur utilisation dépend alors de chaque problème.

4.4 Résolution du problème de base

Afin de simplifier l'écriture, nous considérons uniquement par la suite l'erreur de modèle de type des moindres carrés sur la vitesse des variables internes (4.10). Le cas de l'erreur aux moindres carrés sur les variables internes (4.11) est tout à fait similaire.

Le problème de base pour le premier type d'erreur quadratique de modèle (4.10) s'écrit sous la forme suivante :

Trouver les champs $u, \sigma, Y, \epsilon_p, X, \dot{\epsilon}_p^e, \dot{X}^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} \left[(\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e)^2 + (-\dot{X} + \dot{X}^e)^2 \right] dx + \frac{\alpha}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L + \frac{\beta}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) &= 0, \\ \sigma &= E(\epsilon - \epsilon_p), \\ Y &= h X, \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{X}^e \end{bmatrix} &= B \left(\begin{bmatrix} \sigma \\ Y \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

De façon similaire à ce qui a été fait dans le cas du problème direct, l'application de la méthode LATIN à la résolution du problème de base est basée sur les deux principes suivants :

4.4.1 Séparation des difficultés

Dans la résolution du problème direct par la méthode LATIN, l'espace Γ est défini par l'ensemble des éléments vérifiant les lois d'évolution. Cependant, pour le problème inverse, ces lois d'évolution sont relâchées. Ceci pose donc une question de fond sur la séparation des équations du problème : "Que deviennent les espaces A_d et Γ dans le cadre du problème inverse?"

Pour répondre à cette question, l'idée initiale de la méthode LATIN est reprise. Elle consiste à définir l'espace Γ comme l'ensemble des éléments vérifiant les équations non linéaires, qui ne sont pas forcément les lois d'évolution. Les deux espaces Γ et A_d caractérisant le problème de base associé au problème inverse sont alors introduits comme suit :

- L'espace Γ est défini comme l'ensemble des solutions des équations non linéaires avec ϵ_p^e et X^e . Il représente un espace des lois d'évolution relâchées :

$$\Gamma = \left\{ \hat{s} = (\hat{\epsilon}_p^e, \hat{X}^e, \hat{\sigma}, \hat{Y}) \mid \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_p^e \\ -\hat{X}^e \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \right) \right\} \tag{4.20}$$

- L'espace A_d est défini comme l'ensemble des solutions de l'équation d'équilibre, des conditions initiales, des lois d'état qui minimisent la fonction coût J ci-dessus (problème (4.19)).

$$A_d = \left\{ s = (\epsilon_p, X, \epsilon_p^e, X^e, \sigma, Y, u, f_d, u_d) \mid s \text{ minimise } J \text{ et vérifie (4.1), (4.3), (4.4)} \right\} \quad (4.21)$$

La solution s_{ex} du problème de base correspond à l'intersection de ces deux espaces :

$$s_{ex} = \Gamma \cap A_d \quad (4.22)$$

4.4.2 Approche itérative en deux étapes

Pour mettre en œuvre la résolution du problème de base par la méthode LATIN, il nous faut tout d'abord avoir un champ solution pour initialiser la stratégie itérative. Les trois initialisations suivantes ont été considérées :

– **Par le calcul élastique :**

La méthode classique d'initialisation est d'injecter la solution du problème de base pour le matériau élastique linéaire. Ce choix risque de créer une solution très fautive à la première étape, ce qui a pour conséquence de faire diverger la stratégie itérative LATIN dès la première itération. Une amélioration possible est d'initialiser par un champ solution d'amplitude 80% de celui obtenu par le calcul élastique.

– **Par une résolution du problème de base avec des forces appliquées :**

La deuxième façon d'initialiser est de résoudre le problème avec uniquement des forces appliquées. Le problème devient alors un problème direct.

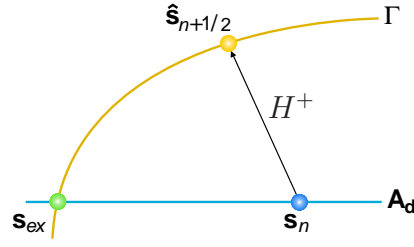
– **Par la solution du problème de base précédent :**

La résolution du problème inverse se divise en deux étapes : résoudre le problème de base avec des paramètres fixés du matériau, puis changer les paramètres grâce au gradient calculé. L'initialisation peut donc être effectuée en utilisant la solution du problème de base associé aux paramètres précédents.

Une fois l'initialisation choisie, comme dans le cas du problème direct, l'approximation de la solution s_{ex} est obtenue à l'aide d'un schéma itératif. En supposant que les éléments des espaces Γ et A_d sont connus à l'itération n , nous cherchons à déterminer les éléments à l'itération $(n + 1)$ plus proches de la solution du problème s_{ex} en deux étapes :

a. Étape locale

La résolution *locale en espace des équations non linéaires* de l'espace Γ est réalisée en utilisant les informations transmises de l'espace A_d de l'itération n à travers une direction de recherche H^+ (figure 4.3).

Figure 4.3 – Étape locale à l'itération n

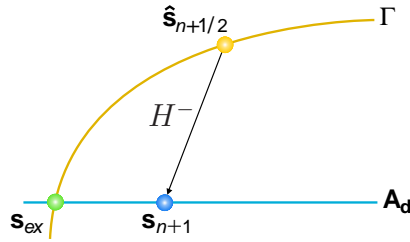
Dans cette étape,

- les données sont : $s_n = (\epsilon_{pn}^e, X_n^e, \sigma_n, Y_n)$;
- les variables cherchées sont : $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p^e, \hat{X}^e, \hat{\sigma}, \hat{Y})$;
- les équations à résoudre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_p^e \\ -\hat{X}^e \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_p^e - \epsilon_{pn}^e \\ -(\hat{X}^e - X_n^e) \end{bmatrix} = H^+ \begin{bmatrix} \hat{\sigma} - \sigma_n \\ \hat{Y} - Y_n \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

b. Étape globale

Une fois la solution \hat{s} de l'espace Γ trouvée, les nouveaux éléments s_{n+1} de l'espace A_d sont déterminés suivant une direction de recherche H^- (figure 4.4). Pour simplifier l'écriture, les variables s_{n+1} de cette étape sont écrites sans l'indice de l'itération ($n+1$).

Figure 4.4 – Étape globale à l'itération n

Dans cette étape,

- les données sont : $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p^e, \hat{X}^e, \hat{\sigma}, \hat{Y})$;
- les variables cherchées sont : $s_{n+1} = (\epsilon_p^e, X^e, \sigma, Y)$;
- le problème à résoudre est :

Trouver les champs $(u, \sigma, Y, \epsilon_p, X, \epsilon_p^e, X^e, u_d, f_d)$ minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e)^2 + (-\dot{X} + \dot{X}^e)^2] dx + \frac{\alpha}{2} |(f_d - \tilde{f}_d)^2|_0^L + \frac{\beta}{2} |(u_d - \tilde{u}_d)^2|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0,$$

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p),$$

$$Y = h X$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e - \dot{\hat{\epsilon}}_p^e \\ -\dot{X}^e - (-\dot{\hat{X}}^e) \end{bmatrix} = H^- \begin{bmatrix} \sigma - \hat{\sigma} \\ Y - \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Comme on l'a montré précédemment, la résolution itérative du problème de base (4.19), qui est un problème de minimisation d'une fonction coût quadratique sous contraintes non linéaires, en deux étapes, en linéarisant son espace de contraintes, ne correspond pas au cas de la stratégie LATIN pour le problème direct. Une question peut alors se poser : "Les directions de recherche ont-elles besoin de caractéristiques supplémentaires?"

La réponse est "oui". Il faut que la direction de descente H^- de l'étape locale vers l'étape globale soit tangente par rapport à l'espace Γ des lois d'évolution relâchées (4.20). La démonstration est présentée dans la section suivante (section 4.4.3).

4.4.3 Caractéristique de la direction de recherche

Afin de démontrer les caractéristiques de la direction de recherche H^- pour que la solution obtenue par la résolution itérative soit la solution du problème de base, il est nécessaire de faire la comparaison des équations obtenues.

I. Système d'équation du problème de base

Afin de ne pas alourdir l'écriture, le problème de base simplifié suivant est étudié :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } (u, y) \text{ minimisant :} \\ \text{sous les contraintes :} \end{array} \quad \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u - y)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\alpha}{2} (u - \tilde{u})^2 ds \right\} dt$$

$$\begin{cases} \dot{u} + g(u, y) = 0 \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Le Lagrangien associé au problème de minimisation sous contraintes s'écrit donc :

$$L = \int_0^T \int_{\Omega} (u - y)^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha (u - \tilde{u})^2 ds dt + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda (\dot{u} + g(u, y)) d\Omega dt$$

La condition de stabilité du Lagrangien ($\delta L = 0$) permet alors d'aboutir au système d'équations à chaque instant $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[-\dot{\lambda} + (u - y) + \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) \lambda \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \alpha (u - \tilde{u}) ds = 0 \\ -(u - y) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \dot{u} + g(u, y) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.26)$$

avec des conditions aux limites en temps : $\begin{cases} u(x, 0) = u_0 \\ \lambda(x, T) = 0 \end{cases}$

II. Système d'équation du problème itérative en deux étapes

Le problème (4.25) est résolu par la stratégie itérative issue de la méthode LATIN en deux étapes :

a. Étape locale :

Calcul des variables $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{y}, \hat{g})$ vérifiant la contrainte non linéaire du problème (4.25) suivant une direction de recherche H^+ avec les variables s_k déterminées à l'itération k :

$$\hat{g} = g(\hat{u}, \hat{y}) \quad \text{avec : } \hat{g} - g_k = H^+ \begin{bmatrix} \hat{u} - u_k \\ \hat{y} - y_k \end{bmatrix}$$

b. Étape globale :

Calcul des variables $s_{n+1} = (u, y, g)$ minimisant :

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u - y)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\alpha}{2} (u - \tilde{u})^2 ds \right\} dt \quad (4.27)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{u} + g = 0 \\ g - \hat{g} = H^- \begin{bmatrix} u - \hat{u} \\ y - \hat{y} \end{bmatrix} \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

où H^- est une direction de recherche calculée à partir des quantités de l'étape globale.

Le Lagrangien associé au problème (4.27) s'écrit :

$$L = \int_0^T \int_{\Omega} (u - y)^2 d\Omega dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha (u - \tilde{u})^2 ds dt + \int_0^T \int_{\Omega} \lambda \left(\dot{u} + H_1^-(u - \hat{u}) + H_2^-(y - \hat{y}) + \hat{g} \right) d\Omega dt$$

La stationarité du Lagrangien nous conduit au système d'équations suivant pour chaque l'instant $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} [-\dot{\lambda} + (u - y) + H_1^- \lambda] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \alpha(u - \tilde{u}) ds = 0 \\ -(u - y) + H_2^- \lambda = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \dot{u} + H_1^-(u - \hat{u}) + H_2^-(y - \hat{y}) + \hat{g} = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.28)$$

c. À la convergence :

Une fois que la stratégie itérative a convergé, les champs solution à l'étape locale "concident" avec ceux de l'étape globale :

$$\begin{cases} \hat{u} = u \\ \hat{y} = y \\ \hat{g} = g(\hat{u}, \hat{y}) = g(u, y) \end{cases} \quad (4.29)$$

Le système d'équations (4.28) devient alors :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} [-\dot{\lambda} + (u - y) + H_1^- \lambda] d\Omega + \int_{\partial\Omega} \alpha(u - \tilde{u}) ds = 0 \\ -(u - y) + H_2^- \lambda = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \dot{u} + g(u, y) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.30)$$

III. Caractéristique de la direction de recherche

Après avoir comparé les équations des systèmes (4.26) et (4.30), nous constatons que pour qu'ils soient équivalents, la direction de recherche H^- doit être la dérivée de la fonction non linéaire $g(u, y)$ par rapport aux variables u, y :

$$\begin{cases} H_1^- = \frac{\partial g}{\partial u} \\ H_2^- = \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad (4.31)$$

Autrement dit, pour que la solution obtenue par la stratégie itérative issue de la méthode LATIN soit la solution du problème de base, la direction de recherche de l'étape globale vers l'étape locale doit être tangente à l'espace Γ défini par les contraintes non linéaires du problème de base.

4.4.4 Conclusion sur la résolution du problème de base

L'application de la méthode LATIN à la résolution du problème de base demande une modification par rapport au problème direct car les lois d'évolution ne sont plus vérifiées. Pour ce problème, les relations sont séparées en deux groupes qui définissent les deux espaces suivants :

- L'espace Γ , dont les éléments vérifient les équations non linéaires des lois d'évolution relâchées. Une relation de comportement relâchée a ainsi été introduite.
- L'espace A_d , dont les éléments vérifient exactement les équations d'équilibre, les lois d'état, les conditions initiales en minimisant l'ERdC modifiée.

La résolution est alors itérative entre ces deux espaces afin de trouver leur intersection correspondant à la solution du problème. Plus précisément, la détermination à l'itération $(n + 1)$ de la solution s_{n+1} "meilleure" que celle de l'itération n est effectuée comme suit :

- À partir de l'espace A_d de l'itération n , nous cherchons les éléments \hat{s} de l'espace Γ suivant une direction de recherche H^+ ;
- Puis, à partir de ces éléments \hat{s} , les éléments s_{n+1} de l'espace A_d sont déterminés suivant une direction de recherche H^- , qui doit être tangente par rapport à l'espace Γ .

Cependant, l'application de cette stratégie de résolution pour différents comportements matériau peut demander des techniques adaptées, surtout dans le cas de la rupture matériau. Dans la partie suivante (section 4.5), un cas en viscoplasticité, qui est un comportement non linéaire ne présentant pas les difficultés associées à la rupture, est tout d'abord étudié.

4.5 Application au cas 1D viscoplastique

4.5.1 Présentation du problème d'identification

Dans le problème traité dans cette partie, nous cherchons à identifier les paramètres k_v, n_v caractérisant les lois d'évolution d'un matériau viscoplastique à écrouissage isotrope de Prandtl-Reuss. Le comportement de ce type de matériau s'écrit comme suit :

+ Lois d'état :

$$\begin{aligned}\sigma &= E(\epsilon - \epsilon_p) \\ R &= h p\end{aligned}\tag{4.32}$$

+ Loi d'évolution :

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p \\ -\dot{p} \end{bmatrix} = B \left(\begin{bmatrix} \sigma \\ R \end{bmatrix} \right) = \left\langle \frac{|\sigma| - R - R_0}{k_v} \right\rangle_+^{n_v} \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{|\sigma|} \\ -1 \end{bmatrix}\tag{4.33}$$

L'essai utilisé est celui d'une poutre unidimensionnelle sollicitée en dynamique dont les conditions aux limites en effort et en déplacement \tilde{f}_d, \tilde{u}_d sont mesurées à ses deux extrémités sur un intervalle de temps $[0, T]$.

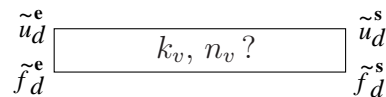


Figure 4.5 – Problème d'identification dans le cas 1D viscoplastique

4.5.1.1 Fabrication des mesures

Comme dans le cas élastique (section 3.1.1), un calcul direct est effectué pour créer les mesures exactes en simulant une poutre de longueur $L = 0,5 m$, de section $S = 1 cm^2$, encadrée d'un côté et soumise à un chargement en effort de l'autre côté, dont la valeur maximum est $F_{max} = 35 kN$ (figure 4.6). Les paramètres matériau utilisés dans ce calcul sont les valeurs de référence du matériau décrites dans le tableau 4.2.

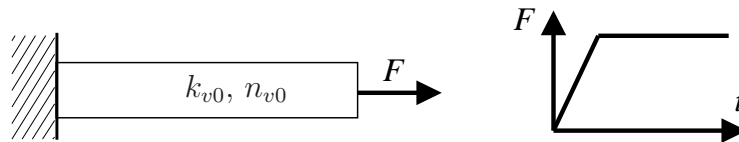


Figure 4.6 – Essai numérique dans le cas 1D viscoplastique

Pour ce calcul, deux méthodes de résolution sont possibles : soit une méthode incrémentale, soit la méthode LATIN pour le problème direct. Cependant, pour garder

Module d'Young :	$E = 200 \text{ GPa}$	Seuil de plasticité :	$R_0 = 84 \text{ MPa}$
Coef. de Poisson :	$\nu = 0,3$	Coef. d'érouissage :	$h = 6400 \text{ MPa}$
Densité :	$\rho = 800 \text{ kg.m}^{-3}$	Coef. de viscosité :	$k_{v0} = 1$
Célérité des ondes :	$C = 15\,800 \text{ m.s}^{-1}$		$n_{v0} = 3,2$

Tableau 4.2 – Propriétés matériau viscoplastique

l'objectivité de la stratégie d'identification il est nécessaire que la fabrication des mesures et l'identification utilisent des schémas d'intégration différents. Comme une méthode de type LATIN est utilisée dans le problème inverse, une méthode incrémentale utilisant un schéma de Newmark en déplacement et une θ -méthode ($\theta = 0,5$) pour les variables internes est donc retenue dans le calcul direct.

À partir du calcul direct, les efforts et les déplacements obtenus aux deux extrémités de la poutre sont utilisés comme conditions aux limites du problème d'identification. La robustesse de la méthode d'identification est ensuite testée en ajoutant une perturbation aux conditions limites en vitesse et en effort. Un exemple de conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% pour un chargement de type plateau est présenté figure 4.7.

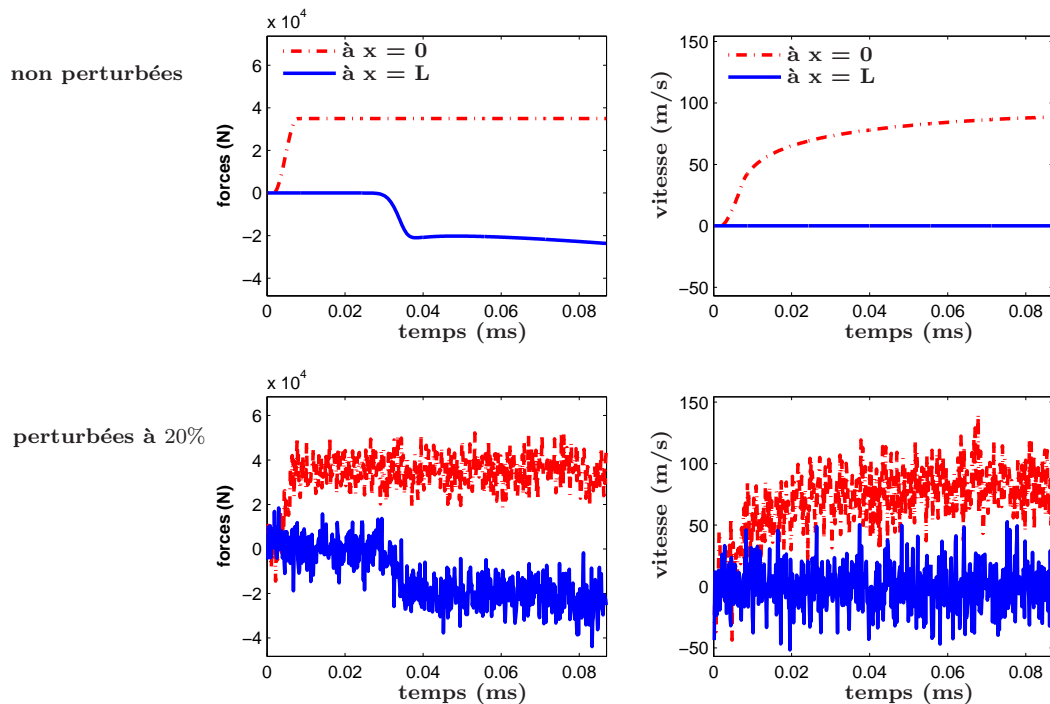


Figure 4.7 – Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% pour un chargement de type plateau en effort - cas 1D viscoplastique

4.5.1.2 Remarque sur le choix du type de chargement

Deux types du chargement sont considérés dans cette partie : un demi-sinus et un plateau. Comme on le verra plus loin (section 4.5.4), ce choix influence beaucoup les résultats d'identification. Cette influence peut en fait être prévue à partir de l'énergie dissipée dans la poutre en fonction du temps (figure 4.8).

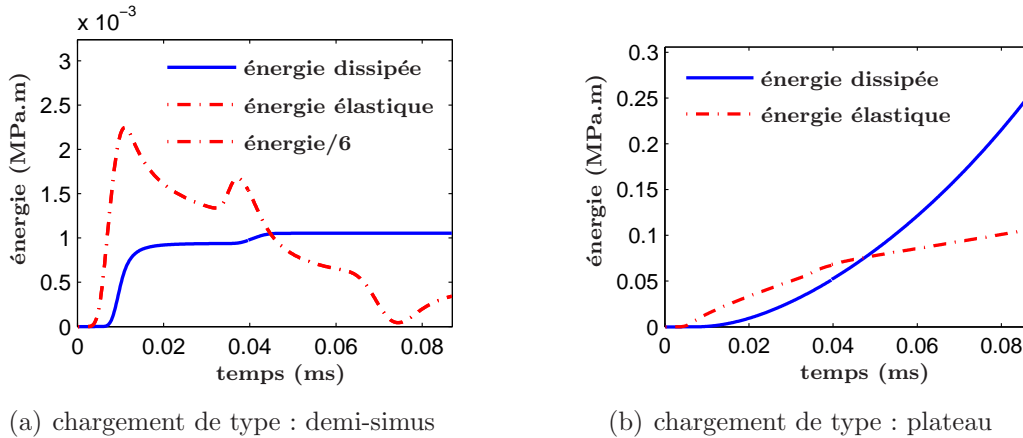


Figure 4.8 – Énergie dissipée et énergie élastique obtenues par des calculs directs pour différents types de chargement - cas 1D viscoplastique

Le figure 4.8.a représente l'énergie dissipée dans la poutre pour un chargement de type demi-sinus. Elle n'évolue que dans deux parties : au début du temps d'étude correspondant au pic du chargement, ainsi que vers l'instant $t = 0,04 \text{ ms}$ correspondant au moment où l'onde arrive à l'encastrement et où la valeur de la contrainte double à cette extrémité. Pour le reste, elle n'évolue presque pas. Ainsi la plasticité ne se concentre en espace que vers les deux extrémités de la poutre. De plus, l'énergie dissipée dans la poutre est beaucoup plus petite que l'énergie élastique (environ de 12 fois). Il est probable que les paramètres k_v, n_v caractérisant la loi d'évolution de la viscoplasticité soient difficiles à identifier à partir des mesures fabriquées par un chargement de type demi-sinus.

Au contraire, le chargement de type plateau fournit une énergie dissipée trois fois plus grande que l'énergie élastique (figure 4.8.b.). De plus, elle évolue sur tout le temps d'étude, c'est-à-dire que la plasticité apparaît tout le long de la poutre. Ainsi, l'identification pour les mesures créées par ce type de chargement sera plus facile que dans le cas précédent.

4.5.1.3 Pertinence de la gamme de paramètres étudiée

Afin d'identifier les paramètres k_{v0}, n_{v0} du matériau, un jeu initial de paramètres k_v, n_v est utilisée pour commencer la résolution du problème inverse.

Dans le cas de la poutre élastique (chapitres 2, 3), le module d'Young initial est deux fois plus raide que la valeur de référence, c'est-à-dire que la structure se déforme deux fois moins pour le même chargement. Cette initialisation est donc considérée comme assez pertinente pour l'identification, puisque elle est suffisamment éloignée de la valeur cible.

Pour le comportement viscoplastique, l'influence des paramètres matériau n'est pas aussi évidente. Le problème direct est donc étudié pour différents jeux de paramètres et les relations entre la contrainte et la déformation sont présentées dans les figures 4.9, 4.10. La gamme de paramètres traitée dans le problème inverse est considérée comme suffisamment large pour que la méthode d'identification proposée soit appliquée sur un cas pertinent.

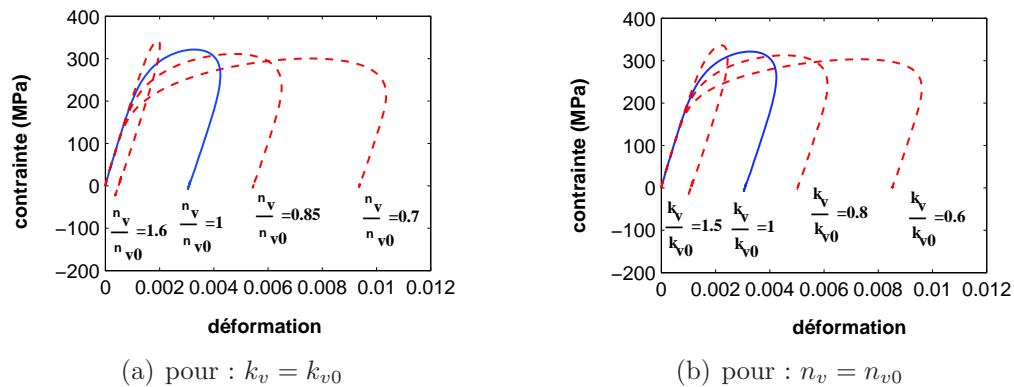


Figure 4.9 – Courbe contrainte - déformation à proximité de la zone d'application des efforts de la poutre pour différents jeux de paramètres du matériau - chargement de type *demi-sinus*

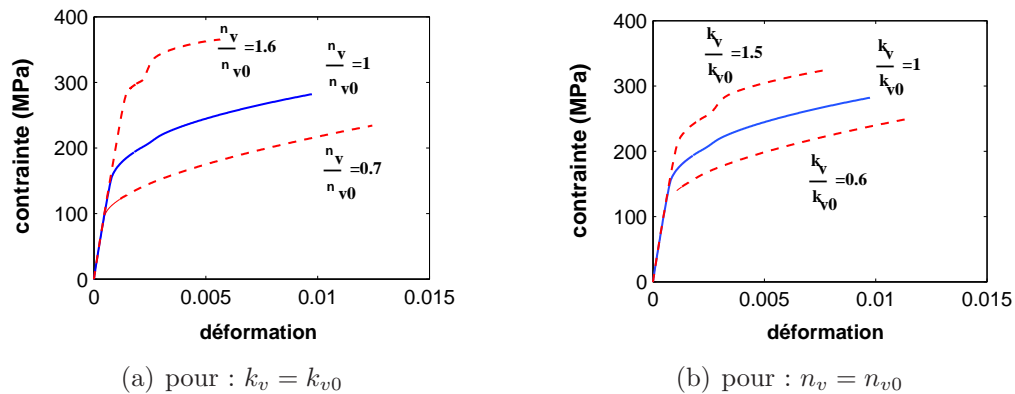


Figure 4.10 – Courbe contrainte - déformation au milieu de la poutre pour différents jeux de paramètres du matériau - chargement de type *plateau*

4.5.1.4 Remarque sur les oscillations numériques

Comme la fabrication des mesures et la résolution du problème de base sont réalisées numériquement, il faut faire attention à la présence d'oscillations numériques dans les résultats. En effet, pour toute simulation numérique des problèmes de choc, le contenu des modes à haute fréquence, qui ne sont pas représentatifs du modèle continu, peut être considérable. Ils sont sollicités lors de l'intégration numérique et conduisent à la présence de modes parasites non désirés [Neu50], [Hil77]. Pour le matériau viscoplastique, ces parasites existent même s'ils sont moins importants que dans le cas d'un matériau élastique, tel que celui de la figure 4.11, où l'on présente la contrainte normale de la section S à proximité de l'encastrement pour un chargement de type demi-sinus.

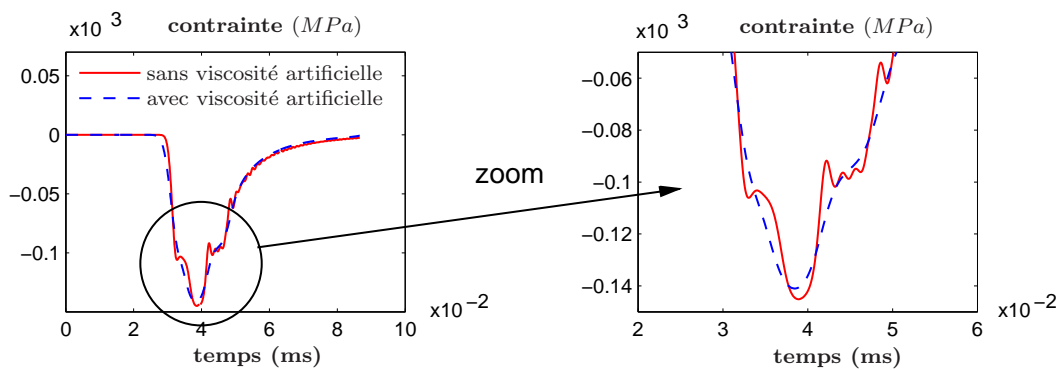


Figure 4.11 – Contrainte à la section à proximité de l'encastrement - chargement de type demi-sinus

Afin d'amortir ces parasites, différentes méthodes sont proposées comme l'utilisation d'un amortissement numérique [Neu50], du schéma Galerkin discontinu [Joh93] ou du schéma α -HHT [Hil77]. Pour ne pas limiter le choix du schéma d'intégration numérique utilisé dans le problème inverse, un amortissement numérique est alors ajouté à l'équation d'équilibre :

$$\int_0^L [\rho \ddot{u} u^* + \sigma \epsilon(u^*) + \mu E \dot{\epsilon}(u) \epsilon(u^*)] dx - \left| f_d u^* \right|_0^L = 0 \quad (4.34)$$

où μ est le coefficient présentant le rapport entre la déformation due à la viscosité artificielle et la déformation élastique.

Le figure 4.11 compare la contrainte normale de la section S sans ou avec l'utilisation de la viscosité artificielle ($\mu = 0,01$). On observe la même évolution de la contrainte normale dans les deux cas, mais les hautes fréquences de la réponse temporelle sont filtrées en conservant une bonne qualité de solution dans le cas de la viscosité artificielle.

4.5.2 Formulation du problème inverse

De manière tout à fait similaire au cas générale présenté section 4.2, la première étape de la formulation du problème d'identification par la méthode d'ERdC modifiée consiste à séparer les relations du problème en deux groupes (tableau 4.3).

<i>Fiable</i>	<i>Non fiable</i>
Équilibre : $-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0$	Conditions aux limites : \tilde{u}_d et \tilde{f}_d
Loi d'état : $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p)$ $R = h p$	Loi d'évolution : $\dot{\epsilon}_p = B_1(\sigma, R)$ $-\dot{p} = B_2(\sigma, R)$
Conditions initiales : $u(x, 0) = u_0$ $\dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0$	

Tableau 4.3 – Relations fiables et non fiables dans le cas viscoplastique

À partir de cette séparation, le problème d'identification peut être formulé comme la minimisation d'une fonction coût aux moindres carrés :

Trouver les champs $u, \sigma, R, \epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e, u_d, f_d$ et les paramètres n_v, k_v minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \mathcal{D}(\epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e) dx + \frac{\alpha}{2} \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L + \frac{\beta}{2} \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \\ -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad R = h p \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{p}^e \end{bmatrix} = B_{(k_v, n_v)} \left(\begin{bmatrix} \sigma \\ R \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Comme dans le cas élastique (section 2.2) et le cas d'un comportement non linéaire général (section 4.2), la résolution du problème (4.35) est effectuée par un processus en deux étapes :

- Résolution du problème de base, c'est-à-dire le problème (4.35) pour un jeu de paramètres k_v et n_v ;
- Minimisation de la fonction coût J du problème (4.35) grâce à son gradient par rapport aux paramètres calculé à partir des champs solution du problème de base.

4.5.3 Résolution du problème de base

Comme cela a été montré dans la section 4.2.2.IV, deux types de fonction coût aux moindres carrés peuvent être choisis dans ce problème. Dans cette partie, nous allons étudier successivement ces deux fonctions.

4.5.3.1 Erreur aux moindres carrés sur la vitesse des variables internes

I. Stratégie de résolution du problème de base

Le problème de base, utilisant l'erreur aux moindres carrés sur la *vitesse* des variables internes : $(\dot{\epsilon}_p, \dot{p})$ vérifiant les lois d'état et $(\dot{\epsilon}_p^e, \dot{p}^e)$ vérifiant les lois d'évolution, est d'abord considéré. Il s'écrit comme suit :

Trouver les champs $u, \sigma, R, \epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e)^2 + (-\dot{p} + \dot{p}^e)^2] dx + \frac{\alpha}{2} |(f_d - \tilde{f}_d)^2|_0^L + \frac{\beta}{2} |(u_d - \tilde{u}_d)^2|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \\ -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad R = h p \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{p}^e \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \sigma \\ R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.36)$$

La résolution de ce problème de minimisation d'une fonction coût quadratique sous contraintes non linéaires est effectuée de façon itérative par une stratégie issue de la méthode LATIN comme décrit à la section 4.4. Dans cette approche, chaque itération se compose de deux étapes :

a. Étape locale

Calcul des éléments $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p^e, \hat{p}^e, \hat{\sigma}, \hat{R})$ vérifiant les équations non linéaires de l'espace des lois d'évolution relâchées suivant une direction de recherche H^+ . En utilisant une direction de recherche verticale ($(H^+)^{-1} = 0$), les quantités \hat{s} sont calculées de façon explicite. Dans cette étape,

- les données sont : $s_n = (\sigma_n, R_n)$;
- les variables cherchées sont : $\hat{s}_{n+1/2} = (\hat{\epsilon}_p^e, \hat{p}^e, \hat{\sigma}, \hat{R})$;
- les équations à résoudre s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = \sigma_n \\ \hat{R} = R_n \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{p}^e \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{\sigma} \\ \hat{R} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.37)$$

b. Étape globale

Détermination des éléments $s_{n+1} = (\epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e, \sigma, Y, u, f_d, u_d)$ minimisant la fonction coût J du problème de base (4.36) en vérifiant l'équation d'équilibre, les conditions initiales et les lois d'état suivant une direction de recherche H^- . Cette direction de recherche, qui est calculée à l'étape locale, est tangente par rapport à l'espace Γ défini par l'ensemble des éléments \hat{s} . Plus en détail, dans cette étape,

- les données sont : $\widehat{s}_{n+1/2} = (\widehat{\epsilon}_p^e, \widehat{p}^e, \widehat{\sigma}, \widehat{R})$;
- les variables cherchées sont : $s_{n+1} = (\epsilon_p^e, p^e, \sigma, R)$;
- le problème à résoudre est :

Trouver les champs $u, \sigma, R, \epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} [(\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e)^2 + (-\dot{p} + \dot{p}^e)^2] dx + \frac{\alpha}{2} (f_d - \widetilde{f}_d)^2 \Big|_0^L + \frac{\beta}{2} (u_d - \widetilde{u}_d)^2 \Big|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \\ -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad R = h p \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e - \dot{\widehat{\epsilon}}_p^e \\ -\dot{p}^e - (-\dot{\widehat{p}}^e) \end{bmatrix} = H^- \begin{bmatrix} \sigma - \widehat{\sigma} \\ R - \widehat{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.38)$$

où,

$$H^- = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial R} \\ \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial R} \end{bmatrix} = \frac{n_v}{k_v} \left\langle \frac{|\widehat{\sigma}| - \widehat{R} - R_0}{k_v} \right\rangle_+^{n_v-1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\widehat{\sigma}}{|\widehat{\sigma}|} \\ -\frac{\widehat{\sigma}}{|\widehat{\sigma}|} & 1 \end{bmatrix}$$

Afin de résoudre le problème (4.38), un changement de variables est d'abord effectué dans l'objectif d'éliminer le terme différentiel en temps dans la fonction coût :

$$\begin{cases} e_1 = \dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_p^e \\ e_2 = (-\dot{p}) - (-\dot{p}^e) \end{cases} \quad (4.39)$$

À chaque instant $t \in [0, T]$, les contraintes du problème (4.38) deviennent alors :

$$\begin{cases} \int_0^L [\rho \ddot{u}^* + E[\epsilon(u) - \epsilon_p] \epsilon(u^*) + \mu E \dot{\epsilon}(u) \epsilon(u^*)] dt = \left| f_d u^* \right|_0^L \\ \dot{\epsilon}_p = e_1 + H_{11}[E(\epsilon(u) - \epsilon_p) - \widehat{\sigma}] + H_{12}[h p - \widehat{R}] + \widehat{B}_1 \\ -\dot{p} = e_2 + H_{21}[E(\epsilon(u) - \epsilon_p) - \widehat{\sigma}] + H_{22}[h p - \widehat{R}] + \widehat{B}_2 \end{cases} \quad (4.40)$$

La projection du problème (4.38) dans un espace EF

$$\begin{cases} u(x, t) = \Phi(x) U(t); & \epsilon(x, t) = B(x) U(t) \\ \epsilon_p(x, t) = \Phi_p(x) E_p(t); & p(x, t) = \Phi_p(x) P(t) \\ e_1(x, t) = \Phi_p(x) E_1(t); & e_2(x, t) = \Phi_p(x) E_2(t) \end{cases} \quad (4.41)$$

avec $\Phi(x)$ la fonction de forme EF linéaire et $\Phi_p(x)$ la fonction de forme constante par élément,

4. Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

permet d'aboutir au problème suivant :

Trouver les champs U, E_p, P, E_1, E_2 minimisant :

$$J(U, E_p, P, E_1, E_2) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} E_1^T A_p E_1 + \frac{1}{2} E_2^T A_p E_2 + \frac{\alpha}{2} (\Pi F - \tilde{F}_d)^T (\Pi F - \tilde{F}_d) + \frac{\beta}{2} (\Pi U - \tilde{U}_d)^T (\Pi U - \tilde{U}_d) \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} M \ddot{U} + K U + \mu K \dot{U} - D_3 E_p = \Pi F \\ \dot{E}_p = E_1 + D_1 U - C_{11} E_p + C_{12} P + \hat{S}_1 \\ -\dot{P} = E_2 + D_2 U - C_{21} E_p + C_{22} P + \hat{S}_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

avec les notations :

$$\begin{cases} A_p = \int_0^L \Phi_p^T(x) \Phi_p(x) dx \\ D_1 = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{11} E B(x) dx \\ D_2 = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{21} E B(x) dx \\ D_3 = \int_0^L \Phi_p^T(x) E B(x) dx \\ C_{11} = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{11} E \Phi_p(x) dx \\ C_{12} = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{12} h \Phi_p(x) dx \\ C_{21} = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{21} E \Phi_p(x) dx \\ C_{22} = \int_0^L \Phi_p^T(x) H_{22} h \Phi_p(x) dx \\ \hat{S}_1 = \int_L^0 (-H_{11} \hat{\sigma} - H_{12} \hat{R} + \hat{B}_1) dx \\ \hat{S}_2 = \int_L^0 (-H_{21} \hat{\sigma} - H_{22} \hat{R} + \hat{B}_2) dx \\ \Pi U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{Ne} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.43)$$

Ceci permet de réécrire le problème sous une forme linéaire quadratique classique :

Trouver les champs q, e minimisant :

$$J(q, e) = \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} e^T R e + \frac{1}{2} (C q - \tilde{U}_d)^T Q (C q - \tilde{U}_d) \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{q} = A q + G e + S_t \\ q(0) = 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = [U \quad \dot{U} \quad E_p \quad P]^T, \\ A = \begin{bmatrix} 0 & & I_d & & 0 & 0 \\ -M^{-1}K & -\mu M^{-1}K & M^{-1}D_3 & & 0 & \\ D_1 & & 0 & & -C_{11} & C_{12} \\ -D_2 & & 0 & & C_{21} & -C_{22} \end{bmatrix}, \\ R = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & \beta \Pi^T \Pi \end{bmatrix}, \\ Q = \alpha I_d, \end{array} \right. \quad e = [E_1 \quad E_2 \quad (\Pi F - \tilde{F}_d)]^T, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^{-1} \Pi^T \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_t = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \Pi^T \tilde{F}_d \\ \hat{S}_1 \\ -\hat{S}_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\Pi \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

La résolution du problème (4.44) peut s'effectuer à l'aide de l'approche basée sur l'équation de Riccati développée dans le chapitre 3. Cependant, dans le cas présent, la matrice A dépend du temps car la direction de descente H^- est fonction du temps. La solution K_c de l'équation algébrique de Riccati (2.27) n'est en conséquence plus constante. Nous ne pouvons donc utiliser ni la solution analytique exprimée en fonction de la solution de l'équation algébrique de Riccati (section 3.1.3.1.II) ni l'approche hybride (section 3.1.3.2). Seule l'approche basée sur l'équation différentielle de Riccati en utilisant un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (section 3.1.3.1.III.a) peut s'appliquer dans cette partie.

d. Test de convergence

Dans le cadre du problème inverse où les lois d'évolution sont relâchées, l'indicateur d'erreur basée sur l'erreur en dissipation ne peut pas être utilisé comme pour un problème direct. Cependant, la qualité de la solution obtenue dans notre cas est également estimée grâce à la non satisfaction des équations non linéaires de l'espace Γ par les éléments s_n de l'espace A_d . L'indicateur d'erreur s'exprime alors sous la forme :

$$\eta^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L [\dot{\epsilon}_p^e - B_1(\sigma, R)]^2 dx}{\int_0^T \int_0^L [(\dot{\epsilon}_p^e)^2 + (B_1(\sigma, R))^2] dx dt} \right] \quad (4.45)$$

II. Convergence de la stratégie d'identification

a. Pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées

La figure 4.12 représente les champs de déformation plastique au milieu de la poutre au cours des itérations de la stratégie de résolution du problème de base pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées. Il est clair que les déformations plastiques ϵ_p^e , $\hat{\epsilon}_p^e$ vérifiant les lois d'évolution à l'étape globale et locale sont assez différentes lors des premières itérations. Ceci vient du fait que $\hat{\epsilon}_p^e$ ne vérifie que les lois d'évolution relâchées; au contraire, ϵ_p^e vérifie toutes les relations sauf les

4. Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

lois d'évolution relâchées, tandis que l'initialisation s'effectue avec un calcul élastique. L'écart entre ces deux champs de déformation ϵ_p^e et $\widehat{\epsilon}_p^e$ diminue rapidement au cours des itérations. Finalement, la convergence pour un critère d'arrêt $\eta < 10^{-5}$ est atteinte à la 7^{ème} itération.

Il faut remarquer dans ce cas que les déformations plastiques vérifiant les lois d'évolution ϵ_p^e et celles vérifiant les lois d'état ϵ_p sont proche dès les premières itérations et elles sont identiques lors de la convergence du problème. En effet, ce cas est le cas idéal où la solution du problème de base et celle de référence sont identiques. Ce cas sera discuté dans la section suivante (section 4.5.3.1.III).

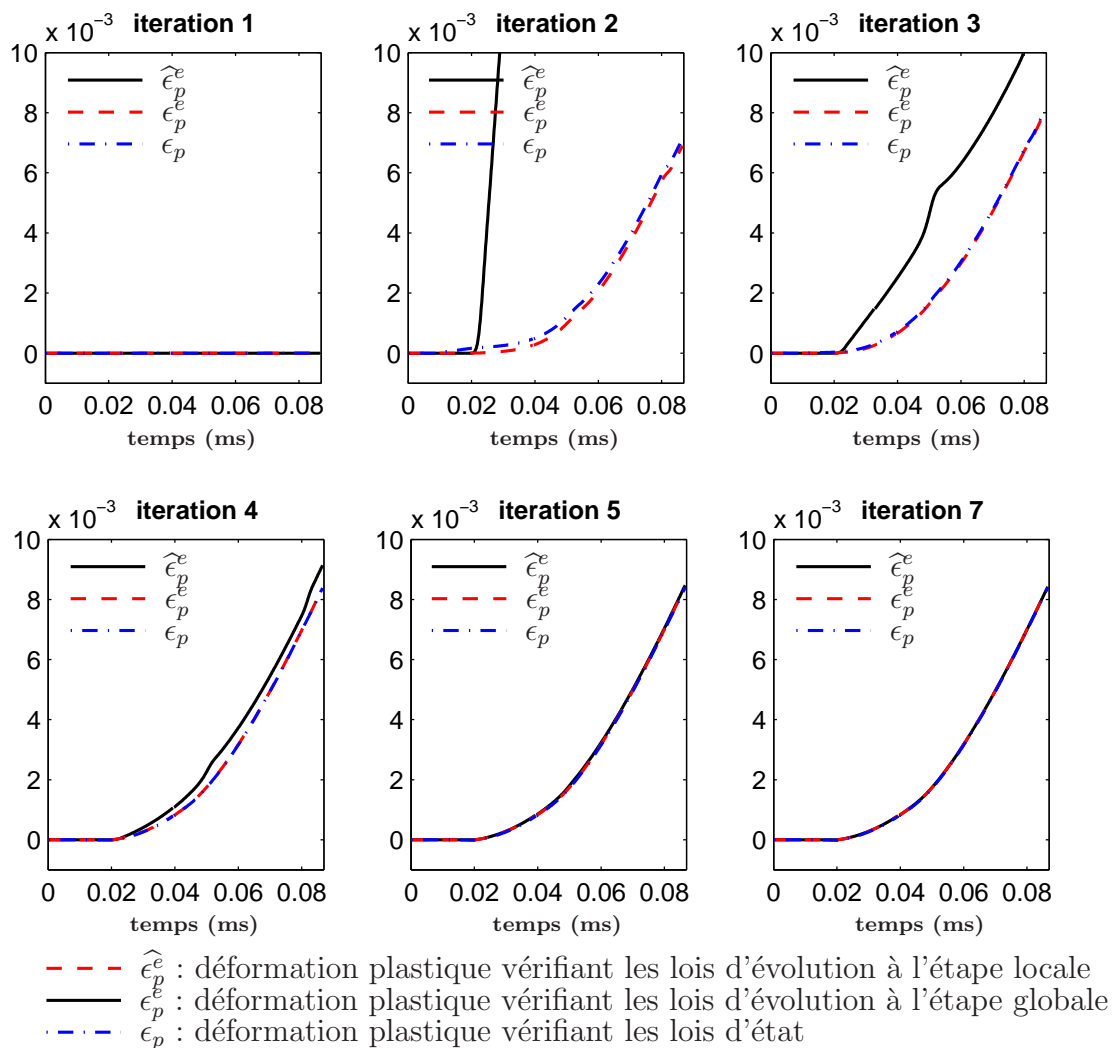


Figure 4.12 – Déformation plastique au cours des itérations pour les paramètres matériau de référence $k_v = k_{v0}$, $n_v = n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre

b. Pour de mauvais paramètres matériau

La convergence de la stratégie de résolution du problème de base est également illustrée dans le cas de mauvais paramètres matériau (figure 4.13). Dans ce cas, les déformations plastiques ϵ_p^e , $\widehat{\epsilon}_p^e$ vérifiant respectivement les lois d'évolution à l'étape globale et locale s'écartent dans un premier temps, même si l'initialisation a été effectuée avec un calcul direct en viscoplasticité pour des conditions aux limites en effort, ce qui est plus proche de la solution qu'avec un calcul élastique comme dans le cas précédent. L'écart entre les champs plastiques ϵ_p^e , $\widehat{\epsilon}_p^e$ des deux étapes diminue au cours des itérations. Cependant, elles diffèrent de la déformation plastique ϵ_p vérifiant les lois d'état pour ce jeu de paramètres.

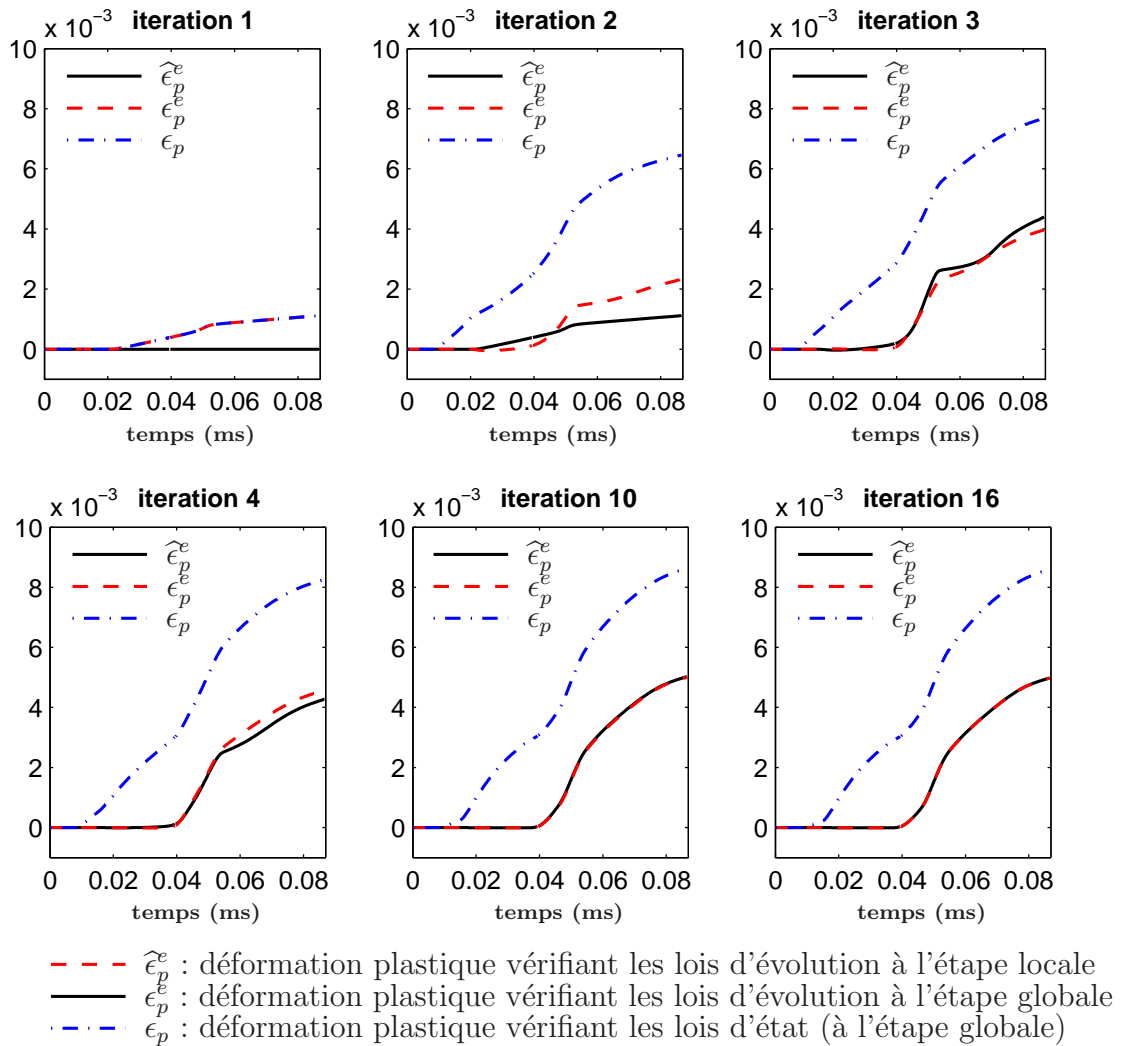


Figure 4.13 – Déformation plastique au cours des itérations pour un mauvais jeu de paramètres $k_v = 1,5 k_{v0}$, $n_v = 1,5 n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre

4. Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

Il faut remarquer que dans les deux cas présentés ci-dessus, la déformation plastique ϵ_p vérifiant les lois d'état, qui n'est déterminée qu'à l'étape globale, évolue également au cours des itérations car elle doit être compatible avec la déformation plastique ϵ_p^e vérifiant les lois d'évolution à l'étape globale afin de minimiser la fonction coût et de vérifier les contraintes. Au cours des itérations, la qualité des champs solution du problème de base s'améliore et la déformation plastique ϵ_p , elle aussi, converge vers la solution du problème de base.

Afin de présenter la qualité de la convergence de la méthode itérative de résolution du problème de base, les indicateurs d'erreur de la méthode sont tracés (figure 4.14) pour différents cas : pour des paramètres matériau de référence, de mauvais paramètres, des mesures non perturbées et perturbées à 20%.

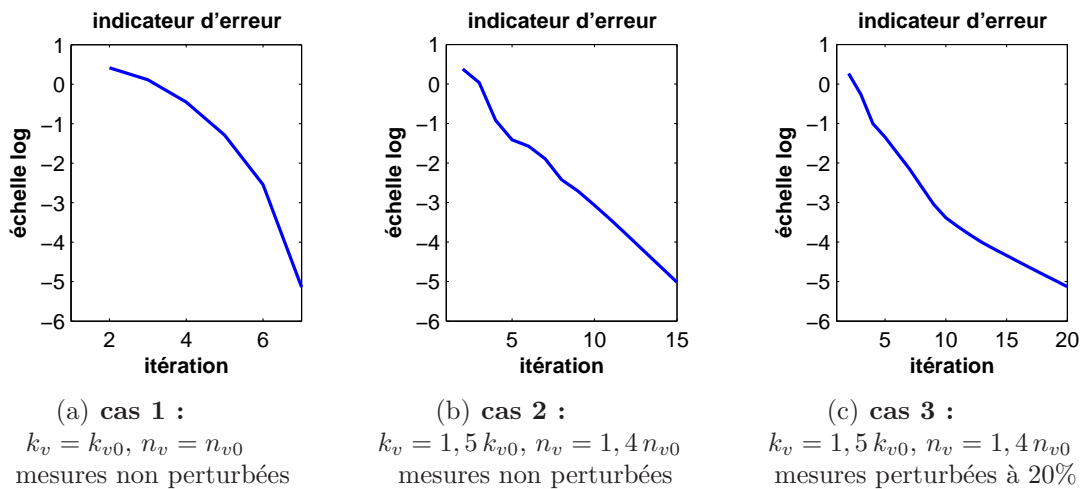


Figure 4.14 – Indicateur d'erreur pour différents jeux de paramètres matériau et différents niveaux de perturbation de mesures - chargement de type plateau

Il est clair que la convergence est très rapide dans le cas des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées (figure 4.14.a). Cependant, il s'agit d'un cas idéal qui n'est jamais rencontré en réalité, car les modèles ne sont jamais parfaits et les mesures, elles-mêmes, ne sont jamais exactes. Il est intéressant d'étudier le cas de mauvais paramètres matériau (figure 4.14.b,c). Pour des mesures non perturbées, la convergence de la méthode est moins rapide que dans le cas idéal précédent. Elle est encore plus lente pour des mesures perturbées. Cependant, elle est assez rapide : il faut environ 20 itérations pour que le critère $\eta < 10^{-5}$ soit atteint.

III. Étude des champs solution du problème de base

a. Pour les paramètres matériau de référence

Afin d'illustrer les champs solution du problème de base obtenus et leur qualité, comme dans le cas élastique, le premier cas d'étude est le cas idéal correspondant à des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées, dans lequel la solution

du problème de base coïncide avec celle du calcul direct utilisé pour la fabrication des mesures exactes. En effet, les champs solution du problème de base dans ce cas sont dynamiquement et cinématiquement admissibles. Ils vérifient à la fois les lois d'état et les lois d'évolution. Autrement dit, les variables internes (ϵ_p, p) et (ϵ_p^e, p^e) vérifiant ces deux dernières sont identiques. Cela est illustré à la convergence de la résolution itérative du problème de base (figure 4.12).

Le champ de déformation plastique obtenu est présenté, puis, comparé avec celui du problème direct figure 4.15. Comme dans le cas élastique, cette erreur est théoriquement nulle, ce qui n'est pas le cas ici. En effet, la raison de cette différence réside dans le fait que le schéma d'intégration utilisé pour le problème direct est un schéma de Newmark, tandis que pour le problème de base, il s'agit d'un schéma de Runge-Kutta. Toutefois, cette différence relative de l'ordre de 10^{-3} peut être considérée comme suffisamment petite comparée aux erreurs obtenues pour la gamme de paramètres matériau ou de perturbations de mesures traitées.

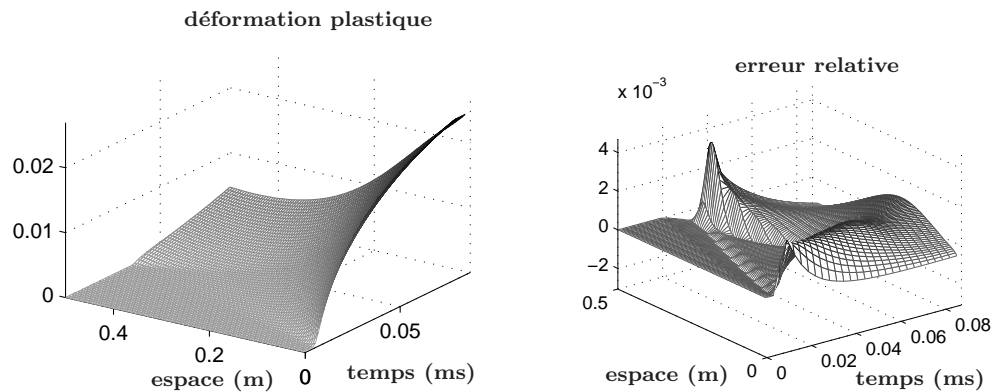


Figure 4.15 – Déformation plastique obtenue par le problème de base et son erreur relative par rapport à celle de référence dans le cas des paramètres matériau de référence et de mesures non perturbées

b. Pour de mauvais paramètres matériau

Ce premier cas idéal n'est utilisé que pour la validation de la résolution du problème de base. Il est nécessaire d'étudier un cas plus courant par exemple, le cas correspondant à un mauvais jeu de paramètres des lois d'évolution : $k_v = 1,5 k_{v0}$, $n_v = 1,4 n_{v0}$ et des mesures non perturbées. Dans ce cas, les champs solution du problème de base ne sont plus compatibles avec la relation de comportement et les mesures. Il n'existe alors pas de couple de variables internes vérifiant à la fois les lois d'évolution et les lois d'état, autrement dit, les champs (ϵ_p, p) et (ϵ_p^e, p^e) doivent être différents. Les erreurs de modèle et les erreurs de mesures dans ce cas ne sont plus nulles. Ceci est illustré par exemple dans le figure 4.13 où la déformation plastique vérifiant les lois d'état ϵ_p et celle vérifiant les lois d'évolution ϵ_p^e s'avèrent très différentes. L'incompatibilité des mesures, quant à elle, est illustrée figure 4.16.

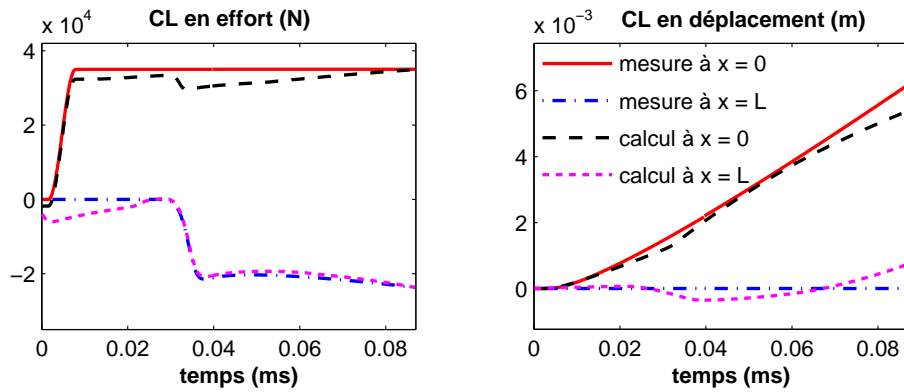


Figure 4.16 – Conditions aux limites mesurées et reconstruites pour un mauvais jeu de paramètres matériau : $k_v = 1,5 k_{v0}$, $n_v = 1,4 n_{v0}$ et des mesures non perturbées

4.5.3.2 Erreur aux moindres carrés sur les variables internes

I. Stratégie de résolution du problème de base

Le problème inverse dans ce cas n'est pas formulé à partir de l'écart sur la vitesse des variables internes $(\dot{\epsilon}_p, \dot{p})$ comme dans la section 4.5.3.1. Il est basé sur l'erreur des variables internes elles-mêmes : (ϵ_p, p) vérifiant les lois d'état et (ϵ_p^e, p^e) vérifiant les lois d'évolution. Le problème de base dans ce cas s'écrit :

Trouver les champs $u, \sigma, R, \epsilon_p, p, \epsilon_p^e, p^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} [(\epsilon_p - \epsilon_p^e)^2 + (-p + p^e)^2] dx + \frac{\alpha}{2} |(f_d - \tilde{f}_d)^2|_0^L + \frac{\beta}{2} |(u_d - \tilde{u}_d)^2|_0^L \right\} dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \\ -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad \sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad R = h p, \\ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_p^e \\ -\dot{p}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(\sigma, R) \\ B_2(\sigma, R) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ce problème est également un problème de minimisation d'une fonction coût quadratique sous des contraintes non linéaires. L'application de la méthode itérative de résolution du problème de base est tout à fait similaire à ce qui a été fait dans la section 4.5.3.1.

II. Résultats de convergence de la méthode

Afin de montrer la convergence de la méthode de résolution du problème de base pour une fonction coût formulée par l'erreur sur les variables internes, le cas simple d'un

système masse-ressort est tout d'abord considéré. Il est clair que la méthode converge bien pour les paramètres matériau de référence ou relativement proche de la référence (figure 4.17.a,b). Cependant, elle diverge pour des paramètres plus mauvais (figure 4.17.c).

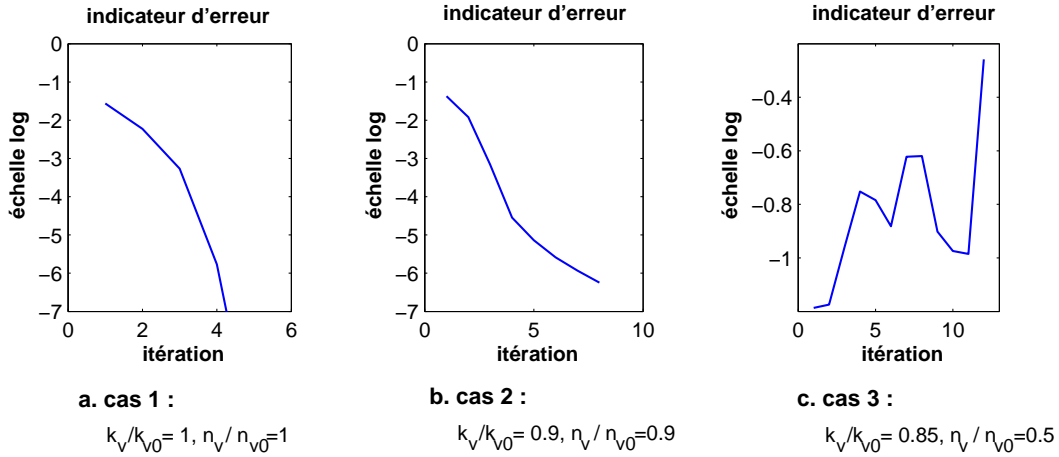


Figure 4.17 – Convergence de la stratégie de résolution du problème de base formulé par l'erreur aux moindres carrés sur les variables internes pour différents jeux de paramètres matériau - cas 0D viscoplastique

Ce dernier cas est également traité au moyen de l'erreur sur la vitesse des variables internes (définie à la section 4.5.3.1), avec lequel de bons résultats de convergence sont trouvés et présentés figure 4.18.

Afin de mettre en évidence les caractéristiques de la formulation en erreur sur les variables elles-mêmes, le cas plus complexe d'une poutre unidimensionnelle est ensuite traité. La résolution itérative du problème de base est tout d'abord effectuée pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées et s'avère diverger après quelques itérations, même si l'initialisation est proche de la solution : $\sigma_{ini} = 1, 1 \sigma_{sol}$ et $R_{ini} = 1, 1 R_{sol}$ (figure 4.19).

Il faut rappeler que, dans le même contexte, l'application de cette stratégie itérative au problème de base, formulé par l'erreur aux moindres carrés sur la vitesse des variables internes, a présenté un résultat de convergence très remarquable (figures 4.13, 4.14).

Afin d'expliquer la différence de la qualité de convergence de la méthode de résolution du problème de base, il est nécessaire de retourner à l'esprit de ces deux erreurs de modèle. Comme discuté à la section 4.2, l'erreur basée sur la vitesse des variables internes est plus sensible à l'erreur sur les lois d'évolution relâchées que celle basée sur les variables internes elles-mêmes. La deuxième approche fournira donc de moins bons résultats que la première.

4. Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

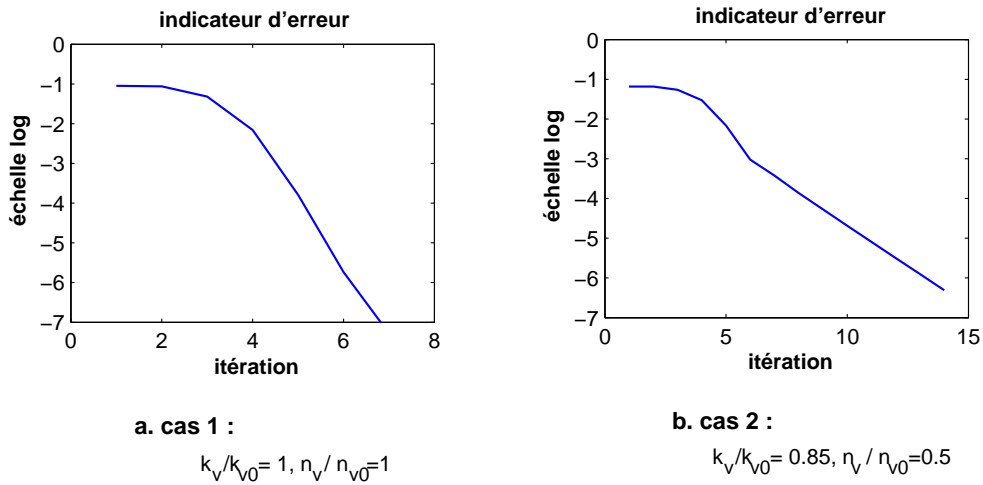


Figure 4.18 – Convergence de la stratégie de résolution du problème de base formulé par l'erreur aux moindres carrés sur les vitesses de variables internes pour différents jeux de paramètres matériau - cas 0D viscoplastique

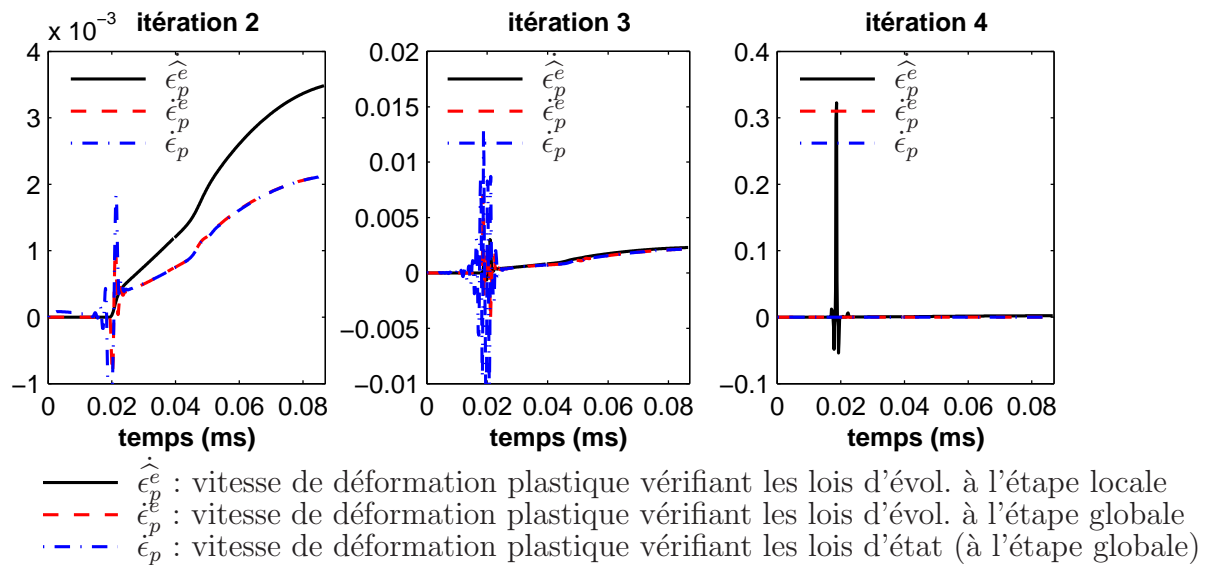


Figure 4.19 – Vitesse de déformation plastique au cours des itérations pour des paramètres matériau de référence $k_v = k_{v0}$, $n_v = n_{v0}$ et des mesures non perturbées - section au milieu de la poutre

4.5.3.3 Conclusion

Cette partie a été consacrée à l'application de la stratégie itérative issue de la méthode LATIN développée dans la section 4.4 à la résolution du problème de base associé au problème d'identification en viscoplasticité, qui se ramène à la minimisation d'une fonction coût sous des contraintes non linéaires. Deux types de fonctions coût aux moindres carrés ont été utilisés : l'une basée sur l'écart des vitesses des variables internes, l'autre basée sur l'écart des variables internes. Pour la première, la méthode itérative développée arrive à converger même avec de mauvais paramètres matériau et des mesures perturbées, tandis qu'elle diverge avec la deuxième.

Pour cette raison, dans la section suivante 4.5.4, qui s'intéresse à l'étape d'identification, seule l'erreur aux moindres carrés sur la vitesse des variables internes sera utilisée.

4.5.4 Identification des paramètres viscoplastiques

La stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée est appliquée à l'exemple décrit dans la section 4.5.1. Comme les mesures ont été fabriquées par un calcul direct avec un chargement en effort de type plateau ou demi-sinus, les deux contextes d'identification seront présentés et comparés.

4.5.4.1 Pour des mesures fabriquées par un plateau en effort

Les surfaces représentant la fonction coût pour ce type de conditions aux limites en fonction des paramètres matériau sont tracées (figures 4.20) avec des mesures non perturbées et perturbées à 20%. Il est clair que le minimum de ces fonctions se trouve aux paramètres de référence du matériau : k_{v0} et n_{v0} . Il semble aussi que, pour des mesures perturbées et pour la gamme de paramètres traitée, qui est considérée comme suffisamment large, les fonctions coût restent convexes et il n'y a pas de minima locaux. Autrement dit, les perturbations de mesures affectent peu le comportement de la fonction coût formulée par l'ERdC modifiée.

Pour étudier plus en détail les fonctions coût, nous présentons figure 4.21 deux coupes de la surface des fonctions coût pour différents niveaux de perturbation des mesures : la première pour le coefficient de référence n_{v0} , la deuxième pour le coefficient de référence k_{v0} .

Il est clair que les écarts entre les fonctions coût obtenues pour des mesures perturbées à différents niveaux sont assez faibles. Ceci illustre que non seulement le comportement des fonctions coût mais aussi les fonctions elles-mêmes sont peu affectés par la perturbation des mesures. L'identification des paramètres par l'ERdC modifiée s'avère donc pertinente, dans ce cas, jusqu'à 40% de perturbation des mesures.

4. Stratégie d'identification en non linéaire et application à un premier exemple : viscoplasticité

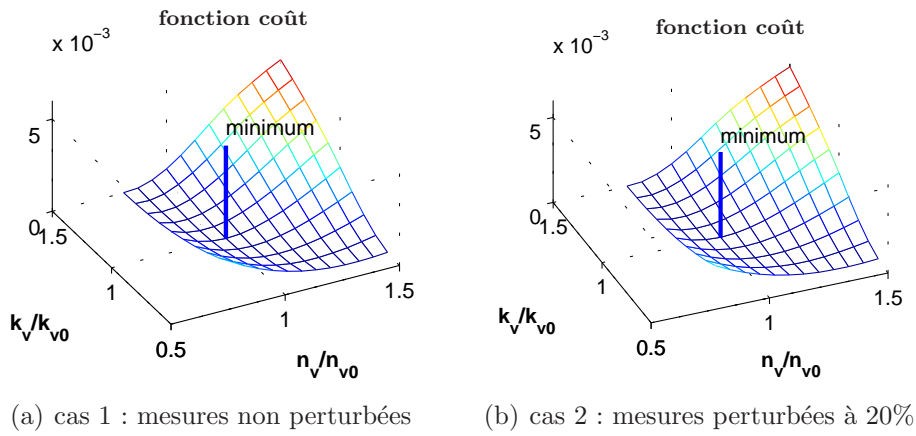


Figure 4.20 – Surfaces représentant la fonction coût - cas viscoplastique

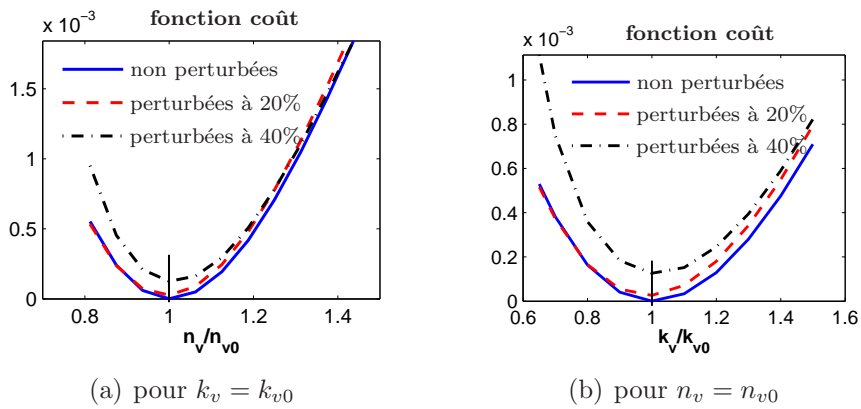


Figure 4.21 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbations avec le chargement de type plateau - cas viscoplastique

4.5.4.2 Pour des mesures fabriquées par un demi-sinus en effort

Les deux coupes de la surface représentant la fonction coût pour des mesures fabriquées par un chargement de type demi-sinus en effort et perturbées à différents niveaux sont présentées figure 4.22.

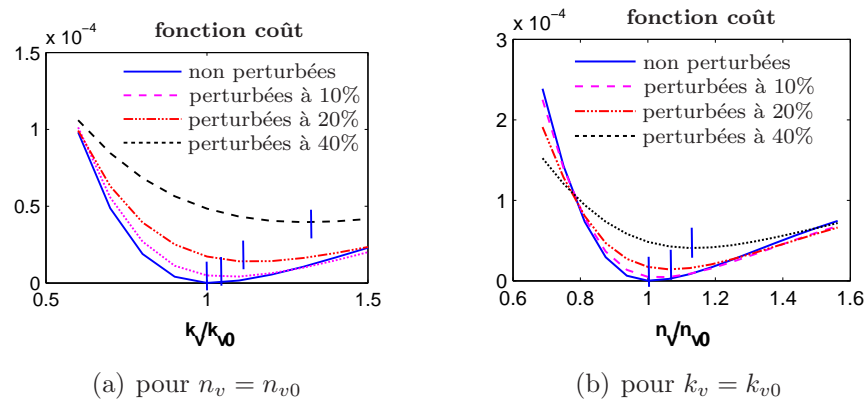


Figure 4.22 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbations avec le chargement de type demi sinus - cas viscoplastique

Dans ce cas, l'allure de la fonction coût semble ne pas être affecté même pour des mesures fortement perturbées, c'est à dire que la fonction coût reste convexe et aucun minimum local n'apparaît. En revanche, la perturbation affecte de manière relativement forte la fonction coût et son minimum. Ainsi, au niveau de la qualité de l'identification, le minimum de la fonction coût ne se trouve aux paramètres de référence k_{v0} et n_{v0} que pour des mesures non perturbées. La qualité de l'identification diminue lorsque le niveau des perturbations augmente. Autrement dit, l'information sur le comportement contenue dans les mesures n'est pas suffisante.

Remarques :

Cette section a mis en avant l'importance de choix de l'essai pour l'identification des paramètres matériau, surtout dans le cas non linéaire. Dans l'exemple numérique traité dans ce travail, l'essai avec un chargement de type plateau en effort s'avère très pertinent et il sera utilisé pour le problème d'identification à la rupture étudié dans le chapitre 5.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'extension de la stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée en dynamique transitoire développée dans le cas élastique (chapitre 3) au cas non linéaire. Les difficultés soulevées, qui sont relativement liées, résident dans le choix de l'erreur de modèle pour la formulation du problème d'identification et le

besoin d'une méthode de traitement numérique adaptée. Comme dans le cas élastique, la résolution du problème d'identification est effectuée en deux étapes :

- résolution du problème de base pour des paramètres matériau fixés ;
- évaluation de la fonction coût pour l'identification des paramètres grâce aux champs solution du problème de base.

La résolution du problème de base est délicate, il s'agit d'un problème non linéaire de propagation d'ondes directe et adjointe couplées avec des conditions initiales et finales en temps. Ceci implique non seulement une instabilité due au couplage des problèmes mais également la non linéarité due au comportement matériau. Ce problème de base se présente en effet sous la forme d'une minimisation sous des contraintes non linéaires. Dans l'objectif d'appliquer l'approche basée sur l'équation de Riccati développée dans le chapitre 3 à la résolution du problème de base non linéaire, nous avons utilisé une formulation du problème d'identification avec des erreurs aux moindres carrés. Puis, une stratégie itérative issue de la méthode LATIN [Lad99a] a été proposée afin de linéariser le problème sur tout le temps d'étude. L'approche basée sur l'équation de Riccati est utilisée dans une des étapes de cette stratégie.

La première application non linéaire de la stratégie d'identification est le cas viscoplastique, où deux paramètres caractérisant les lois d'évolution ont été cherchés. Il a été montré que l'utilisation d'une fonction coût avec une erreur de modèle formulée par l'écart sur la vitesse des variables internes et la stratégie itérative développée permettent de résoudre de façon robuste le problème de base. Une fois le problème de base résolu, les résultats d'identification obtenus sont remarquables. La stratégie d'identification basée sur l'ERdC modifiée est robuste face à des mesures perturbées jusqu'à 40%.

La prochaine application d'identification sera pour un comportement à la rupture tel que celui d'un composite stratifié.

Identification des paramètres de rupture de composite

Ce chapitre présente l'extension de la stratégie d'identification basée sur l'ERdC à l'identification des paramètres de rupture d'un composite. Les modèles de composites envisagés et les méthodes dédiées à la simulation de la rupture sont d'abord rappelés. Puis la formulation du problème d'identification pour le modèle d'endommagement utilisé et son traitement numérique sont développés. Les résultats d'identification sont présentés à la fin du chapitre.

Sommaire

5.1	Présentation du modèle de composite	145
5.1.1	Composite stratifié : constitution et modélisation	145
5.1.2	Difficulté rencontrée pour la simulation jusqu'à la rupture	149
5.1.3	Pertinence de la loi d'évolution utilisée	154
5.2	Présentation du problème d'identification	157
5.2.1	Paramètres à identifier	157
5.2.2	Pertinence de la gamme de paramètres étudiée	157
5.2.3	Choix de l'essai d'identification	157
5.2.4	Fabrication des mesures	159
5.3	Formulation du problème inverse	160

5.4	Résolution du problème de base	163
5.4.1	Séparation des difficultés	164
5.4.2	Résolution itérative en deux étapes	164
5.4.3	Convergence de la stratégie de résolution du problème de base	169
5.4.4	Études des champs solution du problème de base	172
5.5	Identification des paramètres de l'effet retard	174
5.6	Conclusion	175

Compte-tenu des résultats d'identification encourageant obtenus dans le cas viscoplastique (chapitre 4), ce chapitre est consacré à l'extension de la méthode développée à l'identification des paramètres caractérisant la rupture d'un composite.

Dans un premier temps, une brève étude bibliographique des modèles de composites stratifiés ainsi que les méthodes permettant de s'affranchir des problèmes liés à la localisation des déformations lors de la rupture sont présentés. Le mésomodèle à effet retard semble adapté au composite stratifié. Dans un second temps, l'identification des paramètres caractérisant la rupture par la méthode d'ERdC modifiée est développée. Les questions soulevées sont le choix d'un essai pertinent et la résolution d'un problème de minimisation sous des contraintes non seulement non linéaires mais également d'inégalité. Une fois ces questions traitées, la stratégie d'identification sera appliquée au cas d'une poutre composite unidimensionnelle.

5.1 Présentation du modèle de composite

5.1.1 Composite stratifié : constitution et modélisation

Le composite visé dans ce travail est un composite stratifié à fibres longues formé de plis unidirectionnels orientés selon différentes directions. Chaque pli est obtenu par un arrangement des fibres selon une seule direction dans une matrice (Figure 5.1).



Figure 5.1 – Constitution du composite stratifié à fibres longues

Différents mécanismes de dégradation des stratifiés ont été mis en évidence dans la littérature. Citons ici les six principaux :

- la décohésions fibres - matrice ;
- les microfissures à l'interface entre deux plis ;
- la fissuration transverse ;
- le délaminage local ;
- la rupture des fibres ;
- le délaminage macroscopique.

La modélisation de ces mécanismes a fait l'objet de nombreux travaux qui sont en général regroupés en deux grandes familles :

- **Approches micromécaniques :**

Ces approches cherchent à modéliser les mécanismes de dégradation à l'échelle caractéristique de la fibre, de la matrice et de leur liaison, à travers une description du

champ de contrainte en présence de dégradations et d'un critère d'évolution de ces dégradations [Bon87] [Nai94]. Elles se positionnent donc dans le cadre de la mécanique de la rupture. Ce type de modèles permet de décrire et interpréter de façon relativement fine la microfissuration et le délaminage local. Cependant, en se plaçant à une échelle très fine, il pose de grandes difficultés pour l'application au calcul de structures.

- Approches continues :

Ces approches consistent à tenir compte des mécanismes micro de dégradation à travers des variables d'endommagement, autrement dit, l'apparition de dégradation se traduit par la chute de raideur des constituants du stratifié [Lad86] [All92] [Cou00]. Parmi ces approches, citons le mésomodèle, qui a été développé depuis une quinzaine d'années et utilisé largement [Lad86] [Hoc01] [Cor01] [Phi01] [dB06]. En se plaçant à une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique considérée dans les premières approches et l'échelle macroscopique à laquelle le comportement des structures est étudié, cette approche permet de réaliser la simulation des structures. En revanche, ses résultats ne sont pas aisément interprétables du point de vue microscopique. Afin de résoudre cette difficulté, Ladevèze et Lubineau [Lad03b] ont proposé d'enrichir le mésomodèle grâce aux informations microscopiques en créant un pont "micro-méso" pour lequel des travaux sont en cours [Lub06]. Cependant, le mésomodèle "classique" est suffisamment pertinent pour la simulation de problèmes industriels [Phi01].

Dans le mésomodèle, le matériau stratifié est décrit par deux mésoconstituants : la monocouche, supposée homogène dans son épaisseur, et l'interface interlaminaire (figure 5.2). Cette dernière est une entité mécanique surfacique, reliant les deux plis successifs au travers des sauts de déplacement et de la contrainte normale, et sert à décrire les phénomènes de délaminage.

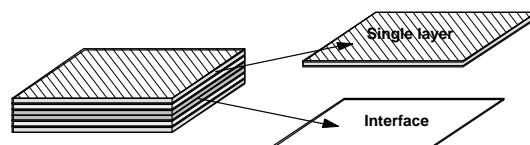


Figure 5.2 – Méso-constituants du composite stratifié : le pli et l'interface

5.1.1.1 Modèle du pli élémentaire

Pour la description des mécanismes de dégradation au sein du pli élémentaire, trois variables sont introduites. Elles traduisent : la chute de rigidité en cisaillement, en traction transverse et la rupture des fibres [Lad86] [Hoc01]. L'énergie de déformation du

pli endommageable s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0 (1-d_1)} + \frac{\phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0 (1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} \right. \\ \left. + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0 (1-d_2)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} - 2 \frac{\nu_{12}^0}{E_1^0} \sigma_{11} \sigma_{22} - 2 \frac{\nu_{13}^0}{E_1^0} \sigma_{11} \sigma_{33} \right. \\ \left. - 2 \frac{\nu_{23}^0}{E_2^0} \sigma_{22} \sigma_{33} + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}^0 (1-d_{12})} + \frac{\sigma_{13}^2}{G_{13}^0 (1-d_{12})} + \frac{\sigma_{23}^2}{G_{23}^0} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

dans laquelle,

- E_i^0 et G_i^0 sont les caractéristiques mécaniques du pli non-endommagé ;
- $\langle x \rangle_+$ est la partie positive de x qui permet de tenir compte du caractère unilatéral du comportement de composite, correspondant au fait que les fissures dans une direction sont fermées et donc l'endommagement apparent est nul lorsque la contrainte normale dans cette direction est négative ;
- ϕ permet de prendre en compte les non-linéarités du comportement des fibres en compression.

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement sont calculées directement à partir de l'énergie de déformation :

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_1} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{11} \rangle_+^2 \rangle}{2E_1^0 (1-d_1)^2} \\ Y_2 = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_2} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{22} \rangle_+^2 \rangle}{2E_2^0 (1-d_2)^2} \\ Y_{12} = \frac{\partial \langle \Psi \rangle}{\partial d_{12}} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \langle \sigma_{12}^2 \rangle \rangle}{2G_{12}^0 (1-d_{12})^2} \end{cases} \quad (5.2)$$

où $\langle \langle x \rangle \rangle$ représente la valeur moyenne de x dans l'épaisseur d'un pli afin de respecter l'hypothèse d'homogénéité de l'endommagement dans l'épaisseur du pli.

Quant au pilotage de l'évolution de l'endommagement, les lois d'évolution utilisées doivent vérifier le second principe de la thermodynamique. Une forme simple est souvent choisie :

$$\begin{cases} d_1 = f_1(\sqrt{Y_1}) & \text{si } d_1 < 1, & d_1 = 1 \text{ sinon} \\ d_2 = f_2(\sqrt{Y_{12} + bY_2}) & \text{si } d_2 < 1, & d_2 = 1 \text{ sinon} \\ d_{12} = f_{12}(\sqrt{Y_{12} + bY_2}) & \text{si } d_{12} < 1, & d_{12} = 1 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{où } \underline{Y}_i|_t = \sup_{\tau \leq t} Y_i|_{\tau} \quad (5.3)$$

$$\text{avec, } f(\sqrt{Y}) = \left\langle \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+$$

b, Y_0, Y_c sont les paramètres à identifier

L'endommagement évolue donc de façon progressive en fonction de Y à partir d'un seuil Y_0 , lié à un état initial endommagé, jusqu'à une limite Y_c correspondant à un état critique.

Les lois d'évolution (5.3) présentent également un couplage entre les variables d'endommagement de cisaillement et d'endommagement transverse. Ceci s'explique par le fait que le même réseau de fissures intervient dans les deux types d'endommagement.

Tous les paramètres de ces lois d'évolution peuvent être identifiés par des essais quasi-statiques de traction - compression uniaxiaux sur différents types d'empilement des plis.

5.1.1.2 Modèle de l'interface

L'interface est une entité surfacique qui assure le transfert des déplacements et des contraintes entre deux plis adjacents. Elle est modélisée par un modèle de même nature que celui du pli [All92] [Cor01] pour décrire le délaminage. Ses directions d'orthotropie, notées N_1 et N_2 , sont définies comme les bissectrices des directions des fibres des plis adjacents. La direction N_3 est alors la troisième direction de l'espace, normale aux plis, son orientation définira le pli supérieur (pli $+$) et le pli inférieur (pli $-$) comme illustré le figure 5.3.

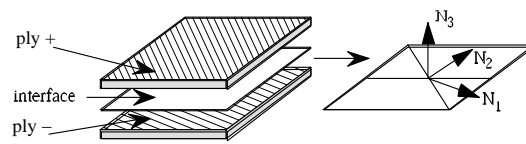


Figure 5.3 – Directions d'orthotropie de l'interface interlaminaire

La différence entre les déplacements des surfaces supérieures et inférieures est définie comme :

$$[\underline{U}] = \underline{U}^+ - \underline{U}^- = [U_1] \underline{N}_1 + [U_2] \underline{N}_2 + [U_3] \underline{N}_3 \quad (5.4)$$

L'interface possède alors la relation de comportement suivante :

$$\sigma \cdot \underline{N}_3 = K \cdot [\underline{U}] \quad \text{où} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

De façon similaire à la modélisation du pli endommagé, trois variables d'endommagement associées aux trois modes d'ouverture possible de l'interface (figure 5.4) sont introduites. L'énergie de déformation de l'interface endommageable s'écrit alors :

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0 (1 - d_3)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{k_1^0 (1 - d_1)} + \frac{\sigma_{23}^2}{k_2^0 (1 - d_2)} \right] \quad (5.6)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial d_3} \Big|_{\sigma} = \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{2k_3^0 (1 - d_3)^2} \quad \text{Mode I} \\ Y_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial d_1} \Big|_{\sigma} = \frac{\sigma_{13}^2}{2k_1^0 (1 - d_1)^2} \quad \text{Mode II} \\ Y_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial d_2} \Big|_{\sigma} = \frac{\sigma_{23}^2}{2k_2^0 (1 - d_2)^2} \quad \text{Mode III} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

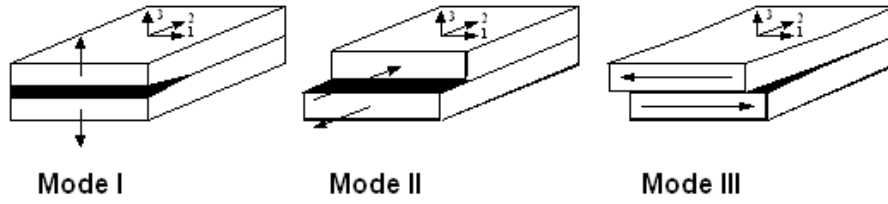


Figure 5.4 – Modes de rupture de l'interface

Comme dans la formulation pour le pli endommageable, l'évolution des variables d'endommagement peut être pilotée par une force thermodynamique mixte afin de tenir compte du fait que les mêmes microfissures interviennent dans les types d'endommagement d'interface :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_3 + \gamma_1 \underline{Y}_1 + \gamma_2 \underline{Y}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_i|_t = \sup_{\tau \leq t} Y_i|_\tau \quad (5.8)$$

où, γ_1 , γ_2 sont deux paramètres de couplage.

Les lois d'évolution de l'interface endommageable peuvent être choisies de manière simple comme dans [All92] :

$$\begin{cases} d_3 = d_1 = d_2 = w(\underline{Y}) & \text{si } d < 1 \\ d_3 = d_1 = d_2 = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad w(\underline{Y}) = \left\langle \frac{\sqrt{\underline{Y}} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \right\rangle_+ \quad (5.9)$$

L'identification des paramètres γ_1 , γ_2 , Y_0 , Y_c s'effectue par une campagne d'essais comme proposé dans [All98].

5.1.2 Difficulté rencontrée pour la simulation jusqu'à la rupture

Afin de réaliser la simulation d'un crash de structures composites, le mésomodèle présenté ci-dessus peut être envisagé. Cependant, les études précédentes [All97] montrent qu'une application directe de ce modèle ne permet pas d'aller de manière objective jusqu'à la rupture à cause du phénomène dit de "localisation des déformations" qui est connu depuis longtemps dans la littérature [Baz76]. D'un point de vue expérimental, il correspond à la concentration des déformations sur une bande de faible épaisseur juste avant la rupture de l'éprouvette. Du point de vue du modèle continu, cela correspond à la perte d'unicité de la solution du problème à cause d'un changement de nature des équations aux dérivées partielles de la dynamique des structures lorsque la matrice de rigidité tangente du matériau n'est plus définie positive. Ceci se traduit lors du traitement numérique par une forte dépendance des résultats au maillage. Plus précisément, la déformation se localise dans une zone de la taille d'un élément, ayant notamment pour conséquence que l'énergie de dissipation tend vers zéro lorsque la taille de maille tend vers zéro

Afin de s'affranchir cette difficulté, plusieurs méthodes ont été proposées : soit en choisissant de décrire la localisation par une discontinuité, soit en introduisant une longueur interne qui contrôle la taille minimum que peut prendre la zone de localisation des déformations. La deuxième famille d'approches définit les "limiteurs de localisation" selon Lasry et Belytschko [Las88], qui peuvent être en espace ou en temps.

5.1.2.1 Modèles à discontinuité

Pour ces modèles, la localisation est décrite comme concentrée sur des bandes d'épaisseur nulles. Il s'agit d'enrichir la cinématique du milieu continu en permettant l'apparition à l'intérieur des éléments de surfaces de discontinuité du champ de déformation (modèles à discontinuité faible) [Ort87] [Bel88] ou du champ de déplacement (modèles à discontinuité forte) [Sim93] [Oli00]. Ce type de modèles est intéressant et est en cours d'étude.

5.1.2.2 Limiteurs de localisation en espace

Contrairement aux modèles à discontinuité, ces modèles, en restant dans le domaine de la mécanique des milieux continus, cherchent à contrôler la localisation des déformations à travers une longueur caractéristique du matériau afin d'empêcher le changement de nature des équations aux dérivées partielles de la dynamique des structures.

Citons d'abord les **modèles à conservation d'énergie de dissipation**.

Dans l'idée de rendre l'énergie de dissipation indépendante du maillage, cette approche suppose que cette énergie est fonction de la taille des éléments finis dans la zone de localisation. La régularisation n'est pas introduite dans la loi de comportement mais au niveau de la résolution numérique. Cette méthode qui est proposée par Bazant & Oh [Baz83] n'a donc pas de signification physique. Cependant, elle présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre car il suffit d'introduire des paramètres matériau dépendant de la taille des éléments.

Une autre famille de modèles plus physiques a ensuite été proposée par Pijaudier-Cabot et Bazant [Pij87] pour le béton, puis développée par Leblond & al [Leb94] pour les matériaux métalliques. Appelés les **modèles non locaux**, ils considèrent qu'une ou plusieurs variables du modèle ne sont pas locales en espace mais dépendent de variables voisines. Elles sont donc calculées grâce à une fonction de pondération dépendant du point considéré :

$$\bar{Y}(x_0) = \int_{\Omega} \omega(x_0, s) Y(s) ds \quad (5.10)$$

où, $\bar{Y}(x_0)$ est la variable non locale utilisée dans cette méthode au point x_0 considéré.

$Y(s)$ est la variable locale dans un volume $\Omega(s)$ autour du point x_0 . Le choix de ce volume représentatif $\Omega(s)$ se base sur des considérations théoriques ou expérimentales [Maz94]. Les paramètres de régularisation, quant à eux, sont introduits dans la fonction de pondération ω .

L'inconvénient de cette méthode est lié au fait que les résultats obtenus sont très sensibles au choix de cette fonction ω [Pla93]. De plus, l'utilisation de ce type de modèle pose des difficultés pour définir les points d'intégration ainsi que pour traiter les conditions aux limites ou pour l'implanter dans un code EF classique dans lequel les modèles matériau sont généralement locaux.

Afin d'éviter la difficulté posée par le choix du volume représentatif des modèles non locaux, des **modèles à gradient**, qui cherchent à enrichir le modèle continu en utilisant un terme de gradient de la déformation ou des variables internes, sont développés.

En éliminant les termes de dérivée d'ordre supérieur à 2, l'équation (5.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{Y} = Y + c \nabla Y \quad (5.11)$$

où, c est un paramètre de régularisation du problème.

Différents choix de la variable interne Y sont proposés :

- la déformation totale ϵ [Las88] ;
- la déformation plastique ϵ_p [dB92] pour un matériau plastique adoucissant ;
- l'endommagement d [dB95].

Ces modèles sont appelés les *modèles à gradient explicite*.

Dans la littérature, il existe également des *modèles à gradient implicite* où \bar{Y} est la solution de l'équation :

$$Y = \bar{Y} + c \nabla \bar{Y} \quad (5.12)$$

Ces modèles sont initialement utilisés par Desoyer et Cormery [Des94], Peerlings & al [Pee02] pour la simulation de l'endommagement, puis récemment pour la plasticité par Lorentz et Andrieux [Lor03].

On retrouve également pour ce type de modèles à gradient de variables internes le problème de la prise en compte des conditions aux limites.

Une autre approche de l'enrichissement du modèle continu classique afin de résoudre les problèmes de localisation a été proposée dans la littérature en se basant sur la théorie du second gradient [Ger73]. Dans ces modèles appelées **modèles du second gradient**, l'enrichissement du modèle continu se fait au niveau de l'équation d'équilibre en ajoutant un terme de gradient de la vitesse de déformation à l'expression de la puissance des efforts intérieurs :

$$P_i = \int_{\Omega} (\sigma : \epsilon + \tau : \nabla \nabla \underline{\mathbf{v}}) d\Omega$$

avec σ tenseur des contraintes "classique",

τ est le tenseur des contraintes complémentaire (tenseur d'ordre 3) dans lequel la longueur caractéristique du matériau est introduite.

Pour l'application de cette méthode au problème de localisation, citons les travaux de Triantafyllidis et Aifantis [Tri86], de Chambon & al [Cha98]. Ses inconvénients

résident dans la nécessité du développement d'EF adaptés et dans les difficultés pour traiter les conditions aux limites.

5.1.2.3 Limiteurs de localisation en temps

Ces approches ne contrôlent pas directement la localisation par une longueur caractéristique mais grâce à un limiteur en temps. La longueur caractéristique est introduite de façon implicite à travers le couplage temps-espace en dynamique.

Les premiers limiteurs de localisation en temps, appelés les **modèles à viscosité** sont proposés par Needleman [Nee88], Loret et Prevost [Lor90] puis Sluys et De Borst [Slu92] dans le cas d'un matériau élastoplastique. Le point de départ de ces modèles diffère de celui des modèles précédents car ils cherchent à garder le caractère hyperbolique de l'équation en introduisant un effet de vitesse. Selon une forme proposée dans [Slu92], la contrainte dépend non seulement de la déformation mais également de la vitesse de déformation plastique :

$$\sigma = h \epsilon_p + \eta E \frac{\partial \epsilon_p}{\partial t}$$

où η est un paramètre de viscosité.

Selon [Slu92], la longueur caractéristique introduite de façon implicite à travers la vitesse des ondes C est :

$$l_c = 2 \eta C$$

Pour l'application de ce type de modèle aux matériaux élastiques endommageables, citons le travail de Dubé & al pour le béton [Dub96] et les travaux au LMT Cachan sur les composites. Il s'agit alors des **modèles à effet retard**.

Ces modèles, qui font partie des modèles à viscosité, ont tout d'abord été appliqués à la simulation de l'endommagement du composite jusqu'à la rupture. Elle est proposée par Ladevèze [Lad92], puis développée par des travaux de [All97] [Dou00] [Suf03], [Cou05]. Dans ce modèle, un paramètre de viscosité est introduit dans les lois d'évolution afin de tenir compte de l'idée suivante : "la propagation des micro fissures associée à une variation des forces thermodynamiques n'est pas instantanée mais elle possède un temps caractéristique qui lui est propre". Autrement dit, pour ces modèles, la rupture apparaît plus tard que pour un modèle classique. C'est la raison pour laquelle ils s'appellent les "modèles à effet retard".

La loi d'évolution classique du mésomodèle des composites stratifiés s'écrit dans le cas 1D sous la forme :

$$\begin{cases} d = \langle f(\sqrt{Y}) \rangle_+ & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{Y} = \sup_{\tau \leq t} Y|_{\tau} \\ f(\sqrt{Y}) = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}} \end{cases} \quad (5.13)$$

où Y_0, Y_c sont les paramètres du modèle.

Le premier modèle à effet retard [Lad92] consiste à modifier la loi d'évolution (5.13) en ajoutant un terme de vitesse. Cependant, elle doit permettre de retrouver la forme statique (5.13) dans le cas de faible vitesse de déformation, menant à une expression du type :

$$\begin{cases} \dot{d} = k \langle f(\sqrt{Y}) - d \rangle_+^n & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.14)$$

où k et n sont les deux nouvelles variables caractérisant l'effet retard. Ici la longueur caractéristique associée au phénomène de rupture est liée directement à k^{-1} au travers de la vitesse des ondes C .

Pour ce type de modèle, l'évolution de l'endommagement est définie de façon unique par l'état du matériau, ce qui garantit l'unicité de la solution du problème dynamique jusqu'à la rupture totale.

Cependant, la vitesse de l'endommagement \dot{d} n'est pas bornée, autrement dit, elle peut atteindre une valeur infini au moment de la rupture, ce qui est équivalent au cas des modèles classiques.

Allix et Deü [All97] ont donc proposé une modification du modèle à effet retard initial en bornant la vitesse d'endommagement :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left\{ 1 - \exp \left(-a \langle f(\sqrt{Y}) - d \rangle_+ \right) \right\} & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.15)$$

Dans ce cas, la vitesse d'endommagement est toujours dans un intervalle $[0, \frac{1}{\tau_c}]$. Ce modèle est donc appelé également "modèle d'endommagement à taux limité".

Les modèles à effet retard ou à taux limité ont été étendus récemment aux cas des matériaux métalliques. Citons ici les travaux de Suffis et Combescure [Suf03], où les auteurs ont piloté la plasticité par l'endommagement à taux limité. Cependant, Court & al [Cou05] ont montré que ce pilotage est suffisant pour le traitement juste après la chute de contrainte ($d > 0.5$) mais il pose encore des problèmes de dépendance au maillage au moment de la rupture ($d \approx 1$). Leur réponse consiste en un modèle à taux de plasticité limité.

D'un point de vue pratique, Douchin dans sa thèse [Dou00] a proposé une autre forme des lois d'évolution pour les composites stratifiés, tout en conservant les idées du modèle à taux d'endommagement limité. Cependant, ces lois d'évolution permettent de mettre en œuvre facilement un estimateur d'erreur de la modélisation par Éléments Finis.

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left\{ 1 - \exp \left(-a \left\langle \frac{Y-Y_0}{Y_c} - d^2 \right\rangle_+ \right) \right\} & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.16)$$

Il faut noter que, dans les lois d'évolution (5.15), (5.16), la dérivée de la vitesse d'endommagement \dot{d} est une fonction discontinue vis-à-vis des variables d et Y . Cette discontinuité pose des difficultés pour la résolution des problèmes direct et inverse par la méthode LATIN en utilisant la direction de recherche tangente. Nous proposons donc

d'utiliser les lois d'évolution suivantes tout en respectant les idées du modèle à taux d'endommagement limité :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left\{ 1 - \exp \left(-a \left\langle \frac{Y-Y_0}{Y_c} - d^2 \right\rangle_+^2 \right) \right\} & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.17)$$

Cette loi d'évolution proposée présente d'un part tous les caractères des modèles à taux d'endommagement limité et d'autre part est plus facile à mettre en œuvre et à identifier. Cependant, il est naturel que le paramètre a de la fonction (5.17) soit différent de celui des lois précédentes [All97] [Dou00].

La pertinence de la loi d'évolution proposée (5.17) pour la simulation jusqu'à la rupture est étudiée dans la partie suivante.

5.1.3 Pertinence de la loi d'évolution utilisée

Dans l'objectif d'illustrer la pertinence de la loi d'évolution utilisée (5.17) pour la simulation jusqu'à la rupture, un exemple académique est traité. Il s'agit d'une poutre de longueur $L = 25 \text{ cm}$, de section $S = 1 \text{ cm}^2$ encadrée d'un côté et soumise à une force appliquée à l'autre extrémité dont la valeur maximum est $F_{max} = 1,2 E.S = 6,84 \text{ kN}$ (figure 5.5). Les paramètres matériau utilisés dans ce calcul sont décrits dans le tableau 5.1.

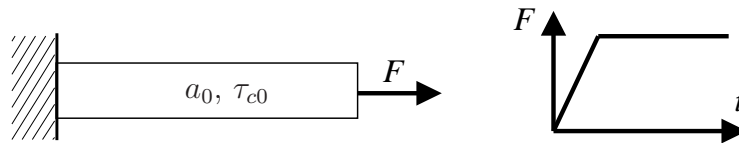


Figure 5.5 – Essai numérique dans le cas 1D endommageable

Élasticité	Endommagement
Module d'Young : $E = 57 \text{ GPa}$	Seuil : $Y_0 = 0,05 \text{ MPa}$
Coef. de Poisson : $\nu = 0,3$	Force critique : $Y_c = 0,23 \text{ MPa}$
Densité : $\rho = 2280 \text{ kg.m}^{-3}$	Constante de retard : $a = 10$
Célérité des ondes : $C = 5000 \text{ m.s}^{-1}$	Temps caractéristique : $\tau_c = 2 \mu\text{s}$

Tableau 5.1 – Propriétés matériau composite

Les équations régissant le système sont :

+ Équation d'équilibre :

$$\int_0^L \left(\rho \ddot{u} u^* + \sigma : \epsilon(u^*) \right) dx - \left| f_d u^* \right|_L = 0 \quad \forall u^* \quad (5.18)$$

+ Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ f_d(L, t) &= \tilde{f}_d \end{aligned} \quad (5.19)$$

+ Conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \\ d(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

+ Lois d'état :

$$\begin{aligned} \sigma &= E(1-d) \langle \epsilon \rangle_+ - E \langle -\epsilon \rangle_+ \\ Y &= \frac{E \langle \epsilon \rangle_+^2}{2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

+ Lois d'évolution :

$$\begin{aligned} \dot{d} &= \frac{1}{\tau_c} \left\{ 1 - \exp \left(-a \left\langle \frac{Y - Y_0}{Y_c} - d^2 \right\rangle_+^2 \right) \right\} \quad \text{si } d < 1 \\ d &= 1 \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.22)$$

La résolution du problème est effectuée par une méthode incrémentale [Bat82], [Sim98] dans laquelle un schéma de Newmark et une θ -méthode ($\theta = 0,5$) sont utilisés. Les champs solution du problème sont présentés figure 5.6, illustrant clairement la localisation de la déformation au moment de la rupture matériau.

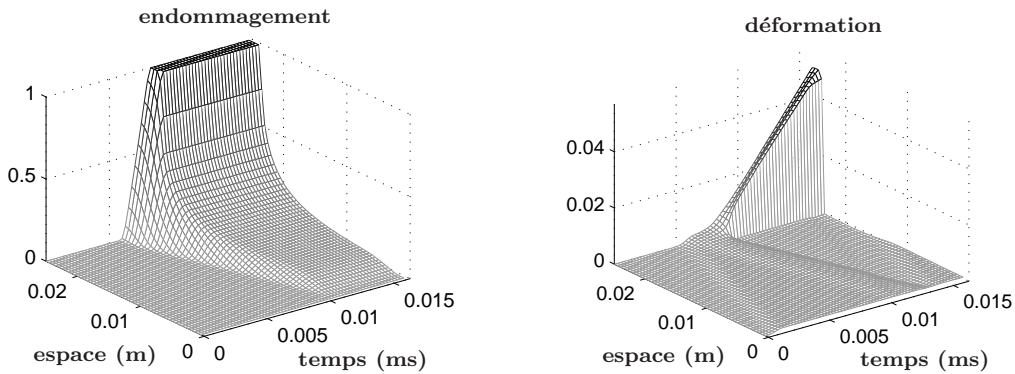


Figure 5.6 – Champs solution du problème direct

Afin de montrer l'avantage du modèle à effet retard utilisé, nous présentons la variable d'endommagement de la poutre obtenue à l'instant final T le long de la poutre pour différents maillages (figure 5.7). Dans cette exemple, l'indépendance de l'endommagement au maillage est confirmée, ce qui n'est pas le cas pour le modèle d'endommagement classique (figure 5.8).

Nous avons donc illustré que les lois d'évolution (5.17) utilisées, issue du méso-modèle à effet retard [All97], permettent de traiter le problème de la localisation des déformations. Ainsi, la simulation devient pertinente jusqu'à la rupture. L'identification des paramètres τ_c , a gouvernant la rupture fait alors l'objectif de la deuxième partie du chapitre.

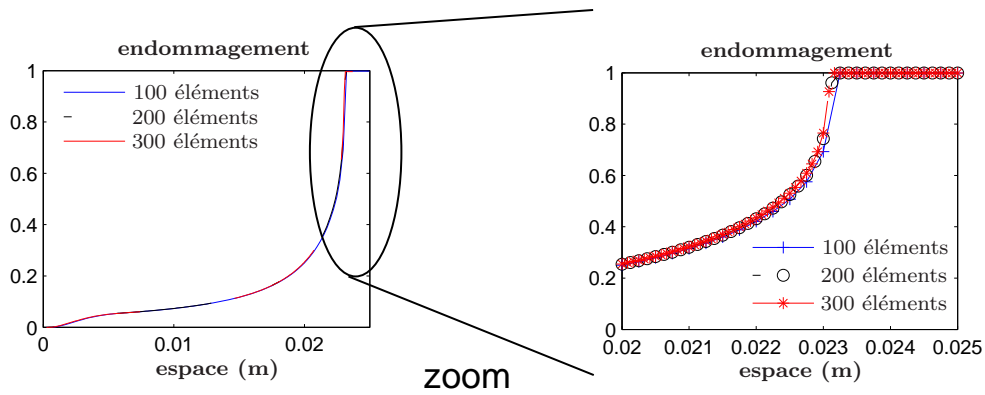


Figure 5.7 – Endommagement à l'instant final pour le modèle avec effet retard et avec différents maillages

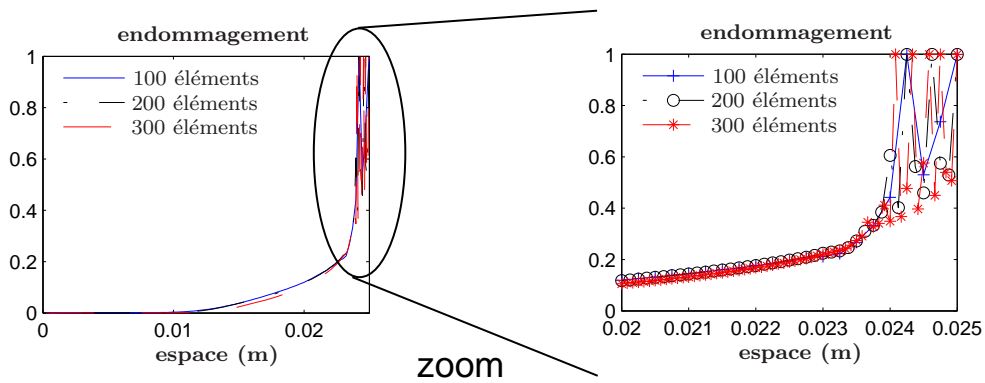


Figure 5.8 – Endommagement à l'instant final pour le modèle classique et avec différents maillages

5.2 Présentation du problème d'identification

5.2.1 Paramètres à identifier

Afin de mettre en œuvre le modèle à effet retard, il est tout d'abord nécessaire d'identifier ses paramètres. En effet, les paramètres E , Y_0 , Y_c peuvent être identifiés de façon robuste à l'aide des essais statiques. En revanche, les paramètres τ_c et a doivent être identifiés sur un essai de rupture dynamique tel que l'essai aux barres d'Hopkinson présenté dans le premier chapitre de ce rapport. Ce type d'essais est d'une part très hétérogène car la rupture se localise dans une bande de faible épaisseur. D'autre part, il provoque des conditions aux limites \tilde{u}_d , \tilde{f}_d fortement corrompues à cause de l'influence brutale de la rupture matériau sur la réponse structurale.

Ici, encore une fois, on voit que la difficulté de l'identification vient principalement du comportement brutale à la rupture du modèle matériau lui-même, c'est la raison pour laquelle, les mesures sont dites "corrompues".

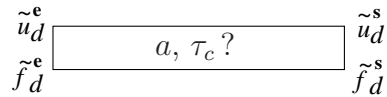


Figure 5.9 – Problème d'identification dans le cas 1D endommageable

5.2.2 Pertinence de la gamme de paramètres étudiée

Pour mener l'identification sur une gamme de paramètres pertinente, il est nécessaire de vérifier que la réponse de la structure change de manière importante sur cette gamme de paramètres. Pour cela, différents calculs directs sont effectués. Les champs d'endommagement et de déformation pour différents jeux de paramètres τ_c , a sont présentés figures 5.10 et 5.11.

Il est clair que le temps caractéristique τ_c influence d'avantage la réponse du modèle que le paramètre a . Cependant, la gamme de paramètres traitée ici est suffisamment large pour que la méthode d'identification proposée soit pertinente.

5.2.3 Choix de l'essai d'identification

La stratégie d'identification utilisée dans ce cas est toujours basée sur l'ERdC modifiée dans l'idée de filtrer les bruits de mesures au moyen d'une approche mécanique. La question qui se pose est de savoir sur quel essai appuyer la démarche pour que les mesures contiennent de l'information sur les paramètres de retard. Or, après la rupture matériau, il est difficile d'estimer si le modèle d'endommagement est encore pertinent. Ceci se traduit d'un point de vue expérimental par le fait que l'exploitation des essais de crash doit être arrêtée à partir d'un certain niveau de déformation pour que les mesures soient représentatives du modèle. Sur l'exemple numérique traité, la rupture provoque

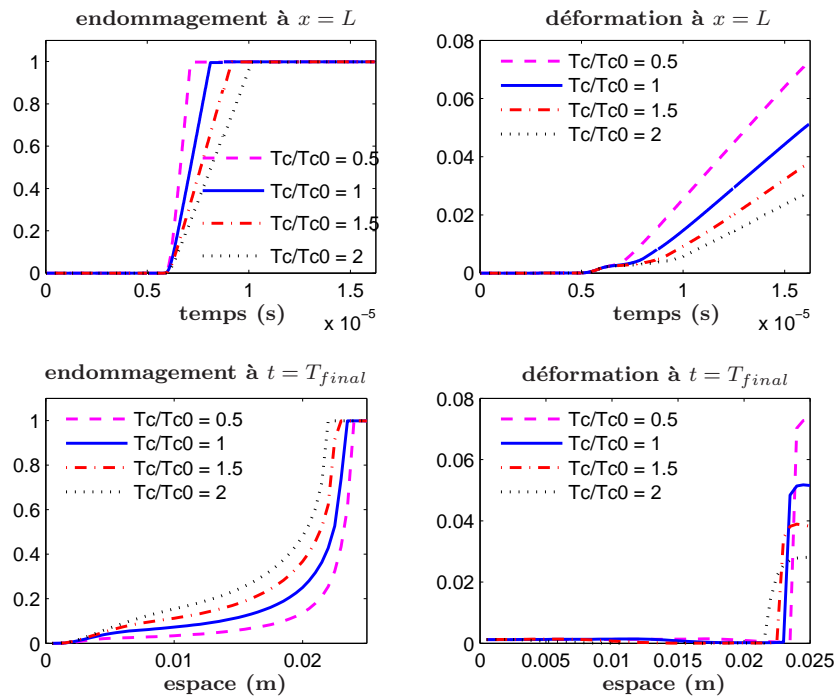


Figure 5.10 – Influence de τ_c sur la réponse de la barre composite

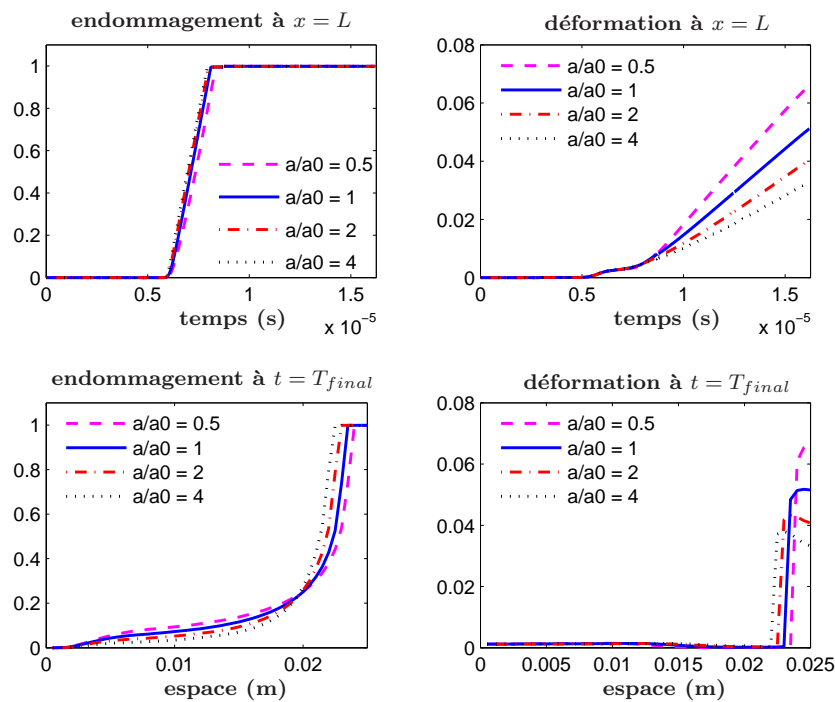


Figure 5.11 – Influence de a sur la réponse de la barre composite

la séparation de la poutre en deux parties distinctes, entraînant une forte évolution des conditions aux limites après la phase post pic, rend difficile la résolution du problème inverse par une stratégie itérative.

Prenant en compte toutes ces remarques, nous allons effectuer l'identification à partir d'essai dynamique pour une poutre constituée de deux matériaux tel que présente figure 5.12 : l'un élastique endommageable à effet retard, l'autre de comportement matériau connu. Expérimentalement, cela consisterait à chercher à stabiliser la structure pendant la rupture.

Dans un essai réel, cette poutre pourrait se composer :

- de plis centraux de fibres de carbone, dont le comportement est élastique endommageable à effet retard, de module d'Young E et où les paramètres τ_c et a doivent être identifiés ;

- de deux plis inférieur et supérieur à fibres aramides pour maintenir la structure en place. Ce matériau est élastique de module d'Young $E_0 = 0,35 E$ et assure donc une stabilité structurelle.

Les sections des deux matériaux utilisées sont égales.

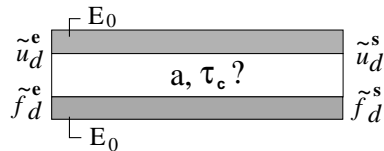


Figure 5.12 – Problème d'identification pour une poutre à deux matériaux

5.2.4 Fabrication des mesures

Les mesures exactes du problème d'identification avec la poutre à deux matériaux sont fabriquées par un calcul direct comme dans le cas élastique (chapitre 3) ou viscoplastique (chapitre 4). Ici, le calcul direct pour la poutre à un seul matériau présenté dans la section 5.1.3 est réutilisé avec les mêmes conditions aux limites mais pour la poutre constituée de deux matériaux illustrée figure 5.13.

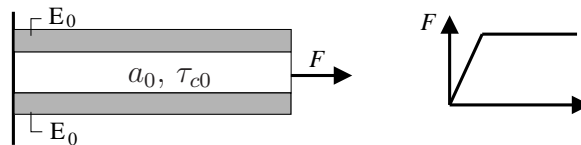


Figure 5.13 – Essai numérique pour la poutre à deux matériaux

Le problème direct est résolu par une méthode incrémentale [Bat82], [Sim98] en utilisant un schéma de Newmark sur le déplacement et une θ -méthode ($\theta = 0,5$) pour

les variables internes. Les champs de déformation et d'endommagement obtenus sont présentés figure 5.14. Cette figure illustre l'avantage d'ajouter les couches élastiques non endommageables. Lorsque la couche au milieu est rompue ($d = 1$), les couches inférieure et supérieure, qui sont élastiques non endommageables, continuent à travailler, autrement dit, l'onde continue à se propager. La zone de rupture ($d = 1$) de la couche du milieu peut donc se propager sans que la déformation de la poutre n'augmente de façon brutale comme dans le cas de la poutre endommageable seule (section 5.1.3).

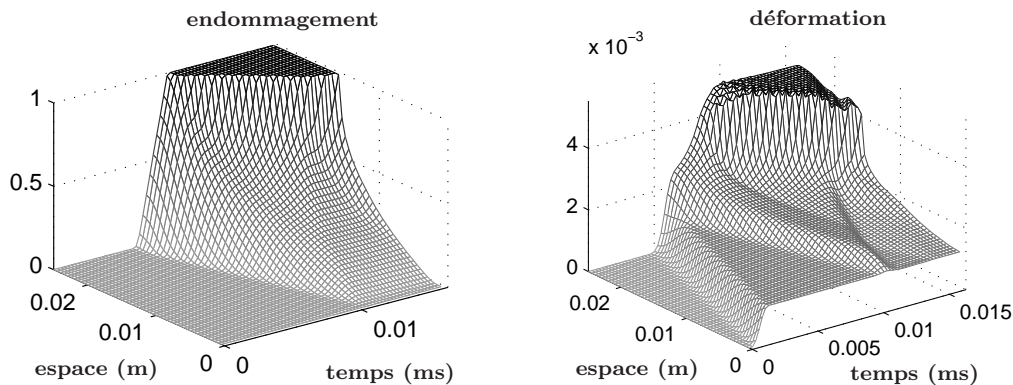


Figure 5.14 – Champs solution du problème direct pour la poutre à deux matériaux

Afin de fabriquer les mesures corrompues, des bruits blancs gaussiens de moyenne nulle sont ajoutés aux conditions aux limites en effort et en vitesse obtenues par le calcul direct précédent. Un exemple de conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20% sur l'écart type est présenté figure 5.15.

5.3 Formulation du problème inverse

Le problème inverse dans ce cas est formulé de manière analogue à ce qui a été fait dans le cas des problèmes élastique (chapitre 3) et viscoplastique (chapitre 4) par la méthode d'ERdC modifiée [Lad83]. La première étape consiste à séparer l'ensemble des relations en deux groupes : les relations fiables et les relations non fiables. Comme les paramètres E , Y_0 , Y_c sont connus à partir d'essais statiques préalables, les équations d'équilibre, les lois d'état et les conditions initiales sont considérées comme fiables. Le groupe non fiable, quant à lui, se compose des lois d'évolution et des conditions aux limites. Plus précisément, ces deux groupes sont présentés dans le tableau 5.2.

Le problème inverse se définit alors comme un problème de minimisation de l'erreur de modèle et des erreurs de mesures sous contraintes. Ce problème de minimisation non linéaire sous contraintes pose des difficultés de résolution comme présenté dans la section 4.2.2.IV pour un comportement non linéaire. Afin d'appliquer la stratégie de résolution itérative issue de la méthode LATIN pour le problème inverse, nous défi-

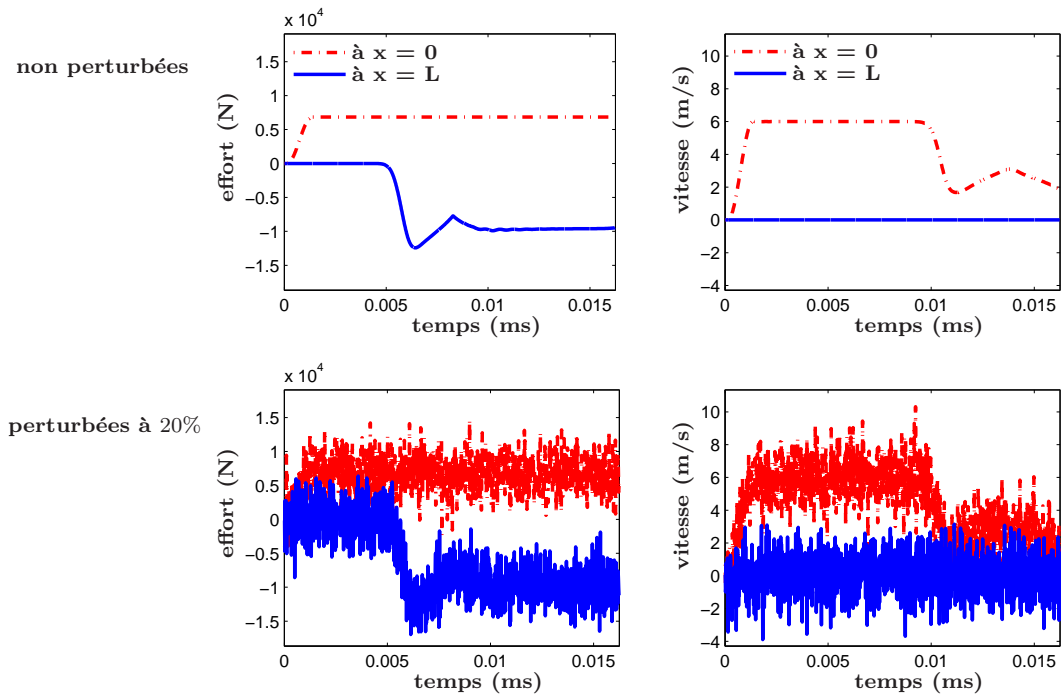


Figure 5.15 – Conditions aux limites non perturbées et perturbées à 20%

<i>Fiable</i>	
Équilibre :	$-\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0$
Lois d'état :	$\sigma = E(1-d) \langle \epsilon \rangle_+ - E \langle -\epsilon \rangle_+ + E_0 \epsilon$ $Y = \frac{E \langle \epsilon \rangle_+^2}{2}$
Conditions initiales :	$u(x, 0) = u_0, \dot{u}(x, 0) = \dot{u}_0 \quad d(x, 0) = 0$
<i>Non fiable</i>	
Conditions aux limites :	\tilde{u}_d et \tilde{f}_d
Lois d'évolution :	$\dot{d} = B(Y, d) \quad \text{si } d < 1$ $d = 1 \quad \text{sinon}$

Tableau 5.2 – Relations fiables et non fiables dans le cas de l'endommagement

nissons de la même manière que pour la viscoplasticité une relation de comportement relâchée, en introduisant deux jeux de variables d'état :

- les variables ϵ, d, σ, Y vérifiant les lois d'état :

$$\begin{cases} \sigma = E(1-d)\langle\epsilon\rangle_+ - E\langle-\epsilon\rangle_+ + E_0\epsilon \\ Y = \frac{E\langle\epsilon\rangle_+^2}{2} \end{cases} \quad (5.23)$$

- les variables ϵ, d, d^e vérifiant les lois d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{d}^e = B(Y, d) & \text{si } d < 1 \\ \dot{d}^e = 0 & \text{si } d = 1 \end{cases} \quad (5.24)$$

où $\dot{d}^e = (1 - H_{(d-1)})B(Y, d)$ avec $H_{(d-1)}$ une fonction de Heaviside

Les deux jeux de variables (5.23) (5.24) définissent donc les relations de comportement relâchées.

Une erreur de modèle de type moindres carrés sur la vitesse d'endommagement est ensuite utilisée. Le problème inverse s'écrit donc :

Trouver les champs $u, \sigma, d, d^e, u_d, f_d$ et les paramètres τ_c, a minimisant :

$$J = \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2}(\dot{d} - \dot{d}^e)^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T |(f_d - \tilde{f}_d)^2|_0^L dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T |(u_d - \tilde{u}_d)^2|_0^L dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \dot{u}, d, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \\ \sigma = E(1-d)\langle\epsilon\rangle_+ - E\langle-\epsilon\rangle_+ + E_0\epsilon, \\ Y = \frac{E\langle\epsilon\rangle_+^2}{2}, \\ \dot{d}^e = (1 - H_{(d-1)})B(Y, d), \\ d \leq 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

La résolution du problème inverse (5.25) est effectuée par un processus en deux étapes :

- Résolution du problème de base pour des paramètres a, τ_c fixés ;
- Évaluation de la fonction coût J défini au problème (5.25) grâce aux champs solution du problème de base afin d'identifier les paramètres du matériau en la minimisant.

Remarques :

Dans le problème d'identification (5.25) l'espace de contrainte ne tient pas compte du fait que l'endommagement ne peut pas diminuer ($\dot{d} \geq 0$). Cela est évidemment non physique. Afin de résoudre ce problème, deux propositions peuvent être considérées :

- La prise en compte de la condition $\dot{d} \geq 0$ dans l'espace des contraintes ;
- L'utilisation d'une formulation discontinue pour les lois d'évolution relâchées :

$$\dot{d} = (1 - H_{(d-1)})(\dot{d}^e + e) \quad (5.26)$$

où e représente d'erreur de modèle : $e = \dot{d} - \dot{d}^e$.

Cette formulation permet de bloquer de l'endommagement $d = 1$ lors de la rupture mais ne garantit pas $\dot{d} \geq 0$.

Cependant, ces deux propositions posent des difficultés pour prendre en compte proprement le changement de l'expression de \dot{d} lors de la rupture par la méthode de traitement numérique développée dans les chapitres précédents.

Dans la suite, nous proposons de résoudre le problème de base, associé au problème inverse (5.25), par une stratégie itérative s'appuyant sur la méthode LATIN adaptée (chapitre 4) avec la prise en compte pragmatique de ces difficultés. En revanche, le résultat obtenu par cette stratégie ne correspond ni à la solution de la première formulation (5.25) ni aux deux autres (voir annexe A et [Bry75]). Autrement dit, il existe des incertitudes sur le fait que le résultat obtenu numériquement correspond à l'optimum de la fonction coût. Toutefois, il vérifie les contraintes du problème inverse (5.25) et permet de bloquer $d = 1$ lors de la rupture. De plus, les résultats d'identification s'appuyant sur ces champs solution semblent satisfaisants (section 5.5).

5.4 Résolution du problème de base

Le problème de base, qui consiste à confronter les mesures au modèle pour un jeu de paramètres τ_c , a fixé, s'écrit à présent comme suit :

Trouver les champs $u, \sigma, d, d^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} (\dot{d} - \dot{d}^e)^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \dot{u}, d \quad - \rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \\ \sigma = E(1-d) \langle \epsilon \rangle_+ - E \langle -\epsilon \rangle_+ + E_0 \epsilon, \\ \dot{d}^e = (1 - H_{(d-1)}) B(Y, d), \\ d \leq 1, \quad \dot{d} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Le problème de base (5.27) dans ce cas diffère de celui du cas viscoplasticité (section 4.5.3) dans la mesure où pour le matériau composite endommageable à effet retard considéré, non seulement les lois d'évolution relâchées sont non linéaires mais également les lois d'état. De plus, une contrainte d'inégalité sur la variable d'endommagement d est

apparue dans l'espace des contraintes, ce qui rend difficile la résolution du problème de base. Cela étant, ces différences n'empêchent pas l'application de la stratégie de résolution itérative issue de la méthode LATIN en conservant la démarche du traitement de toutes les équations non linéaires à l'étape locale. Elle est décrite précisément dans les parties suivantes.

5.4.1 Séparation des difficultés

Tout d'abord, les relations du problème (5.27) sont séparées en deux groupes :

- le groupe des relations locales en variables d'espace, éventuellement non linéaires. Il s'agit ici des lois d'état et des lois d'évolution relâchées.

L'ensemble des solutions de ce premier groupe d'équations définit un espace de relation de comportement relâchée noté Γ :

$$\Gamma = \left\{ \widehat{s} = (\widehat{\sigma}, \widehat{d}^e, \widehat{\epsilon}, \widehat{d}) \mid \widehat{\sigma} = E(1 - \widehat{d}) \langle \widehat{\epsilon} \rangle_+ - E \langle -\widehat{\epsilon} \rangle_+ + E_0 \widehat{\epsilon}, \widehat{d} \leq 1, \dot{\widehat{d}} \geq 0 \right. \\ \left. \text{et } \dot{\widehat{d}}^e = (1 - H_{(\widehat{d}-1)}) B(\widehat{\epsilon}, \widehat{d}) \right\}$$

- le groupe des relations linéaires, éventuellement globales en variables d'espace. L'ensemble des solutions du deuxième groupe d'équations définit un espace d'admissibilité noté A_d :

$$A_d = \left\{ s = (\sigma, d^e, u, d, f_d, u_d) \mid -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, d \leq 1, \dot{d} \geq 0, \text{CI en } u, \dot{u}, d, \right. \\ \left. \text{et } s \text{ minimise } J \right\}$$

La solution s_{ex} du problème inverse est obtenue comme l'intersection de ces deux espaces :

$$s_{ex} = \Gamma \cap A_d \quad (5.28)$$

5.4.2 Résolution itérative en deux étapes

La résolution du problème de base est effectuée de façon itérative avec deux étapes à chaque itération. Supposons qu'à l'itération n , tous les champs solution approximatés s_n de la solution du problème de base s_{ex} sont obtenus, nous cherchons la solution s_{n+1} "meilleure" que s_n au travers des deux étapes suivantes.

5.4.2.1 Étape locale

Cette étape consiste à résoudre les équations non linéaires de la relation de comportement relâchée. La direction de recherche à partir de l'étape globale précédente utilisée est la direction verticale, c'est-à-dire $\widehat{\epsilon} = \epsilon_n$ et $\widehat{d} = d_n$. Cela permet d'éviter une résolution des équations à la fois non linéaires et avec des conditions d'inégalité.

Dans cette étape,

+ les données sont : $s_n = (\epsilon_n, d_n)$

+ les inconnues à déterminer sont : $\hat{s} = (\hat{\epsilon}, \hat{d}, \hat{\sigma}, \hat{d}^e)$

+ les équations à résoudre sont :

$$\begin{cases} \hat{\sigma} = E(1 - \hat{d}) \langle \hat{\epsilon} \rangle_+ - E \langle -\hat{\epsilon} \rangle_+ + E_0 \hat{\epsilon} \\ \hat{Y} = \frac{E \langle \hat{\epsilon} \rangle_+^2}{2} \\ \hat{d}^e = (1 - H_{(\hat{d}-1)}) \frac{1}{\tau_c} \left\{ 1 - \exp \left(-a \left\langle \frac{\hat{Y} - Y_0}{Y_c} - \hat{d}^2 \right\rangle_+ \right) \right\} \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\text{avec, } \begin{cases} \hat{\epsilon} = \epsilon_n \\ \hat{d} = d_n \end{cases} \quad (5.30)$$

Ce problème est alors simplement un calcul de type “direct” aux points de Gauss.

5.4.2.2 Étape globale

Cette étape cherche dans l'espace A_d des nouveaux éléments $s_{n+1} = s = [\sigma, d^e, u, d, u_d, f_d]$ minimisant la fonction coût J et vérifiant l'équation d'équilibre, les conditions initiales et les conditions d'inégalité sur d et \dot{d} suivant une direction de descente H^- à partir des éléments \hat{s} de l'espace Γ obtenus à l'étape locale.

Dans cette étape,

+ les données sont : $\hat{s} = (\hat{\epsilon}, \hat{d}, \hat{\sigma}, \hat{d}^e)$

+ les inconnues à déterminer sont : $s_{n+1} = s = (\epsilon, d, \sigma, d^e, u_d, f_d)$

+ le problème à résoudre est :

Trouver les champs $u, \sigma, d, d^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} (\dot{d} - \dot{d}^e)^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L dt$$

sous les contraintes :

$$u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \dot{u}, d, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \quad d \leq 1, \quad \dot{d} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma - \hat{\sigma} \\ \dot{d}^e - \hat{d}^e \end{bmatrix} = H^- \begin{bmatrix} \epsilon - \hat{\epsilon} \\ d - \hat{d} \end{bmatrix}$$

(5.31)

Ce problème est un problème de minimisation sous contraintes notamment d'inégalité ($d \leq 1, \dot{d} \geq 0$). La prise en compte de ces contraintes surtout de la dernière dans le calcul est délicat vu l'outil de traitement numérique utilisé dans ce travail, à savoir l'approche basée sur l'équation de Riccati.

Nous avons donc choisi d'utiliser une direction de recherche dite tangente modifiée et d'imposer le taux d'endommagement à zéro lors de la rupture :

- la direction de descente tangente modifiée s'écrit :

$$H^- = \begin{bmatrix} H_{11}^- & H_{12}^- \\ H_{21}^- & H_{22}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \epsilon} & (1 - H_{(\hat{d}-1)}) \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{d}} \\ \frac{\partial \hat{d}^e}{\partial \epsilon} & (1 - H_{(\hat{d}-1)}) \frac{\partial \hat{d}^e}{\partial \hat{d}} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

- on impose $\dot{\hat{d}} = 0$ si $\hat{d} = 1$.

Ce choix permet d'obtenir par la résolution itérative une solution vérifiant toutes les équations du problème de base sauf la contrainte d'inégalité $\dot{\hat{d}} \geq 0$ (et sa équation adjointe associée) avant la rupture. Autrement dit, dans la résolution itérative, la contrainte $\dot{\hat{d}} \geq 0$ avant la rupture est relâchée. Cependant, à la convergence de la résolution itérative, il est vu que cette contrainte n'est pas activée. Il resterait toutefois à justifier que la solution obtenue est bien celle du problème de base.

La justification du choix de la direction de descente est présentée dans l'annexe A.

Le problème à résoudre dans l'étape globale s'écrit alors :

Trouver les champs $u, \sigma, d, d^e, u_d, f_d$ minimisant :

$$J = \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} (\dot{\hat{d}} - \dot{d}^e)^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T \left| (f_d - \tilde{f}_d)^2 \right|_0^L dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \left| (u_d - \tilde{u}_d)^2 \right|_0^L dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} & u \text{ CA à } u_d, \quad \sigma \text{ DA à } f_d, \quad \text{CI en } u, \dot{u}, d, \quad -\rho \ddot{u} + \text{div}(\sigma) = 0, \\ & \begin{bmatrix} \sigma - \hat{\sigma} \\ \dot{d}^e - \hat{d}^e \end{bmatrix} = H^- \begin{bmatrix} \epsilon - \hat{\epsilon} \\ d - \hat{d} \end{bmatrix} \\ & \dot{\hat{d}} = 0 \quad \text{si } \hat{d} = 1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

La résolution du problème (5.33) est effectuée dans cette partie par l'approche basée sur l'équation de Riccati comme dans le cas élastique et viscoplastique sans tenir compte la condition sur $\dot{\hat{d}}$. Cette dernière n'est prise en compte que lors de la résolution de l'équation d'évolution de q (voir système d'équations (3.3)).

Nous projetons tout d'abord le problème (5.33) dans un espace EF :

$$\begin{cases} u(x, t) = \Phi(x) U(t); & \epsilon(x, t) = B(x) U(t) \\ d(x, t) = \Phi_d(x) D(t); & d^e(x, t) = \Phi_d(x) d^e(t) \end{cases} \quad (5.34)$$

avec $\Phi(x)$ la fonction de forme EF linéaire et $\Phi_d(x)$ la fonction de forme constante par élément.

Le problème (5.33) sans la contrainte sur \dot{d} devient alors :

Trouver les champs $U, D, D^e, \Pi F$ minimisant :

$$J = \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{D} - \dot{D}^e)^T A_d (\dot{D} - \dot{D}^e) dt + \int_0^T \frac{\alpha}{2} (\Pi F - \tilde{F}_d)^T (\Pi F - \tilde{F}_d) dt \\ + \int_0^T \frac{\beta}{2} (\Pi U - \tilde{U}_d)^T (\Pi U - \tilde{U}_d) dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} M \ddot{U} + \mu K \dot{U} + A_{11} U + A_{12} D + \hat{S}_1 = \Pi F \\ \dot{D}^e = A_{21} U + A_{22} D + \hat{S}_2 \\ \text{CI en } U, \dot{U}, D \end{cases} \quad (5.35)$$

avec les notations :

$$\begin{cases} A_d = \int_0^L \Phi_d^T(x) \Phi_d(x) dx \\ A_{11} = \int_0^L B^T(x) H_{11} B(x) dx \\ A_{12} = \int_0^L B^T(x) H_{12} \Phi_d(x) dx \\ A_{21} = \int_0^L H_{21} B(x) dx \\ A_{22} = \int_0^L H_{22} \Phi_d(x) dx \\ \hat{S}_1 = \int_0^L B^T(x) (\hat{\sigma} - H_{11} \hat{\epsilon} - H_{12} \hat{d}) dx \\ \hat{S}_2 = \int_0^L (\hat{d}^e - H_{21} \hat{\epsilon} - H_{22} \hat{d}) dx \\ \Pi U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_{Ne} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.36)$$

Ceci permet de réécrire le problème sous une forme linéaire quadratique classique :

Trouver les champs q, e minimisant :

$$J(q, e) = \int_0^T \frac{1}{2} e^T R e + \frac{1}{2} (C q - \tilde{U}_d)^T Q (C q - \tilde{U}_d)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{q} = A q + G e + S_t \\ q(0) = 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = [U \quad \dot{U} \quad D]^T, \\ A = \begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ -M^{-1} A_{11} & -M^{-1} \mu K & -M^{-1} A_{12} \\ A_{31} & 0 & A_{32} \end{bmatrix}, \\ R = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & \beta \Pi^T \Pi \end{bmatrix}, \\ Q = \alpha I_d, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e = \begin{bmatrix} \dot{D} - \dot{D}^e \\ \Pi F - \tilde{F}_d \end{bmatrix}, \\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M^{-1} \Pi^T \\ A_{31} & 0 \end{bmatrix}, \\ S_t = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \Pi^T (\tilde{F}_d - \hat{S}_1) \\ \hat{S}_3 \end{bmatrix}, \\ C = [\Pi \quad 0 \quad 0], \end{array}$$

Le problème (5.37) est résolu par l'approche basée sur l'équation de Riccati. Comme dans le cas viscoplastique, les matrices A et G dans ce cas dépendent du temps. L'équation de Riccati doit donc être résolue numériquement par un schéma d'intégration tel que Runge Kutta d'ordre 4.

5.4.2.3 Critère de convergence

Comme dans le cas viscoplastique, un indicateur d'erreur permettant d'arrêter le calcul est nécessaire car la résolution est itérative.

Dans la résolution du problème direct avec l'endommagement à effet retard par la méthode LATIN, Douchin [Dou00] a proposée un indicateur d'erreur en dissipation en écrivant la loi d'endommagement sous la forme similaire à celle de la viscoplasticité à écrouissage isotrope de Prandtl-Reuss.

Cependant, comme dans le cas viscoplastique, cet indicateur d'erreur ne peut pas être mis en œuvre ici car la relation de comportement est relâchée dans le cas du problème inverse. Nous allons donc estimer la qualité de la solution obtenue par la vérification des équations de l'étape locale par les quantités obtenues à l'étape globale, en introduisant les deux indicateurs suivants :

$$\eta_1^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L [\sigma - (E(1-d) \langle \epsilon \rangle_+ - E \langle -\epsilon \rangle_+ + E_0 \epsilon) dx]^2}{\int_0^T \int_0^L [\sigma^2 + (E(1-d) \langle \epsilon \rangle_+ - E \langle -\epsilon \rangle_+ + E_0 \epsilon)^2 dx dt]} \right] \quad (5.38)$$

$$\eta_2^2 = \sup_{t < T} \left[\frac{\int_0^L [\dot{D}^e - B(\epsilon, d) dx]^2}{\int_0^T \int_0^L [(\dot{D}^e)^2 + (B(\epsilon, d))^2 dx dt]} \right] \quad (5.39)$$

5.4.2.4 Étape de relaxation

Numériquement, un changement important des champs solution au cours des itérations a été constaté pour la résolution d'un problème direct avec endommagement par la méthode LATIN surtout dans les zones fortement endommagées ($d \approx 1$). Dans

[Lad99a], l'auteur a proposé de régulariser la solution obtenue à chaque itération LATIN par une combinaison de cette solution avec celle de l'itération précédente. Dans le cas dynamique, la nécessité de cette étape de relaxation est illustrée figure 5.16, dans laquelle la convergence de la stratégie LATIN avec ou sans l'étape de relaxation est présentée.

Les champs solution à l'itération $(n + 1)$ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} d_{n+1} = 0,7 d_{globale}^{n+1} + 0,3 d_n \\ \epsilon_{n+1} = 0,7 \epsilon_{globale}^{n+1} + 0,3 \epsilon_n \end{cases} \quad (5.40)$$

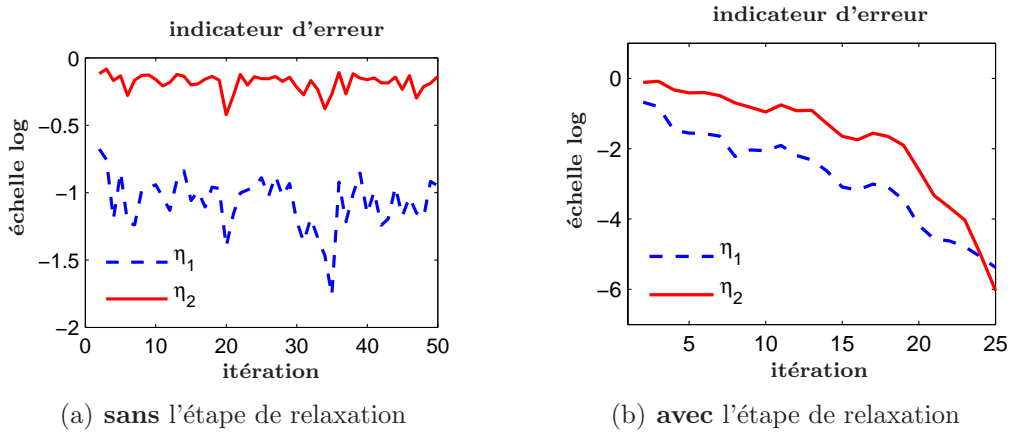


Figure 5.16 – Influence de l'étape de relaxation sur la convergence de la stratégie de résolution du problème de base pour les paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées

5.4.3 Convergence de la stratégie de résolution du problème de base

La figure 5.17 représente l'endommagement à proximité de l'encastrement au cours des itérations de la stratégie de résolution du problème de base pour les paramètres matériau de référence ($a = a_0, \tau_c = \tau_{c0}$) et des mesures non perturbées.

Au cours des premières itérations, l'écart entre les champs d'endommagement d^e , \hat{d}^e vérifiant respectivement les lois d'évolution relâchées aux étapes globale et locale est assez grand. Cette écart diminue au cours des itérations et se concentre autour du moment de la rupture ($d = 1$), à partir de la 5^{ème} itération, ce qui est en fait dû au comportement brutal de la rupture. Cela explique également le nombre d'itérations plus important dans le cas de l'endommagement que dans le cas viscoplastique pour que la résolution itérative converge. La convergence est encore plus lente pour de mauvais paramètres matériau a et τ_c (figure 5.18).

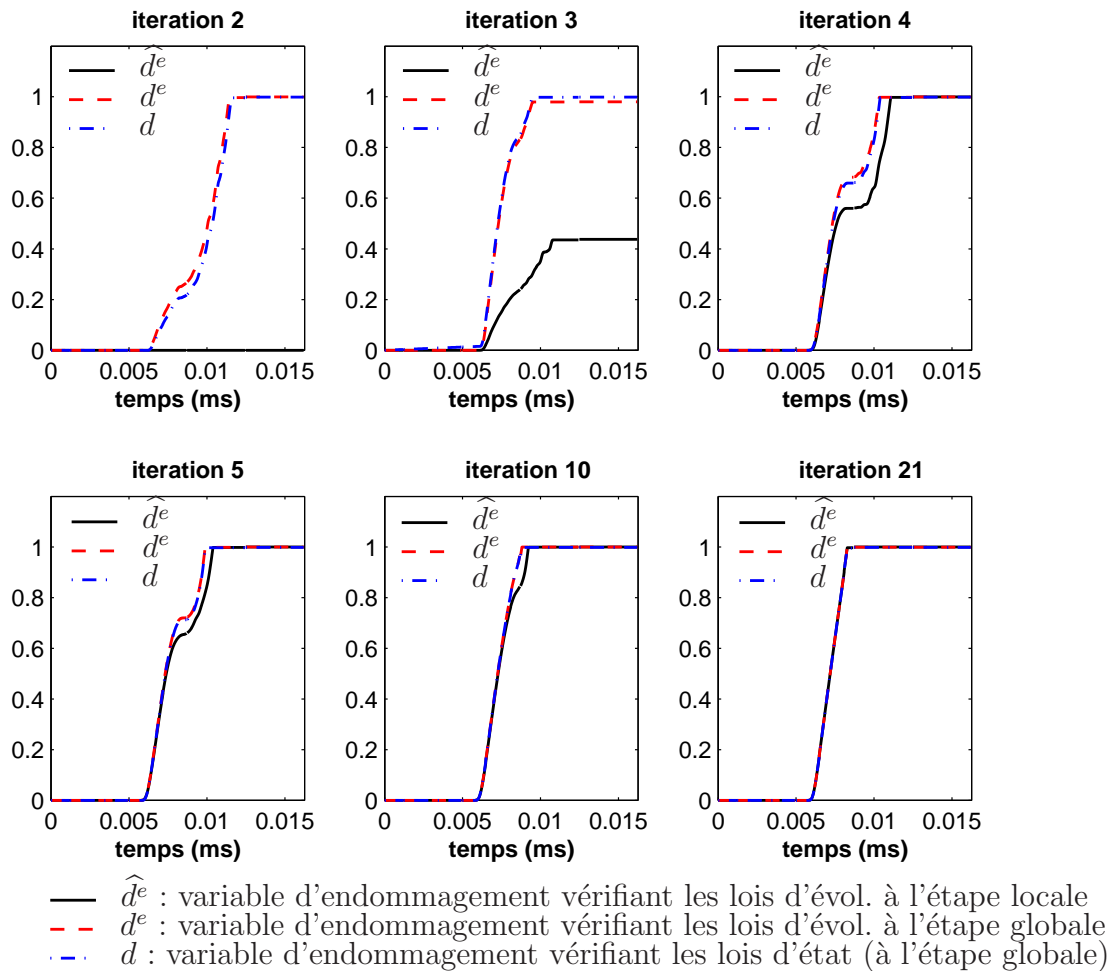
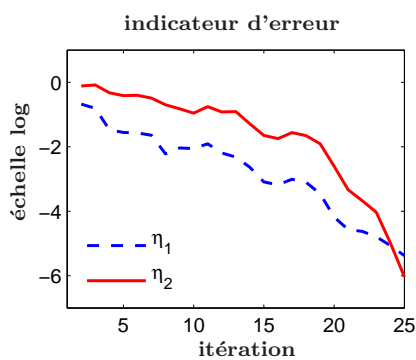
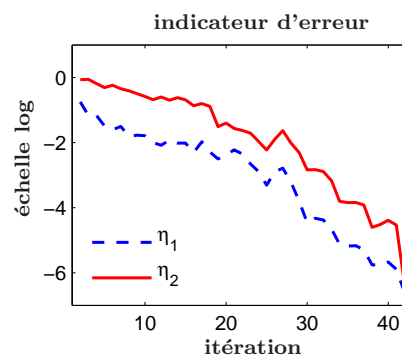


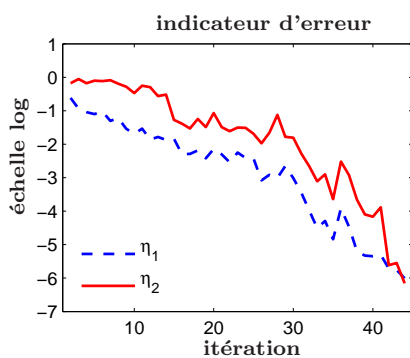
Figure 5.17 – Variables d'endommagement à proximité de l'encastrement au cours des itérations pour des paramètres matériau de référence $\tau_c = \tau_{c0}$, $a = a_0$ et de mesures non perturbées



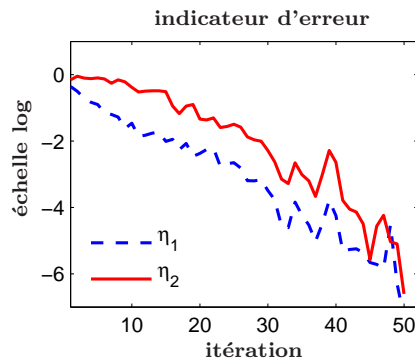
(a) cas 1 : $\tau_c/\tau_{c0} = 1$, $a/a_0 = 1$,
mesures : non perturbées



(b) cas 2 : $\tau_c/\tau_{c0} = 0.5$, $a/a_0 = 1$,
mesures : non perturbées



(c) cas 3 : $\tau_c/\tau_{c0} = 0.5$, $a/a_0 = 1$,
mesures : perturbées à 20%



(d) cas 4 : $\tau_c/\tau_{c0} = 0.5$, $a/a_0 = 1$,
mesures : perturbées à 40%

Figure 5.18 – Convergence de la stratégie LATIN pour différents jeux de paramètres matériau et différents niveaux de perturbation de mesures

5.4.4 Études des champs solution du problème de base

5.4.4.1 Pour des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées

Comme dans le cas élastique et viscoplastique, le cas idéal des paramètres matériau de référence et de mesures non perturbées est tout d'abord étudié. Dans ce cas, la solution de référence obtenue dans la simulation directe pour fabriquer les mesures exactes est également celle du problème de base puisqu'elle annule la fonction coût J . Ceci est illustré figure 5.19 dans laquelle on présente le champ d'endommagement obtenu par le problème de base et son écart à de celui du calcul de référence.

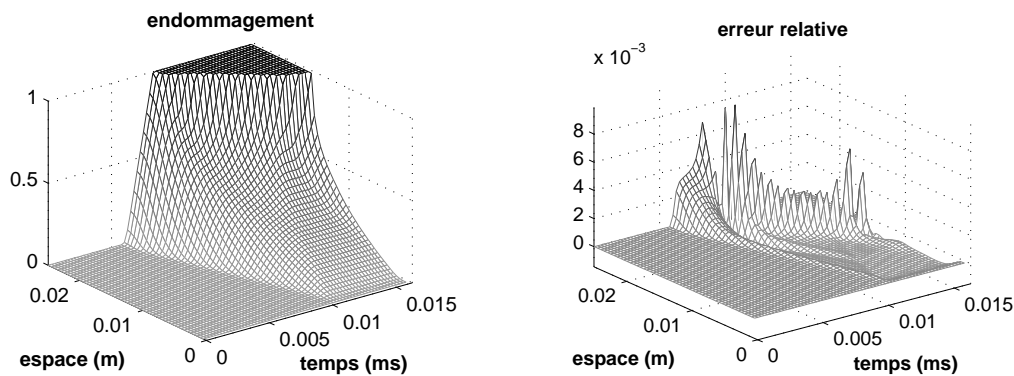


Figure 5.19 – Champ d'endommagement obtenu par le problème de base et son erreur relative par rapport à celui de référence dans le cas des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées

Cette erreur relative, qui n'est pas numériquement nulle (de l'ordre de $6 \cdot 10^{-3}$), s'explique notamment par le fait que les schémas d'intégration utilisés dans le calcul direct sont un schéma de Newmark et une θ -méthode, tandis que ce qui est utilisé pour le problème de base est un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Il est intéressant de noter que le même ordre de grandeur est trouvé lorsqu'on compare les champs solution obtenus par deux calcul direct : l'un avec une méthode incrémentale utilisant le schéma de Newmark, la θ -méthode et l'autre avec la méthode LATIN utilisant le schéma de Runge-Kutta. Toutefois, cette différence est considérée comme petite par rapport aux erreurs obtenues pour la gamme de paramètres a , τ_c ou aux perturbations de mesures traitées.

La différence relative entre les vitesses d'endommagement \dot{d} et \dot{d}^e , qui représente l'erreur de modèle, est présentée figure 5.20.

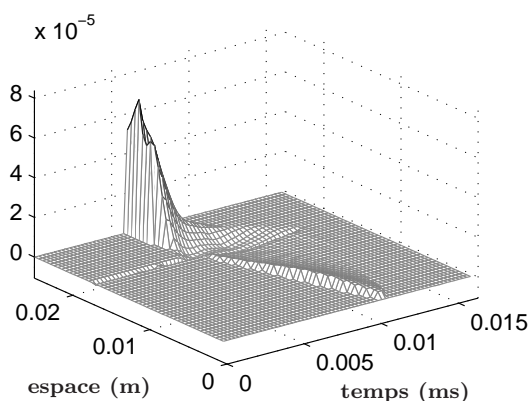


Figure 5.20 – Différence relative entre \dot{d} et \dot{d}^e pour des paramètres matériau de référence et des mesures non perturbées

5.4.4.2 Pour de mauvais paramètres matériau et des mesures non perturbées

Dans le cas de mauvais paramètres matériau, les champs solution du problème de base ne sont plus compatibles avec la relation de comportement et les mesures. La vitesse d'endommagement \dot{d} vérifiant les lois d'état et celle vérifiant les lois d'évolutions \dot{d}^e ne peuvent donc pas être identiques. Cette différence relative est présentée figure 5.21.

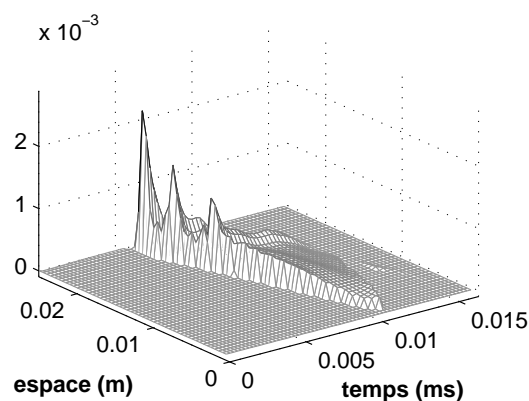


Figure 5.21 – Différence relative entre \dot{d} et \dot{d}^e pour de mauvais paramètres matériau : $a = a_0$, $\tau_c = 0,5 \tau_{c0}$

Il est clair que cette différence est 100 fois plus grande que celle obtenue dans le cas idéal des paramètres matériau de référence (figure 5.20).

5.5 Identification des paramètres de l'effet retard

Après le problème de base résolu par la stratégie itérative issue de la méthode LATIN, l'étape d'identification des paramètres à effet retard est considérée. Les surfaces représentant la fonction coût en fonction des paramètres matériau a , τ_c pour différents types de conditions aux limites sont présentées figure 5.22.

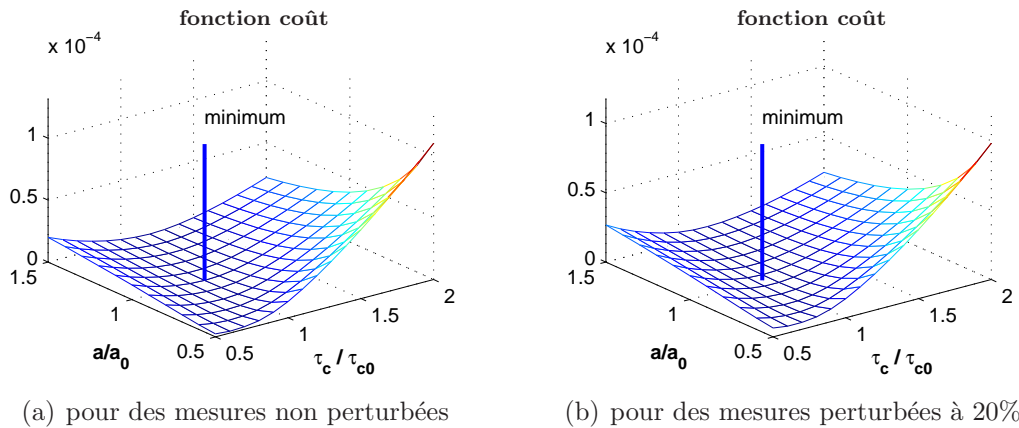


Figure 5.22 – Surfaces représentant la fonction coût - cas 1D endommageable

Il est clair que ces surfaces ont une forme convexe et il semble qu'il n'existe pas de minima locaux même pour des mesures perturbées à 20%. Cependant, ces fonctions coût sont plus plates que celles obtenues dans le cas viscoplastique (figure 4.20). Ceci s'explique par le fait que les paramètres à effet retard a , τ_c , qui caractérisent le comportement brutal de la rupture, interviennent de façon très locale en espace et en temps, tandis que l'influence des paramètres k_v , n_v caractérisant la viscoplasticité est prédominant pour des mesures fabriquées par un chargement de type plateau en effort. Cependant, lorsqu'on étudie en détail ces fonctions coût dans le cas de l'endommagement à effet retard, l'identification à partir de ces fonctions semble relativement facile.

La figure 5.23 représente pour différents niveaux de perturbations les deux coupes de la surface des fonctions coût : l'une pour la constante de retard de référence a_0 et l'autre pour le temps caractéristique de référence τ_{c0} . Il est clair que les fonctions coût ne sont pas très plates, leur minimisation par la combinaison de la méthode de descente à pas optimal et la méthode BFGS ne posera donc pas de difficulté.

De plus, l'écart entre les courbes d'identification pour différents niveaux de perturbation est assez faible, autrement dit, la perturbation affecte peu la fonction coût. L'identification, quant à elle, fonctionne pour des mesures perturbées jusqu'à 20%. Pour des mesures perturbées à 40%, la résolution itérative du problème de base converge (figure 5.18.d) mais les paramètres matériau trouvés sont assez faux, ce qui veut dire que la méthode d'identification proposée est moins robuste dans le cas de l'endommagement à effet retard que dans le cas élastique ou viscoplastique. Cependant, ces résultats

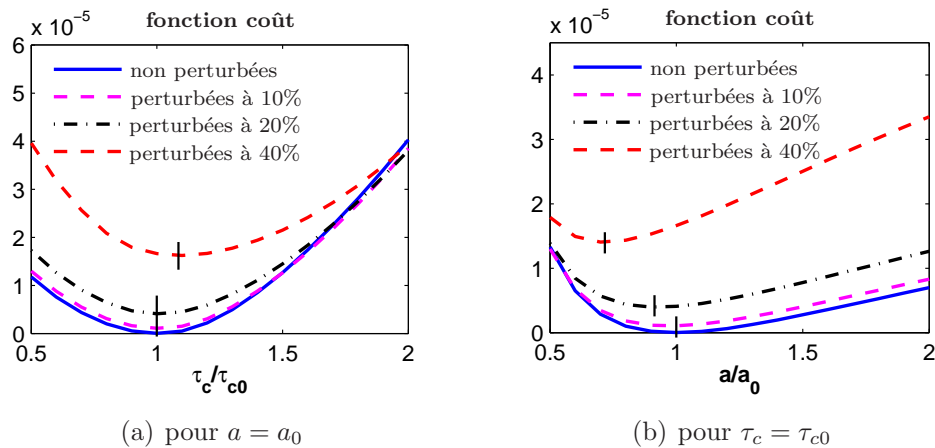


Figure 5.23 – Fonction coût pour différents niveaux de perturbations - cas 1D endommageable

semblent raisonnables étant donné le caractère locale en temps et en espace de la rupture. L'amélioration de la robustesse de la méthode demande des développements de la méthode d'identification dans l'avenir.

5.6 Conclusion

Le travail de ce chapitre a porté sur l'identification des paramètres des lois d'évolution caractérisant la rupture du mésomodèle de composite stratifié par la méthode d'ERdC modifiée.

La formulation du problème d'identification a été similaire à ce qui a été fait dans le cas viscoplastique (chapitre 4). Ainsi, une relation de comportement relâchée a été définie entre les variables d'endommagement vérifiant les lois d'état d et les lois d'évolution d^e , puis une fonction coût constituée par l'écart quadratique sur les vitesses d'endommagement (\dot{d} , \dot{d}^e) et par l'erreur sur les mesures a été minimisée pour trouver les paramètres optimaux. La minimisation pour un paramètre fixé, appelée le problème de base, pose une difficulté technique car des conditions d'inégalité sur la variable d'endommagement apparaissant dans l'espace des contraintes non linéaires.

Une stratégie LATIN adaptée a donc été proposée. Cependant, il a été vu que la prise en compte de ces contraintes d'inégalité nous pose encore certaines difficultés, notamment pour une définition propre des directions de recherche tangentes de la stratégie LATIN. Une conséquence possible est que la solution du problème de base obtenue vérifie bien les contraintes mais ne correspond pas nécessairement à l'optimum de la fonction coût. Les résultats obtenus nous apparaissent néanmoins satisfaisants, puisque la stratégie itérative LATIN adaptée pour la résolution du problème de base converge et l'identification des paramètres du mésomodèle d'endommagement à taux limité fonctionne correctement même pour des mesures perturbées à 20%.

Conclusion

Ce travail concernait la proposition et la résolution des difficultés de mise en œuvre d'une stratégie d'identification robuste, vis-à-vis des perturbations de mesure, d'un comportement jusqu'à rupture en dynamique transitoire.

Son enjeu était de déterminer si la démarche initiée dans les travaux [All03] [Fei03], concernant uniquement l'identification dans le cas de l'élasticité, pouvait s'appliquer aux cas de comportements non linéaires et en particulier de l'endommagement. Développées dans le cas simplifié de problèmes 1D, les réponses apportées dans cette thèse sont encourageantes bien que partielles. Il semble en particulier possible, en dynamique transitoire, d'identifier les paramètres gouvernant l'endommagement jusqu'à la rupture même en présence de bruits importants. Pour cela, un compromis a été recherché entre les principes de base de l'erreur en relation de comportement modifiée et les outils développés dans le cas de l'élasticité pour contrôler les problèmes d'instabilité inhérents au couplage des problèmes direct et rétrograde. Ceci a conduit à formuler le problème sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur quadratique et globale en temps sous des contraintes non linéaires. L'utilisation de la méthode de Riccati [And89] [All05a] [Ngu05] nous a conduit à étendre la méthode LATIN [Lad99a] pour les problèmes inverses en introduisant un espace associé à des relations de comportement relâchées.

La stratégie d'identification proposée a d'abord été testée dans le cas de matériaux viscoplastiques. Ce cas a été utilisé pour mettre en place les ingrédients principaux permettant la résolution du problème de base. Les résultats concernant l'identification s'avèrent pertinents pour des mesures perturbées jusqu'à 40%.

Dans un second temps, l'extension de la méthode au cas du modèle d'endommagement à taux d'endommagement limité a été abordée. La formulation proposée, s'appuyant sur une fonction quadratique, demande de prendre en compte des contraintes d'inégalité ou des contraintes discontinues. Une stratégie itérative issue de la méthode LATIN a été utilisée et fournit des résultats intéressants même s'il existe encore des incertitudes sur l'optimalité de la solution fournie. Toutefois, les résultats d'identification restent pertinents pour des mesures perturbées jusqu'à 20%, ce qui semble raisonnable étant donné le caractère local en temps et en espace de la rupture.

Plusieurs pistes peuvent être envisagées pour une meilleure prise en compte des domaines physiquement acceptables des variables d'endommagement et de leur taux d'évolution. La première consiste à approfondir l'étude des approches permettant de tenir compte des contraintes d'inégalité dans le cadre de la démarche de résolution mise

en place. Une seconde voie consisterait à tenter d'utiliser des fonctionnelles d'erreur en relation de comportement s'appuyant sur des fonctionnelles de type Legendre-Fenchel, fonctionnelles utilisées dans le cadre de la maîtrise des calculs en non linéaire. Ce type de fonctionnelles a été écarté dans ce travail en raison de leur caractère non-quadratique. Une dernière piste, qui a prouvé son intérêt dans le cas linéaire [Fei05] [Fei06], consisterait à minimiser l'ERdC modifiée dans le problème de base pour un jeu de paramètres fixé, puis, grâce aux champs solution obtenus, à identifier les paramètres matériau à partir de l'erreur en relation de comportement seule.

Malgré les questions qui restent ouvertes, dont celles évoquées ci-dessus et celles concernant les aspects temps et volume des calculs, les réflexions et les outils numériques concernant l'identification robuste de modèles de rupture, que constituent cette thèse et les travaux qui l'ont précédée, ont permis de répondre aux principales questions à l'origine de ces travaux.

Plus que l'approfondissement des outils et méthodes développés, il nous semble maintenant à la fois possible et indispensable de s'intéresser en détail aux aspects expérimentaux.

Bien des difficultés risquent d'apparaître lors de la réalisation d'essais à rupture en dynamique, nous espérons néanmoins que ces travaux pourront trouver leur utilité dans ce contexte et aideront à mettre en place une démarche de dialogue essai/calcul dont le développement devra s'appuyer conjointement sur l'expérience acquise à la fois du côté numérique et du côté expérimental.

A

Traiter le problème de base dans le cas endommageable

Afin de ne pas alourdir l'écriture, nous considérons dans cette annexe le problème de base dans le cas simple d'un système masse-ressort :

$$\min J(x, d, y, d^e, f) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (\dot{d} - \dot{d}^e)^2 + \frac{\alpha}{2} (x - \tilde{x})^2 + \frac{\beta}{2} (f - \tilde{f})^2 \right] dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y = C_{(x,d)} = (1-d)k\langle x \rangle_+ + (-k)\langle -x \rangle_+ + k_0 x \\ \dot{d}^e = (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \\ \dot{d} \geq 0 \\ d \leq 1 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où $H_{(d-1)}$ est une fonction de Heaviside : $H_{(d-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } (d-1) < 0 \\ 1 & \text{si } (d-1) \geq 0 \end{cases}$

Tout d'abord, le changement de variables suivant est effectué : $e = \dot{d} - \dot{d}^e$.

Le problème (A.1) devient alors :

$$\min J(x, d, y, d^e, e, f) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} (x - \tilde{x})^2 + \frac{\beta}{2} (f - \tilde{f})^2 \right] dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} m \ddot{x} + y - f = 0 \\ y = C_{(x,d)} = (1-d)k\langle x \rangle_+ + (-k)\langle -x \rangle_+ + k_0 x \\ \dot{d}^e = (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \\ \dot{d} = e + \dot{d}^e \\ \dot{d} \geq 0 \\ d \leq 1 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A.1 Système d'équations non linéaires

Le Lagrangien associée au problème (A.2) est :

$$\begin{aligned} L(x, d, y, e, \lambda, \mu) = & \int_0^T \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} (x - \tilde{x})^2 + \frac{\beta}{2} (f - \tilde{f})^2 \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_1 (m \ddot{x} + C_{(x,d)} - f) dt \\ & + \int_0^T \lambda_3 \left(\dot{d} - e - (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \right) dt \\ & + \int_0^T \mu (d - 1) dt + \int_0^T \pi (-\dot{d}) dt \end{aligned}$$

Les conditions complémentaires associées aux contraintes d'inégalité s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu (d - 1) = 0 \\ \pi (-\dot{d}) = 0 \end{cases}$$

Nous calculons tout d'abord la variation du Lagrangien :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \delta e e dt + \alpha \int_0^T \delta x (x - \tilde{x}) dt + \beta \int_0^T \delta f (f - \tilde{f}) dt \\ & + \int_0^T \delta \lambda_1 (m \ddot{x} + C_{(x,d)} - f) dt + \int_0^T \lambda_1 \left(m \delta \ddot{x} + \frac{\partial C}{\partial x} \delta x + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d + \delta f \right) dt \\ & + \int_0^T \delta \lambda_3 \left(\dot{d} - e - (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_3 \left(\delta \dot{d} - \delta e - \frac{\partial [(1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}]}{\partial x} \delta x - \frac{\partial [(1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}]}{\partial d} \delta d \right) dt \\ & + \int_0^T \delta \mu (d - 1) dt + \int_0^T (\mu \delta d) dt + \int_0^T \delta \pi (-\dot{d}) dt + \int_0^T \pi (-\delta \dot{d}) dt \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Après avoir effectué les intégrations par partie suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\lambda_1 m \delta \ddot{x}) dt &= \int_0^T (\ddot{\lambda}_1 m \delta x) dt + [\dot{\lambda}_1 m \delta x]_0^T - [\lambda_1 m \delta \dot{x}]_0^T \\
\int_0^T (\lambda_3 \delta \dot{d}) dt &= - \int_0^T (\dot{\lambda}_3 \delta d) dt + [\lambda_3 \delta d]_0^T \\
\int_0^T (\pi \delta \dot{d}) dt &= - \int_0^T (\dot{\pi} \delta d) dt + [\pi \delta d]_0^T
\end{aligned} \tag{A.4}$$

la variation du Lagrangien devient :

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^T \delta e e dt + \alpha \int_0^T \delta x (x - \tilde{x}) dt + \beta \int_0^T \delta f (f - \tilde{f}) dt \\
& + \int_0^T \delta \lambda_1 (m \ddot{x} + C_{(x,d)} - f) dt + \int_0^T \lambda_1 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \delta x + \frac{\partial C}{\partial d} \delta d + \delta f \right) dt \\
& + \int_0^T \ddot{\lambda}_1 m \delta x dt + [\dot{\lambda}_1 m \delta x]_0^T - [\lambda_1 m \delta \dot{x}]_0^T \\
& + \int_0^T \delta \lambda_3 (\dot{d} - e - (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}) dt \\
& + \int_0^T \lambda_3 \left(-\delta e - \frac{\partial[(1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}]}{\partial x} \delta x - \frac{\partial[(1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}]}{\partial d} \delta d \right) dt \\
& - \int_0^T (\dot{\lambda}_3 \delta d) dt + [\lambda_3 \delta d]_0^T \\
& + \int_0^T \delta \mu (d - 1) dt + \int_0^T (\mu \delta d) dt - \int_0^T \delta \pi \dot{d} dt + \int_0^T (\dot{\pi} \delta d) dt - [\pi \delta d]_0^T
\end{aligned} \tag{A.5}$$

La condition de stationnarité du Lagrangien ($\delta L = 0$) permet d'aboutir au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu(d - 1) = 0, \quad \mu \geq 0 \\
\pi(-\dot{d}) = 0, \quad \pi \geq 0 \\
e - \lambda_3 = 0 \\
\alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda_3(1 - H_{(d-1)}) \frac{\partial B_{(x,d)}}{\partial x} = 0 \\
\beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\
\lambda_1 \frac{\partial C}{\partial d} - \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \frac{\partial[(1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)}]}{\partial d} + \dot{\pi} + \mu = 0 \\
m \ddot{x} + C_{(x,d)} - f = 0 \\
\dot{d} = e + (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \\
x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad d(0) = d_0 \\
\lambda_1(T) = 0, \quad \dot{\lambda}_1(T) = 0, \quad \lambda_3(T) = 0, \quad \pi(T) = 0
\end{array} \right. \tag{A.6}$$

Il faut remarquer que lors de la rupture matériau ($d = 1$), les deux contraintes d'inégalité $d \leq 1$ et $\dot{d} \geq 0$ sont activées. Cependant, à partir de ce moment, l'activation de

la deuxième inégalité seule permet d'assurer la première. Nous pouvons alors considérer les trois cas suivants :

a. Si $d < 1$ et $\dot{d} > 0$, les deux contraintes d'inégalité ne sont pas activées, le système d'équations (A.6) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d < 1, \quad \mu = 0 \\ \dot{d} > 0, \quad \pi = 0 \\ e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda_3 \frac{\partial B_{(x,d)}}{\partial x} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial d} - \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \frac{\partial B_{(x,d)}}{\partial d} = 0 \\ m\ddot{x} + C_{(x,d)} - f = 0 \\ \dot{d} = e + B_{(x,d)} \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \quad \dot{\lambda}_1(T) = 0, \quad \lambda_3(T) = 0, \quad \pi(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

b. Si $d < 1$ et $\dot{d} = 0$, le système d'équations (A.6) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d < 1, \quad \mu = 0 \\ \dot{d} = 0, \quad \pi > 0 \\ e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial x} - \lambda_3 \frac{\partial B_{(x,d)}}{\partial x} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial d} - \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \frac{\partial B_{(x,d)}}{\partial d} + \dot{\pi} = 0 \\ m\ddot{x} + C_{(x,d)} - f = 0 \\ \dot{d} = e + B_{(x,d)} \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \quad \dot{\lambda}_1(T) = 0, \quad \lambda_3(T) = 0, \quad \pi(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

c. Si $d = 1$, le système d'équations (A.6) s'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = 1 \\ \dot{d} = 0 \quad \pi > 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial d} - \lambda_3 \frac{\partial[(1 - H_{(d-1)})B_{(x,d)}]}{\partial d} + \dot{\pi} = 0 \\ m\ddot{x} + C_{(x,d)} - f = 0 \\ e = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0, \pi(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

Dans ce cas, le multiplicateur de Lagrange π associé à la contrainte d'inégalité ($\dot{d} \geq 0$) est déterminé à partir de la cinquième équation du système A.9. Mathématiquement, la dérivée $\frac{\partial[(1-H_{(d-1)})B_{(x,d)}]}{\partial d}$ vaut l'infini lorsque $d = 1$, le multiplicateur de Lagrange π est donc difficile à déterminer. Cependant, dans ce cas de figure, les équations sur le multiplicateur ne servent qu'à le déterminer.

Nous nous limitons donc aux autres équations, qui permettent de calculer les variables $x, d, e, f, \lambda_1, \lambda_3$.

A.2 Résolution du problème par la stratégie LATIN adaptée :

La résolution du problème (A.2) par la méthode LATIN adaptée est effectuée de façon itérative en deux étapes comme suit. La gestion des contraintes inégalité posant difficulté, on cherchera à les prendre en compte de façon pragmatique à la fin du calcul, la mise en place de l'approche est donc obtenue à partir des contraintes hors contraintes inégalités.

I. Étape locale

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y} = C_{(x,\hat{d})} \\ \hat{d}^e = (1 - H_{(\hat{d}-1)})B_{(x,\hat{d})} \end{array} \right. \quad \text{avec,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x_n \\ \hat{d} = d_n \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

II. Étape globale

$$\min J(x, d, y, d^e, e) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} (x - \tilde{x})^2 + \frac{\beta}{2} (f - \tilde{f})^2 \right] dt$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} m \ddot{x} + y - \tilde{f} = 0 \\ \dot{d} = e + \dot{d}^e \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0, d(0) = 0 \\ \begin{bmatrix} y - \hat{y} \\ \dot{d}^e - \hat{d}^e \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x - \hat{x} \\ d - \hat{d} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Le Lagrangien associé à ce problème de minimisation sous contraintes devient :

$$\begin{aligned} L(x, d, y, e, \lambda, \mu) = & \int_0^T \left(\frac{1}{2} e^2 + \frac{\alpha}{2} (x - \tilde{x})^2 + \frac{\beta}{2} (f - \tilde{f})^2 \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_1 \left(m \ddot{x} - f + H_{11} (x - \hat{x}) + H_{12} (d - \hat{d}) + \hat{y} \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_3 \left(\dot{d} - e - H_{21} (x - \hat{x}) - H_{22} (d - \hat{d}) - \hat{d}^e \right) dt \end{aligned}$$

La variation du Lagrangien s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^T \delta e e dt + \alpha \int_0^T \delta x (x - \tilde{x}) dt + \beta \int_0^T \delta f (f - \tilde{f}) dt \\ & + \int_0^T \delta \lambda_1 \left(m \ddot{x} - f + H_{11} (x - \hat{x}) + H_{12} (d - \hat{d}) + \hat{y} \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_1 \left(m \delta \ddot{x} + \delta f + H_{11} \delta x + H_{12} \delta d \right) dt \quad (\text{A.12}) \\ & + \int_0^T \delta \lambda_3 \left(\dot{d} - e - H_{21} (x - \hat{x}) - H_{22} (d - \hat{d}) - \hat{d}^e \right) dt \\ & + \int_0^T \lambda_3 \left(\delta \dot{d} - \delta e - H_{21} \delta x - H_{22} \delta d \right) dt \end{aligned}$$

Puis l'intégration par partie est utilisée :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\lambda_1 m \delta \ddot{x}) dt &= \int_0^T (\ddot{\lambda}_1 m \delta x) dt + \left[\dot{\lambda}_1 m \delta x \right]_0^T - \left[\lambda_1 m \delta \dot{x} \right]_0^T \\ \int_0^T (\lambda_3 \delta \dot{d}) dt &= - \int_0^T (\dot{\lambda}_3 \delta d) dt + \left[\lambda_3 \delta d \right]_0^T \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ce qui nous permet d'obtenir à partir du système (A.12) le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 H_{11} - \lambda_3 H_{21} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 H_{12} - \lambda_3 H_{22} - \dot{\lambda}_3 = 0 \\ m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y - H_{11}(x - \hat{x}) - H_{12}(d - \hat{d}) - \hat{y} = 0 \\ \dot{d} - e - H_{11}(x - \hat{x}) - H_{12}(d - \hat{d}) - \dot{\hat{d}}^e = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.14})$$

III. À la convergence

À convergence de la stratégie itérative, les quantités (x, d, y, d^e) de l'étape globale coïncident avec celles de l'étape locale $(\hat{x}, \hat{d}, \hat{y}, \hat{d}^e)$. Les relations suivantes peuvent donc être obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \hat{x} \\ d = \hat{d} \\ y = \hat{y} = C(x, d) \\ \dot{d}^e = \dot{\hat{d}}^e = (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} \end{array} \right. \quad (\text{A.15})$$

Le système d'équation (A.14) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 H_{11} - \lambda_3 H_{21} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 H_{12} - \lambda_3 H_{22} - \dot{\lambda}_3 = 0 \\ m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y - C_{(x,d)} = 0 \\ \dot{d} - e - (1 - H_{(d-1)}) B_{(x,d)} = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

a. Si $d < 1$, le système d'équation (A.16) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d < 1 \\ e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 H_{11} - \lambda_3 H_{21} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 H_{12} - \lambda_3 H_{22} - \dot{\lambda}_3 = 0 \\ m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y - C_{(x,d)} = 0 \\ \dot{d} - e - B_{(x,d)} = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

Il est clair que, pour que les systèmes d'équation (A.7) et (A.17) soient équivalents, les directions de recherche doivent être :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & \frac{\partial C}{\partial d} \\ \frac{\partial B}{\partial x} & \frac{\partial B}{\partial d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Le système (A.8) n'est donc pas pris en compte ici. Toutefois, à convergence, on observe que \dot{d} reste toujours positif ou nul, donc cette contrainte n'est pas activée.

b. Si $d = 1$, le système d'équation (A.16) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = 1 \\ e - \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 H_{11} - \lambda_3 H_{21} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 H_{12} - \lambda_3 H_{22} - \dot{\lambda}_3 = 0 \\ m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y - C_{(x,d)} = 0 \\ \dot{d} - e = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Pour que le système d'équations (A.9) se rapproche au mieux du système (A.19), nous imposons $\dot{d} = 0$ lorsque $d = 1$ et utilisons la directions de recherche suivante :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

L'équation permettant de calculer le multiplicateur de Lagrange μ associé à la contrainte d'inégalité, n'est pas prise en compte, mais ne joue pas de rôle pour la détermination des autres variables. Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = 1 \\ \dot{d} = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \alpha(x - \tilde{x}) + m\ddot{\lambda}_1 + \lambda_1 H_{11} - \lambda_3 H_{21} = 0 \\ \beta(f - \tilde{f}) + \lambda_1 = 0 \\ m\ddot{x} + y - f = 0 \\ y - C_{(x,d)} = 0 \\ e = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, d(0) = d_0 \\ \lambda_1(T) = 0, \dot{\lambda}_1(T) = 0, \lambda_3(T) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.21})$$

En résumé, nous avons choisie pour cette stratégie LATIN adaptée une direction de descente H :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial x} & (1 - H_{(d-1)}) \frac{\partial C}{\partial d} \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} & (1 - H_{(d-1)}) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial d} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

et nous avons imposé le taux d'endommagement à zéro lors de la rupture matériau $d = 1$.

Ce choix permet d'écrire le problème sous une forme unique sur tout le temps d'étude afin d'appliquer l'approche basée sur l'équation de Riccati. De plus, la solution obtenue par la stratégie itérative vérifie toutes les équations du problème de base sauf la contrainte sur le taux d'endommagement $\dot{d} \geq 0$ avant la rupture matériau. Cependant, il n'a été observé aucune violation de cette contrainte à la convergence de la stratégie itérative.

Bibliographie

- [All92] **O. Allix et P. Ladevèze, 1992.** Interlaminar interface modelling for the prediction of laminate delamination. *Composite Structures*, 22 :235–242.
- [All97] **O. Allix et J. F. Deü, 1997.** Delay-damage modeling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. *Engineering Transactions*, 45 :29–46.
- [All98] **O. Allix, D. Lévêque et L. Perret, 1998.** Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composite Science and Technology*, 58 :671–678.
- [All03] **O. Allix, P. Feissel et P. Thévenet, 2003.** A delay-damage meso modeling of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers and Structures*, 81(12) :1177–1191.
- [All05a] **O. Allix, P. Feissel et H. M. Nguyen, 2005.** Identification strategy in the presence of corrupted measurements. *Engineering Computations*, 22(5/6) :487–504.
- [All05b] **O. Allix, H. M. Nguyen et P. Feissel, 2005.** A first strategy for the application of the modified constitutive error concept in nonlinear dynamics for corrupted measurements. Dans **Oñate et Owen**, éditeurs, *8th International Conference on Computational Plasticity*.
- [And89] **B. D. O. Anderson et J. B. Moore, 1989.** *Optimal Control : Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall.
- [And92] **S. Andrieux et A. B. Abda, 1992.** Identification de fissures planes par une donnée de bord unique : un procédé direct de localisation et d'identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathématique*, 315(12) :1323–1328.
- [And95] **S. Andrieux et F. Voltaire, 1995.** Stress identification in steam generator tubes from profile measurements. *Nuclear Engineering and Design*, 158(2/3) :417–427.
- [And99] **S. Andrieux, A. Ben Abda et H. D. Bui, 1999.** Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15(1) :59–65.
- [Aok98] **S. Aoki, K. Amaya et F. Terui, 1998.** A new method for identifying elastic/visco-plastic material constants. Dans **S. Idelsohn, E. Oñate et E. Dvorkin**, éditeurs, *Computational Mechanics*.

- [Arn84] **W. F. Arnold et A. J. Laub, 1984.** Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic riccati equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 72 :1946–1954.
- [Bad91] **V. Badeva et V. Morozov, 1991.** *Problèmes incorrectement posés : théorie et applications.* Masson.
- [Bar72] **R. H. Bartels et G. W. Stewart, 1972.** Solution of the matrix equation $A.X + X.B = C$. *Communications of the ACM*, 15 :820–826.
- [Bat82] **K. J. Bathe, 1982.** *Finite element procedure in engineering analysis.* Prentice Hall.
- [Baz76] **Z. P. Bazant, 1976.** Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 102 :331–344.
- [Baz83] **Z. P. Bazant et B. H. Oh, 1983.** Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, 16 :155–177.
- [Bel65] **R. Bellman, 1965.** *Dynamic programming.* Princeton University Press.
- [Bel88] **T. Belytschko, J. Fish et B. E. Engelmann, 1988.** A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(1) :59–89.
- [Bon87] **L. Boniface, P. A. Smith, S. L. Ogin et M. G. Bader, 1987.** Observations on transverse ply crack growth in (02/902)s CFRP laminate under monotonic and cyclic loading. Dans *6th International Conference on Composite Materials*, tome 3, pages 156–165.
- [Bon05] **M. Bonnet et A. Constantinescu, 2005.** Inverse problems in elasticity. *Inverse Problem*, 21 :R1–R50.
- [Bou98] **L. Bourgeois, 1998.** *Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité.* Thèse de doctorat, École Polytechnique.
- [Bou05] **L. Bourgeois, 2005.** A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace’s equation. *Inverse Problem*, 21(3) :1087–1104.
- [Bry75] **A. E. Bryson et Y. C. Ho, 1975.** *Applied optimal control : optimisation, estimation and control.* Taylor & Francis.
- [Bui93] **H. D. Bui, 1993.** *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux.* Eyrolles.
- [Bui04] **H. D. Bui, A. Constantinescu et H. Maigre, 2004.** Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, 20 :993–1001.
- [Cai94] **G. Cailletaud et P. Pilvin, 1994.** Identification and inverse problems related to material behavior. Dans **H. D. Bui et M. Tanaka**, éditeurs, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 79–86. Balkema.
- [Cal80] **A. P. Calderon, 1980.** On an inverse boundary value problem. Dans *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, pages 65–73. Soc. Brasileira de Matematica.

-
- [Cha98] **R. Chambon, D. Caillerie et N. E. Hassan, 1998.** One-dimensional localisation studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4) :637–656.
- [Cha03] **H. Chalal, F. Meraghni, F. Pierron et M. Grédiac, 2003.** Identification directe d'un modèle d'endommagement de matériaux composites à partir de champs cinématiques par la méthode des champs. Dans **Y. Rémond et J. Lamon**, éditeurs, *Comptes Rendus des 13^e Journées Nationales sur les Composites*, tome 1, pages 483–492. AMAC.
- [Cho98] **A. Chouaki, P. Ladeveze et L. Proslier, 1998.** Updating structural dynamic models with emphasis on the damping properties. *AIAA Journal*, 36(6) :1094–1099.
- [Cim00] **A. Cimetière, F. Delvare et F. Pons, 2000.** Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 328(9) :639–644.
- [Cim01] **A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua et F. Pons, 2001.** Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553–570.
- [Con95] **A. Constantinescu, 1995.** On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 1 :293–315.
- [Con01] **A. Constantinescu et N. Tardieu, 2001.** On the identification of elastoviscoplastic constitutive laws from indentation tests. *Inverse Problems in Engineering*, 9 :19–44.
- [Con03] **A. Constantinescu, D. Ivaldi et C. Stolz, 2003.** Identification du chargement thermique transitoire par contrôle optimal. Dans *Actes du 6^e Colloque National en Calcul des Structures*, tome 1, pages 185–192. CSMA.
- [Cor01] **A. Corigliano et M. Ricci, 2001.** Rate-dependent interface models : formulation and numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 38(4) :547–576.
- [Cor04] **A. Corigliano et S. Mariani, 2004.** Parameter identification in explicit structural dynamics : performance of the extended Kalman filter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :3807–3835.
- [Cor05] **A. Corigliano, A. Ghisi et S. Mariani, 2005.** State and parameter identification in nonlinear structural dynamics : an unscented Kalman filter approach. Dans **Oñate et Owen**, éditeurs, *8th International Conference on Computational Plasticity*.
- [Cou00] **D. Coutellier et P. Rozycki, 2000.** Multi-layered multi-material finite element for crashworthiness studies. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(8) :841–851.

- [Cou05] **G. Court, O. Allix et M. Mahé, 2005.** Modèle à taux de croissance limité pour la prévision de la rupture ductile de structures en grandes déformations. Dans *17^e Congrès Français de Mécanique*.
- [Cul94] **J. C. Culioli, 1994.** *Introduction à l'optimisation*. Ellipses.
- [dB92] **R. de Borst et H. B. Mühlhaus, 1992.** Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35 :521–540.
- [dB95] **R. de Borst, O. Heeres et A. Benallal, 1995.** A gradient enhanced damage model : theory and computation. Dans **Owen, Oñate et Hinton**, éditeurs, *Computational plasticity*, pages 975–986. Pineridge press.
- [dB06] **R. de Borst et J. J. C. Remmers, 2006.** Computational modelling of delamination. *Composites Science and Technology*, 66(6) :713–722.
- [Der04] **A. Deraemaeker, P. Ladevèze et T. Romeuf, 2004.** Model validation in the presence of uncertain experimental data. *Engineering Computations*, 21(8) :808–833.
- [Des94] **T. Desoyer et F. Cormery, 1994.** On uniqueness and localization in elastic-damage materials. *International Journal of Solids and Structures*, 31(5) :733–744.
- [dL96] **P. de Larminat, 1996.** *Automatique commande des systèmes linéaires*. Hermès.
- [Dos88] **Z. Dostal, 1988.** Conjugate gradient method with preconditioning by projector. *International Journal of Computer Mathematics*, 23 :315–323.
- [Dou00] **B. Douchin, 2000.** *Stratégie de calcul robuste et adaptativité pour la simulation de l'endommagement et de la rupture des structures composites stratifiées*. Thèse de doctorat, LMT–ENS Cachan.
- [Dru64] **D. C. Drucker, 1964.** On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Journal de Mécanique*, 2/3 :235–249.
- [Dub96] **J. F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot et C. L. Borderie, 1996.** A rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 :939–947.
- [Dub00] **F. Dubois et A. Saidi, 2000.** Unconditionally stable scheme for riccati equation. Dans *European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM)*, tome 8, pages 39–52. EDP Sciences.
- [Eng96] **H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer, 1996.** *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publishers.
- [Fei03] **P. Feissel, 2003.** *Vers une stratégie d'identification en dynamique rapide pour des données incertaines*. Thèse de doctorat, LMT–ENS Cachan.
- [Fei05] **P. Feissel, O. Allix et H. M. Nguyen, 2005.** Amélioration d'une stratégie d'identification par l'erreur de comportement modifiée en dynamique transitoire

- pour des mesures corrompues. Dans *Actes du 7^e Colloque National en Calcul des Structures*.
- [Fei06] **P. Feissel et O. Allix, 2006.** An identification strategy based on the modified constitutive relation error for transient dynamics with corrupted data : the elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (accepted).
- [Fle87] **R. Fletcher, 1987.** *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons.
- [For02] **F. Formosa, H. Abou-Kandil et M. Reynier, 2002.** A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects. Dans *3rd World Conference on Structural Control*.
- [Gar00] **G. Gary et H. Zhao, 2000.** Étude expérimentale du comportement dynamique des matériaux. *Mécanique & Industries*, 1(1) :15–26.
- [Ger73] **P. Germain, 1973.** La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235–274.
- [Gil00] **P. E. Gill, L. O. Jay, M. W. Leonard, L. R. Petzold et V. Sharma, 2000.** An SQP method for the optimal control of large-scale dynamical system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 120 :197–213.
- [Gol96] **J. C. Golinval et P. Collignon, 1996.** Comparison of model updating methods adapted to local error detection. Dans *21st International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA 21)*.
- [Gré96] **M. Grédiac, 1996.** On the direct determination of invariant parameters governing anisotropic plate bending problems. *International Journal of Solids and Structures*, 33(27) :3969–3982.
- [Gré06] **M. Grédiac et F. Pierron, 2006.** Applying the virtual fields method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22(4) :602–627.
- [Gue89] **B. Guerrier, 1989.** *Relations entrées-sorties dans des systèmes diffusifs : réduction du modèle d'état, identification des conditions aux limites*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI.
- [Hil77] **H. M. Hilber, T. J. R. Hughes et R. L. Taylor., 1977.** Improved numerical dissipation for time integration algorithm in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–292.
- [Hoc01] **C. Hochard, P. A. Aubourg et J. P. Charles, 2001.** Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2) :221–230.
- [Ike90] **M. Ikehata, 1990.** Inversion formulas for the linearized problem for and inverse boundary value problem in elastic. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50 :1635–1644.

- [Joh93] **C. Johnson, 1993.** Discontinuous galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 107 :117–129.
- [Jul97] **S. Julier et J. Uhlmann, 1997.** A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. Dans 11th *International Symposium on Aerospace - Defense Sensing, Simulation and Controls*.
- [Kal60] **R. E. Kalman, 1960.** A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 82 :35–45.
- [Koh84] **R. V. Kohn et M. Vogelius, 1984.** Determining conductivity by boundary measurements. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 37 :289.
- [Kup79] **V. D. Kupradze, 1979.** *Three dimensional problems of the mathematical theory of elasticity et thermoelasticity*, tome 25. Nord-Holland Publishing Co.
- [Lad75] **P. Ladevèze, 1975.** *Comparaison des modèles des milieux continus*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VI.
- [Lad83] **P. Ladevèze, 1983.** Recalage de modélisations des structures complexes. Technical Report 33.11.01.4, Aérospatiale, Les Mureaux.
- [Lad85] **P. Ladevèze, 1985.** Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 300(2) :41–44.
- [Lad86] **P. Ladevèze, 1986.** Sur la mécanique de l'endommagement des composites. Dans **C. Bathias et D. Menkès**, éditeurs, *Comptes Rendues des 5^e Journée Nationales sur les Composites*, pages 667–683. Pluralis.
- [Lad92] **P. Ladevèze, 1992.** A damage computational method for composite structures. *Computers and Structures*, (44) :79–87.
- [Lad94] **P. Ladevèze, M. Reynier et N. M. M. Maia, 1994.** Error on the constitutive relation in dynamics. Dans **H. D. Bui et M. Tanaka**, éditeurs, *Inverse Problems in Engineering Mechanics I*, pages 251–256.
- [Lad99a] **P. Ladevèze, 1999.** *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- [Lad99b] **P. Ladevèze et A. Chouaki, 1999.** Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15 :49–58.
- [Lad03a] **P. Ladevèze, 2003.** Validation et vérification de modèles stochastiques en environnement incertain par la méthode de l'erreur en relation de comportement. Rapport interne 258, LMT, Cachan.
- [Lad03b] **P. Ladevèze et G. Lubineau, 2003.** On a damage mesomodel for laminates : micromechanics basis and improvement. *Mechanics of Materials*, 35(8) :763–775.
- [Lad06] **P. Ladevèze, G. Puel, A. Deraemaeker et T. Romeuf, 2006.** Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(4/6) :373–393.

-
- [Las67] **L. S. Lasdon, S. K. Mitter et Waren, 1967.** The conjugate gradient method for optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(2) :132–138.
- [Las88] **D. Lasry et T. Belytschko, 1988.** Localization limiters in transient problems. *International Journal of Solids and Structures*, 24(6) :581–597.
- [Leb94] **J. B. Leblond, G. Perrin et J. Devaux, 1994.** Bifurcation effects in ductile metals with damage delocalization. *Journal of Applied Mechanics*, 61 :236–242.
- [Lio67] **J. L. Lions, 1967.** *Méthode de quasi-réversibilité et application.* Dunod.
- [Lio68] **J. L. Lions, 1968.** *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod.
- [Lor90] **B. Loret et J. H. Prevost, 1990.** Dynamic strain localisation in elasto-(visco-)plastic solids, part 1. general formulation and one-dimensional examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (83) :247–273.
- [Lor03] **E. Lorentz et S. Andrieux, 2003.** Analysis of non-local models through energetic formulations. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :2905–2936.
- [Lub06] **G. Lubineau, P. Ladevèze et D. Violeau, 2006.** Durability of CFRP laminates under thermomechanical loading : A micro-meso damage model. *Composites Science and Technology*, 66(7/8) :983–992.
- [Mah96] **R. Mahnken et E. Stein, 1996.** Parameter identification of viscoplastic model based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *International Journal of Plasticity*, 12(4) :451–479.
- [Mas05] **S. Massart, 2005.** Optimisation des déformations différées du béton par filtre de Kalman. Dans *17^e Congrès Français de Mécanique.*
- [Maz94] **J. Mazars, P. Perdikaris et G. Pijaudier-Cabot, 1994.** Size effect predictions with damage modelling. Dans **H. Mihashi**, éditeur, *Size Effects in Concrete Structures*, pages 207–219.
- [Moi97] **P. Moine, L. Billet et D. Aubry, 1997.** Two updating methods for dissipative models with non symmetric matrices. Dans *15th International Modal Analysis Conference*, pages 1931–1936.
- [Nai94] **J. A. Nairn et S. Hu, 1994.** Micromechanics of damage : A case study of matrix microcracking. Dans **R. Talreja**, éditeur, *Damage Mechanics of Composite Materials*, pages 187–243. Elsevier.
- [Nec81] **J. Necas et I. Hlavacek, 1981.** *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies : An Introduction.* Elsevier, Amsterdam.
- [Nee88] **A. Needleman, 1988.** Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 :69–85.

- [Neu50] **J. V. Neumann et R. D. Richtmyer, 1950.** A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 19(1) :232–237.
- [Ngu04] **H. M. Nguyen, O. Allix et P. Feissel, 2004.** Une stratégie d’identification robuste vis-à-vis de mesures corrompues en dynamique : technique de résolution et illustration. Dans *International Congress on Engineering Mechanics Today*. Q. S. Nguyen & D. Nguyen eds.
- [Ngu05] **H. M. Nguyen, O. Allix et P. Feissel, 2005.** Une stratégie d’identification pour des mesures corrompues en dynamique : formulation et traitement basée sur l’équation de riccati. Dans *17^e Congrès Français de Mécanique*.
- [Ngu06] **H. M. Nguyen, O. Allix et P. Feissel, 2006.** Application of the CRE for parameter identification in nonlinear dynamics with corrupted measurements. Dans *7th World Congress on Computational Mechanics*.
- [Nor04] **L. Nordström, 2004.** A dynamic programming algorithm for input estimation on linear time-variant systems. Technical Report 12, Chalmers Applied Mechanics.
- [Oli00] **J. Oliver, 2000.** On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50) :7207–7229.
- [Ork96] **J. Orkisz et A. Skrzat, 1996.** Reconstruction of residual stresses in railroad vehicle wheels based on enhanced saw cut measurements, formulation and benchmark tests. *Wear*, 191(1/2) :188–198.
- [Ort87] **M. Ortiz, Y. Leroy et A. Needleman, 1987.** A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2) :189–214.
- [Pan01] **J. S. Pang et F. Tin-Loi, 2001.** A penalty interior point algorithm for a inverse parameter identification problem in elastoplasticity. *Mechanics of Structures and Machines*, 29(1) :85–99.
- [Pee02] **R. H. J. Peerlings, R. de Borst, W. A. M. Brekelmans et M. G. D. Geers, 2002.** Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(2) :175–189.
- [Phi01] **E. A. Phillips, C. T. Herakovich et L. L. Graham, 2001.** Damage development in composites with large stress gradients. *Composites Science and Technology*, 61(15) :2169–2182.
- [Pic98] **P. Picart, O. Ghouati et J. Gelin, 1998.** Optimization of metal forming process parameters with damage minimization. *Journal of Materials Processing Technology*, 80/81(1) :597–601.
- [Pij87] **G. Pijaudier-Cabot et Z. P. Bazant, 1987.** Non-local damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1512–1533.

-
- [Pla93] **J. Planas, M. Elices et G. V. Guinea, 1993.** Cohesive cracks versus nonlocal models : Closing the gap. *International Journal of Fracture*, 63 :173–187.
- [Rot94] **L. Rota, 1994.** An inverse approach for identification of dynamic constitutive equations. Dans **H. D. Bui et M. Tanaka**, éditeurs, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 157–164. Balkema.
- [Rot96] **L. Rota, 1996.** *Application de méthodes inverses au dépouillement de l'essai aux barres d'Hopkinson*. Thèse de doctorat, LMS–Ecole polytechnique.
- [Saa96] **Y. Saad, 1996.** *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. PWS Publishing Company.
- [Sat01] **T. Sato et K. Shirota, 2001.** Coefficient identification of the wave equation using the alternating directions method. Dans **M. Tanaka et G. S. Dulikravich**, éditeurs, *Inverse Problems in Engineering Mechanics III*, pages 261–268. Elsevier.
- [Sim93] **J. C. Simo, J. Oliver et F. Armero, 1993.** An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *Journal of Computational Mechanics*, 12 :277–296.
- [Sim98] **J. C. Simo et T. J. R. Hughes, 1998.** *Computational inelasticity*. Springer, New York.
- [Slu92] **L. J. Sluys et R. D. Borst, 1992.** Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium : Model formulation and one dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :2945–2958.
- [Suf03] **A. Suffis, T. A. A. Lubrecht et A. Combescure, 2003.** Damage model with delayed effect : Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristics length. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13/14) :3463–3476.
- [Tar05] **A. Tarantola, 2005.** *Inverse problem theory and model parameter estimation*. SIAM.
- [Tik77] **A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin, 1977.** *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston & Sons.
- [Tri86] **N. Triantafyllidis et E. Aifantis, 1986.** Gradient approach to localization of deformation : Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 16 :225–237.
- [Vau69] **D. R. Vaughan, 1969.** A negative exponential solution for the matrix Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1 :72–75.
- [Zha96] **H. Zhao et G. Gary, 1996.** On the use of SHPB techniques to determine the dynamic behaviour of materials in the range of small strains. *International Journal of Solids and Structures*, 33(23) :3363–3375.
- [Zha05] **H. Zhao, I. Elnasri et S. Abdennaher, 2005.** An experimental study on the behaviour under impact loading of metallic cellular materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47(4/5) :757–774.

Résumé :

L'objectif de la thèse est de proposer une stratégie robuste permettant l'identification en dynamique transitoire de loi de comportement gouvernant la réponse du matériau jusqu'à la rupture. Il s'agit d'être à même d'identifier les paramètres matériaux supposés gouverner la rupture dans un contexte où les données expérimentales sont fortement incertaines. Faisant suite à un premier travail où la stratégie avait été élaborée dans un cadre élastique, le travail s'est concentré sur l'extension de la méthode d'identification pour les cas non linéaires tout d'abord la viscoplasticité puis les modèles d'endommagement à taux limités.

Les difficultés rencontrées dans ces cas résident dans la non-linéarité et le caractère instable du problème de minimisation sous contraintes non linéaires auquel la formulation nous amène. Une extension de la méthode LATIN aux problèmes mal posés a été proposée et développée afin de permettre la résolution itérative de ce type de problèmes d'optimisation. La résolution de ces derniers fait appel à une méthode de traitement robuste issue du contrôle optimal et basée sur l'équation de Riccati.

Une fois ces difficultés résolues et dans les cas simples unidimensionnels traités pour le moment, la stratégie d'identification proposée s'avère très robuste face aux perturbations des mesures même dans le cas très sévère de la localisation et de la rupture.

Mots clés : problème inverse, identification robuste, rupture, mesures incertaines, dynamique transitoire, Erreur en Relation de comportement, équation de Riccati, méthode LATIN.

Abstract :

The objective of this work is to propose a robust identification strategy, which allows to identify a constitutive relation for material rupture. The challenge is to be able to identify the parameters that control the rupture in a context of highly corrupted experimental data. After a first work where the strategy has been developed in an elastic framework, this thesis concentrates on the extension of the identification method to the nonlinear cases, first the viscoplasticity, then the delay damage model.

The main difficulties in these cases are the non-linearity and the unstable character of the minimization problem under nonlinear constraints which is derived from the formulation. An extension of the LATIN method to ill-posed problems is proposed and developed in order to allow an iterative solving of this type of optimization problems. The linearized optimal control problems are solved by a robust algorithm based on optimal control techniques, mainly using the Riccati equation.

The difficulties being solved and the formulation implemented in the one-dimensional case until now, the proposed identification strategy appears to be very robust with respect to the perturbed measurements even in the case of localisation and rupture.

Keywords : inverse problem, robust identification, rupture, uncertain measurements, transient dynamic, Constitutive Relation Error, Riccati equation, LATIN method.