



HAL
open science

Modèles analytiques originaux pour la détermination des paramètres linéiques des lignes et câbles multifilaires parcourus par des signaux large bande

Mamadou Kane

► **To cite this version:**

Mamadou Kane. Modèles analytiques originaux pour la détermination des paramètres linéiques des lignes et câbles multifilaires parcourus par des signaux large bande. Energie électrique. Ecole Centrale de Lyon, 1994. Français. NNT: . tel-00143350

HAL Id: tel-00143350

<https://theses.hal.science/tel-00143350>

Submitted on 25 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

(Arrêté du 21/11/1988)

spécialité : Génie Electrique

préparée au sein de

L'ECOLE DOCTORALE DE LYON DES SCIENCES POUR L'INGENIEUR :
ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE

par

Mamadou KANE

*Modèles analytiques originaux pour la détermination des paramètres
linéiques des lignes et câbles multifilaires parcourus par des signaux large
bande*

Soutenue le 27 juin 1994 devant la Commission d'Examen

Jury :

Messieurs	J. C. SABONNADIÈRE	Institut National Polytechnique de Grenoble	Président
	J. FONTAINE	Université de Clermont Ferrand	Rapporteur
	M. NEY	Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne	Rapporteur
	Ph. AURIOL	Ecole Centrale de Lyon	Examineur
	C. DUBANTON	EDF	Examineur
	L. KRÄHENBÜHL	Ecole Centrale de Lyon	Examineur
	A. N'DIR	SENELEC	Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué à l'Ecole Centrale de Lyon, dans le cadre de l'Ecole Doctorale SPI-EEA de Lyon, au sein du Centre de Génie Electrique de Lyon dirigé par Monsieur le Professeur A. Nicolas. Je lui exprime mes remerciements pour m'avoir toujours renouvelé sa confiance et permis de séjourner dans d'excellentes conditions dans son laboratoire.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur J. C. Sabonnadière, Directeur du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury de thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur J. Fontaine de l'Université de Clermont Ferrand, ainsi que Monsieur le Professeur M. Ney, de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, de l'honneur qu'ils me font en acceptant la tâche de rapporteurs de cette thèse. Leurs observations et leurs indications permettront de donner plus de cohérence à l'ensemble de ce travail.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur C. Dubanton, Délégué aux ressources, Direction Production-Transport d'Electricité De France, ainsi qu'à Monsieur A. N'Dir, Docteur d'Etat, Directeur Générale de la Société Nationale d'Electricité du Sénégal, de l'honneur qu'ils me font en acceptant de siéger dans ce jury de thèse.

Je remercie sincèrement Monsieur le professeur Ph. Auriol, Directeur de la Formation Doctorale en Génie Electrique à l'ECL, de m'avoir accueilli dans son laboratoire et d'avoir bien voulu assurer la direction de cette thèse. Ses nombreux et précieux conseils, ses grandes qualités humaines ainsi que la confiance qu'il m'a témoignée ont permis l'accomplissement de ce travail dans d'excellentes conditions. Je lui en suis infiniment reconnaissant.

J'adresse mes remerciements à Monsieur L. Krähenbühl, Chargé de Recherche au CNRS d'avoir accepté de faire partie de ce jury de thèse. Sa grande disponibilité ainsi que ses conseils éclairés m'ont permis de surmonter bien des difficultés et de mener à terme ce travail.

Je remercie vivement l'ensemble du personnel (permanents et non-permanents) du laboratoire, qui ont tous été des amis, m'ont aidé et soutenu tout au long de ces années passées au sein du Centre de Génie Electrique de Lyon. Les discussions que j'ai eues avec chacun d'eux ont été fructueuses et enrichissantes. Ils m'ont tous beaucoup apporté.

Je tiens enfin à exprimer ma gratitude à Monsieur le Professeur H. Buchwalter du Département de Mathématique de l'Université Lyon I pour ses précieux conseils en Analyse Numérique.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE ET INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : METHODES CLASSIQUES DE DETERMINATION DES PARAMETRES LINEIQUES ET ELECTRIQUES DES LIGNES ET CABLES	5
Introduction	6
I. 1. Méthode classique de simulation des lignes et câbles	7
I. 1. 1. Introduction	7
I. 1. 2. Analyse modale	8
I. 1. 3. Méthode de Bergeron ou des ondes mobiles	12
I. 1. 4. Méthode du double balayage	15
I. 1. 5. Utilisation de la transformée inverse de Laplace pour modéliser les pertes	16
I. 2. Modèles numériques	17
I. 2. 1. Méthode de subdivision des conducteurs	17
I. 2. 2. Méthode des éléments finis	21
I. 2. 2. 1. Historique et généralités	21
I. 2. 2. 2. Formulation en électrostatique	23
I. 2. 2. 3. Formulation en Magnétodynamique	24
I. 2. 3. Méthode des équations intégrales	25
I. 3. Modèles analytiques	27
I. 3. 1. Conducteurs éloignés les uns des autres	27
I. 3. 2. Conducteurs proches les uns des autres	31
I. 3. 2. 1. Modèle des lignes multifilaires	31
I. 3. 2. 1. 1. Modèles basés sur des approximations haute fréquence ou basse fréquence	31

I. 3. 2. 1. 2. Modèle de Carson	33
I. 3. 2. 1. 3. Modèle de Dwight	33
I. 3. 2. 1. 4. Analyse récapitulative	34
I. 3. 2. 2. Modèle des câbles multifilaires blindés	35
I. 3. 2. 2. 1. Modèle des câbles multifilaires blindés sans pertes	35
I. 3. 2. 2. 2. Modèle des câbles triphasés blindés avec prise en compte des effets de peau et de proximité en basse fréquence	36
I. 3. 2. 2. 3. Modèle des câbles avec prise en compte de l'effet de peau seul sur une large plage de fréquence	38
I. 3. 2. 2. 4. Modèle des câbles avec prise en compte de l'effet de peau seul dans les conducteurs internes et de l'effet de proximité dans la gaine sur une large plage de fréquence	40
I. 4. Modèles de prise en compte de la conductivité finie du sol ou d'un plan de masse	43
I. 4. 1. Cas des lignes aériennes	45
I. 4. 1. 1. Modèle de Carson (lignes aériennes)	45
I. 4. 1. 2. Modèle de Dubanton	46
I. 4. 2. Cas des câbles enterrés	48
I. 4. 2. 1. Modèle de Pollaczek	48
I. 4. 2. 2. Modèle de Wedepohl	50
I. 5. Conclusion	51

**CHAPITRE II : MODELE DE DETERMINATION DES PARAMETRES DES
LIGNES MULTIFILAIRES** **53**

Nomenclature	54
Introduction	57
II. 1. Modèle de détermination de l'impédance globale d'un conducteur soumis à l'effet de proximité d'autres conducteurs	58
II. 1. 1. Position du problème et hypothèses	58
II. 1. 1. 1. Position du problème	58
II. 1. 1. 2. Hypothèses	59
II. 1. 2. Formulation générale	60
II. 1. 3. Expression des potentiels vecteurs magnétiques dus à l'effet de proximité	62
II. 1. 4. Conditions au niveau des interfaces	65
II. 1. 5. Détermination des impédances dues à l'effet de proximité d'un conducteur	66
II. 1. 5. 1. Application de la loi de Faraday aux conducteurs I et C	67
II. 1. 5. 2. Application de la loi de Faraday aux conducteurs P et C	69
II. 1. 6. Détermination de l'impédance interne d'un conducteur soumis à l'effet de peau et de proximité d'autres conducteurs	70
II. 1. 7. Application à un système de conducteurs de rayons différents dans l'air	73
II. 1. 7. 1. Configuration en triangle	73
II. 1. 7. 2. Configuration en nappe	79
II. 2. Modèle matricielle des impédances et admittances des lignes multifilaires au dessus d'un milieu conducteur	85
II. 2. 1. Généralités	85
II. 2. 2. Formulation générale	86

II. 2. 3. Détermination des matrices d'impédances externes et d'admittances des conducteurs de phase et du sol incluant les impédances internes du sol	86
II. 2. 4. Détermination des éléments de la matrice $([Z_i])$ d'impédances internes des conducteurs de phase	88
II. 2. 4. 1. Détermination des éléments hors diagonale de $([Z_i])$	88
II. 2. 4. 2. Détermination des éléments constituant la diagonale de $([Z_i])$	90
II. 3. Application de l'analyse modale à un système de conducteurs situés au dessus d'un plan conducteur s	91
II. 3. 1. Rappels théoriques	91
II. 3. 2. Application à trois conducteurs de rayons identiques au-dessus d'un plan de masse en cuivre	93
II. 3. 3. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan de masse en cuivre	97
II. 3. 4. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus de sols de différentes conductivités (conducteurs de phase sans pertes)	100
II. 3. 5. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan conducteur (comparaison entre le cuivre et le sol)	103
II. 4. Programmation des fonctions de Bessel cylindriques	106
II. 4. 1. Généralités	106
II. 4. 2. Code de calcul des fonctions $J_n(z)$ et $I_n(z)$ pour des arguments faibles et moyens	108
II. 4. 3. Code de calcul des fonctions $K_n(z)$ pour des arguments faibles et moyens	110
II. 4. 4. Cas des larges arguments et validations	111
II. 5. Conclusion	111

CHAPITRE III : MODELE ANALYTIQUE POUR LA DETERMINATION DES IMPEDANCES ET ADMITTANCES DES CABLES MULTIFILAIRES BLINDES 113

Nomenclature	114
Introduction	116
III. 1. Câble multifilaire blindé isolé dans l'air	117
III. 1. 1. Expression des potentiels vecteurs magnétiques	117
III. 1. 1. 1. Hypothèses et formulation	117
III. 1. 1. 2. Potentiel vecteur magnétique dans le matériau de la gaine	118
III. 1. 1. 3. Potentiel vecteur magnétique dans la cavité interne de la gaine	120
III. 1. 1. 4. Potentiel vecteur magnétique dans la région extérieure à la gaine	123
III. 1. 1. 5. Synthèse des potentiels vecteurs magnétiques selon les régions	126
III. 1. 2. Conditions de passage au niveau des interfaces	127
III. 1. 3. Densité de courant dans le matériau de la gaine	130
III. 1. 4. Impédance propre du circuit composé du conducteur i et de la gaine	131
III. 1. 4. 1. Impédance propre du circuit composé du filament de courant i et de la gaine	131
III. 1. 4. 2. Impédance propre interne du conducteur interne i	135
III. 1. 4. 3. Impédance propre totale du circuit composé du conducteur i et de la gaine	136
III. 1. 5. Impédance mutuelle du câble	136
II. 2. Câble multifilaire blindé situé à une certaine hauteur au-dessus d'un plan conducteur ou enterré	139
III. 2. 1. Impédances de transfert de la gaine	140
III. 2. 2. Impédances de surfaces de la gaine	140
III. 2. 2. 1. Impédance de surface interne de la gaine	140
III. 2. 2. 2. Impédance de surface externe de la gaine	141

III. 2. 3. Détermination des matrices d'impédances et d'admittances des câbles multifilaires blindés au-dessus d'un plan de masse ou du sol ou enterré	142
III. 2. 3. 1. Détermination des matrices d'impédances séries d'un câble au dessus d'un milieu conducteur	142
III. 2. 3. 1. 1. Impédances propres du système étudié	142
III. 2. 3. 1. 2. Impédances mutuelles du système étudié	146
III. 2. 3. 2. Détermination des matrices d'admittances des câbles multifilaires blindés situés au-dessus d'un plan de masse ou du sol	150
III. 2. 3. 3. Détermination des matrices d'impédances et d'admittances des câbles multifilaires blindés enterrés dans le sol	154
III. 2. 3. 3. 1. Détermination des matrices d'impédances série d'un câble enterré dans le sol	154
III. 2. 3. 3. 2. Détermination des matrices d'admittances parallèles d'un câble enterré dans le sol	156
III. 3. Résultats et validations	157
III. 3. 1. Résultats et validations dans le cas d'un câble bifilaire blindé	158
III. 3. 1. 2. Comparaison entre notre modèle et d'autres modèles pour la gaine du câble	158
III. 3. 1. 2. 1. Comparaison du modèle proposé avec la méthode des éléments finis ainsi que les modèles classiques de prise en compte de l'effet de peau	158
III. 3. 1. 2. 2. Comparaison du modèle proposé avec la méthode des éléments finis et, le modèle d'Ametani	160
III. 3. 2. Résultats et validations dans le cas d'un câble tripolaire blindé	164
III. 3. 3. Résultats et validations dans le cas d'un câble blindé à quatre conducteurs internes sur une gamme de fréquence [1MHz, 10MHz]	170
III. 4. Conclusion	172
CONCLUSION GENERALE	173

BIBLIOGRAPHIE	175
ANNEXES	183
Annexe I	184
Annexe II	190
Annexe III	191

SOMMAIRE ET INTRODUCTION GENERALE

SOMMAIRE

La multiplication dans tous les domaines des dispositifs électroniques à différents niveaux de sensibilité les rend de plus en plus vulnérables aux agressions électromagnétiques (foudre, décharges électrostatiques, émetteurs de radiodiffusion, IEMN, champs rayonnés par les équipements, etc...).

La volonté d'assurer un fonctionnement optimal des circuits et systèmes électrique ou électronique face à un environnement électromagnétique de plus en plus pollué est une des exigences de notre époque. Celle ci peut être satisfaite dans la mesure où, d'une part dès la conception des équipements, des modèles de simulation sont élaborés en vue de la prédiction en Compatibilité Electromagnétique (CEM) et que d'autre part en complément de la modélisation, des mesures visant à durcir le matériel sont faites.

Les liaisons filaires de par leur fonctions constituent les véhicules de l'information ou de l'énergie. La présence d'ondes électromagnétiques perturbatrices dans leur voisinage peut occasionner une altération des signaux émis et quelques fois la destruction des appareils connectés aux extrémités.

Pour prévoir les niveaux des signaux parasites, et dans le but de les réduire, il est important d'envisager une modélisation fine des structures filaires et ceci, avec un temps de calcul acceptable. Pour y répondre, des modèles analytiques de simulation plus ou moins détaillés ont été mis au point. Nous verrons tout au long du premier chapitre que les modèles existants n'envisagent pas dans des configurations générales la prise en compte de la proximité des conducteurs les uns par rapport aux autres. Ceci pose un sérieux problème lorsque que l'on assiste de plus en plus à un besoin soutenu d'intégration des circuits et systèmes. Notre travail s'inscrit dans la correction de ces défaillances et propose des modèles de type circuit caractérisant les lignes multifilaires ainsi que les câbles multifilaires blindés tout en tenant compte des effets de peaux et de proximités intervenants dans les milieux conducteurs. La formulation utilisée reste valable sur une large bande de fréquence (n'excluant que les fréquences pour lesquelles il devient impératif de tenir compte des courants de déplacements dans les conducteurs). Enfin, les hypothèses quasi-TEM sont adoptées dans tout ce qui suit.

INTRODUCTION GENERALE

Durant ces dernières années, les évolutions rapides des technologies alliées aux besoins de plus en plus croissants des sociétés actuelles ont donné naissance à la construction de réseaux d'énergie électrique et des télécommunications de plus en plus complexes. Il faut ajouter à ceci, la multiplication dans tous les domaines des dispositifs électroniques à différents niveaux de sensibilité ainsi que l'intégration de plus en plus grande des faisceaux de câbles reliant ces dispositifs. Ces ensembles, pouvant être soit embarqués (aéronautique, ...) soit in situ, constituent des systèmes qui interfèrent, et ce surtout lorsqu'ils sont soumis à des champs électromagnétiques intenses.

La prédiction en compatibilité électromagnétique consiste à introduire dès la conception des critères permettant de réduire au maximum les problèmes d'interférences.

Dans cette optique de nombreux travaux sur les câbles et lignes assez proches les uns des autres ont vu le jour dans le monde, et en particulier en France au cours des vingt dernières années.

D'intéressantes investigations de type numérique commencent à être menées dans ce domaine, mais leur efficacité est limitée par les capacités actuelles des ordinateurs qui ne permettent pas encore de pouvoir étudier de tels ensembles dans leur globalité, tout au moins dans des temps ou des coûts raisonnables.

La prise en compte de la notion de conducteur équivalent dans le but de réduire les dimensions des systèmes à résoudre, l'utilisation des approches de type topologique pour tenir compte de la non-uniformité de certaines lignes et câbles, ont conduit les chercheurs et ingénieurs à élaborer des modèles analytiques très utiles. Néanmoins, dans ces approches analytiques, il est rarement question de tenir compte d'une des conséquences de cet effet d'intégration des conducteurs à savoir l'effet de proximité dans les conducteurs.

Le travail que nous présentons dans ce mémoire est une approche de type analytique tenant compte des effets de proximités les plus sensibles dans les conducteurs afin de déterminer les matrices d'impédances et d'admittances de ces derniers sur une large gamme de fréquences.

Une analyse critique des méthodes et modèles existant actuellement pour la modélisation des paramètres linéiques des lignes et câbles sera présentée dans le chapitre I. Nous proposons dans le chapitre II, un modèle original de calcul des paramètres des lignes multifilaires avec la prise en compte des effets de peau et de proximité au niveau des conducteurs. Enfin, le chapitre trois propose aussi un modèle original de caractérisation des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés. Les modèles proposés seront de type circuits équivalents et seront validés par des méthodes utilisant la technique des éléments finis ou des résultats trouvés dans la littérature, sur une gamme de fréquences allant de 0 à 10 MHz, les conducteurs étudiés pouvant être de rayons différents.

CHAPITRE I :

**METHODES CLASSIQUES DE DETERMINATION DES PARAMETRES
LINEIQUES ET ELECTRIQUES DES LIGNES ET CABLES**

INTRODUCTION

Dans le but de mieux protéger et optimiser les systèmes connectés aux lignes, les ingénieurs et chercheurs n'ont eu de cesse de concevoir des modèles nouveaux caractérisant les lignes et les câbles. De tout temps les modèles élaborés se sont attachés à restituer le plus fidèlement possible les réalités qu'ils représentaient. Ainsi, la résolution des équations des télégraphistes permet de déterminer les grandeurs tension et courant en tout point de la ligne à condition que les paramètres primaires des éléments constituant les liaisons soient rigoureusement déterminés.

Dans cette perspective, diverses formulations et méthodes de mesures ont été mises au point pour déterminer les paramètres linéiques des structures précitées dans l'hypothèse quasi-TEM.

Les méthodes de modélisation actuelles des lignes et câbles peuvent se subdiviser en deux catégories.

Les modèles utilisant des techniques dites numériques, c'est-à-dire basées sur une discrétisation du problème avant la résolution. Ces méthodes sont apparues avec l'avènement croissant de l'informatique et s'imposent de plus en plus à nous. Elles constituent des codes de calcul puissants et rigoureux. Cependant, la taille de certains problèmes à résoudre associée à des dimensions de matrices très importantes ainsi qu'au temps d'entrée de données et d'exécution des programmes peuvent les rendre coûteuses en terme de temps. De plus, un autre inconvénient réside dans le fait que l'on soit obligé de discretiser les zones d'épaisseurs de peau pour des valeurs différentes de la fréquence ou d'utiliser la technique des impédances de surfaces en respectant certains critères (utilisation en haute et moyenne fréquence, et la distance entre certains conducteurs doit être assez grande par rapport à leurs rayons) afin de minimiser les erreurs dues à l'effet de proximité.

Les méthodes analytiques quant à elles occupent une place importante depuis J. C. Maxwell. Elles permettent lorsque certaines conditions de géométrie sont réunies, par exemple la forme cylindrique des conducteurs, de trouver des expressions littérales plus

simples, donc plus faciles à programmer et avec un temps d'entrée de données et de calculs très rapide. En outre, les méthodes analytiques sont moins lourdes à mettre en oeuvre, s'intègrent facilement dans d'autres code de calcul des lignes et câbles, et demeurent un outil de calcul puissant lorsque les formules sont accessibles. Nous remarquerons tout au long de ce chapitre qu'il n'y a pas eu beaucoup de modèles nouveaux ces dernières années et que certains modèles anciens s'imposent aujourd'hui encore, faute de mieux.

Malgré tous les développements de la modélisation, des mesures de paramètres restent nécessaires. Les méthodes de mesures, très coûteuses, prennent beaucoup de temps de conception et de mise en oeuvre. Beaucoup de progrès ont été réalisés dans ce domaine du fait de l'évolution des appareillages de mesures, toutefois les mesures doivent être menées prudemment afin de pouvoir contrôler les erreurs qui peuvent en découler. Elles constituent souvent le dernier recours par rapport aux méthodes précédentes. Il existe à ce sujet une littérature [55] [13] [49] [3] [61] assez variée que nous proposons aux lecteurs intéressés.

Après un bref historique sur les méthodes de résolutions des équations des télégraphistes, nous donnerons en temps qu'utilisateur de la méthode des éléments finis, un aperçu sur les formulations de base concernant les méthodes numériques et nous attarderons sur les modèles analytiques les plus usités actuellement.

I. 1. METHODES CLASSIQUES DE SIMULATION DES LIGNES ET CABLES

I. 1. 1. Introduction

Il existe deux grandes méthodes de simulations des lignes et des câbles multifilaires en régime transitoire. On distingue [54] [26] [9] [27] [85] [28] d'une part, les méthodes temporelles dans lesquelles on discretise les équations de propagations pour obtenir des équations algébriques plus simples à résoudre et d'autre part, les méthodes fréquentielles qui utilisent la transformation de Fourier ou de Laplace à l'aide des techniques tels que la convolution, l'échantillonnage des fonctions et, l'utilisation de la transformée en z [85]. Dans

les premières, il est aisé de prendre en compte les éléments non linéaires mais, on y maîtrise mal la prise en compte de la variation fréquentielle des paramètres. Par contre, dans les transformations de type intégrales, on peut tenir compte des variations fréquentielles des paramètres alors que les non linéarités n'y sont pas admises. Le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel peut se faire à l'aide de la transformée inverse de Laplace [4] ou par l'utilisation du théorème de convolution.

Nous allons tout d'abord présenter la méthode modale et son utilisation dans le domaine fréquentiel puisque nous l'adopterons pour déterminer les paramètres de modes tels que les atténuations ainsi que les vitesses de propagations modales.

Ensuite, parmi les méthodes temporelles, nous rappellerons, les méthodes basées sur la théorie des ondes mobiles ou de Bergeron ainsi que certaines méthodes temporelles utilisant les différences finies.

I. 1. 2. Analyse modale

Du fait des couplages électromagnétiques entre les fils, les matrices d'impédances sont non diagonales. L'intérêt de la méthode modale est donc de découpler les équations pour parvenir à diagonaliser les matrices [52]. Il convient de rappeler que l'analyse modale est utilisée aussi bien dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel.

Les équations matricielles de base utilisées sont les équations des télégraphistes appliqués à un système de P conducteurs.

Une représentation de ces équations dans le domaine temporel est donnée par :

$$-\left\{\frac{\partial v}{\partial z}\right\} = [R] \{i\} + [L] \left\{\frac{\partial i}{\partial t}\right\} \quad (1)$$

$$-\left\{\frac{\partial i}{\partial z}\right\} = [G] \{v\} + [C] \left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} \quad (2)$$

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

[R], [L], [G] et [C] représentent respectivement les matrices des résistances, des inductances, des conductances et des capacités.

Les équations précédentes exprimées dans le domaine fréquentiel à l'aide de l'opérateur de Laplace nous fournissent :

$$-\left\{\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = [R] \{I\} + p [L] \{I\} = [Z] \{I\} \quad (3)$$

$$-\left\{\frac{\partial I}{\partial z}\right\} = [G] \{V\} + p [C] \{V\} = [Y] \{V\} \quad (4)$$

Dans ces équations les matrices [Z] et [Y] désignent respectivement des matrices d'impédances et d'admittances des lignes dans le cas où nous tenons compte des pertes.

La résolution de ces équations s'effectue en tenant compte des conditions initiales et finales (impédances et sources présentes aux extrémités). On passe ainsi du domaine des phases au domaine des modes dans lequel les équations modales sont résolues, et on peut alors revenir au domaine des phases grâce à des matrices de passages appropriées, et ainsi exprimer les grandeurs de phases (tensions et courants) en fonction de la fréquence et de la distance aux points sources [40].

La combinaison des équations matricielles définies précédemment nous fournit les équations écrites ci-dessous, représentant l'équation différentielle du second ordre en tension ou en courant.

$$\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\} = [Z] [Y] \{V\} \quad (5)$$

$$\left\{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}\right\} = [Y] [Z] \{I\} \quad (6)$$

Dans ces expressions, $\{I\}$ et $\{V\}$ désignent respectivement le vecteur des courants de phase et celui des tensions de phase avec le plan conducteur s comme référence.

Nous noterons en outre qu'à partir des matrices $[Z]$ et $[Y]$, on définit :

$[\Gamma_v] = \sqrt{[Z] [Y]}$ comme représentant la matrice des constantes de propagation en tension et $[\Gamma_i] = \sqrt{[Y] [Z]}$ celle des constantes de propagation en courant.

Nous indexerons les variables modales par l'indice m dans tout ce qui suit.

Les matrices de transformation reliant les grandeurs de phases (tensions, courants) aux grandeurs des modes sont données par les relations suivantes :

$$\{V_m\} = [M]^{-1} \{V\} \quad (7)$$

$$\{I_m\} = [N]^{-1} \{I\} \quad (8)$$

Nous rappelons que les matrices $[M]$ et $[N]$ sont classiquement notées $[T_v]$ et $[T_i]$, et que leur détermination fait appel au calcul des vecteurs propres, ce qui nécessite la résolution de l'équation caractéristique du système écrit dans le domaine des phases. Les équations différentielles modales sont alors établies sous la forme suivante:

$$\left\{ \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right\} = [P_m] \{V_m\} \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 I_m}{\partial z^2} \right\} = [Q_m] \{I_m\} \quad (10)$$

Dans ces deux relations, $[P_m]$ et $[Q_m]$ sont des matrices diagonales dont les expressions sont données par :

$$[P_m] = [M]^{-1} [Z] [Y] [M] \quad (11)$$

$$[Q_m] = [N]^{-1} [Y] [Z] [N] \quad (12)$$

Et comme nous utilisons les hypothèses quasi-TEM, nous avons :

$$[P_m] = [Q_m] = [\Gamma_{mv}^2] = [\Gamma_{mi}^2] = [\Gamma_m^2].$$

Les matrices d'impédances ($[Z_m]$) et d'admittances ($[Y_m]$) des modes ainsi que la matrice d'impédances caractéristiques ($[Z_{cm}]$) peuvent s'obtenir grâce aux formules suivantes :

$$[Z_m] = [M]^{-1} [Z] [N] \quad (13)$$

$$[Y_m] = [N]^{-1} [Z] [M] \quad (14)$$

$$[Z_{cm}] = [\Gamma_m]^{-1} [Z_m] = [Y_m]^{-1} [\Gamma_m] \quad (15)$$

En désignant par γ_m les termes de la matrice diagonale $[\Gamma_m]$ des constantes de propagation modales en tension et courant et, par z_{cm} les termes de la matrice d'impédances caractéristique, nous remarquons que ces termes dépendent entre autre de la fréquence.

Il convient alors d'explicitier γ_m sous la forme $\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m$ dans laquelle, $v = \omega/\beta_m$ désigne la vitesse de propagation (de phase) des tensions et courants modaux tandis que α_m caractérise l'atténuation avec laquelle ils se propagent.

La transformation modale nous permet donc de passer d'un système polyphasé à plusieurs systèmes monophasés. Les équations différentielles (9) et (10) auront P (nombre de conducteurs) couples de solutions formulés comme suit :

$$V_m(x, \omega) = A(\omega) e^{-\gamma_m z} + B(\omega) e^{\gamma_m z} \quad (16)$$

$$I_m(x, \omega) = C(\omega) e^{-\gamma_m z} + D(\omega) e^{\gamma_m z} \quad (17)$$

Dans ces expressions, les coefficients $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$, et $D(\omega)$ dépendent des conditions aux limites à chacune des extrémités.

Enfin, le passage du domaine des modes au domaine phaseurs se fait à l'aide des matrices de passages $[M]$ et $[N]$.

I. 1. 3. Méthode de Bergeron ou des ondes mobiles [11]

Dans une première étape, nous supposons les lignes sans perte.

L'équation des télégraphistes (1) et (2) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$-\left\{\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}\right\} = [L] \left\{\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right\} \quad (18)$$

$$-\left\{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}\right\} = [C] \left\{\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\right\} \quad (19)$$

L'application de la transformation modale [85] à ce système nous permet d'obtenir de nouvelles variables de modes de courants et de tensions notées $\{\hat{i}\}$ et $\{\hat{v}\}$. Les solutions de ces équations alors diagonalisées s'écrivent [11] pour le mode i par exemple :

$$\hat{i}_i(z, t) = f_1(z - u_i t) + f_2(z + u_i t) \quad (20)$$

$$\hat{v}_i(z, t) = Z_{0i} f_1(z - u_i t) + Z_{0i} f_2(z + u_i t) \quad (21)$$

Dans ces expressions, f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires des variables $(z-u_i t)$ et $(z + u_i t)$ tandis que Z_{0i} et, u_i désignent respectivement l'impédance caractéristique et, la vitesse de propagation du mode i .

$$Z_{0i} = \sqrt{\frac{L_i}{C_i}} \text{ et, } u_i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}} \quad (22)$$

Le système d'équations précédent peut se mettre sous la forme suivante

$$\hat{v}_i(z, t) + Z_{0i} \hat{i}_i(z, t) = 2 Z_{0i} f_1(z - u_i t) \quad (23)$$

$$\hat{v}_i(z, t) - Z_{0i} \hat{i}_i(z, t) = -2 Z_{0i} f_2(z + u_i t) \quad (24)$$

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

Dans ces expressions, le terme $\hat{v}_i(z, t) + Z_{0i} \hat{i}_i(z, t)$ reste constant avec $(z - u_i t)$ tandis que $\hat{v}_i(z, t) - Z_{0i} \hat{i}_i(z, t)$ reste constant avec $(z + u_i t)$.

On pourrait alors imaginer un observateur parcourant un conducteur de la ligne du noeud m au noeud k (situé à une distance b du noeud m) en un temps égal à $\tau_i = b/u_i$. L'expression $\hat{v}_i(z, t) + Z_{0i} \hat{i}_i(z, t)$ mesurée par l'observateur au noeud m et, à l'instant $t - \tau_i$ a la même valeur que quand il arrive au noeud k à l'instant t. Ce qui nous permet d'obtenir les relations établies selon chaque mode et en particulier pour le mode i.

Pour l'observateur partant du noeud m au noeud k nous avons :

$$\hat{v}_{i,m}(t - \tau) + Z_{0i} \hat{i}_{i,m}(t - \tau) = \hat{v}_{i,k}(t) - Z_{0i} \hat{i}_{i,k}(t) \quad (25)$$

De même pour l'observateur partant du noeud k au noeud m nous obtenons :

$$\hat{v}_{i,k}(t - \tau) - Z_{0i} \hat{i}_{i,k}(t - \tau) = \hat{v}_{i,m}(t) + Z_{0i} \hat{i}_{i,m}(t) \quad (26)$$

Ces deux équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\hat{i}_{i,k}(t) = \frac{\hat{v}_{i,k}(t)}{Z_{0i}} - \hat{i}_{i,k}(t - \tau) \quad (27)$$

$$\hat{i}_{i,m}(t) = \frac{\hat{v}_{i,m}(t)}{Z_{0i}} - \hat{i}_{i,m}(t - \tau) \quad (28)$$

avec,

$$\hat{i}_{i,k}(t - \tau) = \frac{\hat{v}_{i,m}(t - \tau)}{Z_{0i}} + \hat{i}_{i,m}(t - \tau) \quad (29)$$

$$\hat{i}_{i,m}(t - \tau) = \frac{\hat{v}_{i,k}(t - \tau)}{Z_{0i}} + \hat{i}_{i,k}(t - \tau) \quad (30)$$

La méthode de Bergeron nous ramène donc à l'étude et à la résolution du circuit équivalent obtenu. Le circuit équivalent à constantes localisées des équations précédentes (29) et (30) est donc représenté par la figure (1).

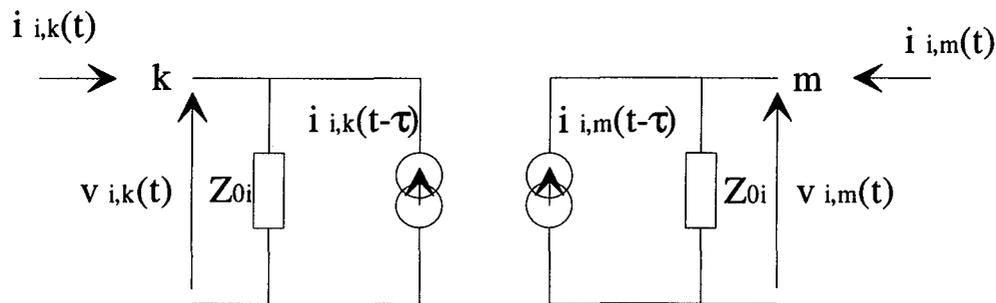


Figure (1) *Circuit équivalent pour le mode i de la ligne comprise entre les noeuds k et m*

Pour tenir compte des pertes dans la ligne, il faut rajouter le quart de la résistance totale (R) du conducteur à chaque extrémité, et la moitié au milieu de la ligne c'est à dire en $b = z / 2$ (l'axe z étant l'axe de la ligne). Or la résistance de la ligne dépend de la fréquence, ce qui fait que l'on sous-estime ou surestime les atténuations de l'onde selon que le calcul de R ait été fait en basse fréquence ou en haute fréquence. Enfin, la résolution des équations obtenues peut se faire par la méthode des trapèzes. Dans cette méthode de résolution, du choix du pas de temps dépend la précision des résultats.

Des résultats entachés d'erreurs peuvent se produire lors de la simulation des lignes dont les vitesses de propagations sont voisines. En outre, la méthode est limitée par la condition $R/4 \ll Z_c$ [27]. Les paramètres R et Z_c caractérisent la résistance linéique de la ligne et son impédance caractéristique, l'application de la condition précédente revient donc à limiter la longueur de la ligne.

Enfin, la prise en compte d'éléments non linéaires auparavant discrétisés est facile.

I. 1. 4. Méthode du double balayage

Cette méthode a été élaboré au départ par N'Dir [63] et Sabonnadière puis développée et étendue à des systèmes plus importants par Auriol [79] [85].

Dans cette méthode, les équations de propagation sont tout d'abord traitées par une analyse modale.

Grâce à la transformation astucieuse suivante :

$$v = [T_v] (\{U\} + \{W\}) / 2 \quad (31)$$

$$i = [T_i] [Y_c] (-\{U\} + \{W\}) / 2 \quad (32)$$

on passe du domaine phaseurs au domaine des modes. Dans ces relations, Y_c désigne la matrice d'admittance caractéristique de mode et, $\{U\}$ et $\{W\}$ les vecteurs des modes.

Le système à résoudre devenant plus sympathique se présente comme suit :

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial z} \right\} + [P] \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\} + S_1 \{U\} + S_2 \{V\} = 0 \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial z} \right\} - [P] \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \right\} + S_3 \{U\} + S_4 \{W\} = 0 \quad (34)$$

A partir de ces équations, il sera utilisé un schéma aux différences finies dans lequel les dérivées partielles seront remplacées par des différences pondérées des valeurs de la fonction en deux points et en deux instants successifs.

Nous signalerons que cette méthode demeure une des plus perfectionnée parmi les méthodes aux différences finies, car on y trouve les conditions de stabilité numérique parfaitement établies et qu'en outre, elle peut prendre en compte les non linéarités, mais elle est assez lourde à mettre en oeuvre, surtout quand on cherche à l'appliquer à un réseau étendu.

I. 1. 5. Utilisation de la transformée inverse de Laplace pour modéliser les pertes

En partant des insuffisances liées à chacune des méthodes (temporelles ou fréquentielles) des auteurs essaient de plus en plus de les surmonter et proposent des solutions. Il nous paraît alors utile de restituer ici, une des solutions adoptées, qui consiste à une approche combinée fréquentielle temporelle en étapes successives. Il s'agit en effet tout d'abord de déterminer dans le domaine fréquentiel la variation due à l'effet de peau des impédances séries de la ligne et du sol ou du plan de masse. Grâce à la transformation de Laplace inverse, on détermine la résistance transitoire d'effet de peau [88]. Celle-ci est alors introduite dans les équations des télégraphistes sous forme d'une convolution dont le noyau est proportionnel à cette résistance transitoire. En outre, la présence d'un champ électromagnétique incident peut être prise en compte et, traduite dans les équations des télégraphistes sous forme de sources distribuées équivalentes de tension et de courant. On obtient alors des équations intégral-différentiel de type Volterra qui se présentent comme suit [62] :

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = l_{\text{ext}} \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t r(t-t') i(z,t') dt' + \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - [\mathbf{E}_z(z,h,t) - \mathbf{E}_z(z,0,t)] \quad (35)$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = c_{\text{st}} \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + g_0 v(z,t) - \left[c_{\text{st}} \frac{\partial}{\partial t} + g_0 \right] \int_0^h \mathbf{E}_x(z,x,t) dx \quad (36)$$

Dans ces expressions, on suppose que la ligne comprise dans le plan (O,z,x), de même direction que l'axe Oz, est donc orthogonale à l'axe Ox. En outre, la nomenclature liée aux différents paramètres utilisés dans ces équations est la suivante.

l_{ext} , c_{st} désignent respectivement l'inductance externe et la capacité de la ligne au-dessus d'un plan de masse. g_0 et $r(t)$ désignent successivement la conductance et la résistance transitoire calculée par la transformée inverse de Laplace. Enfin \mathbf{E}_x et \mathbf{E}_z sont les composantes du champ électromagnétique incident alors que Φ_n représente le flux incident perpendiculaire au plan contenant la ligne et orthogonal au plan de masse.

Ces équations sont alors résolues dans le domaine temporel par la méthode des différences finies.

Une des difficultés qui se pose dans cette façon de faire est de trouver la résistance transitoire par la méthode de Laplace inverse lorsque l'expression des impédances en fonction de la fréquence n'est pas simple (Cas de l'effet de proximité).

I. 2. MODELES NUMERIQUES

Nous n'avons point la prétention de développer de façon exhaustive la théorie relative aux méthodes numériques du fait que nous ne sommes qu'utilisateurs et non concepteurs de ces méthodes et que cela nous mènerait hors de notre propos.

Trois méthodes seront analysées dans cette partie: la méthode de subdivision des conducteurs, la méthode des éléments finis, et enfin la méthode des équations intégrales.

I. 2.1. Méthode de subdivision des conducteurs

Cette méthode peut se substituer aux modèles analytiques dans le cas d'étude des conducteurs de formes non cylindriques. Dans cette méthode [22] [27] [7], on divise chaque conducteur en plusieurs éléments conducteurs parallèles et de formes identiques. La section de ces éléments peut avoir une géométrie de forme quelconque, et doit être assez faible pour que l'on puisse supposer constante la densité de courant qui les traverse. Ainsi, pour une meilleure discrétisation, la taille de la section de chacun de ces éléments peut être pris comme étant du même ordre de grandeur que la profondeur de pénétration. En outre, le courant est supposé parcourir longitudinalement les divers éléments conducteurs tandis que la résistivité et la perméabilité magnétique de chaque conducteur à diviser seront supposées constantes et indépendantes du courant.

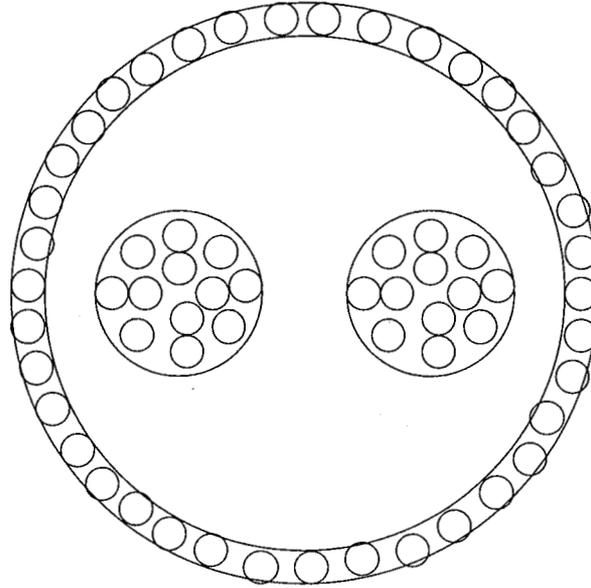


Figure (2) : *Câble bifilaire blindé dans lequel chaque conducteur est subdivisé en plusieurs conducteurs élémentaires de forme cylindrique*

Avec ces hypothèses, la résistance R_i par unité de longueur de chaque élément conducteur s'obtient de la façon suivante :

$$R_i = \frac{\rho}{s_i} \quad (37)$$

avec : ρ et s représentant respectivement la résistivité et la section de l'élément en question.

Dans le cas où les "sous conducteurs" sont cylindriques, on calcule les inductances propres et mutuelles linéiques des éléments i et j en prenant en compte un conducteur de retour fictif indexé q n'étant pas parcouru par un courant, ce qui donne:

Pour L_{ii}

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{D_{iq}^2}{r_i r_q} \right) + \frac{\mu_i}{4} + \frac{\mu_q}{4} \right] \quad (38)$$

et, pour L_{ij}

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\text{Ln} \left(\frac{D_{iq}^2 D_{jq}^2}{r_q D_{ij}} \right) + \frac{\mu_q}{4} \right] \quad (39)$$

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

avec :

r : le rayon d'un conducteur élémentaire.

D : distance entre centres de deux conducteurs élémentaires circulaires.

μ_0 : perméabilité absolue du vide.

μ_i et μ_q respectivement les perméabilités relatives des conducteurs élémentaires i et q .

Pour une subdivision en n conducteurs, les chutes de tensions longitudinales sur les conducteurs élémentaires pour chaque fréquence s'écrivent à l'aide des paramètres R_i, L_{ii}, L_{ij} exprimés sous la forme suivante

$$-\begin{bmatrix} \frac{dV_1}{dz} \\ \frac{dV_2}{dz} \\ \vdots \\ \frac{dV_n}{dz} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{ni} & \dots & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (40)$$

Lors de la détermination des paramètres effectifs des conducteurs réels, nous calculons tout d'abord les paramètres R_i, L_{ii}, L_{ij} à l'aide des formules précédemment élaborées et pour chaque fréquence, nous établissons la matrice complexe $[Z]$ de la manière suivante :

$$[Z] = [R] + j\omega [L] \quad (41)$$

Pour fixer les idées, nous prenons le cas où un conducteur de phase R est subdivisé en quatre éléments d'indice i, k, l et n dont les paramètres linéiques sont portés dans la matrice $[Z]$. Le système précédent peut alors s'écrire

$$\begin{matrix}
 & & & i & k & l & n & & \\
 \begin{bmatrix}
 dV_l/dz \\
 \bullet \\
 dV_i/dz \\
 \bullet \\
 dV_k/dz \\
 dV_l/dz \\
 dV_n/dz
 \end{bmatrix}
 & = &
 \begin{bmatrix}
 \bullet & \bullet & Z_{li} & \bullet & Z_{lk} & Z_{ll} & Z_{ln} \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & Z_{ii} & \bullet & Z_{ik} & Z_{il} & Z_{in} \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & Z_{ki} & \bullet & Z_{kk} & Z_{kl} & Z_{kn} \\
 \bullet & \bullet & Z_{li} & \bullet & Z_{lk} & Z_{ll} & Z_{ln} \\
 \bullet & \bullet & Z_{ni} & \bullet & Z_{nk} & Z_{nl} & Z_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_l \\
 \bullet \\
 I_i \\
 \bullet \\
 I_k \\
 I_l \\
 I_n
 \end{bmatrix}
 I_R
 \end{matrix}$$

(42)

Pour réduire les dimensions de ce système, et le ramener à un système de dimensions égales aux nombres de conducteurs de phase, il sera nécessaire d'utiliser les deux équations suivantes :

$$I_l + I_k + I_l + I_n = I_R \tag{43}$$

et,

$$\frac{dV_i}{dz} = \frac{dV_k}{dz} = \frac{dV_l}{dz} = \frac{dV_m}{dz} = \frac{dV_R}{dz} \tag{44}$$

La réduction du système précédent se fera en deux étapes :

La première étape consiste à introduire l'équation (43) dans le système matriciel. On remplace I_i par I_R dans le vecteur des courants en commettant une erreur égale à $Z_{\mu i} (I_k + I_l + I_n)$ dans chaque ligne d'indice μ . Pour corriger cette erreur, on soustrait la colonne i de $[Z]$ des colonnes k, l et n de la même matrice (voir formule 42). Après cette opération, I_k, I_l et I_n demeurent toujours dans le vecteur des intensités du système matriciel. Il sera donc nécessaire de les y éliminer afin de ne plus conserver que l'équation relative au conducteur de phase.

Pour ce faire, une deuxième opération doit être envisagée.

Dans cette seconde étape, l'introduction de l'équation (44) dans le système matriciel et la soustraction de la ligne i des lignes k, l , et n nous permettent d'obtenir dans la colonne des vecteurs dV/dz des termes nuls aux lignes k, l et n tandis qu'à la ligne d'indice R , il demeure

dV_R / dz dans le vecteur des dV/dz et I_R dans le vecteur des intensités. Ce qui nous permet d'éliminer I_k , I_l et I_n du système pour ne plus conserver que les paramètres concernant le conducteur de phase R.

Nous signalerons que le temps de calcul lié à cette méthode peut devenir très important lorsque l'on discretise très finement les conducteurs pour tenir compte de l'effet de peau en haute fréquence. Cette méthode de résolution ainsi que la méthode des éléments finis s'adaptent bien à des cas où les conducteurs sont de formes quelconques (sections non cylindriques).

I. 2. 2. Méthode des Eléments Finis.

I. 2. 2. 1. Historique et généralités

Les techniques numériques de résolution de type élément finis datent de l'avènement des outils informatiques. Dès 1956 Turner et d'autres introduisirent la notion d'interpolation d'une variable dans un milieu à l'aide de sa valeur aux noeuds. Ces notions furent reprises et le développement de cette technique de calcul fut amorcé dans les années 1965 par Zienkiewicz, et étendu plus tard dans les années 1970 en génie électrique par Silvester [84], Sabonnadière [78] et d'autres [56].

Cette technique a été mise au point dans les domaines des sciences de l'ingénieur où il était nécessaire de décrire le comportement des systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles [78].

Cette méthode est très générale et s'applique à divers problèmes, entre autres à des problèmes de statique ou de dynamique [16], linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique à deux ou trois dimensions discrétisé selon un maillage approprié.

Il est important de noter que dans notre cas nous utiliserons des régions artificielles dans les zones d'effet de peau dans le but d'obtenir un maillage approprié de ces domaines pour des fréquences élevées.

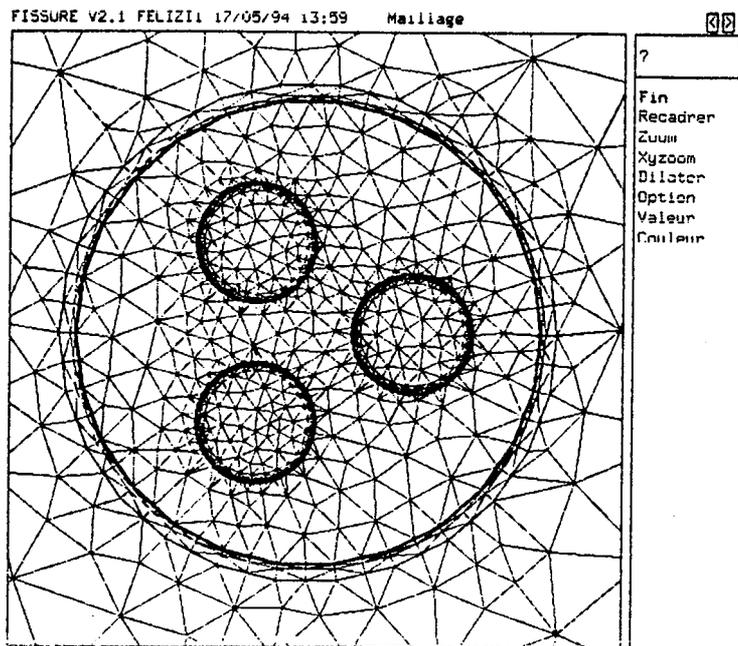


Figure (3) *Dessin d'un problème avec le maillage*

La fonction inconnue est alors approchée à l'aide d'une fonction de base linéaire (éléments du premier ordre), polynomiale (éléments d'ordre plus élevés) ou autre sur les domaines élémentaires obtenus après discrétisation.

L'utilisation de cette méthode numérique de résolution nécessite la prise en compte [78] [16] :

-d'une équation unique scalaire (équation de Poisson ou de Laplace en électrostatique) ou vectorielle (équation de diffusion en magnétodynamique) à résoudre.

-des conditions d'interface entre les différents milieux.

-d'un domaine de résolution bien défini et borné.

-des conditions aux limites sur les frontières de ce domaine ainsi que des conditions initiales.

Pour la résolution, on part du fait qu'il est plus simple de résoudre un problème en minimisant une grandeur scalaire que de résoudre directement un système d'équations aux dérivés partielles. C'est pour cela qu'une formulation variationnelle correspondant à

l'expression de l'énergie a été adoptée. Il s'agira donc de minimiser cette fonctionnelle pour obtenir la solution de l'équation.

Dans notre cas, cette méthode sera utilisée dans des problèmes d'électrostatique (diélectriques entourant des conducteurs, déterminations de capacités entre conducteurs, ...) et de magnétodynamique (détermination d'impédances de conducteurs en régime harmonique, ...).

I. 2. 2. 2. Formulation en Electrostatique

Dans ce cas, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (45)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (46)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (47)$$

La relation (45) implique l'existence d'une fonction potentiel V vérifiant $\mathbf{E} = - \text{grad } V$.

En tenant compte des autres équations, on obtient l'équation suivante :

$$\text{div } \varepsilon \text{ grad } V = - \rho \quad (48)$$

Cette équation pouvant dégénérer en l'équation de Poisson dans le cas où ε est constant.

La résolution de l'équation (48) associée à des conditions aux limites de Dirichlet (V fixé) ou de Neumann ($\frac{\partial V}{\partial n} = 0$) permet d'obtenir la valeur du potentiel scalaire V aux différents noeuds du maillage.

Enfin, l'utilisation de la formule suivante de l'énergie electrostatique nous fournit la valeur des capacités recherchées:

$$W = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv \quad (49)$$

I. 2. 2. 3. Formulation en Magnétodynamique

Ici, pour des raisons de commodité, une formulation en potentiel vecteur magnétique complexe \mathbf{A} est adoptée.

En partant des équations de Maxwell, on obtient l'équation générale de la magnétodynamique en régime harmonique et linéaire à résoudre:

$$\left(\frac{1}{\mu}\right) \Delta \mathbf{A} - j\omega\sigma \mathbf{A} = -\mathbf{J}_s \quad (50)$$

avec comme paramètres :

\mathbf{A} : potentiel vecteur magnétique complexe.

μ : perméabilité absolue du milieu.

σ : conductivité du milieu (absence des courants de déplacement).

ω : pulsation du signal.

\mathbf{J}_s : densité de courant d'excitation complexe.

Comme précédemment, la résolution de ce problème avec les conditions aux limites appropriées nous permettent d'obtenir le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (module et argument) à chaque noeud du maillage.

Les grandeurs densités de courant et champs magnétique s'en déduisent localement grâce aux relations :

$$\mathbf{J} = -j\omega\sigma \mathbf{A} \quad (51)$$

et

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (52)$$

tandis que les grandeurs globales (puissances actives et réactives) sont données par :

$$P = \int_v \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dv \quad (53)$$

et

$$Q = \int_v \frac{\mathbf{B}^2}{\mu} dv \quad (54)$$

De ces relations, et de la valeur du courant total dans chaque milieu, on déduit les impédances recherchées.

Cette méthode de résolution a été utilisée pour la caractérisation des conducteurs par plusieurs auteurs [56] [21] [92], son extension à la modélisation des câbles et lignes sous la forme de circuits équivalents a été entamée depuis quelques années par d'autres [53] [23] [94] [24]. Enfin, nous n'oublierons pas de citer les logiciels de calcul par élément finis, Fissure [16] développé au CEGELY et Flux 2D [77] développé au LEG. dont nous nous sommes servis pour valider certains de nos travaux.

I. 2. 3. Méthode des équations intégrales

Comme nous l'avons exprimé précédemment, nous nous attacherons tout simplement à restituer les quelques points essentiels à notre compréhension sur la méthode des équations intégrales.

Pour résoudre un problème par la méthode des équations intégrales, il faut pouvoir le formuler de la façon suivante [89] [93] :

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

D'une part, on définit $L(u) = f$ dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n avec L , un opérateur différentiel, u la variable (potentiel par exemple), et f caractérise les terme sources.

D'autre part on connaît la solution fondamentale de l'opérateur adjoint (L^*).

Avec ces hypothèses, on fait intervenir le fait que certains opérateurs classiques de la physique soient auto-adjoints ($L = L^*$), ce qui permet d'obtenir la solution du problème.

Ainsi, pour la résolution des problèmes en électromagnétisme nous pouvons citer deux opérateurs auto-adjoints dont les solutions fondamentales sont connues:

-L'équation de Laplace en électrostatique

$$\Delta(u) + \delta = 0 \quad (55)$$

dont la solution fondamentale est de la forme $\frac{-1}{2\pi} \ln(r)$ en deux dimensions, et $\frac{1}{4\pi r}$ en trois dimensions.

-L'équation d'Helmoltz en magnétodynamique

$$\Delta(u) + \epsilon\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta = 0 \quad (56)$$

dont la solution fondamentale est de la forme $\frac{1}{4i} H_0^{(1)}(kr)$ en deux dimensions, et $\frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}$ en trois dimensions.

Dans ces équations, il faut noter que i représente le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$, $H_0^{(1)}$ représente la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro, r représente la distance du point source au point d'application, et enfin δ la distribution de Dirac.

Grâce à ces équations, on détermine :

-en électrostatique :

les capacités par le calcul des charges sur les éléments conducteurs ainsi que la différence de potentiel entre conducteurs.

-en magnétodynamique :

les impédances internes à l'aide du vecteur de Poynting [35] tandis que les inductances mutuelles sont déterminées par la connaissance du flux.

Les méthodes numériques sont efficaces mais coûteuses en terme de temps de calcul d'entrée et de modification des données. En outre, elle ne sont pas toujours les plus adaptées pour le calcul des paramètres des lignes et câbles. Nous allons maintenant présenter les méthodes de résolutions analytiques.

I. 3. MODELES ANALYTIQUES

Nous distinguerons deux cas dans cette partie. Selon que les conducteurs sont proches ou éloignés les uns des autres, la façon de calculer les impédances internes ne sera pas la même.

I. 3. 1. Conducteurs éloignés les uns des autres

Pour mieux fixer les idées, nous supposons avoir deux conducteurs i et j de rayons respectifs a_i et a_j disposés loin l'un de l'autre. Dans ce cas, les impédances sont calculées à l'aide des équations de Maxwell en tenant compte de la fréquence et donc de l'effet de peau dans les conducteurs. Ceci nous donne dans le cas du conducteur i la formule exacte de son impédance interne sous la forme suivante [43]:

$$Z_{pi} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \frac{\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}}{2\pi a_i} \frac{1}{I_1(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})} I_0(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}) \quad (57)$$

expression dans laquelle, μ_i et σ_i désignent respectivement la perméabilité absolue et la conductivité du conducteur i . En outre, I_0 et I_1 sont des fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre 0 et 1 tandis que ω et j désignent successivement la pulsation et le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.

D'autres écritures peuvent se substituer à cette formule, nous insisterons sur le fait qu'elles constituent des bonnes approximations de la formule précédente, nous n'en citerons que deux.

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

-La formule de calcul de la résistance du conducteur donnée par Lord Kelvin [42] qui se présente sous forme de développement limité calculé à partir de la formule précédente et valable en basse fréquence.

$$R = R_c \left\{ 1 + \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{\mu_0 F}{2 R_c}\right)^2 - \left(\frac{1}{180}\right) \left(\frac{\mu_0 F}{2 R_c}\right)^4 + \dots \right\} \quad (58)$$

Formule dans laquelle, R_c , μ_0 et, F désignent successivement la résistance en continue, la perméabilité absolue du vide et la fréquence d'utilisation.

-Nous ajouterons les formules de calcul de résistance donnée par Levasseur et celle concernant l'inductance interne donnée par Johannet [42]. La formule semi-empirique de Levasseur conduit en basse fréquence à des erreurs assez faibles, de l'ordre de 2% par rapport à la formule (57) utilisant les fonctions de Bessel. Elle se présente comme suit :

$$R = R_c \left\{ \left(\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^6 + \left(\frac{a_i}{2\delta}\right)^6} \right\} \quad (59)$$

L'inductance interne quant à elle peut s'obtenir sous la forme donnée par Johannet.

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt[6]{1 + \left(\frac{a_i}{2\delta}\right)^6}} \right\} \quad (60)$$

Dans ces deux formules, R_c est la valeur en continu de la résistance, et δ la profondeur de pénétration dans le matériau du conducteur.

Nous signalerons au passage que δ est classiquement donnée par :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_i\sigma_i}} \quad (61)$$

A ce titre, nous donnons un tableau de variation de δ en fonction de la fréquence pour le cuivre.

Tableau (1) *Profondeur de pénétration en fonction de la fréquence pour le cuivre*

F (Hz)	1	100	1E3	1E4	1E5	1E6	5E6	1E7
δ (mm)	66	6.6	2	0.66	0.2	6.6E-2	2.95E-2	2.1E-2

Conducteurs en faisceaux

A partir de 200 KV, chaque conducteur de phase est constitué d'un faisceau de 2 ou plusieurs conducteurs maintenus entre eux par des entretoises. Cette disposition des conducteurs ayant pour but de leur éviter l'effet couronne. Dans ces cas, les calculs existants font souvent l'hypothèse de courants lentement variables (aux environ de 50 Hz) afin de s'affranchir des effets de peaux et de proximité éventuels. Les formules utilisant la notion du flux coupé [2] [71] font appel à des notions de DMG (distance moyenne géométrique) et RMG (rayon moyen géométrique). Ces notions permettent d'une part, à partir des rayons de chaque conducteur du faisceau et des distances entre eux de déterminer le rayon équivalent à l'ensemble de ces conducteurs pour le calcul de résistance équivalente et d'autre part de calculer les inductances linéiques du faisceau.

Dans un but illustratif, nous prenons le cas de deux conducteurs x et y de sections respectives S_x et S_y , nous obtenons [2] la distance moyenne géométrique (g_{xy}) de la surface S_x à la surface S_y grâce à la relation:

$$\text{Ln}(g_{xy}) = \frac{1}{S_x S_y} \int_{S_x} \left\{ dS_x \int_{S_y} \text{Ln}(r_{xy}) dS_y \right\} \quad (62)$$

expression dans laquelle, r_{xy} désigne la distance entre l'élément dS_x de la surface S_x et l'élément dS_y de la surface S_y

Le rayon moyen géométrique (g_{xx}) de la surface S_x représente la distance moyenne géométrique de la surface dS_x à elle-même. Il s'obtient grâce à la formule

$$\text{Ln}(g_{xx}) = \frac{1}{S_x^2} \int_{S_x} \{dS_x \int_{S_x} \text{Ln}(r_{xx}) dS_x\} \quad (63)$$

Dans cette formule, r_{xx} peut prendre toutes les valeurs possibles entre deux éléments dS_x distincts appartenants à la même surface S_x .

Dans le cas où l'on a un faisceau constitué de plusieurs sections de conducteurs, on définit le rayon moyen géométrique résultant du faisceau (ou rayon équivalent du faisceau) à partir des rayons moyens géométriques de chaque section de conducteur. Dans le cas d'un faisceau de deux conducteurs identiques de rayons a et de distance entre centre d , le RMG (g_{11} , respectivement g_{22}) de chaque conducteur est égal à a et, le RMG résultant du faisceau sera donné par :

$$\text{RMG}_{\text{res}} = \sqrt{g_{11} d} \quad (64)$$

Dans le cas d'un faisceau constitué par n conducteurs identiques disposés comme l'indique la figure (4), le RMG résultant sera donné en fonction du rayon du cercle circonscrit au faisceau (R) et du rayon (a) de chaque conducteur par la formule suivante :

$$\text{RMG} = \text{Req} = \sqrt[n]{n a R^{n-1}} \quad (65)$$

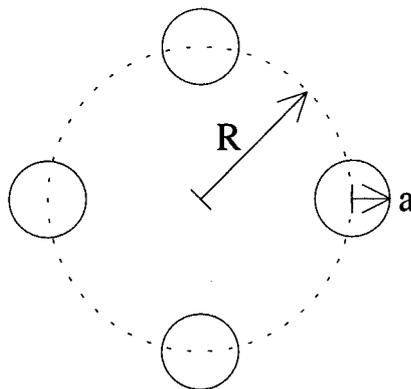


Figure (4) n conducteurs de rayons identiques (a) en faisceau

Dans cette partie nous avons pu remarquer qu'il existe des formules analytiques pour déterminer les impédances internes des conducteurs lorsque ceux-ci sont éloignés les uns des autres. Il reste donc à examiner le cas des conducteurs proches.

I. 3. 2. Conducteurs proches les uns des autres

Notre étude se fera ici en deux étapes. Nous donnerons tout d'abord les diverses formulations existantes pour les lignes multifilaires proches avant de soumettre aux mêmes investigations le cas des câbles blindés. Nous insisterons sur les difficultés que posent l'élaboration des formules analytiques des paramètres linéiques des lignes et câbles à travers différentes approches.

I. 3. 2. 1. Modèles des lignes multifilaires

Dans le cas des conducteurs proches, vu la complexité du problème, des approximations sont souvent nécessaires.

Les impédances internes des conducteurs composés de brins toronés peuvent aussi utiliser les notions de RMG à ceci près qu'ils sont calculés à partir de la section utile et du nombre de brins les constituant.

Il existe à cet effet des tableaux de valeurs fournissant leur RMG selon le nombre de brins les constituant [2]. Nous rappelons que dans ce cas on fait abstraction des effets de peau et de proximité et que cette méthode est surtout valable en basse fréquence.

I. 3. 2. 1. 1. Modèles basés sur des approximations haute fréquence ou basse fréquence

Il est important de noter que pour nous, la haute fréquence se situe aux environs de 10 MHz et qu'en aucun cas elle ne peut dépasser la fréquence de la prise en compte des courants de déplacement dans les conducteurs.

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

La nécessité d'avoir un outil de calcul pour résoudre des problèmes pratiques se posant dans l'industrie a motivé les ingénieurs à générer des formules valables exclusivement soit en BF (autour de 50 Hz) soit en HF (domaine incluant les transitoires). Leurs méthodes de calcul reposent sur l'utilisation de développements asymptotiques de la formule (57). La formule obtenue relative à un conducteur sera généralisée aux cas de deux conducteurs parcourus par des courants de mêmes sens ou de sens différents, à l'aide de facteurs de corrections. Ainsi la résistance d'un conducteur soumis à l'effet de proximité d'un autre conducteur en haute fréquence est donnée par [76] :

-dans le cas où les deux conducteurs sont parcourus par des courants de même sens

$$R_{HF} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\mu F}{4\pi\sigma}} \left\{ 1 + \frac{0.4}{\text{sh}\left(\frac{d}{2a}\right)} \right\} \quad (66)$$

-cette formule devient dans le cas de deux conducteurs parcourus par des courants de sens opposés :

$$R_{HF} = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\mu F}{4\pi\sigma}} \left\{ 1 + \frac{0.183}{\text{sh}\left(\frac{d}{2a} - 1\right)} \right\} \quad (67)$$

Dans ces écritures, a désigne le rayon de chaque conducteur, d la distance entre axes des deux conducteurs tandis que μ , σ et F désignent respectivement la perméabilité absolue, la conductivité, et la fréquence d'utilisation du conducteur.

Nous remarquons que ces formules quoique utiles ne peuvent pas nous fournir des informations pour les fréquences intermédiaires et qu'en outre, elles ne concernent que le cas de deux conducteurs de rayons identiques. La prise en compte de la fréquence sur une plage de variation plus importante sera développée par Carson pour les lignes utilisées en téléphonie.

I. 3. 2. 1. 2. Modèle de Carson

Le modèle de deux conducteurs soumis à l'effet de proximité développé par Carson [19] va en partie répondre à une de nos exigences c'est-à-dire la prise en considération de l'effet de proximité entre deux conducteurs formant un circuit aller et retour et ce sur une plage de fréquence couvrant les basses fréquences, les hautes fréquences ainsi que les fréquences intermédiaires. Ce modèle utilise les équations de Maxwell, impose des repères de coordonnées cylindriques pour chaque conducteur, calcule les champs électriques axiaux et magnétiques tangentiels à l'intérieur et à l'extérieur de chaque conducteur, et enfin détermine l'impédance interne de chaque conducteur ainsi que l'inductance externe. Ce modèle possède l'originalité d'introduire la notion de circuit équivalent pour ces deux conducteurs.

Toutefois les calculs n'ayant été conduits que pour deux conducteurs de rayons identiques, son extension à plusieurs conducteurs s'avère peu commode d'une part, et d'autre part le cas de conducteurs parcourus par des courants de mêmes sens n'y est point traité.

Nous noterons aussi que la formulation du problème par Carson rejoint celle donnée par [41]. Leur méthode de calcul prenant en compte deux conducteurs de rayons identiques peut se généraliser par l'utilisation de méthodes semi-numériques à plus de deux conducteurs. Il faudrait pour cela modifier les équations de passage pour chaque configuration de systèmes de conducteurs.

Pour ce qui est de la généralisation du calcul des résistances à plus de deux conducteurs [47], les travaux de Dwight sont d'une grande importance.

I. 3. 2. 1. 3. Modèles de Dwight

La détermination du courant induit par un filament de courant sur un conducteur plein a été proposée par Manneback [61]. Dwight va, à partir des équations de Manneback, calculer la puissance dissipée dans un conducteur plein parcouru par un courant, et se trouvant à côté d'un filament de courant, la résistance d'un tel conducteur en sera déduite. Dwight va aussi donner, en tenant compte des effets de peau et de proximité, les résistances de conducteurs

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

proches de mêmes rayons placés sous diverses configurations (deux conducteurs identiques formant un circuit aller et retour, trois conducteurs identiques parcourus par des courants triphasés sous une configuration en nappe ou en triangle, et trois faisceaux de quatre conducteurs placés en nappe, ...).

Par contre, il ne sera point question de calculer inductances internes et externes pour Dwight car l'intérêt de l'époque se portait plus sur les pertes dans les conducteurs que sur le développement de circuits équivalents. Nous noterons aussi que les formules utilisées sont complexes et s'adaptent peu à des modifications. Cependant, les modèles développés par Dwight servent aujourd'hui encore de référence [32] [33].

I. 3. 2. 1. 4. Analyse récapitulative

Nous remarquons que la plupart des modèles énoncés ici ne donnent que les résistances des conducteurs supposés avoir des rayons identiques, ne permettant ainsi d'analyser que les pertes dans ces derniers. Parmi les modèles discutés précédemment, pour ceux permettant d'obtenir aussi les inductances internes, les conducteurs ont souvent des rayons identiques et leur nombre dépasse rarement deux.

La difficulté de prise en compte de l'effet de proximité dans un système à plusieurs conducteurs de rayons identiques réside sur le fait qu'il devient dans ce cas très difficile de fixer les paramètres inclus dans les formules des champs (à l'intérieur et à l'extérieur de chaque conducteur) par les conditions de passage des champs au niveau des interfaces. Les modèles matriciels de type circuits traitant des lignes proches au-dessus d'un plan conducteur sont souvent conçus avec la prise en compte de l'effet de peau seul dans les conducteurs. Ceci se justifie lorsqu'on considère des lignes éloignées les unes des autres. Par contre, pour peu que l'on ait des conducteurs très proches, des problèmes de modélisation se posent. Dans le cas des câbles proche [75] où l'effet de proximité doit être pris en compte, on remarque que les codes de calcul analytiques les plus puissants [27] (EMTP,) ne répondent pas à cette attente. Ceci nous conduit donc à proposer un modèle analytique de calcul des lignes proches dans le chapitre (II).

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

Ce modèle, moyennant certaines approximations, prend en compte des conducteurs de rayons différents. Il est sans restriction aucune quant au nombre de conducteurs à prendre en compte et ce sur la plage de fréquence [0Hz, 10MHz]. En outre le modèle proposé basé sur une formulation matricielle des impédances peut servir aussi bien pour les câbles basse tension que pour toute autre configuration de lignes proches.

La prise en compte des effets de proximités devient même indispensable dans les câbles blindés, du fait du rapprochement entre éléments conducteurs.

I. 3. 2. 2. Modèles des câbles multifilaires blindés

Dans cette partie, nous ferons une analyse évolutive des divers modèles permettant de calculer les paramètres linéiques des câbles blindés. A travers ces formulations, nous insisterons sur les aspects tel que la prise en compte ou non des effets de peau et de proximité, l'utilisation de formules faisant l'hypothèse du rayon externe de la gaine infini, et enfin les plages de fréquence pour lesquelles ces modèles ont été conçus.

I. 3. 2. 2. 1. Modèles des câbles multifilaires blindés sans pertes

Les modèles les plus utilisés pour représenter les câbles multifilaires blindés ne tiennent pas compte des pertes dans les conducteurs. Cette représentation peut être acceptable dans la mesure où les résistances connectées aux extrémités sont grandes. Nous restituons ici le modèle donné par [68] [69] [70].

La figure (5) représente un câble multifilaire blindé. Les rayons a_i et a_j représentent les rayons respectifs des conducteurs i et j tandis que le rayon extérieur de la gaine est supposé infini.

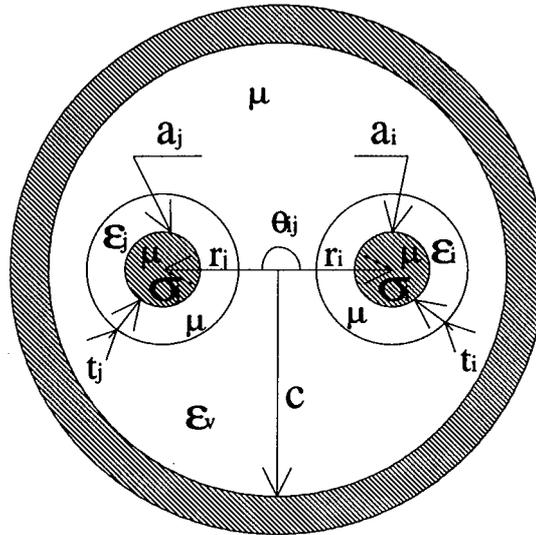


Figure (5) Section d'un câble multifilaire blindé (modèle sans perte)

Paul donne les paramètres du modèle du câble sans perte sous les formes suivantes :

$$(\mu_0/2\pi) S_{ii} = (\mu_0/2\pi) \text{Ln}\left[\frac{c^2 - r_i^2}{c a_i}\right] \quad (68)$$

$$(\mu_0/2\pi) S_{ij} = (\mu_0/2\pi) \text{Ln}\left\{\left[\frac{r_j}{c}\right] \left[\frac{\sqrt{(r_i r_j)^2 + c^4 - 2 r_i r_j c^2 \cos(\theta_{ij})}}{\sqrt{(r_i r_j)^2 + r_j^4 - 2 r_i r_j^3 \cos(\theta_{ij})}}\right]\right\} \quad (69)$$

Ces expressions que nous retrouverons dans le modèle d'Ametani [5] désignent successivement les inductances propres et mutuelles du câble multifilaire blindé sans perte. L'introduction des pertes a été faite par certains auteurs pour des câbles triphasés dans leur utilisation normale (50 Hz).

I. 3. 2. 2. 2. Modèles des câbles triphasés blindés avec prise en compte des effets de peau et de proximité en basse fréquence

Les modèles développés pour les câbles blindés s'attachaient au départ comme nous l'avons dit à déterminer les pertes au niveau des éléments conducteurs et plus particulièrement au niveau de la gaine du câble [34] [50]. Ces modèles étaient souvent conçus autour des

fréquences usuelles d'utilisation (50 Hz) . Nous citerons dans ce cas les deux modèles les plus usités encore, le modèle D'Arnold et celui de Dwight.

Modèle d'Arnold [8]

Nous nous attardons un peu sur ce modèle [8] puisqu'il a servi entre autres de document de base pour l'élaboration de la publication 287 de la C.E.I., publié en 1969 et resté en vigueur jusqu'à présent [82]. Ce modèle est valable pour des fréquences allant de 25 à 300 Hz.

Ce modèle s'applique à des câbles triphasés blindés ou non, avec des conducteurs internes de mêmes rayons, ainsi qu'aux câbles à âmes sectoriales. La méthode utilisée ici consiste à déterminer la résistance d'un conducteur de phase à partir des phénomènes qui se passent dans le câble et qui sont donc représentés par des facteurs obtenus soit par des approximations de fonctions difficiles à programmer rigoureusement soit par des méthodes empiriques.

Le rapport des résistances est donné par :

$$\frac{R'}{R} = 1 + \lambda_0 + \lambda_p + \lambda_s + \lambda_a \quad (70)$$

Dans cette expression, R' et R désignent successivement les résistances par centimètre d'un conducteur de phase en alternatif et en continu. Nous définissons successivement les autres paramètres.

λ_0 représente le facteur d'effet de peau et sera donné par approximation des fonctions de Bessel dans le cas des conducteurs cylindriques.

Pour les câbles à âmes sectoriales, le facteur d'effet de peau a été obtenu en faisant la moyenne entre le facteur obtenu pour un conducteur cylindrique et celui donné pour un conducteur de section rectangulaire.

λ_p représente le facteur d'effet de proximité, il a été calculé pour trois conducteurs de même rayon disposés en triangle et parcourus par des courants triphasés. Les résultats obtenus sont

étendus aux cas des câbles à âmes sectoriales. Ce facteur est fourni en tenant compte de la composition des phases (homogènes, torsadés, ou à âmes sectoriales).

λ_s représente le facteur dû aux pertes dans la gaine. Ce facteur a été élaboré de la façon suivante:

On détermine tout d'abord les pertes dans la gaine en supposant que les trois conducteurs de phases ont chacun une densité de courant homogène (ce qui ne tient pas compte de ce qui est induit au niveau de la gaine par les effets de proximité entre conducteurs internes). Ces pertes dans la gaine seront donc corrigées par un coefficient qui tient compte des effets de proximités cité ci-dessus. Le résultat obtenu ne pouvant pas être adapté aux cas des câbles à âmes sectoriales, il a été nécessaire de développer le même facteur pour des câbles à âmes sectoriales.

λ_a représente le facteur d'écran ou de blindage, il tient donc compte des pertes dans les armures ou frettages. Ce facteur est donné pour des matériaux magnétiques ou non magnétiques et, dans le cas où le matériau de l'écran est magnétique il est donné pour divers types de frettages ou d'armures.

D'autres auteurs ont eux aussi fourni des modèles de câbles triphasés blindés ou à âmes sectoriales pour des fréquences situées autour de 50 Hz, le modèle de H. B. Dwight [32] en est un des plus connus.

L'avènement des problèmes posés par la compatibilité électromagnétique allié aux problèmes des transitoires dans les réseaux ont poussé les chercheurs à élaborer des modèles intégrant une large plage de variation de la fréquence. Parmi les modèles développés à cet effet nous analyserons le modèle de Whedepohl ainsi que les formules utilisées par Pelissier.

I. 3. 2. 3. Modèles des câbles avec prise en compte de l'effet de peau seul sur une large plage de fréquence

Un modèle mathématique de traitement et d'étude des réponses des transitoires dans les câbles coaxiaux enterrés (câbles de puissance) a été développé par L. M. Wedepohl [90]. Dans son modèle il a introduit un développement sous forme matricielle des impédances séries et

admittances parallèles de plusieurs câbles coaxiaux enterrés. Dans de tels câbles, la symétrie circulaire de la gaine autour de l'âme fait que l'on s'affranchit de l'effet de proximité. En outre, pour les impédances séries, l'âme du câble est caractérisée par son impédance de surface externe représentant l'impédance interne du conducteur en question (cas d'une âme pleine). L'impédance de la gaine a été décomposée selon le modèle de Shelkunhof [80] en des impédances de surfaces internes, externes et une impédance de transfert caractérisant le couplage entre les parties internes et externes de la gaine. Les impédances propres et mutuelles du sol sont finement approximées par rapport aux formules de Pollaczek [73] supposées être plus exactes. Nous restituerons ces impédances dans la partie (Prise en compte du sol). Ce modèle a été validé par l'auteur de 0 Hz à 100 kHz (du fait des approximations faites sur les impédances du sol), l'extension de cette validation pour les impédances des câbles (sans le sol) à des fréquences supérieures 10 MHz été faite dans de nombreuses publications [80] [14] [12].

Une extension de ces travaux aux cas des câbles multifilaires blindés est donnée par [71] [36] [37]. Dans cette approche, tous les conducteurs (conducteurs internes et gaine) sont supposés soumis à l'effet de peau seul. Nous donnons ci-dessous les impédances obtenues à partir de cette formulation.

L'impédance interne de chaque conducteur interne est donnée par la formule (57).

Tandis que l'impédance interne de la gaine s'écrit :

$$Z_{C1i} = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi\sigma_g c_1} \frac{[K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{[I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (71)$$

Dans ces expressions, μ_i , σ_i et a_i désignent respectivement la perméabilité absolue, la conductivité et le rayon du conducteur interne i tandis que μ_g , σ_g , c_1 et, c_2 désignent respectivement la perméabilité absolue, la conductivité et les rayons interne et externe de la gaine du câble.

Une extension de ce modèle avec l'intégration des effets de proximité des conducteurs internes sur la gaine est donnée sous forme matricielle par certains auteurs que nous citerons dans la suite de cette partie.

I. 3. 2. 2. 4. Modèles des câbles avec prise en compte de l'effet de peau seul dans les conducteurs internes et de l'effet de peau et de proximité dans la gaine sur une large plage de fréquence

Les contraintes liées à la CEM ont permis donc le développement de modèles de plus en plus fiable et ce sur une large gamme de fréquences. Nous citons une étude originale faite sur les câbles bifilaires blindés (lignes bifilaire avec un blindage ajouté) [65]. Dans cette étude, le blindage est supposé être très fin et peut donc être assimilé à une nappe de courant.

Les formules obtenues sont très simples, tiennent compte de l'effet de proximité sur la gaine, et peuvent être facilement programmées sur un calculateur de poche.

Un autre modèle original de prise en compte de l'effet de proximité a été proposé dans le cas des câbles blindés dont les conducteurs internes de mêmes rayons sont disposés symétriquement sur la circonférence d'un cercle interne à la gaine [60].

Sous cette configuration, on calcule directement les paramètres primaires selon les différents modes de propagations.

Dans le cas de notre étude sur les câbles multifilaires blindés nous nous sommes beaucoup inspirés d'un modèle qui demeure actuellement un des modèles analytiques les plus puissants pour traiter les câbles multifilaires blindés (conducteurs internes disposés symétriquement ou non et avec des rayons pouvant être différents), celui d'Ametani.

Modèle d'Ametani

Ce modèle utilisé dans EMTP fait la synthèse des travaux réalisés tout d'abord par Tegopoulos et Kriezis [86] [87] puis par Brown et Rocamora [15] [30].

Le dispositif étudié est constitué d'un filament de courant disposé à l'intérieur d'une gaine dont le rayon externe est supposé être infini. La formulation utilisée est celle en potentiel vecteur magnétique. Tegopoulos et Kriezis parvinrent alors à déterminer la formule du courant induit par le filament de courant sur la gaine semi-infinie. Ces travaux permirent à Brown et Rocamora [15] de déterminer sous forme matricielle les impédances propres et mutuelles d'un câble triphasé blindé.

Cette formulation du problème sera reprise par Amétani [27] [5] qui fit de cette méthode une extension aux cas des câbles multifilaires blindés au-dessus d'un plan de masse ou enterrés. Cela donne une formulation générale en tenant compte de l'effet de peau dans tous les conducteurs ainsi que de l'effet de proximité causé par les conducteurs internes sur la gaine. La figure (6) illustrant le modèle en question nous permettra de mieux fixer les paramètres utilisés dans les formules.

Nous restituons ici les impédances propres et mutuelles d'un câble multifilaire blindé selon le modèle d'Ametani [27] [5].

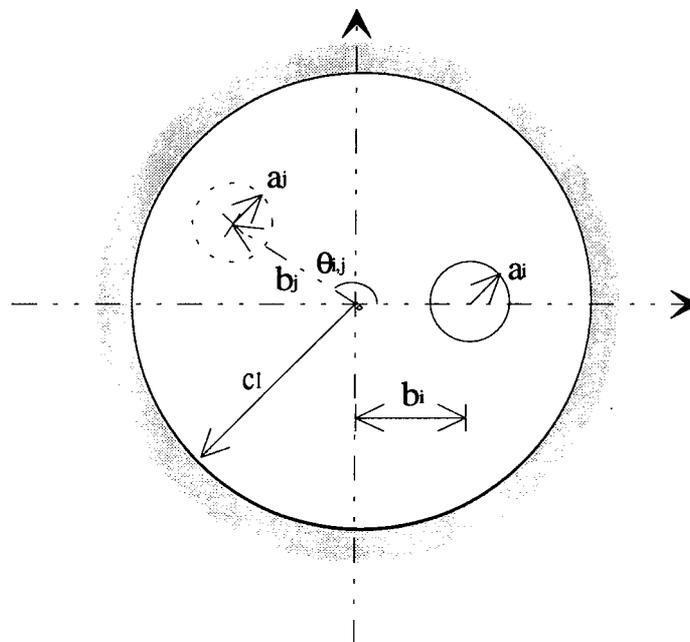


Figure (6) *Section d'un câble multifilaire blindé selon le modèle d'Ametani*

Dans ce cas, l'impédance propre ($R_g + jL_g\omega$) de la gaine est donnée par la relation suivante:

$$\begin{aligned}
 (R_g + jL_g\omega) I_i &= \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) [B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] + \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n [B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \\
 &+ j\omega \frac{\mu_0 I_i}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right] \tag{72}
 \end{aligned}$$

A cette impédance, il est ajouté l'impédance interne d'effet de peau du conducteur interne i (Z_{pi}) donnée par la formule (57) pour obtenir l'impédance propre du circuit formé par le conducteur i et la gaine.

L'impédance mutuelle ($R_{j,i} + jL_{j,i}\omega$) entre deux boucles formées par deux conducteurs internes i et j avec le plan de masse comme référence est donnée par la relation :

$$\begin{aligned}
 (R_{j,i} + jL_{j,i}\omega) I_i &= \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) [B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] + \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_j}{c_1}\right)^n [B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \cdot \text{Cos}(n\theta_{i,j}) \\
 &+ j\omega \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \text{Ln}\left[\frac{c_1^4 + (b_i b_j)^2 - 2 (b_i b_j) c_1^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_1^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]}\right] \tag{73}
 \end{aligned}$$

Dans sa formulation, l'auteur a donné le terme logarithmique de la formule (73) sous forme d'une série infinie que nous avons traduit sous cette forme. Dans ces relations, nous avons

$$B_n = \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi} (P_n + Q_n) \frac{1}{\left[\frac{\mu_{rg} n}{c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - K'_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right]} \tag{74}$$

et

Pour ($n > 0$)

$$P_n = \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n \quad \text{et} \quad Q_n = \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_j}{c_1}\right)^n$$

Et pour $n = 0$ nous avons :

$$P_0 = \frac{1}{c_1} \quad \text{et} \quad Q_0 = 0$$

I_i : représente l'intensité du courant excitateur pour le conducteur i .

les autres paramètres μ_g , μ_{rg} , σ_g , μ_i et σ_i désignent respectivement les perméabilités absolues et relatives de la gaine, la conductivité de la gaine, la perméabilité absolue et la conductivité du conducteur i .

Dans ce modèle, il ne sera donc pas tenu compte des effets de proximité entre conducteurs internes ce qui pose un problème lorsque l'on sait que dans beaucoup de cas pratiques les conducteurs internes sont souvent proches les uns des autres. De plus, le fait que l'on considère que la gaine soit de rayon externe infini suppose que la profondeur de pénétration dans le matériau de celle-ci doit toujours rester inférieure à l'épaisseur de cette même gaine, ce qui restreint l'utilisation de ces formules à des câbles de très grandes dimensions et ne permet pas de traiter les câbles en général en basse fréquence ou les câbles de petites dimensions latérales sur une gamme importante de fréquence.

Notre travail s'inscrit donc sur ces défaillances et propose un modèle qui puisse les corriger et, en même temps, élaborer un outil de travail plus vaste tenant compte des réalités actuelles de la CEM.

I. 4. MODELES DE PRISE EN COMPTE DE LA CONDUCTIVITE FINIE DU SOL OU D'UN PLAN DE MASSE

Dans la nature, les lignes et câbles sont souvent disposés à une certaine hauteur au-dessus du sol (lignes aériennes) ou enfouis dans le sol (câbles enterrés). Sous ces conditions, il devient important de tenir compte du sol sous forme d'impédances.

Les hypothèses faites habituellement sont :

- les sols sont homogènes
- les fréquences considérées nous permettent de négliger les courants de déplacement dans les conducteurs et le sol.
- les conducteurs sont rectilignes horizontaux et assimilés à des filaments de courants lors du calcul de leurs influences sur le plan de masse.

-la hauteur des conducteurs par rapport au sol ou au plan de masse dans le cas des lignes aériennes doit être assez grande par rapport aux rayons des conducteurs pour que l'on puisse s'affranchir des problèmes d'effets de proximités entre les conducteurs et le sol ou le plan de masse.

Il est d'usage de calculer les paramètres linéiques des conducteurs aériens et du sol sous forme de matrices d'impédances et d'admittances afin de mieux pouvoir intégrer ces paramètres dans des équations matricielles de résolution des lignes. Pour mieux fixer les idées, nous supposons avoir deux conducteurs i et j de rayons respectifs a_i et a_j disposés à une certaine hauteur au-dessus d'un plan de masse comme indiqué sur la figure (7) ci-dessous.

Pour la prise en compte de l'effet du sol, plusieurs solutions ont été élaborées. Nous restituons ici celles qui sont actuellement les plus utilisées.

Cette partie se décompose en deux étapes, la première concerne les lignes aériennes et fait appel aux modèles de Carson [18] et Dubanton [29] tandis que la deuxième relative aux câbles enterrés fait appel aux modèles de Pollaczek [73] et Wedepohl [90].

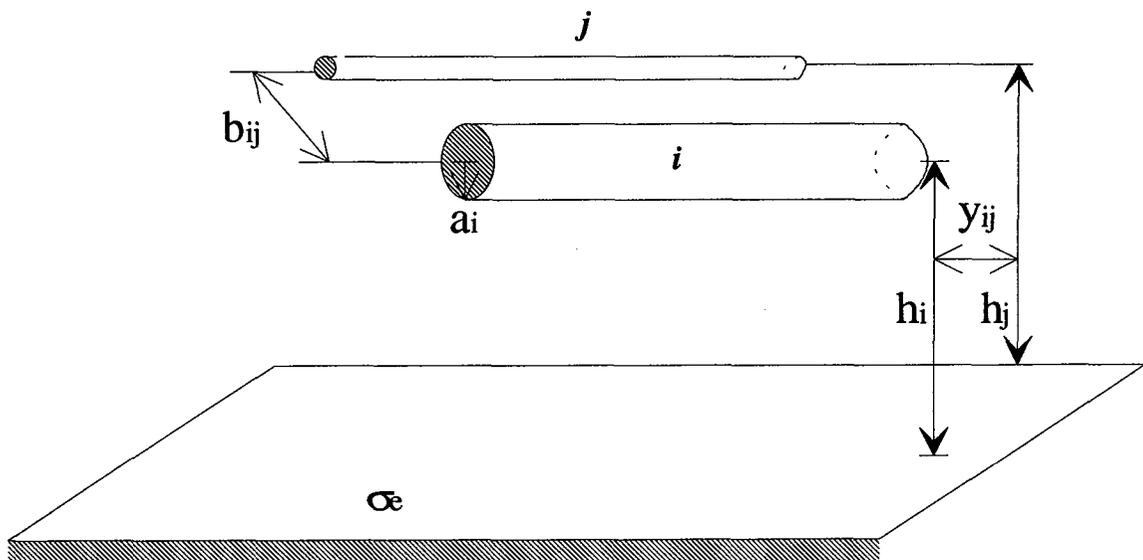


Figure (7) *Conducteurs au-dessus du sol*

I. 4. 1. Cas des lignes aériennes

I. 4. 1. 1. Modèle de Carson (lignes aériennes)

Carson [18] prend en compte le fait que le sol possède une conductivité non nulle, remplace les conducteurs par des filaments de courants par rapport au sol et propose des termes de correction pour l'impédance linéique propre ainsi que pour l'impédance linéique mutuelle. Ces termes exprimés sous forme de séries proviennent des calculs des intégrales suivantes :

$$\Delta Z(p,q) = \Delta R(p,q) + j\Delta X(p,q) = 4\omega \int_0^{\infty} (\sqrt{v^2 + j} - v)e^{-pv} \cos(qv) dv \quad (75)$$

Dans cette expression, les paramètres p et q sont définis selon que l'on veuille obtenir les termes de corrections de l'impédance propre ou ceux de la mutuelle.

-Dans le cas d'une correction de l'impédance propre, nous avons :

$$p = 2\sqrt{\mu_0 \omega \sigma_e} h_i$$

$$q = 0$$

-Pour une correction de l'impédance mutuelle, nous avons :

$$p = \sqrt{\mu_0 \omega \sigma_e} (h_i + h_j)$$

$$q = \sqrt{\mu_0 \omega \sigma_e} y_{ij}$$

La programmation des formules de prise en compte de la conductivité du sol de Carson pose des problèmes de lenteur de convergence en haute fréquence du fait que l'on doit prendre en compte beaucoup de termes des séries de Carson. Le modèle de Dubanton nous apparait donc comme étant une alternative à celui de Carson.

I. 4. 1. 2. Modèle de Dubanton

Dans ce modèle, pour prendre en compte la conductivité finie du sol, on utilise la notion de profondeur de pénétration complexe notée (h'_e) et on applique la théorie des images conformément à la figure (8). Cette profondeur de pénétration complexe est intégrée comme une distance supplémentaire dans les formules de calcul des inductances externe propres et mutuelles donnant ainsi des formules incluant aussi bien les inductances externes des conducteurs et du sol que les impédances internes (propres et mutuelles) du sol [29], [38].

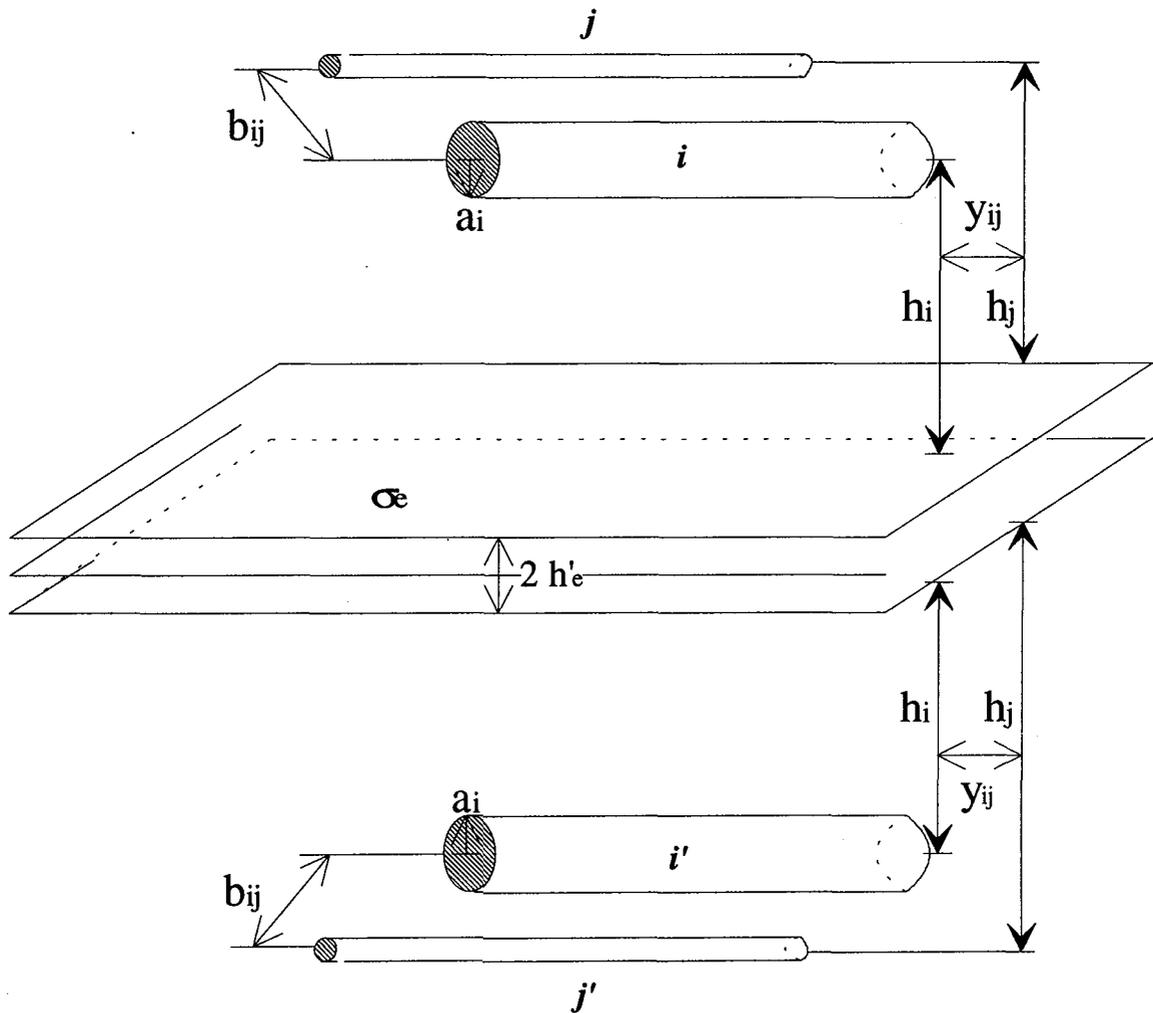


Figure (8) *Conducteurs et leurs images avec la prise en compte de la profondeur de pénétration dans le plan de masse*

Pour mieux fixer les idées et mettre en évidence l'influence du sol, nous faisons l'hypothèse des lignes sans perte, ceci n'est pas ennuyeux du fait que l'on peut toujours intégrer les pertes sous forme de matrices d'impédances internes des conducteurs dans une étape ultérieure. Nous écrivons alors la matrice d'impédance $[Z]$ contenant les inductances externes des conducteurs et du plan de masse ou du sol ainsi que les impédances internes du sol sous la forme suivante:

$$[Z] = j\omega (\mu_0/2\pi) [S] \quad (76)$$

Dans ces équations, $(\mu_0/2\pi) [S]$ caractérise la matrice qui nous intéresse ici. Ses éléments s'expriment selon les cas sous les formes suivantes :

-Dans le cas où l'on a un matériau infiniment conducteur comme plan de masse, la profondeur de pénétration devient très faible, et $(\mu_0/2\pi) [S]$ caractérise alors la matrice des inductances externes (propres et mutuelles) [68] [70] avec :

$$S_{ii} = \text{Ln}\left[\frac{2(h_i)}{a_i}\right] \quad (77)$$

$$S_{ij} = \text{Ln}\left[\frac{D'_{ij}}{b_{ij}}\right] \quad (78)$$

et

$$D'_{ij} = \sqrt{[(h_i+h_j)^2 + y_{ij}^2]}$$

y_{ij} étant la distance de séparation horizontale entre le conducteur i et le conducteur j .

-Dans le cas où l'on prend en compte un sol ou un plan de masse de conductivité moyenne, nous ne pouvons plus négliger la profondeur de pénétration dans ce matériau.

Dans ce cas, $j\omega(\mu_0/2\pi) [S]$ contient les inductances externes (propres et mutuelles) des conducteurs et du plan de masse ainsi que les impédances internes propres et mutuelles du plan de masse, avec :

$$S_{ii} = \text{Ln}\left[\frac{2(h_i+h'_e)}{a_i}\right] \quad (79)$$

$$S_{ij} = \text{Ln}\left[\frac{D'_{ij}}{b_{ij}}\right] \quad (80)$$

et

$$D'_{ij} = \sqrt{[(h_i+h_j+2h'_e)^2 + y_{ij}^2]}$$
$$h'_e = \sqrt{\frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_e}} \quad \text{étant la profondeur de pénétration complexe dans le sol.}$$

σ_e : la conductivité du sol.

Cette méthode du plan complexe peut être étendue aux plans de masse en cuivre ou aluminium dans la mesure où les conducteurs sont à une hauteur du plan de masse permettant de s'affranchir des éventuels effets de proximité entre les conducteurs et le plan de masse. Nous rappelons que pour des plans de masse parfaitement conducteurs la profondeur de pénétration devient très faible et l'on peut alors ne plus tenir compte des termes de correction.

Le modèle de Dubanton [29] a été comparé avec celui de Carson [38] [75] les résultats obtenus concordent presque parfaitement.

La prise en compte de l'effet du sol pour les câbles enterrés est d'une toute autre nature du fait que les câbles ne baignent plus dans l'air mais sont entourés par un milieu conducteur, le sol.

I. 4. 2. Cas des câbles enterrés

I. 4. 2. 1. Modèle de Pollaczek [73]

Les hypothèses précédentes consacrées aux lignes aériennes sont reconduites ici.

Dans ce modèle, la terre est considérée comme un demi-espace infini comme montré sur la figure (9).

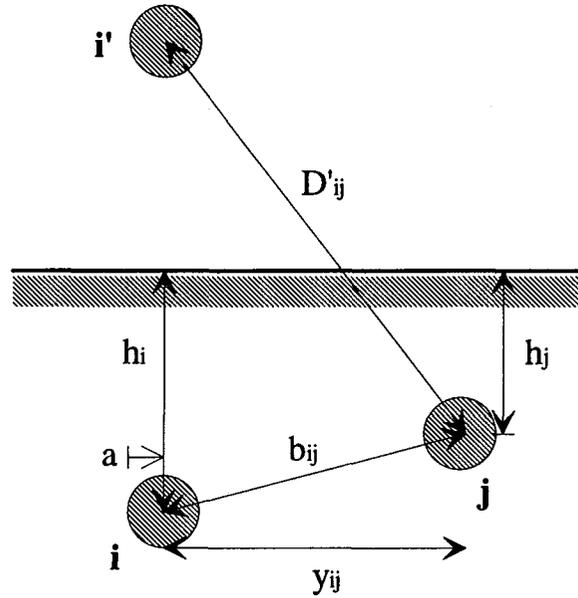


Figure (9) *Conducteurs enterrés à une certaine profondeur dans le sol*

Dans cette configuration, si on considère des câbles i et j entourés de diélectriques, enterrés respectivement à des profondeurs h_i et h_j en dessous de la surface du sol et i' le conducteur image de i, nous avons alors le terme de correction de l'impédance mutuelle du sol qui s'écrit sous la forme suivante:

$$\Delta Z_{mut} = \left(\frac{j\omega\mu}{2\pi} \right) \left[K_0(\sqrt{j\omega\mu\sigma} b_{ij}) - K_0(\sqrt{j\omega\mu\sigma} D'_{ij}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-[(h_i+h_j)\sqrt{v^2+j\omega\mu\sigma}]} e^{j v y_{ij}}}{|v| + \sqrt{j\omega\mu\sigma + v^2}} dv \right] \quad (81)$$

Dans cette expression, les paramètres D'_{ij} et b_{ij} peuvent être mis sous les formes suivantes :

$$D'_{ij} = \sqrt{(h_i + h_j)^2 + y_{ij}^2}$$

et

$$b_{ij} = \sqrt{(h_i - h_j)^2 + y_{ij}^2}$$

Le terme de correction de l'impédance propre du sol (ΔZ_{pro}) s'obtient en remplaçant dans l'expression précédente de l'impédance mutuelle, h_j par h_i et y_{ij} par a (rayon du câble).

Il convient de signaler que les formules établies par Pollaczek sont difficile à programmer, il est alors souvent recommandé d'approximer l'argument de la fonction exponentielle de l'intégrant pour y parvenir.

Modèles classiques de détermination des paramètres linéiques et électriques des lignes et câbles

Une critique des formules de Pollaczek a été faite par certains auteurs [59] qui proposent des modèles de calcul des impédances du sol pour des conducteurs enfouis très près de la surface du sol. Dans cette étude, les conducteurs sont supposés être parfaits et les erreurs maximales obtenues entre ce modèle et celui de Pollaczek sont de l'ordre de 1%.

Une autre formule simple, inspirée de celle établie pour les lignes aériennes [29] à l'aide de la profondeur de pénétration complexe, élaborée par [83] [27] peut se substituer à celle donnée par Pollaczek dans le cas de l'impédance propre du sol pour les câbles enterrés, donnant ainsi :

$$\Delta Z_{\text{pro}} = \left(\frac{j\omega\mu}{2\pi}\right) \text{Ln} \left(a + \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu\sigma} a} \right) \quad (82)$$

La formule duale concernant l'impédance mutuelle reste à trouver [27].

D'autres auteurs [27] [90] ont à ce sujet développé plus récemment des formules approximatives par rapport aux formules précédentes de Pollaczek ; nous citerons le modèle de Wedepohl pour les câbles enterrés.

I. 4. 2. 2. Modèle de Wedepohl [90]

Cette approche consiste à transformer la formule sous forme intégrale du type de celle donnée par Pollaczek en une série infinie de termes. Des séries obtenues [90], on peut retenir les termes les plus significatifs donnant ainsi pour le conducteur i de la figure (9) :

une impédance propre du sol sous la forme suivante :

$$\Delta Z_{\text{pro}} = \left(\frac{j\omega\mu}{2\pi}\right) \left[-\text{Ln} \left(\frac{\gamma \sqrt{j\omega\mu\sigma} a}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4 \sqrt{j\omega\mu\sigma} h_i}{3}\right) \right] \quad (83)$$

et une impédance mutuelle du sol se présentant comme suit :

$$\Delta Z_{\text{mut}} = \left(\frac{j\omega\mu}{2\pi}\right) \left[-\text{Ln} \left(\frac{\gamma \sqrt{j\omega\mu\sigma} b_{ij}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2 \sqrt{j\omega\mu\sigma} (h_i + h_j)}{3}\right) \right] \quad (84)$$

Dans ces formules γ représente la constante d'Euler.

Ces deux expressions ont été validées pour $|\sqrt{j\omega\mu\sigma} a| < (1/4)$ et pour $|\sqrt{j\omega\mu\sigma} b_{ij}| < (1/4)$, sinon, il faut utiliser les séries initiales de Wedepohl ou calculer ces impédances par une intégration numérique.

Une fois toutes les impédances et admittances obtenues, elles peuvent être assemblées sous forme matricielle et intégrée dans les équations des lignes.

I. 5. CONCLUSION

Nous avons essayé tout au long de ce chapitre de montrer à travers les différents modèles que nous avons parcourus, les divers aspects liés à la modélisation et à la caractérisation des lignes et câbles multifilaires et nous en tirons les conclusions suivantes :

s'agissant des modèles numériques, ils ont connu un essor rapide ces dernières années et s'imposent de plus en plus pour les cas que l'on ne peut pas traiter analytiquement. De plus ces méthodes sont puissantes et permettent d'obtenir des informations lorsque les systèmes à modéliser ne peuvent l'être qu'en trois dimensions. Parmi les inconvénients liés à cette méthode, nous retiendrons les temps d'entrée et de modification des données, le contrôle de la finesse du maillage dans les zones sensibles (profondeur de pénétration variable avec la fréquence) et enfin, le fait que l'on ne puisse pas encore du fait de la capacité des ordinateurs simuler le comportement d'un groupe important de systèmes interconnectés entre eux et soumis à des perturbations électromagnétiques par exemple, sur une large plage de fréquence.

Le dernier point soulevé est en effet un des domaines réservés encore aux logiciels de calcul utilisant des méthodes analytiques.

Certains des modèles analytiques cités dans ce chapitre peuvent paraître anciens et donc obsolètes, loin s'en faut car, pour la plupart d'entre eux, ils servent aujourd'hui encore de référence et sont jugés fiables. Du fait de la complexité des calculs à conduire dans ce domaine, les progrès qui y sont réalisés ces dernières années sont peu nombreux. Les modèles analytiques lorsqu'ils sont accessibles (conducteurs de forme cylindriques) comme nous l'avons vu précédemment s'adaptent très bien à la détermination des paramètres des lignes du

fait de leur facilité d'utilisation ainsi que de la rapidité du calcul. C'est bien pour cela que nous adopterons une formulation analytique pour la suite de notre travail. Nous tacherons de prendre en compte dans les modèles que nous proposons les effets de peau et de proximité dans les conducteurs. Du fait de la complémentarité entre méthodes analytiques et numériques nous validerons nos résultats par la technique des éléments finis et par des résultats de mesures pris dans la littérature.

Enfin, il est important de noter que dans la suite de ce travail, nous ne tiendrons pas compte des conductances (G) dans l'analyse des paramètres linéiques des lignes et câbles du fait de leurs faibles valeurs.

CHAPITRE II

**MODELE DE DETERMINATION DES PARAMETRES DES LIGNES
MULTIFILAIRES**

NOMENCLATURE

A	Potentiel vecteur magnétique dans le conducteur de référence.
A_c	Potentiel vecteur magnétique du au conducteur de référence au point P ₁ (ρ, θ).
A_t	Potentiel vecteur magnétique résultant au point P ₁ (ρ, θ).
E_z	Champ Electrique axial à la surface du conducteur de référence.
J	Densité de courant dans la direction axiale du conducteur de référence.
B_r	Induction magnétique radiale au sein du conducteur <i>C</i> .
B_{ρ}	Induction magnétique radiale en dehors du conducteur <i>C</i> .
B_{ϕ}	Induction magnétique tangentielle au sein du conducteur <i>C</i> .
B_{θ}	Induction magnétique tangentielle en dehors du conducteur <i>C</i> .
Φ	Flux.
I_i	Courant de phase dans les conducteurs autres que le conducteur de référence.
I_r	Courant de phase dans le conducteur de référence.
I_n	Fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre n.
I'_n	Dérivé de la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre n.
ρ	Rayon vecteur repérant l'espace hors du conducteur de référence.
θ	Argument du rayon vecteur ρ .
r	Rayon vecteur repérant le matériau du conducteur de référence.
ϕ	Argument du rayon vecteur r.
γ	Position angulaire du conducteur i par rapport à l'axe de référence.
a	Rayon du conducteur de référence.
a_i	Rayon du conducteur i.
b_i	Distance séparant le conducteur i du conducteur de référence.
b_{ij}	Distance séparant le conducteur i du conducteur j.
d_i	Distance séparant le conducteur i du point P ₁ (ρ, θ).
O	Centre du conducteur de référence <i>C</i> .
O_i	Centre du conducteur i.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

$P(r,\phi)$	Centre de l'élément infinitésimal de surface pris sur la section droite du conducteur de référence.
$P_1(\rho,\theta)$	Point de la région extérieure aux conducteurs en lequel on calcule le potentiel vecteur magnétique résultant.
P	Nombre des conducteurs autres que le conducteur de référence.
ω	Pulsation en radians/sec.
σ	Conductivité du conducteur de référence.
σ_i	Conductivité du conducteur i .
σ_e	Conductivité du plan conducteur s (cuivre ou sol).
μ_0	Perméabilité du vide.
μ_r	Perméabilité relative du conducteur de référence.
μ_{ri}	Perméabilité relative du conducteur i .
μ_{re}	Perméabilité relative du plan conducteur s (cuivre ou sol).
ϵ_0	Permittivité du vide.
Z_p	Impédance d'effet de peau par unité de longueur du conducteur de référence.
Z_{pi}	Impédance d'effet de peau par unité de longueur du conducteur i .
R'_{ri}	Résistance due à l'effet de proximité du conducteur i sur le conducteur de référence.
L'_{ri}	Inductance due à l'effet de proximité du conducteur i sur le conducteur de référence.
Z'_{ri}	Impédance due à l'effet de proximité du conducteur i sur le conducteur de référence.
Z'	Impédance globale du conducteur de référence soumis à l'effet de peau dû au courant I_r et à l'effet de proximité dû aux courants des autres conducteurs.
P_0	Puissance complexe due à l'effet de peau dans le conducteur de référence.
P_1	Puissance complexe due aux courants induits par les conducteurs i sur le conducteur de référence.
$[Z']$	Matrice des impédances de phase d'un système multiconducteur situé à une certaine hauteur au-dessus du plan de masse ou du sol.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

- [Z'_i] Matrice des impédances internes d'un système multiconducteur situé à une certaine hauteur au-dessus du plan de masse ou du sol (cette matrice n'inclue pas les impédances internes du sol).
- [Y] Matrice des admittances parallèles du système multiconducteur au-dessus du plan de masse ou du sol.
- z'_{ii} Impédance interne totale du conducteur i (cette impédance inclue l'impédance d'effet de peau du conducteur i ainsi que l'impédance due aux courants induits par le conducteur i sur les autres conducteurs voisins).
- z'_{ij} Impédance due à l'effet de proximité du conducteur j sur le conducteur i .

INTRODUCTION

Les systèmes électriques sont souvent reliés par des conducteurs très proches les uns des autres. Ce rapprochement des conducteurs augmente les interactions électromagnétiques entre eux et par conséquent entre les systèmes connectés aux extrémités des conducteurs.

Dans la plupart des études faites sur la détermination des paramètres primaires des lignes, des approximations ignorant les effets des courants induits peuvent être utilisées. Cependant, plus les conducteurs sont proches les uns des autres plus l'effet de proximité s'ajoutant à l'effet de peau devient important. Ainsi, les paramètres varient fortement avec la fréquence et l'espacement entre conducteurs. Pour certaines configurations, l'augmentation de la résistance due à l'effet de proximité peut être de l'ordre de 100% supérieure à celle due à l'effet de peau seul.

Ce chapitre propose donc deux modèles analytiques de détermination des paramètres primaires et secondaires des lignes multifilaires très proches les unes des autres avec la prise en compte des effets de peau et de proximité. Les conducteurs peuvent être de rayons différents et peuvent être parcourus par des courants distincts. Les paramètres linéiques distribués sont donnés par unité de longueur. Les impédances et admittances calculées sont obtenues grâce aux équations de Maxwell.

Nous nous imposerons tout d'abord de donner un modèle de calcul de l'impédance globale d'un conducteur soumis à l'effet de proximité d'autres conducteurs. Ce modèle est validé par comparaison avec une méthode d'éléments finis.

Tout au long de notre recherche bibliographique nous n'avons jamais pu recenser un modèle analytique matriciel de prise en compte de l'effet de proximité pour des lignes multifilaires proches. Les modèles classiques ne prenant en compte que l'effet de peau sous forme matricielle, nous avons jugé bon de proposer un modèle qui puisse pallier à cette insuffisance.

Ainsi, dans une seconde étape nous utiliserons certains résultats du modèle précédent en vue de générer un modèle matriciel d'impédances et d'admittances d'un système de plusieurs conducteurs (proches les uns des autres) au-dessus d'un plan conducteur noté s (ce plan

pouvant être du cuivre ou le sol). La méthode modale est alors utilisée pour obtenir les paramètres modaux secondaires (atténuations et vitesses de propagation). Enfin, à cause du peu d'outils simples dont on dispose pour la programmation des fonctions de Bessel d'ordre entier et d'arguments complexes, qui ne fassent pas appel qu'aux formes asymptotiques classiques, nous croyons nécessaire de donner à la fin de ce chapitre des informations permettant de réaliser des codes de calcul simples et efficaces de ces fonctions dont nous avons besoin pour mener cette étude.

Les résultats obtenus seront abondamment discutés et validés sur une large plage de fréquence incluant [0 Hz, 10 MHz].

II. 1. MODELE DE DETERMINATION DE L'IMPEDANCE GLOBALE D'UN CONDUCTEUR SOUMIS A L'EFFET DE PROXIMITE D'AUTRES CONDUCTEURS

II. 1. 1. Position du problème et hypothèses

II. 1. 1. 1. Position du problème

Nous rappelons qu'un traitement rigoureux a été donné [44] [47] en annexe I pour le calcul des paramètres des lignes multifilaires de mêmes rayons et parcourues par des courants identiques en module (de même sens ou de sens opposés). L'extension de cette méthode aux cas des conducteurs de rayons différents parcourus par des courants distincts s'avère être difficile à mener. Nous nous imposons alors une hypothèse simplificatrice en remplaçant tous les conducteurs autres que le conducteur de référence par des filaments de courants centrés sur leurs axes.

Nous rapellons que la formule de la densité de courant induit par un filament de courant sur un conducteur plein a été donnée pour la première fois par Chas Manneback [61]. La résistance d'un tel conducteur a été déterminé par H B. Dwight [32] [33]. Tegopoulos et Kriezis [86] [87] donnèrent à leur tour une formulation originale de cette densité de courant à

partir du potentiel vecteur magnétique, formulation que nous adopterons comme base de travail pour la suite.

II. 1. 1. 2. Hypothèses

Pour notre formulation analytique nous ferons nôtre les hypothèses suivantes :

-les conducteurs sont supposés être parallèles entre eux et infiniment longs (les effets d'extrémités sont alors négligés);

-nous négligeons les courants de déplacement dans les conducteurs au vue de la gamme de fréquence des phénomènes étudiés;

-les courants et champs utilisés sont supposés être sinusoïdaux de pulsation ω ;

-les milieux conducteurs de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$ et de conductivité σ sont supposés être linéaires homogènes et isotropes;

-les conducteurs autres que le conducteur de référence sont indexés i , centrés en O_i ($i = 1, 2, \dots, P$), ont un rayon a_i , et sont parcourus par des courants I_i ;

-des systèmes de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) et (ρ, θ, z) symbolisant respectivement l'intérieur et l'extérieur du conducteur de référence sont utilisés comme montré sur la figure(10).

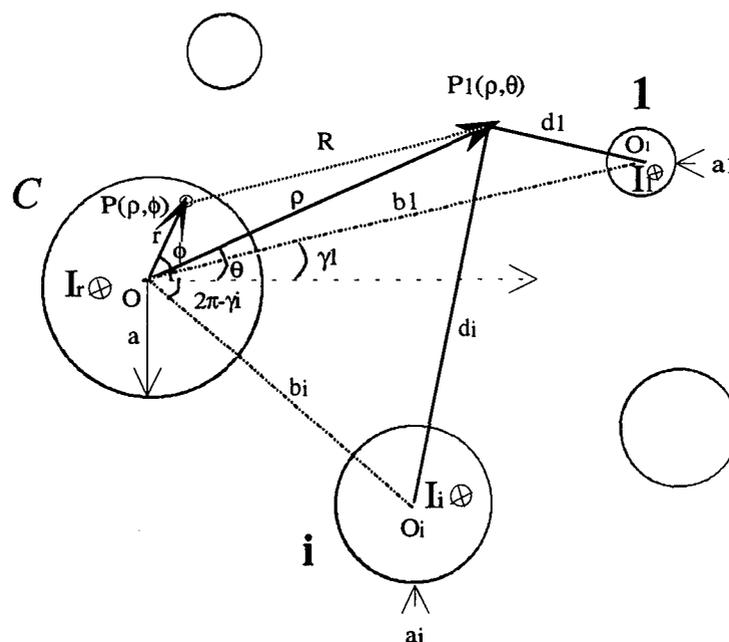


Figure (10) : *Ligne multifilaire disposée dans l'air*

II. 1. 2. Formulation générale

La formulation utilisée pour résoudre ce problème est celle en potentiel vecteur magnétique A , et nous rappelons dans ces conditions que les vecteurs densité de courant et potentiel magnétique ont la même direction que l'axe z .

Nous appelons conducteur de référence le conducteur pour lequel nous calculons l'impédance interne en tenant compte des courants induits par les autres conducteurs considérés comme étant des filaments de courants centrés sur leur axes.

Dans cette configuration, nous nommerons C le conducteur de référence que nous indexerons r . Pour déterminer l'impédance par unité de longueur de ce conducteur nous utilisons la méthode de séparation des variables (la propagation se faisant selon l'axe Oz) et le théorème de superposition puis tenons compte des influences de tous les filaments de courants i sur le conducteur C (voir figure 11). Enfin, pour calculer l'impédance de chaque conducteur i , nous l'imposerons à son tour comme conducteur de référence et lui appliquerons le principe précédemment énoncé.

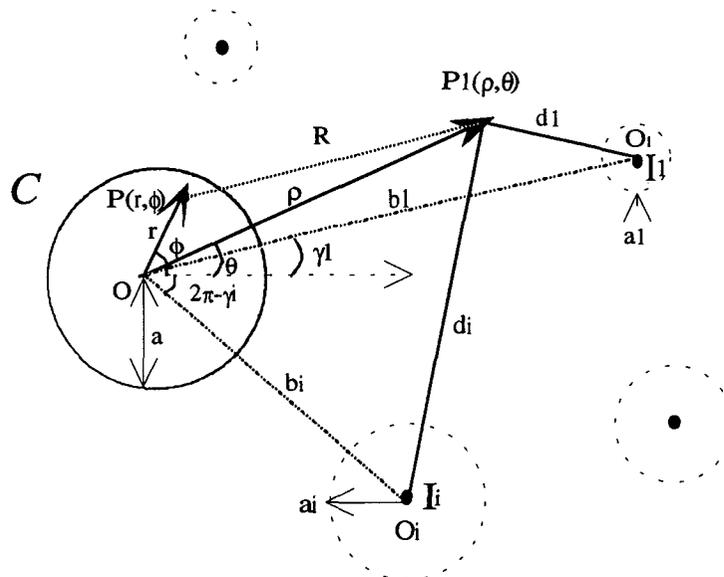


Figure (11) : *Modèle filamentaire*

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

En utilisant les équations de Maxwell, nous obtenons l'équation caractérisant le potentiel vecteur magnétique A à l'intérieur du conducteur C sous la forme suivante.

$$\Delta A = \mu \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (85)$$

En coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) cette relation devient :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} - \mu \sigma j \omega A = 0 \quad (86)$$

Tandis que l'équation régissant la densité de courant $J(r, \phi)$ à l'intérieur du conducteur C se traduit par :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 J}{\partial \phi^2} - \mu \sigma j \omega J = 0 \quad (87)$$

Les solutions de ces équations [86] [87] [50] [21] [41] [39] [72] [45] sont exprimées sous forme de série de fonctions de Bessel dont les formes sont les suivantes.

$$J(r, \phi) = A_0 I_r I_0(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \quad (88)$$

et,

$$A(r, \phi) = \frac{-1}{j\omega\sigma} A_0 I_r I_0(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) + \frac{-1}{j\omega\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \quad (89)$$

Dans ces expressions, il faut rester attentif au fait que $I_0(r\sqrt{j\omega\mu\sigma})$ et $I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma})$ sont des fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre 0 et n tandis que I_i et I_r désignent des intensités de courants. Enfin, A_0, \dots, A_n sont des paramètres à déterminer par application des conditions au niveau des interfaces.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Nous remarquons que la densité de courant peut se subdiviser en deux parts. La première partie, d'indice 0 est due à l'effet de peau dans le conducteur lié à I_r tandis que la deuxième d'indice ($n = 1, \dots, P$) est due exclusivement à l'effet de proximité.

Pour la partie due à l'effet de peau, un calcul assez simple permet de déterminer le paramètre A_0 ainsi que l'impédance classique d'effet de peau d'un conducteur notée Z_p en supposant que tous les courants I_i sont nuls.

$$A_0 = \frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{2\pi a} \frac{1}{I_1(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})} \quad (90)$$

$$Z_p = \left(\frac{1}{\sigma}\right) A_0 I_0(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \quad (91)$$

Les phénomènes d'effet de proximité sont dus aux courants induits sur le conducteur C par les filaments de courants I_i ($i = 1, 2, \dots, P$) tandis que l'effet de peau est dû au courant I_r parcourant C . Dans le but de déterminer seulement la contribution à l'effet de proximité nous nous imposerons $I_r = 0$ et ne prendrons en considération que les courants I_i . Ainsi, les premiers termes des formules (88) et (89) disparaissent pour les calculs qui vont suivre, nous les retrouverons lors du calcul de l'impédance globale d'un conducteur soumis à l'effet de proximité d'autres conducteurs.

A la fin, nous rajouterons la contribution due à l'effet de peau soit sous la forme de l'impédance Z_p soit sous la forme d'une contribution au potentiel vecteur magnétique à l'aide de A_0 .

II. 1. 3. Expression des potentiels vecteurs magnétiques dus à l'effet de proximité

Au point $P_1(\rho, \theta)$ nous calculons le potentiel vecteur magnétique résultant $A_1(\rho, \theta)$ composé des potentiel vecteurs magnétiques $A_c(\rho, \theta)$ et $A_l(\rho, \theta)$.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Nous rappelons que $A_c(\rho, \theta)$ désigne le potentiel vecteur magnétique en $P_1(\rho, \theta)$ dû aux courants induits dans C et $A_1(\rho, \theta)$ celui dû aux filaments de courants en $P_1(\rho, \theta)$.

Ainsi, un élément infinitésimal de surface ($r dr d\phi$) pris sur la section droite du conducteur C et parcouru par une densité de courant $J(r, \phi)$ donne naissance au point $P_1(\rho, \theta)$ à un potentiel vecteur infinitésimal du deuxième ordre noté $d^2A_c(\rho, \theta)$.

$$d^2A_c(\rho, \theta) = \frac{\mu_0 J(r, \phi)}{2\pi} \text{Ln}(R) r dr d\phi \quad (92)$$

Dans le but de simplifier le calcul de $A_c(\rho, \theta)$ à partir de la relation (92) nous remplaçons $\text{Ln}(R)$ par une expansion géométrique valable pour $\rho > r$.

$$\text{Ln}(R) = \text{Ln}(\rho) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m [\text{Cos}(m\phi)\text{Cos}(m\theta) + \text{Sin}(m\phi)\text{Sin}(m\theta)] \quad (93)$$

L'expression ci-dessus nous permet de trouver une expression analytique de l'intégrale ci-dessous, dont le calcul est développé en annexe II [86] [87].

$$A_c(\rho, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} J(r, \phi) \text{Ln}(R) r dr d\phi \quad (94)$$

Ceci nous donne après tous calculs faits l'expression de $A_c(\rho, \theta)$.

$$A_c(\rho, \theta) = - \frac{\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{a^{n+1} I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})}{n \rho^n} \right) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \text{Cos } n(\theta - \gamma_i) \right] \quad (95)$$

En ce même point $P_1(\rho, \theta)$ il convient maintenant de calculer $A_1(\rho, \theta)$ comme étant la somme de tous les potentiels vecteurs magnétiques créés par l'ensemble des filaments de courants lorsque le conducteur C est absent. Il vient alors :

$$A_1(\rho, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^P I_i \text{Ln}(d_i) \right] \quad (96)$$

avec,

$$\text{Ln}(d_i) = \text{Ln}(\sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2b_i \rho \cos(\theta - \gamma_i)}) \quad (97)$$

Une fois ces potentiels déterminés, nous pouvons maintenant calculer le potentiel vecteur magnétique résultant $A_t(\rho, \theta)$ au point $P_1(\rho, \theta)$.

$$A_t(\rho, \theta) = A_1(\rho, \theta) + A_c(\rho, \theta) \quad (98)$$

Dans l'expression de $A_t(\rho, \theta)$ nous remplaçons les paramètres A_n par R_n afin de respecter les propriétés physiques de chaque milieu ($P_1(\rho, \theta)$ se trouve dans la région extérieure à C).

En résumé nous avons selon la région considérée une écriture du potentiel vecteur magnétique total :

Hors du conducteur de référence, au point $P_1(\rho, \theta)$ le potentiel vecteur magnétique total est donné par :

$$\begin{aligned} A_t(\rho, \theta) = & - \frac{\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left(\frac{a^{n+1} I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})}{n \rho^n} \right) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \cos n(\theta - \gamma_i) \right] \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^P I_i \text{Ln}(\sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2b_i \rho \cos(\theta - \gamma_i)}) \right] \end{aligned} \quad (99)$$

Dans la région constituant le matériau du conducteur C nous avons :

$$A(r, \phi) = \frac{-1}{j\omega\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \quad (100)$$

Dans les expressions précédentes, pour déterminer les paramètres A_n et R_n nous appliquons les conditions au niveau des interfaces aux formules (99) et (100).

II. 1. 4. Conditions au niveau des interfaces

Ces conditions se caractérisent par la continuité de la composante radiale de l'induction magnétique et celle tangentielle du champ magnétique appliquée à la surface du conducteur C:

$$\mathbf{B}_r(r,\phi) [r = a, \phi = \theta] = \mathbf{B}_{t\rho}(\rho,\theta) [\rho = a, \theta = \phi] \quad (101)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{t\theta}(\rho,\theta) [\rho = a, \theta = \phi] = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_\phi(r,\phi) [r = a, \phi = \theta] \quad (102)$$

Dans ces précédentes relations, les champs s'expriment en fonction des potentiels vecteurs magnétiques sous les formes suivantes.

$$\mathbf{B}_r(r,\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \phi} \quad (103)$$

$$\mathbf{B}_{t\rho}(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial \theta} \quad (104)$$

$$\mathbf{B}_\phi(r,\phi) = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \quad (105)$$

$$\mathbf{B}_{t\theta}(\rho,\theta) = - \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial \rho} \quad (106)$$

Le développement des équations (101) et (102) associé aux équations (103), (104), (105) et, (106) aboutit à un système de Cramer dont les inconnues sont A_n et R_n .

$$\frac{1}{j\omega\sigma a} \sum_n A_n I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) - \frac{\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} R_n I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) = \frac{\mu_0 a^{n-1}}{2\pi} \quad (107)$$

$$\frac{1}{\sqrt{j\omega\mu\sigma}} A_n I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) + \frac{1}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} R_n I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) = \frac{a^{n-1}}{2\pi} \quad (108)$$

La résolution d'un tel système nous donne les valeurs des paramètres A_n et R_n recherchés.

$$A_n = \frac{\mu_0 j\omega\sigma a^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) + \left(\frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{\mu_r}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})} \right] \quad (109)$$

$$R_n = \frac{a^{n-1}\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{\pi I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})} \frac{\left[\left(\frac{n}{a}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) - \left(\frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{\mu_r}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \right]}{\left[\left(\frac{n}{a}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) + \left(\frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{\mu_r}\right) I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \right]} \quad (110)$$

II. 1. 5. Détermination des impédances dues à l'effet de proximité d'un conducteur

Les impédances dues à l'effet de peau ayant été déterminées au début de ce chapitre, dans cette partie nous nous attachons à déterminer l'impédance élémentaire $R_{ii} + jL_{ii}\omega$ due exclusivement à l'effet de proximité du conducteur i . Ceci suppose que tous les autres conducteurs (inducteurs) ne sont pas parcourus par leurs courants, et nous utilisons un contour composé du conducteur C et du filament de courant i .

La résistance (R_{ii}) et l'inductance (L_{ii}) par unité de longueur due aux courants induits peuvent être obtenues en appliquant la loi de Faraday sur un contour fermé (ℓ) incluant une génératrice du conducteur C et un filament de courant (voir formule (111) et (112)). Nous choisissons pour cela un tronçon de longueur Δz et exprimons le champ électrique sur la génératrice de C correspondant à une partie du contour et calculons les chutes de tensions.

Enfin, pour éviter lors de ces calculs d'avoir des singularités dues à l'hypothèse des filaments de courants, nous restituons à chaque filament i son rayon a_i .

II. 1. 5. 1. Application de la loi de Faraday aux conducteurs 1 et C

Le premier contour choisi concerne seulement les conducteurs C et 1 comme montré sur la figure (12).

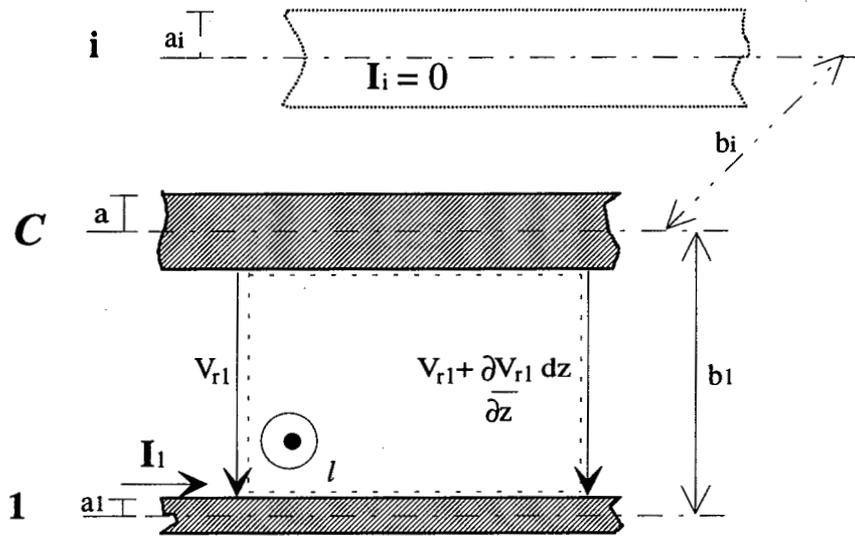


Figure (12) : *Application de la loi de Faraday au contour comprenant le filament de courant 1 et le conducteur C*

Nous avons alors les équations suivantes, exprimées par unité de longueur et pour des courants $I_i = 0$ pour $i = 2, \dots, P$ (tous les courants inducteurs autres que I_1 sont supposés être nuls).

$$\frac{\partial V_{r1}}{\partial z} = - I_1 (R_{r1} + jL_{r1} \omega) \quad (111)$$

$$(R_{r1} + jL_{r1} \omega) I_1 = \frac{d\Phi_{r1}}{dt} + E_z (a, \theta) \quad (112)$$

avec,

$$\mathbf{E}_z(a, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \mathbf{J}(a, \theta) \quad (113)$$

Dans ces équations, la variation du flux à travers le contour peut être obtenue à l'aide de :

$$\frac{d\Phi_{r1}}{dt} = j\omega \oint_l \mathbf{A}_t(\rho, \theta) dl = j\omega [\mathbf{A}_t(a, \theta) - \mathbf{A}_t(b_1, \gamma_1)] \quad (114)$$

Le développement de cette intégrale à partir des équations (99) et (108) donné dans l'annexe III nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{r1}}{dt} = & - \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n I_1 \{ \cos n(\theta - \gamma_1) - \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \} \right] - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left(\frac{a^n}{n}\right) \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n I_1 \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[I_1 \operatorname{Ln}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (115)$$

Enfin, la combinaison des équations (112), (113) et (115) nous permet d'obtenir une relation contenant la résistance et l'inductance recherchées dans le cas du contour composé de C et du filament 1.

$$\begin{aligned} (R_{r1} + jL_{r1}\omega) I_1 = & + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n I_1 \right] - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}\right) \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n I_1 \right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[I_1 \operatorname{Ln}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (116)$$

Après simplification et en combinant les deuxièmes et troisièmes termes du second membre, nous obtenons :

$$(R_{r1} + jL_{r1}\omega) = + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n \right] + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\operatorname{Ln}\left(\frac{b_1^2 - a^2}{b_1 a_1}\right) \right] \quad (117)$$

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Dans la formule (117), le premier terme du second membre est relatif à une impédance interne élémentaire due exclusivement à l'effet de proximité du conducteur 1 voisin lorsque le contour choisi se compose de C et 1. L'impédance interne correspondante est notée $Z'_{r1} = R'_{r1} + jL'_{r1} \omega$.

$$Z'_{r1} = + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a \sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left(\frac{a}{b_1}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_1}\right)^n\right] \quad (118)$$

Le deuxième terme du second membre de la formule (117) est lui relatif à une inductance externe. Il résulte des phénomènes inductifs ayant lieu hors des matières conductrices. Ce terme n'inclue en rien l'effet de proximité. Nous remarquerons simplement que pour $b \gg (a, a_1)$ l'inductance externe tend vers l'expression classique suivante :

$$L_{r1ext} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\text{Ln}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) \right] \quad (119)$$

II. 1. 5. 2. Application de la loi de Faraday aux conducteurs P et C

Le processus d'application de la loi de Faraday peut être répété successivement entre chaque conducteur et le conducteur de référence. Nous donnons ici un autre exemple d'expression contenant la résistance et l'inductance du conducteur C en présence du seul conducteur P et en prenant comme contour fermé celui contenant les deux conducteurs en question.

$$\begin{aligned} (R_{rP} + jL_{rP} \omega) = & + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a \sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left(\frac{a}{b_P}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_P}\right)^n\right] - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}\right) \left(\frac{a}{b_P}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_P}\right)^n\right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\text{Ln}\left(\frac{b_P}{a_P}\right) \right] \end{aligned} \quad (120)$$

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Ainsi, la relation contenant l'impédance interne due exclusivement à l'effet de proximité tirée de la formule (120) sera ici donnée par :

$$Z'_{rp} = (R'_{rp} + jL'_{rp} \omega) = + \left(\frac{1}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n (a \sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left(\frac{a}{b_p}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_p}\right)^n\right] \quad (121)$$

Enfin, il convient de signaler que les inductances externes et capacités seront déterminées dans le cas d'un système multiconducteur situé à une certaine hauteur au-dessus d'un plan conducteur noté s. Dans ce cas, il est important de noter que les relations (117) et (118) seront utilisées lors de la construction des matrices d'impédances d'un tel système.

II. 1. 6. Détermination de l'impédance interne d'un conducteur soumis à l'effet de peau et de proximité d'autres conducteurs

Dans cette partie nous utiliserons le vecteur de Poynting pour la détermination des puissances. Les équations de base sont les formules (88) de la densité de courant et celle (89) du potentiel vecteur magnétique développées au début du chapitre, tenant compte de l'influence de tous les P courants inducteurs.

Ainsi, l'expression de la puissance complexe par unité de longueur du conducteur (C) de référence obtenue grâce à l'utilisation du vecteur de Poynting est donnée par la relation suivante (pour éviter toute ambiguïté, la notation de la puissance est volontairement faite avec des caractères gras) :

$$\mathbf{P} = a \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_z(a, \phi) \times \mathbf{H}^* \phi(a, \phi) d\phi \quad (122)$$

Dans cette expression, a désigne le rayon du conducteur de référence tandis que $\mathbf{E}_z(a, \phi)$ représente le champ électrique axial à la surface de C et $\mathbf{H}^* \phi(a, \phi)$ le conjugué de celui magnétique tangentiel sur cette même surface.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Les expressions de ces champs sont données par les relations suivantes :

$$E_z(a, \phi) = \frac{J(a, \phi)}{\sigma} \quad (123)$$

$$H_\phi(a, \phi) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A(r, \phi)}{\partial r} \text{ pour } r = a \quad (124)$$

Pour calculer l'intégrale de la formule (122) nous nous sommes aidés des propriétés d'intégration des fonctions trigonométriques suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \text{constante} \times \cos n(\phi - \gamma) d\phi = 0 \quad (125)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\phi - \gamma) \times \cos n(\phi - \gamma) d\phi = 0 \text{ si } (m \neq n) \quad (126)$$

Il vient alors que \mathbf{P} peut s'exprimer sous la forme d'une somme de deux termes \mathbf{P}_0 et \mathbf{P}_1 dont le premier représente la puissance complexe due à l'effet de peau dans le conducteur C et le deuxième celle due à l'effet de proximité des conducteurs voisins sur le conducteur C .

Après tous calculs faits nous obtenons :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \quad (127)$$

avec :

-pour \mathbf{P}_0

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{2\pi a\sigma} \frac{I_0(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})}{I_1(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})} \mathbf{I}_r \mathbf{I}_r^* \quad (128)$$

- et pour P_1 nous avons :

$$P_1 = \left(\frac{j a \pi}{\sigma \sqrt{j \omega \mu \sigma}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* I_n(a \sqrt{j \omega \mu \sigma}) I_n'^*(a \sqrt{j \omega \mu \sigma}) \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \left(\frac{1}{b_i b_j} \right)^n I_i I_j^* \cos n(\gamma_i - \gamma_j) \quad (129)$$

Dans ces formules, I_n désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n , $I_n'^*$ la forme conjuguée de la dérivée de I_n , tandis que I_i et I_j^* désignent successivement le courant complexe dans le conducteur i et le conjugué du courant traversant le conducteur j . Les autres paramètres sont donnés au début de ce chapitre et la notation (*) désigne l'expression conjuguée.

Des formules (127), (128) et (129) nous déduisons l'équation concernant l'impédance interne globale par unité de longueur du conducteur C soumis à l'effet de peau (dû à I_r) et à l'effet de proximité (dû aux courants I_i) des conducteurs voisins sous la forme suivante:

$$Z' = \frac{P}{I_r I_r^*} \quad (130)$$

Nous noterons que pour calculer l'impédance globale de chaque conducteur i ($i = 1, \dots, P$), nous l'imposerons à son tour comme conducteur de référence, assimilerons les autres conducteurs à des filaments de courant et conduirons les calculs comme nous l'avons fait pour C .

Enfin, nous signalons qu'une méthode mixte de détermination de l'impédance interne globale d'un conducteur soumis à l'effet de peau et à l'effet de proximité de plusieurs autres conducteurs (conducteurs de mêmes rayons parcourus par des courants identiques), faisant appel à la méthode filamentaire élaboré ici ainsi qu'à celle établie en annexe I [44], a été réalisée et validée dans [47].

II. 1. 7. Application à un système de conducteurs de rayons différents dans l'air

Dans cette application, nous considérons une injection de courants identiques dans chaque conducteur du système ($I_r = I_1 = I_2 = I_i = \dots I_P = I$). L'impédance interne globale (Z') du conducteur C obtenue à partir de la formule (130) est donnée par :

du fait que les courants sont identiques, cette impédance ne dépend d'aucun courant et, nous pouvons utiliser le terme impédance interne au lieu de l'expression impédance globale pour caractériser Z' .

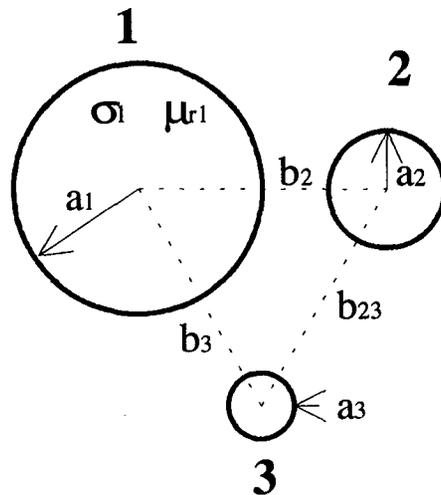
$$Z' = \frac{\sqrt{j\omega\mu\sigma}}{2\pi a\sigma} \frac{I_0(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})}{I_1(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})} + \left(\frac{j\pi}{\sigma\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^* I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) I_n^*(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \left(\frac{1}{b_i b_j} \right)^n \text{Cos } n(\gamma_i - \gamma_j) \quad (131)$$

La partie réelle de cette expression représente la résistance interne tandis que la partie imaginaire constitue la réactance interne de C .

Pour illustrer et valider la partie II. 1. de ce chapitre, nous nous proposons de prendre comme exemple deux configurations de trois conducteurs de rayons différents placés dans l'air.

II. 1. 7. 1. Configuration en triangle

Le premier exemple concerne trois conducteurs de rayons différents parcourus par des courants identiques et placés selon une configuration de type triangulaire comme montré sur la figure (13).



$\mu_{r1} = 1$	$a_1 = 5 \text{ E-03 m}$
$\sigma_1 = 5.8 \text{ E07 S/ m}$	$a_2 = 2.5 \text{ E-03 m}$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	$a_3 = 1.5 \text{ E-03 m}$
$\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3}$	$b_3 = b_2 = b_{23} = 1 \text{ E-02 m}$

Figure (13) : *Conducteurs de rayons différents sous une configuration en triangle*

Les valeurs de la résistance interne du conducteur 1 en fonction de la fréquence sont portées sur les figures (14) et (15) tandis que les valeurs de l'inductance interne du même conducteur sont portées sur les figures (16) et (17).

Les figures (14) et (16) montrent une comparaison entre deux cas de détermination des résistances et inductances internes. Dans le premier cas, nous ne prenons en compte que l'effet de peau à l'aide de la formule (91) tandis que dans le second, nous prenons en considération l'effet de peau et l'effet de proximité selon la formule (131). Nous observons alors que l'erreur faite en négligeant l'effet de proximité à la fréquence $F = 10 \text{ MHz}$ est de 62 % pour la résistance et l'inductance.

Pour prouver la validité de notre modèle, les figures (15) et (17) montrent les courbes de résistance et d'inductance interne du conducteur 1 (avec prise en compte de l'effet de peau et de proximité) obtenues par la méthode des Eléments Finis et celle que nous proposons. Les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes sont en bonne concordance sur toute la plage de

fréquence d'étude. Les erreurs maximales sont enregistrées en haute fréquence entre les deux méthodes, et elles sont de l'ordre de 7% pour les résistances ainsi que pour les inductances.

Nous notons enfin que la résistance augmente tandis que l'inductance diminue lorsque la fréquence augmente.

R (Ohm/m)

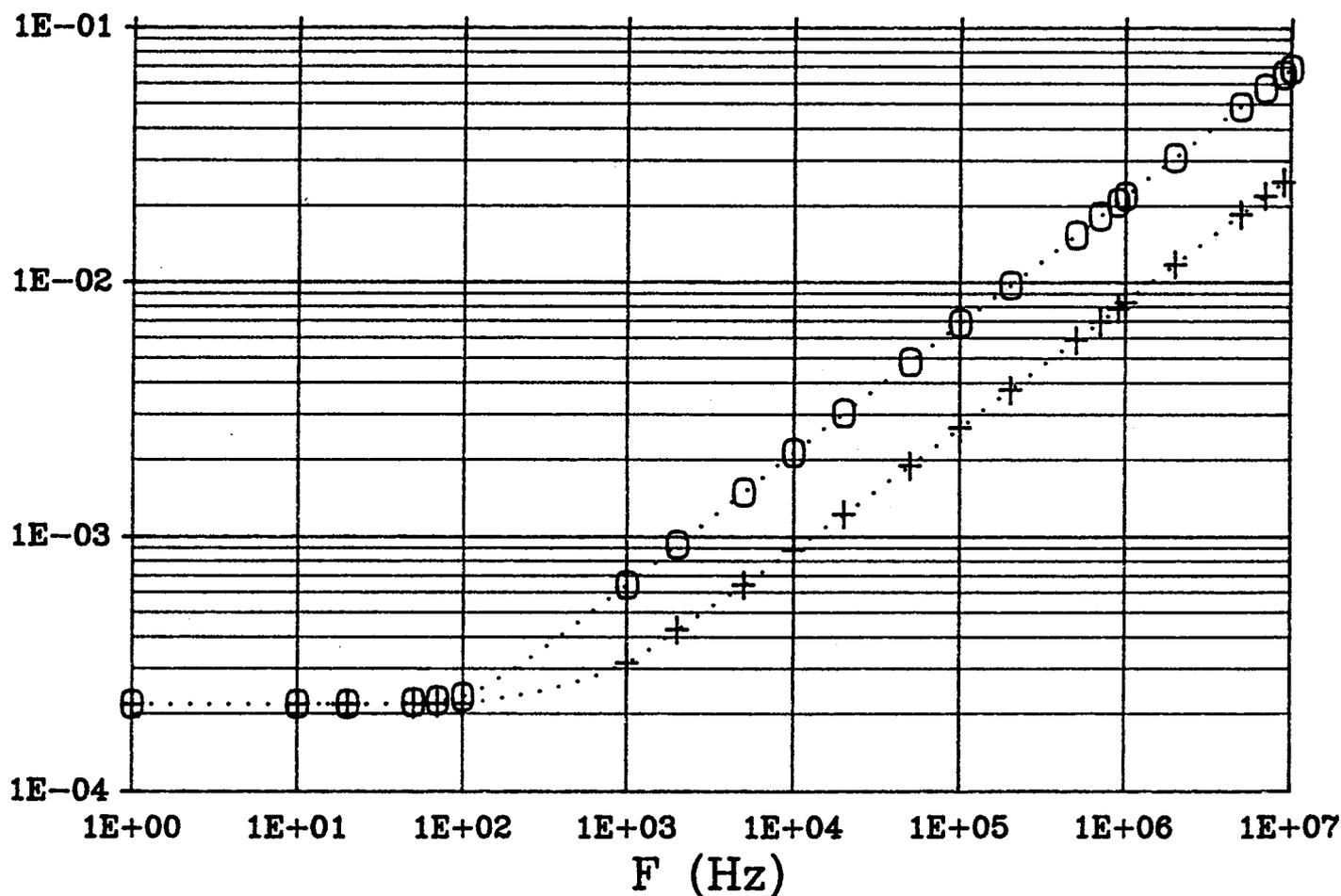


Figure (14) : *Comparaison entre les valeurs de la résistance d'effet de peau seul du conducteur 1 et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité. Tous les calculs sont faits analytiquement et la configuration des conducteurs est en triangle.*

.....+..... : Résistance d'effet de peau seul du conducteur 1

.....O..... : Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1

R (Ohm/m)

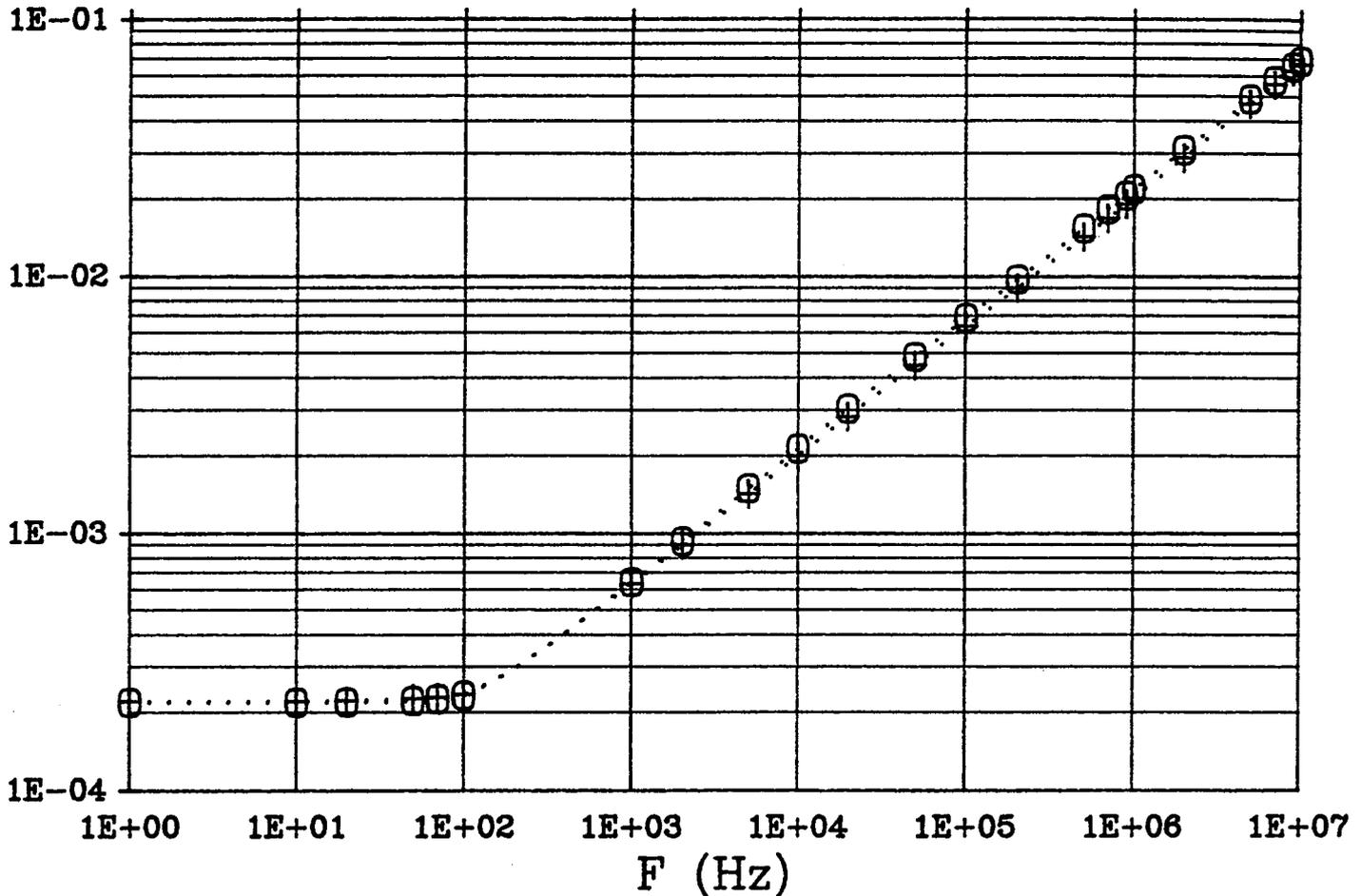


Figure (15) *Comparaison entre les valeurs de la résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 calculées par éléments finis (E.F.) et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité par le calcul analytique. La configuration des conducteurs est en triangle.*

-O.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 par notre méthode
-+.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 par (E.F.)

L (H/m)

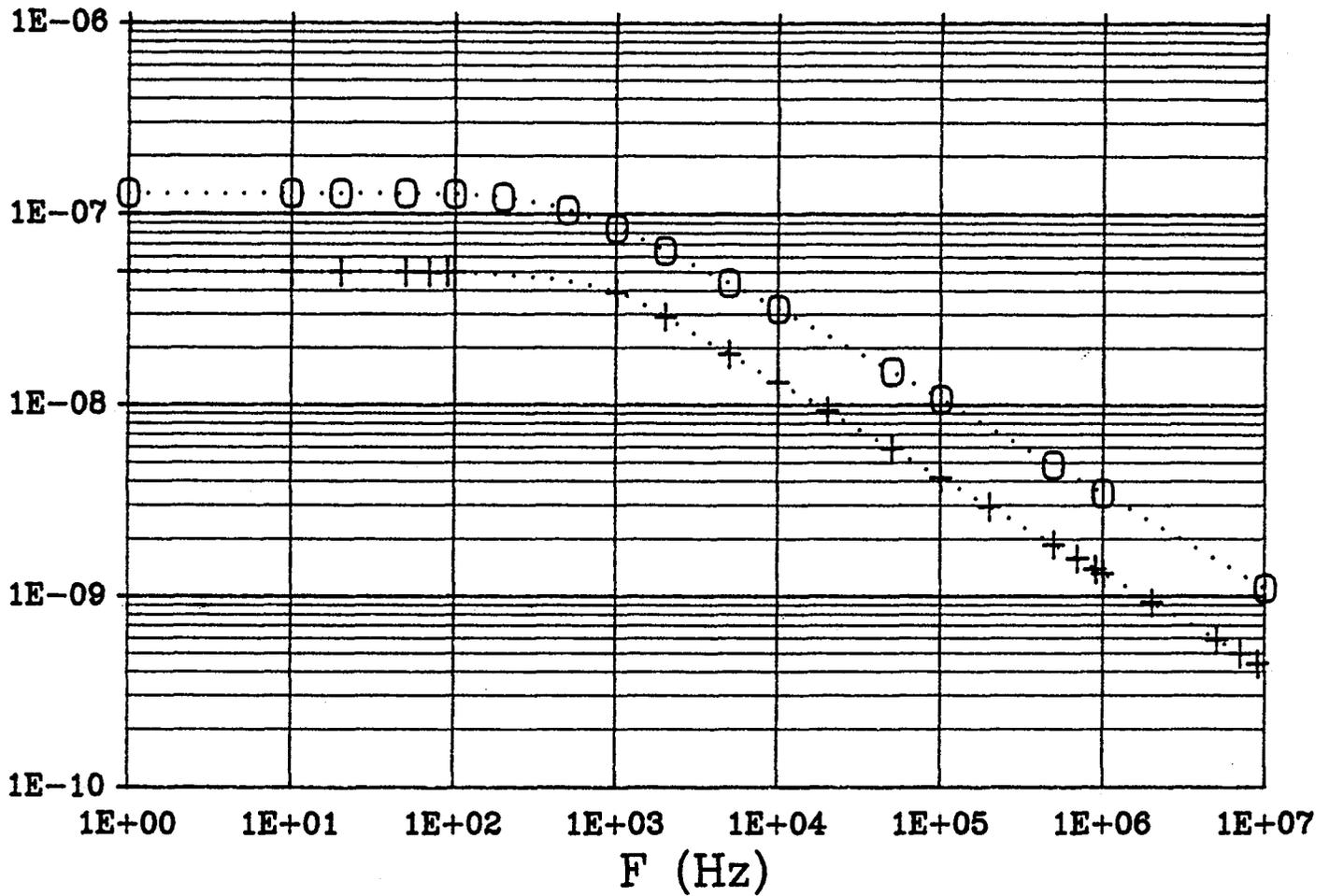


Figure (16) *Comparaison entre les valeurs de l'inductance d'effet de peau seul du conducteur 1 et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité. Tous les calculs sont faits analytiquement et la configuration des conducteurs est en triangle.*

.....+..... : Inductance d'effet de peau seul du conducteur 1

.....O..... : Inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1

L (H/m)

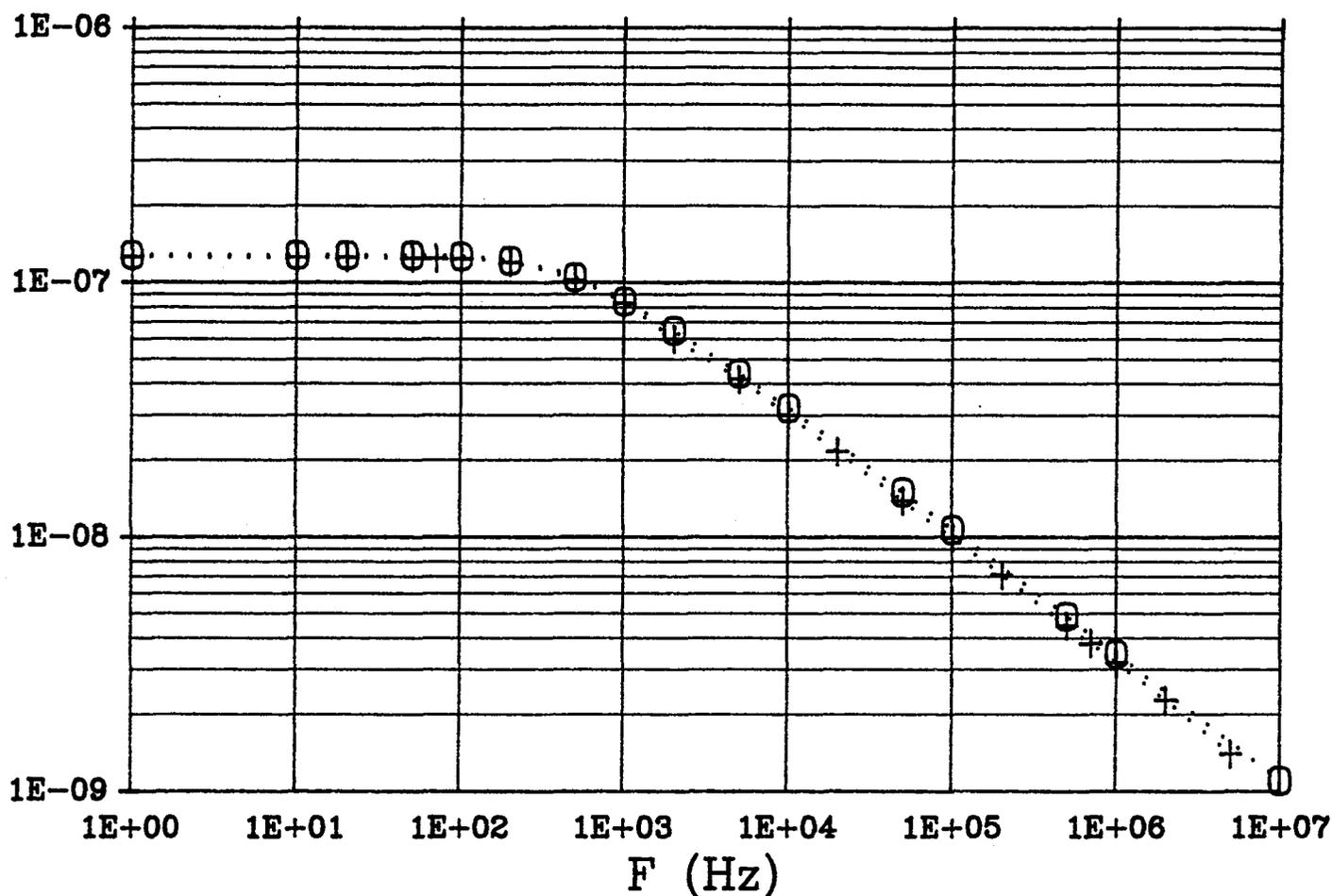


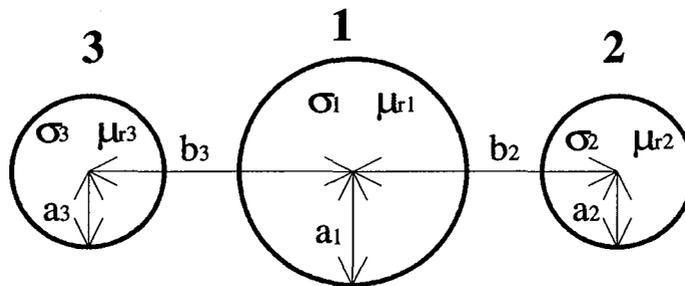
Figure (17) *Comparaison entre les valeurs de l'inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 calculées par éléments finis (E.F.) et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité par le calcul analytique. La configuration des conducteurs est en triangle.*

.....0.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 par notre méthode

.....+.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 1 par (E.F.)

II. 1. 7. 2. Configuration en nappe

Pour le deuxième exemple nous proposons trois conducteurs de rayons différents parcourus par des courants identiques et placés selon une configuration en nappe comme montré sur la figure (18).



$\mu_{r1} = 1$	$a_1 = 1 \text{ E-03 m}$
$\sigma_1 = 5.8 \text{ E07 S/ m}$	$a_2 = 0.7 \text{ E-03 m}$
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$	$a_3 = 0.7 \text{ E-03 m}$
$\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3}$	$b_3 = b_2 = b_{23} = 2.4 \text{ E-03 m}$

Figure (18) : *Configuration en nappe de conducteurs de rayons différents*

Pour ce cas nous mènerons les mêmes études ; les valeurs de la résistance interne globale du conducteur 2 en fonction de la fréquence sont portées sur les figures (19) et (20) tandis que les valeurs de l'inductance interne du même conducteur sont reportées sur les figures (21) et (22).

Les figures (19) et (21) montrent une comparaison entre deux cas de détermination des résistances et inductances internes. Dans le premier cas, nous ne prenons en compte que l'effet de peau à l'aide de la formule (91) tandis que dans le second, nous prenons en considération l'effet de peau et l'effet de proximité selon la formule (131).

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Nous observons alors que l'erreur faite en négligeant l'effet de proximité à la fréquence $F = 10$ MHz est de l'ordre de 29 % pour la résistance et l'inductance.

Pour valider notre modèle, nous utilisons les figures (20) et (22) qui contiennent les courbes de résistance et d'inductance du conducteur 2 (avec prise en compte de l'effet de peau et de proximité) obtenues par la méthode des Eléments Finis et celle que nous proposons. Les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes sont en bonne concordance. Les erreurs maximales sont enregistrées en haute fréquence entre les deux méthodes, et elles sont de l'ordre de 3% pour les résistances ainsi que pour les inductances.

Nous noterons enfin comme dans l'exemple précédent, que la résistance augmente tandis que l'inductance diminue lorsque la fréquence augmente.

R (Ohm/m)

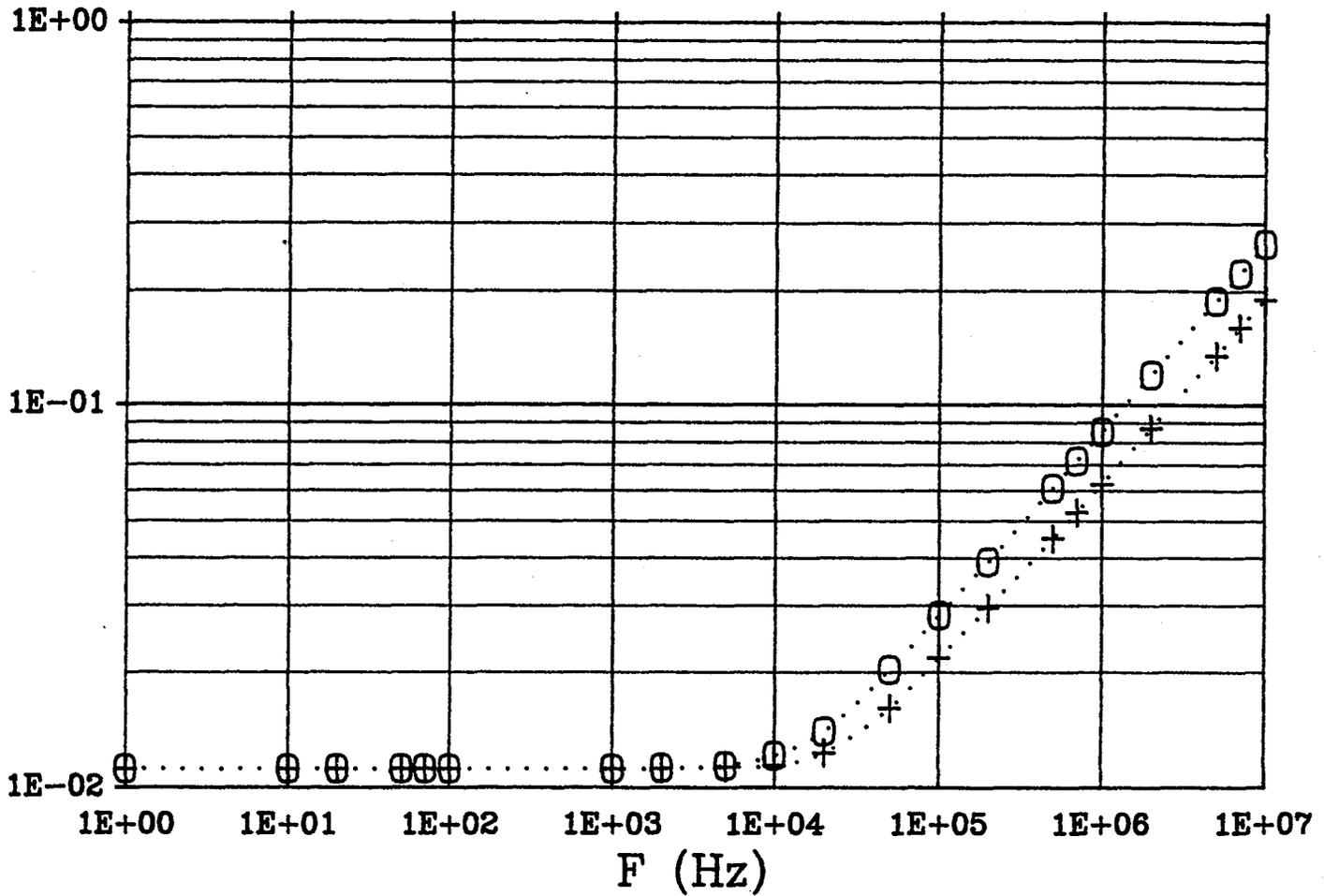


Figure (19) *Comparaison entre les valeurs de la résistance d'effet de peau seul du conducteur 2 et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité. Tous les calculs sont faits analytiquement et la configuration des conducteurs est en nappe.*

.....+..... : Résistance d'effet de peau seul du conducteur 2

.....0..... : Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2

R (Ohm/m)

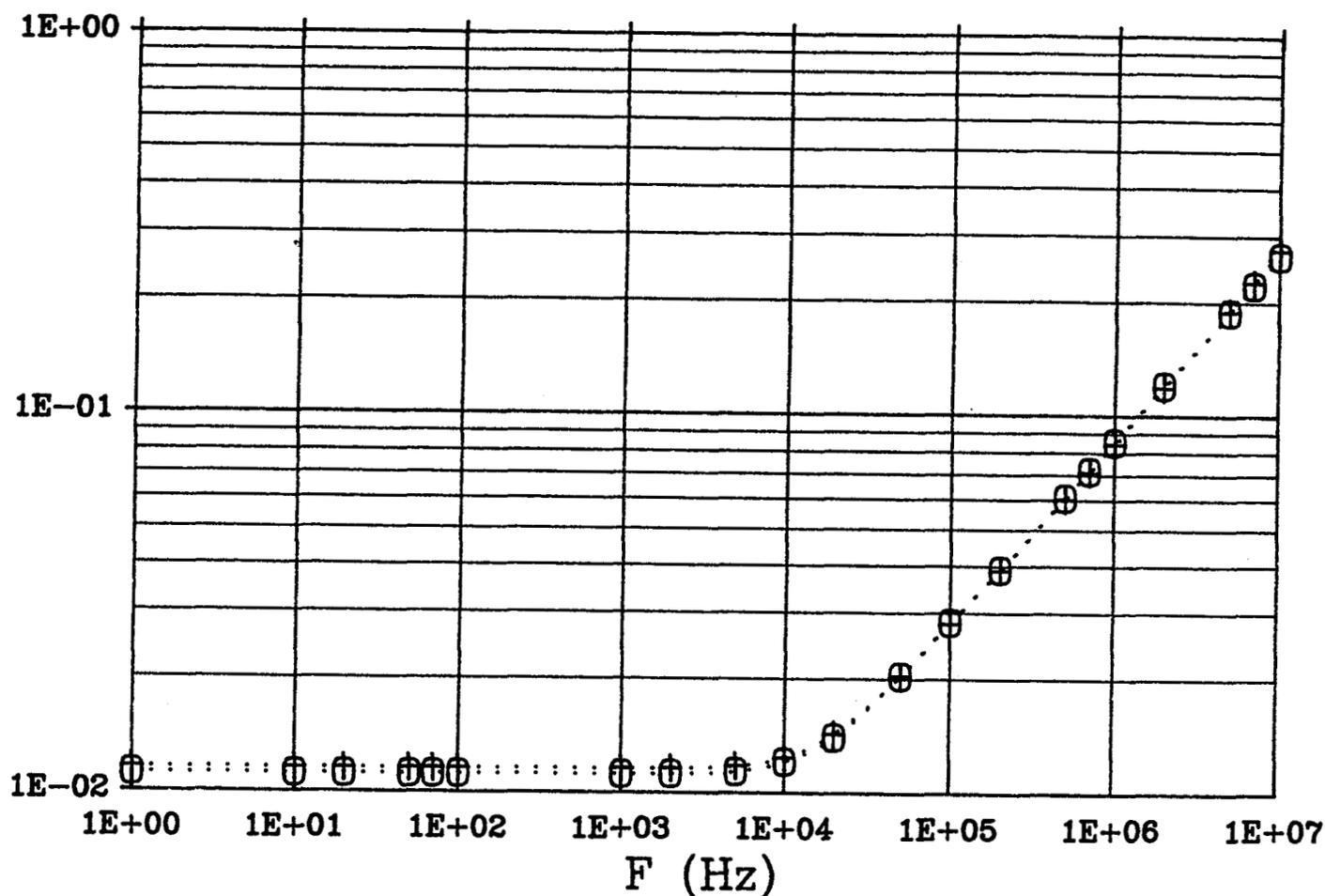


Figure (20) *Comparaison entre les valeurs de la résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 calculées par éléments finis (E.F.) et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité par le calcul analytique. La configuration des conducteurs est en nappe.*

.....0.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 par notre méthode

.....+.....: Résistance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 par (E.F.)

L (H/m)

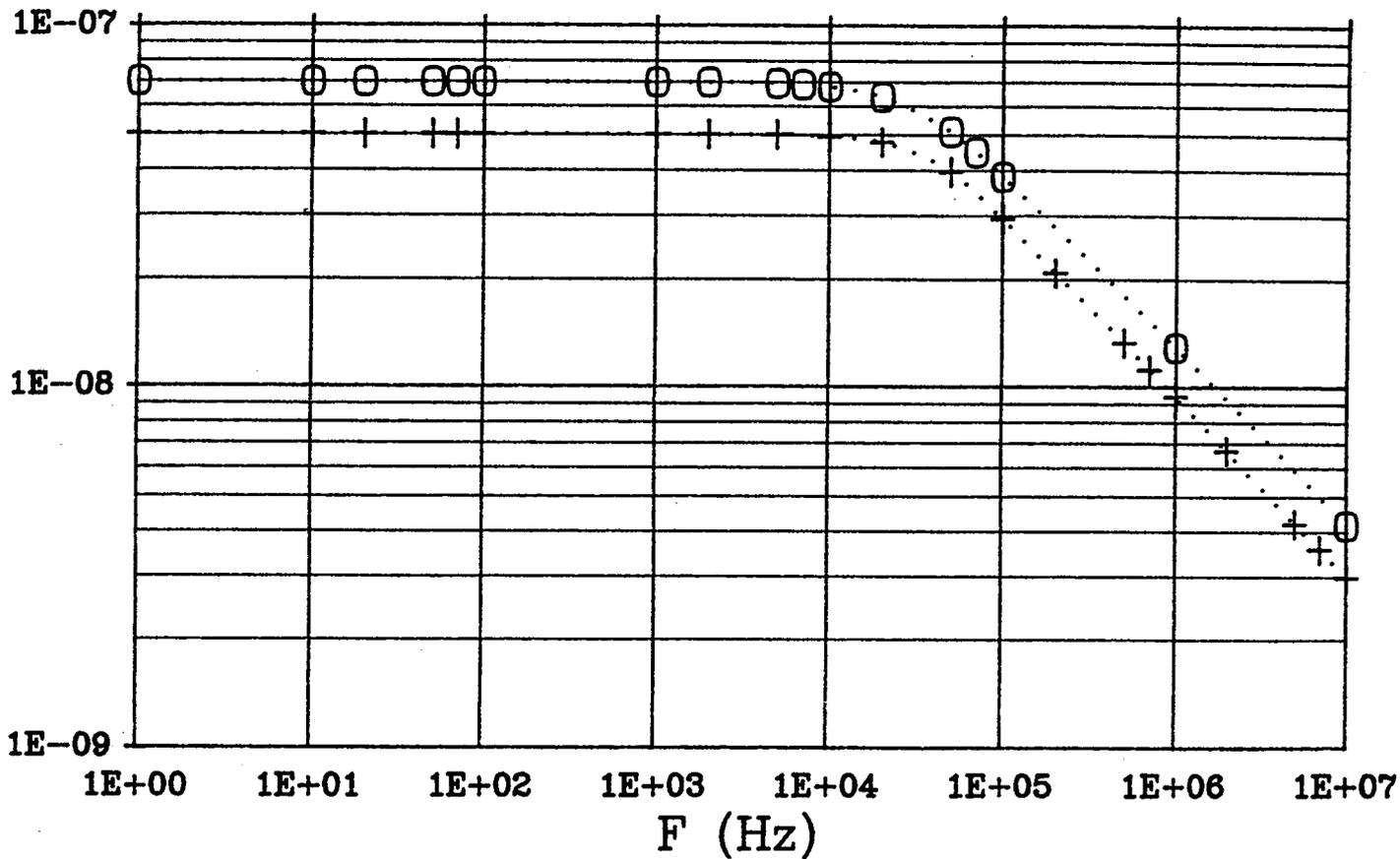


Figure (21) *Comparaison entre les valeurs de l'inductance d'effet de peau seul du conducteur 2 et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité. Tous les calculs sont faits analytiquement et la configuration des conducteurs est en nappe.*

.....+..... : Inductance d'effet de peau seul du conducteur 2

.....0..... : Inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2

L (H/m)

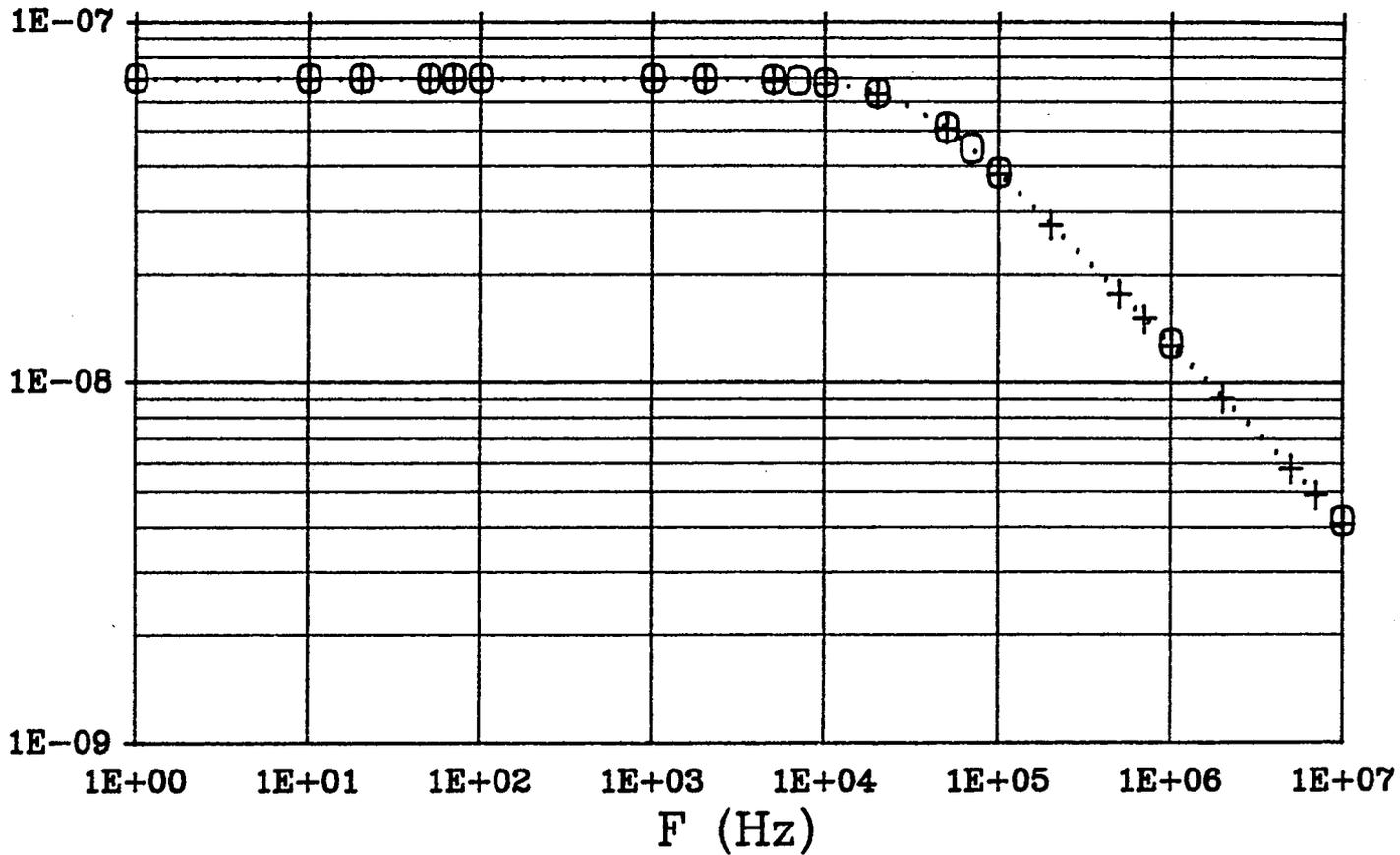


Figure (22) *Comparaison entre les valeurs de l'inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 calculées par éléments finis (E.F.) et celles obtenues pour le même conducteur en tenant compte de l'effet de peau et de proximité par le calcul analytique. La configuration des conducteurs est en nappe.*

.....0.....: Inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 par notre méthode

.....+.....: Inductance d'effet de peau et de proximité du conducteur 2 par (E.F.)

II. 2. MODELE MATRICIEL DES IMPEDANCES ET ADMITTANCES DES LIGNES MULTIFILAIRES AU-DESSUS D'UN MILIEU CONDUCTEUR

II. 2. 1. Généralités

Nous rappelons que dans tout ce qui a été fait jusqu'ici dans ce chapitre, il était question d'un conducteur de référence à côté de P autres conducteurs. Maintenant dans tout ce qui va suivre dans ce chapitre nous considérons un système de P conducteurs situés à une certaine hauteur au-dessus du plan de masse.

Du point de vue de l'étude des circuits, caractériser des lignes de transmission revient à en donner les constantes de propagations (atténuation et vitesse de propagation). Dans la figure (23) nous donnons le schéma général du cas que nous étudions.

Il est important de noter que dans ce cas d'étude, nous faisons l'hypothèse $(h_i, h_j) \gg (a_i, a_j)$ afin d'éviter d'une part les éventuels effets de proximité entre les conducteurs et le plan conducteur s et d'autre part de pouvoir considérer chaque conducteur comme un filament de courant par rapport au plan s. Enfin, nous noterons que sous ces conditions, les inductances internes vont devenir faibles comparées aux inductances externes propres et mutuelles en haute fréquence.

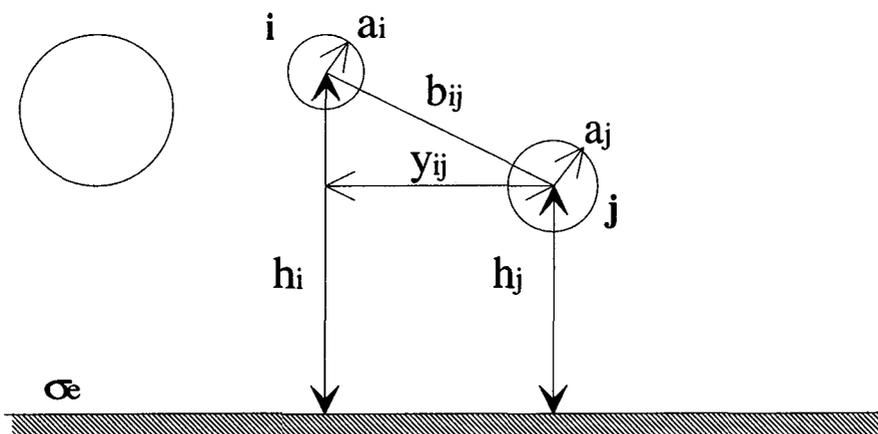


Figure (23) : *Conducteurs au-dessus d'un plan conducteur s pouvant être ou du cuivre ou le sol*

II. 2. 2. Formulation générale

Dans cette configuration, chaque conducteur i sera à un potentiel V_i par rapport au plan conducteur s et sera parcouru par un courant I_i . Les matrices des impédances séries ($[Z']$) et admittances parallèles ($[Y']$) se formulent comme suit.

$$[Z'] = [Z'i] + j\omega(\mu_0/2\pi) [S'] \quad (132)$$

$$[Y'] = j\omega 2\pi\epsilon_0 [P']^{-1} \quad (133)$$

$[Z'i]$ étant la matrice d'impédances internes (propres et mutuelles) que nous déterminerons plus loin tandis que $j\omega(\mu_0/2\pi) [S']$ représente la matrice d'impédances externes (propres et mutuelles) des conducteurs, elle prend en compte aussi l'impédance du plan conducteur s .

Les tensions et courants sont donc liés par les équations matricielles suivantes :

$$-\left\{\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = [Z'] \{I\} \quad (134)$$

$$-\left\{\frac{\partial I}{\partial z}\right\} = [Y'] \{V\} \quad (135)$$

II. 2. 3. Détermination des matrices d'impédances externes et d'admittances des conducteurs de phase et du sol incluant les impédances internes du sol

Dans les équations (132) et (133) les expressions $(\mu_0/2\pi) [S']$ et $2\pi\epsilon_0 [P']^{-1}$ caractérisent les matrices d'impédances externes et des capacités dont les éléments [38] sont classiquement donnés (voir chapitre I) sous les formes suivantes.

$$S'_{ii} = \text{Ln}\left[\frac{2(h_i+h'_e)}{a_i}\right] \text{ et } S'_{ij} = \text{Ln}\left[\frac{D'_{ij}}{b_{ij}}\right] \quad (136)$$

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

$$P'_{ii} = \text{Ln}\left[\frac{2(h_i)}{a_i}\right] \text{ et } P'_{ij} = \text{Ln}\left[\frac{D_{ij}}{b_{ij}}\right] \quad (137)$$

avec, [18]

$$D_{ij} = \sqrt{[(h_i+h_j)^2 + y_{ij}^2]}$$

$$D'_{ij} = \sqrt{[(h_i+h_j+2h'_e)^2 + y_{ij}^2]}$$

$h'_e = \sqrt{\frac{1}{j\omega\mu_0\sigma_e}}$ étant la profondeur de pénétration complexe dans le plan conducteur s.

σ_e est pris pour la conductivité du plan conducteur s, tandis que y_{ij} représente la distance de séparation horizontale entre les conducteurs i et j.

$$Z'_i = \begin{bmatrix} Z'_{i11} & Z'_{i12} & \cdot & Z'_{i1P} \\ Z'_{i21} & Z'_{i22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z'_{iP1} & \cdot & \cdot & Z'_{iPP} \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & \cdot & Y'_{1P} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y'_{P1} & \cdot & \cdot & Y'_{PP} \end{bmatrix} \quad (139)$$

Dans cette application, nous nous intéresserons dans un premier temps aux conducteurs seuls (sans le plan conducteur s) afin d'en déterminer la matrice d'impédances internes $[Z'_i]$ concernant exclusivement l'effet de peau et l'effet de proximité dans ces conducteurs.

Dans une seconde étape, nous tiendrons compte des matrices d'impédances externes et des capacités [38] [68] en prenant le milieu s comme milieu de référence.

II. 2. 4. Détermination des éléments de la matrice $([Z'i])$ d'impédances internes des conducteurs de phase

Nous rappelons que les impédances internes du sol ont été déterminées précédemment à la partie I. 4. 1. 2.

Les éléments de la matrice $([Z'i])$ peuvent être calculés soit à l'aide du vecteur de Poynting comme nous l'avons fait pour obtenir les formules (122, 128, 129, 130, 131) soit avec l'application de la loi de Faraday comme nous le ferons dans la suite de ce chapitre. Les deux méthodes conduisent au mêmes résultats pour le calcul des résistances tandis que de faibles différences interviennent pour le calcul des inductances internes en basse fréquence. En partant du fait que d'une part, ces différences n'ont que peu d'influence dans le calcul des paramètres linéiques des lignes au-dessus d'un plan conducteur ainsi que pour des câbles blindés, et que d'autre part dans le cas des câbles blindés nous aurons à déterminer des inductances externes plus faciles à calculer par la loi de Faraday que par le vecteur de Poynting, nous choisissons alors de faire la plupart de nos calculs à l'aide de la loi de Faraday.

II. 2. 4. 1. Détermination des éléments hors diagonale de $([Z'i])$

Nous considérons un système de conducteurs i et j parcourus respectivement par des courants I_i et I_j [45] et situés à des distances b_{ij} l'un de l'autre. Dans la suite nous imposerons selon les paramètres à calculer, $I_i = 0$ ou $I_j = 0$.

Dans le but de déterminer l'impédance mutuelle entre les deux conducteurs, nous déterminons tout d'abord l'impédance mutuelle dans le cas où les conducteurs sont sans pertes (ceci a été traité dans la partie précédente). Ensuite, nous déterminons l'impédance due aux courants induits par le conducteur parcouru par un courant sur celui qui ne l'est pas. Enfin, nous appliquons le principe de superposition.

Nous nous imposons alors le conducteur i comme conducteur de référence ainsi que les conditions ($I_i = 0$ et $I_j \neq 0$). Nous avons donc des courants induits par le filament de courant j sur le conducteur i (non parcouru par un courant).

L'impédance due à l'effet de proximité du conducteur j sur i notée (z'_{ij}) est déterminée grâce à l'application de la loi de Faraday sur un contour comprenant les deux conducteurs.

En appliquant la loi de Faraday (voir les parties II. 1. 5. 1 et II. 1. 5. 2. de ce chapitre) à ces deux conducteurs, nous obtenons par l'intermédiaire de la formule suivante l'impédance interne (z'_{ij}) recherchée.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{ij}}{\partial z} = & - I_j (R_{ij} + jL_{ij}\omega) = - I_j \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j\omega\sigma_i a_i^{n-1}}{\pi} \\ & \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a_i}\right) I_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}) + \left(\frac{\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}}{\mu_{ri}}\right) I'_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})} \right] I_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_{ij}}\right)^n\right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_i}{n}\right) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \left[\left(\frac{1}{b_{ij}}\right)^n I_j\right] - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[I_j \text{Ln}\left(\frac{b_{ij}}{a_j}\right) \right] \end{aligned} \quad (140)$$

Cette formule nous permet d'obtenir en excluant les termes d'inductances externes, l'expression de l'impédance interne du conducteur i soumis à l'effet de proximité du conducteur j sous les formes suivantes.

$$z'_{ij} = R'_{ij} + jL'_{ij}\omega \quad (141)$$

$$\begin{aligned} z'_{ij} = & \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j\omega\sigma_i a_i^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a_i}\right) I_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}) + \left(\frac{\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}}{\mu_{ri}}\right) I'_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})} \right] I_n(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \\ & \left[\left(\frac{1}{b_{ij}}\right)^n\right] \end{aligned} \quad (142)$$

Pour obtenir maintenant l'impédance interne (z'_{ji}) du conducteur j soumis à l'effet de proximité du conducteur i, la procédure précédente est utilisée, avec cette fois j comme conducteur de référence et, en tenant compte des conditions ($I_j = 0$ et $I_i \neq 0$).

$$z'_{ij} = \left(\frac{1}{\sigma_j}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j \omega \sigma_j a_j^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\binom{n}{a_j} I_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}) + \left(\frac{\sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}}{\mu_{rj}}\right) I'_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j})} \right] I_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}) \left(\frac{a_j}{b_{ij}}\right)^n$$

$$\left[\left(\frac{1}{b_{ij}}\right)^n\right] \quad (143)$$

Nous noterons que z'_{ij} et z'_{ji} sont identiques pour des paramètres $a_i = a_j$, $\mu_i = \mu_j$ et $\sigma_i = \sigma_j$.

II. 2. 4. 2. Détermination des éléments constituant la diagonale de $([Z'i])$

Nous considérons un système de P conducteurs parmi lesquels le conducteur i dont on veut déterminer l'impédance interne. Le conducteur i est donc représenté dans un premier temps comme un filament de courant donnant naissance à des courants induits dans les autres conducteurs non parcourus par des courants et indexés par k (indice balayant l'ensemble des P-1 conducteurs autres que le conducteur i). Nous obtenons alors à l'aide de la formule (143) (en y remplaçant l'indice j par k) l'expression de z'_{iki} . L'impédance interne totale due aux courants induits dans l'ensemble des conducteurs k par le filament de courant i peut s'obtenir sous la forme de l'ensemble des impédances dues aux courants induits dans chaque conducteur k (non parcouru par un courant réel) ramenées au courant I_i . Cette impédance interne due exclusivement aux courants induits par le filament de courant i peut alors s'écrire sous la forme d'une somme (Σ) des impédances z'_{iki} dans la mesure où nous ne tenons pas compte des réactions des conducteurs k sur eux-mêmes :

$$\Sigma = \sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{iki} \quad (144)$$

Dans une seconde étape, il faut ajouter à l'impédance précédente l'impédance d'effet de peau du conducteur i, ce qui nous fournit l'impédance interne totale ($z'_{i ii}$) du conducteur i.

$$z'_{i ii} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \left[\frac{\sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}}{2\pi a_i} \frac{I_0(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i})}{I_1(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i})} \right] + \sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{iki} \quad (145)$$

II. 3. APPLICATION DE L'ANALYSE MODALE A UN SYSTEME DE CONDUCTEURS SITUES AU-DESSUS D'UN PLAN CONDUCTEUR S

II. 3. 1. Rappels théoriques

La technique de l'analyse modale a été rappelée de façon détaillée dans le chapitre I, nous ne ferons ici que fixer les grandeurs que nous utiliserons par la suite.

La combinaison des équations matricielles définies dans le chapitre I nous fournit les équations écrites ci dessous :

$$\left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} = [Z'] [Y'] \{V\} \quad (146)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} \right\} = [Y'] [Z'] \{I\} \quad (147)$$

Dans ces expressions, $\{I\}$ et $\{V\}$ représentent respectivement les vecteurs courants de phase et tensions de phase, avec le plan conducteur s comme référence (voir figure (24)) tandis que les matrices d'impédances $[Z']$ et d'admittances $[Y']$ ont été établies précédemment.

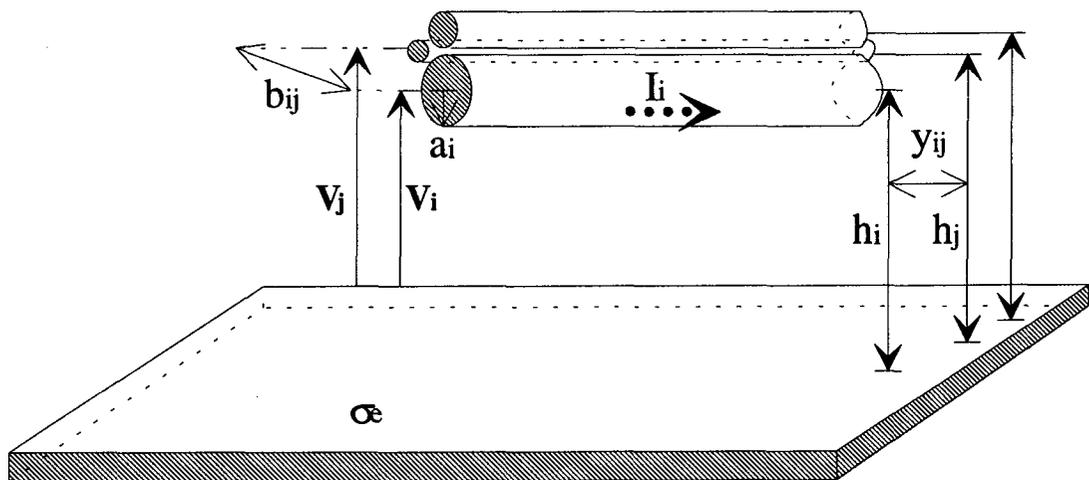


Figure (24) : *Conducteurs au-dessus d'un plan conducteur s (les tensions de phases ainsi que les paramètres géométriques sont représentés).*

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Nous utilisons une analyse modale dans le but de déterminer les atténuations ainsi que les vitesses de propagation modales. Nous indexerons les variables modales par l'indice m [38] [85] dans tout ce qui suit.

En introduisant les équations

$$[P_m] = [M]^{-1} [Z'] [Y'] [M] \text{ et, } [Q_m] = [N]^{-1} [Y'] [Z'] [N] \quad (148)$$

dans lesquelles $[P_m]$ et $[Q_m]$ sont des matrices diagonales, avec

$$\{V_m\} = [M]^{-1} \{V\} \text{ et, } \{I_m\} = [N]^{-1} \{I\} \quad (149)$$

nous obtenons les équations différentielles modales.

$$\left\{ \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right\} = [P_m] \{V_m\} \quad (150)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 I_m}{\partial z^2} \right\} = [Q_m] \{I_m\} \quad (151)$$

$$\text{avec, } [P_m] = [Q_m] = [\gamma_m^2] \quad (152)$$

En désignant par γ_{mi} les termes de la matrice diagonale $[\gamma_m]$ des constantes de propagation modales, nous pouvons alors expliciter γ_{mi} sous la forme $\gamma_{mi} = \alpha_{mi} + j\beta_{mi}$, dans laquelle $v_{mi} = \omega/\beta_{mi}$ désigne la vitesse de propagation des tensions et courants modaux tandis que α_{mi} caractérise l'atténuation avec laquelle se propagent ces tensions et courants modaux.

II. 3. 2. Application à trois conducteurs de rayons identiques au-dessus d'un plan de masse

Dans cette partie nous prendrons comme application un système composé de trois conducteurs de rayons identiques au-dessus d'un plan de masse en cuivre comme montré sur la figure (25). Les paramètres physiques et géométriques sont indiqués sur la même figure ; nous rappelons que parmi ces paramètres, ceux d'indice i ($i = 1, \dots, P$) concernent les conducteurs de phase tandis que l'indice e désigne le plan de masse ou le sol.

$a_1 = 1 \text{ E-03 m}$	$\mu_{r1} = 1$
$a_2 = 1 \text{ E-03 m}$	$\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} = \mu_{re}$
$a_3 = 1 \text{ E-03 m}$	$\sigma_1 = 5.8 \text{ E07 S/m}$
$b_{13} = b_{12} = 2.4 \text{ E-03 m}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_e$
$h_1 = h_2 = h_3 = 0.2 \text{ m}$	

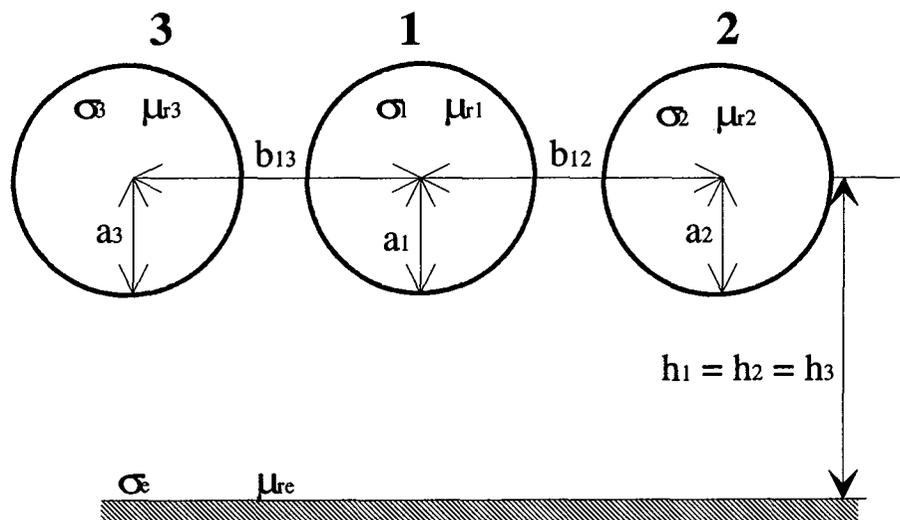


Figure (25) : *Configuration d'étude du cas de trois conducteurs de mêmes rayons disposés à la même hauteur au-dessus du plan conducteur s (les paramètres physiques et géométriques sont donnés)*

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

En utilisant la théorie modale énoncée précédemment nous déterminons les atténuations ainsi que les vitesses de propagation modales.

Du fait de la prise en compte des pertes dans les conducteurs (effets de peau et de proximité) et le plan de masse, les matrices [M] et [N] obtenues sont complexes. Pour éviter des écritures lourdes et peu significatives, nous ne donnerons ici que les parties réelles des éléments constituant ces matrices modales en sachant que les applications numériques usuelles montrent que leurs parties imaginaires sont négligeables. Il est important de noter que les matrices [M] et [N] ne varient pas beaucoup selon la fréquence. Au vu des matrices [M] et [N] calculées pour chaque fréquence, nous pouvons apparenter dans le cas d'une structure à trois conducteurs, le mode 1 au mode interfil (injection sur un conducteur et le retour se faisant par les deux autres conducteurs), le mode 2 au mode homopolaire (injection par les trois conducteurs, le retour se faisant par le plan conducteur s) et enfin le mode 3 au mode bifilaire (injection par un conducteur, le retour se faisant par un autre et le troisième conducteur n'étant pas alimenté).

A titre d'exemple, à 1 MHz, les matrices [M] et [N] obtenues sont les suivantes :

a/ Lorsque l'on ne prend en compte que l'effet de peau dans les conducteurs ($z'_{ij} = 0$ et, $\sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{ki} = 0$)

$$\begin{array}{c}
 \text{numéro du conducteur} \\
 \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 8.04\text{E}-1 & 5.95\text{E}-1 & 0 \\ -4.21\text{E}-1 & 5.68\text{E}-1 & -7.07\text{E}-1 \\ -4.21\text{E}-1 & 5.68\text{E}-1 & 7.07\text{E}-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\
 \text{Modes} \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 3
 \end{array} \quad (153)$$

$$\begin{array}{c}
 \text{numéro du conducteur} \\
 \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 8.04\text{E}-1 & 5.95\text{E}-1 & 0 \\ -4.21\text{E}-1 & 5.68\text{E}-1 & -7.07\text{E}-1 \\ -4.21\text{E}-1 & 5.68\text{E}-1 & 7.07\text{E}-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\
 \text{Modes} \quad \quad 1 \quad \quad 2 \quad \quad 3
 \end{array} \quad (154)$$

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

b / Lorsque l'on prend en compte l'effet de peau et l'effet de proximité dans les conducteurs ($z'_{ij} \neq 0$ et $\sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{ki} \neq 0$).

$$M = \begin{matrix} & \text{numéro du conducteur} \\ \begin{bmatrix} 9.24E-1 & 5.87E-1 & 0 \\ -2.69E-1 & 5.73E-1 & -7.07E-1 \\ -2.69E-1 & 5.73E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (155)$$

Modes 1 2 3

$$N = \begin{matrix} & \text{numéro du conducteur} \\ \begin{bmatrix} 8.1E-1 & 3.81E-1 & 0 \\ -4.15E-1 & 6.54E-1 & -7.07E-1 \\ -4.15E-1 & 6.54E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (156)$$

Modes 1 2 3

Nous dressons alors un tableau des valeurs de l'atténuation et de la vitesse de propagation selon les modes, et ce en fonction de la fréquence.

Tableau (2) : *Atténuations et vitesses de propagation modales pour trois conducteurs de rayons identiques (Influence de l'effet de proximité)*

FREQUENCE (Hz)	50			1 E3			1 E4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Modes									
Atténuation (Np/m) (Effet de peau seul)	8.64E-6	1.59E-6	5.48E-6	3.51E-5	2.87E-6	2.02E-5	6.47E-5	3.18E-6	2.95E-5
Atténuation (Np/m) (Effet de peau et de proximité)	8.63E-6	1.59E-6	5.47E-6	3.48E-5	2.84E-6	1.98E-5	6.64E-5	4.45E-6	3.22E-5
Vitesse (m/s) de propagation. (Effet de peau seul)	3.6E7	1.64E8	5.62E7	1.46E8	2.95E8	2.07E8	2.47E8	2.98E8	2.77E8
Vitesse (m/s) de propagation. (Effet de peau et de proximité)	3.6E7	1.64E8	5.61E7	1.45E8	2.89E8	2.02E8	2.39E8	2.94E8	2.66E8

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

FREQUENCE (Hz)	1 E5			1 E6			1 E7		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Modes									
Atténuation (Np/m) (Effet de peau seul)	1.77E-4	7.8E-6	7.5E-5	5.47E-4	2.3E-5	2.26E-4	1.73E-3	7.14E-5	7.05E-4
Atténuation (Np/m) (Effet de peau et de proximité)	1.98E-4	1.47E-5	9.62E-5	6.4E-4	4.8E-5	3.1E-4	2.05E-3	1.52E-4	9.9E-4
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau seul)	2.77E8	2.99E8	2.90E8	2.92E8	2.99E8	2.96E8	2.97E8	2.99E8	2.99E8
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau et de proximité)	2.73E8	2.98E8	2.87E8	2.91E8	2.99E8	2.95E8	2.97E8	2.99E8	2.99E8

L'analyse de ce tableau nous conduit aux remarques suivantes :

- nous ne notons pratiquement pas de variations entre les atténuations dues à l'effet de peau seul et celles dues à l'effet de peau et de proximité sur la plage de fréquence [0 Hz, 1000 Hz] preuve de la faible importance de l'effet de proximité sur cette plage de fréquence ;

- par contre, le fait de ne pas tenir compte de l'effet de proximité sur la plage de fréquence [10 kHz, 10 MHz] a pour conséquence de réduire les atténuations de tous les modes de propagation ;

- les atténuations modales sont croissantes en fonction de la fréquence, ce qui est dû à l'augmentation des pertes en fonction de la fréquence ;

- pour une fréquence fixe, les atténuations du mode 1 sont plus importantes que celle du mode 3 qui, à leur tour sont plus importantes que celles du mode 2.

- enfin, les vitesses de propagation modales ne sont pas trop affectées par l'effet de proximité sur les conducteurs ce qui était prévisible. Par contre ces vitesses de propagations sont croissantes avec la fréquence, ce qui est dû à la concentration progressive du courant à la

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

périphérie des conducteurs lorsque la fréquence croît. En haute fréquence, les vitesses de propagation modales tendent vers la vitesse de la lumière dans le vide. Nous notons enfin que pour une fréquence fixe, les vitesses de propagation du mode 1 sont inférieures à celle du mode 3 qui à leur tour sont inférieures à celles du mode 2.

II. 3. 3. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan de masse

Ici, nous prendrons comme exemple un système composé de trois conducteurs de rayons différents situés au-dessus d'un plan de masse en cuivre comme montré sur la figure (26) , les paramètres géométriques et physiques de ce système sont reportés sur cette figure.

$a_1 = 1 \text{ E-03 m}$	$\mu_{r1} = 1$
$a_2 = 0.7 \text{ E-03 m}$	$\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_{r3} = \mu_{re}$
$a_3 = 0.7 \text{ E-03 m}$	$\sigma_1 = 5.8 \text{ E07 S/ m}$
$b_{13} = b_{12} = 2.4 \text{ E-03 m}$	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_e$
$h_1 = h_2 = h_3 = 0.2 \text{ m}$	

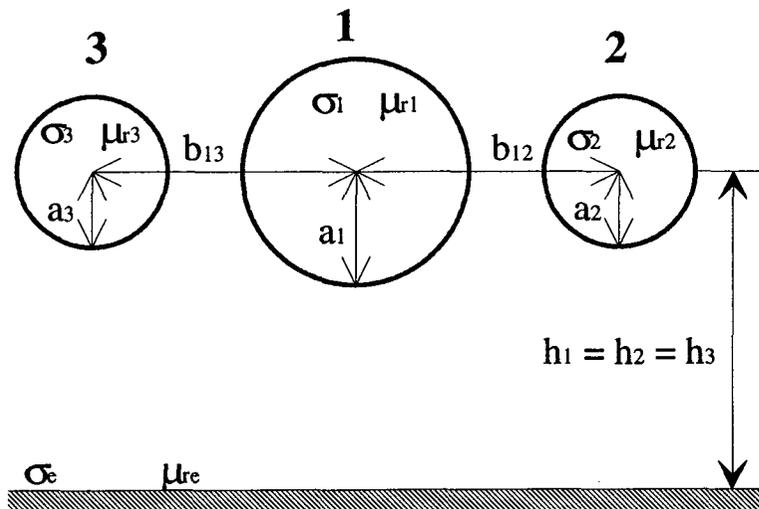


Figure (26) : *Configuration d'étude du cas de trois conducteurs de rayons différents disposés à la même hauteur au-dessus du plan conducteur s (les paramètres physiques et géométriques sont donnés)*

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Comme dans la précédente partie, nous déterminons ici les atténuations et les vitesses de propagation modales en fonction de la fréquence.

En outre, pour fixer les idées nous donnons ci dessous les parties réelles des matrices [M] et [N] obtenues pour la configuration d'étude à F = 1 MHz.

a / Lorsque l'on ne prend en compte que l'effet de peau dans les conducteurs, on obtient :

$$\begin{array}{c} \text{numéro du conducteur} \\ M = \begin{bmatrix} 6.86E-1 & 5.93E-1 & 0 \\ -5.14E-1 & 5.69E-1 & -7.07E-1 \\ -5.14E-1 & 5.69E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \text{Modes} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad (157)$$

$$\begin{array}{c} \text{numéro du conducteur} \\ N = \begin{bmatrix} 8.05E-1 & 7.27E-1 & 0 \\ -4.19E-1 & 4.85E-1 & -7.07E-1 \\ -4.19E-1 & 4.85E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \text{Modes} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad (158)$$

b / Lorsque l'on prend en compte les effets de peau et de proximités, ces matrices seront:

$$\begin{array}{c} \text{numéro du conducteur} \\ M = \begin{bmatrix} 7.09E-1 & 5.85E-1 & 0 \\ -4.98E-1 & 5.74E-1 & -7.07E-1 \\ -4.98E-1 & 5.74E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \text{Modes} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad (159)$$

$$\begin{array}{c} \text{numéro du conducteur} \\ N = \begin{bmatrix} 8.06E-1 & 5.60E-1 & 0 \\ -4.19E-1 & 5.86E-1 & -7.07E-1 \\ -4.19E-1 & 5.86E-1 & 7.07E-1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \text{Modes} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad (160)$$

Nous dressons ici aussi un tableau des valeurs de l'atténuation et de la vitesse de propagation selon les modes, et ce en fonction de la fréquence.

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Tableau (3) : *Atténuations et vitesses de propagation modales pour trois conducteurs de rayons différents (influence de l'effet de proximité)*

FREQUENCE (Hz)	50			1 E3			1 E4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Atténuation (Np/m) (Effet de peau seul)	9.24E-6	1.99E-6	7.09E-6	3.81E-5	4.17E-6	2.82E-5	7.24E-5	4.58E-6	4.59E-5
Atténuation (Np/m) (Effet de peau et de proximité)	9.24E-6	1.99E-6	7.08E-6	3.81E-5	4.13E-6	2.8E-5	7.15E-5	5.4E-6	4.77E-5
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau seul)	3.37E7	1.4E8	4.38E7	1.39E8	2.91E8	1.74E8	2.5E8	2.98E8	2.77E8
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau et de proximité)	3.37E7	1.39E8	4.37E7	1.39E8	2.88E8	1.73E8	2.48E8	2.94E8	2.68E8

FREQUENCE (Hz)	1 E5			1 E6			1 E7		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Atténuation (Np/m) (Effet de peau seul)	1.74E-4	9.76E-6	9.09E-5	5.3E-4	2.83E-5	2.66E-4	1.66E-3	8.72E-5	8.2E-4
Atténuation (Np/m) (Effet de peau et de proximité)	1.77E-4	1.56E-5	1.08E-4	5.59E-4	4.98E-5	3.36E-4	1.76E-3	1.57E-4	1.05E-3
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau seul)	2.78E8	2.99E8	2.89E8	2.92E8	2.99E8	2.96E8	2.98E8	2.99E8	2.99E8
Vitesse (m/s) de propagation (Effet de peau et de proximité)	2.77E8	2.98E8	2.86E8	2.92E8	2.99E8	2.95E8	2.98E8	2.99E8	2.98E8

Nous noterons que tous les commentaires faits sur le cas de conducteurs de rayons identiques restent valables ici. D'autre part, par rapport au cas précédent (conducteurs de rayons identiques), nous ferons la remarque suivante :

-pour une fréquence donnée, nous vérifions que les atténuations des modes 3 sont plus importantes dans le cas présent que dans le cas précédent (conducteurs de rayons identiques). Ceci s'explique par le fait qu'en mode bifilaire, les conducteurs concernés sont les conducteurs deux et trois et comme ces derniers sont de sections plus faibles ici que dans le cas précédent, il en résulte alors une augmentation de leurs résistances, d'où une augmentation de l'atténuation.

Nous notons aussi une augmentation des atténuations du mode 2 dans le cas présent par rapport au cas précédent (conducteurs de rayons identiques). Enfin, nous remarquons qu'entre 0 et 10 kHz les vitesses de propagations de tous les modes sont pour la plus part des fréquences légèrement plus importantes dans le cas de conducteurs de rayons identiques que dans le cas de conducteurs de rayons différents, et qu'au fur et à mesure que la fréquence augmente, les différences s'atténuent.

II. 3. 4. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus de sols de différentes conductivités (conducteurs de phases sans pertes)

Dans cette partie, nous reprenons le dispositif étudié à la partie II. 3. 3. de ce chapitre (trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan de masse (voir figure 26) et nous remplaçons le plan de masse par un sol auquel nous attribuerons successivement trois conductivités différentes ($\sigma_e = 0.1$ S/m, $\sigma_e = 0.01$ S/m, $\sigma_e = 0.001$ S/m). Les paramètres géométriques du système restent inchangés tandis que nous supposerons les conducteurs de phase sans perte pour mieux mettre en évidence l'influence du sol. Nous utilisons la formule de la profondeur de pénétration complexe [29] pour prendre en compte la conductivité du sol. Il convient de rappeler que cette formule reste valable tant que ($\epsilon_r \epsilon_0 \omega / \sigma \ll 1$).

Nous traçons dans cette perspective les courbes des figures (27) et (28) donnant respectivement les atténuations et vitesses de propagation modales du mode 2 en fonction de la fréquence et ce pour des sols de différentes conductivités.

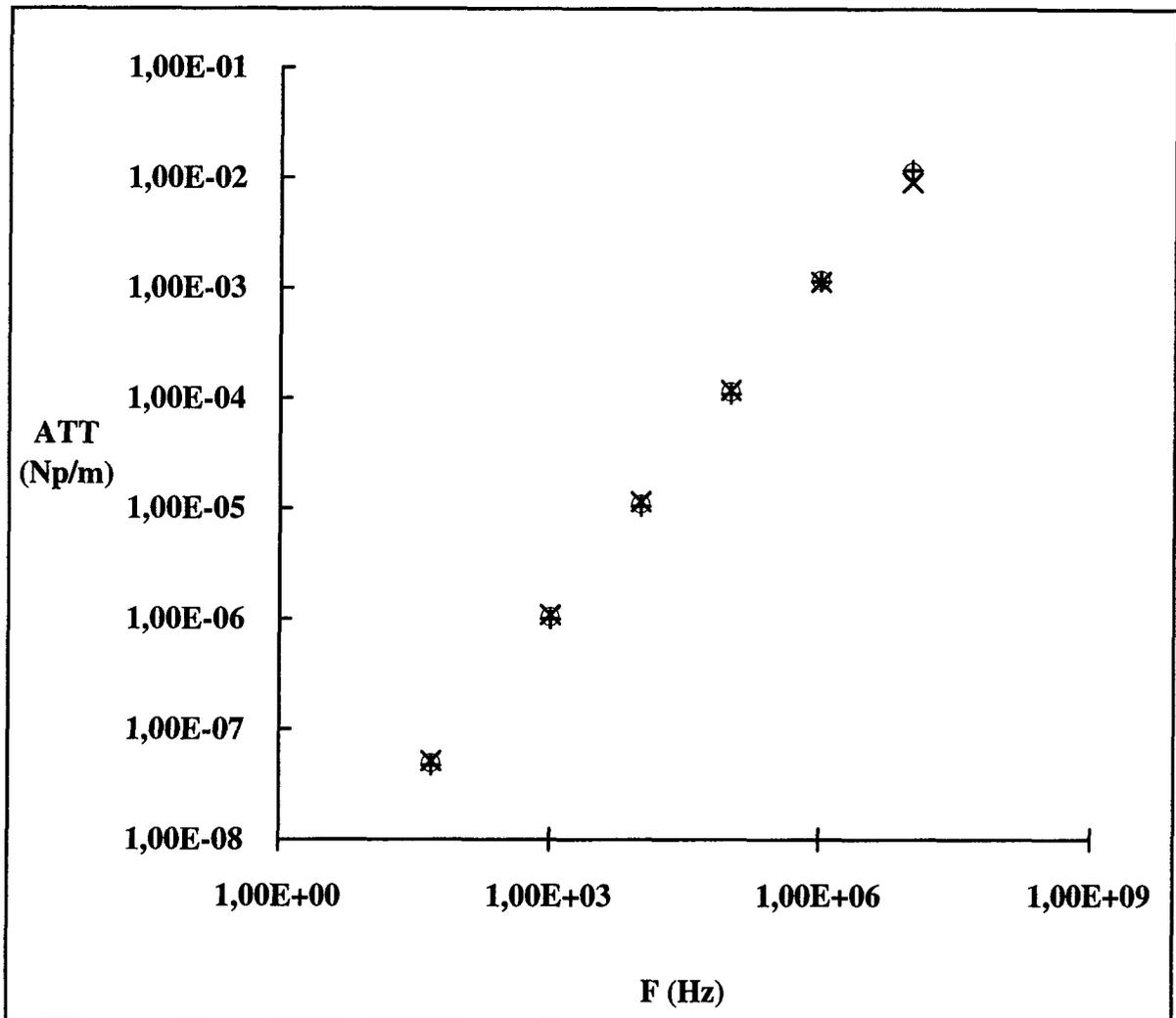


Figure (27) : *Atténuations du mode 2 pour des lignes sans pertes au-dessus de sol de trois conductivités différentes*

(en conformité avec la légende, le signe (x) représente le cas où $\sigma_e = 0.1$ S/m, tandis que le signe (o) celui où $\sigma_e = 0.01$ S/m, et enfin le signe (+) le cas où $\sigma_e = 0.001$ S/m)

Au vu des résultats consignés sur la figure (27), nous retenons que:

-les atténuations des modes 2 ne sont pas affectées par la variation de la conductivité du sol du fait que la profondeur de pénétration dans le sol reste largement supérieure à la hauteur des

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

conducteurs par rapport à ce dernier, sur la plage de fréquence [0 Hz, 10 MHz]. Dans ce cas, par exemple, l'impédance propre interne du sol devient une expression ne dépendant pas de la conductivité du sol mais plutôt de la fréquence et se présente sous la forme $(\omega\mu_0/8)$.

-les atténuations sont croissantes avec la fréquence.

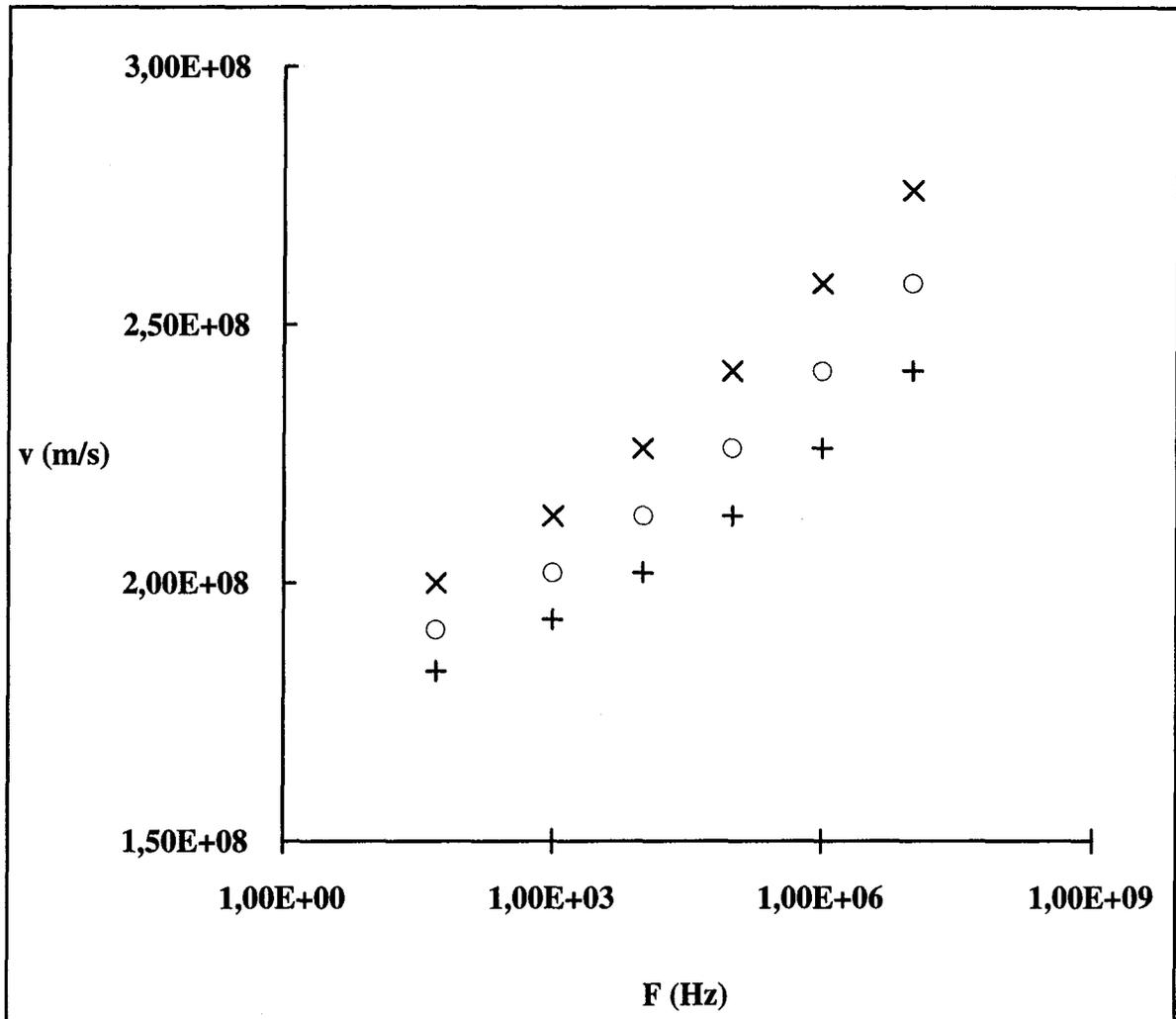


Figure (28) : *Vitesses de propagation du mode 2 pour des lignes sans pertes au-dessus de sol de trois conductivités différentes*

(en conformité avec la légende, le signe (x) représente le cas où $\sigma_e = 0.1$ S/m, tandis que le signe (o) celui où $\sigma_e = 0.01$ S/m, et enfin le signe (+) le cas où $\sigma_e = 0.001$ S/m).

La figure (28) illustre d'une part, le fait que les vitesses de propagation du mode 2 sont croissantes avec la fréquence et que d'autre part, ces vitesses décroissent à mesure que la conductivité du sol décroît.

II. 3. 5. Application à trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan conducteur (comparaison entre le cuivre et le sol)

Dans cette partie, nous reprenons le dispositif étudié à la partie II. 3. 3. de ce chapitre (trois conducteurs de rayons différents au-dessus d'un plan de masse (voir figure 26) et nous attribuons successivement deux conductivités différentes au plan de masse (le cuivre avec $\sigma_e = 5.8E7$ S/m, et le sol avec $\sigma_e = 0.01$ S/m).

Les paramètres physiques et géométriques du système restent inchangés tandis que nous tenons compte des effets de peau et de proximités lors de la détermination des paramètres linéiques des conducteurs de phase.

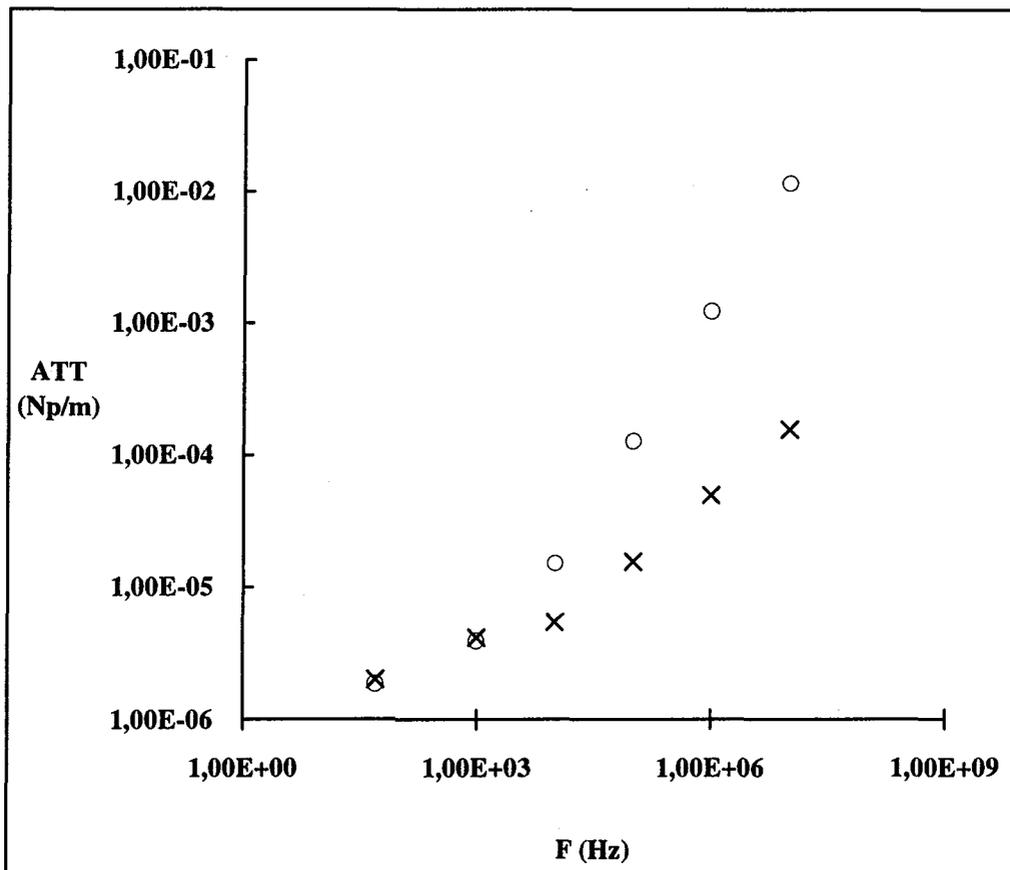


Figure (29) : Atténuations du mode 2 pour des lignes avec pertes (prise en compte de l'effet de peau et de proximité dans le calcul des impédances) au-dessus d'un plan conducteur

Le plan conducteur aura successivement deux propriétés différentes : dans un premier temps nous utilisons un sol de conductivité $\sigma_e = 0.01$ S/m repéré par la courbe dont la légende

est symbolisée par les signes (O) ,puis dans un deuxième temps nous remplaçons le sol par un plan de masse en cuivre de conductivité ($\sigma_e = 5.8e7$ S/m) symbolisé par la courbe dont la légende est caractérisée par le signe (x).

En basse fréquence, les atténuations du mode 2 sont légèrement plus importantes lorsque le plan de masse est en cuivre que dans le cas d'un plan de masse représenté par le sol. Cette tendance va s'inverser au fur et à mesure que la fréquence augmente du fait que l'impédance du sol devient importante par rapport aux autres impédances et que la profondeur de pénétration dans le plan de masse en cuivre devient très vite assez faible par rapport à la hauteur des conducteurs.

Dans le but d'illustrer les allures des atténuations des modes 1 et 3, nous donnons sur la figure (30) les courbes relatives à celles-ci en fonction de la fréquence.

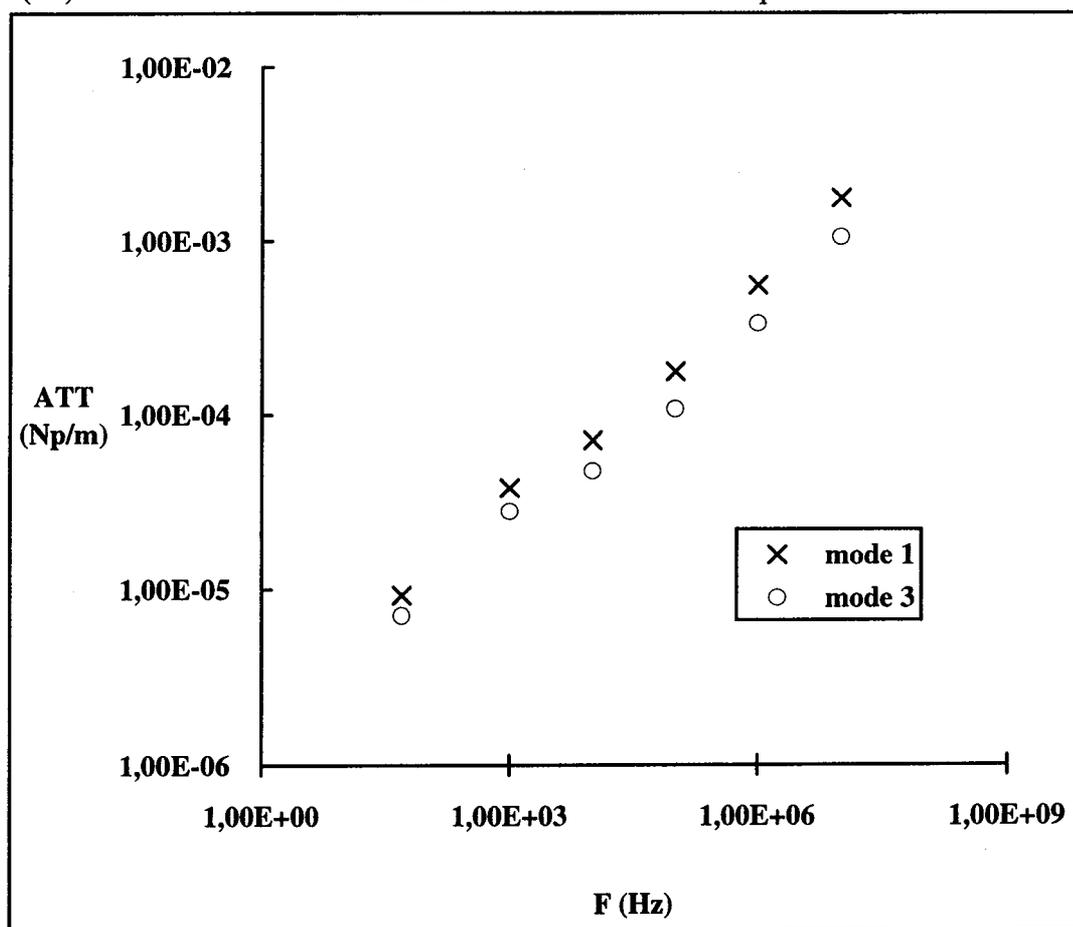


Figure (30) : Atténuation en fonction de la fréquence pour les modes de propagation 1 et 3, indifféremment de la conductivité du plan de masse (sol ou cuivre)

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

Nous ne notons aucune variation des atténuations des modes 1 et 3 en fonction de la conductivité du plan de masse et ce sur la plage de fréquence [0Hz, 10 MHz]. Ces courbes sont donc valables indifféremment de la conductivité du plan de masse (pour un plan de masse représenté par le sol nous avons pris ($\sigma_e = 0.01$ S/m) tandis que dans le cas du cuivre nous prenons ($\sigma_e = 5.8E7$ S/m)). Sur cette figure la courbe représentant l'atténuation du mode 1 sera symbolisé par le signe (x) tandis que celle correspondant à l'atténuation du mode 3 est symbolisé par le signe (O). Enfin, nous notons que l'atténuation du mode 1 est supérieure à celle du mode 3 pour une fréquence fixe.

Nous dressons maintenant un tableau de valeurs des vitesses de propagation modales pour trois conducteurs de rayons différents situés à 0.2m au-dessus du plan conducteur (sol ou cuivre).

Tableau (4) : *Vitesses de propagation modales pour trois conducteurs de rayons différents (comparaison entre les cas où le plan conducteur est en cuivre ($\sigma_e = 5.8E7$ S/m) et le cas où ce dernier est représenté par le sol ($\sigma_e = 1E-2$ S/m))*

FREQUENCE (Hz)	50			1 E3			1 E4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Modes									
Vitesse (m/s) de propagation ($\sigma_e = 5.8E7$ S/m)	3.37E7	1.39E8	4.37E7	1.39E8	2.88E8	1.73E8	2.48E8	2.94E8	2.68E8
Vitesse (m/s) de propagation ($\sigma_e = 1E-2$ S/m)	3.37E7	1.27E8	4.38E7	1.39E8	2E8	1.73E8	2.48E8	2.12E8	2.68E8

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

FREQUENCE (Hz)	1 E5			1 E6			1 E7		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Vitesse (m/s) de propagation ($\sigma_e = 5.8E7$ S/m)	2.77E8	2.98E8	2.86E8	2.92E8	2.99E8	2.95E8	2.98E8	2.99E8	2.98E8
Vitesse (m/s) de propagation ($\sigma_e = 1E-2$ S/m)	2.77E8	2.25E8	2.86E8	2.92E8	2.4E8	2.95E8	2.98E8	2.58E8	2.98E8

Nous remarquons à travers ce tableau que les vitesses de propagation du mode 2 sont plus importantes lorsque le plan de masse est en cuivre que dans le cas où ce dernier est représenté par le sol du fait que la profondeur de pénétration est plus importante pour un sol que pour le cuivre.

Nous ne notons aucune variation des vitesses de propagation des modes 1 et 3 en fonction de la conductivité du plan de masse (sol ou cuivre) et ce sur la plage de fréquence [0Hz, 10MHz].

Pour une fréquence fixe, la vitesse de propagation du mode 3 est supérieure à celle du mode 1 et en haute fréquence ces vitesses deviennent sensiblement égales et tendent vers la vitesse de la lumière dans le vide.

II. 4. PROGRAMMATION DES FONCTIONS DE BESSEL CYLINDRIQUES

II. 4. 1. Généralités

L'étude fréquentielle des câbles blindés, des structures multifilaires, des antennes ainsi que des phénomènes de foudre induite nécessite très souvent l'utilisation des fonctions de Bessel cylindriques d'ordre entier et d'arguments complexes. Les formes asymptotiques classiques contiennent leurs limites lorsqu'elles sont utilisées pour la modélisation des structures déjà

précitées. Ainsi, la non maîtrise de leurs programmations a eu pour conséquence de freiner pendant longtemps les investigations nécessaires à la modélisation des câbles en moyenne fréquence. La programmation des fonctions de Bessel modifiées ou non, de 1^o ou 2^o espèce d'ordre 0 ou 1 ne pose aucun problème [1]. Elles interviennent souvent dans des problèmes liés à l'effet de peau dans les conducteurs. Pour peu que ceux-ci soient sujets à des phénomènes de dissymétries de courants (effet de proximité, pertes supplémentaires dans ces structures), aux fonctions précédentes s'ajoutent celles d'ordre n (n>1). Dans ce cas, selon que l'on travaille en haute ou basse fréquence, des développements asymptotiques sont fort justement utilisés tandis qu'une extension souvent abusive peut être faite pour les fréquences intermédiaires. Trop peu de travaux ont été réalisés sur le calcul de ces fonctions [31] [66] [67].

Le but de ce travail est la présentation d'outils permettant la réalisation d'un code simple de calcul des fonctions de Bessel : $J_n(z)$, $I_n(z)$, $K_n(z)$ pour des arguments complexes et ce, en vue de leurs applications dans le domaine des courants induits.

Les arguments seront des types suivants :

$z = x j \exp(j\pi/4)$ pour $J_n(z)$ et, $z = x \exp(j\pi/4)$ pour $I_n(z)$, $K_n(z)$ (x étant un réel).

Aucune restriction autre que les capacités du calculateur ne sera imposée pour z.

Ces fonctions sous leurs formes explicites sont données ([1],[10]) par les relations suivantes :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{2^{2k+n} k! \Gamma(n+k+1)} \text{ et, } I_n(z) = e^{-\left(\frac{n\pi j}{2}\right)} J_n(jz) \text{ pour } -\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
 K_n(z) = & \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{-z^2}{4}\right)^k + (-1)^{n+1} \text{Ln}\left(\frac{z}{2}\right) I_n(z) \\
 & + (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)] \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)} \quad (162)
 \end{aligned}$$

avec $\Psi(1) = -\gamma$ et pour $(n > 1)$ $\Psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ γ étant la constante d'Euler.

$$F_{n-1}(z) = \left(\frac{2n}{z}\right) F_n(z) - \varepsilon F_{n+1}(z) \text{ avec } \varepsilon = 1 \text{ pour } F_n = J_n \text{ et } \varepsilon = -1 \text{ pour } F_n = I_n \quad (163)$$

Enfin, il existe des formules simples [1] permettant d'obtenir les fonctions de Hankel ($H_n^{(1)}(z)$ et $H_n^{(2)}(z)$) à partir de $K_n(z)$, ainsi que celles de Neumann ($Y_n(z)$) à partir de $I_n(z)$ et $K_n(z)$.

Pour mieux cerner le problème nous donnerons tout d'abord des indications concernant les fonctions $J_n(z)$ et $I_n(z)$ pour ensuite donner des informations sur le calcul des fonctions $K_n(z)$.

II. 4. 2. Code de calcul des fonctions $J_n(z)$ et $I_n(z)$ pour des arguments faibles et moyens

En effet, il est impossible d'utiliser les formules sous forme de séries pour déterminer $J_n(z)$ ou $I_n(z)$ pour des arguments élevés car, lors des itérations successives, des erreurs liées à de petites différences entre grands nombres vont s'accumuler. Elles ne seront donc utilisées que pour des arguments faibles (le module de z ne doit pas être supérieur à 5) et des ordres peu élevés. Les deux fonctions sont décroissantes en module en fonction de n (voir figure 31). Afin d'éviter des accumulations d'erreurs lors des itérations successives, nous nous imposons une récurrence décroissante puisque ces dernières s'adaptent mieux lorsqu'elles sont utilisées suivant le sens de variation de la fonction.

Il est donc nécessaire de déterminer un ordre (L) de début de la récurrence. L'indice (L), dépendant de n et z , doit être choisi d'une part, de façon à minimiser l'erreur sur la fonction à

calculer, et d'autre part d'éviter les récurrences supplémentaires qui augmentent le temps de calcul. Des investigations mathématiques rigoureuses [66] [67] ont été faites pour la détermination de L. Mais souvent l'expression obtenue pour L est une fonction fort peu sympathique à utiliser pour la programmation parce qu'étant une combinaison des fonctions de Bessel. Pour notre part, nous avons fait le choix d'une démarche plus simple consistant à tester plusieurs types de fonctions, puis choisir celles qui répondaient le mieux aux critères énoncés précédemment. La détermination de L est donc faite sous la forme suivante.

Si le module de z est plus petit que 30, nous prenons :

$$L = 8 \text{ENT} \left(\sqrt{\frac{(|z| + 7)^2}{8} + \frac{N^2}{16}} \right) \quad (164)$$

Sinon

$$L = 4 \text{ENT} \left(\sqrt{\frac{(|z| + 7)^2}{8} + \frac{N^2}{16}} \right) \quad (165)$$

Il convient de signaler que ENT désigne l'opérateur partie entière.

La récurrence débutera avec $J_L(z)=0$ et $J_{L-1}(z)=1$.

D'autre part, un facteur de normalisation sera choisi dans le plan complexe pour ramener $J_n(z)$ à sa vraie valeur. Il devra donc être lié à $J_k(z)$ pour $k = [0...L]$.

Comme facteur de normalisation peut être pris parmi les relations suivantes

$$1 = J_0(z) + 2 J_2(z) + 2 J_4(z) + 2 J_6(z) + \dots \quad (166)$$

$$\text{Cos}(z) = J_0(z) - 2 J_2(z) + 2 J_4(z) - 2 J_6(z) + \dots \quad (167)$$

$$\text{Sin}(z) = 2 J_1(z) - 2 J_3(z) + 2 J_5(z) - \dots \quad (168)$$

Enfin, pour passer de $J_n(z)$ à $I_n(z)$, on utilise une des équations (161).

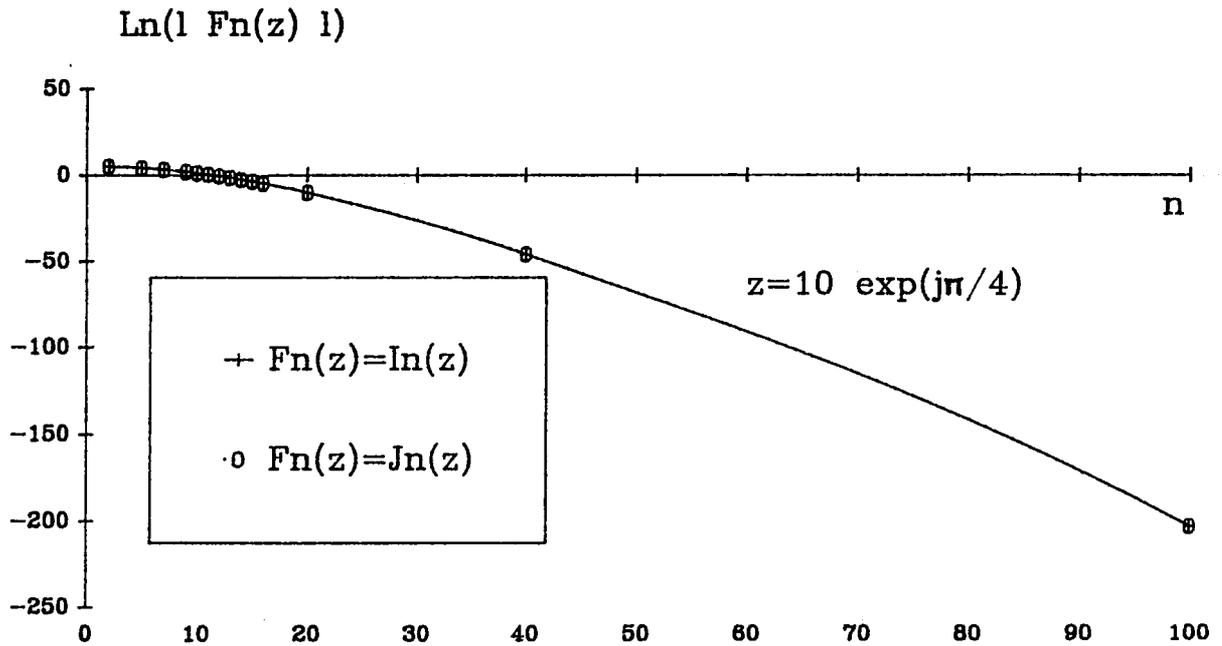


Figure (31) : Variation en fonction de n du logarithme du module des fonctions de Bessel $J_n(z)$ et $I_n(z)$.

II. 4. 3. Code de calcul de la fonctions $K_n(z)$ pour des arguments faibles et moyens

Nous utiliserons le fait que les fonctions de Kelvin $ker_n(x)$ et $kei_n(x)$ sont croissantes en fonction de n pour justifier une récurrence croissante sur n .

Pour la détermination de $K_n(z)$ nous calculerons d'abord les développements sous forme de polynômes des fonctions de Kelvin ($ker_0(x)$, $kei_0(x)$, $ker_1(x)$, $kei_1(x)$). Nous conduisons une récurrence croissante pour déterminer $ker_n(x)$ et $kei_n(x)$ en nous aidant des autres fonctions de Kelvin ($ber_0(x)$, $bei_0(x)$, $ber_1(x)$ et $bei_1(x)$) obtenues préalablement grâce au calcul de $J_n(z)$ ou $I_n(z)$.

Les relations de passages entre les fonctions de Bessel et les fonctions de Kelvin ainsi que les relations de récurrence utilisées ici sont les relations 9.9.1, 9.9.2 et 9.9.14 consignées dans [1].

II. 4. 4. Cas des larges arguments et validations

Pour les larges arguments on peut utiliser des développements asymptotiques [1].

Nous avons validé nos résultats :

-d'une part grâce aux tableaux de valeurs se trouvant dans [1] ainsi que par le calcul du wronskien

-d'autre part nous avons comparé nos résultats avec ceux donnés par le logiciel (Matlab).

Les résultats obtenus font état d'erreurs absolues de l'ordre de 10^{-13} pour les fonctions $J_n(z)$ et $I_n(z)$ et 10^{-7} pour la fonction $K_n(z)$.

II. 5. CONCLUSION

Les modèles développés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour bon nombre de lignes ou câbles très proches les uns des autres. Ils trouvent leurs applications aussi bien en haute tension qu'en basse tension. Des comparaisons sont faites tout au long de ce chapitre. S'agissant des impédances les exemples fournis montrent la nécessité de tenir compte de l'effet de proximité, et surtout pour les fréquences relevant de la CEM. Les résultats obtenus par notre méthode de calcul comparés à d'autres simulés à partir de la technique des éléments finis nous montrent une bonne adéquation pour les résistances ainsi que les inductances.

Les atténuations ainsi que les vitesses de propagation modales sont calculées puis comparées aux modèles analytiques classiques (où l'on ne prend en compte que l'effet de peau dans les conducteurs). Il ressort de cette comparaison que les atténuations sont affectées par l'effet de proximité tandis que les vitesses de propagation le sont moins. En outre, nous avons montré que la conductivité du sol n'avait pas d'influence sur les atténuations du mode 2 lorsque la hauteur des conducteurs par rapport au sol était très inférieure à la profondeur de pénétration dans le sol. Par contre, dans le cas d'une comparaison entre une configuration de conducteurs au-dessus du sol et la même configuration de conducteurs au-dessus d'un plan de

Modèle de détermination des paramètres des lignes multifilaires

masse en cuivre, nous remarquons que les atténuations du mode 2 étaient affectées par cette différence des conductivités.

Les formules analytiques obtenues pour les calculs d'impédances et d'admittances sont facilement programmables et peuvent être insérées dans des codes de calcul des lignes et câbles de type EMTP. Pour le calcul de ces impédances, il nous fallait réaliser un code de calcul des fonctions de Bessel. Pour cela, nous avons élaboré puis restitué dans ce document des informations nécessaires à la construction d'un code de calcul de ces fonctions.

Les résultats obtenus par le présent modèle sont en bonne concordance avec les prévisions et ce sur une large plage de fréquence couvrant [0 Hz, 10 MHz].

Nous noterons en outre qu'il n'y a aucune limitation quant au nombre de conducteurs et que ces derniers peuvent avoir des rayons différents. Enfin, nous pensons que ces modèles élaborés peuvent compléter les modèles analytiques existants.

CHAPITRE III

MODELE ANALYTIQUE POUR LA DETERMINATION DES IMPEDANCES ET ADMITTANCES DES CABLES MULTIFILAIRES BLINDES

NOMENCLATURE

A_g	Potentiel vecteur magnétique dans le matériau de la gaine.
A_{ext}	Potentiel vecteur magnétique dans le milieu extérieur à la gaine.
A_{int}	Potentiel vecteur magnétique dans la cavité interne à la gaine.
A_l	Potentiel vecteur magnétique dû à un filament de courant au point $P(\rho, \theta)$.
A_i	Potentiel vecteur magnétique dû aux courants induits de la gaine au point $P(\rho, \theta)$.
E_z	Champ électrique axial.
J_g	Composante axiale de la densité de courants dans la gaine.
$B_{\rho_{int}}$	Composante radiale de l'induction magnétique dans la cavité interne de la gaine.
$B_{\rho_{ext}}$	Composante radiale de l'induction magnétique dans le milieu extérieur à la gaine.
B_{r_g}	Composante radiale de l'induction magnétique dans le matériau de la gaine.
$B_{\theta_{int}}$	Composante tangentielle de l'induction magnétique dans la cavité interne de la gaine.
$B_{\theta_{ext}}$	Composante tangentielle de l'induction magnétique dans le milieu extérieur à la gaine.
B_{ϕ_g}	Composante tangentielle de l'induction magnétique dans le matériau de la gaine.
Φ	Flux.
I_i	Intensité du courant traversant le conducteur i .
I_n	Fonction de Bessel modifiée de premier espèce d'ordre n .
I'_n	Dérivé de la fonction de Bessel modifiée de premier espèce d'ordre n .
K_n	Fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre n .
K'_n	Dérivé de la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre n .

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

ρ	Rayon vecteur repérant la cavité interne ou le milieu extérieur à la gaine.
θ	Position angulaire associé à ρ .
r	Rayon vecteur repérant la gaine.
ϕ	Position angulaire associé à r .
a_i	Rayon du conducteur interne i .
b_i	Distance séparant le centre de la gaine de celui du conducteur interne i .
d_i	Distance séparant le conducteur i du point $P(\rho, \theta)$.
c_1	Rayon interne de la gaine.
c_2	Rayon externe de la gaine.
$P_1(r, \phi)$	Point situé au centre de l'élément infinitésimal de surface pris sur la section de la gaine.
$P(\rho, \theta)$	Point situé hors du matériau de la gaine en lequel on calcul les potentiels vecteurs magnétiques résultants(A_{ext} et A_{int}).
ω	Pulsation en radians/sec.
σ_g	Conductivité de la gaine.
σ_i	Conductivité du conducteur interne i .
σ_e	Conductivité du plan conducteur s (pouvant être le sol ou le plan de masse).
σ_s	Conductivité du plan conducteur s (pouvant être le sol ou le plan de masse).
μ_0	Perméabilité du vide.
μ_{rg}	Perméabilité relative de la gaine.
μ_{ri}	Perméabilité relative du conducteur interne i .
ϵ_0	Permittivité du vide.
ϵ_{ri}	Permittivité relative du diélectrique interne.
ϵ_{re}	Permittivité relative du diélectrique externe entourant la gaine.

INTRODUCTION

Les problèmes posés par les agressions électromagnétiques de type conduits ou rayonnés sur des câbles blindés ont motivé les ingénieurs et chercheurs à élaborer des modèles de plus en plus fiables et représentatifs de ces structures.

Les systèmes électriques sont très souvent reliés par des câbles multifilaires blindés. Dès lors, la proximité des éléments conducteurs peut engendrer une augmentation des interactions électromagnétiques entre les conducteurs internes et entre ceux-ci et la gaine. Celles-ci sont d'autant plus prononcées qu'elles donnent naissance à des courants induits dépendants de la fréquence, pouvant déformer les signaux transmis et voire même détruire les systèmes qui sont connectés aux extrémités des conducteurs.

L'étude fréquentielle de ces structures requiert très souvent la connaissance, avec un optimum de précision, de leurs paramètres primaires et secondaires. Les modèles analytiques les plus élaborés dans ce domaine contiennent certaines approximations que nous nous proposons de réduire.

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 1, certains auteurs ne tiennent compte que de l'effet de peau dans les conducteurs, ce qui ne peut être d'usage que lorsque les conducteurs sont très éloignés les uns des autres. D'autres font l'hypothèse du rayon externe de la gaine infini (profondeur de pénétration $<$ épaisseur de la gaine [5]) hypothèse que nous ne pouvons plus faire lorsque l'on utilise des câbles de très petites dimensions latérales. D'autres enfin proposent des modèles empiriques utilisables uniquement pour les fréquences industrielles (50Hz) [8] ou pour les hautes fréquences [76] alors que des problèmes subsistent pour les fréquences intermédiaires. Cette partie du travail s'inscrit donc dans une perspective de proposition d'un modèle analytique de simulation des câbles multifilaires blindés (à blindage homogène). Il sera important de remarquer que Les formules obtenus au chapitre II. 2. sont des cas particuliers de celles que nous établirons ici.

Le modèle analytique que nous proposons sera de type circuit, et s'attachera à prendre en compte sur la plage de fréquences [0Hz, 10 MHz] l'épaisseur finie de la gaine (incluant aussi

bien les blindages minces que les gaines à rayon externe infini [5]) et les effets de proximité les plus prononcés entre les éléments conducteurs.

Ainsi, dans une première étape, nous étudierons les paramètres linéiques du câble seul dans l'air dans le cas où les retours de courants se font par la gaine, sachant que le cas où ces retours ne se font pas par la gaine s'en déduit aisément. Enfin, la formulation concernant les câbles multifilaires blindés au-dessus du sol (ou d'un plan de masse) ou enterrés sera traitée en donnant les matrices impédances et admittances qui lui sont relatives.

III. 1. CABLE MULTIFILAIRE BLINDE ISOLE DANS L'AIR

III. 1. 1. Expression des potentiels vecteurs magnétiques

III. 1. 1. 1. Hypothèses et formulation

Comme dans le chapitre précédent, pour obtenir les paramètres linéiques du câble, nous utilisons une formulation en potentiel vecteur magnétique qui s'adapte mieux à ce genre de problèmes.

Le câble est multifilaire blindé avec P conducteurs internes pouvant être de rayons différents et disposés de façon symétrique ou dissymétrique à l'intérieur d'une gaine homogène.

Les matériaux seront supposés linéaires homogènes et isotropes. Les conducteurs seront supposés longs pour éviter les effets d'extrémités. Les courants et champs sont sinusoïdaux de pulsations ω .

Nous indexerons d'abord les conducteurs i et j [48], puis pour mieux fixer les idées nous les nommerons 1 et 2 [46].

Enfin nous tiendrons compte des courants induits par les conducteurs internes sur eux-mêmes ainsi que sur la gaine et nous négligerons les courants induits par la gaine sur les conducteurs internes (réaction de la gaine).

Nous nous restreindrons ici à l'explication de la prise en compte de l'effet de proximité lors de la détermination des impédances de la gaine du câble sachant que l'intégration de ce phénomène dans les conducteurs internes se fait de façon quasi-similaire et a été développée de façon détaillée dans la partie **II. 2. 4.**

Ainsi, cette prise en compte sur la gaine du câble a été faite en assimilant chaque conducteur interne à un filament de courant.

Pour chaque filament de courant i , il a été calculé le potentiel vecteur magnétique qu'il crée en un point de l'espace à l'intérieur de la gaine noté A_i .

D'autre part, les filaments de courants donnent naissance à des courants induits J_g sur le matériau de la gaine lesquels, associés au courant réel parcourant la gaine, créent un potentiel vecteur magnétique dans le matériau de la gaine noté A_g , et un potentiel vecteur magnétique dans la cavité interne de la gaine noté A_i .

Les matériaux utilisés étant supposés linéaires, nous avons déterminé la résultante des potentiels en un point quelconque du plan de la section du câble divisée en trois régions : la cavité interne de la gaine, le matériau de la gaine et le milieu extérieur à la gaine.

Enfin, l'application de la loi de Faraday nous permet d'obtenir les impédances et admittances recherchées.

III. 1. 1. 2. Potentiel vecteur magnétique dans le matériau de la gaine

Dans le matériau de la gaine, le potentiel vecteur magnétique s'exprime sous la forme suivante :

$$\Delta A_g = \mu_g \sigma_g \frac{\partial A_g}{\partial t} \text{ avec } (\mu_g = \mu_0 \mu_{rg}) \quad (169)$$

$$J_g(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \cdot \text{Cos } n(\phi) \quad (172)$$

et pour $A_g(r,\phi)$ nous obtenons :

$$A_g(r,\phi) = \frac{-1}{j\omega\sigma_g} \sum_{n=0}^{\infty} [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \cdot \text{Cos } n(\phi) \quad (173)$$

Il est à noter que, dans ces deux expressions, T_n et B_n sont des coefficients à fixer au niveau des interfaces tandis que I_n et K_n désignent des fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce d'ordre n . Enfin, si la gaine n'est parcourue par aucun courant réel, les paramètres T_0 et B_0 deviennent nuls.

III. 1. 1. 3. Potentiel vecteur magnétique dans la cavité interne de la gaine

Il s'agit ici de déterminer au point $P(\rho,\theta)$ le potentiel vecteur magnétique résultant dans la cavité interne de la gaine (voir figure 32). Ainsi, nous subdiviserons le problème en deux en calculant tout d'abord le potentiel vecteur magnétique dû au conducteur interne i parcouru par un courant I_i au point $P(\rho,\theta)$ puis dans une seconde étape, nous calculerons celui dû aux courants parcourant la gaine du câble (y compris les courants induits par I_i sur la gaine) au même point $P(\rho,\theta)$. Ceci nous permet alors d'obtenir le potentiel vecteur magnétique total en un point quelconque $P(\rho,\theta)$ de la cavité interne à la gaine .

Le potentiel vecteur magnétique $A_1(\rho,\theta)$ dû à un conducteur interne i (supposé être un filament de courant) en un point $P(\rho,\theta)$ est donné par :

$$A_1(\rho,\theta) = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \text{Ln}(\rho^2 + b_1^2 - 2b_1\rho \text{Cos}(\theta)) \quad (174)$$

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

Un élément infinitésimal de surface ($rdrd\phi$) situé en $P_1 (r,\phi)$ sur la section droite de la gaine parcourue par une densité de courant $\mathbf{J}_g(r,\phi)$ donne naissance au point $P(\rho,\theta)$ à un potentiel vecteur magnétique $d^2\mathbf{A}_i(\rho,\theta)$:

$$d^2\mathbf{A}_i(\rho,\theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{J}_g(r,\phi) \text{Ln}(R) rdrd\phi \quad (175)$$

Dans le but de faciliter le calcul de cette expression, une expansion géométrique de $\text{Ln}(R)$ sera utilisée avec la condition $\rho < r$. Il faut noter que R désigne ici une distance et non une résistance.

Soit :

$$\text{Ln}(R) = \text{Ln}(r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m [\text{Cos}(m\phi)\text{Cos}(m\theta) + \text{Sin}(m\phi)\text{Sin}(m\theta)] \quad (176)$$

Une intégration sur la section droite de la gaine nous permet d'obtenir $\mathbf{A}_i(\rho,\theta)$.

L'expression de $\mathbf{A}_i(\rho,\theta)$ devient alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(\rho,\theta) = \int_{c_1}^{c_2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \text{Cos } n(\phi) \cdot \right. \\ \left. \cdot [\text{Ln}(r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \{ \text{Cos}(m\phi)\text{Cos}(m\theta) + \text{Sin}(m\phi)\text{Sin}(m\theta) \}] r \right] drd\phi \quad (177) \end{aligned}$$

Le développement de la formule de $\mathbf{A}_i(\rho,\theta)$ est faite comme dans les cas précédents.

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

Nous noterons que dans cette formule interviennent des paramètres L_0 , V_0 , L_n et V_n qui sont différents de T_n et B_n car ils sont relatifs au milieu (cavité interne à la gaine) dans lequel on calcule le potentiel vecteur magnétique.

Nous obtenons alors :

$$A_i(\rho, \theta) = L_0 X_0 + V_0 X_1 - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{1n} \text{Cos}(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{2n} \text{Cos}(n\theta) \quad (178)$$

avec :

$$X_0 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[-c_2 \text{Ln}(c_2) K_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - \frac{K_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} + c_1 \text{Ln}(c_1) K_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + \frac{K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \right] \quad (179)$$

$$X_1 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[c_2 \text{Ln}(c_2) I_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - \frac{I_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} - c_1 \text{Ln}(c_1) I_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + \frac{I_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \right] \quad (180)$$

$$S_{1n} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[-(c_2)^{-n+1} K_{n-1}(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + (c_1)^{-n+1} K_{n-1}(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (181)$$

$$S_{2n} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[(c_2)^{-n+1} I_{n-1}(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - (c_1)^{-n+1} I_{n-1}(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (182)$$

Ainsi, le potentiel vecteur magnétique résultant en un point quelconque $P(\rho, \theta)$ dans la cavité interne de la gaine est donné par la somme des potentiels dus à la gaine et au conducteur i au même point:

$$A_{int}(\rho, \theta) = A_i(\rho, \theta) + A_1(\rho, \theta) \quad (183)$$

Soit alors :

$$A_{int}(\rho, \theta) = L_0 X_0 + V_0 X_1 - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{1n} \cos(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{2n} \cos(n\theta) + \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \ln[\rho^2 + b_i^2 - 2b_i \rho \cos(\theta)] \quad (184)$$

III. 1. 1. 4. Potentiel vecteur magnétique dans la région extérieure à la gaine

Ici, nous supposons que les conducteurs internes n'ont aucune influence directe sur la partie externe à la gaine du fait de l'effet d'écran joué par celle-ci. Toutefois, les courants induits par les conducteurs internes sur la gaine auront une incidence sur l'expression du potentiel vecteur magnétique à l'extérieur de la gaine du câble que nous allons calculer.

En un point $P_2(\rho, \theta)$ situé à l'extérieur de la gaine, le potentiel vecteur magnétique noté $A_{ext}(\rho, \theta)$ est obtenu grâce à une intégration de $d^2 A_{ext}(\rho, \theta)$ sur toute la section droite de la gaine.

$$d^2 A_{ext}(\rho, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \mathbf{J}_g(r, \phi) \ln(R_i) r dr d\phi \quad (185)$$

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

Comme dans le cas précédent, nous aurons besoin ici aussi d'une expansion géométrique de $\text{Ln}(R_1)$ avec la condition $\rho > r$. Il faut aussi noter qu'ici comme précédemment R_1 désigne une distance.

Il s'en suit :

$$\text{Ln}(R_1) = \text{Ln}(r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m \cdot [\text{Cos}(m\phi)\text{Cos}(m\theta) + \text{Sin}(m\phi)\text{Sin}(m\theta)] \quad (186)$$

Comme précédemment une intégration sur la section droite de la gaine nous permet d'exprimer la formule du potentiel vecteur magnétique dans le milieu extérieur à la gaine.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{ext}}(\rho, \theta) = \int_{c_1}^{c_2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right) [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \text{Cos } n(\phi) \right. \\ \left. \cdot [\text{Ln}(r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m \cdot \{ \text{Cos}(m\phi)\text{Cos}(m\theta) + \text{Sin}(m\phi)\text{Sin}(m\theta) \}] r \right] dr d\phi \quad (187) \end{aligned}$$

Le développement de la formule de $\mathbf{A}_{\text{ext}}(\rho, \theta)$ est fait de la même manière qu'en annexe 2 lors du calcul de $\mathbf{A}_c(\rho, \theta)$. Nous noterons que dans cette formule aussi interviennent des paramètres L_0 , V_0 , L_n et V_n qui sont différents de T_n et B_n car ils sont relatifs au milieu extérieur à la gaine dans lequel on calcule le potentiel vecteur magnétique.

Nous obtenons alors :

$$A_{\text{ext}}(\rho, \theta) = L_0 X_0 + V_0 X_1 - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left(\frac{1}{n\rho^n} \right) Y_{1n} \text{Cos}(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\frac{1}{n\rho^n} \right) Y_{2n} \text{Cos}(n\theta) \quad (188)$$

avec :

pour X_0 et X_1 les mêmes formules que précédemment

$$X_0 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[-c_2 \text{Ln}(c_2) K_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - \frac{K_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} + c_1 \text{Ln}(c_1) K_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + \frac{K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \right]$$

$$X_1 = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[c_2 \text{Ln}(c_2) I_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - \frac{I_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} - c_1 \text{Ln}(c_1) I_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + \frac{I_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \right]$$

et

$$Y_{1n} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[-(c_2)^{n+1} K_{n+1}(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + (c_1)^{n+1} K_{n+1}(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (189)$$

$$Y_{2n} = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \left[(c_2)^{n+1} I_{n+1}(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - (c_1)^{n+1} I_{n+1}(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (190)$$

III. 1. 1. 5. Synthèse des expressions des potentiels vecteurs magnétiques selon les régions

En résumé nous avons trois régions dans lesquelles nous avons exprimé le potentiel vecteur magnétique.

Dans le matériau de la gaine :

$$A_g(r, \phi) = \frac{-1}{j\omega\sigma_g} \sum_{n=0}^{\infty} [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \cdot \text{Cos } n(\phi) \quad (191)$$

Dans la cavité interne à la gaine:

$$A_{int}(\rho, \theta) = L_0 X_0 + V_0 X_1 - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{1n} \text{Cos}(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\frac{\rho^n}{n}\right) S_{2n} \text{Cos}(n\theta) \\ + \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \text{Ln}[\rho^2 + b_i^2 - 2b_i\rho \text{Cos}(\theta)] \quad (192)$$

Dans la région extérieure à la gaine:

$$A_{ext}(\rho, \theta) = L_0 X_0 + V_0 X_1 - \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left(\frac{1}{n\rho^n}\right) Y_{1n} \text{Cos}(n\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\frac{1}{n\rho^n}\right) Y_{2n} \text{Cos}(n\theta) \quad (193)$$

Pour déterminer les paramètres T_0 , B_0 , L_0 , V_0 , T_n , B_n , L_n et V_n nous devons imposer les conditions au niveau des interfaces.

III. 1. 2. Conditions de passage au niveau des interfaces

Partant des potentiels vecteurs obtenus dans ces trois régions, nous appliquons les conditions au niveau des interfaces.

Ces conditions se traduisent par la continuité de la composante radiale de l'induction magnétique ainsi que la composante tangentielle du champ au niveau des surfaces de séparation gaine-(milieu intérieur ou extérieur à la gaine).

En faisant nôtre les hypothèses de départ, nous avons :

$$\mathbf{B}_\rho(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} \quad (194)$$

$$\mathbf{B}_r(r,\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \phi} \quad (195)$$

$$\mathbf{B}_\theta(\rho,\theta) = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} \quad (196)$$

$$\mathbf{B}_\phi(r,\phi) = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \quad (197)$$

A la surface interne de la gaine nous avons donc:

$$\mathbf{B}_{\rho_{\text{int}}} [\rho = c_1 ; \theta = \phi] = \mathbf{B}_{r_g} [r = c_1 ; \phi = \theta] \quad (198)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{\theta_{\text{int}}} [\rho = c_1 ; \theta = \phi] = \frac{1}{\mu_g} \mathbf{B}_{\phi_g} [r = c_1 ; \phi = \theta] \quad (199)$$

Tandis qu'à la surface externe de la gaine, nous avons:

$$\mathbf{B}_{r_g} [r = c_2 ; \phi = \theta] = \mathbf{B}_{\rho_{\text{ext}}} [\rho = c_2 ; \theta = \phi] \quad (200)$$

$$\frac{1}{\mu_g} \mathbf{B}_{\phi_g} [r = c_2 ; \phi = \theta] = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_{\theta_{\text{ext}}} [\rho = c_2 ; \theta = \phi] \quad (201)$$

Le développement correspondant à ces équations, nous donne un système de Cramer de quatre équations à quatre inconnues à résoudre. La résolution d'un tel système nous donne :

Pour T_n et B_n

$$T_n = \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi \Delta} (P_n + Q_n) \left[\frac{\mu_{r_g} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} K_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + K'_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (202)$$

$$B_n = - \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi \Delta} (P_n + Q_n) \left[\frac{\mu_{r_g} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} I_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I'_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \quad (203)$$

I_i : représentant l'intensité du courant exciteur.

avec

-pour ($n > 0$)

$$P_n = \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^n \text{ et, } Q_n = \frac{1}{c_1} \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^n \quad (204)$$

-et pour $n = 0$:

$$P_0 = \frac{1}{c_1} \text{ et, } Q_0 = 0 \quad (205)$$

Nous donnons enfin l'expression suivante de Δ :

$$\begin{aligned} \Delta = & \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} I_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I'_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \cdot \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} K_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right. \\ & \left. + K'_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \\ & - \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} I_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I'_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \cdot \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right. \\ & \left. - K'_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) \right] \end{aligned} \quad (206)$$

tandis que pour les paramètres L_n et V_n intervenant dans les formules des potentiels vecteurs magnétiques, nous avons :

$$L_n = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \frac{Y_{2n}}{c_1^{n-1} [S_{1n} Y_{2n} - Y_{1n} S_{2n}]} \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} (T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})) \right. \\ \left. - \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi} Q_n \right]$$

$$- \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \frac{c_2^{n+1} S_{2n}}{[S_{1n} Y_{2n} - Y_{1n} S_{2n}]} \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} (T_n I_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})) \right] \quad (207)$$

$$V_n = \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \frac{c_2^{n+1} S_{1n}}{[S_{1n} Y_{2n} - Y_{1n} S_{2n}]} \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} (T_n I_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})) \right]$$

$$- \mu_0 \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} \frac{Y_{1n}}{c_1^{n-1} [S_{1n} Y_{2n} - Y_{1n} S_{2n}]} \left[\frac{\mu_{rg} n}{c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}} (T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})) \right]$$

$$- \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi} Q_n \quad (208)$$

Nous noterons que, dans ces expressions, I_n et K_n désignent successivement des fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce d'ordre n tandis que I'_n et K'_n en sont les dérivées. En outre il convient afin d'éviter toute confusion possible de remarquer que les termes I_i désignent les courants traversants les conducteurs internes.

III. 1. 3. Densité de courant dans le matériau de la gaine

La connaissance des paramètres T_n et B_n nous permet de déterminer la densité de courant en tout point de la gaine. Dans ces équations, les expressions d'indice ($n=0$) correspondent à l'effet de peau tandis que les termes d'indice $n>0$ correspondent à la contribution à l'effet de proximité dépendant entre autre de la position angulaire ϕ . Ceci nous donne une décomposition de la densité du courant dans la gaine J_g en deux parties caractérisant ainsi les deux effets.

$$J_g(r, \phi) = J_g \text{ peau} + J_g \text{ prox} \quad (209)$$

$$J_g(r, \phi) = [T_0 I_0(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_0 K_0(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] + \sum_{n=1}^{\infty} [T_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \cdot \cos n(\phi) \quad (210)$$

Nous donnons ici une illustration dans le cas où l'on ne considérerait que l'effet de peau.

Pour ($n=0$) les paramètres précédents Δ , T_n et, B_n dégénèrent pour donner Δ_0 , T_0 et, B_0 que nous restituons sous les formes suivantes :

$$\Delta_0 = [I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] [K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] - [I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] [K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (211)$$

$$T_0 = - \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi \Delta_0} \left(\frac{1}{c_1} \right) [K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (212)$$

$$B_0 = - \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi \Delta_0} \left(\frac{1}{c_1} \right) [I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (213)$$

à l'aide de ces expressions, nous déterminons grâce à la formule (172) de la densité de courant dans le cas général de l'effet de peau et de proximité l'expression de la densité de courant d'effet de peau dans un conducteur tubulaire.

$$J_g \text{ peau } (r) = \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi c_1} \frac{[K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{[I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (214)$$

$J_g \text{ peau } (r)$ caractérise la formule classique de la densité de courant d'effet de peau seul dans une gaine de câble; et dans le cas où le rayon externe de la gaine (c_2) tend vers l'infini, nous obtenons la formule classique suivante :

$$J_g \text{ peau } (r) = \frac{I_i \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi c_1} \frac{[K_0(r\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{[K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (215)$$

III. 1. 4. Impédance propre du circuit composé du conducteur i et de la gaine

III. 1. 4. 1. Impédance propre du circuit composé du filament de courant i et de la gaine

La démarche adoptée pour la détermination de l'impédance propre se fera en deux étapes :

la première consiste à supposer que le conducteur i représenté sous forme d'un filament de courant est parcouru par un courant I_i , le retour de courant se faisant par la gaine. Nous appliquons la loi de Faraday sur un contour fermé comprenant les génératrices du conducteur interne et de la gaine comme illustré sur la figure (33). Nous obtenons alors l'impédance de ce circuit contenant: l'impédance interne de la gaine soumise à l'effet de peau et de proximité du

conducteur i et, l'inductance de couplage entre le conducteur interne et la gaine. Mais il ne sera point question dans cette étape de déterminer l'impédance du conducteur interne du fait qu'il est supposé être filamenteux.

dans la deuxième étape, nous calculons l'impédance interne du conducteur interne i . Cette impédance sera déterminée comme dans le cas du calcul des éléments de la matrice $[Z_i]$ pour les lignes au-dessus d'un plan conducteur s de la partie II. 2. 4. Nous savons que la présence d'autres conducteurs internes proches du conducteur i parcourus par un courant I_i les rend sujets à des phénomènes de courants induits et donc d'impédances dues à ces courants qui seront ramenées au conducteur i .

L'impédance interne du conducteur i sera alors la somme d'une impédance interne due à l'effet de peau dans ce conducteur auquel s'ajoutera l'impédance interne due aux courants induits par le conducteur i sur les conducteurs voisins, et ramené au conducteur i .

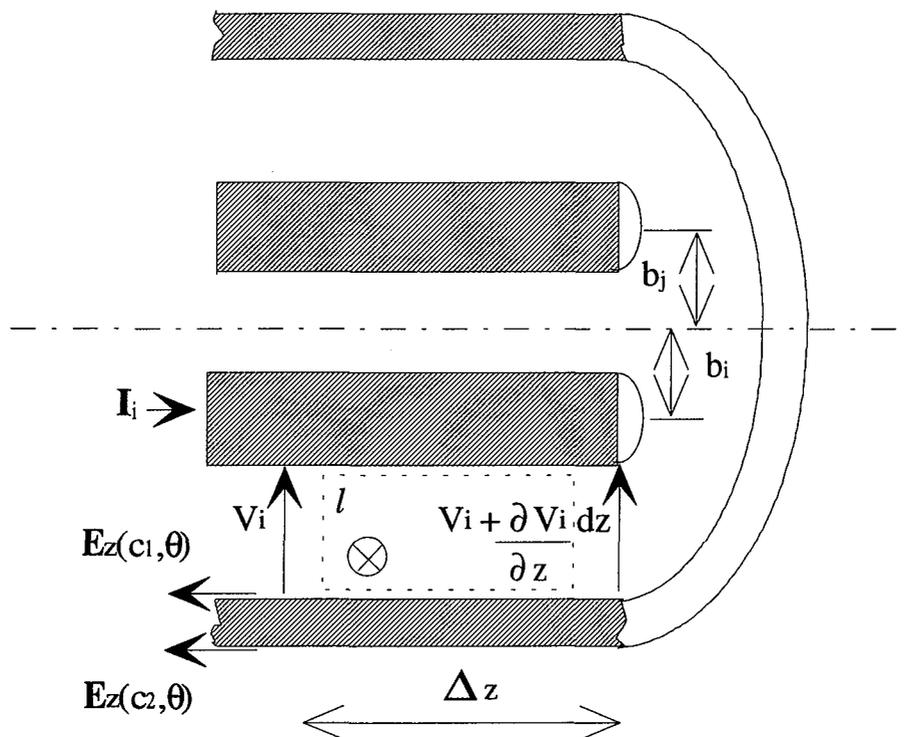


Figure (33) : Application de la loi de Faraday pour la détermination de l'impédance propre de la gaine

Pour la première étape décrite en début de cette partie, les équations de base sont :

$$-\frac{\partial V_i}{\partial z} = (R_g + jL_g \omega) I_i = \frac{d\Phi_i}{dt} + E_z(c_1, \theta) \quad (216)$$

avec

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = j\omega \oint_l A_{int}(\rho, \theta) dl = j\omega [A_{int}(c_1, \theta) - A_{int}(b_i, 0)] \quad (217)$$

et

$$E_z(c_1, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) J_g(c_1, \theta) \quad (218)$$

Le développement des précédentes formules (216, 217, 218) permet d'obtenir l'impédance propre du circuit composé du filament de courant et de la gaine du câble ($R_g + jL_g \omega$) car nous avons supposé au départ que le conducteur interne était filamenteux. Toutefois l'aspect filamenteux du conducteur interne nous a donné des singularités dans nos calculs. Pour les lever, il nous a fallu lui restituer son propre rayon a_i , qui apparait dans l'expression du terme de couplage gaine conducteurs caractérisant l'inductance externe du système considéré.

Ainsi, nous obtenons:

$$(R_g + jL_g \omega) I_i = \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) [T_0 I_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] \\ + \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n [T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] + j\omega \frac{\mu_0 I_i}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right] \quad (219)$$

L'impédance $(R_g + jL_g \omega) - j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right]$ peut être appelée impédance de la surface interne de la gaine du câble.

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

Dans cette expression, nous retrouvons l'exemple classique de l'impédance de la surface interne d'un câble coaxial noté $(R_{g0} + jL_{g0}\omega)$ dans le cas où $b_i = 0$, les termes d'effet de proximité s'annulent, et nous obtenons :

$$(R_{g0} + jL_{g0}\omega) I_i = \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) [T_0 I_0 (c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_0 K_0 (c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (220)$$

De la formule (219) nous tirons l'expression de la capacité propre entre le conducteur i et la gaine, notée C_{ii} et donnée par :

$$C_{ii} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{ri}}{\text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right]} \quad (221)$$

(ϵ_{ri} représentant la permittivité du diélectrique interne à la gaine).

Les paramètres intervenant dans la formule (219) ont été définis antérieurement. Dans cette formule les termes d'indice 0 correspondent à l'effet de peau dans la gaine tandis que les termes d'ordre $n > 0$ correspondent à l'effet de proximité.

Si nous faisons tendre c_2 vers l'infini, nous obtenons l'expression de l'impédance de la gaine donnée par [15] [5] et utilisée dans EMTP [27], et figurant à la partie

I. 3. 2. 2. 4 du chapitre I.

Enfin nous retrouvons dans la formule (219) l'expression classique de l'inductance propre (L_{ii}) d'un câble bifilaire blindé sans perte [68].

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right] \quad (222)$$

Dans le développement des calculs précédents les conducteurs internes sont pris comme des filaments de courant afin de déterminer leurs influences sur la gaine. Il est donc nécessaire de leur restituer leurs impédances internes comme nous l'avons évoqué au début de cette partie.

III. 1. 4. 2. Impédance propre interne du conducteur interne i

Comme dans le cas du modèle de la ligne multifilaire au-dessus d'un plan conducteur, nous utilisons le processus suivant:

Nous considérons un système de P conducteurs situés à l'intérieur de la gaine du câble, parmi lesquels le conducteur i dont on veut déterminer l'impédance propre interne.

Le conducteur i est donc représenté dans un premier temps comme un filament de courant donnant naissance à des courants induits dans les autres conducteurs non parcourus par des courants réels et indexés par k (indice balayant l'ensemble des P-1 conducteurs autres que le conducteur i).

Nous obtenons alors à l'aide de la formule (143) du chapitre 2 (en y remplaçant l'indice j par k) l'expression de $z'_{\mathbf{i}k\mathbf{i}}$ (l'impédance due aux courants induits sur le conducteur k). L'impédance interne totale due aux courants induits dans l'ensemble des conducteurs k par le filament de courant i peut s'obtenir sous la forme de l'ensemble des impédances de chaque conducteur ramené au courant I_i . Cette impédance interne due exclusivement aux courants induits par le filament de courant i peut alors s'écrire sous la forme d'une somme ($\sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{\mathbf{i}k\mathbf{i}}$)

des impédances $z'_{\mathbf{i}k\mathbf{i}}$ dans la mesure où nous ne tenons pas compte des réactions des conducteurs k (non parcourus par des courants réels) sur eux mêmes.

Dans une seconde étape il faut ajouter à l'impédance précédente l'impédance d'effet de peau dû conducteur i de rayon a_i , de conductivité σ_i et, de perméabilité absolue μ_i . Ceci nous fournit l'impédance interne totale ($z'_{\mathbf{i}i\mathbf{i}}$) du conducteur i sous la forme suivante:

$$z'_{\mathbf{i}i\mathbf{i}} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \left[\frac{\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}}{2\pi a_i} \frac{I_0(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})}{I_1(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})} \right] + \sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{\mathbf{i}k\mathbf{i}} \quad (223)$$

III. 1. 4. 3. Impédance propre du circuit composé du conducteur interne i et de la gaine

Cette impédance se résume à la somme des deux impédances précédemment établies dans les formules (219) et (223) donnant ainsi:

$$\begin{aligned}
 Z_{i,i,Tot} = (R_{i,i,Tot} + jL_{i,i,Tot} \omega) = (R_g + jL_g \omega) + z'_{i,i} = & \left(\frac{1}{I_i \sigma_g}\right) [T_0 I_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] \\
 & + \left(\frac{1}{I_i \sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n [T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right] \\
 & + \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \left[\frac{\sqrt{j\omega \mu_i \sigma_i}}{2\pi a_i} \frac{I_0(a_i \sqrt{j\omega \mu_i \sigma_i})}{I_1(a_i \sqrt{j\omega \mu_i \sigma_i})} \right] + \sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{i,k} \tag{224}
 \end{aligned}$$

III. 1. 5. Impédance mutuelle du câble

Pour la détermination de l'impédance mutuelle, nous injectons un courant I_i dans le conducteur i, le retour de courant se faisant par la gaine et nous calculons la tension induite sur la boucle formée par le conducteur j et la gaine (voir figure 34).

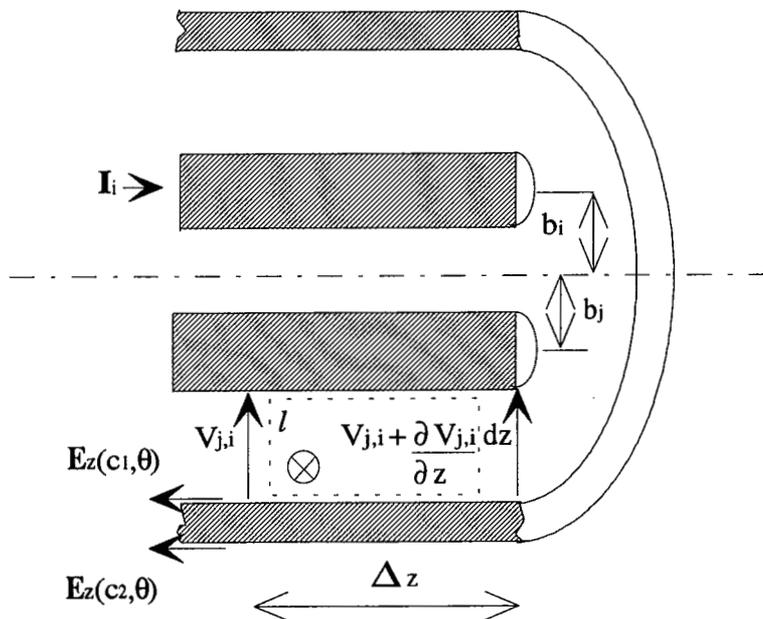


Figure (34) : *Application de la loi de Faraday pour la détermination de l'impédance mutuelle*

L'application de la loi de Faraday sur le contour fermé de la figure (34) nous permet de poser :

$$-\frac{\partial V_{j,i}}{\partial z} = (R_{j,i} + jL_{j,i} \omega) I_i = \frac{d\Phi_{j,i}}{dt} + E_z(c_1, \theta) \quad (225)$$

avec

$$\frac{d\Phi_{j,i}}{dt} = j\omega \oint_l A_{int}(\rho, \theta) dl = j\omega [A_{int}(c_1, \theta) - A_{int}(b_j, \theta_{i,j})] \quad (226)$$

Le développement des précédentes expressions associées aux formules (192) et (218) nous permet d'obtenir l'impédance mutuelle ne tenant pas compte de la chute de tension due aux courants induits sur le conducteur j.

$$\begin{aligned} (R_{j,i} + jL_{j,i} \omega) I_i &= \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) [T_0 I_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] \\ &+ \left(\frac{1}{\sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_j}{c_1}\right)^n [T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega \mu_g \sigma_g})] \cdot \text{Cos}(n\theta_{i,j}) \\ &+ j\omega \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \text{Ln} \left[\frac{c_1^4 + (b_i b_j)^2 - 2 (b_i b_j) c_1^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_1^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]} \right] \end{aligned} \quad (227)$$

Nous ferons sur cette formule les mêmes remarques que dans le cas de l'impédance propre et nous ajouterons que, dans l'hypothèse des câbles sans pertes, nous retrouvons les formules de l'inductance mutuelle [68] d'un câble blindé $L_{j,i}$.

$$L_{j,i} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Ln} \left[\frac{c_i^4 + (b_i b_j)^2 - 2 (b_i b_j) c_i^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_i^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]} \right] \quad (228)$$

Enfin pour déterminer $(R_{i,j} + jL_{i,j}\omega)$ nous utiliserons la procédure précédente en injectant un courant I_j dans le conducteur j , le retour de courant se faisant par la gaine et en choisissant comme contour la boucle constituée du conducteur i et de la gaine.

De la formule (227) nous déduisons la formule du potentiel p_{ji} .

$$p_{ji} = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \text{Ln} \left[\frac{c_i^4 + (b_i b_j)^2 - 2 (b_i b_j) c_i^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_i^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]} \right]}{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_{ri}} \right] \quad (229)$$

(ϵ_{ri} représentant la permittivité relative du diélectrique interne à la gaine).

A cette impédance mutuelle donnée par la formule (227) il faudra donc ajouter l'impédance liée aux courants induits (effet de proximité) par le conducteur i sur le conducteur j que nous noterons $Z_{ind,j}$ [45]. La somme de ces impédances nous donnera l'impédance mutuelle globale $Z_{j,i}^{\text{Tot}}$.

$$Z_{ind,j} = \left(\frac{1}{\sigma_j}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j \omega \sigma_j a_j^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a_j}\right) I_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}) + \left(\frac{\sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}}{\mu_{rj}}\right) I'_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j})} \right] I_n(a_j \sqrt{j \omega \mu_j \sigma_j}) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \left[\frac{1}{b_{ij}}\right]^n \quad (230)$$

$$Z_{j,i}^{\text{Tot}} = (R_{j,i}^{\text{Tot}} + jL_{j,i}^{\text{Tot}} \omega) = (R_{j,i} + jL_{j,i} \omega) + Z_{ind,j} \quad (231)$$

Notons que $Z_{ind,i}$, qui est dû au courant induit par le conducteur j sur le conducteur i , est obtenu de la même façon que $Z_{ind,j}$ en changeant les indices j dans $Z_{ind,j}$ par des indices i .

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

$$Z_{ind,i} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j \omega \sigma_i a_i^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a_i}\right) I_n(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}) + \left(\frac{\sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}}{\mu_{ri}}\right) I'_n(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i})} \right] I_n(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \left[\frac{1}{b_{ij}}\right]^n \quad (232)$$

Dans les formules (230) et (232), b_{ij} désigne la distance de séparation entre les 2 conducteurs internes numérotés i et j . Dans le cas où ces conducteurs sont disposés symétriquement nous avons $b_{ij} = b_i + b_j$.

III. 2. CABLES MULTIFILAIRES BLINDES SITUES A UNE CERTAINE HAUTEUR AU-DESSUS D'UN PLAN CONDUCTEUR OU ENTERRE

Dans ce cas, les notions d'impédances de surfaces externes ainsi que celles concernant les impédances de transfert vont prendre toute leur importance du fait de l'existence de parties conductrices hors de la gaine du câble. Nous allons considérer pour notre part, que ces conducteurs externes à la gaine sont situés loin de celle-ci afin de pouvoir nous affranchir des éventuels effets de proximités.

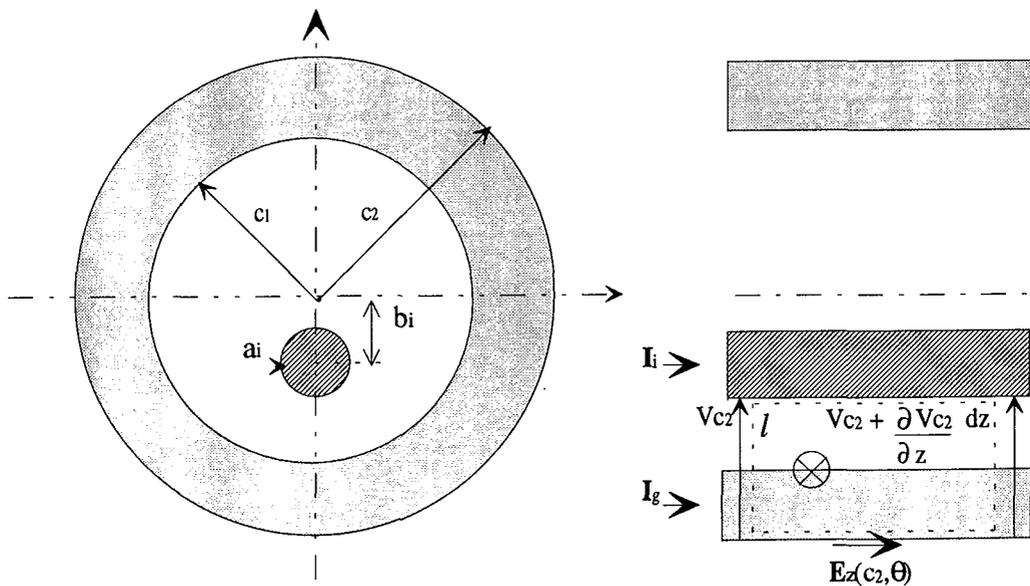


Figure (35) *Impédances de surfaces et de transfert d'un câble coaxial décentré*

Pour mieux circonscrire le problème de ces impédances, nous présentons le schéma de la figure (35). Il s'agit alors d'un câble coaxial décentré dont l'âme est traversée par un courant I_i tandis que la gaine l'est par un courant I_g .

III. 2. 1. Impédance de transfert de la gaine du câble

Des travaux antérieurs [5] [55] ont émis comme hypothèse que l'impédance de transfert unitaire n'est pas affectée par les dissymétries des conducteurs se trouvant à l'intérieur de la gaine du câble.

Des mesures ont confirmé [13] que la position d'un conducteur interne n'avait donc pas une grande influence sur cette impédance de transfert. Partant de ce fait, nous utiliserons les expressions données par Shelkunhof [80].

$$Z_T = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g} [K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{2\pi \sigma_g c_1 [I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (233)$$

soit :

$$Z_T = \left[\frac{1}{2\pi \sigma_g c_1 c_2} \right] \left[\frac{1}{[I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \right] \quad (234)$$

III. 2. 2. Impédances de surfaces de la gaine

III. 2. 2. 1. Impédance de surface interne de la gaine

En ce qui concerne l'impédance de surface interne de la gaine elle peut être extraite de la formule (219) et nous la noterons Z_{C1i} . On a vu précédemment qu'elle était sujette aux courants induits par les conducteurs internes i représentés sous l'aspect filamentaire.

$$Z_{C1i} = \left(\frac{1}{\sigma_g I_i} \right) [T_0 I_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_0 K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \\ + \left(\frac{1}{\sigma_g I_i} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1} \right)^n [T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (235)$$

Soit alors,

$$Z_{C1i} = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g} [K_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{2\pi \sigma_g c_1 [I_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \\ + \left(\frac{1}{\sigma_g I_i} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1} \right)^n [T_n I_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (236)$$

Dans cette expression, le premier terme du second membre est relatif à l'impédance de surface interne donné par Shelkunnhoff [80] correspondant aux câbles coaxiaux, tandis que le second terme caractérise un terme additif dû aux courants induits par le conducteur interne sur la gaine.

Pour ce qui est de l'impédance de la surface externe de la gaine, nous pouvons admettre sous certaines approximations que les courants induits n'influencent cette surface que dans la mesure où des éléments conducteurs se trouveraient à l'extérieur et assez proches de cette gaine.

III. 2. 2. 2. Impédance de surface externe de la gaine

Dans toutes les applications concernant l'étude du câble à coté de structures conductrices nous supposerons la gaine assez éloignée de ces dernières (plan de masse ou du sol) afin de pouvoir prendre en compte l'impédance de surface externe de la gaine comme étant celle définie par Shelkunnhoff [80] et donnée par:

$$Z_{C2} = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g} [K_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{2\pi \sigma_g c_2 [I_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2 \sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (237)$$

III. 2. 3. Détermination des matrices d'impédances et d'admittances des câbles multifilaires blindés au-dessus d'un plan de masse ou du sol ou enterrés

Cette partie et la partie suivante concernant le câble au-dessus d'un plan conducteur ou enterré sont nécessaires du fait que d'une part, l'effet de proximité calculé précédemment y est pris en compte conformément à nos hypothèses de départ et que d'autre part, il s'agit ici de changer de référence des potentiels. Cette partie reste en outre importante pour la compréhension de cet aspect des choses et du fait que dans la nature ces configurations restent courantes. Nous partons donc d'une référence des potentiels qui était la gaine du câble pour aboutir à une référence qui serait soit le plan conducteur situé en dessous du câble soit le sol s'il est enterré. Nous nous référons à un certain nombre de travaux antérieurs [5], [90] et nous limiterons alors à expliquer la démarche à suivre tout en donnant les équations nécessaires pour y parvenir.

III. 2. 3. 1. Détermination des matrices d'impédances séries d'un câble au-dessus d'un milieu conducteur.

III. 2. 3. 1. 1. Impédances propres du système étudié

Nous traçons sur la figure ci-dessous un schéma représentant un câble multifilaire blindé composé de P conducteurs de phases de rayons pouvant être différents ou non, entourés d'une gaine conductrice. Ce dispositif est situé à une certaine hauteur au-dessus d'un milieu conducteur s.

Nous noterons que le milieu conducteur s de conductivité σ_s ou σ_e en question peut représenter soit un plan de masse en cuivre soit le sol.

Les conducteurs internes de phases ou âmes sont représentés par des indices i et j tandis que la gaine est représentée par l'indice g.

Pour la détermination des impédances propres, nous injectons un courant I_i dans l'âme conductrice i , les autres conducteurs de phases n'étant pas excités (voir figure 36).

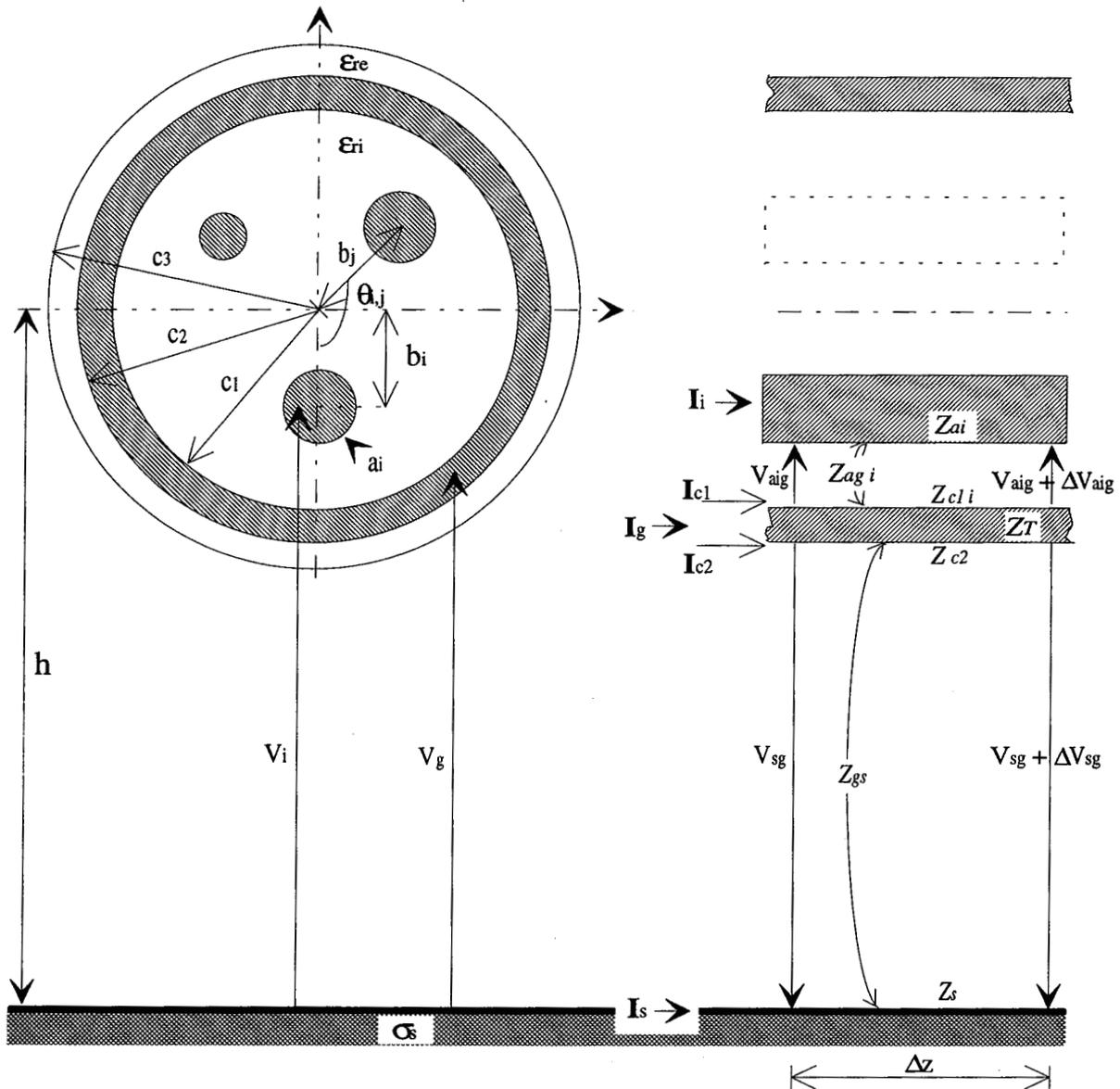


Figure (36) : Câble multifilaire blindé au-dessus d'un milieu conducteur de conductivité σ_s .

(Détermination des impédances propres)

Les tensions prises en considération sont les tensions suivantes :

V_{aig} représente la tension âme i - gaine

V_{sg} représente la tension milieu s - gaine

V_i représente la tension de l'âme i par rapport au milieu de référence s

V_g représente la tension de la gaine par rapport au milieu de référence

Les équations qui régissent ce système sont alors :

-pour les relations entre courants

$$I_i = -I_{c1}, I_{c1} = -I_{c2}, I_{c2} = -I_s, I_g = I_{c1} + I_{c2} \quad (238)$$

-tandis que pour les relations entre tensions nous avons :

$$V_{aig} = Z_{ai} \Delta Z I_i - Z_{agi} \Delta Z I_{c1} - Z_{c1i} \Delta Z I_{c1} - Z_T \Delta Z I_{c2} + V_{aig} + \Delta V_{aig} \quad (239)$$

En combinant les deux équations précédentes (238 et (239) nous obtenons :

$$-\frac{\Delta V_{aig}}{\Delta Z} = (Z_{ai} + Z_{agi} + Z_{c1i} - Z_T) I_i - Z_T I_g \quad (240)$$

$$-\frac{\Delta V_{sg}}{\Delta Z} = (-Z_{c2} - Z_{gs} - Z_s + Z_T) I_i + (-Z_{c2} - Z_{gs} - Z_s) I_g \quad (241)$$

En appliquant

$$-\frac{\Delta V_i}{\Delta Z} = -\frac{\Delta V_{aig}}{\Delta Z} + \frac{\Delta V_{sg}}{\Delta Z} \quad (242)$$

et

$$-\frac{\Delta V_g}{\Delta Z} = +\frac{\Delta V_{sg}}{\Delta Z} \quad (243)$$

nous obtenons

$$-\frac{\Delta V_i}{\Delta Z} = (Z_{ai} + Z_{agi} + Z_{c1i} + Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - 2Z_T) I_i + (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - Z_T) I_g \quad (244)$$

et

$$-\frac{\Delta V_g}{\Delta Z} = (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - Z_T) I_i + (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s) I_g \quad (245)$$

avec :

-l'impédance interne du conducteur de phase i notée Z_{ai} qui résulte comme nous l'avons montré, de la somme de l'impédance due à l'effet de peau du conducteur i ainsi qu'aux impédances dues aux courants induits par le conducteur i sur tous les autres conducteurs internes k (nous négligerons les influences des conducteurs non excités sur eux même). La formule représentant cette impédance interne provient de la formule (223) du calcul de (z'_{iik}).

$$Z_{ai} = z'_{iik} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \left[\frac{\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i}}{2\pi a_i} \frac{I_0(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})}{I_1(a_i\sqrt{j\omega\mu_i\sigma_i})} \right] + \sum_{k=1, k \neq i}^P z'_{iki} \quad (246)$$

-l'impédance caractérisant le couplage entre un conducteur de phase i et la gaine, notée Z_{agi} qui provient de la formule 219.

$$Z_{agi} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Ln} \left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i} \right] \quad (247)$$

-l'impédance de surface interne de la gaine avec la prise en considération du conducteur exciteur i, notée Z_{C1i} , provenant de la formule 219

$$Z_{C1i} = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}}{2\pi\sigma_g c_1} \frac{[K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{[I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} + \left(\frac{1}{\sigma_g I_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n [T_n I_n(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + B_n K_n(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})] \quad (248)$$

-l'impédance de surface externe de la gaine, notée Z_{c2} , provient de la formule 237

$$Z_{c2} = \frac{\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g} [K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) I_0(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) + I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_0(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]}{2\pi \sigma_g c_2 [I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \quad (249)$$

-l'impédance de couplage entre la gaine et le milieu conducteur s, notée Z_{gs}

$$Z_{gs} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{2h}{c_2}\right] \quad (250)$$

-l'impédance du milieu conducteur s notée Z_s , qu'il est possible d'obtenir grâce à la formule de Carson [18] ou celle de Dubanton [29] présentées dans le chapitre I. Pour nos applications nous retiendrons la formule de Dubanton du fait de sa simplicité d'utilisation.

-l'impédance de transfert de la gaine, notée Z_T

$$Z_T = \left[\frac{1}{2\pi \sigma_g c_1 c_2} \right] \left[\frac{1}{[I_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) - I_1(c_1\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g}) K_1(c_2\sqrt{j\omega\mu_g\sigma_g})]} \right] \quad (251)$$

III. 2. 3. 1. 2. Impédances mutuelles du système étudié

Ici, nous supposons que l'on excite le conducteur j par un courant I_j , les autres conducteurs de phases n'étant pas excités et nous déterminons les impédances du système composé du conducteur i, de la gaine et du milieu conducteur s.

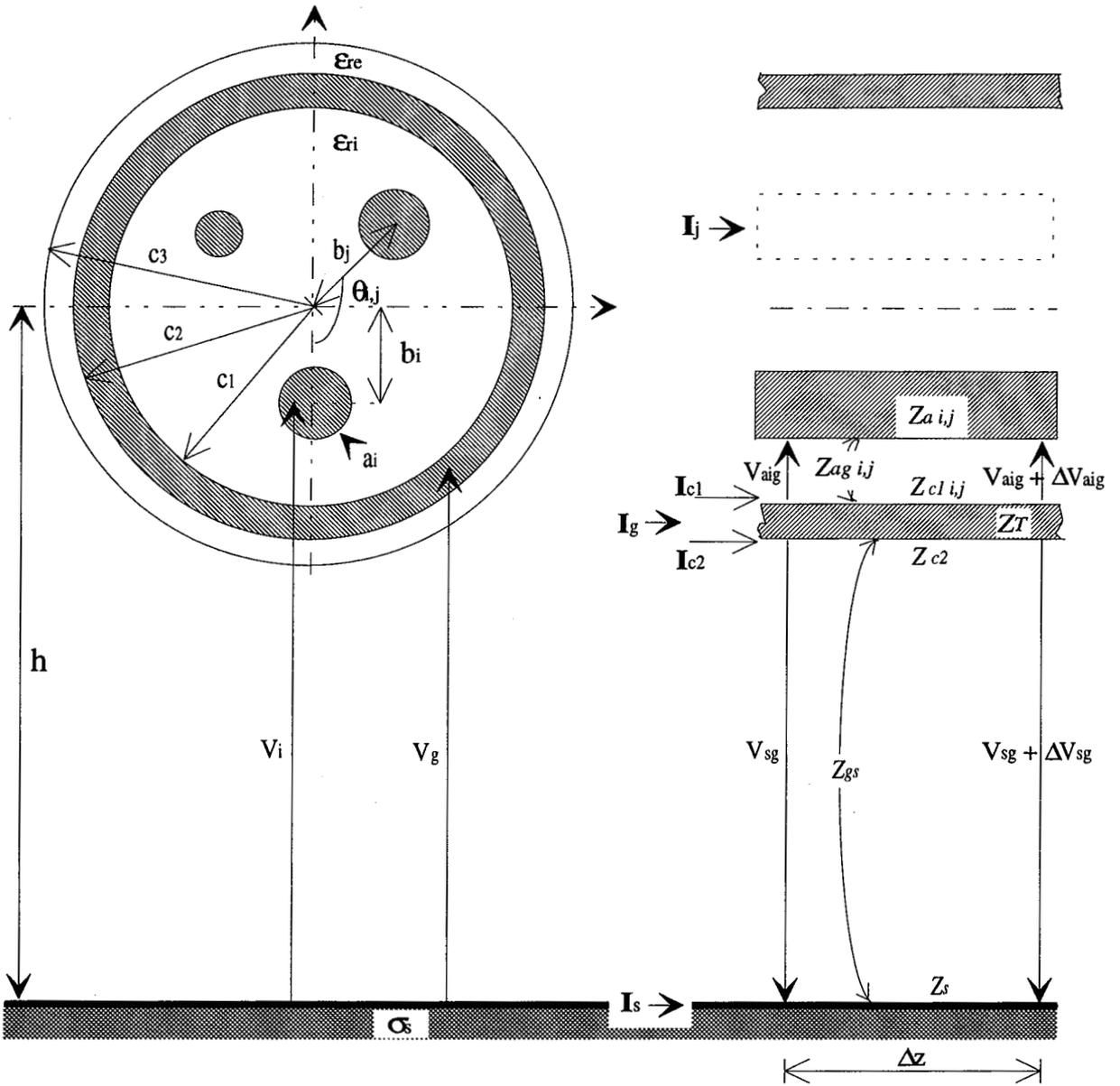


Figure (37) : *Câble multifilaire blindé au-dessus d'un milieu conducteur s*
 (Détermination des impédances mutuelles)

Par analogie avec le cas précédent, nous pouvons écrire :

$$-\frac{\Delta V_i}{\Delta Z} = (Z_{a i,j} + Z_{a g i,j} + Z_{c l i,j} + Z_{c 2} + Z_{g s} + Z_s - 2Z_T) I_j + (Z_{c 2} + Z_{g s} + Z_s - Z_T) I_g \quad (252)$$

$$-\frac{\Delta V_g}{\Delta Z} = (Z_{c 2} + Z_{g s} + Z_s - Z_T) I_j + (Z_{c 2} + Z_{g s} + Z_s) I_g \quad (253)$$

Outre les impédances définies précédemment, nous avons

-pour l'impédance due aux courants induits par le conducteur j sur le conducteur i, notée

$Z_{ai,j}$

$$Z_{a i,j} = Z_{ind,i} \quad (254)$$

avec

$$Z_{ind,i} = \left(\frac{1}{\sigma_i}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j \omega \sigma_i a_i^{n-1}}{\pi} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{a_i}\right) I_n(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}) + \left(\frac{\sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}}{\mu_i}\right) I_n'(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i})} \right] I_n(a_i \sqrt{j \omega \mu_i \sigma_i}) \left(\frac{a_i}{b_{ij}}\right)^n \left[\frac{1}{b_{ij}}\right]^n \quad (255)$$

-pour l'impédance de couplage entre les conducteurs i et la gaine lorsque parmi les conducteurs internes à la gaine seul le conducteur de phase j est alimenté, cette impédance de couplage sera notée $Z_{ag i,j}$ et son expression est obtenue à partir des formules (227 et 228)

$$Z_{ag i,j} = j \omega \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Ln} \left[\frac{c_1^4 + (b_i b_j)^2 - 2 (b_i b_j) c_1^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_1^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]} \right] \quad (256)$$

-Pour la partie interne de l'impédance mutuelle avec la gaine comme référence lorsque parmi les conducteurs internes à cette gaine seul le conducteur de phase j est alimenté, notée $Z_{cl i,j}$. Du fait que l'excitation a été faite ici à l'aide du conducteur j contrairement à ce qui a été réalisé à la partie **III. 1. 5** de ce chapitre, nous introduisons de nouveaux paramètres T'_0 , B'_0 , T'_n et B'_n qui représentent respectivement les paramètres T_0 , B_0 , T_n et B_n définis précédemment (voir **III. 1. 2.** de ce chapitre) dans lesquels on a changé tous les indices i par l'indice j.

$$Z_{cl i,j} = \left(\frac{1}{I_j \sigma_g}\right) [T'_0 I_0(c_1 \sqrt{j \omega \mu_g \sigma_g}) + B'_0 K_0(c_1 \sqrt{j \omega \mu_g \sigma_g})] + \left(\frac{1}{I_j \sigma_g}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_i}{c_1}\right)^n [T'_n I_n(c_1 \sqrt{j \omega \mu_g \sigma_g}) + B'_n K_n(c_1 \sqrt{j \omega \mu_g \sigma_g})] \cdot \text{Cos}(n\theta_{i,j}) \quad (257)$$

Pour plus de simplifications nous noterons :

Pour les indices i et j allant de 1 jusqu'à P , nous avons

$$Z_{i,i} = (Z_{ai} + Z_{agi} + Z_{c1i} + Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - 2Z_T) \quad (258)$$

$$Z_{i,j} = (Z_{aij} + Z_{agij} + Z_{c1ij} + Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - 2Z_T) \quad (259)$$

$$Z_{1,g} = Z_{2,g} = \dots = Z_{i,g} = \dots = Z_{j,g} = Z_{P,g} = (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - Z_T) \quad (260)$$

$$Z_{g,1} = Z_{g,2} = \dots = Z_{g,i} = \dots = Z_{g,j} = Z_{g,P} = (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s - Z_T) \quad (261)$$

Les deux équations (260) et (261) symbolisent le fait que les P premiers éléments de la colonne g ainsi que les P premiers éléments de la ligne g de la matrice d'impédance série du système sont identiques.

Et comme g traduit l'indice de la gaine et, n'appartenant pas à l'ensemble des indices allant de 1 à P , nous aurons :

$$Z_{g,g} = (Z_{c2} + Z_{gs} + Z_s) \quad (262)$$

Et en faisant tendre Δz vers 0 nous obtenons l'équation matricielle $\{dV/dz\} = [Z]\{I\}$ dont les éléments sont donnés par les formules allant de 252 à 262, et qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} dV_1/dz \\ \bullet \\ dV_i/dz \\ \bullet \\ dV_j/dz \\ \bullet \\ dV_P/dz \\ dV_g/dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1,1} & \bullet & Z_{1,i} & \bullet & Z_{1,j} & \bullet & Z_{1,P} & Z_{1,g} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{i,1} & \bullet & Z_{i,i} & \bullet & Z_{i,j} & \bullet & Z_{i,P} & Z_{i,g} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{j,1} & \bullet & Z_{j,i} & \bullet & Z_{j,j} & \bullet & Z_{j,P} & Z_{j,g} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{P,1} & \bullet & Z_{P,i} & \bullet & Z_{P,j} & \bullet & Z_{P,P} & Z_{P,g} \\ Z_{g,1} & \bullet & Z_{g,i} & \bullet & Z_{g,j} & \bullet & Z_{g,P} & Z_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \bullet \\ I_i \\ \bullet \\ I_j \\ \bullet \\ I_P \\ I_g \end{bmatrix} \begin{matrix} l \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ P \\ g \end{matrix}$$

(263)

III. 2. 3. 2. Détermination des matrices d'admittances des câbles multifilaires blindés situés au-dessus d'un plan de masse ou du sol

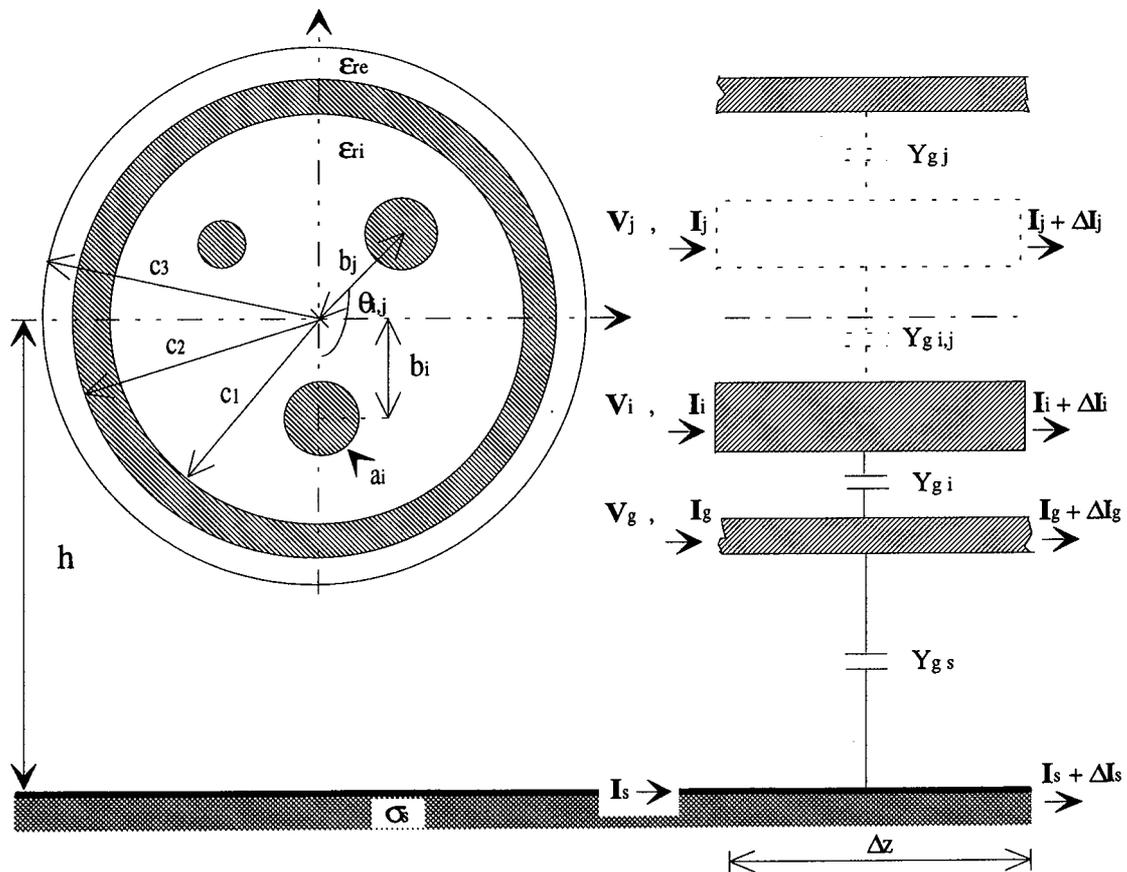


Figure (38): Admittances d'un câble multifilaire blindé au-dessus d'un plan conducteur s

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

Nous négligerons ici l'expression des conductances jugées très faibles à cause de l'hypothèse faite sur les faibles pertes diélectriques.

Pour la détermination des coefficients potentiels nous nous réfèrons à la figure (38) et dans un but de simplifications nous noterons aussi que parmi les conducteurs internes de phase seuls les conducteurs i et j sont alimentés. Enfin, nous ne tiendrons pas compte de l'admittance de transfert du câble à cause du très bon recouvrement optique fourni par la gaine (homogène).

En notant Q_i , Q_j et Q_g les charges respectives sur les conducteurs i, j et la gaine. Nous obtenons alors les relations entre charges et tensions qui s'établissent comme suit:

Dans le cas où l'on prend la gaine comme référence de potentiel

$$V_i - V_g = p_{i1} Q_1 + p_{i2} Q_2 + \dots + p_{ii} Q_i + \dots + p_{ij} Q_j + \dots + p_{iP} Q_P \quad (264)$$

$$V_j - V_g = p_{j1} Q_1 + p_{j2} Q_2 + \dots + p_{ji} Q_i + \dots + p_{jj} Q_j + \dots + p_{jP} Q_P \quad (265)$$

Quand la gaine est référenciée par rapport au milieu conducteur s:

$$V_g - V_s = p_{g1} Q_1 + p_{g2} Q_2 + \dots + p_{gi} Q_i + \dots + p_{gj} Q_j + \dots + p_{gP} Q_P + p_{gg} Q_g \quad (266)$$

Dans ces relations, les éléments p_{ii} , p_{jj} , p_{ij} , p_{ji} , p_{gi} pour i et j allant de 1 à P (nombre de conducteurs internes) et p_{gg} sont nommés coefficients potentiels.

Ces relations deviennent :pour tout conducteur i et j interne à la gaine

$$V_i = (p_{i1} + p_{g1})Q_1 + (p_{i2} + p_{g2})Q_2 + \dots + (p_{ii} + p_{gi})Q_i + \dots + (p_{ij} + p_{gj})Q_j + \dots + (p_{iP} + p_{gP})Q_P + p_{gg} Q_g \quad (267)$$

Modèle analytique pour la détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés

$$V_j = (p_{j1} + p_{g1})Q_1 + (p_{j2} + p_{g2})Q_2 + \dots + (p_{ji} + p_{gi})Q_i + \dots + (p_{jj} + p_{gj})Q_j + \dots + (p_{jP} + p_{gP})Q_P + p_{gg} Q_g \quad (268)$$

$$V_g = p_{g1} Q_1 + p_{g2} Q_2 + \dots + p_{gi} Q_i + \dots + p_{gj} Q_j + \dots + p_{gP} Q_P + p_{gg} Q_g \quad (269)$$

En notant pour i et j allant de 1 à P (nombre de conducteurs internes à la gaine) :

$$P_{i,i} = (p_{ii} + p_{gi}) \quad (270)$$

$$P_{i,j} = (p_{ij} + p_{gj}) \quad (271)$$

$$P_{g,i} = p_{gi} \quad (272)$$

avec :

$$p_{ii} = \frac{\text{Ln}\left[\frac{(c_1^2 - b_i^2)}{c_1 a_i}\right]}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{ri}} \quad (273)$$

$$p_{ij} = \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \text{Ln}\left[\frac{c_1^4 + (b_i b_j)^2 - 2(b_i b_j)c_1^2 \text{Cos}(\theta_{i,j})}{c_1^2 [b_i^2 + b_j^2 - 2 b_i b_j \text{Cos}(\theta_{i,j})]}\right]}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{ri}} \right] \quad (274)$$

$$p_{gi} = \frac{\text{Ln}\left[\frac{2h}{c_2}\right]}{2\pi\epsilon_0} \quad (275)$$

Or, l'équation incluant la matrice admittance [Y] s'écrit comme suit

$$\left\{ \frac{dI}{dz} \right\} = [Y] \{V\} \quad (281)$$

avec

$$[Y] = [G] + j\omega [C] = j\omega [C] \text{ (en admettant que } [G] = 0) \quad (282)$$

D'où

$$[Y] = j\omega [P]^{-1} \quad (283)$$

Nous noterons que des techniques d'inversion de la matrice [P] existent et ne posent aucun problème. On utilise souvent la méthode de Gauss-Jordan pour y parvenir.

III. 2. 3. 3. Détermination des matrices d'impédances et d'admittances des câbles multifilaires blindés enterrés dans le sol

III. 2. 3. 3. 1. Détermination des matrices d'impédances série d'un câble enterré dans le sol

Dans cette configuration, il est important de tenir compte du diélectrique entourant la gaine et séparant celle-ci du sol. Ainsi, parmi les éléments de la matrice [Z] de la formule (263), Z_{gs} représente désormais la réactance du diélectrique externe à la gaine (de permittivité ϵ_{re}) et non plus la réactance externe de la gaine du câble au-dessus du milieu s.

En outre, il est important de noter que l'impédance du sol n'est plus la même selon que le câble est aérien ou souterrain (voir chapitre I)

Nous aurons donc conformément aux paramètres donnés sur la figure 39

$$Z_{gs} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \text{Ln}\left[\frac{c_3}{c_2}\right] \quad (284)$$

et,

l'impédance Z_s sera donnée par les formules de Pollaczek [73] ou celles de Whedepohl [90] selon les critères définis dans le chapitre I.

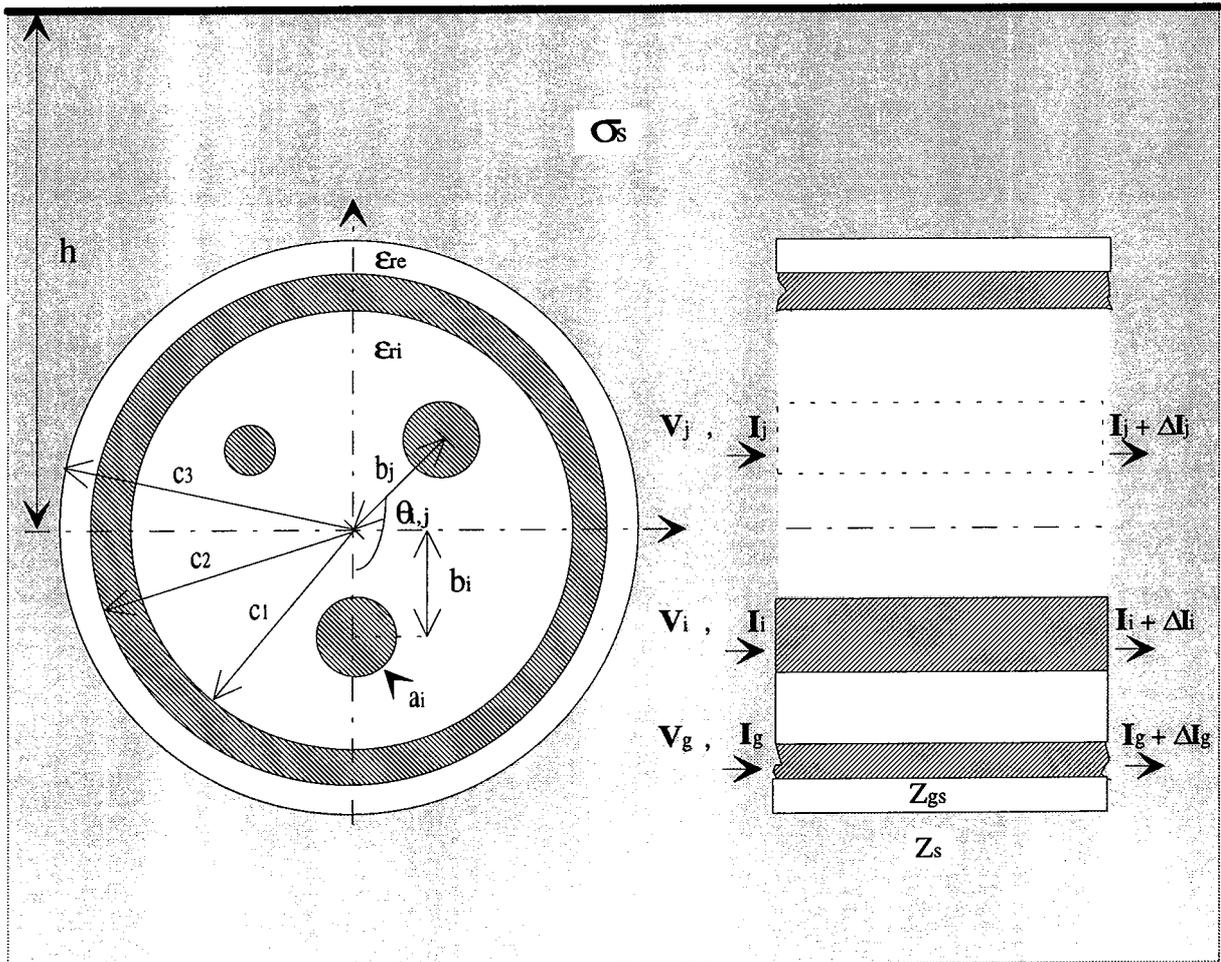


Figure (39) *Impédances d'un câble multifilaire blindé enterré dans le sol*

III. 2. 3. 3. 2. Détermination des matrices d'admittances parallèles d'un câble enterré dans le sol

Comme dans le cas précédent, il est important de tenir compte du diélectrique entourant la gaine et séparant celle-ci du sol. Ainsi, parmi les éléments de la matrice [P] définie par la formule (279), les éléments (p_{gi} , p_{ig} et p_{gg}) caractérisent désormais le diélectrique externe à la gaine (de permittivité ϵ_{re}) et non plus les coefficients de potentiels de la gaine du câble au-dessus du milieu s.

Nous aurons donc conformément aux paramètres donnés sur la figure (40) :

$$p_{gi} = \frac{\text{Ln}\left[\frac{c_3}{c_2}\right]}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{re}} \quad (285)$$

D'autre part nous avons :

$$P_{g,g} = p_{gg} \quad (286)$$

$$P_{1,g} = P_{2,g} = \dots P_{i,g} = \dots = P_{p,g} = P_{g,g} = P_{g,l} = \dots = P_{g,i} = \dots = P_{g,p} = p_{gg} \quad (287)$$

$$p_{gg} = \frac{\text{Ln}\left[\frac{c_3}{c_2}\right]}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{re}} \quad (288)$$

Nous noterons, en complément des modifications déjà introduites dans l'élaboration de la matrice [P] le fait que nous obtenons ici aussi la matrice des admittances grâce à la relation suivante :

$$[Y] = j\omega [P]^{-1} \quad (289)$$

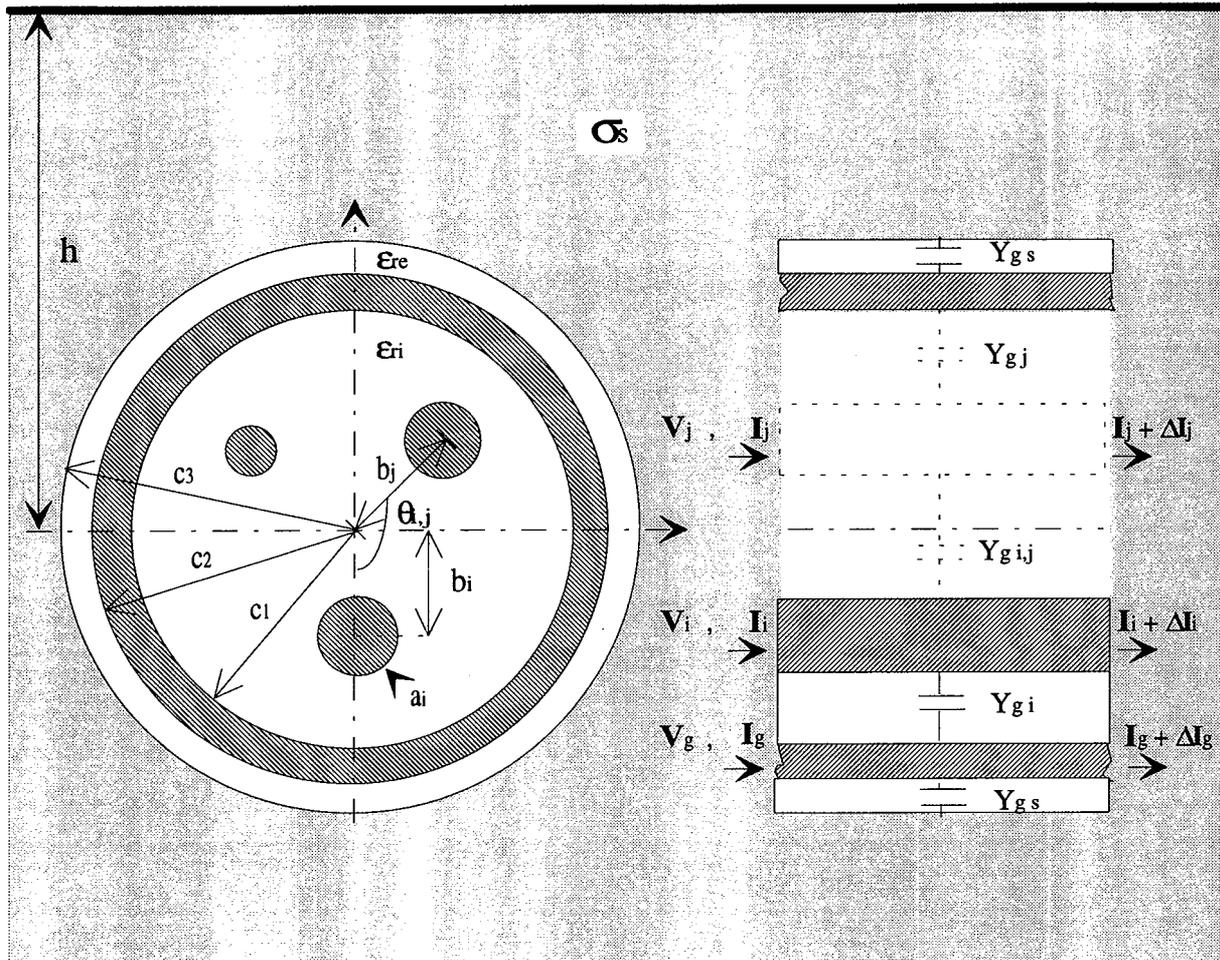


Figure (40) *Admittances des câbles enterrés*

III. 3. RESULTATS ET VALIDATIONS

Dans cette partie nous donnerons des résultats ainsi que des validations concernant dans un premier temps un câble bifilaire blindé, puis dans une seconde étape les mêmes investigations seront menées dans le cas d'un câble tripolaire blindé et enfin, une comparaison sera faite avec des résultats de mesures obtenus dans le cas d'un câble à quatre conducteurs internes.

Pour notre validation, il sera fait usage entre autre de la technique des éléments finis.

III. 3. 1. Résultats et validations dans le cas d'un câble bifilaire blindé

Dans tout ce qui suit dans cette partie, nous nous imposerons comme exemple de test un câble bifilaire blindé avec $\theta_{1,2} = \pi$ et nous rappelons que les impédances obtenues par le calcul analytique sont constituées de séries infinies de fonctions de Bessel.

III. 3. 1. 2. Comparaison entre notre modèle et d'autres modèles pour la gaine du câble

III. 3. 1. 2. 1. Comparaison du modèle proposé avec la méthode des éléments finis ainsi que les modèles classiques de prise en compte de l'effet de peau

Le premier exemple utilisé ici est un câble bifilaire blindé (voir figure 32) dont on alimente le conducteur 1 (le retour de courant se faisant par la gaine) tandis que le conducteur 2 est non connecté à ses extrémités. Les caractéristiques de ce câble sont les suivantes:

$$c_1 = 5E-3 \text{ m}, c_2 = 7E-3 \text{ m}, b_1 = 2E-3 \text{ m}, a_1 = 1E-3 \text{ m}.$$

Pour le matériau constituant la gaine (cuivre) nous prenons ($\mu_{rg} = 1$) et ($\sigma_g = 5.8E07 \text{ S/m}$)

Pour notre validation, une comparaison a été faite pour déterminer la résistance de la gaine du câble entre un calcul analytique et un calcul par Eléments Finis [16] [77] (figure 41). Les deux méthodes de calcul intègrent toutes les deux l'effet de peau et l'effet de proximité dans leurs formulations. Les points sur les courbes coïncident presque partout. Les résultats obtenus concordent presque parfaitement sur une large plage de variation [0 Hz, 10 MHz]. L'erreur relative maximale (5.8 %) est obtenue pour ($F = 10 \text{ MHz}$).

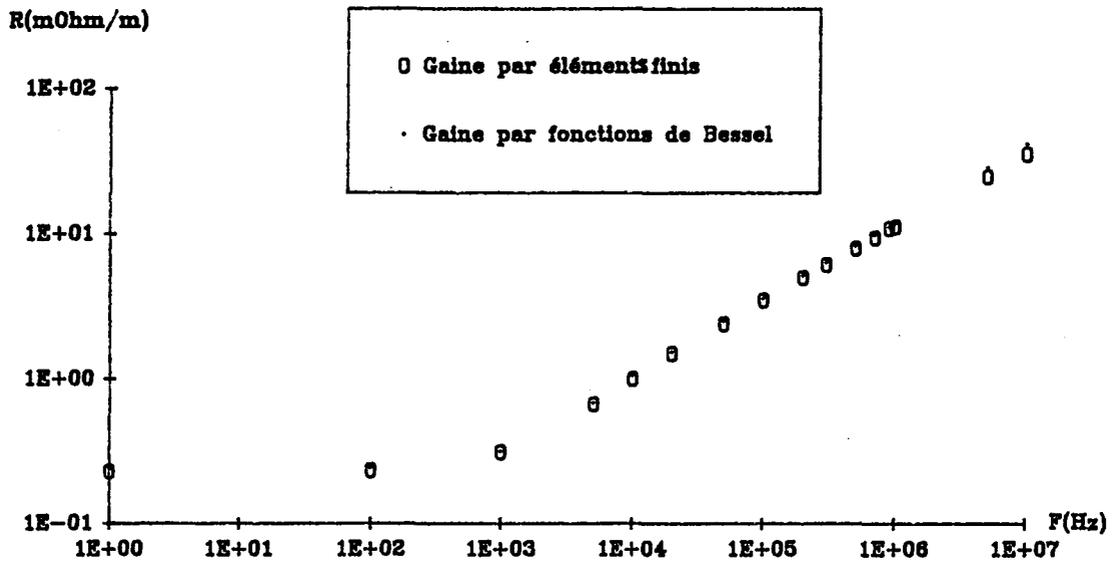


Figure (41) : *Validation du modèle analytique élaboré*

Dans le tableau (5), nous reprenons les résultats analytiques consignés dans la figure (41) (calcul analytique de la résistance de la gaine du câble avec prise en compte de l'effet de peau et de l'effet de proximité) que nous comparons aux résultats donnés par les codes de calculs analytiques les plus usités [36] [51] (ne prenant en compte que l'effet de peau dans les conducteurs). Les caractéristiques de ce câble sont les suivantes:

$$c_1 = 5E-3 \text{ m}, c_2 = 7E-3 \text{ m}, b_1 = 2E-3 \text{ m}, a_1 = 1E-3 \text{ m}, (\mu_{rg} = 1) \text{ et } (\sigma_g = 5.8E07 \text{ S/m})$$

Les résultats obtenus démontrent qu'il est nécessaire de prendre en compte l'effet de proximité dans les conducteurs. L'erreur relative à 10 MHz est de : 27.2%.

Tableau (5) *Comparaison entre les modèles classiques et le modèle développé*

Fréquence F (Hz)	1	1E2	1E3	1E4	1E5	1E6	1E7
Effet de peau seul R (Ω/m)	2.3E-4	2.3E-4	2.5E-4	7.8E-4	2.57E-3	8.25E-3	2.62E-2
Modèle proposé R (Ω/m)	2.3E-4	2.33E-4	3.1E-4	1E-3	3.5E-3	1.13E-2	3.6E-2
Erreur relative Err (%)	0	1.7	19	22	26.6	27	27.2

III. 3. 1. 2. 2. Comparaison du modèle proposé avec la méthode des éléments finis et, le modèle d'Amétani

Dans le tableau (6) nous reprenons la configuration précédente avec les caractéristiques suivantes:

$$c_1 = 5E-3 \text{ m}, c_2 = 7E-3 \text{ m}, b_1 = 3E-3 \text{ m}, a_1 = 1E-3 \text{ m}, (\mu_{rg} = 1) \text{ et } (\sigma_g = 5.8E07 \text{ S/m})$$

Nous comparons nos résultats avec d'une part, ceux donnés en ne tenant compte que de l'effet de peau et, d'autre part, ceux obtenus après traitement par éléments finis.

Les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus par éléments finis, l'erreur relative maximale obtenue entre la méthode des éléments finis et le modèle proposé pour $F= 10 \text{ MHz}$ est de l'ordre de 12%. Par contre nous notons un écart énorme par rapport aux modèles ne prenant en compte que l'effet de peau dans la gaine.

Tableau (6) : *Comparaison entre les modèles classiques et le modèle développé pour $b_1=3E-3m$.*

Fréquence F (Hz)	1	1E2	1E3	1E4	1E5	1E6	1E7
Effet de peau seul R (Ω/m)	2.3E-4	2.3E-4	2.5E-4	7.8E-4	2.6E-3	8.2E-3	2.6E-2
Modèle proposé R (Ω/m)	2.3E-4	2.4E-4	4.1E-4	1.5E-3	5.3E-3	1.8E-2	5.6E-2
Eléments Finis R (Ω/m)	2.5E-4	2.6E-4	4.1E-4	1.5E-3	6E-3	2E-2	6.4E-2

Dans le tableau 7, nous utilisons le câble précédemment défini, nous changeons l'épaisseur de la gaine en faisant $c_2 = 5.2E-3$ m les autres paramètres constituant les caractéristiques de ce câble sont les suivantes:

$$c_1 = 5E-3 \text{ m}, c_2 = 5.2E-3 \text{ m}, b_1 = 2E-3 \text{ m}, a_1 = 1E-3 \text{ m}, (\mu_{rg} = 1) \text{ et } (\sigma_g = 5.8E07 \text{ S/m})$$

Nous comparons la résistance de la gaine du câble calculée avec le modèle que nous proposons aux résultats donnés par celui d'Amétani [5] (rayon extérieur de la gaine supposé infini). Les résultats obtenus illustrent bien les limites de validité du modèle d'Ametani. La comparaison entre le modèle que nous proposons et celui proposé par Amétani [5] ne peut se faire qu'à partir de 1 MHz. Les différences sont énormes et ne sont dues qu'à l'hypothèse faite par Ametani d'un rayon externe de la gaine du câble infini. Enfin, les écarts entre les deux modèles se réduisent pour des fréquences situées au delà de 500 kHz du fait qu'à ces fréquences, la profondeur de pénétration dans le matériau de la gaine tend à devenir plus faible que l'épaisseur de celle ci.

Tableau (7) : *Comparaison entre le modèle proposé avec celui d'Ametani pour le calcul de la résistance de la gaine*

Fréquence F (Hz)	1	1E2	1E3	1E4	1E5	5E5	1E6	1E7
Modèle d'Ametani R (Ω/m)	1.15E-5	1.15E-4	3.6E-4	1.15E-3	3.6E-3	8.1E-3	1.14E-2	3.6E-2
Modèle proposé R (Ω/m)	2.7E-3	2.7E-3	2.7E-3	3.5E-3	4E-3	7.7E-3	1.14E-2	3.6E-2
Erreur relative Err (%)				67	10	5	0	0

Sur le tableau 8, nous dressons les valeurs de la résistance mutuelle totale ($R_{2,1Tot}$) ainsi que celles de la réactance mutuelle totale ($X_{2,1Tot}$) en fonction de la fréquence.

Pour cela, nous considérons deux conducteurs internes en cuivre disposés symétriquement dans la gaine.

Pour chaque conducteur interne i , nous prenons $\mu_{ri} = 1$, $\sigma_i = 5.8E7$ S/m, $a_i = 1E-03$ m.

Pour le câble, $c_1 = 5E-3$ m, $c_2 = 7E-3$ m, $b_1 = 1.5E-3$ m, $b_2 = 1.5E-3$ m, $\mu_{rg} = 1$,

$\sigma_g = 5.8E07$ S/m.

Dans une première étape, nous corrigeons l'erreur apportée par l'hypothèse du rayon externe de la gaine infinie en utilisant les formules de prise en compte du rayon fini de la gaine que nous avons élaboré. Cependant, nous ne tenons pas compte des courants induits par un conducteur interne sur un autre conducteur interne dans le calcul de l'impédance mutuelle totale, Ceci dans le but de pouvoir comparer les résultats obtenus après ces manipulations avec ceux donnés par le modèle que nous proposons. Cette comparaison nous permet de mesurer l'influence du courant induit par un conducteur interne sur un autre conducteur interne lors du calcul de la mutuelle entre conducteurs. Nous remarquerons au passage que le modèle avec prise en compte de l'épaisseur finie de la gaine est un modèle incluant le modèle [5].

Les résultats obtenus et consignés sur le tableau (8) montrent la nécessité de tenir compte de ces courants induits dans le calcul des mutuelles. Les différences obtenues sont énormes en haute fréquence (valeurs allant du simple au double) pour les résistances. Par contre, les termes de réactances mutuelles ne sont pas trop affectés par la prise en considération des courants induits dans les conducteurs internes et ce, surtout en haute fréquence.

Tableau (8) : *Impédance mutuelle en fonction de la fréquence*

(**) Modèle avec prise en compte de l'épaisseur finie de la gaine

(*) Modèle proposé (avec prise en compte des courants induits sur les conducteurs internes et de l'épaisseur finie de la gaine).

Fréquence F (Hz)	1	1E03	1E04	1E05	1E06	1E07
R_{2,1}Tot (**) (Ω/m)	2.3E-4	2.3E-4	6.7E-4	2.2E-3	6.9E-3	2.2E-2
R_{2,1}Tot (*) (Ω/m)	2.3E-4	2.3E-4	1.2E-3	5E-3	1.7E-2	5.4E-2
X_{2,1}Tot (**) (Ω/m)	8.9E-7	8.8E-4	8.2E-3	7.7E-2	0.76	7.5
X_{2,1}Tot (*) (Ω/m)	9.6E-7	1E-3	9.3E-3	8.1E-2	0.77	7.6

Nous remarquons aussi le fait que la résistance et la réactance augmentent en fonction de la fréquence, et qu'en haute fréquence la réactance $X_{2,1}Tot$ tend vers $j\omega L_{2,1}$. Ceci est dû au fait que dans ces gammes de fréquence on a la prédominance des inductances externes par rapport aux inductances internes des conducteurs internes et de la gaine.

III. 3. 2. Résultats et validations dans le cas d'un câble tripolaire blindé

Nous faisons ici une simulation sur un câble de puissance triphasé blindé par la méthode que nous proposons. Cet exemple pris dans la littérature [94], est constitué d'un câble de grandes dimensions latérales et les conducteurs internes sont éloignés les un des autres. Cette disposition des conducteurs a pour conséquence de réduire les effets de proximités entre conducteurs internes.

Les paramètres du câble sont :

$$c_1 = 109.5E-3 \text{ m}, c_2 = 115.9E-3 \text{ m}, b_1 = 43.825E-3 \text{ m}, b_2 = 80.4E-3 \text{ m}, b_3 = 80.4E-3 \text{ m}, \\ a_1 = a_2 = a_3 = 24.25E-3 \text{ m}, \mu_{rg} = 500, \sigma_g = 3.9077E6 \text{ S/m}, \mu_{ii} = 1, \sigma_i = 3.406E7 \text{ S/m}, \\ \theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 2\pi/3$$

Les symétries observées (angles à $2\pi/3$ et $b_2 = b_3$) nous permettent de réduire le nombre de paramètres linéiques à tracer afin d'éviter des redondances.

A partir des valeurs calculées avec les formules (224 et 231) nous traçons les courbes fréquentielles des résistances et inductances propres totales ($R_{i,i,Tot}$ et $L_{i,i,Tot}$) et mutuelles totales ($R_{j,i,Tot}$ et $L_{j,i,Tot}$) du câble en question sur les figures (42 à (49).

$R_{L,1,Tot}$ (Ohm/m)

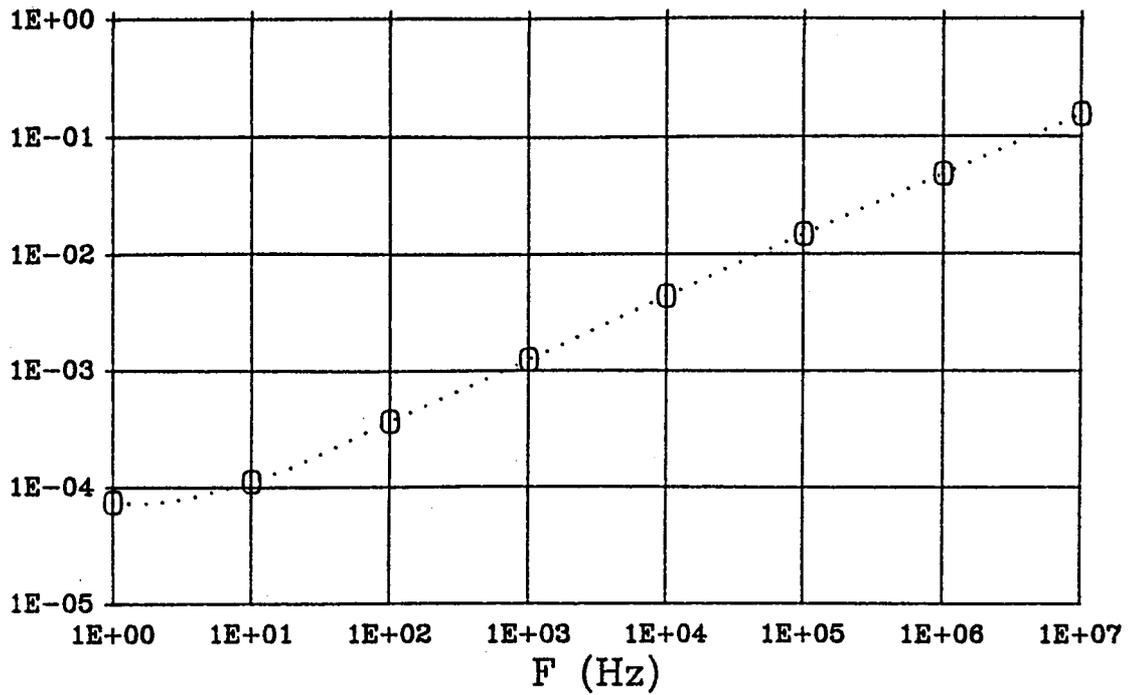


Figure (42) : Résistance $R_{L,1,Tot}$ en fonction de la fréquence

$R_{R,2,Tot}$ (Ohm/m)

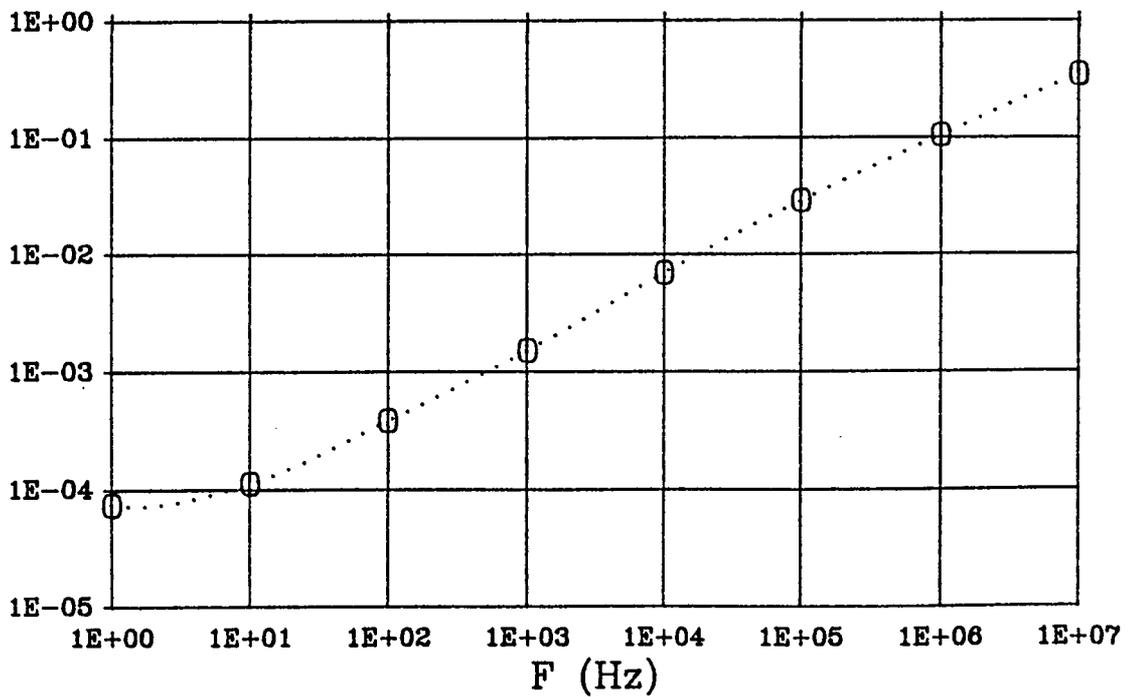


Figure (43) : Résistance $R_{R,2,Tot}$ en fonction de la fréquence

$R_{1,2} \text{ (Ohm/m)}$

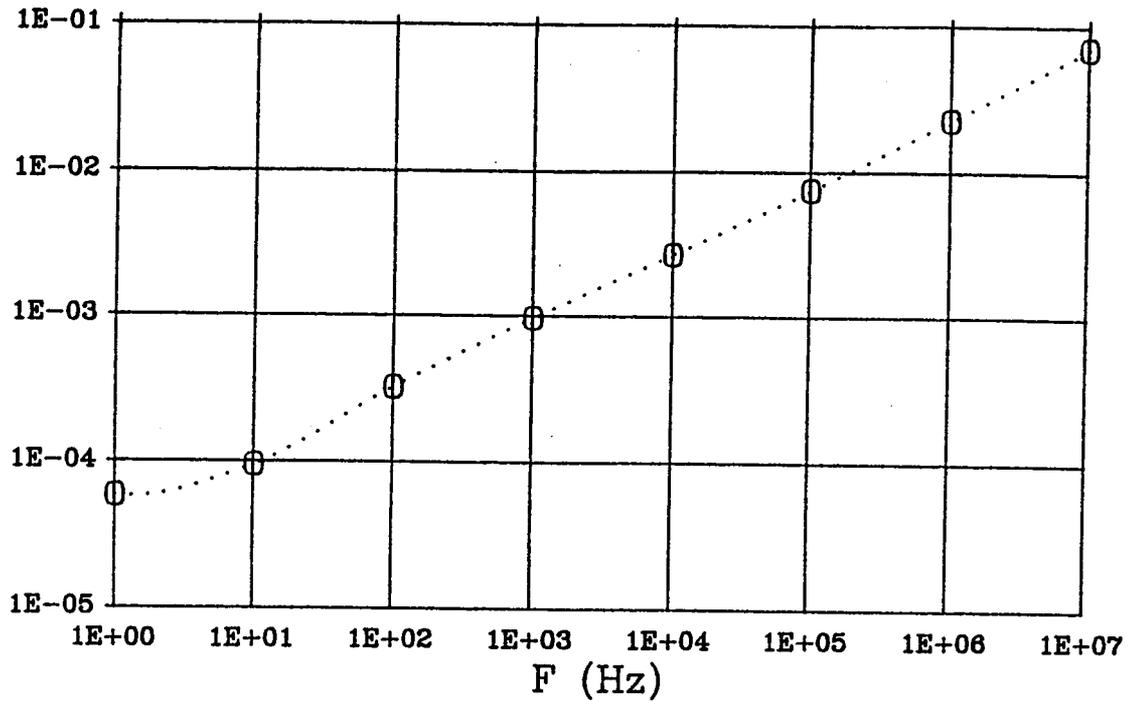


Figure (44) : Résistance $R_{1,2\text{Tot}}$ en fonction de la fréquence

$R_{2,3} \text{ (Ohm/m)}$

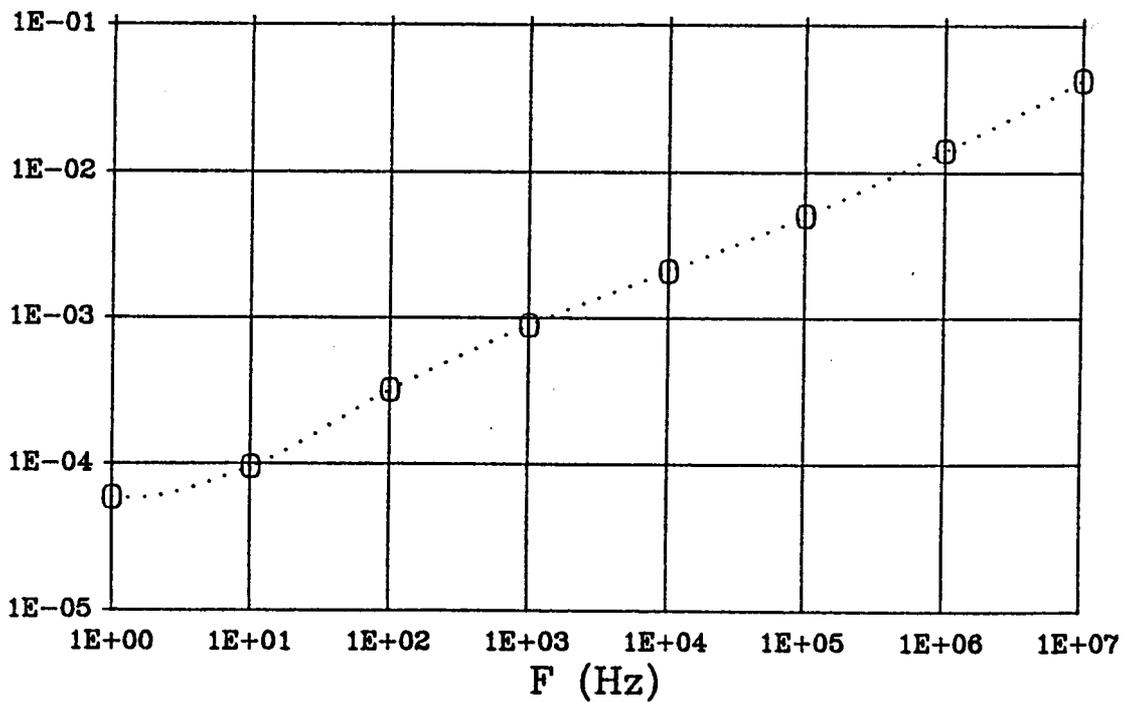


Figure (45) : Résistance $R_{2,3\text{Tot}}$ en fonction de la fréquence

$L_{1,1} \text{ (H/m)}$
 $_{Tot}$

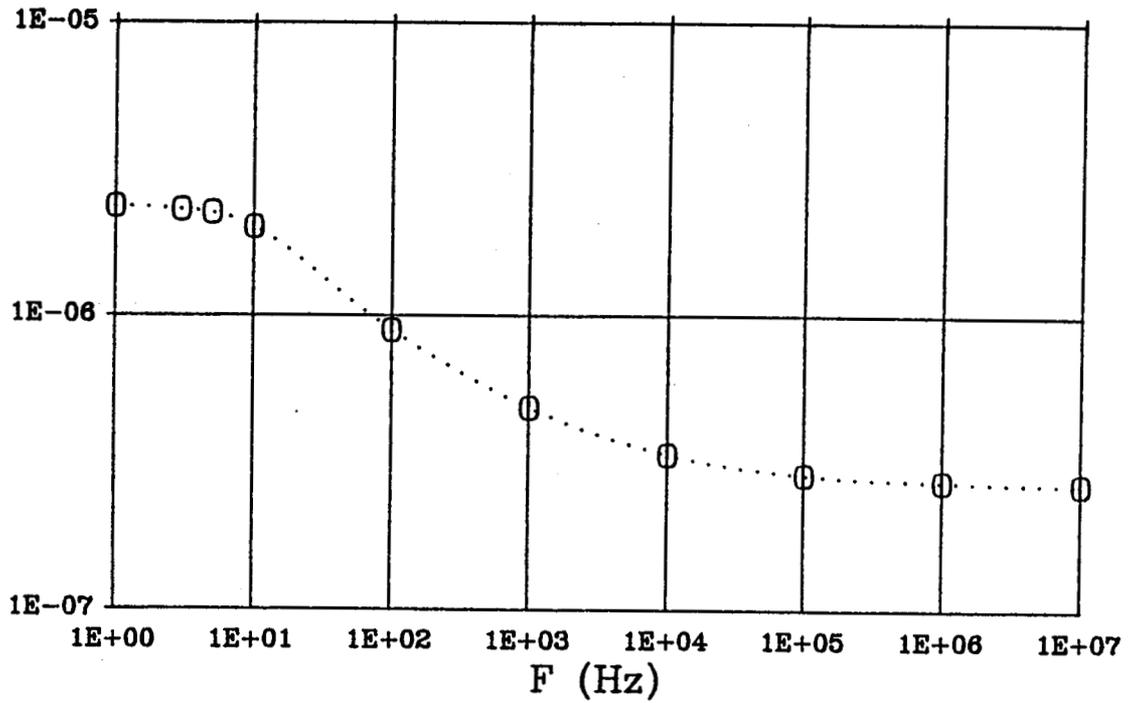


Figure (46) : Inductance $L_{1,1,Tot}$ en fonction de la fréquence

$L_{2,2} \text{ (H/m)}$
 $_{Tot}$

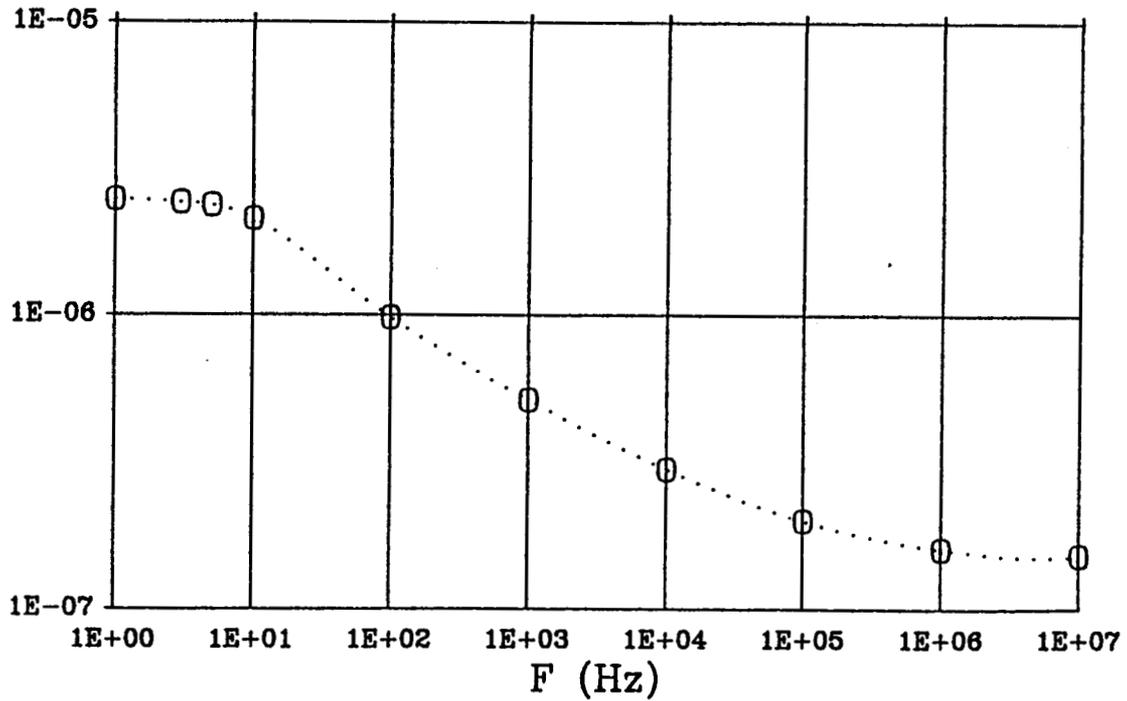


Figure (47) : Inductance $L_{2,2,Tot}$ en fonction de la fréquence

$L_{1,2}^{\text{Tot}}$ (H/m)

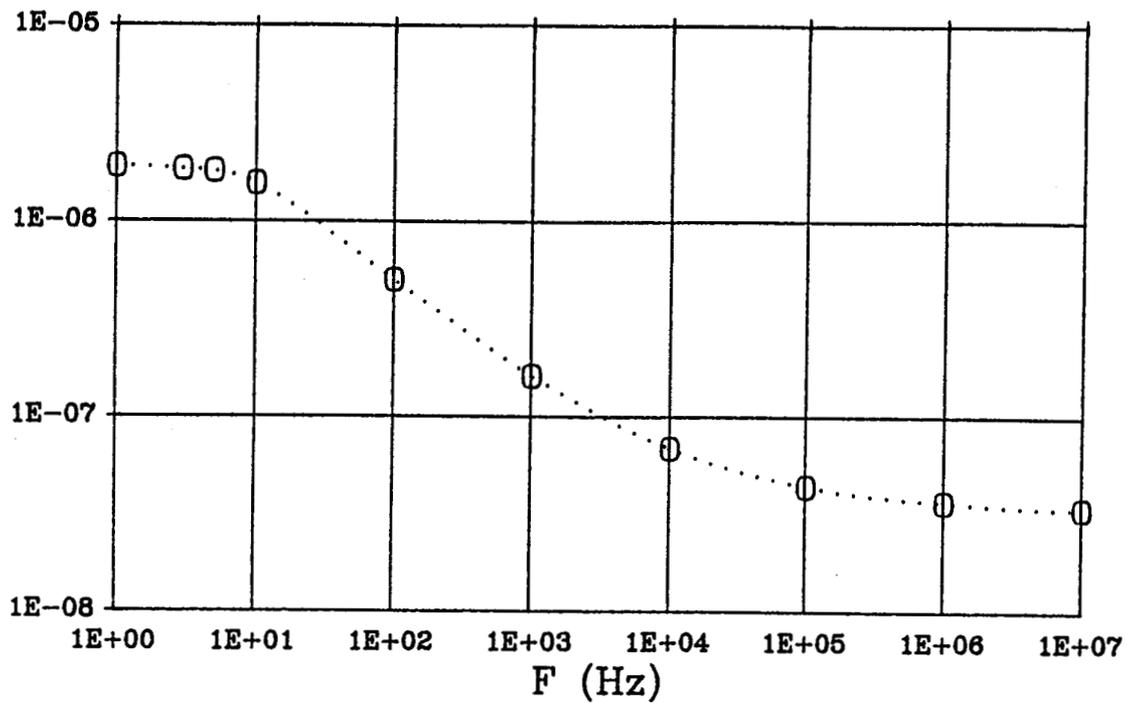


Figure (48) : Inductance $L_{1,2}^{\text{Tot}}$ en fonction de la fréquence

$L_{2,3}^{\text{Tot}}$ (H/m)

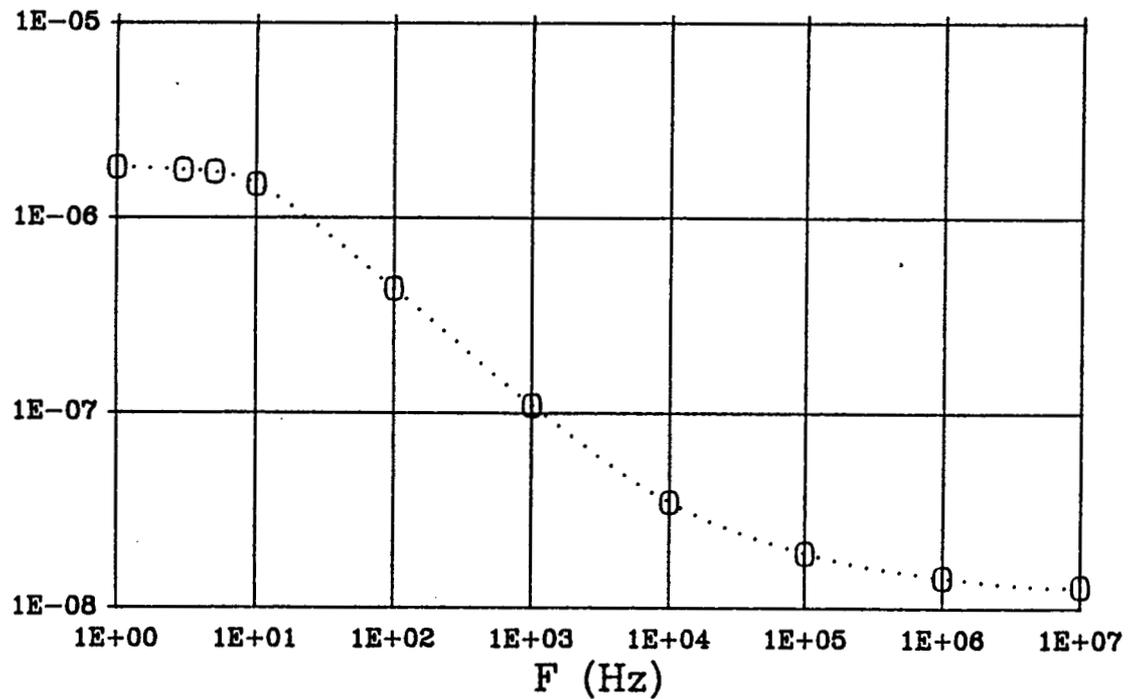


Figure (49) : Inductance $L_{2,3}^{\text{Tot}}$ en fonction de la fréquence

Nous ferons les remarques suivantes sur les courbes obtenues:

-les courbes des résistances sont croissantes en fonction de la fréquence tandis que celles des inductances sont décroissantes en fonction de la fréquence. Cette croissance des résistances est due à l'effet de peau et de proximité dans les parties conductrices du câble. De même, la décroissance des inductances due elle-aussi à l'effet de peau et de proximité résulte de la décroissance des inductances internes des parties conductrices.

-Les résistances et inductances propres sont supérieures aux résistances et inductances mutuelles sur toute la gamme de fréquence. Ce fait est plus remarquable en haute fréquence du fait de l'effet de peau et de proximité dans les conducteurs. Ceci est dû en première approximation à la prise en compte de l'impédance du conducteur interne ainsi que de l'impédance due aux courants induits sur les conducteurs internes voisins, dans l'expression de l'impédance propre, tandis que seule l'impédance due aux courants induits sur un conducteur est incluse dans l'expression de l'impédance mutuelle.

-Le fait que le conducteur 1 soit moins proche de la gaine que les conducteurs 2 et 3 a pour conséquence d'augmenter l'effet de proximité au niveau de la gaine pour les circuits composés du conducteur 2 et de la gaine ou du conducteur 3 et de la gaine. Ce qui nous donne sur les courbes $R_{1,1Tot}$ inférieure à $R_{2,2Tot}$ sur toute la gamme de fréquence adoptée.

Nous dressons un tableau de valeurs de certains paramètres linéiques parmi ceux tracés précédemment (voir tableau 9) que nous comparons aux résultats obtenus par calcul des mêmes paramètres selon le modèle proposé mais cette fois, sans prendre en compte les effets de proximité sur les conducteurs internes (après cette manipulation, le modèle obtenu sera appelé modèle approché). Nous notons une légère différence entre ces deux modèles pour les résistances tandis qu'aucune variation n'est enregistrée pour les inductances. Cette différence s'explique par la prise en compte de l'effet de proximité sur les conducteurs internes dans le modèle que nous proposons, ce qui n'est pas le cas pour celui approché.

Tableau (9) *Comparaison entre le modèle proposé et [5] dans les cas où les conducteurs internes ne sont pas très proches*

F=10 MHz	R_{1,1}Tot (Ω/m)	R_{2,2}Tot (Ω/m)	R_{2,3}Tot (Ω/m)	L_{1,1}Tot (H/m)	L_{2,2}Tot (H/m)	L_{2,3}Tot (H/m)
Modèle approché	0.14	0.33	4.1	2.7E-7	1.5E-7	1.3E-8
Modèle proposé	0.16	0.35	4.3	2.7E-7	1.5E-7	1.3E-8

III. 3. 3. Résultats et validations dans le cas d'un câble blindé à quatre conducteurs internes sur une gamme de fréquence [1 MHz, 10 MHz]

Nous comparons ici les valeurs obtenues par notre méthode à celles obtenues par une méthode de mesure [49]. Il s'agit de quatre conducteurs de phases de rayons identiques entourés de diélectrique, et disposés symétriquement à l'intérieur d'une gaine. Les paramètres du câble simulés sont :

$$c_1 = 2.17E-3 \text{ m}, c_2 = 2.37E-3 \text{ m}, b_1 = 1.27E-3 \text{ m}, b_2 = 1.27E-3 \text{ m}, b_3 = 1.27E-3 \text{ m},$$

$$b_4 = 1.27E-3 \text{ m}, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.45E-3 \text{ m}, \mu_{rg} = 1, \sigma_g = 5.8E07 \text{ S/m},$$

$$\mu_{ri} = 1, \sigma_i = 5.8E7 \text{ S/m}, \theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{34} = \theta_{41} = \pi/2, \theta_{13} = \theta_{24} = \pi, \epsilon_{ri} = 3$$

Les résultats obtenus par les deux méthodes consignés sur la figure 50 sont identiques pour les fréquences comprises entre 1 et 2 MHz. Au delà de ces fréquences, des écarts sont observés, et l'écart maximum entre les deux méthodes est obtenu à 10 MHz avec une erreur de l'ordre de 7%.

L11 (H/m)

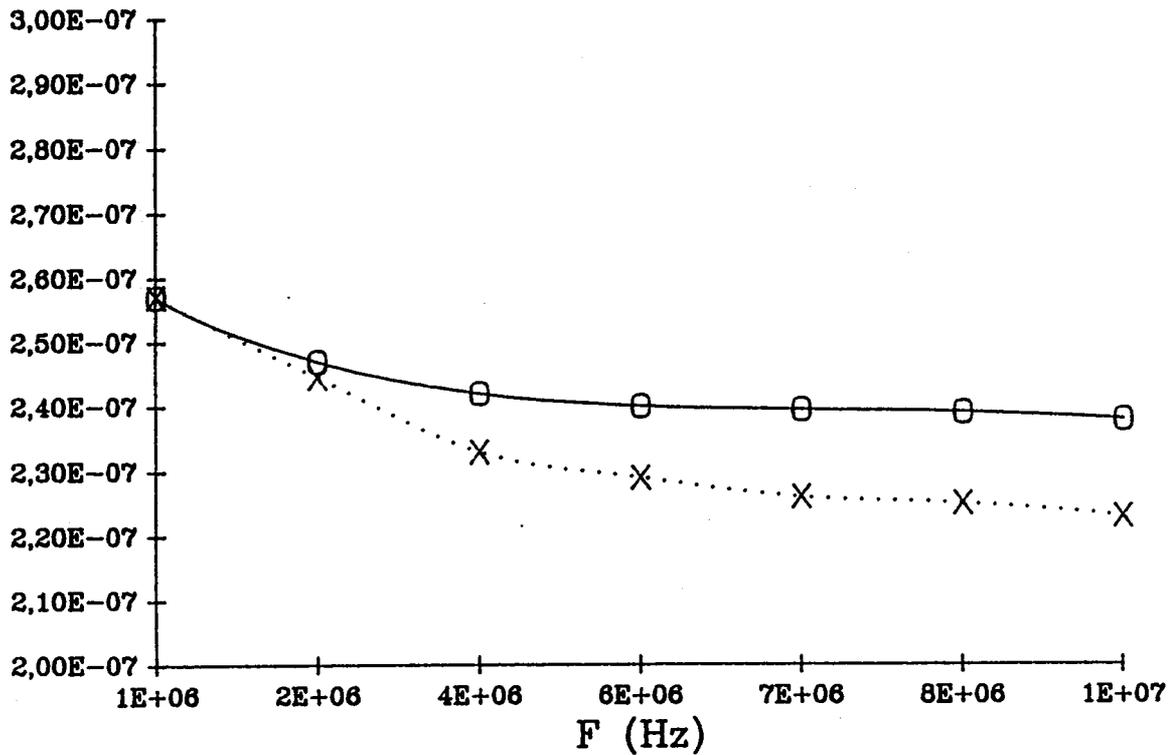


Figure (50) : *Comparaison entre le modèle proposé et des valeurs mesurées (Kasdepke)*

000 : Valeurs fournies par le modèle proposé

xxx : Valeurs prises dans [49]

Nous comparons maintenant les éléments de la matrice des inductances calculés avec la méthode que nous proposons et ceux fournies par [49] à F=10 MHz.

Calculs effectués par la méthode que nous proposons

$$L' = \begin{bmatrix} 238 & 49.7 & 27.9 & 49.7 \\ 49.7 & 238 & 49.7 & 27.9 \\ 27.9 & 49.7 & 238 & 49.7 \\ 49.7 & 27.9 & 49.7 & 238 \end{bmatrix} \text{ nH/m} \quad (290)$$

Résultats fournis par [49]

$$L' = \begin{bmatrix} 221.9 & 48.6 & 27.2 & 48.6 \\ 48.6 & 221.9 & 48.6 & 27.2 \\ 27.2 & 48.6 & 221.9 & 48.6 \\ 48.6 & 27.2 & 48.6 & 221.9 \end{bmatrix} \text{nH/m} \quad (291)$$

La comparaison des deux matrices ci-dessus montre une bonne concordance entre les résultats. Les écarts maximums obtenus entre les éléments des deux matrices d'inductances ne dépassent pas 7%.

III. 4. CONCLUSION

L'élaboration de ce nouveau mode de calcul analytique nous a permis de déterminer avec un optimum de précision les impédances et inductances des câbles multifilaires blindés.

Nous avons tout d'abord voulu montrer à travers ce chapitre que les modèles analytiques usuels (existant aujourd'hui) représentaient des formes particulières du modèle que nous proposons (rayon extérieur de la gaine du câble infini, absence de prise en compte des courants induits dans les conducteurs internes ainsi que dans les conducteurs voisins).

Nous avons illustré la partie concernant les résultats et validations par des courbes ainsi que des tableaux qui prouvent la validité du modèle que nous proposons. Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par les modèles analytiques classiques les plus usités actuellement.

Tout d'abord cette comparaison a été faite avec des modèles ne prenant en compte que l'effet de peau dans les conducteurs puis, d'autres ont été réalisées avec le modèle analytique le plus puissant existant actuellement (modèle d'Amétani) et nous avons montré les limites de ces modèles.

D'autres comparaisons avec des calculs faits par éléments finis ainsi que des confrontations avec des résultats de mesures prouvent la validité du modèle proposé sur la plage de fréquence d'au moins [0 Hz, 10 MHz].

CONCLUSION GENERALE

Nous avons tout au long de ce rapport présenté les travaux réalisés. Notre objectif était donc d'apporter une contribution dans le domaine du calcul des paramètres linéiques des lignes et câbles multifilaires avec la prise en compte sous une forme analytique de l'effet de peau et de proximité dans les parties conductrices des systèmes à étudier.

Ces travaux de recherche comportent aussi un aspect didactique. En effet, bien que résultant du même phénomène électromagnétique, nous sommes parvenus à présenter l'effet de proximité et l'effet de peau sous forme de contributions séparées, permettant ainsi de quantifier leur importance relative selon les topologies ou les fréquences. En outre, à partir des lois simples de l'électromagnétisme telles que la loi de Faraday, nous obtenons les formules recherchées, que nous avons cherchées à valider tout au long de ce travail, notamment en les faisant tendre vers leurs formes asymptotiques classiques.

Un autre aspect de ce travail réside sur l'élaboration même des modèles ainsi que sur leur mise en oeuvre sous forme d'un code de calcul. A cet effet, nous tirons les enseignements que nous allons énumérer successivement.

Dans le chapitre I, nous avons tout d'abord présenté et confronté des modèles permettant de résoudre les équations des télégraphistes pour montrer l'importance de la détermination avec un optimum de précision des paramètres linéiques des lignes et câbles. Dans une seconde étape, nous nous sommes penchés sur les divers types de modélisation des paramètres primaires des conducteurs et du sol, et avons montré la grande utilité ainsi que les limites des modèles existants.

Dans le chapitre II, nous avons tout d'abord proposé, à partir des équations de Maxwell, un modèle analytique de calcul des impédances globales de conducteurs soumis à l'effet de proximité de plusieurs autres conducteurs, tout ce système étant isolé dans l'air. Dans une deuxième étape, nous proposons un modèle original de prise en compte de l'effet de proximité dans le calcul des impédances et admittances des conducteurs situés à une certaine hauteur au-dessus d'un plan conducteur pouvant être le sol ou un plan de masse. Les paramètres

secondaires en sont déduits puis exploités. Enfin, nous avons donné une méthode simple et efficace de programmation des fonctions de Bessel.

Dans le chapitre III, nous avons proposé à partir du modèle d'Ametani, conçu pour les câbles de puissance, un nouveau modèle plus général des câbles multifilaires blindés avec la prise en compte des effets de proximité les plus prononcés ainsi que des épaisseurs réelles des gaines des câbles. Nous avons montré alors que le modèle d'Ametani devenait un cas particulier de celui-ci. Une extension de notre modèle est faite aux cas des câbles multifilaires blindés au-dessus d'un plan conducteur ou enterrés, se rapprochant ainsi des cas rencontrés dans la réalité.

Dans les chapitres II et III, nous avons varié nos validations en comparant nos résultats avec ceux des codes de calculs par éléments finis, puis avec des résultats de mesures pris dans la littérature, et enfin nous avons confronté nos résultats à ceux donnés par les modèles analytiques les plus puissants qui existent. Les résultats obtenus sont en général en concordance avec la validation, et nous pensons que nos travaux constituent un apport certain dans le domaine de la modélisation des lignes et câbles multifilaires blindés.

Mais des développements ultérieurs sont bien sûr à réaliser.

Il sera intéressant dans une première étape d'introduire des coefficients de correction des impédances et admittances pour tenir compte des torsades intervenant dans les câbles torsadés, puis dans une deuxième étape d'envisager d'introduire la notion de conducteur équivalent pour réduire les dimensions des systèmes à résoudre, et enfin essayer de prendre en compte des gaines inhomogènes (tresses et autres), ce qui est encore moins évident.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **M. Abramowitz** and **I. A. Stegun**, " Handbook of Mathematical Functions, " Dover Publications, INC., New York, Nov 1970 .
- [2] **M. Aguet** et **J. J. Morf**, " Traité d'électricité, Energie électrique, " Vol. 12, Ed. Georgi, 1981.
- [3] **A. K. Agrawal**, **K. M. Lee**, **L. D. Scott**, and **H. M. Fowles**, " Experimental characterization of multiconductor transmission lines in the frequency domain, " *IEEE Trans. on Electromagn. Compat.*, vol. EMC-21, no. 1, pp. 20-27, February 1979.
- [4] **A. Ahmad**, **M. Kane**, **Ph Auriol**, "High frequency equivalent models for multiconductor transmission lines, "To be published in the proceeding of the E.M.C.'94 Roma (International Symposium on Electromagnetic Compatibility), Rome, Italy, September 13-16, 1994.
- [5] **A. Ametani**, " A general formulation of impedance and admittance of cables, " *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, vol. PAS-99, no. 3, pp. 902-910, May/ June 1980.
- [6] **A. Ametani**, " Wave propagation characteristics of cables, " *IEEE Transactions on Power Apparatus and systems*, Vol. PAS-99, no. 2, pp. 499-505, March / April 1980.
- [7] **P. De. Arizon** and **H. W. Dommel**, " Computation of cable impedances based on subdivision of conductors, " *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. PWRD-2, no. 1, pp. 21-26, January 1987.
- [8] **A. H. M. Arnold**, " Eddy-current losses in multi-core paper-insulated lead-covered cables, armoured and unarmoured, carrying balanced 3-phase current, " *J. of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 88, pp. 52-63, 1941.
- [9] **F. Arreghini**, **M. Ianoz**, **C. A. Nucci**, **F. Rachidi**, " Une comparaison entre les méthodes de calcul temporel et fréquentiel appliquées au problème de couplage IEM-ligne aérienne, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, Lyon, pp. 329-333, Juin 1992.
- [10] **W. W. Bell**, "Special functions for scientists and engineers, " D. Van. Nostrand Company, Ltd, 1968.
- [11] **L. Bergeron**, " Du coup de bélier en hydraulique au coups de foudre en électricité, " Dunod, 1929.
- [12] **G. Bianchi**, **G. Luoni**, " Induced currents and losses in single-core submarine cables, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. PAS-95, pp.49-58, 1976.
- [13] **R. Boucheteau**, **M. Cazajous**, **B. Demoulin**, " Banc de mesure d'impédance de transfert pour câbles multiconducteurs blindés, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, pp. 164-168, Lyon, 1992.
- [14] **O. Breien**, **I. Johansen**, " Attenuation of travelling waves in single-phase high-voltage cables, " *PROC. IEE*, Vol. 118, no.6, pp. 787-793, June 1971.

Bibliographie

- [15] **G. W. Brown** and **R. G. Rocamora**, " Surge propagation in Three phase pipe-type cables, Part I - Unsaturated pipe, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. 95, no. 1, pp. 89-95, Jan. / Feb. 1976.
- [16] **N. Burais**, **A. Nicolas**, " Finite element modelisation of physical singularities in electromagnetic problems, " 7th International Conference on Finite Element Method in Flow Problems - Huntsville, USA, 3 / 7 Apr. 1989.
- [17] **S. Butterworth**, " Eddy current losses in cylindrical conductors with special applications to the alternating current resistances of short coils, " *Phil. Trans. Royal Soc. of London*, vol. 222, pp. 57-100, Sept. 1921.
- [18] **J. R. Carson**, " Wave propagation in overhead wires with ground return, " *Bell System Technical Journal*, vol. 5, pp. 539-554, Jan. 1926.
- [19] **J. R. Carson**, " Wave propagation over parallel wires : The proximity effect, " *Phil. Mag. S.6.*, vol. 41, no. 244, pp. 607-633, April 1921.
- [20] **S. Celozzi** and **M. D'Amore**, " Rdio-frequency analysis of carrier channels on multiconductor distribution cable networks, " *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 6, no. 3, pp. 959-965, July 1991.
- [21] **Q. Chen**, **A. Konrad**, **P. P. Biringer**, " An integrodifferential finite element-Green's function method for the solution of unbounded eddy current problems, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, no. 2, pp. 1874-1877, March 1993.
- [22] **E. Comellini**, **A. Invernizzi**, **G. Manzoni**, " A computer program for determining electrical resistance and reactance of any transmission line " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. PAS-92, pp.308-314, Jan. / Febr. 1973.
- [23] **S. Cristina** and **M. Feliziani**, " FEM technique for multiconductor cable parameters calculation, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 2986-2988, July. 1989.
- [24] **A. Darcherif**, " Contribution à la modélisation des phénomènes d'interférences électromagnétiques dans les réseaux électriques, " Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, Oct. 1990.
- [25] **H. W. Dommel**, " Overhead line parameters from handbook formulas and computer programs, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. PAS-104, no. 2, pp. 366-372, February 1985.
- [26] **H. W. Dommel**, " Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. PAS-88, pp. 388-399, April 1969.
- [27] **H. W. Dommel**, " EMTP Theory book, " 1986.
- [28] **C. Dubanton**, **I. Hennebique** et **J. Roguin**, " Régimes transitoires dans les réseaux électriques, " *Techniques De l'Ingénieur*, Référence : D 4410-1.

Bibliographie

- [29] **C. Dubanton**, " Calcul approché des paramètres primaires et secondaires d'une ligne de transport. Valeurs homopolaires, " E.D.F., Buletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie B, pp. 52-62, 1969.
- [30] **R. C. Dugan, R. G. Rocamora, G. W. Brown**, " Surge propagation in Three phase pipe-type cables, Part II - Duplication of field tests including the effects of neutral wires and pipe saturation, " IEEE Trans. on Power App. and Sys., vol. 96, no. 3, pp. 826-833, May / June 1977.
- [31] **C. F. Du Toit**, " The numerical computation of Bessel functions of the first and second kind for integer orders and complex arguments, " IEEE Trans. on Antennas and propagation, vol. 38, no. 9, pp. 1341-1349, Sept. 1990.
- [32] **H. B. Dwight**, " Electrical coils and conductors, " McGraw-Hill, 1954.
- [33] **H. B. Dwight**, " Skin effect and proximity effect in tubular conductors, " AIEE Trans., vol. 41, pp. 189-198, 1922.
- [34] **A. Emanuel and H. C. Doepken Jr.**, " Calculation of losses in steel enclosures of three phase bus or cables, " IEEE Trans. on Power App. and Syst., vol. PAS-93, pp. 1758-1767, 1974.
- [35] **T. H. Fawzi, K. F. Ali, P. E. Burke**, " Eddy current losses in finite length conducting cylinders, " IEEE Trans. on Mag., vol. 19, no. 5, pp. 2216-2218, Sept. 1983.
- [36] **S. Frankel**, " Cable and multiconductor transmission line analysis, " Harry Diamond Labs., Washington, DC, Tech. Rep. HDL TR-091-1, June 1974.
- [37] **S. Frankel**, " Multiconductor transmission line analysis, " Dedham, MA : Artek House, 1977.
- [38] **C. Gary**, " Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes, " E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie B, no. 3/4, pp. 5-20, 1976.
- [39] **F. Haber**, " The magnetic field in the vicinity of parallel and twisted three-wire cable carrying balanced three-phased current, " IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. EMC-16, no. 2, pp. 76-82, May 1974.
- [40] **M. E. Hardy, S. Ardalan, J. B. O'Neal Jr., L. J. Gale, K. C. Shuey**, " A model for communication signal propagation on three phase power distribution lines, " IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 6, no. 3, pp. 966-972, July 1991.
- [41] **A. M. Hussein and P. P. Biringer**, " Boundary matching method as applied to systems of multiconductors, " IEEE Trans. on Mag., vol. 23, no. 5, pp. 3299-3301, Sept. 1987.
- [42] **P. Johannet et B. Dalle**, " Calcul des chutes de tension, des échauffements et des efforts électrodynamiques en cas de court-circuit, " Techniques De l'Ingénieur, Référence : D 673-1.
- [43] **M. Kane**, " Etude et simulation d'un câble multifilaire blindé, " Rapport de DEA, ECL-INPG, juin 1990.

Bibliographie

- [44] **M. Kane, Ph. Seltner, Ph. Auriol**, " Détermination des paramètres linéiques des câbles multifilaires, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, pp. 323-328, Lyon, 1992.
- [45] **M. Kane, Ph. Auriol**, " Analytical modelling of frequency parameters of lines, " IEE special proceedings of the 2nd International Conference on Computation in Electromagnetics, Nottingham, U. K., pp. 239-242, 12-14 April 1994.
- [46] **M. Kane, S. Rathoin, Ph. Auriol**, " Developpement de nouveaux modèles analytiques pour la détermination des impédances de câbles bifilaires blindés avec effets de proximités, " Actes du 7^{ème} Colloque International CEM-94, pp. 349-354, Toulouse, 1994.
- [47] **M. Kane, A. Ahmad, Ph. Auriol**, " Proximity effects in cylindrical conductors for applications in a wide range of frequencies, " wep-08-05, Electromagnetic Noise, Book of Abstracts, NEM, EUROEM, HPEM, International Symposium on Electromagnetic Environments and Consequences, Bordeaux France, May 30 - June 4 1994.
- [48] **M. Kane, A. Ahmad, Ph. Auriol**, " Multiwire shielded cable parameters computation, " Conference Record of IEEE International Conference on Electromagnetic Field Computation, pp. P3Y04, Aix-les-Bains France, July 5-7 1994. To be published in IEEE Transactions on Magnetics, May 1995.
- [49] **T. Kasdepke, J. L. ter Haseborg**, " A method for measuring the primary line parameters of multiconductor transmission lines, " International Symposium on EMC, pp. 245-250, Zurich 1993.
- [50] **K. Kawasaki, M. Inami, T. Ishikawa**, " Theoretical considerations on eddy current losses in non-magnetic and magnetic pipes for power transmission systems, " IEEE Trans. on Power App. and Sys., vol. 100, no. 2, pp. 474-484, Feb. 1981.
- [51] **K. Kerroum, A. Benali, J. Fontaine, M. Vautier, A. Zeddou**, " Analyse des perturbations en régime impulsionnel sur des lignes multiconducteurs, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, pp. 85-91, Lyon, 1992.
- [52] **K. Kerroum, F. Paladian, J. Fontaine, M. Vautier, A. Zeddou**, " Approche globale du couplage d'une onde électromagnétique avec un système de câbles multifilaires. Notion du conducteur équivalent, " Actes du 7^{ème} Colloque International CEM-94, pp. 247-252, Toulouse, 1994.
- [53] **R. L. Khan, G. I. Costache**, " Finite element method applied to modeling crosstalk problems on printed circuit boards, " IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. EMC-31, no. 1, pp. 5-15, Feb. 1989.
- [54] **S. Kiener and M. Ney**, " Domaine temporel ou fréquentiel : existe t'il une méthode numérique universelle, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, pp. 359-364, Lyon, 1992.
- [55] **L. Koné**, " Conception d'outils numériques et de bancs de mesures permettant d'évaluer l'efficacité de blindage de câbles et connecteurs, " Thèse, Université de Lille, Oct. 1989.
- [56] **A. Konrad**, " Integrodifferential finite element formulation of two-dimensional steady-state skin effect problems, " IEEE Trans. on Mag., vol. MAG-18, no. 1, pp. 284-292, Jan. 1982.

Bibliographie

- [57] **S. Y. Lee, A. Konrad, R. Saldanha**, " Lossy transmission line transient analysis by the finite element method, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 29, no. 2, pp. 1730-1732, March. 1993.
- [58] **A. W. Lotfi, P. M. Gradzki and F. C. Lee**, " Proximity effects in coils for high frequency power applications, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 28, no. 5, pp. 2169-2171, Sept. 1992.
- [59] **V. Malo' Machado, J. F. B. Da silva**, " Series-impedance of underground transmission systems, " *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 3, no. 2, pp. 417-424, April 1988.
- [60] **V. M. Malo' Machado, J. A. Brandao Faria, J. F. Borges da Silva**, " Ground return effect on wave propagation parameters of overhead power cables, " *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 5, no. 2, pp. 825-832, April 1990.
- [61] **C. Manneback**, " An integral equation for skin effect in parallel conductors, " *Jounal of Math. and Physics.*, vol. 1, pp.123-146, 1922.
- [62] **E. S. M. Mok and G. I. Costache**, " Skin effect considerations on transient response of a transmission line excited by an electromagnetic pulse, " *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 34, no. 3, pp. 320-329, August 1992.
- [63] **A. N'Dir**, "Contribution à l'étude des surtentions de manoeuvre sur les lignes à très haute tension, " Thèse de Doctorat d'Etat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1971.
- [64] **M. M. Ney**, " Striction and skin effects on the internal impedance value of flat conductors, " *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, vol. 33, no. 4, pp. 321-327, Nov. 1991.
- [65] **M. M. Ney and G. I. Costache**, " Paramètres distribués d'une ligne bifilaire avec blindage non parfaitement conducteur, " Actes du 6^{ème} Colloque International CEM-92, LYON, 1992.
- [66] **F. W. J. Olver and D. J. Sookne**, " A note on the backward recurrence algorithms, " *Mathematics of Computation*, vol. 26, no. 120, pp. 941-947, October 1972.
- [67] **F. W. J. Olver**, " Numerical solutions of second order difference equations, " *Nat. Bur. Stand. (U. S.). 71B Math. and Math. Phys.*, no. 2&3, pp. 111-129, 1967.
- [68] **C. R. Paul and A. E. Feather**, " Computation of the transmission line inductance and capacitance matrices from the generalized capacitance matrix," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-18, pp. 175-183, Nov. 1976.
- [69] **C. R. Paul**, " Reference potential terms in static capacitance calculations via the method of moments," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-20, no. 1, pp. 267-269, Feb. 1978.
- [70] **C. R. Paul and J. A. McKnight**, " Prediction of crosstalk involving twisted pairs of wires, Part I, A transmission -line Model for twisted -wire pairs, " *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-21, no. 2, pp. 92-105, May 1979.
- [71] **R. Pelissier**, " Les réseaux d'énergie électrique - Tome 4, " Dunod, 1976.

Bibliographie

- [72] **L. S. Piggott** and **G. F. Nix**, " Electromagnetic levitation of a conducting cylinder, " PROC. IEE, vol. 113, no. 7, pp. 1229-1235, July 1966.
- [73] **F. Pollaczek**, " Sur le champ produit par un conducteur simple infiniment long parcouru par un courant alternatif, " Rev. Gén. d'Elect., vol. 29, pp. 851-867, 1931.
- [74] **C. Poudroux**, "Etude de l'incidence des paramètres primaires des lignes couplées sur la précision de prédiction de l'amplitude des parasites induits sur des torons multifilaires, " Thèse de Doctorat, Université de Lille, Sept. 1992.
- [75] **M. Puharic**, "Modélisation en régime transitoire HF des lignes d'énergie BT; application au couplage avec la foudre, " Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [76] **L. Ramon**, " Conducteurs aux hautes fréquences, " Techniques De l'Ingénieur, Référence : E 230-1.
- [77] **J. C. Sabonnadière**, **G. Meunier**, **B. Morel**, " Flux : A general interactive finite elements package for 2D electromagnetic fields, " IEEE Trans. on Mag., vol. 18, no. 2, pp. 624-626, March 1982.
- [78] **J. C. Sabonnadière** and **J. L. Coulomb**, " Calcul des champs électromagnétiques, " Techniques de l'ingénieur, Référence : E 3020-1.
- [79] **J. C. Sabonnadière** and **P. Auriol**, " Surtensions de manoeuvre dans les réseaux HT et THT - Principales méthodes de calcul des régimes transitoires dans les réseaux THT, " RGE, t.82, no. 11, Nov. 1973.
- [80] **S. A. Schelkunoff**, " The electromagnetic theory of coaxial transmission line and cylindrical shields, " Bell Syst. Tech. J., vol. 13, pp. 532-579, 1934.
- [81] **R. Schinzinger** and **A. Ametani**, " Surge propagation characteristics of pipe enclosed underground cables, " IEEE Trans. on Power App. and Syst., vol. PAS-97, no. 5, pp. 1680-1688, Sept. / Oct. 1978.
- [82] **A. M. Schwab**, " Calcul des chutes de tension, des échauffements et des efforts électrodynamiques en cas de court-circuit, " Techniques De l'Ingénieur, Référence : D 674-1.
- [83] **A. Semlyen**, Discussion to " overhead line parameters from handbook formulas and computer programs, " by H. W. Dommel, IEEE Trans. on Power App. and Sys., vol. PAS-104, pp. 371, February 1985.
- [84] **P. Silvester**, " Modal network theory of skin effect in flat conductors, " Proc. IEEE, vol. 54, pp. 1147-1151, Sept. 1966.
- [85] **J. F. Solis**, " Etude numérique des régimes transitoires dans les réseaux de lignes et de câbles à très haute tension, " Thèse, ECL-INPG, Dec. 1981.
- [86] **J. A. Tegopoulos** and **E. E. Kriezis**, " Eddy current distribution in cylindrical Shells of infinite length due to axial currents, Part I : Shells of one boundary, " IEEE Trans. on Power App. and Sys., vol. 90, pp.1278-1286, (1971).

Bibliographie

- [87] **J. A. Tegopoulos** and **E. E. Kriezis**, " Eddy current distribution in cylindrical Shells of infinite length due to axial currents, Part II : Shells of finite thickness, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. 90, pp.1287-1294, (1971).
- [88] **E. J. Tuohy**, **T. H. Lee**, **H. P. Fullerton**, " Transient resistance of conductors, " *IEEE Trans. on Power App. and Sys.*, vol. 87, no. 2, pp. 455-462, Feb. 1968.
- [89] **S. Wanser**, **L. Krähenbühl**, **A. Nicolas**, " Computation of 3D induction hardening problems by combined finite and boundary element methods, " *COMPUMAG*, Miami, Florida, 1993.
- [90] **L. M. Wedepohl** and **D. J. Wilcox**, " Transient analysis of underground power-transmission systems, " *Proc. IEE*, vol. 120, no. 2, pp. 253-260, Feb. 1973.
- [91] **L. M. Wedepohl** and **D. J. Wilcox**, " Estimation of transient sheat overvoltages in power-cable transmission systems, " *Proc. IEE*, vol. 120, no. 8, pp. 877-882, Aug. 1973.
- [92] **J. Weiss**, **Z. J. Czendes**, " A one step finite element method for multiconductor skin effect problems, " *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, vol. PAS-101, no. 10, pp. 3796-3803, Oct. 1982.
- [93] **R. B. Wu** and **J. C. Yang**, " Boundary integral equation formulation of skin effect problems in multiconductor transmission lines, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 3013-3017, July 1989.
- [94] **Y. Yin**, **H. W. Dommel**, " Calculation of frequency dependant impedances of underground power cables with finite element method, " *IEEE Trans. on Mag.*, vol. 25, no. 4, pp. 3025-3027, July. 1989.

ANNEXES



ANNEXE I

Résumé - L'étude de la réponse fréquentielle d'un câble multifilaire excité ou soumis à une perturbation de type électromagnétique, nécessite la connaissance des paramètres linéiques des éléments qui le constituent. Les brins conducteurs étant aussi proche les uns des autres que de la gaine, les formules classiques conduisent à des approximations grossières pour des fréquences utilisées dans les domaines de la CEM. Nous proposons donc, dans cette étude, de mettre en oeuvre une méthode de calcul des impédances internes et réactances externes des brins conducteurs sur une large gamme de fréquences et ceci en tenant compte de l'effet de peau et de l'effet de proximité.

I - INTRODUCTION

On assiste aujourd'hui à une évolution technologique liée à des systèmes de plus en plus complexes générateurs ou victimes de perturbations électromagnétiques. Les liaisons filaires sont non seulement le chemin de propagation de ces perturbations mais aussi le moyen de couplage avec elles. Pour mettre en évidence les phénomènes liés à la propagation, il est nécessaire de déterminer les paramètres linéiques de ces structures et ceci en tenant compte de l'effet de peau et de l'effet de proximité. Dans cette perspective, nous avons cherché à utiliser une formulation analytique, parce que cette dernière s'adapte mieux à la résolution des câbles et structures filaires (méthode des lignes de transmission ...). Dans la littérature, ce problème a été abordé dans les années 1920 [1] par l'introduction d'un facteur de correction de l'effet de proximité pour une configuration bien déterminée. Malheureusement ce résultat est inexploitable pour d'autres cas. D'autres auteurs s'affranchissent de cet effet de courants induits en supposant que le rayon des conducteurs est très inférieur à la distance inter-axiale [2] ou en considérant les conducteurs constituant la structure interne des câbles comme des filaments de courant [3].

Enfin, il est à remarquer qu'en haute fréquence l'effet de proximité peut devenir prépondérant et dans certaines

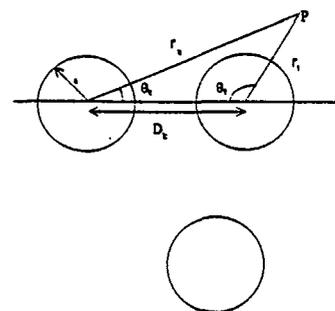
conditions atteindre le même ordre de grandeur que l'effet de peau [4].

Nous nous intéressons ici aux paramètres des conducteurs constituant la partie interne des câbles (conducteurs isolés dans le vide sans gaine).

II - FORMULATIONS ANALYTIQUES

Pour notre formulation analytique, nous posons les hypothèses suivantes :

- les conducteurs sont longs (pas d'effets de bords) ;
- les courants de déplacements dans les conducteurs sont négligés ;
- les courants et champs étudiés sont sinusoïdaux de pulsation ω ;
- les matériaux (de perméabilité μ et de conductivité σ) sont linéaires ;
- on travaille dans des systèmes locaux (voir figure ci-dessous, pour chaque conducteur k un repère cylindrique (r_k, θ_k, z_k) les z_k étant tous parallèles).



Les phénomènes à étudier sont régis par les équations de Maxwell, dans les conducteurs et dans les milieux extérieurs.

Pour chaque conducteur k , dans son repère le champ électrique (suivant z_k) E_{zk} vérifie :

au sein du conducteur

$$\frac{\delta^2 E_{zk}}{\delta r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\delta E_{zk}}{\delta r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\delta^2 E_{zk}}{\delta \theta_k^2} - \mu \sigma j \omega E_{zk} = 0 \quad (1)$$

Les solutions de cette équation sont sous forme de séries de Fourier

$$E_{zk1}(r_k, \theta_k) = \sum_{n=0} C_n J_n(j r_k \sqrt{j \omega \mu \sigma}) \cos(n \theta_k + a_{nk}) \quad (2)$$

et

$$H_{\theta k1}(r_k, \theta_k) = \frac{1}{j \omega \mu} \frac{\delta E_{zk1}}{\delta r_k} \quad (3)$$

à l'extérieur du conducteur ($\sigma = 0$)

$$E_{zk2}(r_k, \theta_k) = L_0 \ln(r_k) + L'_0 + \sum_{n=1} (L_n r_k^{-n} + L'_n r_k^{-n}) \cos(n \theta_k + a_{nk}) \quad (4)$$

et

$$H_{\theta k2}(r_k, \theta_k) = \frac{1}{j \omega \mu_0} \frac{dE_{zk2}}{dr_k} \quad (5)$$

Dans ces expressions, les harmoniques d'espaces d'ordre n ($n > 0$) symbolisent l'effet de proximité ; tandis que $n = 1$ caractérise l'effet de peau. $J_n(z)$ représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et d'argument complexe.

Les coefficients C_n , L_0 , L_n , L'_0 , L'_n , et a_{nk} sont fixés par des conditions de passage au niveau des interfaces.

Par le calcul de la puissance complexe à l'aide du vecteur de Poynting nous déterminons les paramètres linéiques internes

$$P = a \int_0^{2\pi} (E_{zk1}(a, \theta_k) \times H_{\theta k1}(a, \theta_k))^* d\theta \quad (6)$$

($H_{\theta k1}(a, \theta_k)^*$ représente le conjugué de $H_{\theta k1}(a, \theta_k)$)

et

$$Z_i = \frac{P}{I^2} \quad (7)$$

P étant la Puissance complexe et Z_i , l'impédance interne

$$Z_i = R_i + j \omega L_i \quad (8)$$

R_i et L_i désignent la résistance et l'inductance interne linéique du conducteur tandis que la réactance externe est déterminée par la connaissance du flux extérieur créé par les conducteurs.

$$L_{ext} = \frac{\Phi_{ext}}{I} \quad (9)$$

Nous obtenons ainsi pour ces impédances une série infinie de termes contenant des fonctions de Bessel d'ordre n et d'arguments complexes.

De plus la capacité inter-fils pour des conducteurs de même rayons est donnée par :

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\argch(D/2a)} \quad (10)$$

(D : distance entre les centres des conducteurs ; a : rayon d'un conducteur).

Cette résolution analytique a nécessité la réalisation d'un programme de calcul des fonctions $J_N(z)$, car il est difficile de trouver des algorithmes de calcul de ces fonctions pour des ordres élevés et des arguments complexes ayant une large plage de variation. Ces fonctions s'écrivent sous forme de séries entières [7].

$$J_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+N}}{2^{2k+N} k! \Gamma(N+k+1)} \quad (11)$$

Il est impossible d'utiliser cette formule pour déterminer $J_N(z)$ car, lors des itérations successives, des erreurs liées à de petites différences entre grands nombres vont s'accumuler. La programmation de cette fonction nécessite donc la détermination d'un ordre L de début de récurrence décroissante. L'indice (L), dépendant de (N) et (z), doit être choisi de façon à minimiser l'erreur sur la fonction à calculer. La récurrence débutera avec $J_L(z) = 0$ et $J_{L-1}(z) = 1$. D'autre part, un facteur de normalisation sera choisi dans le plan complexe pour ramener $J_N(z)$ à sa vraie valeur. Il devra donc être lié à $J_k(z)$ pour $k = [0 \dots L]$.

Aucune restriction autre que la capacité du calculateur, n'est imposée pour z ; nous rappelons que z est fonction de ω et que nous travaillons avec des hypothèses excluant toute prise en compte des courants de déplacements dans les conducteurs.

III-RESULTATS ET VALIDATIONS

Nous partons d'une formulation générale des impédances et admittances que nous appliquons au cas de 2 conducteurs cylindriques d'axe oz , isolés dans l'espace, de même rayon pour des courants de même sens, puis de sens contraire. Pour valider notre modèle analytique, nous avons utilisé le

logiciel Fissure développé au L.E.L. [5] ; celui-ci utilise une méthode d'éléments finis à partir d'une formulation en potentiel vecteur magnétique A. Néanmoins, des problèmes liés à la finesse du maillage dans les zones d'épaisseurs de peau et de proximité nous empêchent de comparer les résultats pour des fréquence. élevés ($F > 1$ MHz).

Les figures 1a_1, 1a_2, 1a_3, 1b_1, 1b_2, 1b_3 ont été réalisées pour deux conducteurs en cuivre ($\sigma=5.8E07$, $\mu=\mu_0$) de rayon (1mm). Elles caractérisent la variation fréquentielle des résistances et inductances internes.

Les courbes 1a_1 et 1b_1 illustrent le cas d'un conducteur seul dans le vide qui n'est donc soumis qu'à l'effet de peau.

Les courbes 1a_2 et 1b_2 ont été réalisés pour deux conducteurs parcourus par des courants de même sens.

Enfin, les courbes 1a_3 et 1b_3 sont pour des conducteurs parcourus par des courants de sens opposés. Toutes ces courbes mettent en évidence la nécessité de tenir compte de l'effet de proximité pour des conducteurs proches à des fréquences élevées. D'autre part, par rapport à l'effet de peau, outre l'augmentation de résistance et d'inductance liée à l'effet de proximité, nous remarquons que cet accroissement est d'autant plus significatif que les courants sont de sens opposés ce qui s'explique par les harmoniques d'espaces du champ (orientation des lignes de champ au sein du conducteur).

Les courbes des figures 2 montrent l'évolution fréquentielle des paramètres internes calculés analytiquement et par les éléments finis pour des courants de même sens. Pour des fréquences inférieures à 1 MHz, on observe une bonne concordance, ce qui constitue une validation de notre modèle analytique. Pour des fréquences supérieures à 1MHz les courbes deviennent asymptotiques et nous avons : La partie réelle de l'impédance est égale à sa partie imaginaire. Une validation pour ces fréquences est donnée par la formule suivante [6]

$$Z_{hf} = (1+j) [1 / (2 \pi a)] \sqrt{\frac{\mu \omega}{2\sigma}} \quad (12)$$

Cette formule n'étant valable que pour l'effet de peau il convient de la multiplier par un facteur de correction de l'effet de proximité en haute fréquence[4]

Pour des courants de même sens, ce facteur sera :

$$F = 1 + \frac{0.4}{\text{sh}\left(\frac{D}{2a}\right)} \quad (12_a)$$

Tandis que pour des courants de sens opposés, il devient :

$$F = 1 + \frac{0.183}{\text{sh}\left(\frac{D}{2a}-1\right)} \quad (12_b)$$

Les courbes 3a_1, 3b_1 et , 3a_2, 3b_2 montrent l'influence de la distance entre les conducteurs sur l'évolution des paramètres calculés à une fréquence de 1 MHz.

Les courbes 3a_1 et 3b_1 sont pour des conducteurs parcourus par des courants de même sens tandis que 3a_2 et 3b_2 ont été réalisés pour des courants de sens opposés : Ici, pour des conducteurs proches, nous observons une forte dispersion des grandeurs calculées liées à l'effet de proximité ainsi qu'au sens du courant. Pour une même configuration de conducteurs, l'impédance n'est plus la même selon que les courants sont en phase ou en opposition de phase.

La figure 4 décrit la variation en fonction de la fréquence des inductances internes (L_i) et externes (L_{ext}) par conducteur pour des courants de sens contraires. Il s'en suit, en haute fréquence, une forte diminution de L_i et une augmentation de L_{ext} . L'inductance totale dans ces conditions pouvant être assimilée à L_{ext} . Ceci est dû à la concentration des filets de courant à la périphérie du conducteur.

Enfin les équations obtenues dégèrent en formules classiques pour des valeurs limites des variables d'espace ou de fréquence.

En exemple pour 2 conducteurs en cuivre, nous avons à l'ordre ($n=3$) et pour des courants de sens opposés :

$$Z_i = j\omega\mu [2\pi Q_0 |M_0|^2 + \pi a^2 |M_1|^2 (1 + Q_1)(1 - Q_1^*) + \pi a^4 (|M_2|^2/2)(1 + Q_2)(1 - Q_2^*) + \pi a^6 (|M_3|^2/3)(1 + Q_3)(1 - Q_3^*) + \dots] \quad (13)$$

avec :

$$Q_0 = \frac{-J_0(z_0)}{z_0 J_1(z_0)}$$

$$Q_n = \frac{J_{N+1}(z_0)}{J_N(z_0)}$$

$$z_0 = ja\sqrt{j\omega\mu\sigma}$$

Q_n^* : est le conjugué de Q_n

$$M_0 = \frac{1}{2\pi}$$

$$M_1 = \frac{M_0}{D} [1 - k^2 Q_1 + k^4 (Q_1^2 - Q_2) + \dots]$$

$$M_2 = \frac{M_0}{D^2} [1 - 2k^2 Q_1 + \dots]$$

$$M_3 = \frac{M_0}{D^3} [1 + \dots]$$

$$k = \frac{a}{D}$$

a : rayon du conducteur

D : distance entre axes des conducteurs

Nous vérifions que pour ($D \gg a$), Z_i devient l'impédance d'un conducteur soumis à l'effet de peau seul et que pour des fréquences élevées Z_i tend vers une forme asymptotique

De même, on a pour l'inductance externe (L_{ext})

$$L_{ext} = \mu_0 \left[\frac{1}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{D-a}{a} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} M_n a^{2n} Q_n \frac{[a^n - (D-a)^{-n}]}{n} \right]$$

Pour ($D \gg a$) cette formule donne l'expression classique

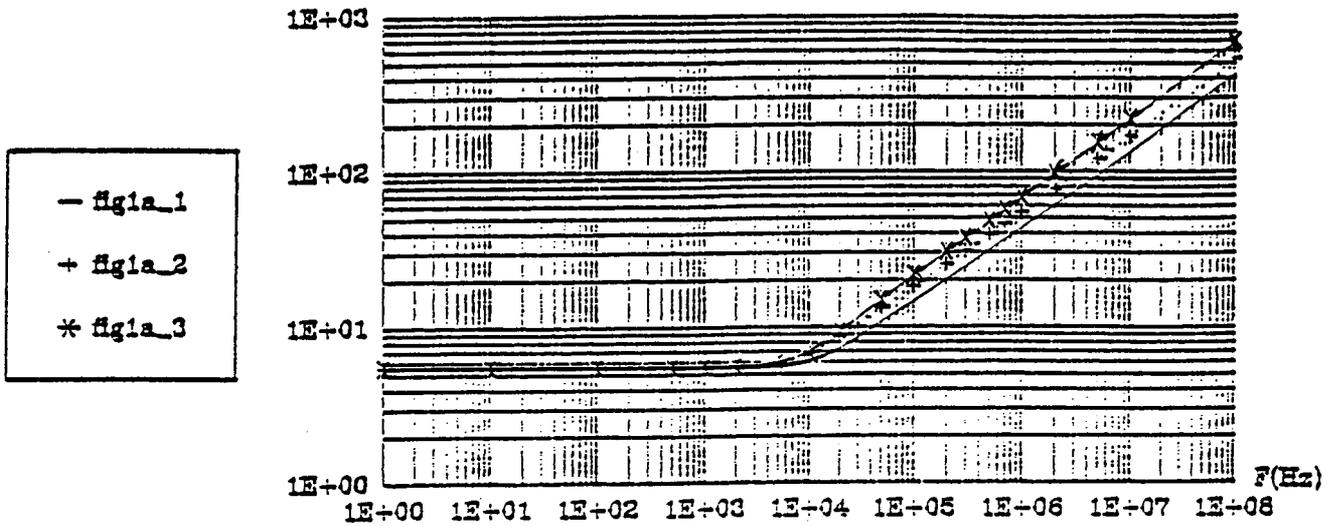
$$L_{ext} = \mu_0 \frac{1}{2\pi} \text{Ln} \left(\frac{D-a}{a} \right)$$

IV - CONCLUSION

Cette première étape, nous a permis de calculer analytiquement avec une bonne précision les paramètres recherchés et ceci sur une large bande de fréquence (0Hz - 100 MHz).

Dans une seconde étape, qui est en cours, on prendra en compte l'effet de la gaine et l'influence du sol sur le calcul de ces paramètres. En effet, dans le calcul de l'impédance propre de la gaine et de la mutuelle (âme - gaine) interviennent des sommes infinies de termes liées aux phénomènes de distorsions de courants.

R(mOhm/m) Rayon = 1mm ; Distance
entre axes = 2.4mm



Li(H/M) Rayon = 1mm ; Distance
entre axes = 2.4mm

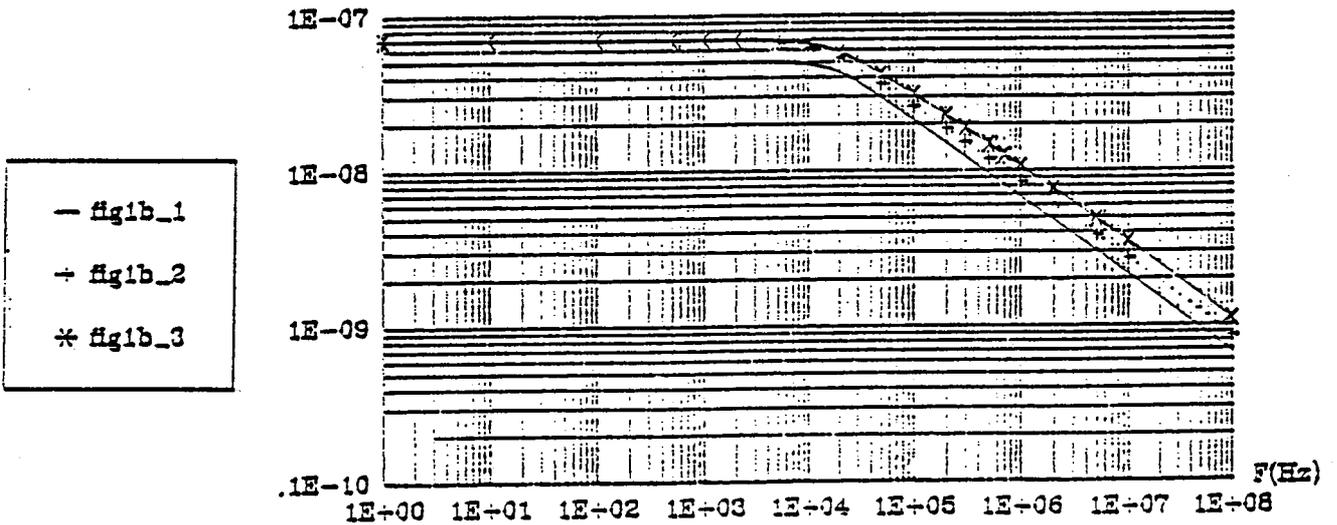


Figure 2-a

Validation calcul analytique -
Eléments-finis

Rayon = 1mm ; Distance entre axes = 4mm

R(mOhm/M)

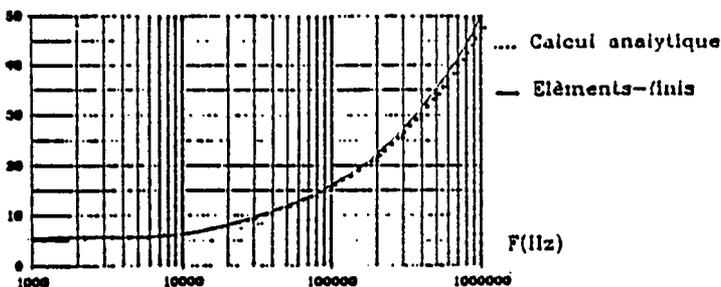
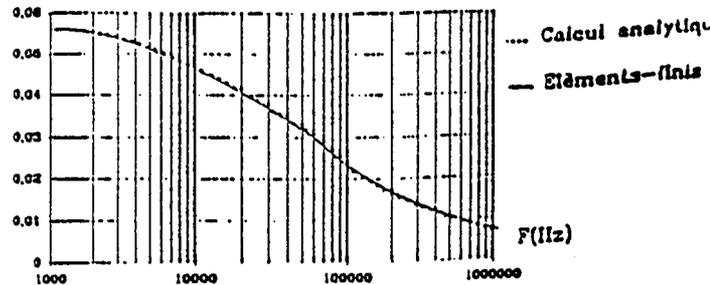


Figure 2-b

Validation calcul analytique -
Eléments-finis

Rayon = 1mm ; Distance entre axes = 4mm

L(uH/M)



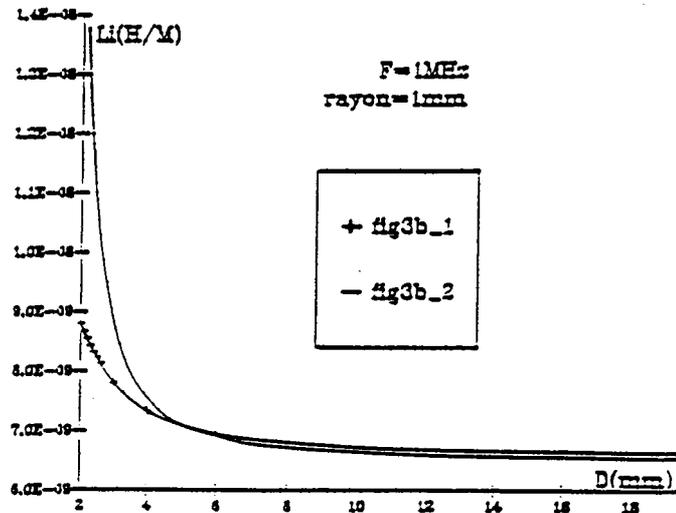
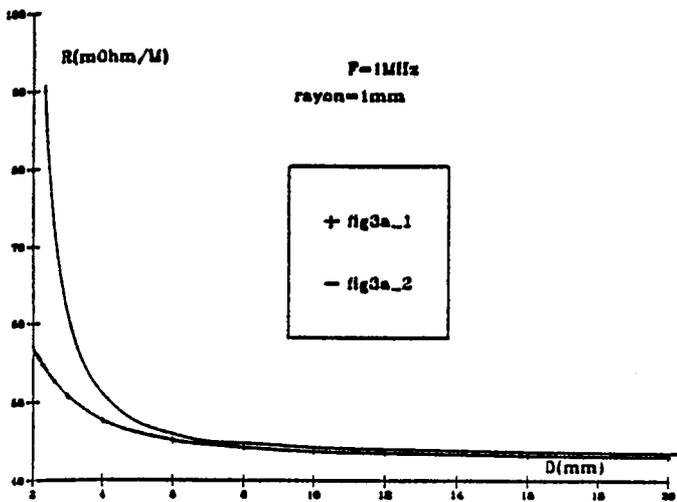
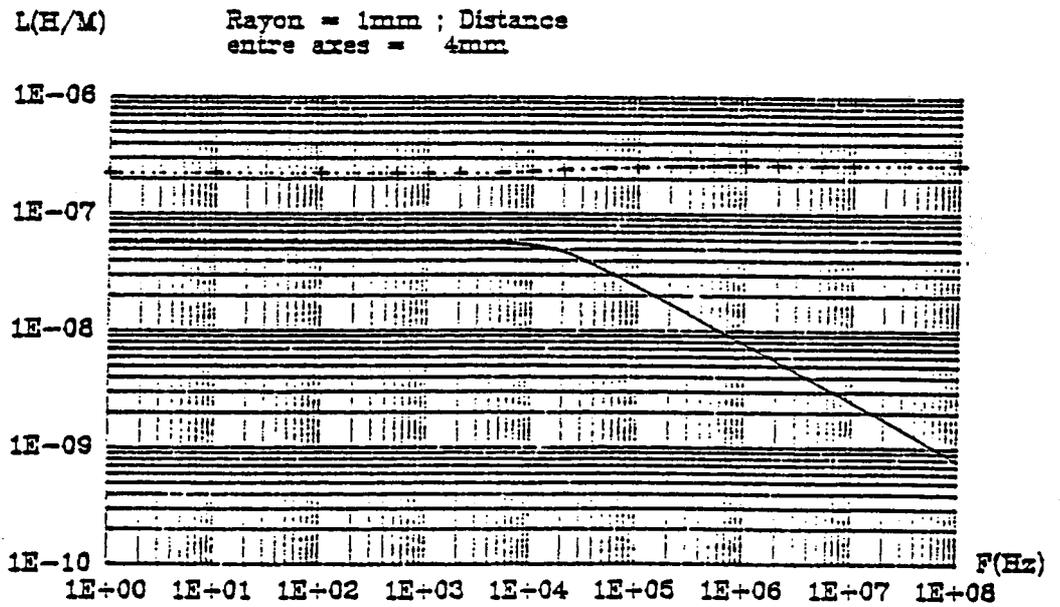
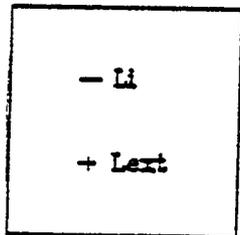


Figure 4



ANNEXE II

$$\begin{aligned}
 A_c(\rho, \theta) = & \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \ln(\rho) \right\} r dr d\phi \\
 & - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \right. \\
 & \left. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m [\cos(m\phi)\cos(m\theta) + \sin(m\phi)\sin(m\theta)] \right\} r dr d\phi
 \end{aligned}$$

Une décomposition de $A_c(\rho, \theta)$ nous permet d'obtenir deux termes que nous noterons :

$$\text{INT1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \ln(\rho) \right\} r dr d\phi$$

et

$$\begin{aligned}
 \text{INT2} = & - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(r\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\phi - \gamma_i) \right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{\rho}\right)^m \right. \\
 & \left. [\cos(m\phi)\cos(m\theta) + \sin(m\phi)\sin(m\theta)] \right\} r dr d\phi
 \end{aligned}$$

Nous avons $\text{INT1} = 0$ si $(n \neq 0)$ et donc,

$$\text{INT1} = 0$$

D'autre part, nous avons aussi $\text{INT2} = 0$ si $(n \neq m)$,

Et dans le cas où $(n = m)$ le calcul de INT2 nous permet d'obtenir :

$$\text{INT2} = - \frac{\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{a^{n+1} I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})}{n \rho^n} \right) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i}\right)^n I_i \cos n(\theta - \gamma_i) \right]$$

Ainsi, le potentiel vecteur magnétique dû au conducteur de référence soumis à l'effet de proximité des P filaments de courants voisins, en un point $P1(\rho, \theta)$ est donné par :

$$A_c(\rho, \theta) = \text{INT1} + \text{INT2}$$

ANNEXE III

Calcul de $\frac{d\Phi_{r1}}{dt}$

$$\frac{d\Phi_{r1}}{dt} = j\omega \oint_l A_t(\rho, \theta) dl = j\omega [A_t(a, \theta) - A_t(b_1, \gamma_1)]$$

Dans le but d'éviter d'avoir des singularités sur le calcul de $A_t(b_1, \gamma_1)$ nous réévaluons au conducteur 1 supposé être au départ filaire son propre rayon (a_1)

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{r1}}{dt} = & - \frac{j\omega\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left(\frac{a}{n} \right) (I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \cos n(\theta - \gamma_i) \right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\sqrt{j\omega\mu\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left(\frac{a}{n} \right) \left(\frac{a}{b_1} \right)^n (I_{n+1}(a\sqrt{j\omega\mu\sigma})) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \cos n(\gamma_1 - \gamma_i) \right] \\ & + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^P I_i \operatorname{Ln} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b_i^2 - 2b_i a \cos(\theta - \gamma_i)}{(a_1)^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{Ln} \left(\sqrt{\frac{a^2 + b_i^2 - 2b_i a \cos(\theta - \gamma_i)}{(a_1)^2}} \right) = \operatorname{Ln} \left(\frac{b_i}{a_1} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{a}{b_i} \right)^n \cos n(\theta - \gamma_i)$$

tandis que R_n s'exprimant sous la forme d'une fonction de A_n est donnée par la formule

(24)

Ainsi, nous obtenons la formule recherchée.

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{r1}}{dt} = & - \left(\frac{1}{\sigma} \right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_n(a\sqrt{j\omega\mu\sigma}) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \left\{ \cos n(\theta - \gamma_i) - \left(\frac{a}{b_1} \right)^n \cos n(\gamma_1 - \gamma_i) \right\} \right] \\ & - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left(\frac{a^n}{n} \right) \left[\sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{b_i} \right)^n I_i \left(\frac{a}{b_1} \right)^n \cos n(\gamma_1 - \gamma_i) \right] + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^P I_i \operatorname{Ln} \left(\frac{b_i}{a_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Title : A new analytical models of shielded or unshielded multiwire cable parameters subjected to electromagnetic waves, in a wide range of frequencies.

Keywords : Electromagnetic Compatibility, Modelling, Networks, High Frequency, Multiwire shielded or unshielded cable, Multiwire lines, Coupling, Line Parameters.

Abstract :

The coupling of incident fields (plan wave, lightning stroke, nuclear electromagnetic pulse, current injection, ...) with lines or cables gives rise to over voltage which can damage electrical and electronic apparatus connected at the ends of these lines or cables. Accurate line or cable models are needed to solve these problems.

Most of existing models suppose lossless lines or take account only of the skin effects in conductors. Nowadays most of electrical and electronic systems are very integrated, so the skin and the proximity effects cannot be neglected.

The analytical modelling of shielded or unshielded multiwire telecommunication and power cables proposed in this PhD report involved the calculation of cable parameters in a frequency range covering [0Hz,10Mhz]. These calculations include the skin and the proximity effects considerations in conducting materials.

In chapter I we point out the weakness of the existing models. A new multiwire closely line parameters is proposed in chapter II. In chapter III, a new multiwire shielded cable primary parameters is given.

Titre : Modèles analytiques originaux pour la détermination des paramètres linéiques des lignes et câbles multifilaires parcourus par des signaux large bande.

A new analytical models of shielded or unshielded multiwire cable parameters subjected to electromagnetic waves, in a wide range of frequencies.

Mots clefs : Compatibilité électromagnétique, Modélisation, Réseaux, Haute fréquence, Lignes multifilaires, Câbles blindés, Couplages, Paramètres linéiques.

Résumé :

Les liaisons filaires de par leurs fonctions constituent les véhicules de l'information ou de l'énergie. La présence d'ondes électromagnétiques perturbatrices dans leur voisinage peut occasionner une altération des signaux émis et quelques fois la destruction des appareils connectés aux extrémités.

Pour prévoir les niveaux des signaux parasites, et dans le but de les réduire, il est important d'envisager une modélisation fine des structures filaires et ceci, avec un temps de calcul acceptable. Pour y répondre, des modèles analytiques de simulation plus ou moins détaillés ont été mis au point. Nous verrons tout au long du premier chapitre que les modèles existants n'envisagent pas, dans des configurations générales, la prise en compte de la proximité des conducteurs les uns par rapport aux autres. Ceci pose un sérieux problème alors que l'on assiste de plus en plus à un besoin soutenu d'intégration des circuits et systèmes. Notre travail s'inscrit dans la correction de ces défaillances et propose des modèles de type circuit caractérisant les lignes multifilaires ainsi que les câbles multifilaires blindés tout en tenant compte des effets de peau et de proximité intervenants dans les milieux conducteurs. Les hypothèses quasi-TEM sont adoptées et des matrices d'impédances et d'admittances des structures filaires sont déterminées sur une large gamme de fréquences (fréquences pour lesquelles les courants de déplacements dans les conducteurs restent négligeables).

Une analyse critique des méthodes et modèles existant actuellement pour la modélisation des paramètres linéiques des lignes et câbles est présentée dans le mémoire au chapitre I. On propose dans le chapitre II un modèle original de calcul des paramètres des lignes multifilaires (plusieurs conducteurs de rayons différents) avec la prise en compte des effets de peau et de proximité au niveau des conducteurs. Enfin, le chapitre III propose aussi un modèle original de détermination des impédances et admittances des câbles multifilaires blindés. Les modèles proposés sont de type circuits équivalents, et sont validés par des méthodes utilisant la technique des éléments finis ou par une comparaison avec des publications récentes, sur une gamme de fréquences allant de 0 à 10 MHz.

Direction de recherche :

Mr Philippe Auriol (Professeur).

Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY), URA CNRS n° 829.