



Points tournants dégénérés

Thomas Forget

► To cite this version:

Thomas Forget. Points tournants dégénérés. Mathématiques [math]. Université de La Rochelle, 2007. Français. NNT: . tel-00145063v2

HAL Id: tel-00145063

<https://theses.hal.science/tel-00145063v2>

Submitted on 18 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L' UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

École Doctorale ED0374

en vue de l'obtention du grade et du titre de

DOCTEUR de l'Université de **LA ROCHELLE**

spécialité **MATHÉMATIQUES**

au cours de la soutenance publique du Jeudi 29 Mars 2007, par

Thomas FORGET

Intitulé de la thèse :

POINTS TOURNANTS DÉGÉNÉRÉS

COMPOSITION DU JURY

<i>Rapporteurs :</i>	M. Reinhard SCHÄFKE	Université de Strasbourg
	M. Imme VAN DEN BERG	Université d'Évora, Portugal
<i>Examineurs :</i>	M. Jean-Pierre FRANÇOISE	Université de Paris VI
	M. Robert ROUSSARIE	Université de Bourgogne
<i>Directeur :</i>	M. Éric BENOÎT	Université de La Rochelle
<i>Codirecteur :</i>	M. Guy WALLET	Université de La Rochelle

Résumé

L'objet de ce travail est l'étude des points tournants dégénérés. Nous considérerons des équations différentielles réelles, du premier ordre, singulièrement perturbées à un paramètre réel et admettant une telle singularité. En nous plaçant dans les hypothèses d'apparition de solutions (de type) "vrai canard", nous donnerons alors à cette équation une forme, dite préparée, plus adaptée au travail que nous effectuerons.

Nous montrerons ensuite, pour une classe générale d'équations de ce type, l'existence de solutions "canard". À la suite de quoi, nous étudierons asymptotiquement ces solutions à travers la mise en place d'un cadre formel général. La correspondance ainsi mise en place nous permettra d'implémenter le développement asymptotique en puissances du petit paramètre de perturbation de ces solutions.

Abstract

The aim of this work is the study of degenerate turning points. We are interested in singularly perturbed real differential equations of the first order, with a real parameter, allowing this kind of singularity. Assuming hypothesis that place ourselves in the case of apparition of "true canard" solutions, we will give a simplified form for those equations, that will be called adapted.

Then, we will be interested in the study of the existence of canard solutions in a general class of equations of this kind. Finally, we will propose an asymptotic study of such solutions. More particular, we will be concerned with the existence of asymptotic expansion in the power of the perturbation parameter for canard solutions. We will implementate a general formal correspondence that will be used in this goal.

Classification MSC2000

03H05, 34E05, 34E10, 34E15, 34E18, 34E20

À toutes celles et tous ceux qui m'entourent

*J'étais alors en proie à la mathématique
Temps sombre ! Enfant ému du frisson poétique
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec
Sur l'affreux chevalet des x et des y
Hélas, on me fourrait sous les os maxillaires
Le théorème orné de tous ses corollaires.
Pourtant, on peut être poète et mathématicien.*

Victor Hugo

*Les Contemplations, I, 13
À propos d'Horace (extrait)*

Avant-propos

Une âme délicate est gênée de savoir qu'on lui doit des remerciements. Une âme grossière, de savoir qu'elle en doit.

Friedrich Nietzsche

Faisant suite à la (*probablement dispensable*) épigraphe se voulant pertinente, et avant de se plonger dans le formalisme scientifique (*à outrance ?*), l'avant-propos, en tant que "chapitre de non-droit", représente la seule partie du présent document où il est possible de mettre de côté le style impersonnel nécessaire à tout texte scientifique. Ce qui permet de se laisser aller à divaguer, laissant probablement transparaître la fatigue accumulée pour mener à bien la rédaction de ce document. Car il faut bien reconnaître que, durant les (plus de) trois années de préparation du doctorat, rédiger ce *manuscrit* (*TAPuscrit ?*) a sans aucun doute été le plus éreintant ...

D'un autre côté, rédiger un *tapuscrit* de thèse se révèle aussi être la phase la plus valorisante car, une fois achevé, il devient alors un petit "pavé" que l'on peut exhiber fièrement (*ou non*) comme "preuve physique" du travail accompli.

Plus sérieusement, rédiger ce *tapuscrit* amène surtout à réfléchir sur les trois années de recherche écoulées, ainsi que leur finalité ... car, après tout, il peut sembler naturel d'affirmer que ce *tapuscrit*, que si peu de personnes liront vraiment, est destiné à hanter à terme les archives numériques de sites de dépôt de thèse en ligne !

Ce point de vue, fort sévère, n'est bien entendu pas partagé par la grande majorité des doctorants : En tant que compte-rendu "scientifique" de trois années de recherche, un *tapuscrit* permet d'apporter des pierres au savoir scientifique. Ce qui permet (**très** modestement) de faire progresser son propre domaine de recherche.

Enfin, et bien au delà de considérations thématiques, préparer un doctorat revient aussi à réaliser, dans une relative "solitude", un travail de recherche durant trois années. Il devient, de fait, un véritable défi demandant une importante implication personnelle afin d'être mené à bien. Naturellement, il devient alors impératif de pouvoir décompresser en se changeant les idées grâce aux multiples rencontres qui jalonnent ces années de vie de doctorant. Et cet avant-propos constitue le seul endroit pour évoquer *toutes* les (en tous cas, une bonne partie des) personnes concernées ...

Il y a quelques années, j'aurais trouvé cette démarche déplacée car elle n'est destinée qu'à quelques personnes "privilégiées"(?) ayant peu de chances d'être connues du lecteur de cet avant-propos. Bien que je m'en excuse par avance, les quelques années qui se sont écoulées depuis font que, même si je ne peux être totalement sûr que cela leur fasse réellement plaisir, je me complais à avoir l'angélique candeur de le faire (en espérant, de nouveau, ne pas (trop) en oublier ...).

En tout premier lieu, je pense naturellement à celles et à ceux dont j'ai eu le plaisir de partager le quasi-quotidien, comme le cataclismique *Aldéric* avec qui j'ai dû partager le même bureau durant nos trois années communes de "vie de doctorant", même si cette "cohabitation" a été loin d'être de tout repos (en partie dans les bars). Il est tout aussi hors de question pour moi de ne pas penser à *Claire* et à *Charles*, seuls capables d'aller explorer à pied l'Amérique du Sud pendant plusieurs mois dans le seul but d'y trouver une terre mythique débarrassée de toute trace de mal pour finalement émigrer à Mayotte, à *Aymeric*, dont la bonne humeur récurrente n'a d'égale que son manque d'endurance à l'alcool, à *Karim*, premier 'autiste' (aka doctorant) à avoir développé un logiciel pour de l'auto-apprentissage, à *Renan*, qui a gagné un abonnement au câble en débutant ses recherches, à *Christophe*, dont la trop grande gentillesse le perd ... de moins en moins à raison (?), à *Jean-François*, dont la bonne humeur récurrente n'a d'égale que son endurance à la bière (seulement!), ou encore à *Nicholas*, qui a réussi à tous nous faire croire que la finalité de sa thèse était la "scannérisation" de livres anciens et non de bandes dessinées. Étant bien entendu loin d'être les seuls, j'ai aussi une pensée pour *Jean-Christophe*, *Patrice*, *Nicolas*, *Séverine*, *Julie*, *Muriel*, *Aurélie*, *Renaud*, *Armelle*, *Olivier*, *Pascale*, *Mustapha*, *Kristina* et *Salvijus* (et *Benedictas*), ...

Durant ces années de recherche, je me suis retrouvé à participer (trop?) activement aux travaux du bureau d'une association de doctorants rochelais (qui se trouve d'ailleurs être, pour le moment, la seule). J'ai ainsi eu le plaisir de rencontrer un nombre conséquent de doctorants rochelais d'autres laboratoires qu'elles ou ils aient représentés des doctorants comme, par exemple *Victor*, *Martin*, *Céline*, *Frédéric*, *Anne-Laure* ou non, comme *Jean-Bernard*, *Sullivan*, *Émanuel*, ou l'inénarrable *Natacha*. Il me semble incontournable d'adjoindre ici des représentants "outre-rochelais" de cette grande famille phylogénétique des "Jeunes Chercheurs", qu'elles ou ils soient de la classe des CJCus ou/et des ANDéSus, comme *Florent*, *Sylvain*, *Jasmin*, *Cécile* ou *Francis*, ou de la classe des GDDus comme *Bruno* et *Ronan* qui m'ont accueilli comme membre de la "Gilde des Doctorants" en tant que porteur du projet de mettre en place une version nationale du trop peu connu festival rochelais du très court-métrage de vulgarisation scientifique, à l'occasion duquel j'ai "commis" trois court-métrages (*dont un primé!*) vulgarisant tous, plus ou moins, ma thématique de recherche en à peu près cinq minutes.

Préparer un doctorat demande aussi de pouvoir évoluer dans un environnement et des conditions de travail favorables. Cela a été plus que largement le cas au sein du laboratoire et du département de mathématiques de l'Université de La Rochelle et je tiens à en remercier en tout premier lieu (et outre mes deux directeurs *Éric* et *Guy*, dont le tour vient plus tard), *Michel* et *Noël* pour le très bon accueil que j'ai reçu dans la structure qu'ils dirigent respectivement, ainsi que pour les efforts qu'ils font pour permettre aux doctorants en mathématiques de pouvoir travailler (voire simplement vivre) dans les conditions les meilleures possibles, en espérant que cela dure ... D'ailleurs, ce très bon environnement ne pourrait pas exister sans la bonne humeur communicative de ses membres, contractuels ou permanents, comme *Carl*, *Catherine*, *Jean-Christophe*, *Jean-François*, *Yutao*, ou *Étienne* pour n'en citer qu'une partie. Il me semble incontournable d'associer à ces remerciements les membres statutaires de l'École Doctorale et du secrétariat du laboratoire, dont la très grande compétence m'a permis de préparer mon doctorat (et les déplacements qui vont de pair) dans des conditions réellement optimales. Je conclurais donc ce paragraphe par un grand grand ... grand merci à *Brigitte*, *Christine*, *Bertrand*, *Armelle*, *Jennifer*, *Stéphanie*, *Amélia* et *Michel*.

Un doctorat, c'est aussi des rencontres avec des chercheurs d'autres universités. Bien que je sois très honoré et fier de la composition du jury, il est d'autres mathématiciens qui n'y figurent finalement pas. Ce paragraphe sera l'occasion pour moi d'adresser un clin d'œil à *Augustin Fruchard*, dont j'avais profité de l'encadrement scientifique pour mon "stage" de D.E.A. (désormais intitulé Master 2 recherche).

Comme je le signalais en première page de cet avant-propos, rédiger ce *tapuscrit* permet de faire le point sur le parcours (du combattant?) effectué durant ces trois années. Il me semble évident que je ne serais certainement pas là où j'en suis aujourd'hui sans certains enseignants, rencontrés tout au long de mon cursus, ce qui me permet d'avoir une pensée particulière pour *Vincent Fielbard* et *Jacques Philip*, en espérant qu'ils ne soient pas (trop) gênés de voir leurs noms cités ici.

Enfin, bien avant le doctorat, il y avait d'autres personnes qui étaient là, comme le lunaire 'Mogwai' *Dimitri*, dont la biographie serait un remarquable best-seller, le velu *Édouard* aux mains d'agent, ou le bien courageux 'Youyou' *Pierre*. Mais, bien au-delà d'anciens "camarades", je ne pouvais pas ne pas penser à mes parents *Catherine* et *Pierre* et à mes deux frères *Gildas* et *Guillaume*, dont le soutien discret a toujours été fort précieux.

Afin que cet avant-propos tombe dans tous les clichés imaginables, je terminerais ce petit tour par cette anecdote (*hé si !*) : Je me souviens avoir affirmé un jour à ma mère que « "plus vieux", je ferai mes études le plus loin possible ! ». Comme il paraît qu'il n'y a rien après le doctorat (*et que, de toutes façons, ma scolarité a pris fin en débutant ce doctorat*), il semble bien que j'ai eu l'infinie bêtise de tenir parole ...

Ce regard en arrière achevé, il est désormais temps de regarder en avant, afin de réfléchir à la suite. Mais, avant tout, il me semble important de remercier les mathématiciens m'ayant fait le plaisir et l'honneur de venir me "cuisiner" (*un comble pour un "chasseur de canard"*) en acceptant de participer à mon jury de soutenance.

Reinhard Schäfke, professeur à l'Université de Strasbourg, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, et avoir eu l'extrême gentillesse de dépasser ce rôle en prenant sur son temps pour me proposer des améliorations très constructives.

Imme van den Berg, professeur à l'Université d'Évora (Portugal), qui a accepté le rôle de rapporteur de cette thèse, et dont les remarques sur les méthodes d'asymptotique nonstandard employées ont permis d'améliorer ce texte.

Jean-Pierre Francoise, professeur à l'Université de Paris VI, dont la présence dans ce jury me réjouit d'autant plus qu'outre ses compétences sur ce sujet, ses cours en ligne m'ont permis d'améliorer mes *connaissances différentielles*.

Robert Roussarie, professeur à l'Université de Bourgogne, dont la présence permettra d'éclairer par les méthodes géométriques d'étude de singularités le point de vue topologique (standard ou non) adopté dans ces travaux.

Ce rapide tour de France (et d'ailleurs) terminé, il est temps de revenir à l'**Université de La Rochelle**, lieu où j'ai préparé ce doctorat, afin de me permettre de remercier mes deux directeurs pour leur très grande disponibilité.

Tout d'abord, **Guy Wallet**, qui a eu la gentillesse d'accepter de codiriger ces recherches. Sa rigueur de travail lors de nos discussions m'ont largement aidé à être plus confiant dans ce que je présentais.

Enfin, *last but certainly not least*, il est temps de remercier (mais cela serait-il vraiment suffisant ?) **Éric Benoît**, dont j'ai eu le plaisir de bénéficier de l'encadrement scientifique durant ces années de préparation. Nos réunions improvisées nocturnes ont permis à sa vision intuitionniste des mathématiques de me contaminer. Merci encore pour le temps "non négligeable" passé à travailler, expérimenter, conjecturer, re-travailler, ... !

Cet avant-propos touchant réellement à sa fin, il est désormais temps de vous laisser découvrir l'univers mathématique servant de cadre à ce *tapuscrit*. Ce qui me permet de souhaiter au lecteur une bonne découverte d'un monde étrange dans lequel l'étude de *tâches en rotation qui disjonctent* dans des *formules mathématiques particulièrement dérégées* amène à *traquer*, lorsque l'on tente de rendre *visible* une interprétation *compliquée*, des *palmipèdes à bec plat* reconnaissables par leur capacité à *escalader simultanément deux sommets en opposition*.

Table des matières

Introduction	1
1 Contexte des travaux	5
1.1 Points tournants	6
1.1.1 Où l'étude se fait sans singularités	6
1.1.2 Où l'on parle de la théorie linéaire des points tournants	7
1.1.3 Où les points tournants cachent un canard	9
1.2 Solutions (de type) canard	9
1.2.1 Où l'équation de van der Pol dévoile ses canards	10
1.2.2 Où les canards sont définis	12
1.3 Chasse au canard complexe : la surstabilité	16
1.3.1 Où le canard se chasse en se servant du relief	17
1.3.2 Où l'on fait le lien avec le monde réel	20
1.4 Pré-requis	21
1.4.1 Les loupes à poids et leurs polyèdres de Newton associés	21
1.4.2 Les développements asymptotiques	23
1.4.3 La terminologie nonstandard	26
2 Existence et "unicité" de la solution canard	29
2.1 Mise sous forme préparée du problème	30
2.2 Le théorème d'existence	35
2.2.1 Énoncé standard du théorème	35
2.2.2 Approche nonstandard du problème	37
2.3 Commentaires sur l'hypothèse de restrictions	39
2.4 Démonstration du théorème 4	44
2.4.1 Démonstration du premier point du théorème	45
2.4.2 Démonstration du second point du théorème	46
2.5 Démonstration du corollaire 2	49
3 Quelques pistes de généralisation du théorème	51
3.1 Discussions sur la première hypothèse	52
3.2 Discussions sur les hypothèses concernant le paramètre	59

4	Étude asymptotique des solutions canard	63
4.1	Le développement asymptotique naturel	66
4.2	Mise en place du cadre formel	68
4.2.1	Définition des objets formels pertinents	68
4.2.2	Le théorème d'existence formel	70
4.3	Correspondance entre le cadre formel et le cadre topologique	73
4.4	Mise en œuvre pratique de la correspondance	76
4.4.1	Définition des ensembles pertinents	76
4.4.2	Implémentation des développements asymptotiques	78
4.5	Application au cas non dégénéré	81
4.5.1	Définition de la suite d'opérateurs	83
4.5.2	Application de la correspondance	86
4.6	Application aux développements asymptotiques combinés	86
4.6.1	Définition de l'ordre pertinent	88
4.6.2	Existence d'un pré-développement asymptotique	89
4.6.3	Unicité d'écriture du pré-développement asymptotique	91
5	Application au cas dégénéré	95
5.1	Étude d'un opérateur	96
5.1.1	Définition de l'opérateur	97
5.1.2	Propriétés algébriques de l'opérateur	99
5.2	Définition de l'ordre pertinent	102
5.3	Implémentation de la correspondance dans le cas linéaire	104
5.3.1	Définition des ensembles pertinents	105
5.3.2	Existence de pré-développements asymptotiques	107
5.3.3	Unicité d'écriture du développement asymptotique	112
5.4	Implémentation dans le cas général	116
5.4.1	Commentaires sur le choix "naturel" d'ensembles	116
5.4.2	Commentaires sur le choix privilégié d'ensembles	119
5.5	Une autre piste : les transséries	122
A	Estimation d'intégrales	123

Introduction

Les mathématiciens sont comme les français : Quoi que vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue, et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Johann Wolfgang von Goethe

L'objectif principal des recherches ayant amené à la rédaction de ce manuscrit est l'étude du comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles réelles, du premier ordre, singulièrement perturbées.

Perturber singulièrement une équation différentielle est l'idée, apparue en 1904 suite à un exposé de Prandtl à Heidelberg, d'y introduire un petit paramètre ε qui, lorsqu'il prend la valeur 0, change l'ordre de l'équation différentielle. La nature des questions soulevées concernait alors l'étude de la convergence des solutions des systèmes perturbés vers celles des systèmes réduits associés.

Dans toute la suite, nous nous intéresserons à des équations du premier ordre et, pour cette raison, les équations que l'on considèrera seront de la forme

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, \varepsilon)$$

où x est une variable réelle, y une fonction réelle régulière en ses variables x et ε , la notation $'$ dénote la différentielle par rapport à x , ε est un paramètre de perturbation strictement positif que l'on fait tendre vers 0, et Ψ est une fonction réelle régulière en ses variables.

L'étude de ces équations, dans le cas où il n'y a pas de singularité, se fait de manière directe car le théorème de Borel-Ritt permet alors de caractériser leurs solutions. Dans le cas où l'équation contient au moins une singularité, la non-inversibilité de la jacobienne associée à l'équation empêche le bon déroulement de cette démonstration, et il convient alors d'étudier le comportement des solutions au voisinage de ces singularités. Dans ce manuscrit, nous nous concentrons sur des singularités particulières qui inversent le champ de directions, appelées *points tournants*, au voisinage desquelles nous cherchons à montrer l'existence de solutions qui restent sages partout. L'étude qui suit étant plus particulièrement dédiée aux points tournants appelés *dégénérés*.

Comme de telles solutions apparaissent rarement, nous introduirons dans l'équation un paramètre a modifiant le comportement des solutions, ce qui permet ainsi de faire apparaître ces solutions bien particulières, que nous appellerons *canard*.

Nous consacrerons le chapitre 1 à rappeler le contexte dans lequel se situe les résultats présentés :

Après un bref rappel sur l'étude des solutions dans le cas régulier, nous définirons la notion de point tournant, qui nous amènera naturellement à la notion de solution canard, qui lui est particulièrement liée, que nous présenterons à travers l'étude succincte de l'équation de van der Pol dans laquelle ces solutions particulières ont été mises à jour. Puis nous enchaînerons par la définition précise de ces solutions, ce qui nous permettra de justifier les hypothèses prises dans les chapitres qui suivront.

Nous rappellerons alors, en supposant que les variables sont complexes, l'énoncé du résultat d'existence des solutions surstables, équivalent complexe des solutions canard, avant de donner une interprétation réelle du théorème démontré dans le chapitre 2 en lien avec ce résultat.

Enfin nous présenterons la notion de loupe, ainsi que son polyèdre de Newton associé, qui sera suivie par la définition des développements asymptotiques particuliers dont nous proposerons la construction lors du chapitre 4, avant de terminer par un survol du langage de l'analyse nonstandard, dans le formalisme proposé par Edward Nelson, que nous utiliserons :

Comme le paramètre ε tend vers 0, l'étude des perturbations singulières a naturellement intéressé des utilisateurs de l'analyse nonstandard. L'idée, initiée par Georges Reeb, étant de remplacer le paramètre de perturbation ε , tendant vers 0, par une constante infiniment petite, c'est à dire non nulle mais plus petite, en valeur absolue, que tout réel "standard" strictement positif.

À la suite de quoi, nous démontrerons un résultat d'existence de solutions canard dans le chapitre 2. La première section de ce chapitre sera consacrée à la préparation de l'équation générale, c'est à dire que nous y présenterons une succession de changements de variables nous permettant de restreindre l'étude de l'équation générale

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, a, \varepsilon)$$

à une équation, dite préparée, dont la forme particulière permet la mise en œuvre des démonstrations présentées dans ce manuscrit.

La fin de ce chapitre sera dédiée à l'énoncé et la démonstration du résultat d'existence de solutions canard dans l'équation préparée, présenté dans [29].

Ce résultat, que nous démontrerons en utilisant le formalisme de l'analyse nonstandard, sera préalablement énoncé de manière "standard".

La démonstration de ce résultat consiste à construire, à partir de l'équation préparée, un opérateur à valeur dans un espace de Banach dont on montre le caractère contractant, ce qui nous permet d'appliquer un théorème du point fixe. L'opérateur étant défini de

sorte que son point fixe soit exactement la solution canard recherchée.

La démonstration proposée utilisera fortement des estimations d'intégrales démontrées en annexe.

Si les premières hypothèses prises lors de la préparation de l'équation sont imposées par l'étude que nous menons, les trois dernières hypothèses sont beaucoup plus contraignantes, ce qui nous permet ainsi d'exclure des cas limite pour lesquels la démonstration mise en œuvre ne permet pas de donner de réponse.

Pour cette raison nous discuterons, dans le chapitre 3, de ce choix d'hypothèses et les deux sections proposées seront l'occasion d'évoquer la possibilité de les affaiblir tout en conservant l'existence de solutions canard.

Dans la section 3.1, nous commenterons l'hypothèse interdisant les termes admettant un u^k , avec $k \geq 2$, dans le terme $\Phi(t, u, \alpha, 0)$, tandis que la section 3.2 traitera des hypothèses prises sur le paramètre α afin de garantir une transversalité raisonnable.

Le chapitre 4 sera ensuite dédié à l'étude des propriétés asymptotiques de cette solution canard, et plus particulièrement à la mise en place d'une méthode d'implémentation du développement asymptotique en puissances de η de la solution canard.

En constatant préalablement qu'un tel développement ne peut avoir ses coefficients réguliers en la variable de l'équation, nous nous intéresserons naturellement à la construction de développements asymptotiques en puissances de η dont les coefficients sont des fonctions de la variable et de fonctions intermédiaires choisies à partir de l'équation considérée.

La construction de cette correspondance débutera par la mise en place d'un cadre formel permettant de construire formellement, par itération, un tel développement asymptotique. Elle sera suivie par des commentaires sur son implémentation en pratique.

Pour conclure ce chapitre nous retrouverons, en appliquant cette correspondance à des cadres différents, deux résultats bien connus, à savoir :

- L'existence d'un développement asymptotique en puissances de ε , à coefficients réguliers, de toute solution canard solution d'une équation admettant un point tournant non dégénéré.

Afin d'arriver à ce résultat, la mise en œuvre de la correspondance ne nécessitera aucune fonction intermédiaire.

- L'existence d'un unique développement asymptotique combiné en puissances de ε de toute solution d'une équation admettant une courbe lente attractive, dont la condition initiale se situe loin de cette courbe.

Afin d'arriver à ce résultat, la mise en œuvre de la correspondance ne nécessitera qu'une seule fonction intermédiaire.

Enfin nous appliquerons, dans le chapitre 5, la correspondance ainsi construite au cas où le point tournant est dégénéré (cas $p \geq 3$).

Dans la section 5.1, nous définirons et étudierons un opérateur $\mathcal{I}_\eta$ qui nous servira à

construire les fonctions intermédiaires nécessaires à l'implémentation de ce développement asymptotique. Ces fonctions intermédiaires, qui n'admettent pas de développement asymptotique en puissances de η à coefficients réguliers, apparaîtront comme des versions modifiées de termes qui apparaissent lors de la décomposition en monômes de la forme intégrale des solutions de l'équation étudiée.

Cette étude sera suivie, dans la section 5.2, par une étude asymptotique de ces fonctions qui nous amènera à la définition d'un ordre lié à leurs approximations asymptotiques en puissances de η .

Cette fonction ordre nous permettra de définir les ensembles pertinents pour la mise en œuvre de la correspondance qui nous étudierons dans la partie 5.3.1. Nous présenterons ensuite, dans les parties 5.3.2 et 5.3.3, le théorème d'existence et d'unicité d'écriture d'un développement asymptotique en puissances de η de la solution canard dans le cas où l'équation est linéaire. Dans ces deux dernières parties, la mise en œuvre de la correspondance se fera à partir d'un choix plus approprié de fonctions intermédiaires que celui utilisé dans la partie 5.3.1.

Puis nous verrons dans la section 5.4 que, dans le cas général, toute solution canard admet un "pré"-développement asymptotique pour lequel la question de l'unicité d'écriture reste ouverte, même si nous montrerons qu'il est raisonnable de la conjecturer.

Enfin nous évoquerons, dans la section 5.5, les transséries qui sont des objets mathématiques susceptibles de contenir les développements asymptotiques que nous étudions.

Avant de développer tout ce qui a été exposé ici dans les pages qui suivent, je souhaite remercier la Région Poitou-Charentes qui a financé, par une bourse, ces trois années de travaux via la convention numéro 03/RPC-R-148.

Chapitre 1

Contexte des travaux

Deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine.

*Mais, en ce qui concerne la première,
je n'en ai pas acquis la certitude absolue.*

Albert Einstein

Dans ce premier chapitre, nous allons rappeler le contexte des travaux présentés dans ce manuscrit. Il sera l'occasion de mettre en place le cadre et de définir les objets qui seront utilisés dans la suite.

La première section est une présentation succincte de la notion de point tournant, elle débutera par l'étude au voisinage de points non singuliers de la courbe lente, avant de proposer un rappel sur la théorie générale linéaire des points tournants qui nous amènera à définir précisément cette notion dans le cadre de notre étude.

Dans la seconde section, nous nous intéresserons à la présentation et à la définition des solutions canard [19][11][55], qui apparaîtront comme des solutions adaptées à l'étude des points tournants. Nous commencerons par l'exemple "historique" de l'apparition de telles solutions dans l'équation de van der Pol, avant de poursuivre par une présentation des différents types de solutions canard dans $\mathbb{R}^2$, ce qui nous permettra de poser le cadre d'étude qui sera le notre dans tout le manuscrit.

Puis la troisième section de ce chapitre débutera par l'étude du phénomène canard dans $\mathbb{C}$, qui a amené à définir les *solutions surstables* [51][52][10][4]. Le théorème d'existence que l'on rappellera nous apportera un nouvel éclairage sur le résultat d'existence démontré dans le chapitre 2.

Enfin la dernière section sera consacrée, dans un premier temps, à une présentation succincte de la notion de loupes et de son polyèdre de Newton associé, qui sera largement utilisée pour illustrer le choix d'hypothèses que nous prendrons. Elle sera suivie d'une présentation des développements asymptotiques, qui seront au cœur des deux derniers

chapitres, avant de terminer par des rappels terminologiques concernant l'analyse non-standard, dans le formalisme proposé par E. Nelson [41][21][20], qui sera le langage que nous utiliserons pour prouver l'existence de solutions canard dans le chapitre 2.

Dans toute la suite, la variable x et la fonction y , des variables x et ε , seront toutes deux réelles. Notre étude concerne donc les champs de $\mathbb{R}^2$.

1.1 Points tournants

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la notion de point tournant.

Tout d'abord, nous présenterons succinctement l'étude au voisinage de points non singuliers de l'équation, dont l'étude est bien connue, avant de nous intéresser aux points singuliers de cette équation, seuls susceptibles d'être des points tournants.

Nous dirons ensuite quelques mots sur la théorie linéaire générale des points tournants, en citant une caractérisation de tels points conjecturée par W. Wasow [53], et démontrée par C. Stenger [48] en utilisant la théorie Gevrey [9].

Enfin, nous reviendrons à notre cadre d'étude pour expliquer les liens entre les points tournants et les solutions canard ce qui nous amènera, dans tout ce qui suivra, à nous intéresser à ces solutions au comportement particulier.

1.1.1 Où l'étude se fait sans singularités

Nous sommes intéressés par l'équation

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, \varepsilon) \tag{1.1}$$

où x désigne une variable réelle définie sur un voisinage $I \subset \mathbb{R}$ de x_0 , y est une fonction réelle des variables x et ε , $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ est un "petit" paramètre strictement positif que l'on fait tendre vers 0, et Ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en x, y, ε dans un voisinage de $(x_0, y_0, 0) \in I \times \mathbb{R} \times]0, \varepsilon_0[$.

Dans un premier temps, nous supposons que la courbe lente possède une composante lisse passant par $(x_0, 0)$, c'est à dire une fonction y_0 satisfaisant, pour tout $x \in I$, à

$$\Psi(x, y_0(x, 0), 0) = 0$$

On suppose, de plus, qu'elle n'est pas singulière en x_0 , c'est à dire que

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), 0) \neq 0$$

Nous nous plaçons ainsi dans le cas où x_0 n'est pas un point singulier de l'équation (1.1). Dans la suite de cette partie, nous rappelons succinctement l'étude classique des solutions passant près d'un tel point [54].

En appliquant, au voisinage de $(x_0, y_0, 0)$, le théorème des fonctions implicites à l'équation $\Psi(x, y(x, 0), 0) = 0$ nous en déduisons que la fonction $x \mapsto y(x, 0)$ est complètement déterminée dans un voisinage de x_0 , ce qui nous permet, par changement de variables, de déplacer le cadre d'étude au voisinage de $(0, 0, 0)$.

L'étude formelle de cette équation montre alors qu'elle admet une unique solution formelle qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{r=1}^{+\infty} y_r(x) \varepsilon^r =: \hat{y}(x, \varepsilon)$$

où toutes les fonctions y_r sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.

Bien que cette série s'avère être, en général, divergente, le théorème de Borel-Ritt affirme l'existence d'une fonction holomorphe $\tilde{y}$, asymptotique à la série $\hat{y}$, dès lors que ε appartient à un secteur pointé en 0. Ce qui permet d'effectuer la transformation $z := y - \tilde{y}$ qui ramène notre problème à une équation dont on montre que la solution est exponentiellement petite, par application d'un théorème du point fixe.

En conclusion, les solutions de (1.1) sont, dans le cas d'inversibilité de la jacobienne, complètement caractérisées.

Dans la suite, nous supposons que la fonction Ψ de l'équation (1.1) satisfait à

$$\frac{\partial}{\partial y} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), 0) = 0$$

Un tel point x_0 est appelé *singularité* de l'équation (1.1).

Plus particulièrement, nous nous restreindrons aux singularités qui s'accompagnent d'un changement de stabilité, appelées *points tournants*.

Avant de préciser cette terminologie dans le cas réel, nous allons effectuer quelques rappels succincts sur la théorie linéaire générale des points tournants.

1.1.2 Où l'on parle de la théorie linéaire des points tournants

On considère le système de n équations différentielles singulièrement perturbées

$$\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y \tag{1.2}$$

où x et ε sont des nombres complexes, Y est un vecteur de taille n , et h est un entier non nul. La matrice carrée A , de dimension $n \times n$, est supposée holomorphe en $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$

et $\varepsilon \in \mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage (généralement sectoriel) de 0.

M. Hukuhara, Y. Sibuya, H.L. Turritin et W. Wasow ont montré que ce système admet une solution fondamentale holomorphe de la forme

$$\hat{Y}(x, \varepsilon) = \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \hat{Y}_r(x) \varepsilon^{r/m} \right) \cdot \exp \left(\sum_{r=0}^{mh-1} Q_r(x) \varepsilon^{(r-mh)/m} \right) \quad (1.3)$$

où m est un entier non nul, les matrices $\hat{Y}_r$ (définies pour tout entier r) et Q_r (définies pour $r \in \{0, \dots, mh-1\}$) sont holomorphes sur un domaine $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$, sauf sur ensemble discret I ne contenant pas de point d'accumulation, et où le développement en puissances de $\varepsilon^{1/m}$ de $\det \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \hat{Y}_r(x) \varepsilon^{r/m} \right)$ n'est pas identiquement nul.

Dans son livre [54], W. Wasow montre que tout $x_0 \in \tilde{\mathcal{D}} \setminus I$ (un tel point est appelé *asymptotiquement simple*) admet un voisinage sur lequel il existe une solution fondamentale holomorphe qui est asymptotique à "la" solution formelle (1.3).

Afin d'étudier la réciproque de cette propriété, il définit une notion de point tournant :

Définition 1. *Un point $x_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$ est appelé **point tournant** de (1.2) si la solution fondamentale formelle (1.3) n'est pas le développement asymptotique d'une solution fondamentale holomorphe dans un voisinage de x_0 .*

Remarquons que, par contraposée, la propriété précédente affirme que tout point tournant appartient à I .

Malheureusement, les points de I peuvent ne pas être des points tournants, ce qui implique qu'il n'y a pas équivalence entre ces deux propriétés.

En marge de cela, une caractérisation des points tournants, conjecturée par W. Wasow, a été prouvée par C. Stenger [48] :

Théorème 1. *x_0 est un point tournant de (1.2) si et seulement si au moins l'un des coefficients $\hat{Y}_r$ ou Q_r de la solution fondamentale formelle $\hat{Y}$ a une singularité en x_0 .*

En conclusion, l'ensemble discret I est composé de points tournants et de points non asymptotiquement simples qui ne sont pas des singularités des coefficients $\hat{Y}_r$ et Q_r .

Dans la partie qui suit, nous allons revenir au cas d'étude réel unidimensionnel, pour lequel nous verrons qu'être un point tournant se lit directement dans le champ de direction de l'équation étudiée.

1.1.3 Où les points tournants cachent un canard

Nous revenons à l'équation générale (1.1), et nous supposons que x_0 est un point singulier de la courbe lente y_0 , c'est à dire que l'on suppose que :

$$\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x_0, y_0(x_0, 0), 0) = 0$$

Sous cette hypothèse, nous ne pouvons plus appliquer le théorème des fonctions implicites, comme lors de la partie 1.1.1, ce qui nous amène à étudier le comportement des solutions au voisinage de la singularité x_0 .

Dans toute la suite, nous supposerons que x_0 est, plus particulièrement, un point tournant au sens de la définition suivante :

Définition 2. On dit que x_0 est un **point tournant** de (1.1) s'il est une singularité de cette équation qui s'accompagne d'un changement de stabilité, c'est à dire que $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), 0)$ n'a pas le même signe si $x < x_0$ ou si $x > x_0$.

Remarque :

À la fin de la section 1.2, nous verrons la notion de *degré de dégénérescence* (ou de *fugacité*) du point tournant, qui est un indicateur du "niveau de dégénérescence" du point tournant considéré. Elle nous permettra de caractériser le cas où le point tournant est dégénéré qui, comme le suggère le titre de ce manuscrit, est le cas qui nous intéresse particulièrement.

L'étude que nous mettons en place revient à rechercher les solutions de (1.1) qui restent proches de y_0 sur tout un voisinage du point tournant x_0 . Ce problème est bien connu car de telles solutions sont nommées *solutions canard* [19][11][55].

Dans les deux sections qui suivent, nous proposerons un rapide survol de la théorie existante sur ce sujet.

1.2 Solutions (de type) canard

Dans cette section, nous allons présenter la notion de solution canard.

Cette notion sera introduite par l'exemple "historique" de l'équation de van der Pol, qui a amené les premières études de ce phénomène. Puis nous définirons et préciserons cet objet en explicitant les hypothèses de travail, que nous prendrons, basées sur la caractérisation des différents types de solutions canard.

1.2.1 Où l'équation de van der Pol dévoile ses canards

L'équation de van der Pol est une équation différentielle du second ordre servant de modèle aux oscillateurs de relaxation.

Convenablement normalisée, elle se met sous la forme

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

où x désigne une fonction réelle, de la variable de dérivation t , à valeurs réelles, et ε est un "petit" paramètre strictement positif que l'on fait tendre vers 0.

Ce type d'équation est habituellement étudiée dans son plan de phase, que l'on obtient en effectuant le changement $\frac{dx}{dt} = v$, ce qui la transforme en un système différentiel d'ordre 1.

Mais, dans les faits, il se révèle plus utile de l'étudier dans son plan de Liénard, que l'on obtient en effectuant le changement $\frac{du}{dt} = -x$, qui amène au système

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = u - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \frac{du}{dt} = -x \end{cases}$$

Le théorème de Poincaré-Bendixson affirme alors l'existence d'un cycle de relaxation attractif dans le plan (x, u) , dont on peut donner le tracé dans le plan (t, x) :

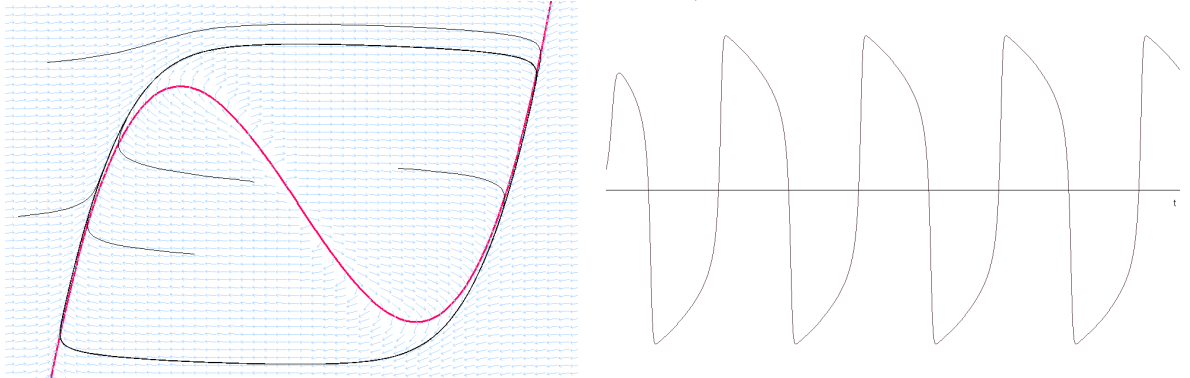


FIG. 1.1 – Le cycle de relaxation de l'équation de van der Pol dans le plan de Liénard (x, u) , et dans le plan (t, x)

Afin de faire apparaître la solution canard, nous introduisons un paramètre $a \in \mathbb{R}$, qui nous amène à considérer l'équation de van der Pol avec second membre

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = a$$

Dans le plan de Liénard, cette dernière équation se récrit

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = u - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \frac{du}{dt} = a - x \end{cases}$$

Remarquons que le point A , de coordonnées $(a, \frac{1}{3}a^3 - a)$, est un point stationnaire.

Dans le cas où $a < 1$, on note qu'il y a un cycle attractif, restant proche du cycle de relaxation tant que a ne devient pas "trop proche" de 1, et que A est un nœud répulsif. Par contre, dès que $a \geq 1$, A devient un nœud attractif, et l'on constate la disparition du cycle attractif.

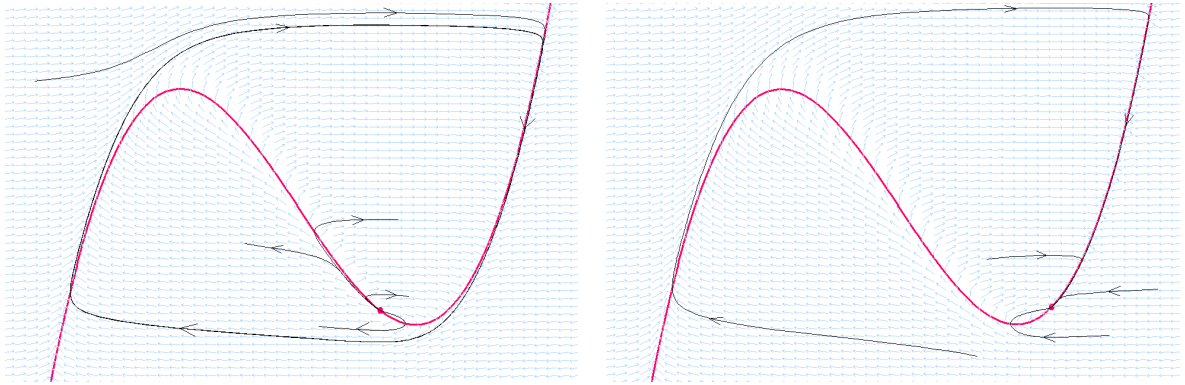


FIG. 1.2 – Le comportement des solutions de l'équation de van der Pol avec $\varepsilon = 0.05$, pour les valeurs $a = 0.7 < 1$, et $a = 1.3 > 1$

Il y a donc une bifurcation de Hopf lorsque a dépasse la valeur 1, au cours de laquelle un cycle attractif asymptotiquement stable, entourant un nœud répulsif, s'est contracté en un nœud attractif.

Par dépendance continue du cycle par rapport au paramètre a , des cycles intermédiaires apparaissent lorsque a se rapproche de la valeur 1. Plus particulièrement, une étude de ce champ montre que les seules formes intermédiaires possibles de ce cycle avant sa disparition sont :

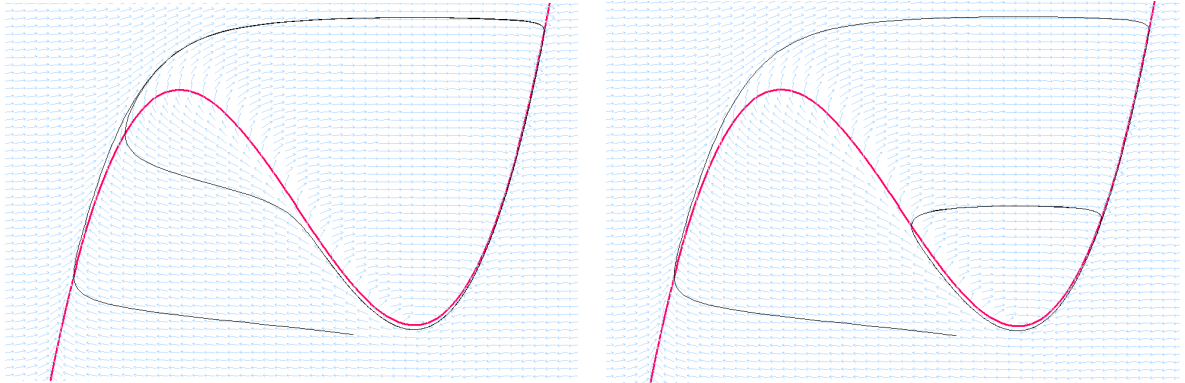


FIG. 1.3 – Les cycles intermédiaires de l'équation de van der Pol, pour $\varepsilon = 0.05$, correspondants respectivement aux valeurs $a = 0.99349093$, et $a = 0.99349094$

C'est la forme bien particulière de ces cycles qui a amené É. Benoît, J.-L. Callot, F. Diener, et M. Diener à leur donner le nom de *canard* [19].

Pour la suite, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que ces cycles longent alternativement des parties attractives, mais aussi et surtout la partie répulsive de la cubique d'équation $u = \frac{1}{3}x^3 - x$, qui est la solution de l'équation rapide ($\varepsilon \frac{dx}{dt} = u - \frac{1}{3}x^3 + x$) prise en $\varepsilon = 0$.

1.2.2 Où les canards sont définis

À partir de la notion de cycle canard, que nous venons de deviner à travers l'étude de l'équation de van der Pol, nous allons définir la notion de solution canard d'une équation différentielle réelle singulièrement perturbée du premier ordre.

Dans la suite, nous nous intéresserons donc à l'équation

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, \varepsilon) \quad (1.4)$$

où x désignera une variable réelle, y une fonction réelle régulière des variables x et ε , $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ est un "petit" paramètre que l'on fait tendre vers 0, et Ψ une fonction régulière en x, y, ε .

Remarque : On peut étendre presque tous les résultats qui suivent au cas où la fonction Ψ admet un développement asymptotique en puissances de ε

$$\Psi(x, y, \varepsilon) \sim \sum_n \psi_n(x, y)$$

où les fonctions ψ_n sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Avant de définir la notion de solution canard, nous avons tout d'abord besoin de définir un objet fondamental pour cette étude :

Définition 3. On appelle **courbe lente** de (1.4) toute fonction régulière y_0 , des variables x et ε , satisfaisant à

$$\forall x, \Psi(x, y_0(x, 0), 0) = 0$$

La composante de la courbe lente satisfaisant à $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), 0) > 0$ (resp. < 0) est appelée *répulsive* (resp. *attractive*).

Comme Ψ est supposée suffisamment régulière, nous pouvons remarquer que, dans le cas où la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), 0)$ est non nulle pour toute valeur de x , alors le signe de cette fonction reste constant, et l'étude des équations sous-jacentes a été rappelée dans la partie 1.1.1.

C'est pourquoi nous nous intéressons au cas où cette fonction s'annule au moins une fois, ce qui est susceptible de provoquer un changement de stabilité de la courbe lente.

Définition 4. On appelle **solution** (de type) **canard** de (1.4), toute solution y^* longeant à la fois la partie attractive et la partie répulsive de la courbe lente.

C'est à dire que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_x \{|y^*(x, \varepsilon) - y_0(x, \varepsilon)|\} = 0$$

Cette définition s'avère imprécise dans les faits, car les solutions canard peuvent revêtir plusieurs formes que nous allons voir sur des exemples simples :

- Les solutions (de type) "**vrai canard**" :

Ce sont des solutions canard qui longent une partie attractive puis une partie répulsive de la courbe lente. Par nature, elles revêtent un caractère exceptionnel. L'exemple type le plus simple se trouve dans l'équation

$$\varepsilon y' = xy$$

dont la courbe lente $y_0 = 0$ a sa partie située à gauche de 0 attractive, et sa partie située à droite de 0 répulsive.

- Les solutions (de type) "**faux canard**"

Ce sont des solutions canard qui longent une partie répulsive puis une partie attractive de la courbe lente. Par nature, ces solutions apparaissent naturellement. L'exemple type le plus simple se trouve dans l'équation

$$\varepsilon y' = -xy$$

dont la courbe lente $y_0 = 0$ a sa partie située à gauche de 0 répulsive, et sa partie située à droite de 0 attractive.

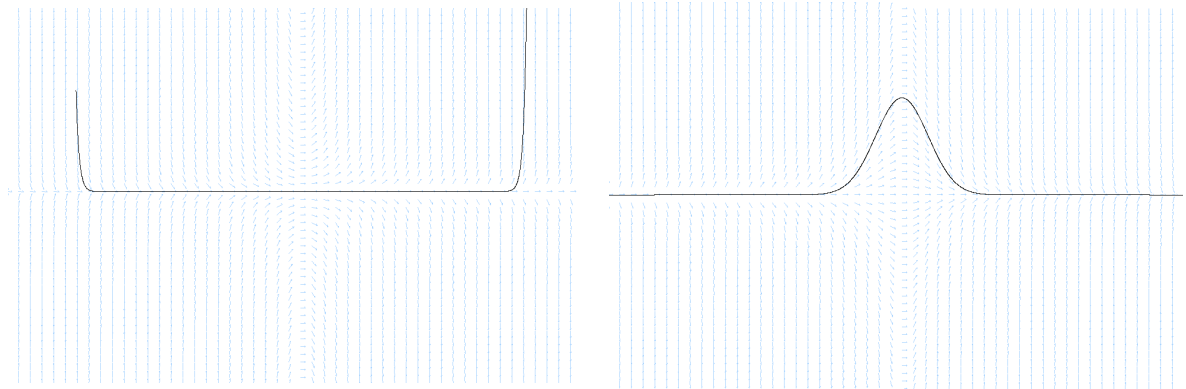


FIG. 1.4 – Une solution "vrai canard" et une solution "faux canard" dessinées dans le cadre $(x, y) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\varepsilon = 0.05$

Naturellement, l'étude des solutions "faux canard" ne nous intéresse pas car ce type de trajectoires est naturel et c'est pourquoi, dans tout ce qui suivra, nous prendrons les hypothèses nécessaires pour nous trouver dans des conditions d'apparition de solutions "vrai canard", ce qui nous permettra d'omettre le qualificatif "vrai" dans la suite.

En plus de cela, nous supposerons l'hypothèse suivante vérifiée :

Hypothèse : Les points de la courbe lente satisfaisants à $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x), 0) = 0$ sont isolés.

Cette hypothèse nous permettra de faire l'étude au cas par cas sur des voisinages disjoints de chacune des singularités. Elle nous permet d'éviter les cas illustrés par l'exemple de l'équation

$$\varepsilon y' = xy^2$$

pour laquelle les solutions étudiées sont appelées solutions (de type) "**canard faible**". Ce type d'équations a la particularité d'admettre une courbe lente double, car elle est définie à partir d'une équation admettant une racine double.

Sur l'exemple proposé, la courbe lente double $y_0 = 0$ sépare le plan en une partie ($y > 0$) sur laquelle on trouve des solutions "vrai canard", et une partie ($y < 0$) sur laquelle on trouve des solutions "faux canard".

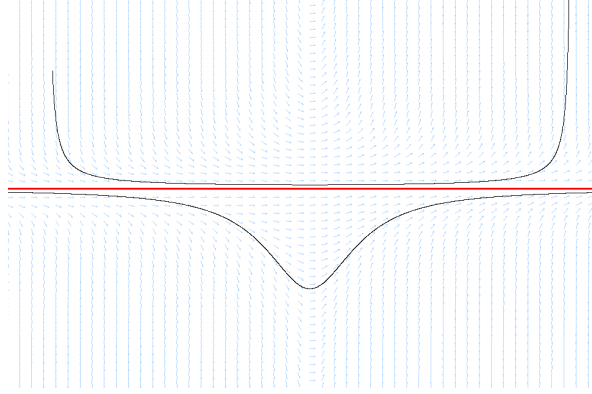


FIG. 1.5 – Un exemple de solutions d’une équation à canard faible dessinées dans le cadre $(x, y) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\varepsilon = 0.05$

Quitte à considérer des voisinages disjoints de chaque singularité et nous y restreindre un à un, nous supposons que la partie de la courbe lente satisfaisant à l’équation $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), 0) = 0$ est réduite à un point x_0 que nous ramènerons, dans la suite, en $x = 0$.

Nous appellerons **degré de dégénérescence** (ou *degré de fugacité*) l’ordre p de x_0 en tant que zéro de la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), 0)$, que l’on supposera entier.

Remarquons que, pour être dans des conditions d’apparition de solutions "vrai canard", il est nécessaire de supposer que p est impair, car nous avons alors

$$\forall i < p, \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), 0) = 0, \text{ et } \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), 0) > 0$$

qui est la condition d’apparition de solutions "vrai canard".

Ainsi, en supposant que p est impair, nous sommes certains que toute solution canard que l’on mettra en évidence sera une solution "vrai canard".

Terminologie : Si $p \geq 3$, on dit que x_0 est un point tournant dégénéré.

Du fait du caractère exceptionnel des solutions (vrai) canard, et tout comme lors de l’étude de l’équation de van der Pol, nous introduisons un paramètre a dans notre équation que nous ferons varier afin de faire apparaître les solutions canard de l’équation. Ainsi, l’étude menée dans la suite concernera les équations

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, a, \varepsilon) \tag{1.5}$$

où x désigne une variable réelle, y une fonction réelle régulière des variables x et ε , a est un paramètre réel, ε un "petit" paramètre strictement positif que l’on fait tendre vers 0, et Ψ une fonction régulière en x , y , a , et ε .

Pour ce type d’équations, nous pouvons étendre les définitions données précédemment :

Définition 5. On appelle *courbe lente* de (1.5) tout couple (a_0, y_0) satisfaisant à

$$\forall x, \Psi(x, y_0(x, 0), a_0, 0) = 0$$

La composante de la courbe lente satisfaisant à $\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y_0(x, 0), a_0, 0) > 0$ (resp. < 0) est appelée *répulsive* (resp. *attractive*).

On appelle **solution** (de type) (**vrai**) **canard** de (1.5), tout couple (a^*, y^*) solution de (1.5), tel que a^* reste proche de a_0 , et y^* longe d'abord la partie attractive puis la partie répulsive de la courbe lente y_0 , c'est à dire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\alpha^* - \alpha_0| = 0, \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y^*(., \varepsilon) - y_0(., \varepsilon)\|_\infty = 0$$

Dans cette partie, nous avons choisi de qualifier de "régulier" le comportement des fonctions qui apparaissent. Mais, dans toute la suite, nous supposons que ces fonctions sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$, même si l'on pourrait affiner cette hypothèse sur la régularité.

Dans les chapitres qui suivent, nous nous intéresserons à montrer l'existence de solutions canard en nous plaçant dans le cas où le point tournant considéré sépare la courbe lente en une partie attractive puis une partie répulsive.

L'apparition de ce paramètre a étant nécessaire car nous verrons que les solutions canard que nous recherchons ne peuvent apparaître que pour des plages très étroites de valeurs de ce paramètre.

Avant cela, nous allons nous intéresser, dans la section suivante, à l'étude des solutions canard lorsque l'on suppose les variables complexes. Puis nous discuterons des aménagements souhaitables pour obtenir un résultat similaire dans le cas où les variables sont réelles.

1.3 Chasse au canard complexe : la surstabilité

L'étude des "canards robustes", qui a lieu dans le cas où la variable x et la fonction y sont complexes, a amené G. Wallet a donné le nom de *solution surstable* [51][52] à tout couple (a^*, y^*) longeant la courbe lente sur tout un voisinage complexe du point tournant.

Dans cette section, nous allons rappeler un résultat d'existence de solutions surstables, puis nous ferons quelques commentaires sur l'adaptation de ce résultat afin d'obtenir un résultat similaire pour des objets réels, qui est l'objet du chapitre 2.

1.3.1 Où le canard se chasse en se servant du relief

Dans cette partie, nous considérons l'équation

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, a, \varepsilon) \quad (1.6)$$

où $x \in D \subset \mathbb{C}$, y est une fonction analytique complexe des variables x et ε , a est un multiparamètre complexe, et $\varepsilon \in S \subset \mathbb{C}$ est un paramètre réel strictement positif que l'on fera tendre vers 0.

Nous supposons que la fonction Ψ est analytique par rapport à x , y , a , et ε , et nous prenons les hypothèses nécessaires pour nous placer dans les conditions d'apparition d'un point tournant, à savoir :

- L'équation considérée admet une courbe lente, c'est à dire que

$$\exists(a_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}(D \times S); \forall x \in D, \Psi(x, y_0(x, 0), a_0, 0) = 0$$

- La fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y_0(x, 0), a_0, 0)$ admet un unique zéro x_0 dans D , dont l'ordre est noté p .

Sous ces hypothèses, on appelle *fonction relief*, la fonction

$$R : x \mapsto \Re(F(x)), \text{ où l'on a noté } F(x) := \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} \Psi(t, y_0(t, 0), a_0, 0) dt$$

Au vu des hypothèses prises, la fonction F admet des fonctions racines $(p+1)$ -ièmes dans un voisinage U de x_0 qui sont, de plus, chacune des difféomorphismes locaux. En notant $c^{-1} := h'(0)$, où h désigne une racine $(p+1)$ -ième de F , nous pouvons ainsi écrire que, localement,

$$F(x) = (c(x - x_0)(1 + g(x)))^{p+1}$$

où g est une fonction satisfaisant à $g(x_0) = 0$.

Cette écriture reste valide pour tout choix de racine $(p+1)$ -ième h de la fonction F .

Nous avons ainsi décomposé la région $\{x \in U; R(x) > 0\}$ en $p+1$ parties connexes appelées *montagnes*. Nous pouvons faire de même pour la région $\{x \in U; R(x) < 0\}$, qui se décompose en $p+1$ parties connexes, intercalées avec les montagnes, que l'on nomme *vallées*.

Ces terminologies proviennent de la forme particulière du graphe de R dans le repère $(\Re(x), \Im(x), R(x))$:

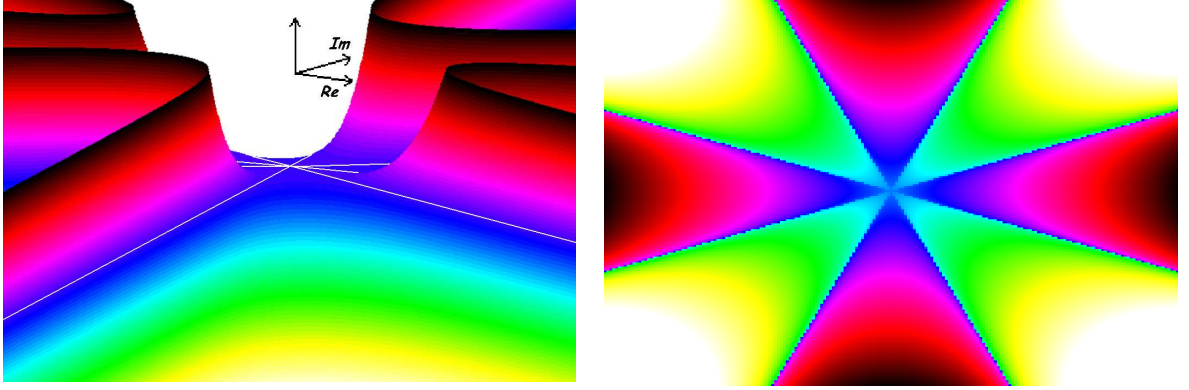


FIG. 1.6 – Le graphe de $R(x) = \Re(x^4)$ représenté en 3 dimensions et par ses courbes de niveau

Pour aider à la lecture du premier dessin, nous y avons tracé en blanc la ligne de niveau $R(x) = 0$, et y signalons plus haut le repère choisi.

La notion de relief, et ce qui y est associé, a été introduite par J.-L. Callot [8] afin de montrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Si $x \in U$ est tel que $y(x)$ est proche de $y_0(x)$. Alors, en tout point $t \in U$ accessible à partir de x par un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ strictement descendant γ , c'est à dire satisfaisant à $\frac{d}{d\xi} R(\gamma(\xi)) < 0$, $y(t)$ est bien définie et est proche de $y_0(t)$.*

Dans ce cas, on dit que la solution y reste proche de la courbe lente sur tout chemin descendant le relief (i.e. sur tout chemin sur lequel R est toujours décroissante).

Ainsi, à toute montagne, il est possible d'associer, pour toute valeur du paramètre a , une solution maximale restant proche de la courbe lente sur cette montagne et ses deux vallées adjacentes. Une telle solution est appelée *distinguée*.

Il est donc naturel de se demander si, en utilisant le multiparamètre a , il est possible de trouver une solution définie et proche de la courbe lente y_0 sur toutes les montagnes et les vallées à la fois. Ce type de solutions étant appelées *surstable* :

Théorème 2. *Si a est un multiparamètre constitué de p composantes complexes ($a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$), où p est le degré de dégénérescence du point tournant x_0 . Et si la matrice $M := (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, définie par*

$$p_{i,j} := \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^i}{\partial \alpha_j \partial^{i-1} x} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), a_0, 0)$$

est inversible, alors l'équation (1.6) admet une solution surstable (a^, y^*) satisfaisant à $a^* - a_0 = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$.*

Ce théorème a été montré de deux manières différentes, l'une [10] utilisant des méthodes Gevrey, et l'autre [5][4] un théorème du point fixe. Nous allons présenter les idées de la seconde démonstration qui a inspirée la démonstration présentée dans le chapitre 2 :

Afin de démontrer ce résultat É. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke et G. Wallet ont montré l'existence d'un changement de paramètre de la forme $a = a_0 + \varepsilon M^{-1}(b - c)$ et un changement de variable de la forme $y = y_0 + \varepsilon(z - B - C.b)$, où $c \in \mathbb{C}^p$ est une constante, et B et C deux fonctions analytiques des variables x et ε , qui permette de transformer l'équation (1.6) en une équation, dite *préparée*, présentée sous la forme :

$$\varepsilon z' = f(x, \varepsilon)z + \sum_{i=1}^p b_i(x - x_0)^{i-1} + \varepsilon P(x, z, b, \varepsilon) \quad (1.7)$$

où f et P sont analytiques en leurs variables, et où l'on note $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{C}^p$.

Cette dernière équation, d'usage plus pratique, permet alors de définir un opérateur $\mathcal{G}$ qui, au couple $(\tilde{b}, \tilde{z})$, associe la solution (b, z) du problème aux limites, sous-jacent à l'équation,

$$\varepsilon z' = f(x, \varepsilon)z + \sum_{i=1}^p b_i(x - x_0)^{i-1} + \varepsilon P(x, \tilde{z}, \tilde{b}, \varepsilon)$$

Comme cet opérateur est, de plus, contractant avec une constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$, l'application d'un théorème du point fixe montre l'existence d'un point fixe qui, par définition de $\mathcal{G}$, est la solution surstable de l'équation (1.6).

À la suite de ce résultat, il est aussi montré que deux solutions surstables sont exponentiellement proches.

Ce résultat a été utilisé par A. Fruchard et R. Schäfke [31] pour l'étude des résonances de l'équation d'Hermite

$$\varepsilon y'' + f(x, \varepsilon)y' + g(x, \varepsilon)y = 0$$

En effet le changement de variable $w = \varepsilon y/y'$, proposé par J.-L. Callot [7], transforme cette équation en

$$\varepsilon w' + f(x, \varepsilon)w + w^2 + \varepsilon g(x, \varepsilon) = 0$$

Et, en étudiant cette équation avant de revenir à l'équation d'Hermite, ils montrent l'équivalence entre l'existence d'une solution formelle, à coefficients analytiques, dans un voisinage de 0 pour l'équation d'Hermite, et l'existence d'une solution analytique résonante globale pour cette même équation.

À noter qu'en utilisant les méthodes Gevrey, ils proposent dans [32] une classification des équations résonantes.

1.3.2 Où l'on fait le lien avec le monde réel

Le théorème rappelé dans la partie précédente affirme l'existence d'une solution de (1.6) longeant la courbe lente sur tout un voisinage complexe du point tournant.

Pour cela, il a été nécessaire de supposer que le multiparamètre a a un nombre de composantes égal au degré de dégénérescence du point tournant.

L'interprétation géométrique qui en a été donnée étant de demander à la solution surstable de rester proche de la courbe lente pour toute valeur de $x \in \mathbb{C}$ appartenant à chacune des $p + 1$ montagnes. On dit que l'on a ainsi "grimpé" simultanément sur ces $p + 1$ montagnes.

Sous les hypothèses adaptées pour être dans les conditions d'apparition d'une solution (vrai) canard (i.e. p impair), nous remarquons que chercher une solution restant proche de la courbe lente sur un voisinage réel du point tournant (qui est un intervalle), revient systématiquement à chercher à "grimper" simultanément sur les deux montagnes recouvrant $\mathbb{R}$.

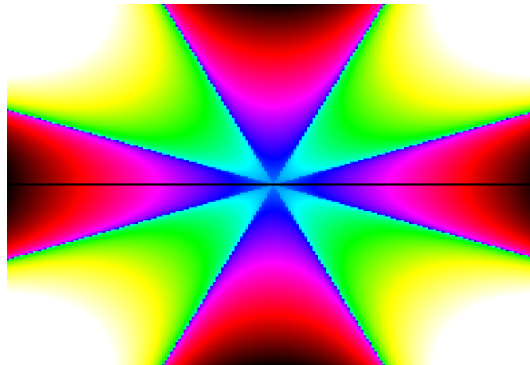


FIG. 1.7 – Dans le cas où p est impair, l'axe réel se situe sous deux montagnes

Il est donc légitime de se demander si le résultat d'existence de solutions surstables ne pourrait pas s'adapter au cadre réel en n'utilisant qu'un seul paramètre, alors que l'étude menée dans le cadre complexe en nécessite p .

Une réponse affirmative partielle à cette question sera apportée dans le chapitre suivant.

Néanmoins, il convient de noter que la solution que l'on obtiendra ne sera pas, en général, surstable car il s'agira d'une fonction réelle dont le prolongement complexe admet des singularités dans un voisinage complexe de 0. Ce qui revient à dire qu'elle ne longe pas la courbe lente pour des valeurs de $x \in \mathbb{C}$ appartenant aux $p - 1$ autres montagnes.

Cette constatation est due au fait que les lignes séparant montagnes et vallées sont

constitués de pôles pour la solution qui restent très proches l'un de l'autre. Comme ces lignes s'intersectent en $x = 0$, et que la solution canard les traversent au voisinage de ce point, celà a bien pour effet d'amener la solution canard à se décoller brièvement de la courbe lente au macro-voisinage de 0, à cause de la présence de pôles non réels au voisinage de 0.

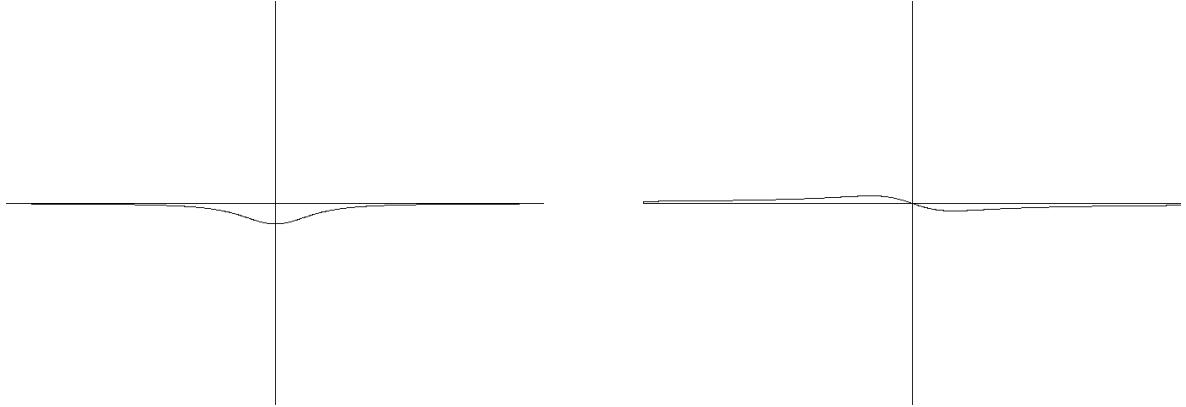


FIG. 1.8 – Deux trajectoires-type de solutions "vrai" canard qui se décollent de la courbe lente $u_0 = 0$ au voisinage de $x = 0$

1.4 Pré-requis

Dans cette section, nous allons présenter la notion de loupe et de polyèdre de Newton associé, qui sera largement utilisée dans le chapitre 3. Elle sera suivie d'une présentation des développements asymptotiques sous la forme utilisée dans les chapitres 4 et 5, puis nous proposerons un tutorial de présentation de la terminologie nonstandard qui sera utilisée dans la démonstration du théorème d'existence de solutions canard, dont le chapitre 2 fait l'objet.

1.4.1 Les loupes à poids et leurs polyèdres de Newton associés

Dans cette partie nous allons présenter la notion de loupe à poids et de son polyèdre de Newton associé. Cette notion sera utilisée lors du chapitre 3 pour commenter les hypothèses contraignantes que nous prendrons lors de la mise sous forme préparée de l'équation étudiée au chapitre 2.

Les loupes à poids sont particulièrement importantes car elles permettent bien souvent de transformer des équations singulièrement perturbées en des équations régulièrement perturbées, dont l'étude peut être faite à partir du modèle local.

Cette méthode, qui utilise l'analyse nonstandard, trouve un équivalent standard dans les méthodes d'éclatement à poids (*blow-up*) de singularités. La dualité entre ces deux méthodes apparaît dans le théorème démontré par P. de Maesschalck qui, en utilisant des méthodes d'éclatement de la singularité, a montré dans sa thèse un résultat d'existence de solutions canard.

Dans un premier temps, il convient d'effectuer un choix de loupe qui permette d'obtenir une équation régulièrement perturbée dont le modèle local nous convienne.

Ce choix passe par une sélection de termes, figurant dans le modèle local, que nous qualifierons de "dominants".

Le choix de monômes dominants, pour étudier ce type d'équations, peut ne pas être aisé, comme nous allons le constater sur l'exemple de l'équation

$$\eta^4 \frac{du}{dt} = 4t^3 u + t^8 + u^2$$

qui est composée de quatre monômes $\eta^4 \frac{du}{dt}$, $4t^3 u$, t^8 , u^2 nous permettant de tracer les polyèdres de Newton de cette équation, qui sont des objets dépendant des choix de monômes "dominants" que seront faits.

Le polyèdre de Newton est obtenu en représentant les points correspondants à chacun des monômes "dominants" en fonction de leur degré en t , u , η , puis en dessinant le plan qu'ils engendrent. Il doit être tel que tout autre point représentant un monôme de l'équation étudiée appartienne au demi-espace supérieur.

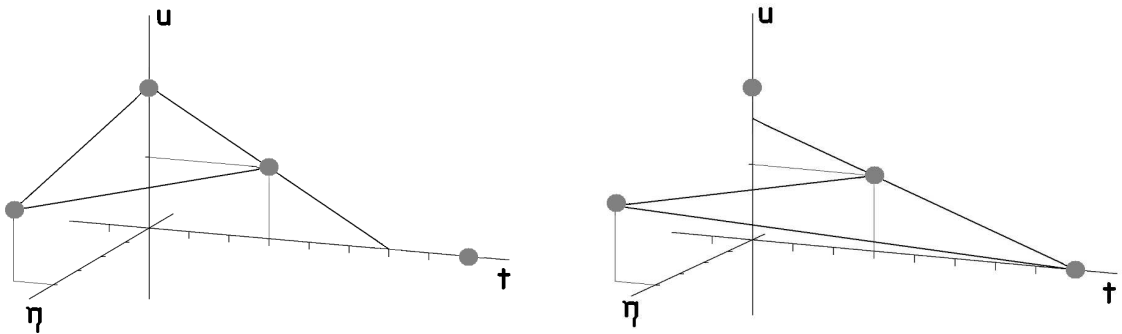


FIG. 1.9 – Les polyèdres de Newton associés aux deux choix étudiés

Notons que l'on a choisi un nombre de monômes "dominants" égal au nombre de variables de l'équation (ici t , u , et η) afin que la correspondance entre les points base du polyèdre de Newton et les termes composant le modèle local ainsi obtenu soit possible. Cette lecture du polyèdre de Newton montre que, dans l'exemple ci dessus, $4t^3u$ devait nécessairement être choisi comme monôme dominant, alors qu'un monôme de la forme $\eta t^6 u^2$ n'aurait pas pu l'être.

Afin d'illustrer la notion de polyèdre de Newton, nous allons étudier l'effet des loupes associées aux deux choix possibles de monômes "dominants" illustrés par la figure précédente :

- En fixant comme poids $(1, 3, 1)$ pour (t, u, η) , ce qui correspond à la loupe

$$\begin{cases} t = \nu T \\ u = \nu^3 U \\ \eta = \nu \end{cases}$$

nous arrivons à l'équation

$$\frac{dU}{dT} = 4T^3U + U^2 + \nu^2 T^8$$

- Tandis que le choix de poids $(1, 5, 1)$ pour (t, u, η) , qui correspond à la loupe

$$\begin{cases} t = \nu T \\ u = \nu^5 U \\ \eta = \nu \end{cases}$$

nous amène à l'équation

$$\frac{dU}{dT} = 4T^3U + T^8 + \nu^2 U^2$$

Nous avons ainsi proposé deux choix de loupes, qui dépendent du choix des monômes que l'on souhaite avoir comme "dominants".

Si le premier choix de loupe se trouve être peu pertinent, du fait que $U = 0$ est une solution de l'équation régulièrement perturbée, le second choix de loupe se révèle plus intéressant.

Ce qui montre que le choix de loupe à faire parmi ceux possibles est important car un mauvais choix peut provoquer une perte d'information due à un "zoom trop puissant" au macro-voisinage de 0.

1.4.2 Les développements asymptotiques

Dans les deux derniers chapitres de ce manuscrit nous étudierons les propriétés asymptotiques des solutions canard, à travers l'implémentation de leurs développements asymptotiques "adaptés".

Dans cette partie, nous présentons les développements asymptotiques en puissances d'un petit paramètre $\tau > 0$ qui sont un moyen simple d'effectuer l'approximation asymptotique des solutions exactes des équations que nous chercherons à calculer grâce à un procédé constructif.

Nous dirons aussi que nous cherchons à *implémenter* un tel développement asymptotique.

Dans la suite, a (resp. f) désignera un nombre (resp. fonction de la variable x) dépendant du paramètre τ , ce que nous soulignerons en présentant a (resp. f) comme fonction de τ (resp. x et τ).

Notons que τ jouera ici le rôle des quantités ε et $\eta := \varepsilon^{1/(p+1)}$ apparaissant dans la suite, et c'est pourquoi τ désigne un paramètre réel strictement positif que l'on fait tendre vers 0.

Définition 6. On dit que la série $\sum_k a_k(\tau)$ (resp. $\sum_k f_k(x, \tau)$) est un développement asymptotique (au sens de Poincaré) en puissances de τ de a (resp. f) si, pour tout entier k , $a_k(\tau) = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^k)$ (resp. $\sup_x \{|f_k(x, \tau)|\} = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^k)$) et si, pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\left| a(\tau) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k(\tau) \right| = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^K) \left(\text{resp. } \sup_x \left\{ \left| f(x, \tau) - \sum_{k=0}^{K-1} f_k(x, \tau) \right| \right\} = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^K) \right)$$

Dans la suite, nous serons plus particulièrement intéressés par les développements asymptotiques dont les coefficients vérifient $a_k(\tau) = \tilde{a}_k \tau^k$ (resp. $f_k(x, \tau) = \tilde{f}_k(x) \tau^k$) où, pour tout entier k , les quantités $\tilde{a}_k$ et $\tilde{f}_k$ sont indépendantes de τ .

On dit que $\sum_k f_k(x, \tau)$ est un développement asymptotique en puissances de τ de la fonction f .

Remarquons que, dans ce cas particulier, si un tel développement asymptotique existe, alors il est unique. Ce qui explique que ce soient ces types de développements qui nous intéressent particulièrement.

En pratique, la régularité des coefficients de ces développements asymptotiques sera une conséquence du contexte de l'étude++.

Les développements asymptotiques en puissances d'un petit paramètre ont été largement étudiés, car ce type de développements asymptotiques permet d'avoir une meilleure approximation asymptotique des solutions restant proches d'une courbe lente sur tout un voisinage lorsque ε tend vers 0. En ce qui nous concerne, nous sommes intéressés par l'étude de l'existence de tels développements asymptotiques pour les solutions canard.

Cette étude sera le sujet des chapitre 4 et 5, où ces développements asymptotiques seront implémentés de manière itérative à partir d'une méthode utilisant le caractère contractant d'un opérateur étudié dans le chapitre 2.

Lors du chapitre 4, nous proposerons un cadre formel général permettant d'implémenter

les développements asymptotiques en puissances de η des solutions canard. Nous verrons, de plus, que ce cadre permet aussi de retrouver, dans le cas où $p = 0$, l'existence de développements asymptotiques combinés [50][6].

Définition 7. Une fonction f , des variables x et τ , admet un développement asymptotique combiné en puissances de τ sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ s'il existe deux suites de fonctions de x , $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$, toutes deux indépendantes de τ , telles que

$$\forall K \in \mathbb{N}, \sup_{x \in [x_1, x_2]} \left\{ \left| f(x, \tau) - \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_k(x) - g_k \left(\frac{x - x_0}{\tau} \right) \right) \tau^k \right| \right\} = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^K)$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, x_1]$ et g_k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, exponentiellement décroissante en l'infini, c'est à dire que, au voisinage de $+\infty$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists (C_k, c_k) \text{ constantes ; } \forall \xi, |g_k(\xi)| < C_k e^{-c_k \xi}$$

Ces développements apparaissent comme une généralisation des développements asymptotiques en puissances du petit paramètre

Ils se trouvent être particulièrement adaptés pour l'étude asymptotique d'une solution admettant une couche limite, dans le cas où l'équation présente une courbe lente attractive.

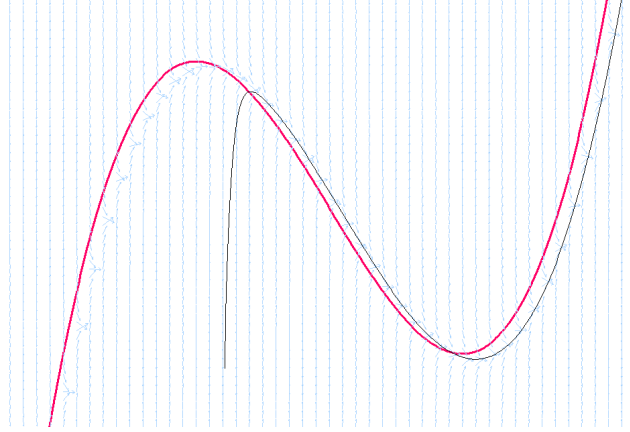


FIG. 1.10 – Exemple d'une solution ayant une couche limite

Bien que ce type d'équations se trouve être hors du cadre de notre étude, nous nous y intéresserons afin d'appliquer le cadre formel donné dans la section 4.4. Afin d'éviter ces problèmes de couche limite, nous restreindrons d'ailleurs, dans le cas général ($p \geq 3$), l'implémentation des développements asymptotiques à un sous-intervalle de l'intervalle de définition de x .

Remarquons que, comme le paramètre τ tend vers 0, les fonctions $x \mapsto g_k(\frac{x-x_0}{\tau})$ n'ont une valeur significative que lorsque x est "proche" de x_0 (i.e. si $x - x_0 = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$) et, pour cette raison :

- La suite $(f_k)_k$, appelée *partie lente* du développement asymptotique combiné, correspond au développement asymptotique de la solution lorsqu'elle longe la courbe lente.
- La suite $(g_k)_k$, appelée *partie rapide* du développement asymptotique combiné, correspond au développement asymptotique du saut effectué par la solution, au voisinage de x_0 , pour rejoindre la courbe lente attractive lorsque l'on a choisi de prendre une condition initiale en x_0 éloignée de la courbe lente.

Plus généralement, le cadre que nous mettrons en place dans le chapitre 4 a pour but d'implémenter des développements asymptotiques en puissances de η des solutions canard sous une forme généralisant les développements asymptotiques combinés.

L'application de la correspondance construite au chapitre 4 a pour but d'implémenter des développements asymptotiques de la forme

$$\sum_k \check{u}_k(x, \varphi) \eta^k$$

où les variables des fonctions $\check{u}_k$ sont x et une famille de fonctions intermédiaires $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l)$, elles mêmes fonctions de x et η , n'admettant pas de développement asymptotique en puissances de η , à coefficients réguliers en x .

Nous verrons que ce cadre permet de retrouver les développements asymptotiques combinés, dans le cas de l'étude d'une solution admettant une couche limite près d'une courbe lente attractive, et le développement asymptotique de la solution pour l'étude d'un point tournant non dégénéré.

Enfin nous verrons, dans le chapitre 5, que cette correspondance permet aussi de montrer l'existence de développements asymptotiques en puissances de η des solutions, lorsque l'on étudie les points tournant dégénérés, mais que des problèmes d'interactions, dus à la multiplication entre les différentes fonctions intermédiaires composant φ , posent des problèmes pour garantir leur unicité d'écriture dans le cas général.

1.4.3 La terminologie nonstandard

Dans le chapitre 2, nous présenterons le théorème d'existence de solutions canard qui sera démontré en utilisant le langage de l'analyse nonstandard.

Néanmoins, nous présenterons tout d'abord cet énoncé de manière standard, avant de donner sa version nonstandard, dont nous montrerons l'équivalence. Cette version alternative de l'énoncé étant celle qui sera démontrée.

Le langage nonstandard qui sera utilisé est celui de l'"*Internal Set Theory*" formalisé par Edward Nelson [41][21][20].

Cette théorie est complètement caractérisée par l'introduction du prédicat *standard*, qui caractérise les objets mathématiques "usuels". Ce prédicat amène l'introduction de quantités nonstandard. Formellement, ce nouveau prédicat découle des seuls trois axiomes que nous énoncerons plus loin. D'une certaine manière, les objets "standard" de cette théorie sont les objets mathématiques classiques.

Dans un souci de clarté nous donnons, dès maintenant, un lexique de quelques propriétés nonstandard :

- Un nombre réel x est dit *infinitement grand* s'il est plus grand, en valeur absolue, que tout nombre réel standard.
Cette propriété est notée $x \simeq \infty$.
- Un nombre réel x est dit *limité* s'il n'est pas infinitement grand.
Cette propriété est notée $x = \mathcal{L}$.
- Un nombre réel non nul x est dit *infinitement petit* (ou *infinitésimal*) s'il est plus petit, en valeur absolue, que tout nombre réel standard strictement positif.
Cette propriété est notée $x \simeq 0$, ou encore $x = \mathcal{O}$.
- Un nombre réel x est dit *appréciable* s'il n'est ni infinitement petit, ni infinitement grand.
Cette propriété est notée $x = @$.
- Deux nombres x et y sont dit *infinitement proches*, si leur différence est infinitement petite.
Cette propriété est notée $x \simeq y$.
- Nous appelons *halo* d'un point x la collection des points y satisfaisants à $y \simeq x$.
Cette collection n'est pas un ensemble, au sens usuel.

Remarque : *Sur la terminologie "ensembles externes"*

De manière générale, l'analyse nonstandard fait intervenir des collections d'objets qui ne sont pas des ensembles, au sens usuel. C'est, par exemple, le cas de *la collection des nombres limités*, de *la collection des nombres appréciables*, de *la collection des nombres infinitement grands*, ou encore de *tout halo d'un point*.

Dans la suite, de telles collections seront malgré tout appelées "ensembles externes".

Afin de conclure ce tutorial, nous rappelons que l'*Internal Set Theory* se caractérise par l'introduction de trois nouveaux axiomes : l'Idéalisation, la Standardisation et le Transfert dont les énoncés sont les suivants :

Axiome d'idéalisation :

Pour toute formule interne B , contenant au moins deux variables libres z_1 et z_2 , on a

$$(\forall^{st} Z, \text{fini}, \exists z_1; \forall z_2 \in Z, B(z_1, z_2)) \Leftrightarrow (\exists z_1; \forall^{st} z_2, B(z_1, z_2))$$

Dans le chapitre 2, nous utiliserons la "contraposée" de ce principe afin de donner un équivalent nonstandard au théorème proposé. C'est à dire que nous l'utiliserons sous la forme :

$$(\forall z_1, \exists^{st} z_2; \mathcal{P}(z_1, z_2)) \Leftrightarrow (\exists^{st} Z, \text{fini}; \forall z_1, \exists z_2 \in Z; \mathcal{P}(z_1, z_2))$$

Axiome de standardisation :

Soit F une formule standard, alors

$$\forall^{st} X, \exists^{st} Y; \forall^{st} z, [(z \in Y) \Leftrightarrow (z \in X \text{ et } F(z))]$$

Ce principe assure l'existence d'un ensemble standard Y ayant pour éléments standard les éléments standard z de X satisfaisant à $F(z)$.

Axiome de transfert :

Soit F une formule standard ne comportant aucune autre variable libre que z , alors

$$\forall^{st} z, F(z) \Rightarrow \forall z, F(z)$$

En particulier, ce principe énonce que si l'on se donne une formule ne faisant pas intervenir de termes nonstandard alors, afin de la démontrer pour tout z , il suffit de la démontrer pour toutes les valeurs standard que peut prendre la variable z .

Remarque : Si, dans IST, les notations $t = \mathcal{L}\varepsilon$, $t \neq \mathcal{L}\varepsilon$, et $t = @ \varepsilon$, où $\varepsilon = \mathcal{O}$, ont du sens, ce n'est pas tout à fait le cas des notations classiques que l'on souhaiterait leur associer (respectivement $t = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$, $t \neq \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$, et $t = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon) \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$) :

Dans toute la suite, l'expression « $f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon))$ » (respectivement $f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon)) \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon))$) si $t = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$ » sera un résumé simplifié de la propriété

$$\forall \alpha > 0, \exists M > 0; \forall (t, \varepsilon), [(t \leq \alpha \varepsilon) \Rightarrow (|f(t, \varepsilon)| \leq M|g(t, \varepsilon)|)]$$

(resp. $\forall \alpha > 0, \exists m, M > 0; \forall (t, \varepsilon), [(t \leq \alpha \varepsilon) \Rightarrow (m|g(t, \varepsilon)| \leq |f(t, \varepsilon)| \leq M|g(t, \varepsilon)|)]$)

De la même façon, l'expression « $f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon))$ » (respectivement $f(t, \varepsilon) = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon)) \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(g(t, \varepsilon))$) si $t \neq \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$ » sera un résumé simplifié de la propriété

$$\exists \alpha > 0, \exists M > 0; \forall (t, \varepsilon), [(t > \alpha \varepsilon) \Rightarrow (|f(t, \varepsilon)| \leq M|g(t, \varepsilon)|)]$$

(resp. $\exists \alpha > 0, \exists m, M > 0; \forall (t, \varepsilon), [(t > \alpha \varepsilon) \Rightarrow (m|g(t, \varepsilon)| \leq |f(t, \varepsilon)| \leq M|g(t, \varepsilon)|)]$)

Chapitre 2

Existence et "unicité" de la solution canard

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

Isocrate

Ce chapitre est dédié à la démonstration du théorème d'existence de solutions canard dans les équations préparées de la forme (2.1), ce résultat est présenté dans [29]. Une version similaire de ce résultat a été démontrée par P. de Maesschalck [17][15] qui a utilisé les méthodes géométriques d'éclatement à poids [24] des singularités. D. Pazzolo a aussi montré [46] un résultat similaire pour une classe d'équations prenant en compte plusieurs paramètres, afin de pondérer les termes qui seront exclus de notre étude.

La démonstration que nous présentons ici est essentiellement basée sur la définition d'une suite récurrente, construite à partir d'un opérateur contractant, qui nous permettra de conjecturer l'existence d'un développement asymptotique en puissances de η de la solution canard, que nous traiterons dans les chapitres suivants.

Notons enfin que la démonstration qui sera mise en œuvre utilise l'analyse nonstandard car, en plus de simplifier considérablement les notations utilisées, le caractère infiniment petit que confère cette théorie aux paramètres ε et η nous permet de donner un aspect plus intuitif à la démonstration.

Dans la première section, nous proposerons au préalable une succession de changements de variables, suggérés par les hypothèses prises, qui permettront de présenter cette équation sous une forme simplifiée. Cette forme nous permettra de mettre en œuvre la démonstration du résultat d'existence des solutions canard.

À la suite de quoi nous donnerons, dans la seconde section, un énoncé général du théorème d'existence n'utilisant pas le langage de l'analyse nonstandard, avant de donner son analogue dans cette théorie, dont nous montrerons l'équivalence.

Nous aurons besoin de restreindre le domaine de définition du paramètre α et, par suite, celui de la fonction u , ce qui sera commenté dans la section 2.3. Puis nous démontrerons l'énoncé en deux parties du théorème nonstandard d'existence de la solution canard qui sera construite, par itération, comme le point fixe d'un opérateur contractant.

2.1 Mise sous forme préparée du problème

Dans toute la suite du manuscrit, nous signalerons que le paramètre et la fonction sont dépendants du paramètre de perturbation en écrivant ce dernier en indice.

Rappelons que nous travaillons sur l'équation générale (1.5) :

$$\varepsilon y' = \Psi(x, y, a, \varepsilon)$$

où Ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ses variables, toutes supposées réelles.

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 1, nous supposons que l'équation admet une courbe lente $(a_{\varepsilon,0}, y_{\varepsilon,0}(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}^\infty$ et un point tournant x_0 de degré de dégénérescence p . Enfin, nous nous plaçons dans les hypothèses d'apparition de solutions (vrai) canard.

Nous travaillerons au voisinage de x_0 (respectivement $y_{\varepsilon,0}(x_0)$, et $a_{\varepsilon,0}$) pour x (respectivement y , et a) et, en fixant ε_0 strictement positif, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Nous effectuons alors le changement de variables

$$t := x - x_0, \quad u := y - y_{\varepsilon,0}, \quad \text{et} \quad \alpha := a - a_{\varepsilon,0}$$

qui transforme l'équation (1.5) en une équation de la forme

$$\varepsilon \dot{u} = \Phi(t, u, \alpha, \varepsilon)$$

où nous avons noté $\dot{\cdot}$ la dérivation par rapport à la variable t et où la fonction Φ , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (t, u, α) sur un voisinage de $(0, 0, 0)$ et en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, satisfait sur ces mêmes voisinages aux propriétés :

- $\forall t, \quad \Phi(t, 0, 0, 0) = 0$
- $\frac{\partial}{\partial u} \Phi(t, 0, 0, 0) \begin{cases} < 0 & \text{si } t < 0 \\ > 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$
- La fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial u} \Phi(t, 0, 0, 0)$ a un zéro d'ordre p en $t = 0$.

Les deux dernières propriétés permettent de mettre la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial u}\Phi(t, 0, 0, 0)$ sous la forme $t^p(C + T(t))$, où T est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t telle que $T(0) = 0$ qui satisfait, pour tout t , à $C + T(t) > 0$.

Proposition 2. *Il existe un changement de variable sur t qui transforme le terme $t^p(C + T(t))$ en $(p + 1)t^p$.*

Preuve :

En effectuant le changement de variable

$$\tau := \operatorname{sgn}(t) \cdot \left(\int_0^{|t|} v^p(C + T(v))dv \right)^{1/(p+1)}$$

l'équation $\varepsilon \dot{u} = t^p(C + T(t))u + R(t, u, \alpha, \varepsilon)$, dans laquelle la fonction R satisfait à $R(0, 0, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial u}R(t, 0, 0, 0) = 0$, se transforme en

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{du}{d\tau} &= \left(\varepsilon \frac{du}{dt} \right) \frac{dt}{d\tau} = (t^p(C + T(t))u + R(t, u, \alpha, \varepsilon)) \frac{1}{\frac{1}{p+1} \tau^{-p} \operatorname{sgn}(t) t^p (C + T(t))} \\ &= (p + 1) \tau^p u + \frac{(p + 1) \left(\int_0^t v^p(C + T(v))dv \right)^{p/(p+1)}}{|t|^p (C + T(t))} R(t, u, \alpha, \varepsilon) \end{aligned}$$

Comme le terme $\int_0^t v^p(C + T(v))dv$ se réécrit sous la forme $t^{p+1}f(t)$, où la fonction f est toujours strictement positive, nous arrivons à l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{d\tau} = (p + 1) \tau^p u + \frac{(p + 1) f(t)^{1/(p+1)}}{C + T(t)} R(t, u, \alpha, \varepsilon)$$

qui, comme le dénominateur ne s'annule pas, peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon \frac{du}{d\tau} = (p + 1) \tau^p u + S(\tau, u, \alpha, \varepsilon)$$

où S satisfait aux mêmes hypothèses que R .

□

Selon cette proposition, nous pouvons donc supposer que $\frac{\partial}{\partial u}\Phi(t, 0, 0, 0) = (p + 1)t^p$.

Et, par suite, l'application d'une formule de Taylor d'ordre 1 nous permet d'arriver à la décomposition

$$\Phi(t, u, \alpha, \varepsilon) = \alpha T_1(t, \alpha) + u((p + 1)t^p + uT_2(t, u) + \alpha T_3(t, u, \alpha)) + \varepsilon T_4(t, u, \alpha, \varepsilon)$$

Afin de conclure, nous prenons des hypothèses supplémentaires sur les fonctions T_1 , T_2 , et T_3 , ce qui nous amènera à leur donner une forme particulière que nous commenterons dans le chapitre 3.

Pour commencer, nous prenons deux hypothèses non naturelles, mais imposées par les démonstrations qui vont suivre :

Hypothèse 1 :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \Phi(t, u, 0, 0) = 0$$

Cette hypothèse équivaut à dire que la fonction T_2 est nulle.

(i.e. : il n'y a pas de terme admettant u^2 en facteur dans $\Phi(t, u, 0, 0)$.)

Hypothèse 2 :

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial \alpha} \Phi(t, u, \alpha, 0) = 0$$

Cette hypothèse équivaut à dire que la fonction T_3 est nulle.

(i.e. : il n'y a pas de terme admettant αu en facteur dans $\Phi(t, u, \alpha, 0)$.)

Afin de présenter la forme particulière que nous donnerons à αT_1 , nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 8. Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$.

On appelle **valuation** du monôme $\prod_{i \in I} z_i^{n_i}$ avec, pour tout $i \in I$, le **poids** p_i pour z_i , le nombre $\sum_{i \in I} n_i p_i$.

Plus généralement, nous appellerons valuation du polynôme $\sum_j a_j \prod_{i \in I} z_i^{n_{i,j}}$, avec pour tout $i \in I$ le poids p_i pour z_i , le nombre $\min_j \{ \sum_{i \in I} n_{i,j} p_i \}$.

Pour débiter, nous supposons tout d'abord que, si l'on note L la valuation (sans poids) de la fonction $t \mapsto T_1(t, 0)$:

- $L < p$ est un entier pair
- La valuation de la fonction $\alpha T_1(t, \alpha)$, avec les poids $(1, p - L + 1)$ pour (t, α) , est égale à $p + 1$.

Nous commenterons ces hypothèses dans la section 2.3. Les calculs qui y seront faits montreront qu'il est légitime de supposer que le paramètre canard α_ε^* de l'équation est égal à $\mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{(p-L+1)/(p+1)})$.

Afin d'appliquer ces premières hypothèses, nous appliquons à la fonction T_1 une formule de Taylor pour la variable t , ce qui nous permet d'écrire que

$$T_1(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i S_i(\alpha) + t^{p+2} T(t, \alpha)$$

Puis, en effectuant une formule de Taylor sur toutes les fonctions S_i , nous arrivons à

$$T_1(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i \left[\sum_{j=0}^{E[\frac{p+2}{p-L+1}]} s_{i,j} \alpha^j + \alpha^{E[\frac{p+2}{p-L+1}]+1} R_{i,j}(\alpha) \right] + t^{p+2} T(t, \alpha)$$

que l'on récrit en notant, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, $j_i := \min\{j; s_{i,j} \neq 0\}$

$$T_1(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i \alpha^{j_i} R_{j_i}(\alpha) + t^{p+2} T(t, \alpha)$$

Remarquons que l'existence et la définition de L impliquent que cette somme contient le monôme αt^L .

Afin d'éviter des problèmes d'unicité du paramètre canard (dus à l'apparition de termes d'égale importance dans l'équation), nous supposons que pour tout i , le coefficient j_i sous-jacent dans la décomposition de $\alpha T_1(t, \alpha) - \alpha t^L$ est tel que $i + j_i(p - L + 1) \geq p + 2$, ce qui nous amène à l'hypothèse synthétique suivante :

Hypothèse 3 :

$$\frac{\partial^{L+1}}{\partial \alpha \partial t^L} \Phi(0, 0, 0, 0) = 1$$

$$\text{et } \forall (i, j) \neq (L, 1), \text{ tels que } i + j(p - L + 1) \leq p + 1, \frac{\partial^{i+j}}{\partial \alpha^j \partial t^i} \Phi(0, 0, 0, 0) = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(t, 0, \alpha, 0) = t^L + \frac{1}{\alpha} S(t, \alpha)$$

où la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, admet α en facteur, et n'est composée que de termes de valuations, pour les poids $(1, p - L + 1)$ pour (t, α) , entières et supérieures ou égales à $p + 2$.

Cette hypothèse équivaut à dire que la fonction αT_1 s'écrit

$$\alpha T_1(t, \alpha) = \alpha t^L + S(t, \alpha)$$

Dans la suite, les termes $S(t, \alpha)$ et $\varepsilon T_4(t, u, \alpha, \varepsilon)$, que l'on trouvera dans l'équation étudiée, auront un rôle marginal alors que $t^p u$ et αt^L seront les termes importants.

Sous les trois hypothèses que nous venons d'énoncer, nous nous sommes ainsi ramenés l'étude des équations de la forme

$$\varepsilon \dot{u} = (p + 1)t^p u + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \varepsilon P(t, u, \alpha, \varepsilon)$$

L'étude de ce type d'équations montre que la quantité $\varepsilon^{1/(p+1)}$ est plus pertinente que ε . Pour cette raison, et afin de gagner en généralité, nous considérerons P comme étant

de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\eta := \varepsilon^{1/(p+1)}$, au lieu de ε , et étudierons plus généralement les équations de la forme

$$\eta^{p+1}\dot{u} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \eta^{p+1}P(t, u, \alpha, \eta) \quad (2.1)$$

où la fonction S admet α en facteur, et n'est composée que de termes de valuations, pour les poids $(1, p-L+1)$ pour (t, α) , strictement supérieures à $p+1$.

*Cette équation, que nous appellerons dans la suite **équation préparée**, servira de cadre à notre étude.*

Plus précisément, le travail fait ci-dessus nous permet de décomposer la fonction S sous une forme plus pratique car comme, pour tout i , l'hypothèse 3 implique que le couple $(i, j_i + 1)$ appartient à l'ensemble

$$\mathcal{E} := \left\{ (i, j) : i \leq p+2, j \leq E \left[\frac{p+2}{p-L+1} \right] + 1, \text{ et } i + j(p-L+1) \geq p+2 \right\}$$

nous pouvons ainsi écrire S sous la forme

$$S(t, \alpha) = \alpha \left(\sum_{i=0}^{p+1} t^i \alpha^{j_i} S_i(\alpha) + t^{p+2} \tilde{R}(t, \alpha) \right) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i \alpha^{j_i+1} S_i(\alpha) + t^{p+2} R(t, \alpha)$$

où, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, les fonctions S_i et la fonction R (qui s'écrit aussi $\alpha \tilde{R}$) sont supposées de classe $\mathcal{C}^\infty$ en leurs variables.

Notons que les trois hypothèses contraignantes que nous venons de prendre ne sont pas optimales, au sens où elles peuvent être affaiblies sans que l'on perde l'existence d'une solution canard. Nous avons choisi ces hypothèses afin de pouvoir récrire (1.5) sous la forme (2.1), qui est adaptée à l'étude que nous ferons dans la suite de ce chapitre.

Pour le moment, remarquons que l'hypothèse 1 interdit l'apparition de termes de la forme u^k , avec $k \geq 2$ en facteur de tout monôme de $\Phi(t, u, \alpha, 0)$, et que les hypothèses 2 et 3 influent particulièrement sur le paramètre α .

Dans le chapitre 3, après avoir brièvement discuté de ces choix, nous proposerons une vision alternative de notre problématique adaptée à chacune de ces hypothèses.

Ce qui nous amènera à proposer quelques pistes permettant de généraliser le théorème présenté dans la section suivante.

2.2 Le théorème d'existence

2.2.1 Énoncé standard du théorème

Dans la suite, E désignera l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[-t_0, t_0]$, que l'on munit de la norme $\|w\|_\infty := \sup_{t \in [-t_0, t_0]} \{|w(t)|\}$, et η_0 désignera un nombre strictement positif qui sera précisé plus loin.

L'ensemble $\mathbb{R} \times E$ sera, quant à lui, muni de la norme

$$|(\gamma, w)|_\infty := \max\{|\gamma|, \|w\|_\infty\}$$

Les espaces $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(\mathbb{R} \times E, |\cdot|_\infty)$ sont tous deux des espaces de Banach.

Conformément aux conventions prises précédemment, p est un entier impair, et L est un entier pair tel que $L < p$, et nous supposons enfin que :

- S est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et α , dont la forme générale a été précisée dans la section précédente.
- P est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[-t_0, t_0] \times E \times \mathbb{R} \times [0, \eta_0]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $M > 0$, nous désignerons par $\mathcal{B}_M$ l'ensemble $\{w \in E; \|w\|_\infty \leq M\}$.

Nous sommes intéressés, pour tout $\eta \in [0, \eta_0]$, à montrer l'existence de $(\alpha_\eta^*, u_\eta^*) \in \mathbb{R} \times E$ satisfaisant, pour tout $t \in [-t_0, t_0]$, à

$$\begin{cases} \eta^{p+1} \dot{u}_\eta^*(t) = (p+1)t^p u_\eta^*(t) + \alpha_\eta^* t^L + S(t, \alpha_\eta^*) + \eta^{p+1} P(t, u_\eta^*(t), \alpha_\eta^*, \eta) \\ u_\eta^*(-t_0) = 0 = u_\eta^*(t_0) \end{cases}$$

Cette solution apparaîtra comme le point fixe d'un opérateur contractant qui sera explicitement construit dans le théorème qui suit.

Comme nous le verrons dans la section 2.3, cette équation peut admettre plusieurs solutions canard, ce qui nous amène à faire l'hypothèse suivante, qui sera commentée dans cette même section 2.3 :

Hypothèse de restriction : Nous pouvons restreindre notre étude aux paramètres égaux à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{p-L+1})$, et aux fonctions u_η égales à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$.

Par suite, à tout paramètre γ et toute fonction w , nous associerons

$$\underline{\gamma} := \frac{1}{\eta^{p-L+1}} \gamma \text{ et } \underline{w} := \frac{1}{\eta} w$$

Notation :

Pour $\eta \in]0, \eta_0[$, nous notons Ξ_η la relation définie, sur $\mathbb{R} \times E$, par $(\underline{\beta}_\eta, \underline{v}_\eta) \Xi_\eta (\underline{\alpha}_\eta, \underline{u}_\eta)$ si

et seulement si $\underline{u}_\eta$ et $\underline{v}_\eta$ sont des fonctions dérivables sur $[-t_0, t_0]$ et, pour tout t et η :

$$\begin{cases} \eta^{p+2}\dot{\underline{u}}_\eta(t) = (p+1)\eta t^p \underline{u}_\eta(t) + \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta t^L + S(t, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta) + \eta^{p+1}P(t, \eta \underline{v}_\eta(t), \eta^{p-L+1}\underline{\beta}_\eta, \eta) \\ \underline{u}_\eta(-t_0) = 0 = \underline{u}_\eta(t_0) \end{cases}$$

Nous avons choisi de présenter Ξ_η sous la forme d'une relation, alors qu'elle est destinée à être utilisée comme un opérateur, car le théorème que nous énonçons ci-dessous contient comme premier résultat le fait que $(\underline{\alpha}_\eta, \underline{u}_\eta)$ existe pour tout choix raisonnable de $(\underline{\beta}_\eta, \underline{v}_\eta)$. Donc, en particulier, que Ξ_η peut être défini sous la forme d'un opérateur.

Théorème 3. *La relation $(\underline{\beta}_\eta, \underline{v}_\eta)\Xi_\eta(\underline{\alpha}_\eta, \underline{u}_\eta)$ induit une application $\Xi_\eta : (\underline{\beta}_\eta, \underline{v}_\eta) \mapsto (\underline{\alpha}_\eta, \underline{u}_\eta)$ définie sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R} \times E$.*

Plus précisément, pour tout réel $R > 0$, il existe une valeur $\eta_0 > 0$ et deux réels strictement positifs r et s , indépendants de η , tels que, pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$:

$$\Xi_\eta([-R, R] \times \mathcal{B}_R) \subset [-r, r] \times \mathcal{B}_r, \text{ et } \Xi_\eta \text{ est } s\eta\text{-lipschitzienne sur } [-R, R] \times \mathcal{B}_R$$

Comme $(\mathbb{R} \times E, |\cdot|_\infty)$ est un ensemble de Banach et que η tend vers 0, on en déduit, par application d'un théorème du point fixe et quitte à réduire η_0 , que Ξ_η admet un point fixe $(\underline{\alpha}_\eta^*, \underline{u}_\eta^*) \in \mathbb{R} \times E$ tel que la fonction $\underline{u}_\eta^*$ reste bornée.

Rappelons que, par définition de Ξ_η , ce couple satisfait à

$$\begin{cases} \eta^{p+2}\dot{\underline{u}}_\eta^* = (p+1)\eta t^p \underline{u}_\eta^* + \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta^* t^L + S(t, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta^*) + \eta^{p+1}P(t, \eta \underline{u}_\eta^*, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta^*, \eta) \\ \underline{u}_\eta^*(-t_0) = 0 = \underline{u}_\eta^*(t_0) \end{cases} \quad (2.2)$$

dont la réécriture amène l'existence, pour tout $\eta \in]0, \eta_0[$, d'un couple $(\alpha_\eta^*, u_\eta^*)$ satisfaisant, pour tout $t \in [-t_0, t_0]$, à

$$\begin{cases} \eta^{p+1}\dot{u}_\eta^*(t) = (p+1)t^p u_\eta^*(t) + \alpha_\eta^* t^L + S(t, \alpha_\eta^*) + \eta^{p+1}P(t, u_\eta^*(t), \alpha_\eta^*, \eta) \\ u_\eta^*(-t_0) = 0 = u_\eta^*(t_0) \end{cases} \quad (2.3)$$

ce qui revient à dire que ce couple est la solution canard recherchée.

Plus précisément, le théorème 3 nous amène au résultat suivant :

Corollaire 1. *Le système (2.3) admet une unique solution $(\alpha_\eta^*, u_\eta^*) \in \mathbb{R} \times E$.*

De plus, la famille $(\alpha_\eta^, u_\eta^*)_{\eta \in]0, \eta_0[}$ converge uniformément vers $(0, 0)$ sur $[-t_0, t_0]$, lorsque η tend vers 0.*

Ce dernier résultat découle immédiatement du théorème précédent grâce à la relation

$$\alpha_\eta^* = \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}_\eta^* \text{ et } u_\eta^* = \eta \underline{u}_\eta^*$$

et au caractère continue sur un compact de la fonction $\underline{u}_\eta^*$.

2.2.2 Approche nonstandard du problème

Nous nous proposons de donner un théorème externe (énoncé nonstandard) suffisant permettant de déduire le théorème 3.

L'intérêt principal de cette approche est de permettre une manipulation plus aisée des ordres de grandeur, sans avoir à introduire de constantes artificielles.

Pour cette raison, nous supposons désormais que η est un nombre réel strictement positif infiniment petit fixé, et que p, L, S et P sont standard. Il en découle que l'on peut supposer que t_0 est un élément standard de $\mathbb{R}_+^*$.

Le paramètre η étant fixé, nous noterons Ξ la relation Ξ_η , et ne mentionnerons la dépendance des quantités étudiées par rapport au paramètre η .

Nous obtenons ainsi la réécriture de l'opérateur Ξ_η suivante :

$(\underline{\beta}, \underline{v})\Xi(\underline{\alpha}, \underline{u}) \Leftrightarrow \underline{u}$ et $\underline{v}$ sont dérivables sur $[-t_0, t_0]$ et, pour tout $t \in [-t_0, t_0]$:

$$\begin{cases} \eta^{p+2}\dot{\underline{u}}(t) = (p+1)\eta t^p \underline{u}(t) + \eta^{p-L+1} \underline{\alpha} t^L + S(t, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}) + \eta^{p+1} P(t, \eta \underline{v}(t), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}) \\ \underline{u}(-t_0) = 0 = \underline{u}(t_0) \end{cases}$$

Théorème 4. *Sous les hypothèses données au début de ce chapitre, on a les propriétés suivantes :*

- 1- *La relation $(\underline{\beta}, \underline{v})\Xi(\underline{\alpha}, \underline{u})$ induit une application $\Xi : (\underline{\beta}, \underline{v}) \mapsto (\underline{\alpha}, \underline{u})$, définie sur l'ensemble externe $\mathcal{L}$ des éléments limités de $\mathbb{R} \times E$, et à valeurs dans $\mathcal{L}$.*
- 2- *Pour tout $((\underline{\beta}_1, \underline{v}_1), (\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)) \in \mathcal{L}^2$, $\frac{|\Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1) - \Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)|_\infty}{|(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1) - (\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)|_\infty} = \mathcal{L}\eta$.*

Le premier point implique que, pour tout réel standard $R > 0$, l'ensemble interne

$$\{k \in \mathbb{R}_+^*; \forall (\underline{\beta}, \underline{v}) \in [-R, R] \times \mathcal{B}_R, \Xi(\underline{\beta}, \underline{v}) \in [-k, k] \times \mathcal{B}_k\}$$

contient tous les réels positifs infiniment grands donc, par permanence, il contient aussi un réel standard $\rho > 0$. Par suite, pour tout réel standard $R > 0$, il existe $\rho > 0$ standard, tel que Ξ est défini de $[-R, R] \times \mathcal{B}_R$ dans $[-\rho, \rho] \times \mathcal{B}_\rho$.

De la même façon l'étude, pour tout réel standard $R > 0$, de l'ensemble interne

$$\left\{ k \in \mathbb{R}_+^*; \forall ((\underline{\beta}_1, \underline{v}_1), (\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)) \in ([-R, R] \times \mathcal{B}_R)^2, \frac{|\Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1) - \Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)|_\infty}{|(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1) - (\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)|_\infty} \leq k\eta \right\}$$

nous amène, grâce au second point, à l'existence, pour tout réel standard $R > 0$, d'un réel standard $\sigma > 0$, tel que Ξ est $\sigma\eta$ -lipschitzien sur $[-R, R] \times \mathcal{B}_R$.

Corollaire 2. *Il existe un unique $\underline{\alpha}^* \in \mathbb{R}$, et un unique $\underline{u}^* \in E$, tous deux limités, tels que pour tout $t \in [-t_0, t_0]$:*

$$\begin{cases} \eta^{p+2} \underline{\dot{u}}^*(t) = (p+1)\eta t^p \underline{u}^*(t) + \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}^* t^L + S(t, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}^*) + \eta^{p+1} P(t, \eta \underline{u}^*(t), \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}^*) \\ \underline{u}^*(-t_0) = 0 = \underline{u}^*(t_0) \end{cases}$$

La solution associée (α^, u^*) est une solution canard de (2.3).*

Ce corollaire est une application immédiate d'un théorème du point fixe adapté que nous énoncerons, et démontrerons, dans la dernière section de ce chapitre. Dans les chapitres 4 et 5, nous reviendrons sur le fait que la solution canard a été obtenue comme point fixe d'un opérateur contractant, de constante de contraction égale à $\mathcal{L}\eta$.

Pour conclure cette section, nous montrons que le théorème 3 est une conséquence du théorème 4. Ce dernier résultat est donc un énoncé nonstandard à priori plus général. Nous avons choisi de le prouver formellement, en utilisant l'algorithme de Nelson, même s'il serait possible de le montrer directement.

Selon le théorème 4, $\forall \eta, [(\forall^{st} \eta^\sharp; \eta \in]0, \eta^\sharp[) \Rightarrow$

$$\{\forall^{st} R, \exists^{st}(\rho, \sigma); \Xi([-R, R] \times \mathcal{B}_R) \subset [-\rho, \rho] \times \mathcal{B}_\rho \text{ et } \Xi \text{ est } \sigma\eta\text{-lipschitzienne sur } [-R, R] \times \mathcal{B}_R\}$$

L'algorithme de Nelson nous permet de le récrire, $\forall^{st} R, \forall \eta, \exists^{st} \eta^\sharp; \exists^{st}(\rho, \sigma);$

$$[(\eta \in]0, \eta^\sharp[) \Rightarrow \{\Xi([-R, R] \times \mathcal{B}_R) \subset [-\rho, \rho] \times \mathcal{B}_\rho \text{ et } \Xi \text{ est } \sigma\eta\text{-lipschitzienne sur } [-R, R] \times \mathcal{B}_R\}]$$

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{P}(R, \beta, v, \eta, \eta^\sharp, \rho, \sigma)$ la propriété entre crochets. Cette formule est une formule interne ne comportant que des paramètres standard.

En utilisant la contraposée de l'axiome d'idéalisation, nous arrivons alors à :

$$\forall^{st} R, \exists^{st} \mathcal{F}, \text{ fini}; \forall \eta, \exists(\eta^\sharp, \rho, \sigma) \in \mathcal{F}; \mathcal{P}(R, \beta, v, \eta, \eta^\sharp, \rho, \sigma)$$

Et l'axiome de transfert nous amène alors à la propriété équivalente

$$\forall R, \exists \mathcal{F}, \text{ fini}; \forall \eta, \exists(\eta^\sharp, \rho, \sigma) \in \mathcal{F}; \mathcal{P}(R, \beta, v, \eta, \eta^\sharp, \rho, \sigma)$$

Comme $\mathcal{F}$ est fini, alors le minimum de la première projection de $\mathcal{F}$ existe, nous le notons η_0 . De même, nous notons r (resp. s) le maximum de la seconde (resp. troisième) projection de $\mathcal{F}$, et nous arrivons alors à

$$\forall R, \exists(\eta_0, r, s); \forall \eta$$

$$[(\eta \in]0, \eta_0[) \Rightarrow \{\Xi([-R, R] \times \mathcal{B}_R) \subset [-r, r] \times \mathcal{B}_r \text{ et } \Xi \text{ est } s\eta\text{-lipschitzienne sur } [-R, R] \times \mathcal{B}_R\}]$$

qui est la transcription logique du théorème 3.

2.3 Commentaires sur l'hypothèse de restrictions

Avant de nous plonger dans la démonstration du théorème 4 dans la section 2.4, nous allons, tout d'abord, commenter la restriction du domaine de définition du paramètre, que nous avons faite, en étudiant l'estimation en puissances de η du paramètre canard α^* à partir d'une équation aux ordres de grandeur.

Alors que les trois hypothèses contraignantes prises lors de la préparation de l'équation nous permettent de nous placer dans un cadre permettant à la démonstration qui suit de bien se dérouler, nous verrons dans cette section que cette hypothèse de restriction a pour but d'obtenir l'unicité du paramètre canard de l'ordre de grandeur escompté.

Avant de nous intéresser à cette restriction dans le cas général, nous allons illustrer notre propos par l'étude de l'équation

$$\eta^6 \dot{u} = 6t^5 u + \alpha t^4 - \alpha^3 t^2 + \eta^6$$

En résolvant l'équation principale, on montre que α satisfait à une certaine équation dont l'estimation des termes intégrales, en utilisant le résultat donné en annexe, nous amène à l'équation aux ordres de grandeur

$$\alpha \eta^5 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) - \alpha^3 \eta^3 \Gamma\left(\frac{3}{6}\right) + \eta^6 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \mathcal{L} e^{-@/\eta^{p+1}}$$

On vérifie que cette équation possède une racine égale à $@\eta^2$.

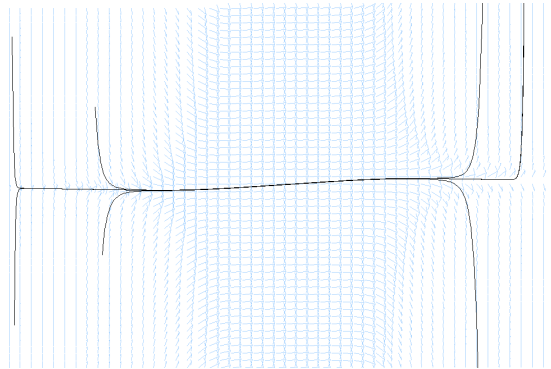


FIG. 2.1 – Solutions dans le cadre $(t, u) \in [-0.05, -0.05] \times [-0.2, 0.2]$ avec $\eta = 10^{-2}$, pour la valeur $\alpha = -4.950284869 \cdot 10^{-4}$

Outre la racine égale à $@\eta^2$, on montre que cette équation aux ordres de grandeur en possède aussi deux qui sont égales à $@\eta$.

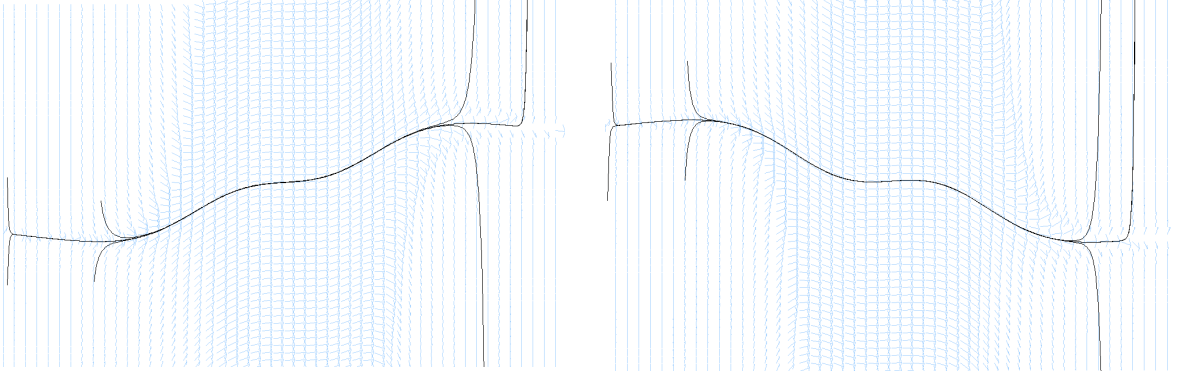


FIG. 2.2 – Solutions dans le cadre $(t, u) \in [-0.05, -0.05] \times [-0.2, 0.2]$ avec $\eta = 10^{-2}$, pour les valeurs $\alpha = -0.7721249673 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = 0.8216278159 \cdot 10^{-2}$

Ce qui est confirmé par l'application des loupes associées respectivement aux poids $(1, 1, 2)$ et $(1, 0, 1)$ pour (t, u, α) qui nous amènent, respectivement, aux équations

$$\frac{dU}{dT} = 6T^5U + AT^4 - \eta^2 A^3 T^2 + 1, \text{ et } \frac{dU}{dT} = 6T^5U + AT^4 - A^3 T^2 + \eta$$

Pour tracer ces dessins, nous avons choisi de représenter les solutions dans un voisinage de 0 de l'ordre de η (ce qui explique que la solution canard ne semble pas proche de la courbe lente) à cause des erreurs d'arrondis des réels flottants. En effet, si nous avons pris un cadre de taille "raisonnable", il n'aurait pas été possible de mettre en valeur les différents ordres de grandeur des trois paramètres canard pour une même valeur de η .

Pour cet exemple, on remarque que, si l'on se restreint à des valeurs du paramètre égales à $@\eta^2$, nous obtenons alors l'unicité nécessaire à la mise en œuvre du théorème du point fixe.

De plus, en effectuant la loupe associée aux poids $(1, q, 2)$ pour (t, u, α) , on constate que l'on doit supposer $q \geq 1$:

En effet, si l'on suppose que $q < 1$, l'équation étudiée devient, sous la loupe,

$$\frac{dU}{dT} = 6T^5U + \eta^{1-q} AT^4 - \eta^{3-q} A^3 T^2 + \eta^{1-q}$$

ou encore, en posant $A' := \eta^{1-q} A$,

$$\frac{dU}{dT} = 6T^5U + A' T^4 - \eta^{2q} A'^3 T^2 + \eta^{1-q}$$

qui montre que choisir $q < 1$ conduit à avoir un paramètre ayant pour ordre de grandeur $@\eta^{2(1-q)}$, ce qui contredit ce qui a été dit précédemment.

Revenons à notre cadre général, en adaptant le travail que l'on vient de proposer à l'équation

$$\eta^{p+1}\dot{u}(t) = (p+1)t^p u(t) + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \eta^{p+1}Q(t)$$

qui est construite à partir de l'équation (2.1). Cette dernière équation, fondamentale dans toute la suite, nous permettra de mettre en place l'opérateur contractant Ξ .

Rappelons que, en adoptant la notation

$$\mathcal{E} := \left\{ (i, j) : i \leq p+2, j \leq E \left[\frac{p+2}{p-L+1} \right] + 1, \text{ et } i + j(p-L+1) \geq p+2 \right\}$$

la fonction S peut s'écrire sous la forme de la somme finie

$$S(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i \alpha^{j_i+1} S_i(\alpha) + t^{p+2} R(t, \alpha)$$

où, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, $(i, j_i+1) \in \mathcal{E}$, et R admet α en facteur.

Avant de nous intéresser à cette équation générale, nous regardons le cas particulier où

$$S(t, \alpha) = \alpha t^{L+1} \gamma(t, \alpha)$$

pour lequel la fonction γ est limitée pour tout $t \in [-t_0, t_0]$ et $\alpha \simeq 0$, qui nous amène au résultat :

Proposition 3. *Soit $Q \in \mathcal{C}^0([-t_0, t_0], \mathbb{R})$, telle que $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$, alors l'équation*

$$\begin{cases} \eta^{p+1}\dot{u}(t) = (p+1)t^p u(t) + \alpha t^L(1 + t\gamma(t, \alpha)) + \eta^{p+1}Q(t) \\ u(t_0) = 0 = u(-t_0) \end{cases}$$

admet une solution limitée $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times E$. De plus cette solution est unique et satisfait à $\alpha = \mathcal{L}\eta^{p-L+1}$.

Ce résultat a volontairement été proposé sous une forme proche de la proposition 4 car il s'agit de son pendant pour le cas particulier étudié ici. Nous commenterons, après sa démonstration, les raisons qui nous ont amené à prendre l'hypothèse de restriction dans le cas général.

Lemme 1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $J_k := \int_{-t_0}^{t_0} \xi^k e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$.*

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$J_k = \mathcal{L}\eta^{k+1}$$

Preuve du lemme :

Par symétrie, on remarque que, lorsque k est impair, $J_k = 0$ et que, lorsque k est pair,

$$J_k = 2 \frac{1}{p+1} \eta^{k+1} \int_0^{(t_0/\eta)^{p+1}} s^{(k-p)/(p+1)} e^{-s} ds$$

Du fait que $t_0/\eta \simeq \infty$, on en déduit que $J_k = 2 \frac{1}{p+1} \eta^{k+1} \left(\Gamma \left(\frac{k+1}{p+1} \right) + \mathcal{O} \right) = @ \eta^{k+1}$, où Γ désigne la fonction Gamma $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$.

□

Notons aussi que, si on suppose $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$, nous avons

$$\left| \int_{-t_0}^{t_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \leq \|Q\|_\infty J_0 = \mathcal{L} \eta$$

Preuve de la proposition :

La solution (α, u) du système

$$\begin{cases} \eta^{p+1} \dot{u}(t) = (p+1)t^p u(t) + \alpha t^L + \alpha t^{L+1} \gamma(t, \alpha) + \eta^{p+1} Q(t) \\ u(-t_0) = 0 \end{cases}$$

a sa fonction u qui s'écrit

$$u(t) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{-t_0}^t (\alpha \xi^L + \alpha \xi^{L+1} \gamma(\xi, \alpha) + \eta^{p+1} Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Comme elle doit aussi vérifier que $u(t_0) = 0$, on en déduit l'égalité

$$0 = \alpha \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \alpha \int_{-t_0}^{t_0} \xi^{L+1} \gamma(\xi, \alpha) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^{p+1} \int_{-t_0}^{t_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

que l'on peut écrire, comme la fonction γ est limitée, grâce aux estimations sur les fonctions J_k , sous la forme de l'équation aux ordres de grandeur

$$\alpha @ \eta^{L+1} + \alpha \sum_j \mathcal{L} \mathcal{L} \eta^{L+2} \eta \alpha^j + \mathcal{L} \eta^{p+2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \sum_j \mathcal{L} \mathcal{L} \eta \alpha^{j+1} + \mathcal{L} \eta^{p-L+1} = 0$$

Le lemme suivant permet alors de conclure à l'existence et l'unicité du paramètre α recherché.

Lemme 2. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[\lambda]$, de degré n standard.

Si il existe $a_1 = @$, et $\forall j \neq 1, a_j = \mathcal{O}$, tels que

$$\Pi(\lambda) = \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j$$

Alors P admet une et une seule racine limitée, et celle-ci est infinitésimale.

Ce résultat est un cas particulier du théorème des zéros d'un polynôme à coefficients limités, démontré par Lutz et Goze [34].

Preuve du lemme :

On a, pour tout réel standard λ :

$$\Pi(\lambda) \simeq @ \lambda$$

Par suite, le théorème des valeurs intermédiaires implique que Π admet au moins une racine qui soit limitée, et celle-ci est proche de 0.

De plus Π est monotone lorsque λ reste limité, car sa dérivée $\frac{d}{d\lambda}\Pi$ s'écrit alors $@ + \oslash \neq 0$. En conclusion, Π n'admet aucune autre racine limitée.

□

Enfin, comme la formulation explicite de u ne dépend que de α , nous pouvons conclure à l'existence et l'unicité de la fonction u .

Montrons l'estimation de l'ordre de grandeur de α :

L'équation précédente permet aussi d'écrire, en utilisant les estimations sur J_k et le caractère limité (car t appartient au compact $[-t_0, t_0]$) de la fonction γ , sous la forme de l'équation aux ordres de grandeur

$$\alpha \left(1 + \eta \sum_j \mathcal{L} \alpha^j \right) + \mathcal{L} \eta^{p-L+1} = 0$$

Comme le terme $\eta \sum_j \mathcal{L} \alpha^j$ est infinitésimal, on en déduit l'estimation de α .

□

Ce résultat ne se généralise pas au cas général.

En effet, en effectuant une lecture similaire de l'équation (2.1), il est possible d'obtenir l'existence de plusieurs paramètres canard, et c'est ce qui nous a amené à restreindre le domaine de définition de α dans l'énoncé du théorème.

Revenons maintenant à l'étude de l'équation différentielle dans le cas où la fonction S s'écrit sous la forme

$$S(t, \alpha) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i \alpha^{j_i+1} S_i(\alpha) + t^{p+2} R(t, \alpha)$$

Comme u et α ont été choisis voisins de 0, nous posons $q := \frac{\ln ||u||}{\ln \eta}$ et $r := \frac{\ln |\alpha|}{\ln \eta}$.

Dans la fin de cette section, nous allons donner les raisons qui nous amèneront à nous restreindre à $r \geq p - L + 1$, et $q \geq 1$.

Remarquons qu'en effectuant la loupe "naturelle"

$$\begin{cases} t = \eta T \\ u = \eta U \\ \alpha = \eta^{p-L+1} A \end{cases}$$

nous transformons l'équation (2.1) en

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + AT^L + \sum_{i=0}^{p+1} \eta^{i+(j_i+1)(p-L+1)-(p+1)} A^{j_i+1} T^i S_i(\eta^{p-L+1} A) + \dots \\ + \eta T^{p+2} R(\eta T, \eta^{p-L+1} A) + P(\eta T, \eta U, \eta^{p-L+1} A, \eta) \end{aligned}$$

qui montre, pour cette loupe, la prédominance du terme αt^L sur tous les monômes de $S(t, \alpha)$.

Malheureusement, sous une autre loupe, ce sont ces derniers termes qui peuvent prédominer. En effet, supposer que l'on a $L+r \geq i + (j_i+1)r$ amène à

$$0 \geq (i + (j_i+1)r) - (L+r) = i - L + j_i r \geq j_i(r - (p-L+1)) + 1$$

ce qui implique que, pour $j_i \geq 1$,

$$r \leq p-L+1 - \frac{1}{j_i}$$

Et ainsi le choix de $r \in]p-L, p-L+1[$ amène à une loupe sous laquelle certains monômes de $S(t, \alpha)$ peuvent devenir dominants, ce qui impliquerait la non-unicité du paramètre canard. Ce qui mettrait en échec la démonstration que nous proposons. C'est pour cette raison que nous avons pris l'hypothèse de restriction.

De plus, supposer que $r \geq p-L+1$ nous amène à choisir $q \geq 1$, conformément à l'hypothèse prise car, dans le cas où $q < 1$, nous arriverions, sous la loupe, à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + \eta^{1-q} AT^L + \sum_{i=0}^{p+1} \eta^{i+(j_i+1)(p-L+1)-(p+q)} A^{j_i+1} T^i S_i(\eta^{p-L+1} A) + \dots \\ + \eta^{2-q} T^{p+2} R(\eta T, \eta^{p-L+1} A) + \eta^{1-q} P(\eta T, \eta U, \eta^{p-L+1} A, \eta) \end{aligned}$$

Par suite, choisir $q < 1$ conduit à avoir un paramètre égal à $@\eta^{(p-L+1)(1-q)}$ qui contredit ce qui a été dit précédemment, car $(p-L+1)(1-q) < p-L+1$.

2.4 Démonstration du théorème 4

Afin de démontrer le théorème 4 nous introduisons, dans un premier temps, une application intermédiaire Θ dont l'étude nous permettra de déduire les propriétés de la fonction Ξ recherchées, en utilisant une décomposition de Ξ utilisant Θ .

2.4.1 Démonstration du premier point du théorème

Proposition 4. Soit $Q \in \mathcal{C}^0([-t_0, t_0], \mathbb{R})$, telle que $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$.

Alors l'équation

$$\eta^{p+2}\dot{\underline{u}}(t) = (p+1)t^p\eta\underline{u}(t) + \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}t^L + S(t, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}) + \eta^{p+1}Q(t) \quad (2.4)$$

munie des conditions aux limites

$$\underline{u}(t_0) = 0 = \underline{u}(-t_0)$$

admet un unique couple solution limité $(\underline{\alpha}, \underline{u}) \in \mathbb{R} \times E$.

Pour chaque $Q \in E$ tel que $\|Q\|_\infty = \mathcal{L}$, on désignera désormais par $\Theta(Q)$ le couple $(\underline{\alpha}, \underline{u}) \in \mathbb{R} \times E$ obtenu par application de cette proposition.

Preuve de la proposition :

Montrons que Θ est bien définie :

La solution $(\underline{\alpha}, \underline{u})$ du système

$$\begin{cases} \eta^{p+2}\dot{\underline{u}}(t) = (p+1)\eta t^p \underline{u}(t) + \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}t^L + S(t, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}) + \eta^{p+1}Q(t) \\ \underline{u}(-t_0) = 0 \end{cases}$$

a sa fonction $\underline{u}$ qui s'écrit

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{-t_0}^t (\eta^{p-L}\underline{\alpha}\xi^L + \frac{1}{\eta} S(\xi, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}) + \eta^p Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Comme elle doit aussi vérifier que $\underline{u}(t_0) = 0$, on en déduit l'égalité

$$0 = \eta^{p-L}\underline{\alpha} \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1}\underline{\alpha}) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} Q(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \quad (2.5)$$

Du fait de la décomposition de S , et grâce à la proposition 25 donnée en annexe, nous transformons cette dernière inégalité en

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{p-L}\underline{\alpha} @\eta^{L+1}e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=0}^{p+1} \mathcal{L} \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \underline{\alpha}^{j_i+1} \mathcal{L} \eta^{i+1} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\eta} \mathcal{L} \mathcal{L} \eta^{p+3} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \eta^p \mathcal{L} @\eta e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} \end{aligned}$$

qui, réécrite sous la forme de l'équation aux ordres de grandeur

$$0 = \underline{\alpha} + \eta \sum_{i=0}^{p+1} \mathcal{L} \eta^{(i+(j_i+1)(p-L+1)(p+2))} \underline{\alpha}^j + \mathcal{L} \eta + \mathcal{L} \quad (2.6)$$

implique, par définition des entiers j_i et par le lemme 2, l'existence et l'unicité d'un paramètre limité $\underline{\alpha}$.

Comme, de plus, la formulation explicite de $\underline{u}$ ne dépend que de $\underline{\alpha}$, nous pouvons conclure à l'existence et l'unicité de la fonction $\underline{u}$ qui, selon la propriété 25 donnée en annexe, est bien limitée.

□

Nous avons ainsi montré l'existence de l'opérateur Θ , ce qui implique celle de Ξ .

De plus, par continuité de P , nous en déduisons que l'image par Ξ de tout limité de $\mathbb{R} \times E$ est limitée.

2.4.2 Démonstration du second point du théorème

Avant de revenir à l'étude de Ξ , nous montrons un résultat intermédiaire concernant le caractère lipschitzien de Θ :

Proposition 5. *Soient Q_1 et Q_2 deux éléments de $\mathcal{C}^0([-t_0, t_0], \mathbb{R})$ tels que $\|Q_1\|_\infty$ et $\|Q_2\|_\infty$ sont limités, alors*

$$|\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Preuve de la proposition :

Selon la proposition 4, il existe $(\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n) \in \mathbb{R} \times E$, tel que $(\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n) = \Theta(Q_n)$, où $n \in \{1, 2\}$.

⊗ Etude de $|\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1|$:

Pour $n \in \{1, 2\}$ fixé, la formule (2.5) donne :

$$0 = \eta^{p-L} \underline{\alpha}_n \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} Q_n(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Par différence, nous arrivons à

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{p-L} (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots \\ &+ \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} (S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) - S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_1)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \end{aligned}$$

Rappelons que nous avons l'écriture

$$S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n) = \sum_{i=0}^{p+1} \xi^i \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \underline{\alpha}_n^{j_i+1} S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n) + t^{p+2} R(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n)$$

où, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, $(i, j_i+1) \in \mathcal{E}$.

Or, en écrivant que

$$\underline{\alpha}_2^j S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) - \underline{\alpha}_1^j S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_1) = S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) (\underline{\alpha}_2^j - \underline{\alpha}_1^j) + \underline{\alpha}_1^j (S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) - S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_1))$$

L'application du théorème des accroissements finis aux fonctions S_i , et la factorisation des termes $\underline{\alpha}_2^k - \underline{\alpha}_1^k$ par $\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1$, nous amène alors à

$$\underline{\alpha}_2^j S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) - \underline{\alpha}_1^j S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_1) = (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) \left(\sum_{k=0}^{j-1} \underline{\alpha}_2^k \underline{\alpha}_1^{j-k-1} S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) + \underline{\alpha}_1^j \eta^{p-L+1} \partial_2 S_i(\cdot) \right)$$

Comme les fonctions S_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, elles ont leurs dérivées limitées.

Et, comme $R(t, 0) \neq 0$, le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire que

$$R(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) - R(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_1) = \eta^{p-L+1} (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) \partial_2 R(\xi, \cdot)$$

La proposition 25 donnée en annexe nous permet, par suite, de transformer l'équation donnée au début de la preuve en

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{p-L} (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) @ \eta^{L+1} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \frac{1}{\eta} (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) \sum_{i=0}^{p+1} \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \mathcal{L} \eta. \mathcal{L} \eta^{i+1} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\eta} (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) \mathcal{L}. \mathcal{L} \eta^{p+3} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} (Q_2(\xi) - Q_1(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \end{aligned}$$

que l'on récrit, par division par $\eta^{p+1} e^{-(t_0/\eta)^{p+1}}$, par définition de $\mathcal{E}$, et par application de la proposition 25 donnée en annexe, en

$$0 = (\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1) (@ + \eta \mathcal{L}) + \|Q_2 - Q_1\|_\infty \mathcal{L}$$

qui implique l'inégalité

$$|\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1| = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

⊗ Etude de $\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|_\infty$:

Nous travaillerons sur $[0, t_0]$ (*Le résultat sur $[-t_0, 0]$ se montrant de même.*)

Pour $n \in \{1, 2\}$, la solution $(\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n)$ de l'équation (2.4) admettant comme condition initiale $\underline{u}_n(t_0) = 0$ est

$$\underline{u}_n(t) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t (\eta^{p-L} \underline{\alpha}_n \xi^L + \frac{1}{\eta} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n) + \eta^p Q(\xi)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

ce qui permet de déduire que, pour tout t :

$$\begin{aligned} |\underline{u}_2(t) - \underline{u}_1(t)| &\leq \frac{1}{\eta^{L+1}} |\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1| \left| e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\eta^{p+2}} |\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1| \sum_{i=0}^{p+1} \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \left(\sum_{k=0}^{j_i} \underline{\alpha}_2^k \underline{\alpha}_1^{j_i-k} \right) S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_2) \left| e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t \xi^i e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\eta^{p+2}} |\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1| \sum_{i=0}^{p+1} \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \underline{\alpha}_1^j (\eta^{p-L+1} S'_i(\cdot)) \left| e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t \xi^i e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \\
& + \frac{1}{\eta^{p+2}} |\underline{\alpha}_2 - \underline{\alpha}_1| \left| e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t \xi^{p+2} (\eta^{p-L+1} \partial_2 R(\xi, \cdot)) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| + \dots \\
& + \frac{1}{\eta} \left| e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right| \|Q_2 - Q_1\|_\infty
\end{aligned}$$

Enfin, le caractère limité des fonctions S_i , $\eta^{p-L+1} S'_i$, et $\eta^{p-L+1} \partial_2 R(\xi, \cdot)$, ainsi que la proposition 25 donnée en annexe, nous permettent de donner au premier et au dernier terme de cette somme l'estimation $\mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$, et l'estimation $\mathcal{L} \eta \|Q_2 - Q_1\|_\infty$ aux trois autres. Ce qui nous permet d'en déduire que, pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$|\underline{u}_2(t) - \underline{u}_1(t)| = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

que l'on étend, de la même façon, à tout $t \in [-t_0, 0]$.

Comme, par hypothèse, la quantité $\mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$ est limitée, on en déduit que

$$\|\underline{u}_2 - \underline{u}_1\|_\infty = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Ce qui nous amène bien à

$$|(\underline{\alpha}_2, \underline{u}_2) - (\underline{\alpha}_1, \underline{u}_1)|_\infty = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

□

En munissant $\mathbb{R} \times E$ de la norme canonique $|\cdot|_\infty$, nous avons ainsi montré que Θ est une application lipschitzienne, de constante de Lipschitz limitée.

Ce dernier résultat nous permet de démontrer le théorème 4 :

Selon la proposition 4, la relation $(\underline{\beta}, \underline{v}) \Xi (\underline{\alpha}, \underline{u})$ induit une fonction

$$\Xi : (\underline{\beta}, \underline{v}) \mapsto (\underline{\alpha}, \underline{u})$$

Si l'on se donnent alors deux points limités $(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)$ et $(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2)$ de $\mathbb{R} \times E$, la définition de Θ nous permet d'écrire

$$\Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - \Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1) = \Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)$$

où, pour tout $n \in \{1, 2\}$, Q_n est défini par $Q_n(t) := P(t, \eta \underline{v}_n(t), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_n)$.

On a donc, par définition

$$|\Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - \Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty = |\Theta(Q_2) - \Theta(Q_1)|_\infty$$

Comme, pour tout $n \in \{1, 2\}$, $(\underline{\beta}_n, \underline{v}_n(t))$ reste limité pour tout $t \in [-t_0, t_0]$, la proposition 5 implique alors que

$$|\Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - \Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty = \mathcal{L} \|Q_2 - Q_1\|_\infty$$

Afin d'obtenir une majoration de $\|Q_2 - Q_1\|_\infty$, nous étudions la fonction $Q_2 - Q_1$ que l'on peut mettre sous la forme

$$Q_2(t) - Q_1(t) = \eta(\underline{v}_2(t) - \underline{v}_1(t))\partial_2 P(t, \cdot, 0) + \eta^{p-L+1}(\underline{\beta}_2 - \underline{\beta}_1)\partial_3 P(t, \cdot, \cdot)$$

Par régularité, nous en concluons que, pour tout $t \in [-t_0, t_0]$,

$$|Q_2(t) - Q_1(t)| = \eta|\underline{v}_2(t) - \underline{v}_1(t)| \mathcal{L} + \eta^{p-L+1}|\underline{\beta}_2 - \underline{\beta}_1| \mathcal{L}$$

Et donc, par définition de $|\cdot|_\infty$, nous avons pour tout $t \in [-t_0, t_0]$:

$$|Q_2(t) - Q_1(t)| = \mathcal{L}\eta |(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - (\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty < +\infty$$

Ce qui nous amène à la majoration

$$\|Q_2 - Q_1\|_\infty = \mathcal{L}\eta |(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - (\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty$$

D'où l'on déduit, par définition de Ξ , que l'on a bien

$$|\Xi(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - \Xi(\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty = \mathcal{L}\eta |(\underline{\beta}_2, \underline{v}_2) - (\underline{\beta}_1, \underline{v}_1)|_\infty$$

qui est la définition du caractère $\mathcal{L}\eta$ -contractant de Ξ .

2.5 Démonstration du corollaire 2

Ce résultat, qui nous servira de point de départ pour les chapitres qui suivent, est une conséquence directe d'une variante du théorème de point fixe de Picard, que nous pouvons trouver dans [5].

Par commodité nous rappelons son énoncé et sa démonstration.

Théorème 5. *Soient $(F, |\cdot|)$ un espace de Banach standard, et f une fonction définie de F dans lui-même telle que :*

- *Le domaine de définition de f contient tous les limités de F , et l'image par f de tout limité de F est limitée*
- *L'application f est contractante sur la collection des objets limités de F , avec un coefficient de contraction K non infiniment proche de 1, c'est à dire que*

$$\exists K \in [0, 1[, K \neq 1; \forall (x, y) \in E^2 \text{ limités }, |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

Alors f admet un unique point fixe limité.

De plus, il est possible de montrer que ce point fixe est attractif, et que son bassin d'attraction contient tous les points limités de F .

Démonstration :

Soit x un point limité de F . Son image y par f est aussi limitée.

On pose alors

$$\rho := \frac{|x - y|}{1 - K} \text{ et } G := \{\xi; |x - \xi| \leq \rho\}$$

Par construction, G est limité.

Comme la restriction de f à G envoie G sur lui-même, nous pouvons alors appliquer le théorème du point fixe de Picard "classique".

□

Chapitre 3

Quelques pistes de généralisation du théorème

*Les mathématiques sont la seule science
où l'on ne sait pas de quoi on parle,
ni si ce que l'on dit est vrai*
Bertrand Russel

Dans ce chapitre, nous allons commenter les trois hypothèses contraignantes que nous avons prises lors de la préparation de l'équation générale (1.5) dans la section 2.1.

Alors que les hypothèses d'apparition de solutions (vrai) canard nous permettent, dans un premier temps, de proposer de manière naturelle une forme plus "lisible" de cette équation, ces trois hypothèses nous ont permis de la transformer en l'équation préparée qui nous sert de cadre d'étude dans toute la suite.

La première section débutera par une discussion portant sur l'hypothèse non naturelle "interdisant" les termes $t^i u^k$. À travers l'étude d'exemples et de contre-exemples permettant d'illustrer ce choix, nous verrons une généralisation sous contraintes du théorème d'existence de solutions canard dans des équations ne satisfaisant pas à cette hypothèse. Puis nous parlerons, dans la dernière section, des deux hypothèses prises sur le paramètre α . Nous y proposerons, tout d'abord, un point de vue alternatif légitimant le choix d'hypothèses fait, avant de présenter succinctement un autre point de vue pour étudier ces équations.

En filigrane de ces deux sections se trouve la question de la possible généralisation du résultat d'existence de solutions canard dans des équations plus générales. Dans ce but, nous utiliserons la notion de loupe [2] (version nonstandard des éclatements à poids), rappelée dans la section 1.4.1, dont le choix et l'utilisation sont fortement liés à celui

d'un polyèdre de Newton associé à l'équation (1.5).

Sous ce point de vue, nous choisirons une loupe (ce qui équivaut à un choix d'une face du polyèdre) qui nous permettra de nous ramener au modèle local type. Ce qui sera toujours permis si l'on prend les trois hypothèses fortes formulées dans le chapitre 2.

3.1 Discussions sur la première hypothèse

Lors de l'étude surstable, cette hypothèse n'avait pas été prise car, dans le cas où les objets sont complexes, il existe un changement de variables qui envoie les monômes de $\Phi(t, u, \alpha, 0)$ admettant u^2 en facteur dans εP , ce qui permet de passer de l'équation générale à l'équation préparée sans cette hypothèse restrictive. En effet, un lemme démontre qu'une solution surstable de l'équation générale est une solution surstable de l'équation préparée, et réciproquement.

C'est cette réciproque qui n'est plus vraie dans notre étude, car sa démonstration utilise fortement le principe du maximum. Ce qui nous conduit, au lieu d'effectuer ce changement de variables, à exclure les monômes de la forme $u^k t^i \alpha^j$, avec $k \geq 2$.

Nous verrons dans ce qui suit que, dans le cas où cette hypothèse n'est pas prise, il existe des équations écartées à cause de l'hypothèse mentionnée ci-dessus qui admettent une solution canard, contrairement à d'autres. Ce dernier point sera illustré par l'introduction du terme u^2 dans les équations étudiées, ce qui a été proscrit dans l'équation préparée (2.1).

Dans la suite, lorsque l'on affirmera que l'on a existence de solutions canard dans les équations étudiées, ce résultat sera une conséquence d'un théorème, démontré par P. de Maesschalck [15] grâce à des méthodes d'éclatement des singularités. Toutefois, cette section se conclura par un résultat montrant d'une manière différente l'existence "locale" de solutions canard pour des équations qui sortent de notre cadre d'étude.

L'équation préparée (2.1) :

$$\eta^{p+1}\dot{u} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \eta^{p+1}P(t, u, \alpha, \eta)$$

est transformée, par le changement de variables

$$\begin{cases} t = \eta T \\ u = \eta U \\ \alpha = \eta^{p-L+1} A \end{cases}$$

en l'équation

$$\frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + AT^L + \frac{1}{\eta^{p+1}}S(\eta T, \eta^{p-L+1} A) + P(\eta T, \eta U, \eta^{p-L+1} A, \eta)$$

Comme la fonction S n'est composée que de termes de valuations, pour les poids $(1, p - L + 1)$ pour (t, α) , supérieures ou égales à $p + 2$, le terme $S(\eta T, \eta^{p-L+1} A)$ admet au moins η^{p+2} en facteur, ce qui nous amène à présenter cette dernière équation sous la forme

$$\frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + AT^L + \eta Q(T, U, A, \eta)$$

Cette dernière équation est une équation régulièrement perturbée dont l'équation non perturbée (i.e. prise en $\eta = 0$) associée $\frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + AT^L$, que nous appellerons *modèle local*, sera au cœur de ce qui suit.

Remarquons qu'afin d'arriver à ce modèle local, nous avons fait une loupe, telle que nous l'avons présentée au chapitre 1.

Rappelons que l'idée sous-jacente à l'utilisation de ces loupes est de permettre la transformation de l'équation étudiée en une autre équation, dont l'étude s'avère moins ardue. Une première piste étant de transformer l'équation en une équation régulièrement perturbée, comme nous l'avons fait pour l'équation préparée.

Dans un premier temps, il convient donc d'effectuer un choix de loupe dans le but de tenter d'obtenir une équation régulièrement perturbée dont le modèle local nous convienne. Ce choix passe par une sélection de termes, figurant dans le modèle local, que nous qualifierons de "dominants" :

En incorporant le terme u^2 aux équations étudiées, ces coefficients "dominants" pourraient être :

$$\varepsilon \frac{du}{dt}, (p+1)t^p u, \alpha t^L, u^2, \text{ ou encore } \eta^{p+1} t^K$$

Ce dernier coefficient apparaissant comme représentant le terme $\eta^{p+1} P$.

Pour cette raison, l'équation que nous étudierons sera, dans toute la fin de cette section,

$$\eta^{p+1} \frac{du}{dt} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + u^2 + \eta^{p+1} t^K \quad (3.1)$$

qui est la plus simple des équations sortant de notre cadre qui soit semblable à l'équation préparée (2.1), mais dont l'étude ne soit pas triviale.

Afin d'étudier cette équation, il nous faut définir une loupe adaptée, ce qui demande de privilégier les monômes "dominants" que nous aurons fixé afin que, après utilisation de la loupe, ces monômes figurent dans le modèle local.

Comme il n'y a que 4 variables possibles (t, u, α, η) , seuls 4 parmi ces 5 monômes doivent être choisis comme "dominants" afin de définir la loupe, la situation favorable étant celle où le terme u^2 n'est pas dominant.

Dans la suite, nous verrons qu'une telle étude est possible dans le cas où $K + 1 > p$ et que cela amène l'existence de la solution canard. Par contre, nous verrons, sur des exemples, que dans le cas contraire l'équation possède ou non des solutions canard.

Pour cela, nous nous intéressons à l'équation (3.1) :

$$\eta^{p+1} \frac{du}{dt} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + u^2 + \eta^{p+1} t^K, \text{ avec } p \text{ impair, et } L < p \text{ pair}$$

Et nous notons a (resp. b, c, d) le poids que l'on donnera à t (resp. u, α, η).

Ainsi les poids de chacuns des monômes sont :

$(p+1)d + b - a$ pour $\eta^{p+1} \frac{du}{dt}$, $pa + b$ pour $(p+1)t^p u$, $La + c$ pour αt^L , $2b$ pour u^2 , et $(p+1)d + Ka$ pour $\eta^{p+1} t^K$.

Nous devons choisir 4 monômes, parmi ces 5, que nous considérerons comme dominants, dans le but de tenter de retrouver le modèle local que nous connaissons. C'est naturellement le terme u^2 que nous espérons pouvoir ne pas prendre comme monôme dominant.

Nous verrons que, dans le cas où $K+1 < p$, ce sera malheureusement impossible.

Les calculs algébriques montrent que les poids respectifs $(1, p, 2p-L, (2p-K)/(p+1))$, $(1, K+1, 2K+2-L, (K+2)/(p+1))$, $(1, K+1, p+K-L+1, 1)$, et $(1, p, 2p-L, 1)$ pour (t, u, α, η) amènent, respectivement, aux équations

$$\begin{aligned} (p+1)T^p U + AT^L + U^2 + T^K &= \nu^{p-(K+1)} \frac{dU}{dT} \\ \frac{dU}{dT} &= AT^L + U^2 + T^K + (p+1)\nu^{p-(K+1)} T^p U \\ \frac{dU}{dT} &= (p+1)T^p U + AT^L + T^K + \nu^{(K+1)-p} U^2 \\ \frac{dU}{dT} &= (p+1)T^p U + AT^L + U^2 + \nu^{(K+1)-p} T^K \end{aligned}$$

Chercher à ce que le terme αt^L de l'équation (3.1) ne soit pas dominant n'a pas d'intérêt, car nous avons besoin d'avoir au moins un terme dominant contenant le paramètre α lors de l'étude du modèle local.

Dans la fin de cette section, nous séparerons l'étude de (3.1) en trois cas :

Le cas où $K+1 > p$:

Dans ce cas, les deux premiers choix de poids ne sont pas pertinents, car $p-(K+1) < 0$. Ce qui implique que les termes $\frac{dU}{dT}$, $(p+1)T^p U$, AT^L figurent tous trois dans le modèle local.

Et, par suite, le théorème de P. de Maesschalck permet de montrer l'existence d'une solution canard dans (3.1).

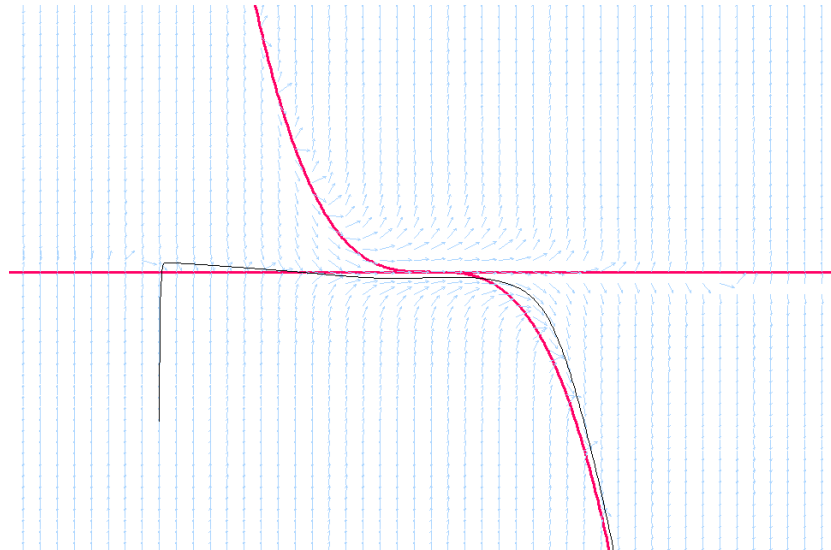


FIG. 3.1 – Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.05$

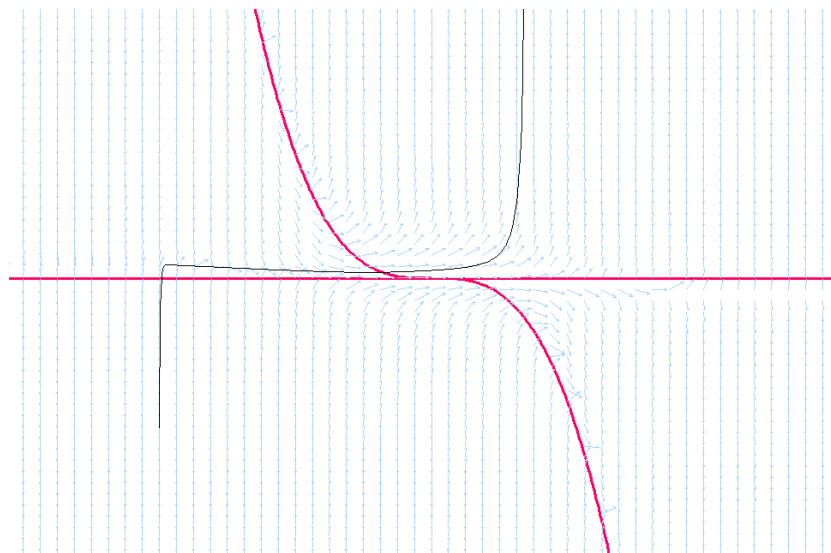


FIG. 3.2 – Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = 0$

Dans ce cas, le théorème de la valeur intermédiaire implique l'existence d'une solution canard entre ces deux valeurs du paramètre α .

Nous allons maintenant nous commenter les deux autres cas. À l'issue de quoi, nous présenterons un résultat général d'existence locale de solutions canard.

Le cas limite $K + 1 = p$:

Dans ce cas limite, l'équation (3.1) s'écrit

$$\eta^{p+1}\dot{u} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + u^2 + \eta^{p+1}t^{p-1}$$

Elle devient, après utilisation de la loupe

$$\begin{cases} t = \nu T \\ u = \nu^p U \\ \alpha = \nu^{2p-L} A \\ \eta = \nu \end{cases}$$

une équation dans laquelle n'intervient pas de terme η , car tous les termes peuvent être choisis comme dominants.

$$\frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + AT^L + U^2 + T^{p-1}$$

Ce qui nous amène à étudier un modèle local plus compliqué même si, dans l'équation particulière étudiée ci-dessous, le couple $(-\eta^4, -\eta^4)$ est une solution canard.

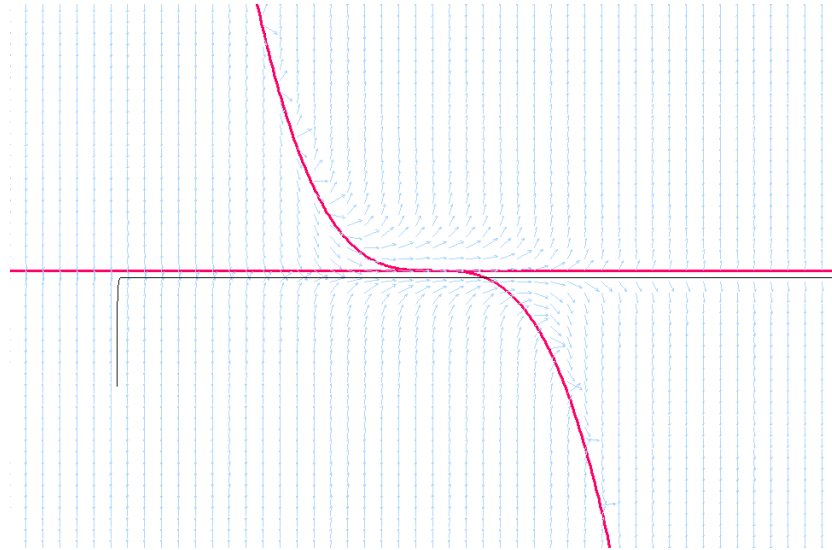


FIG. 3.3 – Une solution de l'équation $\eta^4\dot{u} = 4t^3u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4(t^2 + t^3 - \eta^4)$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.05$

Le cas où $K + 1 < p$:

Dans ce cas, nous avons vu que l'un des monômes fondamentaux $\eta^{p+1}\frac{du}{dt}$, $(p+1)t^p u$, ou αt^L doit ne pas être dominant, une telle constatation remet en cause le modèle local de l'équation, amenant des cas d'étude dans lesquels les équations peuvent admettre ou non des solutions canard.

Par exemple, l'équation

$$\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t$$

admet une solution canard

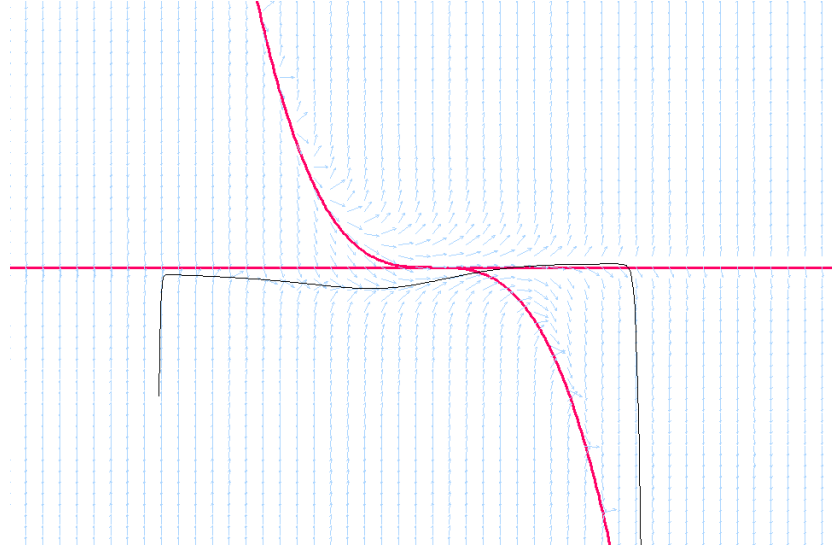


FIG. 3.4 – Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.07133893090$

Comme dans le cas où $K + 1 > p$, ce résultat se déduit par application du théorème des valeurs intermédiaires. Il peut aussi être vu comme une conséquence du résultat présenté plus loin.

Contrairement à l'équation précédente, l'équation

$$\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4$$

n'admet pas de solutions canard.

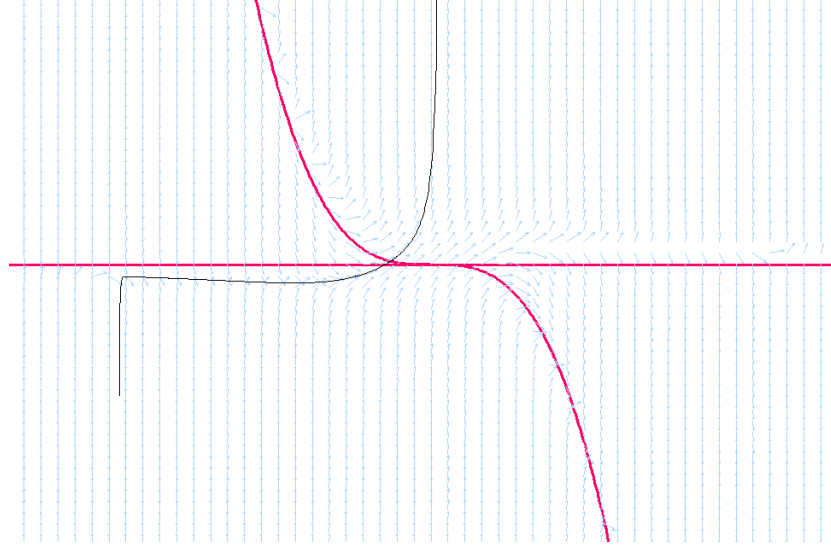


FIG. 3.5 – Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.2$

Pour cette dernière équation, nous obtenons un dessin similaire pour $\alpha = -1$.

Comme, de plus, si α est croissant les solutions de la seconde équation qui viennent de $-\infty$ se comportent de la même façon, et que les hypothèses prises impliquent que nous cherchons des valeurs de α restant proches de 0, nous pouvons conclure que cette équation n'admet pas de solutions canard.

Pour conclure cette section, nous allons présenter un résultat permettant de montrer que certaines équations du même modèle que l'équation préparée (2.1), qui contiennent le monôme u^2 , admettent localement des solutions canard.

En particulier, nous retrouverons que dans le cas où $K > p + 1$, l'équation (3.1) admet localement des solutions canard. Au vu des questions posées dans cette section, nous mettrons de côté les questions relatives au paramètre.

Nous nous intéressons à l'équation

$$\eta^{p+1} \frac{du}{dt} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + u^2 + \eta^{p+1} P(t, u, \alpha, \eta) \quad (3.2)$$

Et nous effectuons le changement $t = \nu T$, et $u = \nu^\gamma U$, qui nous amène, après division par $\nu^{p+\gamma}$, à l'équation

$$\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{p+1} \frac{dU}{dT} = (p+1)T^p U + \alpha \nu^{L-p-\gamma} T^L + \nu^{\gamma-p} U^2 + \eta^{p+1} \nu^{-p-\gamma} P(\nu T, \nu^\gamma U, \alpha, \eta)$$

Comme nous voulons fixer ν de sorte que $\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{p+1} = \nu$, nous obtenons que $\eta = \nu^{(p+2)/(p+1)}$. Quitte à redéfinir le paramètre α nous arrivons ainsi à une équation du type de l'équation préparée (2.1), ce qui implique l'existence locale (à cause de la loupe effectuée) d'un solution canard sous les conditions suivantes :

- $p < \gamma$
- Le terme $\nu^{2-\gamma}P(\nu T, \nu^\gamma U, \alpha, \nu^{(p+2)/(p+1)})$ est, pour tout t , égal à $\mathcal{O}_{\nu \rightarrow 0}(1)$.

Notons que la seconde condition se récrit $P(\nu T, \nu^\gamma U, \alpha, \nu \cdot \nu^{1/(p+1)}) = \mathcal{O}_{\nu \rightarrow 0}(\nu^{\gamma-2})$.

Ainsi, la structure de la dernière équation nous amène à conclure que l'équation (3.2) admet localement une solution canard s'il existe en entier $\gamma > p$ tel que

$$P(\nu T, 0, 0, \nu \cdot \nu^{1/(p+1)}) = \mathcal{O}_{\nu \rightarrow 0}(\nu^{\gamma-2})$$

Le choix d'un tel entier γ étant optimal pour $\gamma = p + 1$, nous en déduisons que cette dernière hypothèse équivaut à dire que la valuation (sans poids) du terme $P(T, 0, 0, \eta)$ est au moins égale à $p - 1$, et nous avons donc le résultat suivant :

Proposition 6. *Si la valuation (sans poids) du terme $P(T, 0, 0, \eta)$ est au moins égale à $p - 1$, alors l'équation (3.2) admet localement une solution canard.*

Comme toute solution canard sous une loupe fixée correspond à une solution canard (la réciproque étant fausse car, par exemple, une loupe trop forte peut envoyer des oscillations de la solution canard à l'infini), ce résultat implique l'existence des solutions canard que nous avons relevé tout au long de cette section.

3.2 Discussions sur les hypothèses concernant le paramètre

Dans cette section, nous allons discuter des hypothèses concernant le paramètre α que nous avons prises afin de permettre son estimation asymptotique dans le chapitre précédent.

Dans un premier temps, nous traiterons de l'ordre de grandeur du paramètre canard afin d'expliquer la contrainte prise dans l'énoncé du théorème présenté dans le chapitre suivant. En effet, du fait des hypothèses prises sur la fonction S , l'équation aux ordres de grandeur que le paramètre canard doit satisfaire admet plusieurs solutions ayant des ordres de grandeur distincts, ce qui nous a amené à restreindre le domaine de définition du paramètre canard lors de l'énoncé du théorème d'existence et d'unicité de la solution canard.

Enfin, nous donnerons un autre éclairage aux hypothèses concernant le paramètre choisies précédemment.

Sous les hypothèses prises, nous avons vu dans la section 2.3 que l'équation préparée (2.1) peut admettre plusieurs solutions canard, ce qui nous a amené à restreindre le domaine de définition du paramètre α aux paramètres égaux à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{p-L+1})$, afin d'en obtenir l'unicité.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, cette hypothèse de restriction est nécessaire à la mise en œuvre de la démonstration.

Rappelons que l'équation étudiée est

$$\eta^{p+1}\dot{u} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \eta^{p+1}P(t, u, \alpha, \eta)$$

où la fonction S n'est composée que de termes de valuations, pour les poids $(1, p-L+1)$ pour (t, α) , supérieures ou égales à $p+2$.

Dans le cas général, l'équation aux ordres de grandeur obtenue à partir de l'équation (2.1) montre la possible existence de plusieurs paramètres canard, dont les valeurs respectives $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^r)$ se trouvent pour des valeurs réelles de r allant de $p-L$ à $p-L+1$, ce qui explique la restriction faite sur l'ordre de grandeur du paramètre car, en se restreignant à des valeurs du paramètre égales à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{p-L+1})$, nous obtenons l'unicité du paramètre canard. Ce qui montre que les hypothèses prises sur la fonction S sont optimales.

Nous allons maintenant regarder plus précisément les hypothèses concernant le paramètre α afin d'en proposer un nouvel éclairage :

Tout d'abord, l'hypothèse de non apparition d'un terme αu en facteur de monômes de $\Phi(t, u, \alpha, 0)$ a été prise car des termes, comme $tu\alpha$, poseraient problème lors de l'étude de l'équation, en tant que termes pouvant dominer le terme αt^L .

De plus, la forme particulière de la fonction T_1 a été choisie afin que l'équation aux ordres de grandeur (2.6) n'ait qu'une seule racine de l'ordre de grandeur recherché. Dans le cas contraire, il pourrait en effet y avoir plusieurs solutions canard, à l'équation, qui aient le même ordre de grandeur. Ce qui nous contraindrait à mener une démonstration différente de celle proposée dans les chapitres suivants, car cette non-unicité ne permettrait pas l'utilisation d'un théorème du point fixe.

C'est pourquoi nous avons choisi de nous restreindre à une telle équation polynomiale.

Ce propos est illustré par l'exemple de l'équation

$$\eta^6 \dot{u} = 6t^5 u + \alpha t^4 + \alpha^2 t^2 + \eta^4 P(t, u, \alpha, \eta)$$

pour laquelle les termes αt^4 et $\alpha^2 t^2$ ont tous deux le même ordre, ce qui implique que l'équation aux ordres de grandeur peut admettre plusieurs solutions de même ordre de grandeur en puissances de η .

Afin d'avoir une transversalité raisonnable, nous avons supposé que l'entier L est pair car, dans le cas contraire, la parité de $L+1$ nous amènerait à une équation aux ordres de grandeur satisfaite par $\underline{\alpha}$ de la forme

$$0 + \eta \sum_{i=0}^{p+1} \mathcal{L} \eta^{(i+(j_i+1)(p-L+1)(p+2))} \underline{\alpha}^j + \mathcal{L} \eta + \mathcal{L} = 0$$

alors qu'il est nécessaire d'avoir $\underline{\alpha}$ comme premier terme dans (2.6) pour le bon déroulement de la démonstration.

En fait il est même possible que, dans ce cas, les équations n'admettent plus de solutions canard, comme c'est le cas pour le système

$$\begin{cases} \eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t + \eta^4 \\ u(-t_0, \eta) = 0 = u(t_0, \eta) \end{cases}$$

En effet, dans cet exemple, le calcul du paramètre $\underline{\alpha}$ passe par un recollement en 0 des solutions u_- et u_+ (définies respectivement sur $[-t_0, 0]$ et $[0, t_0]$) de cette équation qui s'annulent respectivement en $-t_0$ et t_0 . Ce qui nous amène à une équation aux ordres de grandeur impossible du type

$$\alpha \cdot 0 + @ \eta^5 = 0$$

Pour la même raison, séparer les termes de la fonction T_1 en mettant d'un côté ceux dont la puissance en t est impaire, et de l'autre ceux dont la puissance en t est paire, afin d'obtenir une généralisation de l'hypothèse autorisant des termes αt^l , où $l < L$ est impair, n'est pas non plus fructueux.

En effet, bien que dans la démonstration de la proposition 4 les termes ayant une puissance impaire en t n'ont aucune incidence sur l'estimation (2.6), car leur estimation est nulle, mais malheureusement leur rôle ne peut pas être négligé lors de la démonstration du second point du théorème.

Une dernière piste de comparaison pour ces hypothèses est de regarder l'hypothèse prise lors de l'étude complexe des solutions surstables, qui était l'inversibilité de la matrice $M = (p_{i,j})_{i,j}$ définie par

$$p_{i,j} := \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^i}{\partial \beta_j \partial^{i-1} x} \Psi(x_0, y_0(x_0, 0), \beta^{(0)}, 0)$$

En reprenant les notations de la partie 1.3.1, cette hypothèse, dite *de transversalité*, exprime le fait que l'application J qui à $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ associe le jet d'ordre $p-1$, au point tournant x_0 , de l'application $\psi_\beta : x \mapsto \Psi(x, y_0(x, 0), \beta, 0)$ est un difféomorphisme local au point $\beta^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_p^{(0)})$.

Dans le cas complexe, nous pouvons appliquer le résultat d'existence de solutions surstables, énoncé précédemment, à l'équation

$$\eta^{p+1} \dot{u} = (p+1)t^p u + \sum_{j=1}^p A_j t^{j-1} + \eta^{p+1} P(t, u, \alpha, \eta) \text{ avec } A_{L+1} = \alpha$$

L'équation étant à coefficients réels, nous en déduisons que la solution surstable (A^*, u^*) est réelle (car son conjugué est aussi la solution surstable), ce qui nous permet de particulariser ce résultat à l'ensemble $\mathbb{R}$, pour en déduire l'existence d'une solution canard.

Remarquons que, dans l'espace des multiparamètres β :

- Le plongement $\alpha \mapsto (\beta_1(\alpha), \dots, \beta_p(\alpha))$ est représenté par une courbe paramétrée.
- Le multiparamètre surstable β^* correspondant à un point, car il satisfait au système de p équations à p variables, qui formalise le fait de grimper sur les $p + 1$ montagnes.
- L'espace des paramètres canard forme une hypersurface (contenant le "point" β^*), car il satisfait à 1 équation à p variables, qui formalise le fait de grimper sur les deux montagnes recouvrant l'axe réel.

Il apparaît ainsi qu'une hypothèse plus générale sur α serait, d'un point de vue géométrique, que la courbe paramétrée, représentant le plongement dans l'espace des paramètres β , intersecte transversalement cette hypersurface.

Comme nous l'avons précisé précédemment, il serait préférable qu'il n'y ait qu'une seule intersection lorsque l'on se restreint à l'ordre de grandeur qui nous intéresse afin d'avoir, pour cet ordre de grandeur du paramètre, l'unicité de la solution canard.

Pour conclure ce chapitre, nous allons traiter de la relation entre le poids des monômes que l'on a choisi lors de la construction de la loupe et les poids que l'on a fixé pour le calcul de la valuation à poids. Nous arriverons à une vision alternative des hypothèses que nous avons choisies.

En effet, de ce point de vue, il est nécessaire de définir le poids ρ de α de sorte que le terme $\alpha T_1(t, \alpha)$ ai comme valuation, pour les poids $(1, \rho)$ pour (t, α) , la valeur $p + 1$.

De plus, afin que l'on ait une hypothèse de transversalité raisonnable sur le paramètre α , nous demandons que parmi les monômes constituant $\alpha T_1(t, \alpha)$, il y en ait un de la forme αt^L , et c'est ainsi que nous donnons comme poids ρ au paramètre α la valeur $p - L + 1$.

De ce point de vue, les ordres de t , u et η sont fixés au préalable (par exemple, en posant $\alpha = 0$ dans l'équation), puis nous permettent d'en déduire l'ordre de α de sorte qu'au moins l'un de ces monômes figure sur la face du polyèdre représentant le choix de loupe sous-jacent.

Chapitre 4

Étude asymptotique des solutions canard

*Les mathématiques, c'est comme l'amour :
Une idée simple, mais qui peut parfois se compliquer.*

Robert Drabek

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'existence et de l'unicité d'écriture de développements asymptotiques en puissances de η de la solution canard de l'équation (2.1). L'étude proposée concernant le comportement asymptotique de la solution canard dans un voisinage du point tournant $t = 0$, nous restreindrons notre étude à un compact $[-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$. Cette précaution nous permettra d'éviter de considérer des problèmes de couche limite.

Dans toute la suite, nous omettrons de signaler la dépendance des paramètres en η . En fait, sauf mention du contraire, nous considérerons que les fonctions étudiées ont pour variables t et η .

Ce chapitre débutera par une relecture formelle de la méthode mise en place dans le chapitre 2, qui permet de construire un développement asymptotique en puissances de η de la solution canard. Mais comme ces développements voient leurs coefficients admettre un pôle en $t = 0$, nous proposerons de contourner cette difficulté par la mise en place d'une méthode permettant l'implémentation de développements asymptotiques en puissances de η , pour lesquels les hypothèses portant sur les coefficients $\tilde{u}_k$ sont affaiblies.

Nous demanderons donc aux fonctions $\tilde{u}_k$ d'être de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et en une famille de fonctions φ des variables t et η , définie à partir de l'équation étudiée, que nous appellerons *intermédiaires*, généralisant ainsi les développements asymptotiques précédents. Naturellement, ces fonctions intermédiaires ne devront pas admettre de développement

asymptotique en puissances de η , à coefficients réguliers en t .

Bien qu'il soit aisé de montrer directement que le paramètre canard α^* admet un développement asymptotique en puissances de η , nous nous intéresserons à l'étude de la solution canard (α^*, u^*) pour laquelle nous montrerons simultanément l'existence d'un tel développement asymptotique en puissances de η pour le paramètre α^* et pour la fonction u^* .

Rappelons que nous avons pris comme conventions d'écriture

$$\alpha = \eta^{p-L+1} \underline{\alpha} \text{ et } u = \eta \underline{u}$$

Au vu de la décomposition en monômes de l'opérateur Ξ_η , des premières idées de fonctions intermédiaires seraient la fonction $\varphi(t, \eta) = e^{-(t/\eta)^{p+1}}$ ou encore le p -uplet $\varphi(t, \eta) = (e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_t^{+\infty} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi, \dots, e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_t^{+\infty} \xi^{p-1} e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi)$.

Remarquons que, dans le second cas, les fonctions proposées sont celles qui apparaissent naturellement lorsque nous étudions, sur $[-t_0, t_0]$, l'opérateur Ξ_η quitte à mettre de côté des termes exponentiellement décroissants (i.e. ayant un développement asymptotique en puissances de η nul).

Afin de mettre en place l'implémentation de tels développements asymptotiques, nous devons aussi prendre en compte que les termes φ et $t\varphi$ peuvent ne pas avoir le même ordre de grandeur en puissances de η .

Par exemple, si l'on choisit $\varphi(t, \eta) = e^{-(t/\eta)^{p+1}}$, on remarque que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \{|e^{-(t/\eta)^{p+1}}|\} = 1, \text{ alors que } \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|te^{-(t/\eta)^{p+1}}|\} = \frac{e^{-1/(p+1)}}{(p+1)^{p+1}} \eta$$

Ce qui montre que les termes φ et $t\varphi$ n'ont pas à être associés au même coefficient $\tilde{u}_k$ dans le développement asymptotique escompté de la solution.

Pour parer à ce problème, nous définirons une notion d'ordre sur les monômes $t^i \varphi^J \eta^l$ qui sera liée à l'estimation de leur ordre de grandeur en puissances de η .

Naturellement, cet ordre sera donc défini de la façon suivante :

$$\mathfrak{X}(t^i \varphi^J \eta^l) := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \{|t^i \varphi(t, \eta)^J \eta^l|\} \right)}{\ln \eta}$$

Ce qui nous permettra de nous intéresser aux ensembles $\mathcal{A}_k$ dont les éléments sont composés des monômes $(\eta^n, t^i \varphi^J \eta^l)$ satisfaisants à $n \leq k$ et $\mathfrak{X}(t^i \varphi^J \eta^l) \leq k$. Ces ensembles contiendront ainsi les termes d'ordres inférieurs ou égaux à k du développement asymptotique, du paramètre canard α^* d'une part et de la fonction canard u^* d'autre part, que l'on cherche à *implémenter* (i.e. calculer par un procédé constructif). Ils engendreront donc les développements asymptotiques tronqués à l'ordre k recherchés.

Pour se faire, nous utiliserons les projecteurs $\hat{\pi}_k : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}_k$, où $\hat{\mathcal{A}}$ est la limite projective des ensembles $(\mathcal{A}_k)_k$. Il s'agit, de plus, de l'ensemble naturel pour servir de cadre afin d'engendrer les développements asymptotiques.

Afin d'implémenter des développements asymptotiques, nous construirons une suite itérative $(\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k)_k$ définie par

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 = 0 \text{ et } \hat{u}_0 := 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}, (\hat{\alpha}_{k+1}, \hat{u}_{k+1}) := \hat{\pi}_{k+1}(\hat{\Xi}(\hat{\alpha}_k, \hat{u}_k)) \end{cases}$$

où $\hat{\Xi}$ désigne l'opérateur formel sous-jacent à Ξ_η , qui sera précisé ultérieurement.

Cette suite pouvant être réécrite, à partir de la décomposition de Ξ_η , en une combinaison linéaire de monômes du type $(\eta^n, t^i \varphi^J \eta^l)$. Par définition, la limite projective de cette suite sera le développement asymptotique recherché. Ce qui conclura l'étude de l'existence de *pré-développements asymptotiques* de la solution canard.

Une fois l'existence démontrée, il nous restera à montrer qu'un tel développement s'écrit de manière unique, ce qui sera une conséquence directe du choix des fonctions intermédiaires. Pour se faire, nous montrerons que la famille $(t^i \varphi^J \eta^l)_{i,J,l}$, qui permet de définir $\hat{\mathcal{A}}$, est *asymptotiquement libre* au sens suivant :

Tout développement asymptotique en puissances de η constitué à partir de la famille $(t^i \varphi^J \eta^l)_{i,J,l}$ qui est un pré-développement asymptotique de la fonction nulle a tous ses coefficients nuls.

Dans ce chapitre, après une digression sur les objets utilisés, nous définirons un cadre formel général permettant de présenter la correspondance qui sera mise en place pour montrer l'existence d'un développement asymptotique de la solution canard.

Afin de l'illustrer, nous appliquerons cette correspondance pour l'étude de deux cas simples, ce qui nous permettra de retrouver deux résultats bien connus :

- Dans le cas $p = 1$:

Le point tournant n'est pas dégénéré, et nous retrouverons l'existence d'un développement asymptotique en puissances de ε à coefficients réguliers en t .

Soulignons que ce résultat est déjà bien connu [18][54].

- Dans le cas $p = 0$:

Il n'y a pas de point tournant, et nous retrouverons l'existence de développements asymptotiques combinés [50][6], dans le cas où l'équation ne possède qu'une courbe lente attractive, pour des solutions dont la condition initiale ne se situe pas dans un voisinage de cette courbe lente.

L'application de cette correspondance dans le cas où $p \geq 3$, qui correspond au cas où le point tournant est dégénéré, sera le sujet du dernier chapitre de ce manuscrit.

4.1 Le développement asymptotique naturel

Dans le chapitre 2, nous avons montré que la suite $((\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n))_n$, construite par itération à partir de l'opérateur Ξ_η , converge vers la solution $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*) = (\eta^{p-L+1}\alpha^*, \eta u^*)$. Plus précisément, comme l'opérateur Ξ_η est contractant et à sa constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$, la suite itérative $((\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n))_n$ construite de la manière suivante :

$$(\underline{\alpha}_0, \underline{u}_0) = (0, 0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\underline{\alpha}_{n+1}, \underline{u}_{n+1}) = \Xi_\eta(\underline{\alpha}_n, \underline{u}_n)$$

satisfait à

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha}_0 = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1) \\ \underline{u}_0 = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1) \end{array} \right. \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{l} |\underline{\alpha}_n - \underline{\alpha}_{n-1}| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^n) \\ \|\underline{u}_n - \underline{u}_{n-1}\|_\infty = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^n) \end{array} \right.$$

Ces dernières propriétés nous amènent à conjecturer l'existence d'un développement asymptotique en puissances de η du paramètre canard et de la fonction canard. La régularité des coefficients de ce second développement asymptotique sera précisée dans la suite de ce chapitre.

Dans cette section, nous allons évoquer de manière heuristique ce qui se passe si l'on tente d'implémenter "naïvement" le développement asymptotique de la solution canard.

En général, la fonction canard u^ n'admet pas de développement asymptotique, à coefficients réguliers en t , en puissances de η . C'est à dire que l'on ne peut pas trouver de suites de fonctions $(\check{u}_k)_k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t , telles que*

$$\forall K \in \mathbb{N}, \left\| u^*(\cdot, \eta) - \sum_{k=0}^K \check{u}_k(\cdot) \eta^k \right\|_{t \in [-t_0, t_0]} = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$$

En effet, lorsque l'on substitue formellement une telle série dans l'équation (2.1), on constate que les fonctions $\check{u}_k = \eta \underline{\check{u}}_k$ de la variable t candidates ont, en général, des pôles en $t = 0$. Ainsi un développement asymptotique en puissances de η de la fonction canard ne peut pas avoir, en général, des coefficients $\check{u}_k$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t , comme le montre l'exemple du calcul du coefficient de η^4 lors de la substitution formelle de α et de u par un tel développement asymptotique dans l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + \eta^4 t$. Soulignons que, dans [31], A. Fruchard and R. Schäfke s'intéressent aux équations analytiques sans paramètre dans lesquelles toute solution canard admet, au contraire, un tel développement asymptotique.

En revenant à l'étude générale, ces constatations expliquent que, dans les chapitres qui suivent, nous chercherons à implémenter un développement asymptotique en puissances de η de la fonction canard, pour lequel les hypothèses sur les coefficients $\check{u}_k = \eta \underline{\check{u}}_k$ seront affaiblies, par l'ajout d'une dépendance en η précisée dans l'introduction.

Le calcul du développement asymptotique du paramètre canard α^* étant fortement lié à celui de la fonction canard u^* , il n'existe pas de méthode directe permettant de montrer son existence.

Dans la fin de la section 4.1, nous allons évoquer, **sans preuve**, une méthode de calcul de la suite de réels $(\check{\alpha}_k)_k$ satisfaisant, pour tout entier K , à

$$\left| \alpha^* - \sum_{k=0}^K \check{\alpha}_k \eta^k \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$$

Comme $\underline{\alpha}^*$ est la limite de la suite $(\underline{\alpha}_n)_n$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $\underline{\alpha}_n$ admet un développement asymptotique en puissances de η tronqué à l'ordre n .

Rappelons que, pour tout paramètre γ , nous avons adopté la notation $\underline{\gamma} := \frac{1}{\eta^{p-L+1}} \gamma$.

Par définition, pour tout entier n , le paramètre $\underline{\alpha}_{n+1}$ est défini, itérativement, par la relation

$$\begin{aligned} 0 = \eta^{p-L} \underline{\alpha}_{n+1} \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_{n+1}) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots \\ + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{u}_n(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_n, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \end{aligned}$$

où les fonctions $\underline{u}_n$ sont définies en parallèle.

En prenant comme convention $(\underline{\alpha}_{-1}, \underline{u}_{-1}) = (0, 0)$, la propriété d'initialisation se déduit des formules que nous utiliserons pour prouver l'hérédité.

Enfin, pour tout entier n , le lemme 2 donné dans la section 2.3 implique l'existence et l'unicité d'une solution $\underline{\alpha}_{n+1}$ de cette équation. De plus, en substituant à S , P , $\underline{\alpha}_n$, et $\underline{u}_n$, des développements tronqués à l'ordre n , que nous déterminerons, nous arrivons à une équation que l'on récrit, par la proposition 26 donnée en annexe, sous la forme $E(\underline{\alpha}_{n+1}, \eta) = 0$, où la fonction E est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En appliquant alors le théorème des fonctions implicites, nous en déduisons que $\underline{\alpha}_{n+1}$ s'écrit comme une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la variable η , dont le développement de Taylor à l'ordre $n+1$ est le développement tronqué recherché.

Remarque : Une fois l'existence du développement asymptotique en puissances de η du paramètre $\underline{\alpha}^*$ démontrée, le processus formel suivant :

$$\check{\alpha}_0 := \lim_{\eta \rightarrow 0} \underline{\alpha}_0 \text{ et } S_0 := \check{\alpha}_0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \check{\alpha}_{k+1} := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\underline{\alpha}_{k+1} - S_k}{\eta^{k+1}} \text{ et } S_{k+1} := S_k + \check{\alpha}_{k+1} \eta^{k+1}$$

permettra de l'implémenter (i.e. calculer par un procédé constructif).

Pour tout entier k , le polynôme S_k sera le terme principal d'ordre k du développement asymptotique ainsi implémenté.

Terminologie : Objets formels

Dans toute la suite, afin de marquer la distinction entre les objets formels et leurs versions topologiques, nous réserverons le symbole $\hat{}$ aux objets formels. Cette notation nous servira à marquer l'opposition entre le symbole formel φ et les fonctions des variables t et η que nous lui substituerons en pratique.

4.2 Mise en place du cadre formel

Dans cette section, nous présentons le cadre formel dont l'application sur l'équation préparée nous permettra de mettre en place une correspondance amenant à l'implémentation du développement asymptotique en puissances de η de la solution canard.

Dans un premier temps, nous présenterons les objets formels pertinents qui nous permettront de faire le lien entre les définitions topologique et formelle d'un même objet. Puis nous énoncerons et démontrerons le théorème d'existence formel qui sera au cœur de la correspondance utilisée dans la fin du manuscrit, afin de montrer l'existence d'un développement asymptotique de la solution canard.

4.2.1 Définition des objets formels pertinents

Dans cette partie, et la suivante, nous supposons donnée une suite $((\mathcal{A}_k, \pi_k))_k$ où, pour tout entier k , $\mathcal{A}_k$ est un espace vectoriel et π_k est une application linéaire surjective définie de $\mathcal{A}_{k+1}$ dans $\mathcal{A}_k$.

Par commodité, nous adopterons les notations $\mathcal{A}_{-1} := \{0\}$ et $\pi_{-1} = 0$.

Choisir de prendre ces conventions d'écriture nous permettra d'englober en une seule formule les propriétés d'initialisation et d'hérédité dans les récurrences que nous effectuerons sur les ensembles $\mathcal{A}_k$.

Remarque : En pratique ces conventions permettent d'intégrer, grâce à $\Xi_0(0)$, le calcul du premier terme du développement asymptotique en puissances de η dans le raisonnement général.

Enfin, nous considérons l'ensemble

$$\hat{\mathcal{A}} := \{(a_k)_k : \forall k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathcal{A}_k \text{ et } a_k = \pi_k(a_{k+1})\}$$

Remarque : Dans toute la suite, les ensembles $\mathcal{A}_k$ seront vus comme des ensembles de polynômes, car chacun d'entre eux contiendra les développements asymptotiques tronqués à l'ordre k que l'on cherche à implémenter. De ce point de vue, l'espace $\hat{\mathcal{A}}$ apparaît

comme l'ensemble des développements asymptotiques, car il est constitué des suites de leur sommes partielles.

C'est pourquoi l'ensemble $\hat{\mathcal{A}}$ sera appelé *ensemble des séries formelles*.

Finalement, nous noterons $\hat{\pi}_k$ l'application définie, pour tout entier k , par $\hat{\pi}_k((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) := a_k$. Pour tout entier k , cette application est définie de $\hat{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{A}_k$ et prolonge π_k .

Théorème 6. $(\hat{\mathcal{A}}, (\hat{\pi}_k)_k)$ est une limite projective du système $((\mathcal{A}_k, \pi_k))_k$

Démonstration :

Comme, pour tout entier k , π_k est surjective, nous pouvons considérer le système $((\mathcal{A}_k, \pi_k))_k$ comme un système projectif indexé par $\mathbb{N}$.

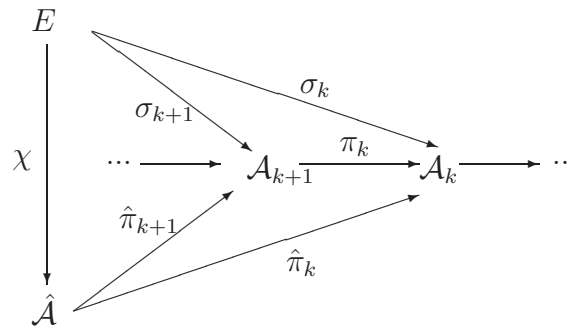
De plus, en munissant $\hat{\mathcal{A}}$ des applications $\hat{\pi}_k$ définies précédemment, nous avons bien commutativité au sens où, pour tout entier k :

$$\pi_k \circ \hat{\pi}_{k+1} = \hat{\pi}_k$$

Enfin, pour tout espace E doté d'une suite d'applications $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaisant la même relation de commutativité que la suite de fonctions $(\hat{\pi}_k)_k$, il existe un morphisme $\chi : E \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ défini, pour tout $x \in E$, par

$$\chi(x) := (\sigma_k(x))_k$$

Nous arrivons ainsi au diagramme commutatif suivant :



Comme ce diagramme représente la relation universelle des limites projectives, nous en déduisons que $(\hat{\mathcal{A}}, (\hat{\pi}_k)_k)$ est bien une limite projective du système $((\mathcal{A}_k, \pi_k))_k$.

□

Dans la partie qui suit, nous allons énoncer et démontrer le théorème formel général qui sera au cœur de la correspondance que nous mettrons en place dans le chapitre suivant.

4.2.2 Le théorème d'existence formel

En plus des objets définis dans la partie précédente, nous supposons donnée une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ où, pour tout entier k , Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même.

Définition 9. Une telle suite d'opérateurs est **compatible** si, pour tout entier k , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathcal{A}_{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathcal{A}_k & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Xi_{k+1} & & \downarrow \Xi_k & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{A}_{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathcal{A}_k & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Proposition 7. Si une telle suite d'opérateurs existe, alors elle détermine un unique opérateur $\hat{\Xi} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ qui est tel que, pour tout entier k , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\hat{\pi}_k} & \mathcal{A}_k \\ \downarrow \hat{\Xi} & & \downarrow \Xi_k \\ \hat{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\hat{\pi}_k} & \mathcal{A}_k \end{array}$$

Cet opérateur $\hat{\Xi}$ sera appelé **opérateur formel**.

Preuve de la proposition :

La propriété universelle des limites projectives implique que l'existence de l'opérateur $\hat{\Xi}$ découle de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{\mathcal{A}} & & & & \\ & & \downarrow \hat{\Xi} & & & & \\ & & \hat{\mathcal{A}} & & & & \\ & \nearrow \hat{\pi}_{k+1} & & \searrow \hat{\pi}_k & & & \\ \cdots & \longrightarrow & \mathcal{A}_{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathcal{A}_k & \longrightarrow & \cdots \\ & \nwarrow \Xi_k \circ \hat{\pi}_k & & \nearrow \Xi_{k+1} \circ \hat{\pi}_{k+1} & & & \end{array}$$

De plus, la relation de commutativité recherchée découle, pour tout entier k , de la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{\mathcal{A}} & \\
 \hat{\pi}_{k+1} \swarrow & & \searrow \hat{\pi}_k \\
 \mathcal{A}_{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathcal{A}_k \\
 \downarrow \Xi_{k+1} & & \downarrow \Xi_k \\
 \mathcal{A}_{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & \mathcal{A}_k
 \end{array}$$

□

Remarque : Cet opérateur $\hat{\Xi}$ est défini par $\hat{\Xi}((a_k)_k) := (\Xi_k(a_k))_k$.

Afin de terminer avec l'étude formelle, nous avons besoin de montrer que l'opérateur formel $\hat{\Xi}$ admet un point fixe, ce que nous montrerons en appliquant un théorème du point fixe. Pour arriver à cela, nous munissons l'ensemble $\hat{\mathcal{A}}$ d'une distance d , définie par :

Définition 10. Pour tout $(\hat{a}, \hat{b}) \in \hat{\mathcal{A}}^2$, on pose

$$d(\hat{a}, \hat{b}) := \inf \left\{ \frac{1}{2^k}; \hat{\pi}_k(\hat{a}) = \hat{\pi}_k(\hat{b}) \right\}$$

Comme l'ensemble $\{k; \hat{\pi}_k(\hat{a}) = \hat{\pi}_k(\hat{b})\}$ est un intervalle contenant -1 , d est bien définie. De plus, elle définit bien une distance sur $\hat{\mathcal{A}}$.

Munir l'ensemble $\hat{\mathcal{A}}$ de la métrique d nous permet d'arriver aux deux résultats suivants :

Proposition 8. Si la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ est compatible alors l'opérateur formel $\hat{\Xi}$ qu'elle définit est continu, et est même 1-lipschitzien.

Réciproquement, si on se donne un opérateur 1-lipschitzien $\hat{\Xi} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$, alors il permet de définir une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ compatible.

Ce résultat découle du fait que si $\hat{\Xi}$ est continu, alors il satisfait à l'hypothèse (dite de *continuité formelle*)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (\hat{a}, \hat{b}) \in \hat{\mathcal{A}}^2 : \left[(\hat{\pi}_k(\hat{a}) = \hat{\pi}_k(\hat{b})) \Rightarrow (\hat{\pi}_k \circ \hat{\Xi}(\hat{a}) = \hat{\pi}_k \circ \hat{\Xi}(\hat{b})) \right]$$

et de la définition de la distance d .

Théorème 7. *L'espace métrique $(\hat{\mathcal{A}}, d)$ est complet.*

Démonstration :

Nous nous donnons une suite $(\hat{a}^{(n)})_n$, d'éléments de $\hat{\mathcal{A}}$, que nous supposons être une suite de Cauchy. Par définition de la distance d et des ensembles $\mathcal{A}_k$, nous avons donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}; \forall p > n, \hat{\pi}_k(\hat{a}^{(p)}) = \hat{\pi}_k(\hat{a}^{(n)})$$

Ainsi, pour tout entier k , la suite $(\hat{\pi}_k(\hat{a}^{(n)}))_n$ est constante à partir d'un certain rang. En notant alors, pour tout entier k , l_k cet élément de $\mathcal{A}_k$ et $l := (l_k)_k$, nous en déduisons que la suite $(\hat{a}^{(n)})_n$ converge vers l , car on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}; \forall p > n, \hat{\pi}_k(\hat{a}^{(p)}) = l_k = \hat{\pi}_k(l), \text{ et donc } d(\hat{a}^{(p)}, l) \leq \frac{1}{2^k}$$

□

Enfin, afin de pouvoir appliquer un théorème du point fixe, nous devons définir et étudier les propriétés de contraction pertinentes :

Définition 11. *Une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ est dite **formellement contractante** si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (a_k, b_k) \in \mathcal{A}_k^2 : [(\pi_{k-1}(a_k) = \pi_{k-1}(b_k)) \Rightarrow (\Xi_k(a_k) = \Xi_k(b_k))]$$

Cette notion nous amène alors au résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition précédente :

Proposition 9. *Toute suite $(\Xi_k)_k$ compatible et formellement contractante permet de définir un unique opérateur formel $\hat{\Xi} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$, qui est $\frac{1}{2}$ -contractant pour d . Réciproquement, tout opérateur $\hat{\Xi} : \hat{\mathcal{A}} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$, $\frac{1}{2}$ -contractant pour la métrique d , permet de définir une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ compatible et formellement contractante.*

Remarque : Par définition de l'espace $\mathcal{A}_{-1}$, la propriété de contraction formelle contient deux résultats :

- Pour $k = 0$: Les images de deux points distincts de $\mathcal{A}_0$ par Ξ_0 sont les mêmes.
- Pour $k \geq 1$: On retrouve le pendant formel de la propriété "topologique" de contraction, avec une constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$.

Tous les éléments du cadre formel étant définis, nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental :

Théorème 8. *Pour toute suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ compatible et formellement contractante, il existe une unique série formelle $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$, telle que*

$$\hat{\Xi}(\hat{a}) = \hat{a}$$

Démonstration du théorème :

Ce résultat est une conséquence directe du théorème de point fixe de Picard, car l'opérateur formel $\hat{\Xi}$, défini à partir de la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$, est contractant dans l'espace métrique complet $(\hat{\mathcal{A}}, d)$.

□

Dans la section qui suit nous allons traiter de la correspondance entre le cadre formel et le cadre topologique. Elle sera suivie par une présentation de la manière dont le théorème 8 sera appliqué dans toute la fin du manuscrit.

Nota :

Dans les deux sections suivantes, nous noterons τ le paramètre de perturbation.

En fonction du contexte de l'équation considérée, il représentera le paramètre ε ou le paramètre η .

4.3 Correspondance entre le cadre formel et le cadre topologique

Dans cette section, nous allons présenter de manière générale la façon dont nous appliquerons le cadre formel défini précédemment pour en déduire des propriétés topologiques d'approximation asymptotique.

Le théorème principal de cette section est celui qui sera appliqué afin d'implémenter, en pratique, le développement asymptotique de la solution canard.

Nous nous donnons une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ où, pour tout entier k , Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, que nous supposons compatible.

Selon la proposition 9, cette suite admet une limite projective $\hat{\Xi}$ définie de l'espace métrique complet $\hat{\mathcal{A}}$ dans lui-même, qui est contractante si la suite $(\Xi_k)_k$ est formellement contractante. Enfin, selon le théorème 8, $\hat{\Xi}$ admet un point fixe $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$.

Dans cette section, nous allons montrer que $\hat{a}$ peut être vu comme le développement asymptotique d'une quantité "topologique".

Afin de représenter de façon générale l'expression " $\in \circ_{\tau \rightarrow 0}(\tau^k)$ ", nous définissons une suite d'espaces vectoriels $(\mathfrak{D}_k)_k$ satisfaisant à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathfrak{D}_{k+1} \subset \mathfrak{D}_k$$

Et, sur ces espaces, nous définissons, pour tout entier k , une application $\sim$, définie de $\mathcal{A}_k$ dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$ contenant $\mathfrak{D}_0$. L'application $\sim$ dépend de l'entier k .

Dans toute la fin de cette section nous prendrons l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H1) : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall a_{k+1} \in \mathcal{A}_{k+1}, \widetilde{a_{k+1}} - \pi_k(a_{k+1}) \in \mathfrak{D}_k$.

Par commodité, nous notons $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ l'ensemble image de $\mathcal{A}_k$ par l'application $\widetilde{}$, et nous adopterons la définition suivante :

Définition 12. *On dit que $\hat{a} = (a_k)_k \in \hat{\mathcal{A}}$ est un **pré-développement asymptotique** de $a \in \mathcal{E}$ si, pour tout entier k ,*

$$a - \widetilde{a_k} \in \mathfrak{D}_k$$

Dans cette définition, nous avons adopté le suffixe "pré" afin de souligner d'éventuels problèmes d'unicité. Pour cette raison, dans ce qui suit, nous serons amenés à prendre parfois l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H2) : Pour tout entier k , tout point $a_k \in \mathcal{A}_k$ qui satisfait à $\widetilde{a_k} \in \mathfrak{D}_k$ est nul.

En pratique cette hypothèse équivaudra à dire que, pour tout entier k , la famille engendrant $\mathfrak{D}_k$ est asymptotiquement libre, au sens précisé dans l'introduction.

Proposition 10. *Sous l'hypothèse (H2), tout pré-développement asymptotique d'un point $a \in \mathcal{E}$ est unique, il est appelé **développement asymptotique**.*

Avant de démontrer le théorème qui est au cœur de la correspondance entre les cadres formels et topologiques, nous adoptons comme définition :

Définition 13. *On dit que la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ est un **pendant formel** d'un opérateur topologique $\Xi : D \subset \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ si et seulement si, pour tout $(a_k)_k \in \hat{\mathcal{A}}$, et pour tout entier k :*

- $\widetilde{a_k}$ appartient au domaine de définition de Ξ .
- $\Xi(\widetilde{a_k}) - \Xi_k(a_k) \in \mathfrak{D}_k$

Cette définition nous amène immédiatement au résultat suivant :

Théorème 9. *Supposons que la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ soit compatible et un pendant formel d'un opérateur topologique Ξ défini de $\mathcal{E}$ dans lui-même.*

*Si Ξ est **D-contractant**, c'est à dire qu'il satisfait à*

$$\forall (a, b) \in \mathcal{E}^2, \forall k \in \mathbb{N}, [(a - b \in \mathfrak{D}_{k-1}) \Rightarrow (\Xi(a) - \Xi(b) \in \mathfrak{D}_k)]$$

Alors la suite $(\Xi_k)_k$ est formellement contractante.

Enfin, nous avons le résultat suivant :

Proposition 11. *Sous l'hypothèse (H2), tout pendant formel $(\Xi_k)_k$ d'un opérateur topologique Ξ , défini de $\mathcal{E}$ dans lui-même, est unique.*

Muni de cet arsenal, nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental qui sera au cœur de l'implémentation des développements asymptotiques de la solution canard :

Théorème 10. *Sous l'hypothèse (H1), si l'on suppose donnée une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$, où Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, que l'on suppose compatible. Et si, de plus, on suppose que $(\Xi_k)_k$ est un pendant formel d'un opérateur topologique $\mathcal{D}$ -contractant Ξ , défini de $\mathcal{E}$ dans lui-même, qui admet un point fixe a .*

Alors le point fixe $\hat{a} = (a_k)_k$ de l'opérateur formel $\hat{\Xi}$ est un pré-développement asymptotique du point fixe a de Ξ .

Si, de plus, on prend l'hypothèse (H2), alors il s'agit du développement asymptotique du point a .

Démonstration du théorème :

Par définition, cela revient à démontrer que, pour tout entier k :

$$a - \tilde{a}_k \in \mathcal{D}_k$$

Ce que nous allons faire par récurrence sur $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Rappelons que le théorème 9 montre que la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ est formellement contractante.

Par suite, l'existence de $\hat{a} = (a_k)_k$ est garantie par le théorème 8.

La propriété d'initialisation est trivialement satisfaite lorsque $k = -1$.

Nous supposons donc, par hypothèse de récurrence, que pour un entier k fixé

$$a - \tilde{a}_k \in \mathcal{D}_k$$

Comme $\hat{a}$ (resp. a) est le point fixe de $\hat{\Xi}$ (resp. Ξ) nous en déduisons que

$$a - \widetilde{a_{k+1}} = \Xi(a) - \widetilde{\Xi_{k+1}(a_{k+1})}$$

Ce qui nous permet d'écrire que

$$a - \widetilde{a_{k+1}} = (\Xi(a) - \Xi(\widetilde{a_{k+1}})) + (\Xi(\widetilde{a_{k+1}}) - \widetilde{\Xi_{k+1}(a_{k+1})})$$

Comme, par hypothèse de récurrence, on a $a - \tilde{a}_k \in \mathcal{D}_k$ et que, selon l'hypothèse (H1), $\widetilde{a_{k+1}} - \tilde{a}_k = \widetilde{a_{k+1}} - \pi_k(\widetilde{a_{k+1}}) \in \mathcal{D}_k$, on en déduit que $a - \widetilde{a_{k+1}}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{D}_k$.

Ainsi, et comme l'opérateur Ξ est $\mathfrak{D}$ -contractant, on en déduit que $\Xi(a) - \Xi(\widetilde{a_{k+1}}) \in \mathfrak{D}_{k+1}$.

De plus, et comme $(\Xi_k)_k$ est un pendant formel de Ξ , alors $\Xi(\widetilde{a_{k+1}}) - \widetilde{\Xi_{k+1}(a_{k+1})} \in \mathfrak{D}_{k+1}$.

Ainsi, nous en déduisons que

$$a - \widetilde{a_{k+1}} \in \mathfrak{D}_{k+1}$$

ce qui conclut la démonstration par récurrence

□

Dans la section suivante, nous allons présenter la manière dont ce dernier résultat sera utilisé afin d'implémenter le (pré-)développement asymptotique de la solution canard. Elle débutera par la présentation des ensembles $\mathcal{A}_k$ qui serviront de cadre à la mise en place de cette correspondance.

4.4 Mise en œuvre pratique de la correspondance

Dans cette section, nous présentons succinctement le point de vue adopté pour construire les ensembles pertinents qui nous permettront de lier l'étude topologique présentée dans le chapitre 2 au théorème 10 démontré dans la section précédente. À la suite de cela, nous présenterons la manière dont la correspondance entre le cadre topologique du chapitre 2 et le cadre formel de la section 4.2 sera mise en œuvre.

4.4.1 Définition des ensembles pertinents

Afin de mettre en place la correspondance, nous avons signalé dans l'introduction que la construction des ensembles $\mathcal{A}_k$ passe par la donnée d'une famille finie de symboles, choisis dans un ensemble dénombrable fixé, que nous noterons φ . Ce qui nous amène à définir $\sim$ comme étant l'application qui substitue à chacun de ces symboles une fonction des variables t et τ , dont le choix sera lié à l'équation étudiée.

Par suite, les espaces vectoriels $\mathcal{A}_k$ seront tels que $\widetilde{\mathcal{A}}_k$ est inclus dans l'espace vectoriel des fonctions de t et τ . En pratique, pour tout entier k , l'ensemble $\mathcal{A}_k$ sera l'espace vectoriel qui contient les termes principaux d'ordre k des développements asymptotiques en puissances de τ , et $\mathcal{C}_k$ sera l'espace vectoriel des termes d'ordre exactement k .

Rappelons que, par définition, l'ensemble formel $\hat{\mathcal{A}}$ est tel que $(\hat{\mathcal{A}}, (\hat{\pi}_k)_k)$ est une limite projective de $((\mathcal{A}_k, \pi_k))_k$, si π_k désigne la projection naturelle de $\mathcal{A}_{k+1}$ dans $\mathcal{A}_k$.

Dans la suite nous utiliserons la définition alternative de $\hat{\mathcal{A}}$, dans laquelle ses éléments sont présentés comme des séries (i.e. les éléments seront $\sum_k a_k$ au lieu de $(s_k)_k$ (où $s_k = \sum_{l=0}^k a_l$)).

Dans l'introduction, nous avons vu que la définition des ensembles $\mathcal{A}_k$ passe par donnée d'un ordre associé à l'approximation asymptotique en puissances de τ de chacun des monômes. Ce qui revient à choisir, tout d'abord, un ensemble de multi-indices I inclus dans $I \subset \mathbb{N} \times (\bigcup_n \mathbb{N}^n) \times \mathbb{N}$.

Dans notre cas, les décompositions effectuées montrent qu'il est naturel que les ensembles $\mathcal{A}_k$ soient considérés comme des espaces vectoriels engendrés par des termes constitués de puissances de t , τ , et des fonctions intermédiaires φ .

Et c'est pourquoi nous nous intéresserons aux ensembles construits à partir de termes, que nous appellerons *monômes*, du type

$$(\tau^n, t^i \varphi^J \tau^l) \text{ où } n \in \mathbb{N}, \text{ et } (i, J, l) \in I \text{ est tel que } |J| \text{ est fini}$$

où la première (resp. seconde) composante permettra d'implémenter le développement asymptotique du paramètre (resp. de la fonction) canard.

Définition 14. Nous appelons **ordre**, toute application $\blacktriangleright : I \rightarrow \mathbb{N}$ satisfaisant aux hypothèses

- $\forall (i, l) \in \mathbb{N}^2, \blacktriangleright(i, 0, l) = l$
- $\forall ((i, J, l), (i', J', l')) \in I \times I$, tel que $|J|$ et $|J'|$ sont finis,

$$\blacktriangleright(i + i', J + J', l + l') \geq \blacktriangleright(i, J, l) + \blacktriangleright(i', J', l')$$

Par commodité, et sans risque d'ambiguïté, nous noterons $\blacktriangleright(t^i \varphi^J \tau^l) := \blacktriangleright(i, J, l)$.

Si la seconde condition est une condition naturelle, la première se trouve être nécessaire car, quel que soit le cadre étudié, les termes de la forme $t^i \tau^l$ auront toujours un ordre $\blacktriangleright$ égal à l . C'est à dire qu'ils ont une approximation asymptotique de leur pendant topologique égale à $\mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^l)$.

Étant données les particularités du cadre que nous allons définir dans la suite, nous arrêtons ici de travailler en toute généralité. Nous allons donc prendre des hypothèses de travail liées aux cadres particuliers sur lesquels nous appliquerons ce cadre.

Nous supposons donc que le choix de φ permet de satisfaire à l'hypothèse suivante :

Hypothèse de travail :

Pour tout entier k , l'ensemble $\{(i, J, l) \in I; |J| \geq 1 \text{ et } \blacktriangleright(i, J, l) = k\}$ est fini.

Ce qui nous amène à définir, pour tout entier k , les ensembles

$$\mathcal{B}_k := \{t^i \varphi^J \tau^l : |J| \geq 1, \blacktriangleright(i, J, l) = k\}$$

$$\mathcal{C}_k := \mathbb{R} \cdot \tau^k \times (\mathcal{C}^\infty([-t_0, t_0]) \cdot \tau^k \oplus \text{Vect} \mathcal{B}_k)$$

Remarque : Le but de cette hypothèse de travail est de pouvoir donner du sens au pendant topologique (i.e. l'image par $\sim$) d'éléments de ces ensembles, c'est à dire les ensembles obtenus par la substitution des symboles φ par une famille de fonctions fixée.

Par suite, nous pouvons définir, pour tout entier k , les ensembles

$$\mathcal{A}_k := \mathcal{A}_{k-1} \oplus \mathcal{C}_k = \oplus_{l \leq k} \mathcal{C}_l \text{ (où } \mathcal{A}_{-1} := \mathcal{C}_{-1} := \{(0, 0)\} \text{)}$$

Par définition de $\sim$, ces ensembles nous amènent à définir les ensembles $\mathfrak{D}_k$ par

$$\mathfrak{D}_k := \left\{ (\tilde{\alpha}, \tilde{u}) \in \widetilde{\bigcup_l \mathcal{A}_l}; \tilde{\alpha} = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^{k+1}), \|\tilde{u}(\cdot, \tau)\| = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^{k+1}) \right\}$$

Proposition 12. *Pour ce choix d'ensembles, l'hypothèse (H1) vue dans la section précédente est satisfaite.*

De plus, tout opérateur topologique Ξ_τ contractant, avec une constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau)$, est $\mathfrak{D}$ -contractant et admet un point fixe.

Enfin nous noterons, pour tout entier k , π_k la projection naturelle de l'ensemble $\mathcal{A}_{k+1}$ dans $\mathcal{A}_k$. L'image par π_k de tout élément d'ordre $k+1$, sera donc 0.

Remarque :

La question du choix de la famille φ de fonctions intermédiaires qui permet à l'ordre $\mathfrak{X}$ de satisfaire, pour tous les termes u et v , de la forme $t^i \varphi^J \tau^l$, l'inégalité inverse

$$\mathfrak{X}(uv) \leq \mathfrak{X}(u) + \mathfrak{X}(v)$$

n'est pas anodine. Cette question est fortement liée au caractère asymptotiquement libre de la famille $(\mathcal{A}_k)_k$, qui correspond à l'hypothèse (H2).

4.4.2 Implémentation des développements asymptotiques

Maintenant que les résultats et les définitions nécessaires à la mise en place de cette correspondance sont établis, nous allons préciser dans cette partie la méthodologie qui sera employée afin d'appliquer cette correspondance aux équations étudiées pour implémenter le développement asymptotique de la solution canard.

Étant donnée la forme particulière des ensembles $\mathcal{A}_k$ que nous avons choisi, la définition de développements asymptotiques se récrit sous la forme :

Définition 15. *Un couple (α, u) , où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u : (t, \tau) \rightarrow u(t, \tau)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, admet comme **pré-développement asymptotique** $(\sum_k \alpha_k, \sum_k u_k) \in \hat{\mathcal{A}}$ si, pour tout entier n , $(\alpha_n, u_n) \in \mathcal{C}_n$, et*

$$\left| \alpha - \sum_{n=0}^k \tilde{\alpha}_n(\tau) \right| = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^{k+1}), \quad \sup_{t \in [-t_0, t_0]} \left\{ \left| u(t, \tau) - \sum_{n=0}^k \tilde{u}_n(t, \tilde{\varphi}(t, \tau), \tau) \right| \right\} = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^{k+1})$$

On dit qu'une fonction (α, u) admet un **développement asymptotique** si elle admet un unique pré-développement asymptotique.

Dans notre cas, on aura $\alpha_n = \check{\alpha}_n \tau^n$ et $u_n = \check{u}_n(t, \varphi) \tau^n$.

Afin de montrer l'existence d'un pré-développement asymptotique de la solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$, il suffit donc de choisir une famille φ de fonctions intermédiaires permettant de construire une suite d'ensembles $(\mathcal{A}_k)_k$. Puis de définir, à partir de l'opérateur topologique Ξ_τ étudié dans le chapitre 2, une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ qui est un pendant formel de Ξ_τ et compatible, satisfaisant donc aux hypothèses du théorème 10.

Enfin l'unicité d'écriture de tels développements, qui équivaut à l'hypothèse (H2), se déduit de la propriété suivante :

Proposition 13. *Si la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est **asymptotiquement libre**, c'est à dire satisfait à*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall a_k \in \mathcal{A}_k, \left[(\tilde{a}_k = \mathcal{O}_{\tau \rightarrow 0}(\tau^{k+1})) \Rightarrow a_k = 0 \right]$$

alors tout pré-développement asymptotique d'une fonction $\tilde{u}$ que l'on implémente est en fait son unique développement asymptotique.

Remarque : Montrer que $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre revient à montrer que le seul pré-développement asymptotique de la fonction nulle est le développement nul.

L'ensemble des résultats que nous venons de présenter nous permettent ainsi de réduire la mise en place de la correspondance entre le théorème 8 et les objets topologiques en deux étapes correspondant à celles du théorème 10 :

(1-) Montrer que le choix de fonctions intermédiaires φ (et donc des ensembles $\mathcal{A}_k$) permet de définir, à partir de l'opérateur topologique contractant Ξ_τ , une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$, où Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, qui est un pendant formel de Ξ_τ et compatible. Ces deux propriétés seront une conséquence directe de la façon dont ces opérateurs seront construits dans les cas étudiés par la suite.

Ainsi, le théorème 10 impliquera l'**existence** de pré-développements asymptotiques pour la solution canard.

(2-) Montrer que le choix de fonctions intermédiaires φ est tel que la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est **asymptotiquement libre**.

Ainsi, la propriété énoncée précédemment impliquera l'**unicité d'écriture** du pré-développement asymptotique de la solution canard.

Dans ce dernier cas, nous dirons aussi que nous avons une *échelle asymptotique*.

Remarque :

En pratique, afin de donner un sens formel à la définition intégrale de Ξ_τ , nous substituerons à ses monômes des objets formels s'exprimant à partir de combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{A}_k$, ce qui nous permettra de construire la suite $(\Xi_k)_k$.

En revenant aux notations du chapitre 2, nous utiliserons la décomposition de Ξ_τ afin de remplacer les fonctions P et γ par leurs développements de Taylor tronqués à l'ordre k respectifs, puis les termes restants par un objet formel qui leur est associé.

Lors de la construction de ces opérateurs formels, des fonctions f telles que, dès que $\tau \rightarrow 0$,

$$\exists(c, C) \in \mathbb{R}_+^2, \forall t \in [-t_0, t_0], |f(t, \tau)| < Ce^{-ct/\tau}$$

apparaîtront. De telles fonctions sont appelées *exponentiellement décroissantes*.

Comme elles admettent pour développement asymptotique en puissances de τ le développement nul, elles seront systématiquement mises de côté lors de notre étude.

Pour conclure cette section, signalons qu'afin d'éviter des problèmes de couche limite au voisinage de la condition initiale, qui sortent du cadre de notre étude, nous appliquerons ce cadre formel à des valeurs de $t \in [-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$ (car nous sommes intéressés par l'étude d'un développement asymptotique de la solution au voisinage de 0).

Dans la fin du chapitre 4 nous allons tester cette correspondance, ce qui nous permettra de retrouver deux résultats connus :

- Tout d'abord, nous allons montrer l'existence de telles structures en implémentant ces développements asymptotiques dans le cas non dégénéré ($p = 1$) grâce à l'échelle asymptotique triviale, qui est celle qui ne comporte pas de fonctions intermédiaires. Pour l'occasion, nous remarquerons que cette structure nous permet de retrouver l'existence et l'unicité d'écriture d'un développement en puissances de ε , à coefficients réguliers, des solutions canard dans ce cas particulier.

- La dernière section sera dédiée au cas très à part où $p = 0$, qui sort du cadre étudié jusqu'ici. Le but de cette section étant d'évoquer succinctement le traitement des solutions admettant une couche limite.

En appliquant le cadre mis en place, nous retrouverons l'existence et l'unicité d'écriture de développements asymptotiques particuliers des solutions dans le cas où l'on étudie une solution longeant une courbe lente attractive, après une couche limite.

Cette étude nous amènerait, dans le cas général ($p \geq 3$ impair), à l'implémentation d'un développement asymptotique de la solution canard admettant une couche limite (i.e. ne satisfaisant pas à $u(\pm t_0, \eta) = u_0(\pm t_0, \eta)$).

4.5 Application au cas non dégénéré

Dans toute cette section, nous étudierons le cas $p = 1$.

Dans ce cas exceptionnel nous n'utiliserons pas de fonctions intermédiaires pour la mise en place de la correspondance. De plus, afin d'éviter des problèmes de couche limite, nous supposons dans toute cette section que $t \in [-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$.

L'étude menée dans cette section montre que la notion d'échelle asymptotique évoquée précédemment a du sens. Nous allons en effet en exhiber une, qui se trouve être l'échelle asymptotique élémentaire, construite sans fonctions intermédiaires. Dans le chapitre 5 nous présenterons quelques pistes pour définir d'autres échelles asymptotiques qui permettent d'implémenter un pré-développement asymptotique de la solution canard dans le cas dégénéré ($p \geq 3$).

En l'absence de fonctions intermédiaires, l'ordre que l'on considèrera sera naturellement

$$\mathfrak{X}(t^i \eta^l) = l$$

Et ainsi, pour tout entier k , les ensembles de référence seront

$$\mathcal{A}_k := \left\{ \left(\sum_{n=0}^k a_n \eta^n, \sum_{m=0}^k u_m(t) \eta^m \right); \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, a_n \in \mathbb{R}, u_m \in \mathcal{C}^\infty([-t_0, t_0], \mathbb{R}) \right\}$$

Rappelons que l'on note $\tilde{\mathcal{A}}_k$ l'image, par l'application $\sim$, de l'ensemble $\mathcal{A}_k$. Par définition de $\sim$, cela signifie que tout point de $\tilde{\mathcal{A}}_k$ admet un développement asymptotique en puissances de η qui appartient à $\mathcal{A}_k$, qui est en fait son développement asymptotique tronqué à l'ordre k .

Remarquons que la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ forme, de manière immédiate, une famille asymptotiquement libre. Ainsi tout pré-développement asymptotique en puissances de η de la solution canard implémenté s'écrira de manière unique.

Pour ces raisons, la suite de cette section est principalement dédiée à l'étude de l'existence d'un pré-développement asymptotique de la forme $\sum_n b_n \eta^n$ (resp. $\sum_n u_n(t) \eta^n$) du paramètre (resp. de la fonction) canard de (4.1), ce qui revient à construire une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ compatible qui soit un pendant formel de Ξ_η .

Pour construire cette suite, nous nous donnerons, pour tout entier k , un couple $(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k) \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ qui, par définition de $\sim$, est associé à $(\hat{\beta}_k, \hat{v}_k) \in \mathcal{A}_k$. À partir de ce couple, nous construirons un couple $(\hat{\alpha}_k, \hat{u}_k) \in \mathcal{A}_k$ en utilisant l'expression topologique de $(\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k) = \Xi_\eta(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k)$, qui nous permettra de définir l'opérateur Ξ_k , en posant $\Xi_k(\hat{\beta}_k, \hat{v}_k) = (\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k)$.

Comme $p = 1$, nous avons nécessairement $L = 0$. Ce qui nous amène à adopter comme notations :

$$\hat{\gamma} = \eta^2 \hat{\underline{\gamma}} \text{ et } \hat{w} = \eta \hat{\underline{w}}$$

Au vu des conditions satisfaites par l'équation préparée, nous étudions ainsi les solutions canard d'équations de la forme

$$\eta^2 \dot{u} = 2tu + \alpha(1 + \gamma(t, \alpha)) + \eta^2 P(t, u, \alpha, \eta)$$

où $t \in [-t_1, t_1]$, u est une fonction réelle des variables t et η , $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta \in]0, \eta_0[$, γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t et α , telle que $\gamma(0, 0) = 0$, et P est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De même qu'au chapitre précédent, nous étudierons en fait l'équation :

$$\eta^3 \dot{\underline{u}} = 2\eta t \underline{u} + \eta^2 \underline{\alpha}(1 + \gamma(t, \eta^2 \underline{\alpha})) + \eta^2 P(t, \eta \underline{u}, \eta^2 \underline{\alpha}, \eta) \text{ , où } \underline{u}(\pm t_0, \eta) = 0 \quad (4.1)$$

qui nous permet de définir l'opérateur Ξ_η par $(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \Xi_\eta(\underline{\beta}, \underline{v})$ si et seulement si

$$\begin{cases} 0 = \underline{\alpha} \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi + \int_{-t_0}^{t_0} \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \right) + \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}, \eta) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \\ \underline{u}(t, \eta) = \frac{1}{\eta^2} e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t (\eta \underline{\alpha} (1 + \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha})) + \eta P(\xi, \eta \underline{v}(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}, \eta)) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \end{cases}$$

Rappelons que le théorème démontré dans le chapitre 2 affirme que Ξ_η est contractant, de constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$. Ce qui implique l'existence d'une solution canard de cette équation.

Avant de construire la suite $(\Xi_k)_k$, nous remarquons tout d'abord que, par parité puis par le changement de variable $s = \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2$,

$$\int_{-t_0}^{t_0} \xi^k e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi = \begin{cases} \eta^{k+1} \int_0^{(t_0/\eta)^2} s^{(k-1)/2} e^{-s} ds & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Comme

$$\int_0^{(t_0/\eta)^2} s^{(k-1)/2} e^{-s} ds = \int_0^{+\infty} s^{(k-1)/2} e^{-s} ds - \int_{(t_0/\eta)^2}^{+\infty} s^{(k-1)/2} e^{-s} ds$$

et que, par le changement de variable $s = t + \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2$,

$$\int_{(t_0/\eta)^2}^{+\infty} s^{(k-1)/2} e^{-s} ds = e^{-(t_0/\eta)^2} \int_0^{+\infty} \left(t + \left(\frac{t_0}{\eta}\right)^2\right)^{(k-1)/2} e^{-t} dt$$

nous en déduisons que $\int_{-t_0}^{t_0} \xi^k e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$ égale

$$\begin{cases} \eta^{k+1} \left(\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) - e^{-(t_0/\eta)^2} \int_0^{+\infty} \left(t + \left(\frac{t_0}{\eta}\right)^2\right)^{(k-1)/2} e^{-t} dt \right) & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour finir, rappelons que, par définition de $\underline{\alpha}$, la notation

$$\underline{u}(t, \eta) = \frac{1}{\eta^2} e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t (\eta \underline{\alpha} (1 + \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha})) + \eta P(\xi, \eta \underline{v}(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}, \eta)) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$$

est valide pour tout $t \in [-t_1, t_1]$, au lieu de $[-t_1, 0]$.

4.5.1 Définition de la suite d'opérateurs

Théorème 11. *Nous pouvons définir une correspondance entre le cadre topologique, et le cadre formel sous-jacent. C'est à dire qu'il existe une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$, où pour tout entier k l'opérateur Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, qui est un pendant formel de Ξ_η compatible.*

Démonstration du théorème :

Dans toute la démonstration, nous fixons un entier k , et nous prenons $(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k) \in \tilde{\mathcal{A}}_k$. Ce couple est, par définition de $\tilde{\mathcal{A}}_k$, associé à $(\hat{\beta}_k, \hat{v}_k) \in \mathcal{A}_k$. Enfin, nous noterons

$$(\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k) := \Xi_\eta(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k)$$

Étude du pendant formel de $\underline{\alpha}_k$:

Par définition de l'opérateur Ξ_η , le paramètre $\underline{\alpha}_k$ est solution de l'équation

$$0 = \underline{\alpha}_k \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi + \int_{-t_0}^{t_0} \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \right) + \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$$

Dans cette équation, nous substituons aux fonctions γ et P , qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, leurs développements de Taylor tronqués à l'ordre k . Puis, nous substituons à $\underline{\beta}_k$ (resp. $\underline{v}_k$) le pendant topologique de $\hat{\beta}_k$ (resp. $\hat{v}_k$). La proposition 26 donnée en annexe nous permet alors d'approximer l'équation obtenue par une équation de la forme

$$E(\underline{\alpha}_k, \eta) = 0$$

où E est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ses variables.

De plus, la formule exposée précédemment montre que tous les termes de E contenant $\underline{\alpha}_k$ sont asymptotiquement dominés par $\underline{\alpha}_k \int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$. Ainsi, et selon le théorème des fonctions implicites, nous en concluons que le paramètre $\underline{\alpha}_k$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en η . Nous noterons $\hat{\underline{\alpha}}_k$ le terme principal de son développement de Taylor tronqué à l'ordre k .

Étude du pendant formel de $\underline{u}_k$:

Par définition de l'opérateur Ξ_η , la fonction $\underline{u}_k$ satisfait, pour tout t et η à

$$\underline{u}_k(t, \eta) = \frac{1}{\eta^2} e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t (\eta \underline{\alpha}_k (1 + \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k)) + \eta P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta)) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$$

Remarquons qu'en $\eta = 0$ l'égalité

$$0 = \underline{\alpha}_k \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi + \int_{-t_0}^{t_0} \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \right) + \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$$

implique que le paramètre $\underline{\alpha}_k$ calculé en $\eta = 0$ (en tant que fonction de η) est égal à $-P(0, 0, 0, 0)$. Par abus de langage, nous noterons $\underline{\alpha}_k(0)$ cette valeur.

Ainsi, nous en déduisons que l'intégrande de l'intégrale définissant $\underline{u}_k$ peut s'écrire

$$\left(\eta [\underline{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k(0)] + \eta \underline{\alpha}_k \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) + \eta \left[P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) - P(0, 0, 0, 0) \right] \right) e^{-(\xi/\eta)^2}$$

L'estimation de l'intégrale de ces trois termes fait apparaître un η^2 en facteur, ce qui montre que le $\frac{1}{\eta^2}$ qui apparaît en facteur de $\underline{u}_k$ est un artefact d'écriture que l'on ne retrouvera pas au final.

À partir de l'équation satisfaite par le paramètre $\underline{\alpha}_k$, nous déduisons que

$$\underline{\alpha}_k = -\underline{\alpha}_k \frac{\int_{-t_0}^{t_0} \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi} - \frac{\int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi}$$

En injectant cette formule dans la définition de $\underline{u}_k$, nous arrivons ainsi à

$$\begin{aligned} \underline{u}_k(t, \eta) &= \frac{1}{\eta^2} e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t \eta \underline{\alpha}_k \left(\gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) - \frac{\int_{-t_0}^{t_0} \gamma(\xi, \eta^2 \underline{\alpha}_k) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(s/\eta)^2} ds} \right) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi + \dots \\ &+ \frac{1}{\eta^2} e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t \eta \left(P(\xi, \eta \underline{v}_k(\xi, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) - \frac{\int_{-t_0}^{t_0} P(s, \eta \underline{v}_k(s, \eta), \eta^2 \underline{\beta}_k, \eta) e^{-(s/\eta)^2} ds}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(s/\eta)^2} ds} \right) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi \end{aligned}$$

En substituant alors aux fonctions γ et P leurs développements de Taylor tronqués à l'ordre k respectifs, puis à $\underline{\beta}_k$ (resp. $\underline{\alpha}_k, \underline{v}_k$) le pendant topologique de $\hat{\beta}_k$ (resp. $\hat{\alpha}_k, \hat{v}_k$), nous réduisons cette étude aux termes de la forme

$$(t, \eta) \mapsto e^{(t/\eta)^2} \int_{-t_0}^t \eta \left(w_n(\xi) \eta^n - \frac{\int_{-t_0}^{t_0} w_n(s) \eta^n e^{-(s/\eta)^2} ds}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(s/\eta)^2} ds} \right) e^{-(\xi/\eta)^2} d\xi$$

où $w_n \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$, que le lemme suivant permet de contrôler :

Lemme 3. *Pour toute fonction w de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t , cette fonction admet un pendant formel dans $\hat{\mathcal{A}}$.*

Preuve du lemme :

Il suffit de montrer que, pour tout entier K , cette fonction a un représentant naturel dans $\mathcal{A}_K$. Nous fixons donc un entier strictement positif K .

Commençons par adopter la notation

$$\lambda_w := \frac{\int_{-t_0}^{t_0} w(s) \eta^n e^{-(s/\eta)^2} ds}{\int_{-t_0}^{t_0} e^{-(s/\eta)^2} ds},$$

Comme $t \in [-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$, nous ramenons notre étude à la solution $\mathcal{I}_\eta(w)$ de l'équation

$$\eta^2 \dot{u} = 2tu + \eta^2 \lambda_w + \eta^2 w, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t, \eta) = 0$$

car la différence entre ces deux fonctions est exponentiellement petite, donc admet un développement asymptotique en puissances de η nul.

Une étude de cette équation montre que, pour toute fonction w , on a

$$\mathcal{I}_\eta(Xw) = \frac{1}{2}\eta^2 (\mathcal{I}_\eta(\dot{w}) - w) \quad (4.2)$$

En écrivant le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction w nous arrivons, par linéarité de $\mathcal{I}_\eta$, à :

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = w_0 \mathcal{I}_\eta(1) + w_1 \mathcal{I}_\eta(X) + \mathcal{I}_\eta(XR(X))$$

où w_0 et w_1 sont deux réels, que l'équation (4.2) nous permet de récrire

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = w_0 \mathcal{I}_\eta(1) + w_1 \mathcal{I}_\eta(X) + \frac{1}{2}\eta^2 (\mathcal{I}_\eta(\dot{R}) - R)$$

Comme, par calculs, $\mathcal{I}_\eta(1) = 0$ et que $\mathcal{I}_\eta(X) = -\frac{1}{2}\eta^2$, alors l'itération successive de ce procédé nous amène, pour tout entier q , à une équation du type

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = \sum_{m=1}^q \varsigma_m \eta^{2m} - \sum_{m=1}^q R_m \eta^{2m} + \mathcal{I}_\eta(\Lambda) \eta^{2q}$$

où, pour tout $m \in \{1, \dots, q\}$, $\varsigma_m \in \mathbb{R}$, et les fonctions R_m et Λ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$.

En posant alors $q := \min\{m \in \mathbb{N}; 2m > K\}$, le représentant de $\mathcal{I}_\eta(w(X))$ dans $\mathcal{A}_K$ est donc exactement, par construction de $\mathcal{A}_k$,

$$\sum_{m=1}^q \varsigma_m \eta^{2m} - \sum_{m=1}^{q-1} R_m \eta^{2m} \in \mathcal{A}_K$$

□

Quitte à effectuer des troncatures à l'ordre k , ce lemme nous amène à la conclusion que $\underline{u}_k$ admet un pendant formel, noté $\hat{\underline{u}}_k$, qui est tel que $(\hat{\underline{\alpha}}_k, \hat{\underline{u}}_k) \in \mathcal{A}_k$.

Par suite, nous pouvons définir un opérateur Ξ_k , défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, en posant

$$\Xi_k(\hat{\underline{\beta}}_k, \hat{\underline{v}}_k) := (\hat{\underline{\alpha}}_k, \hat{\underline{u}}_k)$$

Par construction, la suite $(\Xi_k)_k$ est un pendant formel de Ξ_η qui est compatible.

□

Nous avons ainsi construit une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 10. Par application de ce théorème, nous en déduisons l'existence de pré-développements asymptotiques de la solution canard.

4.5.2 Application de la correspondance

Dans la partie précédente, nous avons construit la suite d'opérateurs formels $(\Xi_k)_k$ nécessaires à la mise en place de la correspondance.

Comme, de plus, la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, on en déduit l'unicité d'écriture des pré-développements asymptotiques que cette correspondance implémente. Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Théorème 12. *La solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$ de (4.1) admet un unique développement asymptotique de la forme $(\sum_l a_l \eta^l, \sum_l u_l(t) \eta^l)$, où les fonctions u_l sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t .*

Remarquons que nous avons ainsi démontré que la solution canard de (4.1) admet un développement asymptotique en puissances de η , à coefficients réguliers en t . Ce résultat étant déjà bien connu [18][54].

Pour conclure, la présence quasi systématique de termes η^2 nous amène à la question annexe de l'étude du développement asymptotique en puissances de ε , au lieu de $\eta = \varepsilon^{1/2}$, de la solution canard d'équations de la forme

$$\varepsilon \dot{u} = 2tu + \alpha(1 + \gamma(t, \alpha)) + \varepsilon P(t, u, \alpha, \varepsilon)$$

dans lesquelles nous supposons que la fonction P est développable en puissances de ε et non pas η .

Et, effectivement, en effectuant une étude identique, il est possible de montrer l'existence d'un développement asymptotique en puissances de ε , à coefficients réguliers en t , de la solution canard. Ce dernier résultat étant déjà connu, car supposer $p = 1$ revient à étudier le cas simple où le point tournant n'est pas dégénéré, qui est un cas particulier des travaux effectués sur les solutions surstables dans le cadre complexe.

4.6 Application aux développements asymptotiques combinés

Dans toute cette section, nous étudierons le cas $p = 0$ (on a donc $\eta = \varepsilon$).

Dans ce cas particulier, $t = 0$ n'est pas un point tournant de l'équation étudiée.

Pour cette raison, nous allons montrer que la correspondance mise en place dans la section 4.4, permet de retrouver l'existence d'un développement asymptotique combiné, tel qu'il est défini dans [6], de toute fonction admettant une couche limite dans le cas où l'équation étudiée admet une courbe lente attractive.

Quitte à effectuer une translation, nous supposons que le saut s'effectue en $t = 0$.

Cette étude ne consistant pas en une « chasse au canard », mais en l'étude d'une couche limite, nous n'utiliserons pas de paramètre α et nous supposons que la courbe lente est attractive sur tout un intervalle $[0, t^\#]$.

Remarquons que, sous ces hypothèses, l'existence d'une solution ayant pour condition initiale $u(0) = u^{(0)} \neq 0$ et qui longe la courbe lente est garantie sans recourir au théorème du chapitre 2. Malgré tout, nous allons utiliser une version similaire de l'opérateur Ξ_ε , défini sans paramètre et sans le changement de variable fonctionnel $w = \varepsilon \underline{w}$.

Remarque : Le résultat que nous allons montrer dans cette section explique le fait que, dans le cas général, nous restreignons notre étude à un intervalle $[-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$: En procédant ainsi, nous évitons l'étude d'une éventuelle couche limite de la fonction canard, car l'étude menée est particulièrement centrée au voisinage de 0.

Dans cette section, nous appliquerons donc la correspondance mise en place dans les sections précédentes. Elle nous permettra d'implémenter un développement asymptotique combiné en puissances de ε des solutions de telles équations dont la condition initiale, en $t = 0$, est éloignée de la courbe lente.

Pour commencer, revenons sur la mise sous forme préparée vue au chapitre 2, que nous adapterons à notre problématique :

À partir de l'équation générale, $\varepsilon \dot{u} = \Psi(t, u, \varepsilon)$, nous prenons comme hypothèse l'existence d'une courbe lente sur laquelle nous nous recentrons, ce qui implique que la fonction Ψ satisfait à $\Psi(t, 0, 0) = 0$, puis nous supposons cette courbe lente attractive. En prenant alors, tout comme pour le cas général, comme hypothèse contraignante la non-existence de termes de la forme $u^2 T(t, u)$, l'application d'une formule de Taylor d'ordre 1 à la fonction Ψ nous amène à la forme préparée suivante :

$$\varepsilon \dot{u} = -u + \varepsilon P(t, u, \varepsilon) \quad (4.3)$$

où $t \in [0, t^\#]$, u est une fonction réelle en ses variables t et ε , $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, et P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ses variables.

Nous sommes intéressés par la caractérisation de développements asymptotiques en puissances de ε de solutions de (4.3) ayant une condition initiale en $t = 0$ éloignée de la courbe lente, c'est à dire satisfaisant à $u(0, \varepsilon) = u^{(0)} \neq 0$.

La fonction $\tilde{\varphi}(t, \varepsilon) := e^{-t/\varepsilon}$, qui est la solution de l'équation (4.3) prise sans le terme $\varepsilon P(t, u, \varepsilon)$, sera la seule fonction intermédiaire que nous utiliserons pour la mise en place de la correspondance.

4.6.1 Définition de l'ordre pertinent

Rappelons que, pour définir les espaces vectoriels $\mathcal{A}_k$, nous devons définir un *ordre*, qui apparaît comme un critère nous permettant de classer les monômes $t^i \varphi^j \varepsilon^l$ en fonction de leur estimation asymptotique en puissances de ε , nous regardons donc

$$\mathfrak{X}(t^i \varphi^j \varepsilon^l) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |t^i \tilde{\varphi}(t, \varepsilon)^j \varepsilon^l|_{\infty}}{\ln \varepsilon}$$

où l'on note $|\zeta(t, \varepsilon)|_{\infty} := \sup_{t \in [0, t^{\sharp}]} |\zeta(t, \varepsilon)|$.

Cette quantité est nécessairement entière, car le terme dont on regarde la limite est, par construction, de la forme $K + f(\varepsilon)$, avec K entier et $f(0) = 0$.

Remarque : $\mathfrak{X}(t^i \varphi^j \varepsilon^l)$ est le plus grand entier k satisfaisant à

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|t^i \tilde{\varphi}(t, \varepsilon)^j \varepsilon^l|_{\infty}}{\varepsilon^k} \in]0, +\infty[\text{ (i.e. } = @ \text{ dans le langage IST)}$$

Dans le cadre particulier de cette étude, l'ordre $\mathfrak{X}$ est défini par

Proposition 14.

$$\mathfrak{X}(t^i \varphi^j \varepsilon^l) := \begin{cases} i + l & \text{si } j \geq 1 \\ l & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

En effet, si $j \geq 1$, on a $t^i \tilde{\varphi}(t, \varepsilon)^j \varepsilon^l = t^i e^{-jt/\varepsilon} \varepsilon^l$.

Et, par une étude de cette fonction lorsque $t \in [0, t^{\sharp}]$, on déduit que son maximum est atteint en $t = \frac{i}{j} \varepsilon$, que l'on suppose inférieur à $t^{\sharp}$, quitte à restreindre ε_0 , en lequel elle est égale à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\varepsilon^{i+l})$.

Dans le cas où $j = 0$, le résultat recherché est évident.

□

De manière similaire à l'étude proposée dans la section 4.5, nous donnerons comme forme particulière aux éléments de $\mathcal{A}_k$:

$$\sum_{l=0}^k \left(f_l(t) \varepsilon^l + \sum_{i=0}^l t^i h_{i,l}(\varphi) \varphi \varepsilon^{l-i} \right)$$

où toutes les fonctions f_l et $h_{i,l}$ sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, car cette forme permet de lever les ambiguïtés d'écriture dues à l'utilisation de séries infinies.

4.6.2 Existence d'un pré-développement asymptotique

Dans cette partie nous allons construire, à partir de l'opérateur Ξ_ε , la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ issue de la mise en œuvre de la correspondance :

Théorème 13. *Il existe une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$, où Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, construite à partir de Ξ_ε , qui est un pendant formel de Ξ_ε et compatible.*

Démonstration du théorème :

Pour toute fonction v des variables t et ε , la solution $u := \Xi_\varepsilon(v)$ de l'équation

$$\varepsilon \dot{u} = -u + \varepsilon P(t, v, \varepsilon) \text{ avec } u(0, \varepsilon) = u^{(0)} \in \mathbb{R}^*$$

est de la forme

$$u(t, \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} \left(\int_0^t P(\xi, v(\xi, \varepsilon), \varepsilon) e^{\xi/\varepsilon} d\xi + u^{(0)} \right)$$

Nous fixons un entier $k \in \mathbb{N}$, et supposons donné $v_k \in \tilde{\mathcal{A}}_k$, cette fonction est donc associée à $\hat{v}_k \in \mathcal{A}_k$. Enfin, nous posons $u_k := \Xi_\varepsilon(v_k)$.

En substituant à la fonction P , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le terme principal d'ordre k de son développement de Taylor puis en substituant ensuite à v_k le pendant topologique de $\hat{v}_k \in \mathcal{A}_k$, nous approximations le second terme de cette équation par

$$\begin{aligned} & e^{-t/\varepsilon} \left(\sum_{n,m,p=0}^k P_{n,m,p} \varepsilon^p \int_0^t \xi^n v(\xi, \varepsilon)^m e^{\xi/\varepsilon} d\xi + u^{(0)} \right) \\ &= e^{-t/\varepsilon} \left(\sum_{n,m,p=0}^k P_{n,m,p} \varepsilon^p \int_0^t \xi^n \left(\sum_{l=0}^k \left(f_l(\xi) \varepsilon^l + \sum_{i=0}^l \xi^i h_{i,l}(e^{-\xi/\varepsilon}) e^{-\xi/\varepsilon} \varepsilon^{l-i} \right) \right)^m e^{\xi/\varepsilon} d\xi + u^{(0)} \right) \end{aligned}$$

que l'on écrit ainsi comme une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi, \text{ ou } e^{-t/\varepsilon} \int_0^t \xi^i h(e^{-\xi/\varepsilon}) d\xi$$

où la fonction f (resp. h) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t (resp. φ).

⊕ *Étude du premier type d'intégrales :*

Par intégration par partie, on a

$$e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi = f(t) \varepsilon - f(0) e^{-t/\varepsilon} - \varepsilon e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f'(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi$$

En itérant k fois ce procédé, nous arrivons alors à une équation du type

$$e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi = \sum_{n=1}^k \left(f^{(n-1)}(t) \varepsilon^n - f^{(n-1)}(0) e^{-t/\varepsilon} \varepsilon^{n-1} \right) - \varepsilon^k e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f^{(k)}(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi$$

qui nous amène à la conclusion que le représentant de $e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f(\xi) e^{\xi/\varepsilon} d\xi$ dans $\mathcal{A}_K$ recherché est exactement

$$\sum_{n=1}^k (f^{(n-1)}(t)\varepsilon^n - f^{(n-1)}(0)\varphi\varepsilon^{n-1}) \in \mathcal{A}_k$$

⊕ *Étude du second type d'intégrales :*

Si $i = 0$, l'intégrale $e^{-t/\varepsilon} \int_0^t h(e^{-\xi/\varepsilon}) d\xi$ est une fonction H , de classe $\mathcal{C}^\infty$ en φ .

Si $i > 0$, une intégration par partie nous amène à

$$e^{-t/\varepsilon} \int_0^t \xi^i h(e^{-\xi/\varepsilon}) d\xi = -\varepsilon t^i h(e^{-t/\varepsilon}) e^{-t/\varepsilon} + i\varepsilon e^{-t/\varepsilon} \int_0^t \xi^{i-1} h'(e^{-\xi/\varepsilon}) e^{-\xi/\varepsilon} d\xi$$

dont l'étude se fait de la même façon que le premier type d'intégrales.

Par suite, en revenant à la décomposition de Ξ_ε en combinaison linéaire finie vu précédemment, et quitte à tronquer des formules à l'ordre k , nous pouvons définir un terme $\hat{u}_k \in \mathcal{A}_k$ permettant de définir Ξ_k par $\Xi_k(\hat{v}_k) := \hat{u}_k$.

Par construction, on montre que la suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ obtenue est un pendant formel de Ξ_ε , qui est compatible.

□

Par suite, nous pouvons appliquer la correspondance, ce qui nous permet d'en déduire que la solution de

$$\varepsilon \dot{u} = -u + \varepsilon P(t, u, \varepsilon) \text{ avec } u(0, \varepsilon) = u^{(0)} \neq 0$$

admet au moins un pré-développement asymptotique de la forme $\sum_k \tilde{u}_k$ où $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tilde{u}_k \in \mathcal{C}_k$, que l'on peut présenter sous la forme

$$u(t, \varepsilon) \sim \sum_k \left(f_k(t) \varepsilon^k + \sum_{i=0}^k t^i h_{i,k}(\varphi) \varphi \varepsilon^{k-i} \right), \text{ où les fonctions } f_k \text{ et } h_{i,k} \text{ sont } \mathcal{C}^\infty$$

ou encore, de manière moins précise,

$$u(t, \varepsilon) \sim \sum_k \left(\sum_{(i,j,l), \mathbf{\Sigma}(i,j,l)=k} b_{i,j,l} t^i \varphi^j \varepsilon^l \right)$$

Dans la partie suivante, nous verrons une écriture plus commode en pratique de ce type de développements asymptotiques.

Nous avons ainsi montré l'existence d'un pré-développement asymptotique en puissances de ε , de la solution de l'équation (4.3), ayant une condition initiale éloignée de la courbe lente.

Dans la partie suivante, nous allons montrer que la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, ce qui nous permettra d'en déduire l'unicité d'écriture de ce développement asymptotique.

Enfin, nous montrerons, en conclusion, que cette forme apparaît comme une version précisée des développements asymptotiques combinés en puissances de ε évoqués dans la partie 1.4.2 .

4.6.3 Unicité d'écriture du pré-développement asymptotique

Le travail fait dans la partie précédente nous a permis de montrer, par application du théorème 10, l'existence d'un pré-développement asymptotique de la solution. Rappelons que la méthode mise en œuvre nous a fourni un unique développement formel, obtenu comme point fixe de $\hat{\Xi}$.

Dans cette partie, nous allons montrer l'unicité de ce pré-développement asymptotique.

Comme nous l'avons vu à la fin de la section 4.4, cela revient à montrer que la suite $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, la notion de liberté d'une famille finie n'étant pas adaptée à la dimension infinie des espaces étudiés.

Une fois montré, nous pourrions appliquer la correspondance vue précédemment qui permettra d'implémenter un développement asymptotique des solutions de l'équation (4.3), dont nous montrerons qu'il s'agit d'un développement asymptotique combiné en puissances de ε .

Nous avons montré que les monômes d'ordre k sont $t^i \varepsilon^k$, avec $i \in \mathbb{N}$, ou $t^i \varphi^j \varepsilon^{k-i}$, avec $i \leq k$ et $j \in \mathbb{N}^*$, ces derniers termes s'écrivant aussi $\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^i \varphi^j \varepsilon^k$.

De plus, l'application du modèle formel implique que toute solution de notre problème admet un pré-développement asymptotique appartenant à la limite projective $\hat{\mathcal{A}}$ de la suite $(\mathcal{A}_k)_k$.

Les monômes élémentaires générateurs sont de deux formes différentes, que l'on regarde le cas $j = 0$ ou le cas $j \neq 0$:

- $t^i \varepsilon^k$, qui est d'ordre k . Ce qui implique que les termes du type $f_k(t) \varepsilon^k$, où f_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t , sont tous d'ordre k .
- $\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^i \varphi^j \varepsilon^k$, avec $i \leq k$ et $j \geq 1$, qui est d'ordre k .

Nous avons choisi cette dernière terminologie afin de faire apparaître un terme ε^k en facteur de tous les termes d'ordre exactement k .

Nous pouvons ainsi écrire les termes engendrés par ces derniers types de monômes sous la forme $g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varepsilon^k$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ exponentiellement décroissante ou encore, plus précisément,

$$h_l\left(\frac{t}{\varepsilon}, \varphi\right) \varphi \varepsilon^k$$

où h_l est une fonction polynomiale de degré k en T , et de classe $\mathcal{C}^\infty$ en φ .

Remarque : La première formulation nous permet d'identifier l'ensemble $\mathcal{C}_k$ des éléments d'ordre exactement k à un sous-ensemble de

$$\left\{ \left(f(t) + g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right) \varepsilon^k; f \in \mathcal{C}^\infty([0, t^\#]), g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ est exponentiellement décroissante} \right\}$$

Cette remarque souligne davantage la correspondance avec les développements asymptotiques combinés tels qu'ils sont définis dans l'article d'É. Benoît, A. El Hamidi et A. Fruchard déjà cité, à savoir

$$u^*(t, \varepsilon) \sim \sum_n \left(f_n(t) + g_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right) \varepsilon^n$$

où, pour tout entier n , f_n et g_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en leurs variables, et g_n est exponentiellement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, notons que la seconde formulation nous permet d'avoir l'écriture plus précise

$$\mathcal{C}_k = \left\{ f(t)\varepsilon^k + h\left(\frac{t}{\varepsilon}, \varphi\right) \varphi \varepsilon^k \right\}$$

où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t , et h est une fonction polynomiale de degré k en T et de classe $\mathcal{C}^\infty$ en φ .

Cette dernière présentation nous permet, par ailleurs, de préciser la forme générale de ces développements asymptotiques.

Afin de conclure, il nous reste donc à montrer le résultat suivant, qui garantit l'unicité d'écriture de ces développements :

Proposition 15. *La famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, c'est à dire qu'elle satisfait à :*

$$\forall K \in \mathbb{N}, \forall u_K \in \mathcal{A}_K, \left[\left(\|\tilde{u}_K(\cdot, \varepsilon)\| = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{K+1}) \right) \Rightarrow u_K = 0 \right]$$

Démonstration :

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'entier K :

Par construction, pour tout entier K fixé, nous supposons donc que

$$\sup_{t \in [0, t^\#]} \left\{ \left| \sum_{k=0}^K \left(f_k(t) + h_k\left(\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{\varphi}(t, \varepsilon)\right) \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right) \varepsilon^k \right| \right\} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{K+1})$$

Afin de conclure, nous allons montrer que toutes les fonctions f_k et h_k sont nulles.

Comme la propriété d'initialisation de la récurrence se montre de la même manière que l'hérédité, nous nous intéresserons à cette dernière :

Comme

$$\left(f_K(t) + h_K\left(\frac{t}{\varepsilon}, \varphi\right) \varphi \right) \varepsilon^K \in \mathcal{C}_K$$

la définition de $\mathcal{C}_K$ implique que son pendant topologique est égal à $\mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^K)$.

Par hypothèse de récurrence, nous savons que, pour tout $l \leq K-1$, les termes f_l et h_l sont nuls, car toute combinaison linéaire finie de ces termes appartient à $\mathcal{A}_{K-1}$, et que l'on a

$$\sup_{t \in [0, t^\#]} \left\{ \left| \sum_{k=0}^{K-1} \left(f_k(t) + h_k \left(\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right) \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right) \varepsilon^k \right| \right\} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^K)$$

Par suite, nous en déduisons que

$$\sup_{t \in [0, t^\#]} \left\{ \left| f_K(t) + h_K \left(\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right) \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right| \right\} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$$

De plus, si l'on suppose que $t \neq \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$, la présence du terme φ en facteur implique que le second terme de la somme est exponentiellement petit et, par suite, $f_K(t) = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$. Cette fonction étant indépendante de ε , nous en déduisons donc que c'est la fonction nulle, et ainsi

$$\sup_{t \in [0, t^\#]} \left\{ \left| h_K \left(\frac{t}{\varepsilon}, \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right) \tilde{\varphi}(t, \varepsilon) \right| \right\} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$$

En effectuant le changement de variable $t = \varepsilon \xi$, nous le récrivons

$$\sup_{\xi \in [0, \frac{t^\#}{\varepsilon}]} \left\{ |h_K(\xi, e^{-\xi})e^{-\xi}| \right\} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)$$

En fixant ξ et en faisant tendre ε vers 0, nous pouvons étendre cette norme sur $[0, +\infty[$. Comme, de plus, tous les termes composant cette égalité sont indépendants de ε , nous en déduisons que

$$\forall \xi \in [0, +\infty[, h_K(\xi, e^{-\xi})e^{-\xi} = 0$$

En effectuant le changement de variable $\phi = e^{-\xi}$, un développement de Taylor de la fonction h_K par rapport à ses variables nous amène au résultat

$$\forall \phi \in]0, 1], \sum_{i=0}^K \sum_l h_{i,K,l} (-\ln \phi)^i \phi^{l+1} = 0$$

d'où l'on sait déduire que tous les coefficients $h_{i,K,l}$ sont nuls, ce qui implique que la fonction h_K est nulle.

□

Nous avons ainsi montré, par récurrence, que la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, ce qui implique l'unicité d'écriture du développement asymptotique présenté précédemment.

En conclusion de quoi, nous avons ainsi démontré le résultat général suivant :

Théorème 14. *Toute solution de (4.3) admet un unique développement asymptotique de la forme $\sum_k \check{u}_k$ où, pour tout entier k , $\check{u}_k \in \mathcal{C}_k$. C'est à dire un développement asymptotique de la forme*

$$\sum_k \left(f_k(t) \varepsilon^k + h_k \left(\frac{t}{\varepsilon}, \varphi \right) \varphi \right) \varepsilon^k$$

où $\tilde{\varphi}(t, \varepsilon) = e^{-t/\varepsilon}$ et où, pour tout entier k , f_k (resp. h_k) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en t (resp. polynomiale de degré k en T et de classe $\mathcal{C}^\infty$ en φ).

Chapitre 5

Application au cas dégénéré

*En essayant continuellement, on finit par réussir.
Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.*
devise Shadok

Dans l'introduction du chapitre précédent, nous avons signalé qu'un choix "naïf" de fonctions intermédiaires pouvant permettre d'amener à l'implémentation de l'éventuel développement asymptotique de la solution canard de l'équation préparée

$$\eta^{p+1}\dot{u} = (p+1)t^p u + \alpha t^L + S(t, \alpha) + \eta^{p+1}P(t, u, \alpha, \eta) \quad (5.1)$$

pourrait être $\varphi = (\mathcal{J}_k)_k$ où, pour tout entier k :

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(t, \eta) := e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t y^k e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy$$

Avec un tel choix de fonctions intermédiaires, il est possible de montrer l'existence de pré-développements asymptotiques de la solution canard mais, en plus d'être singulières en 0, ces fonctions génèrent des difficultés lors de leurs interactions, dues à la multiplication, ce qui provoque la non-unicité d'écriture du pré-développement asymptotique. Ainsi, elles ne sont pas de bonnes fonctions candidates pour une étude asymptotique de la solution canard utilisant la correspondance mise en place.

Il faut enfin ajouter que ce choix "naïf" de fonctions ne prend pas en compte le paramètre canard, contrairement à l'étude menée dans la section 4.5 pour montrer l'existence d'un développement asymptotique de la solution canard dans le cas où le point tournant n'est pas dégénéré.

Ce chapitre est principalement dédié à la présentation d'un choix alternatif de fonctions intermédiaires, qui se révélera plus naturel.

Dans la première section, nous définirons un opérateur $\mathcal{I}_\eta$ que nous utiliserons pour construire de manière itérative une famille de fonctions.

Après en avoir donné quelques propriétés, nous définirons dans une seconde section l'ordre pertinent associé aux monômes sous-jacents.

La troisième section sera dédiée à l'étude de l'implémentation du développement asymptotique de la solution canard dans le cas où l'équation est linéaire. Après un énoncé du résultat d'existence dans le cas où l'on prendrait le choix "naturel" de fonctions intermédiaires, nous proposerons des ensembles plus adaptés à l'étude menée. La suite de cette section sera alors dédiée à l'étude de l'existence et de l'unicité d'écriture du développement asymptotique de la solution canard pour ce dernier choix.

Dans la section 5.4, nous commenterons la mise en œuvre de cette correspondance dans le cas général où la fonction P n'est pas nécessairement linéaire en v . Nous serons alors confrontés au problème d'unicité d'écriture de tels développements : Bien que l'on connaisse certaines des propriétés liant les fonctions intermédiaires nécessaires à la mise en place de la correspondance dans ce cas, nous ne montrons pas que nous en connaissons un nombre suffisant permettant de garantir l'unicité d'écriture, bien que nous verrons qu'il est raisonnable de le conjecturer.

Enfin nous évoquerons, dans la dernière section, les transséries qui sont des objets dont la forme générale est susceptible de leur permettre d'englober les développements asymptotiques que l'on recherche.

5.1 Étude d'un opérateur

Dans ce chapitre, nous allons étudier un opérateur $\mathcal{I}_\eta$ qui nous permettra ultérieurement de définir la famille de fonctions intermédiaires φ pertinente pour notre étude.

Afin de définir cet opérateur, nous remarquons tout d'abord que l'application $(t, \eta) \mapsto e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_t^{+\infty} v(\xi) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$, dépendant de la fonction v que l'on suppose être à croissance modérée, est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \eta^{p+1} \dot{w}(t, \eta) = (p+1)t^p w(t, \eta) + \eta^{p+1} v(t, \eta) \\ w(+\infty, \eta) = 0 \end{cases}$$

Et ainsi, dans le but de garder un contrôle en $t = 0$ de cette fonction, nous noterons $\mathcal{I}_\eta(v)$ la fonction canard de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \eta^{p+1} \dot{w}(t, \eta) = (p+1)t^p w(t, \eta) + \delta_v t^L + \eta^{p+1} v(t, \eta) \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(t/\eta)^{p+1}} w(t, \eta) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(t/\eta)^{p+1}} w(t, \eta) \end{cases} \quad (5.2)$$

où le paramètre δ_v est calculé de sorte que la fonction $\mathcal{I}_\eta(v)$ soit continue en $t = 0$.

Ce qui nous permet de définir un opérateur $\mathcal{I}_\eta : v \rightarrow \mathcal{I}_\eta(v)$.

Nous verrons qu'il s'agit d'un opérateur du même type que celui que nous avons utilisé lors de l'étude du cas non dégénéré ($p = 1$) dans la section 4.5.

Notons la forte similarité entre l'équation (5.2), qui permet de définir l'opérateur $\mathcal{I}_\eta$, et l'équation préparée (5.1), qui définit l'opérateur Ξ_η .

La définition de $\mathcal{I}_\eta(v)$ amène le paramètre δ_v à prendre une valeur explicite bien précise qui impliquera une formulation explicite de la fonction $\mathcal{I}_\eta(v)$.

Dans la suite, les premières fonctions intermédiaires que nous choisirons seront les fonctions $\mathcal{I}_\eta(X^k)$. L'étude de leur ordre nous amènera finalement à en choisir une version modifiée qui permettra, entre autres, d'alléger l'écriture du développement asymptotique.

5.1.1 Définition de l'opérateur

Dans cette partie, nous allons mener une étude de l'opérateur $\mathcal{I}_\eta$ qui nous permettra d'en proposer deux formulations explicites que nous utiliserons dans la suite.

Afin d'étudier cet opérateur, remarquons que la solution de l'équation (5.2) est de la forme

$$w(t, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t (\delta_v y^L + \eta^{p+1} v(y, \eta)) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy & \text{pour } t \in]0, +\infty[\\ \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{-\infty}^t (\delta_v y^L + \eta^{p+1} v(y, \eta)) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy & \text{pour } t \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

En recollant ces deux formules en $t = 0$, on en déduit la valeur de δ_v :

$$\delta_v = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v(y, \eta) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} y^L e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy} \eta^{p+1}$$

Signalons que, comme L est pair, le dénominateur est égal à $2 \int_0^{+\infty} y^L e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy$ et qu'ainsi, selon la proposition 26 donnée en annexe, il ne s'annule pas.

Par commodité, nous adopterons la notation

$$\lambda_v := - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v(y, \eta) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} y^L e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy}$$

Par suite, nous avons l'écriture

$$\mathcal{I}_\eta(v)(t) = e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t (\lambda_v y^L + v(y, \eta)) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy$$

qui est valable pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, au lieu de $\mathbb{R}_+$.

En substituant à λ_v sa valeur, nous obtenons l'expression explicite de la fonction canard de (5.2) définie sur tout $\mathbb{R}$ qui est, par définition, $\mathcal{I}_\eta(v)$.

Proposition 16.

$$\mathcal{I}_\eta(v)(t) = e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t \left(v(y, \eta) - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v(z, \eta) e^{-(z/\eta)^{p+1}} dz}{2 \int_0^{+\infty} z^L e^{-(z/\eta)^{p+1}} dz} y^L \right) e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy$$

Cette proposition admet comme corollaire immédiat :

Corollaire 3. *Si la fonction v est une fonction paire (resp. impaire), alors $\mathcal{I}_\eta(v)$ est une fonction impaire (resp. paire).*

Comme, dans la suite, nous considérerons les fonctions $\mathcal{I}_\eta(X^k)$, ce corollaire nous permet ainsi de limiter notre étude à des valeurs de t positives.

En appliquant la proposition 16 à $v(t, \eta) = t^k$, et en utilisant la fonction $\tilde{\mathcal{J}}_k$ définie dans l'introduction, nous arrivons à :

$$\mathcal{I}_\eta(X^k)(t) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{J}}_k(t, \eta) - \frac{\tilde{\mathcal{J}}_k(0, \eta)}{\tilde{\mathcal{J}}_L(0, \eta)} \tilde{\mathcal{J}}_L(t, \eta) , & \text{si } k \text{ est pair} \\ \tilde{\mathcal{J}}_k(t, \eta) , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans la suite, nous désignerons par $\hat{I}_k$ le pendant formel de cette fonction.

Remarquons que cette égalité peut se présenter sous la forme

$$\mathcal{I}_\eta(X^k)(t) = e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t y^k e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy + \lambda_{t^k} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t y^L e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy$$

où

$$\lambda_{t^k} = \begin{cases} -\frac{\left(\int_0^{+\infty} y^k e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy\right)}{\left(\int_0^{+\infty} y^L e^{-(y/\eta)^{p+1}} dy\right)} , & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Ces écritures peuvent être précisées en utilisant les notations suivantes :

$$\Gamma(K) := \int_0^{+\infty} z^{K-1} e^{-z} dz , \text{ et } \Gamma(K; T) := e^T \int_T^{+\infty} z^{K-1} e^{-z} dz$$

où la seconde fonction est définie pour des valeurs positives de T .

Ces fonctions nous permettent de récrire le paramètre λ_{t^k} sous la forme

$$\lambda_{t^k} = \begin{cases} -\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}\right)} \eta^{k-L} , & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Concernant la fonction $\mathcal{I}_\eta(X^k)$ on arrive, par le changement de variable $z = \left(\frac{y}{\eta}\right)^{p+1}$, à la formule suivante, valable pour tout t et η :

$$\mathcal{I}_\eta(X^k)(t) = \begin{cases} \frac{1}{p+1} \eta^{k+1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}\right)} \Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}; \left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1}\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; \left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1}\right) \right) , & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{1}{p+1} \eta^{k+1} \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; \left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1}\right) , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Afin d'arriver à une expression simple de $\mathcal{I}_\eta(X^k)$, nous adoptons la notation

$$\psi_k(T) := \begin{cases} \frac{1}{p+1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}\right)} \Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}; T^{p+1}\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; T^{p+1}\right) \right) , & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{1}{p+1} \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; T^{p+1}\right) , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

qui définit une fonction indépendante de η telle que

$$\mathcal{I}_\eta(X^k)(t) = \eta^{k+1} \psi_k\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

Selon le corollaire 3, la fonction ψ_k est paire si k est impair, et impaire si k est pair. Ainsi, comme la fonction Gamma incomplète est définie sur tout $\mathbb{R}_+^*$ alors toutes les fonctions ψ_k , et donc $\mathcal{I}_\eta(X^k)$, sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 17. $\psi_L = 0$ et, pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, la fonction ψ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Preuve :

Ce résultat est une conséquence de la définition de λ_{t^k} , du fait que, pour tout $\kappa \in]0, 1[$, la fonction Gamma incomplète $\Gamma(\kappa; \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée sur tout $\mathbb{R}_+^*$, et de la parité de $p+1$.

□

5.1.2 Propriétés algébriques de l'opérateur

Dans cette partie, nous étudions les propriétés satisfaites par l'opérateur $\mathcal{I}_\eta$ afin de préparer le terrain à l'étude du développement asymptotique de la solution canard.

De la même manière qu'au chapitre 2, on montre que l'opérateur $\mathcal{I}_\eta$ est contractant. Comme il admet, de plus, 0 comme point fixe, il satisfait alors à la propriété :

$$\text{Si , pour tout } \eta \text{ et } t \in \mathbb{R}, v(t, \eta) = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^K), \text{ alors } \mathcal{I}_\eta(v)(t) = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$$

Proposition 18. $\mathcal{I}_\eta$ satisfait, de plus, aux propriétés suivantes :

- $\mathcal{I}_\eta(u + v) = \mathcal{I}_\eta(u) + \mathcal{I}_\eta(v)$
- $\mathcal{I}_\eta(g(\eta) v) = g(\eta) \mathcal{I}_\eta(v)$
- $\mathcal{I}_\eta(X^L) = 0$ (et $\delta_{t^L} = -\eta^{p+1}$)
- $\mathcal{I}_\eta(X^p) = \frac{-1}{p+1}\eta^{p+1}$ (et $\delta_{t^p} = 0$)

Les deux premières propriétés sont celles qui nous permettent de ne considérer que les fonctions monomiales $t^i \varphi^J \eta^l$ comme candidates pour figurer dans la famille des fonctions intermédiaires engendrant les espaces $\mathcal{A}_k$ nécessaires à la mise en place de la correspondance.

Afin de démontrer deux formules importantes satisfaites par $\mathcal{I}_\eta$, nous définissons un opérateur $\mathcal{D}_\eta : u \mapsto v$, qui nous servira d'intermédiaire, par

$$\mathcal{D}_\eta(u) := \dot{u} - (p+1) \frac{1}{\eta^{p+1}} t^p u$$

Proposition 19. Par définition de ces opérateurs, nous avons

$$\mathcal{I}_\eta \circ \mathcal{D}_\eta(u) = u$$

$$\mathcal{D}_\eta \circ \mathcal{I}_\eta(v) = v + \lambda_v t^L$$

Rappelons que la constante $\lambda_v := \frac{1}{\eta^{p+1}} \delta_v$ a été explicitée dans la section précédente.

Remarquons que l'opérateur $\mathcal{D}_\eta$ satisfait à

$$\mathcal{D}_\eta(u + v) = \mathcal{D}_\eta(u) + \mathcal{D}_\eta(v)$$

$$\mathcal{D}_\eta(g(\eta) v) = g(\eta) \mathcal{D}_\eta(v)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{D}_\eta(X^k) = kt^{k-1} - (p+1) \frac{1}{\eta^{p+1}} t^{p+k}, \text{ d'où } \mathcal{D}_\eta(CX^k) = C \left(kt^{k-1} - (p+1) \frac{1}{\eta^{p+1}} t^{p+k} \right)$$

$$\mathcal{D}_\eta(uv) = \mathcal{D}_\eta(u) v + u \dot{v} = \mathcal{D}_\eta(u) v + u \mathcal{D}_\eta(v) + (p+1) \frac{1}{\eta^{p+1}} t^p uv$$

En particulier :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{D}_\eta(X^k u)(t) = t^k \mathcal{D}_\eta(u)(t) + kt^{k-1} u$$

Enfin cet opérateur permet de montrer le résultat suivant :

Proposition 20. La famille $\{\psi_k : k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}\}$ est linéairement indépendante.

Preuve de la proposition :

Nous supposons donnée une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{k=1, k \neq L}^{p-1} \iota_k \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) = 0$$

Comme $\mathcal{D}_\eta$ est linéaire et que sa définition implique que

$$\mathcal{D}_\eta \left(\psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^k + \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}} \left(\frac{t}{\eta} \right)^L$$

nous arrivons à la formule

$$\sum_{k=1, k \neq L}^{p-1} \frac{\iota_k}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^k + \left(\sum_{k=1, k \neq L}^{p-1} \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}} \iota_k \right) \left(\frac{t}{\eta} \right)^L = 0$$

Comme la famille $T^n = \left(\frac{t}{\eta} \right)^n$ est une famille libre, nous en concluons que la famille $\{\psi_k : k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}\}$ l'est aussi.

□

Enfin, en écrivant la définition de $\mathcal{D}_\eta$ dans le terme $\mathcal{I}_\eta \circ \mathcal{D}_\eta(u)$, puis en utilisant la linéarité de $\mathcal{I}_\eta$, nous montrons que :

$$\mathcal{I}_\eta(X^p v) = \frac{1}{p+1} \eta^{p+1} (\mathcal{I}_\eta(\dot{v}) - v) \quad (5.3)$$

En appliquant cette dernière formule à $v(t, \eta) = t^{k+1}$, nous arrivons au résultat suivant :

Proposition 21.

$$\mathcal{I}_\eta(X^{k+p+1}) = \frac{1}{p+1} \eta^{p+1} ((k+1)\mathcal{I}_\eta(X^k) - X^{k+1})$$

Dans l'optique de construire une famille générant $(\mathcal{A}_k)_k$, cette formule nous permettra de restreindre le choix des fonctions intermédiaires formelles $\hat{I}_k$, aux valeurs de k appartenant à $\{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$ car, pour tout t et η , $\mathcal{I}_\eta(X^p)(t) = \frac{-1}{p+1} \eta^{p+1}$.

Pour terminer, nous montrons le résultat suivant. Il nous permettra d'étudier le comportement des termes issus des compositions de $\mathcal{I}_\eta$:

Théorème 15. *Pour tout entier k , et toute fonction u :*

$$\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u)) = \frac{1}{k+1} (t^{k+1} \mathcal{I}_\eta(u) - \mathcal{I}_\eta(X^{k+1}u) - \lambda_u \mathcal{I}_\eta(X^{k+L+1}))$$

Démonstration :

La dernière propriété de $\mathcal{D}_\eta$ affirme que

$$\mathcal{D}_\eta(X^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u)) = t^{k+1}\mathcal{D}_\eta \circ \mathcal{I}_\eta(u) + (k+1)t^k\mathcal{I}_\eta(u)$$

En appliquant $\mathcal{I}_\eta$ à cela, on en déduit que

$$\mathcal{I}_\eta \circ \mathcal{D}_\eta(X^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u)) = \mathcal{I}_\eta(X^{k+1}(u + \lambda_u X^L)) + (k+1)\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u))$$

D'où l'on conclut que

$$t^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u) = \mathcal{I}_\eta(X^{k+1} u) + \lambda_u \mathcal{I}_\eta(X^{k+L+1}) + (k+1)\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u))$$

□

Dans le cas où la fonction P est linéaire en v , tous les résultats présentés nous permettront de restreindre la famille des monômes nécessaires à la mise en place de la correspondance. Bien entendu, ils occuperont aussi un rôle central dans le cas général où P n'est pas nécessairement linéaire en v .

Les formules que nous venons de présenter dans cette partie ont été démontrées topologiquement, mais elles admettent toutes une écriture formelle équivalente que nous utiliserons dans la suite.

5.2 Définition de l'ordre pertinent

Grâce à la formule liant $\mathcal{I}_\eta(X^k)$ et ψ_k , nous nous intéresserons, dans cette section, aux fonctions ψ_k , pour toute valeur de k appartenant à $\{0, \dots, p\}$. Nous cherchons ainsi à donner un ordre aux monômes $t^i \psi_k \eta^l$, et donc à $t^i \hat{I}_k \eta^l$.

Pour se faire, rappelons que $\eta^{k+1} \psi_k \left(\frac{t}{\eta}\right) = \mathcal{I}_\eta(X^k)(t)$ où

$$\psi_k(T) := \begin{cases} \frac{1}{p+1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}\right)} \Gamma\left(\frac{L+1}{p+1}; T^{p+1}\right) - \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; T^{p+1}\right) \right) , & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\frac{1}{p+1} \Gamma\left(\frac{k+1}{p+1}; T^{p+1}\right) , & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Comme, pour tout $m \in]0, 1[$ et tout réel positif U , on a

$$\Gamma(m, U) = e^{-U} \int_U^{+\infty} z^{m-1} e^{-U} dU$$

une intégration par partie nous amène à $\Gamma(m, U) = U^{m-1} + (m-1)\Gamma(m-1, U)$.
Nous en déduisons, pour tout $m \in]0, 1[$, l'approximation asymptotique

$$\Gamma(m, U) \sim_{U \rightarrow +\infty} U^{m-1}$$

Ainsi, pour tout entier $n < p$,

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{p+1}, T^{p+1}\right) \sim_{T \rightarrow \pm\infty} (T^{p+1})^{(n+1)/(p+1)-1} = T^{n-p}$$

D'où l'on déduit, pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, comme approximation asymptotique de ψ_k en $\pm\infty$:

$$\psi_k(T) \sim_{T \rightarrow \pm\infty} \begin{cases} T^{-(p-\max\{k, L\})} , \text{ si } k \text{ est pair} \\ T^{-(p-k)} , \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases} \sim_{T \rightarrow \pm\infty} T^{-(p-\max\{k, L\})}$$

Comme $t = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1)$, ce comportement à l'infini de ψ_k nous permet de conclure que

$$t^i \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \eta^l = \begin{cases} \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{i+l} \psi_k(\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1))) = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{i+l}) , \text{ si } t = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta) \\ \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1) \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0} \left(\left(\frac{t}{\eta} \right)^{-(p-\max\{k, L\})} \eta^l \right) = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{p-\max\{k, L\}+l}) , \text{ si } t \neq \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta) \end{cases}$$

Pour cette raison nous définirons, pour tout $(i, k, l) \in \mathbb{N} \times \{0, \dots, p\} \times \mathbb{N}$, l'ordre du monôme $t^i \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \eta^l$ comme étant

$$\mathfrak{X}(t^i \psi_k \eta^l) := \min\{p - \max\{k, L\}, i\} + l , \text{ et } (\mathfrak{X}(i, k, l) :=) \mathfrak{X}(t^i \hat{I}_k \eta^l) := \mathfrak{X}(t^i \psi_k \eta^{l+k+1})$$

L'ordre donné aux monômes $t^i \eta^l$ étant le choix naturel

$$\mathfrak{X}(t^i \eta^l) := l$$

Dans ce dernier cas, les monômes d'ordre fini K sont en nombre infini (car, bien que $k \leq p$, il n'y a pas de bornes sur i), ce qui nous amènerait à définir l'ensemble $\mathcal{C}_K$ des termes exactement d'ordre K comme étant constitué par les couples

$$\left(a_K \eta^K, u_K(t) \eta^K + \sum_{(i, k, l); i < p - \max\{k, L\}, i+l=K} u_{i, k} t^i \hat{I}_k \eta^{K-i} + \sum_{(k, l); p - \max\{k, L\} + l = K} t^{p - \max\{k, L\}} f_{k, l}(t) \hat{I}_k \eta^l \right)$$

où $a_K \in \mathbb{R}$, $u_{i, k, l} \in \mathbb{R}$, u_K et $f_{k, l}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $t \in [-t_1, t_1]$.

Cette définition nous permettant, par suite, de définir les ensembles $\mathcal{A}_K := \oplus_{l=0}^K \mathcal{C}_l$ nécessaires au calcul du développement asymptotique.

Dans les faits, nous préférons une version modifiée de ces ensembles $\mathcal{C}_K$, plus adaptée, qui permet en pratique de mieux appréhender le comportement asymptotique du développement asymptotique qu'il permet d'implémenter.

Ces ensembles seront définis et commentés dans la section suivante.

5.3 Implémentation de la correspondance dans le cas linéaire

Dans cette section, nous utiliserons les éléments mis en place dans les deux sections précédentes dans le but d'implémenter le développement asymptotique en puissances de η de la solution canard de (5.1), dans le cas où l'on suppose cette équation linéaire. Dans toute cette section, nous supposons donc que la fonction P est linéaire en v .

Avant d'implémenter un tel développement, nous commençons par rappeler que nous avons effectué le changement de variable

$$\gamma = \eta^{p-L+1} \underline{\gamma} \text{ et } w = \eta \underline{w}$$

qui nous a permis de définir l'opérateur Ξ_η par $(\underline{\alpha}, \underline{u}) = \Xi_\eta(\underline{\beta}, \underline{v})$ si et seulement si

$$\begin{cases} \eta^{p+2} \underline{\dot{u}} = (p+1)\eta t^p \underline{u} + \eta^{p-L+1} \underline{\alpha} t^L + S(t, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}) + \eta^{p+1} P(t, \eta \underline{u}, \eta^{p-L+1} \underline{\beta}, \eta) \\ \underline{u}(-t_0, \eta) = 0 = \underline{u}(t_0, \eta) \end{cases} \quad (5.4)$$

où S et P sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ en leurs variables et où, si l'on note

$$\mathcal{E} := \left\{ (i, j) : i \leq p+2, j \leq E \left[\frac{p+2}{p-L+1} \right] + 1, \text{ et } i + j(p-L+1) \geq p+2 \right\}$$

la fonction S peut s'écrire sous la forme

$$S(t, A) = \sum_{i=0}^{p+1} t^i A^{j_i+1} S_i(A) + t^{p+2} R(t, A)$$

où, pour tout $i \in \{0, \dots, p+1\}$, $(i, j_i+1) \in \mathcal{E}$, et R admet A en facteur.

Dans le chapitre 2, nous avons montré que l'opérateur Ξ_η est contractant, avec une constante de contraction égale à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$.

Afin de montrer que la solution canard admet un pré-développement asymptotique en puissances de η , le théorème 10 affirme qu'il suffit de construire, à partir de l'opérateur Ξ_η , une suite d'opérateurs $(\Xi_k)_k$ où, pour tout entier k , Ξ_k est défini de $\mathcal{A}_k$ dans lui-même, qui est un pendant formel de Ξ_η et compatible.

À la suite de quoi, l'unicité d'écriture d'un tel développement se déduit de la liberté asymptotique de la famille $(\mathcal{A}_k)_k$.

Pour finir, rappelons que nous sommes intéressés par l'étude des (pré-)développements asymptotiques de la solution canard pour des valeurs de $t \in [-t_1, t_1] \subset]-t_0, t_0[$. Cette dernière hypothèse nous permettant de mettre de côté des questions de couche limite évoquées dans la section 4.6.

Avant de commencer, signalons que la fonction de la solution de l'équation (5.4) s'écrit

$$\underline{u}(t, \eta) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t \left(\eta^{p-L} \underline{\alpha} \xi^L + \frac{1}{\eta} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}) + \eta^p P(\xi, \eta \underline{v}(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}, \eta) \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Cette notation étant, par définition de $\underline{\alpha}$, valable pour tout $t \in [-t_1, t_1]$.

Afin de construire la suite $(\Xi_k)_k$ nous commencerons par nous donner, pour tout entier k fixé, un couple $(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k)$ que nous supposons appartenir à $\tilde{\mathcal{A}}_k$ ce qui signifie, par définition, que $(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k)$ est associé à un élément $(\hat{\beta}_k, \hat{v}_k) \in \mathcal{A}_k$.

Puis, afin d'appliquer la correspondance présentée dans le chapitre 4, nous définirons, à partir du couple $(\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k)$ défini par

$$(\underline{\alpha}_k, \underline{u}_k) = \Xi_\eta(\underline{\beta}_k, \underline{v}_k)$$

un couple $(\hat{\alpha}_k, \hat{u}_k) \in \mathcal{A}_k$, ce qui nous permettra de définir l'opérateur Ξ_k en posant

$$\Xi_k(\hat{\beta}_k, \hat{v}_k) := (\hat{\alpha}_k, \hat{u}_k)$$

De plus, la définition de $(\hat{\alpha}_k, \hat{u}_k)$ impliquera que la suite $(\Xi_k)_k$ est un pendant formel de Ξ_η compatible. Par application du théorème 10, nous en déduirons l'existence de pré-développements asymptotiques de la solution canard.

Dans une première partie, nous allons évoquer le résultat que l'on obtient en construisant la correspondance à partir du choix naturel de fonctions intermédiaires évoqué à la fin de la section 5.2.

Nous proposerons ensuite un choix alternatif de fonctions intermédiaires plus adapté à la forme des développements asymptotiques recherchés. Pour ce choix, nous démontrons que, dans le cas où (5.1) est linéaire, on a existence et unicité du développement asymptotique de la solution canard.

Dans la section 5.4, nous évoquerons ensuite le cas général où l'équation (5.1) n'est pas nécessairement linéaire.

5.3.1 Définition des ensembles pertinents

Par définition de l'ordre $\blackcross$ donné dans la section 5.2, les ensembles naturels $\mathcal{C}_K$ seraient ceux composés des couples

$$\left(a_K \eta^K, u_K(t) \eta^K + \sum_{(i,k,l); i < p - \max\{k,L\}, i+l=K} u_{i,k,l} t^i \hat{I}_k \eta^l + \sum_{(k,l); p - \max\{k,L\} + l = K} t^{p - \max\{k,L\}} f_{k,l}(t) \hat{I}_k \eta^l \right)$$

où $a_K \in \mathbb{R}$, $u_{i,k,l} \in \mathbb{R}$, et $u_K, f_{k,l}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $t \in [-t_1, t_1]$.

En reprenant la démonstration du théorème 17 que nous donnons dans la partie suivante pour un autre choix d'ensembles, il est possible de montrer que, dans le cas linéaire, ces ensembles permettent de mettre en place une correspondance amenant l'existence de pré-développements asymptotiques. Puis la proposition 20 permet d'adapter la démonstration du théorème de la partie 4.6.3 à notre problématique, ce qui nous amène au résultat :

Théorème 16. *Dans le cas où l'équation (5.1) est linéaire, sa solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$ admet un développement asymptotique en puissances de η de la forme*

$$\left(\sum_K \check{\underline{\alpha}}_K, \sum_K \check{\underline{u}}_K \right), \text{ où } \forall K \in \mathbb{N}, (\check{\underline{\alpha}}_K, \check{\underline{u}}_K) \in \mathcal{C}_K$$

Il convient de noter que l'étude de termes de la forme

$$e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{-t_0}^t g(\xi) \psi_k \left(\frac{\xi}{\eta} \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi, \text{ où } g \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$$

pose, lors de cette démonstration, des problèmes techniques importants.

Dans les deux parties qui suivent, nous nous intéresserons à la mise en place de la correspondance lorsque l'on choisit une version modifiée des fonctions intermédiaires "naturelles". Ce choix découle de la terminologie suivante :

Terminologie : Si ρ est une fonction de la variable T qui est telle que

$$\rho(T) \sim_{T \rightarrow \pm\infty} \sum_{n=0}^N p_n T^n + \sum_{m \geq 1} p_{-m} T^{-m}$$

Nous considérons la fonction suivante :

$$[\rho(T)] := \rho(T) - \sum_{n=0}^N p_n T^n$$

Dans ce cas, la fonction sous jacente, notée $[\rho]$ par abus de langage, est bornée sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 lorsque T tend vers $\pm\infty$.

À partir de la définition de $\boxtimes$, et de celle de $[\cdot]$, on arrive à la définition d'un ordre qui nous permet d'adopter la définition suivante :

Définition 16. Pour tout $(i, l) \in \mathbb{N}^2$, et $k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$, on définit

$$\boxtimes(t^i \eta^l) := l, \text{ et } \boxtimes \left(\left[t^i \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \eta^l \right) = \boxtimes([T^i \psi_k(T)] \eta^{i+l}) := i + l$$

Ainsi, pour tout entier K , l'ensemble de référence $\mathcal{C}_K$ est l'espace vectoriel engendré par les "monômes"

$$\left(a_K \eta^K, \left(u_K(t) + \sum_{i=0}^K \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \bar{\psi}_{i,k} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^K \right)$$

où $a_K \in \mathbb{R}$, $u_{i,k} \in \mathbb{R}$, $u_K \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$ et où l'on a adopté la notation

$$\bar{\psi}_{i,k}(T) := [T^i \psi_k(T)]$$

Remarque : Pour tout entier k , la définition de ψ_k et la terminologie $[\cdot]$ impliquent que $\bar{\psi}_{0,k} = [\psi_k] = \psi_k$.

De plus, les ensembles $\mathcal{C}_K$ permettent de définir les ensembles $\mathcal{A}_K$ qui nous serviront de référence dans les deux parties suivantes :

$$\mathcal{A}_k := \mathcal{A}_{k-1} \oplus \mathcal{C}_k = \oplus_{l=0}^k \mathcal{C}_l$$

Remarque :

Dans les deux parties qui suivent, nous allons montrer l'existence d'un développement asymptotique de la solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$

$$(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*(t, \eta)) \sim \left(\sum_l \check{\alpha}_l \eta^l, \sum_k \check{u}_k \right), \text{ où } \forall k \in \mathbb{N}, (\check{\alpha}_k \eta^k, \check{u}_k) \in \mathcal{C}_k$$

Le choix de fonctions intermédiaires que nous venons de faire nous permettra de comprendre la façon dont le terme $\check{u}_k$, lorsque l'on met η^k en facteur, se décompose comme une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de t et un reste négligeable lorsque $t \neq \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$.

Ce dernier ne contenant alors que des termes de la forme $\eta^\mu t^{-\nu}$.

5.3.2 Existence de pré-développements asymptotiques

Afin de démontrer le théorème d'existence de pré-développements asymptotiques de la solution canard de (5.1) dans le cas où P est linéaire en v , nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4. *Pour tout entier k , $\mathcal{I}_\eta$ admet un pendant formel dans $\mathcal{A}_k$.*

Preuve du lemme :

Par définition des ensembles $\mathcal{A}_k$, il suffit de montrer que, pour tout entier K et toute fonction $w \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$, les fonctions $\mathcal{I}_\eta(w(X))$ et $\mathcal{I}_\eta(\bar{\psi}_{i,k}(X/\eta))\eta^i$ ont un représentant naturel dans $\mathcal{A}_K$.

Pour cette raison, nous fixons un entier K .

⊗ *Étude de $\mathcal{I}_\eta(w(X))$* :

On suppose que $K > p$ (le cas où $K \leq p$ se montrant de la même façon).

En écrivant le développement de Taylor d'ordre p de la fonction w nous arrivons, par linéarité de $\mathcal{I}_\eta$, à :

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = \sum_{n=0}^p w_{1,n} \mathcal{I}_\eta(X^n) + \mathcal{I}_\eta(X^p R_1(X))$$

que l'équation (5.3) nous permet de récrire

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = \sum_{n=0}^p w_{1,n} \mathcal{I}_\eta(X^n) - \frac{1}{p+1} \eta^{p+1} R_1 + \frac{1}{p+1} \mathcal{I}_\eta(\dot{R}_1(X)) \eta^{p+1}$$

En réitérant ce procédé nous arrivons ainsi, pour tout entier q , à une équation du type

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = \sum_{n=0}^p \left(\sum_{m=1}^q w_{m,n} \eta^{(m-1)(p+1)} \right) \mathcal{I}_\eta(X^n) - \sum_{m=1}^q S_m \eta^{m(p+1)} + \mathcal{I}_\eta(\Lambda) \eta^{q(p+1)}$$

que l'on récrit

$$\mathcal{I}_\eta(w(X)) = \sum_{n=0}^p \left(\sum_{m=1}^q w_{m,n} \eta^{(m-1)(p+1)} \right) \eta^{n+1} [\psi_n(t/\eta)] - \sum_{m=1}^q S_m \eta^{m(p+1)} + \mathcal{I}_\eta(\Lambda) \eta^{q(p+1)}$$

où $w_{m,n} \in \mathbb{R}$, et les fonctions S_m et Λ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$.

En posant alors $q_K := \min\{m \in \mathbb{N}; m(p+1) > K\}$, le représentant de $\mathcal{I}_\eta(w(X))$ dans $\mathcal{A}_K$ est donc

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{K-1} \left(\sum_{m=1}^q w_{m,n} \eta^{(m-1)(p+1)+n+1} \right) [\psi_n] , & \text{si } K \leq p \\ \sum_{n=0}^p \left(\sum_{m=1}^q w_{m,n} \eta^{(m-1)(p+1)+n+1} \right) [\psi_n] - \sum_{m=1}^{q_K-1} S_m(t) \eta^{m(p+1)} , & \text{si } K > p \end{cases} \in \mathcal{A}_K$$

⊗ *Étude de $\mathcal{I}_\eta(\bar{\psi}_{i,k}(X/\eta)) \eta^i$* :

En substituant formellement une série en puissances négatives de T dans l'équation différentielle dont elle est solution, on vérifie que la fonction ψ_k admet un développement asymptotique en puissances négatives de T de la forme :

$$\psi_k(T) \sim_{T \rightarrow \pm\infty} \sum_{n \geq p - \max\{k, L\}} \rho_{-n} T^{-n}$$

ce qui nous permet d'en déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$:

$$\bar{\psi}_{i,k} \left(\frac{t}{\eta} \right) = \begin{cases} \left(\frac{t}{\eta} \right)^i \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) , & \text{si } i < p - \max\{k, L\} \\ \left(\frac{t}{\eta} \right)^i \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) - \sum_{n=0}^{i-p+\max\{k, L\}} \rho_{-n} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{i-n} , & \text{si } i \geq p - \max\{k, L\} \end{cases} \quad (5.5)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons au second cas, le premier se traitant de la même manière :

Nous supposons donc que $i \geq p - \max\{k, L\}$, et ainsi

$$\mathcal{I}_\eta \left(\bar{\psi}_{i,k} \left(\frac{X}{\eta} \right) \right) \eta^i = \mathcal{I}_\eta \left(X^i \psi_k \left(\frac{X}{\eta} \right) \right) - \sum_{n=0}^{i-p+\max\{k,L\}} \rho_{-n} \mathcal{I}_\eta (X^{i-n}) \eta^n$$

Or, selon le théorème 15,

$$\mathcal{I}_\eta \left(X^i \psi_k \left(\frac{X}{\eta} \right) \right) = \frac{1}{\eta^{k+1}} \mathcal{I}_\eta \left(X^i \mathcal{I}_\eta (X^k) \right) = \frac{1}{(i+1)\eta^{k+1}} \left(t^{i+1} \mathcal{I}_\eta (X^k) - \mathcal{I}_\eta (X^{i+k+1}) - \lambda_{X^k} \mathcal{I}_\eta (X^{i+L+1}) \right)$$

qui nous amène à la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\eta \left(X^i \psi_k \left(\frac{X}{\eta} \right) \right) &= \frac{1}{i+1} \left(t^{i+1} \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) - \eta^{i+1} \psi_{i+k+1} \left(\frac{t}{\eta} \right) - \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L}} \eta^{i+1} \psi_{i+L+1} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) = \dots \\ &= \frac{1}{i+1} \eta^{i+1} \left(\left(\frac{t}{\eta} \right)^{i+1} \psi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) - \psi_{i+k+1} \left(\frac{t}{\eta} \right) - \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L}} \psi_{i+L+1} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \end{aligned}$$

Et la formule (5.5) implique alors que $\mathcal{I}_\eta \left(X^i \psi_k \left(\frac{X}{\eta} \right) \right)$ appartient à $\bigcup_k \mathcal{A}_k$.

Quitte à effectuer des troncatures, nous en déduisons donc, pour tout entier K , que $\mathcal{I}_\eta(\bar{\psi}_{i,k}(X/\eta))\eta^i$ admet un représentant dans $\mathcal{A}_K$.

□

Maintenant que nous avons démontré ce lemme intermédiaire, nous pouvons démontrer le principal résultat de cette partie :

Théorème 17. *Il existe une suite $(\Xi_K)_K$, construite à partir de l'opérateur topologique contractant Ξ_η , qui est un pendant formel de Ξ_η compatible.*

En particulier, nous en concluons que la correspondance permet d'implémenter des pré-développements asymptotiques de la solution canard.

Démonstration du théorème :

Afin de construire cette suite, nous fixons un entier K , et supposons donné un couple $(\beta_K, \underline{v}_K) \in \tilde{\mathcal{A}}_K$, dont le pendant formel est noté $(\hat{\beta}_K, \hat{\underline{v}}_K) \in \mathcal{A}_K$.

Enfin, nous notons $(\underline{\alpha}_K, \underline{u}_K) := \Xi_\eta(\underline{\beta}_K, \underline{v}_K)$.

Étude du pendant de $\underline{\alpha}_K$:

Par définition de l'opérateur Ξ_η , le paramètre $\underline{\alpha}_K$ satisfait à

$$0 = \eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

En remplaçant S par sa formulation spécifique, et en substituant à la fonction P , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, le terme principal d'ordre K de son développement de Taylor, le terme de gauche de cette équation se récrit

$$\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} \left(\sum_{i=0}^{p+1} \eta^{(j_i+1)(p-L+1)} \underline{\alpha}_K^{j_i+1} S_i(\eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) \int_{-t_0}^{t_0} \xi^i e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots \right.$$

$$\left. + \int_{-t_0}^{t_0} \xi^{p+2} R(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi \right) + \dots$$

$$+ \eta^p \sum_{c \in \{0,1\}} \sum_{a,b,d=0}^{K+1} p_{a,b,c,d} \eta^{b+c(p-L+1)+d} \underline{\beta}_K^c \int_{-t_0}^{t_0} \xi^a \underline{v}_K(\xi, \eta)^b e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

que nous supposons donc, par approximation, nul.

Comme $(\underline{\beta}_K, \underline{v}_K)$ appartient à $\tilde{\mathcal{A}}_K$, nous pouvons substituer à $\underline{\beta}_K$ et $\underline{v}_K$ les pendants topologiques de $(\hat{\beta}_K, \hat{v}_K) \in \mathcal{A}_K$.

La proposition 26 donnée en annexe nous permet alors d'approximer l'équation obtenue par une équation de la forme

$$E(\underline{\alpha}_K, \eta) = 0, \text{ où } E \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty$$

De plus, la proposition 26 donnée en annexe amène aussi à la conclusion que tous les termes constituant la fonction E , et qui contiennent $\underline{\alpha}_K$, sont tous asymptotiquement dominés par le terme $\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$. Par suite, le théorème des fonctions implicites implique que le paramètre $\underline{\alpha}_K$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de η .

Nous noterons $\hat{\alpha}_K$ le terme principal d'ordre K de son développement de Taylor.

Étude du pendant de $\underline{u}_K$:

Par définition de l'opérateur Ξ_η , la fonction $\underline{u}_K$ satisfait, pour tout t et η à

$$\underline{u}_K(t, \eta) = \frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{t_0}^t (\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \xi^L + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) + \eta^p P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) \Big) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Notons que, malgré la présence des termes $\frac{1}{\eta^{p+1}}$ et $\frac{1}{\eta}$, la définition des fonctions S et P montre que chacun de ces termes est un $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1)$. Ce qui montre que ces termes ne sont que des artefacts d'écriture.

Tout comme lors de la section 4.5, nous voulons réinjecter dans cette équation une formulation différente de $\underline{\alpha}_K$ se déduisant de

$$0 = \eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-t_0}^{t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_{-t_0}^{t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-t_0}^{t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Cette équation montre que le terme

$$\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$
(5.6)

est égal à

$$\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{-\infty}^{-t_0} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^{-t_0} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \eta^p \int_{-\infty}^{-t_0} P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi - \dots$$

$$- \eta^{p-L} \underline{\alpha}_K \int_{t_0}^{+\infty} \xi^L e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi - \dots$$

$$- \frac{1}{\eta} \int_{t_0}^{+\infty} S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi - \eta^p \int_{t_0}^{+\infty} P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

Par un changement de variable de la forme $\xi \pm t_0 = \zeta$, chacun de ces six termes peut s'écrire $e^{-(t_0/\eta)^{p+1}} \cdot f(\underline{\alpha}_K, \eta)$, où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par suite, nous en déduisons que ces six termes sont exponentiellement petits, donc sont à mettre de côté pour notre étude, en tant que termes admettant un développement asymptotique en puissances de η nul. Ce qui nous amène à approximer le terme (5.6) par 0.

Par suite, nous substituons à $\eta^{p-L} \underline{\alpha}_K$, dans la formulation de $\underline{u}_K$ donnée précédemment, la valeur

$$-\frac{1}{\eta} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S(s, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds} - \eta^p \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P(s, \eta \underline{v}_K(s, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}$$

ce qui nous amènent, par suite, à l'approximation de $\underline{u}_K$ suivante :

$$\frac{1}{\eta^{p+1}} e^{(t/\eta)^{p+1}} \left[\int_{t_0}^t \frac{1}{\eta} \left(S(\xi, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S(s, \eta^{p-L+1} \underline{\alpha}_K) e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}{2 \int_0^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds} \xi^L \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi + \dots \right]$$

$$+ \eta^p \int_{t_0}^t \left(P(\xi, \eta \underline{v}_K(\xi, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} P(s, \eta \underline{v}_K(s, \eta), \eta^{p-L+1} \underline{\beta}_K, \eta) e^{-(\frac{s}{\eta})^{p+1}} ds}{2 \int_0^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds} \xi^L \right) e^{-(\frac{\xi}{\eta})^{p+1}} d\xi \Bigg]$$

Du fait que $t \in [-t_1, t_1] \subset]-t_0, y_0[$, et tout comme pour le paramètre $\underline{\alpha}_K$, nous pouvons faire l'approximation consistant à remplacer la borne t_0 de l'intégrale par $+\infty$, ce qui ne fait apparaître que des termes exponentiellement petits, donc ayant un développement asymptotique nul, que l'on peut mettre de côté.

Selon la proposition 26 donnée en annexe, ces termes égaux à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(1)$. Ce qui permet de mettre de côté les puissances négatives de η , qui sont donc des artefacts d'écriture.

Dans cette équation, nous substituons alors aux fonctions S et P le terme principal d'ordre K de leurs développements de Taylor, et à $\underline{\beta}_K$ (resp. $\underline{\alpha}_K, \underline{v}_K$) le pendant topologique de $\hat{\underline{\beta}}_K$ (resp. $\hat{\underline{\alpha}}_K, \hat{\underline{v}}_K$).

Nous ramenons ainsi notre étude aux termes de la forme

$$e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t \left(w_n(\xi) \eta^n - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w_n(s) \eta^n e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds} \xi^L \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi, \text{ où } w_n \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$$

$$\text{ou } e^{(t/\eta)^{p+1}} \int_{+\infty}^t \left(\bar{\psi}_{n,k}(\xi/\eta) \eta^m - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}_{n,k}(s/\eta) \eta^m e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^L e^{-(s/\eta)^{p+1}} ds} \xi^L \right) e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$$

où n et m sont des entiers quelconques, et $k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$.

Selon la proposition 16, ces expressions sont respectivement les fonctions $\mathcal{I}_\eta(w_n(X) \eta^n)$ et $\mathcal{I}_\eta(X^n \mathcal{I}_\eta(X^k)(X) \eta^m)$.

De plus, quitte à mettre de côté les termes d'ordre $\bowtie$ supérieur à $K+1$, le lemme 4 affirme que nous pouvons ainsi définir un pendant formel $\hat{\underline{u}}_K$ à $\underline{u}_K$ qui satisfait à

$$(\hat{\underline{\alpha}}_K, \hat{\underline{u}}_K) \in \mathcal{A}_K$$

Par suite, nous définissons l'opérateur Ξ_K en posant $\Xi_K(\hat{\underline{\beta}}_K, \hat{\underline{v}}_K) := (\hat{\underline{\alpha}}_K, \hat{\underline{u}}_K)$.

Enfin, par construction, cette suite $(\Xi_k)_k$ est un pendant formel de Ξ_η qui est compatible.

□

Dans la partie qui suit, nous nous intéresserons à montrer que le pré-développement asymptotique de la solution canard que l'on implémente s'écrit de manière unique, ce qui clôturera l'étude des solutions canard de (5.1) dans le cas linéaire.

5.3.3 Unicité d'écriture du développement asymptotique

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction de la section 5.3, l'unicité d'écriture du pré-développement asymptotique est une conséquence directe du résultat suivant :

Théorème 18. *La suite $(\mathcal{A}_k)_k$ est asymptotiquement libre, c'est à dire*

$$\forall K \in \mathbb{N}, \forall c_K \in \mathcal{A}_K, \left[(\tilde{c}_K = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})) \Rightarrow (c_K = 0) \right]$$

Afin de démontrer ce théorème, nous utiliserons le lemme :

Lemme 5. *Pour tout entier i fixé, la famille de fonctions*

$$\mathcal{E}_i := \{T^n : n \in \{0, \dots, p\}\} \cup \{T^i \psi_k(T) : k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}\}$$

est une famille libre

Preuve du lemme :

Afin de montrer ce résultat, nous utiliserons l'opérateur $\mathcal{D}_\eta$, défini dans la partie 5.1.2, dont la définition implique que :

$$\mathcal{D}_\eta(1) = -\frac{p+1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^p, \forall n \in \{1, \dots, p\}, \mathcal{D}_\eta\left(\left(\frac{X}{\eta}\right)^n\right) = n\eta \left(\frac{t}{\eta}\right)^{n-1} - (p+1)\eta^{2n-1} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+n},$$

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}, \mathcal{D}_\eta\left(\psi_k\left(\frac{t}{\eta}\right)\right) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^k + \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}} \left(\frac{t}{\eta}\right)^L, \text{ et}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathcal{D}_\eta\left(\left(\frac{t}{\eta}\right)^i \psi_k\left(\frac{t}{\eta}\right)\right) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{i+k} + \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{i+L} + \frac{i}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{i-1} \psi_k\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

Dans la suite de cette preuve, nous effectuerons un raisonnement par récurrence sur l'entier i :

Initialisation :

Par définition,

$$\mathcal{E}_0 := \{T^n : n \in \{0, \dots, p\}\} \cup \{\psi_k(T) : k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}\}$$

Supposons que l'on ai l'écriture

$$\mu_0 + \sum_{n=1}^p \mu_n T^n + \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} \nu_k \psi_k(T) = 0$$

L'application de l'opérateur linéaire $\mathcal{D}_\eta$ la transforme alors en

$$-\frac{p+1}{\eta} \mu_0 T^p + \sum_{n=1}^p (n\eta \mu_n T^{n-1} - (p+1)\eta^{2n-1} \mu_n T^{p+n}) + \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} \left(\frac{1}{\eta} \nu_k T^k + \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}} \nu_k T^L \right) = 0$$

Comme la famille $\{T^m : m \in \{0, \dots, 2p\}\}$ est une famille libre et que, pour tout $n \in \{0, \dots, p\}$, le coefficient $-(p+1)\eta^{2n-1} \mu_n T^{p+n}$ est le seul représentant de T^{p+n} , on en déduit que tous les μ_n sont nuls.

Puis, comme $k \neq L$, on en déduit que tous les ν_k le sont aussi.

Hérédité : Nous supposons fixé un entier $i \geq 1$.

Comme lors de la phase d'initialisation, nous commençons par remarquer que la famille $\mathcal{D}_\eta(\mathcal{E}_i)$ est composée de termes du type suivants :

$$-\frac{p+1}{\eta}T^p, \quad n\eta T^{n-1} - (p+1)\eta^{2n-1}T^{p+n}, \quad \frac{1}{\eta}T^{i+k} + \frac{\lambda_{t^k}}{\eta^{k-L+1}}T^{i+L} + \frac{i}{\eta}T^{i-1}\psi_k(T)$$

où $n \in \{0, \dots, p\}$, et $k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$.

Tous ces termes sont engendrés par $\mathcal{E}_{i-1}$ qui est, par hypothèse de récurrence, une famille libre. En traitant alors tout d'abord les termes de la forme T^{p+n} puis comme, selon la proposition 20, la famille des fonctions ψ_k est libre, on en déduit que $\mathcal{E}_i$ est une famille libre.

Ce qui clôt la récurrence.

□

Démonstration du théorème :

Rappelons que, par définition de $\mathcal{A}_K$, si l'on se donne $c_K \in \mathcal{A}_K$ alors

$$c_K = \left(\sum_{n=0}^K a_n \eta^n, \sum_{n=0}^K \left(u_n(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \bar{\psi}_{i,k} \right) \eta^n \right)$$

L'unicité d'écriture du premier membre étant évidente, nous nous intéresserons au second membre, et nous raisonnerons par récurrence sur l'entier K .

Donnons nous un élément $c_K \in \mathcal{A}_K$, et supposons que son pendant topologique $\tilde{c}_K$ est égal à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$. Par définition nous avons donc, pour tout $t \in [-t_1, t_1]$:

$$\left| \sum_{n=0}^K \left(u_n(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \left[\left(\frac{t}{\eta} \right)^i \tilde{\psi}_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \right) \eta^n \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1}) \quad (5.7)$$

Pour $K = 0$ nous arrivons, par définition de $\boxtimes$, à

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \quad \left| u_0(t) + \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{0,k} \left[\tilde{\psi}_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$$

En raisonnons de même que dans la phase d'hérédité qui suit, nous en déduisons que la fonction u_0 est nulle, et que $u_{0,k} = 0$.

Afin de prouver l'hérédité nous supposons que, par hypothèse de récurrence, la propriété est vraie au rang $K - 1$.

Comme, par définition de $\boxtimes$ et de $\mathcal{C}_K$, nous savons que

$$\left| \left(u_K(t) + \sum_{i=0}^K \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \left[\left(\frac{t}{\eta} \right)^i \tilde{\psi}_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \right) \eta^K \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^K)$$

Nous déduisons alors de (5.7) que

$$\left| \sum_{n=0}^{K-1} \left(u_n(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \left[\left(\frac{t}{\eta} \right)^i \tilde{\psi}_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \right) \eta^n \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^K)$$

Ce qui implique, par hypothèse de récurrence, que

$$\forall n \in \{0, \dots, K-1\}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}, u_n = 0, \text{ et } u_{i,k} = 0$$

Ainsi l'équation (5.7) se récrit

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \left| u_K(t) + \sum_{i=0}^K \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \left[\left(\frac{t}{\eta} \right)^i \tilde{\psi}_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right] \right| = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$$

Comme, par construction, les fonctions $T \mapsto [T^i \tilde{\psi}_k(T)]$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur tout $\mathbb{R}$, une étude pour $t = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$ nous permet de conclure que $u_K = 0$.

De plus, la formule (5.5), et le lemme précédent impliquent que la famille finie

$$\left\{ [T^i \tilde{\psi}_k(T)] : i \in \{0, \dots, K\}, k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\} \right\}$$

est linéairement indépendante. Ce qui nous permet de conclure la phase d'hérédité.

□

Les deux derniers théorèmes que nous avons démontré nous permettent ainsi de mettre en place la correspondance, tout en nous garantissant l'unicité d'écriture des développements asymptotiques implémentés. Ce qui nous amène à :

Théorème 19. *Dans le cas où l'équation (5.1) est linéaire, sa solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$ admet un développement asymptotique en puissances de η de la forme*

$$\left(\sum_n a_n \eta^n, \sum_n \left(u_n(t) + \sum_{i=0}^n \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} u_{i,k} \bar{\psi}_{i,k} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^n \right)$$

Ce dernier résultat est d'autant plus important qu'il montre que nous avons ainsi implémenté un développement asymptotique, uniforme en η , valable sur tout l'intervalle $[-t_1, t_1]$.

Remarque :

La présentation d'un tel développement asymptotique de la fonction canard sous la forme

$$\sum_l \left(u_l(t) + \sum_{k=0, k \neq L}^{p-1} \phi_{k,l} \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^l$$

nous permet de remarquer qu'il peut être utilisé comme un développement asymptotique de l'équation régulièrement perturbée associée (obtenue par application de la loupe associée aux poids $(1, 1, p - L + 1)$ pour (t, u, α)), défini sur un domaine qui croît lorsque η tend vers 0.

Ce qui permet de mener, par le changement de variable $\tau = \frac{t}{\eta}$, une étude locale de la fonction canard au voisinage de $t = 0$.

À la fin de la section 5.4, nous reviendrons plus précisément sur cette remarque.

5.4 Implémentation dans le cas général

Dans l'ensemble de cette section, nous nous intéresserons au cas où la fonction P n'est plus nécessairement linéaire en v .

Dans une première partie, nous commenterons le déroulement de l'implémentation de la correspondance lorsque l'on fait le choix "naturel" de fonctions intermédiaires prolongeant celui commenté dans la partie 5.3.1. Puis, dans une seconde partie, nous nous intéresserons au choix prolongeant celui qui a été finalement privilégié.

5.4.1 Commentaires sur le choix "naturel" d'ensembles

Dans le cas où la fonction P est linéaire en v , nous avons signalé que le choix "naturel" de fonctions intermédiaires consistait en les fonctions du type $X^i \mathcal{I}_\eta(X^k)$. Mais, si l'on souhaite poursuivre sur cette voie, contrairement au cas de linéarité en $\underline{v}$ de la fonction P , il est nécessaire d'ajouter à la famille des fonctions intermédiaires les fonctions générées par produit, comme la fonction $\mathcal{I}_\eta(X^k) \mathcal{I}_\eta(X^l)$, mais aussi celles engendrées en conséquence par composition par $\mathcal{I}_\eta$, comme la fonction $\mathcal{I}_\eta(X^i \mathcal{I}_\eta(X^k) \mathcal{I}_\eta(X^l))$, que l'on ne contrôle plus par application d'un résultat similaire au théorème 15.

Modulo la définition précise d'un ordre $\boxtimes$ associé à chacune de ces fonctions, la famille $\mathcal{F}$ résultant de toutes ces interactions permet d'engendrer les ensembles $\mathcal{A}_k$ amenant la mise en place de la correspondance qui permet de montrer l'existence de pré-développements asymptotiques en puissances de η des solutions canard.

Mais cette famille de fonctions intermédiaires, en plus d'être infinie, ne permet pas de conclure à l'unicité d'écriture d'un tel pré-développement asymptotique.

C'est pourquoi il est nécessaire d'exhiber toutes les propriétés liant les fonctions intermédiaires, qui nous serviront de critères afin d'extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille $\mathcal{S}$ engendrant une famille $(\mathcal{A}_k)_k$ qui soit asymptotiquement libre, et donc les pré-développements

asymptotiques. La question de la construction de $\mathcal{S}$ restant ouverte.

Tout d'abord, nous construisons la famille infinie $\mathcal{F}$ comme la limite inductive de la suite $(\mathcal{F}_k)_k$ définie par

$$\mathcal{F}_0 := \{1\} \text{ et } \forall k \geq 1, \mathcal{F}_k := (t \mathcal{F}_{k-1}) \cup (\eta \mathcal{F}_{k-1}) \cup_{k=0}^{p-1} (\mathcal{I}_\eta(X^k) \mathcal{F}_{k-1}) \cup \mathcal{I}_\eta(\mathcal{F}_{k-1})$$

En définissant, de même que dans la section 5.3, les ensembles $\mathcal{A}_k$ et $\hat{\mathcal{A}}$ à partir de cette famille, nous montrons, de la même façon que dans le cas où la fonction P est linéaire en v , que l'opérateur Ξ_η induit une suite d'opérateurs formels $(\Xi_k)_k$, telle que $\Xi_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k$, qui est un pendant formel de Ξ_η compatible, donc qui permet d'appliquer le théorème 10. Ce qui nous amène à conclure que :

Proposition 22. *La solution canard de (5.1) admet au moins un pré-développement asymptotique en puissances de η qui appartient à $\hat{\mathcal{A}}$.*

Cette construction amène des questionnements comme le manque de contrôle de l'ordre $\mathfrak{X}$, et le manque de maîtrise sur les interactions entre les fonctions intermédiaires.

Pour conclure cette partie, nous donnons toutes les propriétés de $\mathcal{I}_\eta$ que nous connaissons. Ce qui nous permettra d'extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille $\mathcal{S}$ permettant d'engendrer une famille $(\mathcal{A}_k)_k$ asymptotiquement libre amenant à l'implémentation des pré-développements asymptotiques en puissances de η des solutions canard de (5.1) sous la forme cherchée, par la correspondance présentée dans la section 4.4.

Malheureusement, nous ne montrons pas que nous en avons trouvé un nombre suffisant nous permettant de conclure que la sous-famille génératrice ainsi extraite amène à une famille $(\mathcal{A}_k)_k$ qui est effectivement asymptotiquement libre, bien que les tests sur ordinateur nous permettent de conjecturer que ce soit le cas.

Rappelons tout d'abord les formules suivantes, dont nous commenterons l'application que l'on en fait en signalant les fonctions de $\mathcal{F}$ que l'on peut ainsi exclure de la sous-famille $\mathcal{S}$:

Proposition 23. *$\mathcal{I}_\eta$ satisfait aux propriétés suivantes :*

- $\mathcal{I}_\eta(u + v) = \mathcal{I}_\eta(u) + \mathcal{I}_\eta(v)$

Cette propriété, et celle qui suit, légitime le fait que $\mathcal{F}$, et donc $\mathcal{S}$, ne soit construite qu'à partir de produits et de composition par $\mathcal{I}_\eta$ d'autres fonctions intermédiaires, et non pas de combinaisons linéaires.

C'est à dire que l'on a restreint le choix de fonctions intermédiaires aux monômes.

- Pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{I}_\eta(g(\eta) v) = g(\eta) \mathcal{I}_\eta(v)$

Cette propriété nous permet d'exclure de $\mathcal{S}$ tout terme contenant la forme $\mathcal{I}_\eta(\eta^l v)$.

Les fonctions du type $\eta^l \mathcal{I}_\eta(v)$ étant, par choix, dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$.

- $\forall t, \mathcal{I}_\eta(X^L)(t) = 0$
Cette propriété nous permet d'exclure de $\mathcal{S}$ tout terme contenant la forme $\mathcal{I}_\eta(X^L)$.
- $\forall t, \mathcal{I}_\eta(X^p)(t) = \frac{-1}{p+1}\eta^{p+1}$
Cette propriété nous permet d'exclure de $\mathcal{S}$ tout terme contenant la forme $\mathcal{I}_\eta(X^p)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{I}_\eta(X^{k+p+1}) = \frac{1}{p+1}\eta^{p+1} ((k+1)\mathcal{I}_\eta(X^k) - X^{k+1})$
Cette propriété nous permet, pour tout entier k , d'exclure de $\mathcal{S}$ tout terme contenant la forme $\mathcal{I}_\eta(X^{k+p+1})$ comme, par exemple, $\mathcal{I}_\eta(X^l \mathcal{I}_\eta(X^{k+p+1}))$.
- $t^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u) = \mathcal{I}_\eta(X^{k+1}u) + \lambda_u \mathcal{I}_\eta(X^{k+L+1}) + (k+1)\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u))$

L'interprétation de cette dernière formule est moins immédiate. Notre première lecture est de constater qu'il nous faut choisir de conserver deux formes parmi les trois suivantes :

$$t^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u), \mathcal{I}_\eta(X^{k+1}u), \text{ et } \mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u))$$

La structure des fonctions intermédiaires choisies nous amène à choisir de conserver les deux premières formes, qui apparaissent naturellement comme des choix de fonctions intermédiaires. Par suite, nous choisissons d'exclure de $\mathcal{S}$ tout terme contenant la forme $\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u))$, où u est un élément de $\mathcal{S}$, et $k \in \mathbb{N}$.

Prendre cette convention nous permettra de ne pas avoir de puissances de t intercalées dans l'écriture des fonctions comme c'est le cas pour $\mathcal{I}_\eta(\mathcal{I}_\eta(X^2 \mathcal{I}_\eta(X^5)))$.

Nous utiliserons donc la formule précédente sous la forme

$$\mathcal{I}_\eta(X^k \mathcal{I}_\eta(u)) = \frac{1}{k+1} (t^{k+1}\mathcal{I}_\eta(u) - \mathcal{I}_\eta(X^{k+1}u) - \lambda_u \mathcal{I}_\eta(X^{k+L+1}))$$

Enfin, nous avons une dernière formule qui permet d'écarter de la sous-famille $\mathcal{S}$ les termes contenant des formes du type $\mathcal{I}_\eta(X^{k+p} \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i))$ où, pour tout i , u_i désigne un élément de $\mathcal{S}$.

Comme le cas $N = 1$ admet un résultat plus général du même type, nous serons intéressés par l'application de cette formule pour $N \geq 2$.

Afin de démontrer cette formule on commence par montrer, par récurrence sur $N \geq 2$, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\eta(X^k \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i))(t) &= \left(kt^{k-1} + (N-1)(p+1) \frac{1}{\eta^{p+1}} t^{k+p} \right) \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i)(t) + \dots \\ &\quad + t^k \sum_{j=1}^N ((u_j - \lambda_{u_j} t^L) \Pi_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{I}_\eta(u_l)(t)) \end{aligned}$$

Puis, en appliquant $\mathcal{I}_\eta$ à cette formule, et en réorganisant les termes, on en conclut que pour tout $N \geq 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{I}_\eta(X^{k+p} \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i)) = -\frac{1}{(N-1)(p+1)} \eta^{p+1} [k \mathcal{I}_\eta(X^{k-1} \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i)) + \dots]$$

$$+ \sum_{j=1}^N \mathcal{I}_\eta (X^k u_j \Pi_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{I}_\eta(u_l)) + \sum_{j=1}^N \lambda_{u_j} \mathcal{I}_\eta (X^{k+L} \Pi_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{I}_\eta(u_l)) - t^k \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i) \Big]$$

qui est la formule annoncée.

En particulier, en prenant $k = 0$, on en déduit que pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\eta(X^p \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i)) = & -\frac{1}{(N-1)(p+1)} \eta^{p+1} \left[\sum_{j=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_j \Pi_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{I}_\eta(u_l)) + \dots \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^N \lambda_{u_j} \mathcal{I}_\eta(X^L \Pi_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{I}_\eta(u_l)) - \Pi_{i=1}^N \mathcal{I}_\eta(u_i) \right] \end{aligned}$$

Si nous avons ainsi obtenu des critères nous permettant d'extraire de $\mathcal{F}$ une sous-famille $\mathcal{S}$, nous n'avons pas montré que cela amène la famille $(\mathcal{A}_k)_k$ sous-jacente à être asymptotiquement libre. Ainsi nous ne pouvons pas conclure à l'unicité d'écriture de ce développement, bien qu'il semble raisonnable de le conjecturer :

En effet nous avons constaté numériquement que, pour un choix polynomial de P (comme $u^2 + t$), le terme principal d'ordre **15** d'un pré-développement asymptotique, construit à partir de la sous-famille $\mathcal{S}$, que l'on suppose nul, a tous ses coefficients nuls. Ce qui nous conduit à conjecturer que la suite $(\mathcal{A}_k)_k$ constituée à partir de la famille $\mathcal{S}$ serait effectivement asymptotiquement libre. Auquel cas, nous en déduirions l'unicité d'écriture du pré-développement asymptotique en puissances de η implémenté.

5.4.2 Commentaires sur le choix privilégié d'ensembles

Dans cette partie, nous partons du choix privilégié de fonctions intermédiaires que nous avons pris dans la section 5.3, c'est à dire $t^i \eta^l$ et $[T^i \psi_k(T)] \eta^{i+l}$.

Comme dans la partie précédente, nous pouvons définir un processus constructif permettant de définir la famille de fonctions intermédiaires $\mathcal{F}$ nécessaire à l'implémentation de développements asymptotiques dans le cas général.

Contrairement au choix "naturel" de fonctions intermédiaires, la définition de $[\cdot]$ nous permet ici d'expliciter l'ordre de tous ces monômes :

$$\mathfrak{X}(t^i \eta^l) = l, \text{ et } \mathfrak{X}([T^i \psi_{k_1}(T) \dots \psi_{k_n}(T)] \eta^{i+l}) = i + l$$

En définissant alors les ensembles $\mathcal{A}_K$ comme des espaces vectoriels engendrés par les "monômes" d'ordre inférieur ou égal à K , nous montrons de la même façon que dans la partie 4.3.2 que :

Proposition 24. *La solution canard de (5.1) admet au moins un pré-développement asymptotique en puissances de η qui appartient à $\hat{\mathcal{A}}$.*

Comme pour le choix "naturel" de fonctions intermédiaires évoqué dans la partie 5.4.1, la constitution de la famille $\mathcal{F}$ ne prend pas en compte les possibles interactions entre ses fonctions intermédiaires. Ce qui explique que nous ne pouvons pas énoncer de résultat concernant l'unicité d'écriture.

Par exemple, nous ne savons rien de la décomposition en combinaison linéaire finie d'éléments de cette famille pour un terme comme, par exemple, $\mathcal{I}_\eta(\bar{\psi}_{i,k}\bar{\psi}_{j,l})$.

Néanmoins, nous pouvons pallier à cela en proposant un résultat plus général d'existence et d'unicité d'écriture de développements asymptotiques des solutions canard. Ce résultat nécessite l'ensemble suivant :

Notation : Nous noterons $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de la variable T admettant un développement asymptotique en puissances négatives de cette variable en $+\infty$ (resp. $-\infty$), qui sont identiques.

Remarquons que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, p-1\} \setminus \{L\}$, $\bar{\psi}_{i,k} \in \mathcal{D}$.

Avec cette notation, nous pouvons remarquer que la proposition énoncée précédemment implique que la fonction canard admet au moins pré-développement asymptotique de la forme :

$$\underline{u}^*(t, \eta) \sim \sum_k \left(\underline{u}_k(t) + \phi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^k$$

où, pour tout entier k , $\underline{u}_k \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$ et $\phi_k \in \mathcal{D}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Et, une étude de ces développements par récurrence, utilisant le changement de variable $t = s\eta$, nous amène alors au résultat :

Théorème 20. La solution canard $(\underline{\alpha}^*, \underline{u}^*)$ de (5.1) admet un développement asymptotique en puissances de η de la forme

$$\left(\sum_l \underline{a}_l \eta^l, \sum_k \left(\underline{u}_k(t) + \phi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^k \right)$$

où, pour tout entier k , $\underline{u}_k \in \mathcal{C}^\infty([-t_1, t_1])$ et $\phi_k \in \mathcal{D}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Démonstration succincte :

La démonstration concernant l'unicité d'écriture du paramètre étant triviale, nous nous intéressons à la fonction.

De la même façon que pour prouver l'unicité d'écriture du semi-développement asymptotique dans le cas linéaire nous supposons par hypothèse de récurrence que si, pour un entier K fixé

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \sum_{k=0}^{K-1} \left(\underline{u}_k(t) + \phi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^k = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^K)$$

alors tous les coefficients de ce développement sont nuls.

Pour montrer l'hérédité de la récurrence, nous supposons donc que

$$\forall t \in [-t_1, t_1], \sum_{k=0}^K \left(\underline{u}_k(t) + \phi_k \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^k = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$$

Comme le terme $\left(\underline{u}_K(t) + \phi_K \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^K$ est, par définition de $\mathfrak{X}$, égal à $\mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^K)$, l'hypothèse de récurrence nous amène à

$$\left(\underline{u}_K(t) + \phi_K \left(\frac{t}{\eta} \right) \right) \eta^K = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{K+1})$$

que l'on peut récrire

$$\underline{u}_K(t) + \phi_K \left(\frac{t}{\eta} \right) = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta)$$

En faisant tendre η vers 0, la définition de ϕ_K implique que $\underline{u}_K = 0$.

Enfin, l'étude du développement de ϕ_K nous amène à $\phi_K = 0$.

□

Ce dernier résultat est d'autant plus important qu'il montre que nous avons ainsi l'existence et l'unicité d'écriture d'un développement asymptotique, uniforme en η , valable sur tout l'intervalle $[-t_1, t_1]$.

Remarque 1 :

Sous cette forme, ce développement peut être utilisé comme un développement asymptotique de l'équation régulièrement perturbée associée (obtenue par application de la loupe associée aux poids $(1, 1, p - L + 1)$ pour (t, u, α)), défini sur un domaine qui croît lorsque η tend vers 0.

Ce qui permet de mener, par le changement de variable $\tau = \frac{t}{\eta}$, une étude locale de la fonction canard au voisinage de $t = 0$.

Remarque 2 :

Le défaut d'unicité constaté précédemment vient donc bien des interactions mentionnés précédemment. Ce qui montre que ce résultat a été obtenu au prix de la perte d'un procédé constructif de calcul d'un tel développement asymptotique.

5.5 Une autre piste : les transséries

Une autre piste à explorer concerne la comparaison entre les développements asymptotiques que nous cherchons à implémenter et les *transséries* [12][13][14][1]. Rappelons qu'une transsérie est une expression formelle de la forme

$$\sum_{n \geq 0, k \geq 0} a_{n,k} x^{-k} e^{nax} x^{nb}$$

En écrivant ces séries sous la forme

$$\sum_{n \geq 0} e^{nax} x^{nb} \left(\sum_{k \geq 0} a_{n,k} x^{-k} \right)$$

Remarquons que l'ensemble des transséries s'identifie à l'ensemble $(\mathbb{C}[[x^{-1}]])[[e^{ax}x^b]]$.

Ces objets ont été étudiés par O. Costin qui a établi une correspondance biunivoque entre les solutions transséries et les solutions analytiques d'une équation du type

$$y' = f_0(x) - y - x^{-1}\beta y + g_0(x^{-1}, y)$$

pour laquelle la singularité est en $x \simeq +\infty$, et où :

- la fonction f_0 est analytique en 0 et satisfait à

$$f_0(x^{-1}) = \mathcal{O}_{x \rightarrow \infty}(x^{-2})$$

- la fonction g_0 est analytique en $(0, 0)$ et satisfait à

$$g_0(x^{-1}, y) = \mathcal{O}_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0}(x^{-2}y, y^2)$$

Les transséries apparaissent ainsi comme une généralisation des développements asymptotiques combinés vus dans la section 4.6.

Pour revenir à notre problème, comme les transséries sont composées de puissances négatives de x et de termes exponentiellement petits, il est probable qu'elles apparaissent comme une généralisation du développement de la solution canard de (5.1) pris avec la couche limite que nous lui avons retiré dans notre étude.

Annexe A

Estimation d'intégrales

*La musique est une mathématique sonore,
la mathématique une musique silencieuse.*

Édouard Herriot

Dans cette annexe, nous présentons tout d'abord deux résultats d'estimation d'intégrales que nous utiliserons dans le chapitre 2, dans lequel la démonstration proposée utilise le langage de l'analyse nonstandard. Pour cette raison, les résultats présentés ici seront énoncés avec cette terminologie.

Pour conclure cette annexe, nous donnerons une version "standard" des résultats présentés.

Lemme 6. *Soit $t_0 > 0$, et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tous trois supposés standard, et soit $\eta > 0$ tel que $\eta \simeq 0$.*

Alors l'application $I_q : t \in [0, t_0] \mapsto \int_t^{t_0} \xi^q e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$ satisfait à :

$$I_q(t) = \begin{cases} @ \eta^{q+1} = @ \eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} & \text{si } |t| = \mathcal{L} \eta \\ \mathcal{L} \eta^{q+1} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}} & \text{si } t \neq \mathcal{L} \eta \end{cases}$$

Ce lemme consiste en une estimation d'intégrale dépendant de deux paramètres t et η . D'une certaine manière, il s'agit donc d'un problème d'asymptotique à plusieurs paramètres pour lequel les techniques nonstandard sont bien adaptées.

Preuve du lemme 6 :

Le changement de variable $y := \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{p+1}$ amène à l'expression

$$I_q(t) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \int_{(t/\eta)^{p+1}}^{(t_0/\eta)^{p+1}} y^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-y} dy$$

qui présente l'avantage de ne plus voir le paramètre η apparaître dans l'intégrande.

- *Cas où t est au plus de l'ordre de η :*

Dans ce cas, $\frac{t}{\eta}$ est limité, et il existe donc un unique nombre standard $a \in [0, t_0]$ qui satisfait à $\left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1} \simeq a$.

Comme l'intégrande est standard et intégrable, on peut écrire

$$I_q(t) = \frac{\eta^{q+1}}{p+1} \left(\int_a^{+\infty} y^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-y} dy + \oslash \right)$$

d'où l'on déduit l'estimation

$$I_q(t) = @\eta^{q+1}$$

- *Cas où t est d'ordre strictement supérieur à celui de η :*

Dans ce cas on a $\left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1} \simeq +\infty$, et les deux bornes de l'intégrale sont donc infiniment grandes. On ramène la plus petite à 0 par le changement de variable $y =: \left(\frac{t}{\eta}\right)^{p+1} + z$, qui conduit à la nouvelle expression

$$I_q(t) = \frac{\eta^{p+1}}{p+1} t^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \int_0^{(t_0/\eta)^{p+1} - (t/\eta)^{p+1}} \left(1 + \left(\frac{\eta}{t}\right)^{p+1} z\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-z} dz$$

De plus, comme l'intégrande est une fonction positive, nous avons la majoration suivante :

$$0 \leq \int_0^{(t_0/\eta)^{p+1} - (t/\eta)^{p+1}} \left(1 + \left(\frac{\eta}{t}\right)^{p+1} z\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-z} dz \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{t}\right)^{p+1} z\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-z} dz$$

La dernière fonction intégrée est dominée par la fonction $z \mapsto e^{-z}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et, comme $\frac{\eta}{t} \simeq 0$ alors, par continuité sous le signe somme, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{\eta}{t}\right)^{p+1} z\right)^{\frac{q-p}{p+1}} e^{-z} dz \simeq \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = 1$$

d'où l'on déduit la majoration $0 \leq I_q(t) \leq \frac{\eta^{p+1}}{p+1} t^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}} (1 + \oslash)$, qui conduit à l'estimation

$$I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{p+1} t^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

□

Proposition 25. *En reprenant les notations du lemme précédent, mais en se donnant un entier q limité quelconque, nous pouvons écrire que pour tout $t \in [0, t_0]$:*

$$I_q(t) = \begin{cases} \mathcal{L}\eta^{q+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}} & \text{si } q < p \\ \mathcal{L}\eta^{p+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}} & \text{si } q \geq p \end{cases} = \mathcal{L}\eta^{\min\{q,p\}+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

Preuve de la proposition 25 :

Dans tous les cas, le lemme 6 montre que, si $|t| = \mathcal{L}\eta$, nous avons l'estimation

$$I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{q+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

Ainsi, l'étude de la fonction I_q découlera de l'étude du cas $|t| \neq \mathcal{L}\eta$, pour lequel le lemme 6 fournit comme estimation

$$I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{q+1} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

Nous supposons donc que $|t| \neq \mathcal{L}\eta$.

- Dans le cas $q < p$:

La quantité $q - p$ est négative, ce qui implique que $\left(\frac{t}{\eta}\right)^{q-p}$ est infinitésimal, d'où l'on déduit que

$$I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{q+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

- Dans le cas $q \geq p$:

La quantité $q - p$ est positive, ce qui implique que $\left(\frac{t}{\eta}\right)^{q-p}$ n'est pas infinitésimal. Ainsi, du fait que t reste toujours limité, nous avons l'estimation

$$I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{q+1}\eta^{p-q}t^{q-p}e^{-(t/\eta)^{p+1}} = \mathcal{L}\eta^{p+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}}$$

□

Remarque :

On retrouve ce résultat en intégrant par partie la fonction I_{q+p+1} , ce qui fournit la relation

$$\begin{aligned} I_{q+p+1}(t) &= \eta^{p+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}} \left(\frac{-1}{p+1} (t_0^{q+1}e^{-((t_0-t)/\eta)^{p+1}} - t^{q+1}) \right) + \frac{q+1}{p+1}\eta^{p+1}I_q(t) \\ &= \mathcal{L}\eta^{p+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}} + \mathcal{L}\eta^{p+1}I_q(t) = \mathcal{L}\eta^{p+1}e^{-(t/\eta)^{p+1}} \end{aligned}$$

Pour conclure cette annexe, nous donnons un équivalent "standard" de ces deux derniers résultats tels qu'il seront utilisés dans les deux derniers chapitres :

Proposition 26. Soit $t_0 > 0$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, et $\eta \in]0, \eta_0[$ que l'on fait tendre vers 0. Alors l'application $I_q : (t, \eta) \in [0, t_0] \times]0, \eta_0[\mapsto \int_t^{t_0} \xi^q e^{-(\xi/\eta)^{p+1}} d\xi$ satisfait à :

$$I_q(t, \eta) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{q+1}) & \text{si } t = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta) \\ \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0} \left(\eta^{q+1} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{q-p} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) & \text{si } t \neq \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta) \end{cases}$$

Elle satisfait aussi à

$$I_q(t, \eta) = \begin{cases} \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}}) & \text{si } q < p \\ \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{p+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}}) & \text{si } q \geq p \end{cases} = \mathcal{O}_{\eta \rightarrow 0}(\eta^{\min\{q, p\}+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}})$$

Preuve : Ce résultat est la transcription en langage classique du lemme 6 et de la proposition 25. Nous allons détailler le premier résultat, que l'on obtient par application de l'algorithme de Nelson :

Selon le lemme 6, on a

$$I_q(t) = @\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \text{ si } |t| = \mathcal{L}\eta$$

Ce qui se traduit formellement par :

$$\forall(t, \eta), \left[\left(\exists^{st} a > 0; \frac{t}{\eta} \leq a \right) \Rightarrow \left(\exists^{st} n, N > 0; n\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \leq I_q(t, \eta) \leq N\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) \right]$$

que l'algorithme de Nelson transforme en

$$\forall(t, \eta), \forall^{st} a > 0, \exists^{st} n, N > 0; \left[\left(\frac{t}{\eta} \leq a \right) \Rightarrow \left(n\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \leq I_q(t, \eta) \leq N\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) \right]$$

L'axiome d'idéalisation nous amène alors à la formule

$$\forall^{st} a, \exists^{st} \mathcal{F}, \text{ fini}; \forall(t, \eta), \exists n, N \in \mathcal{F}; \left[\left(\frac{t}{\eta} \leq a \right) \Rightarrow \left(n\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \leq I_q(t, \eta) \leq N\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) \right]$$

Et l'axiome de transfert nous amène alors à la propriété équivalente

$$\forall a, \exists \mathcal{F}, \text{ fini}; \forall(t, \eta), \exists n, N \in \mathcal{F}; \left[\left(\frac{t}{\eta} \leq a \right) \Rightarrow \left(n\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \leq I_q(t, \eta) \leq N\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) \right]$$

Comme $\mathcal{F}$ est fini, alors le maximum (resp. minimum) de la première (resp. seconde) projection de $\mathcal{F}$ existe. En le notant m (resp. M), nous arrivons à

$$\forall a, \exists m, M > 0; \forall(t, \eta), \left[\left(\frac{t}{\eta} \leq a \right) \Rightarrow \left(m\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \leq I_q(t, \eta) \leq M\eta^{q+1} e^{-(t/\eta)^{p+1}} \right) \right]$$

qui est la transcription formelle du résultat recherché.

De la même façon, on montre les trois autres propriétés énoncées.

□

Bibliographie

- [1] S. Aït-Mokhtar. *Sur les singularités dans le champ complexe des solutions de certaines équations différentielles singulièrement perturbées*. Thèse de doctorat. Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de La Rochelle, 2003.
- [2] É. Benoît. Loupe variable. In *Actes de l'école d'été : Analyse non standard et représentation du réel*, pages 93–102. OPU, (Oran) Alger, 1985.
- [3] É. Benoît, editor. *Dynamic bifurcations*, volume 1493 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [4] É. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, and G. Wallet. Overstability : towards a global study. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(7) :873–878, 1998.
- [5] É. Benoît, A. Fruchard, R. Schäfke, and G. Wallet. Solutions surstables des équations différentielles complexes lentes-rapides à point tournant. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 7(4) :627–658, 1998.
- [6] É. Benoît, A. El Hamidi, and A. Fruchard. On combined asymptotic expansions in singular perturbations. *Electron. J. Differential Equations*, 51 :1–27, 2002.
- [7] J.-L. Callot. *Bifurcation du portrait de phase pour des équations différentielles linéaires du second ordre ayant pour type l'équation d'Hermite*. Thèse. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1981.
- [8] J.-L. Callot. Champs lents-rapides complexes à une dimension lente. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 26(2) :149–173, 1993.
- [9] M. Canalis-Durand. *Solutions Gevrey d'équations différentielles singulièrement perturbées*. Habilitation à Diriger des Recherches. Faculté d'économie appliquée, Université d'Aix-Marseille, 1999.
- [10] M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, R. Schäfke, and Y. Sibuya. Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations. *J. Reine Angew. Math.*, 518 :95–129, 2000.
- [11] P. Cartier. Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. In *Bourbaki Seminar, Vol. 1981/1982*, volume 92 of *Astérisque*, pages 21–44. Soc. Math. France, Paris, 1982.

- [12] O. Costin. Exponential asymptotics, transseries, and generalized Borel summation for analytic, nonlinear, rank-one systems of ordinary differential equations. *Internat. Math. Res. Notices*, 8 :377–417, 1995.
- [13] O. Costin. On Borel summation and Stokes phenomena for rank-1 nonlinear systems of ordinary differential equations. *Duke Math. J.*, 93(2) :289–344, 1998.
- [14] O. Costin and R. D. Costin. On the formation of singularities of solutions of nonlinear differential systems in antistokes directions. *Invent. Math.*, 145(3) :425–485, 2001.
- [15] P. de Maesschalck. *Geometry and Gevrey asymptotics of two dimensional turning points*. PhD thesis. Faculteit Wetenschappen, Limburgs universitair centrum, 2003.
- [16] P. de Maesschalck and F. Dumortier. Time analysis and entry-exit relation near planar turning points. *J. Differential Equations*, 215(2) :225–267, 2005.
- [17] P. de Maesschalck and F. Dumortier. Canard solutions at non-generic turning points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(5) :2291–2334, 2006.
- [18] F. Diener. Développements en ε -ombres. In *Mathematical tools and models for control, systems analysis and signal processing*, volume 3 of *Travaux Rech. Coop. Programme 567*, pages 315–328. CNRS, Paris, 1983.
- [19] F. Diener and M. Diener. Chasse au canard. I Les canards. *Collect. Math.*, 32(1) :37–74, 1981.
- [20] F. Diener and M. Diener, editors. *Non standard analysis in practice*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [21] F. Diener and G. Reeb. *Analyse non standard*, volume 40 of *Collection Enseignement des Sciences*. Hermann, Paris, 1989.
- [22] M. Diener and C. Lobry, editors. *Actes de l'école d'été : Analyse non standard et représentation du réel*. Office des Publications Universitaires, Alger, 1985.
- [23] M. Diener and G. Wallet, editors. *Mathématiques finitaires et analyse non standard, tomes 1 et 2*, volume 31 of *Publications Mathématiques de l'Université Paris VII*. Université de Paris VII, Paris, 1989.
- [24] F. Dumortier and R. Roussarie. *Canard cycles and center manifolds*, volume 121(577). Memoirs of the American Mathematical Society, 1996.
- [25] W. Eckhaus. *Asymptotic analysis of singular perturbations*, volume 9 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.
- [26] W. Eckhaus. Fundamental concepts of matching. *SIAM Rev.*, 36(3) :431–439, 1994.
- [27] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J. Differential Equations*, 31(1) :53–98, 1979.

- [28] T. Forget. Canard solutions near a degenerate turning point. *Journal of physics : conference series*, 55 :74–79, 2006.
- [29] T. Forget. Solutions canard en des points tournants dégénérés. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, accepté pour publication en Janvier 2007.
- [30] A. Fruchard and R. Schäfke. Exceptional complex solutions of the forced van der Pol equation. *Funkcial. Ekvac.*, 42(2) :201–223, 1999.
- [31] A. Fruchard and R. Schäfke. Overstability and resonance. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 53(1) :227–264, 2003.
- [32] A. Fruchard and R. Schäfke. Classification of resonant equations. *J. Differential Equations*, 207(2) :360–391, 2004.
- [33] A. Fruchard and A. Troesch, editors. *Colloque trajectorien à la mémoire de Georges Reeb et Jean-Louis Callot*. Prépublication de l’Institut de Recherche Mathématique Avancée. Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1995.
- [34] M. Goze and R. Lutz. Représentation paramétrique locale des courbes planes. In *Mathématiques finitaires & analyse non standard, Tome 1, 2*, volume 31 of *Publ. Math. Univ. Paris VII*, pages 265–284. Univ. Paris VII, Paris, 1989.
- [35] M. Krupa and P. Szmolyan. Relaxation oscillation and canard explosion. *J. Differential Equations*, 174(2) :312–368, 2001.
- [36] P. A. Lagerstrom. *Matched asymptotic expansions*, volume 76 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [37] J. Mawhin, editor. *Non standard analysis*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin suppl. Société Mathématique de Belgique, Brussels, 1996.
- [38] J. D. Murray. *Asymptotic analysis*, volume 48 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1984.
- [39] A. I. Neishtadt. Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. I. *Differentsial nye Uravneniya*, 23(12) :2060–2067, 2204, 1987.
- [40] A. I. Neishtadt. Prolongation of the loss of stability in the case of dynamic bifurcations. II. *Differentsial nye Uravneniya*, 24(2) :226–233, 364, 1988.
- [41] E. Nelson. Internal set theory : a new approach to non standard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6) :1165–1198, 1977.
- [42] F. W. J. Olver. *Asymptotics and special functions*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York-London, 1974.
- [43] R. E. O’Malley. *Introduction to singular perturbations*. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 14. Academic Press, New York-London, 1974.
- [44] R. E. O’Malley. *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, volume 89 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [45] R. E. O'Malley. Give your ODEs a singular perturbation! *J. Math. Anal. Appl.*, 251(1) :433–450, 2000.
- [46] D. Panazzolo. On the existence of canard solutions. *Publ. Mat.*, 44(2) :503–592, 2000.
- [47] J.-P. Ramis. *Séries divergentes et théories asymptotiques*, volume 121, Panoramas et Synthèses, suppl. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1993.
- [48] C. Stenger. *Points tournants de systèmes d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées*. Thèse de doctorat. Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1999.
- [49] I. van den Berg. *Non standard asymptotic analysis*, volume 1249 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [50] A. B. Vasileva and V. F. Butuzov. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno-vozmushchennykh uravnenii*. Izdat. Nauka, Moscow, 1973.
- [51] G. Wallet. Surstabilité pour une équation différentielle analytique en dimension un. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 40(3) :557–595, 1990.
- [52] G. Wallet. Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2. *Bull. Soc. Math. France*, 122(2) :185–208, 1994.
- [53] W. Wasow. *Linear turning point theory*, volume 54 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [54] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Dover Publications Inc., New York, 1987.
- [55] A. K. Zvonkin and M. A. Shubin. Non standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 39(2(236)) :77–127, 1984.

Table des figures

1.1	Le cycle de relaxation de l'équation de van der Pol dans le plan de Liénard (x, u) , et dans le plan (t, x)	10
1.2	Le comportement des solutions de l'équation de van der Pol avec $\varepsilon = 0.05$, pour les valeurs $a = 0.7 < 1$, et $a = 1.3 > 1$	11
1.3	Les cycles intermédiaires de l'équation de van der Pol, pour $\varepsilon = 0.05$, correspondants respectivement aux valeurs $a = 0.99349093$, et $a = 0.99349094$	12
1.4	Une solution "vrai canard" et une solution "faux canard" dessinées dans le cadre $(x, y) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\varepsilon = 0.05$	14
1.5	Un exemple de solutions d'une équation à canard faible dessinées dans le cadre $(x, y) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\varepsilon = 0.05$	15
1.6	Le graphe de $R(x) = \Re(x^4)$ représenté en 3 dimensions et par ses courbes de niveau	18
1.7	Dans le cas où p est impair, l'axe réel se situe sous deux montagnes . .	20
1.8	Deux trajectoires-type de solutions "vrai" canard qui se décollent de la courbe lente $u_0 = 0$ au voisinage de $x = 0$	21
1.9	Les polyèdres de Newton associés aux deux choix étudiés	22
1.10	Exemple d'une solution ayant une couche limite	25
2.1	Solutions dans le cadre $(t, u) \in [-0.05, -0.05] \times [-0.2, 0.2]$ avec $\eta = 10^{-2}$, pour la valeur $\alpha = -4.950284869 \cdot 10^{-4}$	39
2.2	Solutions dans le cadre $(t, u) \in [-0.05, -0.05] \times [-0.2, 0.2]$ avec $\eta = 10^{-2}$, pour les valeurs $\alpha = -0.7721249673 \cdot 10^{-2}$ et $\alpha = 0.8216278159 \cdot 10^{-2}$.	40
3.1	Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.05$	55
3.2	Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = 0$	55
3.3	Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4(t^2 + t^3 - \eta^4)$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.05$	56
3.4	Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4 t$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.07133893090$	57
3.5	Une solution de l'équation $\eta^4 \dot{u} = 4t^3 u + \alpha t^2 + u^2 + \eta^4$ dans le cadre $(t, u) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ avec $\eta^4 = 0.05$, pour la valeur $\alpha = -0.2$	58