



HAL
open science

Dispersions du comportement de structures vibrantes : analyse et détection

Morvan Ouisse

► **To cite this version:**

Morvan Ouisse. Dispersions du comportement de structures vibrantes : analyse et détection. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2002. Français. NNT : . tel-00142547

HAL Id: tel-00142547

<https://theses.hal.science/tel-00142547v1>

Submitted on 19 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

ÉCOLE DOCTORALE : Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

FORMATION DOCTORALE : Acoustique

par

Morvan OUISSE

Agrégé de mécanique de l'ENS Cachan

**DISPERSIONS DU COMPORTEMENT DE STRUCTURES VIBRANTES :
ANALYSE ET DÉTECTION**

Soutenue le 20 décembre 2002 devant la commission d'examen

Jury :	M. BOUILLARD Philippe, ULB (Bruxelles)	Rapporteur
	M. COMBESURE Alain, INSA (Lyon)	
	M. COYETTE Jean-Pierre, UCL (Louvain La Neuve)	Rapporteur
	M. GUYADER Jean-Louis, INSA (Lyon)	
	M. LEMAIRE Maurice, IFMA (Clermont-Ferrand)	
	M. OCHMANN Martin, TFH (Berlin)	
	M. PERRET-LIAUDET Joël, ECL (Lyon)	Invité

Juillet 2001

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

Directeur : A. STORCK

AUDISIO S	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
BABOUX JC	GEMPPM*
BALLAND B	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BARBIER D	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BASTIDE JP	THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉE
BAYADA G	MAPLY - MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE LYON
BERGER C (Mlle)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
BETEMPS M	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
BLANCHARD JM	LAEPSI ***
BOISSON C	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
BOIVIN M	MECANIQUE DES SOLIDES
BOTTA H	Equipe DEVELOPPEMENT URBAIN
BOTTA-ZIMMERMAN M (Mme)	Equipe DEVELOPPEMENT URBAIN
BOULAYE G (Prof. émérite)	INFORMATIQUE
BRAU J	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON Thermique du bâtiment
BRISSAU M	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
BRUNET M	MECANIQUE DES SOLIDES
BRUNIE L	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
BUREAU JC	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
CAVAILLE JY	GEMPPM*
CHANTE JP	CEGELY**** - Composants de puissance et applications
CHOCAT B	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Hydrologie urbaine
COUSIN M	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Structures
DOUTHEAU A	CHIMIE ORGANIQUE
DUFOUR R	MECANIQUE DES STRUCTURES
DUPUY JC	PHYSIQUE DE LA MATIERE
EMPTOZ H	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
ESNOUF C	GEMPPM*
EYRAUD L (Prof. émérite)	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
FANTOZZI G	GEMPPM*
FAVREL J	PRISMa PProductique et Informatique des Systèmes Manufacturiers
FAYARD JM	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
FAYET M	MECANIQUE DES SOLIDES
FERRARIS-BESSO G	MECANIQUE DES STRUCTURES
FLAMAND L	MECANIQUE DES CONTACTS
FLEISCHMANN P	GEMPPM*
FLORY A	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
FOUGERES R	GEMPPM*
FOUQUET R	GEMPPM*
FRECON L	INFORMATIQUE
GERARD JF	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
GIMENEZ G	CREATIS**
GONNARD P	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
GONTRAND M	GEGELY**** - Composants de puissance et applications
GOUTTE R (Prof. émérite)	CREATIS **
GRANGE G	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
GUENIN G	GEMPPM*
GUICHARDANT M	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
GUILLLOT G	PHYSIQUE DE LA MATIERE
GUINET A	PRISMa PProductique et Informatique des Systèmes Manufacturiers
GUYADER JL	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
GUYOMAR D	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
JACQUET-RICHARDET G	MECANIQUE DES STRUCTURES
JOLION JM	RECONNAISSANCE DES FORMES ET VISION
JULLIEN JF	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Structures
JUTARD A(Prof. Emérite)	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
KASTNER R	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Géotechnique
KOULOUMDJIAN J	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
LAGARDE M	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LALANNE M (Prof. émérite)	MECANIQUE DES STRUCTURES
LALLEMAND A	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON Energétique et thermique
LALLEMAND M (Mme)	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON Energétique et thermique
LAREAL P	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Géotechnique
LAUGIER A	PHYSIQUE DE LA MATIERE
LAUGIER C	BIOCHIMIE ET PHARMACOLOGIE
LEJEUNE P	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
LUBRECHT A	MECANIQUE DES CONTACTS
MARTINEZ Y	INGENIERIE INFORMATIQUE ET INDUSTRIELLE
MAZILLE H	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE
MERLE P	GEMPPM*
MERLIN J	GEMPPM*
MILLET JP	PHYSICOCHIMIE INDUSTRIELLE

MIRAMOND M	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Hydrologie urbaine
MOREL R	MECANIQUE DES FLUIDES
MOSZKOWICZ P	LAEPSI***
NARDON P (Prof. émérite)	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
NAVARRO A	LAEPSI***
NOURI A (Mme)	MAPLY - MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE LYON
ODET C	CREATIS**
OTTERBEIN M (Prof. émérite)	LEAPSI***
PASCAULT JP	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
PAVIC G	VIBRATIONS ACOUSTIQUE
PELLETIER JM	GEMPPM*
PERA J	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Matériaux
PERACHON G	THERMODYNAMIQUE APPLIQUEE
PERRIAT P	GEMPPM*
PERRIN J	ESCHIL Equipe SCiences Humaines de l'Insa de Lyon
PINARD P (Prof. émérite)	PHYSIQUE DE LA MATIERE
PINON JM	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
PLAY D	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANQUES
POUSIN J	MAPLY - MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE LYON
PREVOT P	GRACIMP Groupe de Recherche en Apprentissage, Coopération et Interfaces Multimodales pour la Productique
PROST R	CREATIS**
RAYNAUD M	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON Transferts Interfaces et Matériaux
REDARCE H	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
REYNOUARD JM	UNITE DE RECHERCHE EN GENIE CIVIL Structures
RIGAL JF	CONCEPTION ET ANALYSE DES SYSTEMES MECANQUES
RIEUTORD E (Prof. émérite)	MECANIQUE DES FLUIDES
ROBERT-BAUDOUY J (Mme) (Prof. émérite)	GENETIQUE MOLECULAIRE DES MICROORGANISMES
ROUBY D	GEMPPM*
ROUX JJ	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON
RUBEL P	INGENIERIE DES SYSTEMES D'INFORMATION
RUMELHART C	MECANIQUE DES SOLIDES
SACADURA JF	CENTRE DE THERMIQUE DE LYON Transferts Interfaces et Matériaux
SAUTERAU H	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
SCAVARDA S	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
THOMASSET D	AUTOMATIQUE INDUSTRIELLE
TROCCAZ M	GENIE ELECTRIQUE ET FERROELECTRIQUE
UNTERREINER R	CREATIS**
VELEX P	MECANIQUE DES CONTACTS
VIGIER G	GEMPPM*
VINCENT A	GEMPPM*
VUILLERMOZ PL (Prof. émérite)	MATIERE
ZIMMERMANN M.(Mme)	Equipe Développement Urbain
Directeurs de recherche C.N.R.S. :	
BERTHIER Y	MECANIQUE DES CONTACTS
COTTE-PATAT N (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE ET GENETIQUE
FRANCIOSI P	GEMPPM*
MANDRAND MA (Mme)	UNITE MICROBIOLOGIE GENETIQUE
QUINSON JL	GEMPPM*
ROCHE A	MATERIAUX MACROMOLECULAIRES
SEGUELA R	GEMPPM*
Directeurs de recherche I.N.R.A. :	
FEBVAY G	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
GRENIER S	BIOLOGIE FONCTIONNELLE, INSECTES ET INTERACTIONS
Directeurs de recherche I.N.S.E.R.M. :	
PRINGENT AF (Mme)	BIOLOGIE ET PHARMACOLOGIE
MAGNIN I (Mme)	CREATIS**

*GEMPPM : GROUPE DETUDE METALLURGIE PHYSIQUE ET PHYSIQUE DES MATERIAUX

** CREATIS : CENTRE DE RECHERCHE ET D'APPLICATIONS EN TRAITEMENT DE LIMAGE ET DU SIGNAL

***LAEPSI : LABORATOIRE d'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE DES PROCEDES ET SYSTEMES INDUSTRIELS

****CEGELY : CENTRE DE GENIE ELECTRIQUE DE LYON

INSA DE LYON
 DEPARTEMENT DES ETUDES DOCTORALES ET RELATIONS INTERNATIONALES SCIENTIFIQUES
 OCTOBRE 2001

Ecoles Doctorales et Diplômes d'Etudes Approfondies

habilités pour la période 1999-2003

ECOLE DOCTORALE n° code national	RESPONSABLE PRINCIPAL	CORRESPONDANT INSA	DEA INSA n° code national	RESPONSABLE DEA INSA
CHIMIE DE LYON (Chimie, Procédés, Environnement) EDA 206	M. D. SINOUC UCBL1 04.72.44.62.64 Sec 04.72.44.62.64 Fax 04.72.44.81.50	M. P. MOSZKOWICZ 83.45 Sec 84.30 Fax 87.17	Chimie Inorganique 910643 Sciences et Stratégies Analytiques 910634 Sciences et Techniques du Déchet* 910675	M. J.F. QUINSON Tél 83.51 Fax 85.28 M. P. MOSZKOWICZ Tél 83.45 Fax 87.17
ECONOMIE, ESPACE ET MODELISATION DES COMPORTEMENTS (E ² MC) EDA 417	M. A. BONNAFOUS LYON 2 04.72.72.64.38 Sec 04.72.72.64.03 Fax 04.72.72.64.48	Mme ZIMMERMANN 84.71 Fax 87.96	Villes et Sociétés 911218 Dimensions Cognitives et Modélisation 992678	Mme ZIMMERMANN Tél 84.71 Fax 87.96 M.L. FRECON Tél. 82.39 Fax 85.18
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE* (E.E.A.*) EDA 160	M. G. GIMENEZ INSA DE LYON 83.32 Fax 85.26		Automatique Industrielle 910676 Dispositifs de l'Electronique Intégrée* 910696 Génie Electrique de Lyon 910065 Images et Systèmes* 992254	M. M. BETEMPS Tél 85.59 Fax 85.35 M. D. BARBIER Tél 85.47 Fax 60.81 M. J.P. CHANTE Tél 87.26 Fax 85.30 Mme I. MAGNIN Tél 85.63 Fax 85.26
EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION (E2M2) EDA 403	M. J.P. FLANDROIS UCBL1 04.78.86.31.50 Sec 04.78.86.31.52 Fax 04.78.86.31.49	M. S. GRENIER 79.88 Fax 85.34	Analyse et Modélisation des Systèmes Biologiques 910509	M. S. GRENIER Tél 79.88 Fax 85.34
INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE* (EDIIS*) EDA 407	M. J.M. JOLION INSA DE LYON 87.59 Fax 80.97		Documents Multimédia, Images et Systèmes d'Information Communicants* 992774 Extraction des Connaissances à partir des Données 992099 Informatique et Systèmes Coopératifs pour l'Entreprise 950131	M. A. FLORY Tél 84.66 Fax 85.97 M. J.F. BOULICAUT Tél 89.05 Fax 87.13 M. A. GUINET Tél 85.94 Fax 85.38
INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ (EDISS) EDA 205	M. A.J. COZZONE UCBL1 04.72.72.26.72 Sec 04.72.72.26.75 Fax 04.72.72.26.01	M. M. LAGARDE 82.40 Fax 85.24	Biochimie 930032	M. M. LAGARDE Tél 82.40 Fax 85.24
MATERIAUX DE LYON UNIVERSITE LYON 1 EDA 034	M. J. JOSEPH ECL 04.72.18.62.44 Sec 04.72.18.62.51 Fax 04.72.18.60.90	M. J.M. PELLETIER 83.18 Fax 84.29	Génie des Matériaux : Microstructure, Comportement Mécanique, Durabilité* 910527 Matériaux Polymères et Composites* 910607 Matière Condensée, Surfaces et Interfaces 910577	M. J.M. PELLETIER Tél 83.13 Fax 85.28 M. H. SAUTEREAU Tél 81.78 Fax 85.27 M. G. GUILLOT Tél 81.51 Fax 85.31
MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE (Math IF) EDA 409	M. NICOLAS UCBL1 04.72.44.83.11 Fax 04.72.43.00.35	M. J. POUSSIN 88.36 Fax 85.29	Analyse Numérique, Equations aux dérivées partielles et Calcul Scientifique 910281	M. G. BAYADA Tél 83.12 Fax 85.29
MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (MEGA) EDA 162	M. J. BATAILLE ECL 04.72.18.61.56 04.72.18.61.50 Fax 04.78.64.71.45	M. G. DALMAZ 83.03 Fax 04.72.89.09.80	Acoustique 910016 Génie Civil* 992610 Génie Mécanique 992111 Thermique et Energétique 910018	M. J.L. GUYADER Tél 80.80 Fax 87.12 M. J.J. ROUX Tél 84.60 Fax 85.22 M. G. DALMAZ Tél 83.03 Fax 04.78.89.09.80 Mme M. LALLEMAND Tél 81.54 Fax 60.10

*Ecoles doctorales et DEA dont l'INSA est établissement principal

"On dit qu'on apprend avec ses erreurs,
Mais à mon avis, c'est une erreur..
Et si je me trompe, au moins j'aurai appris quelque chose"

Le Chat, par Geluck

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Louis Guyader, pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA de Lyon, mais surtout pour son soutien permanent, sa disponibilité, ainsi que pour les nombreuses remarques et les conseils issus des discussions qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je suis très reconnaissant à messieurs Jean-Pierre Coyette et Philippe Bouillard d'avoir consacré le temps nécessaire à l'établissement d'un rapport sur ce travail, ainsi qu'à messieurs Alain Combescure, Maurice Lemaire, Martin Ochman et Joël Perret-Liaudet pour leur participation au jury.

Je remercie Laurent Gagliardini, de la société P.S.A., pour m'avoir écouté, conseillé, et fourni un maillage industriel, ainsi que Yannick Denoual, de la société Renault, pour avoir mis à notre disposition les éléments permettant une validation expérimentale des résultats obtenus.

Je tiens également à remercier la direction d'Eurinsa, ainsi que l'équipe de mécanique d'Eurinsa, qui m'ont soutenu lors de mes activités d'enseignement.

Bien sûr, je ne peux pas oublier de citer l'ensemble du personnel du laboratoire, pour l'accueil chaleureux et les discussions constructives que l'on a pu avoir, et plus particulièrement la bande du premier étage, en grande partie responsable de la bonne ambiance dans laquelle s'est déroulée la préparation de ce travail.

Enfin, je dois remercier Carine, qui me soutient depuis de longues années déjà...

Table des matières

Liste des professeurs en poste à l'INSA de Lyon	2
Liste des formations doctorales de l'INSA de Lyon	4
Remerciements	7
Liste des figures	12
Liste des tableaux	17
Notations	19
I Introduction - Bibliographie	25
Introduction	27
1 Bibliographie	29
1.1 Poutres et plaques couplées	29
1.1.1 Poutres couplées	30
1.1.2 Plaques couplées	30
1.2 Structures aux paramètres incertains	31
1.2.1 Différences de comportements observées sur des structures fabriquées en série	31
1.2.2 Méthodes basées sur l'échantillonnage	31
1.2.3 Méthodes analytiques classiques	32
1.2.4 Éléments finis stochastiques	32
1.2.5 Incertitudes et hautes fréquences	33
1.2.6 Utilisation de l'arithmétique fbue	34
1.2.7 Méthodes de fiabilité	36
1.2.8 Méthodes d'optimisation de formes	36
1.3 Estimation et localisation d'erreur	36
II Sensibilité: Cas des structures simples couplées	39
2 Étude du couplage de poutres semi-infinies	42
2.1 Description et formulation du problème	42

2.2	Résolution	43
2.3	Application	45
2.4	Bilan de puissance	47
2.5	Recherche de l'angle critique	51
2.6	Cas d'une onde incidente longitudinale	53
2.7	Conclusion sur le couplage de poutres semi-infinies	56
2.8	Analyse d'une poutre finie	56
2.8.1	Recherche des fréquences propres	56
2.8.2	Exemple	58
2.8.3	Relation entre angle critique et sensibilité des fréquences propres.	58
2.9	Conclusion sur le couplage des poutres	59
3	Étude du couplage de plaques semi-infinies	60
3.1	Cas d'une onde incidente de flexion	60
3.1.1	Formulation du problème	60
3.1.2	Résolution, application	65
3.1.3	Bilan de puissance	68
3.1.4	Recherche de l'angle critique	69
3.1.5	Comportement de la structure pour un angle de couplage compris entre 90 et 180 degrés	71
3.2	Cas d'une onde incidente longitudinale	72
3.2.1	Formulation	72
3.2.2	Bilan de puissance	75
3.2.3	Recherche de l'angle critique	75
3.3	Cas d'une onde incidente de cisaillement dans le plan	76
3.3.1	Formulation	76
3.3.2	Bilan de puissance	77
3.3.3	Recherche de l'angle critique	78
3.4	Conclusion sur le couplage de plaques semi-infinies : comparaison avec une étude de plaques couplées finies	79
III	Localisation des zones d'une structure à l'origine de comportements hypersensibles	83
4	Méthode de localisation proposée	86
4.1	Description de la méthode	86
4.2	Choix d'un indicateur : cas de poutres couplées en vibrations longitudinales	87
4.2.1	Résolution du problème par minimisation	87
4.2.2	Exemple de localisation	89
4.3	Conclusion	90

5	Application analytique: étude d'un réseau de plaques	91
5.1	Étude du comportement vibratoire d'un réseau de plaques	91
5.1.1	Formulation du problème	91
5.1.2	Étude d'une structure particulière	92
5.2	Choix de l'indicateur	95
5.3	Application de la méthode de localisation	95
5.4	Détection rapide de l'hypersensibilité	96
5.5	Causes de l'hypersensibilité en fonction de la fréquence	96
5.6	Analyse du résidu au premier ordre	98
5.7	Conclusion	100
6	Application à la méthode des éléments finis	102
6.1	Choix de l'indicateur	102
6.1.1	Expression du résidu utilisé	102
6.1.2	Relations entre l'indicateur choisi et la sensibilité des caractéristiques propres	104
6.1.3	Autres choix d'indicateurs possibles	107
6.1.4	Conclusion sur le choix de l'indicateur	108
6.2	Note à propos de l'utilisation d'algorithmes éléments finis	108
6.3	Application à la modélisation éléments finis d'un réseau de plaques	109
6.3.1	Présentation de la structure	109
6.3.2	Application de la méthode de détection	111
6.4	Conclusion	116
IV	Applications numériques et expérimentales sur des structures industrielles	119
7	Application numérique : étude d'une poutre de soubassement	122
7.1	Présentation de la structure étudiée	122
7.1.1	Description de la poutre de soubassement	122
7.1.2	Modèle numérique de la poutre	123
7.1.3	Modes propres de la structure de référence	124
7.2	Étude de l'influence de l'existence des points de soudure	125
7.2.1	Comportement vibratoire	125
7.2.2	Application de la méthode	127
7.2.3	Résultats obtenus	127
7.2.4	Conclusion	130
7.3	Influence de la position des points de soudure	130
7.3.1	Comportement vibratoire, description du changement de position	130
7.3.2	Modification du modèle élément fini afin de le rendre compatible	131
7.3.3	Application de la méthode et vérification des résultats	132
7.4	Conclusion sur l'étude de poutre de soubassement	134

8	Application numérique et expérimentale : étude d'un tablier de véhicule	135
8.1	Présentation de la pièce étudiée	135
8.1.1	Description	135
8.1.2	Maillage du tablier	136
8.1.3	Analyse expérimentale du tablier	136
8.2	Influence de l'existence des points de soudure	138
8.2.1	Étude numérique	139
8.2.2	Étude expérimentale	144
8.2.3	Conclusion sur l'influence des points de soudure	146
8.3	Influence d'un défaut de masse	148
8.3.1	Étude numérique	148
8.3.2	Étude expérimentale	152
8.4	Conclusion sur l'étude du tablier	152
	Conclusions et perspectives	155
	Bibliographie	159
A	Démonstration que l'indicateur retenu définit une distance	163
B	Modes propres de la poutre de soubassement de 806	164
C	Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente de flexion	167
C.1	Relations de continuité	167
C.2	Système linéaire	169
C.2.1	Premier cas : $\mu > \lambda \geq k_x$	169
C.2.2	Second cas : $\mu \geq k_x > \lambda$	170
C.2.3	Troisième cas : $k_x > \mu > \lambda$	170
C.2.4	Les variables indépendantes du problème	171
D	Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente longitudinale	172
D.1	Premier cas : $k \geq k_x$	172
D.2	Second cas : $k < k_x$	173
E	Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente transversale dans le plan	174
E.1	Premier cas : $k > \lambda \geq k_x$	174
E.2	Second cas : $k \geq k_x > \lambda$	175
E.3	Troisième cas : $k_x > k > \lambda$	177
F	Réseau de plaques couplées: formulation semi-modale	179
F.1	Structure étudiée et hypothèses	179
F.2	Equations	180
F.3	Équation de flexion pure pour une plaque excitée	181
F.3.1	Notion de décomposition semi-modale	181
F.3.2	Résolution de l'équation différentielle découplée d'indice n	182

F.3.3	Solution pour le mouvement de flexion	185
F.4	Équation de mouvement dans le plan pour une plaque excitée	185
F.4.1	Décomposition semi-modale de l'équation de mouvement dans le plan: . . .	185
F.4.2	résolution du système d'équations (cas commun $\mathbf{n} \neq 0$)	186
F.4.3	Résolution de l'équation pour le cas particulier $\mathbf{n} = 0$	189
F.5	Assemblage des plaques en structure	191
F.5.1	Vecteur d'état de la plaque	191
F.5.2	équations de raccord et conditions aux limites	192
F.6	Récapitulatif de la démarche	195

Table des figures

2.1	Structure étudiée: poutres semi-infinies couplées	42
2.2	Module de l'amplitude des ondes progressives en fonction de l'angle de couplage (degrés). – Onde de flexion transmise, - - Onde de flexion réfléchie, ··· Onde longitudinale transmise, - - Onde longitudinale réfléchie	46
2.3	Module de la dérivée de l'amplitude des ondes progressives de flexion par rapport à l'angle de couplage α , en fonction de cet angle, en degrés. - Onde transmise, ··· Onde réfléchie	47
2.4	Puissances transmises, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance transmise par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), ··· puissance transmise par l'effort normal	49
2.5	Puissances réfléchies, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance réfléchie par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), ··· puissance réfléchie par l'effort normal	50
2.6	Bilan de puissance, tracé en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance incidente, - - puissance transmise, ··· puissance réfléchie	51
2.7	Sensibilité de la puissance en fonction de l'angle de couplage, en degrés.	52
2.8	Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ	52
2.9	Sensibilité de la puissance transmise vis-à-vis de l'angle de couplage. Cas limite.	53
2.10	Puissances transmises, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance transmise par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), ··· puissance transmise par l'effort normal	55
2.11	Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ , pour une onde incidente longitudinale.	55
2.12	Poutres finies couplées	56
2.13	Dix premières fréquences propres (Hertz) en fonction de l'angle de couplage (degrés)	58
2.14	Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ , pour des poutres semi-infinies, avec tracé de certains points obtenus pour des poutres finies.	59
3.1	Notations utilisées pour la description des plaques semi-infinies	60
3.2	Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	67
3.3	Évolution du module de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	67
3.4	Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés).	69

3.5	Angle critique (degrés) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . Tracé pour $\nu = 0,3$	70
3.6	Angle critique (degrés) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . Tracé pour $\nu = 0,4$	70
3.7	Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés). Angle d'incidence $\theta = 40^\circ$	71
3.8	Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés). Angle d'incidence $\theta = 85^\circ$	72
3.9	Angle critique (appartenant à l'intervalle 90-180 degrés, la valeur tracée étant $180^\circ - \alpha_{crit}$) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0.3$	73
3.10	Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	74
3.11	Évolution de l'amplitude de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	75
3.12	Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés).	75
3.13	Angle critique (degrés) pour une onde incidente longitudinale, en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0,3$	76
3.14	Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	77
3.15	Évolution de l'amplitude de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	77
3.16	Évolution de la puissance, en fonction de l'angle de couplage (degrés).	78
3.17	Angle critique (degrés) pour une onde incidente de cisaillement dans le plan, en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0,3$	78
3.18	Dimensions (mm) de la structure de référence	79
3.19	Sensibilité de la mobilité de transfert, figure tirée de l'article de Rébillard et al. [RG 95].	80
3.20	Coupe de la figure 3.5, pour $\xi = 1,23 \cdot 10^{-7}$: angle critique de couplage (degrés) en fonction de l'angle d'incidence (degrés)	80
4.1	Poutre en vibrations longitudinales forcées.	87
5.1	Notations retenues pour la description d'un réseau de plaques	92
5.2	Structure particulière étudiée.	93
5.3	Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 40 cas, tous les angles varient.	93
5.4	Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, a) seul l'angle n°4 varie b) seul l'angle n°5 varie	94
5.5	Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, a) seul l'angle n°7 varie b) tous les angles varient, exceptés les n°4, 5 et 7	94
5.6	Valeur du résidu pour chaque angle de connexion, moyenne de 40 calculs. a) $f=175$ Hz b) $f=195$ Hz	96

5.7	Valeur du résidu pour chaque angle de connexion, moyenne de 3 calculs. $f=195$ Hz, a) Calcul 1 b) Calcul 2	97
5.8	Valeur du résidu en fonction de la fréquence (Hz). Simulation de Monte Carlo, 2000 cas. -x- angle 4; +- angle 5; -o- angle 7; — autres angles	97
5.9	Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, seul l'angle $n^{\circ}7$ varie	98
5.10	Évolution de la valeur de l'indicateur obtenue par une analyse au premier ordre, en fonction de la fréquence (Hz); -x- angle 4; +- angle 5; -o- angle 7; — autres angles. Sur cette figure sont également indiquées en traits fins les courbes de la figure 5.8 issues de la simulation de Monte Carlo.	101
6.1	Évolution du facteur $\left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right)^2$ en fonction de λ_1^j	107
6.2	Mode 12 du réseau de plaques. Déplacement et contribution élémentaire de l'énergie cinétique du mode.	109
6.3	Sensibilité des fréquences propres vis-à-vis des angles de couplage, en fonction de l'ordre du mode considéré. 50 calculs. -o- : Angle 4; +- : Angle 5; -x- : Angle 7; -v- : Autres angles.	110
6.4	Modes 1 et 2 du réseau de plaques	111
6.5	Valeur de l'indicateur pour le mode 10.	112
6.6	Valeur de l'indicateur pour le mode 2.	112
6.7	Valeur de l'indicateur pour le mode 4.	113
6.8	Valeur de l'indicateur pour le mode 7.	113
6.9	Valeur de l'indicateur pour le mode 5.	114
6.10	Moyenne de l'indicateur sur les 15 premières fréquences propres.	114
6.11	Valeur de l'indicateur sommé sur les éléments adjacents aux lignes de couplages, en fonction de l'ordre du mode. -o- : Angle 4; +- : Angle 5; -x- : Angle 7; -v- : Autres angles.	115
6.12	Carré de la sensibilité des valeurs propres vis-à-vis des angles de couplage, en fonction de l'ordre du mode considéré. 50 calculs. -o- : Angle 4; +- : Angle 5; -x- : Angle 7; -v- : Autres angles.	116
7.1	Photographie du soubassement du véhicule Peugeot 806.	122
7.2	Photographie du soubassement du véhicule Peugeot 806.	123
7.3	Vue tridimensionnelle en éclaté des pièces constitutives de la poutre	123
7.4	Vue des points de soudure de la poutre (modèle RBE2/RIGID)	124
7.5	Maillage original du point de soudure.	124
7.6	Mode 8, énergie cinétique des pièces constitutives	125
7.7	Présentation des éléments reliés aux points de soudure qui vont être modifiés.	126
7.8	Erreur relative (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés.	126
7.9	Indicateur de sensibilité, tracé pour la structure modifiée (10 points supprimés)	128

7.10 Erreurs relatives (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés (barres claires), et 3 points de soudure (4, 5, 8) supprimés (barres foncées).	129
7.11 Indicateur de sensibilité, en fonction du point de soudure et du numéro du mode considérés.	129
7.12 Erreurs relatives (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés (barres claires), et 3 points de soudure (2, 6, 7) supprimés (barres foncées).	130
7.13 Maillage initial et modifié d'un point de soudure.	131
7.14 Mode 8 : valeur de l'indicateur	132
7.15 Valeur de l'indicateur pour le mode 6	132
7.16 Valeur de l'indicateur pour le mode 2	133
7.17 Moyenne de l'indicateur sur la bande de fréquence	133
8.1 Photo du tablier de Clio	135
8.2 Maillage complet du tablier (à droite, zoom sur les languettes d'encastrement, noircies)	136
8.3 Maillage de la pièce soudée	137
8.4 Réalisation de l'encastrement	137
8.5 Mesure de la fonction de transfert de référence : rapport vitesse/effort (dB) en fonction de la fréquence (Hz)	138
8.6 Numérotation des points de soudure du tablier	139
8.7 Valeur de l'indicateur moyen	140
8.8 Valeur de l'indicateur en fonction du point de soudure considéré et du mode	141
8.9 Énergie cinétique du mode 6 du tablier	141
8.10 Énergie cinétique du mode 9 du tablier	142
8.11 Énergie cinétique du mode 6, avec et sans les points de soudure 22 et 23	143
8.12 Vue du tablier, points de soudure 15 et 16 en place	144
8.13 Vue du tablier, point de soudure 15 supprimé	145
8.14 Fonction de transfert mesurée, soudures 1 et 15 supprimées. En pointillés : référence (fig.8.5)	145
8.15 Fonction de transfert mesurée, soudures 1 et 15 remplacées. En pointillés : référence (fig.8.5). En traits mixtes : courbe de la figure 8.14.	146
8.16 Vue du tablier, points de soudure 21, 22 et 23 en place	147
8.17 Vue du tablier, points de soudure 22 et 23 supprimés	147
8.18 Fonction de transfert mesurée, soudures 22 et 23 supprimées. En pointillés : référence (fig.8.5)	148
8.19 Emplacements des masselotes	149
8.20 Indicateur moyen sur la bande de fréquence correspondant aux 10 premiers modes	149
8.21 Valeur de l'indicateur au voisinage de chaque masselotte ajoutée, en fonction de l'ordre du mode considéré	150
8.22 Énergie cinétique du mode 7 du tablier : structure de référence / masselotte 5 ajoutée	151
8.23 Énergie cinétique du mode 10 du tablier : structure de référence / masselotte 5 ajoutée	151
8.24 Vue de la masselotte ajoutée, en position "3"	152

8.25	Fonction de transfert mesurée, masselotte 5 ajoutée. En pointillés : référence (fig.8.5)	153
8.26	Fonction de transfert mesurée, masselotte 3 ajoutée. En pointillés : référence (fig.8.5)	153
8.27	Valeur de l'indicateur au voisinage de chaque masselotte ajoutée, en fonction de l'ordre du mode considéré	154
B.1	Déformées propres de la couche intermédiaire	164
B.2	Déformées propres de la couche inférieure	165
B.3	Déformées propres de la couche supérieure	165
B.4	Déformées propres du support supérieur	166
B.5	Déformées propres des supports inférieurs	166
F.1	Notations retenues pour le couplage de plaques finies.	179

Liste des tableaux

7.1	Fréquences propres du maillage de référence	125
7.2	Fréquences propres du modèle modifié (10 points de soudure supprimés)	126
7.3	Fréquences propres du modèle de référence avec 3 points de soudure supprimés (numéros 4, 5 et 8)	128
7.4	Fréquences propres du modèle de référence avec 3 points de soudure supprimés (numéros 2, 6 et 7)	129
7.5	Fréquences propres du modèle présentant 13 points de soudure déplacés.	131
7.6	Fréquences propres du modèle présentant 1 point de soudure déplacé (n°5)	133
8.1	Fréquences propres du modèle de référence	136
8.2	Points de soudure supprimés	139
8.3	Fréquences propres, soudures 22 et 23 supprimées	140
8.4	Fréquences propres du tablier, soudures 2 et 3 supprimées	142
8.5	Fréquences propres du tablier, soudures 1 et 15 supprimées	143
8.6	Fréquences propres du tablier, masselotte 5 ajoutée (35 g)	150
8.7	Fréquences propres du tablier, masselotte 3 ajoutée (35 g)	150

Notations

Nous donnons ici l'ensemble des notations adoptées dans ce document, chapitre après chapitre, dans l'ordre d'apparition des grandeurs associées.

Chapitre 2 : Étude du couplage de poutres semi-infinies

O : origine du repère, point de jonction des poutres

(O, \vec{x}_1) : axe principal d'inertie de la poutre 1

\vec{y}_1 : axe portant le déplacement de flexion de la poutre 1

(O, \vec{x}_2) : axe principal d'inertie de la poutre 2

\vec{y}_2 : axe portant le déplacement de flexion de la poutre 2

(O, \vec{z}) : axe normal commun en O aux plans $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$.

α : angle de couplage des poutres

w_1 : déplacement de flexion de la poutre 1

w_2 : déplacement de flexion de la poutre 2

k : nombre d'onde en flexion des poutres

j : nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$

ω : pulsation de l'onde excitatrice

S : section des poutres

E : module d'Young du matériau

I : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe (O, \vec{z}, \vec{x})

u_1 : déplacement de vibrations longitudinales de la poutre 1

u_2 : déplacement de vibrations longitudinales de la poutre 2

λ : nombre d'onde en vibrations longitudinales des poutres

ρ : masse volumique du matériau

M : moment fléchissant

T : effort tranchant

N : effort longitudinal

Ω : rotation de la section

μ : paramètre adimensionnel (rapport des nombres d'ondes)

$K(\alpha, \mu)$: dénominateur commun des composantes du vecteur solution

f : fréquence de l'excitation.

\dot{w} : dérivée temporelle de w

P_T : puissance transmise par l'effort tranchant

P_M : puissance transmise par le moment de flexion

$P_{flexion}$: puissance transmise par le mouvement de flexion
 P_{longi} : puissance transmise par le mouvement de vibrations longitudinales
 P_{trans} : puissance totale transmise
 P_{inc} : puissance incidente
 P_{refl} : puissance réfléchie
 $\alpha_{crit\ min}$: valeur de l'angle critique minimal
 T : matrice à inverser pour obtenir les valeurs des constantes
 X : vecteur des constantes inconnues

Chapitre 2 : Étude du couplage de plaques semi-infinies

\vec{x} : axe défini par la ligne de couplage des plaques
 (\vec{x}, \vec{y}_0) : plan de la première plaque
 \vec{z}_0 : axe normal à la première plaque
 (\vec{x}, \vec{y}_1) : plan de la seconde plaque
 \vec{z}_1 : axe normal à la seconde plaque
 α : angle de couplage des plaques
 θ : angle d'incidence de l'onde excitatrice
 u, v et w : composantes du déplacement
 k : nombre d'onde de flexion
 ω : pulsation de l'onde
 t : variable temporelle
 ρ : masse volumique du matériau
 E : module d'Young du matériau
 h : épaisseur commune des plaques
 D : module de rigidité en flexion des plaques avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$
 ν : coefficient de Poisson du matériau
 $f(x)$ et $g(y)$: fonctions de séparation des variables spatiales de w
 k_x : composante suivant l'axe x du nombre d'onde de flexion
 k_y : composante suivant l'axe y du nombre d'onde de flexion
 u_i, v_i et w_i : composantes du déplacement de l'onde incidente
 u_r, v_r et w_r : composantes du déplacement de l'onde réfléchie
 k_e : nombre d'onde de l'onde évanescente
 u_t, v_t et w_t : composantes du déplacement de l'onde transmise
 u_l et v_l : composantes de l'onde longitudinale dans le plan
 u_s et v_s : composantes de l'onde de cisaillement dans le plan
 λ : nombre d'onde de l'onde longitudinale dans le plan
 μ : nombre d'onde de l'onde de cisaillement dans le plan
 k_{lx} et k_{ly} : composantes suivant les axes x et y de l'onde longitudinale dans le plan
 k_{sx} et k_{sy} : composantes suivant les axes x et y de l'onde de cisaillement dans le plan
 F_x, F_y et F_z : composantes de l'effort de cohésion le long de la jonction
 R : rotation de la section, le long de la jonction
 M : moment fléchissant porté par l'axe de couplage

- F_x^i, F_y^i et F_z^i : composantes de l'effort de cohésion de l'onde incidente le long de la jonction
 F_x^r, F_y^r et F_z^r : composantes de l'effort de cohésion de l'onde réfléchie le long de la jonction
 F_x^t, F_y^t et F_z^t : composantes de l'effort de cohésion de l'onde transmise le long de la jonction
 R_i : rotation de la section due à l'onde incidente
 R_r : rotation de la section due à l'onde réfléchie
 R_t : rotation de la section due à l'onde transmise
 M_i : moment fléchissant de l'onde incidente
 M_r : moment fléchissant de l'onde réfléchie
 M_t : moment fléchissant de l'onde transmise
 ξ : paramètre adimensionnel avec $\xi = \rho \frac{h^2 \omega^2}{12E}$
 P_M : puissance associée au moment de flexion
 P_T : puissance associée à l'effort tranchant
 P_{plan} : puissance associée au mouvement dans le plan
 P_{tot} : puissance totale
 ϕ : angle de couplage du modèle de plaques de E. Rébillard
 $Y(A, B, \phi)$: mobilité de transfert entre les points A et B.
 $\delta Y(A, B, \delta \phi)$: variation de la mobilité de transfert
 $\alpha(\phi, \delta \phi)$: paramètre de sensibilité
 α_{crit} : angle critique de couplage
 $\alpha_{critique\ moyen}$: angle critique moyen
 $\Delta \theta$: intervalle angulaire

Chapitre 4 : Méthode de localisation proposée

- U : champ de déplacement longitudinal
 \vec{x} : axe longitudinal de la poutre
 L : longueur totale de la poutre
 x_0 : abscisse du changement de section
 I_1 : intervalle correspondant à la première section de la poutre, avec $I_1 =]0, x_0[$
 I_2 : intervalle correspondant à la seconde section de la poutre, avec $I_2 =]x_0, L[$
 S_1 et S_2 : sections des deux parties de la poutre
 E : module d'Young du matériau
 ρ : masse volumique du matériau
 ω : pulsation
 F : effort réparti imposé à la poutre
 U_0 : déplacement imposé à l'origine
 F_0 : effort imposé en bout de poutre
 $U|_{x=x_0^-}$: valeur de U étendue par continuité en $x = x_0$ avec $x \leq x_0$
 U_{sol} : solution du problème
 $R(U)$: résidu
 U_{app} : solution approchée
 $R_1(U)$ à $R_5(U)$: décomposition du résidu le long de la poutre
 S'_1 : nouvelle valeur de la section sur I_1

R' : résidu adapté à la seconde structure

$e_3(U)$: indicateur relatif associé au résidu $R_3(U)$

Chapitre 5 : Application analytique, étude d'un réseau de plaques

$\vec{U}_i = u_i(x_i, y) \vec{x}_i + v_i(x_i, y) \vec{y} + w_i(x_i, y) \vec{z}_i$: champ de déplacement de la plaque i

$\vec{R}_i \cdot \vec{y} = R_i(x_i, y)$: rotation de flexion de la plaque i , le long de l'axe \vec{y}

$\vec{F}_i = F_{x,i}(x_i, y) \vec{x}_i + F_{y,i}(x_i, y) \vec{y} + F_{z,i}(x_i, y) \vec{z}_i$: efforts généralisés de la plaque i

$\vec{M}_i \cdot \vec{y} = M_i(x_i, y)$: moment de flexion de la plaque i , selon l'axe \vec{y}

θ_{i+1} : angle de couplage entre la plaque i et la plaque $i + 1$

a : largeur commune des plaques

$u_i^*(l_i, y) = u_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - w_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1}$: projection du vecteur déplacement sur l'axe \vec{x}_{i+1}

$w_i^*(l_i, y) = w_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + u_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1}$: projection du vecteur déplacement sur l'axe \vec{z}_{i+1}

$F_{x,i}^*(l_i, y) = F_{x,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - F_{z,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1}$: projection de l'effort généralisé sur l'axe \vec{x}_{i+1}

$F_{z,i}^*(l_i, y) = F_{z,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + F_{x,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1}$: projection de l'effort généralisé sur l'axe \vec{z}_{i+1}

E : module d'Young du matériau

η : amortissement structural du matériau

ν : coefficient de Poisson du matériau

h : épaisseur de la plaque

D : module de rigidité en flexion des plaques avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Ω : domaine d'intégration (surface des plaques)

$\partial\Omega$: bord de Ω

R'_3 : résidu associé à la troisième partie de $R'(U)$

$\bar{\theta}$: valeur nominale de l'angle de couplage

θ' : variation de l'angle de couplage autour de la valeur nominale

e : indicateur adapté au cas des plaques

$\sigma_{\theta'}$: écart type de θ'

$f_{\theta'}(\mu)$: fonction de répartition de θ'

$F_{\theta',2}(k)$: fonction de probabilité

$P(E)$: probabilité d'un événement E

$E(\theta'^2)$: espérance de θ'^2

$e_{premier\ ordre}$: estimation du résidu obtenue par décomposition de l'angle de couplage au premier ordre

Chapitre 6 : Application à la méthode des éléments finis

Ω_0 : structure de référence

Ω_1 : structure modifiée, légèrement différente de Ω_0

M_0 et M_1 : matrices de masse du modèle éléments finis de Ω_0 et Ω_1

- K_0 et K_1 : matrices de raideur du modèle éléments finis de Ω_0 et Ω_1
 n : nombre de modes propres calculés
 U_0^i : mode propre i de Ω_0
 ω_0^i : pulsation propre i de Ω_0
 R^i : résidu associé au mode i
 I^i : indicateur associé au mode i
 I_e^i : indicateur associé au mode i , décomposé sur les éléments de Ω_0
 I_e : indicateur moyen sur la bande de fréquence, décomposé sur les éléments de Ω_0
 $\lambda_0^i = \omega_0^{i2}$ et $\lambda_1^i = \omega_1^{i2}$: valeurs propres des problèmes associés à Ω_0 et Ω_1
 $\Delta K, \Delta M, \Delta U^i, \Delta \lambda^i$: variations associées aux matrices et caractéristiques propres
 α_j^i : projection de U_0^i sur U_1^j
 δ_{jk} : symbole de Kronecker, $\delta_{jj} = 1$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$
 Chapitre 7 : Application numérique : étude d'une poutre de soubassement
 P : matrice de passage correspondant à la base obtenue par projection des relations des éléments rigides
 M_c, K_c et U_c : Projections par P de M, K et U

Première partie

Introduction - Bibliographie

Introduction

Le comportement vibro-acoustique des structures est primordial dans un grand nombre de situations, car le bruit comme les vibrations sont potentiellement sources de gêne. Si l'on sait très bien s'appliquer à les réduire sur une structure particulière, qui peut être un prototype, ce que l'on ne maîtrise pas correctement dans bon nombre de cas, c'est la réduction des différences de comportement vibro-acoustique entre plusieurs pièces fabriquées en série. En effet, les contraintes de fabrication et de montages, qui se traduisent par des tolérances sur les dimensions des pièces, les caractéristiques des matériaux et toutes les valeurs chiffrables de la structure utilisées pour la définition des pièces et des assemblages, sont indispensables pour assurer la faisabilité de la pièce. C'est au concepteur de fixer les limites acceptables de ces tolérances, il doit ainsi faire face au cahier des charges, qui lui impose des valeurs admissibles des caractéristiques "utiles" de la structure tout en limitant les écarts entre les différentes pièces, ce qui se fait facilement en réduisant les intervalles de tolérance, mais il doit en même temps écouter le fabricant, qui lui explique qu'il faut qu'il agrandisse ces intervalles s'il ne veut pas que la pièce lui coûte trop cher. Il s'agit donc de déterminer le bon compromis, qui satisfera à toutes ces contraintes. Cela ne pose pas de problème tant que les structures restent simples, mais dès que le nombre de pièces constitutives augmente, la résolution du problème tient souvent du savoir-faire acquis, sur l'expérience de montages de structures comparables. Et parfois, les mauvaises surprises arrivent en sortie de chaîne, lorsqu'une structure sur dix a un comportement complètement différent des neuf autres. Lorsqu'une telle observation est faite, il est généralement très délicat de déterminer la cause de ces dispersions, surtout si la structure est complexe. Pourtant, ces causes sont généralement peu nombreuses, et correspondent souvent à une ou des liaisons particulièrement sensibles de la structure, mais si leur détection n'a pas été effectuée lors de la phase de conception, il n'y a pas de moyen simple pour connaître l'origine des variations.

C'est dans cet esprit que le travail présenté ici propose tout d'abord une mise en évidence du phénomène d'hypersensibilité sur des structures simples, d'abord infinies puis finies, ainsi que son analyse et sa caractérisation, avant de proposer une méthode de localisation des principales sources d'incertitudes d'une structure donnée. Cette méthode est basée sur des concepts utilisés en recalage calculs/essais, elle est purement numérique, et sera présentée sur un exemple analytique, avant d'être intégrée à un code de calculs par éléments finis, afin de la tester sur des structures industrielles permettant une validation expérimentale des résultats. Le travail présenté porte uniquement sur l'aspect vibrations des structures, nous avons en effet estimé que la plupart des dispersions sonores rencontrées avaient pour origine des dispersions vibratoires. Ce travail propose ainsi une alternative aux méthodes classiques utilisées en analyse de sensibilité, dans le but d'obtenir un outil qui permettrait de savoir quelle partie de la structure est responsable des plus fortes dispersions, afin de pouvoir, lors d'une phase de projet, modifier les formes induisant de fortes sensibilités, ou bien de s'assurer que

lors du processus de fabrication une attention particulière sera portée sur ces zones.

Chapitre 1

Bibliographie

Le but de ce chapitre est de donner un état de l'art non exhaustif dans l'ensemble des domaines qui seront abordés, de près ou de loin, dans ce travail. Le fil conducteur, qui est celui qui a été suivi durant toute la préparation de ce travail est l'hypersensibilité, notion pouvant être assimilée à forte sensibilité. Si l'on devait donner un critère permettant de distinguer une sensibilité donnée d'une sensibilité "forte", il est certain que cela se ferait après une analyse des différents travaux effectués dans le traitement des incertitudes. Notons d'ores et déjà que l'objectif de l'ensemble des méthodes habituellement développées dans ce domaine est de prédire les dispersions induites par l'introduction de paramètres incertains dans la structure de référence, et que la quasi totalité de ces méthodes donne de bons résultats tant que les variations considérées et observées restent "petites". Dès que ces dispersions deviennent importantes, ce qui peut d'un point de vue statistique se traduire par un ordre de grandeur de l'écart type identique à celui de la moyenne, soit les méthodes ne sont plus capables de prédire les dispersions, soit leur coût de calcul augmente, se rapprochant de l'étude exhaustive du problème, c'est-à-dire de la simulation de Monte-Carlo.

La considération des problèmes de sensibilité n'est finalement qu'un problème de dérivation : si l'on était capable de calculer simplement et rapidement l'ensemble des dérivées partielles des paramètres de réponses par rapport aux paramètres structuraux et extérieurs, la plupart des problèmes du domaine seraient résolus. La difficulté réside dans le fait que ces dérivées sont très rarement accessibles facilement, c'est pourquoi le principe de la plupart des méthodes qui vont être abordées ici consiste à se dispenser du calcul de ces dérivées.

Dans un premier temps, l'aspect relatif aux poutres et plaques couplées sera présenté, avant de balayer le champ des grandes classes de prise en compte des dispersions en vibrations et en acoustique.

1.1 Poutres et plaques couplées

L'étude des poutres et des plaques en vibration est un problème classique, car de nombreuses structures réelles ont des comportements qui les rapprochent de ces modèles. De plus, l'aspect analytique relativement simple des équations obtenues a permis d'obtenir de nombreux résultats sur ce type de structures. Le but de cette partie est uniquement de présenter les travaux qui ont motivé les analyses de poutres et plaques couplées par un angle présentées ici, ainsi que les résultats utilisés lors des développements effectués. En particulier, concernant l'aspect dispersions, nous verrons plus loin

que les couplages de structures simples ou complexes peuvent, sous certaines conditions, introduire des comportements très sensibles, et nous présentons donc ici les références dans lesquelles ceux-ci ont été observés.

1.1.1 Poutres couplées

De nombreux travaux ont été réalisés en considérant un angle de couplage ayant pour valeur 90 degrés (plaques en L ou en T). Cette restriction permet d'obtenir une formulation très simple, dont les résultats peuvent être obtenus analytiquement. Les articles s'intéressant aux poutres couplées avec un angle donné sont en nombre assez réduit. Nous nous intéresserons aux modèles prenant en compte les couplages entre la flexion et le mouvement longitudinal dus à l'existence de la jonction entre les poutres, car des modèles trop simples ne prenant pas en compte ces couplages ne permettent pas de mettre en évidence les phénomènes qui nous intéressent.

Horner et al. [HW 91] présentent un travail portant sur la décomposition en ondes forcées du champ de déplacement de deux poutres semi-infinies couplées par un angle quelconque. Les résultats sont donnés en terme de pourcentage de la puissance transmise ou réfléchi au sein de chacune des parties de la structure, et tracés en fonction de l'angle de couplage. Bien que l'aspect sensibilité vis-à-vis de l'angle de couplage ne soit pas l'objectif de cette étude, les auteurs observent néanmoins que les variations de la puissance transmise sont importantes pour des angles de couplage faibles ou proches de 180 degrés. Cette analyse a été menée en considérant le couplage entre les poutres comme étant rigide, ce qui n'est pas toujours le cas en réalité. Guo [Guo 97] propose donc de la compléter en comparant différents modèles de joints, prenant en compte leurs raideurs et masses suivant différents degrés de liberté. Si la sensibilité n'est pas du tout abordée dans cette étude, l'auteur utilise cependant un paramètre, qu'il nomme fréquence adimensionnelle, et qui est le seul paramètre du problème en plus de l'angle de couplage, lorsque le joint est considéré rigide, ce qui autorise une étude paramétrique simple. L'extension de ces résultats aux structures finies est relativement simple, de même que la généralisation des couplages angulaires dans toutes les directions. Beale et al. [BA 95] ont effectué ce travail, en considérant des structures constituées de poutres finies couplées dans les trois dimensions. La formulation ondulatoire est encore une fois retenue, et tient compte de la flexion, du mouvement longitudinal, de la torsion, et de tous les couplages entre ces mouvements résultant des conditions aux jointures des poutres.

1.1.2 Plaques couplées

Concernant les plaques couplées, le travail de Langley et Heron [LH 90] fait office de référence, en proposant un rappel des résultats établis, ainsi que la mise en équation du couplage angulaire de plaques semi-infinies, la formulation étant encore une fois ondulatoire, prenant en compte les éventuels angles d'incidence des ondes mises en jeu. Cet article a notamment servi de base au travail de thèse de Rébillard [Réb 95], porté sur l'hypersensibilité des structures constituées de plaques couplées. Le premier aspect de ce travail sur lequel nous nous baserons est la mise en évidence du phénomène d'hypersensibilité sur les plaques couplées [RG 95]. Dans cet article, un indicateur de sensibilité est présenté, et tracé en fonction de l'angle de couplage. Cette courbe présente un maximum pour un angle de couplage faible et mais non nul, puis la sensibilité devient très faible lorsque l'angle augmente, avant d'augmenter à nouveau lorsque celui-ci se rapproche de 180 degrés. Le second aspect

qui va être à la base des travaux présentés ici concerne les réseaux de plaques couplées [RG 97]. Sur de telles structures, des comportements hypersensibles sont observés dès lors qu'un des couplages est identifié comme l'étant également.

1.2 Structures aux paramètres incertains

La prise en compte des incertitudes lors de l'étude d'une structure peut être menée en distinguant les deux sources d'incertitude que sont d'une part celles concernant l'excitation et d'autre part celles concernant la structure, que ce soit d'un point de vue matériau, géométrie ou conditions limites. C'est à cette dernière catégorie que nous nous intéresserons, l'objectif des travaux présentés étant au final de comprendre et de limiter les différences de comportements vibratoires entre des structures ayant des caractéristiques nominales égales.

Le problème de la méconnaissance des caractéristiques exactes des objets étudiés, que ce soit en raison de l'inaccessibilité de celles-ci ou de leur variation, qui peut être due aux facteurs ambiants ou à la considération de structures réputées identiques, a été soulevé dès que les premières expériences ont été organisées pour valider des modèles déterministes.

En ce qui concerne notre domaine d'application, on doit citer l'état de l'art effectué par Ibrahim [Ibr 87], auquel le lecteur est invité à se référer pour des précisions concernant les principales méthodes utilisées dans le traitement des incertitudes qui sont présentées ici sans rentrer dans les détails.

1.2.1 Différences de comportements observées sur des structures fabriquées en série

Concernant plus particulièrement les constats de différence de comportement entre des objets fabriqués en série, donc réputés semblables, Fahy [Fah 93] présente les résultats de mesures de fonctions de transfert effectuées sur un ensemble de canettes, et observe les différents comportements de ces structures. La dispersion des vibrations des canettes n'étant pas forcément un problème de premier ordre, de grandes différences de comportement entre des objets issus d'une même série peut poser des problèmes dans d'autres domaines, comme celui de l'automobile. En effet, les normes de bruit faisant partie du cursus d'homologation, les constructeurs souhaiteraient réduire au maximum les dispersions entre les véhicules fabriqués. Au-delà de ce problème réglementaire, on peut imaginer un mécontentement de la part des utilisateurs si le bruit varie fortement d'un véhicule à l'autre d'un même modèle. C'est dans ce domaine que Bernhard [Ber 96] a effectué des mesures, et il présente des résultats concernant la variabilité du bruit émis par une centaine de véhicules "identiques".

1.2.2 Méthodes basées sur l'échantillonnage

Pour le traitement des problèmes d'incertitudes, qu'ils soient expérimentaux ou numériques, l'approche qui a naturellement été utilisée en premier lieu est basée sur le principe de l'échantillonnage : la méthode de Monte Carlo, qui est presque systématiquement retenue en tant que référence, est à la fois la plus simple et la plus coûteuse, puisqu'il s'agit de choisir aléatoirement des échantillons, en nombre suffisamment important pour obtenir des distributions significatives des variables statistiques des paramètres de sortie. Le nombre d'échantillons à prendre en compte est donc généralement très

élevé, et celui-ci augmente avec le nombre de paramètres incertains. Il peut donc être intéressant de réfléchir à un choix judicieux de ces échantillons, afin d'obtenir une convergence rapide.

Ainsi, la méthode "Latin hypercube" propose de partager les intervalles des N paramètres aléatoires en M segments équiprobables. Le problème est ensuite considéré M^N fois, chaque échantillon étant aléatoirement choisi dans les intervalles correspondant au cas considéré. Ceci permet de réduire largement le nombre d'itérations, tout en étant certain que tous les intervalles ont été considérés, en particulier ceux correspondant aux valeurs extrêmes, qui ont généralement une faible probabilité.

Dans le même esprit, le principe des plans d'expérience, développé par Taguchi [Pil 98], permet de limiter le nombre de cas à prendre en compte. Si l'on considère que les N paramètres variables peuvent avoir M niveaux, un plan factoriel complet comprend $M \times N$ cas. Taguchi propose d'utiliser des plans fractionnaires orthogonaux : deux cas sont dits orthogonaux si à chaque niveau de l'un, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois. Il fournit donc des tables permettant de résoudre de nombreux problèmes avec un gain de temps considérable. Néanmoins, on peut noter deux points négatifs, le premier étant la considération des paramètres variables sous la forme de niveaux discrets, alors qu'une répartition du type distribution statistique est sans doute plus proche de la réalité. Le second inconvénient est que la limitation du nombre de tests interdit l'observation de certaines interactions entre paramètres (notons que ce dernier point est une faille commune à la plupart des méthodes simples de prise en compte des incertitudes).

Enfin, on peut citer la méthode des surfaces de réponses, qui consiste à choisir une plage de variation des paramètres d'entrée du problème afin d'effectuer les tests correspondants à un échantillonnage dans les intervalles retenus, pour finalement utiliser une méthode des moindres carrés afin d'obtenir une interpolation polynômiale de la réponse.

1.2.3 Méthodes analytiques classiques

Les méthodes permettant l'étude analytique des problèmes d'incertitudes sont principalement la méthode des perturbations et la décomposition en série de Neumann. Ibrahim [Ibr 87] rappelle leur principe : L'utilisation des séries de Neumann repose sur la recherche de l'inverse de l'opérateur du problème en le décomposant en série de Neumann, ce qui limite son application à certains types d'équations différentielles, alors que la méthode de perturbations n'a pas ce type de limite, puisqu'elle correspond à une décomposition (de type Taylor) du champ de sortie, généralement au premier ou second ordre. Ces méthodes sont généralement simples à mettre en oeuvre, mais ne donnent de bons résultats que si les perturbations restent petites, et que les problèmes sont linéaires.

1.2.4 Éléments finis stochastiques

Une grande part des recherches actuellement en cours pour traiter du problème des structures ayant des paramètres incertains est occupée par l'intégration de méthodes statistiques aux méthodes numériques existantes. Parmi celles-ci, et dans le domaine des basses et moyennes fréquences, la méthode des éléments finis [ZT 91] est évidemment privilégiée, puisqu'elle est reconnue et utilisée à la fois par le monde de la recherche et le monde industriel. L'objectif le plus répandu, qui est en accord avec l'aspect prévisionnel des codes éléments finis, est de trouver, en se basant sur des variations connues des valeurs des paramètres d'entrée, les dispersions des paramètres de sortie.

Schuëller [Sch 01] a récemment décrit les dernières avancées dans ce domaine, et propose de nombreuses références pour chacun des aspects de ce problème, tandis que Ghanem et al. [GK 96] expliquent le principe des éléments finis stochastiques : en plus de la discrétisation de la structure qui est identique à celle réalisée pour le traitement du problème déterministe, on utilise une décomposition en série des processus stochastiques, tronquée à un certain ordre suivant la précision désirée. Il y a deux niveaux de description de l'aspect stochastique du problème : le premier consiste à considérer les caractéristiques de la structure comme étant des champs stochastiques connus. Dans ce cas on utilise généralement une décomposition de Karhunen-Loeve, qui est analogue à la superposition modale utilisée en calculs de structures, puisque cette décomposition a des propriétés remarquables d'orthogonalité et de convergence. Le second niveau à considérer concerne le champ stochastique formé par la solution aux noeuds de la structure : dans ce cas la décomposition dite de chaos polynômial est utilisée. Ainsi, pour l'étude d'une structure possédant n degrés de liberté associée à une décomposition de chaos polynômial d'ordre p , on obtient un système linéaire d'ordre $n \times p$. Ce point est important : le choix des algorithmes de résolution, du stockage des valeurs et de la possibilité de mise en oeuvre de parallélisme en fonction des caractéristiques des matrices obtenues constituent sans doute les aspects primordiaux à prendre en compte pour le développement de cette méthode, qui donne d'ores et déjà des résultats satisfaisants, moyennant un temps de calcul conséquent.

Une approche différente de la formulation stochastique utilisant la méthode des éléments finis peut être menée en modifiant des éléments existants afin d'autoriser la prise en compte de défauts, ainsi Combescure et al. [CG 01] présentent un élément axisymétrique, basé sur un élément de coque, mais permettant l'analyse de structures possédant des défauts non axisymétriques, comme par exemple un rayon de cylindre ou de cône, ou une épaisseur variable sur la circonférence.

1.2.5 Incertitudes et hautes fréquences

Les limites de la modélisation par éléments finis étant rapidement atteintes lorsque l'on monte en fréquence, l'intégration des incertitudes dans les méthodes hautes fréquences est essentiel, car les effets des modifications structurales sur les réponses est alors très marqué, c'est d'ailleurs pour cette raison, et en tenant compte de cet état de fait, que certaines méthodes ont été développées. L'exemple le plus connu étant le cas de la méthode SEA [LD 95] : une des hypothèses de base de sa formulation est que la densité de probabilité des fréquences propres du système étudié est constante sur l'intervalle fréquentiel considéré. Parmi les méthodes qui essaient de s'affranchir de ce point délicat, on peut citer Viktorovitch [VTJ 99], qui a développé une formulation intégrale en hautes fréquences qui permet la prise en compte de paramètres géométriques aléatoires. Les résultats obtenus sont plus précis que ceux fournis par la SEA, mais le temps de calcul est supérieur, et les applications sont pour le moment limitées aux structures monodimensionnelles.

Mace [MS 01], pour le domaine des moyennes fréquences, propose de considérer différents sous-systèmes, dont les caractéristiques modales sont déterminées par éléments finis, et de faire intervenir les incertitudes au niveau des matrices de couplage entre ces systèmes, les sensibilités étant finalement estimées à l'aide de la méthode des perturbations. Cependant, la matrice de raideur seule est considérée variable, et l'introduction des incertitudes à ce niveau, si elle s'avère efficace en terme de temps de calcul, est délicate à utiliser dans le cas des structures réelles, pour lesquelles les variations des matrices sont dues à des différences géométriques ou de matériaux, plus facilement accessibles.

Dans le même esprit, qui est la considération de méthodes hybrides, Langley [LB 99] propose de considérer deux sous-systèmes de degrés de liberté, l'un "global" et l'autre "local". Le premier, que l'on peut associer aux grandes longueurs d'ondes, est traité en utilisant les approches déterministes classiques, en prenant cependant en compte l'existence des degrés de liberté du système local sous une forme que l'on peut rapprocher de la théorie du fbu structural [Soi 93], alors que le sous-système local, correspondant aux petites longueurs d'ondes, est mis en équation en utilisant la SEA, les degrés de liberté globaux étant alors considérés comme des puissances d'entrée. Cette méthode n'a pour le moment été exploitée que dans le cas de systèmes mécaniques monodimensionnels.

1.2.6 Utilisation de l'arithmétique floue

Si l'arithmétique floue n'a pas été abordée dans ce travail, cette voie est cependant de plus en plus développée dans le cadre des vibrations et de la mécanique en général, c'est pourquoi quelques références à cette théorie sont nécessaires afin de comprendre comment se situe ce domaine par rapport aux approches classiques des incertitudes.

La base de l'arithmétique floue, appelée aussi théorie des possibilités, a été posée en 1965 par Zadeh [Zad 65]. Elle a été présentée comme une alternative à l'analyse probabilistique, et permet de s'affranchir de certaines de ses limites que l'on détaillera plus loin. La définition originale d'un ensemble fbu est la suivante :

Un ensemble fbu F est défini dans un ensemble de référence R par une fonction d'appartenance caractéristique $\mu_F(x)$, qui associe à tout point x de R un nombre réel compris entre 0 et 1, dont la valeur $\mu_F(x)$ représente la possibilité d'appartenance de x à F .

Cette définition permet de faire le lien avec l'analyse probabilistique classique, pour laquelle la définition est assez proche, mis à part que F est dans ce cas un point de R et non un intervalle de R . Cette différence, assez peu évidente à interpréter d'un point de vue pratique, entraîne une qui montre les limites de l'analyse probabilistique : si un événement A a une probabilité $p(A)$, alors la probabilité de l'événement contraire de A , est connue et vaut $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$. Ceci n'est pas vrai dans la théorie des possibilités : si on note $P(A)$ la possibilité d'un événement A , la relation qui lie cette possibilité à la possibilité de l'événement complémentaire \bar{A} s'écrit $P(A) + P(\bar{A}) \geq 1$, car la relation $\max\{P(A), P(\bar{A})\} = 1$ est toujours vérifiée. Ceci traduit le fait que si l'on considère deux événements contraires, l'un des deux est toujours complètement possible, et que si un événement est considéré comme possible, son contraire peut très bien l'être aussi. Tout ceci est largement détaillé dans l'ouvrage de Dubois et Prade [DP 88], dans lequel on trouvera toutes les bases mathématiques de la théorie, ainsi que de nombreux éléments de calcul permettant une première mise en application de l'arithmétique floue.

Bien que la théorie des possibilités ait été introduite il y a plus de 35 ans, les outils applicatifs permettant son utilisation dans le domaine des dispersions sont encore en nombre réduit. Les fortes espérances placées dans cette méthode lors des premières années d'application ont été anéanties par certaines limites. En effet, si l'on s'intéresse au chiffrage des dispersions à partir d'une approche floue, les premiers résultats n'avaient pas de justification mathématique, et ne semblaient pas apporter de réel intérêt pour traiter des problèmes d'ingénierie, sans doute parce que la théorie probabilistique, implantée depuis de nombreuses années, donnait des résultats satisfaisants. Les domaines où cette théorie a été le plus efficacement utilisée sont finalement ceux où l'arithmétique floue peut fournir

des résultats qualitatifs, de type décisionnel, plutôt que des résultats quantitatifs, où les performances de la théorie sont pour le moment limitées.

Depuis quelques années, on peut observer un regain d'intérêt pour l'arithmétique floue et son utilisation quantitative, en particulier grâce à de nouveaux résultats fournis par les mathématiciens. On peut citer le travail de Höhle [Höh 96], qui s'est appuyé sur celui de Zadeh pour proposer un rappel des plus importants résultats mathématiques de la discipline, et en les appliquant au cas du contrôle flou, qui est dans notre domaine la branche dans laquelle l'arithmétique floue est la plus utilisée : il s'agit d'utiliser l'arithmétique floue d'un point de vue qualitatif. Dans le même esprit, qui est de donner une base théorique propre aux applications de la théorie des possibilités, Wu et al. [WSL 96] ont présenté des résultats concernant l'existence, l'unicité et les solutions approchées d'équations différentielles floues.

A partir de là, les applications de la théorie en ingénierie ont été multipliées, et de nombreuses personnes ont essayé de présenter cette théorie sous un aspect pratique [Ka 97], [HW 99]. En ce qui concerne l'utilisation de l'arithmétique floue dans le domaine des vibrations mécaniques, un nombre relativement réduit de personnes travaille sur ce sujet, la principale raison étant sans doute l'avancement des résultats mathématiques de la théorie, qui se fait en parallèle avec les essais d'application, alors que l'idéal serait bien sûr de s'appuyer sur des résultats disponibles. Néanmoins il existe plusieurs références dans lesquelles on peut trouver des exemples d'application, en particulier concernant l'intégration à la méthode des éléments finis, qui est aujourd'hui indispensable pour l'essor de toute nouvelle méthode.

On peut ainsi citer Moens et al. [MV 99], qui proposent d'utiliser l'arithmétique floue afin de déterminer les bornes des fonctions de réponse en fréquence d'un système. Une application à quatre degrés de libertés, utilisant des raideurs floues est présentée, et donne des résultats satisfaisants. Mais un tel système, avec peu de paramètres, ne peut pas faire apparaître une des difficultés de la méthode, dont est responsable la vision sous forme d'intervalles du problème. En effet, si l'on considère les variables floues comme indépendantes les unes des autres, les bornes possibles de la solution vont augmenter avec le nombre de variables considérées. Ceci est relié à une seconde difficulté, d'ordre numérique, et qui est très bien présentée par Hanss [HW 99], qui montre que la résolution d'un système linéaire flou, même simple, peut donner différentes solutions suivant la technique retenue, ce qui pose évidemment un problème pour l'application aux éléments finis.

Dans le même esprit, Lallemand et al. proposent d'utiliser d'autres techniques, basées sur la résolution du système nominal, couplée à une méthode de perturbations [LCTL 99] ou à une décomposition en série de Neumann [LPTL 99]. Dans ces cas, ce n'est pas la résolution du problème qui est basée sur l'arithmétique floue, mais la détermination des matrices de masse et de raideur en fonction de paramètres matériaux flous, qui servent ensuite dans les algorithmes à définir les bornes des valeurs de masses et de raideurs. On se rapproche ainsi de l'arithmétique des intervalles, qui est très proche de l'arithmétique floue, et pour laquelle des problèmes similaires peuvent être rencontrés [DTLJ 01].

Enfin, notons que l'arithmétique floue n'a rien à voir avec le concept de flou structural introduit par Soize [Soi 93]. Cette théorie est basée sur la considération d'une structure "maîtresse", connue et qui peut être traitée par toute méthode classique d'analyse, à laquelle sont attachés des éléments qui ne peuvent être décrits finement, et dont les caractéristiques mécaniques et de connexion sont représentées par des valeurs statistiques.

1.2.7 Méthodes de fiabilité

Les méthodes basées sur la fiabilité [Ibr 87] ont pour but d'estimer la probabilité d'un événement considéré. Typiquement, on utilise ceci pour connaître la probabilité de rupture d'une structure. Le principe repose sur la considération d'un ensemble de variables aléatoires $X = (X_1, \dots, X_n)$, et sur la donnée d'une condition de défaillance $g(X) < 0$. La probabilité recherchée est donc l'intégrale sur le domaine $g(X) < 0$ de la fonction de répartition statistique f_X . Les principales applications utilisent les approches du premier et second ordre (FORM/SORM), qui sont obtenues en approximant la fonction de défaillance par une tangente ou une parabole autour du point de défaillance. Ces méthodes semblent très bien fonctionner lorsque la probabilité de rupture est faible. Le temps de calcul est considérablement réduit par rapport à une simulation de Monte Carlo, bien qu'un calcul prenant en compte plusieurs scénarios de défaillance augmente beaucoup le coût de la méthode. Notons que de nombreuses voies permettant de réduire le temps de calcul de ces méthodes existent, comme par exemple l'utilisation d'une description statistique de la surface de réponse [GBL 02].

1.2.8 Méthodes d'optimisation de formes

S'il est un domaine qui peut être rapproché des travaux présentés ici, c'est sans doute celui de l'optimisation de forme [AH 01], dont le but est d'obtenir les formes d'une pièce en minimisant ou maximisant un critère donné. Si la structure initiale ne satisfait pas du tout le critère en question, il est évident qu'il va falloir agir là où la sensibilité est la plus forte. Dans cette approche, une des difficultés réside encore une fois dans l'estimation des dérivées des valeurs de sortie en fonction des paramètres variables d'entrée du problème. Le coût de calcul de la mise en application de ces méthodes est généralement très élevé, car les paramètres peuvent être nombreux, et la solution du problème n'est pas toujours unique. Les zones de fortes sensibilité sont habituellement déterminées en faisant varier indépendamment chacun des paramètres retenus pour l'optimisation.

1.3 Estimation et localisation d'erreur

Si l'on considère une structure réelle et sa modélisation, on peut distinguer de nombreuses sources d'erreurs conduisant aux différences qui peuvent être observées entre les deux. Il paraît en effet évident que la construction d'un modèle à partir du réel ne peut se faire qu'avec des hypothèses associées, qui reviennent à accepter que certains comportements réels ne soient pas représentables par le modèle et que ceux qui peuvent être représentés le soient approximativement, le degré de précision pouvant être variable. Si l'on veut obtenir une mesure des différences existant entre le réel et le modèle construit, il est impossible de le faire directement, il faut nécessairement passer par un ensemble d'étapes, qui chacune est source d'erreurs. Pour fixer les idées, prenons l'exemple d'un solide que l'on accepte de modéliser par une poutre, et l'on est intéressé de savoir à quel point son comportement réel est en accord avec les théories de poutres. A partir du modèle "brut" de poutre, qui est obtenu à partir d'hypothèses physiques introduisant d'éventuelles différences par rapport à l'objet réel, on va construire un modèle compatible avec le calcul, par exemple un modèle élément fini. Il est clair que ce passage fait intervenir des erreurs dues à la discrétisation du modèle. L'étape suivante est la procédure de calcul, pour laquelle des erreurs vont apparaître, comme par exemple les erreurs d'arrondis. Le calcul étant terminé, il s'agit d'obtenir des résultats, qui soient exploitables

d'un point de vue pratique. Dans notre exemple, on connaît par exemple la valeur du déplacement aux noeuds, et on en déduit la valeur du déplacement en n'importe quel point, ainsi que les contraintes. Là encore, des erreurs, qui peuvent être à la fois numériques et dues au modèle de calcul peuvent être introduites. Enfin, ce résultat peut être comparé aux mesures issues de la poutre réelle, qui sont encore une fois source d'erreurs. Chacune des étapes présentées ici fait l'objet de recherches ayant pour but de diminuer, ou au moins de maîtriser les erreurs introduites.

Le choix de la définition de l'erreur, et par là-même son chiffrage, est un point délicat. Ladevèze [Lad 75] a introduit la notion d'erreur en relation de comportement, qui semble tout à fait indiquée pour traiter un grand nombre de problèmes en mécanique. Pour le domaine qui nous intéresse, Guyader [Guy 84] l'a utilisée pour décrire les phénomènes observés lors d'études de vibrations de milieux imparfaitement caractérisés, montrant que cette façon de considérer le problème permet par exemple d'obtenir un encadrement des valeurs de pulsations propres d'un tel milieu à partir d'une mesure de déplacement ainsi que d'une connaissance imparfaite des caractéristiques de cette structure [Guy 87].

Le domaine où l'application de cette erreur a sans doute la part la plus importante est le domaine de l'estimation d'erreur a posteriori dans le cadre des éléments finis. Ceci désigne en fait principalement la localisation des erreurs observées sur les champs reconstruits à partir de la solution fournie par les procédures de calcul, dans le but d'effectuer un maillage plus fin dans les zones posant problème. D'autres indicateurs sont très utilisés dans ce domaine, et nous invitons le lecteur à se référer aux travaux très complets de Ainsworth et al. [AO 97], de Verfürth [Ver 99], ainsi que la comparaison entre les différents indicateurs faite par Zhu et al. [ZZ 99]. Notons que Bouillard [Bou 97] a cherché à appliquer ces techniques de localisation d'erreur et de remaillage dans le cadre plus spécifique de l'acoustique [BI 99].

En ce qui concerne le travail présenté ici, nous chercherons à localiser une erreur observée entre deux structures réputées identiques, ce qui s'apparente plus au domaine du recalage calculs/essais. Il convient de se référer aux travaux de Mottershead [MF 93] et Friswell [FM 95] si l'on désire avoir une vision quasi exhaustive de ce domaine particulier. Le recalage, qui est la modification des paramètres du modèle afin que les calculs basés sur celui-ci coïncident avec les mesures, n'est pas l'aspect qui nous intéresse ici, nous nous attarderons en effet sur la localisation des zones dans lesquelles le recalage doit être effectué, qui sont les zones où le modèle n'est pas en accord avec le champ de déplacement mesuré. Notons qu'une des principales difficultés de cette localisation est l'incompatibilité des champs mesurés avec ceux calculés, car le nombre de points de mesure est souvent différent du nombre de points de calcul. Ceci est remarqué notamment par Gysin [Gys 90], qui utilise comme indicateur d'erreur une force résiduelle modale, dont l'expression sera détaillée plus loin dans l'exposé. Cette erreur est reconnue comme ayant une très bonne capacité de localisation si les tailles des vecteurs mesurés et calculés sont les mêmes. Bobillot et al. [BB 01] recommandent son utilisation en lui donnant la dimension d'un déplacement, afin de le considérer sous sa forme énergétique.

Récemment, Ladevèze [LT 98] a introduit une nouvelle expression de l'erreur permettant la localisation, basée sur le concept d'erreur en relation de comportement, qui vient d'être mise en application par Deraemaeker [DLL 02], et semble donner de bons résultats, surtout dans le cas où le nombre de points de mesures est très inférieur au nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis. Il existe également plusieurs techniques de localisation, comme celle présentée par Lallement et al. [LP 90], qui sont basées sur la comparaison entre les champs de déplacement calculé et mesuré. Nous n'utili-

serons pas de tels indicateurs, car dans notre problème un des champs ne sera pas connu. Le choix d'un indicateur pour la localisation d'une zone à recalibrer n'est pas simple : Luber et al. [LL 90] en comparent plusieurs, et arrivent à la conclusion qu'il n'existe pas de méthode optimale, qui serait la meilleure dans tous les cas. Ils recommandent donc l'application en parallèle de plusieurs indicateurs, ainsi qu'un jugement avisé afin d'obtenir de bons résultats.

Ces techniques de localisation, qui ont été développées spécifiquement pour le recalibrage, ont parfois été utilisées dans d'autres domaines, et en particulier pour la localisation de dommages sur une structure. En combinant des données correspondant à la structure initiale avec des mesures effectuées sur la structure après un certain temps de fonctionnement, il est possible de localiser les zones dans lesquelles la fatigue a endommagé la structure. On pourra se référer aux travaux de Shi et al. [SLZ 98], ainsi qu'à ceux de Fritzen et al. [FJK 98] pour de plus amples précisions concernant cette application.

Deuxième partie

Sensibilité : Cas des structures simples couplées

Cette partie a pour but de mettre en évidence les phénomènes qui sont à l'origine des comportements hypersensibles qui ont été observés sur des structures couplées : plaques et poutres couplées par un angle. Ces observations, comme cela a été précisé dans la partie introductive, ont toujours été limitées à la constatation de l'existence d'une sensibilité plus grande pour certaines valeurs de l'angle de couplage, qui n'a jamais été relié aux caractéristiques de la structure considérée. Pour combler cette lacune, il nous a paru nécessaire de mener des études dont le nombre de paramètres reste faible, afin que les configurations posant des problèmes et les causes correspondantes puissent être facilement détectées. Nous présentons ainsi des analyses vibratoires de poutres puis de plaques semi-infinies, couplées par un angle, avant de conclure en comparant les résultats obtenus aux observations faites sur des structures finies. Pour chaque type de structure, la démarche suivie est la même : dans un premier temps, nous présentons la mise en équation du problème, basée sur une décomposition en ondes forcées, afin d'obtenir l'expression des champs de déplacement. Les résultats sont ensuite utilisés pour montrer que l'amplitude de la réponse peut varier fortement avec l'angle de couplage. Cependant, cette analyse ne permet pas de définir un angle "critique" de couplage, pour lequel la sensibilité est maximale. Une formulation sous la forme d'un bilan de puissance permet de s'affranchir de la difficulté et de définir cet angle critique : son évolution en fonction des paramètres structuraux est donc présentée. Enfin, nous relierons les résultats obtenus aux variations de fréquences propres observées sur des structures finies afin de justifier les analyses menées.

Chapitre 2

Étude du couplage de poutres semi-infinies

Cette étude, dont la mise en équation est classique, s'appuie en particulier sur les résultats obtenus par Horner et al. [HW 91]. Le but est ici de mettre en évidence les phénomènes de sensibilité sur une structure simple, puis de caractériser les configurations pour lesquelles l'hypersensibilité est existante.

2.1 Description et formulation du problème

La structure étudiée est constituée de deux poutres semi-infinies couplées, représentées figure 2.1. Leurs caractéristiques géométriques sont identiques et le matériau constitutif, qui est le même pour les deux poutres, est supposé homogène et isotrope. Les mouvements autorisés sont ceux de flexion (formulation Euler-Bernoulli), dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$, ainsi que ceux de vibrations longitudinales, portées par les axes (O, \vec{x}_1) et (O, \vec{x}_2) . Ces mouvements sont couplés par la jonction entre les deux poutres, qui est réalisée le long de l'axe (O, \vec{z}) . L'étude est limitée aux cas où $\alpha \in [0, \pi]$, pour d'évidentes raisons de symétrie.

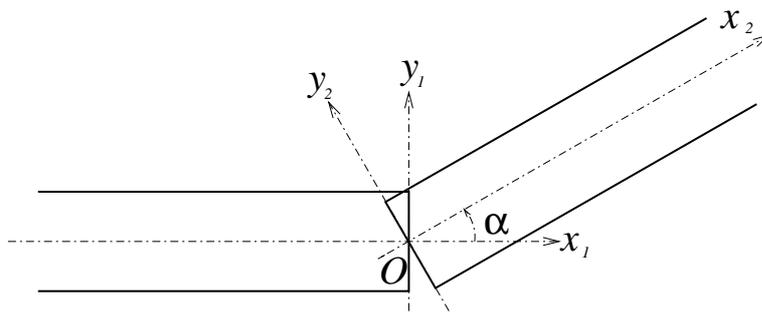


FIG. 2.1 – Structure étudiée : poutres semi-infinies couplées

Une analyse par décomposition en ondes forcées de la structure est menée, et les ondes associées sont les suivantes :

- Pour les mouvements de flexion :
 - La poutre 1 (située en $x_1 < 0$) a un mouvement régi par trois ondes : une onde progressive dans le sens $x_1 > 0$, dont nous supposons l'amplitude unitaire, due à une excitation non

représentée, ainsi qu'à deux ondes dans le sens $x_1 < 0$, une progressive et une évanescence dues aux effets de réflexion sur la ligne de couplage. Dans ces conditions le mouvement de flexion de cette poutre peut s'écrire sous la forme :

$$w_1(x_1) = A e^{kx_1} + B e^{jkx_1} + e^{-jkx_1} \quad (2.1)$$

Où A et B sont deux inconnues, et $k = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho S}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}$ est le nombre d'onde en flexion de la poutre.

– Le mouvement de la poutre 2 (située en $x_2 > 0$) est caractérisé par une combinaison de deux ondes, une évanescence et une progressive dans le sens $x_2 > 0$, car nous considérons cette poutre comme étant non excitée. Ainsi le mouvement de flexion de la deuxième poutre peut s'écrire :

$$w_2(x_2) = C e^{-kx_2} + D e^{-jkx_2} \quad (2.2)$$

Où C et D sont deux inconnues.

- En ce qui concerne les mouvements de vibrations longitudinales :

– La poutre 1 ne fait apparaître qu'une onde progressive dans le sens $x_1 < 0$, qui est due aux effets de réflexion sur la ligne de couplage :

$$u_1(x_1) = F e^{j\lambda x_1} \quad (2.3)$$

Où F est une inconnue et $\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ est le nombre d'onde en vibrations longitudinales de la poutre.

– La poutre 2, de la même façon, ne fait intervenir qu'une onde progressive dans le sens $x_2 > 0$:

$$u_2(x_2) = G e^{-j\lambda x_2} \quad (2.4)$$

Où G est une inconnue.

2.2 Résolution

Les efforts généralisés mis en jeu sont déterminés à partir des champs de déplacements. On note $M(x)$ le moment fléchissant, $T(x)$ l'effort tranchant et $N(x)$ l'effort longitudinal :

$$M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.5)$$

$$T(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (2.6)$$

$$N(x) = ES \frac{du}{dx} \quad (2.7)$$

Notons que ces efforts généralisés sont définis comme étant les efforts de cohésion correspondant à une section de poutre dont la normale est dirigée dans le sens des x croissants. De la même façon, la rotation de la section est définie par :

$$\Omega(x) = \frac{dw}{dx} \quad (2.8)$$

Les six inconnues sont déterminées par les conditions de couplage en $x = 0$:

– Continuité des déplacements :

$$w_2(0) = w_1(0) \cos\alpha + u_1(0) \sin\alpha \quad (2.9)$$

$$u_2(0) = -w_1(0) \sin\alpha + u_1(0) \cos\alpha \quad (2.10)$$

– Continuité de la pente :

$$\frac{dw_2}{dx_2}(0) = \frac{dw_1}{dx_1}(0) \quad (2.11)$$

– Continuité du moment fléchissant :

$$EI \frac{d^2 w_2}{dx_2^2}(0) = EI \frac{d^2 w_1}{dx_1^2}(0) \quad (2.12)$$

– Continuité de l'effort tranchant et de l'effort normal :

$$-EI \frac{d^3 w_2}{dx_2^3}(0) = -EI \frac{d^3 w_1}{dx_1^3}(0) \cos\alpha + ES \frac{du_1}{dx_1}(0) \sin\alpha \quad (2.13)$$

$$ES \frac{du_2}{dx_2}(0) = EI \frac{d^3 w_1}{dx_1^3}(0) \sin\alpha + ES \frac{du_1}{dx_1}(0) \cos\alpha \quad (2.14)$$

En tenant compte des expressions 2.1 à 2.4, ces 6 équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha & -1 & -1 & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & -\cos\alpha & 1 \\ 1 & j & 1 & j & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & -j \cos\alpha & 1 & -j & -j \mu \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -j \sin\alpha & 0 & 0 & j \mu \cos\alpha & j \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ j \\ 1 \\ -j \cos\alpha \\ -j \sin\alpha \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Le seul paramètre structural intervenant dans les expressions des constantes est donc, en plus de l'angle α , le paramètre adimensionnel $\mu = \frac{S\lambda}{Ik^3}$. Ce paramètre peut s'exprimer simplement en fonction du rapport des nombres d'ondes :

$$\mu = \frac{S\lambda}{Ik^3} = \left(\frac{ES}{\rho I \omega^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{k}{\lambda} \quad (2.16)$$

L'inversion de la matrice permet d'obtenir l'expression analytique des constantes :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1+j\mu^2)\sin^2\alpha}{K(\alpha,\mu)} \\ \frac{(1-\mu^2)\sin^2\alpha - j\mu(1-\cos\alpha)^2}{K(\alpha,\mu)} \\ \frac{(-1+j\mu^2)\sin^2\alpha - \mu(1-j)(1-\cos\alpha)^2}{K(\alpha,\mu)} \\ \frac{j(1-\mu^2)\sin^2\alpha + 2\mu(1+\cos\alpha)^2}{K(\alpha,\mu)} \\ \sin\alpha \frac{(\mu(3-j)-3-j)\cos\alpha + (1+j)(\mu+j)}{K(\alpha,\mu)} \\ \sin\alpha \frac{(1+j)(-\mu+j)\cos\alpha - \mu(3-j)-3-j}{K(\alpha,\mu)} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Avec :

$$K(\alpha, \mu) = \mu(3 + 2\cos\alpha + 3\cos^2\alpha) + (\mu^2 + j)(1 - j)\sin^2\alpha \quad (2.18)$$

2.3 Application

Le problème étant résolu analytiquement, le tracé de la réponse de la poutre en un point se fait très facilement. Un exemple numérique permet de présenter le comportement typique de la structure. Les caractéristiques des poutres choisies sont : sections carrées 1 cm par 1 cm , module d'Young $E = 2,1.10^{11} Pa$, masse volumique $\rho = 7800 kg/m^3$, fréquence $f = 100 Hz$. Dans ces conditions la valeur du paramètre adimensionnel est $\mu = 53,5$.

Dans cette analyse, nous allons nous intéresser principalement aux ondes progressives, qui caractérisent le comportement vibratoire de la structure loin de la jonction et qui permettent de connaître les voies de transmission entre les deux poutres par l'intermédiaire des bilans de puissance qui seront menés plus loin. De plus, dans une démarche vibro-acoustique, nous nous intéresserons plus particulièrement aux ondes de flexion, qui sont responsables du rayonnement de la structure.

La figure 2.2 présente le tracé des amplitudes des ondes progressives de la réponse vibratoire de la structure, en fonction de l'angle de couplage α .

On peut ainsi constater qu'il existe plusieurs zones caractéristiques : lorsque l'angle de couplage est nul, l'onde incidente est totalement transmise, puisque la structure n'est alors qu'une poutre infinie sans discontinuité. Dès lors que cet angle a une valeur non nulle, l'amplitude de l'onde de flexion transmise décroît très rapidement, et dans le cas particulier traité, la sensibilité de l'amplitude de la réponse vis-à-vis de l'angle de couplage est très forte entre 0 et 20 degrés. Si l'angle de couplage continue à augmenter, la sensibilité devient quasiment nulle pour tous les angles compris entre 20 et 150 degrés. Au-delà, un comportement très sensible est à nouveau rencontré, et finalement l'ampli-

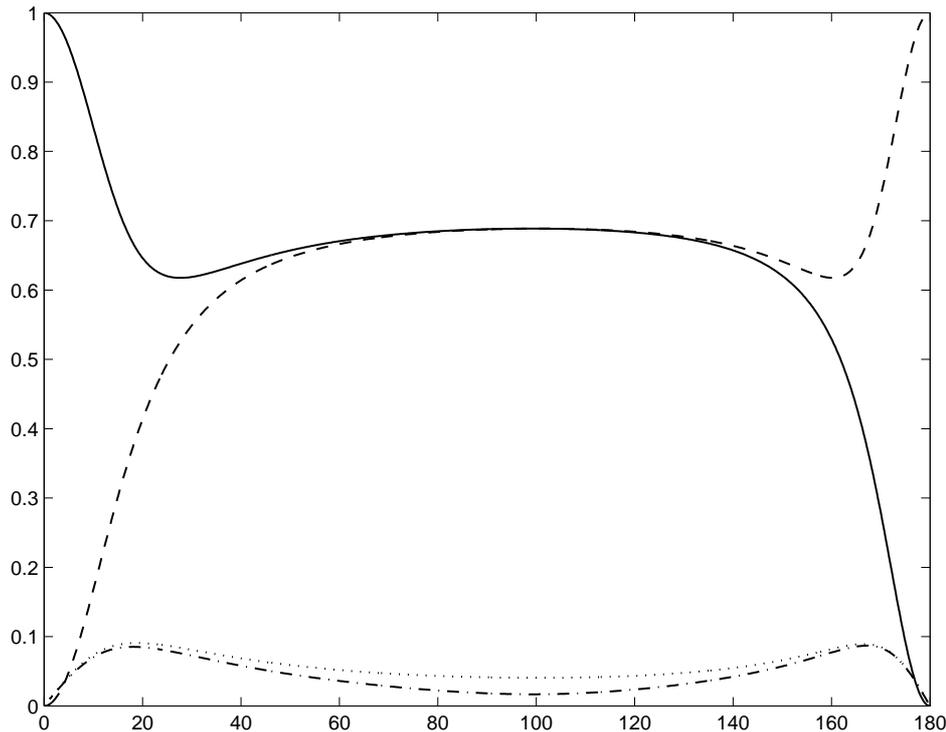


FIG. 2.2 – Module de l'amplitude des ondes progressives en fonction de l'angle de couplage (degrés).
 – Onde de flexion transmise, - - Onde de flexion réfléchie, ··· Onde longitudinale transmise, -·-· Onde longitudinale réfléchie

tude de l'onde progressive transmise est nulle lorsque l'angle de couplage atteint la valeur théorique maximale de 180 degrés. L'analyse de l'onde de flexion réfléchie peut se faire de la même manière, et présente des résultats similaires, avec toutefois une inversion des angles correspondants à un transfert total ou nul. Enfin, le calcul nous permet d'avoir accès aux expressions des amplitudes des ondes longitudinales, qui présentent également de fortes sensibilités dans les mêmes zones angulaires que les réponses en flexion, bien que les niveaux vibratoires soient beaucoup plus faibles.

Lorsque l'ensemble des paramètres varie, les réponses vibratoires des deux poutres varient également, mais le comportement global reste similaire au cas présenté. Dans ces conditions, il est possible de connaître l'expression de l'angle critique, pour lequel la sensibilité de la réponse en flexion de la structure est maximale, en fonction des paramètres de l'étude. Ceci peut être fait relativement facilement d'un point de vue numérique, puisque nous avons montré (équation 2.17) que mis à part l'angle de couplage, le seul paramètre intervenant dans ce problème est le rapport des nombres d'ondes μ . Il est donc possible de connaître la valeur de l'angle critique en fonction de ce seul paramètre. La difficulté réside ici dans la définition précise de l'angle critique : l'angle pour lequel la sensibilité de l'onde de flexion progressive est maximale semble être la plus légitime. Mais la figure 2.3 montre que les dérivées des amplitudes des deux ondes correspondantes (transmise et réfléchie) n'atteignent pas leurs valeurs maximales pour le même angle de couplage.

On retrouve sur cette figure le fait qu'il existe deux zones de fortes sensibilités, la première centrée sur un angle d'une quinzaine de degrés, et la seconde centrée sur un angle valant environ 170 degrés. Par contre il n'est pas possible de définir précisément un angle (ou deux angles) caractéristique de ces zones, car les deux ondes transmise et réfléchie n'atteignent pas leur sensibilité maximale au même

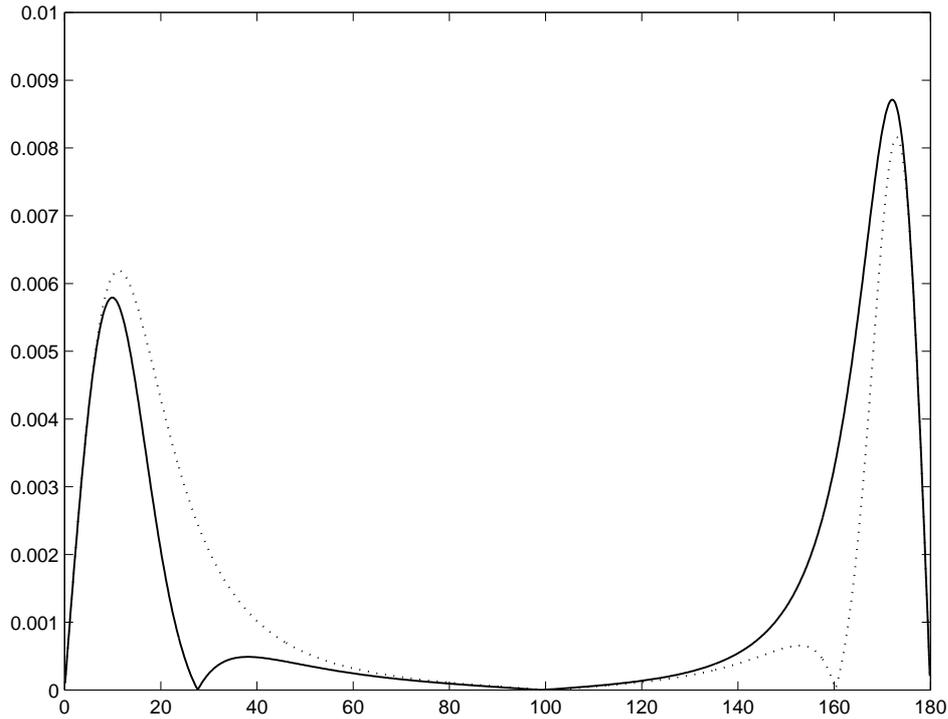


FIG. 2.3 – Module de la dérivée de l'amplitude des ondes progressives de flexion par rapport à l'angle de couplage α , en fonction de cet angle, en degrés. - Onde transmise, \dots Onde réfléchie

angle. Nous allons nous affranchir de ce problème en considérant l'aspect transmission de puissance du problème.

2.4 Bilan de puissance

Le bilan effectué va être interprété de telle façon que la puissance associée à l'onde incidente soit considérée comme étant la puissance d'entrée d'un système. Pour cela, la normale de la section de poutre prise en compte est donc orientée dans le sens $x < 0$, ce qui induit des inversions de signes dans les relations 2.5 à 2.7. Afin de développer la mise en équation du bilan, on s'intéresse aux puissances transmises, donc correspondant aux mouvements indicés 2. La puissance transmise par le mouvement de flexion est déterminée à partir des quatre quantités suivantes : vitesse de flexion (eq. 2.19), vitesse de rotation des sections droites (eq. 2.20), moment fléchissant (eq. 2.21) et effort tranchant (eq. 2.22).

$$\dot{w}(x_2) = j\omega C e^{-kx_2} + j\omega D e^{-jkx_2} \quad (2.19)$$

$$\dot{\Omega}_2(x_2) = -j\omega k C e^{-kx_2} + \omega k D e^{-jkx_2} \quad (2.20)$$

$$M_2(x_2) = -EI k^2 C e^{-kx_2} + EI k^2 D e^{-jkx_2} \quad (2.21)$$

$$T_2(x_2) = -EI k^3 C e^{-kx_2} + jEI k^3 D e^{-jkx_2} \quad (2.22)$$

La puissance transmise par l'effort tranchant est :

$$P_T(x_2) = \frac{1}{2} \text{Re} (\overline{\dot{w}_2} T_2) \quad (2.23)$$

$$P_T(x_2) = \frac{1}{2} EI \omega k^3 \left(\|D\|^2 + e^{-kx} \text{Re} \left(j C \overline{D} e^{jkx} + \overline{C} D e^{-jkx} \right) \right) \quad (2.24)$$

Quant à la puissance transmise par le moment de flexion :

$$P_M(x_2) = \frac{1}{2} \text{Re} (\overline{\dot{\Omega}_2} M_2) \quad (2.25)$$

$$P_M(x_2) = \frac{1}{2} EI \omega k^3 \left(\|D\|^2 - e^{-kx} \text{Re} \left(C \overline{D} e^{jkx} - j \overline{C} D e^{-jkx} \right) \right) \quad (2.26)$$

Ainsi, les puissances transmises par l'effort tranchant et le moment de flexion dépendent de l'abscisse x . Cependant, lorsqu'on s'éloigne de la jonction, très vite ces deux puissances deviennent égales et indépendantes de l'abscisse. De plus cette dépendance pourrait être qualifiée de "mathématique", puisque la puissance réellement mise en jeu fait intervenir la somme de ces deux puissances :

$$P_{flexion} = P_T(x_2) + P_M(x_2) \quad (2.27)$$

$$P_{flexion} = EI \omega k^3 \|D\|^2 \quad (2.28)$$

Cette puissance est indépendante de l'abscisse.

La puissance totale transmise fait intervenir le mouvement longitudinal, et plus précisément la vitesse de vibration longitudinale \dot{u}_2 et l'effort longitudinal N_2 .

$$P_{longi} = \frac{1}{2} \text{Re} (\overline{\dot{u}_2} N_2) \quad (2.29)$$

$$P_{longi} = \frac{1}{2} \omega \lambda E S \|G\|^2 \quad (2.30)$$

En conclusion, on retrouve bien que la puissance totale transmise est indépendante de l'abscisse choisie pour le calcul, et vaut :

$$P_{trans} = EI\omega k^3 \|D\|^2 + \frac{1}{2} E S \omega \lambda \|G\|^2 \quad (2.31)$$

Notons que cette puissance, tracée figure 2.4, permet de retrouver les zones de fortes sensibilités décrites plus haut.

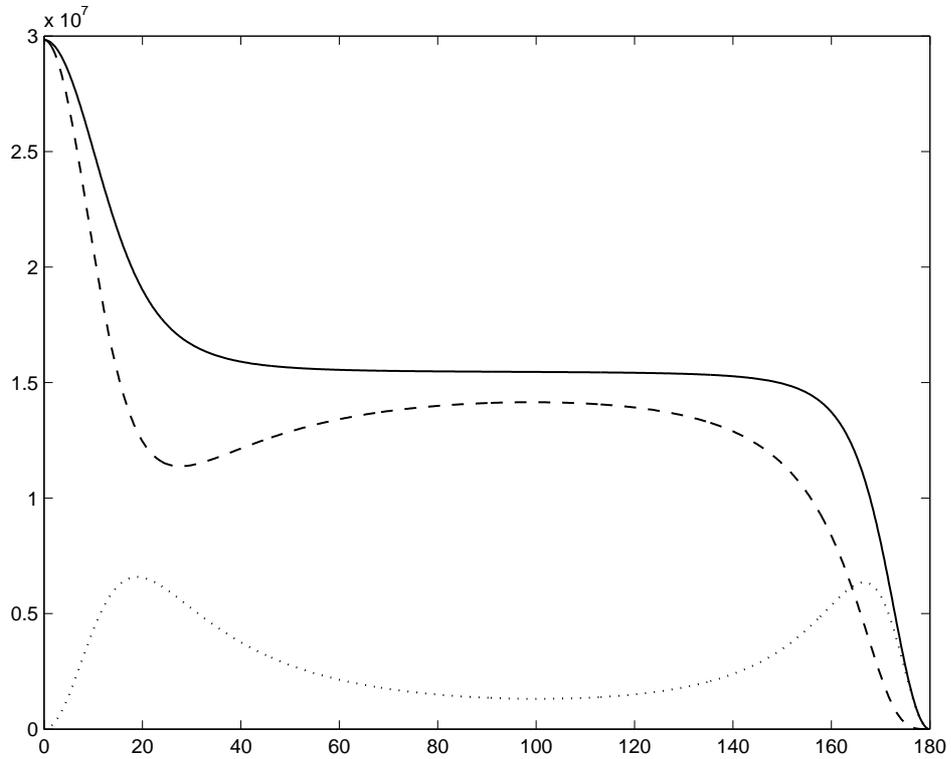


FIG. 2.4 – Puissances transmises, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance transmise par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), ··· puissance transmise par l'effort normal

De la même façon, en indiquant i les déplacements et efforts généralisés correspondant à l'onde incidente, la puissance incidente vaut :

$$P_{inc} = \frac{1}{2} Re(\overline{\dot{w}_i} T_i) + \frac{1}{2} Re(\overline{\dot{\Omega}_i} M_i) \quad (2.32)$$

$$P_{inc} = \frac{1}{2} Re\left(\overline{\dot{w}_i} EI \frac{d^3 w_i}{dx^3}\right) + \frac{1}{2} Re\left(-\overline{\dot{\Omega}_i} EI \frac{d^2 w_i}{dx^2}\right) \quad (2.33)$$

$$P_{inc} = EI\omega k^3 \quad (2.34)$$

Cette puissance ne dépend évidemment pas de l'angle de couplage. Enfin, la puissance réfléchie (qui est tracée sur la figure 2.5) s'exprime ainsi :

$$P_{refl} = \frac{1}{2}Re(\overline{\dot{w}_r}T_r) + \frac{1}{2}Re(\overline{\dot{\Omega}_r}M_r) + \frac{1}{2}Re(\overline{\dot{u}_r}N_r) \quad (2.35)$$

$$P_{refl} = -EI\omega k^3 \|B\|^2 - \frac{1}{2}ES\omega\lambda \|F\|^2 \quad (2.36)$$

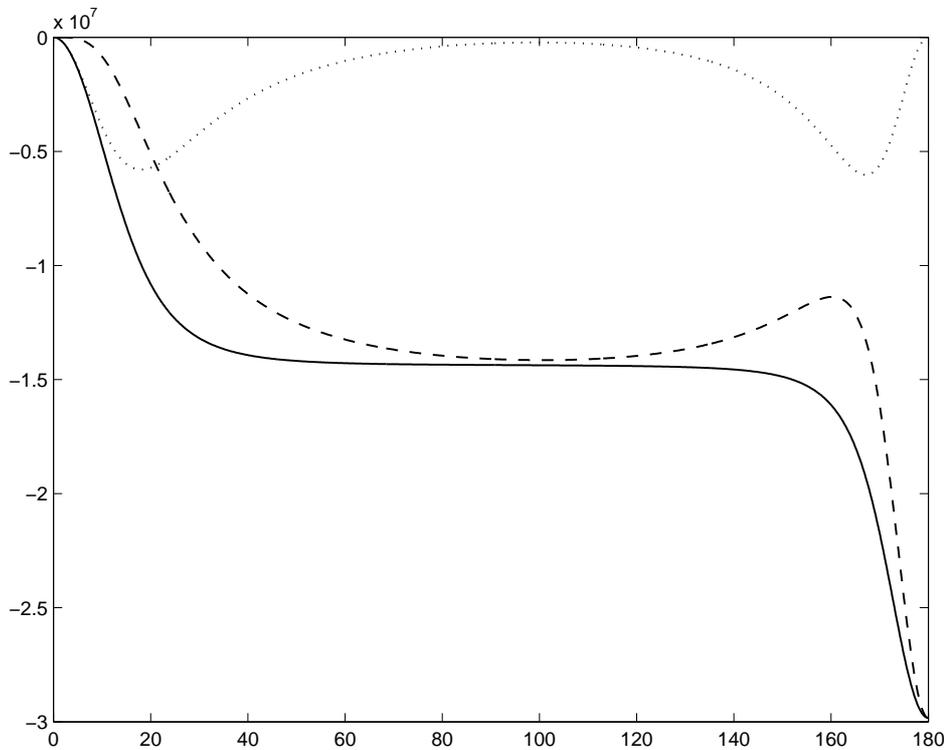


FIG. 2.5 – Puissances réfléchies, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance réfléchie par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), \cdots puissance réfléchie par l'effort normal

Finalement, le bilan de puissance appliqué à la portion de structure considérée peut s'écrire simplement, puisque notre modèle ne prend pas en compte d'éventuelles pertes :

$$P_{inc} + P_{refl} = P_{trans} \quad (2.37)$$

avec $P_{inc} > 0$; $P_{refl} < 0$; $P_{trans} > 0$

Ce bilan est illustré figure 2.6.

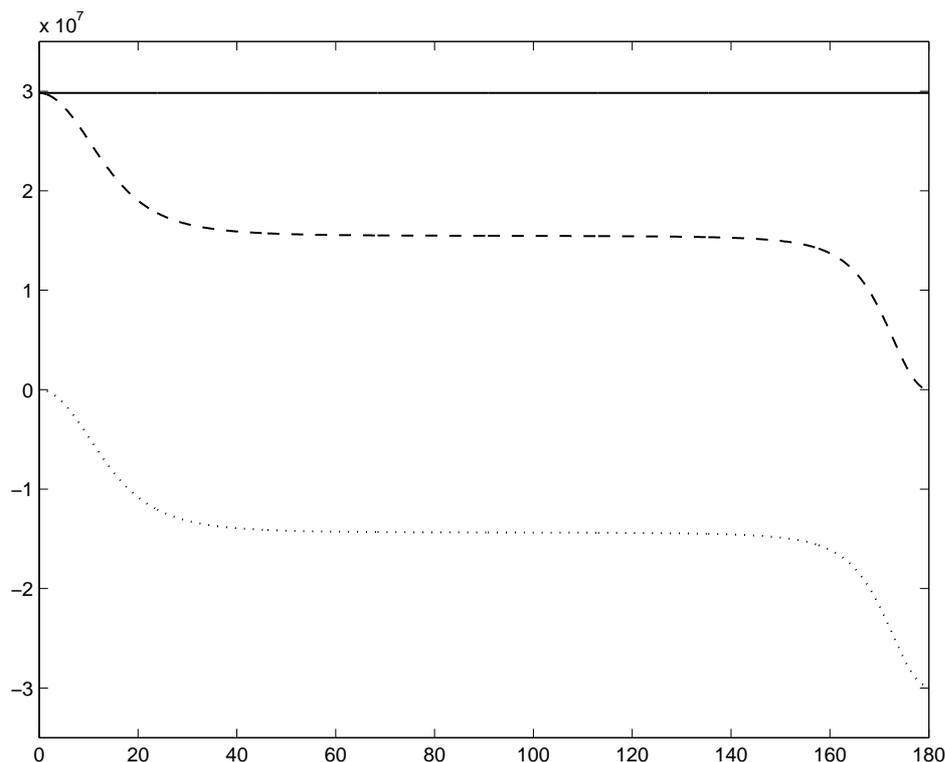


FIG. 2.6 – Bilan de puissance, tracé en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance incidente, - - puissance transmise, $\cdot\cdot\cdot$ puissance réfléchie

2.5 Recherche de l'angle critique

L'intérêt d'une analyse en terme de bilan de puissance est que la relation précédente permet de garantir que les sensibilités des ondes transmises et réfléchies vis-à-vis de l'angle de couplage seront les mêmes puisque la puissance incidente est constante avec l'angle. Ainsi le tracé des dérivées des puissances par rapport à l'angle de couplage donne deux courbes identiques, tracées sur la figure 2.7. On peut remarquer que la courbe présente deux maxima, le premier correspondant à un angle de 10 degrés, alors que le second est atteint pour un couplage de 172 degrés. Ces deux angles vont donc caractériser la sensibilité de la structure, puisqu'autour de ces deux valeurs, les variations rapides dans les flux de puissances entraînent de forts changements sur les réponses vibratoires, alors que pour des couplages faisant intervenir des angles différents de ceux-ci, la sensibilité est très faible.

Nous avons vu que la formulation du problème ne dépendait que d'une seule variable, qui est le rapport entre les nombres d'ondes de flexion et de vibrations longitudinales de la poutre. Il peut être intéressant de connaître l'expression des deux angles critiques, pour lesquels la sensibilité est maximale, en fonction de cette variable. D'un point de vue analytique, cette détermination s'avère très délicate, mais elle se fait très aisément à l'aide d'outils numériques. La figure 2.8 présente le résultat de ce calcul : les deux angles critiques sont tracés en fonction de μ , pour des structures "raisonnables", c'est-à-dire de dimensions classiques.

Le plus grand des angles critiques a donc une valeur proche de 180 degrés lorsque les nombres d'ondes sont très différents l'un de l'autre, et diminue lorsque leurs valeurs se rapprochent. La valeur minimale de cet angle est 129,6 degrés (valeur obtenue numériquement), lorsque les deux nombres d'ondes sont égaux. En ce qui concerne le plus petit angle critique, sa valeur est proche de zéro

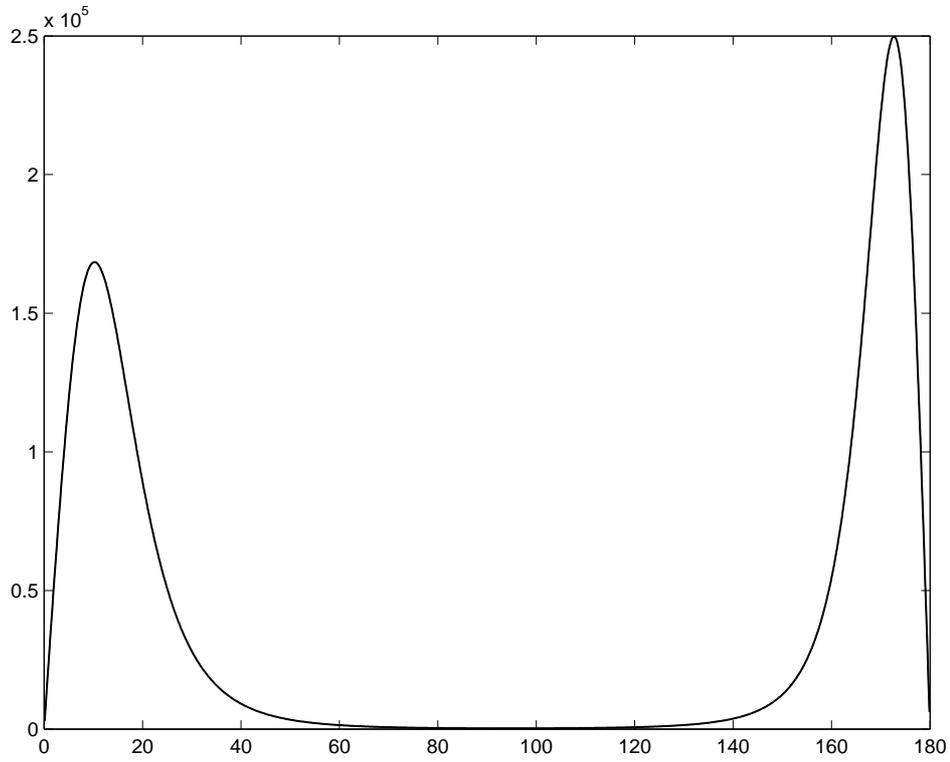


FIG. 2.7 – Sensibilité de la puissance en fonction de l'angle de couplage, en degrés.

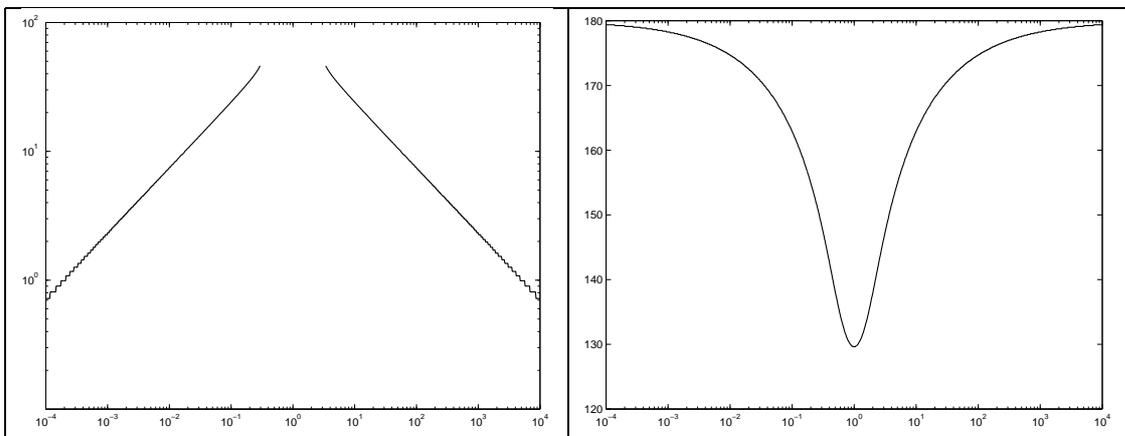


FIG. 2.8 – Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ .

lorsque k et λ ont des valeurs très différentes, et augmente lorsque μ se rapproche de 1. Notons cependant que cet angle n'existe pas toujours, en effet, le plus petit angle critique atteint sa valeur maximale lorsque $\mu = 1/3$ ou $\mu = 3$ (valeurs obtenues numériquement), et vaut alors 46,2 degrés. Entre ces deux valeurs, la courbe de sensibilité ne présente qu'un maximum, situé au-dessus de 90° . Le cas limite est présenté figure 2.9, qui présente la transition entre l'existence du maximum local et sa non-existence. L'aspect linéaire de la courbe du plus faible angle critique (en tracé log-log) est intéressante à noter, d'autant que les pentes des droites associées sont 2 et -2 (valeurs approchées, obtenues numériquement), ce qui permet d'obtenir une relation empirique :

$$\begin{cases} \alpha_{crit\ min} \simeq c_1 \mu^2 & \text{si } \mu < \frac{1}{3} \\ \alpha_{crit\ min} \simeq \frac{c_2}{\mu^2} & \text{si } \mu > 3 \end{cases} \quad (2.38)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes. Cette relation n'a cependant pas pu être retrouvée analytiquement, les calculs mis en jeu étant très lourds.

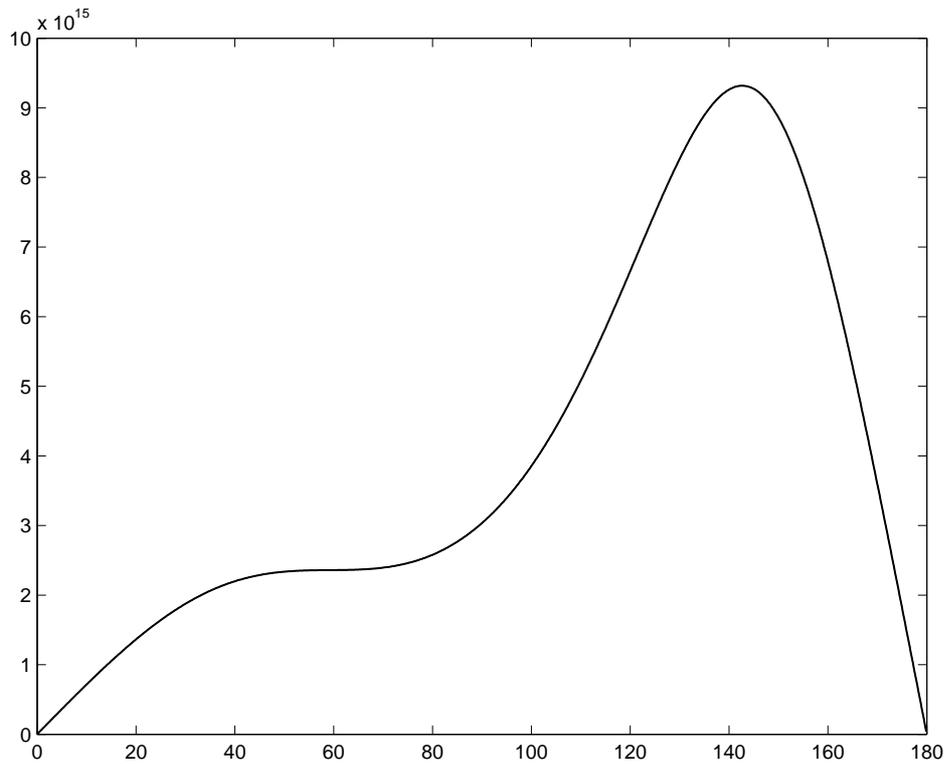


FIG. 2.9 – Sensibilité de la puissance transmise vis-à-vis de l'angle de couplage. Cas limite.

2.6 Cas d'une onde incidente longitudinale

Dans une optique de traitement exhaustif de ce problème, il est nécessaire de se demander si les résultats précédents sont conservés lorsque l'onde incidente est une onde longitudinale. Le développement complet des équations ne sera pas fait ici, dans un souci de simplification de l'exposé, puisque la formulation reprend largement celle qui a été développée au-dessus. Les notations sont conservées, les seuls changements notables sont les suivants :

L'onde incidente est une onde longitudinale :

$$u_1(x_1) = e^{-j\lambda x_1} + F e^{j\lambda x_1} \quad (2.39)$$

Le mouvement de flexion de la poutre 1 est réduit à la somme de deux ondes dans le sens $x_1 < 0$.

$$w_1(x_1) = A e^{kx_1} + B e^{jkx_1} \quad (2.40)$$

Dans ces conditions, seul le second terme du système linéaire 2.15 change, devenant :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha & -1 & -1 & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & -\cos\alpha & 1 \\ 1 & j & 1 & j & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & -j\cos\alpha & 1 & -j & -j\mu\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -j\sin\alpha & 0 & 0 & j\mu\cos\alpha & j\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -j\mu\sin\alpha \\ j\mu\cos\alpha \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

La figure 2.10 permet d'observer les similitudes et les différences avec le cas d'une onde incidente de flexion. Les zones de fortes sensibilités vis-à-vis de l'angle de couplage sont toujours localisées aux alentours de zéro et 180 degrés. La transmission du mouvement longitudinal est totale pour un couplage de zéro degré, correspondant à une poutre droite infinie, puis diminue rapidement lorsque l'angle de couplage augmente, pour être quasiment nul dans une large zone centrée sur un angle proche de 90 degrés (dont la valeur dépend des paramètres choisis), avant d'augmenter à nouveau rapidement, et lorsque l'angle de couplage atteint 180 degrés, la transmission est à nouveau totale. En ce qui concerne la transmission par l'intermédiaire du mouvement de flexion, elle est évidemment nulle lorsque α vaut zéro degré, puis augmente rapidement avec l'angle de couplage, avant d'atteindre un maximum et de diminuer sensiblement. Globalement, pour tous les angles situés entre 50 et 140 degrés, toute la puissance transmise à la poutre 2 l'est par transformation de l'onde longitudinale en onde de flexion sur la poutre 2. Enfin, autour de 180 degrés, l'énergie transmise par le mouvement de flexion chute rapidement vers une valeur nulle.

A l'aide de cette courbe, il est possible de définir l'angle critique, pour lequel la sensibilité de la puissance totale transmise (ou réfléchi) est maximale. Comme dans la partie précédente, on va définir en fait deux angles, qui se situeront de part et d'autre de 90 degrés. Ceci est fait sur la figure 2.11, en fonction du paramètre structural μ .

Cette figure est assez semblable à celle obtenue pour une onde incidente longitudinale (figure 2.8), mis à part que l'angle le plus bas existe toujours, et sa valeur maximale, obtenue lorsque les nombres d'ondes de flexion et de vibration longitudinale sont égaux, est de 83,1 degrés. Concernant l'angle critique le plus proche de 180 degrés, son évolution est similaire à celle observée figure 2.8, sa valeur minimale étant 146,6 degrés. La zone pour laquelle une structure donnée n'est hypersensible vis-à-vis de l'angle de couplage quelle que soit la sollicitation est donc réduite par rapport au cas précédent.

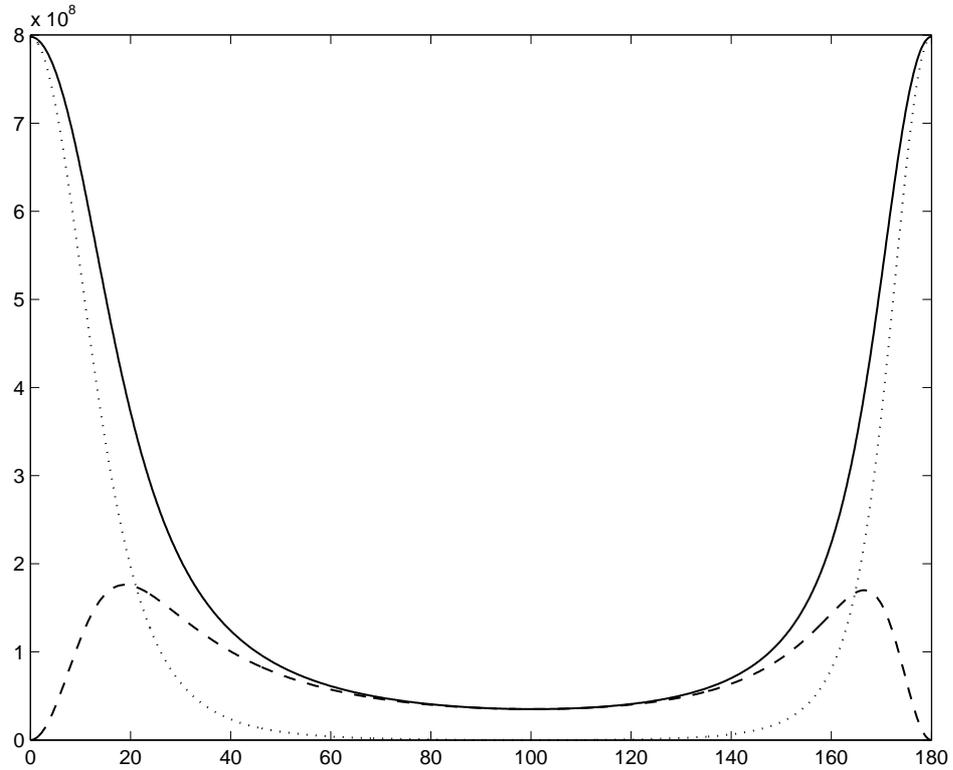


FIG. 2.10 – Puissances transmises, en fonction de l'angle de couplage, en degrés. - puissance totale, - - puissance transmise par le moment de flexion et l'effort tranchant (qui sont égales), \cdots puissance transmise par l'effort normal

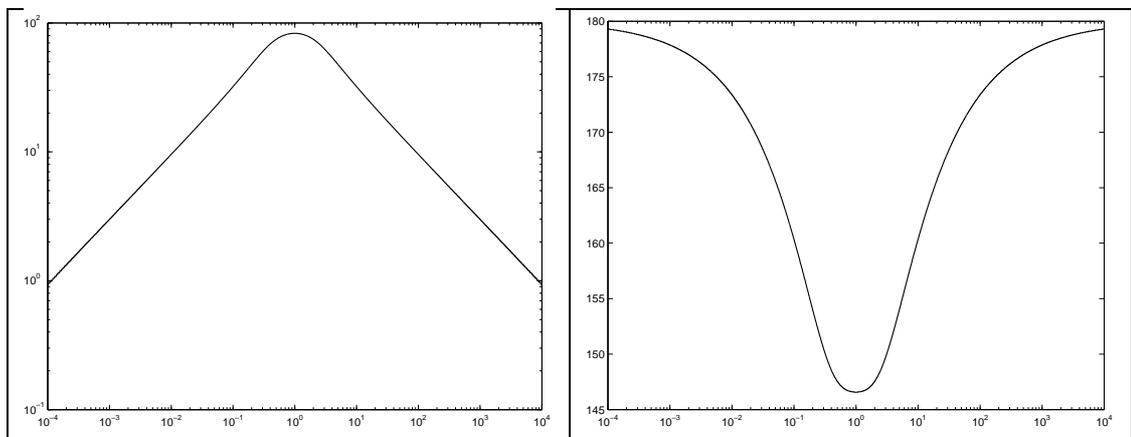


FIG. 2.11 – Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ , pour une onde incidente longitudinale.

2.7 Conclusion sur le couplage de poutres semi-infinies

Une simple structure constituée de deux poutres semi-infinies couplées par un angle peut avoir un comportement hypersensible, suivant les caractéristiques choisies. Dans la plupart des cas, il est possible de définir deux angles critiques autour desquels la structure aura un comportement très sensible vis-à-vis de l'angle de couplage, pour une excitation donnée. Un de ces deux angles a une valeur inférieure à 85 degrés, tandis que l'autre est compris entre 130 et 180 degrés. La valeur de chacun de ces angles est fixée par le seul rapport entre les nombres d'ondes de flexion et de vibrations longitudinales. Leur existence est due à de rapides évolutions du bilan de puissance. Une conclusion importante de cette analyse est que tout couplage de poutres semi-infinies réalisé avec un angle compris entre 85 et 130 degrés n'aura jamais un comportement hypersensible vis à vis de l'angle de couplage, et ce quelque soit l'excitation, alors que pour les autres valeurs d'angles, il existe au moins une excitation qui rende la structure hypersensible.

Ces résultats, basés sur des structures infinies, peuvent être extrapolés afin d'expliquer les comportements observés sur des poutres de dimensions finies, pour lesquelles on peut s'attendre à l'existence de deux angles critiques, qui résulteront du cumul de plusieurs types d'ondes décrites précédemment.

2.8 Analyse d'une poutre finie

Afin de montrer la pertinence de l'étude énergétique menée ci-dessus dans le cas des poutres couplées semi-infinies, et plus particulièrement la légitimité de la définition des angles critiques à partir des évolutions des puissances mises en jeu, nous allons étudier dans cette partie une structure constituée de deux poutres finies couplées, le but de cette étude étant de relier les angles critiques précédemment définis aux variations des pulsations propres de la structure.

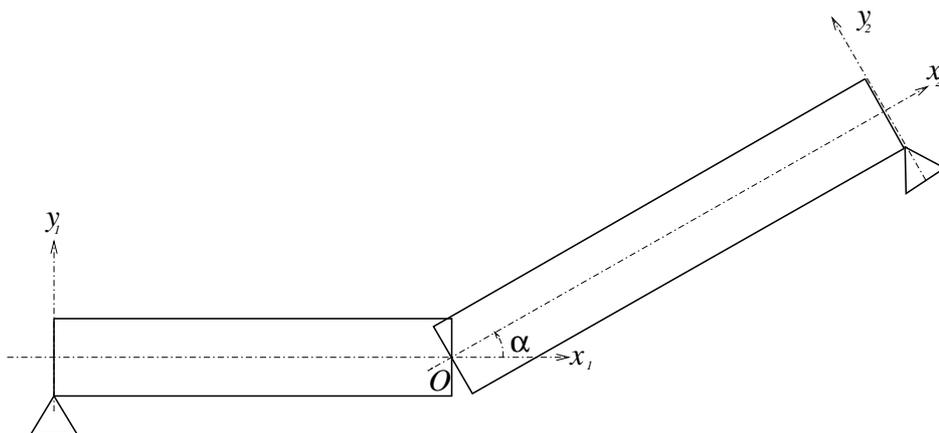


FIG. 2.12 – Poutres finies couplées

2.8.1 Recherche des fréquences propres

Les deux poutres, représentées sur la figure 2.12, dont les caractéristiques seront indiquées respectivement $i = 1$ et 2 , sont appuyées à leurs extrémités. En notant E_i le module d'Young, S_i la section, ρ_i la masse volumique, I_i le moment d'inertie de flexion, L_i la longueur, ω la pulsation, $w_i(x_i)$ le

déplacement de flexion et $u_i(x_i)$ le déplacement longitudinal, et en l'absence d'effort extérieurs, les équations de mouvement s'écrivent pour chacun des domaines $x_1 \in [0, L_1]$ et $x_2 \in [-L_2, 0]$:

$$\begin{cases} \rho_i S_i \omega^2 w_i(x_i) - E_i I_i \frac{d^4 w_i(x_i)}{dx_i^4} = 0 \\ \rho_i S_i \omega^2 u_i(x_i) + E_i S_i \frac{d^2 u_i(x_i)}{dx_i^2} = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

La solution classique de ce problème peut s'écrire sous la forme :

$$w_i(x_i) = \alpha_i \cos k_i x_i + \beta_i \sin k_i x_i + \gamma_i \operatorname{ch} k_i x_i + \delta_i \operatorname{sh} k_i x_i \quad (2.43)$$

$$u_i(x_i) = \varepsilon_i \cos \lambda_i x_i + \xi_i \sin \lambda_i x_i \quad (2.44)$$

Où les nombres d'ondes sont définis par les équations de dispersion :

$$k_i^4 = \frac{\rho_i S_i \omega^2}{E_i I_i} \quad (2.45)$$

$$\lambda_i^2 = \omega^2 \frac{\rho_i}{E_i} \quad (2.46)$$

L'écriture des conditions d'appui en $x_i = 0$ permet de simplifier les expressions ci-dessus en annulant les termes α_i , γ_i et ξ_i . D'autre part, les équations de continuités écrites en $x_1 = L_1$ et $x_2 = -L_2$, similaires aux équations 2.9 à 2.14, permettent d'obtenir le système linéaire suivant :

$$TX = 0 \quad (2.47)$$

$$\text{Où } X^T = \begin{bmatrix} \beta_1 & \delta_1 & \beta_2 & \delta_2 & \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}$$

Et T a pour expression :

$$T = \begin{bmatrix} \operatorname{sink}_1 L_1 & \operatorname{sh} k_1 L_1 & \operatorname{sink}_2 L_2 \cos \alpha & \operatorname{sh} k_2 L_2 \cos \alpha & 0 & -\cos \lambda_2 L_2 \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sink}_2 L_2 \sin \alpha & -\operatorname{sh} k_2 L_2 \sin \alpha & \cos \lambda_1 L_1 & -\cos \lambda_2 L_2 \cos \alpha \\ \cos k_1 L_1 & \operatorname{ch} k_1 L_1 & -\frac{k_2}{k_1} \cos k_2 L_2 & -\frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch} k_2 L_2 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sink}_1 L_1 & \operatorname{sh} k_1 L_1 & -\frac{k_2}{k_1} \operatorname{sink}_2 L_2 & \frac{k_2}{k_1} \operatorname{sh} k_2 L_2 & 0 & 0 \\ \cos k_1 L_1 & -\operatorname{ch} k_1 L_1 & -\frac{E_2 I_2 k_2^3}{E_1 I_1 k_1^3} \cos k_2 L_2 \cos \alpha & \frac{E_2 I_2 k_2^3}{E_1 I_1 k_1^3} \operatorname{ch} k_2 L_2 \cos \alpha & 0 & \frac{E_2 S_2 \lambda_2}{E_1 I_1 k_1^3} \sin \lambda_2 L_2 \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{E_2 I_2 k_2^3}{E_1 S_1 \lambda_1} \cos k_2 L_2 \sin \alpha & -\frac{E_2 I_2 k_2^3}{E_1 S_1 \lambda_1} \operatorname{ch} k_2 L_2 \sin \alpha & -\sin \lambda_1 L_1 & \frac{E_2 S_2 \lambda_2}{E_1 S_1 \lambda_1} \sin \lambda_2 L_2 \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Les valeurs des pulsations propres de la structure s'obtiennent en résolvant numériquement l'équation non linéaire $\det(T) = 0$.

2.8.2 Exemple

Un exemple numérique est traité dans cette partie, les dimensions de la structure retenue étant les suivantes : $E_i = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho_i = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, $L_1 = 35 \text{ cm}$, $L_2 = 27 \text{ cm}$, les poutres étant de section rectangulaire identique, de largeur 3 cm et d'épaisseur 1 cm . Dans ces conditions, la résolution de l'équation $\det(T) = 0$ permet d'aboutir à la figure 2.13, sur laquelle sont tracées les évolutions des dix premières fréquences propres de la structure lorsque l'angle de couplage α évolue.

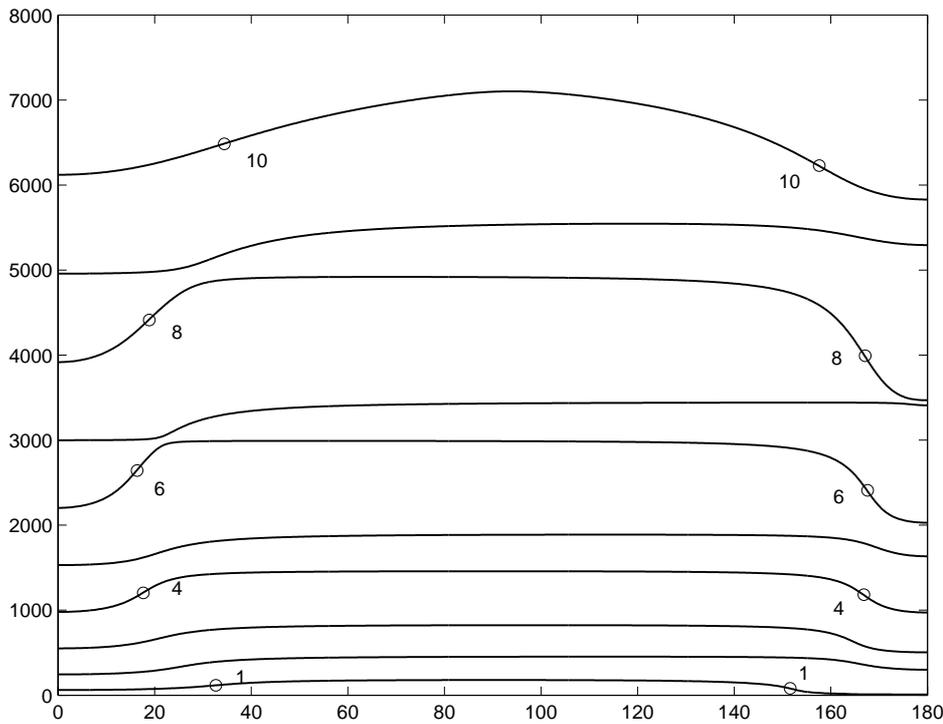


FIG. 2.13 – Dix premières fréquences propres (Hertz) en fonction de l'angle de couplage (degrés)

On peut observer sur cette figure que certaines fréquences propres sont très sensibles à l'angle de couplage, en particulier celles correspondant aux modes 4, 6, 8 et 10. Notons que ces modes correspondent à des déformées pour lesquelles les deux poutres vibrent en phase, alors que les déformées des modes moins sensibles sont en opposition de phase, ou sont des modes locaux d'une des deux poutres.

2.8.3 Relation entre angle critique et sensibilité des fréquences propres.

Sur la figure 2.13 sont indiqués les points d'inflexion des courbes des modes les plus sensibles, correspondant à une sensibilité des fréquences propres vis-à-vis de l'angle de couplage maximale. Chacun de ces points permet de définir une fréquence propre associée à un angle "critique", pour laquelle on peut calculer la valeur du rapport des nombres d'ondes μ en utilisant l'équation 2.16. On obtient ainsi un ensemble de points qu'il est possible de reporter sur la figure 2.8, caractérisant les angles critiques pour les poutres semi-infinies. Ceci est fait sur la figure 2.14, sur laquelle on peut observer que les angles critiques définis à l'aide de considérations énergétiques pour les poutres semi-infinies sont proches de ceux définis par la sensibilité des fréquences propres pour les poutres finies. Seul le point correspondant au premier mode est relativement éloigné de la courbe originale,

mais concernant ce mode particulier on peut se rendre compte sur la figure 2.13 que la variation de sa fréquence propre est relativement lente lorsque l'angle de couplage augmente, et que dans ce cas l'utilisation d'un angle critique tel que nous l'avons défini a moins de sens que pour un mode beaucoup plus sensible, comme l'est le quatrième par exemple. Notons que cette remarque concernant le premier mode est également valable pour le mode 10, dont la fréquence propre varie beaucoup, mais sur un large intervalle angulaire. La différence pour ce cas étant que le point caractérisant la sensibilité de la dixième fréquence propre se trouve être quasiment sur la courbe qui nous intéresse.

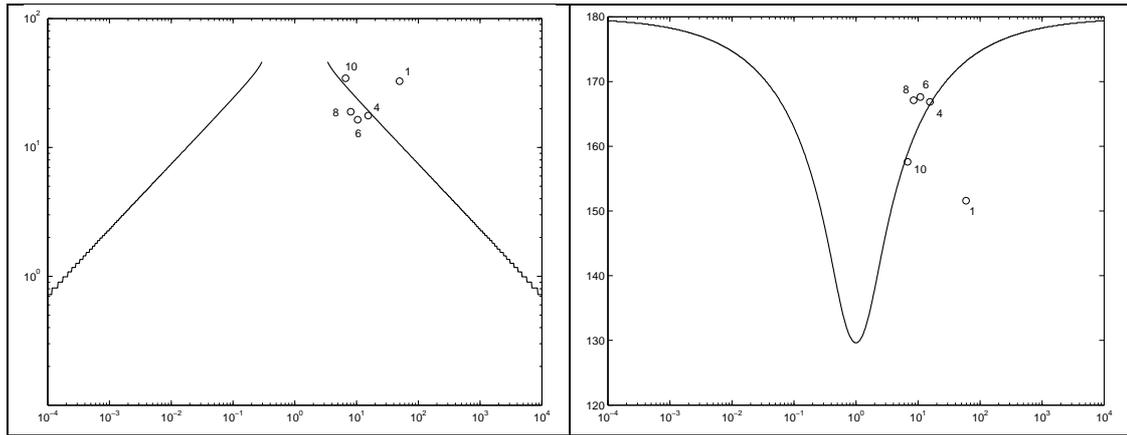


FIG. 2.14 – Angles critiques (degrés) en fonction du rapport des nombres d'ondes μ , pour des poutres semi-infinies, avec tracé de certains points obtenus pour des poutres finies.

2.9 Conclusion sur le couplage des poutres

L'analyse de poutres couplées a permis de montrer qu'une structure aussi simple pouvait avoir un comportement hypersensible. Ce phénomène a été décrit et caractérisé à partir de poutres infinies, pour lesquelles nous avons montré que l'angle critique de couplage était défini à partir du rapport des nombres d'ondes mises en jeu. Cette analyse a été faite à partir d'une considération des puissances mises en jeu, puis a été justifiée lors de la considération d'un problème mettant en situation des poutres finies, pour lesquelles nous avons montré que les variations des fréquences propres en fonction de l'angle de couplage pouvaient être reliées aux résultats obtenus à partir des poutres semi-infinies.

Chapitre 3

Étude du couplage de plaques semi-infinies

Dans ce chapitre, l'étude précédente est étendue au cas de plaques couplées semi-infinies, afin d'expliquer les comportements hypersensibles observés sur des plaques [RG 97] : nous chercherons à savoir si les angles critiques observés sur les poutres existent également dans le cas de plaques couplées. La démarche adoptée est identique : formulation du problème et définition des ondes mises en jeu, bilan de puissance, définition et caractérisation de l'angle critique de couplage en fonction des paramètres de la structure, et enfin mise en parallèle avec une analyse de plaques couplées de dimensions finies.

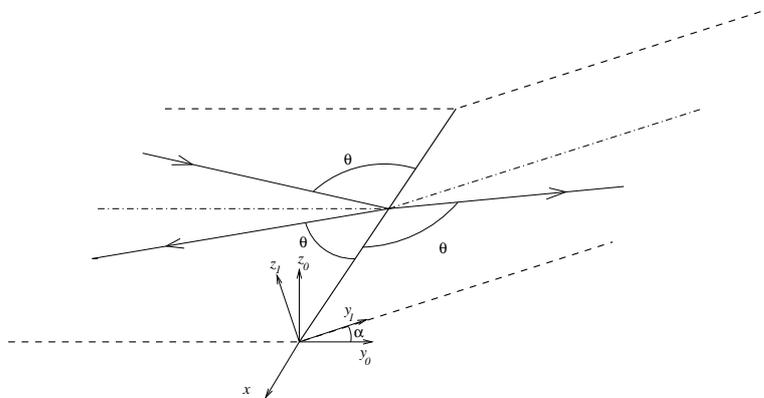


FIG. 3.1 – Notations utilisées pour la description des plaques semi-infinies

3.1 Cas d'une onde incidente de flexion

Nous considérons donc deux plaques semi-infinies, comme le montre la figure 3.1, en utilisant une formulation ondulatoire.

3.1.1 Formulation du problème

Mouvement de flexion :

Le mouvement de flexion doit obéir à l'équation de mouvement suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = k^4 w \quad (3.1)$$

Dans cette équation, la variable w , dépendante des coordonnées x et y , représente la partie spatiale du déplacement de la ligne moyenne de la plaque en projection sur l'axe normal. L'évolution temporelle de ce déplacement est :

$$w(x, y, t) = w e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

Le nombre d'onde de flexion k est entièrement déterminé par l'équation de dispersion :

$$k^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.3)$$

La géométrie particulière de la structure permet de résoudre l'équation de mouvement par séparation de variables. En supposant que l'expression du champ de déplacement peut se mettre sous la forme $w = f(x)g(y)$, et en cherchant la solution sous une forme exponentielle, on pose :

$$f(x) = a e^{\gamma_1 x} + b e^{-\gamma_1 x} \quad (3.4)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'équation suivante :

$$\gamma_1^4 g + 2\gamma_1^2 g'' + g'''' = k^4 g \quad (3.5)$$

Cette équation se résout très simplement :

$$g(y) = c e^{\gamma_2 y} + d e^{-\gamma_2 y} + p e^{\delta_2 y} + q e^{-\delta_2 y} \quad (3.6)$$

avec :

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = k^2 \text{ et } \gamma_1^2 + \delta_2^2 = -k^2 \quad (3.7)$$

Ce qui mène à :

$$w = (a e^{\gamma_1 x} + b e^{-\gamma_1 x}) (c e^{\gamma_2 y} + d e^{-\gamma_2 y} + p e^{\delta_2 y} + q e^{-\delta_2 y}) \quad (3.8)$$

Notons que cette solution est compatible avec les conditions limites de la structure, comme nous allons le voir, mais que dans le cas général il n'est pas toujours possible de trouver la solution sous

cette forme. En effet, l'existence d'une solution pouvant s'écrire sous la forme d'une séparation de variables $w = f(x)g(y)$ n'est garantie que dans le cas de plaques rectangulaires pour lesquelles les conditions limites n'introduisent pas de couplage entre les déplacements suivant les axes x et y .

Dans notre problème, nous supposons que le mouvement forcé de la plaque est issu d'une onde progressive de flexion d'amplitude unitaire de la plaque n°1, et que l'angle d'incidence θ de l'onde par rapport à la ligne de couplage est connu et compris entre 0 et 90 degrés (voir figure 3.1). Cette onde incidente a donc pour expression :

$$w_i = e^{-jk_x x - jk_y y} \quad (3.9)$$

où :

$$k_x = k \cos \theta \text{ et } k_y = k \sin \theta \quad (3.10)$$

Une partie de cette onde est réfléchi sur la plaque 1, tandis qu'une autre partie est transmise sur la plaque 2. L'angle de connexion des deux plaques entraîne un couplage entre les mouvements de flexion et de mouvement dans le plan par l'intermédiaire des conditions limites, que nous détaillerons plus loin. En ce qui concerne le mouvement de flexion réfléchi, celui-ci a pour expression :

$$w_r = e^{-jk_x x} \left(A e^{jk_y y} + B e^{k_e y} \right) \quad (3.11)$$

La coïncidence spatiale le long de la ligne de couplage entraîne pour cette onde comme pour toutes les autres la même évolution suivant l'axe x , c'est à dire une onde progressive de nombre d'onde k_x et évoluant vers les x positifs. La réflexion de l'onde se traduit par l'inversion du signe de l'onde progressive suivant l'axe y (l'amplitude de cette onde étant notée A), ainsi que par l'apparition d'une onde évanescence d'amplitude B , caractérisée par son nombre d'onde :

$$k_e = k \sqrt{1 + \cos^2 \theta} \quad (3.12)$$

Les autres ondes décrites par l'équation 3.8 ne peuvent pas exister si le mouvement forcé est celui de l'équation 3.9, car ce sont soit des ondes progressives qui évoluent dans le mauvais sens, soit des ondes évanescences qui entraînent une amplitude infinie lorsque y tend vers l'infini par valeurs négatives.

L'onde de flexion qui est transmise sur la seconde plaque, présente nécessairement la même coïncidence spatiale le long de la jonction, et si les deux plaques ont des caractéristiques identiques, l'angle d'incidence reste θ . Cette onde présente également une composante évanescence :

$$w_t = e^{-jk_x x} \left(H e^{-jk_y y} + K e^{-k_e y} \right) \quad (3.13)$$

Mouvement dans le plan

Les conditions limites introduisant un couplage entre les mouvements dans le plan et hors plan, il est nécessaire de décrire le mouvement dans le plan de la structure. Les équations de mouvement reliant les composantes u et v du champ de déplacement dans le plan de chacune des plaques sont :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 u \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 v \quad (3.15)$$

La solution de ce système sous forme d'ondes forcées peut s'écrire sous la forme générale suivante [PHKJ 01] :

$$\begin{cases} u = u_l + u_s \\ v = v_l + v_s \end{cases} \quad (3.16)$$

avec :

$$\begin{cases} u_l = k_{lx} (A_l e^{-jk_{lx}x - jk_{ly}y} - B_l e^{jk_{lx}x - jk_{ly}y} + C_l e^{-jk_{lx}x + jk_{ly}y} - D_l e^{jk_{lx}x + jk_{ly}y}) \\ v_l = k_{ly} (A_l e^{-jk_{lx}x - jk_{ly}y} + B_l e^{jk_{lx}x - jk_{ly}y} - C_l e^{-jk_{lx}x + jk_{ly}y} - D_l e^{jk_{lx}x + jk_{ly}y}) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} u_s = k_{sy} (-A_s e^{-jk_{sx}x - jk_{sy}y} - B_s e^{jk_{sx}x - jk_{sy}y} + C_s e^{-jk_{sx}x + jk_{sy}y} + D_s e^{jk_{sx}x + jk_{sy}y}) \\ v_s = k_{sx} (A_s e^{-jk_{sx}x - jk_{sy}y} - B_s e^{jk_{sx}x - jk_{sy}y} + C_s e^{-jk_{sx}x + jk_{sy}y} - D_s e^{jk_{sx}x + jk_{sy}y}) \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans ces équations les nombres d'ondes λ et μ sont définis par :

$$k_{lx}^2 + k_{ly}^2 = \lambda^2 = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \omega^2 \quad (3.19)$$

λ est le nombre d'onde correspondant à une onde longitudinale dans le plan (parallèle à la direction de propagation)

$$k_{sx}^2 + k_{sy}^2 = \mu^2 = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \omega^2 \quad (3.20)$$

μ est le nombre d'onde correspondant à une onde de cisaillement dans le plan (perpendiculaire à la direction de propagation)

En appliquant ces résultats à la structure étudiée, on peut déterminer l'expression du champ de déplacement dans le plan. La première remarque à formuler concerne la correspondance spatiale

suivant l'axe x de ce champ avec le champ de flexion :

$$k_{lx} = k_x \text{ et } k_{sx} = k_x$$

Il faut ensuite distinguer 3 cas, suivant les valeurs respectives des nombres d'ondes dans le plan et de la composante du nombre d'onde de flexion le long de la jonction.

Premier cas : $\lambda \geq k_x$ Notons que ceci entraîne $\mu > k_x$ car $\mu = 2(1 - \nu)\lambda$. Si on se limite aux matériaux pour lesquels $\nu \leq 0.5$, le nombre d'onde μ est donc toujours supérieur à λ . Dans ce cas :

$$k_{ly} = \sqrt{\lambda^2 - k_x^2}$$

$$k_{sy} = \sqrt{\mu^2 - k_x^2}$$

Ces deux nombres d'onde sont réels. Les ondes dans le plan sont dans ce cas des ondes progressives. En prenant en compte la coïncidence spatiale ainsi que le sens de propagation des ondes, qui doit être en accord avec l'onde imposée (équation 3.9), on obtient l'expression des deux composantes des ondes réfléchies, que l'on prendra sous la forme :

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

Et pour les ondes transmises :

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{-jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} F e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

Second cas : $\mu \geq k_x > \lambda$ Dans ces conditions, l'onde longitudinale est évanescente, alors que l'onde de cisaillement dans le plan est progressive.

$$k_{ly} = j\sqrt{-\lambda^2 + k_x^2}$$

$$k_{sy} = \sqrt{\mu^2 - k_x^2}$$

L'expression des ondes réfléchies est :

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

Et pour les ondes transmises :

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} F e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

Troisième cas : $k_x > \mu$ Dans ces conditions, les ondes dans le plan sont toutes des ondes évanescentes. Nous verrons que ce cas est le plus fréquent des trois.

$$k_{ly} = j\sqrt{-\lambda^2 + k_x^2}$$

$$k_{sy} = j\sqrt{-\mu^2 + k_x^2}$$

L'expression des ondes réfléchies est :

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{-jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} P e^{-jk_{sy} y} \right)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{-jk_{sy} y} \right)$$

Et pour les ondes transmises :

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} Q e^{jk_{sy} y} \right)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} F e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{jk_{sy} y} \right)$$

Efforts généralisés le long de l'axe O,x :

A partir des expressions des déplacements, on en tire celles des efforts généralisés le long de la jonction :

$$F_x = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.21)$$

$$F_y = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.22)$$

$$F_z = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (3.23)$$

La rotation de la section s'écrit :

$$R = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.24)$$

Et le moment fléchissant (porté par l'axe de couplage) :

$$M = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.25)$$

3.1.2 Résolution, application

Afin de résoudre le problème, il convient d'écrire les relations de continuité le long de la ligne de couplage des deux plaques. Huit équations traduisent cette continuité :

a) Continuité des trois composantes du déplacement :

$$u_r = u_t; v_r - v_t \cos \alpha - w_t \sin \alpha = 0; w_i + w_r + v_t \sin \alpha - w_t \cos \alpha = 0 \quad (3.26)$$

b) Continuité des trois composantes de la force généralisée :

$$F_x^r = F_x^t; F_y^r - F_y^t \cos \alpha - F_z^t \sin \alpha = 0; F_z^i + F_z^r + F_y^t \sin \alpha - F_z^t \cos \alpha = 0 \quad (3.27)$$

c) Continuité de la rotation de la section :

$$R_i + R_r - R_t = 0 \quad (3.28)$$

d) Continuité du moment de flexion :

$$M_i + M_r - M_t = 0 \quad (3.29)$$

A partir des expressions des ondes dans les deux plaques, le développement des équations conduit à l'obtention d'un système linéaire précisé en annexe C. Les paramètres structuraux indépendants intervenant dans l'expression de ce système sont au nombre de quatre : le coefficient de Poisson ν , l'angle d'incidence de l'onde de flexion θ , l'angle de couplage α et un paramètre adimensionnel ξ :

$$\xi = \rho \frac{h^2 \omega^2}{12E} \quad (3.30)$$

Enfin, l'inversion du système permet d'obtenir l'expression du déplacement et des efforts sur les deux plaques, et donc d'étudier le comportement de la structure comme cela a été fait pour les poutres infinies.

Afin de décrire le comportement vibratoire typique de la structure étudiée, on supposera qu'elle est constituée de plaques en acier ($E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$; $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 0,3$), que la fréquence d'excitation est de 500 Hz et que l'angle d'incidence de l'onde de flexion est $\theta = 40^\circ$. Dans ces conditions la composante selon la ligne de couplage du nombre d'onde de flexion k_x vaut $24,2 \text{ m}^{-1}$ et le nombre d'onde de vibrations de cisaillement dans le plan μ vaut $0,98 \text{ m}^{-1}$: on se trouve donc dans le cas numéroté 3 ($k_x > \mu$). En ce qui concerne le coefficient adimensionnel ξ , sa valeur est $1,2 \cdot 10^{-7}$. Dans un premier temps, nous étudierons la réponse de la structure pour un angle de couplage inférieur à 90 degrés.

L'observation de la réponse en flexion (à l'origine du rayonnement de la structure) va se faire en plusieurs points, afin d'observer la nature des ondes. Le premier point d'observation retenu est situé sur la jonction, c'est le point origine du repère. En ce point, les réponses vibratoires font apparaître à la fois les ondes progressives et évanescentes. Le second point d'observation se fait loin de la jonction afin de ne plus observer que les effets des ondes progressives. Les figures 3.2 et 3.3 présentent les évolutions des modules des déplacements en fonction de l'angle de couplage des plaques.

On s'aperçoit en observant la figure 3.2 que l'amplitude du déplacement est très sensible à l'angle de couplage lorsque celui-ci est faible, ceci étant valable que l'on soit sur la jonction ou plus loin, car les ondes de flexion sont progressives. Au-delà d'une dizaine de degrés, la réponse n'évolue presque plus, ce qui signifie que la sensibilité de la réponse vis à vis de l'angle de couplage est quasiment nulle. Remarquons enfin qu'il existe un angle de couplage pour lequel la transmission en flexion est nulle, l'onde incidente étant complètement réfléchie sur la plaque 1.

On a de même accès aux déplacements dans le plan, tracés sur la figure 3.3, qui montre que les sensibilités sont également importantes pour ces mouvements, mais que ceux-ci sont associés à des ondes évanescentes, qui induisent un déplacement uniquement au voisinage de la jonction. Très vite, ces déplacements ont une amplitude négligeable.

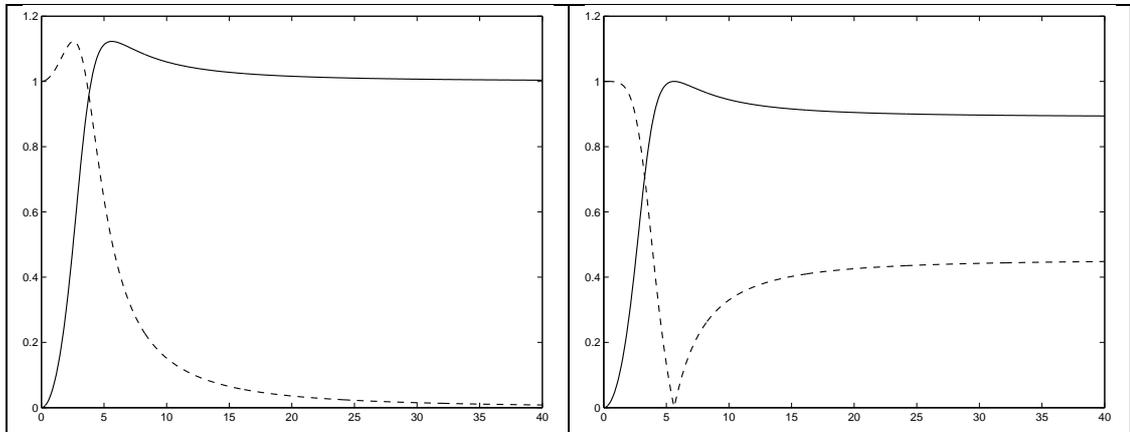


FIG. 3.2 – Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).
a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction - - ondes transmises ; - ondes réfléchies

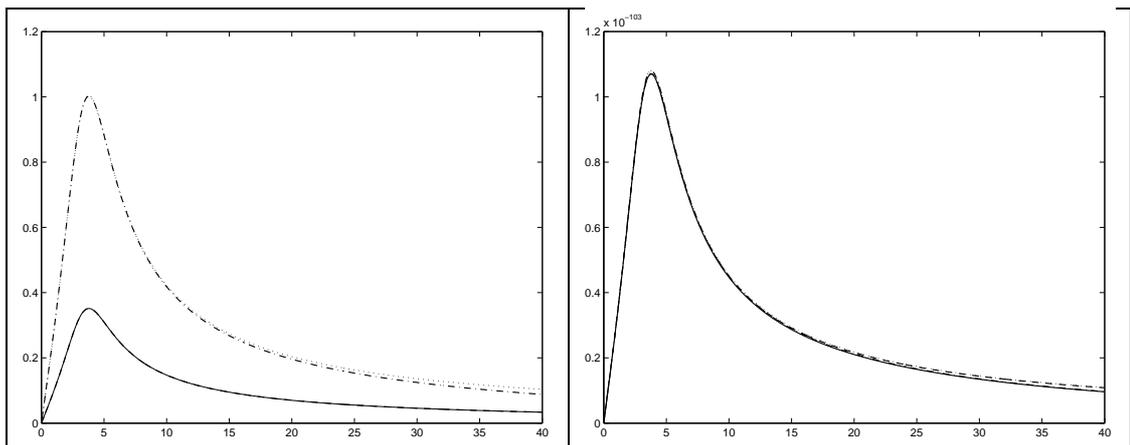


FIG. 3.3 – Évolution du module de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).
a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction - - ondes u transmises ; — ondes u réfléchies ; - · ondes v transmises ; · · ondes v réfléchies

3.1.3 Bilan de puissance

L'observation de la figure 3.2 permet de s'apercevoir que la sensibilité maximale des ondes de flexion transmises et réfléchies ne sera pas atteinte pour le même angle de couplage, comme cela a déjà été remarqué pour les poutres (figure 2.3). Une analyse en terme de bilan de puissance permet de s'affranchir de cette difficulté. Dans un souci de clarté, nous ne détaillerons pas les expressions des puissances que nous utiliserons dans la suite.

Puissance associée au moment de flexion :

$$P_M = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\overline{\dot{\Omega}} M \right) \quad (3.31)$$

Puissance associée à l'effort tranchant :

$$P_T = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\overline{\dot{w}} T \right) \quad (3.32)$$

Puissance associée au mouvement dans le plan :

$$P_{plan} = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\overline{\dot{u}} F_x \right) + \frac{1}{2} \text{Re} \left(\overline{\dot{v}} F_y \right) \quad (3.33)$$

Puissance totale :

$$P_{tot} = P_M + P_T + P_{plan} \quad (3.34)$$

La figure 3.4 présente les évolutions de ces puissances en fonction de l'angle de couplage, pour la structure particulière décrite au paragraphe 3.1.2. On s'aperçoit que quel que soit l'angle de couplage, la puissance est principalement transmise par l'intermédiaire du moment de flexion, et dans une moindre mesure par l'effort tranchant. La puissance transmise par le mouvement dans le plan est nulle car les ondes associées sont évanescentes. Les fortes sensibilités observées précédemment s'observent à nouveau sur les puissances, puisque pour de très faibles angles, la puissance réfléchie est nulle, puis augmente très rapidement avec l'angle de couplage. La nature de la transmission change complètement puisqu'il existe un angle pour lequel la puissance transmise est nulle. Pour des angles plus importants, un équilibre s'établit ensuite, et la variation des puissances avec l'angle est très faible.

En modifiant les paramètres de la structure, les différentes courbes gardent des allures similaires, tant que l'on reste dans le cas noté 3 : $k_x > \mu$. Ceci correspond à :

$$\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{3E}{4\rho\pi^2} \frac{\cos^4\theta}{h^2 f^2} > 1 \quad (3.35)$$

Soit, pour un acier ($E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, $\nu = 0,3$) ou un aluminium classique ($E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$, $\nu = 0,34$) :

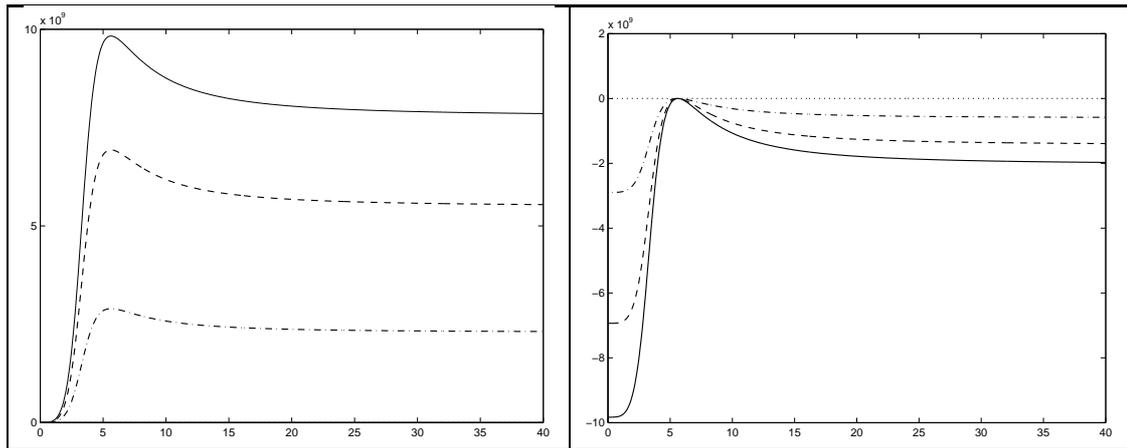


FIG. 3.4 – Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés).

a) puissances réfléchies b) puissances transmises - - Moment de flexion ; - · - Effort tranchant ; · · mouvement plan (zéro car ondes évanescentes) ; - Puissance totale

$$\frac{\cos^4 \theta}{h^2 f^2} > 10^{-6} \quad (3.36)$$

Ainsi, seules les ondes d'incidences quasi normales vont induire des ondes progressives dans le plan. Dans les conditions précédentes, l'angle d'incidence limite, au-delà duquel les ondes dans le plan sont progressives vaut $88,2^\circ$. Ainsi une onde quasi normale, d'incidence 89° par exemple, induira un champ de mouvement dans le plan progressif, et dans ce cas particulier la transmission de puissance se fera principalement par l'onde notée v , perpendiculaire à la ligne de jonction. Pour tous les autres angles d'incidence, la transmission se fera toujours de la même façon, avec une zone de forte sensibilité autour d'un angle critique.

3.1.4 Recherche de l'angle critique

L'angle critique, qui caractérise le comportement hypersensible de la structure, est défini comme étant l'angle pour lequel la sensibilité de la puissance transmise vis-à-vis de cet angle est maximale. Cette dérivée est évaluée numériquement sous Matlab. Pour l'étude de l'évolution de l'angle critique, nous utiliserons les 3 variables θ , ξ et ν qui suffisent pour avoir une connaissance complète du phénomène. Nous nous limiterons à des matériaux classiques, pour lesquels $10^{-13} < \xi < 10^{-3}$, et $0,2 < \nu < 0,4$. L'angle θ va varier entre 0 et 90 degrés. Dans ces conditions, l'angle correspondant à la plus forte sensibilité de la réponse vis à vis de l'angle de couplage est tracé figure 3.5 (pour $\nu = 0,3$). Cette figure permet de se rendre compte que l'angle critique a la plupart du temps une valeur inférieure à 10 degrés, et que seuls les angles d'incidences normales, les structures calculées en hautes fréquences ou ayant de fortes épaisseurs ne sont pas dans ce cas.

L'influence du coefficient de Poisson du matériau est très faible, comme le montre la figure 3.6, tracée pour $\nu = 0,4$. Notons que cette faible influence n'est caractérisée ici que pour des valeurs de coefficients de Poisson correspondant à des matériaux courants.

Si l'on tente d'extrapoler ces résultats au cas des plaques de dimensions finies, on peut s'attendre à ce que le mouvement soit régi par un cumul d'ondes dont les angles d'incidence couvrent un large

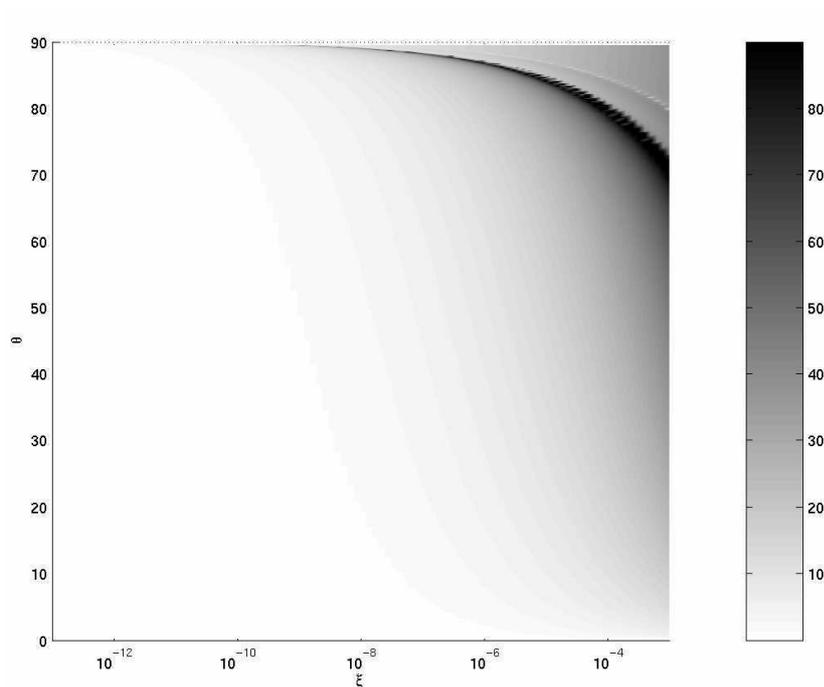


FIG. 3.5 – Angle critique (degrés) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . Tracé pour $\nu = 0,3$

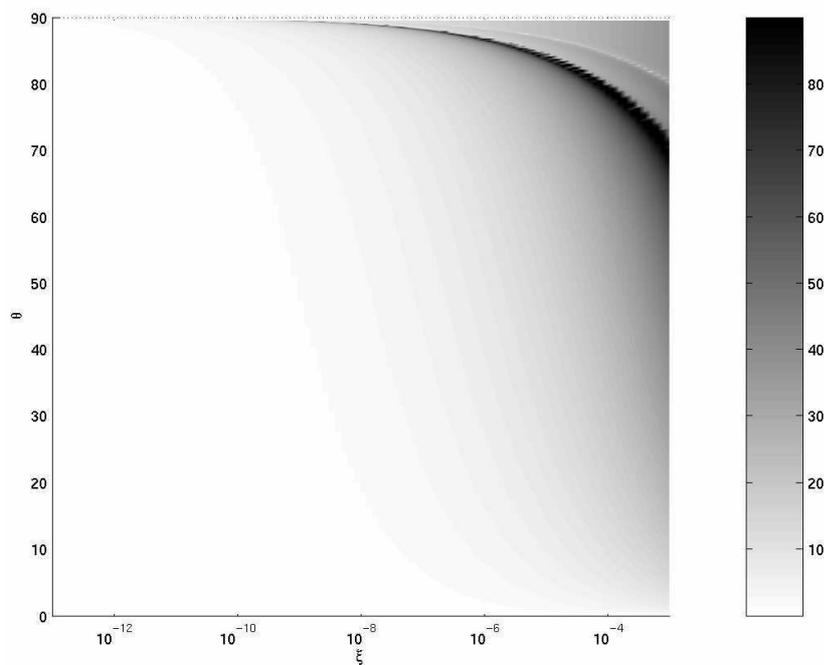


FIG. 3.6 – Angle critique (degrés) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . Tracé pour $\nu = 0,4$

intervalle angulaire, et qu'une partie de ces ondes seront telles que l'angle de connexion est très sensible. Dans la plupart des situations, cela se traduira par une valeur globale d'angle de couplage critique dont la valeur a de fortes chances d'être inférieure à 10 degrés, ce qui est en accord avec les résultats observés [RG 97].

3.1.5 Comportement de la structure pour un angle de couplage compris entre 90 et 180 degrés

L'étude précédente portant sur les angle de couplage inférieurs à 90 degrés, on peut s'interroger sur l'existence de sensibilités pour des angles compris entre 90 et 180 degrés. Le modèle présenté dans les paragraphes précédents permet évidemment de répondre à cette interrogation, mais notons que les résultats devront être interprétés avec précautions, notamment pour les angles proches de 180 degrés, car de telles structures sont impossibles à construire.

Quoi qu'il en soit, le modèle mathématique nous permet d'obtenir la figure 3.7, sur laquelle les puissances transmises et réfléchies sont tracées en fonction de l'angle de couplage. Une zone de forte sensibilité peut être observée dans une zone proche de 180 degrés, qui peut être interprétée comme la zone "symétrique" de celle qui a été décrite précédemment. A propos de la situation particulière de l'angle de couplage $\alpha = 180^\circ$, les résultats observés au paragraphe 2.4 (et plus particulièrement sur la figure 2.6), concernant l'annulation de la puissance transmise pour $\alpha = 180^\circ$, ne sont pas extensibles au cas des plaques. En effet, une partie de la puissance est transmise sur la seconde plaque en raison de l'effet de l'angle d'incidence θ le long de la ligne de couplage. Dans le cas présent, cet angle vaut 40 degrés, donc la composante suivant l'axe x de l'onde incidente n'est pas bloquée par la géométrie de la structure, et une partie de cette onde est donc transmise.

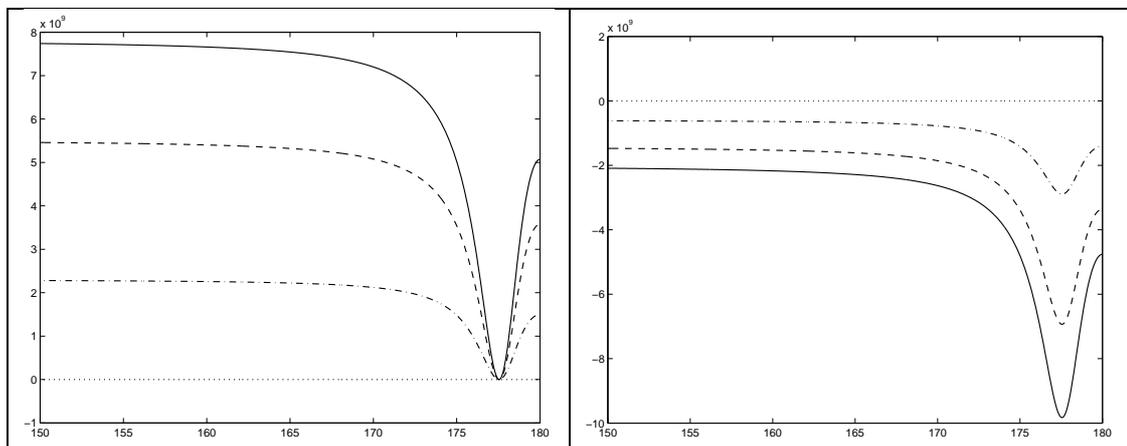


FIG. 3.7 – Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés). Angle d'incidence $\theta = 40^\circ$.

a) puissances réfléchies b) puissances transmises - - Moment ; -· Effort tranchant ; ·· Mouvement plan (zéro car ondes évanescentes) ; - Total

Ceci est confirmé par la figure 3.8, pour laquelle l'angle d'incidence a été choisi proche de 90 degrés. Dans ce cas, on se retrouve dans une situation comparable aux poutres, l'onde incidente étant bloquée par la jonction, l'intégralité de la puissance étant alors réfléchi.

La zone de haute sensibilité peut être caractérisée par un angle critique, pour lequel la sensibilité de la puissance transmise (ou réfléchi) est maximale. Le tracé de cet angle est fait en fonction de

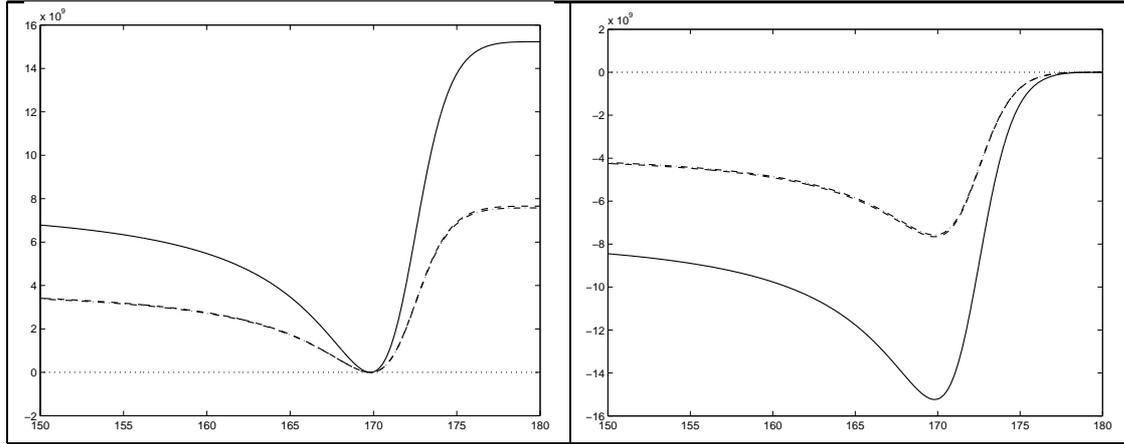


FIG. 3.8 – Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés). Angle d'incidence $\theta = 85^\circ$.

a) puissances réfléchies b) puissances transmises - - Moment ; - · Effort tranchant ; · · Mouvement plan (zéro car ondes évanescentes) ; - Total

l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ (pour $\nu = 0, 3$), sur la figure 3.9. La valeur tracée est le complémentaire à 180 degrés de l'angle critique, afin d'obtenir une figure comparable aux figures 3.5 et 3.6. Le saut observé aux alentours de $\theta = 35^\circ$ est dû à la définition de l'angle critique, et peut être expliqué à l'aide des figures 3.7 et 3.8 : sur la figure 3.7, l'angle critique est localisé aux alentours de 176 degrés, sur la partie gauche du minimum de la courbe de puissance réfléchie, alors que pour la figure correspondant à $\theta = 85^\circ$, l'angle critique vaut environ 173 degrés, mais il est situé cette fois-ci à droite du minimum de la courbe. La transition entre ces deux situations permet d'expliquer le saut constaté sur la figure 3.9.

3.2 Cas d'une onde incidente longitudinale

Afin d'obtenir une description complète du phénomène de couplage entre les plaques, il est intéressant d'étudier les modes de transfert pour une excitation de mouvement dans le plan. Dans un premier temps nous allons étudier l'effet d'une onde longitudinale, avant de s'intéresser à une onde de cisaillement dans le plan. Pour une structure finie, les 3 types d'ondes excitatrices seront présentes et nous pourrons mesurer l'effet de chacune d'entre elles.

3.2.1 Formulation

L'onde incidente longitudinale a pour expression :

$$\begin{cases} u_i = \frac{k_x}{\lambda} e^{-jk_x x - jk_{ly} y} \\ v_i = \frac{k_{ly}}{\lambda} e^{-jk_x x - jk_{ly} y} \end{cases} \quad (3.37)$$

Cette onde, d'amplitude unitaire, est supposée avoir un angle d'incidence noté θ :

$$k_x = \lambda \cos \theta$$

$$k_{ly} = \lambda \sin \theta$$

$$\text{Avec toujours : } \lambda^2 = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \omega^2$$

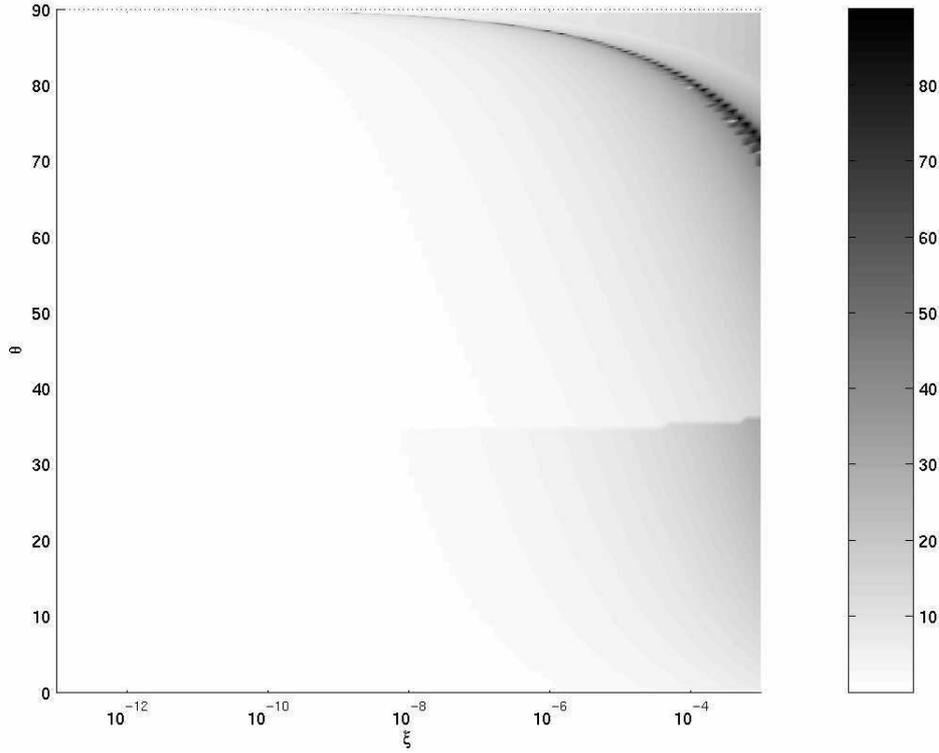


FIG. 3.9 – Angle critique (appartenant à l'intervalle 90-180 degrés, la valeur tracée étant $180^\circ - \alpha_{crit}$) en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0.3$.

Les ondes du mouvement dans les plans des plaques auront alors pour expression :

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right) \quad (3.38)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right) \quad (3.39)$$

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{-jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right) \quad (3.40)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} F e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right) \quad (3.41)$$

Si l'on suppose que le nombre d'onde de vibrations transverses dans le plan $\mu = 2(1 - \nu)\lambda$ est supérieur à λ . Ainsi toutes les ondes de mouvement dans le plan sont des ondes progressives.

Pour les ondes de flexion il convient de distinguer les deux cas suivants :

– Premier cas : $k \geq k_x$ où le nombre d'onde de flexion est défini par : $k^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$

Alors $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ et $k_e = \sqrt{k + k_x^2}$ permettent de donner l'expression des ondes de flexion :

$$w_r = e^{-jk_x x} \left(A e^{jk_y y} + B e^{k_e y} \right) \quad (3.42)$$

$$w_t = e^{-jk_x x} \left(H e^{-jk_y y} + K e^{-k_e y} \right) \quad (3.43)$$

Ces ondes présentent à la fois une partie progressive et une partie évanescente.

– Second cas : $k < k_x$

Dans ce cas $k_y = \sqrt{k_x^2 - k^2}$ et $k_e = \sqrt{k + k_x^2}$

$$w_r = e^{-jk_x x} \left(A e^{k_y y} + B e^{k_e y} \right) \quad (3.44)$$

$$w_t = e^{-jk_x x} \left(H e^{-k_y y} + K e^{-k_e y} \right) \quad (3.45)$$

Les ondes de flexion sont alors évanescentes.

Notons que pour des aciers ou aluminiums classiques, le premier cas se traduit par :

$$h^2 f^2 \cos^4 \theta < 9.10^6 \quad (3.46)$$

ce qui permet d'affirmer que le cas le plus fréquent sera le premier, et qu'une partie des ondes de flexion sera propagative. Seules des plaques très épaisses ou des fréquences élevées induiront des ondes de flexion uniquement évanescentes.

La résolution du problème se fait alors en écrivant les relations de continuité le long de la jonction. Les équations ne sont pas développées ici, mais le système d'équations obtenu est cependant donné en annexe D.

En reprenant les paramètres de l'étude précédente, et en imposant pour l'onde incidente une onde longitudinale, on obtient les courbes de déplacements tracées sur les figures 3.10 et 3.11. On constate ainsi qu'on retrouve des résultats similaires aux précédents en ce qui concerne la sensibilité de la réponse en flexion de la structure : celle-ci est très importante pour des angles de connexion faibles, et diminue ensuite. Notons cependant que les sensibilités sont moins prononcées que dans le cas d'une onde incidente de flexion.

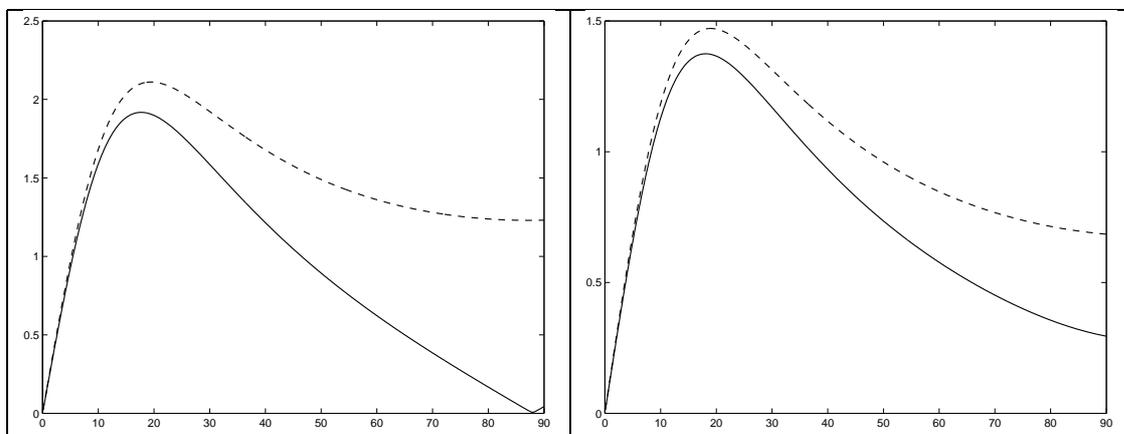


FIG. 3.10 – Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).
 a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction -- ondes transmises ; - ondes réfléchies

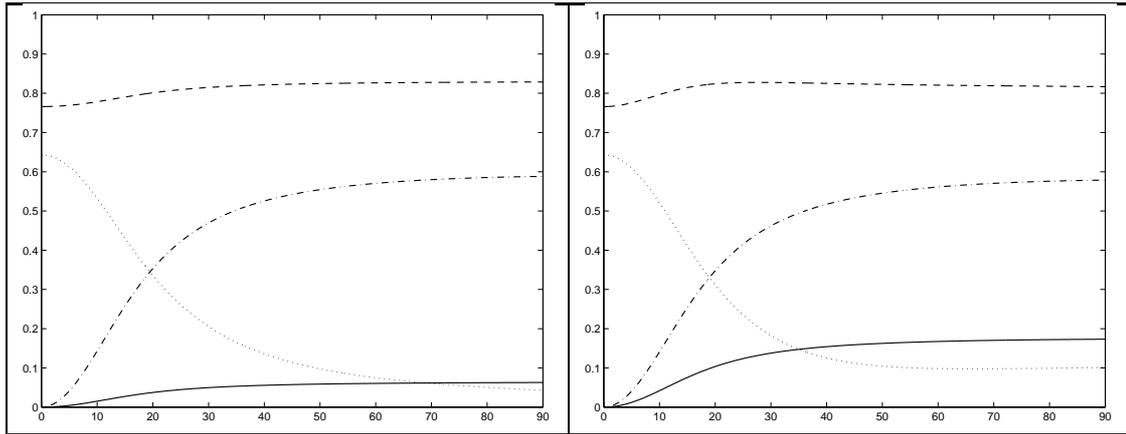


FIG. 3.11 – Évolution de l'amplitude de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).

a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction -- ondes u transmises ; - ondes u réfléchies ;
 - . ondes v transmises ; . . ondes v réfléchies

Comme dans les cas précédents, il n'est pas possible de définir un angle critique à partir de la seule observation des réponses en déplacement : un bilan de puissance est nécessaire.

3.2.2 Bilan de puissance

En ce qui concerne l'évolution du mode de transmission, caractérisé par le tracé des puissances (figure 3.12), on s'aperçoit que les puissances sont principalement transmises par le mouvement dans le plan, et que les sensibilités sont moins prononcées que dans le cas précédent, mais sont toujours rattachées à des angles faibles.

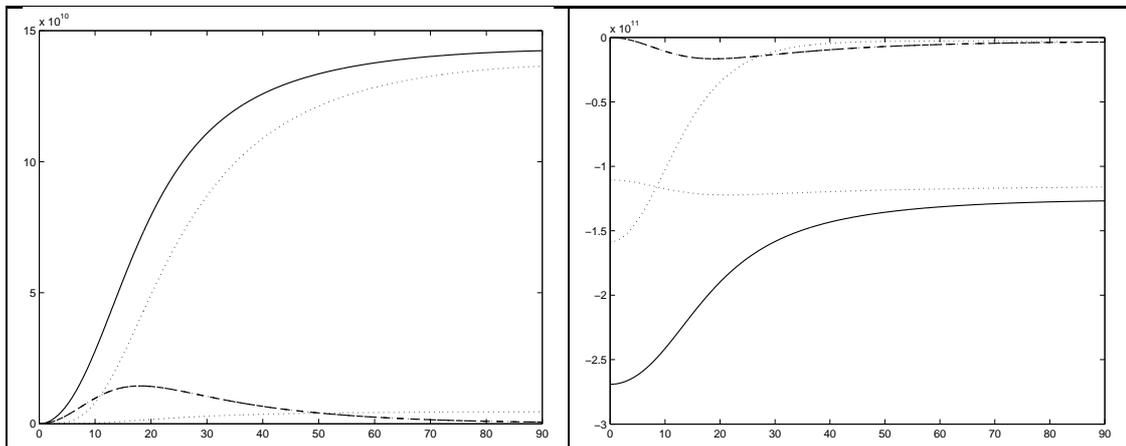


FIG. 3.12 – Évolution des puissances en fonction de l'angle de couplage (degrés).

a) puissances réfléchies b) puissances transmises -- Moment ; -· Effort tranchant ; ·· Mouvement plan ; - Total

3.2.3 Recherche de l'angle critique

Ce bilan de puissance permet de définir un angle critique, et de tracer l'évolution de cet angle en fonction des paramètres (angle d'incidence θ et paramètre adimensionnel ξ). Ceci est fait sur la figure 3.13, pour un coefficient de poisson $\nu = 0,3$.

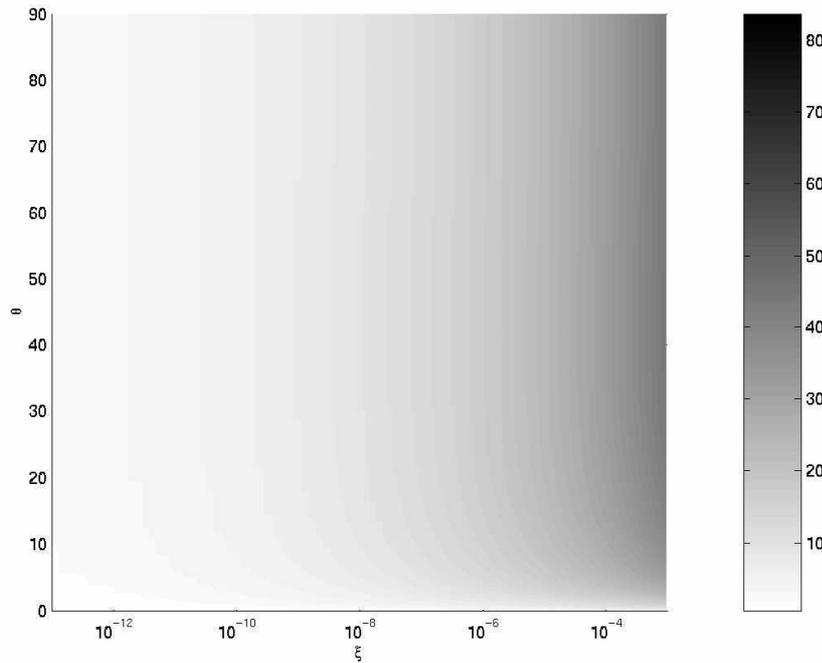


FIG. 3.13 – Angle critique (degrés) pour une onde incidente longitudinale, en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0,3$

On peut s'apercevoir sur cette figure que l'angle d'incidence a très peu d'influence sur la valeur de l'angle critique, et que seuls des valeurs de ξ élevées (c'est à dire des plaques épaisses ou des calculs menés en hautes fréquences) entraîneront des valeurs fortes d'angles critiques.

3.3 Cas d'une onde incidente de cisaillement dans le plan

Pour terminer cette analyse, étudions le cas d'une onde incidente de cisaillement dans le plan.

3.3.1 Formulation

On impose cette fois comme onde excitatrice l'onde suivante :

$$\begin{cases} u_i = -\frac{k_{sy}}{\mu} e^{-jk_x x - jk_{sy} y} \\ v_i = \frac{k_x}{\mu} e^{-jk_x x - jk_{sy} y} \end{cases} \quad (3.47)$$

Cette onde est supposée avoir une incidence d'angle θ :

$$k_x = \mu \cos \theta$$

$$k_{sy} = \mu \sin \theta$$

Avec toujours : $\mu^2 = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \omega^2$; $k^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ et $k_e = \sqrt{k + k_x^2}$

Il convient de distinguer 3 cas :

– Premier cas : $k > \lambda \geq k_x$

Toutes les ondes sont alors progressives.

– Second cas : $k \geq k_x > \lambda$

Toutes les ondes sont alors progressives, exceptées les ondes longitudinales.

– Troisième cas : $k_x > k > \lambda$

Toutes les ondes sont alors évanescentes, exceptées les ondes de cisaillement dans le plan.

Le système obtenu et les expressions des ondes sont détaillés en annexe E. Les courbes obtenues montrent peu de différences avec le cas où l'onde incidente est longitudinale. Les résultats sont tout à fait comparables, comme le montrent les figures 3.14 et 3.15.

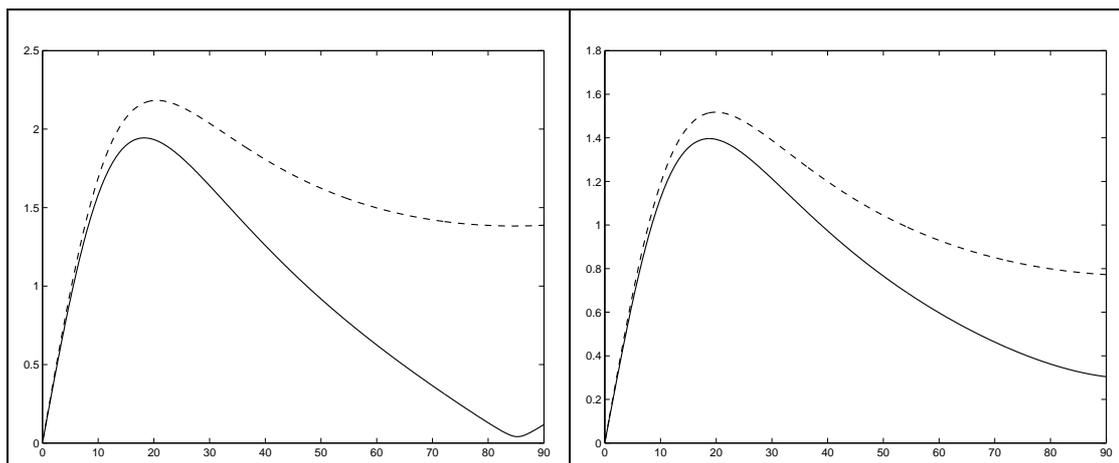


FIG. 3.14 – Évolution du module de la réponse en flexion, en fonction de l'angle de couplage (degrés).
a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction - - ondes transmises ; - ondes réfléchies

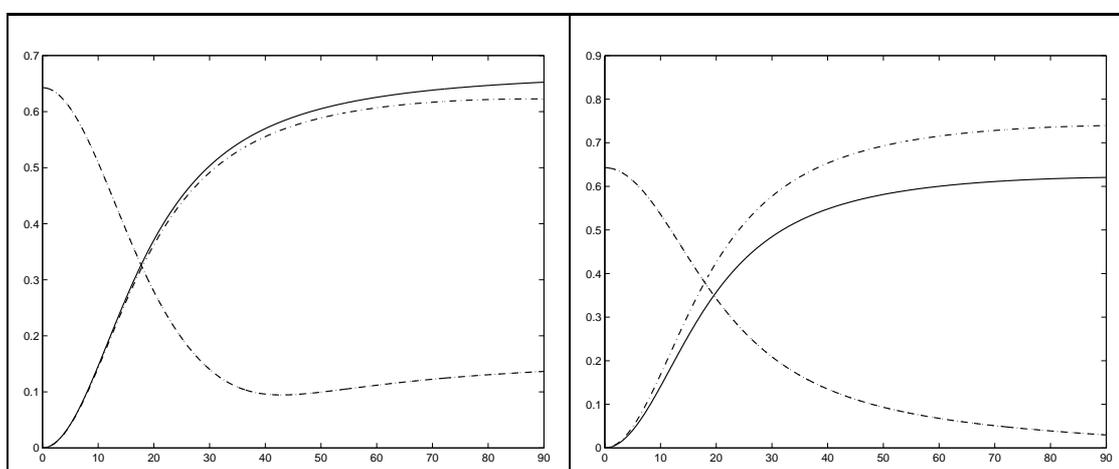


FIG. 3.15 – Évolution de l'amplitude de la réponse dans le plan, en fonction de l'angle de couplage (degrés).

a) réponse sur la jonction b) réponse loin de la jonction - - ondes u transmises ; - ondes u réfléchies ;
- . ondes v transmises ; . . ondes v réfléchies

3.3.2 Bilan de puissance

Le bilan de puissance permet de définir l'angle critique, qui est l'angle pour lequel la sensibilité de la puissance transmise est maximale. Les puissances mises en jeu sont données sur la figure 3.16.

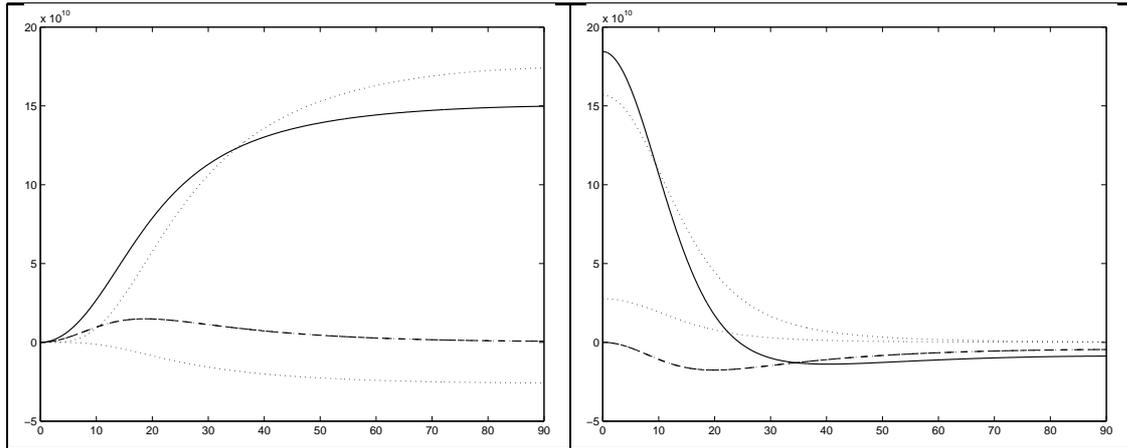


FIG. 3.16 – Évolution de la puissance, en fonction de l'angle de couplage (degrés).

a) mouvements réfléchis b) mouvements transmis - - Moment ; -· Effort tranchant ; ·· Mouvement plan ; - Total

3.3.3 Recherche de l'angle critique

La valeur de l'angle critique, en fonction de l'angle d'incidence et du paramètre adimensionnel ξ est tracée sur la figure 3.17. Cette figure présente de fortes similitudes avec celle obtenue pour une onde incidente longitudinale (figure 3.13), si l'on excepte les angles d'incidence rasante pour lesquels il n'y a pas de maximum sur la courbe de sensibilité dans l'intervalle considéré, puisque la courbe associée est monotone. Ce phénomène est comparable à ce qui a été observé dans le cas des poutres couplées (figure 2.9).

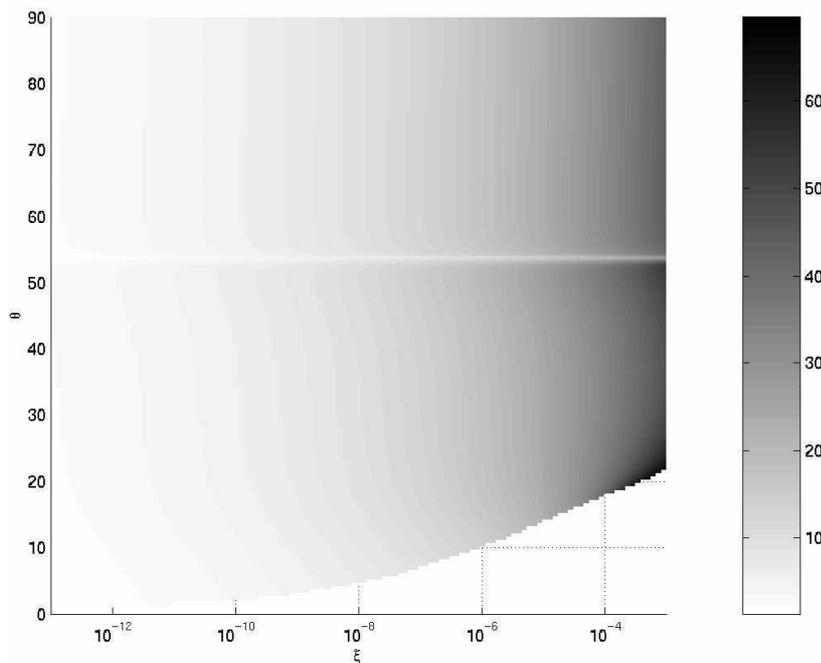


FIG. 3.17 – Angle critique (degrés) pour une onde incidente de cisaillement dans le plan, en fonction de l'angle d'incidence θ et du paramètre adimensionnel ξ . $\nu = 0,3$

3.4 Conclusion sur le couplage de plaques semi-infinies : comparaison avec une étude de plaques couplées finies

En regroupant les résultats obtenus sur le couplage de plaques semi-infinies, on peut affirmer que contrairement aux poutres, il n'existe pas de configuration qui garantisse que la structure ne soit pas hypersensible vis-à-vis de l'angle de couplage pour une excitation donnée. Cependant, la tendance générale est que les structures présentant des angles de couplage faibles ou proches de 180 degrés ont beaucoup plus de chances d'être hypersensibles, car il existe un grand nombre de configurations pour lesquelles l'angle critique de la structure est compris dans ces intervalles. Remarquons que dans un cas où les trois types d'ondes décrits existent simultanément, bien souvent les ondes de flexion transportent plus d'énergie que les ondes dans le plan, ce qui permet d'affirmer que le comportement global se rapprochera de celui étudié en premier (onde incidente de flexion). De plus, si l'on cherche à généraliser l'ensemble des résultats obtenus au cas des plaques de dimensions finies, on peut s'attendre à ce qu'il existe généralement un angle pour lequel la sensibilité de la réponse vis à vis de l'angle est maximale. En effet, si l'on considère que pour une telle structure, le champ vibratoire peut être interprété comme une superposition d'ondes couvrant un large intervalle d'angles d'incidences, un effet de "moyennage" des courbes obtenues tendrait à entraîner l'existence de cet angle critique, dont la valeur a de fortes chances d'être inférieur à une dizaine de degrés. Bien sûr, ceci n'est qu'une tendance générale, et des paramètres structuraux ou une excitation particuliers pourraient impliquer l'existence d'un angle critique supérieur à dix degrés.

On peut vérifier ceci à l'aide de résultats fournis par Rébillard et al. [RG 95] : il étudie la structure simple formée de deux plaques en acier dont l'angle de couplage ϕ est variable, et dont les dimensions sont précisées sur la figure 3.18, et plus particulièrement la sensibilité de la mobilité de transfert entre les points A et B. Celle-ci est définie comme le rapport entre la vitesse normale au point B et la force normale au point A. Elle dépend de l'angle de couplage ϕ , elle est donc notée $Y(A, B, \phi)$. Sa variation $\delta Y(A, B, \delta\phi)$ pour une variation $\delta\phi$ de l'angle sert à définir le paramètre de sensibilité suivant :

$$\alpha(\phi, \delta\phi) = \left| \frac{\delta Y(A, B, \delta\phi)}{Y(A, B, \phi)} \right| \quad (3.48)$$

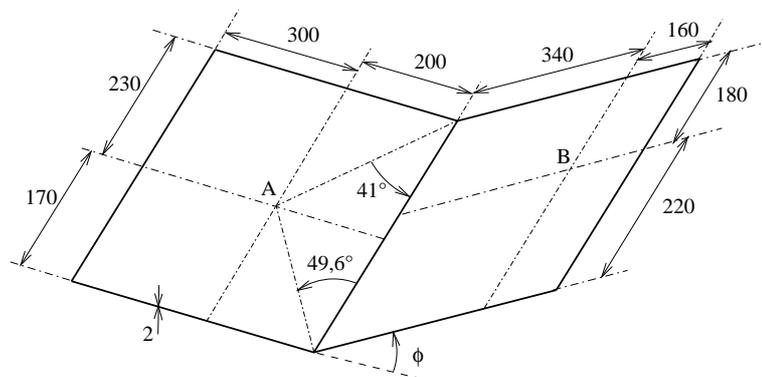


FIG. 3.18 – Dimensions (mm) de la structure de référence

La fréquence d'excitation étant fixée à 500 Hz, la figure 3.19 donne l'évolution du paramètre

$\alpha(A, B, \delta\phi)$ pour une variation $\delta\phi$ d'un degré. La sensibilité maximale est donc atteinte pour un angle de couplage de $7,5^\circ$.

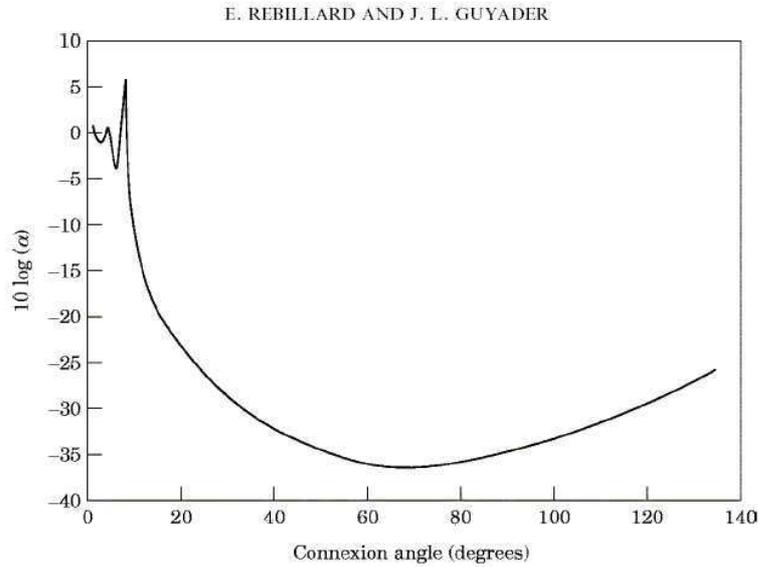


FIG. 3.19 – Sensibilité de la mobilité de transfert, figure tirée de l'article de Rébillard et al. [RG 95].

Si l'on cherche à rapprocher ce résultat de celui obtenu dans le cas des plaques semi-infinies, il convient de considérer le paramètre adimensionnel 3.30, qui dans ce cas vaut $\xi = 1,23 \cdot 10^{-7}$. La figure 3.20 représente la coupe de la figure 3.5 pour cette valeur de ξ . Il n'est pas évident d'en tirer une valeur particulière de l'angle critique, qui serait valable pour le cas des poutres finies.

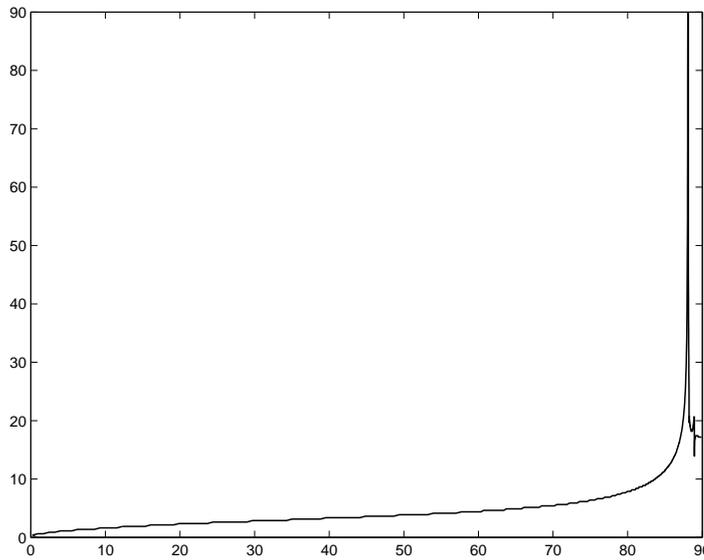


FIG. 3.20 – Coupe de la figure 3.5, pour $\xi = 1,23 \cdot 10^{-7}$: angle critique de couplage (degrés) en fonction de l'angle d'incidence (degrés)

Une approche simplifiée peut se faire en considérant l'angle d'incidence directe du point A vers la ligne de couplage, qui est indiqué sur la figure 3.18, et en supposant qu'il y a un cumul direct des ondes d'incidences θ , l'angle critique global s'obtenant comme une moyenne des angles critiques α_{crit} pris en compte :

$$\alpha_{critique\ moyen} = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\Delta\theta} \alpha_{crit}(\theta) d\theta \quad (3.49)$$

Soit, avec l'approche proposée :

$$\alpha_{critique\ moyen} = \frac{1}{41 + 49,6} \left(\int_{41}^{90} \alpha_{crit}(\theta) d\theta + \int_{49,6}^{90} \alpha_{crit}(\theta) d\theta \right) \quad (3.50)$$

Ainsi, on obtient une estimation de l'angle critique pour la plaque finie, qui dans notre cas a une valeur de $6,9^\circ$.

Ce résultat, bien qu'obtenu avec une approche très simplifiée, est proche du cas réel ($7,5^\circ$), et permet de justifier l'analyse des plaques semi-infinies menées précédemment.

Conclusion sur le couplage de structures semi-infinies

Pour chacune des structures étudiées (poutres et plaques semi-infinies couplées), il est possible de définir un angle critique, pour lequel la sensibilité de la puissance transmise (ou réfléchi) vis-à-vis de l'angle de couplage est maximale. L'existence de cet angle est due à de rapides changements de type de transmission, qui sont clairement identifiés par un bilan de puissance. La valeur de cet angle est définie par les caractéristiques de la structure et de l'excitation. Cependant, sa valeur est dans la plupart des cas inférieure à 10 degrés, ou proche de 180 degrés. Dans le cas des poutres, l'angle critique est défini uniquement à partir du rapport des nombres d'ondes, alors que pour les plaques couplées, 3 paramètres sont nécessaires pour connaître sa valeur. Ces résultats peuvent être utilisés pour expliquer des comportements observés sur des structures de dimensions finies, pour lesquelles différents types d'ondes existent, sous diverses incidences, et les observations faites permettent d'indiquer que cela résultera souvent dans l'existence d'un angle de couplage hypersensible dont la valeur sera inférieure à dix degrés.

Troisième partie

Localisation des zones d'une structure à l'origine de comportements hypersensibles

Les analyses précédentes ont permis de montrer que des structures très simples pouvaient avoir un comportement hypersensible. Ainsi, un simple couplage de poutres ou de plaques peut avoir un comportement très différent de celui attendu si l'on ne prend pas garde aux caractéristiques de ce couplage en fonction de la nature des structures à coupler et de l'excitation. Dans ce cas, la cause des dispersions est simple à déterminer, puisqu'une poutre ou une plaque n'est pas hypersensible en elle-même : c'est le couplage qui en modifie le comportement. On peut ainsi raisonnablement s'attendre à l'apparition de tels phénomènes sur des structures complexes, constituées d'assemblages de multiples pièces. Les méthodes classiques d'analyse de dispersions permettent généralement de connaître les valeurs approximatives des variations de comportement de ces structures, mais il est très difficile de savoir à moindre coût de calcul de quel assemblage ou de quelle partie de la structure sont originaires les fortes variations observées. Le but de la méthode développée ici est de proposer un outil permettant cette localisation, avec un coût minimal, afin de permettre lors d'une phase de conception, de détecter les zones de la structure à retravailler, que ce soit pour réduire les dispersions en modifiant les formes de la pièce ou de l'assemblage, ou bien pour s'assurer que la fabrication et le montage de la zone en question seront traités avec plus d'attention.

Chapitre 4

Méthode de localisation proposée

Dans ce court chapitre, nous allons détailler la méthode de localisation que nous proposons d'appliquer dans les chapitres suivants. Nous donnons également quelques détails concernant le choix de l'indicateur à retenir lors de l'application de la méthode.

4.1 Description de la méthode

La méthode de localisation proposée s'appuie sur les techniques généralement utilisées dans le domaine du recalage calculs-essais. Sa description peut se faire en trois étapes.

Dans un premier temps, il faut étudier la structure de référence, qui est construite en utilisant les valeurs nominales des intervalles de tolérance admis lors de la définition de la géométrie et des caractéristiques de la structure considérée. On construit ainsi les opérateurs décrivant son comportement, qui sont utilisés afin d'obtenir la solution déterministe du problème en utilisant une technique fournissant une description locale des champs solutions. Cette première étape est donc la résolution complète du problème nominal.

Dans un second temps, il s'agit de considérer une des structures pouvant être construite à partir des intervalles de tolérance, et d'en déterminer les opérateurs qui la caractérisent, sans résoudre le problème associé à cette seconde structure.

Enfin, la troisième étape est l'utilisation du champ solution de la structure de référence dans un indicateur qui est construit à partir des opérateurs de la structure modifiée, et qui permet de localiser les zones qui sont à l'origine des différences de comportements entre les structures réputées identiques.

Ceci constitue la base de la méthode, qui est ensuite adaptée suivant le problème considéré. En particulier, si le nombre de paramètres variables est important, il est nécessaire de considérer plusieurs structures modifiées, et ainsi de faire une boucle sur les étapes deux et trois. Nous verrons dans la suite plusieurs mises en application de la méthode proposée. Cependant, nous allons d'abord décrire le principe de construction de l'indicateur utilisé pour la localisation.

4.2 Choix d'un indicateur : cas de poutres couplées en vibrations longitudinales

Plutôt que de donner une formulation générale de cet aspect, nous préférons baser ce paragraphe sur la considération d'une structure particulière, afin de dégager simplement les points importants. Nous considérerons donc une poutre en vibration longitudinales forcées, qui est présentée sur la figure 4.1.

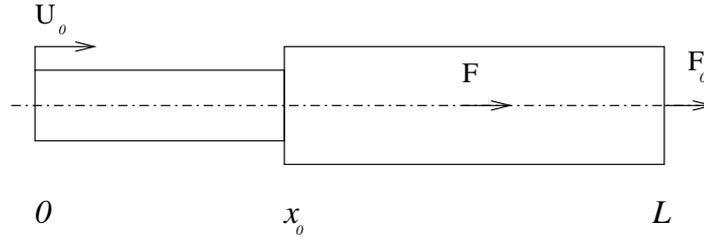


FIG. 4.1 – Poutre en vibrations longitudinales forcées.

4.2.1 Résolution du problème par minimisation

L'indicateur considéré est issu d'une formulation du problème sous forme de minimisation, présentée ici. La formulation classique en terme de déplacement peut s'écrire sous la forme suivante :

Trouver U , de classe C^2 par morceaux sur $I = I_1 \cup I_2$, vérifiant :

$$\frac{d}{dx} \left[ES_1 \frac{dU}{dx} \right] + \omega^2 \rho S_1 U = 0 \quad \text{sur } I_1 =]0, x_0[\quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ES_2 \frac{dU}{dx} \right] + \omega^2 \rho S_2 U = F \quad \text{sur } I_2 =]x_0, L[\quad (4.2)$$

Les conditions limites s'écrivent :

$$U|_{x=0} = U_0 \quad (4.3)$$

$$ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} = F_0 \quad (4.4)$$

Tandis que la continuité du déplacement et de l'effort normal au point $x = x_0$ impose :

$$U|_{x=x_0^-} = U|_{x=x_0^+} \quad (4.5)$$

$$ES_1 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^-} = ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \quad (4.6)$$

où U_0 est un déplacement imposé, et la notation $U|_{x=x_0^-}$ désigne la valeur de U étendue par continuité en $x = x_0$ avec $x \leq x_0$.

Habituellement, la seule inconnue dans les équations précédentes est le champ de déplacement U . La solution U_{sol} de ce problème peut être calculée de différentes manières. L'une d'entre elles est de trouver le champ qui minimise le résidu 4.7 :

$$\begin{aligned} R(U) = & \frac{ES_1}{L} (U|_{x=0} - U_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{I_1} \frac{1}{\omega^2 \rho S_1} \left(\frac{d}{dx} [ES_1 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_1 U \right)^2 dx + \\ & + \frac{ES_1}{L} \left(U|_{x=x_0^-} - U|_{x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES_1} \left(ES_1 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\omega^2 \rho S_2} \left(\frac{d}{dx} [ES_2 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_2 U - F \right)^2 dx + \frac{L}{ES_2} \left(ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} - F_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ce résidu a des propriétés remarquables :

$R(U)$ est extremum si et seulement si $U = U_{sol}$, ce qui permet d'obtenir la solution par une approche numérique ;

$R(U) \geq 0$ et $R(U_{sol}) = 0$, ce qui permet d'affirmer que l'extremum de ce résidu est un minimum, et que sa valeur peut être utilisée pour estimer la qualité d'une solution : si une solution approchée U_{app} a été calculée sur le domaine $\Omega = [0, L]$, la valeur de $R(U_{app})$ est une mesure de la différence entre U_{sol} et U_{app} . En annexe A, le lecteur trouvera une démonstration permettant de montrer que le résidu choisi peut être utilisé pour définir une distance mathématique entre ces deux solutions.

L'expression de ce résidu a été construite en utilisant des poids naturels pour chacun des termes, afin qu'il puisse être relié aux énergies et travaux. Cependant, la valeur des poids permettant de garder les propriétés ci-dessus vraies n'est pas unique, il est possible de faire intervenir des facteurs positifs devant chaque terme de la somme afin d'augmenter ou de diminuer leurs influences respectives sur le résidu global.

De plus, une localisation des différences entre les deux champs peut être effectuée en considérant une décomposition du résidu le long de la poutre : $R(U) = R_1(U) + R_2(U) + R_3(U) + R_4(U) + R_5(U)$, avec :

$$\begin{aligned} R_1(U) &= \frac{ES_1}{L} (U|_{x=0} - U_0)^2 \\ R_2(U) &= \frac{1}{2} \int_{I_1} \frac{1}{\omega^2 \rho S_1} \left(\frac{d}{dx} [ES_1 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_1 U \right)^2 dx \\ R_3(U) &= \frac{ES_1}{L} \left(U|_{x=x_0^-} - U|_{x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES_1} \left(ES_1 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2 \\ R_4(U) &= \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\omega^2 \rho S_2} \left(\frac{d}{dx} [ES_2 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_2 U - F \right)^2 dx \\ R_5(U) &= \frac{L}{ES_2} \left(ES_2 \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} - F_0 \right)^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si le champ U utilisé pour l'estimation n'est pas U_{sol} , au moins une des valeurs $R_i(U)$ sera différente de zéro, permettant de savoir dans quelle(s) partie(s) de la structure le champ n'est pas correct. Notons que R_2 et R_4 peuvent être à nouveau décomposés en plusieurs parties afin d'avoir une meilleure localisation des erreurs.

Le résidu présenté peut être utilisé deux fois lors de l'application de la méthode proposée (section 4.1) : tout d'abord dans l'étape de localisation, qui est celle pour laquelle le résidu a été présenté, mais aussi lors de la première étape (résolution du problème nominal), afin de vérifier que la solution qui a été trouvée a bien un résidu nul ou très faible. Notons enfin que la formulation proposée n'est pas unique, et qu'il existe d'autres approches et d'autres expressions de résidus dont la minimisation conduit à l'obtention de la solution du problème considéré.

4.2.2 Exemple de localisation

Si l'on considère une structure dont les caractéristiques sont celles de la poutre présentée précédemment, mises à part les dimensions de la section $S'_1 \neq S_1$ sur l'intervalle $I_1 =]0, x_0[$, et que l'on utilise le champ de déplacement U_{sol} du premier problème, il est évident que la seule équation qui ne sera pas vérifiée par ce champ sera l'équation de continuité de l'effort en $x = x_0$:

$$ES'_1 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^-} \neq ES_2 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \quad (4.9)$$

En ce qui concerne le résidu R' adapté à la seconde structure (son expression est obtenue en remplaçant S_1 par S'_1 dans les équations 4.8), on obtient :

$$\begin{aligned} R'_1(U_{sol}) &= \frac{ES'_1}{L} (U_{sol}|_{x=0} - U_0)^2 = 0 \\ R'_2(U_{sol}) &= \frac{1}{2} \int_{I_1} \frac{1}{\omega^2 \rho S'_1} \left(\frac{d}{dx} \left[ES'_1 \frac{dU_{sol}}{dx} \right] + \omega^2 \rho S'_1 U_{sol} \right)^2 dx = 0 \\ R'_3(U_{sol}) &= \frac{ES'_1}{L} \left(U_{sol}|_{x=x_0^-} - U_{sol}|_{x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES'_1} \left(ES'_1 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2 \neq 0 \\ R'_4(U_{sol}) &= \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\omega^2 \rho S_2} \left(\frac{d}{dx} \left[ES_2 \frac{dU_{sol}}{dx} \right] + \omega^2 \rho S_2 U_{sol} - F \right)^2 dx = 0 \\ R'_5(U_{sol}) &= \frac{L}{ES_2} \left(ES_2 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=L} + F_0 \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ainsi, la seule partie de ce résidu qui ne soit pas nulle est $R'_3(U)$. Ce résidu est relié à l'équation de continuité du déplacement, qui est vérifiée, ainsi qu'à l'équation de continuité de l'effort, qui n'est pas vérifiée :

$$R'_3(U_{sol}) = \frac{L}{ES'_1} \left(ES'_1 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{dU_{sol}}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2 \neq 0 \quad (4.11)$$

Ainsi, ce résidu non nul permet de détecter que c'est l'endroit où est estimé R'_3 qui est à l'origine des différences entre les deux structures : on a bien localisé le changement de section. Cependant, remarquons auparavant que l'estimateur que nous utiliserons dans la suite sera un indicateur relatif, afin d'obtenir une quantité adimensionnelle, et de ne pas privilégier de zones ayant de fortes énergies lors de la localisation. Le choix de la valeur à utiliser pour ce rapport n'est pas immédiat, puisque la grandeur de référence (qui est la valeur obtenue lorsque tous les paramètres sont ceux de référence) est nulle, interdisant ainsi son utilisation brute. Par contre, puisque le résidu R_3 considéré est constitué de deux termes devant se compenser, il est possible d'utiliser comme dénominateur la moyenne ou la

somme de ces deux valeurs. Ainsi, la quantité relative considérée sera :

$$e_3(U) = \frac{\frac{ES}{L} \left(U_{|x=x_0^-} - U_{|x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES} \left(ES \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^-} - ES \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2}{\frac{ES}{L} \left(U_{|x=x_0^-} + U_{|x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES} \left(ES \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^-} + ES \frac{dU}{dx} \Big|_{x=x_0^+} \right)^2} \quad (4.12)$$

4.3 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de localisation des zones à l'origine de comportements hypersensibles, basée sur la résolution du problème nominal, et de l'utilisation du champ solution dans un calcul de résidu. Cet indicateur est construit à partir des caractéristiques de la structure modifiée, et son expression correspond à l'équation 4.12 adaptée au problème considéré : la formulation présentée a été développée à partir d'une considération monodimensionnelle, et doit être adaptée à chacune des structures considérées. L'expression de l'indicateur à prendre en compte n'est pas unique, mais celui-ci doit être minimum et localement nul lorsque le champ utilisé pour son évaluation est la solution du problème. En d'autres termes, il doit non seulement être construit à partir d'une distance mathématique entre une solution approchée et la solution du problème, mais également permettre l'évaluation de la contribution de différentes parties de la structure à la valeur totale de l'indicateur, afin d'autoriser la localisation.

Nous étudierons dans la suite de ce travail l'adaptation de l'indicateur pour le cas de plaques couplées, ainsi que l'intégration à la méthode des éléments finis. Notons que nous n'avons pas dans cette partie relié l'indicateur à une mesure de la sensibilité, mais seulement à des différences de comportement. On peut intuitivement qu'il existe un lien entre l'indicateur et la variation des caractéristiques propres de la structure, cet aspect sera abordé lors de l'étude dans le cadre des éléments finis (chapitre 6).

Chapitre 5

Application analytique : étude d'un réseau de plaques

L'analyse vibratoire d'un réseau de plaques dans le cadre de l'étude des phénomènes d'hypersensibilité a été largement traitée par Rébillard [Réb 95]. Son travail est repris et complété ici, en vue d'appliquer à une telle structure la méthode proposée dans le chapitre précédent. Dans toute cette partie, nous nous intéresserons uniquement aux effets des variations des angles de couplage entre les différentes plaques du réseau. Ces couplages seront considérés rigides, et les plaques appuyées sur les bords qui ne sont pas couplés. Les seuls paramètres variables seront donc les angles de couplage, qui sont supposés varier autour de valeurs nominales (qui définissent la structure de référence), dans un intervalle de tolérance donné. Dans un premier temps nous allons montrer quelles sont les causes des hypersensibilités observées sur de telles structures, avant d'essayer de les retrouver à partir de la méthode proposée précédemment.

5.1 Étude du comportement vibratoire d'un réseau de plaques

5.1.1 Formulation du problème

La formulation adoptée est largement détaillée en annexe F. Les notations retenues pour les champs considérés, en accord avec la figure 5.1, sont les suivantes :

champ de déplacement de la plaque i : $\vec{U}_i = u_i(x_i, y) \vec{x}_i + v_i(x_i, y) \vec{y} + w_i(x_i, y) \vec{z}_i$

rotation de flexion de la plaque i , le long de l'axe \vec{y} : $\vec{R}_i \cdot \vec{y} = R_i(x_i, y)$

efforts généralisés de la plaque i : $\vec{F}_i = F_{x,i}(x_i, y) \vec{x}_i + F_{y,i}(x_i, y) \vec{y} + F_{z,i}(x_i, y) \vec{z}_i$

et moment de flexion de la plaque i , selon l'axe \vec{y} : $\vec{M}_i \cdot \vec{y} = M_i(x_i, y)$

Toutes ces quantités sont reliées entre elles par les conditions de continuité 5.1 à 5.8, qui sont écrites en supposant la jonction entre les plaques comme étant rigide : $\forall y \in [0, a]$

$$u_{i+1}(0, y) = u_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - w_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1} = u_i^*(l_i, y) \quad (5.1)$$

$$v_{i+1}(0, y) = v_i(l_i, y) \quad (5.2)$$

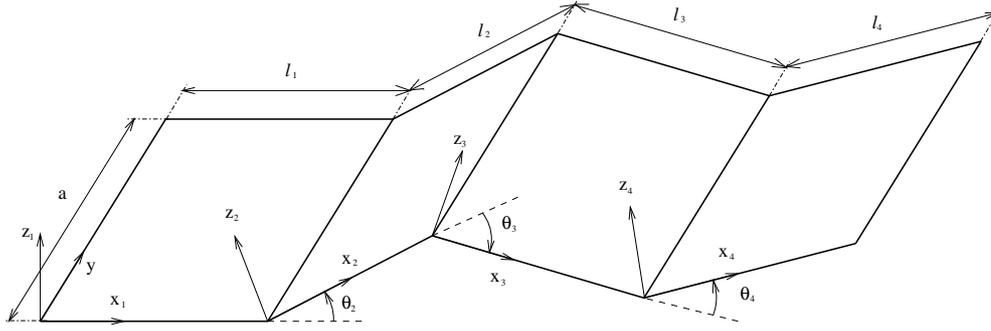


FIG. 5.1 – Notations retenues pour la description d'un réseau de plaques

$$w_{i+1}(0, y) = w_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + u_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1} = w_i^*(l_i, y) \quad (5.3)$$

$$F_{x,i+1}(0, y) = F_{x,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - F_{z,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1} = F_{x,i}^*(l_i, y) \quad (5.4)$$

$$F_{y,i+1}(0, y) = F_{y,i}(l_i, y) \quad (5.5)$$

$$F_{z,i+1}(0, y) = F_{z,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + F_{x,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1} = F_{z,i}^*(l_i, y) \quad (5.6)$$

$$R_{i+1}(0, y) = R_i(l_i, y) \quad (5.7)$$

$$M_{i+1}(0, y) = M_i(l_i, y) \quad (5.8)$$

Notons que les symboles “étoiles” (comme par exemple $u_i^*(l_i, y)$) sont utilisés ici uniquement dans le but de simplifier les notations.

5.1.2 Étude d'une structure particulière

Nous allons nous intéresser à la structure particulière présentée figure 5.2, et plus particulièrement à son étude dans le cadre de vibrations forcées en basses fréquences. Les caractéristiques retenues sont les suivantes : les plaques constitutives sont en acier ($E = 2.10^{11} Pa$, $\eta = 10^{-2}$, $\nu = 0,3$), et ont une largeur commune de 40 cm, ainsi qu'une épaisseur commune de 2 mm. Cette structure, qui peut être considérée comme étant une sorte de capot de machine, est contenue dans un volume parallélépipédique de dimensions 0,4m x 0,54m x 1,7m. Les plaques sont appuyées sur les bords non couplés, et les angles de connexion peuvent être classés suivant deux catégories : hypersensibles pour les angles numérotés 4, 5, et 7 (leur valeur nominale étant 4°), tandis que tous les autres ne sont pas sensibles (leurs valeurs nominales sont 45° , 86° et 90°). Notons que les valeurs de ces angles peuvent être rapprochés de l'étude menée dans le chapitre 3.

Nous supposons dans la suite que ces angles de couplage sont variables autour de leur valeurs nominales, dans un intervalle d'un degré : la répartition est choisie gaussienne, avec un écart type d'un sixième de degré.

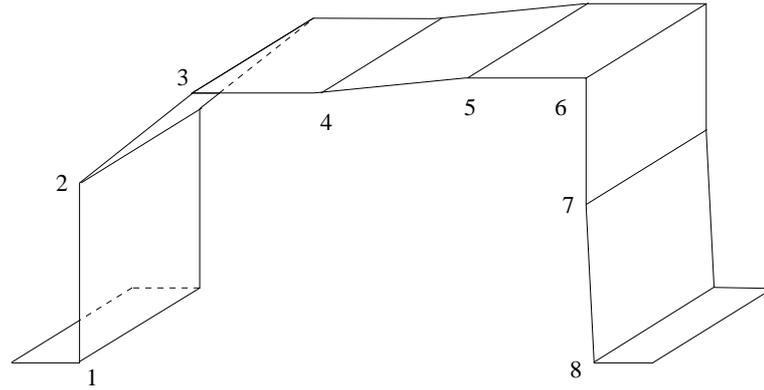


FIG. 5.2 – Structure particulière étudiée.

Longueurs des plaques en cm : 10 ; 30 ; 30 ; 45 ; 50 ; 40 ; 20 ; 35,6 ; 10. Valeurs des angles de couplage en degrés : 90 ; -45 ; -45 ; 4 ; -4 ; -90 ; 4 ; 86.

En excitant avec un effort unitaire un point de la plaque située entre les angles notés 1 et 2 (point de coordonnées locales $x = 5 \text{ mm}$; $y = 13 \text{ cm}$), et en mesurant le déplacement normal en résultant sur la plaque située entre les angles 7 et 8 (point de coordonnées locales $x = 10 \text{ cm}$; $y = 20 \text{ cm}$), on obtient la figure 5.3, sur laquelle sont tracées les réponses de 40 structures dont les angles ont été choisis aléatoirement dans les intervalles décrits précédemment. On s'aperçoit donc que les dispersions sont relativement importantes, surtout dans la bande de fréquence située entre 140 et 200 Hz. Nous allons nous intéresser plus précisément à cette zone dans la suite.

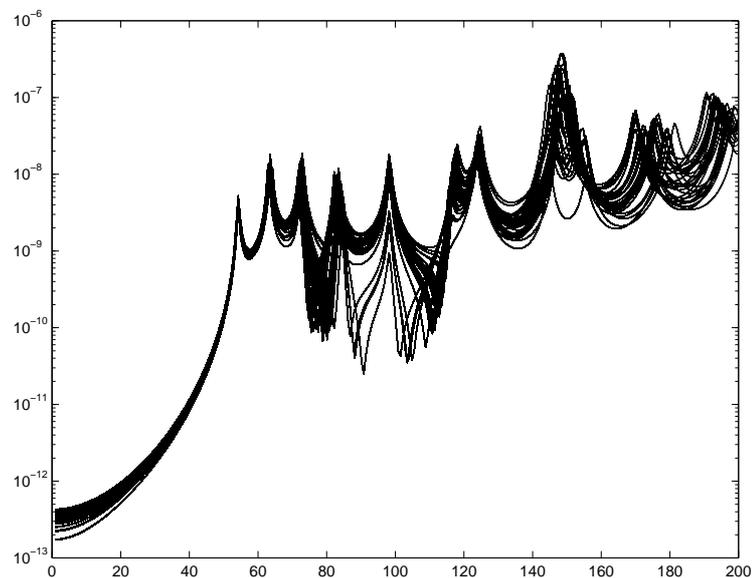


FIG. 5.3 – Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 40 cas, tous les angles varient.

Il est possible de déterminer l'influence de chacun des angles dans les dispersions constatées : la figure 5.4 montre l'effet de la variation des angles numérotés 4 et 5, pour lesquels on observe que les dispersions sont relativement importantes. La figure 5.5, de la même façon, permet d'affirmer que l'angle numéro 7 est très sensible sur cette structure, alors que tous les autres angles n'ont pratiquement aucune sensibilité.

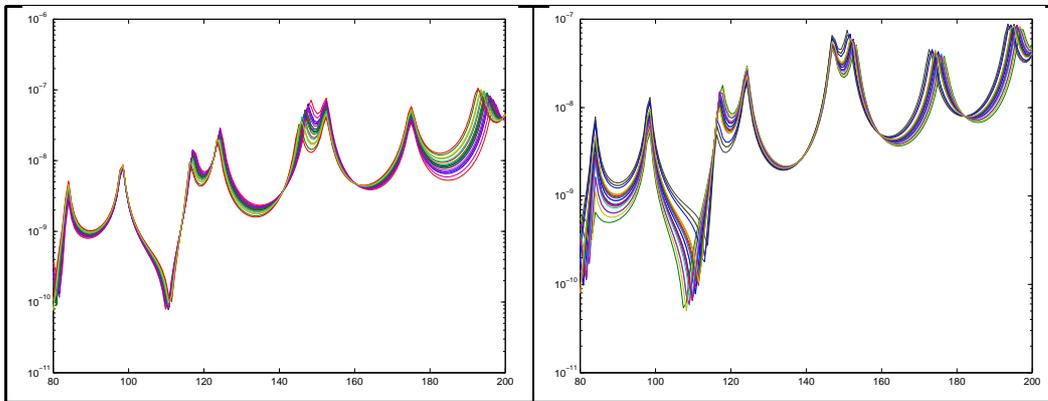


FIG. 5.4 – Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, a) seul l'angle n°4 varie b) seul l'angle n°5 varie

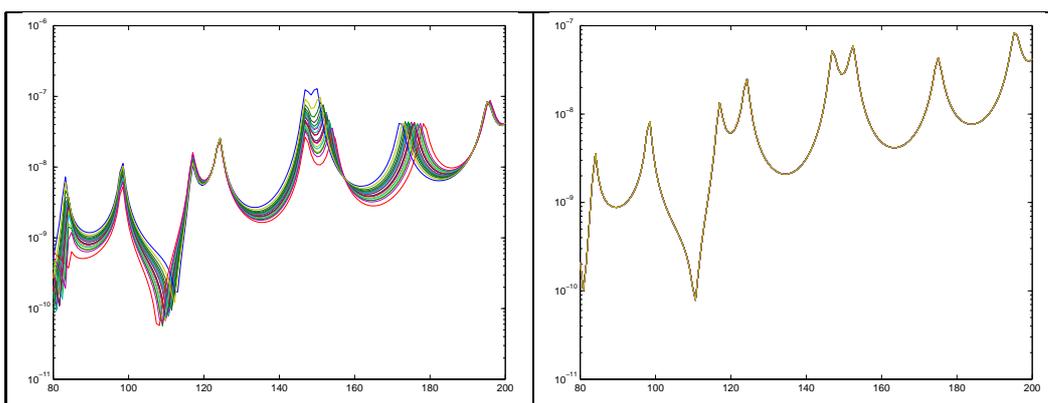


FIG. 5.5 – Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, a) seul l'angle n°7 varie b) tous les angles varient, exceptés les n°4, 5 et 7

Notons que ces remarques ont été faites sans aucune mesure de l'hypersensibilité, qui pourrait se faire de différentes manières, ce qui n'est pas le propos de ce travail. L'observation des figures 5.4 et 5.5 permet simplement d'affirmer que certains angles (n° 4, 5 et 7) sont responsables du comportement hypersensible de la structure, et c'est ce que nous allons essayer de détecter en utilisant la méthode proposée au chapitre 4.

5.2 Choix de l'indicateur

Avant d'appliquer la méthode de localisation, il est nécessaire d'explicitier l'indicateur adapté à la structure considérée : celui-ci va être basé sur le résidu proposé en équation 4.8. Cependant, puisque nous nous intéressons uniquement à la sensibilité vis-à-vis des angles de couplage, tous les autres paramètres seront considérés fixes, ce qui signifie que la solution du problème nominal vérifie toutes les équations du problème prenant en compte les angles modifiés, exceptées les conditions de continuité au niveau des jonctions. Ainsi, les seuls résidus qui pourront ne pas être nuls dans notre problème sont ceux qui correspondent à la partie du résidu notée R'_3 (qui doit évidemment être adaptée au cas des plaques, mais qui est celle représentant la condition de continuité à la jonction), et plus particulièrement à sa considération sous forme relative, donnée en équation 4.12.

Ainsi, on peut définir l'estimateur 5.9, basé sur l'expression 4.12 adaptée au cas des plaques :

$$\begin{aligned}
 e = & \frac{\int_{\partial\Omega} \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} (u_{i+1} - u_i^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{Eh}{2a(1+\nu)} (v_{i+1} - v_i)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{D}{a^3} (w_{i+1} - w_i^*)^2 d\Omega + \dots}{\int_{\partial\Omega} \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} (u_{i+1} + u_i^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{Eh}{2a(1+\nu)} (v_{i+1} + v_i)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{D}{a^3} (w_{i+1} + w_i^*)^2 d\Omega + \dots} \\
 & \frac{\dots + \int_{\partial\Omega} \frac{a(1-\nu^2)}{Eh} (F_{x,i+1} - F_{x,i}^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{2a(1+\nu)}{Eh} (F_{y,i+1} - F_{y,i})^2 d\Omega + \dots}{\dots + \int_{\partial\Omega} \frac{a(1-\nu^2)}{Eh} (F_{x,i+1} + F_{x,i}^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{2a(1+\nu)}{Eh} (F_{y,i+1} + F_{y,i})^2 d\Omega + \dots} \quad (5.9) \\
 & \frac{\dots + \int_{\partial\Omega} \frac{a^3}{D} (F_{z,i+1} - F_{z,i}^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{D}{a} (R_{i+1} - R_i)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a}{D} (M_{i+1} - M_i)^2 d\Omega}{\dots + \int_{\partial\Omega} \frac{a^3}{D} (F_{z,i+1} + F_{z,i}^*)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{D}{a} (R_{i+1} + R_i)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a}{D} (M_{i+1} + M_i)^2 d\Omega}
 \end{aligned}$$

Dans cette expression les domaines d'intégrations $\partial\Omega$ sont les lignes de couplages, et a est la largeur commune des plaques. Ce résidu est donc défini sur chacune des lignes de couplage, et pour chaque structure considérée on peut donc calculer les huit résidus correspondants.

5.3 Application de la méthode de localisation

Nous passerons sur la première étape, qui est la résolution du problème nominal en utilisant la méthode de décomposition semi-modale détaillée en annexe F, pour nous intéresser au calcul du résidu, qui permet de localiser les zones qui sont responsables des comportements différents entre les structures. Le champ de déplacement de la structure nominale est donc utilisé dans le résidu 5.9, construit à partir des structures modifiées, l'ensemble des angles variant dans un intervalle angulaire

unitaire. Ce calcul est mené pour chacune des lignes de couplage, et le résultat donné est la moyenne de chaque valeur pour 40 évaluations du résidu, aux deux fréquences 175 et 195 Hz, les 40 cas correspondant à autant de structures aléatoirement choisies. La figure 5.6 donne le résultat de ce calcul, et l'on s'aperçoit que les angles 4, 5 et 7 sont bien détectés comme étant principalement responsables des sensibilités observées précédemment : les résidus correspondant à ces angles ont de fortes valeurs, alors que les autres sont faibles.

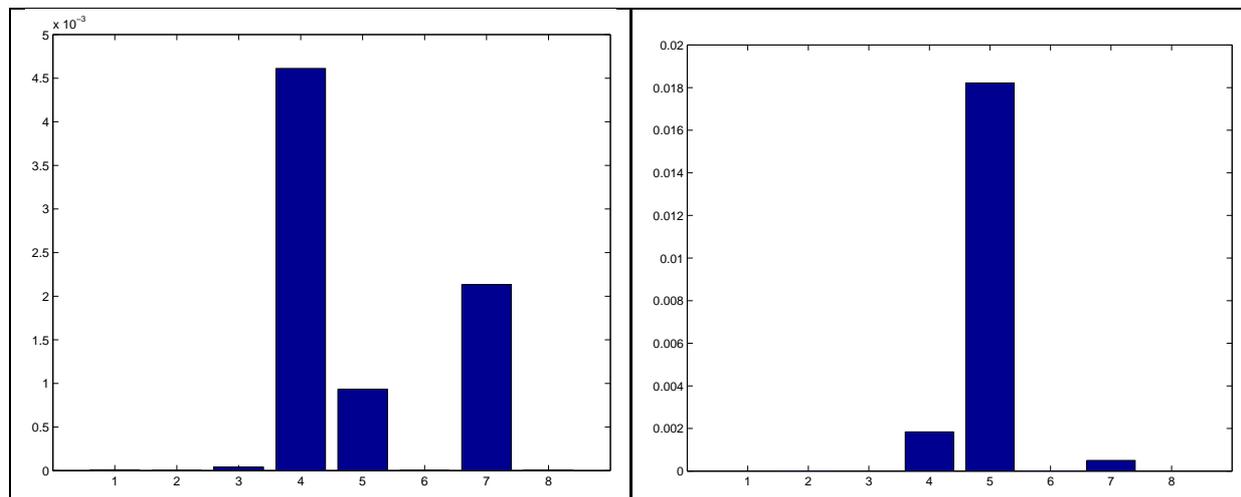


FIG. 5.6 – Valeur du résidu pour chaque angle de connexion, moyenne de 40 calculs. a) $f=175$ Hz
b) $f=195$ Hz

5.4 Détection rapide de l'hypersensibilité

Le but de la méthode étant d'obtenir des informations rapides sur les zones responsables de l'hypersensibilité, on est en droit de s'interroger sur le nombre de cas à considérer lors de l'évaluation de l'indicateur. Ainsi, les 40 cas choisis précédemment pour essayer de représenter un grand nombre de structures possibles ne sont pas forcément indispensables si l'on est intéressé par le gain de temps. La figure 5.7 présente deux résultats successifs obtenus à l'aide d'une moyenne utilisant uniquement trois calculs. On observe que deux calculs ne donnent pas le même résultat, ce qui est logique puisque la convergence n'est pas atteinte. Néanmoins, les angles à l'origine des fortes sensibilités peuvent être détectés très rapidement.

5.5 Causes de l'hypersensibilité en fonction de la fréquence

La méthode proposée permet de connaître les causes des fortes sensibilités pour différents points de fréquence : les résultats d'un calcul mené sur une bande de fréquence sont présentés sur la figure 5.8, qui montre l'influence de chaque angle de couplage en fonction de la fréquence, sur la bande 80-200 Hz. Ces tracés sont globalement en accord avec les figures 5.4 et 5.5, puisque à chaque fréquence pour laquelle le résidu a une valeur faible, la sensibilité de l'angle de couplage est faible. Ceci peut être observé pour l'angle 4 à 115 Hz, ou pour l'angle 5 à 142 Hz. Lorsque ce résidu a une grande valeur, la sensibilité vis-à-vis de l'angle correspondant est forte, bien que la valeur du résidu n'ait pas encore été reliée à un indicateur de sensibilité de la réponse.

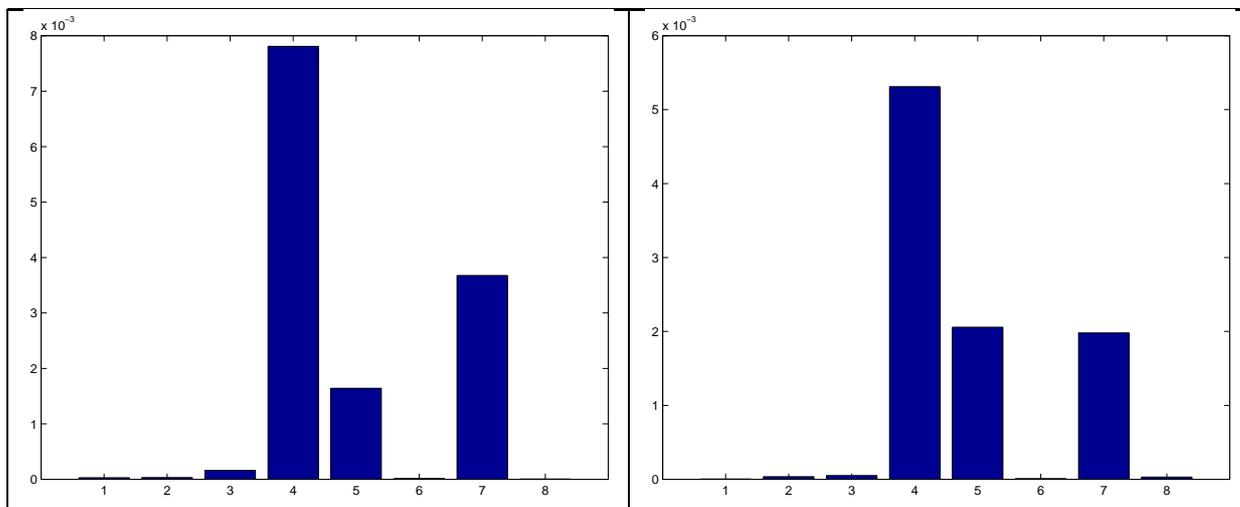


FIG. 5.7 – Valeur du résidu pour chaque angle de connexion, moyenne de 3 calculs. $f=195$ Hz, a) Calcul 1 b) Calcul 2

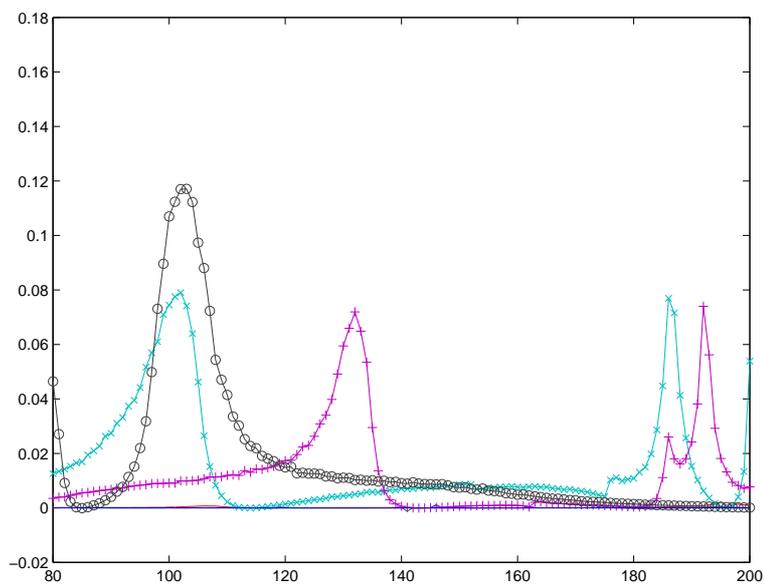


FIG. 5.8 – Valeur du résidu en fonction de la fréquence (Hz). Simulation de Monte Carlo, 2000 cas. -x- angle 4; +- angle 5; -o- angle 7; — autres angles

En ce qui concerne l'angle 7, le résidu indique que sa sensibilité diminue entre 150 et 200 Hz, ce qui est en accord avec la figure 5.5. D'un autre côté, pour des fréquences particulières, comme 125 Hz (pour l'angle 7), la simulation de Monte Carlo semble indiquer que la sensibilité est faible, alors que le résidu a une valeur plutôt importante. La raison expliquant cette différence est que les indicateurs proposés sont globaux au sens où ils prennent en compte le champ de déplacement sur la structure complète, même si les calculs effectués en post processing sont menés localement, alors que les figures 5.4 et 5.5 donnant la sensibilité sont obtenues en utilisant un point particulier de la structure. Ainsi, si l'on effectue un autre calcul, similaire à celui permettant l'obtention de la figure 5.5, mais en utilisant un autre point de mesure sur la même plaque de sortie, le paramètre considéré (angle 7) peut apparaître plus sensible, comme le montre la figure 5.9. Ce phénomène peut être facilement compris si l'on imagine que le premier point de mesure était situé sur le noeud d'un mode.

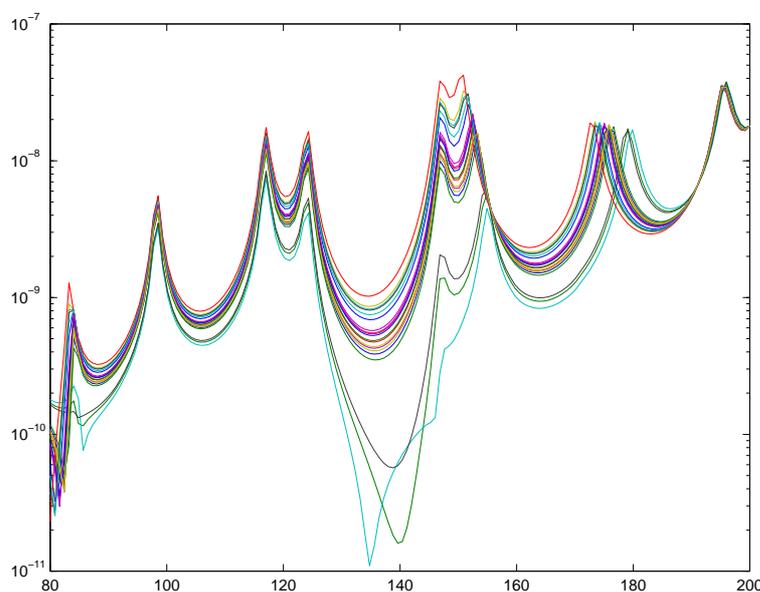


FIG. 5.9 – Réponses de flexion en vibrations forcées de la structure. Déplacement (m) en fonction de la fréquence (Hz). 20 cas, seul l'angle n°7 varie

La figure 5.8 donne la valeur du résidu en fonction de la fréquence. Cependant, la simulation de Monte-Carlo permettant son obtention est assez lourde, c'est pourquoi une analyse au premier ordre permettant de diminuer le coût de calcul va être présentée.

5.6 Analyse du résidu au premier ordre

L'étude analytique menée précédemment permet d'obtenir littéralement l'expression du résidu, ainsi qu'une décomposition de celui-ci au premier ordre vis-à-vis de l'angle de couplage. On supposera donc que l'angle de couplage $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ a une valeur nominale $\bar{\theta}$ et que sa variation est θ' , avec $|\theta'| = |\theta - \bar{\theta}| \ll |\bar{\theta}|$. La décomposition de l'angle au premier ordre va obligatoirement mener à une expression du second ordre (ou du moins d'un ordre pair), puisque nous avons montré que le résidu était toujours positif. Le développement de l'expression 5.9 est détaillé ici :

En ce qui concerne les champs v , F_y , R et M (relatifs à l'axe y), notre hypothèse est que les résultats du calcul nominal sont compatibles avec les opérateurs des structures modifiées, puisque

dans cette direction les angles de couplage n'interviennent pas explicitement dans les relations de continuité. Ainsi les équations 5.2, 5.5, 5.7 et 5.8 sont vérifiées :

$$v_{i+1} - v_i = 0 ; F_{y,i+1} - F_{y,i} = 0 \quad (5.10)$$

$$R_{i+1} - R_i = 0 ; M_{i+1} - M_i = 0 \quad (5.11)$$

En ce qui concerne les autres champs, et en particulier le déplacement u , il faut dans un premier temps évaluer le premier terme de l'équation 5.9 en utilisant 5.1 :

$$(u_{i+1}(0, y) - u_i^*(L_i, y))^2 = (u_{i+1} - u_i \cos\theta + w_i \sin\theta)^2 \quad (5.12)$$

L'introduction des décompositions des fonctions sinusoïdales $\cos\theta \simeq \cos\bar{\theta} - \theta' \sin\bar{\theta}$ et $\sin\theta \simeq \sin\bar{\theta} + \theta' \cos\bar{\theta}$ donne :

$$(u_{i+1} - u_i^*)^2 \simeq \theta'^2 (u_i \sin\bar{\theta} + w_i \cos\bar{\theta})^2 \quad (5.13)$$

L'ensemble des termes de l'expression 5.9 peut être évalué de cette façon, et finalement, en négligeant les termes d'ordre plus élevé, l'indicateur peut se mettre sous la forme suivante :

$$e = \frac{\int_{\partial\Omega} \theta'^2 \left[\frac{Eh}{a(1-\nu^2)} (u_i \sin\bar{\theta} + w_i \cos\bar{\theta})^2 + \frac{D}{a^3} (u_i \cos\bar{\theta} - w_i \sin\bar{\theta})^2 + \dots \right.}{4 \int_{\partial\Omega} \left[\frac{Eh}{a(1-\nu^2)} u_{i+1}^2 + \frac{Eh}{2a(1+\nu)} v_{i+1}^2 + \frac{D}{a^3} w_{i+1}^2 + \frac{D}{a} R_{i+1}^2 + \dots \right.} \quad (5.14)$$

$$\left. \dots + \frac{a(1-\nu^2)}{Eh} (F_{x,i} \sin\bar{\theta} + F_{z,i} \cos\bar{\theta})^2 + \frac{a^3}{D} (F_{x,i} \cos\bar{\theta} - F_{z,i} \sin\bar{\theta})^2 \right] d\Omega}{\dots + \frac{a(1-\nu^2)}{Eh} F_{x,i+1}^2 + \frac{2a(1+\nu)}{Eh} F_{y,i+1}^2 + \frac{a^3}{D} F_{z,i+1}^2 + \frac{a}{D} M_{i+1}^2} d\Omega$$

Ainsi l'indicateur est proportionnel à θ'^2 , et un calcul statistique peut être mené afin de déterminer la moyenne de e , qui est la grandeur qui a été tracée sur les figures précédentes. En notant $\sigma_{\theta'}$ l'écart type de θ' et en supposant une distribution gaussienne centrée, la fonction de répartition de θ' s'écrit :

$$f_{\theta'}(\mu) = \frac{1}{\sigma_{\theta'} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_{\theta'}^2}\right) \quad (5.15)$$

on en déduit la fonction de répartition de θ'^2 , qui est nulle sur $] -\infty, 0[$, et qui vaut sur $]0, +\infty[$:

$$f_{\theta',2}(\mu) = \frac{1}{\sigma_{\theta'} \sqrt{2\pi\mu}} \exp\left(-\frac{\mu}{2\sigma_{\theta'}^2}\right) \quad (5.16)$$

Ce résultat peut être facilement obtenu en utilisant la fonction de probabilité $F_{\theta',2}(k)$:

$$F_{\theta,2}(k) = P(\theta^2 \leq k) = P(-\sqrt{k} \leq \theta' \leq \sqrt{k}) \quad (5.17)$$

$$F_{\theta,2}(k) = \int_{-\sqrt{k}}^{+\sqrt{k}} f_{\theta'}(\mu) d\mu = \int_0^{\sqrt{k}} \frac{2}{\sigma_{\theta'} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_{\theta'}^2}\right) d\mu \quad (5.18)$$

le changement de variable $t = \mu^2$ mène à la justification de l'expression de la fonction de répartition 5.16 :

$$F_{\theta,2}(k) = \int_0^k \frac{1}{\sigma_{\theta'} \sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma_{\theta'}^2}\right) dt \quad (5.19)$$

Ceci permettant de calculer l'espérance de θ^2 :

$$E(\theta^2) = \int_0^\infty \mu f_{\theta,2}(\mu) d\mu = \sigma_{\theta'}^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-t^2) dt = \sigma_{\theta'}^2 \quad (5.20)$$

Ce calcul nous amène finalement à l'estimation du résidu obtenue par décomposition de l'angle de couplage au premier ordre :

$$e_{premier\ ordre} = \frac{\sigma_{\theta'}^2 \int_{\partial\Omega} \left[\frac{Eh}{a(1-\nu^2)} (u_i \sin\bar{\theta} + w_i \cos\bar{\theta})^2 + \frac{D}{a^3} (u_i \cos\bar{\theta} - w_i \sin\bar{\theta})^2 + \dots \right.}{4 \int_{\partial\Omega} \left[\frac{Eh}{a(1-\nu^2)} u_{i+1}^2 + \frac{Eh}{2a(1+\nu)} v_{i+1}^2 + \frac{D}{a^3} w_{i+1}^2 + \frac{D}{a} R_{i+1}^2 + \dots \right.} \quad (5.21)$$

$$\frac{\dots + \frac{\alpha(1-\nu^2)}{Eh} (F_{x,i} \sin\bar{\theta} + F_{z,i} \cos\bar{\theta})^2 + \frac{\alpha^3}{D} (F_{x,i} \cos\bar{\theta} - F_{z,i} \sin\bar{\theta})^2}{\dots + \frac{\alpha(1-\nu^2)}{Eh} F_{x,i+1}^2 + \frac{2\alpha(1+\nu)}{Eh} F_{y,i+1}^2 + \frac{\alpha^3}{D} F_{z,i+1}^2 + \frac{\alpha}{D} M_{i+1}^2} d\Omega$$

Cette expression permet donc d'obtenir un calcul très rapide de l'évolution fréquentielle de l'indicateur, puisqu'un seul calcul pour chaque fréquence doit être mené. La figure 5.10 montre le tracé de cette évolution fréquentielle, et doit être comparée à la figure 5.8. Les deux tracés sont très proches, et les quelques différences observées sont dues aux termes de rang plus élevé.

Ainsi, l'analyse au premier ordre est une façon très rapide d'obtenir des résultats pertinents à propos de l'évolution de l'indicateur. Cependant, si l'analyse est relativement simple dans ce cas où les seuls paramètres variables sont les angles de couplage, elle pourrait s'avérer plus délicate dans le cas où de nombreux paramètres varient, bien qu'une analyse numérique permette de traiter le problème. Quoi qu'il en soit, si l'on ne désire obtenir que des informations qualitatives à propos des zones à l'origine de fortes sensibilités, une analyse du premier ordre sera toujours moins coûteuse qu'une approche de Monte Carlo.

5.7 Conclusion

A partir d'une étude analytique portant sur un réseau de plaques couplées comportant différents types de couplages, l'application de la méthode proposée au chapitre 4 a montré sa capacité à détecter les jonctions qui étaient responsables des comportements hypersensibles observés. Pour l'étude

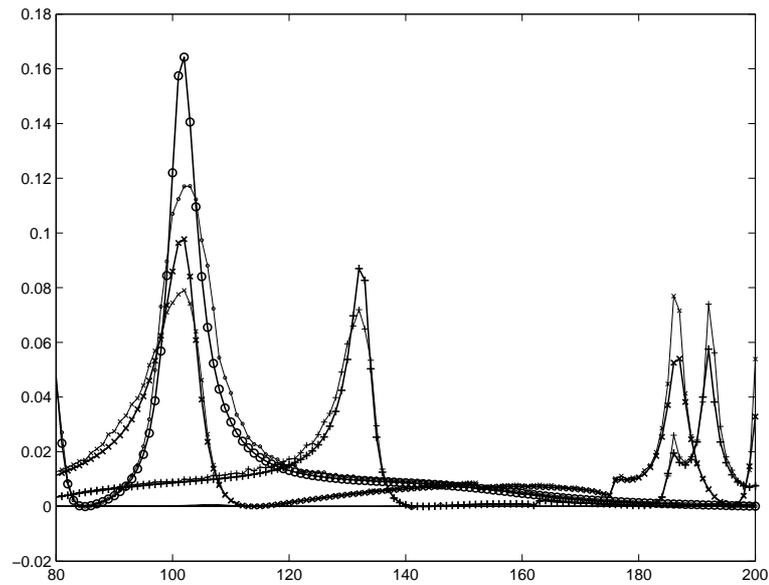


FIG. 5.10 – Évolution de la valeur de l'indicateur obtenue par une analyse au premier ordre, en fonction de la fréquence (Hz); -x- angle 4; -+- angle 5; -o- angle 7; — autres angles. Sur cette figure sont également indiquées en traits fins les courbes de la figure 5.8 issues de la simulation de Monte Carlo.

d'un ensemble de structures, une seule résolution complète du problème est nécessaire, elle concerne la structure nominale, les structures modifiées étant utilisées pour construire un indicateur qui permet la localisation. Pour le traitement de l'ensemble des structures modifiées, une première approche utilisant une simulation de Monte Carlo partielle (40 calculs pour 8 paramètres variables) a été menée, et donne des résultats probants. Rappelons que les calculs menés ne sont que des calculs d'une expression, et non des résolutions du problème. Une seconde approche, plus rapide, n'utilisant que trois calculs, a été présentée, elle permet une détection très rapide des zones recherchées. Enfin, une estimation du résidu en utilisant une décomposition au premier ordre a été détaillée, et donne de très bons résultats sur le cas considéré.

Chapitre 6

Application à la méthode des éléments finis

Dans ce chapitre nous proposons d'intégrer la méthode décrite au chapitre 4 à la méthode des éléments finis. Le travail présenté ici est limité à l'étude des modes propres d'une structure, et à la détection des zones qui sont à l'origine de larges différences sur ces caractéristiques propres induites par de faibles modifications structurales.

6.1 Choix de l'indicateur

Le coeur du problème pour l'application de la méthode de localisation est le choix de l'indicateur à utiliser. Celui qui a été retenu ici est utilisé dans le domaine du recalage calculs-essais [Gys 90], [BB 01]. L'implémentation d'un point de vue pratique sera faite dans le logiciel SDT [Bal 01], qui est un toolbox éléments finis tournant sous le logiciel Matlab. Ce choix a été retenu en raison de l'aspect développement autorisé sous SDT, qui est un code totalement ouvert, dans lequel il est possible de programmer ou de modifier des algorithmes en langage Matlab. Notons que les bibliothèques d'éléments disponibles ne sont ni aussi nombreuses, ni aussi performantes que d'autres logiciels éléments finis "industriels", qui sont en revanche généralement plutôt fermés d'un point de vue programmation.

6.1.1 Expression du résidu utilisé

On considère deux structures, nommées Ω_0 et Ω_1 . Ω_0 est considérée comme étant la structure de référence (celle qui servira pour la résolution complète du système lors de l'application de la méthode), Ω_1 étant alors une structure légèrement différente de Ω_0 . On suppose que les assemblages des matrices de masse (M_0 et M_1) et de raideur (K_0 et K_1) ont été réalisés, et que les modèles éléments finis des deux structures sont compatibles, c'est-à-dire que les degrés de liberté des deux modèles sont identiques, rangés de la même façon dans les matrices considérées, et correspondent à des éléments de même nature. Ceci permet de s'affranchir des difficultés "techniques" introduites par des renumérotations de noeuds lors de l'analyse du modèle par éléments finis, ces difficultés pouvant être simplement maîtrisées en utilisant des algorithmes de renumérotation inverses aux précédents. De plus, on supposera que les matrices caractéristiques du modèle sont symétriques, définies et positives. Ces hypothèses sont raisonnables, elles correspondent à la plupart des problèmes rencontrés, et

permettent d'expliquer simplement l'intégration de la méthode aux éléments finis, mais ne sont pas indispensables. On verra plus loin comment s'affranchir d'une partie d'entre elles.

La première étape à effectuer est la résolution du problème nominal, qui fournit n modes propres U_0^i et autant de pulsations propres ω_0^i , $i = 1$ à n . Notons que ces modes propres doivent être normalisés en masse ($U_0^{iT} M_0 U_0^i = 1$) pour que les démonstrations suivantes soient correctes. Dans le cas contraire, il convient de faire intervenir un terme relatif en masse modale. Le résidu permettant la localisation des zones dans lesquelles les caractéristiques propres du mode i de la structure de référence ne vérifient pas correctement les équations correspondant à la structure modifiée est le suivant :

$$R^i = K_1^{-1} (K_1 - \omega_0^{i2} M_1) U_0^i \quad (6.1)$$

Ce résidu est construit à partir d'un effort résiduel $(K_1 - \omega_0^{i2} M_1) U_0^i$, dont l'effet est mesuré par le déplacement statique associé à cet effort, par l'intermédiaire de la matrice de flexibilité K_1^{-1} . Ce résidu est donc homogène à un déplacement, il est défini en chacun des points du maillage, et sa valeur est nulle en tout point si les deux structures sont identiques. Par contre, il peut être positif ou négatif, ce qui empêche toute considération de minimisation. L'analyse en terme d'énergie cinétique permet de s'affranchir de ce point, tout en ayant une signification physique :

$$I^i = R^{iT} M_1 R^i \quad (6.2)$$

On obtient ainsi un indicateur donnant une valeur globale sur la structure, celui-ci étant toujours positif, et nul si et seulement si $(K_1 - \omega_0^{i2} M_1) U_0^i = 0$. Cet indicateur vérifie donc les propriétés qui sont indispensables à l'application de notre méthode. Cependant, puisqu'il ne fournit qu'une valeur globale, il ne permet pas la localisation des zones dans lesquelles les erreurs sont les plus grandes. Ceci est fait en utilisant la contribution I_e^i de chaque élément à l'énergie totale I^i :

$$I^i = \sum_e I_e^i \quad (6.3)$$

$$I_e^i = R^{iT} M_1^e R^i \quad (6.4)$$

Où M_1^e est la matrice élémentaire de masse associée à l'élément e . I_e^i est ainsi défini pour chaque mode sur chaque élément de la structure, il est nul si les équations du modèle éléments finis sont vérifiées en tout point du maillage, et sa valeur est d'autant plus grande (et positive) que les caractéristiques propres de la structure 0 ne correspondent pas localement aux équations de la structure 1.

Cet indicateur sera utilisé pour la localisation concernant le mode i , et lorsque nous serons intéressés par une plage de fréquence contenant n modes, l'indicateur suivant sera calculé :

$$I_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_e^i \quad (6.5)$$

6.1.2 Relations entre l'indicateur choisi et la sensibilité des caractéristiques propres

Cette partie, dont le but est de relier l'indicateur choisi aux calculs de sensibilités est valable pour tout indicateur s'écrivant sous la forme 6.1 ou 6.2, et ne s'applique donc pas seulement aux éléments finis.

Expression de la variation des pulsations propres

On note $\lambda_0^i = \omega_0^{i2}$ et $\lambda_1^i = \omega_1^{i2}$. On suppose que les opérateurs des structures considérées peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} K_1 = K_0 + \Delta K \\ M_1 = M_0 + \Delta M \end{cases} \quad (6.6)$$

Les caractéristiques propres des structures s'écrivant :

$$\begin{cases} U_1^i = U_0^i + \Delta U^i \\ \lambda_1^i = \lambda_0^i + \Delta \lambda^i \end{cases} \quad (6.7)$$

L'équation modale i de la structure 1 s'écrit :

$$K_1 U_1^i = \lambda_1^i M_1 U_1^i \quad (6.8)$$

Soit, en utilisant 6.6 et 6.7 :

$$(K_0 + \Delta K) (U_0^i + \Delta U^i) = (\lambda_0^i + \Delta \lambda^i) (M_0 + \Delta M) (U_0^i + \Delta U^i) \quad (6.9)$$

Ainsi, en pré-multipliant par U_0^{iT} , en tenant compte de l'équation modale de la structure 0, et en considérant les termes du premier ordre seulement :

$$U_0^{iT} K_0 \Delta U^i + U_0^{iT} \Delta K U_0^i = \Delta \lambda^i U_0^{iT} M_0 U_0^i + \lambda_0^i U_0^{iT} \Delta M U_0^i + \lambda_0^i U_0^{iT} M \Delta U^i \quad (6.10)$$

Ceci peut être simplifié en remarquant que l'équation modale de la structure de référence peut s'écrire $U_0^{iT} K_0 \Delta U^i = \lambda_0^i U_0^{iT} M_0 \Delta U^i$, et en supposant que la normalisation des modes propres s'est faite en choisissant une masse modale unitaire $U_0^{iT} M_0 U_0^i = 1$. L'équation en résultant est la suivante :

$$\Delta\lambda^i = U_0^{iT} (\Delta K - \lambda_0^i \Delta M) U_0^i \quad (6.11)$$

Ce qui peut s'écrire, en prenant en compte les équations 6.6 :

$$\Delta\lambda^i = U_0^{iT} (K_1 - \lambda_0^i M_1) U_0^i \quad (6.12)$$

Finalement, l'équation précédente traduit le fait que la quantité $(K_1 - \lambda_0^i M_1) U_0^i$, qui est l'effort résiduel à partir duquel le résidu 6.1 a été construit, et plus précisément le travail de cet effort résiduel dans le mouvement de référence, peuvent être reliés à la différence entre les fréquences propres des deux structures. Cette analyse a été menée au premier ordre, et il est certain qu'elle n'est pas vérifiée exactement. Néanmoins, elle permet de relier le résidu proposé à la sensibilité lorsque les différences entre les structures restent petites, et ce en utilisant uniquement la solution du problème nominal associé à un calcul en post-processing.

Notons qu'il pourrait venir à l'idée d'utiliser l'équation 6.12 pour la définition du résidu servant à localiser, en espérant trouver la contribution de chaque élément à l'écart $\Delta\lambda^i$, en utilisant les matrices élémentaires pour définir un indicateur du type $U_0^{iT} (K_1^e - \lambda_0^i M_1^e) U_0^i$. Ceci n'est pas possible, car cet indicateur est bien nul globalement lorsque les champs 1 et 0 coïncident, mais pas localement : des compensations interviennent entre divers éléments sur lesquels cet indicateur est soit positif, soit négatif, pour globalement donner une valeur nulle. Ainsi, cet indicateur peut avoir localement de fortes valeurs alors que le champ 1 vérifie parfaitement les équations issues de la structure 0. Cette difficulté n'est pas rencontrée par l'indicateur proposé dans le paragraphe 6.1.1, puisque nous avons veillé à ce qu'il soit localement positif, et localement nul si les équations sont vérifiées. Cependant, l'indicateur 6.12 peut très bien être utilisé pour obtenir une estimation très rapide des variations de fréquences propres dues à de petites modifications structurales.

Estimation de la valeur du résidu en fonction des variations des caractéristique propres

Dans le calcul mené ci-dessus, nous avons montré qu'il y avait une relation proche entre le résidu choisi et les variations des fréquences propres. Cependant, la relation proposée n'est pas explicite. Il est possible de trouver l'expression complète de l'indicateur 6.2 en fonction des variations des modes et fréquences propres entre les deux structures, pour peu que l'on accepte la possibilité de développer le mode propre i de la structure 0 sur la base propre de la structure 1 :

$$U_0^i = \sum_j \alpha_j^i U_1^j \quad (6.13)$$

Ce développement est le point délicat de cette partie. En effet, si les deux structures ne sont pas identiques, il n'est pas forcément possible d'opérer un tel développement. En particulier, si les conditions limites diffèrent entre les deux problèmes, la décomposition proposée peut être impossible. Néanmoins, si les différences entre les deux structures sont petites, on peut s'attendre à ce que ce développement soit possible.

On note toujours $\lambda_1^i = \lambda_0^i + \Delta\lambda^i$. Le résidu 6.1 peut donc s'écrire :

$$R^i = U_0^i - \lambda_0^i K_1^{-1} M_1 U_0^i = U_0^i - \sum_j \alpha_j^i \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j} U_1^j \quad (6.14)$$

Soit :

$$R^i = \sum_j \alpha_j^i \left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right) U_1^j \quad (6.15)$$

Ceci permet de développer l'expression de l'indicateur 6.2 :

$$I^i = R^{iT} M_1 R^i = \left(\sum_j \alpha_j^i \left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right) U_1^j \right)^T M_1 \left(\sum_k \alpha_k^i \left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^k}\right) U_1^k \right) \quad (6.16)$$

Ce qui peut se simplifier en remarquant que $U_1^{jT} M_1 U_1^k = \delta_{jk}$, où δ_{jk} est le symbole de Kronecker :

$$I^i = \sum_j \left(\alpha_j^i \left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right) \right)^2 \quad (6.17)$$

Finalement on obtient l'expression de l'indicateur 6.2 en fonction des variations des caractéristique propres :

$$I^i = (\alpha_i^i)^2 \left(\frac{\Delta\lambda^i}{\lambda_1^i} \right)^2 + \sum_{j \neq i} (\alpha_j^i)^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right)^2 \quad (6.18)$$

Le premier terme de cette équation comprend deux facteurs : le premier, $(\alpha_i^i)^2$ est un terme qui est proche de 1 si les deux vecteurs propres U_0^i et U_1^i sont comparables, ce qui revient à dire que le terme ΔU^i est petit dans l'équation 6.7. Le second facteur est $\left(\frac{\Delta\lambda^i}{\lambda_1^i}\right)^2$, il est associé à l'écart relatif entre les carrés des pulsations propres des modes considérés (modes i) des deux structures.

Le second terme de l'équation 6.18 fait intervenir l'ensemble des autres modes que le mode i : le terme $(\alpha_j^i)^2$ mesure l'écart entre les déformées U_0^i et U_1^j relativement à U_1^j (c'est la projection de U_0^i sur U_1^j : cette valeur doit être faible si ΔU^i est petit), alors que le facteur $\left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right)^2$ est un poids dont la valeur dépend du rapport $\frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}$: pour un mode i donné, la valeur propre λ_0^i est fixée, et le facteur a une grande valeur si la décomposition fait intervenir des modes U_1^j dont la valeur propre λ_1^j est très inférieure à λ_0^i . Le facteur s'approche de la valeur 1 lorsque λ_1^j est supérieure à λ_0^i , comme le montre la figure 6.1.

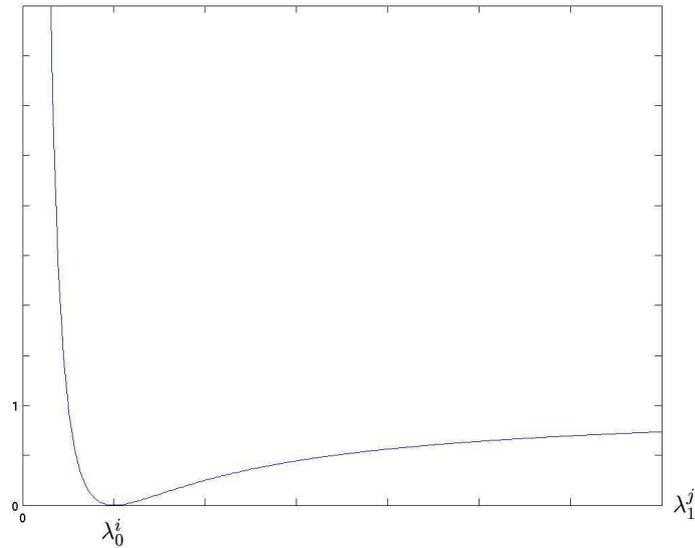


FIG. 6.1 – Évolution du facteur $\left(1 - \frac{\lambda_0^i}{\lambda_1^j}\right)^2$ en fonction de λ_1^j

6.1.3 Autres choix d'indicateurs possibles

L'expression choisie pour l'indicateur qui va être utilisé dans les calculs a été reconnue comme permettant une bonne localisation de l'erreur dans le domaine du recalage calculs-essais. D'autres expressions auraient cependant pu être choisies, parmi lesquelles on peut citer :

- Lallement et Piranda [LP 90], qui proposent d'utiliser le résidu suivant :

$$q_i = \sum_{h=1}^N p_h L_{ih}^2 \quad (6.19)$$

où N est le nombre de modes considérés, q_i est la valeur de l'indicateur pour l'élément i , p_h est un poids qui est déterminé en fonction de la confiance que l'on attribue à la mesure du mode h , et L est la matrice suivante :

$$L = K_1 U_m - M_1 U_m \Lambda_m \quad (6.20)$$

K_1 et M_1 ont été définies précédemment, U_m est une matrice $n \times N$ (le modèle contenant n éléments), contenant les déformées des N modes propres mesurées, Λ_m est une matrice diagonale contenant les valeurs propres mesurées.

Ce résidu pourrait être utilisé ici, en choisissant $p_h = 1$ par exemple, mais son étude, et la comparaison avec les résultats précédents n'a pas été réalisée. Notons simplement que le résidu choisi ici est construit sur des considérations plus physiques que la construction de q_i .

- Link et Santiago [LS 91] proposent l'utilisation de résidus appelés "substructure energy functions", basés sur une approche physique :

$$\Delta\Pi_j^S = \sum_{h=1}^N (U_h^a - U_h^m)^T K_j (U_h^a - U_h^m) \quad (6.21)$$

$$\Delta\Pi_j^K = \sum_{h=1}^N (U_h^a - U_h^m)^T M_j (U_h^a - U_h^m) \quad (6.22)$$

Ces indicateurs sont construits en considérant la contribution à l'énergie cinétique ou de déformation (par l'intermédiaire des matrices élémentaires K_j et M_j) des écarts entre les déplacements modaux mesurés U_h^m et calculés U_h^a . Cependant, ces expressions ne sont pas forcément avantageuses à utiliser dans notre cas, puisque cette approche demande la connaissance des déformées propres du modèle modifié, ce qui n'est pas le cas avec l'indicateur considéré ici.

- Pour plus d'informations sur les choix possibles, le lecteur est renvoyé aux références [MF 93] et [FM 95].

6.1.4 Conclusion sur le choix de l'indicateur

Le choix de l'indicateur 6.4 a été guidé par des travaux effectués en recalage calculs/essais, l'expression retenue possède un sens physique fort, puisqu'elle est construite à partir de l'énergie cinétique d'un déplacement résiduel. Nous avons montré que cet indicateur, moyennant quelques hypothèses raisonnables, pouvait être relié aux variations des caractéristiques propres de la structure, ce qui permet de justifier son utilisation dans le cadre de la recherche des zones qui sont à l'origine de comportements hypersensibles.

6.2 Note à propos de l'utilisation d'algorithmes éléments finis

Dans la suite, nous utilisons à de maintes reprises des algorithmes de résolution de problèmes aux valeurs propres, à l'aide du logiciel SDT. Dans tous les cas, ces résolutions sont basées sur l'algorithme d'extraction de Lanczos. Les problèmes de taille importante (traités dans la partie IV) utilisent un stockage SKYLINE afin d'optimiser la taille mémoire utilisée. Le lecteur est renvoyé à la référence [Bal 01] pour plus de précisions. En ce qui concerne la convergence de l'algorithme, et par là-même la précision des résultats obtenus, le critère utilisé est très proche de l'indicateur développé ci-dessus : on vérifie à l'issue d'une itération de l'algorithme que la valeur du résidu 6.2 estimé en utilisant les matrices du modèle nominal est inférieure à un seuil s donné :

$$\|K^{-1} (K - \omega_j^2 M) U_j\|_M < s \|U_j\|_M \quad (6.23)$$

Dans cette équation la notation $\|U\|_M$ indique la norme en énergie cinétique $U^T M U$. Nous avons imposé une masse modale unitaire, ce qui revient à utiliser le critère suivant :

$$\|K^{-1} (K - \omega_j^2 M) U_j\|_M < s \quad (6.24)$$

Dans les applications qui suivent, la valeur du seuil s a été choisie à 10^{-5} , cette valeur étant tout à fait suffisante pour la précision attendue. Notons que pour les plus faibles différences observées lors de l'analyse qui sera présentée dans la partie IV, nous nous sommes assurés que l'écart présenté dans les résultats était bien l'écart entre les deux modèles, et non un écart résiduel dû à une non-convergence de l'algorithme d'extraction.

Enfin, ce choix de critère de convergence présente un intérêt certain, puisqu'il fournit une limite à l'utilisation de l'indicateur : à partir du moment où l'ordre de grandeur du résidu 6.2 devient comparable à celui de s , les localisations effectuées n'ont plus de sens, puisqu'elles mélangent les effets des modifications structurales à ceux des erreurs de calculs.

6.3 Application à la modélisation éléments finis d'un réseau de plaques

6.3.1 Présentation de la structure

La première application de la mise en oeuvre de la méthode dans le cadre des éléments finis va se faire sur la structure qui a été étudiée analytiquement au paragraphe 5.1.2 (page 92). Un modèle élément fini de ce réseau de plaques est donc construit, et les 15 premières fréquences propres de la structure sont calculées. Un de ces modes est représenté sur la figure 6.2.

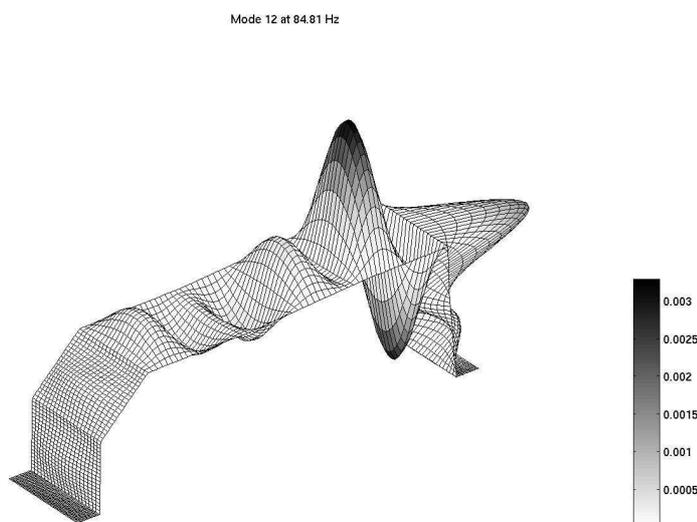


FIG. 6.2 – Mode 12 du réseau de plaques. Déplacement et contribution élémentaire de l'énergie cinétique du mode.

On considère, comme dans la partie 5.1.2, que les seuls paramètres variables sont les angles de couplage, et que ceux-ci sont répartis aléatoirement, suivant une loi gaussienne centrée sur la valeur nominale de l'angle, et dont l'écart type vaut un sixième de degré, ce qui correspond pratiquement à un intervalle de tolérance d'un degré. A partir d'une simulation partielle de Monte Carlo, il est possible de tracer un indice de sensibilité de chacune des fréquences propres vis-à-vis des angles de couplage. L'indice tracé figure 6.3 est l'écart type de la fréquence propre considérée divisé par la moyenne de cette même fréquence. On retrouve bien sur cette figure le fait que les angles de couplage notés 4, 5 et 7 sur la figure 5.2 sont responsables des sensibilités observées, et que l'influence de la variation des autres angles est négligeable. Notons que les calculs menés pour le tracé de la figure 6.3 prennent

en compte les éventuelles inversions des valeurs de fréquences propres des modes : en faisant varier les paramètres angulaires, il est possible que les décalages de fréquence induits échangent l'ordre de deux modes. Les logiciels éléments finis fournissant les fréquences propres dans l'ordre croissant, il convient d'être vigilant à ce sujet, et de caractériser un mode par l'allure de sa déformée, et non par l'ordre de sa fréquence propre.

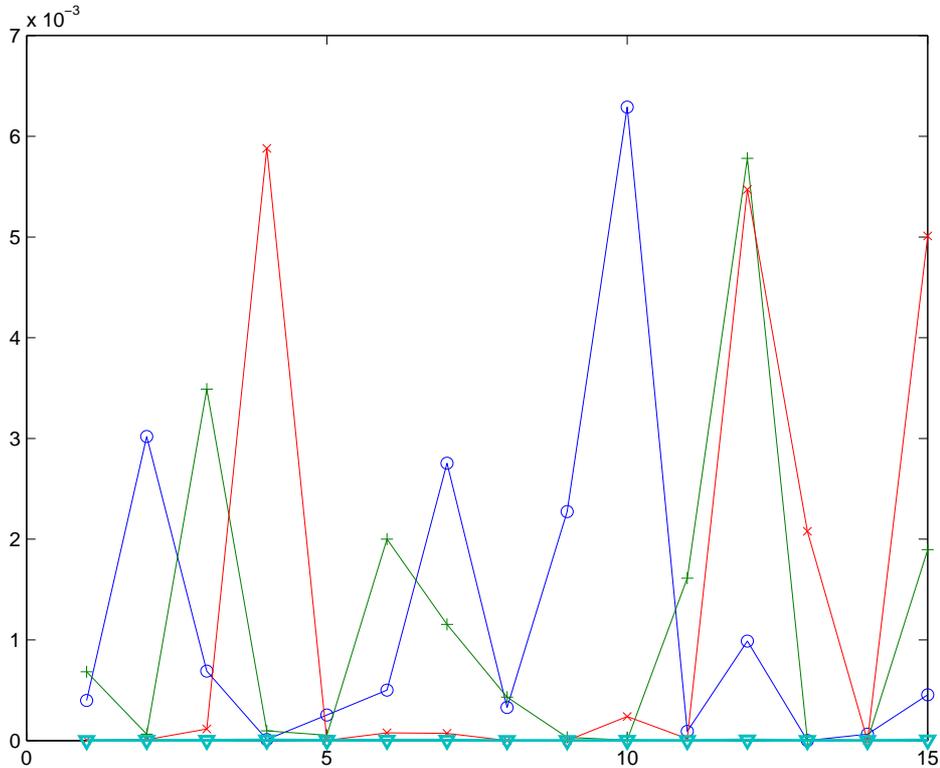


FIG. 6.3 – Sensibilité des fréquences propres vis-à-vis des angles de couplage, en fonction de l'ordre du mode considéré. 50 calculs. -o- : Angle 4 ; +- : Angle 5 ; -x- : Angle 7 ; -v- : Autres angles.

Sur la figure 6.3 concernant le réseau de plaques, il est possible de relier les sensibilités à l'allure des déformées. En effet, les observations faites dans la bande de fréquence considérée montrent que dans la plupart des cas, même si ce n'est pas une règle stricte, les angles de jonction pour lesquels les déformées de part et d'autre de la ligne de couplage sont en phase sont plus sensibles. On peut observer ceci sur la figure 6.4, sur laquelle sont tracées les déformées des modes 1 et 2. Pour l'ensemble de ces deux modes, la sensibilité la plus forte est due à l'angle 4, pour le mode 2, qui est le seul angle pour lequel les déformées de part et d'autre de la ligne de couplage sont en phase. Cependant, notons que les sensibilités existent aussi pour le mode 1, alors que toutes les déformées de part et d'autres des jonctions sont en opposition de phase. Cette sensibilité s'explique par le changement de forme du mode considéré : si l'on considère une structure constituée uniquement par deux plaques couplées par un angle nul, le premier mode est un mode de flexion à un seul ventre, puisque la structure est assimilable à une unique plaque. Lorsqu'on augmente l'angle de couplage, cela revient à augmenter la rigidité de la structure le long de la ligne de couplage, et le mode fait apparaître deux ventres vibrant en phase entre eux et avec le mouvement de la ligne de couplage (qui est cependant d'amplitude plus faible). Plus l'angle de couplage augmente, plus la fréquence propre du mode augmente, et plus l'amplitude de la déformée de la ligne de couplage diminue. En ce qui concerne le mode 2 de la structure

simplifiée (deux plaques couplées par un angle nul), il présente deux ventres, vibrant en opposition de phase autour d'une ligne nodale séparant la plaque en deux parties identiques. L'augmentation de l'angle de couplage va forcer la ligne nodale à coïncider avec la ligne de couplage, ce qui va apparaître comme une augmentation de rigidité beaucoup plus faible que celle induite par la diminution d'amplitude du ventre du mode 1. C'est ce phénomène que l'on retrouve sur la figure 6.4, mis à part que la modification de la fréquence propre du mode initial à un ventre a entraîné le passage de cette fréquence au-dessus de celle du mode à deux ventres.

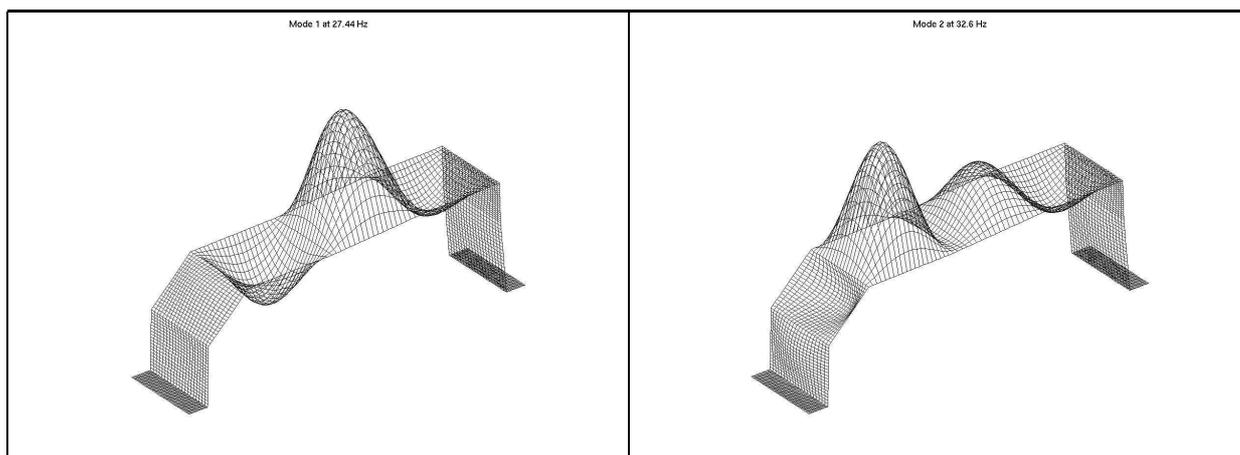


FIG. 6.4 – Modes 1 et 2 du réseau de plaques

6.3.2 Application de la méthode de détection

Afin d'appliquer la méthode proposée au modèle éléments finis du réseau de plaques, il faut considérer des structures géométriquement différentes de la structure de référence. Pour cela, il y a deux façons de procéder. La première approche correspond à une simulation partielle de Monte Carlo : on choisit aléatoirement une structure construite à partir des intervalles de tolérance précédemment décrits, on effectue ensuite l'assemblage des matrices de masse et de raideur, puis on utilise les caractéristiques propres de la structure de référence afin de calculer l'indicateur 6.4, et l'on fait ce calcul autant de fois que nécessaire. La seconde stratégie est de considérer une seule structure modifiée, construite à partir des paramètres choisis en bord d'intervalle de tolérance, dans le but de mesurer localement l'effet de chacune des variations. Ceci est possible si les modifications apportées à la structure sont spatialement indépendantes, ce qui est le cas ici. Nous allons donc construire une structure en choisissant des angles modifiés d'un demi-degré, et l'assemblage de la matrice de masse et de raideur permet de calculer l'indicateur 6.4. Celui-ci est donc évalué pour chaque mode. Si nous nous intéressons au mode le plus sensible, qui est le dixième, d'après la figure 6.3, le tracé de la figure 6.5 nous permet de localiser la zone qui est à l'origine des différences observées : l'angle $n^{\circ}4$ est correctement détecté, et plus particulièrement sa partie centrale, qui correspond au lieu de plus forte énergie.

On observe des résultats similaires pour les modes 2 (fig. 6.6) , 4 (fig. 6.7) ou 7 (fig. 6.8), sur lesquelles les angles responsables des plus grandes sensibilités sont bien détectés.

Par contre, si l'on observe la figure 6.9, qui correspond au tracé de l'indicateur pour le mode 5, la zone où celui-ci a sa plus grande valeur est située au milieu d'une plaque. En second lieu seulement

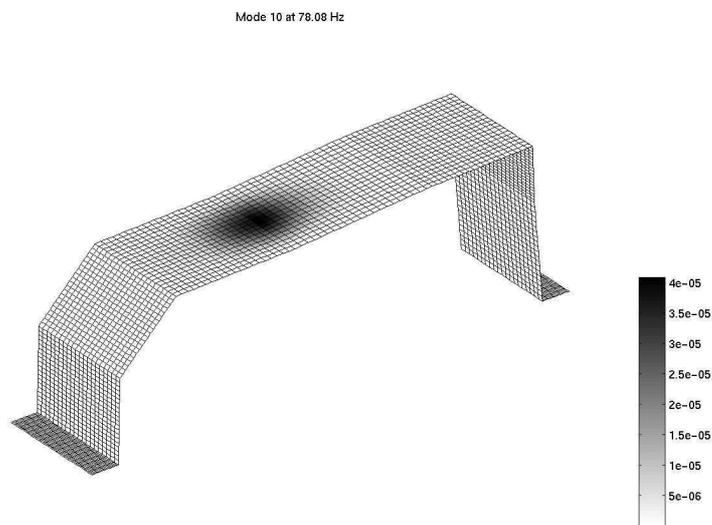


FIG. 6.5 – Valeur de l'indicateur pour le mode 10.

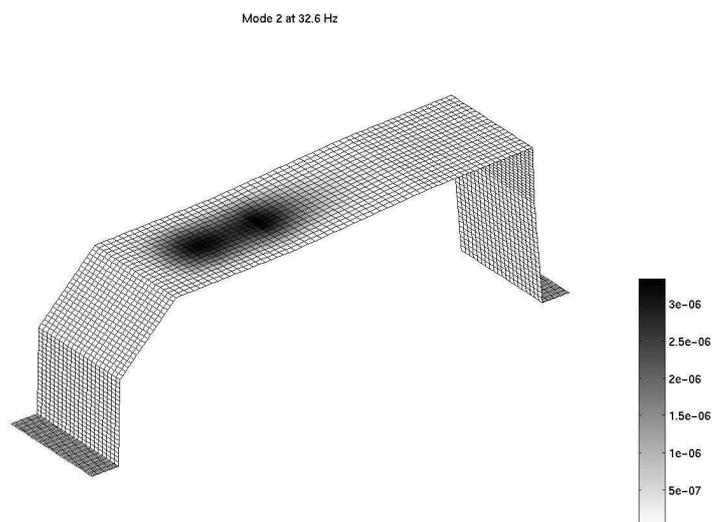


FIG. 6.6 – Valeur de l'indicateur pour le mode 2.

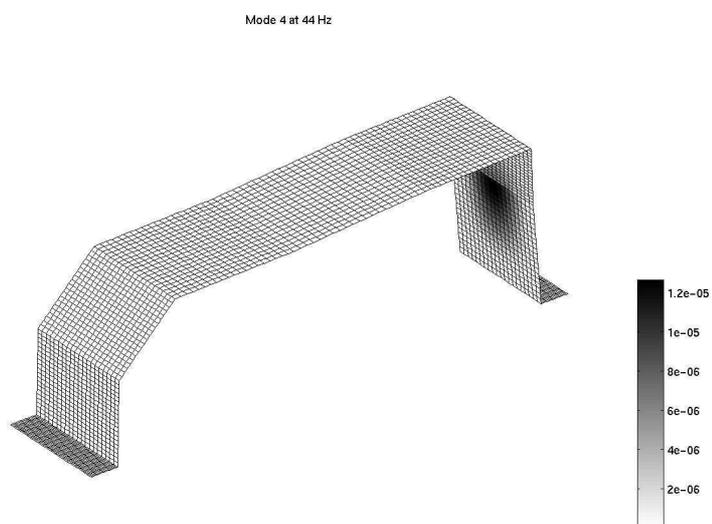


FIG. 6.7 – Valeur de l'indicateur pour le mode 4.

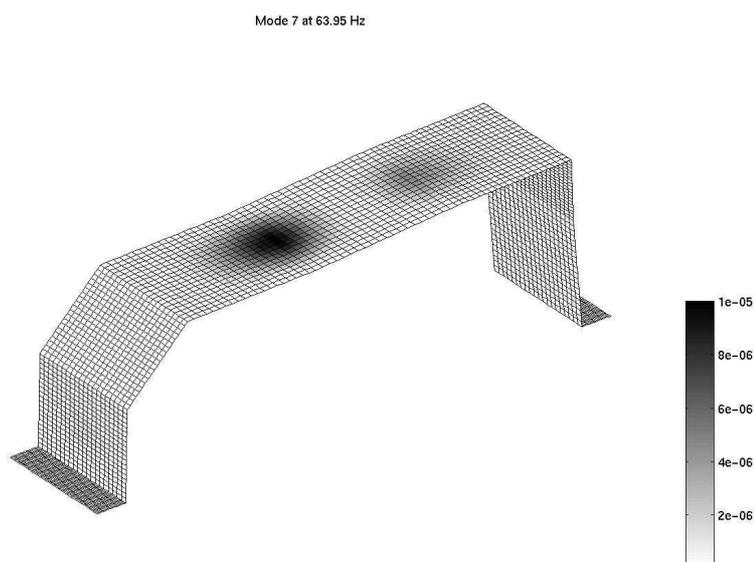


FIG. 6.8 – Valeur de l'indicateur pour le mode 7.

est détecté l'angle 4, qui est dans ce cas le plus sensible. Cependant, cette sensibilité étant faible (d'après la figure 6.3, la sensibilité de la fréquence propre du mode 10 est 20 fois plus grande que celle du mode 5), la valeur du résidu l'est aussi, et on commence à mesurer d'autres effets que ceux des variations d'angles (comme les cumuls avec les erreurs numériques), qui ne sont pas identifiés ici.

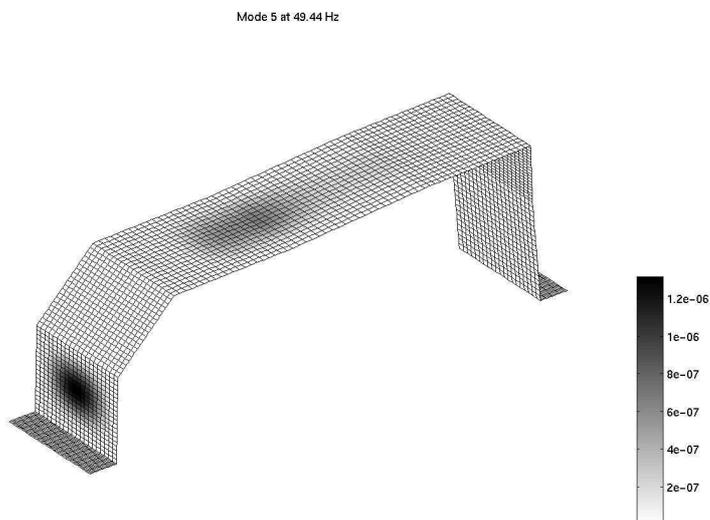


FIG. 6.9 – Valeur de l'indicateur pour le mode 5.

Ainsi, si l'on s'intéresse à la valeur moyenne de l'indicateur sur les quinze premières fréquences propres, le mode 5 va être masqué par ceux ayant une sensibilité plus forte, comme le montre la figure 6.10, sur laquelle on peut s'apercevoir que les trois angles sont bien détectés, et que les autres, bien que variables, n'apparaissent pas dans la localisation.

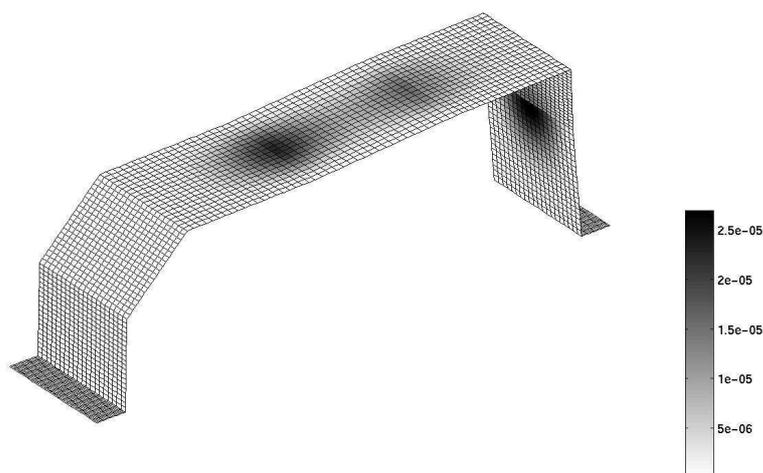


FIG. 6.10 – Moyenne de l'indicateur sur les 15 premières fréquences propres.

Pour plus de précisions, il peut être intéressant de connaître la valeur de l'indicateur au voisinage de chaque angle : dans notre cas, on peut caractériser chaque angle en considérant la somme des

valeurs de l'indicateur sur les éléments situés de part et d'autre de la ligne de couplage. On obtient ainsi la figure 6.11, sur laquelle sont tracées ces valeurs pour chaque angle, en fonction de l'ordre du mode. Ce tracé doit être relié au tracé de l'indicateur de sensibilité (figure 6.3), et plus précisément à la figure 6.12, qui est obtenue en traçant la valeur $\left(\frac{\sigma(f_i^2)}{E(f_i^2)}\right)^2$, où σ représente l'écart-type et E la moyenne des fréquences propres au carré f_i^2 , afin de se rapprocher du terme $\left(\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}\right)^2$ figurant dans l'équation 6.18. Notons que les deux tracés ne peuvent être identiques, puisqu'ils ne représentent pas la même chose : pour obtenir un tracé qui se rapproche de celui de la figure 6.12, il aurait fallu étudier la valeur de l'indicateur en faisant varier un à un chacun des angles de couplage, ce qui n'est pas optimal en terme de temps de calcul si l'on est intéressé par la détection des zones les plus sensibles. Cependant, on s'aperçoit que les tendances sont tout à fait comparables et que l'indicateur proposé permet une localisation et une hiérarchisation correcte des zones à l'origine de comportements hyper-sensibles.

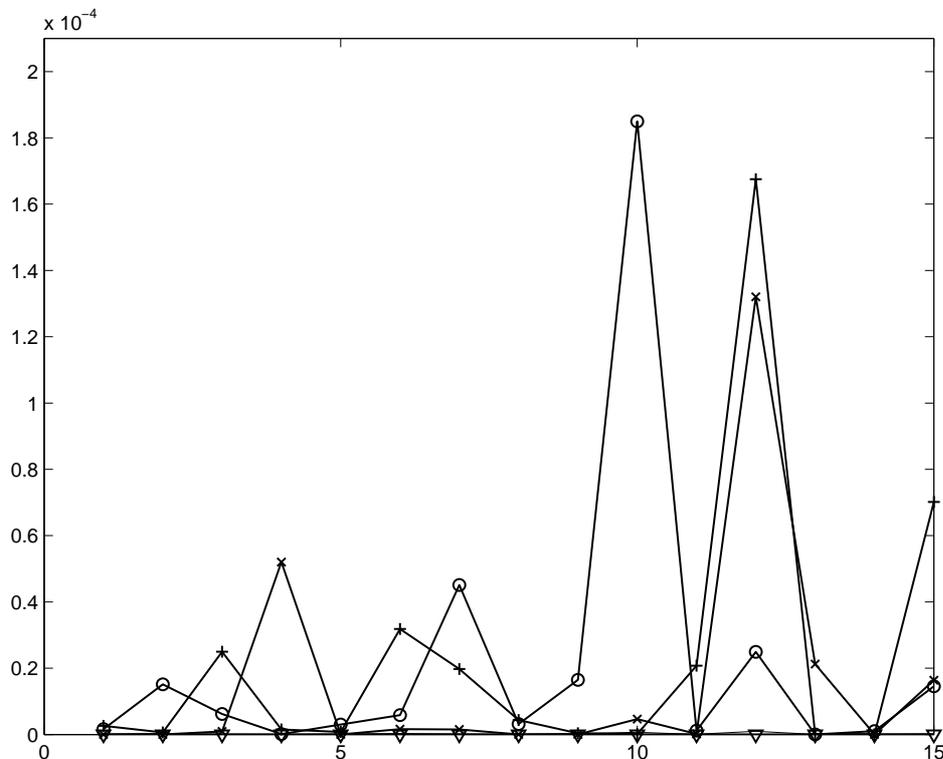


FIG. 6.11 – Valeur de l'indicateur sommé sur les éléments adjacents aux lignes de couplages, en fonction de l'ordre du mode. -o- : Angle 4 ; +- : Angle 5 ; -x- : Angle 7 ; -v- : Autres angles.

Pour terminer, notons que la façon dont nous avons appliqué la méthode, si elle est s'avère très efficace en terme de temps de calcul, interdit la détection d'effets secondaires : nous avons estimé l'influence de la variation de chacun des angles pris séparément, en oubliant les éventuels effets de couplage entre les comportements de deux angles variables. Ceci dit, il suffirait de choisir un certain nombre de structures (aléatoirement, ou en suivant un raisonnement de type plan d'expérience) pour être capable de prendre en compte ces effets de second ordre, qui sont généralement négligeables, mais qui pourraient dans des cas particuliers entraîner des variations importantes. Le coût de calcul serait alors plus important, même s'il restera toujours inférieur à celui d'une analyse complète incluant nécessairement un grand nombre de résolutions de problèmes.

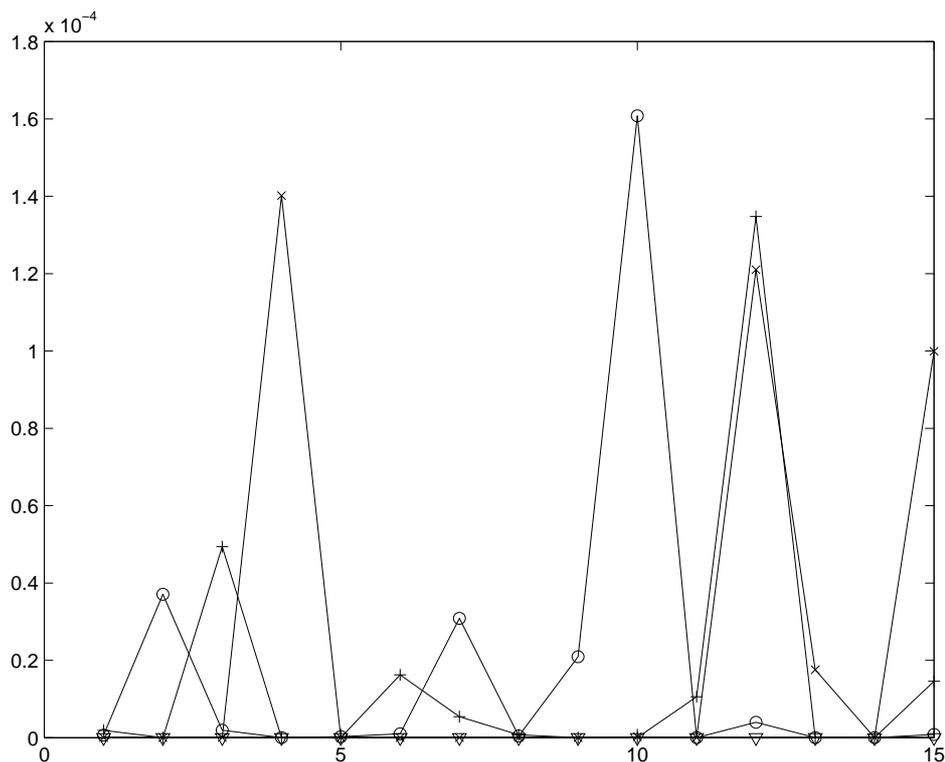


FIG. 6.12 – Carré de la sensibilité des valeurs propres vis-à-vis des angles de couplage, en fonction de l'ordre du mode considéré. 50 calculs. -o- : Angle 4 ; +- : Angle 5 ; -x- : Angle 7 ; -v- : Autres angles.

6.4 Conclusion

L'application de la méthode au cas des éléments finis a été présentée d'un point de vue théorique, avant de l'appliquer au traitement d'un réseau de plaques, qui est celui qui avait été étudié analytiquement dans le chapitre précédent. Le choix de l'indicateur à utiliser a été développé, et son expression a été reliée aux variations des caractéristiques propres de la structure, afin de justifier son utilisation. Ce choix n'est cependant pas unique, d'autres auraient pu être retenus, nous n'aborderons pas cet aspect ici. L'étude portant sur le réseau de plaques a montré qu'il était possible de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus lors de l'étude analytique, et que la localisation des zones qui sont à l'origine de comportements hypersensibles est effectuée correctement.

Conclusion sur la méthode de localisation proposée

Nous avons proposé une méthode permettant la localisation des zones d'une structure responsables de comportements hypersensibles. Celle-ci repose sur la résolution de l'unique problème de référence, puis sur le calcul d'un indicateur construit à partir de la prise en compte des modifications de la structure en accord avec les intervalles de tolérance. La formulation dans le cadre des éléments finis a permis de montrer qu'il existait un lien entre l'indicateur proposé et les variations des caractéristiques propres de la structure. Si aucune démonstration ne concerne l'aspect localisation proprement dit, les applications ont montré les bonnes performances en détection de l'indicateur. Nous allons à présent nous intéresser à l'étude de structures moins académiques, issues du milieu industriel.

Quatrième partie

Applications numériques et expérimentales sur des structures industrielles

Cette dernière partie porte sur l'application de la méthode de localisation aux cas de structures industrielles, ce qui est autorisé par l'intégration de la méthode de localisation dans un code éléments finis. Les applications traitées le sont à l'aide du toolbox éléments finis SDT, tournant sous Matlab. Dans un premier temps, nous allons présenter une étude numérique portant sur une poutre de soubassement de véhicule, avant de s'intéresser à la validation expérimentale des résultats obtenus à partir d'un tablier d'automobile.

Chapitre 7

Application numérique : étude d'une poutre de soubassement

7.1 Présentation de la structure étudiée

7.1.1 Description de la poutre de soubassement

La structure qui va être étudiée dans ce chapitre est une poutre de soubassement de véhicule Peugeot 806, que l'on peut observer sur les photos 7.1 et 7.2. La pièce est constituée de trois couches, liées entre elles par soudure. Une vue éclatée de la poutre est présentée sur la figure 7.3, sur laquelle on peut distinguer les trois couches ainsi que les divers supports qui sont également soudés. Lors de notre étude, nous considérerons la structure boulonnée au niveau des quatre trous (deux à chaque extrémité de la poutre), ce boulonnage étant modélisé par un encastrement. 82 points de soudure sont utilisés pour assembler l'ensemble des pièces constitutives, ils sont représentés sur la figure 7.4, et l'objectif de l'étude concerne la sensibilité des fréquences propres de la poutre vis-à-vis de la position et de l'existence de certains de ces points de soudure.

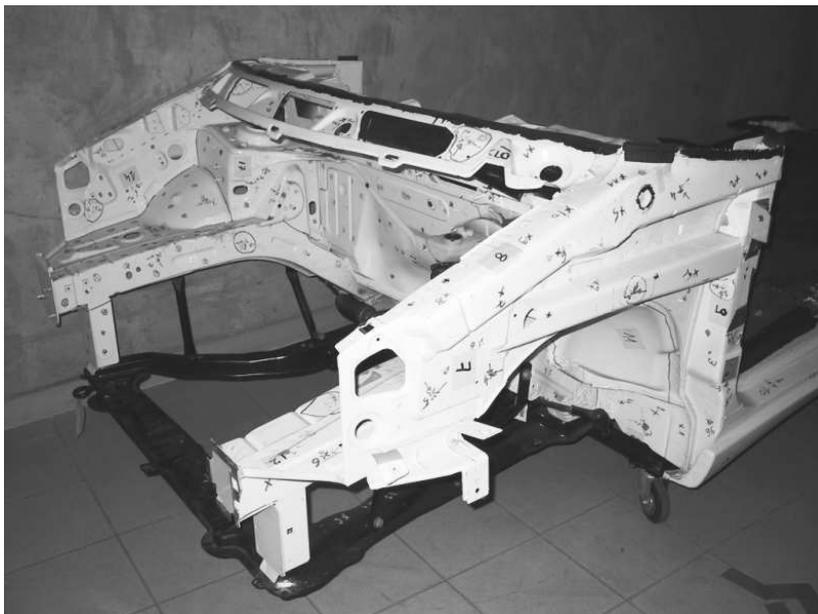


FIG. 7.1 – Photographie du soubassement du véhicule Peugeot 806.



FIG. 7.2 – Photographie du soubassement du véhicule Peugeot 806.

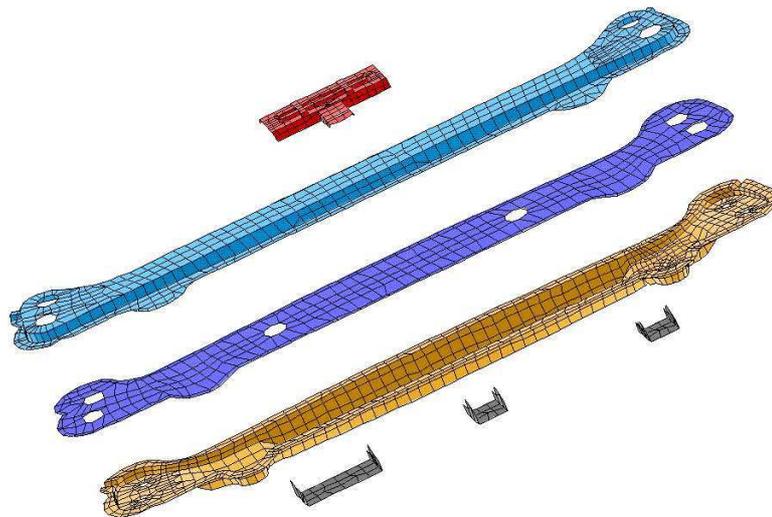


FIG. 7.3 – Vue tridimensionnelle en éclaté des pièces constitutives de la poutre

7.1.2 Modèle numérique de la poutre

Le maillage de la poutre est effectué en utilisant pour les parties constitutives de la poutre des éléments coques à trois ou quatre noeuds (éléments CQUAD4 basés sur une formulation de Mindlin). Le modèle complet contient 17197 degrés de liberté. En ce qui concerne la modélisation des points de soudure, celle-ci est relativement simple, et elle est décrite sur la figure 7.5. La première partie à souder a des noeuds numérotés 1 à 8, alors que les noeuds 11 à 18 appartiennent à la seconde partie, qui doit être liée à la première. Le noeud 101 (resp. 102) n'appartient à aucune de ces parties, et est utilisé en tant que noeud maître d'un élément rigide RBE2 dont les noeuds esclaves sont numérotés 1, 2, 7 et 8 (resp. 11, 12, 17, 18). Enfin, un élément ressort CELAS relie les noeuds 101 et 102 afin

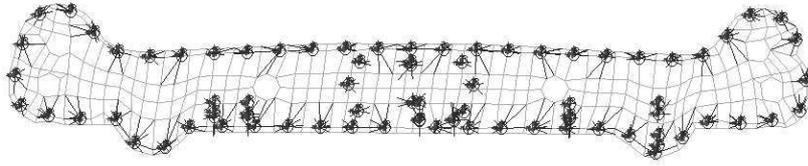


FIG. 7.4 – Vue des points de soudure de la poutre (modèle RBE2/RIGID)

de prendre en compte la rigidité du point de soudure (il y a en fait 6 éléments ressorts correspondant aux 6 degrés de liberté possibles). Notons que l'utilisation d'éléments RBE2 a tendance à rigidifier la structure, c'est pourquoi des éléments plus complexes, tels que les RBE3, sont souvent utilisés pour la modélisation des points de soudure. Ces éléments (appelés "éléments contraints"), connectent un noeud particulier à un ensemble d'autres noeuds en utilisant une technique de minimisation au sens des moindres carrés. A chaque noeud considéré est associé un poids permettant de prendre plus ou moins en compte ses caractéristiques. Cependant, ces éléments ne sont pas disponibles dans SDT, nous avons donc pris le parti d'utiliser des éléments RBE2 : ce modèle, s'il n'est pas le plus exact pour la description du comportement des points de soudure, est très simple à implémenter, et les résultats qu'il donne sont suffisants pour les propos de l'étude menée ici.

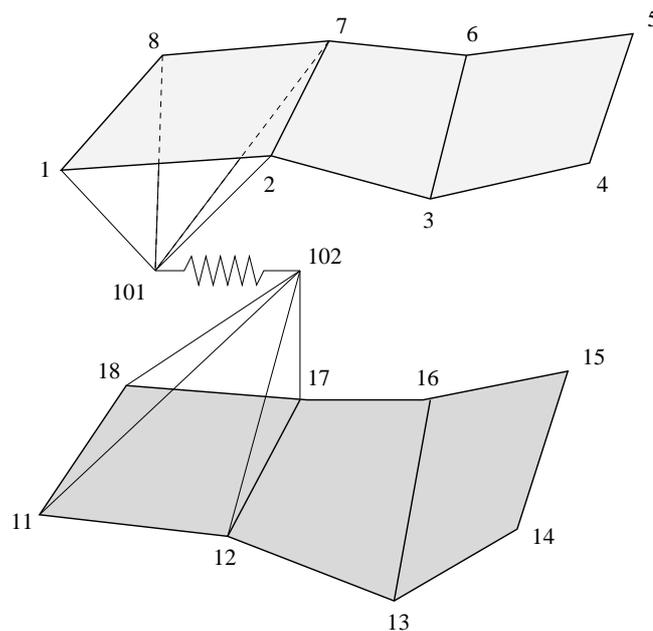


FIG. 7.5 – Maillage original du point de soudure.

7.1.3 Modes propres de la structure de référence

Les dix premières fréquences propres de la structure nominale, qui est encastree au niveau des 4 trous situés de part et d'autre de la pièce, sont évaluées avec SDT, et données dans le tableau 7.1. Cette structure sera considérée comme étant le modèle de référence.

Notons que la géométrie complexe de la structure fait que les modes sont très vite des modes locaux, comme on peut le constater sur la figure 7.6, qui représente le mode 8. L'annexe B donne les déformées propres des 10 premiers modes : le premier mode est un mode de flexion à un ventre, le

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence propre (Hz)	110	240	302	380	521	568	591	599	653	673

TAB. 7.1 – Fréquences propres du maillage de référence

second mode est un mode de torsion, le troisième un mode de flexion à un noeud. Les modes d'ordres supérieurs ne peuvent pas être décrits simplement.

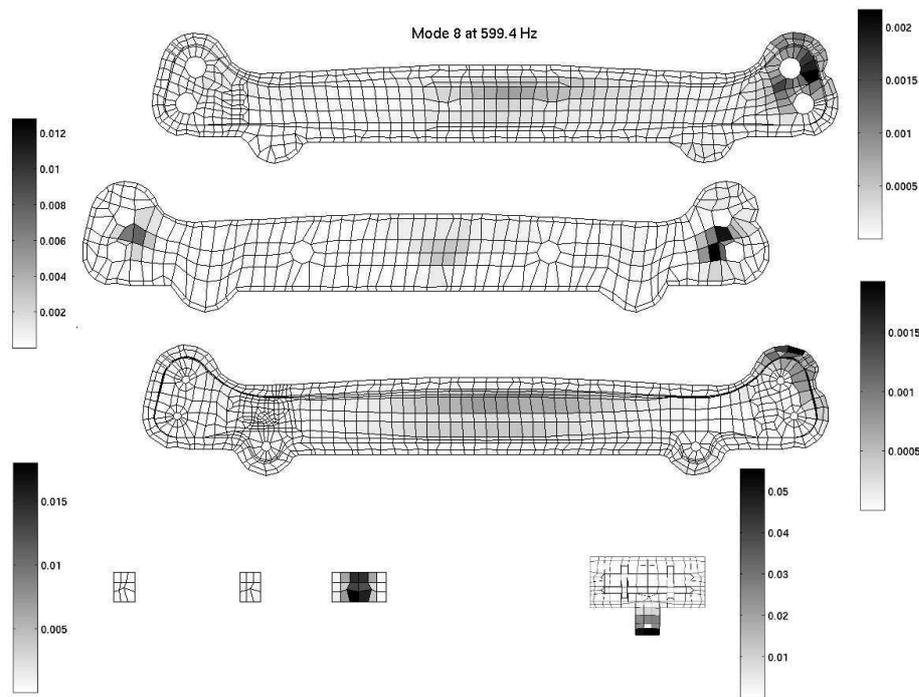


FIG. 7.6 – Mode 8, énergie cinétique des pièces constitutives

7.2 Étude de l'influence de l'existence des points de soudure

Lors du processus d'assemblage des différentes parties de la poutre, il arrive qu'un des robots soudeurs ne parvienne pas à effectuer correctement une de ses tâches, il est donc possible qu'un (ou plusieurs) point de soudure soit manquant ou défectueux. Le but de l'analyse menée dans cette partie est de montrer qu'il est possible d'utiliser la méthode décrite au chapitre 4 afin de savoir quels sont les points de soudure qui ne doivent pas être manquants en sortie de chaîne, au risque d'avoir des fréquences propres très différentes de celles du modèle de référence.

7.2.1 Comportement vibratoire

Pour cette étude, nous avons sélectionné arbitrairement une dizaine de points de soudure qui relie la couche intermédiaire de la poutre à la partie inférieure ou supérieure. Ces dix points sont présentés sur la figure 7.7. Notons que dans la suite, les résultats seront donc présentés sur la couche intermédiaire, qui est la zone où les indicateurs utilisés ont les plus grandes valeurs du fait du choix des modifications apportées à la structure.

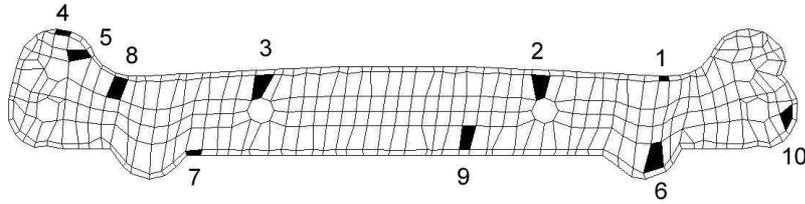


FIG. 7.7 – Présentation des éléments reliés aux points de soudure qui vont être modifiés.

On considère donc un modèle modifié, pour lequel les dix points de soudure sont supprimés. D'un point de vue numérique, ceci se fait en supprimant les éléments CELAS correspondant aux liaisons, ou en leur donnant une rigidité très faible. Un calcul sur le modèle modifié permet de vérifier que les 10 points de soudure ont bien une influence marquée sur les valeurs des fréquences propres, qui sont données dans le tableau 7.2. De très grandes différences peuvent être observées, en particulier sur les valeurs des fréquences propres 5 et 6, qui diffèrent de près de 30% avec le modèle de référence.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence propre (Hz)	109	221	235	296	369	412	480	519	549	564
Différence avec la référence (%)	1	8	22	22	29	28	19	13	16	16

TAB. 7.2 – Fréquences propres du modèle modifié (10 points de soudure supprimés)

La figure 7.8 résume ce tableau.

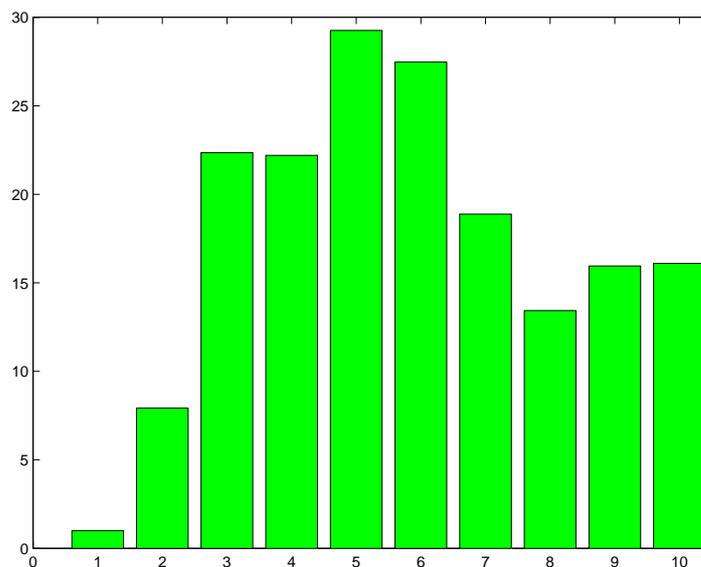


FIG. 7.8 – Erreur relative (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés.

Nous allons donc essayer de trouver à l'aide de la méthode proposée au chapitre 4 quels sont les points de soudure responsables des différences observées.

7.2.2 Application de la méthode

Grâce à l'aspect local du résidu proposé, il est possible de déterminer l'influence de chacun des points de soudure supprimés en un seul calcul de résidu, qui va être construit en considérant la structure de référence sur laquelle on aura supprimé les dix points de soudure. Ceci est possible tant que nous nous intéressons qu'à un nombre réduit de points, puisque si nous menions la même étude en considérant que chacun des 86 points de soudure peut être absent, il faudrait sélectionner aléatoirement une partie de ces points, et non l'intégralité d'entre eux, afin d'effectuer par exemple une simulation de Monte Carlo partielle ou complète. Dans notre cas ce n'est pas nécessaire, puisque le nombre de points supprimés est faible devant le nombre total de points de soudure, et qu'ils sont spatialement "indépendants", c'est-à-dire que pour un élément donné, il y a au plus un point de soudure supprimé qui se rattache à un des noeuds de l'élément.

Le calcul de l'indicateur 6.4 ne peut pas être fait directement, à cause de l'inversion de la matrice de raideur intervenant dans l'équation 6.1. En effet, nous avons modélisé les points de soudure en utilisant entre autres des éléments rigides, qui impliquent l'existence de relations linéaires entre certains degrés de liberté du système, et donc la singularité de la matrice de raideur. L'utilisation d'éléments RBE2, qui hiérarchisent les noeuds de l'élément en un noeud maître et plusieurs noeuds esclaves, permet de contourner simplement la difficulté, puisque les degrés de libertés des noeuds esclaves sont directement reliés à ceux du noeud maître. Ceci permet de définir une matrice de passage P , qui correspond à la base obtenue par projection des relations des éléments rigides. Les matrices de masse et de raideur que nous considérerons pour le calcul du résidu seront ainsi M_c et K_c :

$$M_c = P^T M P ; K_c = P^T K P \quad (7.1)$$

La matrice de raideur K_c est inversible et peut être utilisée pour le calcul du résidu. Les champs de déplacements associés sont notés U_c :

$$U_c = P^T U \quad (7.2)$$

Le retour aux coordonnées initiales se faisant par la relation inverse :

$$U = P U_c \quad (7.3)$$

Notons que cette étape permet de réduire le nombre de degrés de libertés du système : dans le cas de la structure étudiée, celui-ci vaut à présent 14824.

7.2.3 Résultats obtenus

La figure 7.9 présente le tracé de l'indicateur moyen 6.5, construit avec les matrices 7.1, et calculé à partir des dix premiers modes propres de la structure de référence. On s'aperçoit donc que les zones localisées par l'indicateur sont celles correspondant aux trois points de soudure notés 4, 5 et 8 sur la figure 7.7.

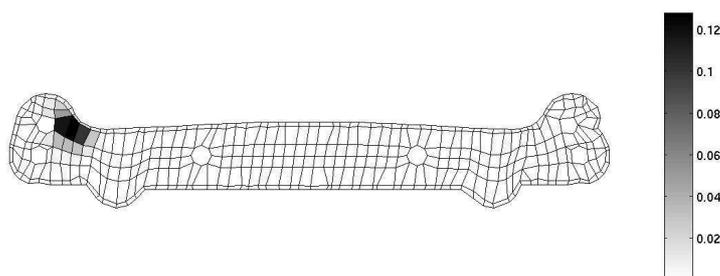


FIG. 7.9 – Indicateur de sensibilité, tracé pour la structure modifiée (10 points supprimés)

Afin de vérifier que les points détectés sont bien responsables des fortes dispersions observées, il est utile de s'intéresser à la structure de référence sur laquelle on ne va supprimer cette fois que les trois points détectés ci-dessus. Les fréquences propres de cette structure sont données dans le tableau 7.3.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	109	222	237	299	373	412	530	590	597	652
Différence avec la référence (%)	0.4	8	22	21	28	27	10	2	9	3

TAB. 7.3 – Fréquences propres du modèle de référence avec 3 points de soudure supprimés (numéros 4, 5 et 8)

Ces résultats doivent être comparés avec le tableau 7.2, ce qui est fait sur la figure 7.10. On peut ainsi remarquer que les plus grandes différences observées, concernant les modes 3 à 6, sont bien dues aux trois points de soudure détectés par l'indicateur. Les autres différences, en particulier celles des modes 7 à 10, qui étaient plus faibles, ne sont dues qu'en partie à ces trois points, les autres jouant un rôle non négligeable dans les différences de comportements signalées ci-dessus.

Afin de renforcer les résultats précédents, il est intéressant d'étudier la structure de référence privée de trois points de soudure détectés comme peu sensibles. Pour cela, la figure 7.9 n'est pas assez précise, et nous allons dans ce but plutôt utiliser le résidu 6.4, en calculant la valeur de l'indicateur sommée sur les éléments adjacents aux éléments modifiés précisés sur la figure 7.7. Nous avons ainsi une valeur résiduelle pour chaque mode et pour chaque point de soudure considéré. La figure 7.11 permet de retrouver le fait que ce sont bien les modes 5 et 6 qui sont affectés par les plus grosses valeurs de l'indicateur, pour les points de soudure 4, 5, et 8. La deuxième partie de la figure, qui est un zoom de la première partie, nous informe sur les points les moins sensibles, qui sont les numéros 2, 6 et 7, ainsi que sur les sensibilités observées pour les modes 9 et 10, qui sont principalement dues aux points 1 et 9.

On peut ainsi faire l'étude de la structure de référence privée des points numéros 2, 6 et 7 : les résultats sont donnés dans le tableau 7.4.

Les différences obtenues sont comparées avec celles correspondant à la suppression de 10 points de soudure, sur la figure 7.12 : on justifie ainsi que les trois points considérés n'ont qu'une très faible influence sur les variations observées.

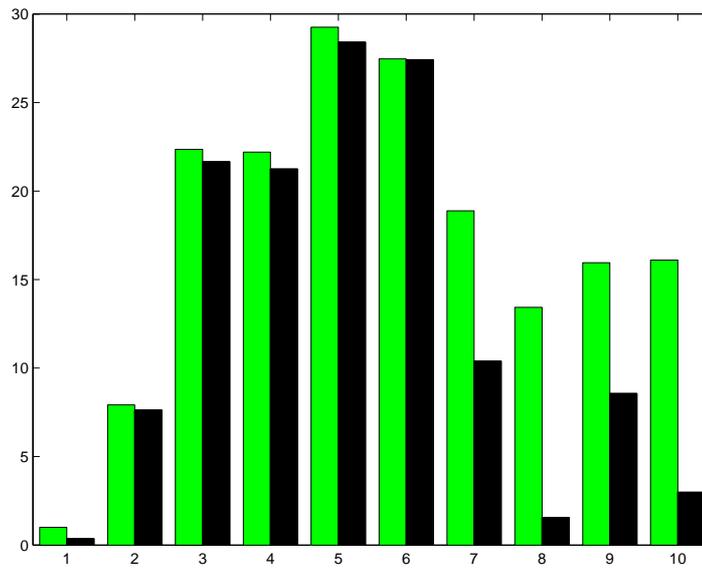


FIG. 7.10 – Erreurs relatives (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés (barres claires), et 3 points de soudure (4, 5, 8) supprimés (barres foncées).

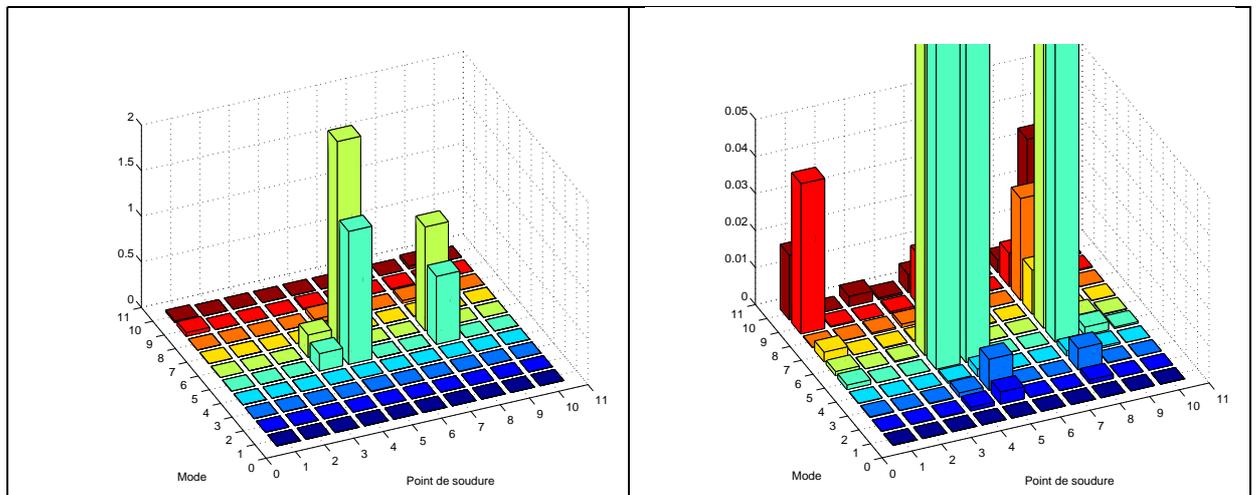


FIG. 7.11 – Indicateur de sensibilité, en fonction du point de soudure et du numéro du mode considéré.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	110	240	302	379	520	567	590	599	638	661
Différence avec la référence (%)	0.2	0.3	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.0	2.3	1.7

TAB. 7.4 – Fréquences propres du modèle de référence avec 3 points de soudure supprimés (numéros 2, 6 et 7)

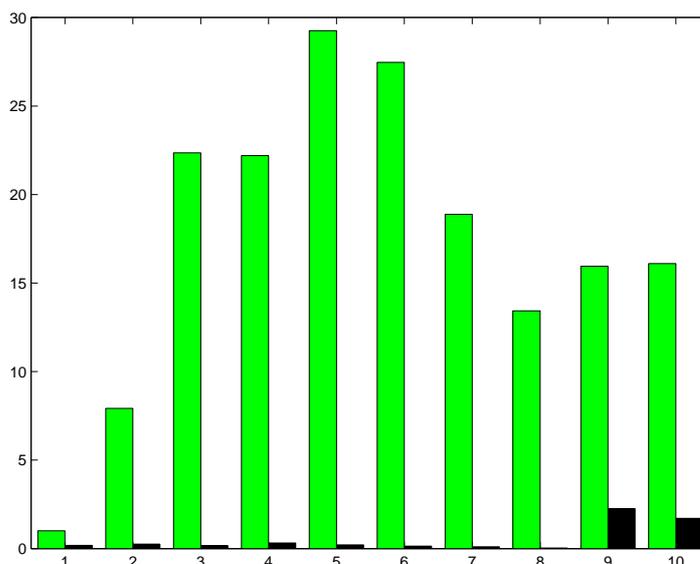


FIG. 7.12 – Erreurs relatives (%) sur les fréquences propres, en fonction de l'ordre du mode, pour 10 points de soudure supprimés (barres claires), et 3 points de soudure (2, 6, 7) supprimés (barres foncées).

7.2.4 Conclusion

Avec un unique calcul d'indicateur en plus de la résolution du problème nominal, nous avons donc détecté parmi une dizaine de points de soudure lesquels étaient les plus sensibles, et nous avons vérifié par une analyse modale que les résultats obtenus étaient corrects. Si le nombre de points de soudure testés dans notre cas est relativement faible, nous avons cependant montré la capacité de la méthode à détecter et hiérarchiser l'influence de chacun d'entre eux sur une bande de fréquence.

7.3 Influence de la position des points de soudure

Une autre étude qui peut être menée sur cette même structure est celle de l'influence de la position des points de soudure : quels sont les points pour lesquels une petite erreur de positionnement risque d'entraîner de larges différences sur les modes propres ?

7.3.1 Comportement vibratoire, description du changement de position

Nous considérons toujours comme structure de référence le maillage de la poutre de 806, dont les dix premières fréquences propres ont été données dans le tableau 7.1. En ce qui concerne le changement de position des points de soudure, nous utiliserons une simple modification des noeuds esclaves des éléments rigides. Ceci est expliqué à l'aide de la figure 7.13, qui représente le maillage initial et le maillage modifié. Ainsi, chaque point de soudure considéré pourra occuper deux positions.

Parmi les 82 points de soudure de la structure, nous choisirons de modifier le positionnement des 10 points décrits sur la figure 7.7, qui seront supposés pouvoir varier. Une analyse modale de la structure sur laquelle les 10 points considérés ont été déplacés est menée, et les résultats sont donnés dans le tableau 7.5. Ainsi, certaines fréquences propres sont quasiment insensibles aux variations effectuées, alors que d'autres y sont au contraire sensibles, comme la huitième, qui varie de 43 Hz, ce

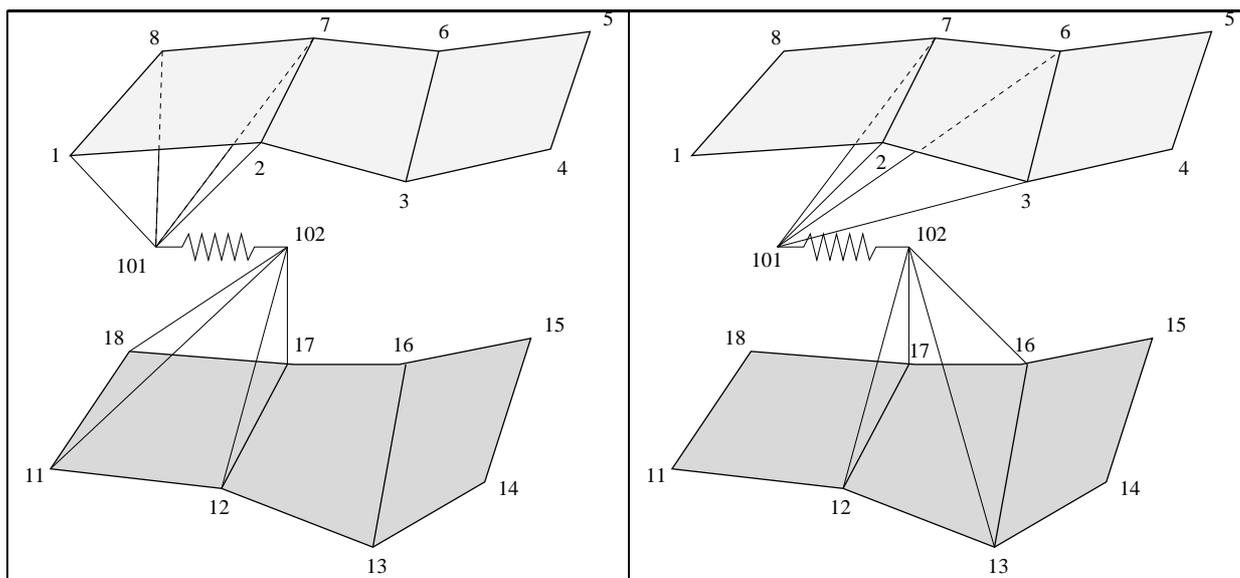


FIG. 7.13 – Maillage initial et modifié d'un point de soudure.

qui représente une différence de plus de 7% par rapport au modèle de référence.

Mode propre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence propre (Hz)	111	241	303	382	530	590	591	642	655	685
Différence avec la référence (%)	0.7	0.4	0.3	0.4	1.8	3.9	0.1	7.1	0.4	1.9

TAB. 7.5 – Fréquences propres du modèle présentant 13 points de soudure déplacés.

7.3.2 Modification du modèle élément fini afin de le rendre compatible

Nous ne pouvons pas appliquer directement le résidu proposé, même dans sa forme utilisant les matrices M_c et K_c définies par l'équation 7.1, car les deux modèles éléments finis ne sont plus compatibles, puisque nous avons modifié les points d'attache des éléments rigides représentant les points de soudure. Une des façons de s'affranchir de cette difficulté est explicitée avec les notations de la figure 7.13 : la matrice K_0 , correspondant à la figure 7.13 partie de gauche, a des composantes associées à tous les noeuds existants (1 à 8, 101, 102, 11 à 18). Les degrés de liberté associés à la matrice K_1 (figure 7.13 partie de droite) sont les mêmes. Nous avons vu que K_0 et K_1 n'étaient pas inversibles, et nous avons donc défini les matrices K_0^c et K_1^c : les composantes de K_0^c correspondent aux degrés de liberté des noeuds 3, 4, 5, 6, 101, 102, 13, 14, 15, 16, tandis que celles de K_1^c sont associées aux noeuds 1, 4, 5, 8, 101, 102, 11, 14, 15, 18. Ces deux modèles ne sont donc pas compatibles, c'est pourquoi les matrices qui seront utilisées dans les calculs ne seront pas exactement K_1^c et M_1^c , mais plutôt les matrices qui en sont issues, et pour lesquelles les degrés de liberté des noeuds 1, 8, 11 et 18 sont remplacés par ceux des noeuds 3, 6, 13 et 16 : les composantes des matrices considérées gardent leurs valeurs, seuls les degrés de liberté associés changent afin d'assurer une compatibilité avec le problème de référence.

Le modèle ainsi obtenu est donc compatible avec le premier, et même si les modifications opérées ne sont pas forcément physiquement acceptables (dans le cas où on a un changement de phase entre les deux côtés du point de soudure par exemple), ils restent fidèles à l'esprit de la méthode : détecter un

grand changement de comportement du à un petit changement de maillage. Enfin, notons que d'autres choix auraient pu être faits, comme par exemple l'attribution aux degrés de liberté des noeuds 1 et 8 des valeurs issues des degrés de libertés des noeuds voisins, que ce soit sous forme de moyenne, d'interpolation ou d'extrapolation.

7.3.3 Application de la méthode et vérification des résultats

Une fois que les changements décrits ci-dessus ont été réalisés, il est possible de passer au calcul de l'indicateur. Encore un fois, nous pourrions ici effectuer un choix aléatoire des positions des points de soudure, mais il est dans notre cas plus judicieux de considérer comme structure modifiée la structure pour laquelle l'ensemble des points considérés variables a été déplacé, et d'effectuer le calcul du résidu basé sur cette structure. La figure 7.14 fourni le tracé de l'indicateur pour le mode 8. On observe donc qu'une zone est détectée comme étant principalement responsable des dispersions observées sur ce mode, qui est le plus sensible dans l'intervalle de fréquence considéré.

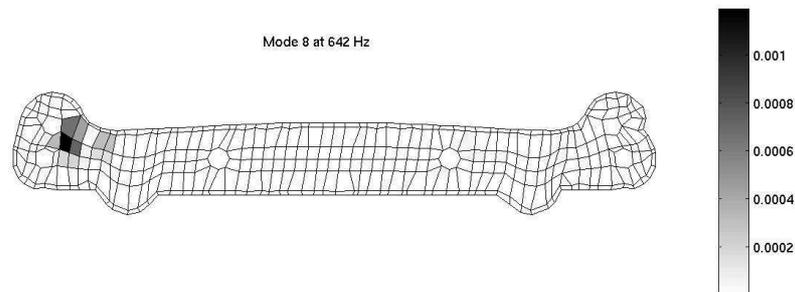


FIG. 7.14 – Mode 8 : valeur de l'indicateur

En ce qui concerne le mode 6, qui présente la plus forte sensibilité après le mode 8, la figure 7.15 montre que l'indicateur est grand sur une unique zone, qui est une de celles détectées sur la figure correspondant à l'analyse du mode 8. Remarquons enfin que la figure 7.16 permet de confirmer le fait que si un mode n'est pas ou peu sensible aux variations effectuées, la valeur de l'indicateur est très faible.

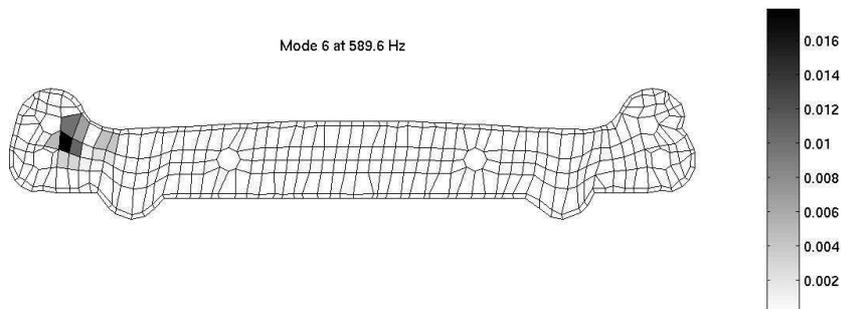


FIG. 7.15 – Valeur de l'indicateur pour le mode 6

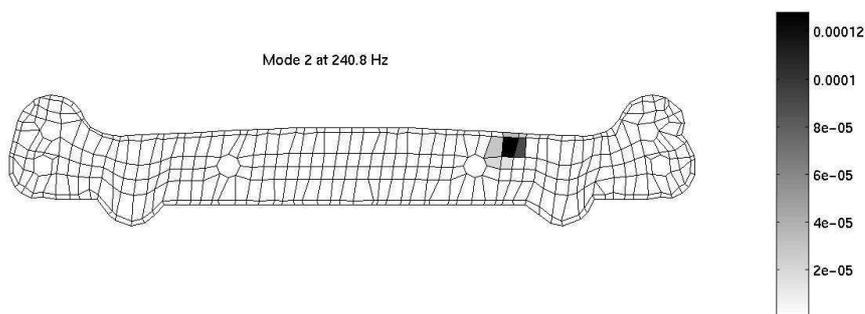


FIG. 7.16 – Valeur de l'indicateur pour le mode 2

Enfin, la figure 7.17 présente la valeur moyenne de l'indicateur sur la bande de fréquence correspondant aux dix premiers modes. Une seule zone est détectée par cet indicateur moyen, la valeur de l'indicateur dans les autres zones étant beaucoup plus faible. Cette zone correspond bien entendu à une des modifications effectuées sur la structure, qui est le déplacement du point n° 5, et nous pouvons vérifier que les résultats obtenus sont conformes à la réalité en modifiant la structure de référence en ce seul point, et en effectuant un calcul de modes propres. Le résultat est donné dans le tableau 7.6, qui permet de constater qu'effectivement la plupart des différences entre les deux modèles de départ étaient dues au déplacement d'un unique point de soudure, les autres points, en particulier celui détecté sur la figure 7.14, ayant une influence beaucoup plus faible.

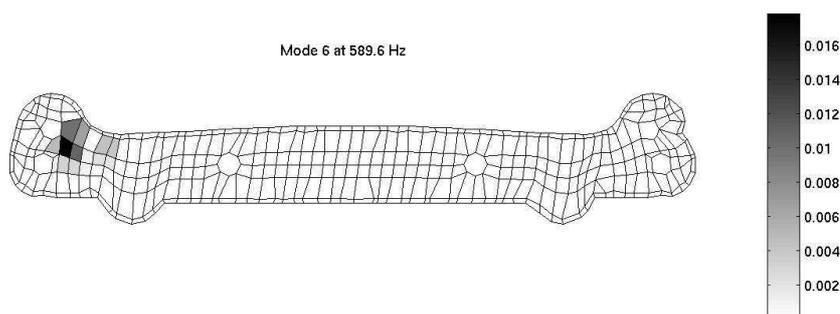


FIG. 7.17 – Moyenne de l'indicateur sur la bande de fréquence

Mode propre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence propre (Hz)	110	240	303	380	529	590	597	642	656	683
Différence avec la référence (%)	0	0	0	0.1	1.6	3.9	1	7.1	0.5	1.6

TAB. 7.6 – Fréquences propres du modèle présentant 1 point de soudure déplacé (n°5)

7.4 Conclusion sur l'étude de poutre de soubassement

L'étude de la poutre de soubassement a permis de montrer l'importance des points de soudure dans le comportement vibratoire d'une telle structure. Celle-ci est composée principalement de trois pièces de gabarit identique, ce qui implique que la plupart des modes font intervenir les trois pièces, et que les points de soudure sont largement sollicités. Ainsi l'absence d'un ou plusieurs points de soudure peut impliquer de grosses variations de comportement de la pièce, et certains points ont une influence beaucoup plus marquée que d'autres. Nous avons pu, avec un coût de calcul très faible, détecter parmi dix points de soudure, lesquels étaient responsables des modifications de comportement observées. Dans un second temps, nous avons étudié l'influence d'un défaut de position de ces points de soudure : nous avons montré une des façons d'envisager le problème, et encore une fois l'indicateur a su détecter les zones les plus sensibles, même si évidemment les écarts dus à un déplacement de soudure sont moindres que ceux obtenus lors de sa suppression. Tous ces résultats ont été validés par des analyses modales numériques.

Chapitre 8

Application numérique et expérimentale : étude d'un tablier de véhicule

Dans ce chapitre nous présentons l'étude d'un tablier de véhicule, et plus particulièrement l'application de la méthode décrite au chapitre 4 afin de détecter les zones de la pièce pouvant induire des différences notables de comportements, ainsi que la validation expérimentale des résultats obtenus. Le choix de la pièce a été délicat à opérer, puisque les critères que celle-ci devait satisfaire étaient nombreux pour le temps qui nous était imparti. Il nous fallait en effet une pièce disponible, dont le maillage existait et vérifiait plusieurs propriétés : d'une part le nombre de degrés de liberté devait être limité pour des questions de taille mémoire, d'autre part les types d'éléments le constituant étaient limités à ceux disponibles sous SDT. Enfin la structure devait avoir un comportement sensible.

8.1 Présentation de la pièce étudiée

8.1.1 Description



FIG. 8.1 – Photo du tablier de Clio

La pièce choisie pour cette étude est d'un comportement vibro-acoustique crucial, puisque c'est elle qui dans un véhicule se situe entre le compartiment moteur et l'habitacle. Son comportement est primordial, en particulier en ce qui concerne la transmission du bruit. La tablier dont nous disposons est issu d'un véhicule Renault Clio, une photo de cette pièce est présentée figure 8.1. Il est constitué

de deux pièces en acier, de géométries complexes, soudées en 28 points que nous décrirons plus loin.

8.1.2 Maillage du tablier

Le maillage du tablier, présenté sur la figure 8.2, comporte 26133 degrés de liberté indépendants, pour 4751 éléments. Il est considéré encasté au niveau des languettes situées de part et d'autre de la pièce. Les points de soudure permettant d'assembler la pièce dont le maillage est présenté sur la figure 8.3, initialement modélisés par des éléments 3D SOLID associés à des RBE3 sont simplifiés en une association SOLID/RBE2 afin de faciliter l'exploitation du maillage.

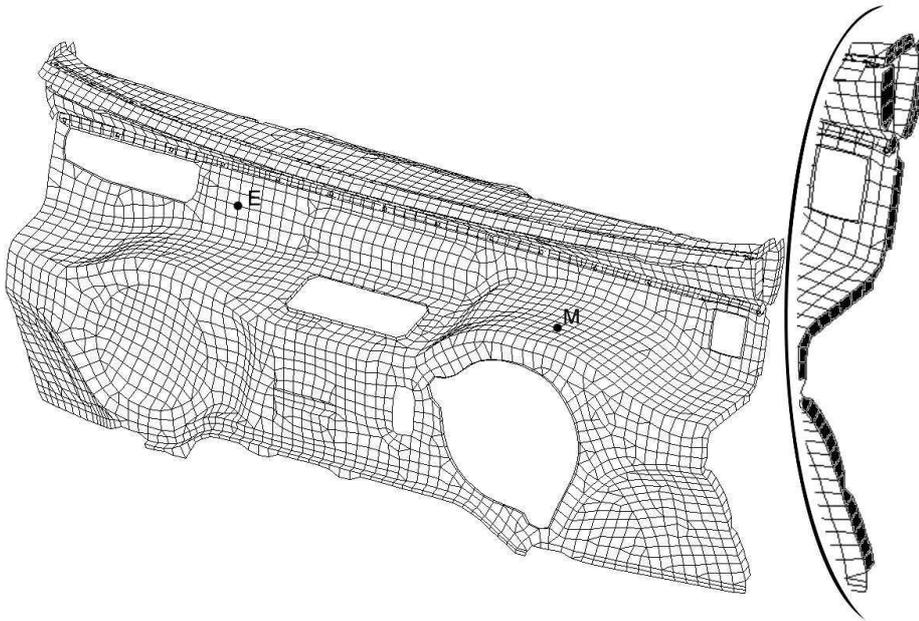


FIG. 8.2 – Maillage complet du tablier (à droite, zoom sur les languettes d'encastrement, noircies)

Les dix premières fréquences propres du modèle, évaluées avec SDT, sont données dans le tableau 8.1.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence propre (Hz)	44,0	67,5	81,8	101	116	122	134	139	184	201

TAB. 8.1 – Fréquences propres du modèle de référence

Notons d'ores et déjà que le maillage utilisé ne correspond pas exactement à la pièce dont nous disposons, les évolutions des pièces n'étant pas toujours mises à jour sur tous les maillages. Ainsi, un trou de forme rectangulaire relativement important est présent sur la pièce, et pas sur le maillage. De même, plusieurs modifications de formes, ainsi que des perçages ont été apportées sans que le maillage ne les prenne en compte.

8.1.3 Analyse expérimentale du tablier

L'analyse expérimentale du tablier est réalisée à l'aide d'un système d'acquisition Oros sous PC, associé à une mesure effectuée au vibromètre laser Polytec, tandis que la structure est excitée au

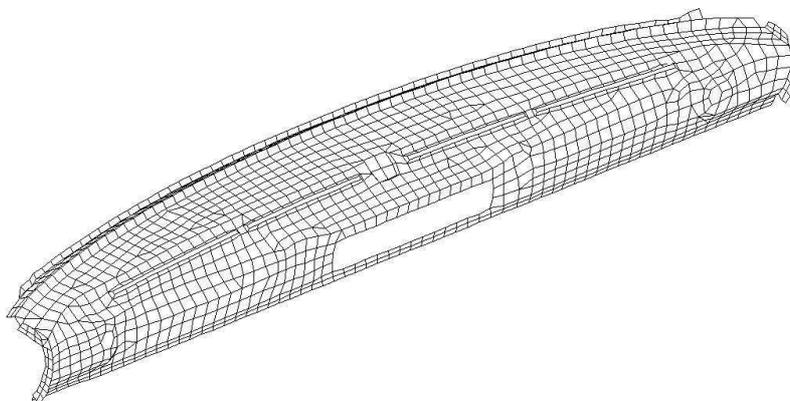


FIG. 8.3 – Maillage de la pièce soudée

moyen d'un marteau PCB équipé d'une tête garantissant une bonne excitation des basses fréquences (jusqu'à 250 Hz).

La figure 8.4 présente une vue de l'encastrement, réalisé par l'intermédiaire de vis.



FIG. 8.4 – Réalisation de l'encastrement

Nous nous intéresserons uniquement aux variations des fréquences propres, facilement identifiables dans la gamme de fréquence considérée, sur les courbes de fonctions de transfert, comme on peut le constater sur la figure 8.5, qui montre le tracé de la fonction de transfert entre les points E et M (précisés sur la figure 8.2). Toutes les fonctions de transfert tracées ici représentent la grandeur $H = 20 \log \frac{|\Gamma(M)|}{|F(E)|}$, qui est le rapport entre l'accélération mesurée au point M et l'effort mesuré

au point d'excitation E , en échelle logarithmique. Dix fréquences propres sont identifiables, tandis qu'au-delà de 200 Hz le recouvrement modal est tel qu'une analyse plus poussée serait nécessaire pour une identification correcte des modes.

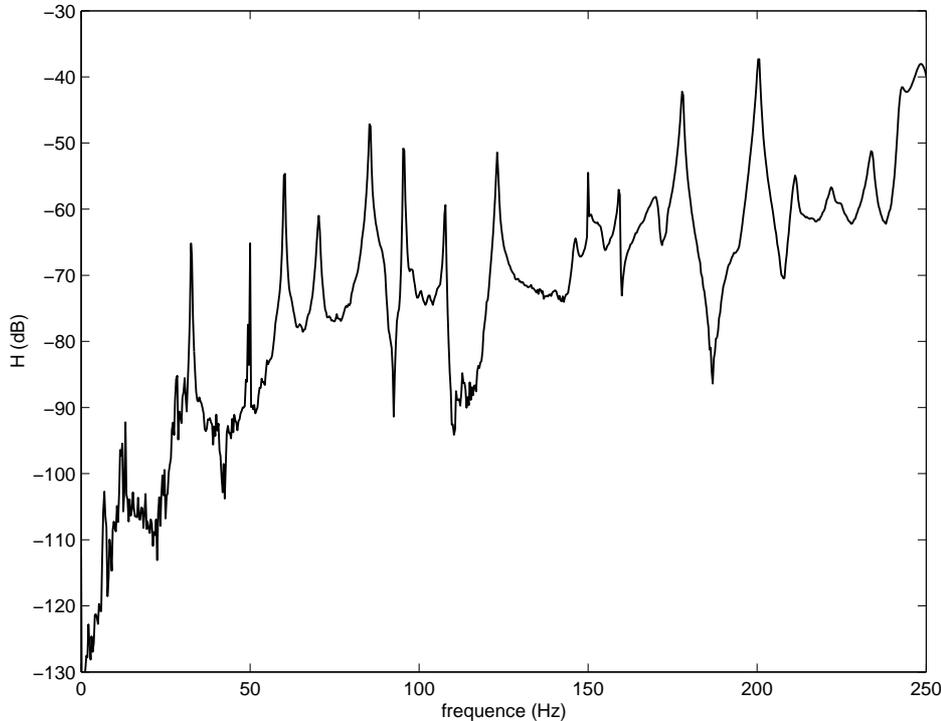


FIG. 8.5 – Mesure de la fonction de transfert de référence : rapport vitesse/effort (dB) en fonction de la fréquence (Hz)

Les fréquences propres mesurées ne correspondent pas à celles calculées avec SDT (par exemple, la première vaut 33 Hz alors que le modèle numérique donne 44 Hz), ce qui s'explique par plusieurs raisons :

- d'un point de vue du maillage, nous avons déjà noté les différences existant entre les deux géométries, ainsi que les simplifications apportées au niveau des points de soudure,
- enfin, d'un point de vue expérimental, la réalisation de l'encastrement à l'aide de vis n'est pas exactement en accord avec les conditions limites du modèle éléments finis, et de plus l'opération d'encastrement a très bien pu entraîner l'apparition de contraintes résiduelles, qui pourraient être responsables de modifications de comportement.

Tous ces points font que des différences relativement importantes entre le calcul et la mesure existent. Le but de ce travail n'étant pas de retrouver les fréquences propres obtenues par le calcul, aucun recalage ne sera effectué afin de réduire ces différences. Nous opérerons donc des analyses numériques, que nous tenterons de vérifier d'un point de vue qualitatif par des analyses expérimentales.

8.2 Influence de l'existence des points de soudure

La première étude qui va être réalisée sur le tablier est une étude similaire à celle effectuée sur la poutre de soubassement, elle porte sur l'influence de la suppression de points de soudures.

8.2.1 Étude numérique

Description de l'étude

Les deux pièces du tablier sont reliées par l'intermédiaire de 28 points de soudure, présentés sur la figure 8.6. Contrairement à l'étude de la poutre, nous allons étudier l'effet de l'ensemble des points existants. En ce qui concerne la mise en application de la méthode de localisation, la première étape a déjà été effectuée dans le paragraphe précédent. Le choix de la structure modifiée permettant le calcul du résidu ne peut pas se faire de la même façon que pour la poutre de soubassement, car la structure obtenue en supprimant l'ensemble de ces points est très différente de la structure de référence, et de plus les points de soudure sont proches les uns des autres, ce qui empêche la séparation des effets de chacune des modifications. Le choix qui a été opéré pour l'étude des 28 points a été de considérer 7 structures sur lesquelles 4 points de soudure ont été supprimés, le tableau 8.2 indiquant les combinaisons retenues. On peut observer que les points supprimés simultanément ont été choisis de façon répartie sur la structure, afin que d'éventuels couplages entre les effets de chacun d'entre eux soient minimisés. Ce choix n'est évidemment pas unique, d'autres combinaisons sont envisageables.

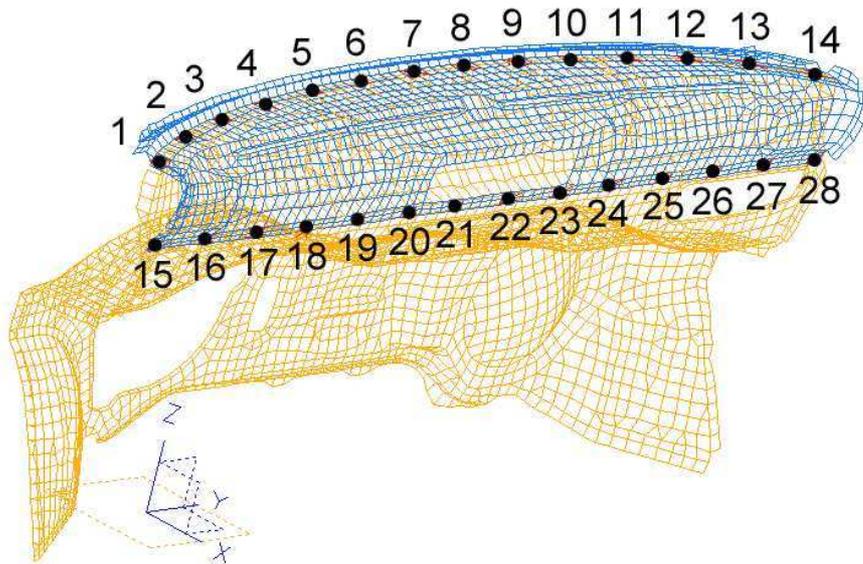


FIG. 8.6 – Numérotation des points de soudure du tablier

Structure	1	2	3	4	5	6	7
Points supprimés	1, 8, 19, 26	2, 9, 20, 27	3, 10, 21, 28	4, 11, 22, 15	5, 12, 23, 16	6, 13, 24, 17	7, 14, 25, 18

TAB. 8.2 – Points de soudure supprimés

Calcul de l'indicateur

Le calcul de l'indicateur nécessite donc l'assemblage et le calcul de résidu sur 7 structures différentes. Le résultat est donné sur la figure 8.7, qui donne la valeur de l'indicateur moyen sur les 10 premières fréquences propres (équation 6.5), ainsi que sur les 7 structures considérées. Contrairement au cas de la poutre de soubassement, aucune zone ne se détache franchement des autres, le résidu est

globalement plus important pour les points de soudure situés au centre de la pièce, mais la plupart des points ressortent sur le tracé.

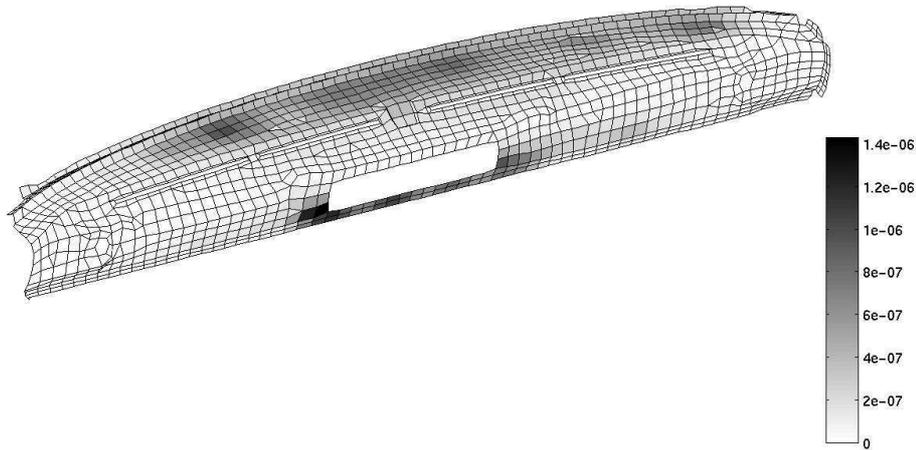


FIG. 8.7 – Valeur de l'indicateur moyen

La figure 8.8 donne plus précisément la répartition de l'indicateur en fonction du point de soudure considéré ainsi que du mode pris en compte. La valeur de l'indicateur pour un point de soudure est obtenue en calculant la somme de l'indicateur 6.4 sur les éléments adjacents au point considéré. On s'aperçoit ainsi que c'est le mode 6 qui est responsable des principales différences, et que les points de soudure situés au centre de la pièce ont une sensibilité plus grande. Le mode 9 apparaît également sur cette figure, associé aux points de soudure 21, 22 et 23.

Ces résultats s'expliquent par le fait que le mode 6 est un mode local de la pièce soudée, son énergie cinétique est représentée sur la figure 8.9.

Vérification numérique des résultats

Les résultats fournis par le calcul de l'indicateur peuvent être vérifiés en effectuant une analyse modale numérique de la structure privée de deux points détectés comme sensibles. Ceci est résumé dans le tableau 8.3, qui indique les fréquences propres du tablier sur lequel on a supprimé les points de soudure numérotés 22 et 23. On observe bien des différences, même si elles restent faibles, puisque la plus grande différence vaut 5,2%, et est associée au mode 9.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	44,0	67,5	81,8	101	115	121	134	139	193	201
Différence avec le modèle nominal (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,7	0,0	0,0	5,2	0,0

TAB. 8.3 – Fréquences propres, soudures 22 et 23 supprimées

En ce qui concerne ce mode 9, la valeur du résidu est associée à la variation de fréquence propre,

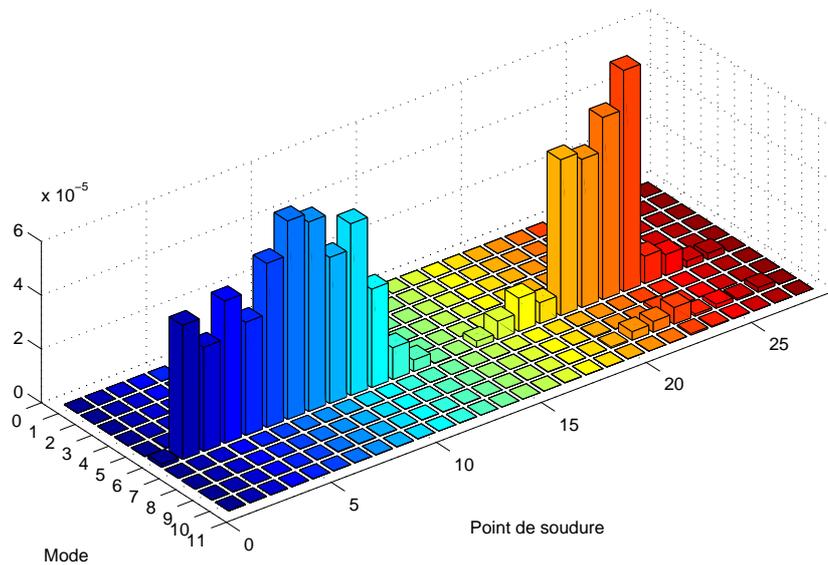


FIG. 8.8 – Valeur de l'indicateur en fonction du point de soudure considéré et du mode

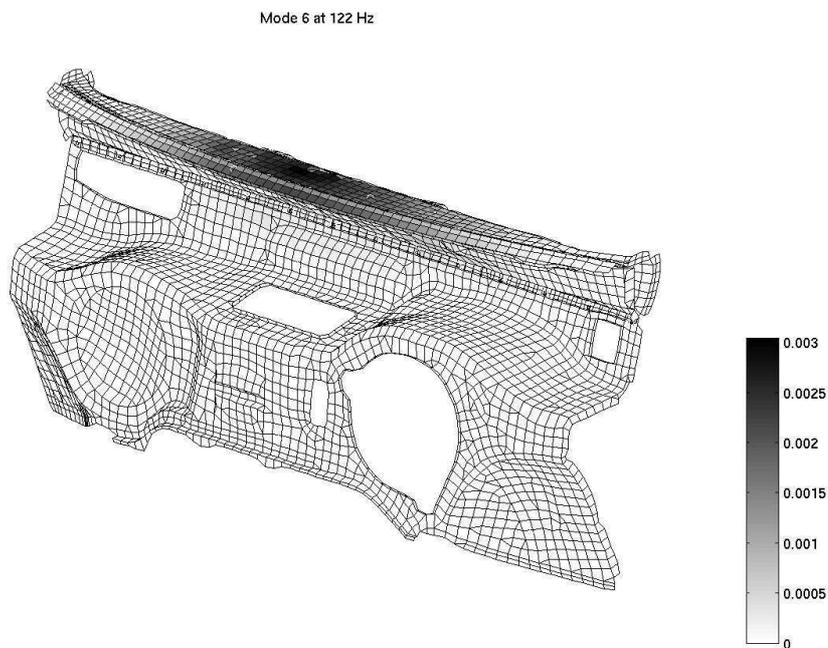


FIG. 8.9 – Énergie cinétique du mode 6 du tablier

car comme on peut le constater sur la figure 8.10, la zone dans laquelle se situent les points de soudure est quasiment immobile, ce qui n'entraîne pratiquement aucune modification de la déformée du mode.

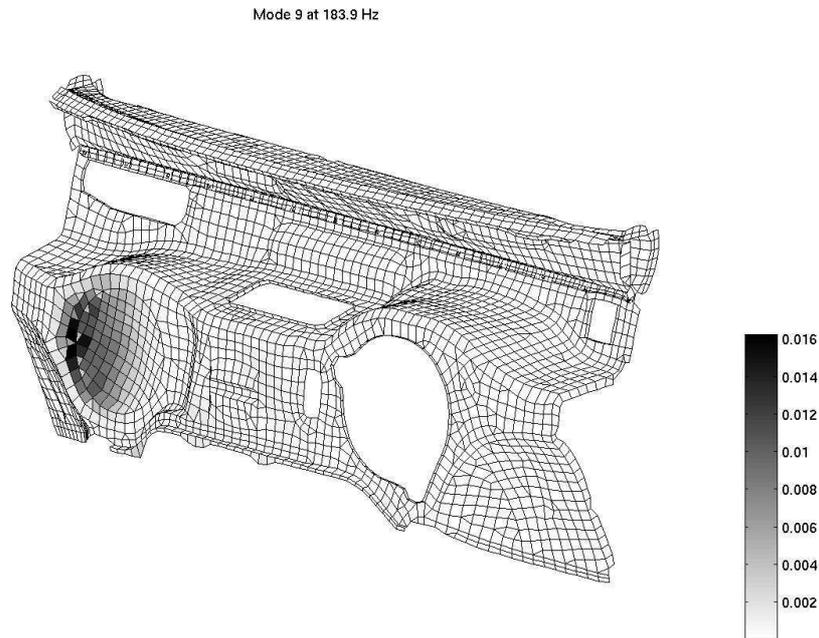


FIG. 8.10 – Énergie cinétique du mode 9 du tablier

Par contre, en ce qui concerne le mode 6, les zones dans lesquelles se situent les points de soudure sont en mouvement sur la structure de référence, ce qui entraîne des modifications locales de la déformée, et par là-même une valeur de résidu importante, bien que la fréquence propre ne soit pas beaucoup modifiée. On peut observer sur la figure 8.11 que c'est bien une modification locale de la déformée au niveau des points de soudure 22 et 23 qui explique la valeur élevée de l'indicateur.

Si ces deux points de soudure ne modifient pas de façon significative la valeur de la fréquence propre du mode 6, d'autres peuvent avoir plus d'effet sur cette valeur, comme le montre le tableau 8.4, qui indique la valeur des fréquences propres de la structure privée des points de soudure 2 et 3 : on observe alors une variation de près de 5% de la fréquence du mode 6.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	44,0	67,5	81,8	101	115	116	134	139	184	201
Différence avec le modèle nominal (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	4,6	0,0	0,0	0,0	0,0

TAB. 8.4 – Fréquences propres du tablier, soudures 2 et 3 supprimées

De même, on peut vérifier que la modification de points de soudures apparaissant comme insensibles lors du calcul du résidu n'a presque aucun effet sur les valeurs des fréquences propres : le tableau 8.5 donne les fréquences propres du problème obtenu en supprimant les points 1 et 15.

Conclusions sur l'étude numérique

Contrairement au cas de la poutre de soubassement, la suppression d'un ou deux points de soudure n'entraîne pratiquement jamais de grosses modifications des valeurs des fréquences propres. Ceci

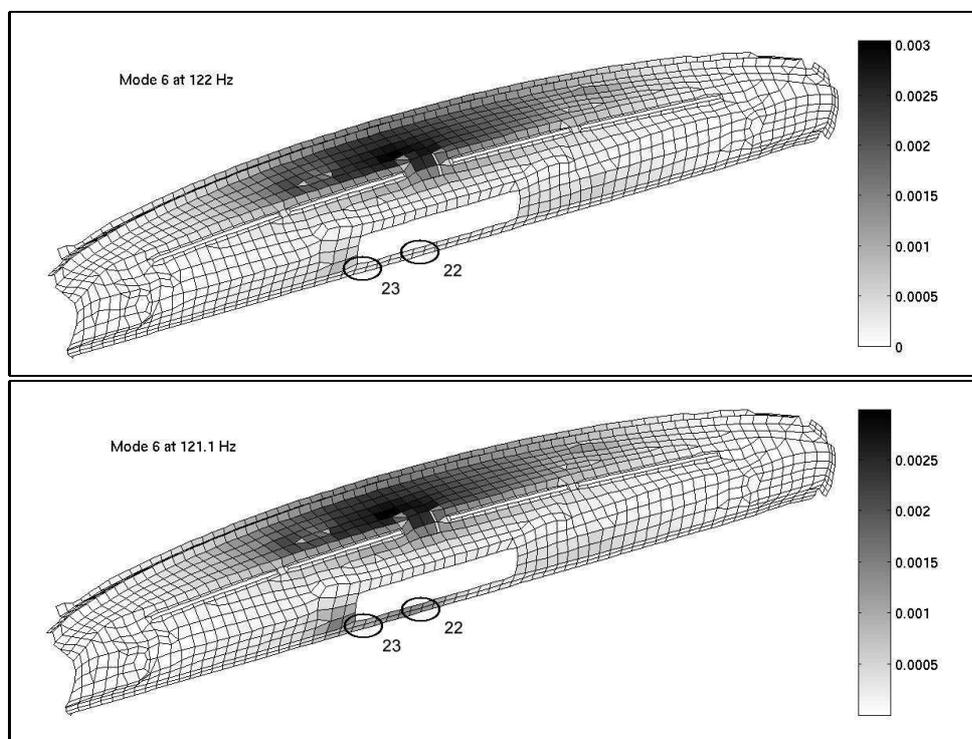


FIG. 8.11 – Énergie cinétique du mode 6, avec et sans les points de soudure 22 et 23

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	44,0	67,5	81,8	101	116	122	134	139	184	201
Différence avec le modèle nominal (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0

TAB. 8.5 – Fréquences propres du tablier, soudures 1 et 15 supprimées

s'explique simplement par le fait que la pièce soudée a un gabarit bien moindre que la pièce maîtresse de la structure. Ainsi, pour le tablier, l'oubli lors de la phase d'assemblage d'un point de soudure n'aura pratiquement aucune influence sur le comportement global de la structure, ce qui n'était pas le cas avec la poutre de soubassement, qui était constituée de trois parties de tailles équivalentes. Nous allons cependant essayer de retrouver les tendances observées ici d'un point de vue expérimental.

8.2.2 Étude expérimentale

Étude de l'influence des points de soudure 1 et 15

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux points de soudures numérotés 1 et 15, qui sont proches de l'encastrement. La figure 8.12 montre le point de soudure initial, alors qu'il a été supprimé sur la figure 8.13. Cette suppression s'est simplement faite en perçant au niveau du point de soudure, et en s'assurant que le décollement des deux pièces était possible au niveau du trou.

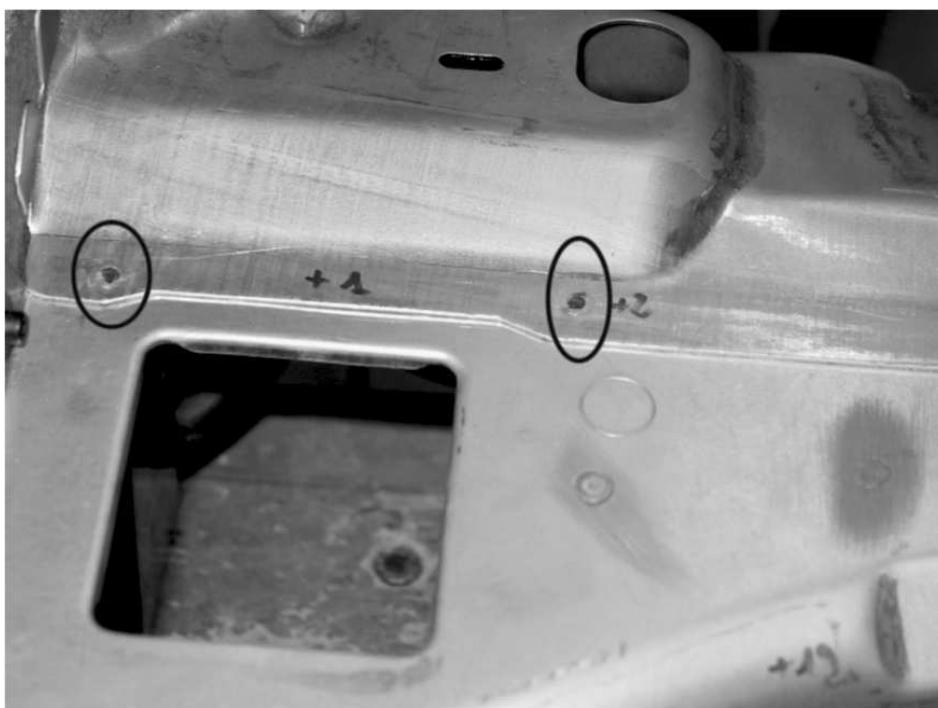


FIG. 8.12 – Vue du tablier, points de soudure 15 et 16 en place

Des mesures de fonctions de transfert ont alors été effectuées sur la structure modifiée, afin de se rendre compte si les fréquences propres ont été modifiées par les perçages réalisés. Un résultat est montré figure 8.14, sur laquelle on s'aperçoit que les modifications des valeurs propres ne sont pas détectables, puisque tous les pics coïncident avec ceux mesurés sur la structure de référence. Le seul pic que l'on ne retrouve pas sur cette figure est celui que l'on observait à 150 Hz lors de la mesure de référence, mais elle correspond à une perturbation due au secteur. La mesure effectuée permet donc de valider le fait que l'oubli lors de l'assemblage des points de soudure 1 et 15 n'a pas d'influence remarquable sur le comportement de la pièce dans la bande de fréquence étudiée.

Afin de mesurer l'influence d'autres points de soudure, il est préférable de remettre les soudures 1 et 15 en place, c'est ce qui a été fait approximativement en utilisant une vis, un écrou et deux rondelles pour chaque perçage, le tout étant de petite taille (M3), et de poids négligeable. On vérifie

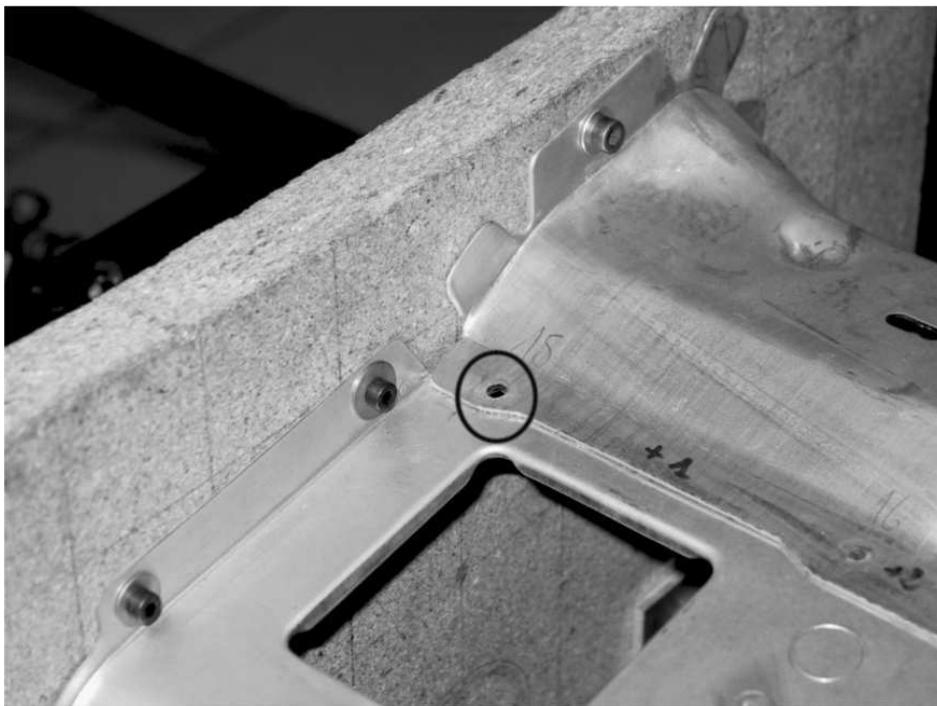


FIG. 8.13 – Vue du tablier, point de soudure 15 supprimé

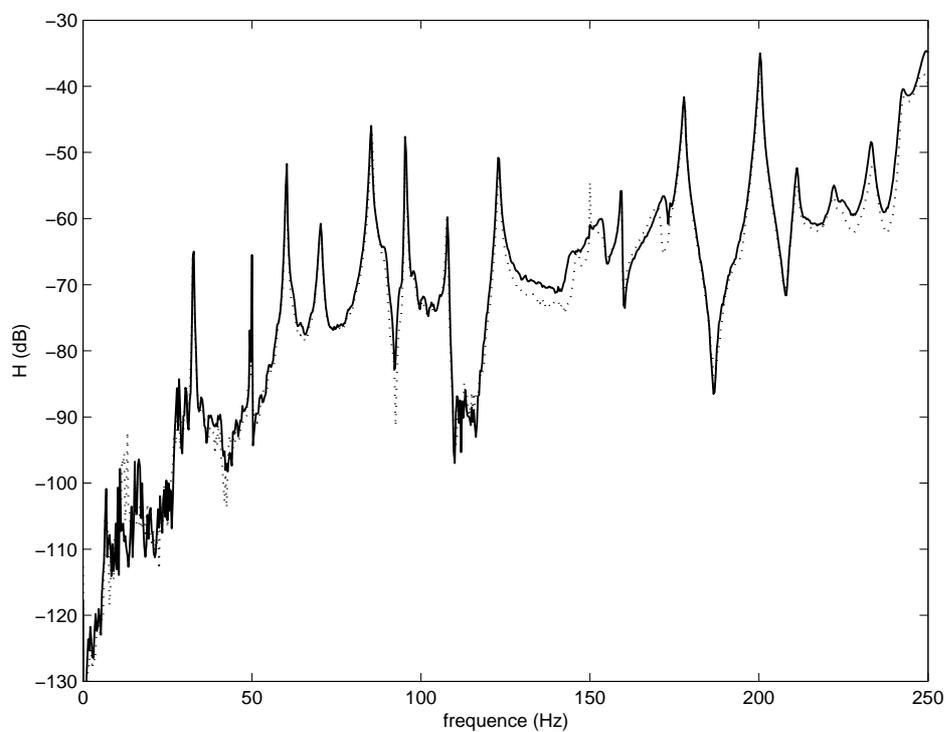


FIG. 8.14 – Fonction de transfert mesurée, soudures 1 et 15 supprimées. En pointillés : référence (fig.8.5)

sur la figure 8.15 que le comportement de la structure ainsi modifiée est identifiable à celui de la structure de référence.

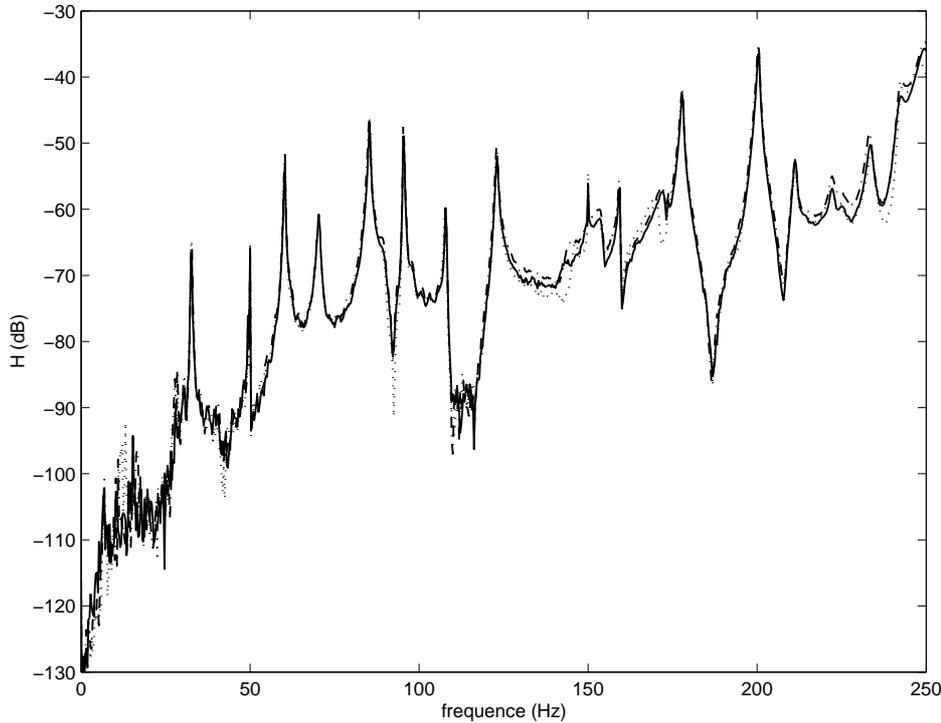


FIG. 8.15 – Fonction de transfert mesurée, soudures 1 et 15 remplacées. En pointillés : référence (fig.8.5). En traits mixtes : courbe de la figure 8.14.

Points de soudure 22 et 23

Nous allons à présent étudier l'influence des points de soudure numérotés 22 et 23, qui avaient entraîné une grande valeur de résidu. La figure 8.16 montre ces points en place, alors que la figure 8.17 correspond aux perçages permettant de supprimer les liaisons.

Une mesure de fonction de transfert sur la structure ainsi modifiée est présentée sur la figure 8.18, elle permet d'observer que les différences, si elles ne sont pas spectaculaires, sont cependant bien plus importantes que celles obtenues lors de la suppression des points de soudure 1 et 15, ce qui est en accord avec les observations faites à partir des résultats numériques.

8.2.3 Conclusion sur l'influence des points de soudure

Bien que la structure utilisée pour la mesure ne corresponde pas exactement au maillage dont nous avons disposé, nous avons pu retrouver expérimentalement les tendances observées numériquement. En particulier, nous avons vu que dans le cas du tablier, constitué de deux pièces soudées dont le gabarit de l'une est bien supérieur à celui de l'autre, que l'absence d'un point de soudure avait relativement peu d'influence sur le comportement de la pièce. Les modifications induisant les plus grands changements dans les caractéristiques propres de la structure sont associés aux points de soudures placés loin de l'encastrement et au mode local de la pièce soudée. Cette différence avec la poutre de soubassement étudiée plus haut est intéressante à noter, puisque dans ce cas les points de soudure les plus sensibles étaient proches de l'encastrement.

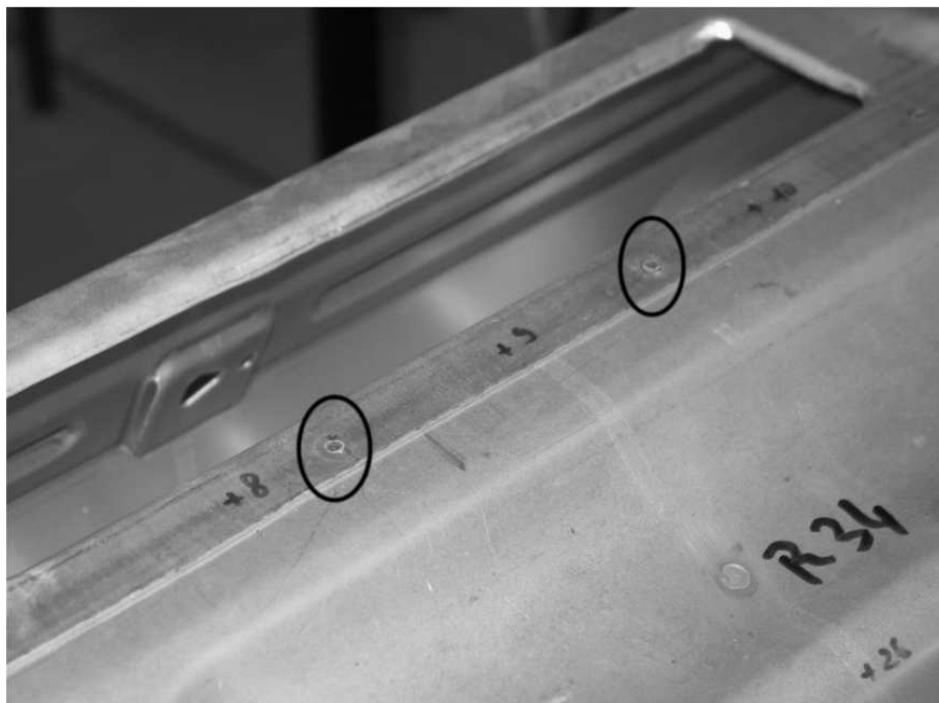


FIG. 8.16 – Vue du tablier, points de soudure 21, 22 et 23 en place

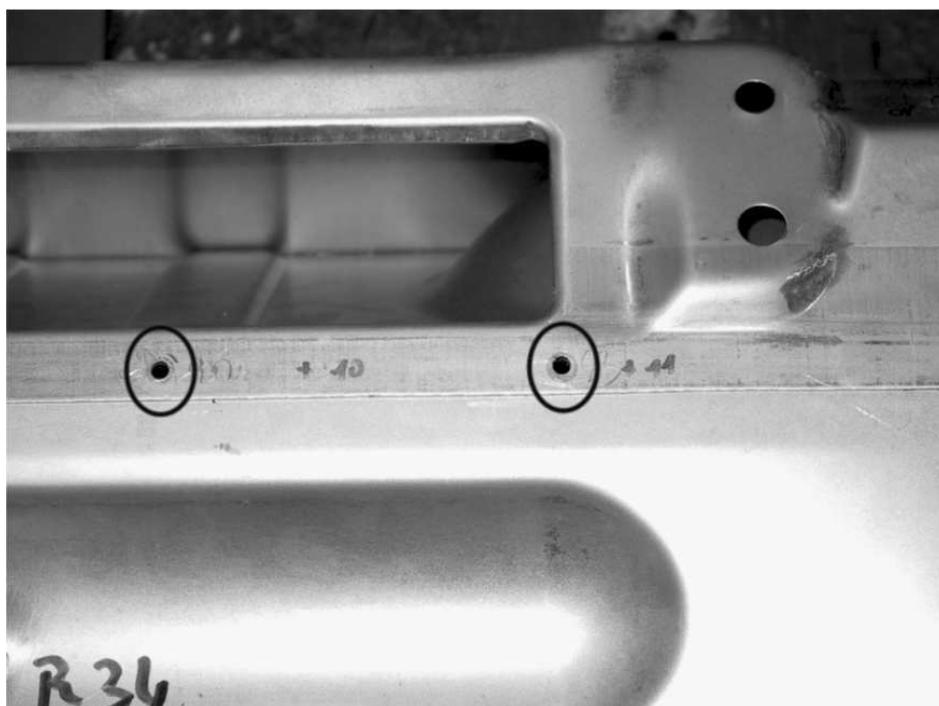


FIG. 8.17 – Vue du tablier, points de soudure 22 et 23 supprimés

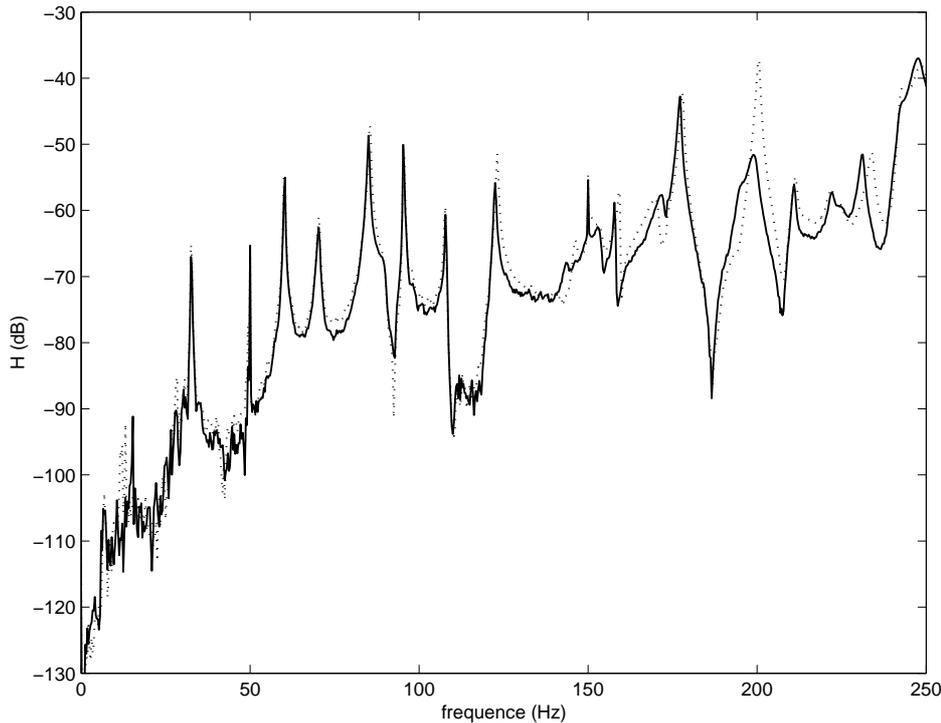


FIG. 8.18 – Fonction de transfert mesurée, soudures 22 et 23 supprimées. En pointillés : référence (fig.8.5)

8.3 Influence d'un défaut de masse

Dans cette partie, nous allons simuler une modification de forme de la pièce au niveau local, qui pourrait être volontaire afin de modifier le comportement de la pièce, ou involontaire lors du processus de fabrication. Cette modification sera modélisée par un défaut de masse.

8.3.1 Étude numérique

La figure 8.19 permet d'observer les 10 emplacements choisis arbitrairement auxquels nous placerons une masselotte cubique, de masse suffisamment faible pour ne pas introduire d'effets non linéaires. Cette masse vaut $m = 35\text{ g}$ et sera assimilée à un cube centré en un point du maillage, de moments d'inertie principaux $m\frac{a^2}{6}$ (où a est la longueur de l'arête du cube : $a = 16,5\text{ mm}$).

Pour l'application de la méthode de localisation, il est dans ce cas possible et avantageux de ne considérer qu'une structure modifiée, sur laquelle les dix masselottes ont été ajoutées. L'assemblage des matrices puis le calcul de l'indicateur permettent d'obtenir la figure 8.20, sur laquelle on peut observer que l'influence de la masse 5 est bien supérieure à celle des autres. Plus précisément, la figure 8.21, qui est obtenue en caractérisant la sensibilité de chaque mode par la somme de l'indicateur sur les éléments adjacents à la masselotte considérée, permet de savoir sur quels modes celle-ci joue le plus grand rôle, il s'agit des modes 7 à 10.

On vérifie que les différences prévues par le calcul de l'indicateur peuvent être confirmées par l'analyse modale de la structure, en ajoutant uniquement la masselotte 5, ce qui permet d'obtenir le tableau 8.6, qui confirme que la masse 5 entraîne des modifications de fréquences propres sur les modes 7 à 10, mais aussi sur le mode 1, pour lequel la valeur de l'indicateur est masquée devant celle

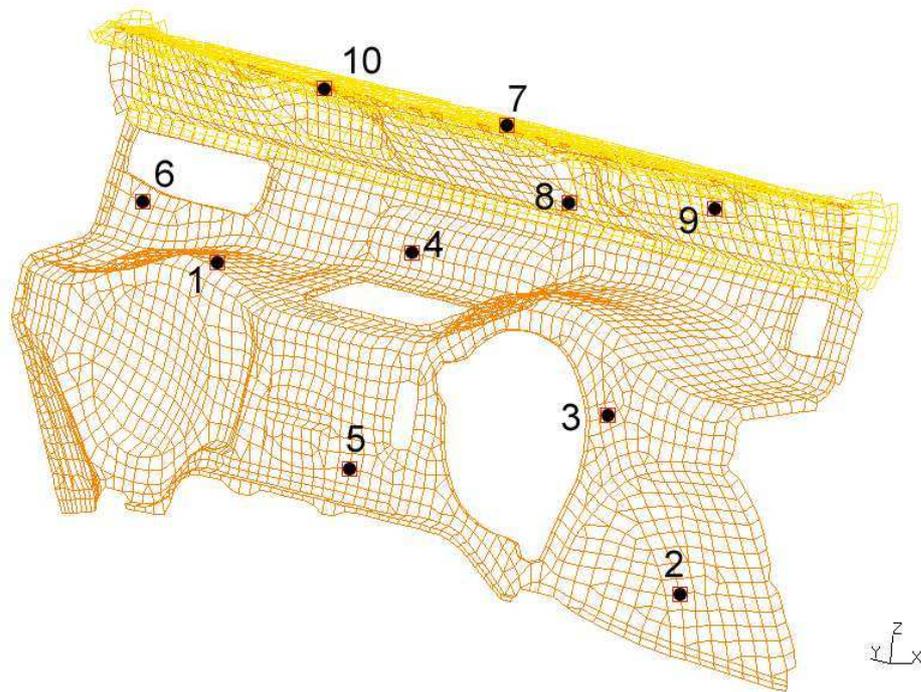


FIG. 8.19 – Emplacements des masselotes

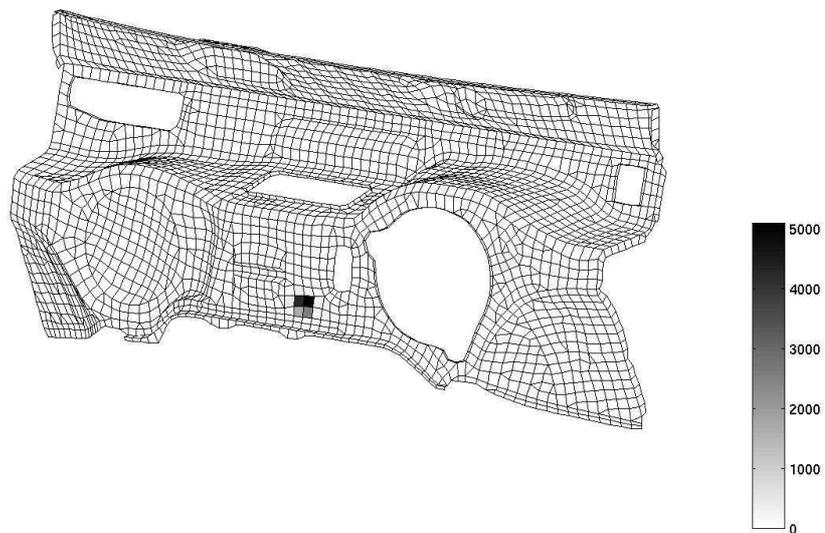


FIG. 8.20 – Indicateur moyen sur la bande de fréquence correspondant aux 10 premiers modes

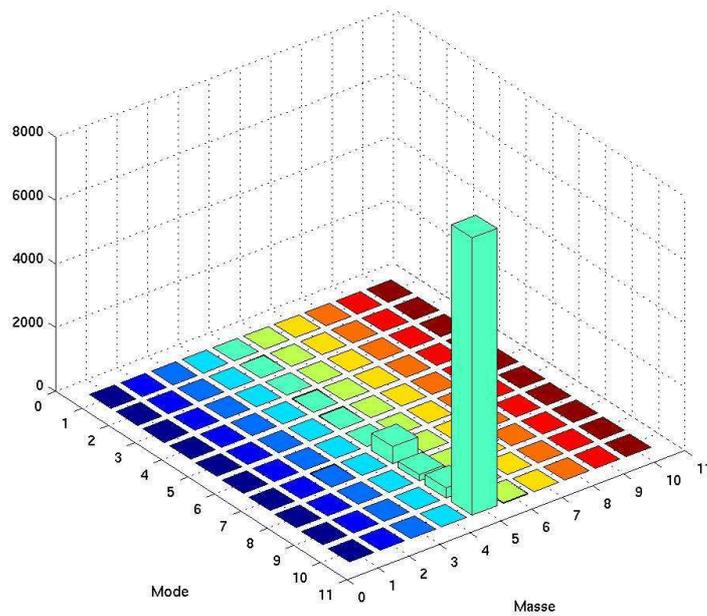


FIG. 8.21 – Valeur de l'indicateur au voisinage de chaque masselotte ajoutée, en fonction de l'ordre du mode considéré

des modes 7 à 10. Sur les figures 8.22 et 8.23, on peut observer les modifications des déformées des modes 7 et 10 dues à l'ajout de la masselotte 5, qui sont relativement importantes et expliquent la valeur forte de l'indicateur.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	42,0	67,3	81,5	101	115	122	125	134	183	199
Différence avec le modèle nominal (%)	4,5	0,3	0,4	0,1	0,8	0,1	6,7	3,3	0,2	1,0

TAB. 8.6 – Fréquences propres du tablier, masselotte 5 ajoutée (35 g)

Enfin, on peut vérifier qu'une masselotte jugée peu influente par l'indicateur n'apporte pratiquement pas de modifications des pulsations propres, comme le montre le tableau 8.7, correspondant à l'analyse modale numérique de la structure de référence sur laquelle la masselotte 3 a été ajoutée.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence Propre (Hz)	44,0	67,5	81,7	101	116	122	134	139	184	201
Différence avec le modèle nominal (%)	0,0	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0

TAB. 8.7 – Fréquences propres du tablier, masselotte 3 ajoutée (35 g)

Pour conclure sur cette analyse numérique portant sur l'influence d'un défaut de masse, les plus fortes variations de fréquences propres ou de déformées propres ont été obtenues en utilisant l'emplacement numéroté 5, ce qui est assez logique puisque dans cette zone les formes du tablier font que la structure est plutôt souple et autorise de grands débattements. L'ajout d'une masse en ce lieu provoque donc l'augmentation des déformées dans la zone considérée, et se traduit évidemment par des variations des caractéristiques propres.

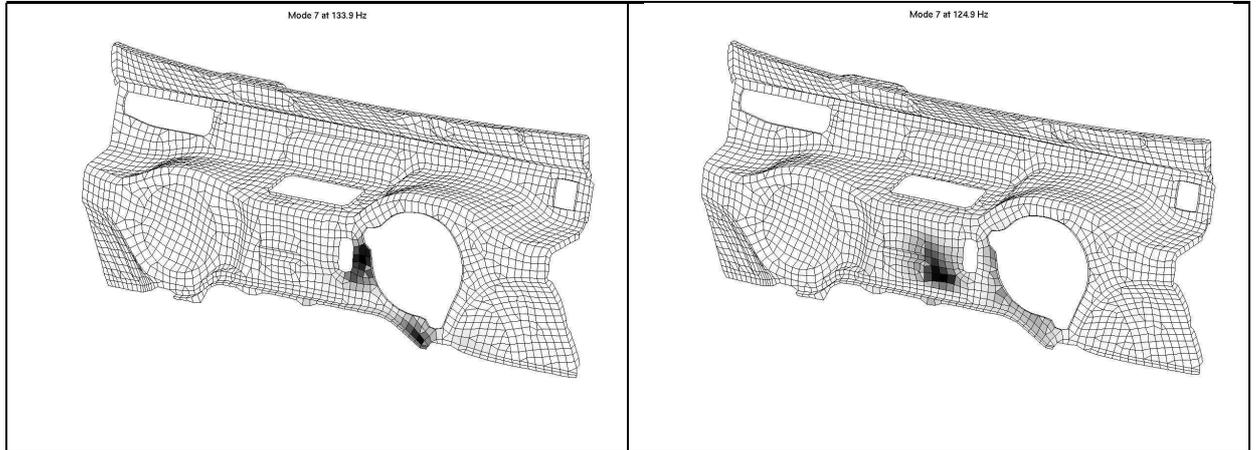


FIG. 8.22 – Énergie cinétique du mode 7 du tablier : structure de référence / masselotte 5 ajoutée

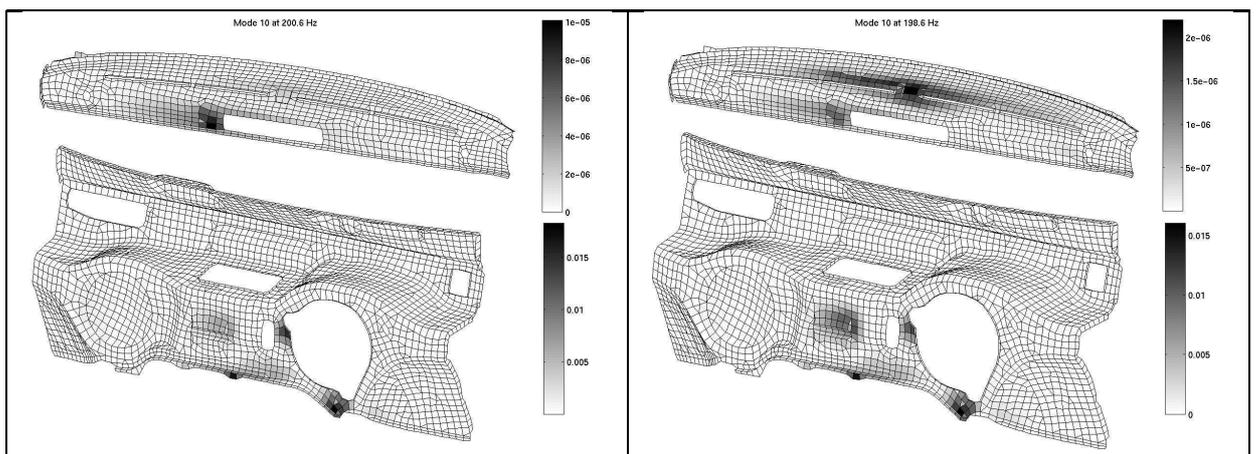


FIG. 8.23 – Énergie cinétique du mode 10 du tablier : structure de référence / masselotte 5 ajoutée

8.3.2 Étude expérimentale

La modification de la structure par ajout de masselotte est illustrée sur la figure 8.24, sur laquelle la masselotte 3 a été ajoutée à la structure. Il s'agit de deux pièces en acier parallélépipédiques collées de part et d'autre du tablier, et dont la masse totale est 35 grammes.



FIG. 8.24 – Vue de la masselotte ajoutée, en position “3”

La figure 8.25 est obtenue en mesurant une fonction de transfert entre les points E et M, lorsque la masselotte 5 a été ajoutée à la structure. On peut observer des variations de pulsations propres entre les deux structures, sur le premier mode, puis sur des modes de fréquences plus importantes. Encore une fois, les pourcentages de ces variations ne seront pas détaillés puisque la structure ne correspond pas exactement au maillage dont nous disposons. Cependant, les tendances obtenues numériquement se retrouvent expérimentalement.

La figure 8.26 confirme ceci, elle est tracée en plaçant la masselotte au point 3, ce qui n'induit pratiquement aucune différence par rapport à la structure de référence en-deçà de 200 Hz. Au-delà, des divergences apparaissent, ce que nous aurions pu prévoir en traçant la figure 8.27, qui est obtenue en effectuant le même calcul que la figure 8.21 (calcul de l'indicateur lorsque la structure modifiée comprend 10 masselottes), mais en prenant en compte 15 modes au lieu de 10 : la masselotte 3 commence à avoir un résidu visible sur ce tracé à partir du mode 13, alors que son influence sur les 10 premiers modes est négligeable.

8.4 Conclusion sur l'étude du tablier

Les études faites sur le tablier afin de valider expérimentalement les résultats numériques ont permis de montrer que les tendances attendues étaient correctes, bien que les différences entre le maillage dont nous disposons et la structure réelle soient relativement importantes. La plus grosse

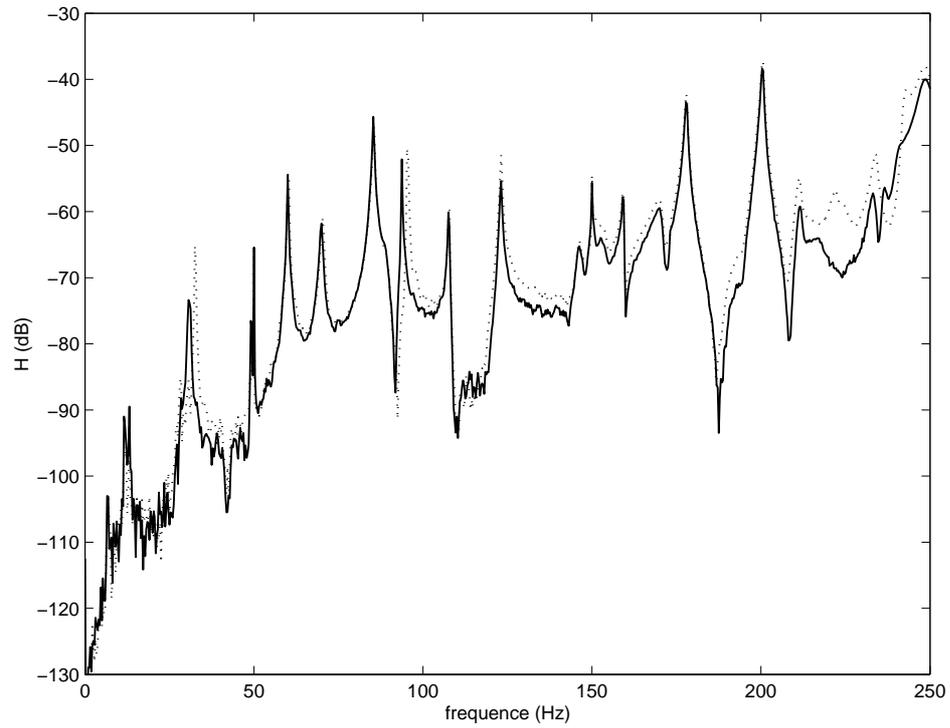


FIG. 8.25 – Fonction de transfert mesurée, masselotte 5 ajoutée. En pointillés : référence (fig.8.5)

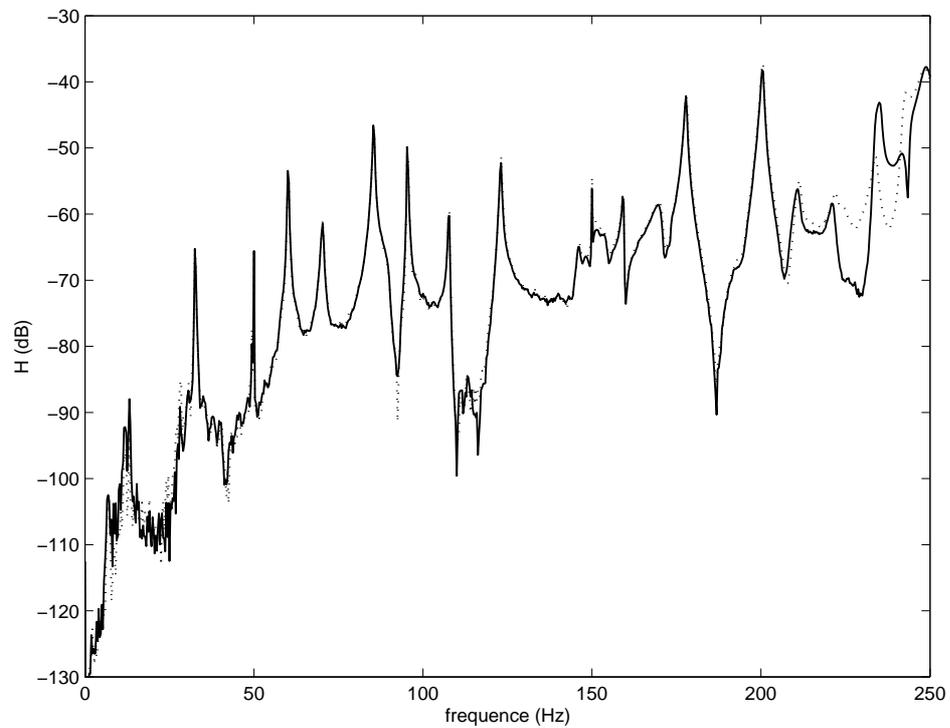


FIG. 8.26 – Fonction de transfert mesurée, masselotte 3 ajoutée. En pointillés : référence (fig.8.5)

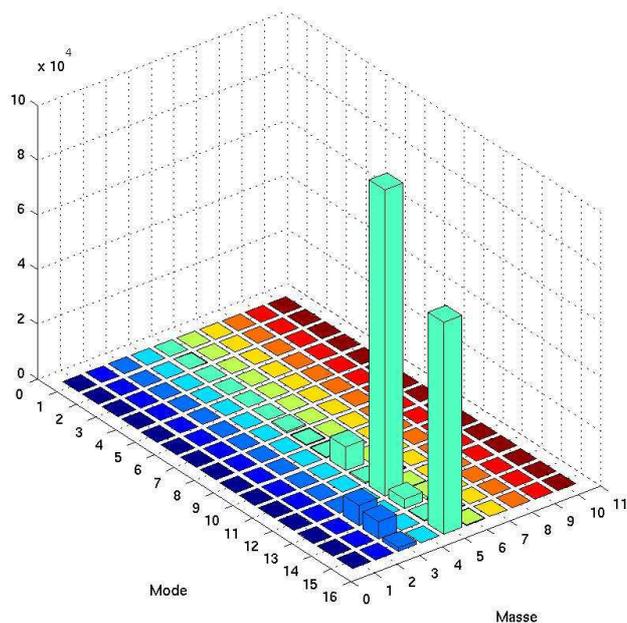


FIG. 8.27 – Valeur de l'indicateur au voisinage de chaque masselotte ajoutée, en fonction de l'ordre du mode considéré

difficulté rencontrée lors de cette étude a finalement été le manque de difficulté : la pièce choisie n'est que peu sensible aux modifications apportées, en raison de sa nature : deux pièces soudées, l'une étant beaucoup plus volumineuse que l'autre, apparaissant finalement pratiquement comme "accessoire" sur la première. Cependant, les modifications les plus sensibles, entraînant quelques pour-cents de variation ont été correctement détectées, avec un faible coût de calcul, et correspondent bien aux observations faites expérimentalement.

Conclusions et perspectives

A partir d'une analyse de structures simples couplées, nous avons montré que des phénomènes d'hypersensibilité pouvaient apparaître en fonction des caractéristiques de la structure et de l'excitation. Dans le cas de poutres couplées, nous avons pu facilement définir un angle critique à partir du seul rapport des nombres d'ondes de flexion et de vibrations longitudinales, alors que le cas des plaques nécessite plus de paramètres pour sa caractérisation. Quoi qu'il en soit, sur des structures aussi simples, une faible variation des caractéristiques de couplage peut entraîner de fortes variations de la réponse (déplacement, puissance transmise, caractéristiques propres...). Ce constat nous a amené à nous interroger sur le moyen de détecter, sur une structure plus complexe, quelles étaient les zones qui pouvaient être à l'origine de comportements hypersensibles. Nous avons proposé un outil pour y parvenir, il est basé sur des techniques utilisées en recalage calculs-essais, et ne nécessite qu'une résolution du problème considéré, utilisant les caractéristiques de la structure nominale. Un calcul d'indicateur construit à partir des structures modifiées en accord avec les intervalles de tolérance permet la localisation des zones en cause. Cet indicateur, construit en utilisant des paramètres physiques, a été relié aux variations des caractéristiques propres de la structure, et nous avons pu l'intégrer à la méthode des éléments finis, permettant l'étude de nombreuses structures industrielles. Enfin, une validation expérimentale a été menée afin de confirmer les tendances observées numériquement.

La méthode proposée est purement numérique, et s'appuie sur le modèle de la structure de référence, ce qui lui donne deux limites fortes : d'une part, si l'on ne possède pas de modèle d'une structure, il est impossible de détecter les sources d'incertitude par la méthode proposée, et d'autre part, si le modèle que l'on possède ne permet pas la prise en compte des causes de l'hypersensibilité, l'application ne mènera pas au bon résultat. Ce dernier cas est important : la plupart du temps, les causes de l'hypersensibilité sont associées à des liaisons ou des assemblages de pièces, car une pièce en elle-même ne peut avoir que très rarement un comportement hypersensible. Nous avons vu plusieurs exemples dans lesquels des petites modifications de liaisons étaient responsables de modifications de comportement. Mais il existe des situations plus délicates, que la méthode proposée ne saura pas détecter parce que le modèle ne prend pas en compte certains paramètres, comme par exemple le cas de la tôle montée entre deux supports, qui lors du montage est parfois contrainte si ses dimensions sont trop importantes, ce qui peut entraîner des contraintes résiduelles, voire un flambement de la pièce, et par exemple transformer le mouvement de la plaque en mouvement de coque, qui est complètement différent. Ce genre de situations n'est généralement pas prévu par le modèle numérique de la pièce, si bien que nous sommes incapables de détecter la source d'erreur en appliquant la méthode, tout comme nous sommes incapables de prévoir les modifications des vibrations de la pièce, puisque le modèle ne peut pas représenter correctement son comportement. Bien sûr, un modèle plus complexe saura prendre en compte ces comportements, mais un grand nombre de maillages industriels sont souvent construits avec comme objectif la représentation du comportement d'une structure nominale donnée, et ne sont pas forcément capables de prendre en compte des comportements spécifiques, bien que cela soit théoriquement possible.

Concernant plus précisément l'application de la méthode, plusieurs points de développement sont envisageables. Le premier point concerne sans doute l'analyse de différents types de modifications simultanées, afin de savoir si l'indicateur est plus sensible à certaines modifications qu'à d'autres, et pour ainsi éventuellement valider la possibilité de son utilisation en considérant un maillage prenant en compte toutes les variations autorisées par les contraintes de fabrication. Dans le cadre de l'étude d'une structure complexe, possédant un grand nombre de paramètres variables, il est primor-

dial d'avoir une stratégie correcte, car même si le problème complet ne demande à être résolu qu'une fois, l'assemblage des matrices d'une structure peut prendre du temps. On peut ainsi gagner du temps en n'effectuant pas l'assemblage complet de la structure, mais en calculant seulement les composantes des matrices modifiées par les variations des paramètres structuraux. De même, le choix des valeurs des paramètres à prendre en compte est une question délicate si le nombre de paramètres est important, et l'on peut alors utiliser des approches déjà développées afin de réduire le temps de calcul, comme les méthodes de perturbations, ou les plans d'expérience, qui permettent d'optimiser ces choix. Un autre point qui permet de gagner du temps lors de l'application de la méthode est de modifier légèrement l'expression du résidu 6.1, en utilisant le terme K_0^{-1} au lieu de K_1^{-1} . Ceci permet d'économiser une inversion de matrice à chaque calcul d'indicateur, ce qui peut être avantageux dans le cas où le nombre de paramètres variables est important. Cependant les propriétés démontrées, permettant de relier l'indicateur aux variations des caractéristiques propres de la structure ne sont alors plus valables, et une faible différence entre K_0 et K_1 pourrait entraîner une importante différence entre leurs inverses, c'est en tous cas ce que semblent indiquer les premiers tests réalisés dans ce sens. Cette modification est donc à opérer avec précaution, et nécessite un approfondissement. Dans le même esprit, l'utilisation d'une base modale tronquée pour l'estimation de la matrice de flexibilité pourrait être utilisée, mais là encore il convient d'être prudent, puisque la seule base modale connue est celle de la structure de référence : une base modale tronquée nous donnerait donc une estimation de K_0^{-1} , qui n'est pas forcément la matrice à utiliser. Enfin, l'utilisation d'indicateurs d'expressions différentes, issus du domaine du recalage calculs-essais, pourraient peut-être apporter des informations différentes suivant les applications, là aussi c'est un point à développer. Notons que l'outil proposé peut également être utile en recalage, pour choisir les paramètres pertinents à recalculer.

L'étude éléments finis présentée ici est limitée à l'analyse modale, qui n'est pas toujours suffisante pour caractériser le comportement d'une structure. Ainsi, le développement d'un indicateur permettant la prise en compte de sollicitations externes étendrait largement le champ d'application de la méthode.

Un point important pour l'évolution de la méthode pourrait être sa comparaison, et son utilisation éventuelle en parallèle ou intégrée aux techniques de localisation d'erreurs de discrétisation. Pour le moment, la solution de référence est la solution du modèle éléments finis nominal, qui diffère en réalité de la solution du modèle continu en partie à cause de ces erreurs de discrétisation. Il paraît donc important de savoir dans quelle mesure ces localisations peuvent se faire simultanément.

Pour terminer, on peut s'interroger sur le lien entre les dispersions de vibrations, qui est le thème central du travail réalisé, et le ressenti, que ce soit au niveau vibratoire ou acoustique, de ces dispersions au niveau perceptif par les utilisateurs. Car il est possible que certains types de dispersions, que l'on s'évertue à réduire, ne soit pas perçues par les utilisateurs, alors que d'autres, plus faibles, soient ressenties comme une gêne importante. Ce sont évidemment ces dernières que l'on doit réduire pour améliorer le confort d'utilisation.

Bibliographie

- [AH 01] ALLAIRE G. et HENROT A. On some recent advances in shape optimization. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, série II b*, 2001, vol 329, p 383–396.
- [AO 97] AINSWORTH M. et ODEN J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1997, vol 142, p 1–88.
- [BA 95] BEALE L.S. et ACCORSI M.L. Power flow in two- and three-dimensional frame structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, vol 185, n°4, p 685–702.
- [Bal 01] BALMÈS E. *Structural Dynamics Toolbox For Use With Matlab, User's Guide Version 4.1 [en ligne]*. Sdtools, Paris, 2001. Disponible à l'adresse <http://www.sdtools.com/pdf/sdt.pdf> (consulté le 06.11.2002).
- [BB 01] BOBILLOT A. et BALMÈS E. Solving minimum dynamic residual expansion and using results for error localization. *IMAC XIX*. Kissimmee, Florida, USA, February 2001. p 387-443.
- [Ber 96] BERNHARD R.J. The limits of predictability due to manufacturing and environmentally induced uncertainty. *Inter-Noise 96*. Liverpool, UK, 1996. p 2867-2872.
- [BI 99] BOUILLARD P. et IHLENBURG F. Error estimation and adaptivity for the finite element method in acoustics : 2D and 3D applications. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1999, vol 176, p 147–163.
- [Bou 97] BOUILLARD P. *Méthodes de contrôle de la qualité de solutions des éléments finis (application à l'acoustique)*. Thèse, Université Libre de Belgique, 1997. 195 p.
- [CG 01] COMBESCURE A. et GUSIC G. Nonlinear buckling of cylinders under external pressure with nonaxisymmetric thickness imperfections using the COMI axisymmetric shell element. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol 38, p 6207–6226.
- [DLL 02] DERAEMAERKER A., LADEVÈZE P. et LECONTE P. Model size reduction for the CRE model updating method applied to a mirror structure. *International Conference on Structural Dynamics Modelling*. Funchal, Madeira, Portugal, June 2002. p 635-644.
- [DP 88] DUBOIS D. et PRADE H. *Théorie des possibilités : application à la représentation des connaissances en informatique*. Paris, Masson, 1988, 292 p.
- [DTLJ 01] DESSOMBZ O., THOUVEREZ F., LAÏNÉ J. P. et JÉZÉQUEL L. Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol 239, n°5, p 949–968.
- [Fah 93] FAHY F.J. Statistical energy analysis : A wolf in sheep's clothing ? *Inter-Noise 93*. Leuven, Belgium, August 1993. p 13-26.

- [FJK 98] FRITZEN C.P., JENNEWEIN D. et KIEFER T. Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, vol 12, n° 1, p 163–186.
- [FM 95] FRISWELL M.I. et MOTTERSHEAD J.E. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1995, 286 p.
- [GBL 02] GAYTON N., BOURINET J.M. et LEMAIRE M. CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, 2002. Sous presse.
- [GK 96] GHANEM R.G. et KRUGER R.M. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1996, vol 129, p 289–303.
- [Guo 97] GUO Y.P. Flexural wave transmission through angled structural joints. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1997, vol 97, n° 1, p 289–297.
- [Guy 84] GUYADER J.L. *Méthode d'étude des vibrations des milieux continus imparfaitement caractérisés*. Thèse ès-sciences, INSA Lyon, UCB Lyon I, France, 1984. 195 p.
- [Guy 87] GUYADER J.L. Vibrations libres de milieux continus élastiques imparfaitement caractérisés. application à la justification de l'hypothèse de love-kirchhoff. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1987, vol 6, n°2, p 231–252.
- [Gys 90] GYSIN H. Comparison of expansion methods for FE modeling error localization. *IMAC 8*. Kissimmee, Florida, USA, February 1990. p 195-205.
- [Höh 96] HÖHLE U. On the fundamentals of fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol 201, p 786–826.
- [HW 91] HORNER J.L. et WHITE R.G. Prediction of vibrational power transmission through bends and joints in beam-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, vol 147, n° 1, p 87–103.
- [HW 99] HANSS M. et WILLNER K. On using fuzzy arithmetic to solve problems with uncertain model parameters. *Euromech 405 : Numerical Modelling Of Uncertainties*. Valenciennes, France, November 1999. p 85-92. Disponible à l'adresse <http://www.mecha.uni-stuttgart.de/Mitarbeiter/Hanss/papers/euromech99.pdf> (consulté le 06/11/02).
- [Ibr 87] IBRAHIM R.A. Structural dynamics with parameters uncertainties. *Applied Mechanics Review*, 1987, vol 40, n° 3, p 309–328.
- [Ka 97] KANTROVITZ M. et AL . *FAQ : Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems*. disponible à l'adresse <http://www.cs.cmu.edu/Web/Groups/AI/html/faqs/ai/fuzzy/part1/faq.html> (consulté le 06/11/2002), 1997.
- [Lad 75] LADEVÈZE P. *Comparaison de modèles de milieux continus*. Thèse ès-sciences, Université Paris VI, France, 1975.
- [LB 99] LANGLEY R.S. et BREMNER P. A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999, vol 105, n° 3, p 1657–1671.
- [LCTL 99] LALLEMAND B., CHERKI A., TISON T. et LEVEL P. Fuzzy modal finite element analysis of structures with imprecise material properties. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol 220, n° 2, p 353–364.

- [LD 95] LYON R.H. et DEJONG R.G. *Theory and application of Statistical Energy Analysis, second edition*. Boston, Butterworth-Heinemann, 1995. 277 p.
- [Lei 93] LEISSA A. *Vibration of shells*. Ohio State University, Columbus Ohio : published for the Acoustical Society of America through the American Institute of Physics, 1993. 428 p.
- [LH 90] LANGLEY R.S. et HERON K.H. Elastic wave transmission through plate/beam junctions. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, vol 143, n°2, p 241–253.
- [LL 90] LUBER W. et LOTZE A. Application of sensitivity methods for error localization in finite element systems. *IMAC 8*. Kissimmee, Florida, USA, February 1990. p 598-604.
- [LP 90] LALLEMENT G. et PIRANDA J. Localization methods for parametric updating of finite elements models in elastodynamics. *IMAC 8*. Kissimmee, Florida, USA, February 1990. p 579-585.
- [LPTL 99] LALLEMAND B., PLESSIS G., TISON T. et LEVEL P. Neumann expansion for fuzzy finite element analysis. *Engineering computations*, 1999, vol 16, n°5, p 572–583.
- [LS 91] LINK M. et SANTIAGO O.F. Updating and localizing structural errors based on minimisation of equation errors. *International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing, ESA/ESTEC*. Noordwijk, Holland, April 1991. p 503-510.
- [LT 98] LADEVÈZE P. et TINSLEY O.J. Advances in adaptive computational methods in mechanics, chapitre A. A modelling error estimator for dynamic structural model updating. Amsterdam, Elsevier Science, 1998. p 135-151.
- [MF 93] MOTTERSHEAD J.E. et FRISWELL M.I. Model updating in structural dynamics : a survey. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, vol 167, n°2, p 347–375.
- [MS 01] MACE B.R. et SHORTER P.J. A local modal/perturbation method for estimating frequency response statistics of built-up structures with uncertain properties. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol 242, n°5, p 793–811.
- [MV 99] MOENS D. et VANDEPITTE D. A method for the calculation of fuzzy frequency response functions of uncertain structures based on modal superposition. *Euromech 405 : Numerical Modelling Of Uncertainties*. Valenciennes, France, November 1999. p 93-101.
- [PHKJ 01] PARK D.H., HONG S.Y., KIL H.G. et JEON J.J. Power flow models and analysis of in-plane waves in finite coupled thin plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, vol 244, n°4, p 651–668.
- [Pil 98] PILLET M. *Les plans d'expérience par la méthode Taguchi*. Paris, Les éditions d'organisation, 1998. 330 p.
- [Réb 95] RÉBILLARD E. *Vibro-acoustique des réseaux de plaques : modélisation, hypersensibilité et populations de structures*. Thèse, INSA Lyon, France, 1995. 184 p.
- [RG 95] RÉBILLARD E. et GUYADER J.L. Vibrational behaviour of a population of coupled plates : hypersensitivity to the connexion angle. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, vol 188, n°3, p 435–454.
- [RG 97] RÉBILLARD E. et GUYADER J.L. Vibrational behaviour of lattices of plates : basic behaviour and hypersensitivity phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, vol 205, n°3, p 337–354.

- [Sch 01] SCHUËLLER G.I. Computational stochastic mechanics - recent advances. *Computers and Structures*, 2001, vol 79, p 2225–2234.
- [SLZ 98] SHI Z.Y., LAW S.S. et ZHANG L.M. Structural damage localization from modal energy change. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, vol 218, n° 5, p 825–844.
- [Soi 93] SOIZE C. A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic prediction using the theory of structural fuzzy. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, vol 94, n° 2, p 849–865.
- [Ver 99] VERFURTH R. A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1999, vol 176, p 419–440.
- [VTJ 99] VIKTOROVITCH M, THOUVEREZ F. et JÉZÉQUEL L. A new random boundary element formulation applied to high frequency phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, vol 223, n° 2, p 273–296.
- [WSL 96] WU C., SONG S. et LEE E. S. Approximate solutions, existence and uniqueness of the cauchy problem of fuzzy differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol 202, p 629–644.
- [Zad 65] ZADEH L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, vol 8, p 338–353.
- [ZT 91] ZIENKIEWICZ O.C. et TAYLOR R. L. *La méthode des éléments finis, formulation de base et problèmes linéaires*. Paris, AFNOR, 1991. 620 p. (Afnor Technique).
- [ZZ 99] ZHU J.Z. et ZHANG Z. The relationship of some a posteriori estimators. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 1999, vol 176, p 463–475.

Annexe A

Démonstration que l'indicateur retenu définit une distance

Dans cette annexe est présentée une démonstration permettant de s'assurer que le résidu 4.7 peut être utilisé pour définir une distance mathématique.

$$\begin{aligned}
 R(U) = & \frac{ES_1}{L} (U|_{x=0} - U_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{I_1} \frac{1}{\omega^2 \rho S_1} \left(\frac{d}{dx} [ES_1 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_1 U \right)^2 dx + \\
 & + \frac{ES_1}{L} \left(U|_{x=x_0^-} - U|_{x=x_0^+} \right)^2 + \frac{L}{ES_1} \left(ES_1 \frac{dU}{dx} |_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{dU}{dx} |_{x=x_0^+} \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\omega^2 \rho S_2} \left(\frac{d}{dx} [ES_2 \frac{dU}{dx}] + \omega^2 \rho S_2 U - F \right)^2 dx + \frac{L}{ES_2} \left(ES_2 \frac{dU}{dx} |_{x=L} - F_0 \right)^2
 \end{aligned}$$

Ce résidu $R(U)$ est en fait construit à partir de l'application $R_d(U, V)$ suivante :

$$\begin{aligned}
 R_d : \Omega^2 & \rightarrow \mathfrak{R}^+ \\
 (U, V) & \longmapsto R_d(U, V) = \frac{ES_1}{L} (U|_{x=0} - U_0 - V|_{x=0} + V_0)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{I_1} \frac{1}{\omega^2 \rho S_1} \left(\frac{d}{dx} [ES_1 \frac{d(U-V)}{dx}] + \omega^2 \rho S_1 (U - V) \right)^2 dx + \\
 & + \frac{ES_1}{L} \left(U|_{x=x_0^-} - U|_{x=x_0^+} - V|_{x=x_0^-} + V|_{x=x_0^+} \right)^2 + \\
 & + \frac{L}{ES_1} \left(ES_1 \frac{d(U-V)}{dx} |_{x=x_0^-} - ES_2 \frac{d(U-V)}{dx} |_{x=x_0^+} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\omega^2 \rho S_2} \left(\frac{d}{dx} [ES_2 \frac{d(U-V)}{dx}] + \omega^2 \rho S_2 (U - V) - F + F \right)^2 dx + \\
 & + \frac{L}{ES_2} \left(ES_2 \frac{dU}{dx} |_{x=L} - F_0 - ES_2 \frac{dU}{dx} |_{x=L} + F_0 \right)^2
 \end{aligned}$$

L'écriture de R_d sous cette forme permet de mettre en évidence que les trois propriétés définissant une distance mathématique sont vérifiées :

- $\forall (U, V) \in \Omega^2, R_d(U, V) = R_d(V, U)$
- $\forall (U, V) \in \Omega^2, R_d(U, V) = 0 \Leftrightarrow U = V$
- $\forall (U, V, W) \in \Omega^2, R_d(U, W) \leq R_d(U, V) + R_d(V, W)$

Ces trois propriétés sont vérifiées grâce à la définition de R_d sous la forme d'une somme de carrés, faisant intervenir des équations différentielles et toutes les conditions limites associées nécessaires.

Le résidu utilisé est alors construit en considérant $R(U) = R_d(U, U_{sol})$, ceci permettant l'obtention de l'expression développée dans le texte.

Annexe B

Modes propres de la poutre de soubassement de 806

Les déformées des différentes parties constitutives de la poutre de soubassement sont présentées ici, pour les dix premiers modes propres. Les grandeurs tracées sont les contributions élémentaires à l'énergie cinétique de la poutre.

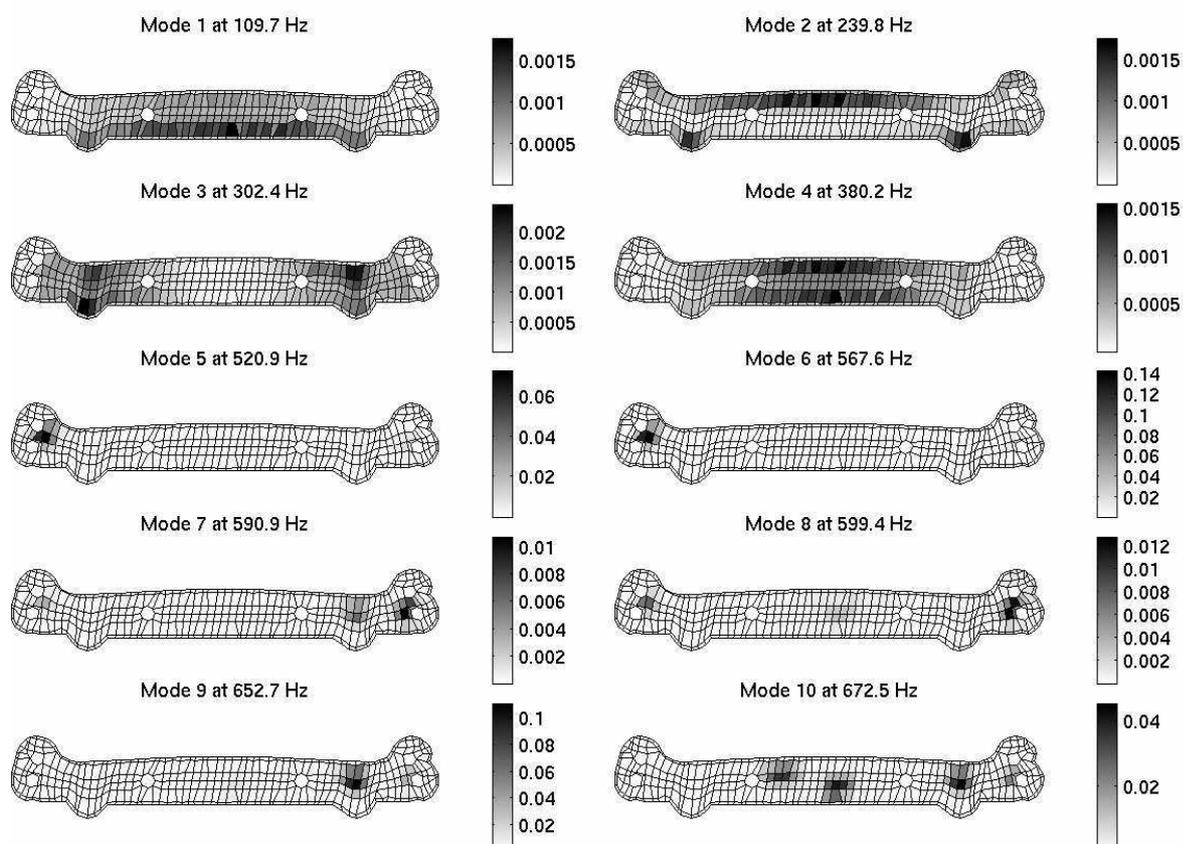


FIG. B.1 – Déformées propres de la couche intermédiaire

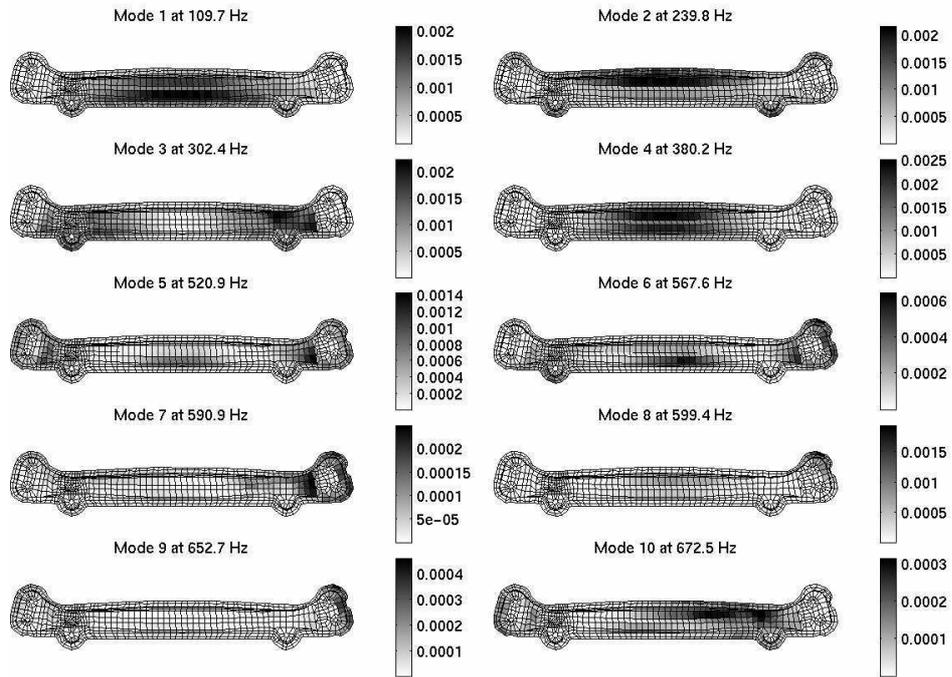


FIG. B.2 – Déformées propres de la couche inférieure

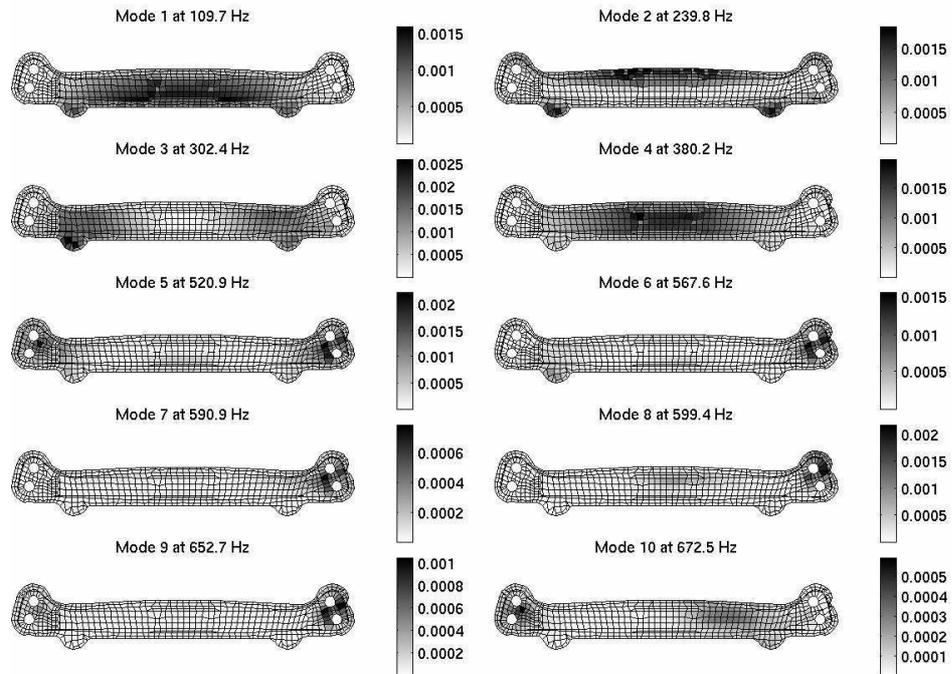


FIG. B.3 – Déformées propres de la couche supérieure

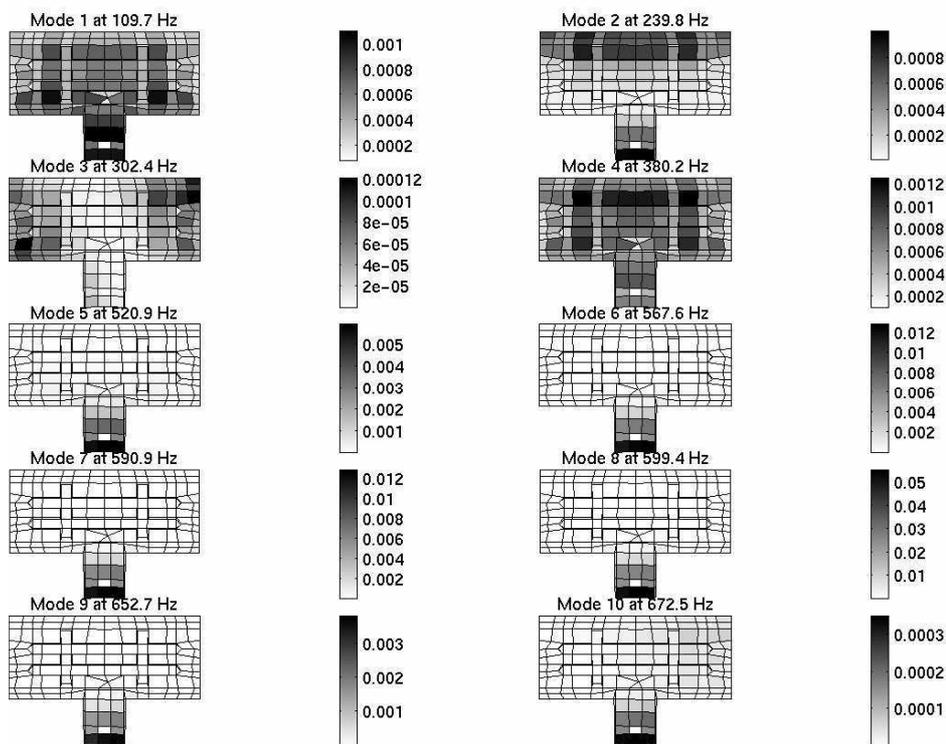


FIG. B.4 – Déformées propres du support supérieur

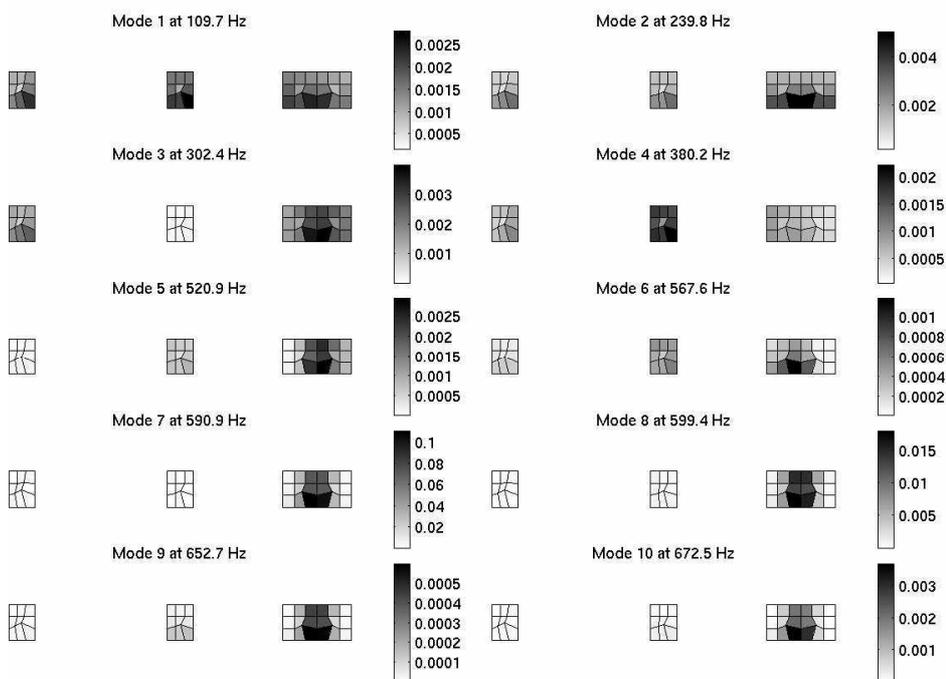


FIG. B.5 – Déformées propres des supports inférieurs

Annexe C

Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente de flexion

C.1 Relations de continuité

Les relations écrites sur la jonction vont permettre de déterminer complètement le champ de déplacement de la structure. Les équations à vérifier sont au nombre de huit. Pour les 6 premières, il faut distinguer les différents cas, suivant que les ondes de membranes sont progressives ou évanescentes.

On différencie donc les 3 cas suivants :

- Cas 1 : $\mu > \lambda \geq k_x$
- Cas 2 : $\mu \geq k_x > \lambda$
- Cas 3 : $k_x > \mu > \lambda$

1. $u_r = u_t$

- Cas 1 et 2 :

$$\frac{k_x}{k}(C - F) + \frac{k_{sy}}{k}(P + Q) = 0$$

- Cas 3 :

$$\frac{k_x}{k}(C - F) - \frac{k_{sy}}{k}(P + Q) = 0$$

2. $v_r - v_t \cos \alpha - w_t \sin \alpha = 0$

- Cas 1 :

$$\frac{k_{ly}}{k}(C + F \cos \alpha) + (H + K) \cos \alpha - \frac{k_x}{k}(P - Q \cos \alpha) = 0$$

- Cas 2 et 3 :

$$-\frac{k_{ly}}{k}(C + F \cos \alpha) + (H + K) \cos \alpha - \frac{k_x}{k}(P - Q \cos \alpha) = 0$$

3. $w_i + w_r + v_t \sin \alpha - w_t \cos \alpha = 0$

- Cas 1 :

$$A + B + \frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha F - (H + K) \cos \alpha + \frac{k_x}{k} \sin \alpha = -1$$

– Cas 2 et 3 :

$$A + B - \frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha F - (H + K) \cos \alpha + \frac{k_x}{k} \sin \alpha = -1$$

4. $F_x^r = F_x^t$

– Cas 1 :

$$2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} (C + F) + \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} (P - Q) = 0$$

– Cas 2 et 3 :

$$-2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} (C + F) + \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} (P - Q) = 0$$

5. $F_y^r - F_y^t \cos \alpha - F_z^t \sin \alpha = 0$

– Cas 1 et 2 :

$$j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} (C - F \cos \alpha) + j \frac{k_x k_{sy} (\nu - 1)}{k^2} (P + Q \cos \alpha) + \dots \\ \dots + \frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} \sin \alpha (jH + K) = 0$$

– Cas 3 :

$$j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} (C - F \cos \alpha) - j \frac{k_x k_{sy} (\nu - 1)}{k^2} (P + Q \cos \alpha) + \dots \\ \dots + \frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} \sin \alpha (jH + K) = 0$$

6. $F_z^i + F_z^r + F_y^t \sin \alpha - F_z^t \cos \alpha = 0$

– Cas 1 et 2 :

$$\frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} (A + H \cos \alpha) + \frac{D(-1 + \nu^2) k_e (k_e^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} (B + K \cos \alpha) + \dots \\ \dots + j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} F \sin \alpha + j \frac{k_x k_{sy} (\nu - 1)}{k^2} Q \sin \alpha = j \frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k}$$

– Cas 3 :

$$\frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} (A + H \cos \alpha) + \frac{D(-1 + \nu^2) k_e (k_e^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k} (B + K \cos \alpha) + \dots \\ \dots + j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} F \sin \alpha - j \frac{k_x k_{sy} (\nu - 1)}{k^2} Q \sin \alpha = j \frac{D(-1 + \nu^2) k_y (k_y^2 + (2 - \nu) k_x^2)}{E h k}$$

7. $R_i + R_r - R_t = 0$

$$j \frac{k_y}{k} (A + H) + \frac{k_e}{k} (B + K) = j \frac{k_y}{k}$$

8. $M_i + M_r - M_t = 0$

$$\frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} A + \frac{-k_e^2 + \nu k_x^2}{k^2} B + \frac{-k_y^2 - \nu k_x^2}{k^2} H + \frac{k_e^2 - \nu k_x^2}{k^2} K = \frac{-k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2}$$

C.2 Système linéaire

Ces équations peuvent donc se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

où : $X^t = [A B C F H K P Q]$, correspondant aux amplitudes des ondes définies dans les paragraphes 3.1 et 3.1.1.

et T est une matrice 8 par 8, dont l'expression dépend du cas considéré :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

L'expression de T est détaillée plus bas.

b est le terme correspondant à l'onde incidente :

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \\ j \frac{k_y}{k} \\ \frac{-k_y^2+\nu k_x^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

C.2.1 Premier cas : $\mu > \lambda \geq k_x$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & \frac{k_{ly}}{k} & \frac{k_{ly}}{k} \cos \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} & 2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{k} & \frac{k_{sy}}{k} \\ \sin \alpha & \sin \alpha & -\frac{k_x}{k} & \frac{k_x}{k} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos \alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{D(-1+\nu^2)k_x(k_x^2+(2-\nu)k_y^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \sin \alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_x}{k} & 0 & 0 \\ \frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_x^2 + \nu k_y^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos\alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \sin\alpha \\ 0 & j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 \\ 0 & \frac{-k_y^2 - \nu k_x^2}{k^2} & \frac{k_e^2 - \nu k_x^2}{k^2} & 0 \end{bmatrix}$$

C.2.2 Second cas : $\mu \geq k_x > \lambda$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} & -\frac{k_{ly}}{k} \cos\alpha \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} \sin\alpha \\ 0 & 0 & -2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} & -2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{k} & \frac{k_{sy}}{k} \\ \sin\alpha & \sin\alpha & -\frac{k_x}{k} & \frac{k_x}{k} \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -\cos\alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin\alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos\alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \sin\alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ \frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_e^2 + \nu k_x^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos\alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \sin\alpha \\ 0 & j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 \\ 0 & \frac{-k_y^2 - \nu k_x^2}{k^2} & \frac{k_e^2 - \nu k_x^2}{k^2} & 0 \end{bmatrix}$$

C.2.3 Troisième cas : $k_x > \mu > \lambda$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} & -\frac{k_{ly}}{k} \cos\alpha \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} \sin\alpha \\ 0 & 0 & -2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} & -2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_{sy}}{k} & -\frac{k_{sy}}{k} \\ \sin\alpha & \sin\alpha & -\frac{k_x}{k} & \frac{k_x}{k} \cos\alpha \\ -\cos\alpha & -\cos\alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin\alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos\alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \sin\alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ \frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_e^2 + \nu k_x^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & -j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & -j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos\alpha \\ j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & -j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \sin\alpha \\ 0 & j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 \\ 0 & \frac{-k_e^2 - \nu k_x^2}{k^2} & \frac{k_e^2 - \nu k_x^2}{k^2} & 0 \end{bmatrix}$$

C.2.4 Les variables indépendantes du problème

Ce problème peut se ramener à un nombre réduit de variables indépendants. En effet, en notant $\xi = \rho \frac{h^2 \omega^2}{12E}$, le système précédent peut se mettre sous une forme ne dépendant que des quatre variables ξ , ν , α (angle de connexion des plaques) et θ (angle d'incidence de l'onde de flexion) :

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{k} &= \cos\theta \\ \frac{k_y}{k} &= \sin\theta \\ \frac{\lambda^4}{k^4} &= (1 - \nu^2) \rho \frac{h^2 \omega^2}{12E} = (1 - \nu^2) \xi \\ \frac{\mu^4}{k^4} &= \frac{4}{(1-\nu)^2} \frac{\lambda^4}{k^4} = 4 \frac{1+\nu}{1-\nu} \xi \\ \frac{k_e^2}{k^2} &= 1 + \cos^2\theta \\ \frac{k_{ly}^2}{k^2} &= \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{k_x^2}{k^2} = \sqrt{(1 - \nu^2) \xi} - \cos^2\theta \\ \frac{k_{sy}^2}{k^2} &= \frac{\mu^2}{k^2} - \frac{k_x^2}{k^2} = 2 \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu} \xi} - \cos^2\theta \\ \frac{Dk^2}{Eh} &= \sqrt{\frac{\xi}{1-\nu^2}} \end{aligned}$$

Annexe D

Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente longitudinale

D.1 Premier cas : $k \geq k_x$

Le système linéaire obtenu en écrivant les relations de continuité peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

$$\text{où : } X^t = [A B C F H K P Q]$$

et T est une matrice 8 par 8 :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{\lambda} & -\frac{k_x}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{ly}}{\lambda} & -\frac{k_{ly}}{\lambda} \cos \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \frac{k_{ly}}{\lambda} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 2 \frac{k_x k_{ly}}{\lambda k} & 2 \frac{k_x k_{ly}}{\lambda k} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{\lambda} & \frac{k_{sy}}{\lambda} \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & \frac{k_x}{\lambda} & -\frac{k_x}{\lambda} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha & 0 & \frac{k_x}{\lambda} \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k \lambda} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k \lambda} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k} \cos \alpha \\ j \frac{Dk_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{Dk_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k (-1 + \nu^2)} \sin \alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ k_y^2 + \nu k_x^2 & -k_e^2 + \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k\lambda} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k\lambda} \cos\alpha \\ j \frac{Dk_y(k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{Dk_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & -j \frac{k_x k_{sy}}{k\lambda(1+\nu)} \sin\alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ -k_y^2 - \nu k_x^2 & k_e^2 - \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'expression du vecteur b est :

$$b = \begin{bmatrix} -\frac{k_x}{\lambda} \\ -\frac{k_y}{\lambda} \\ 0 \\ 2 \frac{k_x k_{ly}}{\lambda k} \\ -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k\lambda} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

D.2 Second cas : $k < k_x$.

Le système linéaire obtenu en écrivant les relations de continuité peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

$$\text{où : } X^t = [A B C F H K P Q]$$

b a la même expression que dans le premier cas.

et T est une matrice 8 par 8 :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

Les composantes de T_{11} et T_{12} sont les mêmes que celles données dans le premier cas.

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k} \cos\alpha \\ \frac{Dk_y(-k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{Dk_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{\lambda k(-1+\nu^2)} \sin\alpha \\ \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ -k_y^2 + \nu k_x^2 & -k_e^2 + \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} \frac{D(-1+\nu^2)k_y(-k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k\lambda} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k\lambda} \cos\alpha \\ \frac{Dk_y(-k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{Dk_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & -j \frac{k_x k_{sy}}{k\lambda(1+\nu)} \sin\alpha \\ \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ k_y^2 - \nu k_x^2 & k_e^2 - \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Annexe E

Plaques semi-infinies couplées : cas d'une onde incidente transversale dans le plan

On impose cette fois comme onde excitatrice l'onde suivante :

$$\begin{cases} u_i = -\frac{k_{sy}}{\mu} e^{-jk_x x - jk_{sy} y} \\ v_i = \frac{k_x}{\mu} e^{-jk_x x - jk_{sy} y} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Cette onde est supposée avoir une incidence d'angle θ :

$$k_x = \mu \cos \theta$$

$$k_{sy} = \mu \sin \theta$$

Avec toujours : $\mu^2 = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \omega^2$; $k^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ et $k_e = \sqrt{k^2 + k_x^2}$

Il convient de distinguer 3 cas.

E.1 Premier cas : $k > \lambda \geq k_x$

Alors $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ et $k_{ly} = \sqrt{\lambda^2 - k_x^2}$:

Expression des ondes réfléchies :

$$w_r = e^{-jk_x x} (A e^{jk_y y} + B e^{k_e y})$$

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} C e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

Et pour les ondes transmises :

$$w_t = e^{-jk_x x} (H e^{-jk_y y} + K e^{-k_e y})$$

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{-jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} F e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

Toutes les ondes sont alors progressives.

Le système linéaire obtenu en écrivant les relations de continuité peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

$$\text{où : } X^t = [A \ B \ C \ F \ H \ K \ P \ Q]$$

et T est une matrice 8 par 8 :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} & -\frac{k_{ly}}{k} \cos \alpha \\ 1 & 1 & 0 & \frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} & 2\frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{k} & \frac{k_{sy}}{k} \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j\frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j\frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos \alpha \\ j\frac{Dk_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{Dk_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j\frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{(-1+\nu^2)} \sin \alpha \\ j\frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ \frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_e^2 + \nu k_x^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j\frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin \alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin \alpha & j\frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & j\frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos \alpha \\ j\frac{Dk_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos \alpha & \frac{Dk_e(-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos \alpha & 0 & -j\frac{k_x k_{sy}}{(1+\nu)k^2} \sin \alpha \\ j\frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ -k_y^2 - \nu k_x^2 & k_e^2 - \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'expression du vecteur b est :

$$b = \begin{bmatrix} \frac{k_{sy}}{\mu} \\ -\frac{k_x}{\mu} \\ 0 \\ \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{\mu k} \\ j\frac{k_{sy} k_x (\nu-1)}{k \mu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

E.2 Second cas : $k \geq k_x > \lambda$

Alors $k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ et $k_{ly} = j\sqrt{k_x^2 - \lambda^2}$:

Expression des ondes réfléchies :

$$\begin{aligned}
w_r &= e^{-jk_x x} (A e^{jk_y y} + B e^{k_\epsilon y}) \\
u_r &= e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right) \\
v_r &= e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)
\end{aligned}$$

Et pour les ondes transmises :

$$\begin{aligned}
w_t &= e^{-jk_x x} (H e^{-jk_y y} + K e^{-k_\epsilon y}) \\
u_t &= e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right) \\
v_t &= e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} F e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)
\end{aligned}$$

Toutes les ondes sont alors progressives, exceptées les ondes longitudinales.

Le système linéaire obtenu en écrivant les relations de continuité peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

$$\text{où : } X^t = [A \ B \ C \ F \ H \ K \ P \ Q]$$

et T est une matrice 8 par 8 :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & \frac{k_{ly}}{k} & \frac{k_{ly}}{k} \cos \alpha \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & -2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} & -2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{k} & \frac{k_{sy}}{k} \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy}^2 - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}^2}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos \alpha \\ j \frac{Dk_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{Dk_\epsilon(-k_\epsilon^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{(-1+\nu^2)} \sin \alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_\epsilon}{k} & 0 & 0 \\ \frac{k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_\epsilon^2 + \nu k_x^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} j \frac{D(-1+\nu^2)k_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin \alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_\epsilon(-k_\epsilon^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin \alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos \alpha \\ j \frac{Dk_y(k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos \alpha & \frac{Dk_\epsilon(-k_\epsilon^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos \alpha & 0 & -j \frac{k_x k_{sy}}{(1+\nu)k^2} \sin \alpha \\ j \frac{k_y}{k} & \frac{k_\epsilon}{k} & 0 & 0 \\ -k_y^2 - \nu k_x^2 & k_\epsilon^2 - \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E.3 Troisième cas : $k_x > k > \lambda$

Alors $k_y = \sqrt{k_x^2 - k^2}$ et $k_{ly} = j\sqrt{k_x^2 - \lambda^2}$:

Expression des ondes réfléchies :

$$w_r = e^{-jk_x x} (A e^{k_y y} + B e^{k_e y})$$

$$u_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_{sy}}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

$$v_r = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_{ly}}{k} C e^{-jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} P e^{jk_{sy} y} \right)$$

Et pour les ondes transmises :

$$w_t = e^{-jk_x x} (H e^{-k_y y} + K e^{-k_e y})$$

$$u_t = e^{-jk_x x} \left(\frac{k_x}{k} F e^{jk_{ly} y} - \frac{k_{sy}}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

$$v_t = e^{-jk_x x} \left(-\frac{k_{ly}}{k} F e^{jk_{ly} y} + \frac{k_x}{k} Q e^{-jk_{sy} y} \right)$$

Toutes les ondes sont alors évanescentes, exceptées les ondes de cisaillement dans le plan.

Le système linéaire obtenu en écrivant les relations de continuité peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$TX = b$$

$$\text{où : } X^t = [A B C F H K P Q]$$

et T est une matrice 8 par 8 :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \\ 0 & 0 & \frac{k_{ly}}{k} & \frac{k_{ly}}{k} \cos \alpha \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{k_{ly}}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & -2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} & -2 \frac{k_x k_{ly}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{k_{sy}}{k} & \frac{k_{sy}}{k} \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & \frac{k_x}{k} & -\frac{k_x}{k} \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\cos \alpha & 0 & \frac{k_x}{k} \sin \alpha \\ 0 & 0 & \frac{k_{sy} - k_x^2}{k^2} & \frac{k_x^2 - k_{sy}}{k^2} \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} & -j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{k^2} \cos \alpha \\ \frac{Dk_y (-k_y^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & \frac{Dk_e (-k_e^2 + (2-\nu)k_x^2)}{Ehk} & 0 & j \frac{k_{ly}^2 + \nu k_x^2}{(-1+\nu^2)} \sin \alpha \\ \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ \frac{-k_y^2 + \nu k_x^2}{k^2} & \frac{-k_e^2 + \nu k_x^2}{k^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} \frac{D(-1+\nu^2)k_y(-k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & \frac{D(-1+\nu^2)k_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \sin\alpha & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} & j \frac{k_x k_{sy}(\nu-1)}{k^2} \cos\alpha \\ \frac{Dk_y(-k_y^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & \frac{Dk_e(-k_e^2+(2-\nu)k_x^2)}{Ehk} \cos\alpha & 0 & -j \frac{k_x k_{sy}}{(1+\nu)k^2} \sin\alpha \\ \frac{k_y}{k} & \frac{k_e}{k} & 0 & 0 \\ k_y^2 - \nu k_x^2 & k_e^2 - \nu k_x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Annexe F

Réseau de plaques couplées : formulation semi-modale

Cette annexe reprend en grande partie et complète la formulation présentée en référence [Réb 95], qui contient plusieurs erreurs corrigées ici.

F.1 Structure étudiée et hypothèses

La structure étudiée est formée de plaques minces de même largeur, mais de longueurs différentes, assemblées par un angle quelconque. Toutes les plaques adoptent des conditions aux limites de type appuyé sur les bords qui ne correspondent pas à une jonction.

A chaque plaque (indicée i) est associé un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ tel que :

\vec{x}_i : dans le plan de la plaque i et perpendiculaire aux bords de liaison

\vec{y} : dans le plan de la plaque i et parallèle aux bords de liaison rectilignes (vecteur commun à toutes les plaques)

\vec{z}_i : perpendiculaire à la surface de la plaque i .

La position angulaire d'une plaque par rapport à la précédente est notée θ_i : $\theta_i = (\vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i)$.

L'ensemble est soumis à une excitation harmonique ponctuelle de position et de direction choisies mais quelconques. Toutes les données géométriques sont illustrées sur la figure F.1.

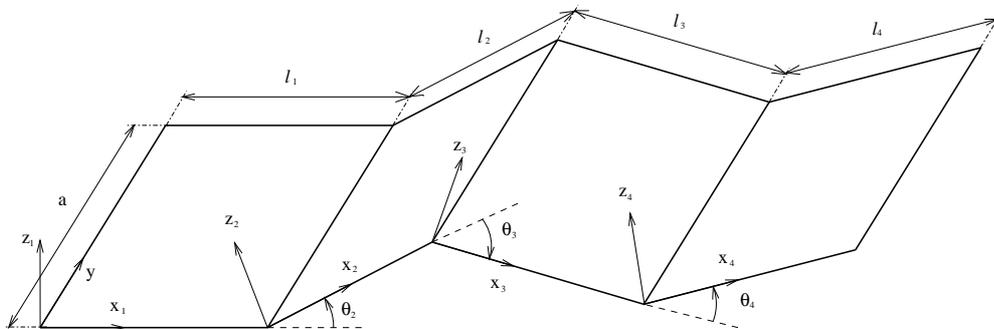


FIG. F.1 – Notations retenues pour le couplage de plaques finies.

Pour chaque plaque d'indice i , on définit :

a : largeur commune à toutes les plaques

h_i : épaisseur de la plaque

l_i : longueur de la plaque

θ_i : angle de positionnement par rapport à la plaque précédente

E_i : module d'Young complexe du matériau

η_i : amortissement structural du matériau

ρ_i : masse volumique du matériau

ν_i : coefficient de Poisson du matériau

D_i : rigidité de flexion avec $D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$.

Au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ on associe les déplacements de la plaque d'indice i par rapport à sa position d'équilibre, u_i, v_i, w_i suivant les trois directions $\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$.

L'excitation ponctuelle harmonique $\vec{F}e$ imposée sur une plaque de la structure (supposons-la d'indice i) est repérée par sa position $M(x_0, y_0)$ dans le repère R_i et par son vecteur d'amplitude $[Fe_x, Fe_y, Fe_z]^T$.

Outre les hypothèses de type géométrique on impose des hypothèses sur :

- le matériau : pouvant être différent d'une plaque à l'autre, il est visco-élastique isotrope,
- le couplage entre plaque : considéré comme parfait,
- la bande fréquentielle d'étude : fréquences suffisamment basses pour négliger les effets d'inertie rotationnelle et le cisaillement transversal.

F.2 Equations

Les équations de la structure considérée font apparaître un couplage entre le mouvement de flexion et le mouvement dans le plan, en raison des angles de couplages. Néanmoins, il est possible de décrire indépendamment tous ces effets sur chaque plaque, avant de les coupler en écrivant les relations de continuité aux jonctions.

L'équation du mouvement vibratoire de coque qu'utilise l'opérateur différentiel de Donnell explicite les mouvements de flexion et de membrane. Son expression est donnée par Leissa [Lei 93]. Il y correspond les hypothèses de contraintes planes, où les déformations sont négligées dans l'épaisseur ainsi que le cisaillement transversal et l'inertie rotationnelle.

Pour appréhender les mêmes phénomènes au sein d'une plaque plane, il suffit de considérer un élément de coque de rayon infini. Ainsi l'opérateur de Donnell, étendu au cas limite d'un rayon de coque infini, est à la base de la mise en équation d'une plaque étudiée en flexion et en traction compression.

Pour une plaque quelconque de la structure (dont l'indice i est supprimé), on a un système ayant pour forme :

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} L_\infty \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \epsilon \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \begin{bmatrix} Fe_x \\ Fe_y \\ Fe_z \end{bmatrix} \quad (\text{F.1})$$

L_∞ a pour expression :

$$L_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h^2}{12} \nabla^4 \end{bmatrix}$$

où :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$\epsilon = 1$ si la plaque est excitée par la force ponctuelle $F\epsilon$ et $\epsilon = 0$ si la plaque n'est pas excitée, et $\delta(x - x_0)$ est la mesure de Dirac en $x = x_0$.

La troisième ligne de l'équation F.1 traduit le mouvement de flexion de la plaque et les deux premières lignes correspondent aux mouvements dans le plan. Ces deux types de mouvement vont être décrits séparément dans la suite.

Les solutions obtenues doivent tenir compte des conditions aux limites des plaques ; pour les bords de direction x , elles sont de type appuyé et pour les bords de direction y , elles traduisent la jonction entre deux plaques consécutives. La troisième partie de ce paragraphe est consacrée aux problèmes de liaison entre plaques.

F.3 Équation de flexion pure pour une plaque excitée

On ne s'intéresse dans cette partie qu'à une plaque, l'indice i de plaque est donc omis ici.

F.3.1 Notion de décomposition semi-modale

L'équation de flexion pure pour une plaque excitée par une force ponctuelle harmonique de pulsation ω , issue du système général -troisième ligne de l'équation F.1 - est :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\rho h \omega^2 w}{D} = -\frac{F e_z}{D} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (\text{F.2})$$

w est une fonction de x et de y . Il est judicieux d'imposer une séparation de variables en appliquant une décomposition modale de la fonction sur la variable y et laissant l'amplitude modale comme une fonction de x . On exprime $w(x, y)$ ainsi :

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (\text{F.3})$$

Cette méthode assez rarement utilisée permet d'exprimer la solution avec un seul indice n , ce qui est très économique en temps calcul.

Les fonctions de la base modale choisie remplissent deux conditions :

1) Elles vérifient les conditions aux limites ; physiquement la plaque est appuyée sur les bords de direction x . Soit :

$$w(x, y) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = a \quad \forall x \in [0, l].$$

2) Elles vérifient les propriétés d'orthogonalité soit :

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{p\pi y}{a} dy = \delta_{pn}$$

où δ_{pn} est le symbole de Kronecker : $\delta_{pn} = 1$ si $p = n$; $\delta_{pn} = 0$ si $p \neq n$.

On injecte F.3 dans F.2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ W_n^{[4]}(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 W_n^{[2]}(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] W_n(x) \right\} \sin \frac{n\pi y}{a} = \frac{F e_z}{D} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

On applique à l'équation précédente une multiplication scalaire de chacun de ses membres par $\sin \frac{p\pi y}{a}$; ce qui revient après la multiplication par $\sin \frac{p\pi y}{a}$ à intégrer suivant y de 0 à l en utilisant les résultats d'orthogonalité. Il en résulte une infinité d'équations différentielles découplées indicées sur le mode n de la forme :

$$W_n^{[4]}(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 W_n^{[2]}(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] W_n(x) = \frac{2F e_z}{aD} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \delta(x - x_0) \quad (\text{F.4})$$

Chaque équation dépend du mode n (indice de la décomposition modale fonction de y). De plus, ces équations sont linéaires à coefficients constants ce qui entraîne une résolution analytique aisée.

F.3.2 Résolution de l'équation différentielle découplée d'indice n

On est en présence d'une équation différentielle non homogène à coefficients constants ; la solution s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation F.4. On pose : $W_n(x) = W_{nh}(x) + W_{np}(x)$ où l'indice n correspond à l'indice de la décomposition semi-modale et les indices h et p correspondent respectivement aux adjectifs "homogène" et "particulier".

Solution de l'équation homogène.

En introduction on a signalé que dans la direction x , un formalisme ondulatoire est adopté. Ainsi de façon la plus générale, on pose :

$$W_{nh}(x) = \Gamma_n e^{k_n x} \quad (\text{F.5})$$

où k_n est le nombre d'onde sur lequel on ne fait aucune hypothèse quant au signe et quant à sa nature réelle ou complexe. Γ_n est l'amplitude du déplacement à l'origine. Il reste à définir k_n et Γ_n .

La forme générale de F.5 est introduite dans F.4 -homogène :

$$0 = k_n^4 - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 k_n^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad \forall x \text{ et } \Gamma_n \neq 0$$

L'équation précédente est de type bicarré en k_n . On trouve donc quatre solutions pour k_n , opposées deux à deux :

$$k_n = \pm \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \pm \omega k_s^2} \quad \text{et} \quad k_s^2 = \left(\frac{\rho h}{D}\right)^{1/2}$$

On peut alors organiser la solution de l'équation homogène sous la forme suivante :

$$W_{nh}(x) = A_n e^{-k_{n1}x} + B_n e^{-k_{n2}x} + C_n e^{-k_{n1}(l-x)} + D_n e^{-k_{n2}(l-x)}$$

$$\text{où } k_{n1} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega k_s^2} \text{ et } k_{n2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega k_s^2}.$$

Remarques :

Le choix de l'écriture faisant intervenir des termes en $x - L$ est dirigé par la volonté de limiter les problèmes numériques entraînés par les calculs d'exponentielles de nombres élevés.

k_{n1} est toujours réel positif, ce qui correspond à une onde évanescente.

k_{n2} est soit réel positif si $\omega < \left(\frac{n\pi}{ak_s}\right)^2$; l'allure des solutions est la même que ci-dessus, soit imaginaire pur si $\omega > \left(\frac{n\pi}{ak_s}\right)^2$; on définit une onde propagative de nombre d'onde k_{n2} tel que :

$$k_{n2} = j \left| \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega k_s^2 \right|^{1/2}.$$

Recherche d'une solution particulière

L'obtention d'une solution particulière W_{np} se fait par l'utilisation de la théorie des distributions.

On rappelle les deux fonctions de base utilisées dans notre exposé :

La mesure de Dirac $\delta(x - x_0)$, nulle en $x \neq x_0$ infinie en $x = x_0$,

La fonction échelon $\theta(x - x_0)$, nulle pour $x < x_0$ unitaire pour $x \geq x_0$,

Au sens des distributions, δ est la dérivée de θ .

L'équation à résoudre est, on le rappelle :

$$W_n^{[4]}(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_n^{[2]}(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D^*} \right] W_n(x) = -\frac{2F e_z}{a D^*} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \delta(x - x_0) \quad (\text{F.6})$$

On pose une solution particulière sous la forme :

$$W_{np}(x) = g_n(x - x_0)\theta(x - x_0)$$

A ce niveau, on ne fait aucune supposition sur la forme de g_n . Exprimons les dérivées de différents ordres de $W_{np}(x)$.

- La dérivée du premier ordre :

$$W_{np}'(x) = g_n'(x - x_0)\theta(x - x_0) + g_n(x - x_0)\delta(x - x_0)$$

On cherche une solution particulière (non unique par définition) : on s'arrange pour qu'elle ne contienne pas de termes facteurs des dérivées de tout ordre d'une mesure de Dirac, mais contienne uniquement un terme facteur d'une mesure de Dirac car le second membre de l'équation F.6 contient un terme facteur d'une mesure de Dirac. Ainsi $g_n(x - x_0) = 0$ pour $x = x_0$.

- La dérivée du second ordre :

$$W_{np}''(x) = g_n''(x - x_0)\theta(x - x_0) + g_n'(x - x_0)\delta(x - x_0)$$

De même, il faut que $g_n'(x - x_0) = 0$ pour $x = x_0$

- La dérivée du troisième ordre :

$$W_{np}^{[3]}(x) = g_n^{[3]}(x - x_0)\theta(x - x_0) + g_n''(x - x_0)\delta(x - x_0)$$

Là encore on impose $g_n''(x - x_0) = 0$ pour $x = x_0$

- Et la dérivée du quatrième ordre :

$$W_{np}^{[4]}(x) = g_n^{[4]}(x - x_0)\theta(x - x_0) + g_n^{[3]}(x - x_0)\delta(x - x_0)$$

On reporte chacune de ces quatre expressions des dérivées de $W_{np}(x)$ dans l'équation F.6 et l'on obtient :

$$g_n^{[4]}(x - x_0)\theta(x - x_0) + g_n^{[3]}(x - x_0)\delta(x - x_0) - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 g_n''(x - x_0)\theta(x - x_0) + \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D^*}\right] g_n(x - x_0)\theta(x - x_0) = -\frac{2Fe_z}{aD^*} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \delta(x - x_0)$$

En identifiant les termes de part et d'autre du signe égal multipliant la fonction $\theta(x - x_0)$ d'une part et la fonction $\delta(x - x_0)$ d'autre part, on a :

$$g_n^{[4]}(x - x_0) - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 g_n''(x - x_0) + \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D^*}\right] g_n(x - x_0) = 0$$

$$g_n^{[3]}(x - x_0) = -\frac{2Fe_z}{aD^*} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \quad \text{si } x = x_0$$

La première de ces équations traduit le fait que $g_n(x - x_0)$ vérifie l'équation homogène de ?? et qu'elle a la même forme générale que $W_{nh}(x)$ soit :

$$g_n(x - x_0) = a_n e^{-k_{n1}(x - x_0)} + b_n e^{-k_{n2}(x - x_0)} + c_n e^{-k_{n1}(l - x + x_0)} + d_n e^{-k_{n2}(l - x + x_0)} \quad (\text{F.7})$$

et on a les quatre conditions suivantes pour définir les coefficients a_n, b_n, c_n et d_n :

$$\begin{cases} g_n(0) = 0 \\ g_n'(0) = 0 \\ g_n''(0) = 0 \\ g_n^{[3]}(0) = -\frac{2Fe_z}{aD^*} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

En injectant F.7 dans F.8, on obtient un système linéaire de quatre équations où les quatre inconnues sont a_n, b_n, c_n et d_n ; résoudre ce système définit donc la solution particulière, qui s'écrit :

$$g_n(x - x_0) = \frac{F e_z}{2\omega k_s^2 a D} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \left(\frac{e^{-k_{n1}(x-x_0)} - e^{-k_{n1}(-x+x_0)}}{k_{n1}} - \frac{e^{-k_{n2}(x-x_0)} - e^{-k_{n2}(-x+x_0)}}{k_{n2}} \right)$$

F.3.3 Solution pour le mouvement de flexion

Nous pouvons alors reconstruire toute la solution de l'équation F.2 :

$$W_n(x) = W_{nh}(x) + W_{np}(x) \quad (\text{F.9})$$

$$W_{nh}(x) = A_n e^{-k_{n1}x} + B_n e^{-k_{n2}x} + C_n e^{-k_{n1}(l-x)} + D_n e^{-k_{n2}(l-x)} \quad (\text{F.10})$$

$$W_{np}(x) = \theta(x - x_0) g_n(x - x_0) \quad (\text{F.11})$$

Remarques :

Ces solutions manipulent des valeurs exponentielles d'autant plus grandes que le domaine d'étude s'étend. Dans la zone particulière de la plaque excitée où les deux solutions particulière et générale sont sommées, la différence de deux très grandes valeurs donnant naissance à une faible valeur peut entraîner des difficultés numériques. Pour les éviter, il faut réduire la taille de ce domaine et définir une coupure purement mathématique sur la plaque excitée autour de l'emplacement de la force. La plaque excitée est scindée en trois mais les structures sont physiquement équivalentes.

Il est important de toujours avoir à l'esprit que cette démarche résout une équation liée à un ordre d'indice n fixé de la décomposition modale sur la variable y .

Alors que la solution particulière est à ce stade complètement définie (les valeurs a_n, b_n, c_n et d_n sont connues), la solution homogène demande encore pour être résolue la détermination des constantes A_n, B_n, C_n et D_n .

Ce sont les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = l$ (pour chaque plaque) qui vont fournir les équations adéquates pour obtenir les quatre constantes ; ces équations seront établies quand on décrira l'assemblage de toutes les plaques.

F.4 Équation de mouvement dans le plan pour une plaque excitée

La démarche est structurée comme pour les effets de flexion. La décomposition semi-modale donne naissance à une infinité d'équations. On présente la résolution pour une de ces équations différentielles ; la solution est la somme de la solution l'équation homogène et d'une solution particulière.

F.4.1 Décomposition semi-modale de l'équation de mouvement dans le plan :

Le système général F.1 contient dans ses deux premières lignes la description des mouvements dans le plan de la plaque ; ils sont couplés. On écrit ce système de 2 équations :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{h^2 F e_x}{12D} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 v + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{h^2 F e_y}{12D} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$$

La décomposition semi-modale se traduit ainsi :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \sin \frac{n\pi y}{a} \quad v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) \cos \frac{n\pi y}{a}$$

Ces développements satisfont les conditions aux limites : pour $y = 0$ et $y = a \quad \forall x \in [0, l]$ $u(x, y) = 0$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 0$. Elles traduisent que les déplacements u sont bloqués en ce lieu mais pas les déplacements v .

On remarque que dans le développement de u , la somme infinie débute pour $n = 1$ alors que dans celui de v , elle débute pour $n = 0$; les fonctions constituant la base et vérifiant les conditions aux limites de bords libres doivent être non identiquement nulles sur le domaine d'intégration; c'est pourquoi le cas $n = 0$ demande un distinguo où seul le mouvement suivant la direction y est possible.

En injectant la décomposition dans le système d'équations différentielles - pour $n \neq 0$ - et en appliquant le produit scalaire comme pour le cas de la flexion, on obtient une infinité de couples d'équations liés à l'ordre de la décomposition semi-modale (indice n). Chaque couple a pour forme :

$$U_n'' + \left[\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] U_n - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right) V_n' = \frac{h^2 F e_x}{12D} \frac{2}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{a} \delta(x-x_0)$$

$$\frac{1-\nu}{2} V_n'' + \left[\frac{1-\nu^2}{E^*} \rho \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] V_n + \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right) U_n' = \frac{h^2 F e_y}{12D} \frac{2}{a} \cos \frac{n\pi y_0}{a} \delta(x-x_0)$$

F.4.2 résolution du système d'équations (cas commun $n \neq 0$)

On rappelle que U_n et V_n sont des fonctions de la variable x . On a donc à résoudre un système non homogène d'équations différentielles à coefficients constants. De la même façon que dans le cas de la flexion, le couple solution est la somme d'un couple solution du système homogène et d'un couple solution particulière.

$$U_n(x) = U_{nh}(x) + U_{np}(x)$$

$$V_n(x) = V_{nh}(x) + V_{np}(x)$$

Calcul de la solution homogène du couple d'équations lié au mouvement dans le plan

L'équation à résoudre est :

$$U_n'' + \left[\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] U_n - \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right) V_n' = 0$$

$$\frac{1-\nu}{2} V_n'' + \left[\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] V_n + \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right) U_n' = 0$$

$U_n(x)$ et $V_n(x)$ ont un formalisme ondulatoire : $U_n(x) = \Gamma_n e^{k_n x}$ et $V_n(x) = \Lambda_n e^{k_n x}$

On reporte ces expressions et leurs dérivées dans le couple ci-dessus et on obtient :

$$\Gamma_n k_n^2 + \left[\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] \Gamma_n - \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{a} k_n \Lambda_n = 0$$

$$\frac{1-\nu}{2} \Lambda_n k_n^2 + \left[\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] \Lambda_n + \frac{1+\nu}{2} \frac{n\pi}{a} k_n \Gamma_n = 0$$

Matriciellement, on peut écrire :

$$[D] \begin{bmatrix} \Gamma_n \\ \Lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où

$$[D] = \begin{bmatrix} k_n^2 + \mu - \frac{1-\nu}{2} \theta^2 & -\frac{1+\nu}{2} k_n \\ \frac{1+\nu}{2} \theta k_n & \frac{1-\nu}{2} k_n^2 + \mu - \theta^2 \end{bmatrix}$$

avec $\theta = \frac{n\pi}{a}$ et $\mu = \frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2$

L'annulation du déterminant de $[D]$ entraîne une équation bicarrée en k_n :

$$\frac{1-\nu}{2} k_n^4 + \left(\frac{3-\nu}{2} \mu + (\nu-1) \theta^2 \right) k_n^2 + \mu^2 + \frac{\nu-3}{2} \mu \theta^2 + \frac{1-\nu}{2} \theta^4 = 0$$

Le discriminant s'écrit simplement :

$$\Delta_n = \left(\frac{1+\nu}{2} \mu \right)^2$$

On obtient quatre solutions pour k_n deux à deux opposées :

$$k_{n3} = \pm \sqrt{-\mu + \theta^2}$$

$$k_{n4} = \pm \sqrt{-\frac{2}{1-\nu} \mu + \theta^2}$$

Le vecteur propre associé correspondant noté $\begin{bmatrix} \Gamma_n \\ \lambda_n \Gamma_n \end{bmatrix}$ nous permet d'écrire la relation entre Γ_n et λ_n . On trouve $\lambda_n = \frac{k_n^2 + \beta}{\alpha k_n}$, soit :

$$\lambda_{n3} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\omega^2}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}}$$

$$\lambda_{n4} = \sqrt{1 - \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \frac{\omega^2}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}$$

Mathématiquement, on obtient donc quatre solutions pour k_n et on remarque qu'elles sont opposées deux à deux. Le vecteur propre associé définit la relation formelle entre les déplacements u et v .

On peut exprimer la forme homogène des amplitudes modales $U_{nh}(x)$ et $V_{nh}(x)$:

$$U_{nh}(x) = F_n e^{-k_{n3}x} + G_n e^{-k_{n4}x} + H_n e^{-k_{n3}(l-x)} + I_n e^{-k_{n4}(l-x)}$$

$$V_{nh}(x) = -\lambda_{n3} F_n e^{-k_{n3}x} - \lambda_{n4} G_n e^{-k_{n4}x} + \lambda_{n3} H_n e^{-k_{n3}(l-x)} + \lambda_{n4} I_n e^{-k_{n4}(l-x)}$$

Solution particulière

$$U_{np}(x) = \theta(x - x_0) (f_n e^{-k_{n3}(x-x_0)} + g_n e^{-k_{n4}(x-x_0)} + h_n e^{-k_{n3}(-x+x_0)} + i_n e^{-k_{n4}(-x+x_0)})$$

$$V_{np}(x) = \theta(x - x_0) (-\lambda_{n3} f_n e^{-k_{n3}(x-x_0)} - \lambda_{n4} g_n e^{-k_{n4}(x-x_0)} + \lambda_{n3} h_n e^{-k_{n3}(-x+x_0)} + \lambda_{n4} i_n e^{-k_{n4}(-x+x_0)})$$

où f_n, g_n, h_n et i_n sont connues :

On utilise les variables intermédiaires \tilde{Q} et \tilde{R} :

$$\tilde{Q} = \frac{h^2 F e_x}{6aD} \sin \frac{n\pi y_0}{a}$$

$$\tilde{R} = \frac{2}{1-\nu} \frac{h^2 F e_y}{6aD} \cos \frac{n\pi y_0}{a}$$

Les variables valent alors :

$$f_n = +\frac{1}{2} \frac{\lambda_{n4} \tilde{Q}}{\lambda_{n3} k_{n4} - \lambda_{n4} k_{n3}} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}}{\lambda_{n3} k_{n3} - \lambda_{n4} k_{n4}}$$

$$g_n = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{n3} \tilde{Q}}{\lambda_{n3} k_{n4} - \lambda_{n4} k_{n3}} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}}{\lambda_{n3} k_{n3} - \lambda_{n4} k_{n4}}$$

$$h_n = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_{n4} \tilde{Q}}{\lambda_{n3} k_{n4} - \lambda_{n4} k_{n3}} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}}{\lambda_{n3} k_{n3} - \lambda_{n4} k_{n4}}$$

$$i_n = +\frac{1}{2} \frac{\lambda_{n3} \tilde{Q}}{\lambda_{n3} k_{n4} - \lambda_{n4} k_{n3}} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{R}}{\lambda_{n3} k_{n3} - \lambda_{n4} k_{n4}}$$

F.4.3 Résolution de l'équation pour le cas particulier $n = 0$

Dans ce cas particulier, il existe un mouvement suivant la direction y découplé de la direction perpendiculaire x . En effet pour $n = 0$, la notion de déplacement suivant l'axe x n'a pas de sens.

Il est certes impossible d'isoler physiquement un mouvement suivant la direction y découplé de la direction perpendiculaire x , mais c'est la décomposition modale, qui comme outil mathématique autorise une telle expression. Il faut simplement comprendre que la notion de mode d'indice zéro existe dans la direction y mais pas dans la direction x à cause des développements en sinus ou cosinus adoptés. La décomposition de $v(x, y)$ doit être regardée sous une forme différente :

$$v(x, y) = V_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \cos \frac{n\pi y}{a}$$

où $V_0(x)$ correspond bien à un mouvement d'ensemble suivant y . En injectant $V_0(x)$ dans le système différentiel et en appliquant le produit scalaire, ce qui revient à multiplier par la fonction unité (ou $\cos \frac{0\pi y}{a}$) et à intégrer sur y de 0 à a , on obtient comme équation à résoudre pour $V_0(x)$:

$$V_0''(x) + \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \omega^2 V_0(x) = \frac{h^2 F e_y}{6aD(1-\nu)} \delta(x - x_0)$$

Cette équation différentielle non homogène à coefficients constants se résout classiquement en posant : $V_0(x) = V_{0h}(x) + V_{0p}(x)$

Solution homogène :

$$V_{0h}(x) = F_0 e^{-k_0 x} + G_0 e^{-k_0(l-x)}$$

où F_0 et G_0 sont des coefficients à déterminer, et k_0 le nombre d'onde :

$$k_0 = \left[-\frac{2(1+\nu)}{E} \rho \omega^2 \right]^{1/2}$$

La forme de la solution particulière est :

$$V_{0p}(x) = l_{0p}(x - x_0) \theta(x - x_0)$$

Sa dérivée première s'exprime ainsi :

$$V'_{0p}(x) = l'_{0p}(x - x_0) \theta(x - x_0) + l_{0p}(x - x_0) \delta(x - x_0)$$

Comme il est attendu que dans la forme de la solution particulière il n'y aura pas de terme facteur des dérivées de tout ordre d'un Dirac, on impose $l_{0p}(x - x_0) = 0$ pour $x = x_0$.

Sa dérivée seconde s'exprime alors :

$$V''_{0p}(x) = l''_{0p}(x - x_0) \theta(x - x_0) + l'_{0p}(x - x_0) \delta(x - x_0)$$

On réinjecte ces deux expressions dans l'équation différentielle et en identifiant terme à terme les coefficients de $\theta(x - x_0)$ et $\delta(x - x_0)$, on obtient :

$$l''_{0p}(x) + \frac{2(1+\nu)}{E^*} \rho \omega^2 l_{0p}(x) = 0 \quad \text{et} \quad l'_{0p}(0) = \frac{h^2 F e_y}{6aD^*(1-\nu)}$$

Ainsi

$$l_{0p}(x - x_0) = f_0 e^{-k_0 x} + g_0 e^{-k_0(l-x)}$$

et les valeurs de f_0 et g_0 sont définies par les deux équations issues de l'expression de la dérivée première :

$$g_0 = -f_0 = \frac{h^2 F e_y}{6aD(1-\nu)}$$

Donc on définit $V_0(x)$ par :

$$V_0(x) = F_0 e^{-k_0 x} + G_0 e^{-k_0(l-x)} + \theta(x - x_0) \frac{h^2 F e_y}{6aD(1-\nu)k_0} (-e^{-k_0(x-x_0)} + e^{-k_0(-x+x_0)})$$

Remarques :

On vient d'exprimer la solution du système d'équations différentielles non homogènes correspondant au mouvement dans le plan. Tous ces développements sont liés à l'ordre d'indice n fixé, de la décomposition semi-modale d'une plaque.

La solution particulière est complètement définie à ce stade, par contre la solution de l'équation homogène nécessite encore quatre nouvelles équations pour que les coefficients F_n, G_n, H_n et I_n soient définis. Pour le mode indicé zéro, deux seulement suffiront pour trouver F_0 et G_0 .

Ces équations traduisent les conditions aux limites de la plaque pour $x = 0$ et $x = l$; ces conditions sont soit les conditions aux limites de la structure elle-même, soit les conditions de raccord entre plaques.

F.5 Assemblage des plaques en structure

Jusqu'à présent, tous les calculs menés ne concernaient qu'une seule plaque et au cours des développements, il est apparu que la notion de conditions aux limites est nécessaire pour mener le calcul jusqu'au bout. Les conditions aux limites sur une plaque correspondent en fait aux conditions de liaison entre deux plaques successives de la structure. Dans le cas d'un mode d'indice différent de zéro elles doivent être au nombre de huit car il faut déterminer huit constantes liées aux phénomènes de flexion et de mouvement dans le plan, dans le cas particulier de l'indice zéro, simplement deux équations suffisent.

F.5.1 Vecteur d'état de la plaque

On définit un vecteur d'état ξ de huit composantes ayant une réalité physique en tout point de la plaque. Ce vecteur a pour expression : $(u, v, w, F_x, F_y, F_z, R, M)^T$. Les grandeurs vectorielles correspondent aux trois déplacements au sein de la plaque le long des trois vecteurs directeurs, aux efforts dans le plan, à l'effort tranchant de flexion normal au plan de la plaque, à la rotation et au moment fléchissant, ces deux derniers, autour de l'axe y . L'expression mathématique de chaque composante du vecteur d'état est donnée ci-après, Langley et al. les utilisent aussi et les explicitent en [LH 90].

u, v et w viennent d'être exprimés aux paragraphes précédents.

$$F_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{F.12})$$

$$F_y = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{F.13})$$

$$F_z = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (\text{F.14})$$

$$R = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{F.15})$$

$$M = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{F.16})$$

En fonction des variables présentées ci-dessus :

$$\begin{aligned}
F_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eh}{2(1-\nu)} & \left[F_n \left(-k_{n3} + \nu \frac{n\pi}{a} \lambda_{n3} \right) e^{-k_{n3}x} + G_n \left(-k_{n4} + \nu \frac{n\pi}{a} \lambda_{n4} \right) e^{-k_{n4}x} \right. \\
& + H_n \left(k_{n3} - \nu \frac{n\pi}{a} \lambda_{n3} \right) e^{-k_{n3}(L-x)} + I_n \left(k_{n4} - \nu \frac{n\pi}{a} \lambda_{n4} \right) e^{-k_{n4}(L-x)} \\
& \left. + \left(m'_n(x-x_0) - \nu \frac{n\pi}{a} l_n(x-x_0) \right) \theta(x-x_0) \right] \sin \frac{n\pi y}{a}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

$$\begin{aligned}
F_y = \frac{Eh}{2(1+\nu)} V_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eh}{2(1+\nu)} & \left[F_n \left(\lambda_{n3} k_{n3} + \frac{n\pi}{a} \right) e^{-k_{n3}x} + G_n \left(\lambda_{n4} k_{n4} + \frac{n\pi}{a} \right) e^{-k_{n4}x} \right. \\
& + H_n \left(\lambda_{n3} k_{n3} + \frac{n\pi}{a} \right) e^{-k_{n3}(L-x)} + I_n \left(\lambda_{n4} k_{n4} + \frac{n\pi}{a} \right) e^{-k_{n4}(L-x)} \\
& \left. + \left(l'_n(x-x_0) + \frac{n\pi}{a} m_n(x-x_0) \right) \theta(x-x_0) \right] \cos \frac{n\pi y}{a}
\end{aligned} \tag{F.18}$$

$$\begin{aligned}
F_z = \sum_{n=1}^{\infty} D & \left[A_n \left(k_{n1}^3 - (2-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} k_{n1} \right) e^{-k_{n1}x} + B_n \left(k_{n2}^3 - (2-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} k_{n2} \right) e^{-k_{n2}x} \right. \\
& + C_n \left(-k_{n1}^3 + (2-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} k_{n1} \right) e^{-k_{n1}(L-x)} + D_n \left(-k_{n2}^3 + (2-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} k_{n2} \right) e^{-k_{n2}(L-x)} \\
& \left. + \left(-g_n^{(3)}(x-x_0) + (2-\nu) \frac{n^2\pi^2}{a^2} g'_n(x-x_0) \right) \theta(x-x_0) \right] \sin \frac{n\pi y}{a}
\end{aligned} \tag{F.19}$$

$$\begin{aligned}
R = \sum_{n=1}^{\infty} & \left[-k_{n1} A_n e^{-k_{n1}x} - k_{n2} B_n e^{-k_{n2}x} + k_{n1} C_n e^{-k_{n1}(x-x_0)} - k_{n2} D_n e^{-k_{n2}(x-x_0)} \right. \\
& \left. + g'_n(x-x_0) \theta(x-x_0) \right] \sin \frac{n\pi y}{a}
\end{aligned} \tag{F.20}$$

$$\begin{aligned}
M = \sum_{n=1}^{\infty} D & \left[A_n \left(k_{n1}^2 - \nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) e^{-k_{n1}x} + B_n \left(k_{n2}^2 - \nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) e^{-k_{n2}x} \right. \\
& + C_n \left(k_{n1}^2 - \nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) e^{-k_{n1}(L-x)} + D_n \left(k_{n2}^2 - \nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right) e^{-k_{n2}(L-x)} \\
& \left. + \left(g''_n(x-x_0) - \nu \frac{n^2\pi^2}{a^2} g_n(x-x_0) \right) \theta(x-x_0) \right] \sin \frac{n\pi y}{a}
\end{aligned} \tag{F.21}$$

Les déplacements u , v et w sont exprimés par une décomposition modale de la variable y dont l'amplitude de chaque terme est la somme de deux ondes dans la direction x (chacune s'exprimant par deux termes). Les cinq autres du vecteur d'état sont fonction des déplacements ; elles peuvent donc être développées, elles aussi, en une décomposition modale de la variable y où les amplitudes modales, fonction de x , adoptent un formalisme d'onde.

F.5.2 équations de raccord et conditions aux limites

La distinction doit être faite entre le cas général où $n \neq 0$ et le cas particulier $n = 0$. Le nombre d'inconnues à trouver n'étant pas le même, le nombre d'équations à écrire est différent.

Cas général où l'indice n de la décomposition semi-modale est différent de zéro

Pour établir correctement les équations de raccord, il faut revenir sur les notions d'indice, de repère et d'orientation, pour 2 plaques consécutives indicées i et $i+1$.

Vue de la plaque i , la liaison entre les deux plaques se fait pour $x = l_i$ et $0 \leq y \leq a$, et vue de la plaque $i + 1$, la liaison entre les deux plaques se fait pour $x = 0$ et $0 \leq y \leq a$.

La continuité des huit grandeurs vectorielles s'écrit : $\forall y \in [0, a]$

$$u_{i+1}(0, y) = u_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - w_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1} \quad (\text{F.22})$$

$$v_{i+1}(0, y) = v_i(l_i, y) \quad (\text{F.23})$$

$$w_{i+1}(0, y) = w_i(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + u_i(l_i, y) \sin \theta_{i+1} \quad (\text{F.24})$$

$$F_{x,i+1}(0, y) = F_{x,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} - F_{z,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1} \quad (\text{F.25})$$

$$F_{y,i+1}(0, y) = F_{y,i}(l_i, y) \quad (\text{F.26})$$

$$F_{z,i+1}(0, y) = F_{z,i}(l_i, y) \cos \theta_{i+1} + F_{x,i}(l_i, y) \sin \theta_{i+1} \quad (\text{F.27})$$

$$R_{i+1}(0, y) = R_i(l_i, y) \quad (\text{F.28})$$

$$M_{i+1}(0, y) = M_i(l_i, y) \quad (\text{F.29})$$

Outre les conditions de raccord, il faut considérer les conditions aux limites de la première plaque de la structure en $x = 0$ et de la dernière plaque de la structure en $x = l$. A ces deux extrémités, la structure est considérée comme appuyée, ceci se traduit par des déplacements nuls suivant les directions y et z , un moment fléchissant nul, et un effort dans le plan suivant x nul.

Pour la première plaque (indicée 1) en $x = 0$: $\forall y \in [0, a]$

$$w_1(0, y) = 0$$

$$v_1(0, y) = 0$$

$$M_1(0, y) = 0$$

$$F_{x,1}(0, y) = 0$$

Et pour la dernière plaque (indicée d) en $x = l_d$: $\forall y \in [0, a]$

$$w_d(l_d, y) = 0$$

$$\begin{aligned}v_d(l_d, y) &= 0 \\M_d(l_d, y) &= 0 \\F_{x,d}(l_d, y) &= 0\end{aligned}$$

Alors que pour les bords de plaque de direction x , la condition d'appui est figée par la décomposition semi-modale, pour les deux bords de la structure de direction y elle n'est pas figée ; on pourrait imposer des conditions d'encastrement ou de liberté, simplement les huit dernières équations auraient une autre expression.

Cette série d'équations est écrite à partir des déplacements u_i , v_i et w_i de chaque plaque d'indice i . Or ces derniers s'expriment sous forme d'une décomposition modale sur la variable y où l'amplitude de chaque terme est composée de deux ondes dans la direction x .

Après calcul du produit scalaire de chaque équation avec le mode adéquat correspondant ($\sin \frac{n\pi y}{a}$ ou $\cos \frac{n\pi y}{a}$), on peut associer à chaque mode d'indice n du développement le pendant des équations liées non plus aux déplacements totaux mais aux déplacements modaux $U_{i,n}$, $V_{i,n}$ et $W_{i,n}$ qui impliquent les inconnues $A_{i,n}$, $B_{i,n}$, $C_{i,n}$, $D_{i,n}$, $F_{i,n}$, $G_{i,n}$, $H_{i,n}$ et $I_{i,n}$. En d'autres termes, les équations de raccord et de limites sont projetées sur la base modale de la décomposition.

Prenons comme exemple l'équation de continuité des déplacements suivant l'axe x , dans laquelle on injecte les décompositions modales. Ainsi on obtient, $\forall y \in [0, a]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_{i+1,n}(0) \sin \frac{n\pi y}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} U_{i,n}(l_i) \cos(\theta_{i+1}) \sin \frac{n\pi y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,n}(l_i) \sin(\theta_{i+1}) \sin \frac{n\pi y}{a}$$

En calculant la multiplication scalaire de chaque membre de cette équation avec $\sin \frac{p\pi x}{a}$, il en résulte une infinité d'équations chacune liée à un mode d'indice n de la forme :

$$U_{i+1,n}(0) = U_{i,n}(l_i) \cos(\theta_{i+1}) - W_{i,n}(l_i) \sin(\theta_{i+1})$$

Or les déplacements modaux sont exprimés en fonction des coefficients ondulatoires ; l'équation précédente devient donc :

$$\begin{aligned}F_{i+1,n} + G_{i+1,n} + H_{i+1,n}e^{-k_{n3}l_{i+1}} + I_{i+1,n}e^{-k_{n4}l_{i+1}} \\= (F_{i,n}e^{-k_{n3}l_i} + G_{i,n}e^{-k_{n4}l_i} + H_{i,n} + I_{i,n}) \cos \theta_{i+1} \\- (A_{i,n}e^{-k_{n1}l_i} + B_{i,n}e^{-k_{n2}l_i} + C_{i,n} + D_{i,n}) \sin \theta_{i+1}\end{aligned}$$

Dans le cas d'une plaque excitée se rajouterait dans l'équation ci-dessus les termes liés à la solution particulière de l'équation différentielle initiale.

On vérifie que le nombre d'inconnues est le même que le nombre d'équations. Par exemple supposons une structure composée de r plaques. Le décompte effectué est valable pour chaque indice n de la décomposition semi-modale.

Chaque plaque d'indice i nécessite huit constantes : $A_{i,n}$, $B_{i,n}$, $C_{i,n}$, $D_{i,n}$, $F_{i,n}$, $G_{i,n}$, $H_{i,n}$, $I_{i,n}$. Comme on considère r plaques, il y a $8r$ inconnues.

Il y a $r - 1$ liaisons entre plaques, chaque raccord se traduit par huit équations, il y a donc $8(r - 1)$ équations de raccord. La première plaque en $x = 0$ et la r -ième en $x = l$ entraînent chacune quatre équations. Donc en tout on a $8r$ équations.

Le système d'équations s'exprime sous forme matricielle. Le vecteur inconnu regroupe les $A_{i,n}, B_{i,n}, C_{i,n}, D_{i,n}$, i variant de 1 à r . Le vecteur second membre est défini par l'écriture des équations de liaison de la plaque excitée. La taille du système restant assez restreinte, il n'y a aucune difficulté numérique à sa résolution ; une méthode de triangularisation à pivot partiel est utilisée.

Cas particulier où l'indice n de la décomposition semi-modale est zéro

On a défini les huit grandeurs qui doivent vérifier la continuité entre les plaques pour assurer le couplage. Dans le cas présent où seul un mouvement selon la direction y existe, seulement deux grandeurs sont concernées : le déplacement v et l'effort F_y . On doit vérifier $\forall y \in [0, a]$:

$$v_{i+1}(0, y) = v_i(l_i, y)$$

$$F_{y,i+1}(0, y) = F_{y,i}(l_i, y)$$

Pour les conditions aux limites de la première plaque en $x = 0$ et de la dernière en $x = l_d$, on vérifie un déplacement selon y nul pour $\forall y \in [0, a] : v_1(0, y) = 0$ et $v_d(l_d, y) = 0$. La même démarche est utilisée que précédemment, et on vérifie que pour une structure de r plaques, apparaissent $2r$ inconnues. A notre disposition, il y a deux équations aux limites, et $2(r - 1)$ équations de liaison ; l'équilibre entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues est respecté.

F.6 Récapitulatif de la démarche

Il est utile à ce stade de récapituler la démarche suivie pour obtenir le comportement vibratoire de la structure.

Le but est de définir les déplacements u, v et w de chaque plaque de la structure autour de sa position d'équilibre. Pour cela on peut scinder la progression en quatre points.

1) Pour chaque plaque d'indice i , le déplacements de la plaque est décrit à l'aide d'une décomposition semi-modale. L'indice maximum de la décomposition est défini à partir de la fréquence maximum de calcul et de l'indice des fréquences propres d'une plaque plane équivalente.

2) Pour un indice de la décomposition semi-modale n fixé, les déplacements modaux s'expriment comme la solution d'une équation différentielle non homogène (dans le cas où la plaque est excitée), donc comme la somme de la solution homogène et d'une solution particulière. Ces deux solutions adoptent un formalisme d'onde.

Pour la flexion, il faut définir deux nombres d'onde liés à l'indice n fixé, et les quatre coefficients liés à la solution particulière. Les quatre coefficients liés à la solution homogène, pour chaque plaque d'indice i , restent inconnus.

Pour les effets de membrane, les équations non homogènes couplées se résolvent d'une façon comparable.

3) A un indice n fixé, pour chaque plaque, on met en évidence huit inconnues. L'écriture des

équations de raccord entre plaques et des équations aux limites de la structure, permet d'obtenir une équation matricielle générale dont le vecteur inconnu regroupe tous les coefficients liés aux solutions homogènes.

4) La résolution du système matriciel se fait par une méthode numérique de triangularisation par pivot partiel. Une fois le calcul fait pour chaque indice n (ce qui implique que les sommes liées aux décompositions semi-modales, bien que décrites comme infinies, doivent, pour le calcul, être tronquées), le mouvement de chacune des plaques suivant les trois directions est reconstruit à partir de la somme issue de la décomposition semi-modale.

FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : OUISSE (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)	DATE de SOUTENANCE : 20 décembre 2002
Prénoms : Morvan	
TITRE : DISPERSIONS DU COMPORTEMENT DE STRUCTURES VIBRANTES : ANALYSE ET DETECTION	
NATURE : Doctorat	Numéro d'ordre : 02 ISAL 0099
Formation doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)	
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis	CLASSE :
<p>RESUME : Ce travail porte sur les phénomènes de dispersions du comportement de structures vibrantes et son but est de présenter une alternative aux approches classiques utilisées en analyse de sensibilité. Une méthode est proposée afin de fournir un outil qui permet de savoir quelle partie d' une structure vibrante produit les plus fortes dispersions. Cette approche pourrait permettre, lors d'une phase de projet, de modifier les formes induisant de fortes sensibilités, ou bien de s'assurer que lors du processus de fabrication une attention particulière sera portée sur ces zones. C'est dans cet esprit que le travail présenté ici propose dans un premier temps une mise en évidence du phénomène d'hypersensibilité sur des structures simples, qui sont d'abord des poutres et des plaques couplées semi-infinies puis finies. L' analyse et la caractérisation des phénomènes sont proposées avant l' établissement d' une méthode de localisation de principales sources d'incertitudes d'une structure donnée. Cette méthode est basée sur le concept de fonctionnelle d' écart utilisé en réalage calculs/essais, elle est purement numérique, et sera présentée sur un exemple analytique, avant d'être intégrée à un code de calculs par éléments finis. L' exploitation sur des structures industrielles conduit à la validation expérimentale des résultats.</p>	
<p>DISPERSION OF VIBRATING STRUCTURES BEHAVIOR : ANALYSIS AND DETECTION</p> <p>Abstract: This work deals with sensitivity phenomenon on vibrating structures. An alternative to classical methods used in sensitivity analysis is presented : the proposed method is a tool that allows one to know which part of a structure is responsible for dispersions, in order to be able, during a design phase, to modify zones inducing large sensitivities, or in a manufacturing phase, to take care of these zones. The first step of this work is to present hypersensitive phenomenon, which can be observed on semi-infinite coupled beams and plates. The analysis and characterization of these phenomenon are developed and compared with finite cases. Then, a method to localize main uncertainty causes of a given structure is presented, it is based on techniques used in finite element updating, and it is applied on an analytical example, and developed in order to be integrated in a finite element code, in order to test it on industrial structures allowing experimental validation of results.</p>	
MOTS-CLES : Dispersion - Vibrations - Poutres couplées - Plaques couplées - Sensibilité - Détection - Localisation - Eléments finis	
Laboratoire (s) de recherches : Laboratoire Vibrations Acoustique (LVA)	
Directeur de thèse: Jean-Louis GUYADER	
Président de jury : Alain COMBESURE	
Composition du jury : Philippe BOUILLARD (rapporteur) Alain COMBESURE Jean-Pierre COYETTE (rapporteur) Jean-Louis GUYADER Maurice LEMAIRE Martin OCHMANN Joël PERRET-LIAUDET (invité)	