HAL
open science

Détection des corrélations de courant à haute fréquence à l'aide d'un circuit résonnant

Marjorie Creux

To cite this version:

Marjorie Creux. Détection des corrélations de courant à haute fréquence à l'aide d'un circuit résonnant. Physique [physics]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007. Français. NNT : . tel-00148425

HAL Id: tel-00148425

https://theses.hal.science/tel-00148425

Submitted on 22 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la Méditerranée-aix-marseille II
centre de physique théorique

Thèse
pour obtenir le grade de
docteur de l'Université de la Méditerranée
présenté par
Marjorie Creux
spécialité : Physique Théorique

Détections des corrélations de courant à haute fréquence à l'aide d'un circuit résonnant

soutenue le 14 Mai 2007 devant le jury compos de :

Président :	Roland HAYN
Rapporteurs :	Christian GLATTLI
	Thierry JOLICOEUR
Jury :	Adeline CREPIEUX
Directeur de Thèse :	Thierry MARTIN
Invité :	Thibaut JONCKHEERE

Centre de Physique Théorique - Marseille

Table des matières

Introduction **7**

1 Rappels sur le bruit et les corrélations de courant **9**
1.1 Transport . . . 9
1.1.1 Les différents types de chocs . . . 9
1.1.2 Longueurs caractéristiques . . . 10
1.1.3 Transport à la Landauer . . . 11
1.2 Bruit . . . 15
1.2.1 Cas d'un fil unidimensionnel . . . 17
1.2.2 Approche de la méthode de diffusion par la second quantification . . . 18
1.2.3 Bruit en fréquence . . . 22

I Injection de charge **25**

2 Effet Hall quantique fractionnaire et bosonisation **27**
2.1 Approche hydrodynamique . . . 28
2.1.1 Calcul de l'hamiltonien . . . 29
2.1.2 Quantification . . . 29
2.2 Bosonisation . . . 30
2.2.1 Comparaison avec le Liquide de Tomonaga-Luttinger . . . 31
2.2.2 Opérateur de création des électrons . . . 32
2.2.3 Condition sur la fraction de remplissage pour les fermions . . . 32
2.3 Fonction de Green des bosons . . . 33
2.3.1 Fonction de partition . . . 33
2.3.2 Généralités sur les fonctions de Green . . . 34
2.3.3 Fonction de Green bosonique . . . 35

3 Calcul du courant tunnel et des corrélations de courant **37**
3.1 Introduction . . . 37
3.1.1 Comment inclure la tension ? . . . 38
3.2 Courant moyen . . . 38
3.2.1 Calcul du courant tunnel . . . 38
3.2.2 Formalisme Keldysh . . . 39
3.2.3 Courant moyen . . . 41
3.3 Le bruit . . . 43
3.3.1 Fonction de corrélation . . . 44

3.3.2 Le bruit . . . 44

4 Injection de charges **47**
4.1 Modèle . . . 47
4.1.1 Injection de charge dans un conducteur sans interaction . . . 47
4.1.2 Formules de la charge et des fluctuations de charges . . . 48
4.2 Calcul . . . 49
4.2.1 Fonctions de Green . . . 50
4.2.2 Etude des parties oscillantes . . . 51
4.2.3 Produit . . . 52
4.3 Applications . . . 52
4.3.1 Entre deux conducteurs sans interaction . . . 52
4.3.2 Entre un métal normal et un liquide de Hall fractionnaire . . . 53
4.4 Calcul de la valeur finie de de la charge moyenne et des fluctuations de charge . . . 53
4.5 Résultats non perturbatifs dans l'amplitude tunnel . . . 55
4.5.1 Modèle . . . 55
4.5.2 Notre problème . . . 56
4.6 Application à d'autres systèmes . . . 57
4.7 Conclusions . . . 58

II Détection des correlations de bruit **61**

5 Mesure du bruit à fréquence finie **63**
5.1 Modèle de Lesovik et Loosen . . . 63
5.2 Taux absorption et désorption . . . 65

6 Couplage inductif avec un circuit LC dissipatif **67**
6.1 Modèle . . . 67
6.1.1 L'oscillateur dissipatif sans interaction . . . 68
6.2 Calcul des fonctions de Green en absence d'interaction . . . 69
6.2.1 Calcul de la self-énergie . . . 70
6.2.2 Calcul des fonctions de Green avancée, retardée et Keldysh . . . 71
6.3 Détection des fluctuations de courant . . . 73
6.3.1 Transformée de Fourier . . . 73
6.3.2 Résultats . . . 74
6.3.3 Application . . . 75
6.4 Troisième moment en présence de dissipation . . . 77
6.4.1 Transformée de Fourier . . . 78
6.4.2 Application . . . 80
6.5 Conclusions . . . 82

7 Correlations croisées **83**
7.1 Pourquoi mesurer les corrélations croisées à fréquence finie ? . . . 83
7.1.1 Inégalités de Bell . . . 83
7.1.2 Nanotubes de carbone . . . 83
7.2 Modèle . . . 84
7.3 Fluctuations de charge et corrélation de courant . . . 87

7.4 Mesure avec deux circuits LC 88
7.5 Exemple : jonction Y normale 90
7.5.1 Corrélations croisées 90
7.5.2 Résultats 93

Conclusion **95**

Appendices **97**

A Preuve que $\partial_{\bar{z}}(\frac{1}{z}) = \pi\delta^2(x, y)$ **99**

B Généralisation à plusieurs oscillateurs **101**

Bibliographie **103**

Introduction

La physique de la matière condensée se situe dans un cadre très large, puisqu'elle prétend pouvoir décrire les propriétés et phénomènes physiques des solides. Or, la difficulté se situe dans le comportement des solides eux-mêmes. En effet, de part leur dimension, ils sont des corps macroscopiques, qui sont très bien décrits par une approche classique ; néanmoins leurs propriétés peuvent être influencées par celles des atomes constituants le solide ou par l'agencement du réseau cristallin, une approche quantique est alors plus appropriée. De plus, un solide comporte un grand nombre de particules qui est mieux décrit par la physique statistique. Deux démarches peuvent être adoptées, l'approche semi-classique, qui revient à introduire une part de la mécanique quantique à l'approche classique, ou la mécanique quantique statistique, lorsque la nature fermionique ou bosonique des particules est prise en compte.

La physique mésoscopique se situe dans un cadre de taille intermédiaire. Le terme "mésoscopique" définit un système de taille suffisamment petite pour pouvoir être quantique mais le nombre de particules mis en jeu doit rester suffisement grand pour que la description statistique puisse rester valable. Les longueurs choisies sont inférieures à celle de la cohérence de phase des électrons. Les propriétés du système, par exemple le courant moyen, dépendent de celles des électrons, c'est la raison pour laquelle les longueurs sont comparées à celle de la cohérence de phase des électrons.

La naissance de la physique mésoscopique est généralement située en 1957, lorsque Landauer calcula le courant entre deux réservoirs à travers un fil unidimensionnel à l'aide d'une approche de diffusion [1]. Néanmoins, ces travaux restèrent longtemps inaperçus en partie à cause des difficultés expérimentales rencontrées. Il faut attendre les années 80 pour voir apparaître les première mesures grâce au progrès de la fabrication d'échantillons de petite dimension (notamment à l'aide de la lithographie) et des conditions de mesures (refroidissement, isolation électromagnétique).

De plus, grâce à l'essor de la micro-électronique, la miniaturisation des composants devient un enjeu économique et industriel important de ces 20 dernières années. Actuellement, les transistors qui composent les microprocesseurs sont de l'ordre de $0.13\mu m$ et sont très bien décrits par les méthodes semi-classiques. Ces dimensions bien que petites restent supérieures à L_ϕ et les électrons sont encore considérés comme des particules classiques, car les transistors doivent fonctionner à la température ambiante. Dans le cas contraire, une approche purement quantique est obligatoire. En maintenant la miniaturisation, la limite quantique sera vite atteinte et l'intérêt pour la physique mésoscopique est donc renforcé.

Les progrès technologiques réalisés amène la nécessité d'aborder en parallèle des études fondamentales, comme celles présentées dans cette thèse. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la détection du transport électronique dans les systèmes mésoscopiques. La grandeur physique la plus naturelle pour caractériser le transport est la conductance. Elle fut calculée dans les années 50 par Landauer, mais la confirmation expérimentale de sa formulation quantique fut apportée seulement en 1985 [2]. Finalement, elle fut calculée et mesurée dans des systèmes variés et a permis de mettre en évidence l'aspect ondulatoire des fonctions d'ondes. L'aspect corpusculaire est décrit

par les fluctuations du courant, ces fluctuations sont décrites par la transformée de Fourier des corrélations du courant sur lui-même, ces corrélations écrites dans l'espace de Fourier sont "le bruit"[3, 4, 5, 6]. Le bruit est aujourd'hui largement étudié en physique mésoscopique, mais les premiers travaux sont antérieurs à la physique mésoscopique et quantique. Les premiers résultats sur le bruit ont été obtenus par Schottky en 1918 [7] qui a calculé le bruit généré par une source de particules classiques indépendantes. Dans les systèmes mésoscopiques, les premières études se font à la fin des années quatre-vingt et une forme similaire au bruit de Schottky est découverte.

Dans un premier temps, l'effet des interactions électron-électron fut négligé. L'inclusion des interactions dans les calculs perturbatifs représente un challenge car elle nécessite des développements théoriques lourds. C'était le cas dans la théorie des liquides de Fermi qui était pourtant une bonne approximation en 2 et 3 dimensions ; le problème étant ramené à un ensemble de quasi-particules sans interaction. Cependant en 1 dimension, les divergences de la série de perturbation rendaient cette théorie non valable. Les difficultés inhérentes aux divergences furent résolus grâce à la théorie des liquides de Luttinger et la bosonisation[8, 9, 10, 11].

Dans la première partie de cette thèse, nous introduisons la notion de "bruit" en physique mésoscopique et nous présentons les différents travaux et expériences qui furent réalisés. Finalement, nous présentons la théorie de diffusion de Landauer qui permet d'établir l'expression du bruit dans un grand nombre de situations.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à l'injection d'électrons sur un liquide de Luttinger, et en particulier sur un bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous exprimons dans un premier temps, l'expression de l'effet tunnel entre deux bords de l'effet Hall fractionnaire dans un régime stationnaire et nous exposons la théorie de Luttinger et le calcul des fonctions de Green dans une représentation Keldysh. Finalement, nous nous intéressons aux fluctuations de charge lors de l'effet tunnel d'un électron entre un métal normal et un état de bord lorsqu'un pulse de tension est imposé, ceci afin de savoir s'il est possible d'injecter une charge dans cet état de bord de manière contrôlée.

La dernière partie de ma thèse propose de mesurer le bruit à l'aide d'un circuit oscillant couplé inductivement au circuit mésoscopique. Inspiré des travaux de Lesovik et Loosen [12], nous établissons une expression des fluctuations de charge et du troisième moment de la charge moyenne à l'aide d'un circuit dissipatif, nous montrons que la dissipation est essentielle pour obtenir un résultat fini pour le bruit mesuré, qui est une superposition de corrélateurs courant-courant non-symétrisés. Concernant le troisième moment, notre approche permet d'identifier quels corrélateurs de trois courants interviennent dans sa mesure. Le troisième moment de la charge fait apparaître une combinaison de corrélateurs non-symétrisés. Dans un deuxième temps, nous voulons sonder les corrélations croisées à haute fréquence à l'aide d'un circuit comportant deux inductances couplées à deux sorties, ceci permet de mesurer les corrélations courant-courant à fréquence finie.

Chapitre 1

Rappels sur le bruit et les corrélations de courant

1.1 Transport

Le transport dans les matériaux macroscopiques est bien décrit par le modèle classique de Drüde(1900). Les hypothèses de départ de cette théorie sont :

- les électrons sont libres : il n'existe pas d'interaction avec le réseau, les impuretés ou les autres électrons.
- les collisions distribuent la vitesse des électrons, ce qui signifie que la vitesse moyenne des électrons après une collision reste nulle, $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$.

Prenons un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un champ électrique $\vec{E}$. Au temps Δt, après la première collision, la vitesse de l'électron est $\langle \vec{v} \rangle = -e\vec{E}\Delta t/m$. Au bout d'un temps τ, le temps entre deux collisions, l'électron subit un second choc alors que sa vitesse de dérive est égale à : $\langle \vec{v}_{derive} \rangle = -e\vec{E}\tau/m$. Nous pouvons déduire le courant qui traverse le gaz : $\vec{j} = -ne\langle \vec{v}_{derive} \rangle = ne^2\vec{E}\tau/m$, avec n la densité d'électrons. Nous isolons ici la conductivité $\sigma = ne^2\tau/m$.

Nous pouvons faire deux remarques importantes,

- toutes les valeurs que nous venons de voir sont des moyennes sur un grand nombre de collisions, les dimensions du système étudié doivent être bien plus grande que la distance entre deux collisions, $L \gg l_e$;
- nous pouvons nous interroger sur le sens physique de τ, et par conséquent sur les événements qui modifient la vitesse des électrons.

1.1.1 Les différents types de chocs

Les collisions sont de trois sortes :

- la température augmente les vibrations des matériaux. Celles-ci sont quantifiées et leur valeur élémentaire est le phonon. Les électrons peuvent échanger de l'énergie avec le réseau cristallin lors d'un choc électron-phonon. Le temps moyen entre deux chocs électron-phonon est τ_{e-ph} et la distance moyenne entre deux chocs est l_{e-ph}. Les électrons ne conservent pas leur énergie lors d'une telle collision. Il s'agit d'un processus inélastique.
- Le deuxième type de collision inélastique est la collision entre électrons : le temps moyen est τ_{e-e} et la distance est l_{e-e}.
- Le troisième cas concerne les chocs avec les impuretés du réseau, ou avec les défauts cristallins. Lors de ces collisions, les électrons conservent leur énergie, ce processus est élastique. Il

est caractérisé par un temps moyen τ_e et une distance moyenne l_e.

Nous pouvons observer que deux types de collisions ressortent (figure 1.1) : les collisions inélastiques avec leurs temps moyens (τ_{in}) et distances moyennes (l_{in}) et les collisions élastiques (essentiellement les chocs avec des défauts du réseau cristallin) suivies des longueurs l_e et du temps τ_e.

1.1.2 Longueurs caractéristiques

Le passage d'un système classique à un système quantique peut être caractérisé par le gain (la perte) de cohérence de phase. La perte de cohérence de phase se fait lors de chocs inélastiques. Elle est typiquement sondée par une expérience Aharonov-Bohm. Nous avons trois longueurs caractéristiques : la longueur de phase, l_ϕ, le libre parcours moyen, $l_e \ll l_\phi$, et la longueur du système, L. Si la longueur de l'échantillon est inférieure à la longueur de cohérence de phase, $l \ll l_\phi$, l'électron peut être décrit par une onde dont la phase est complètement déterminée, le système est quantique, c'est le cas des systèmes mésoscopiques. Au delà de cette longueur, $l_\phi \gg L$, le système est classique. Deux rgimes peuvent être extraits de ces systèmes donc le paramètre dépend de la longueur de Fermi (λ_F). Lorsque le libre parcours moyen est inférieur à la longueur de Fermi, nous nous retrouvons dans un régime de localisation forte. Pour être situé dans un régime de diffusion, la longueur de Fermi devra être inférieure au libre parcours moyen.

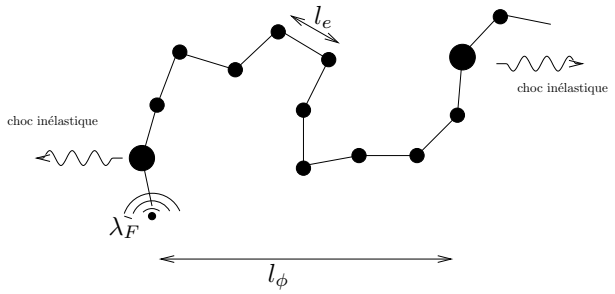

FIG. 1.1 – Schéma du parcours d'un électron de conduction dans un conducteur : l'électron subit des chocs élastiques contre des impuretés, ces chocs sont distants en moyenne de $l_e = v_F\tau_e$ et il subit des chocs inélastiques. L'intervalle de temps entre deux chocs inélastiques est τ_{in} et la distance moyenne $l_{in} = \sqrt{D\tau_{in}}$ avec D le coefficient de diffusion.

	λ_F	l_e	$l_\phi(T < 1K)$
métal	quelques Å	200 Å	quelques μm
semi-conducteur	300 Å	quelques μm	10 à 20 μm

TAB. 1.1 – Ordre de grandeurs de la longueur de Fermi λ_F, le libre parcours moyen l_e et la longueur de phase l_ϕ pour les semi-conducteurs et les métaux.

Dans le cadre d'un échantillon mésoscopique, le système peut être divisé en deux régimes (figure 1.2) :

- la longueur du fil est plus grand que le libre parcours moyen ($L \gg l_e \gg \lambda_F$), les électrons subiront beaucoup de chocs élastiques, le régime est dit diffusif ;

– la longueur du fils est plus petit que le libre parcours moyen alors les électrons subiront peu, voir pas, de chocs et le régime est ballistique.

Pour ces deux régimes, il y a peu de chocs donc le modèle classique, qui nécessite un très grand nombre de collisions pour faire une moyenne, ne convient plus. Il est nécessaire d'utiliser un modèle quantique tenant compte de la dualité onde-corpuscule des électrons.

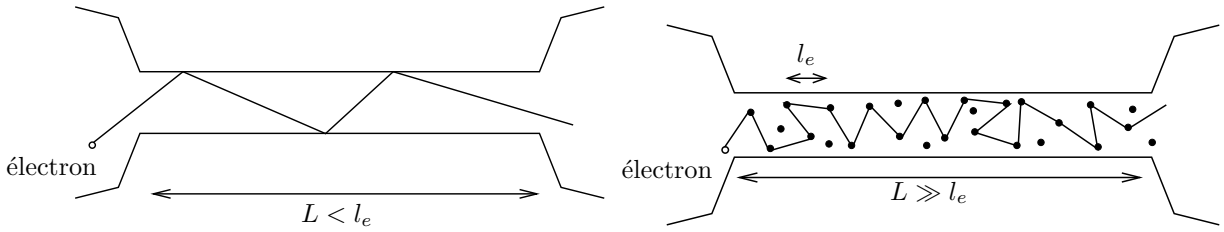

FIG. 1.2 – A gauche : schéma d'un conducteur mésoscopique ballistique, la longueur de l'échantillon est inférieure à l_e et les électrons subissent peu de chocs élastiques. A droite : schéma d'un conducteur diffusif, les électrons subissent beaucoup de chocs élastiques. Dans les deux cas, L est très inférieure à la longueur de cohérence l_ϕ.

1.1.3 Transport à la Landauer

Le premier modèle quantique du transport électronique fût développé en 1957 par Rolf Landauer [1]. Le système qu'il considéra était unidimensionnel, composé de paquets d'ondes, contenant 0 ou 1 particule, réfléchi ou transmi par une zone de diffusion.

Prenons l'exemple de deux fils connectés à un réservoir d'électrons chacun, l'ensemble sera appelé conducteur et les paquets d'onde ne peuvent contenir que 0 ou 1 électron. Les deux conducteurs sont mis en contact par le biais de la zone de diffusion. Les paquets d'ondes incidents sont donc réfléchis avec une probabilité R ou transmis avec une probabilité T. La force de cette méthode réside dans le fait qu'il n'est pas nécessaire de savoir exactement ce qui se passe dans la zone de diffusion, qui agit comme une "boite noire". Cette dernière est d'ailleurs décrite par une matrice de diffusion, également appelée matrice 'S', qui relie les états incidents aux états réfléchis et transmis. Ainsi, lorsque nous avons deux conducteurs, la matrice S a une forme 2×2, car nous pouvons compter deux états entrants (incidents) et deux étant sortants qui sont des combinaisons d'états réfléchis et d'états transmis (figure 1.3). Pour N conducteurs, nous aurons une matrice $N \times N$. Cette théorie permet de calculer le courant et sa moyenne et de déduire la conductance.

Calcul du courant

Nous allons utiliser une méthode de seconde quantification[3, 4, 5, 6]. Nous considérons le cas simple d'une particule de spin 1/2 se propageant dans un système tridimensionnel à plusieurs terminaux.

L'opérateur de courant dans un terminal m s'écrit :

$$I_m = e\frac{\hbar}{2im_e}\sum_\sigma \int dy_m dz_m \left(\psi^\dagger_{m\sigma}(\vec{r}_m,t)\frac{\partial\psi_{m\sigma}}{\partial x_m} - \frac{\partial\psi^\dagger_{m\sigma}}{\partial x_m}\psi_{m\sigma}(\vec{r}_m,t)\right) \tag{1.1}$$

x_m, y_m et z_m sont les coordonnées spatiales du terminal m. Nous considérons un fil unidimensionnel c'est-à-dire nous imposons de très petites dimensions transverses vis-à-vis de la longueur

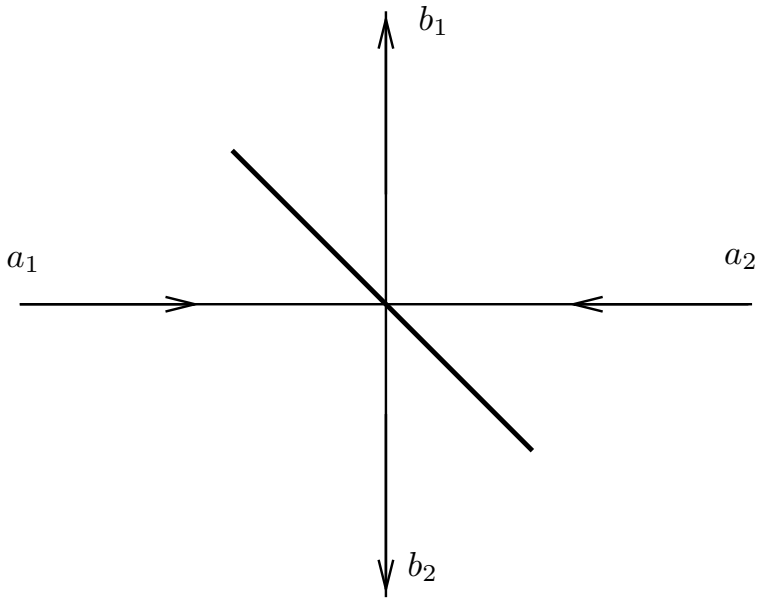

FIG. 1.3 – Les faisceaux incidents a_1 et a_2 sont réfléchis et transmis dans les faisceaux b_1 et b_2. b_1 est la combinaison de la réflexion de a_2 et la transmission de a_1 alors que b_2 est la combinaison de la réflexion de a_1 et la transmission de a_2.

(dimension longitudinale). Cette géométrie particulière, en plus de la position des réservoirs, impose la direction de circulation des électrons. Ce sont les raisons pour lesquels l'intégration se fait sur les coordonnées y_m et z_m. $\psi^\dagger_{m\sigma}$ est l'opérateur de création d'une particule de spin σ dans le terminal m. La fonction d'onde correspondante est la somme des états incidents et des états diffusés dans le terminal m via le canal α.

$$\begin{aligned}\psi^\dagger_{m\sigma}(\vec{r}_m,t) = \frac{m_e}{\hbar^2\sqrt{2\pi}}\int\frac{dE}{k_{m,}(E)}\chi_m(y_m,z_m)\Bigg(&e^{ik_m(E)x_m}c_{m,\sigma}(k_m(E),t)\\ &+\sum_n\sqrt{\frac{k_m(E)}{k_{n,}(E)}}s_{m,n}e^{-ik_m(E)x_m}c_{n,\sigma}(k_n(E),t)\Bigg)\end{aligned} \tag{1.2}$$

$\chi_m(y_m,z_m)$ est la fonction d'onde transverse normalisée dans le terminal m : $\int dy_m dz_m \chi_m(y_m,z_m)\chi^*_m(y_m,z_m) = 1$. $s_{m,n}$ est l'élément de la matrice de diffusion correspondant à la transmission de l'état incident de terminal n vers l'état diffusé du terminal m. $c^\dagger_{m,\sigma}(k_m(E),t)$ est l'opérateur de création de l'état diffusé de spin σ dans le terminal m.

L'intégration sur les coordonnées transverses et la normalisation ont donc comme effet de faire disparaître les fonctions d'onde.

A l'aide de toutes ces définitions, nous pouvons écrire le courant :

$$I_m = \sum_\sigma\int dE\int dE'\sum_{n,n'}A_{n,n'}(m,E,E')c^\dagger_{n,\sigma}(k_n(E),t)c_{n',\sigma}(k_{n'}(E'),t) \tag{1.3}$$

$A_{n,n'}(m,E,E')$ est un élément de la matrice courant.

Le courant dépend du temps et de la position auxquels il est mesuré. L'opérateur courant sépare les deux contributions. Le temps apparaît dans les opérateurs de création (c) et d'annihilation ($c^\dagger$) et la position dans la matrice courant.

Nous nous intéressons à la valeur moyenne du courant dans le terminal m, ce qui fait apparaître les fonctions de Fermi-Dirac $f_n(E) = f(E-\mu_n) = [e^{\beta(E-\mu_n)}-1]^{-1}$, avec μ_n est le potentiel chimique et une fonction de Dirac qui égalise les énergies et fait disparaître le temps.

A cause de la distribution de Fermi, les énergies qui vont prédominer sont celles autour du niveau de Fermi ; les variations de l'impulsion autour de ce niveau est négligeable, cette approximation fait disparaître la dépendance spatiale de la matrice courant :

$$A_{n,n'}(m,E,E') = e\frac{m_e}{\hbar^3 2\pi}\frac{2}{k(E)}\left[\delta_{nm}\delta_{n'm} - s^*_{mn}(E)s_{mn'}(E')\right] \tag{1.4}$$

Le courant moyen ne dépend donc ni de la position à laquelle il est mesuré, ni du temps. Il s'écrit :

$$\langle I_m\rangle = \frac{2e}{h}\int dE\left(f_m(E) - \sum_n s^*_{mn}(E)s_{mn}(E)f_n(E)\right) \tag{1.5}$$

On remarque que seules les transmission de particules contribuent au courant, la reflexion du terminal sur lui même donnera une contribution nulle.

Comme la somme des probabilités de transmission et de reflexion est unitaire, les matrices de diffusion obéissent à la propriété suivante, la somme de leur probruit sur tous les états incidents est égale à 1 :

$$\sum_n [s^*_{mn}(E)s_{mn}(E)] = 1\ . \tag{1.6}$$

Le courant moyen devient alors :

$$\langle I_m\rangle = \frac{2e}{h}\int dE\sum_n |s_{mn}|^2(f_m(E) - f_n(E)) \tag{1.7}$$

$$= \frac{2e}{h}\sum_n\int dE T_{mn}(E)(f_m(E) - f_n(E)) \tag{1.8}$$

$T_{mn}(E)$ est la probabilité de transmission d'une particule du terminal n au terminal m [13].

Cas particulier des électrons

La tension entre les terminaux n'est pas élevée comparée à l'énergie de Fermi des réservoirs. La matrice de diffusion est alors indépendante de l'énergie. En travaillant à température nulle, les distributions de Fermi agissent comme des fonctions échelon de Heaviside. On considère dans un premier temps une géométrie avec deux terminaux et un seul canal. Le courant moyen devient alors :

$$\langle I\rangle = \frac{2e}{h}TeV \tag{1.9}$$

Avec V est la tension appliquée entre les deux terminaux, elle est proportionnelle à la différence de potentiel chimique. On définit $G_0 = 2e^2/h$ comme le quantum de conductance. Grâce à la loi d'Ohm, il est possible d'identifier la conductance en dérivant le courant moyen par la tension appliquée, qui est un paramètre du système :

$$G = \frac{2e^2}{h}T \tag{1.10}$$

Cette relation est appelée formule de Landauer [1, 15].

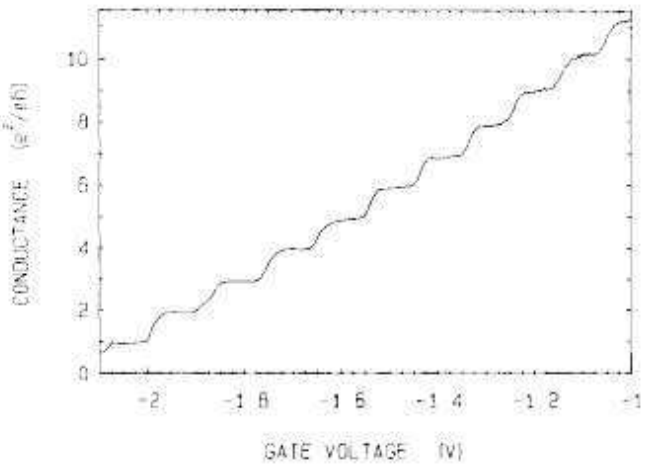

FIG. 1.4 – Conductance en fonction de la tension de grille. Des plateaux de conductances apparaissent clairement lorsque la tension est un multiple de $2e^2/h$ correspondant à l'ouverture de nouveaux canaux [16].

Le système peut être généralisé à plusieurs terminaux. En considérant que le courant est mesuré dans le terminal m, ce dernier est le résultat de la somme des contributions de tous les autres terminaux, en tenant compte que les tensions et les transmissions sont différentes à chaque contact :

$$\langle I_m \rangle = \sum_n G_{mn} V_n = \sum_n \frac{2e^2}{h} T_{mn} V_n \tag{1.11}$$

avec V_n, la tension appliquée entre les terminaux n et le terminal m. Le système pouvant contenir plusieurs canaux, possédant une probabilité de transmission différente, il faut sommer leur contribution :

$$G_{mn} = \frac{2e^2}{h} T_{mn} \tag{1.12}$$

L'expérience de quantification de la conductance [16, 17] a été réalisée pour un gaz d'électrons en 2D dont le nombre de canaux est contrôlé par l'application d'une tension de grille. Chaque canal possède une probabilité de transmission maximale égale à 1. La conductance présente des plateaux multiples de $2e^2/h$ qui correspondent à l'ouverture de canaux supplémentaires quand la tension de grille varie (figure 1.4). Dans le cas classique, la conductance est donnée par la formule $G = \sigma W/L$. W étant la section du fil, L la longueur, et σ la résistivité. Plus le fil est fin et long, plus la résistance devient petite. Mais si nous considérons que pour des échelles microscopiques, la formule classique de la conductance reste valable, la longueur étant petite, la résistance aurait du tendre vers zéro [14]. Or, nous pouvons voir que pour une transmission unitaire, en présence de deux terminaux, la résistance est égale à $h/2e^2 = 12,9k\Omega$ ce qui rend la théorie classique caduque pour ces échelles. Cette résistance apparait à cause des contacts aux au deux bords du fil qui sont en série avec la zone de diffusion. La résistance totale n'est plus égale à la somme des résistances de contact et de la zone de diffusion. Les loi classiques ne sont donc plus suffisantes pour ces échelles.

Dualité onde-corpuscule

Nous avons vu que pour des longueurs supérieures à la longueur de phase, le modèle classique de

Drüde convient parfaitement pour décrire le transport. Par contre, pour des longueurs inférieures à L_ϕ, le système abrite des phénomènes quantiques et le modèle classique ne suffit plus.

Le régime ballistique est un régime quantique ; il doit faire intervenir les effets d'interférences des ondes électroniques. Or, les systèmes quantiques sont caractérisés par la dualité onde-corpuscules des particules, c'est-à-dire que les électrons peuvent être décrits comme des ondes ou comme des particules.

La mesure de la conductance apporte des informations sur le caractère ondulatoire du système en faisant apparaître des termes de d'interférences (la transmission). Par contre, elle reste insuffisante pour nous éclairer sur les caractéristiques corpusculaires des porteurs de charges. Nous ne pouvons connaître ni la charge des porteurs ni leur statistique. Pour cela, il faut calculer les corrélations de courant.

1.2 Bruit

La conductance permet de caractériser un échantillon conducteur. Mais, elle est liée au caractère moyen du transport, alors que le courant fluctue autour de sa valeur moyenne. Le bruit permet de rendre compte de ces fluctuations.

Il existe trois types de bruit :

- Le bruit en $1/f$ [18] a pour origine le désordre du réseau, les défauts cristallins. Ce bruit est proportionnel à l'inverse de la fréquence, et au carré de la tension[19, 20]. C'est un bruit hors équilibre, il apparaît lorsqu'une différence de potentiel est imposée au système. Ce bruit est mesuré à basse fréquence et entraîne des limitations dans la qualité des mesures. Lorsqu'une charge est absorbée ou émise par un défaut cristallin [21], alors la résistance de l'échantillon varie.
- Le bruit thermique [22, 23] a été étudié par Johnson et Nyquist en 1930. Lorsque la température augmente, le réseau vibre et entraîne des fluctuations de la conductance. Ce bruit est mesuré lorsqu'il n'y a pas de tension appliquée entre les terminaux. C'est un bruit à l'équilibre.
- Le bruit grenaille apparaît lorsque nous appliquons une tension entre les terminaux, c'est un bruit qui provient d'un déséquilibre entre l'entrée et la sortie de l'échantillon, c'est-à-dire lorsqu'une tension est appliquée. C'est un phénomène hors-équilibre. Ce bruit est la conséquence de la granularité du courant [7, 24]. La première prédiction fut introduite par Schottky en 1918. Il prédit qu'un tube à vide a deux types de fluctuations de courant, le bruit thermique dû à l'agitation thermale des électrons et un bruit dû à la discrétisation des ces derniers qui est appelé bruit grenaille ou "Shot noise". La densité spectrale a pour formule $S = 2e\langle I\rangle$ pour le cas du bruit grenaille ; le "2" apparaissant parce que les fréquences positives et négatives contribuent de façon identique.

Distribution poissonienne

Le modèle choisi par Schottky (1918) est un modèle de particules classiques émises de façon indépendantes [7], c'est-à-dire non corrélées. Il décide d'utiliser une distribution poissonienne pour décrire le système dont la probabilité, pour que deux particules soient émises à un intervalle de temps t, diminue de manière exponentielle avec le temps, $p(t) = e^{-t/\tau}/\tau$, avec τ le temps moyen entre deux émissions. La probabilité d'émettre N particules durant un temps τ_N se déduit de

l'expression de $p(t)$.

$$P(N, \tau_N) = \frac{\tau_N^N}{\tau^N N!} e^{-\tau_N/\tau} \tag{1.13}$$

Le nombre moyen de particules est égale à $\langle N \rangle = \tau_N/\tau$ et la probabilité ci-dessus peut donc s'exprimer en fonction de cette moyenne :

$$P(N, \tau_N) = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle} \tag{1.14}$$

L'écart-type est exprimé grâce à l'écart entre le nombre de particules réellement émises et le nombre moyen, $\Delta N = N - \langle N \rangle$. Il s'écrit $\sigma^2 = \langle \Delta N \rangle^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle$.

Dans le cas d'une distribution poissonnienne, l'écart-type au carré, est égale à la moyenne. Le courant est le nombre de particules transmises sur le temps τ_N multiplié par la charge des particules, ce qui donne la relation suivante, $I = eN/\tau_N$ pour les électrons.

Ainsi le courant moyen s'écrit, $\langle I \rangle = e\langle N \rangle/\tau_N = e/\tau$ et la densité spectrale, ou bruit, $S = 2\tau_N \langle \Delta I^2 \rangle = 2e^2(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)/\tau_N = 2e\langle I \rangle$. On retrouve le résultat de Schottky qui établie une relation de proportionalité entre le bruit et le courant moyen, qui est la conséquence du caractère poissonien de la distribution des particules classiques émises.

Définition du bruit

Revenons au cas d'un échantillon comportant une zone de diffusion. On considère un faisceau de particules incident avec une probabilité 1 d'avoir une particule, donc le nombre d'occupation n_I vaut 1 à tout temps et sa valeur moyenne est égale 1. Les fluctuations du nombre d'occupation, $\langle \Delta n_I^2 \rangle = \langle n_I^2 \rangle - \langle n_I \rangle^2$ sont nulles. Le faisceau est donc non-bruyant. La zone de diffusion peut soit transmettre le faisceaux avec une probabilité T soit le réfléchir avec une probabilité $R = 1 - T$ (figure 1.5).

Les taux d'occupation des deux faisceaux résultants sont $n_T = 1$ et $n_R = 0$ pour la transmission et $n_T = 0$ et $n_R = 1$ pour la réflexion. Ainsi le produit $n_T n_R$ est toujours nul car la particule ne peut pas être transmise et réfléchie ; un seul des faisceaux est alors occupé. Pour ces deux cas, nous calculons les valeurs moyennes et les moments d'ordre 2, $\langle n_T \rangle = \langle n_T^2 \rangle = T$ et $\langle n_R \rangle = \langle n_R^2 \rangle = R$, qui sont égaux à la probabilité de réalisation du processus. Nous pouvons donc calculer les fluctuations dans chaque faisceaux et entre eux, $\langle \Delta n_T^2 \rangle = \langle \Delta n_R^2 \rangle = -\langle \Delta n_T \Delta n_R \rangle = T(1 - T)$. Nous en déduisons qu'un faisceau non bruyant qui traverse une zone de diffusion peut produire deux faisceaux transmis et réfléchit bruyants.

Dans le cas où deux faisceaux sont incidents sur notre zone de diffusion, les électrons qui arrivent peuvent être soit tous deux transmis soit tous deux réflichis. Les taux d'occupations des faisceaux finaux sont $n_1 = n_2 = 1$ pour la transmission et la réflexion, avec 1 et 2 sont les deux terminaux. Le cas de figure où un seul des faisceaux est transmis et l'autre réflichi est interdit car il enfeindrait le principe d'exclusion de Pauli.

Pour des systèmes quantiques, il est préférable de redéfinir le bruit. Les fluctuations sont décrites par des fonctions de corrélations des courants qui traversent les terminaux : $\langle \Delta I_m(t) \Delta I_n(t+t') \rangle$ avec $\Delta I_m(t) = I_m(t) - \langle I_m(t) \rangle$ qui est le déplacement du courant au temps t par rapport au courant moyen. Lorsque $m = n$, la fonction de corrélation est appelée fonction d'autocorrélation. Grâce au théorème de Fourier, nous pouvons écrire la densité spectrale à l'aide de la fonction de

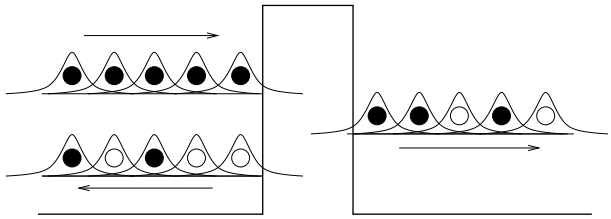

FIG. 1.5 – Des paquets d'onde incidents sur une barrière comportent tous un électron. Ces paquets d'onde agissent comme des pulses de tension occupé ou non par un électron. Ils sont soit transmis avec l'électron, et un paquet d'onde non-occupé est réfléchi, soit l'électron est réfléchi et un paquet d'onde non occupé est transmis.

corrélation :

$$\begin{aligned} S_{mn}(\omega) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle \Delta I_m(t) \Delta I_n(t+t') \rangle \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \Big[\langle I_m(t) I_n(t+t') \rangle - \langle I_m \rangle \langle I_n \rangle \Big] \end{aligned} \tag{1.15}$$

Quand $m = n$, cette densité spectrale est appelée "bruit". Lorsque m et n différent, la densité spectrale porte le nom de "corrélations croisées" ou "corrélation de bruit". La densité spectrale est la transformée de Fourrier de la fonction de corrélation. Les corrélations de courant ne dépendant que de la différence entre les temps t et $t + t'$, elles ne dépendent donc pas de t. L'intégrale sur ce temp sera donc égale à T qui disparait de l'équation grace au préfacteur $2/T$, la limite n'a donc plus lieu d'être.

1.2.1 Cas d'un fil unidimensionnel

Nous pouvons, dans un premier temps, regarder le cas où plusieurs canaux sont présents pour un fil. Une nouvelle difficulté s'ajoute alors car les canaux peuvent se mélanger. En effet, le signal sortant par un canal du réservoir de droite sera le résultat de la transmission de tous les canaux entrant du réservoir de gauche et de la réflexion de tous les canaux entrant à droite. Les paquets d'onde vont donc interférer à la sortie du système. Afin d'éviter ces interférences, il est nécessaire d'adopter un représentation permettant d'éviter les mélanges.

Une représentation possible est celle de la matrice S. Tout d'abord, nous allons considérer une configuration simple où, le nombre de canaux, de chaque côté de la zone de diffusion, est identique et égale à M. La matrice S est donc composée de quatre sous-matrices de taille $M \times M$, décrivant la transmission de gauche à droite (droite à gauche), s_{12} (s_{21}) et la réflexion sur le côté gauche (droite), s_{11} (s_{22}). Avec les indices 1 et 2 représentent respectivement les terminaux de gauche et droite. La matrice S s'écrit :

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Les sous-matrices permettent de définir les coefficients de transmission T qui est la valeur propre de la matrice $s_{12}^* s_{12} = s_{21}^* s_{21}$ et de reflexion R, la valeur propre de $s_{11}^* s_{11} = s_{22}^* s_{22}$.

Dans cette représentation, les canaux de conductions ne sont plus mélangés, et nous obtenons une superposition de 2×2 matrice S complètement découplées comme illustrée sur la figure 1.6.

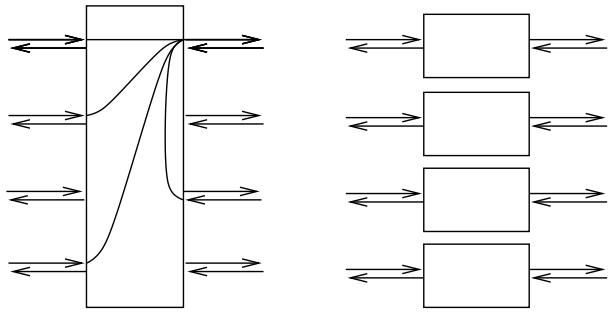

FIG. 1.6 – Un conducteur à deux terminaux et multi-canaux mélange tous les canaux (gauche) mais dans la représentation en valeur propre, il agit comme une série de conducteurs à un canal totalement découplé (droite).

Cette représentation est celle adoptée par Lesovik [25] et présentée ci-dessus. La dissipation des corrélations entre les paquets d'onde nous permet d'écrire le bruit à fréquence nulle pour une configuration à plusieurs canaux :

$$\begin{aligned} S(\omega=0) =& \frac{4e^2}{h}\int dE \sum_\alpha T_\alpha(E)[f_1(1-f_1)+f_2(1-f_2)] \\ &+ \frac{4e^2}{h}\int dE \sum_\alpha T_\alpha(E)[1-T_\alpha(E)](f_1-f_2)^2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Nous allons montrer que le bruit dépend du bruit obtenue à l'équilibre, le premier terme de l'equation (1.17), et du bruit hors-équilibre qui dépend de la différence des fonctions de Fermi des deux terminaux. Ce résultat a été obtenue en formulant la matrice S en terme de blocs d'éléments avec $T = (s_{21}^\dagger s_{21})$ est une valeur propre de la matrice. Les T_α ont été mesurées dans des jonctions (break) [26]. Ils sont nommés "code barre mésoscopique".

1.2.2 Approche de la méthode de diffusion par la second quantification

Cette méthode s'appuie sur la seconde quantification utilisée plus haut et introduite par Lesovik, son intérêt est qu'elle plus systématique [5, 6]. On veut utiliser la méthode de diffusion dans le cadre d'un système multicanal et multiterminal. Nous allons utiliser la définition de la densité spectrale (éq. 1.15). Il faut donc calculer le corrélateur du produit des opérateurs de courant $\langle I_m(t)I_n(t+t')\rangle$ à l'aide de leur définition introduite à l'équation (1.3), avec $I_m(t) = \sum_\alpha I_{m,\alpha}(t)$. Un produit de quatre opérateurs fermioniques (ou bosoniques) apparaît, le théorème de Wick nous permet de calculer le corrélateur de ce produit.

$$\begin{aligned} &\langle c^\dagger_{p_1,\alpha_1,\sigma}(k_{\alpha_1}(E_1),t)c_{p_2,\alpha_2,\sigma}(k_{\alpha_2}(E_2),t)c^\dagger_{p_3,\alpha_3,\sigma}(k_{\alpha_3}(E_3),t+t')c_{p_4,\alpha_4,\sigma}(k_{\alpha_4}(E_4),t+t')\rangle = \\ &\frac{\hbar^4 k(E_1)k(E_3)}{m^2} f_{p_1}(E_1)f_{p_3}(E_3)\delta_{p_1p_2}\delta_{p_3p_4}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4}\delta(E_1-E_2)\delta(E_3-E_4) \\ &+ \frac{\hbar^4 k(E_1)k(E_2)}{m^2} f_{p_1}(E_1)(1\mp f_{p_2}(E_2))\delta_{p_1p_4}\delta_{p_2p_3}\delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3}\delta(E_1-E_4)\delta(E_2-E_3)e^{-i(E_1-E_2)t'/\hbar} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Le premier terme représente le produit de courant moyen $\langle I_m(t)\rangle\langle I_n(t+t')\rangle$ et qui sera retranché par le produit des courants moyens présents l'expression du bruit. Le second terme est dépendant

de $f(1 \mp f)$ et représente la statistique fermionique si le signe est "$-$" et la statistique bosonique si le signe est "$+$". Finalement, seul l'opérateur de courant irréductible contribue au bruit.

$$\begin{aligned}\langle I_m(t)I_n(t+t')\rangle - \langle I_m(t)\rangle\langle I_n(t+t')\rangle = \frac{\hbar^4 k(E)k(E')}{m^2}\sum_\sigma \int dEdE' \\ \times \sum_{pp'}\sum_{\beta\beta'} A^{\beta\beta'}_{pp'}(m,\alpha,E,E')A^{\beta'\beta}_{p'p}(n,\alpha',E',E)f_p(E)(1\mp f_{p'}(E'))e^{-i(E-E')t'/\hbar}\end{aligned} \tag{1.19}$$

Avec $A^{\beta\beta'}_{pp'}(m,\alpha,E,E')$, les fonctions dépendent des termes de diffusion des particules définis à l'équation (1.4). Comme toutes les impulsions sont très proches de la valeur au niveau de Fermi, k_F, nous pouvons les faire disparaître dans l'expression du bruit.

L'intégrale sur le temps fait apparaître une fonction de Dirac, dépendant des énergies et de la fréquence ainsi une intégrale sur l'énergie tombera. Le bruit s'écrit, en remplaçant la fonction $A^{\beta\beta'}_{pp'}(m,\alpha,E,E')$ par son expression (1.4) :

$$\begin{aligned}S_{mn}(\omega) =& \frac{4e^2}{h}\sum_{\alpha,\alpha'}^{N_c}\int dE\sum_{pp'}(\delta_{mp}\delta_{mp'}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta'} - s^*_{mp,\alpha\beta}(E)s_{mp',\alpha\beta'}(E-\hbar\omega)) \\ &\times(\delta_{np'}\delta_{np}\delta_{\alpha'\beta'}\delta_{\alpha'\beta} - s^*_{np',\alpha'\beta'}(E-\hbar\omega)s_{np,\alpha'\beta}(E))f_p(E)(1\mp f_{p'}(E-\hbar\omega))\end{aligned} \tag{1.20}$$

La dérivation de la formule pour le cas des fermions se trouve à la référence [27].

Pour le moment nous allons nous contenter d'un système ne comportant que deux terminaux et à fréquence nulle.

Dans un premier temps, nous allons estimer le bruit en fréquence, lorsque $m = n$ dans le cadre d'un fil connecté à deux réservoirs, la source et le drain. Nous choisissons d'exprimer le bruit dans le terminal de droite, noté 2, et de gauche noté 1. Les indices p et p', qui représentent les réservoirs, peuvent prendre deux valeurs, gauche (1) ou droite (2) [25],

$$\begin{aligned}S_{22}(\omega=0) = S_{11}(\omega=0) =& \frac{4e^2}{h}\sum_\alpha\int dET^2_\alpha(E)(f_1(E)(1\mp f_1(E)) + f_2(E)(1\mp f_2(E)) \\ &+ \frac{4e^2}{h}\sum_\alpha\int dET_\alpha(E)(1-T_\alpha(E))(f_1(E)(1\mp f_2(E)) + f_2(E)(1\mp f_1(E))) \\ =& \frac{4e^2}{h}\sum_\alpha\int dET_\alpha(E)(f_1(E)(1\mp f_1(E)) + f_2(E)(1\mp f_2(E)) \\ &\pm \frac{4e^2}{h}\sum_\alpha\int dET_\alpha(E)(1-T_\alpha(E))(f_1(E)-f_2(E))^2\end{aligned} \tag{1.21}$$

On reconnaît le bruit calculé plus haut, (éq. 1.17) où les particules étaient de type fermionique. Cette expression est la généralisation, pour des fermions ou des bosons, du bruit traversant un fil à plusieurs canaux.

Comme dans le cas à un canal, nous pouvons retrouver les trois régimes de bruit décrit plus haut en faisant varier les paramètres du système, la tension $|\mu_1 - \mu_2| = eV$, la température Θ (le régime thermique, le bruit grenaille et la transition entre les deux). Nous allons un peu mieux les décrire dans le cas des électrons.

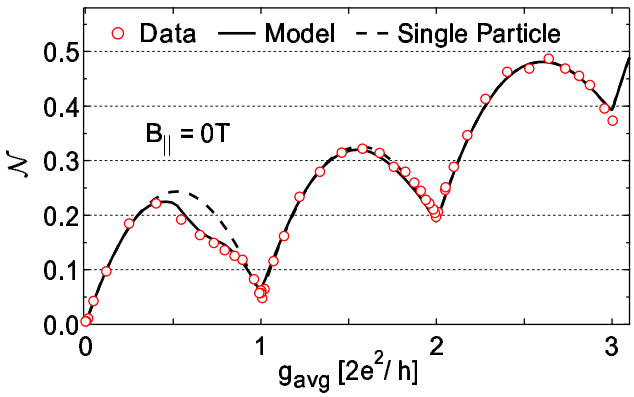

FIG. 1.7 – Bruit en fonction de la conductance. Le bruit s'annule lorsque la conductance est un multiple de $2e^2/h$. $\mathcal{N}$ est le bruit grenaille lorsque les effet thermiques sont pris en compte dans un point contact[34].

Bruit thermique

Le premier terme correspond à la partie thermique du bruit. Il est nommé bruit Johnson-Nyquist. Il s'annule lorsque la temperature est nulle et il domine lorsque la tension est nulle, cependant l'approximation reste valable lorsqu'elle est très inférieure à la température, $eV \ll k_B\Theta$. C'est un bruit d'équilibre, il est provoqué par les fluctuations thermiques des réservoirs. Comme nous l'avons ci-dessus, nous utilisons l'identité $f(1-f) = -k_B\Theta\partial f/\partial E$, en intégrant l'expression (1.21). Le bruit devient :

$$S_{11}(0) = S_{22}(0) = 4k_B\Theta\frac{2e^2}{h}\sum_\alpha T_\alpha = 4k_B\Theta G \tag{1.22}$$

Ce résultat peut être relié au théorème de fluctuation-dissipation. Les fluctuations à l'équilibre sont proportionnelles à la conductance de Landauer.

Bruit grenaille

Le second terme de l'équation (1.21) correspond au bruit grenaille, qui est un bruit hors-équilibre. Il apparaît à température nulle lorsque une différence de tension est appliquée et reste valable pour des tensions nettement supérieures à la température, $eV \gg k_B\Theta$ [5, 6, 29].

$$S_{11}(0) = S_{22}(0) = \frac{4e^2}{h}eV\sum_\alpha T_\alpha(1-T_\alpha) \tag{1.23}$$

En prenant la limite de faible transmission, $T_\alpha \sim 0$, négligeable vis-à-vis de 1, nous retrouvons le bruit poissonien décrit par Schottky qui est le bruit grenaille entier. Des expériences[28, 30, 31, 32, 33, 34] ont montré que le bruit s'annulait lorsque la conductance était proportionnelle à $2e^2/h$(voir fig. 1.7). Dans la situation opposée, lorsque $T_\alpha \sim 1$, le flux continu d'électrons est en contradiction avec le principe de Pauli ainsi le bruit s'annule.

Lorsque l'échantillon ne contient qu'un seul canal, nous retrouvons le résultat obtenu avec une approche par paquet d'onde :

$$S_{11}(0) = S_{22}(0) = \langle I\rangle(1-T) \tag{1.24}$$

Le bruit est réduit par le facteur $1-T$ inférieur à 1, donc le bruit est dit "sub-poissonien". On définit ici le facteur de Fano qui est le quotient du bruit à fréquence nulle sur le bruit poissonien :

$$F \equiv \frac{S_{11}(\omega=0)}{2e\langle I\rangle} = 1-T \tag{1.25}$$

Le bruit est toujours proportionnel au courant moyen et à la charge, et sa mesure permet toujours de remonter à la charge effective des quasi-particules. Ainsi en mesurant le courant moyen et le bruit, on peut déduire la charge effective qui traverse le système. La charge effective des quasi-particules des états fractionnaires a été mesurée de cette manière [35, 36](voir chapitre suivant).

Transition entre les deux régimes de bruit

On suppose que les coefficients de transitions sont indépendantes de l'énergie. On peut effectuer l'intégrale (1.21) à température et tension quelconques [37] :

$$S_{11}(\omega=0) = \frac{4e^2}{h}\left[2k_B\Theta\sum_\alpha T_\alpha^2 + eV\coth(\frac{eV}{2k_B\Theta})\sum_\alpha T_\alpha(1-T_\alpha)\right] \tag{1.26}$$

Dans le cadre de faibles transmissions, nous pouvons négliger les termes proportionnels à T_α^2 :

$$S_{11}(\omega=0) = \frac{4e^2}{h}eV\coth(\frac{eV}{2k_B\Theta})\sum_\alpha T_\alpha = 2e\langle I\rangle\coth(\frac{eV}{2k_B\Theta}) \tag{1.27}$$

Des mesures ont été effectuées pour vérifier la validité de l'équation (1.27) [32, 28, 38]. Dans la référence [38], nous nous intéressons à l'effet tunnel entre une pointe de microscopie à effet tunnel et une surface métallique. Une transition entre le bruit grenaille et le bruit thermique est nettement visible. Dans le premier cas, les mesures sont effectuées à haute température ($eV \ll k_B\Theta$), le bruit n'est alors pas proportionnel au courant sauf lorsque la tension est suffisamment grande. Dans le deuxième cas, c'est la tension qui est importante et cette fois le bruit est linéaire par partie, et est donc proportionnel au courant (fig. 1.8).

Corrélations de bruit à fréquence nulle

Nous allons maintenant nous intéresser aux corrélations à fréquence nulle entre deux fils .

Ici les fonctions de Fermi de l'expression (1.21) annulent la contribution $p=p'$ et la fonction $A_{pp'}^{\beta\beta'}(m,\alpha,E,E')$ devient proportionelle à $s_{mp}^*(E)s_{mp'}(E')$, avec $s_{mp}=\sum_{\alpha\beta}s_{mp,\alpha\beta}$, car les fonctions de Krönecker disparaissent. La densité spectrale devient alors :

$$S_{mn}(0) = \frac{2e^2}{h}\int dE\sum_{pp'} s_{mp}^* s_{mp'} s_{np'}^* s_{np} f_p(E)(1\mp f_{p'}(E)) \tag{1.28}$$

avec $m\neq n$.

L'unitarité de la matrice S implique que $\sum_p s_{mp}s_{np'}^*=0$, donc la partie linéaire en terme de distribution de Fermi est nulle : $\sum_{p'} s_{mp}^* s_{mp'} s_{np'}^* s_{np} f_p(E)=0$ et le bruit devient :

$$S_{mn}(0) = \mp\frac{2e^2}{h}\int dE|\sum_p s_{mp'}s_{np}^* f_p(E)|^2 \tag{1.29}$$

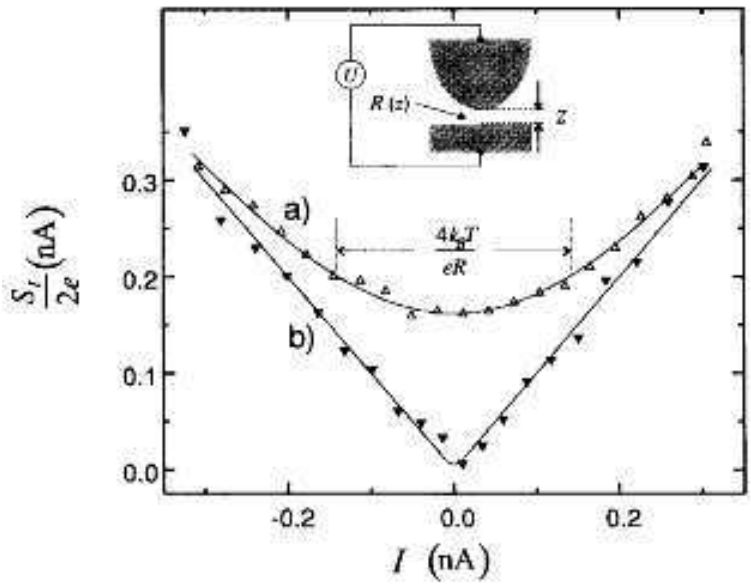

FIG. 1.8 – Bruit en fonction du courant. en haut $\Theta = 300K$ et $R \simeq 0.32G\Omega$; en bas $\Theta = 77K$ et $R \simeq 2.7G\Omega$. Les traits pleins sont les estimations théoriques [38].

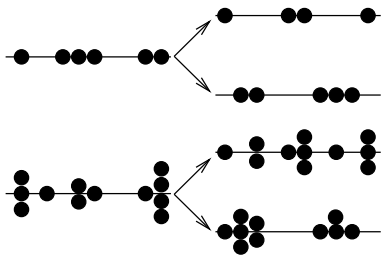

FIG. 1.9 – Illustration du "bunching" et de l' "antibunching" dans un géométrie de type Hanbury-Brown et Twiss.

Les corrélations croisées donnent une bonne idée de la statistique des particules qui traversent l'échantillon. En effet, elle dépend du signe présent au début du second membre de l'expression (1.29). En présence de fermions, les corrélations de bruit sont négatives. Le signe reflète le comportement des fermions, qui arrivent un par un et ne peuvent peupler qu'une seule des deux sorties, ce comportement est nommé "anti-bunching" (figure 1.9). Les bosons incidents, qui ont un signe positif, ne sont pas soumis au principe de Pauli et peuvent être transmis (ou réfléchi) à plusieurs sur la même sortie.

1.2.3 Bruit en fréquence

La mesure, à fréquence finie, du transport, et notamment le bruit, permet de révéler des énergies internes de l'échantillon. Dans le cas statique, le courant des particules est conservé alors que dans le cas dynamique, c'est le courant total, qui est composé du courant de particules et du courant de déplacement, $\epsilon_0 dE/dt$ qui est conservé, le courant de particules seules n'est cette fois-ci pas conservé.

La densité spectrale définie à l'équation (1.20) devient alors : La densité spectrale définie à

l'équation (1.20) devient alors :

$$\begin{aligned} S_{mn}(\omega) =& \frac{4e^2}{h} \int dE \sum_{pp'} (\delta_{mp}\delta_{mp'} - s^*_{mp}(E)s_{mp'}(E-\hbar\omega)) \\ & \times (\delta_{np'}\delta_{np} - s^*_{np'}(E-\hbar\omega)s_{np}(E))f_p(E)(1 \mp f_{p'}(E-\hbar\omega)) \Bigg\} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Le bruit ($m = n$) d'un point contact a déjà été calculé et mesuré, en présence d'une différence de tension finie, $\mu_{LR} = eV$ et pour des probabilités de transmission finie. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) =& \frac{2e^2}{h} \Bigg\{ \sum_n T_n^2 \int dE[f_{11}(E,\omega) + f_{22}(E,\omega)] \\ & + \sum_n T_n(1-T_n) \int dE[f_{12}(E,\omega) + f_{21}(E,\omega)] \end{aligned} \tag{1.31}$$

Une fois l'intégration faite sur les énergies, nous trouvons,

$$\begin{aligned} S_{11}(\omega) =& \frac{2e^2}{h} \Bigg\{ 2\hbar\omega \coth(\frac{\hbar\omega}{2k_B\Theta} \sum_n T_n^2 \\ & + \Big[(\hbar\omega + eV)\coth(\frac{\hbar\omega + eV}{2k_B\Theta}) \\ & + (\hbar\omega - eV)\coth(\frac{\hbar\omega - eV}{2k_B\Theta})\Big] \sum_n T_n(1-T_n) \Bigg\} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Dans un premier temps, nous remarquons que lorsque nous prenons la fréquence nulle, nous retrouvons le bruit qui a été calculé ci-dessus. Pour simplifier l'analyse des résultats, nous choisissons de travailler à température nulle :

$$S_{11}(\omega) = 2\frac{2e^2}{h}\hbar\omega \sum_n T_n^2 + \begin{cases} 2\frac{2e^2}{h}(eV - \hbar|\omega|)\sum_\alpha T_\alpha(1-T_\alpha) & \text{si } \hbar|\omega| < eV \\ 0 & \text{si } \hbar|\omega| > eV \end{cases} \tag{1.33}$$

Dans les deux équations précédentes, le premier terme correspond à l'équilibre, c'est-à-dire quand $eV = 0$. Nous remarquons que, à l'équilibre, ce bruit n'est pas nul. Un bruit en excès, $S_{ex}(\omega)$, peut donc être isolé. Ce surplus est la différence entre le bruit total, estimé à une tension non-nulle, et le bruit à l'équilibre.

A température nulle, le bruit est linéaire par partie (figure 1.10). Le densité spectrale marque la singularité pour une fréquence égale à $\hbar\omega = \pm eV$. Le bruit en excès est non nul pour des fréquences inférieures à la tension. Le bruit d'excès est la différence entre le bruit mesuré à tension non-nulle et celui mesurée à tension nulle. Après la singularité, il s'annule [39, 40] (fig. 1.10).

$$S_{ex}(\omega) = \begin{cases} 2\frac{2e^2}{h}(eV - \hbar|\omega|)\sum_\alpha T_\alpha(1-T_\alpha) & \text{si } \hbar|\omega| < eV \\ 0 & \text{si } \hbar|\omega| > eV \end{cases} \tag{1.34}$$

Expérimentalement, il est plus facile de mesurer le bruit en fonction de la tension pour plusieurs fréquences déterminées que de le mesurer en fonction de la fréquence pour une tension choisie.

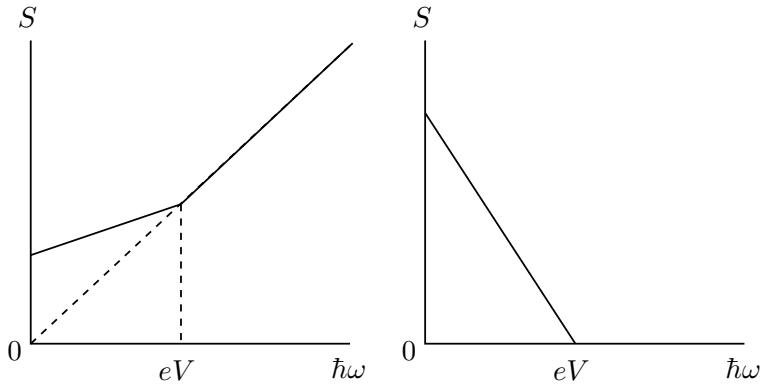

FIG. 1.10 – A droite, le bruit total, on remarque qu'il est linéaire par partie et change de pente lorsque la fréquence est égale à la tension. A gauche, Le bruit en excès connaît un maximum en zéro et est une droite avec une pente négative pour les fréquence inférieures à la tension, en ce point, et au dessus, il est nul.

Quoi qu'il en soit, l'équation (1.34) prédit une singularité lorsque la tension et la fréquence sont égales. Ceci a d'ailleurs été mesuré pour un échantillon diffusif [41].

Nous nous rendons compte que la mesure du bruit est un outil efficace pour évaluer la charge effective des porteurs. En effet, à température nulle et en l'absence de moyennage spatial[42, 43], une singularité apparaît pour un transfert (métal) normal-normal [39, 27] lorsque la fréquence est égale à eV. Par contre, en présence d'une jonction normal-supraconducteur [44], la réflexion d'Andreev donne 2 eV qui met en valeur le transfert de paire de Cooper (composée de deux électrons) dans le supraconducteur. Pour le cas de l'effet Hall quantique fractionnaire [45], l'effet tunnel amène une singularité à $\nu\ eV$, avec ν la fraction de remplissage.

Première partie

Injection de charge

Chapitre 2

Effet Hall quantique fractionnaire et bosonisation

L'effet Hall quantique a été découvert en 1980 par Klaus von Klitzing [46] dans un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire à l'échantillon. Il prouva expérimentalement la présence de plateaux de résistance bien définis et très stables d'unité h/e^2.

Ces plateaux peuvent s'expliquer par la distribution énergétique des électrons. En effet, en présence d'un champ magnétique, les états propres d'un système d'électrons (sans interaction) forme des bandes appelées niveaux de Landau, d'énergie $E_\nu = (\nu + 1/2)\hbar\omega_c$, avec $\omega_c = eB/m^*$ la fréquence cyclotron. Ces états sont dégénérés puisque le nombre d'état $N = An_\phi$ de chaque niveaux correspond au nombre de quantum de flux dans le système. A est la taille du système et n_ϕ la densité de quantum de flux. La densité de charge $n_s = \nu n_\phi$ (fig.2.1) dépend du facteur de remplissage entier ν. Nous remarquons que lorsque $|\vec{B}|$ augmente, la densité et l'écart entre les états propres augmentent.

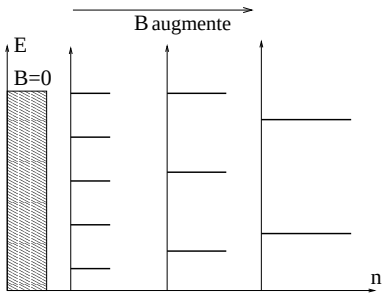

FIG. 2.1 – Quand un champ magnétique est imposé au système des niveaux de Landau apparaissent. Ces niveaux sont séparées par une énergie proportionnelle à la fréquence cyclotron. Ainsi, l'écart entre les niveaux augmente avec le champ magnétique.

L'énergie totale du système ne peut augmenter que lorsque l'énergie de Fermi a dépassé un des niveaux de Landau, entraînant l'apparition de plateaux dans la mesure de la résistance de Hall : $R_H = \nu^{-1}h/e^2$, pour ν entier. Nous remarquons également que la résistance de Hall ne dépend pas des paramètres extérieurs (température, fréquence) ou des paramètres intrinsèques à l'échantillon.

En 1982, Tsui, Stormer et Gossard [47] découvrent qu'en minimsant le role des impuretés dans les gaz bidimensionnels, le facteur de remplissage ν pouvait prendre des valeurs fractionnaires, p/q avec q un entier impair. Dans l'effet Hall quantique fractionnaire les interactions sont importantes

car la densité électronique est faible. Les niveaux de Landau sont partiellement remplis. Cependant, l'effet des interactions peut être minimisé, pour certaines valeurs du facteur de remplissage, $\nu = p/q$, en positionnant les tubes de flux par rapport aux électrons.

Nous allons nous intéresser ici aux états de bords dans l'effet Hall entier. En effet, l'échantillon est de taille finie et les bords confinent les électrons avec un champ électrique associé. Dans un gaz bidimensionnel soumis à un champ magnétique, les électrons se déplacent sur une orbite cyclotron dont le centre reste immobile. En présence de bords, le confinement des électrons impose un champ électrique qui provoque le déplacement des centres des orbites cyclotrons. Il s'agit d'orbites de dérive, bien connus en physique des plasmas.

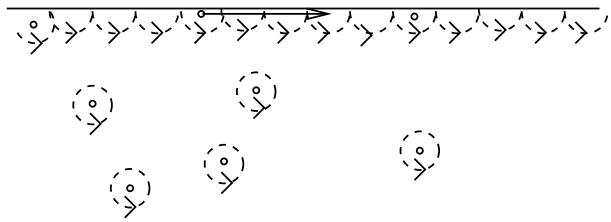

FIG. 2.2 – Les électrons, en présence d'un champ magnétique, se déplacent sur une orbite cyclotron dont le centre reste immobile. Lorsque le centre est proche d'un bord, le mouvement des électrons impose un déplacement du centre de l'orbite cyclotron et un champs électrique apparaît sur le bord.

2.1 Approche hydrodynamique

Les états de bords existent également dans l'effet Hall fractionnaire et nous allons les décrire à l'aide du modèle phénoménologique de Wen[48]. Dans cette approche, nous considérons une goutte de liquide de Hall (fig.2.3) qui est un fluide bidimensionnel incompressible dû aux interactions répulsives et aux corrélations entre les électrons, et de densité $n_s = \nu n_\phi$.
Les seules excitations possibles sont sur le bord du liquide et provoquent des déformations de "hau-

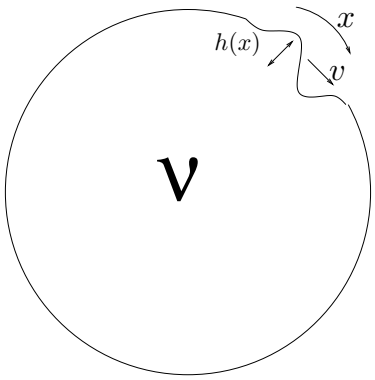

FIG. 2.3 – Sur une goutte d'un fluide incompressible de Hall, les déformations se déplacent sur le bord avec une vitesse v et une hauteur $h(x)$. La déformation est localisée sur le bord de la goutte par un paramètre s.

teur" $h(x)$ qui se propagent dans une seule direction avec une vitesse $v = cE/B$ selon l'équation de propagation $\partial\rho/\partial t - v\partial\rho/\partial x = 0$, avec $\rho(x) = n_s\, h(x)$ la densité des particules sur le bord de la goutte. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique.

2.1.1 Calcul de l'hamiltonien

L'hamiltonien d'un tel système a la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L V(x)e\rho(x)dx \tag{2.1}$$

avec $V(x)$ le potentiel scalaire et L le périmètre de la goutte. Le potentiel scalaire et le champ électrique sur le bord de la goutte sont reliés grâce à la déformation $h(x)$: $V(x) = Eh(x)$. De plus, le champ électrique est relié au champ magnétique par la vitesse de déplacement : soit $V(x) = Eh(x) = vBh(x)/c = vB\rho(x)/(cn_s)$. En remplaçant le potentiel, nous obtenons l'hamiltonien suivant :

$$H = \frac{1}{2}\frac{evB}{n_s}\int_0^L \rho^2(x)\,dx \tag{2.2}$$

comme la densité de charge n_s est proportionnelle à la densité de flux $n_\phi = eB/hc$, $n_s = \nu eB/h$, h étant la constante de Planck, nous pouvons alors la remplacer :

$$H = \frac{1}{2}\frac{hv}{\nu}\int_0^L \rho^2(x)\,dx \tag{2.3}$$

L'indépendance de l'hamiltonien par rapport au champ magnétique devient claire. Cependant, il s'exprime en fonction du module carré de la densité d'électrons sur le bord de la goutte, de la vitesse de propagation, de la déformation et de la fraction de remplissage ν.

Pour pouvoir quantifier, nous passons dans l'espace des impulsions en effectuant la transformée de Fourier de la densité de charge sur le bord :

$$\rho_k = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L e^{ikx}\rho(x); \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{-ikx}\rho_k \tag{2.4}$$

donc l'hamiltonien devient

$$H = \frac{1}{2}\frac{vh}{\nu}\frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L \rho(x)\sum_k e^{-ikx}\rho_k dx = \frac{1}{2}\frac{vh}{\nu}\sum_k \rho_k\rho_{-k} \tag{2.5}$$

L'équation de propagation devient : $\dot{\rho}_k = vik\rho_k$

2.1.2 Quantification

La quantification nécessite de connaître la position canonique q_k et l'impulsion canonique p_k. Nous pouvons nous aider des équations standards de Hamilton :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \tag{2.6}$$

ainsi que des résultats du calcul de l'hamiltonien et de la dérivée temporelle de la densité d'états des particules du bord.
Par analogie, la position canonique est $q_k = \rho_k$, l'équation de Hamilton nous donne alors :

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial \rho_k} = -i\frac{h}{\nu}\frac{\dot{\rho}_{-k}}{k} \tag{2.7}$$

l'équation de propagation des électrons ayant la forme $\dot{\rho}_{-k} = -vik\rho_{-k}$, nous obtenons alors l'impulsion canonique suivante :

$$p_k = -i\frac{h}{\nu}\frac{\rho_{-k}}{k} \tag{2.8}$$

Le fait de connaître des coordonnées et impulsions canoniques nous permet de spécifier les relations de commutation du système.

Les variables canoniquement conjuguées ont la relation de commutation suivante :

$$[p_k, q_k] = -i\hbar\,\delta_{kk'} \tag{2.9}$$

Nous remarquons qu'en matière condensée, nous utilisons cette façon de procéder pour quantifier les phonons.

En remplaçant les coordonnées et impulsions par leur définitions, nous obtenons alors le commutateur de la densité :

$$[\rho_{-k}, \rho_{k'}] = \frac{\nu k}{2\pi}\delta_{k\,k'}, \quad [\rho_k, \rho_{k'}] = -\frac{\nu k}{2\pi}\delta_{k'\,-k} \tag{2.10}$$

Cette relation de commutation est appelée relation de commutation de Kac-Moody.
Ce résultat est peu conventionnel car nous avons l'habitude d'avoir le commutateur des positions canoniques nul quelque-soit k et k'.

Nous pouvons ainsi vérifier l'équation d'évolution en calculant la règle de commutation de l'hamiltonien du système :

$$-i\hbar\frac{\partial\rho_{k'}}{\partial t} = [H, \rho_{k'}] = v\hbar k'\rho_{k'} \tag{2.11}$$

Nous retrouvons ainsi que $\dot{\rho}_k = vik\rho_k$.

2.2 Bosonisation

Les particules mises en jeu dans des systèmes d'effet Hall fractionnaire sont des quasiparticules mais nous pouvons introduire des électrons sur les bords. Il est donc intéressant de calculer la relation de commutation de la densité de quasiparticules et l'opérateur de création des fermions $\psi^\dagger$.

Lorsqu'un électron est ajouté en x, la mesure de la densité $\rho(x')$ donne une fonction de Dirac $\delta(x - x')$. Wen défini la relation de commutation de la foçon suivante :

$$[\rho(x'), \psi^\dagger(x)] = \delta(x - x')\psi^\dagger(x) \tag{2.12}$$

Afin de connaître la forme de l'opérateur de création des fermions, nous avons besoin de définir le champ bosonique $\phi(x)$

$$\phi(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{\nu}}\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k i\frac{e^{-\alpha|k|/2}}{k}e^{-ikx}\rho_k \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\nu}}\rho(x) \tag{2.14}$$

Nous pouvons alors réexprimer l'hamiltonien[48] :

$$H = \frac{\hbar v}{4\pi}\int_0^L \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx \tag{2.15}$$

2.2.1 Comparaison avec le Liquide de Tomonaga-Luttinger

Nous remarquons ici que l'hamiltonien a essentiellement la même forme que celui d'un liquide de Luttinger sans interaction [49, 50, 51, 52] :

$$H = \frac{\hbar v}{\nu} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 \right] dx \tag{2.16}$$

En absence d'interaction, les métaux à 1, 2 et 3 dimensions sont très bien décrit par le modèle des liquides de Fermi. Lorsque nous rajoutons une particule, la distribution des métaux en deux et trois dimensions conservent un saut bien marqué, la distribution a une pente infinie au niveau de Fermi. Les électrons "habillent" les interactions de sorte à obtenir un gaz de quasiparticules libres ayant une masse effective m^* et obéissant à la distribution fermionique. Par contre, en une dimension, la marche de la fonction de distribution de Fermi-Dirac disparaît complètement et la description grâce aux liquides de Fermi devient impossible. Les excitations de basses énergies des électrons-trous deviennent alors collectives et se situent autour de l'énergie de Fermi.

Une nouvelle théorie est alors développée dans les années 50 et 60 pour décrire ces systèmes. Dans un premier temps [8], Tomonaga montre qu'au niveau de Fermi, où se situent les excitations, le spectre varie très peu. Il choisit de linéariser le spectre avec deux droites semi-infinies tangentes au spectre au niveau de Fermi.

Il obtient alors un hamiltonien "presque" bosonique. Les opérateurs de création et d'annihilation ainsi créés suivent des règles de commutations bosoniques mais il reste des termes résiduels.

Le modèle de Tomonaga est amélioré par Luttinger[9] au début des années 60, puis corrigé par Mattis et Lieb (1968)[10]. En effet, Luttinger proposa de prolonger les droites de Tomonaga pour des énergies négatives. Ces niveaux étant non physique, un cut-off doit être inclus. Il crée alors des opérateurs qui commutent complètement, l'approximation est alors purement bosonique. Ce modèle fut nommé par Haldane [11] **liquide de Luttinger**.

Le système est maintenant composé de deux branches, la première avec des fermions allant de gauche à droite avec des énergies $\epsilon_k = \hbar v_F k$ et la seconde avec des fermions allant de droite à gauche, $\epsilon_k = -\hbar v_F k$. Pour chacune de ces branches, nous définissons des opérateurs de création et d'annihilation respectifs et un champs bosonique ϕ_i. (fig.2.4) Un fil en une dimension est un

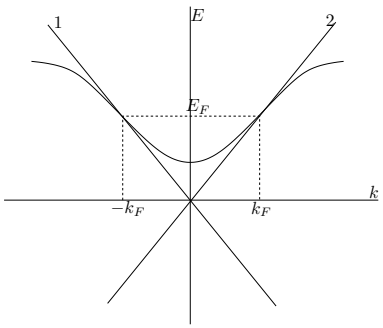

FIG. 2.4 – Le modèle d'un liquide de Luttinger approxime le spectre réel à deux droites, de pentes opposées et tangente au spectre à l'énergie de Fermi. Les électrons se déplacent de droite à gauche sur la droite 1 et de gauche à droite sur la droite 2.

liquide de Luttinger non chiral, puisque les électrons peuvent se déplacer dans les deux directions. Ainsi, la fonction d'onde des électrons a la forme suivante :

$$\psi(x) = \psi_R + \psi_L = e^{ik_F x} e^{i\sqrt{\pi}(\theta(x)+\phi(x))} + e^{-ik_F x} e^{i\sqrt{\pi}(-\theta(x)+\phi(x))}$$

avec $\phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\theta = \phi_1 - \phi_2$, les champs bosoniques obéissant à la relation suivante : $[\phi(x), \theta(x')] = -i\Theta(x - x')$ afin de garantir l'anticommutation de ψ. Contrairement à ce cas de figure, l'hamiltonien que nous avons calculé ne contient qu'un seul champ $\phi = 1/2(\phi \pm \nu\theta)$ car les quasiparticules ne peuvent se déplacer que dans une seule direction. Nous pouvons donc déduire que le spectre ne contient qu'une seule branche. Cela implique donc qu'il n'existe qu'une seule fonction d'onde. Ce liquide de Luttinger est dit chiral.

2.2.2 Opérateur de création des électrons

Maintenant que nous connaissons la forme bosonisée de la densité de charge, nous pouvons chercher la forme de l'opérateur de création grâce à la relation suivante :
si p et q sont deux variables conjuguées

$$[p(\lambda), q(\lambda')] = -i\delta(\lambda - \lambda') \rightarrow [p(\lambda), e^{iq(\lambda')}] = \delta(\lambda - \lambda')e^{iq(\lambda)} \tag{2.17}$$

Comme la densité d'état $\rho(x)$ est la dérivée spatiale du champs bosonique $\phi(x)$, nous pouvons remplacer l'impulsion p par ρ et la position q par ϕ.

$$[\rho(x'), \phi(x)] = -i\sqrt{\nu}\delta(x - x') \tag{2.18}$$

$$[\rho(x'), \frac{1}{\sqrt{\nu}}\phi(x)] = -i\delta(x - x') \tag{2.19}$$

Nous concluons alors que ρ et ϕ sont conjugués canoniques, en comparant la relation (2.17) et la définition (2.12). Nous pouvons déduire que l'opérateur ψ s'écrit sous la forme d'une exponentielle de ϕ.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{ikx} e^{i\frac{1}{\sqrt{\nu}}\phi(x)} \tag{2.20}$$

avec e^{ikx} donnant le sens du déplacement des électrons et α le cut-off spatial permettant d'éliminer la partie non physique du spectre.

De plus, nous remarquons que l'opérateur dépend également de la fraction de remplissage ν, pouvant agir sur leur relation de commutation et d'anticommutation. Il est donc utile de connaître quelle doit être la contrainte sur ν pour obtenir des électrons qui sont des fermions.

2.2.3 Condition sur la fraction de remplissage pour les fermions

Si un opérateur est un opérateur de création fermionique, il observe la règle suivante :

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = 0 \tag{2.21}$$

Lorsque nous avons deux opérateurs sous forme d'exponentielle d'opérateurs, leur produit se fait selon la relation suivante :

$$e^A e^B = e^{A+B-\frac{[A,B]}{2}} \tag{2.22}$$

Il faut donc connaître le commutateur des champs bosoniques dans un premier temps

$$[\phi(x), \phi(x')] = -i\pi sgn(x - x') \tag{2.23}$$

Le produit des opérateurs fermioniques donne donc :

$$\psi(x)\psi(x') = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{ik(x+x')} e^{i\frac{1}{\sqrt{\nu}}\phi(x)+\phi(x')} e^{\frac{i\pi}{2\nu} sgn(x-x')} \tag{2.24}$$

$$\psi(x')\psi(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{ik(x+x')} e^{i\frac{1}{\sqrt{\nu}}\phi(x)+\phi(x')} e^{-\frac{i\pi}{2\nu} sgn(x-x')} \tag{2.25}$$

En comparant les expressions ci-dessus, nous établissons que :

$$\psi(x)\psi(x') = e^{\pm i\frac{\pi}{\nu}} \psi(x')\psi(x) \tag{2.26}$$

$$\text{avec } e^{\pm i\frac{\pi}{\nu}} = -1 \text{ pour } m = \frac{1}{\nu} \text{ un entier impair} \tag{2.27}$$

La fraction de remplissage a donc la forme $\nu = 1/m$ avec m un entier impair. Nous sommes donc dans le cas d'un liquide de Hall fractionnaire.

2.3 Fonction de Green des bosons

Les propriétés d'évolution et thermodynamique d'un système à l'équilibre ou hors-équilibre s'expriment à l'aide de fonctions de Green. Il est donc nécessaire de connaître celles des quasiparticules. Elles se définissent comme suit[53] :

$$G(x,t,x',t') = \langle T_t(\phi(x,t)\phi(0,0))\rangle \tag{2.28}$$

$$= \frac{1}{Z_E}\int \mathcal{D}\phi\, \phi(x,t)\phi(0,0) e^{-i\frac{S_E(\phi)}{\hbar}} \tag{2.29}$$

avec Z_E la fonction de partition euclidienne, et $S_E(\phi)$ l'action euclidienne.

2.3.1 Fonction de partition

La fonction de partition s'écrit comme[54, 55] :

$$Z_E = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{i}{\hbar}S_E(\phi)} \tag{2.30}$$

$$S_E(\phi) = \int dt\ L(\phi), \text{ l'action euclidienne} \tag{2.31}$$

Pour pouvoir calculer la fonction de partition, il faut connaître le lagrangien du système.

Calcul du lagrangien et de l'action

Nous écrivons donc, dans un premier temps, la transformée de Fourrier de la densité des particules sur le bord du liquide de Hall (2.14) : $\rho_k = -i2\pi k/\sqrt{\nu}\phi_k$. Nous pouvons calculer l'impulsion et la position canonique en fonction du champ bosonique.

$$p_k = \frac{\hbar}{\sqrt{\nu}}\phi_{-k}, \qquad q_k = -i2\pi k/\sqrt{\nu}\phi_k \tag{2.32}$$

Nous obtenons alors le lagrangien :

$$L = -\frac{\hbar}{4\pi}\int dx \left[v\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right] \tag{2.33}$$

L'action euclidienne s'écrit donc :

$$S_E = \int dtL = -\frac{\hbar}{4\pi}\int d\tau \int dx\phi\left[\left(v\partial_x + \partial_t\right)\partial_x\right]\phi$$

L'action euclidienne que nous avons dérivé ci-dessus est l'action chirale qui est utilisée pour décrire les états de bords dans les publications.
Nous trouvons donc une action quadratique de la forme :

$$S_E = -\hbar\int dt\int dx\phi\mathcal{O}\phi \text{ avec } \mathcal{O} = \frac{1}{4\pi}\left(v\partial_x + \partial_t\right)\partial_x \tag{2.34}$$

2.3.2 Généralités sur les fonctions de Green

Pour calculer la fonction de Green, nous ajoutons une fonction auxiliaire $\eta(x,\tau)$ à l'action euclidienne, nous avons alors une nouvelle fonction de partition[54] :

$$Z' = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\frac{i}{\hbar}S_E + i\int dxdt\eta(x,t)\phi(x,t)} \tag{2.35}$$

L'intérêt d'introduire cette fonction, en la faisant tendre vers zéro, est de retrouver l'action et la fonction de partition réelles du système à la fin des calculs et ainsi la bonne fonction de Green.

Le champ auxiliaire étant multiplié par le champ ϕ dans l'exponentielle, pour obtenir la fonction de Green, il suffit donc de dériver deux fois en fonction du champ auxiliaire en position et temps voulus :

$$G(x,t,0,0) = \frac{1}{Z_E}\frac{\delta^2 Z'}{\delta\eta(x,t)\delta\eta(0,0)}\bigg|_{\eta\to 0} = \langle T(\phi(x,t)\phi(0,0))\rangle \tag{2.36}$$

Pour connaître la forme de la fonction de Green sans l'exprimer à l'aide des champs bosoniques ϕ, nous effectuons un changement de variable afin d'isoler le champ auxiliaire.

$$S' = -\hbar\int dtdx\left[\phi\mathcal{O}\phi + i\eta\phi\right] = -\hbar\int dtdx\left[\phi\mathcal{O}\phi + \frac{1}{2}i\eta\mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}\phi + \frac{1}{2}i\eta\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1}\phi\right] \tag{2.37}$$

Le changement de variable approprié est le shift $\phi \to \tilde{\phi} = \phi + \frac{1}{2}i\eta\mathcal{O}^{-1}$, avec $\mathcal{O}^{-1}$ l'inverse de l'opérateur $\mathcal{O}$ définie ci-dessus, nous permet d'écrire

$$S' = -\hbar\int dtdx\left[\left(\phi + \frac{1}{2}i\eta\mathcal{O}^{-1}\right)\mathcal{O}\left(\phi + \frac{1}{2}i\eta\mathcal{O}^{-1}\right) + \frac{1}{4}\eta\mathcal{O}^{-1}\eta\right] \tag{2.38}$$

Nous retrouvons une action quadratique en ϕ donc plus simple. Nous pouvons alors dériver la fonction de partition

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Z'}{\delta\eta(x,t)} &= \frac{\delta}{\delta\eta(x,t)}\int \mathcal{D}\phi e^{-i\frac{S'}{\hbar}} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\eta(x',t')\mathcal{O}^{-1} + \mathcal{O}^{-1}\eta(x',t')\right)e^{-\hbar\int d\tau dx\left[\tilde{\phi}\mathcal{O}\tilde{\phi} + \frac{1}{4}\eta\mathcal{O}^{-1}\eta\right]} \\
\frac{\delta^2 Z'}{\delta\eta(x,t)\delta\eta(0,0)}\bigg|_{\eta\to 0} &= \left[-\frac{1}{2}\mathcal{O}^{-1}Z' + \frac{1}{16}\left(\eta(x',t')\mathcal{O}^{-1} + \mathcal{O}^{-1}\eta(x',t')\right)^2 Z'\right]\bigg|_{\eta\to 0} \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{O}^{-1}Z_E
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Il est maintenant plus facile d'exprimer la fonction de Green.

$$G = \frac{1}{Z_E} \frac{\delta^2 Z'}{\delta\eta(x,t)\delta\eta(0,0)}\bigg|_{\eta\to 0} = -\frac{1}{2}\mathcal{O}^{-1} \tag{2.40}$$

Nous pouvons remarquer que la fonction de Green ne dépend pas des champs bosoniques mais est proportionnelle à l'inverse de l'opérateur défini précédemment.

Il est utile de formuler la fonction de Green en temps imaginaire, c'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle apparaîtra dans la suite du rapport. Le passage du temps imaginaire au temps réel se fait en remplaçant t par le temps imaginaire qui est donné grâce à la relation $\tau = it$. La fonction de Green s'écrit alors : $G = 1/2\mathcal{O}^{-1}$ avec $\mathcal{O} = 1/4\pi(v\partial_x + i\partial_\tau)\partial_x$.

2.3.3 Fonction de Green bosonique

Sachant que $\mathcal{O}G = c\delta(x)\delta(\tau)$, nous pouvons calculer explicitement la fonction de Green. Pour simplifier l'écriture nous choisissons dans le reste du rapport de ne plus préciser l'indice "QP" pour l'opérateur des quasiparticules.

1. Nous posons dans un premier temps $-\partial_x G = f$ et nous voulons prouver que $(1/4\pi)\left(v\partial_x + i\partial_\tau\right) f = c\delta(x)\delta(\tau)$, avec c une constante. Soit les coordonnées $z = x/v + i\tau$ et $\bar{z} = x/v - i\tau$ le complexe conjugé de z. Les dérivées partielles donnent

$$\begin{cases} \partial_x = \partial_z \frac{\partial z}{\partial x} + \partial_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{1}{v}(\partial_z + \partial_{\bar{z}}) \\ \partial_\tau = \partial_z \frac{\partial z}{\partial \tau} + \partial_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \tau} = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\partial_z = v\partial_x - i\partial_\tau \\ 2\partial_{\bar{z}} = v\partial_x + i\partial_\tau \end{cases} \tag{2.41}$$

Comme $\partial(1/z)/\partial\bar{z} = v\pi\delta^2(x,y)$ (voir annexe A), donc dans le repère complexe nous obtenons

$$\frac{1}{\pi}\partial_{\bar{z}} f = v\delta(x)\delta(\tau) \tag{2.42}$$

avec $c = v/2$.
Le problème est que $0 < \mathrm{Im} z = \tau < \beta$ ne couvre pas tout le domaine, et pour palier à ce problème nous imposons une périodicité à τ :

$$f(z + i\beta) = f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{z - in\beta} \tag{2.43}$$

Cette dernière égalité a été établie grâce à la définition suivante

$$\begin{aligned} \coth \pi x &= \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2} \\ f(z) &= \frac{\pi/\beta}{\pi z/\beta} + \frac{\pi}{\beta}\frac{1}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{z/\beta - in} = \frac{\pi}{\beta}\left(\frac{\beta}{z\pi} + \frac{(z/\beta)}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z/\beta)^2 + n^2}\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dans notre système de coordonnées, nous posons que $f/v \to f$, et l'expression devient :

$$f(z) = \frac{\pi}{v\beta}\coth\left(\pi\frac{z}{\beta}\right) \tag{2.45}$$

2. <u>Calcul de la fonction de Green</u>
   Finalement, comme

$$\begin{aligned} \partial_x G(x,0,\tau) &= -f(x/v+i\tau) = -\frac{\pi}{v\beta}\coth\left(\pi\frac{x/v+i\tau}{\beta}\right) \\ \text{donc } G(x,0,\tau) &= -\int dx\frac{\pi}{v\beta}\coth\left(\pi\frac{x/v+i\tau}{\beta}\right) \end{aligned} \tag{2.46}$$

   en appliquant les changements de variables $\pi(x/v+i\tau)/\beta \to y$ et $dx \to (v\beta/\pi)dy$, nous obtenons :

$$G(x,0,\tau) = -\int dy\coth(y) = -\ln(\sinh(y)) \tag{2.47}$$

   donc la fonction de Green des quasiparticules s'écrit

$$G = -\ln\left[\sinh\left(\pi\frac{x/v+i\tau}{\beta}\right)\right] \tag{2.48}$$

Nous remarquons que la fonction de Green ne dépend pas de la fraction de remplissage mais dépend de la température, c'est une fonction de Green thermique G_{th}.

Chapitre 3

Calcul du courant tunnel et des corrélations de courant

3.1 Introduction

Imaginons l'expérience d'effet tunnel suivante :
Deux échantillons métalliques sont séparés par un fluide de Hall fractionnaire. Le courant circule le long des bords des échantillons en sens opposé avec une vitesse v (voir fig. 3.1).

Nous imposons une tension constante V_0, entre les échantillons, suffisante pour créer un courant tunnel entre les deux bords à travers le fluide de Hall, ce qui crée une interaction entre les deux bords, avec l'hamiltonien d'interaction suivant :

$$H_{int} = \sum_{\varepsilon=\pm} \left[\Gamma_0 \psi_2^\dagger \psi_1\right]^\varepsilon \text{ avec } \left\{ \begin{array}{lcl} \left[\Gamma_0 \psi_2^\dagger \psi_1\right]^+ & = & \left[\Gamma_0 \psi_2^\dagger \psi_1\right] \\ \left[\Gamma_0 \psi_2^\dagger \psi_1\right]^- & = & \left[\Gamma_0^* \psi_1^\dagger \psi_2\right] \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Comme les bords sont deux liquides de Luttinger chiraux, l'opérateur des quasiparticules a la forme suivante :

$$\psi_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x} e^{i\sqrt{\nu}\phi_r(x)} \tag{3.2}$$

avec $r = 1, 2$, $a = v\tau_0$ le cut-off spatial, $\tau_0 = \hbar/E_F$ le cut-off temporel, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2.

Le problème dans ce modèle est que la présence d'une tension entre les deux bords n'apparaît pas de façon explicite dans les opérateurs des quasiparticules ou dans l'hamiltonien d'interaction.

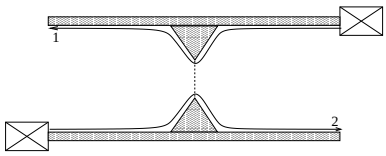

Fig. 3.1 – Une tension est appliquée entre les deux bords chiraux d'un fluide de Hall quantique. Au niveau, de la constriction des quasiparticules peuvent traverser le fluide de Hall par effet tunnel pour passer d'un bord à l'autre.

3.1.1 Comment inclure la tension ?

Par convention, nous choisissons une tension s'écrivant, $V = V_0$, où V_0 est un potentiel scalaire constant et le potentiel vecteur $\vec{A}$ est nul. Pour faire apparaître le potentiel vecteur dans l'hamiltonien, il faut changer de convention afin d'annuler le potentiel scalaire et rendre le potentiel vecteur non nul. Ainsi les opérateurs de création et de destruction, dans cette nouvelle convention, feront apparaître une phase. Pour y arriver, il faut effectuer une transformation de jauge, ou substitution de Peierls. La jauge choisie fait apparaître une différence de phase entre les deux conducteurs proportionnelle au potentiel scalaire initial, $ie^*V_0t/\hbar$, donc à la tension, avec $e^* = \nu e$ la charge des quasiparticules. Par contre, quelque soit la jauge, la forme de l'hamiltonien doit rester inchangé $H'_{int} = \sum_{\varepsilon=\pm} \left[\Gamma(t)\psi_2'^{\dagger}\psi_1'\right]^{\varepsilon} = H_{int}$. L'Hamiltonien dépendra toujours d'un terme d'échange qui est maintenant pondéré par une phase qui dépend de la tension appliquée. Ainsi, en exprimant l'hamiltonien à l'aide des opérateurs de quasiparticules initiaux, nous faisons apparaître la différence de phase qui sera incluse dans le terme d'échange $\Gamma(t)$:

$$\Gamma(t) \quad = \quad \Gamma_0 e^{i\omega_0 t}, \text{avec } \omega_0 = \frac{e^* V_0}{\hbar} \tag{3.3}$$

Le potentiel apparaît donc au niveau du coefficient de transmission tunnel.

3.2 Courant moyen

Lorsque que nous injectons un électron sur un bord et qu'il est transmis au second bord, un courant tunnel s'établit entre les deux bords grâce au passage des quasiparticules à travers le liquide de Hall fractionnaire.

3.2.1 Calcul du courant tunnel

D'après l'article de Caroli[56] qui étudie l'effet tunnel entre deux chaînes semi-infinies de sites extrêmes 1 et 2, si nous avons un hamiltonien tunnel de la forme :

$$H = (T_{1\,2} c_1^{\dagger} c_2 + h.c.) \tag{3.4}$$

avec $T_{1\,2}$ est le coefficient de transmission entre deux sites. Cet hamiltonien est obtenu en utilisant l'équation d'évolution d'Heisenberg pour l'évolution de la densité de charge et en identifiant l'équation de continuité.

En comparant l'hamiltonien ci-dessus et celui de l'effet Hall fractionnaire, nous remarquons qu'ils sont très similaires, nous pouvons donc déduire du courant tunnel calculé par Caroli, l'expression du courant dans notre système [57, 58, 59] :

$$I \quad = \quad \frac{ie^*}{\hbar}\left[\Gamma(t)\psi_2^{\dagger}\psi_1 - \Gamma^*(t)\psi_1^{\dagger}\psi_2\right] = \Gamma_0 \frac{ie^*}{\hbar}\sum_{\varepsilon=\pm} \varepsilon e^{\varepsilon i\omega_0 t}\left[\psi_2^{\dagger}\psi_1\right]^{\varepsilon} \tag{3.5}$$

où Γ est un terme de saut entre les deux bords pour les quasiparticules.

Le courant étant mesuré dans un régime stationnaire, il sera plus intéressant de calculer le courant moyen $\langle I(t)\rangle$. De plus, l'interaction qui impose aux quasiparticules de traverser le liquide de Hall étant un phénomène hors-équilibre, nous calculons le courant moyen à l'aide du formalisme Keldysh.

3.2.2 Formalisme Keldysh

Le formalisme Keldysh permet d'aborder les problèmes de transport en mécanique quantique, nous allons donc l'introduire dans un calcul d'opérateurs, et pour simplifier nous posons la température à zéro.

L'hamiltonien du système est $H = H_0 + H_{int}$, avec H_0 l'hamiltonien sans interaction et H_{int} celui des interactions. Dans la représentation d'Heisenberg, seuls les opérateurs dépendent du temps, et la valeur moyenne d'un produit d'opérateurs est donnée par :

$$\langle A_H(t_0)B_H(t_1)C_H(t_2)D_H(t_3)\ldots\rangle \text{ avec } t_0 > t_1 > t_2 > t_3 > \ldots \tag{3.6}$$

Lorsque que nous passons en représentation d'interaction en ajoutant la matrice S d'évolution temporelle du système :

$$S(t,t') \;=\; T\,exp\left\{-i\int_{t'}^{t} dt''\,H_{int}(t'')\right\} \tag{3.7}$$

avec H_{int} devient $e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t}$[60]. La valeur moyenne devient alors :

$$\langle S(-\infty,+\infty)T(A_I(t_0)B_I(t_1)C_I(t_2)D_I(t_3)\ldots S(+\infty,-\infty))\rangle \tag{3.8}$$

avec T est l'opérateur qui ordonne dans le temps réel.
Lorsque le système se trouve à température nulle ou à l'équilibre à température quelconque, nous pouvons remplacer la moyenne de la matrice S par une phase, car le système reste invariant (fig. 3.2) à une phase près : $\langle S(+\infty,-\infty)\rangle = e^{i\gamma}$.

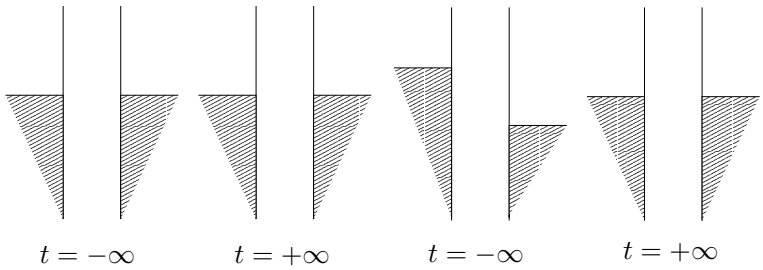

FIG. 3.2 – Gauche : Lorsqu'un système est à l'équilibre, il restera inchangé au cours du temps. Droite : Un système qui n'est pas à l'équilibre à l'origine a tendance à évoluer dans le temps afin de retrouver sa position d'équilibre.

Dans un cas hors équilibre, nous ne retrouvons pas forcément le système dans le même état après son évolution au cours du temps (fig. 3.2). La théorie des pertubations étant écrite avec des opérateurs ordonnés dans le temps, il faut adopter un formalisme qui permette d'ordonner le temps.

Pour résoudre ce problème, Keldysh proposa donc un nouveau contour temporel[61, 62]. Sur ce contour, le temps décrit un chemin qui va de $-\infty$ à $+\infty$ et fait demi-tour en $+\infty$ pour revenir à $-\infty$ comme nous pouvons le voir sur la figure 3.3. Ce coutour comporte deux branches :

- une branche supérieure (+) allant dans le sens du temps ;
- une branche inférieure (−) allant en sens inverse.

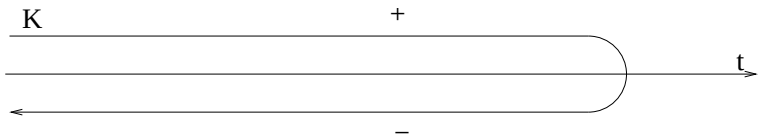

FIG. 3.3 – Sur le contour Keldysh, le temps est parcours dans le sens normal et dans le sens inverse et observe un demi-tour en $+\infty$. Les temps qui sont placés sur la branche "$-$" sont supérieurs à ceux placés sur la branche "$+$".

Un nouvel ordre temporel (T_K) est créé, où les temps qui sont sur la branche "$-$" sont supérieurs à ceux se trouvant sur la branche "$+$". Nous pouvons donc poser que la matrice $S_1 = S(+\infty, -\infty)$ se situe sur la branche supérieure et que la matrice $S_2 = S(-\infty, +\infty)$ se situe sur la branche inférieure du contour. Ainsi, S_2 décrit des événements se déroulant à des temps ultérieurs que ceux décrit par S_1, et nous pouvons donc ordonner le produit se trouvant à l'intérieur des brakets. La valeur moyenne devient alors : $\langle T_K(A_I(t_0)B_I(t_1)C_I(t_2)D_I(t_3)\ldots S(-\infty,-\infty))\rangle$ avec $S(-\infty,-\infty) = T_K\, exp\left\{-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, H_{int}(t) + i\int_{+\infty}^{-\infty} dt\, H_{int}(t)\right\}$.

Cas des fonctions de Green

Soit un système en équilibre subissant une interaction à partir du temps $t = t_0$ qui décroît lorsque t tend vers l'infini, l'hamiltonien d'un tel système est $H = H_0 + H_I(t)$ avec $H_I(t) = 0$ pour $t < t_0$.
La fonction de Green devient alors, en représentation de Heisenberg :

$$G(t,t') \;=\; -i\langle T(\psi(t)\psi^\dagger(t'))\rangle = \begin{cases} -i\langle\psi(t)\psi^\dagger(t')\rangle & t > t' \\ \mp i\langle\psi^\dagger(t')\psi(t)\rangle & t' > t \end{cases} = \begin{cases} G^>(t,t') & t > t' \\ G^<(t,t') & t' > t \end{cases}$$

Lorsque les opérateurs ψ et $\psi^\dagger$ commutent, la fonction de Green conserve le signe négatif dans le cas des champs fermioniques et prend le signe positive dans le cas des champs bosoniques.
En représentation d'interaction nous obtenons la fonction de Green suivante :

$$G(t,t') \;=\; -i\langle S(-\infty,+\infty)T(\psi(t)\psi^\dagger(t')S(+\infty,-\infty))\rangle \tag{3.9}$$

Dans le cas d'un système en équilibre, l'état après la perturbation reste identique à une phase γ près à l'état initial, donc $\langle S(+\infty,-\infty)\rangle = e^{i\gamma}$ et la fonction de Green peut être exprimée à nouveau de façon plus simple :

$$G(t,t') \;=\; -ie^{-i\gamma}\langle T(\psi(t)\psi^\dagger(t')S(+\infty,-\infty))\rangle \tag{3.10}$$

Par contre si le système est hors équilibre, nous devons utiliser le formalisme Keldysh, ce qui donne le résultat suivant pour les fonctions de Green.

A chaque temps t, nous pouvons placer le point sur la branche supérieure ou inférieure du contour Keldysh. Cela induit l'existence de quatre fonctions de Green possibles :

– Les temps t et t' se trouvent sur la branche supérieure, fig.3.4.a :
  Les opérateurs sont donc ordonnés dans le temps. La fonction de Green reste la même que pour un contour normal :

$$G_C(t,t') \;=\; -i\langle T(\psi(t)\psi^\dagger(t'))\rangle \tag{3.11}$$

– t sur la branche supérieure et t' sur la branche inférieure, fig.3.4.b :
Donc $t' > t$, et quelles que soient les valeurs de t et t', les opérateurs restent toujours ordonnés :

$$G_>(t,t') = -i\langle(\psi(t)\psi^\dagger(t'))\rangle \tag{3.12}$$

– t sur la branche inférieure et t' sur la branche supérieure, fig.3.4.c :
Donc $t' < t$, et quelles que soient les valeurs de t et t', les opérateurs sont anti-ordonnés :

$$G_<(t,t') = \mp i\langle(\psi^\dagger(t')\psi(t))\rangle \tag{3.13}$$

– Les temps t et t' se trouvent sur la branche inférieure, fig.3.4.d :
Les opérateurs sont donc ordonnés dans le sens inverse du temps. La fonction de Green reste la même que pour un contour normal :

$$G_{\bar{C}}(t,t') = -i\langle\tilde{T}(\psi(t)\psi^\dagger(t'))\rangle \tag{3.14}$$

avec $\tilde{T}$ l'anti-ordre temporel, $\tilde{T}(\psi(t)\psi^\dagger(t')) = T(\psi(-t)\psi^\dagger(-t'))$

Nous pouvons alors écrire la fonction de Green sous forme de matrice :

$$G(t,t') = \begin{pmatrix} G_C & G_> \\ G_< & G_{\bar{C}} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Grâce aux rotations de la base dans laquelle nous définissons le système Keldysh, les quatre fonctions peuvent être réduites à trois avec les relations suivantes : les fonctions de Green Avancée et Retardée : $G^{R/A}(t,t') = \pm\Theta(\pm(t-t'))(G^>(t-t') - G^<(t-t'))$ et la fonction de Green Kedysh $G^K = G^>(t-t') + G^<(t-t') = G^C(t-t') + G^{\bar{C}}(t-t')$.

$$G(t,t') = \begin{pmatrix} 0 & G_A \\ G_R & G_K \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

En représentation d'interaction, la matrice $S(-\infty,+\infty)$ apparaît à nouveau :

$$G(t,t') = -i\langle T_K(\psi(t)\psi^\dagger(t')S(-\infty,-\infty))\rangle \tag{3.17}$$

3.2.3 Courant moyen

Lorsque nous avons un seul opérateur, le choix du contour ne se pose pas. Le courant moyen en formalisme Keldysh s'exprime alors comme suit :

$$\langle I(t)\rangle = \langle T_K(I(t)S(-\infty,-\infty))\rangle = \frac{1}{2}\sum_\eta \langle T_K(I(t_\eta)S(-\infty,+\infty))\rangle \tag{3.18}$$

Le courant moyen ne pouvant être calculé directement, il faut le développer en terme de puissance de Γ_0, ce qui donne la série suivante avec les indices représentant les ordres : $\langle I(t)\rangle = \langle I(t)\rangle_0 + \langle I(t)\rangle_1 + \langle I(t)\rangle_2 + \ldots$. La solution la plus simple est de développer en série la fonction exponentielle de l'opérateur S : $S(-\infty,+\infty) = T_K\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{\eta_1}\eta_1\int_{-\infty}^{+\infty}H_T(t')dt'}\right)$
avec η_1 indique la branche du contour.

L'opérateur S apparaît ainsi sous la forme d'une somme de termes multiples de toutes les puissances de Γ_0.

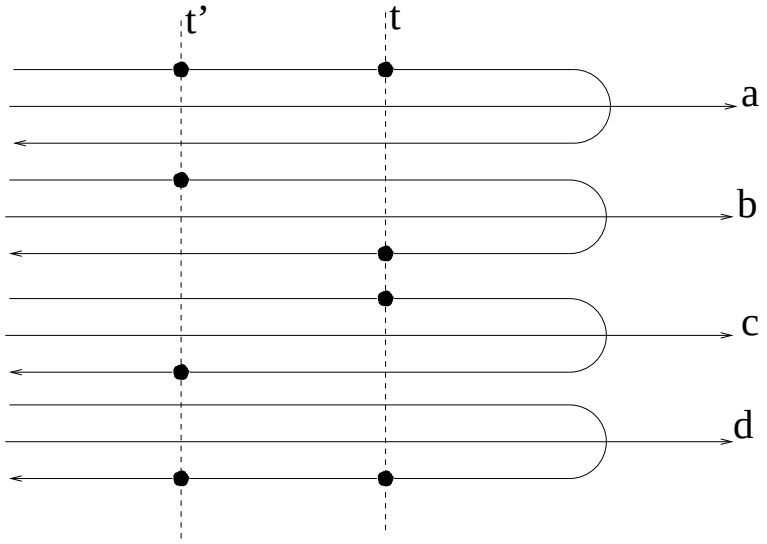

FIG. 3.4 – Les temps t et t' peuvent être posés sur les deux branches du contour Keldysh, ce qui donne quatre configurations : deux configurations où les temps sont sur la même branche, (a sur la branche "+" et d sur la branche "−"), et deux autres où les temps sont sur des branches différentes (b, t est sur la branche '+" et t' sur la branche "−", c t est sur la branche '−" et t' sur la branche "+").

- Le premier ordre, l'ordre 0 en Γ_0, ne dépend pas du taux tunnel.
- Le second ordre, qui apparaît, est proportionnel à Γ_0, c'est l'ordre 1. Il représente le courant moyen à l'équilibre qui est nul.
- L'ordre 2, proportionnel à Γ_0^2, devient ainsi le premier ordre non nul du courant moyen.

Le courant moyen dépendra du taux tunnel au carré et du corrélateur $\left\langle T_K(\psi_2^\dagger\psi_1)^{\varepsilon}_{t_\eta}(\psi_2^\dagger\psi_1)^{\varepsilon_1}_{t_1^{\eta_1}}\right\rangle$ avec η et η_1 sont les branches du chemin Keldysh, et $\varepsilon, \varepsilon_1 = \pm$ indique que nous prenons l'opérateur $(+)$ ou son conjugué $(-)$.

Nous faisons l'hypothèse que l'impureté, dans les deux bords, est à la même position. Connaissant l'expression de $\psi_r(x,t)$ en terme de champs bosoniques (éq. 3.2), et sachant que les champs ϕ_1 et ϕ_2 commutent, nous pouvons permuter les opérateurs ψ_1 et ψ_2 et créer ainsi deux corrélateurs qui décrivent chacun un bord. Finalement, les opérateurs $\psi_r(x,t)$ sont remplacés par leur expression ce qui fait apparaître le produit de corrélateurs ayant la forme : $\left\langle T_K e^{i\alpha\varepsilon\sqrt{\nu}\phi_r(x)} e^{i\alpha\varepsilon_1\sqrt{\nu}\phi_r(x)}\right\rangle$.

Nous définissons ce corrélateur comme la fonction de Green des quasiparticules pour le bord r avec $\alpha = \pm$ pour $r = 1, 2$. La fonction de Green est nulle lorsque $\alpha\varepsilon \neq -\alpha\varepsilon_1$ [53, 57, 63]. En cas d'égalité, elle est égale à l'exponentielle de la différence des fonctions de Green Keldysh au temps $(t - t_1)$ et au temps 0, multipliée par la fraction de remplissage ν. Le courant moyen apparaît donc comme le produit de fonctions de Green des quasiparticules des deux bords mis en jeu.

Nous connaîssons déjà la fonction de Green pour les quasiparticules à température non nulle et en temps imaginaire, or nous devons calculer la fonction de Green des électrons lorsque l'inverse de la température est nulle, $\beta = [k_B T]^{-1} = 0$, pour avoir l'expression aux temps réels . Pour obtenir des temps réels dans l'expression (2.48), nous déplaçons le temps $\tau \to it + \tau_0$. La fonction de Green étant spatialement et temporellement homogène, nous pouvons choisir $x \to 0$, $t \to t - t_1$ et $t_1 \to 0$. Le fait que nous soyons à température nulle permet d'approximer le sinus hyperbolique à son développement de Taylor à l'ordre le plus bas : $\sinh a \approx a$. Pour $G^{\eta\eta}(t,t)$, quelque soit la valeur de η, nous avons la même solution, $G = -\ln\left[(i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right]$.

Comme $\eta, \eta_1 = \pm$, nous avons quatre fonctions de Green.

$$\eta, \eta_1 = -+ \quad \begin{cases} G^{-+} &= G^{>}(t) = -\ln\left[(-t+i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right] \\ G^{-+}_{QP} &= e^{-\nu \ln\left[(-t+i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right]+\nu\ln\left[(i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right]} = \left(-\frac{t}{i\tau_0}+1\right)^{-\nu} \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\eta, \eta_1 = +- \quad \begin{cases} G^{+-} &= G^{<}(t) = G^{>}(-t) = -\ln\left[(t+i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right] \\ G^{+-}_{QP} &= \left(\frac{t}{i\tau_0}+1\right)^{-\nu} \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\eta, \eta_1 = ++ \quad \begin{cases} G^{++} &= \Theta(-t)G^{<}(t) + \Theta(t)G^{>}(t) = -\ln\left[(-|t|+i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right] \\ G^{++}_{QP} &= \left(-\frac{|t|}{i\tau_0}+1\right)^{-\nu} \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\eta, \eta_1 = -- \quad \begin{cases} G^{--} &= \Theta(t)G^{<}(-t) + \Theta(t)G^{>}(-t) = -\ln\left[(|t|+i\tau_0)\frac{\pi}{\beta}\right] \\ G^{--}_{QP} &= \left(\frac{|t|}{i\tau_0}+1\right)^{-\nu} \end{cases} \tag{3.22}$$

Les fonctions de Green ne dépendent pas de la position de l'électron, donc $G_1^{\eta\eta_1} = G_2^{\eta\eta_1} = G^{\eta\eta_1}$. Nous voyons que la dépendance en π/β disparaît, l'annulation de la température ne nous gène donc pas. Nous avons finalement le courant moyen suivant :

$$\langle I(t)\rangle \quad = \quad \Gamma_0^2 \frac{ie^*}{\hbar^2}\frac{1}{(2\pi a)^2}\sum_{\eta\eta_1}\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \sin[\omega_0(t-t_1)][G^{\eta\eta_1}_{QP}(t-t_1,0)]^2 \tag{3.23}$$

Comme les fonctions de Green G^{++} et G^{--} sont paires et la fonction sinus est impaire, leur produit est donc une fonction impaire qui s'annule lorsque nous intégrons sur tous les temps, donc les contributions en $\eta = \eta_1$ disparaissent. Nous remplaçons dans l'expression du courant les fonctions de Green qui sont restées, l'intégrale a un résultat connue qui est égale à l'inverse de la fonction Γ.

Donc le courant moyen s'écrit

$$\langle I(t)\rangle \quad = \quad \Gamma_0^2 \frac{ie^*}{\hbar^2}\frac{\tau_0^{2\nu}}{(2\pi a)^2}\frac{2\pi i\omega_0^{2\nu-1}e^{-\omega_0\tau_0}}{\Gamma(2\nu)} \tag{3.24}$$

avec Γ est la fonction Gamma, $\omega_0 = e^*V_0/\hbar$ la tension et $a = v\tau_0$ le cut-off spatial.

Le courant au cours du temps n'est pas égal au courant moyen, mais connaît des écarts autour de cette valeur, ce qui crée un bruit qui est intéressant à calculer.

3.3 Le bruit

Le bruit provient des fluctuations de courant dues à la nature stochastique du transfert de charges dans un système, c'est-à-dire au caractère discret des particules émises de façon aléatoire. Dans un régime tunnel où les particules sont émises de manière indépendante, le processus est alors poissonien et le bruit est proportionnel au nombre moyen de particules émises et a la forme $S = 2q\langle I\rangle$, avec q la charge de la particule et $\langle I\rangle$ le courant moyen. Cette formulation du bruit est appelée formule de Schottky. La nature probabiliste du transfert de charges (fig.3.5) est également due à la distribution de Fermi-Dirac des réservoirs et aux probabilités de transmission à travers la barrière.

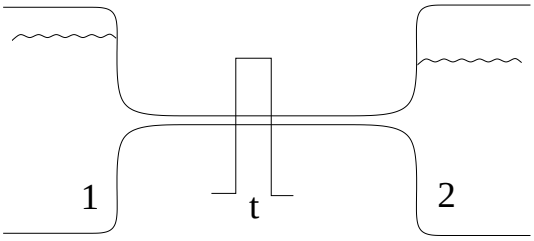

FIG. 3.5 – Transmission tunnel d'électrons à travers un fil entre de réservoirs.

Ce bruit est mesurable seulement à basse fréquence (en dessous de 100kHz), sinon les effets de la tension sont trop perceptibles puisque les deux paramètres sont très proches. Il faut faire attention de ne pas trop déscendre dans les basses fréquences, sinon l'effet du bruit en $1/f$ dominerai. Nous nous situons dans un régime de basse fréquences suffisament élevées pour que les effet du bruit en $1/f$ reste négligeables.
Le bruit nous permet donc de mettre en lumière les particules transférées, puisqu'il est proportionnel à la charge des particules.

Le bruit est en réalité la fonction de corrélation courant-courant à fréquence nulle. Pour avoir la formule du bruit, il faut tout d'abord connaître l'expression de ces corrélations.

3.3.1 Fonction de corrélation

Nous posons que la fonction de corrélation du courant s'écrit[64] :

$$S(t,t') = \langle I(t)I(t') + I(t')I(t)\rangle - 2\langle I(t)\rangle\langle I(t')\rangle \tag{3.25}$$

$$= \sum_{\eta=\pm}\langle\Big(T_K(I(t_\eta)I(t'_{-\eta}) + I(t'_\eta)I(t_{-\eta})\Big)S(-\infty,+\infty))\rangle \tag{3.26}$$

Nous développons l'opérateur d'évolution afin que le bruit soit exprimé à l'ordre deux, c'est-à-dire proportionnel au carré du coefficient de transmission. Comme le courant est linéaire à Γ_0, l'ordre zéro de $S(-\infty,+\infty) \sim 1$ suffira. Le courant est remplacé par son expression en terme de champs bosonique, ainsi les fonctions de Green des quasiparticules, non nulles pour $\varepsilon = -\varepsilon'$, réapparaissent à nouveau. Elles sont cette fois multipliées à une fonction paire. Les fonctions de Green G^{+-} et G^{-+} n'apparaîssent pas car l'intégration s'annule, il reste alors les fonctions G^{++} et G^{--} que nous avons calculé ci-dessus, ce qui donne :

$$S(t,t') = \frac{\Gamma_0^2}{(2\pi a)^2}(\frac{e^*}{\hbar})^2\sum_\eta \frac{2\cos(\omega_0(t-t'))}{\Big(-\eta\frac{|t-t'|}{i\tau_0}+1\Big)^{2\nu}} \tag{3.27}$$

3.3.2 Le bruit

Le calcul du bruit résulte du calcul de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à fréquence nulle. Soit,

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt S(t)e^{i\omega t} \tag{3.28}$$

Comme $S(t,t') = S(t-t')$, nous choisissons le changement de variable, $t-t' \to t$, nous remplaçons $S(t)$ par son expression calculée ci-dessus. A nouveau l'intégrale est connue et donne un résultat

dépendant de l'inverse de la fonction Γ. Donc, le bruit est égal à :

$$\tilde{S}(\omega = 0) = \frac{\tau_0^{2\nu}\Gamma_0^2}{(2\pi a)^2}(\frac{e^*}{\hbar})^2 \frac{4\pi i \omega_0^{2\nu-1} e^{-\omega_0\tau_0}}{\Gamma(2\nu)} = 2e^*\langle I\rangle \tag{3.29}$$

avec Γ est la fonction Gamma, $\omega_0 = e^*V_0/\hbar$ la tension et $a = v\tau_0$ le cut-off spatial.

Nous trouvons que le bruit est proportionnel au courant moyen multiplié à la charge des quasiparticules $\tilde{S}(\omega = 0) = 2\nu e\langle I\rangle$. Ce bruit ressemble à la formule de Shottky[7] $\tilde{S}(\omega = 0) = 2e\langle I\rangle$, mais avec une charge effective égale à celle des quasiparticules.

La courbe 3.6 obtenue à partir des mesures expérimentales faite par Glattli [35] sur le bruit en fonction du courant lors d'une transmission tunnel à travers un fluide de Hall de fraction de remplissage $\nu = 1/3$ atteste que ce sont des quasiparticules de charge $e/3$ qui sont transférées.

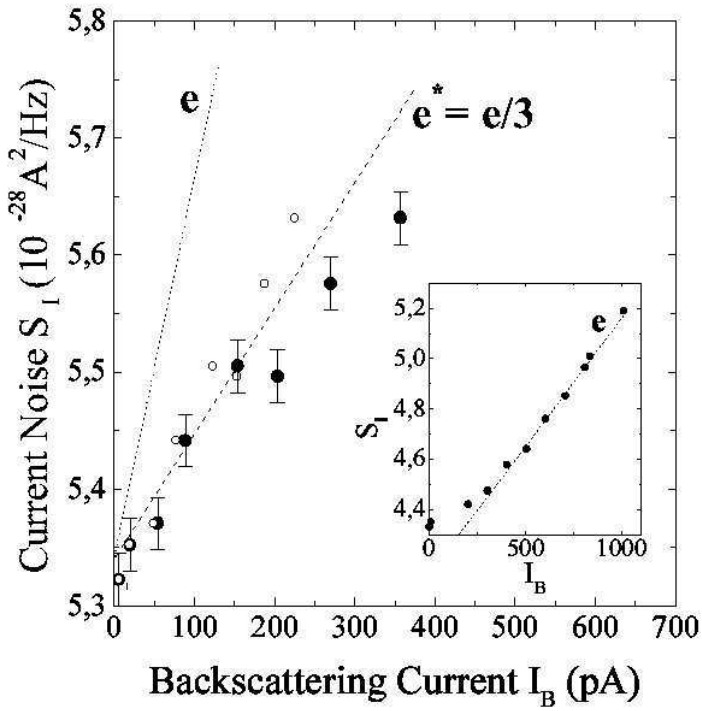

FIG. 3.6 – Mesure de bruit en régime de Hall de quantique révélant le quasiparticules de charge $e/3$.

Chapitre 4

Injection de charges

Lorsqu'une tension est appliquée entre deux bords de l'effet Hall fractionnaire, un courant de particules de charge effective νe s'établi, avec ν le facteur de remplissage. Nous voulons injecter un électron depuis un point contact sur un bord de l'effet Hall fractionnaire à l'aide d'un pulse de tension finie. Comme le transfert de charge se fait hors du fluide de Hall, ce sont des électrons qui sont transféés ici. Cependant cette charge fluctue autour de sa valeur, et il nécessaire de minimiser ces fluctuations, si on veut la contrôler.

Ce processus fut étudié pour des électrons sans interactions (cas des métaux normaux) par Levitov, Lee et Lesovik[65]. Définissant le flux de Faraday, $\phi = e/\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)$, avec $V(t)$ la tension appliquée, ils montrent que la charge moyenne est proportionnelle au flux (la loi d'Ohm) $\langle Q \rangle \sim \phi$. Par contre, les corrélations ont en général une divergence logarithmique, sauf pour les valeurs entières du flux, $\phi = 2\pi n$ avec n entier, où les fluctuations sont finies. Ils expliquent ce comportement en évoquant la catastrophe d'orthogonalité d'Anderson[66]. Dans notre cas, nous souhaiterions contrôler la charge déposée sur un état de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire ou plus généralement sur un liquide de Luttinger chiral.

4.1 Modèle

Nous considérons un modèle composé, d'une part, d'un métal normal avec des électrons sans interaction, qui est parfaitement décrit par le modèle des liquides de Fermi, d'autre part, un état de bord d'un gaz d'électrons dans l'état de Hall fractionnaire. Nous imposons un pulse de tension, $V(t)$, entre les deux conducteurs afin de déposer des électrons sur l'état de bord, mieux appréhendé par le modèle de Luttinger, par effet tunnel, de couplage Γ. La charge qui sera transmise, depuis le métal, devra être égale à un nombre entier d'électrons car un métal ne peut pas céder de fractions d'électrons. La charge moyenne peut être différente d'un entier, elle resultent de la superposition d'état de transmission, 0, 1, 2 ... électrons peuvent être transférés en même temps. La charge moyenne ne peut donct pas être quantifié. Nous rappelons que l'effet Hall est caractérisé par un facteur de remplissage $\nu = 1/m$ avec m un entier impair[48, 35, 36]. Les liquides de Fermi peuvent être décrit comme des liquides de Luttinger avec un facteur de remplissage unitaire, donc pour le conducteur qui sera un métal normal, nous adopterons le langage de Luttinger avec $m = 1$.

4.1.1 Injection de charge dans un conducteur sans interaction

Levitov, Lee et Lesovik[65] traitent le cas des électrons non-corrélés pour le cas d'un conducteur à un seul canal pour une tension dépendante du temps. Ils s'intéressent au cas particulier d'un

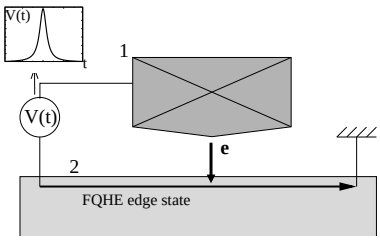

FIG. 4.1 – L'effet tunnel entre un conducteur normal et un état de bord d'un gaz $2D$ dans le régime de l'état de Hall quantique fractionnaire (EHQF), induit par une tension dépendante du temps.

pulse de tension pour lequel le flux Faraday est défini, $\Phi = c\int V(t)dt$. Ils établissent que la charge moyenne, $\langle Q\rangle$ est proportionnelle au flux, résultat qui respecte la loi d'Ohm. Les fluctuations de charge observent une dépendance sinusoïdale du flux Faraday, Φ, avec une période égale au quantum de flux, $\Phi_0 = hc/e$.

$$\langle\langle Q^2\rangle\rangle - \langle\langle Q^2\rangle\rangle_{eq} = ge^2|AB|^2\left[\frac{2}{\pi^2}\sin^2\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\ln\frac{t_0}{\tau} + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right] \tag{4.1}$$

où g est la dégénérescence de spin, A et B les amplitudes de transmission et réflexion, t_0 le moment où le pulse est imposé et τ la durée du pulse.
Dans le cas d'un pulse de tension, τ est très petite vis-à-vis de t_0 et les fluctuations observent une divergence logarithmique sauf pour des flux "entiers", c'est-à-dire lorsque $\phi = n\Phi_0$ où les fluctuations convergent vers une valeur finie. Ce comportement est attribué à la catastrophe d'orthogonalité d'Anderson.

La catastrophe d'orthogonalité d'Anderson apparaît lorsqu'une perturbation adiabatique est appliquée à une système fermionique. La fonction d'onde finale se révèle être orthogonale.

A partir de ce résultat, Lesovik et Loosen déduisent que la forme du pulse de tension qui minimise les fluctuations est une somme de Lorentziennes de flux unitaire.

4.1.2 Formules de la charge et des fluctuations de charges

Les opérateurs d'annihilation des électrons sont ψ_1 pour le métal, et ψ_2 pour l'état de bords. En utilisant la substitution de Peierls, nous faisons appairaître la tension dans les opérateurs. Nous utilisons les formules de l'hamiltonien tunnel et du courant tunnel définies ci-dessus (3.1,3.5) en remplaçant les opérateurs d'annihilation des électrons. L'hamiltonien tunnel est alors dépendant de la tension appliquée par le biais du flux Faraday (eq. 3.1) :

$$H_T(t) = \hbar v_F \sum_{\varepsilon=\pm}\left[\Gamma_0 e^{i\phi(t)}\psi_2^\dagger(t)\psi_1(t)\right]^\varepsilon \tag{4.2}$$

où Γ_0 est l'amplitude tunnel et $\phi(t) = e/\hbar\int_{-\infty}^{t} V(t')\,dit'$ le flux Faraday dépendent du temps.

De même, pour le courant tunnel qui dépend de la tension appliquée :

$$I_T(t) = ev_F \sum_{\varepsilon=\pm}\left[i\varepsilon\Gamma_0 e^{i\varepsilon\phi(t)}\psi_2^\dagger(t)\psi_1(t)\right]^\varepsilon \tag{4.3}$$

Les quantités qui nous intéressent ici sont la charge moyenne, qui devrait être égale à la charge que nous voulons déposer sur l'état de bord :

$$\langle Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\,\langle I(\tau)\rangle = Q_0 \tag{4.4}$$

et ses fluctuations qui sont l'écart entre la charge réelle au cours du temps et la charge moyenne $\langle \Delta Q^2 \rangle = \langle Q^2 - \langle Q \rangle^2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta Q^2 \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, I(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau'\, I(\tau') \right\rangle - \langle Q \rangle^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\langle I(\tau) I(\tau+t) \rangle - \langle I(\tau) \rangle \langle I(\tau+t) \rangle \right) \qquad (4.5) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, S(\tau, \tau+t) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Les fluctuations de charge font intervenir le bruit symétrisé dans ce calcul.

Le transfert tunnel se faisant hors-équilibre, nous utilisons le formalisme Keldysh[57]. Nous ajoutons alors un indice sur le temps qui indique la branche du coutour Keldysh sur laquelle le temps se situe. Le courant devient :

$$\langle I(t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\eta} \langle T_K [I_T(t_\eta) e^{-i \int_K d\tau H_T(\tau)}] \rangle \qquad (4.7)$$

avec "K" indiquant que nous travaillons sur le contour Keldysh, "η" la branche du contour. Nous effectuons dans un premier temps les calculs de façon perturbative. Nous travaillons alors à la limite $\Gamma_0 \to 0$. Nous développons en série l'exponentielle de l'hamiltonien tunnel dans le courant et conservons pour la charge et ses fluctuations les termes en Γ_0^2, qui est le second ordre en terme du couplage tunnel. L'expressions de la charge et ses fluctuations deviennent :

$$\begin{aligned}
\langle I(t) \rangle &= \frac{\Gamma_0^2}{2} e v_F^2 \sum_{\varepsilon\eta\varepsilon_1\eta_1} \varepsilon\eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\varepsilon_1\phi(\tau)} e^{i\varepsilon\phi(t)} \left\langle T_K (\psi_2^\dagger \psi_1)_{t_\eta}^{\varepsilon} (\psi_2^\dagger \psi_1)_{\tau_{\eta_1}}^{\varepsilon_1} \right\rangle \qquad (4.8) \\
S(t,\tau) &= \Gamma_0^2 \left(i e v_F \right)^2 \sum_{\varepsilon\varepsilon'\eta} \varepsilon\varepsilon' e^{i\varepsilon\phi(t)} e^{i\varepsilon'\phi(\tau)} \left\langle T_K (\psi_2^\dagger \psi_1)_{t_\eta}^{\varepsilon} (\psi_2^\dagger \psi_1)_{\tau_{-\eta}}^{\varepsilon_1} \right\rangle \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

4.2 Calcul

Nous avons calculé dans le chapitre précédent les corrélations de produit d'opérateurs d'annihilation et de création (2.17). Il en résulte que les corrélations $\left\langle T_K ((\psi_2^\dagger \psi_1)_{t_\eta}^{\varepsilon} (\psi_2^\dagger \psi_1)_{\tau^{\eta_1}}^{\varepsilon_1} \right\rangle$ sont toujours nulles sauf lorsque $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, où elles sont égales au produit de fonction de Green $G_2^{\eta,\eta_1}(t-\tau) G_1^{\eta,\eta_1}(t-\tau)$. Les fonction de Green $G_i(t) = \langle \psi_i(0) \psi_i(t) \rangle$ sont les fonctions de Green des conducteurs $i = 1, 2$. Nous remplaçons alors ce résultat dans le calcul de la charge et de ses fluctuations

$$\begin{aligned}
\langle I(t) \rangle &= i e v_F^2 \Gamma_0^2 \sum_{\eta\eta_1} \eta_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sin\left(\phi(t) - \phi(\tau) \right) G_2^{\eta,\eta_1}(t-\tau) G_1^{\eta,\eta_1}(t-\tau) \qquad (4.10) \\
S(t,\tau) &= 2\Gamma_0^2 \left(\frac{e v_F}{\hbar} \right)^2 \sum_{\eta} \cos\left(\phi(t) - \phi(\tau) \right) G_2^{\eta,-\eta}(t-\tau) G_1^{\eta,-\eta}(t-\tau) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Nous effectuons des changements de variables dans les formules obtenues ci-dessus. Dans le courant et dans les corrélations : $\tau \to t - \tau$ puisque $t \to t + \tau/2$. Les propriétés de parité des

fonctions de Green et des fonctions sinus et cosinus permettent d'écrire l'expression de la charge moyenne :

$$\langle Q\rangle = -2ev_F^2\Gamma_0^2\sum_\eta \eta\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \sin\left(\phi(t+\tau/2)-\phi(t-\tau/2)\right)\mathrm{Im}\{G_2^{\eta,-\eta}(\tau)G_1^{\eta,-\eta}(\tau)\} \tag{4.12}$$

et de ses fluctuations :

$$\langle Q^2\rangle = 2ev_F^2\Gamma_0^2\sum_\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [\cos\left(\phi(t+\tau/2)-\phi(t-\tau/2)\right)-1]\mathrm{Re}\{G_2^{\eta,-\eta}(\tau)G_1^{\eta,-\eta}(\tau)\} \tag{4.13}$$

Le "-1" a été ajouté dans les fluctuations pour régulariser l'expression, ceci découle de la permutation des intégrales sur t et sur τ. En effet, lorsque nous intégrons sur τ en premier, la partie réelle du produit de fonction de Green est nulle, et le terme "-1" n'est pas utile.

Il faut remarquer que les équations séparent d'une part, les conducteurs mis en jeu, qui sont entièrement décrits par les fonctions de Green, et d'autre part, les informations sur le pulse de tension qui sont contenus dans le flux $\phi(\tau)$.

Rappelons également que les métaux normaux sont ici décrits par le modèle de Luttinger avec un facteur de remplissage unitaire ($\nu = 1$)[67].

4.2.1 Fonctions de Green

Nous calculons les fonctions de Green pour le métal normal et l'état de bord[57] :

$$G_1(t) = \frac{1}{2\pi a}(1+iv_Ft/a)^{-1} \tag{4.14}$$

$$G_2(t) = \frac{1}{2\pi a}(1+iv_Ft/a)^{-1/\nu} \tag{4.15}$$

avec a est le cut-off et $\nu = 1/m$ est le facteur de remplissage des états de bords de l'effet Hall quantique fractionnaire, m un entier impair. Nous pouvons maintenant extraire les parties réelle et imaginaire de leur produit. Nous définissons la constante $K = (1+1/\nu)/2$, qui est un entier, puisque $1/\nu$ est impair. Nous exprimons le produit en terme de coordonnées polaires et imposons que $z = 1+iv_Ft/a$, soit un nombre complexe de module $\sqrt{1+(v_Ft/a)^2}$ et d'angle $\arctan(v_Ft/a)$. En élevant ce nombre complexe à la puissance $-2K$ et en extrayant les parties réelle et imaginaire, le produit G_1G_2 devient :

$$G_1G_2 \sim \frac{1}{(2\pi a)^2}\frac{\cos(2K\arctan(v_Ft/a)) - i\sin(2K\arctan(v_Ft/a))}{(1+(v_Ft/a)^2)^K} \tag{4.16}$$

L'intégrale avec fonctions cosinus et sinus, qui ont comme argument une Arctangente, ne pouvant pas être estimée analytiquement, nous préférons utiliser le développement en série de celle-ci aux grand temps. Nous choisissons de calculer pour $t\to\infty$, puisque les divergences de la charge et des fluctuations apparaîtrons pour des temps élevés.

Le développement limité de $\arctan(\tau)$ pour $\tau\to\infty$ étant difficile à estimer sous cette forme, nous imposons que $\tau = 1/x$ avec $x\to 0$, et nous calculons $\arctan(1/x)$ pour de petites valeurs de x. Nous remplaçons donc $\arctan(\tau)$ par $\pi/2 - 1/\tau$.

$$G_1G_2 \sim \frac{\cos\left(2K\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{v_F\tau}\right)\right) - i\sin\left(2K\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{v_F\tau}\right)\right)}{(1+(\frac{\tau v_F}{a})^2)^K} \tag{4.17}$$

En utilisant les formules trigonométriques pour le cosinus et le sinus d'une somme, et travaillant à grand τ ($\tau \to +\infty$), $1/\tau$ est très petit ($1/\tau \to 0$), les approximations suivantes sont permises :

$$\sin\left(2K\frac{a}{\tau v_F}\right) \sim 2K\frac{a}{v_F\tau}; \quad \cos\left(2K\frac{a}{\tau v_F}\right) \sim 1 \tag{4.18}$$

Pour $t \to +\infty$, le produit de fonction de Green s'écrit donc :

$$G_1G_2 \sim \frac{1}{(2\pi a)^2}\frac{\cos(K\pi) + \sin(K\pi)2K\frac{a}{v_F t} - i\sin(K\pi) - \cos(K\pi)2K\frac{a}{v_F t}}{(1+(v_F t/a)^2)^K} \tag{4.19}$$

K étant un entier, $\sin(K\pi)$ est toujours nul alors que $\cos(K\pi)$ vaut ± 1. Nous pouvons maintenant extraire les parties réelle et imaginaire :

$$\mathrm{Im}(G_1(t)G_2(t)) \sim t^{-(2K+1)} \tag{4.20}$$

$$\mathrm{Re}(G_1(t)G_2(t)) \sim t^{-2K} \tag{4.21}$$

Rappelons que nous nous intéressons aux grandes valeurs de τ dans les équations (4.12) et (4.13), parce que les divergences de la charge et des fluctuations proviennent de ces temps.

4.2.2 Etude des parties oscillantes

Nous voudrions maintenant connaître le comportement à grand temps des noyaux oscillants. Nous nous intéressons pour le moment à la charge moyenne et nous définissons la fonction suivante :

$$B_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \sin(\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)) \tag{4.22}$$

Nous imposons un pulse de tension, c'est-à-dire que la tension sera non nulle pendant un temps Δt donné, sur lequel nous imposons la condition $\Delta t \ll \tau$. Afin que le signal soit complètement englobé par la mesure et ainsi le temps, τ pourra est considéré comme large. Donc, un intervalle t, centré en τ, comprend la totalité du signal, l'intégrale de la tension sur cette intervalle deviendra alors :

$$(e/\hbar)\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} V(t')\,dt' = (e/\hbar)\int_{-\infty}^{+\infty} V(t')\,dt' = \phi \tag{4.23}$$

avec ϕ le flux Faraday indépendant du temps défini plus haut. Comme nous considérons que $\tau \to \infty$, les bornes d'intégration du noyaux de la charge moyenne peuvent être remplacées par τ et $-\tau$, et le noyau devient alors

$$B_1(t) = \int_{-\tau}^{+\tau} dt\ \sin(\phi) \simeq \sin(\phi)\tau + C_1 \tag{4.24}$$

avec C_1 une constante.

Pour les fluctuations de charge, nous définissons également une fonction comprenant le noyau oscillant :

$$B_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt[\cos(\phi(t+\tau/2) - \phi(t-\tau/2)) - 1] \tag{4.25}$$

En considérant les mêmes hypothèses que pour la charge moyenne, nous calculons B_2.

$$B_2(t) \simeq (\cos(\phi) - 1)\tau + C_2 \tag{4.26}$$

avec C_2 à nouveau une constante. Nous remarquons que, à grand temps, les deux noyaux B_1 et B_2 sont linéaires en τ, sauf pour les valeurs entières du flux, $\phi = 2\pi n$, avec n entier, où cette fois les deux noyaux s'annulent.

4.2.3 Produit

Connaissant le comportement à grand temps des fonctions de Green et des noyaux, nous pouvons calculer l'approximation de la charge moyenne et des fluctuations en remplaçant le produit de fonction de Green et le noyau par leur approximation. La charge moyenne devient alors :

$$\langle Q \rangle \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\sin(\phi)\tau^{-2K} + C_1 \tau^{-2K-1}] \tag{4.27}$$

Et les fluctuations deviennent :

$$\langle \Delta Q^2 \rangle \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [(\cos(\phi) - 1)\tau^{-2K+1} + C_2 \tau^{-2K}] \tag{4.28}$$

Ces deux résultats perturbatifs restent généraux, nous distinguons maintenant deux cas, le cas de l'effet tunnel entre deux métaux normaux, traité également par Levitov et al. puis celui de l'injection sur un état de bord dont le facteur de remplissage est inférieur à un.

4.3 Applications

4.3.1 Entre deux conducteurs sans interaction

Le premier cas que nous allons considérer est le cas de l'injection d'un électron d'un métal normal sur un métal normal (fig. 4.2). C'est le système étudié par Levitov et al. Nous étudions ce cas pour vérifier nos résultats. La fraction de remplissage des deux échantillons est $\nu = 1$ donc les

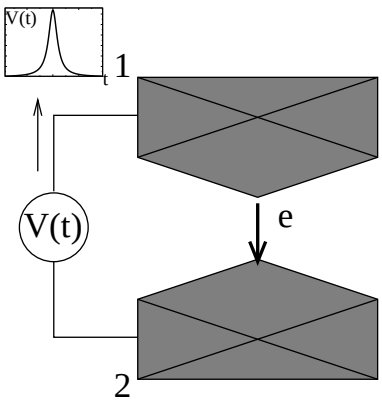

FIG. 4.2 – L'effet tunnel entre deux conducteurs normaux induit par une tension dépendante du temps.

fonctions de Green sont identiques, $G_1^{\eta,-\eta} = G_2^{\eta,-\eta} = G^{\eta,-\eta} = \left(-\frac{i\eta\tau}{\tau_0} + 1\right)^{-1}$. Nous utilisons les résultats trouvés précédemment où $K = (1 + 1/\nu)/2 = 1$.

La charge moyenne devient donc (4.27) :

$$\langle Q \rangle \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\sin(\phi)\tau^{-2} + C_1 \tau^{-3}] \tag{4.29}$$

Et les fluctuations de charge deviennent (4.28) :

$$\langle \Delta Q^2 \rangle \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [(\cos(\phi) - 1)\tau^{-1} + C_2 \tau^{-2}] \tag{4.30}$$

La charge moyenne converge et les fluctuations observent une divergence logarithmique, sauf pour $\phi = 2n\pi$ où les deux expressions deviennent nulles. Nous retrouvons donc les résultats de Levitov et al.[65], ce qui valide nos propres calculs.

4.3.2 Entre un métal normal et un liquide de Hall fractionnaire

Le second cas que nous allons considérer est le cas de l'injection d'un électron d'un métal normal sur le bord d'un liquide de Hall fractionnaire (fig. 4.1). Comme nous injectons des électrons, la charge est e.

La fraction de remplissage du premier échantillon est égale à 1 mais celui du second est $\nu = 1/m < 1$ avec m un entier impair. Comme pour le cas des électrons sans interaction, nous calculons la charge et ses fluctuations grâce aux résultats trouvés ci-dessus (4.27,4.28).

$$\langle Q \rangle \sim \pm \int dt \, \sin(\phi) t^{-2K} + C_1 t^{-2K-1} \tag{4.31}$$

$$\langle Q^2 \rangle \sim \pm \int dt \, 2K(\cos(\phi) - 1) t^{-2K+1} + C_2 t^{-2K} \tag{4.32}$$

Dans un liquide de Hall fractionnaire, la fraction de remplissage $\nu(< 1)$ est égale à l'inverse d'un nombre entier, nous posons alors que $\nu = 2m + 1$ avec m un entier. Comme $2K > 2$, les deux valeurs convergent, la charge moyenne convergeant plus vite que les fluctuations de charges. La charge moyenne et les fluctuations ont donc des valeurs finies.

4.4 Calcul de la valeur finie de de la charge moyenne et des fluctuations de charge

Nous choisissons la valeur $\nu = 1/3$, car nous pouvons écrire une formule explicite et relativement simple du produit de fonctions de Green, mais les résultats peuvent être étendus à d'autres valeurs de $\nu = 1/m$ avec m un entier impair. Pour $\nu = 1/3$, le produit s'écrit donc :

$$\mathrm{Re}(G_1(\tau)G_2(\tau)) = \frac{1}{4\pi^2 a^2} \frac{1 - 6(v_F\tau/a)^2 + (v_F\tau/a)^4}{(1 + (v_F\tau/a)^2)^4} \tag{4.33}$$

$$\mathrm{Im}(G_1(\tau)G_2(\tau)) = \frac{1}{4\pi^2 a^2} \frac{4(v_F\tau/a)(1 - (v_F\tau/a)^2)}{(1 + (v_F\tau/a)^2)^4} \tag{4.34}$$

nous calculons, dans un premier temps, la charge moyenne :

$$\langle Q \rangle = -2ev_F^2\Gamma^2\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, B_1(\tau)\mathrm{Im}\{G_2(\tau)G_1(\tau)\} \tag{4.35}$$

La partie imaginaire du produit est très importante pour un domaine de temps égal à a/v_F. Au dessus de cette valeur ($\tau >> a/v_F$), elle se comporte en τ^{-5} et s'annule très rapidement. Nous pouvons donc considérer que la plage de temps dominante est de l'ordre de a/v_F. Nous nous intéressons maintenant à la fonction oscillante $B_1(\tau) = \sin\left(\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} dt' eV(t')/\hbar\right)$, la tension $V(t')$ est intégrée sur une plage de temps égale à τ et centrée en t. Or, nous venons de voir que τ doit être restreint à des temps proche de a/v_F et les variations de tension sont supérieures à cette contrainte.

Donc, pour chaque intervalle, la tension pourra être considérée comme constante et égale à $V(t)$. B_1 devient donc : $B_1(\tau) \simeq \sin(eV(t)\tau/\hbar)$. Nous pouvons maintenant réaliser l'intégration sur τ,

$$\langle Q \rangle \simeq \frac{e\Gamma^2 a^2}{2\pi 3! v_F^2} \sum_\eta \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{e}{\hbar} V(t)\right)^3 \tag{4.36}$$

Nous remarquons que la charge moyenne est égale à l'intégrale du cube de la tension. Ainsi, lorsque nous imposons un pulse de tension de forme donnée, et que nous faisons varier le flux de façon uniforme, la charge moyenne varie comme la valeur du flux au cube.

Nous faisons de même pour les fluctuations de charge.

$$\langle Q^2 \rangle = 2ev_F^2\Gamma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, B_2(\tau) \mathrm{Re}\{G_2(\tau)G_1(\tau)\} \tag{4.37}$$

avec $B_2(\tau) = \cos\left(\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} dt' eV(t')/\hbar\right) - 1 \simeq \cos(eV(t)\tau/\hbar) - 1$. Comme nous intégrons sur τ en premier le "-1" est cette fois inutile donc la fonction devient : $B_2(\tau) \simeq \cos(eV(t)\tau/\hbar)$.

Lorsque le flux est faible ($V(t) << 1$, $\phi = \int eV(t)/\hbar dt << 1$), la fonction $B_2(\tau)$ est égale à 1, les fluctuations de charge se résument à l'intégration du produit de fonction de Green sur τ qui est nulle. Nous proposons donc de considérer la tension $V(t)$ comme le produit d'une fonction de flux unitaire, $V_1(t)$, avec $\int V_1(t), dt = 1$, et une constante (très petit devant 1) $\phi << 1$. Le cosinus du noyau oscillant devient alors :

$$B_2(\tau) \simeq \cos\left(\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} dt' eV(t')/\hbar\right) = 1 + \frac{-1}{2}\phi^2 \left[\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} dt' eV_1(t')/\hbar\right]^2 \tag{4.38}$$

Lorsque le flux est faible, les fluctuations de charge sont proportionnelles au carré du flux, ϕ^2. Par contre, lorsque le flux devient plus important, nous faisons un calcul similaire à l'estimation de la charge moyenne. La partie réelle du produit de fonction de Green est important pour un temps τ égal à a/v_F et de nouveau au dessus de cette limite, il décroît rapidement jusque zéro mais cette fois en t^{-4}. De fait, les fluctuations de charge deviennent :

$$\langle Q^2 \rangle \simeq \frac{e^2\Gamma^2 a^2}{2\pi 3! v_F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{e}{\hbar} V(t)\right)^3 = e\langle Q \rangle \tag{4.39}$$

Les fluctuations ressemblent à la charge moyenne à large flux. Bien que notre système est non stationnaire, son comportement est similaire à un système poissonien caractéristique des systèmes indépendants du temps.

Pour illustrer nos calculs, nous effectuons une intégration numérique des équations (4.35) et (4.37). Le pulse de tension choisi s'écrit $V(t) = \phi(1/\pi)(1+t^2)^{-1}$. Les résultats numériques sont illustrés par la figure 4.3 et confirment les déductions que nous avons faites à partir de l'expression exacte du produit de fonctions de Green. En effet, nous voyons qu'à large flux, la charge moyenne et les fluctuations de charge ont le même comportement en ϕ^3. Par contre, nous observons un "cross-over" pour les fluctuations de charge lorsque le flux devient petit, qui cette fois se comporte en ϕ^2. Dans l'encadré de la figure 4.3, nous calculons le quotient de l'intégration numérique et des résultats trouvés avec l'approximation adiabatique. Nous pouvons constater que pour les faibles flux, les deux calculs des fluctuations diffèrent. L'approximation adiabatique est donc suffisant pour le calcul de charge mais devient obsolète pour les fluctuations lorsque le flux est trop faible.

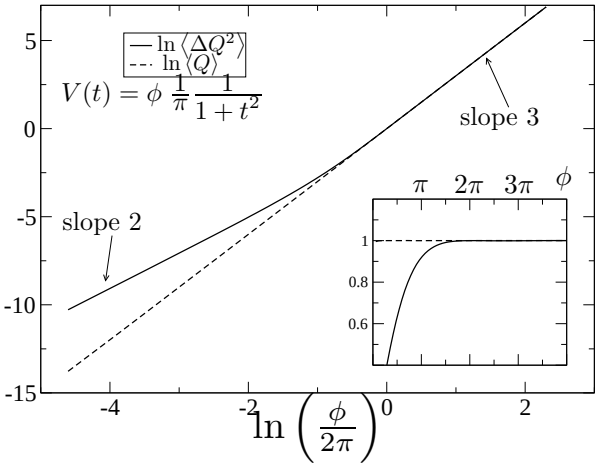

FIG. 4.3 – Les résultats de l'intégration numérique des équations (4.35) et (4.37) pour une pulse de forme Lorentzien ($V(t) = \phi\ (1/\pi)(1+t^2)^{-1}$). La charge moyenne transmise (courbe pointillée) et les fluctuations (courbe pleine) sont des fonctions de ϕ sur la courbe en log-log. La charge moyenne à une pente 3, alors que les fluctuations de charge a une pente 2 pour des ϕ faibles. Inset : Le quotient entre les résultats de l'approximation adiabatique (éq. (4.36) et (4.39)) et l'intégration numérique des équations (4.35) et (4.37), pour la charge moyenne (courbe pointillée) et les fluctuations (courbe pleine). L'approximation adiabatique est clairement valide pour la charge moyenne, alors que pour les fluctuations de charge elle est valide quand $\phi \gtrsim 2\pi$.

4.5 Résultats non perturbatifs dans l'amplitude tunnel

Nous avons remarqué que le calcul perturbatif était parfait pour de larges flux, alors qu'aux petits flux nous ne pouvions utiliser l'approximation adiabatique pour avoir des résultats pertinents. L'approximation adiabatique résulte d'une rapide décroissance du produit $G_1(t)G_2(t)$. Nous espérons que le cas non perturbatif sera plus robuste.

Les résultats non perturbatifs de l'effet tunnel entre un métal normal et un bord de l'effet Hall stationnaire dans le cas de courant stationnaire sont déjà connus.

4.5.1 Modèle

Sandler et al. [68] ont abordé le calcul du bruit dans un système à deux terminaux. Ils ont remarqué que les processus d'effet tunnel d'un électron entre deux bords identiques ou entre deux bords différents, mais bien choisis, ne peuvent pas être distingués. Ils choisirent, comme exemple, les couples $(1/3, 1/3)$ et $(1/5, 1)$. Ils isolèrent deux entités, la charge des quasiparticules, qui participe au processus, et les propriétés des fluides isolés. Le bruit quantique mesuré a la forme : $S = 2qI_b$, avec I_b est le courant de rétrodiffusion et q est assimilée à une charge. Pour deux états de Laughlin $\nu = 1/3$, le bruit provient de l'effet tunnel des quasiparticules d'un bord à l'autre et elles ont une charge égale à $q = 1/3$. Par contre, dans la représentation $(1/5, 1)$, les électrons sautent d'un bord à l'autre au niveau d'un point contact (QPC), mais la charge effective transmise reste $q = 1/3$ qui ne correspond à aucune des charges réelles présentes dans les deux fluides isolés. Ceci signifie que la mesure à deux terminaux ne peut distinguer les deux représentations qui sont duales. Cette dualité apparaît parce que le processus tunnel peut être décrit par deux modèles (représentations) qui ont des charges réelles différentes. Le passage entre ces deux représentations se fait en changeant le couple de fraction de remplissage, (ν_1, ν_2) devient

(μ_1, μ_2), en maintenant que la somme de leur inverse reste identique afin de conserver la charge effective, $\nu_1^{-1} + \nu_2^{-1} = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}$. Par la suite, Sandler et al. calculèrent un cas plus simple pour

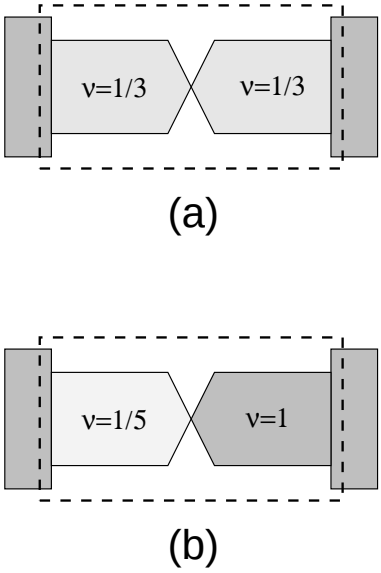

FIG. 4.4 – Dans le système (a), l'effet tunnel se fait entre deux bords d'un gaz $2D$ dans le régime de Hall fractionnaire ayant un facteur de remplissage égale à 1/3. Dans le système (b), le processus se fait entre un bord d'un gaz $2D$ dans le régime de Hall fractionnaire ayant un facteur de remplissage égale à 1/5 et un bord ayant une facteur de remplissage 1. Ces deux systèmes mettent en jeu des charge effective identique, même pour (b) où cette charge n'existe pas physiquement, ils sont donc duals.

illustrer leur propos, le cas de l'effet tunnel entre un liquide de Fermi et un bord de Hall de fraction de remplissage $\nu = 1/3$. Ils remarquèrent alors que ce système correspond à un cas particulier, mais non physique, de l'effet tunnel entre deux bords de Hall $\nu' = 1/2$ qui nécessite la refermionisation pour avoir des résultats exacts. Ils ont alors obtenu le courant et le bruit tunnel.

Dans notre système, nous considérons le cas de l'injection de quasiparticule entre un métal et un bord de l'effet Hall fractionnaire $\nu = 1/3$ qui est l'example utilisé par Sandler et al. pour effectuer le calcul complet.

4.5.2 Notre problème

Lorsque nous voulons injecter un électron à partir d'un liquide de Fermi dans un liquide de Hall fraction $\nu = 1/3$, la représentation duale est l'effet tunnel entre deux bords de l'effet hall fractionnaire $\nu' = 1/2$. Le produit de fonction de Green pour les deux représentations sont les mêmes.

Pour le couple $(1, 1/3)$, $G_1(t)G_2(t) = (2\pi a)^{-2}(1 + iv_F t/a)^{-(1+1/\nu)} = (2\pi a)^{-2}(1 + iv_F t/a)^{-4}$ et pour le couple $(1/2, 1/2)$ le produit s'écrit plutôt sous la forme : $G_1(t)G_2(t) = (2\pi a)^{-2}(1 + iv_F t/a)^{-1/\nu'}(1 + iv_F t/a)^{-1/\nu'}$.

En utilisant les résultats non perturbatif de la Ref. [68] , Nous pouvons déduire le courant stationnaire :

$$I_{st} = \frac{e^2}{4\pi} V - \frac{ev_f}{4\pi\Gamma a} \arctan\left(\frac{eV}{\hbar v_f}\Gamma a\right) \tag{4.40}$$

Deux régimes apparaissent, le régime de tension ou couplage bas, V ou $\Gamma \to 0$ où nous retrouvons le résultat $I_{st} \sim \Gamma^2 V^3$ et celui de tension et couplage fort, V ou $\Gamma \to \infty$ où le courant est

proportionnel à la tension. Pour calculer la charge moyenne, retournons au cas non-stationnaire en remplaçant V par $V(t)$. Il ne reste alors qu'à intégrer sur le temps le courant maintenant dépendant du temps :

$$\langle Q \rangle = \frac{e}{4\pi}\phi - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{ev_F}{4\pi\Gamma a} \arctan\left(\frac{eV(t)}{\hbar v_f}\Gamma a\right) \tag{4.41}$$

Les deux régimes apparaissent à nouveau. Pour de faible couplage nous retrouvons l'expression (4.36) avec la charge moyenne qui varie comme le flux au cube, ϕ^3. Dans le cas de très faible tension, quelque soit le couplage, $\Gamma V(t) << 1$, la variation en cube du flux est conservé. Par contre dans la limite de couplage ou tension fort, la charge est proportionnelle au flux ϕ. Le calcul perturbatif fait apparaître un "cross-over" entre les flux faibles et ceux plus importants. Le cross-over évolue de façon monotone avec le couplage Γ.

Nous nous intéressons maintenant aux fluctuations de charge. Nous déduisons leur forme en utilisant le bruit des courants stationnaires, à fréquence nulle, calculée par Sandler et co[68]. Pour simplifier l'écriture, nous posons : $x = (eV/\hbar v_F)\Gamma a$

$$S_{st} = \frac{e^2 v_F}{4\pi\Gamma a}\left[\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}\right] \tag{4.42}$$

Nous remarquons que pour V ou $\Gamma \to 0$, le bruit se comporte comme le flux au cube. Pour calculer les fluctuations de charge, nous procédons de la même manière que pour la charge moyenne.

$$\langle \Delta Q^2 \rangle = \frac{e^2 v_F}{4\pi\Gamma a}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\arctan(x(t)) - \frac{x(t)}{1+x(t)^2}\right] \tag{4.43}$$

Nous remarquons alors que pour de faibles valeurs du flux, les fluctuations se comportent en ϕ^3. Aux larges valeurs du flux, l'intégration numérique montre que pour des tensions ayant la forme $V(t) \sim t^{-n}$ pour de large valeur de $t(\to \infty)$, les fluctuations deviennent $\langle \Delta Q^2 \rangle \sim \phi^{-1/n}$, avec n est la puissance de décroissance des queues de la tension. La valeur asymptotique des fluctuations dépend alors de la région où $\Gamma V(t)$ est très faible qui sont la queue du signal.

4.6 Application à d'autres systèmes

Les résultats obtenus sont valides quelque soit le liquide de Luttinger chiral dans lequel nous voulons des électrons. Nous pouvons donc appliquer nos calculs perturbatifs à d'autres systèmes que celui des états de bord de l'effet Hall fractionnaire. Nous allons nous intéresser en particulier au nanotube de carbone mono-paroi qui peut être décrit à l'aide de différents modes des liquides de Luttinger chiraux.

La fonction de Green d'un nanotube de carbone peut-être écrit comme[69, 58] :

$$G_2(t) = \frac{1}{2\pi a}(1 + iv_F t/a)^{-\xi} \text{ avec } \xi = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}(g + g^{-1}) \tag{4.44}$$

avec a le cut-off et g le paramètre d'interaction dans le nanotube. Les valeurs expérimentales typiques sont comprises dans $[0.2, 0.3]$. Il faut remarquer que le paramètre $\xi > 1$, mais n'est jamais un entier. Les fluctuations sont calculées en utilisant le même raisonnement que la section 4.2.

Dans un premier temps nous calculons le paramètre $K = (1+\xi)/2$, à nouveau ce paramètre est supérieur à 1 mais n'est pas entier. Les parties imaginaire et réelle du produit de fonction de Green conservent donc la même forme :

$$\mathrm{Im}(G_1(t)G_2(t)) \sim t^{-2K} \tag{4.45}$$
$$\mathrm{Re}(G_1(t)G_2(t)) \sim t^{-2K} \tag{4.46}$$

La répétition du raisonnement amène les équations :

$$\langle Q \rangle \sim \pm \int d\tau \, \sin(\phi)\tau^{-2K+1} + C_1\tau^{-2K} \tag{4.47}$$
$$\langle Q^2 \rangle \sim \pm \int d\tau \, 2K(\cos(\phi)-1)\tau^{-2K+1} + C_2\tau^{-2K} \tag{4.48}$$

Puisque le paramètre K est strictement supérieure à 1, la charge moyenne et les fluctuations de charges convergent vers une valeur finie indépendamment du flux (et donc de la forme de $V(t)$).

Ainsi, comme pour les bords de l'effet Hall fractionnaire, les corrélations entre les électrons dans le nanotube de carbone préviennent les divergences de la fluctuations pour une injection non stationnaire

4.7 Conclusions

Nous avons montré que pour l'injection d'un électrons dans un liquide de Luttinger à partir d'un métal normal, les fluctuations de charge ne divergent pas quelque soit la forme du pulse de tension. Les interactions entre électrons de la nanostructure préviennent les divergences.

En régime perturbatif, une formule explicite de la charge et des fluctuations a été obtenue dans le cadre de l'approximation adiabatique. Nous avons montré que pour de faibles flux l'approximation adiabatique ne concorde pas avec le calcul numérique. Par contre, lorsque le modèle est valide, pour des flux importants (c'est-à-dire supérieurs à 2π) la charge et les fluctuations observent une relation similaire à celle de Schottky.

Nous avons finalement établie des résultats non perturbatif pour l'injection de charge dans un cas particulier de l'effet Hall quantique de fraction de remplissage $\nu = 1/3$, en utilisant une représentation duale d'effet tunnel entre deux bords ayant facteur de remplissage égale à 1/2. Les resultats obtenus concordent avec le régime pertubatif pour les faibles flux. A large flux, ni la charge ni les fluctuations ont un comportement identique au régime perturbatif.

$\langle Q \rangle$	Perturbatif	adiabatique	non perturbatif en Γ
faible ϕ	ϕ^3	ϕ^3	ϕ^3
large ϕ	ϕ^3	ϕ^3	ϕ
cross over			$e/(\hbar\Gamma)$

TAB. 4.1 – résultats du calcul de la charge en terme de flux de Faraday

$\langle Q^2 \rangle$	Perturbatif	adiabatique	non perturbatif en Γ
faible ϕ	ϕ^3	ϕ^2	ϕ^3
large ϕ	ϕ^3	ϕ^3	$\phi^{-1/n}$ pour $V(t) \sim t^{-n}$
cross over		2π	$e/(\hbar\Gamma)$

TAB. 4.2 – résultats du calcul des fluctuations de charge en terme de flux de Faraday

Deuxième partie

Détection des correlations de bruit

Chapitre 5

Mesure du bruit à fréquence finie

Pour avoir une description complète des fluctuations de courant, il est nécessaire de connaître les fluctuations de courant à toutes les fréquences. Or l'acquisition du bruit à basse fréquence, $\omega_{basse} \sim 100KHz$ est souvent possible, alors que celle à haute fréquence $\omega_{haute} \sim 1-1000GHz$ est très difficile à atteindre puisqu'elle est voisine de la limite imposée par les appareils de mesure. En pratique, le bruit en fréquence peut se mesurer en procédant à un échantillonnage des courants en fonction du temps, et en procédant à une transformée de Fourier. Si on veut mesurer le bruit à haute fréquence, l'espacement entre deux échantillons temporels doit être réduit. Cependant, un appareil de mesure ne peut pas obtenir le courant à des intervalles de mesure successifs très courts.

Des expériences ont néanmoins été mises en place dans les dernières décennies pour mesurer les moments d'ordre les plus bas dans divers systèmes. Les mesures à fréquence nulle ont permis de diagnostiquer le transport, cependant ces moments sont difficiles à mesurer pour des hautes fréquences, et nécessite un appareillage "on-chip" [70, 71, 72]. Les hautes fréquences contiennent des informations que les mesures à fréquence nulle ne peuvent révéler, elles permettent la caractérisation des excitations collectives dans les nanotubes de carbone [73]. La mesure du bruit en fréquence a déjà été abordée expérimentalement et théoriquement [74, 75] dans le passé. Schoelkopf [41] utilise un circuit LC pour mesurer le bruit d'un conducteur diffusif comportant deux terminaux. Lesovik et Loosen [12] proposent de coupler inductivement un circuit mésoscopique à un circuit LC.

Dans le cas du troisième moment, Reulet [76] mesure l'amplitude des fluctuations de courant et leur asymétrie dans une jonction tunnel, leur circuit est soumis à un fort couplage à leur environnement qui domine le signal. D'autre part, Reznikov [77] effectue un travail identique dans un système cohérent ce qui lui permet de réduire l'effet de l'environment. Les second et troisième moments dans un point contact pour le régime incohérent ont été mesurés par Einsslin et Fujisawa[78] : un contact tunnel est placé à côté du point quantique à travers lequel le bruit est mesuré. Des caractéristiques super-poissonnienes sont alors mises en valeurs.

Cependant ces expériences effectuent la mesure des moments supérieurs dans le régime incohérent, nous nous plaçons ici dans le régime cohérent.

5.1 Modèle de Lesovik et Loosen

Le bruit à fréquence finie est un sujet très actuel. L'opérateur courant est un opérateur hermitien mais le produit de deux opérateurs courant ne l'est pas. Dans la littérature, la bruit à fréquence finie est symétrisé afin de rendre le résultat réel. La définition généralement utilisée est

[39, 27] :

$$S_{sym}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta I(t)\Delta I(0) + \Delta I(0)\Delta I(t)\rangle \tag{5.1}$$

En même temps, on peux définir deux corrélateurs non-symétrisés,

$$S_+(\omega) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta I(0)\Delta I(t)\rangle \tag{5.2}$$

$$S_-(\omega) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta I(t)\Delta I(0)\rangle \tag{5.3}$$

Les facteurs deux ont été ajoutés pour être consistant avec la relation de Schottky. Dans ces expressions, la dépendance en temps est spécifiée par la représentation d'Heisenberg. En posant que l'état initial est $|i\rangle$ et l'état final $|f\rangle$, les deux bruits non-symétriques s'écrivent :

$$S_+(\omega) = 4\pi \sum_{if} |\langle f|I(0)|i\rangle|^2 P(i)\delta(\omega + E_f - E_i) \tag{5.4}$$

$$S_-(\omega) = 4\pi \sum_{if} |\langle f|I(0)|i\rangle|^2 P(i)\delta(\omega + E_i - E_f) \tag{5.5}$$

$P(i)$ est la probabilité de distribution des états initiaux. $S_+(\omega)$ ($S_-(\omega)$) pour des fréquences positives (négatives) correspond à un taux d'émission de photons à partir de l'échantillon mésoscopique, alors que pour des fréquences négatives (positives) correspond à un taux d'absorption de l'échantillon. Grâce à ces résultats, extraire de l'énergie du niveau fondamental semble possible et les fréquences physiquement relevantes sont les fréquences positives pour $S_+(\omega)$ et les fréquences négatives pour $S_-(\omega)$.

Lorsque le bruit est mesuré à fréquence finie, la singularité de Fermi est mesurable dans les systèmes en interaction et non-interagissant. Elle se manifeste par une dérivée du bruit discontinue à la fréquence définie par la tension appliquée entre la source et le drain. Lesovik et Loosen proposèrent un système permettant de mesurer les corrélations de courant de façon inductive.

Les deux auteurs proposèrent de coupler un oscillateur LC à un circuit mésoscopique. L'inductance est couplée à une des sorties du circuit mésoscopique avec une constante de couplage α et injecte un courant dans l'oscillateur. Les charges sont mesurées au niveau de la capacité C.

Ils établissent une équation de mouvement dépendante de la charge $x(t)$, de l'inductance, $M = L$ de la constante de couplage α de la conductance, $D = 1/C$ et du courant qui traverse le circuit mésoscopique $I(t)$:

$$M\ddot{x}(t) = -Dx(t) - \alpha\dot{I}(t) \tag{5.6}$$

La fréquence propre du circuit de mesure est $\Omega = \sqrt{D/M} = \sqrt{1/LC}$, ce sera la fréquence de détection. Le terme de couplage $\alpha\dot{I}(t)$ apparaît car la présence du circuit mesoscopique est considéré comme un potentiel, ce terme provient d'un couplage d'induction mutuelle entre le circuit mesoscopique et le circuit résonant.

Ils proposent de mesurer la charge au borne du condensateur de façon répétitive afin de pouvoir tracer un histogramme et d'obtenir une largeur et une valeur moyenne.

Ils souhaitent calculer la moyenne du carré des charges, $\langle x^2(0)\rangle$, qui dépend des fluctuations de courant. Ils s'intéressent alors au premier ordre non nul en terme de constante de couplage. Ils obtiennent finalement un bruit mesuré égale à :

$$S_{meas} = K\{S_+(\Omega) + N_\Omega[S_+(\Omega) - S_-(\Omega)]\} \tag{5.7}$$

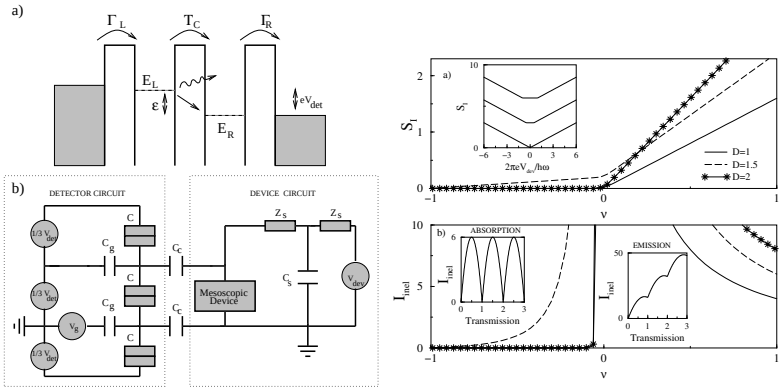

FIG. 5.1 – Aguado et Kouwenhoven [72] ont proposé de mesure le bruit non-symétrisé à l'aide d'un circuit capacitif. S_- est mesuré sur les fréquences négatives et S_+ sur les fréquences positives. On voit apparaître une nette différence entre ces deux régimes de bruit pour un double point contact. Le courant fait apparaître également deux régimes.

avec $N_\Omega = (e^{\hbar\Omega/k_BT} - 1)^{-1}$ la distribution de Bose-Einstein, et $K = (\alpha/2L)^2/(2\eta)$ avec η, le paramètre adiabatique, est un infinitésimal qui permet de considérer que les deux circuits sont non couplés aux temps ∞. Ce paramètre doit tendre vers zéro, ce qui fait diverger le S_{meas}.

Ils s'intéressent au cas du point quantique, et trouvent deux types de comportements limites. Dans un premier temps la fréquence de détection est très grande devant la température du circuit LC. La distribution de Bose étant exponentiellement petite et le terme qui lui est proportionnel pourra être négligé. Le bruit mesuré sera donc proportionnel à $S_+(\Omega)$

$$S_+(\Omega) = \frac{2e^2}{h} D(1-D)(eV - \hbar\Omega)\Theta(eV - \hbar\Omega) \tag{5.8}$$

avec Θ est la fonction de Heaviside. $S_+(\Omega)$ est égale à la densité spectrale en excès lorsqu'elle est calculée à l'aide des corrélateurs symétrisés.

Dans un deuxième temps, ils s'intéressent à la limite opposée, où la température est très grande devant la fréquence et la distribution de Bose est exponentiellement grande. Cette fois c'est le terme qui est produit avec la distribution de Bose qui contribue et le bruit est proportionnel à $S_+(\Omega) - S_-(\Omega) = -2\hbar\Omega G$, avec $G = (2e^2/h)D$ la conductance, qui est négatif et ne contient pas de singularité pour $\hbar\Omega = eV$.

5.2 Taux absorption et désorption

Le résultat trouvé par Lesovik et Loosen met en jeu le bruit non-symétrisé. Le bruit mesuré est en fait un combinaison des deux corrélateurs S^+ et S^- mais ne correspond en aucun cas au bruit artificiellement symétrisé. Ce bruit est relié au taux d'émission ou d'absorption de l'échantillon [79].

Aguado et Kouwenhoven[72] ont proposé de mesurer ces deux expressions en couplant capacitivement le circuit au détecteur qui est un double point contact illustré par la figure 5.1. A chaque événement tunnel, un courant DC est alors généré. La présence de ce courant dépend de la production/absorption d'un "photon" $\hbar\omega$ par le circuit mésoscopique. Cette suggestion expérimentale a été testée dans le cadre d'une jonction Josephson en utilisant une large jonction Supraconducteur-Isolant-Supraconducteur (SIS) [80] : l'effet tunnel ne peut être réalisé seulement lorsqu'il est assisté

par un fréquence qui provient d'une antenne (circuit mésoscopique). Des mesures ont également isolé les contributions de l'émission et de l'absorption [70].

Des mesures à hautes fréquences ont également détecté des photons émis par un circuit mésoscopique[81]. Ces photons dans la gamme des GHz, propagés dans des lignes coaxiales, sont détectés et analysés par une géométrie Hanbury-Brown et Twiss, dans le but de connaître la statistique des photons émis par le conducteur. Cette technique permet de prouver la statistique super-poissonienne d'une source thermique et la statistique poissonienne d'une source cohérente. Le régime quantique est atteint lorsque les températures du système sont inférieures à l'énergie des photons ($T \leq \hbar\nu/k_B$), le passage du régime quantique au régime classique est alors observé. La mesure de la puissance des photons émis permet de sonder les moments élevé du courant, puisque la puissance est reliée aux fluctuations de courant et les fluctuations de puissance au moment d'ordre 4 de la distribution de courant.

Dans cette partie, nous tenons compte de l'environnement pour le calcul du bruit et du troisième moment à la manière de Caldeira et Leggett [82] qui fut discuté dans d'autres contextes dans le passé. Puis nous utilisons le modèle de Lesovik et Loosen pour calculer les corrélations croisées dans le cas d'un système à trois terminaux.

Chapitre 6

Couplage inductif avec un circuit LC dissipatif

6.1 Modèle

L'expression de la mesure inductive du bruit fait apparaître une divergence à cause de la présence d'un terme adiabatique infinitésimale. Ce paramètre a été ajouté au système pour rendre compte du découplage des deux circuits, mésoscopique et oscillant, au temps $-\infty$.

Larkin et Ovchinnikov [83] montrèrent que la mesure de l'effet Josephson dans les supraconducteurs dépend de la largeur de résonance des circuits extérieurs qui sont en contact avec le circuit mesuré. Ils montrent que le processus de dissipation apparaît essentiellement dans le circuit de mesure et qu'il ne peut disparaître qu'en découplant le circuit de mesure du circuit mesuré.

Dans ce chapitre, nous donnerons une justification physique de sa présence et évaluerons les conditions de la divergence.

Le montage que nous avons choisi est celui de la figure 6.1 : un fil du circuit mésoscopique est inductivement couplé à un circuit résonant composé d'une capacité (C), d'une inductance R et d'une résistance R. Nous imaginons que des mesures répétitives de la charge du condensateur sont effectuées. Un histogramme peut alors être dessiné, comme représenté sur la figure 6.1. A tension nulle, l'histogramme présente un pic autour de la valeur moyenne, un écart-type et une asymétrie, lorsque la tension devient non-nulle, la courbe est déplacée sur la droite, et l'écart-type et l'assymétrie sont modifiés. L'information sur tous les moments du courant apparaît dans ce type d'histogramme.

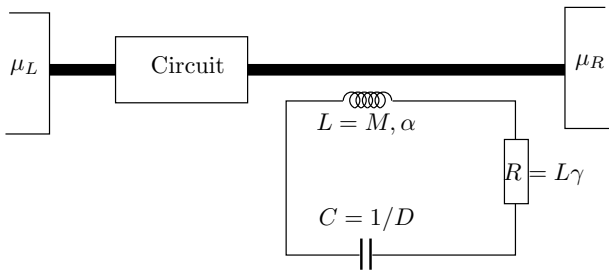

FIG. 6.1 – Le circuit mésoscopique est couplé inductivement à un circuit résonnant dissipatif, RLC. R est un bain d'oscillateurs couplé à l'oscillateur LC.

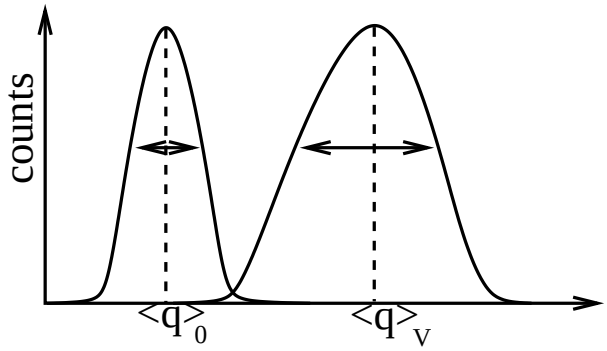

FIG. 6.2 – Histogramme typique de la charge utilisé pour définir le bruit et le troisième moment lorsque la tension est nulle et pour une tension constante.

6.1.1 L'oscillateur dissipatif sans interaction

Physiquement, la présence de résistances induit des dissipations (figure 6.1). Donc le circuit LC deviendra maintenant un circuit RLC, avec R est la somme de toutes les résistances présentes (résistances internes des composants et des fils, résistances ajoutées).

En mécanique quantique, la présence de dissipation est due au couplage entre le circuit non-dissipatif (LC parfait) à un bain d'oscillateurs. Nous pouvons alors écrire un nouvel hamiltonien : $H_{osc} = H_0 + V$ avec H_0 est la somme des hamiltoniens de l'oscillateur libre H_{free} et du bain H_{bath} complètement découplés et $V = q\sum_n \lambda_n x_n$ est l'interaction entre les deux systèmes. q est la charge de l'oscillateur parfait LC et x_n la charge d'un des oscillateurs du bain d'oscillateur. λ_n est le couplage entre le bain et l'oscillateur parfait.

Pour identifier les différents composants, comme nous l'avons fait précédemment, nous pouvons écrire l'équation du mouvement :

$$\langle \ddot{q}(t)\rangle + \int_{-\infty}^{t} dt'\gamma(t-t')\langle \dot{q}(t')\rangle + \Omega^2\langle q(t)\rangle = \frac{1}{M} f_{ext}(t) \tag{6.1}$$

Avec $M = L$ est l'inductance, $\Omega = \sqrt{1/LC}$ la fréquence caractéristique du circuit et $f_{ext}(t)$ la force du bain sur l'oscillateur parfait et $\gamma(t)$ est appelé "noyau dissipatif".

Tous les calculs seront effectués en représentation d'interaction, l'oscillateur et le bain sont couplés adiabatiquement à $t = 0$.

Nous allons également travailler ici dans la représentation de Keldysh. Pour simplifier les notations, il est alors plus intéressant de formuler les variables en terme de spineurs, cela donne pour la charge de l'oscillateur LC : $\bar{q} = (q_+, q_-)$, la transposée de q, et $q_\pm$ est la valeur de la charge lorsque le temps se situe sur la branche supérieure (q_+) ou inférieure (q_-) du coutour Keldysh. La norme de la charge s'écrit alors : $q^2 = \bar{q}\sigma_z q = q_+^2 - q_-^2$ avec σ_z une matrice de Pauli. Pour le bain d'oscillateur, nous établissons de même le spineur qui suivra les relations établies ci-dessus : $\bar{x} = (x_+, x_-)$.

A partir de l'hamiltonien, nous pouvons écrire l'action :

$$\begin{aligned} S =& S_{osc}[q] + \int_{-\infty}^{+\infty} dtdt' \frac{1}{2}\sum_n \bar{x}_n(t) D_n^{-1}(t-t')\sigma_z x_n(t') \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} dtdt' \frac{1}{2}\bar{q}(t)\delta(t-t')\sigma_z \sum_n \lambda_n x_n(t') \end{aligned} \tag{6.2}$$

avec l'action de l'oscillateur libre, c'est-à-dire en absence de couplage avec le bain

$$S_{osc}[q] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dtdt'\bar{q}(t)G_0^{-1}(t-t')\sigma_z q(t') \tag{6.3}$$

nous reconnaissons l'action de l'oscillateur harmonique. L'action du circuit libre dépend des fonctions de Green du système découplé $G_0^{-1}(t) = M[(i\partial_t)^2 - \Omega^2]$, avec Ω est la fréquence de résonance du circuit. Les effets de la dissipation sont traités à l'aide du modèle de Caldeira-Leggett [82], pour le bain isolé, la fonction de Green a la même forme que l'oscillateur libre puisque c'est un bain d'oscillateurs harmoniques : $D_n^{-1}(t) = M_n[(i\partial_t)^2 - \Omega_n^2]$. Le terme d'interaction est choisi linéaire. Nous pouvons donc écrire la fonction de partition qui sera le point de départ de tous nos calculs $Z = \int \mathcal{D}q\mathcal{D}x e^{iS[q,x]}$.

Les degrés de libertés du système sont quadratiques, nous pouvons donc intégrer de façon standard après avoir effectué le changement de variables, $x_n \to x_n - D_n\sigma_z\lambda_n q$ [85]. La fonction de Green de l'oscillateur est alors habillée par son environnement électromagnétique, $G^{-1}(t) = G_0^{-1}(t) - \Sigma(t)$ avec $\Sigma(t) = \sigma_z \sum_n \lambda_n^2 D_n \sigma_z$ la self-énergie du bain d'oscillateur. L'action est alors écrite de la façon suivante : $S = 1/2 \int dtdt'\bar{q}(t)G^{-1}(t-t')q(t')$.

Finalement, nous couplons le circuit mésoscopique à l'oscillateur. Ce couplage revient à introduire une force extérieure à l'équation du mouvement. Il est considéré comme un potentiel d'interaction qui agit sur le circuit oscillant LC plus bain. Cette interaction est également linéaire et s'écrit : $V_{int} = \alpha q\dot{I}$ avec α est la constante de couplage et $\dot{I}$ est la dérivée temporelle du courant qui traverse le circuit mésoscopique [12]. Rappelons que ce terme d'interaction apparait à cause de l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

Nous voulons isoler les différents corrélateurs de charge du circuit LC. Nous ajoutons au potentiel d'interaction un champ auxiliaire, η, qui est également un spineur. La fonction de partition est :

$$\mathcal{Z}_\eta[I] = \int \mathcal{D}q \exp i\Big[\frac{1}{2}\int dtdt'\bar{q}(t)G^{-1}(t-t')q(t') - q(t)\delta(t-t')\sigma_z(\alpha\dot{I}(t') + \eta(t'))\Big] \tag{6.4}$$

L'action est à nouveau quadratique à la suite du changement de variable, $q - (\eta + \alpha\dot{I})\sigma_z G \to q$. Nous pouvons alors effectuer l'intégration sur q et l'action effective devient :

$$S_{eff} = -\frac{i}{2}\int dtdt'(\eta(t) + \alpha\dot{I}(t))\sigma_z G(t-t')\sigma_z(\eta(t') + \alpha\dot{I}(t')) \tag{6.5}$$

La nouvelle fonction de partition dépend de la fonction de Green du circuit RLC non-couplé au circuit mésoscopique. Les fonctions de corrélations du courant seront établies par des dérivées de la fonction de partition sur le champ auxiliaire η. Ces fonctions sont alors proportionnelles aux fonctions de Green habillées par le circuit mésoscopique environnant.

6.2 Calcul des fonctions de Green en absence d'interaction

Nous choisissons de travailler dans la base des fonctions de Green avancée, retardée et Keldysh. Les fonctions de Green totales dépendent de celles de l'oscillateur libre et de la self-énergie du bain non couplé.

6.2.1 Calcul de la self-énergie

La self-énergie Keldysh

Nous utilisons la définition de la self-énergie de Keldysh exprimée à l'aide des fonctions de Green causales : $\Sigma_n^K = \lambda_n^2 D_n^K$ avec $D_n^K = D_n^< + D_n^>$. Ces fonctions de Green dépendent de corrélateurs de la charge de l'oscillateur n du bain, $\langle x_n(t)x_n(0)\rangle$ ou $\langle x_n(0)x_n(t)\rangle$. La charge x_n s'exprime en fonction des opérateurs de création $a_n^\dagger$ et de destruction a_n bosoniques, dont le résultat des corrélations est bien connu.

La self-énergie est finalement proportionnelle à $(2N(\Omega_n)+1)\cos(\Omega_n t)$, avec $N(\Omega_n)$ la distribution de Bose. Lors de l'évaluation de la transformée de Fourier, le cosinus fait apparaître une somme de fonctions δ de Dirac, qui impose que l'expression soit non nulle lorsque la fréquence est égale à Ω_n ou $-\Omega_n$. La présence du facteur $2N(\Omega_n)+1$ impose un signe positif (négatif) lorsque nous travaillons à fréquence positive (négative), la somme des fonctions de Dirac peut alors disparaître et être remplacée par une seule fonction de Dirac dépendant de la valeur absolue de la fréquence et de la fonction signe qui imposera le signe ω.

La fonction spectrale peut-être maintenant écrite à l'aide de la constante de couplage et des valeurs caractéristiques du bain :

$$J(\omega) = \sum_n \frac{\pi\lambda_n^2}{2M_n\Omega_n}\delta(\omega-\Omega_n) \tag{6.6}$$

avec M_n est la masse de l'oscillateur n et Ω_n sa fréquence de résonance.

A partir du noyau, nous pouvons définir la fonction spectrale comme une loi de puissance $J(\omega) = M\gamma(\omega)\omega = M\tilde{\gamma}_s\omega^s$. Nous appelons le cas $0 < s < 1$, le cas de dissipation sub-ohmique, le cas $s > 1$ super-ohmique et $s = 1$ est le cas ohmique. Toutes les applications se feront dans le cas ohmique. Ce régime impose que $\gamma(\omega) = 2\gamma$ soit une constante, et sa dépendance temporelle est $\gamma(t) = 2\tilde{\gamma}\delta(t)$ donc en comparant l'équation (6.1) avec l'équation du mouvement d'un circuit RLC, nous nous apercevons que le noyau de dissipation $\gamma(t-t')$ est le rapport de la valeur de la résistance R sur celle de l'inductance, $\gamma = R/L$.

La self-énergie de Keldysh s'exprime alors à l'aide de la fonction spectrale [82] et de distribution de Bose

$$\Sigma_n^K(\omega) = -2i(2N(\omega)+1)sign(\omega)J(|\omega|) \tag{6.7}$$

Self-énergies retardée et avancée

Les self-énergies avancée et retardée sont égales à la différence des fonctions de Green causales du bain associé à une fonction de Heaviside dépendente du temps afin d'isoler les parties avancées et retardées du signal, $D_n^{R/A} = \Theta(\pm t)(D_n^< - D_n^>)$.

Comme nous l'avons vu, les coordonnées $x(t)$ peuvent être exprimées en terme d'opérateurs de destruction et de création bosoniques dont le résultat des corrélations est connu. Cette fois la différence ne fait apparaître que le sinus de $\Omega_n t$ et la distribution de Bose n'est pas présente.

Dans l'espace de Fourier la self-énergie devient :

$$\Sigma_n^{A/R}(\omega) = \frac{\lambda_n^2}{M_n}\frac{1}{(\omega\mp i\eta)^2-\Omega_n^2} \tag{6.8}$$

η est un paramètre d'amortissement qui apparaît parce que la fonction d'Heaviside ne permet pas l'intégration. Pour que le signal s'annule rapidement sur l'intervalle de temps où $\Theta(\pm t)$ est nul le paramètre η tend vers zéro très rapidement.

Comme précédemment, l'expression ci-dessus peut-être écrite en fonction de la fonction spectrale $J(\omega)$

$$\Sigma^{R/A}(\omega) = \mp i\text{sgn}(\omega)J(|\omega|) \tag{6.9}$$

Cette expression est obtenue en considérant que le paramètre d'amortissement est négligeable.

6.2.2 Calcul des fonctions de Green avancée, retardée et Keldysh

Comme nous l'avons déjà vu, dans le formalisme Keldysh, les fonctions de Green apparaissent sous forme de matrice et obéissent à la relation $G_0^{-1}G = \delta(t)\sigma_z$, avec $G_0^{-1} = M[(i\partial_t)^2 - \Omega^2]\sigma_z$ la fonction de Green de l'oscillateur libre et G la fonction de Green totale (habillée par l'environnement).

Fonctions de Green avancée et retardée

La fonction de Green totale du système est définie ci-dessus et est égale à l'inverse de $(G_0^{R/A})^{-1} - \Sigma^{R/A}$, avec $G_0^{R/A}$ est la fonction de Green avancé (retardée) de l'oscillateur LC libre.

L'expression de cette fonction est obtenue grâce au produit $G_0^{-1}G_0^{R/A}(t)$. Ce produit est égale à la fonction de Dirac dépendant du temps. Donc le passage à l'espace de Fourier donne une solution intégrable et le résultat est : $G_0^{R/A}(\omega) = [M(\omega^2 - \Omega^2)]^{-1}$

Maintenant que nous connaissons les expressions de la fonction de Green du système libre et de la self-énergie du bain, la fonction de Green totale s'écrit :

$$G^{R/A}(\omega) = \frac{1/M}{\omega^2 - \Omega^2 \pm i\text{sgn}(\omega)J(|\omega|)/M} \tag{6.10}$$

Comme nous avons signalé plus haut, nous appliquerons tout le calcul dans un système de dissipation ohmique. Or dans un tel système, la densité spectrale est proportionnelle à la fréquence, $J(\omega) = 2M\gamma\omega$. Les fonctions de Green s'écrivent ici plus simplement :

$$G^{R/A}(\omega) = \frac{1/M}{\omega^2 - \Omega^2 \pm i2\text{sgn}(\omega)\gamma|\omega|} \tag{6.11}$$

Nous pouvons observer que les fonctions de Green avancée et retardée sont les complexes conjuguées l'une de l'autre, donc nous avons les relations suivantes, $[G^{R/A}]^*(\omega) = G^{A/R}(\omega) = G^{R/A}(-\omega)$.

Fonction de Green Keldysh

La relation G_0G^K est nulle et ne peut pas être utilisée pour évaluer la fonction de Green Keldysh. Nous utilisons alors l'équation de Dyson, $G = G_0 + G\Sigma G_0 + \ldots$, pour laquelle nous isolons le terme Keldysh qui comporte deux termes, un proportionnel à G_0^K et un proportionnel à G_0^R.

Le premier terme, $G_0^K(1 + \Sigma^A G^A)$, fait apparaître, grâce aux relations de Dyson, le produit $G^A(G_0^A)^{-1}$ qui multiplié à la fonction de Green Keldysh de l'oscillateur isolé donnera une solution nulle.

Finalement, la fonction de Green est égale au second terme, dans lequel nous factorisons les produits proportionnels à G_K. Nous obtenons alors la relation :

$$G^K(\omega) = -i\frac{2\text{sgn}(\omega)J(|\omega|)}{M^2(\omega^2 - \Omega^2)^2 + J^2(|\omega|)}(2N(\omega) + 1) \tag{6.12}$$

En développant cette expression, nous pouvons faire apparaître une relation directe entre la fonction de Green Keldysh et la différence entre les fonctions de Green avancée et retardée, $G_R - G_A$. C'est la densité spectrale des états de l'oscillateur harmonique :

$$G^K(\omega) = (2N(\omega) + 1)(G^R(\omega) - G^A(\omega)) \tag{6.13}$$

Pour le cas ohmique la fonction devient :

$$G^K = -i\frac{2\mathrm{sgn}(\omega)\gamma|\omega|}{M(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4M\gamma^2\omega^2}(2N(\omega) + 1) \tag{6.14}$$

nous reconnaîssons dans cette expression, la partie imaginaire de la fonction réponse du système : $\tilde{\chi}''(|\omega|) = 2\gamma|\omega|/[M(\omega^2-\Omega^2)^2+4M\gamma^2\omega^2]$. Cette fonction est également appelée susceptibilité. C'est la partie imaginaire de la fonction de corrélation symétrisé $\chi(t) = (i/\hbar)\Theta(t)\langle q(t)q(0) - q(0)q(t)\rangle_\beta$. Dans le cas ohmique, le rapport entre γ et ω engendre deux régimes de dissipation.

Lorsque γ est inférieur à Ω, le régime est dit "under-damped" et la susceptibilité se trouve être une superposition de pics Lorentziens centrés en $\pm\Omega$ et de largeur γ. La densité de ce régime oscille avec une amplitude amortie, ce régime est également appelé "pseudo-périodique".

Lorsque Ω est inférieur à γ, le régime est dit "over-damped". Dans ce régime, la densité est complètement amortie, ce régime est appelé apériodique.

Le dernier cas qui peut exister est le régime critique pour $\gamma = \Omega$, où la densité est également amortie.

Ce dispositif a été proposé afin de mesurer les fluctuations de charge et le troisième moment du circuit mésoscopique couplé à l'oscillateur. Ces deux expressions sont déduites de la fonction de partition grâce aux relations suivantes :

$$\langle q^-(t)q^+(0)\rangle = \left.\frac{\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_\eta[I]}{\partial\eta(t^-)\partial\eta(0^+)}\right\rangle}{\langle \mathcal{Z}_\eta[I]\rangle}\right|_{\eta=0} \tag{6.15}$$

Les fluctuations de courant apparaissent en calculant le deuxième moment de la charge q de l'oscillateur. Cette dernière expression résulte de la dérivée seconde de la fonction de partition par rapport au champ auxiliaire η que nous annulerons à l'issue du calcul.

Le troisième moment apparaît lorsque la fonction de partition est développée en terme de α dans l'expression de la charge moyenne, qui est la dérivée de la fonction de partition en terme de champ auxiliaire. Nous sommerons les contributions des branches supérieure et inférieure du contour de Keldysh.

$$\langle q(t)\rangle = \left.\frac{\left\langle \frac{1}{2}\left(i\frac{\partial}{\partial\eta^+(t)} - i\frac{\partial}{\partial\eta^-(t)}\right)\mathcal{Z}_\eta[I]\right\rangle}{\langle \mathcal{Z}_\eta[I]\rangle}\right|_{\eta=0} \tag{6.16}$$

Le champs auxiliaire sera à nouveau annulé à l'issue de la dérivation.

Dans la suite du document, nous allons distinguer l'oscillateur sans couplage avec le bain que nous nommerons LC, qui serait un circuit parfait et l'oscillateur avec couplage donc qui subirait une dissipation, qui portera le nom RLC. Nous parlerons d'interactions lorsque nous évoquerons le couplage entre le circuit $(R)LC$ et le circuit mésoscopique.

6.3 Détection des fluctuations de courant

Pour obtenir le bruit, nous effectuons les deux dérivées de la fonction de partition. A l'issue de cette dérivation, le second moment comporte deux termes. Le premier terme est la fonction de Green sans interaction, ce terme ne dépend pas du courant du circuit mésoscopique qui correspond aux corrélations de charge lorsqu'il n'y pas de couplage entre l'oscillateur et le circuit mésoscopique. Le second terme dépend des corrélations de courant du circuit couplé. Pour isoler les fluctuations de charge dépendant du couplage, nous effectuons la différence entre les deux termes cités ci-dessus, $\delta\langle q(t)q(0)\rangle = \langle q(t)q(0)\rangle - \langle q(t)q(0)\rangle_0$, avec $\langle q(t)q(0)\rangle|_0$ est la fonction de Green du circuit RLC sans interaction ($\alpha = 0$). Les fluctuations de charges deviennent alors :

$$\delta\langle q(t)q(0)\rangle = \alpha^2 \sum_{s_1,s_2} \sigma_z^{s_1,s_1}\sigma_z^{s_2,s_2} Z[I]^{-1} \int d\tau_1 d\tau_2 \langle \dot{I}(\tau_1^{s_1})\dot{I}(\tau_2^{s_2})Z[I]\rangle G^{s_1,+}(\tau_1,0)G^{s_2,-}(\tau_2,t) \quad (6.17)$$

avec $Z[I] = \mathcal{Z}_{\eta=0}[I]$ et $\langle\ldots\rangle$ la moyenne hors équilibre du système mésoscopique. A ce stade aucune approximation a été faite sur l'amplitude du couplage inductif. Le développement limité de la fonction de partition permet d'atteindre toutes les puissances de α et obtenir des corrélations de courant régulieres. Comme c'est la moyenne du carré du courant qui nous intéresse, nous nous bornons au terme à la puissance zéro du développement de $Z[I]$.

Pour simplifier l'écriture nous introduisons les notations suivantes. Dans un premier temps, nous rappelons que la fonction de Green est égale aux corrélations des charges de l'oscillateur plus bain, $G^{s,r}(t,\tau) = \langle T_K q(t_s)q(\tau_r)\rangle$ avec s et r représentant les branches du contour Keldysh. Nous définissons également $K^{>}(t) = \langle \dot{I}(0)\dot{I}(t)\rangle$ et $K^{<}(t) = \langle \dot{I}(t)\dot{I}(0)\rangle$ les corrélateurs non-symétrisés des dérivés temporelles du courant. Ce sont les éléments diagonaux de l'expression $K^{s,r}(t) = \langle \dot{I}(0_s)\dot{I}(t_r)\rangle$. Nous introduisons également la combinaison, $K^{\pm}(t) = \Theta(t)(K^{>}(t) \pm K^{<}(t))$.

A l'aide de toutes ces définitions et des rotations de la base de Keldysh, nous pouvons récrire les fluctuations de charges :

$$\begin{aligned}\delta\langle q^2(t)\rangle =& \alpha^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G^R(t-\tau_1)\{G^K(t-\tau_2)K^-(\tau_1-\tau_2) \\ &+ (G^R(t-\tau_2) - G^A(t-\tau_2)))K^+(\tau_1-\tau_2)\}\end{aligned} \quad (6.18)$$

Nous pouvons maintenant évaluer la transformée de Fourier.

6.3.1 Transformée de Fourier

Pour obtenir les fluctuations de charges dans l'espace de Fourier, nous écrivons tous les termes en fréquence :

$$\begin{aligned}\delta\langle q^2(t)\rangle =& \alpha^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \int \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega}{(2\pi)^3} e^{-it(\omega_1+\omega_2)} e^{-i\tau_1(\omega-\omega_1)} e^{i\tau_2(\omega+\omega_1)} G^R(\omega_1) \\ &\{G^K(\omega_2)K^-(\omega) + (G^R(\omega_2) - G^A(\omega_2)))K^+(\omega)\}\end{aligned} \quad (6.19)$$

Les intégrations sur les temps, τ_1 et τ_2, font apparaître des fonctions de Dirac sur les fréquences permettant de faire disparaître les intégrales sur les fréquences ω_1 et ω_2 et sont respectivement remplacées par ω et $-\omega$. L'exponentielle dépendant de t est égale à 1, ce qui permet de montrer que les fluctuations de charges sont indépendantes du temps. Nous ne préciserons donc plus le temps

à laquelle les fluctuations sont détectées. Finalement, les fluctuations de charges en fréquence ne dépendent que de deux fréquences. Les relations $G^K(-\omega) = G^K(\omega)$ et $G^{R/A}(-\omega) = G^{A/R}(\omega)$ permettent d'obtenir une équation avec une seule fréquence.

$$\delta\langle q^2\rangle = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G^R(\omega)\{G^K(\omega)K^-(\omega) - (G^R(\omega) - G^A(\omega)))K^+(\omega)\} \tag{6.20}$$

Nous connaissons la valeur des fonctions de Green en fréquence, nous devons évaluer $K^{\pm}(\omega)$.

Nous utilisons la définition donnée plus haut et calculons sa transformée de Fourier. La présence de la fonction de Heaviside impose l'ajout d'une exponentielle qui permet d'amortir la courbes pour les temps négatifs, $e^{-\eta t}$ avec η qui tend vers 0, pour rendre l'expression intégrable.

Dans l'espace de Fourier, les corrélateurs de courant (dérivés dans le temps) s'écrivent : $K^<(\omega) = \omega^2 S_+(\omega)$ et $K^>(\omega) = \omega^2 S_-(\omega)$. Les fonctions S_+ et S_- sont les bruits non symétrisés définis au chapitre 5 et dans les références [72, 12]. Les fonctions $K^{\pm}$ s'écrivent alors :

$$K^{\pm}(\omega) = i \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\omega'^2(S_-(\omega') \pm S_+(\omega'))}{\omega - \omega' + i\eta} \tag{6.21}$$

η tendant vers 0, le dénominateur peut-être approximé à une fonction de Dirac et l'expression ci-dessus ne dépend que du bruit du circuit mésoscopique :

$$K^{\pm}(\omega) = \frac{1}{2}\omega^2(S_-(\omega) \pm S_+(\omega)) \tag{6.22}$$

Pour les fréquences négatives, nous avons les relations suivantes, $[G^{R/A}(\omega)]^* = -G^{R/A}(-\omega)$, $[G^K(\omega)]^* = -G^K(-\omega)$ et $[K^{\pm}(\omega)]^* = K^{\pm}(\omega)$. L'intégrande de $\delta\langle q^2\rangle$ exprimée pour des fréquences négatives est donc égale au complexe conjugué de l'expression aux fréquences positives, et l'intervalle d'intégration peut-être réduit à $[0, +\infty]$

$$\delta\langle q^2\rangle = 2\alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathrm{Re}[G^R(\omega)(G^R(\omega) - G^A(\omega))]\{(2N(\omega)+1)K^-(\omega) - K^+(\omega)\} \tag{6.23}$$

Les fluctuations sont donc réelles.

6.3.2 Résultats

Oscillateur libre non couplé au bain

Pour valider les calculs faits ci-dessus, il faut vérifier qu'en l'absence de bain d'oscillateur, nous retrouvons le même résultat que Lesovik et Loosen.

Le découplage du bain et de l'oscillateur libre est approximé en faisant tendre le noyau de dissipation vers 0, ce qui annule la fonction spectrale $J(\omega)$. Nous pouvons donc remplacer les termes proportionnels à $J(\omega)$ par une constante γ qui tend vers 0.

En tenant compte de la relation entre G^K et $G^R - G^A$, les fluctuations de charge s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\delta\langle q^2(t)\rangle = \frac{-\alpha^2}{2(M\Omega)^2} \int_0^{\infty} d\omega \mathrm{Re}\left[i\left(\frac{1}{\omega - \Omega + 2i\gamma} - \frac{1}{\omega + \Omega + 2i\gamma}\right)\right](\delta(\Omega - \omega) - \delta(\Omega + \omega)) \\ \{(2N(\omega)+1)K^-(\omega) - K^+(\omega)\}\end{aligned} \tag{6.24}$$

Nous pouvons maintenant facilement intégrer l'expression (6.24).

$$\delta\langle q^2(t)\rangle = \frac{\alpha^2}{2\gamma(M\Omega)^2}\{K^+(\Omega) - (2N(\Omega)+1)K^-(\Omega)\} \tag{6.25}$$

Finalement, nous utilisons les relations entre les corrélateurs K et le bruit non-symétrisé (éq. (6.22))

$$\delta\langle q^2(t)\rangle = \frac{\alpha^2}{\gamma M^2}\{S_+(\Omega) + N(\Omega)(S_+(\Omega) - S_-(\Omega))\} \tag{6.26}$$

Nous retrouvons le résultat de Lesovik et Loosen, la constante γ est le couplage adiabatique, il apparaît donc lorsque nous négligeons la contribution de la dissipation.

Oscillateur dissipatif

Nous utilisons les expressions des fonctions de Green. Seule la partie réelle de $G^R(\omega)(G^R(\omega) - G^A(\omega))$ apparaît dans l'expression des fluctuations. Comme la fonction de Green Keldysh est purement imaginaire, seule la partie imaginaire de G^R contribuera dans la suite. Le produit de fonction de Green égalise alors le carré de la partie imaginaire de la réponse linéaire définie plus haut, $G^R(G^R - G^A) \sim [\chi'']^2$. En remplaçant les termes $K^\pm$ par leur expression, dépendante du bruit, nous trouvons :

$$\delta\langle q^2(t)\rangle = 2\alpha^2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{J^2(\omega)\omega^2}{\left[M^2(\omega^2-\Omega^2)^2 + J^2(\omega)\right]^2}\big(S_+(\omega) + N(\omega)(S_+(\omega) - S_-(\omega))\big) \tag{6.27}$$

Pour le cas ohmique, nous remplaçons à nouveau la fonction spectrale $J(\omega)$ par son expression qui est linéaire en fréquence :

$$\delta\langle q^2(t)\rangle = \frac{2\alpha^2}{M^2}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[\frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right]^2 \big(S_+(\omega) + N(\omega)(S_+(\omega) - S_-(\omega))\big) \tag{6.28}$$

Lorsqu'un circuit possède un facteur de qualité élevé ($Q = \Omega/\gamma$), l'intégrande de l'expression $\delta\langle q^2\rangle$ peut-être calculée à la fréquence de résonance Ω et le préfacteur diverge lorsque le circuit de mesure est découplé de son environnement. L'équation (6.27) est l'analogue mésoscopique du calcul de Larkin et al. [83] : un circuit LC dissipatif ne peut pas engendrer de divergence. La dissipation apparaît essentiellement dans le processus de mesure.

Une dissipation finie est donc nécessaire pour que le bruit converge. Ce résultat fournit une explication pour la divergence adiabatique obtenue dans le calcul de Lesovik et Loosen, ils ont choisi un circuit où la dissipation est négligée, et est remplacée par le paramètre adiabatique qui fait diverger le résultat.

6.3.3 Application

Les résultats sont appliqués à un point contact. Le bruit en excès de ce système marque une singularité lorsque la tension et la fréquence sont égales, $\omega = eV$. Le bruit non-symétrisé est égale à :

$$S_+(\omega) = \left(\frac{e}{h}\right)^2 \sum_m T_m(1-T_m)(eV - \hbar\omega)\Theta(eV-\omega) \tag{6.29}$$

$$S_-(\omega) = \left(\frac{e}{h}\right)^2 \sum_m \begin{cases} 2T_m\omega & \text{if } \hbar\omega > eV \\ 2T_m^2\omega + T_m(1-T_m)(eV+\hbar\omega) & \text{si } 0 < \hbar\omega < eV \end{cases} \tag{6.30}$$

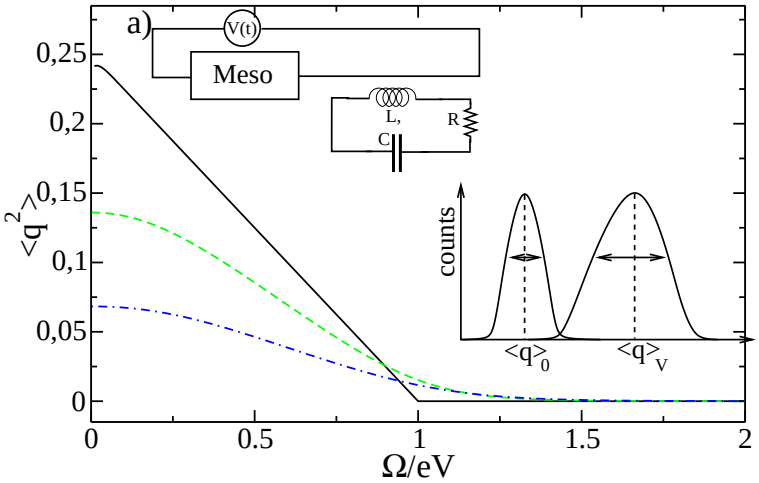

FIG. 6.3 – (haut) Circuit mésoscopique couplé à un circuit LC dissipatif. (bas) histogrammes de la charge utilisés pour identifier la bruit et le troisième moment pour des tensions nulle et finie. Bruit mesuré à basse température ($T = 0.01\Omega$) sans dissipation (ligne pleine), pour $\gamma/2 = 0.4\Omega$ (tirets), $\gamma/2 = 0.6\Omega$ (pointillés-tirets).

et la différence égale à : $\Delta S = S_+ - S_- = -2\left(\frac{e}{h}\right)^2 \sum_m T_m \hbar\omega$. C'est une droite avec une pente négative, qui n'observe pas de singularités. La différence entre les deux bruits non-symétrisés est égale à la formule de Kubo.

Les courbes sont tracées comme des fonctions de Ω/eV, γ/Ω et T/Ω, avec T la température du circuit LC. La température du point contact est considérée comme bien inférieure à la tension afin de conserver un régime de bruit grenaille dominant. Rappelons que la température du circuit mésoscopique et la temperature du circuit LC ne sont pas forcément égales et que nous les choisissons ici différentes. Quand nous parlerons d'une température, ce sera toujours celle du circuit LC.

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le régime "under-damped", en rappelant que nous travaillons dans le cas de la dissipation ohmique. Lorsque $\gamma \ll \Omega$, nous nous attendons à retrouver un comportement très proche de celui d'une mesure à l'aide d'un circuit non-dissipatif. Les courbes montrent que c'est ce qui se produit, avec un résultat important : la divergence disparait lorsque la dissipation augmente.

Sur la figure 6.3, les fluctuations sont mesurées à basse température ($T/\Omega \ll 1$). L'effet de la dissipations est de laver le bruit mesuré de toute singularité et d'aplatir la courbe. En comparaison, une courbe sans dissipation est représentée après l'avoir remise à l'échelle (elle devrait diverger car $\gamma \to 0$). Dans l'encadré de la figure 6.3, nous nous plaçons dans un régime "over-damped". A cause des deux pics de la susceptibilité $\chi''(\omega)$, nous ne retrouvons pas la dépendance linéaire présente dans le cas sans-dissipation.

Dans la figure 6.4, nous nous plaçons dans le régime "under-damped" afin d'étudier l'effet de la température pour des systèmes dissipatif et non-dissipatif. Le bruit devient négatif pour de hautes températures à cause de $S_+ - S_-$ qui est négatif et de la forte population des états de l'oscillateur LC. Vu que nous mesurons le bruit en excès (c'est-à-dire les fluctuations en présence et en l'absence d'interaction avec le circuit mesuré), il n'y a donc pas de contradiction avec le signe ici. En l'absence de dissipation, les singularités sont bien marquées. Elles sont fortement atténuées dans le régime dissipatif. La température de mesure a le même effet dans le cas dissipatif et non

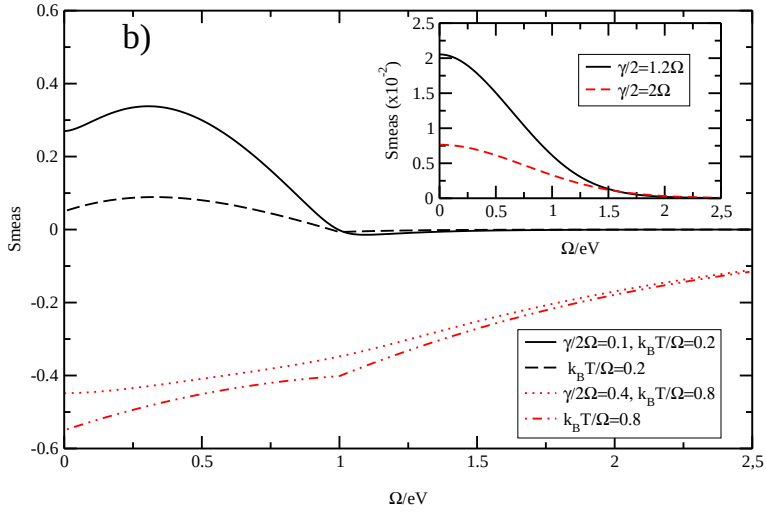

FIG. 6.4 – Bruit mesuré pour un cas "under-damped, avec $T > \gamma/2$. Inset : bruit dans un régime "over-damped", avec $T = 0.01\Omega$.

dissipatif parce que la fonction de réponse ne dépend pas de cette variable. En effet, la fonction $\chi''(\omega)$ est reliée au bruit symétrisé d'un oscillateur harmonique dissipatif dans le cadre du théorème de fluctuation-dissipation.

6.4 Troisième moment en présence de dissipation

Comme nous l'avons vu avec l'équation (6.16), la charge moyenne est obtenue en dérivant une seule fois la fonction de partition par rapport au champ auxiliaire et en annulant ce dernier. La définition de la charge moyenne que nous choisissons est la somme de la charge sur la branche inférieure et celle sur la branche supérieure, $\langle q(t)\rangle = \langle q^+(t) + q^-(t)\rangle/2$. Contrairement au second moment, la charge moyenne ne fait apparaître qu'un seul terme, proportionnel à la moyenne de la dérivée temporelle du courant. Grâce à l'invariance par translation de la fonction de Green, la charge moyenne peut s'écrire :

$$\langle q(t)\rangle = \frac{1}{2}\sum_s \int d\tau \sigma_z^{s,s}(G^{+,s}(t,\tau) + G^{-,s}(t,\tau))\alpha \frac{\langle \dot{I}(\tau^s) Z[I]\rangle}{\langle Z[I]\rangle} \tag{6.31}$$

en rappelant que $Z[I] = \mathcal{Z}_{\eta=0}[I]$. Pour évaluer les différents moments du courant, nous effectuons un développement limité de la fonction de partition en terme de puissance de la constante de couplage α. Seules les contributions avec un nombre impair de courant peuvent être générées par cette série. Nous nous intéressons aux deux premiers ordres. Le premier ordre, proportionnel à α, est relié au premier moment du courant qui est le courant moyen, les relations entre les fonctions de Green vont donner l'expression : $\langle q(t)\rangle_1 = \int d\tau \alpha \langle \dot{I}(\tau)\rangle G^R(t,\tau)$. La présence de la dérivée temporelle du courant annule ce terme car nous avons choisi un régime stationnaire. Le système mésoscopique est parcouru par une différence de potentiel continu.

Le second ordre qui apparaît est le troisième ordre, c'est-à-dire proportionnel à α^3. Ce terme contient le corrélateur $\langle T_K\{\dot{I}(t_1)\dot{I}(t_2)\dot{I}(t_2)\}\rangle$ qui est relié au troisième moment du courant. La présence des fonctions d'Heaviside impose un ordre temporel, qui ne doit pas enfreindre les règles

de causalité. Le troisième moment est donc égale à :

$$\begin{aligned}\langle q(t)\rangle = -i\alpha^3 \int d\tau dt_1 dt_2\ G^R(t,\tau) \\ \times \Big[G^K(t_1-t_2)R^-(\tau,t_1,t_2) + (G^R(t_1-t_2) - G^A(t_1-t_2))R^+(\tau,t_1,t_2)\Big]\end{aligned} \tag{6.32}$$

avec les fonctions R^+ et R^- contiennent les corrélateurs :

$$R^-(\tau,t_1,t_2) = \frac{1}{2}\Big\langle\Big[[\dot{I}(\tau)),\dot{I}(t_1)],\dot{I}(t_2)\Big]\Big\rangle\,\Theta(\tau-t_1)\Theta(t_1-t_2) \tag{6.33}$$

$$R^+(\tau,t_1,t_2) = \frac{1}{2}\Big\langle\Big\{[\dot{I}(\tau)),\dot{I}(t_1)],\dot{I}(t_2)\Big\}\Big\rangle\,\Theta(\tau-t_1)\Theta(t_1-t_2) \tag{6.34}$$

Le circuit mésoscopique apparaît seulement en terme de corrélateurs qui sont sous la forme de commutateurs/anti-commutateurs imbriqués (indiqués par le signe $\pm$). Ce résultat est important car il implique que les corrélateurs qui sont en commun dans les équations (6.33) et (6.34) induisent que notre schéma n'est effectif que dans le cadre de transport pleinement cohérent. C'est à dire que le taux d'échappement, des électrons du circuit mésoscopique vers les fils, est large comparé à la température. Ainsi de tels corrélateurs disparaissent dans le cas du blocage de Coulomb incohérent.

6.4.1 Transformée de Fourier

De nouveau, c'est l'expression en fréquence de l'asymétrie qui nous intéresse, nous effectuons alors la transformée de Fourier. Le passage à l'espace des fréquences fait apparaître des fonctions de Dirac. L'intégration va alors faire disparaître toutes les dépendances temporelles de l'expression.

Comme dans le cas du bruit, nous nous retrouvons avec une expression qui reste inchangée selon le moment à laquelle nous choisissons de mesurer le troisième moment. Nous ne tiendrons donc plus compte du temps t pour lequel le troisième moment est défini.

$$\langle q\rangle_{(3)} = -i\alpha^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} G^R(0)\Big[G^K(\omega')R^-(0,\omega') - (G^R(\omega') - G^A(\omega'))R^+(0,\omega')\Big] \tag{6.35}$$

Nous pouvons remarquer, à partir de cette équation, que le troisième moment conserve une forme similaire au bruit. En effet, comme dans le cas de K^+ dans le bruit, R^+ porte le poids de la densité spectrale des états de l'oscillateur LC plus le bain $G^R - G^A$. Nous connaissons déjà l'expression des fonctions de Green en fréquence, il nous faut donc calculer celle des fonctions $R^\pm$ en fonction du troisième moment.

Pour ce faire, nous utilisons le courant exprimé dans l'espace de Fourier et nous définissons les fonctions

$$L^-(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2}\Big\langle\Big[[I(t_1),I(0)],I(t_2)\Big]\Big\rangle \tag{6.36}$$

$$L^+(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2}\Big\langle\Big\{[I(t_1),I(0)],I(t_2)\Big\}\Big\rangle \tag{6.37}$$

qui sont des combinaisons des troisièmes moments du courant.

Il est possible d'adopter un formalisme plus similaire au bruit, que nous n'utiliserons toutefois pas directement ici. Quatre types de corrélations de courant sont définies :

$$M^{++}(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \langle I(0)I(t_1)I(t_2)\rangle \tag{6.38}$$

$$M^{-+}(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \langle I(t_1)I(0)I(t_2)\rangle \tag{6.39}$$

$$M^{--}(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \langle I(t_2)I(t_1)I(0)\rangle \tag{6.40}$$

$$M^{+-}(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{dt_1}{2\pi}\int \frac{dt_2}{2\pi} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \langle I(t_2)I(0)I(t_1)\rangle \tag{6.41}$$

Les fonctions définies aux équations (6.36) et (6.37) sont écrites alors avec ces quatre fonctions non-symétrisées qui apparaissent sur le parcours Keldysh : $L^{\pm} = M^{-+} - M^{++} \pm M^{--} \mp M^{+-}$. Le corrélateur symétrisé est la somme des ces quatre fonctions.

La fonctions de corrélations du produit de dérivée temporelle des courants deviennent alors :

$$\left\langle \Big[[\dot{I}(\tau)), \dot{I}(t_1)], \dot{I}(t_2)\Big]_{\pm} \right\rangle = i \int d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_1(\tau-t_1)} e^{-i\omega_2(t_2-t_1)} \omega_1\omega_2(\omega_1+\omega_2) L^{\pm}((\omega_1,\omega_2) \tag{6.42}$$

L'indice $\pm$ indique la commutation ($[\ldots]$) ou l'anti-commutation ($\{\ldots\}$).

Les fonctions d'Heaviside présentent dans les fonctions $R^{\pm}$ rendent les intégrales sur le temps non résolubles. Pour palier à ce problème, ces fonctions sont remplacées par des termes d'amortissement, $e^{\eta_1(\tau-t_1)}$ et $e^{\eta_2(t_1-t_2)}$ avec $\eta_{1(2)} \to 0$. Dès lors, Nous pouvons intégrer sur tous les temps et les fonctions $R^{\pm}$ deviennent :

$$R^{\pm}(\omega_1,\omega_2) = \int \frac{d\omega_1' d\omega_2'}{(2\pi)^2} \frac{i\omega_1'(\omega_2'-\omega_1')\omega_2' L^{\pm}(\omega_1',\omega_2')}{(\omega_1-\omega_1'+i\eta_1)(\omega_2-\omega_2'+i\eta_2)} \tag{6.43}$$

Le troisième moment devient :

$$\begin{aligned}\langle q(t)\rangle_{(3)} = &- i\alpha^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^3} \frac{i\omega_1(\omega_2-\omega_1)\omega_2}{(-\omega_1+i\eta_1)(\omega-\omega_2+i\eta_2)} G^R(0) \\ &\times \Big[G^K(\omega)R^-(\omega_1,\omega_2) - (G^R(\omega)-G^A(\omega))R^+(\omega_1,\omega_2)\Big]\end{aligned} \tag{6.44}$$

Les relations entre les fonctions de Green avancée et retardée et leur complexe conjugué ($[G^{R/A}(\omega)]^* = G^{R/A}(-\omega)$), imposent que leur expression à fréquence nulle est purement réelle et est égale à : $G^{R/A}(0) = -[M\Omega^2]^{-1}$. Rappelons que la fonction de Green Keldysh est purement imaginaire donc le produit iG^K devient purement réel. De leur côté, les fonctions $R^{\pm}$ obéissent aux relations, $[R^{\pm}(\omega,\omega')]^* = \mp R^{\pm}(-\omega,-\omega')$ avec, $[L^{\pm}]^* = \mp L^{\pm}$.

Ces relations imposent que l'intégrande du troisième moment aux fréquences positives est égale à son complexe conjugué exprimé pour des fréquences négatives. Le troisième moment est alors réel lorsque nous réduisons l'intervalle d'intégration aux fréquences positives, $[0,+\infty]$.

$$\begin{aligned}\langle q\rangle_{(3)} =& \alpha^3 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} G^R(0)(G^R(\omega)-G^A(\omega)) \\ &\times \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega_1(\omega_2-\omega_1)\omega_2}{(-\omega_1+i\eta_1)(\omega-\omega_2+i\eta_2)}\Big[(2N(\omega)+1)L^-(\omega_1,\omega_2) - L^+(\omega_1,\omega_2)\Big]\right]\end{aligned} \tag{6.45}$$

Seule la partie réelle des fonctions $R^{\pm}$ apparaît dans $\langle q\rangle_{(3)}$. Dans un premier temps, les parties imaginaire et réelle de l'expression (6.43) sont isolées. La présence de $\eta_1, \eta_2(\to 0)$ fait apparaître deux termes réels proportionnels aux fonctions de Dirac $\delta(\omega_2-\omega)$ et $\delta(\omega_1)$. Le premier Dirac égalise ω_2 et la fréquence ω. Le second terme s'annule car la fonction de Dirac impose $\omega_1 = 0$, et l'expression est un multiple de cette fréquence. La partie imaginaire est proportionnelle à $[\omega_1(\omega_2-\omega)]^{-1}$. La partie réelle des fonctions $R^{\pm}$ deviennent :

$$\mathrm{Re}\{R^{\pm}(0,\omega)\} = \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2}(\omega_2-\omega_1)\omega_2\left\{2\pi\delta(\omega_2-\omega)\mathrm{Re}[L^{\pm}(\omega_1,-\omega_2)] - \frac{\mathrm{Im}[L^{\pm}(\omega_1,-\omega_2)]}{(\omega_2-\omega)}\right\} \quad (6.46)$$

La dépendance avec la dissipation apparaît donc uniquement dans $G^K(\omega)$ qui est défini par l'équation (6.12) puisque l'annulation de la fréquence dans G^R fait disparaître la dépendance au couplage avec le bain. Nous pouvons donc écrire le troisième moment :

$$\langle q(t)\rangle_{(3)} = \frac{\alpha^3}{-M\Omega^2}\int_0^{\infty} d\omega \frac{2J(\omega)}{M^2(\omega^2-\Omega^2)^2+J^2(\omega)}\mathrm{Re}\Big\{\Big[(2N(\omega)+1)R^-(0,\omega) - R^+(0,\omega)\Big]\Big\} \quad (6.47)$$

avec la partie réelle de $R^{\pm}$ est l'expression (6.46). Dans un système sans dissipation, la fonction spectrale, $J(\omega)$ s'annule. Elle peut donc être remplacée par une combinaison de fonction de Dirac, $\delta(\omega+\Omega)+\delta(\omega-\Omega)$. L'intégration est alors facilement exécutable.

$$\langle q(t)\rangle_{(3)} = \frac{\alpha^3}{(2M)^2\Omega^3}[(2N(\Omega)+1)\mathrm{Re}\{R^-(0,\Omega)\} - \mathrm{Re}\{R^+(0,\Omega)\}] \quad (6.48)$$

Rappelons que les fonctions $R^{\pm}$ contiennent encore deux intégrales sur l'ensemble des fréquences.

Les calculs ultérieurs se faisant dans le régime ohmique, il suffit de remplacer $J(\omega)$ par son expression, $M\gamma\omega$, dans ce régime.

L'expression (6.47) montre une claire similitude avec la forme du second moment comme nous l'avons déjà précisé. Néanmoins des différences apparaissent. La diffusion présente dans le préfacteur qui est la fonction spectrale de l'oscillateur harmonique, $\chi''(\omega)$ et non son carré comme dans le cas des fluctuations. La disparition du couplage avec le bain n'a pas un effet aussi fort sur le troisième moment que sur le second, en effet lorsque ce couplage s'annule, l'expression ne diverge pas, mais permet (comme pour le second moment) d'effectuer l'intégration à la fréquence caractéristique de l'oscillateur LC.

6.4.2 Application

Comme pour le bruit, nous illustrons ces résultats pour le cas du point contact. Dans un premier temps, il faut connaître l'expression de la transformée de Fourier des corrélations de courant, $\langle\delta I(t_1)\delta I(t_2)\delta I(t_3)\rangle$, avec $\delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle$ l'écart entre le courant au temps t et sa valeur moyenne. Nous utilisons pour effectuer le calcul la définition du courant (équation 1.3). Les corrélateurs sont linéaires par parties et connaissent des singularités lorsque les fréquences ω_1, ω_2 ou $\omega_2-\omega_1$ est égale à la tension appliquée entre les deux réservoirs. Les expressions du troisième moment de ce système sont purement réelles, donc la partie imaginaire de $L^{\pm}$ est nulle.

Comme dans le cas du second moment, les courbes sont tracées comme des fonctions de Ω/eV, γ/Ω et T/Ω, avec T la température du circuit LC. La température du point contact est considérée

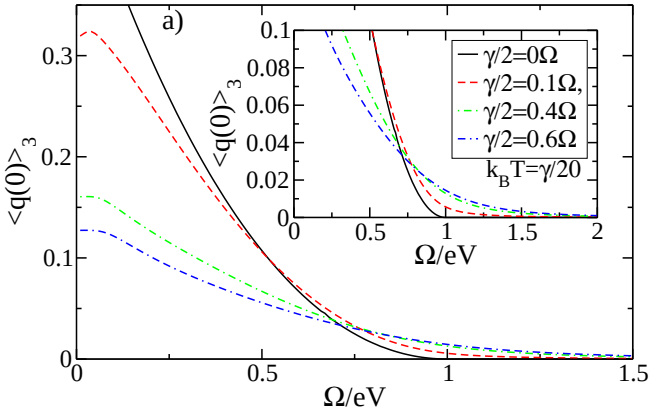

FIG. 6.5 – Mesure du troisième moment dans le $\gamma/2 < \Omega$ et à basse température ($T \ll \gamma/2$) pour différentes valeurs du paramètre de dissipation. Inset : zoom autour de $\Omega = eV$.

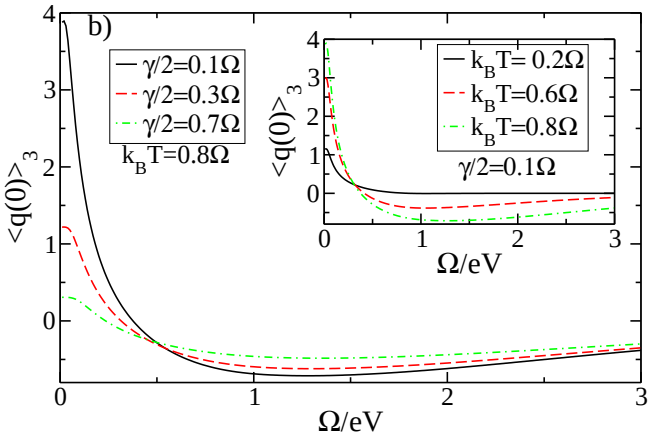

FIG. 6.6 – Mesure du troisième moment dans le régime $\gamma/2 < T$, à température constante et différentes valeurs de γ. Inset : γ est constant et T varie.

comme bien inférieure à la tension afin de conserver un régime dépendant uniquement de la tension dominant vis à vis de la température. Rappelons que la température du circuit mésoscopique et la température du circuit LC ne sont pas forcément égales et que nous les choisissons ici différentes. Quand nous parlerons d'une température, ce sera toujours celle du circuit LC.

En l'absence de dissipation, il n'existe pas de singularité à $eV = \omega$ mais la courbe s'annule à partir de ce point et a un comportement linéaire lorsque la fréquence s'annule (non-vu sur les courbes 6.5).

Le régime "under-damped" apparaît dans la figure 6.5, son effet est de réduire l'amplitude du troisième moment et de faire et d'empêcher l'annulation du troisième moment au point de $eV = \omega$, comme nous le voyons dans l'encadré. De surcroit, la charge moyenne sature lorsque ω tend vers zéro et attend un maximum dans cette région.

L'effet de la température est étudié dans la figure 6.6. Deux comportements prévalent, l'annulation de la courbe en $eV = \omega$ disparait avec la température et la largeur du maximum à $\omega = 0$ est réduite. Comme pour les fluctuations, ces corrélations deviennent négatives lorsque la dissipation décroît et la température augmente.

6.5 Conclusions

Nous avons apporté une description microscopique des effets de la dissipation sur la mesure du bruit et du troisième moment par un circuit résonant. Le paramètre adiabatique qui fait diverger les résultats de Lesovik et Loosen ce trouve être la largeur de résonance du circuit LC dissipatif. Lorsque cette largeur devient très petite, les second et troisième moments peuvent être calculés autour de la valeur de la fréquence de caractéristique du circuit de mesure. L'annulation de cette dernière fait bel et bien diverger les fluctuations de charge mais n'a pas d'effet notoire sur le troisième moment de la charge. La dissipation est essentielle mais lorsqu'elle est équivalente à la fréquence de caractéristique du circuit LC (Ω) l'information sur les moments est perdue.

Pour le second moment, la présence de dissipation fait disparaître la singularité à la fréquence définie par la tension. Dans le cas du troisième moment, il n'existe pas de singularité mais la courbe s'annule automatiquement pour $\omega = eV$ lorsque la dissipation s'annule. Lorsqu'elle est présente, l'annulation du troisième moment ne se fait plus en ce point, mais il décroît jusquà devenir nul. Lorsque la température est suffisamment élevée, le signal pour le second et le troisième moment devient négatif, cependant la présence de la dissipation a tendance à contrer l'effet de la température en élevant les courbes.

Le montage et les conditions de couplage sont réalisables à l'aide d'un couplage inductif "on-chip" à un SQUID agissant comme un oscillateur harmonique. La fréquence caractéristique pour un tel oscillateur[86], à une température de $25mK$, à été mesurée autour de $3GHz$ pour un facteur de qualité de $100 - 150$. Ce montage correspond à un régime "under-damped" discuté dans ce chapitre.

Maintenant que nous savons d'où provient le terme adiabatique, nous n'allons supposer que la dissipation est faible ($\gamma \ll \Omega$) parce qu'elle ne modifie pas la forme du résultat de façon drastique et nous allons nous intéresser au cas des corrélations croisées.

Chapitre 7

Correlations croisées

7.1 Pourquoi mesurer les corrélations croisées à fréquence finie ?

Dans un circuit à plusieurs terminaux, la caractérisation du transport implique la connaissance du bruit et des corrélations de bruit entre les différentes sorties. Il existe plusieurs situations en physique mésoscopique où ces mesures en fréquences sont requises [87, 88].

7.1.1 Inégalités de Bell

Le premier exemple est lorsque nous sondons la non-localité, qui est une propriété de la physique quantique, à l'aide des inégalités de Bell[89], nous sommes confrontés au fait que les corrélateurs de nombre de particules peuvent être exprimés en terme de corrélateurs de bruit.

En effet l'opérateur de nombre de particules qui traverse un fil s'exprime à l'aide du courant qui traverse ce même fil :

$$N_\alpha(\tau) = \int_0^\tau I_\alpha(t')dt' = \langle N_\alpha(\tau)\rangle + \delta N_\alpha(\tau) \tag{7.1}$$

Nous trouvons alors que le corrélateur de nombre de particules irréductible s'écrit à l'aide du bruit :

$$\langle \delta N_\alpha(\tau)\delta N_\beta(\tau)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{\alpha\beta} 4\sin(\omega\tau/2)/\omega^2 \tag{7.2}$$

Ainsi, ce n'est que dans le cadre de "larges" temps d'acquisition que les inégalités de Bell peuvent être formulées pour des fréquences nulles[89, 90]. En général, nous avons besoin de connaître les corrélations à fréquence finie.

Ainsi, dans le travail de Lebedev, Lesovik et Blanter[91] sur l'enchevêtrement, réalisé avec des sources d'électrons normales, la dynamique sur temps courts peut-être analysé.

7.1.2 Nanotubes de carbone

Les corrélations croisées à fréquence finie peuvent-être utilisées pour détecter des charges anormales dans les nanotubes de carbone. Une expérience de type Hanbury-Brown et Twiss fut proposée dans laquelle une pointe STM injecte des électrons dans un nanotube de carbone et où nous mesurons les corrélations de courant aux extrémités[73, 58].

Dans un premier temps, le cas d'un fil infini fut considéré. Des relations similaires à celle de Schottky sont dérivées pour le bruit d'auto-corrélation et de corrélations croisées à fréquence nulle à l'aide du modèle de Tomonaga-Luttinger :

$$S_{auto}(\omega = 0) = \frac{1 + (K_{c+})^2}{2} e|\langle I(x)\rangle| \tag{7.3}$$

$$S_{cross}(\omega = 0) = \frac{1 - (K_{c+})^2}{2} e|\langle I(x)\rangle| \tag{7.4}$$

Où $\langle I(x)\rangle$ est le courant de charge qui traverse le nanotube et K_{c+} est le paramètre d'interaction du liquide de Luttinger. S_{auto} est le bruit d'autocorrélation et S_{cross} celui des corrélations croisées. La valeur du paramètre, et donc de la charge effective, est une combinaison des deux bruits qui précèdent, $(K_{c+})^2 = S_{auto} - S_{cross}$.

Cependant l'ajout de contacts électriques aux deux extrémités fait disparaître la dépendance en K_{c+} dans les transformées de Fourier à fréquence nulle des corrélations croisées et d'auto-corrélation. Le second ordre de l'expension perturbative avec l'amplitude tunnel entre la pointe et le nanotube s'écrit $S_{auto}(\omega = 0) = e|\langle I(x)\rangle|$ et $S_{cross}(\omega = 0) = 0$. La référence [73] a montré qu'il faut considérer les transformées de Fourier à fréquence finie pour retrouver des corrélations de bruit non nulles, ainsi que les effets des interactions coulombiennes sur le système.

7.2 Modèle

Pour mesurer les corrélations croisées, nous nous inspirons de la proposition de Lesovik et Loosen[12] et la complétons en choisissant un oscillateur comportant deux inductances, L_1 et L_2 qui seront couplés aux deux sorties du circuit mésoscopique et un condensateur C sur lequel la charge est mesurée.

Les deux composants peuvent être montés soit en série, soit en parallèle, comme illustré sur la figure 7.1. Les inductances peuvent être câblées de deux façons. Elles "voient" les courants

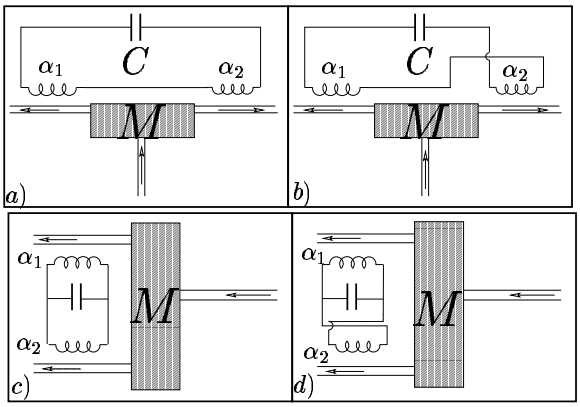

FIG. 7.1 – Pour mesurer les corrélations croisées il faut deux inductances et un condensateur qui sont montés soit en série (a et b) soit en parallèle (c et d). Le câblage permet d'ajouter des degrés de liberté puisque les inductances peuvent voir le curant sortant du circuit mésoscopique se déplacer dans le même sens (b et d) ou dans des sens opposés (a et c).

sortants avec soit des signes opposés, soit des signes identiques, ce qui ajoute un nouveau degré de liberté au montage.

L'équation du mouvement du montage est :

$$M\ddot{x}(t) = -D\dot{x}(t) - \alpha_1\dot{I}_1(t) \mp \alpha_2\dot{I}_2(t) \tag{7.5}$$

la masse effective est égale à l'inductance effective, c'est à dire $M = L_1 + L_2$ pour le circuit en série et $M = L_1L_2/(L_1 + L_2)$ le circuit en parallèle, $D = 1/C$ représentent le condensateur et x est la charge mesurée. La fréquence caractéristique du détecteur est $\Omega = \sqrt{M/D}$. $\alpha_{1(2)}$ est la constante de couplage au circuit mésoscopique. Les deux termes de couplage ont le même signe, lorsque les deux inductances induisent deux courants de même signe sinon ils ont des signes opposés.

$I_{1(2)}(t) = 1/l \int_{x_{1(2)}-l/2}^{x_{1(2)}+l/2} I(r,t)dr$, avec l la région d'induction, est le courant du circuit mésoscopique. Nous considérons que la différence de potentiel du circuit mésoscopique est la plus grande échelle d'énergie présente dans le montage. La moyenne spatiale du courant a été discutée dans les références [92] et [93] . L'opérateur de courant contient, au moins dans le cas ballistique, des oscillations rapides et lentes[4]. Les courants que nous mesurons sont spatialement indépendant, à cause de l'intégrale sur la longueur d'induction, l. Afin de négliger les oscillations de courte longueur d'onde, nous posons que l est très grande devant la longueur de Fermi, $l \gg \lambda_F$. Pour réduire les oscillations lentes à une constante dans le courant, nous supposons que $l \ll v_F/\omega$. Les oscillations spatiales en présence des interactions de Coulomb ont été étudiées par la référence [42]. Ils montrent que les interactions réduisent les longueurs d'onde de telles oscillations mais que l'amplitude est réduite par l'augmentation de la force d'interaction.

L'équation de Lagrange est déductible de l'équation du mouvement, ce qui permet d'obtenir le lagrangien.

$$L = \frac{M\dot{x}^2(t)}{2} - \frac{Dx^2(t)}{2} + \dot{x}(\alpha_1 I_1(t) \pm \alpha_2 I_2(t)) \tag{7.6}$$

L'hamiltonien se déduit grâce à l'identité $H = p\dot{q} - L$ avec l'impulsion $p = \partial L/\partial\dot{x}$ et la position est la charge x. La dérivée temporelle de la charge se déduit alors facilement de l'expression de l'impulsion. En remplaçant les dérivées temporelles de la charge, l'hamiltonien devient :

$$H = H_0 + H_{int} = \frac{p^2}{2M} + \frac{Dx^2}{2} + H_{int} \tag{7.7}$$

avec l'hamiltonien d'interaction entre le circuit et le détecteur, dépendant du courant du circuit mésoscopique et de l'impulsion du détecteur :

$$H_{int} = -p\frac{\alpha_1 I_1(t) \pm \alpha_2 I_2(t)}{M} + \frac{(\alpha_1 I_1(t) \pm \alpha_2 I_2(t))^2}{2M} \tag{7.8}$$

à $t = -\infty$, le circuit mésoscopique est complètement découplé de l'oscillateur. Au temps $t = 0$, les deux circuits sont couplés de façon adiabatique, et la charge du conducteur et ses fluctuations sont mesurées. La mesure est stationnaire.

La nième puissance de la charge, ou son moment d'ordre n, s'écrit :

$$\langle x^n(0)\rangle = Tr[e^{-\beta H_0}U^{-1}(0)x^n(0)U(0)] \tag{7.9}$$

β est l'inverse de la température du détecteur, la température du circuit mésoscopique n'est pas forcément la même. Avec l'opérateur d'évolution

$$U(0) = T\exp\Big(\int_{-\infty}^{0} dt'\frac{-i}{\hbar}H_{int}(t')\Big) \tag{7.10}$$

Nous voulons calculer perturbativement le moment d'ordre n de la charge. Nous développons alors en série l'opérateur d'évolution. Les deux premiers moments de la charge, la charge moyenne et la moyenne du carré de la charge deviennent

$$\langle x(0)\rangle = \langle x(0)\rangle_1 + \langle x(0)\rangle_3 + \dots \tag{7.11}$$
$$\langle x^2(0)\rangle = \langle x^2(0)\rangle_0 + \langle x^2(0)\rangle_2 + \dots \tag{7.12}$$

Les différents ordres de H_{int} sont liés au cumulant du courant, $\langle x(0)\rangle_1$ contient les informations à propos du courant moyen, $\langle x(0)^2\rangle_2$ des fluctuations de courants, $\langle x(0)\rangle_3$ du moment d'ordre 3, ou asymétrie, et ainsi de suite. Le moment qui nous interesse ici est le second, $\langle x(0)^2\rangle$.

La charge s'écrit grâce aux opérateurs de création et d'annihilation, $a^\dagger$ et a, de l'oscillateur. L'ordre 0 des fluctuations de charge ne dépend pas du courant, il s'écrit :

$$\langle x^2(0)\rangle_0 = \frac{\hbar}{2M\Omega}[N(\Omega) + 1/2] \tag{7.13}$$

$N(\Omega) = (e^{\beta\hbar\Omega} - 1)^{-1}$ est le distribution de Bose-Einstein du circuit de détection. Le premier terme n'apportant aucune information sur le circuit mesuré, nous nous intéressons au second ordre non nul :

$$\begin{aligned}\langle x^2(0)\rangle_{2\pm} =& \Big\langle \frac{1}{2M}\Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)^2 \int_{-\infty}^{0} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \\ &\times \Big[[x^2(0), p(t_1)(\alpha_1 I_1(t_1) \pm \alpha_2 I_2(t_1))], p(t_2)(\alpha_1 I_1(t_2) \pm \alpha_2 I_2(t_2))\Big]\Big\rangle \\ &- \frac{1}{2M}\Big(\frac{-i}{\hbar}\Big)^2 \int_{-\infty}^{0} dt\{\langle I^2(t)\rangle\langle x^2(0)\rangle - \langle x^2(0)\rangle\langle I^2(t)\rangle\}\end{aligned} \tag{7.14}$$

Rappelons que le signe "$\pm$" devant les constantes de couplage précise le câblage que nous avons choisi. Nous avons ajouté cet ordre de grandeur dans l'indice. Le calcul des fluctuations de charge donne quatre termes : deux termes d'auto-corrélations, multiples de α_1^2 et α_2^2, qui décrivent les corrélations de la sortie sur elle-même. Deux termes associés aux corrélations entre les sorties, proportionnels à $\pm\alpha_1\alpha_2$, sont également présents. Ce sont ces deux derniers termes qui décrivent les corrélations croisées. Le dernier terme présent dans l'équation (7.14) s'annule.

Nous souhaitons isoler les corrélations croisées. En remarquant que les deux géométries donnent des corrélations croisées avec des signes opposés, nous proposons de faire deux mesures. Une première mesure avec le circuit de la figure 7.1a) (c) pour le circuit en parallèle), où les fluctuations $\langle x^2(0)\rangle_{2+}$ sont récupérées, puis une seconde mesure avec le circuit 7.1b) (d) pour le circuit en parallèle), afin d'obtenir $\langle x^2(0)\rangle_{2-}$. Finalement, les deux résultats sont soustraits pour annuler les termes d'autocorrélation :

$$\langle x^2(0)\rangle_2 = \frac{1}{2}(\langle x^2(0)\rangle_{2+} - \langle x^2(0)\rangle_{2-}) \tag{7.15}$$

Les corrélations croisées sont donc multiples de $\alpha_1\alpha_2$ et font apparaître des commutateurs imbriqués dépendant de la charge et de l'impulsion de l'oscillateur et du courant du circuit mésoscopique.

7.3 Fluctuations de charge et corrélation de courant

Afin de réaliser le calcul des fluctuations de charges, nous écrivons la charge et ses fluctuations à l'aide des variables de l'oscillateur LC :

$$x(t) = \Big(\frac{\hbar}{2M\Omega}\Big)^{1/2}(ae^{-i\Omega t} + a^\dagger e^{i\Omega t}) \tag{7.16}$$

$$p(t) = i\Big(\frac{\hbar M\Omega}{2}\Big)^{1/2}(a^\dagger e^{i\Omega t} - ae^{-i\Omega t}) \tag{7.17}$$

avec a ($a^\dagger$) l'opérateur de destruction (création) des bosons de l'oscillateur. Le nombre de particules $N(\Omega) = \langle aa^\dagger\rangle$ est la distribution de Bose-Einstein de l'oscillateur.

Le premier commutateur des "commutateurs imbriqués" est développé afin de faire uniquement apparaître des commutateurs d'opérateurs de destructions (créations) du circuit LC. L'évaluation des ces commutateurs donne :

$$[x^2(0), p(t_1)I_i(t_1)] = \frac{2i\hbar}{M\Omega}\Big(\frac{\hbar M\Omega}{2}\Big)^{1/2} 4i\cos\Omega t_1(a + a^\dagger)I_i(t_1) \tag{7.18}$$

Le courant commute avec la charge et l'impulsion, donc il est mis en préfacteur.

Nous pouvons maintenant évaluer la valeur moyenne du commutateur imbriqué. Les courants présents ne commutant pas, nous retrouvons deux termes à moyenner :

$$\begin{aligned}\Big\langle\Big[[x^2(0), p(t_1)I_i(t_1)], p(t_2)I_j(t_2)\Big]\Big\rangle = &-\hbar^2\cos(\Omega t_1)\Big\{\langle I_i(t_1)I_j(t_2)\rangle\big[(N(\Omega)+1)e^{i\Omega t_2} - N(\Omega)e^{-i\Omega t_2}\big] \\ &- \langle I_j(t_2)I_i(t_1)\rangle\big[N(\Omega)e^{i\Omega t_2} - (N(\Omega)+1)e^{-i\Omega t_2}\big]\Big\}\end{aligned} \tag{7.19}$$

avec $j = 1, 2$ et $j \neq i$.

La substitution de l'expression (7.19) dans celle des fluctuations de charge impose l'apparition des quatre corrélateurs de courant :

$$\begin{aligned}\langle x^2(0)\rangle_2 = &-\frac{\alpha_1\alpha_2}{(4M)^2}\int_{-\infty}^{0} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\eta(t_1+t_2)} \\ &\times\Big\{(\langle I_1(t_1)I_2(t_2)\rangle + \langle I_2(t_1)I_1(t_2)\rangle) \\ &[(N(\Omega)+1)(e^{i\Omega(t_1+t_2)} + e^{i\Omega(t_2-t_1)}) + N(\Omega)(e^{-i\Omega(t_2-t_1)} + e^{-i\Omega(t_2+t_1)})] \\ &-(\langle I_2(t_2)I_1(t_1)\rangle + \langle I_1(t_2)I_2(t_1)\rangle) \\ &[N(\Omega)(e^{i\Omega(t_1+t_2)} + e^{i\Omega(t_2-t_1)}) + (N(\Omega)+1)(e^{-i\Omega(t_2-t_1)} + e^{-i\Omega(t_2+t_1)})]\Big\}\end{aligned} \tag{7.20}$$

Dans cette expression, nous avons deux temps indépendants, t_1 et t_2. L'invariance par translation, permet d'effectuer le changement de variable suivant : $\{t_1, t_2\} \to \{t = t_1 - t_2 > 0, T = t_1 + t_2\}$ et les fluctuations peuvent être écrites plus simplement :

$$\begin{aligned}\langle x^2(0)\rangle_2 = &\frac{\alpha_1\alpha_2}{(4M)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{0} dT e^{\eta T}\Big\{(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega T\mathrm{sign}(t)}) \\ &[(N(\Omega)+1)(\langle I_2(0)I_1(t)\rangle + \langle I_1(0)I_2(t)\rangle) - N(\Omega)(\langle I_1(t)I_2(0)\rangle + \langle I_2(t)I_1(0)\rangle)]\end{aligned} \tag{7.21}$$

Les fluctuations font finalement apparaître quatre fonctions de corrélations de courants. Nous définissons ces corrélateurs à la manière de [12, 79] dans l'espace de Fourier :

$$S_{ij}^{+}(\omega) = \int \frac{dt}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \langle I_i(0) I_j(t) \rangle \tag{7.22}$$

$$S_{ij}^{-}(\omega) = \int \frac{dt}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \langle I_i(t) I_j(0) \rangle \tag{7.23}$$

L'invariance par translation nous permet d'écrire $\langle I_i(\omega_1) I_j(\omega_2) \rangle = \delta(\omega_1 - \omega_2) S_{ij}^{+}(\omega_2)$ avec $I_i(\omega)$ est la transformation de Fourier du courant exprimé dans l'espace direct, $I_i(t)$. La même propriété permet de relier les deux densités spectrales : $S_{ij}^{-}(\omega) = S_{ij}^{+}(-\omega)$. Lorsque $i = j$, nous retrouvons les autocorrélateurs de courant qui décrivent un taux d'émission ou d'absorption d'électrons par le circuit mésoscopique.

A partir de maintenant les intégrales sont facilement calculables. L'intégration sur le temps T nous donne, $\int_{-\infty}^{0} e^{(\eta + i\omega\epsilon)T} = (\eta - i\omega\epsilon)^{-1}$ avec ϵ est soit 0 soit sign(t). L'intégration sur le second temps, t donne deux contributions également : une fonction δ de Dirac qui impose que la fréquence de mesure est la fréquence caractéristique du circuit LC. La seconde contribution est un produit de parties principales qui s'annule.

$$\langle x^2(0) \rangle_2 = \frac{\pi \alpha_1 \alpha_2}{2\eta (2M)^2} [(N(\Omega) + 1)(S_{12}^{+}(\Omega) + S_{21}^{+}(\Omega)) - N(\Omega)(S_{12}^{-}(\Omega) + S_{21}^{-}(\Omega))] \tag{7.24}$$

avec la constante adiabatique $\eta \to 0$. Nous montrons que les fluctuations, $\langle x^2(0) \rangle_2$ sont réelles en utilisant l'identité : $[S_{ij}^{\pm}(\omega)]^* = S_{ji}^{\pm}(\omega)$:

$$\langle x^2(0) \rangle_2 = \frac{\pi \alpha_1 \alpha_2}{\eta (2M)^2} Re[(N(\Omega) + 1) S_{12}^{+}(\Omega) - N(\Omega) S_{12}^{-}(\Omega)] \tag{7.25}$$

Le montage mesure effectivement la partie réelle des corrélations croisées. Le résultat que nous avons trouvé ici est similaire à celui de Lesovik et Loosen pour la mesure du bruit. Notons que le résultat dépend du paramètre de couplage adiabatique, η. Afin d'éliminer cette dépendance, nous pouvons généraliser ce calcul à une distribution d'oscillateurs centrés en Ω, dont la a démonstration se trouve dans l'appendice B. La largeur finie du circuit LC a naturellement une origine physique, le circuit LC à des éléments dissipatifs (dus à la conductivité finie des fils et à l'entourage électronique du circuit), mais nous traiterons ce mécanisme dans le chapitre suivant.

7.4 Mesure avec deux circuits LC

Nous allons décrire un montage qui utilise deux circuits de mesures séparés (figure 7.2). Chaque circuit comporte un condensateur (C_1 et C_2) et une inductance (L_1 et L_2) qui est couplée de façon inductive, avec les constantes de couplage α_1 ou α_2, aux sorties du circuit mésoscopique.

La charge de chaque circuit est mesuré au niveau de la condensateur et est décrit par une équation du mouvement similaire à celle écrite ci-dessus pour un seul circuit

$$M_{1(2)} \ddot{x}_{1(2)} = -\frac{x_{1(2)}}{D_{1(2)}} - \alpha_{1(2)} \dot{I}_{1(2)} \tag{7.26}$$

où la "masse" est l'inductance, $M_{1(2)} = L_{1(2)}$, le condensateur apparaît dans $D_{1(2)}$ et le courant reste identique à la définition de la section précédente. Deux charges $x_{1(2)}$ sont mesurées, pour

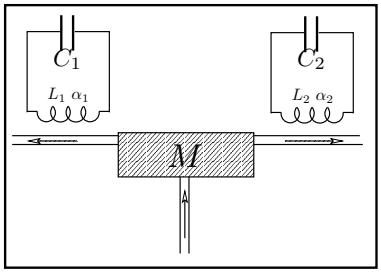

FIG. 7.2 – Le circuit mésoscopique est couplé à deux circuits LC indépendants. On mesure la charge au niveau des deux condensateurs.

chaque circuit de mesure qui correspondra à la détection du courant dans chacune des branches de l'échantillon. Les fréquences caractéristiques des circuits s'écrivent $\Omega_{1(2)} = \sqrt{1/C_{1(2)}L_{1(2)}}$.

Dans la représentation d'interaction, la seconde puissance du corrélateur des deux charges donne :

$$\langle x_1(0)x_2(0)\rangle = Tr[e^{-\beta(H_{0,1}+H_{0,2})}U^{-1}(0)x_1(0)x_2(0)U(0)] \tag{7.27}$$

Contrairement à la section précédente, nous ne calculons pas une observable qui correspondrait à la mesure de deux charges. Le calcul perturbatif du nième moment est réalisé à l'aide du développement en série du terme d'évolution $U(0)$ en puissance de $H_{int,1(2)}$. Pour la charge moyenne et le carré de la charge, nous obtenons :

$$\langle x_{1(2)}(0)\rangle = \langle x_{1(2)}(0)\rangle_1 + \langle x_{1(2)}(0)\rangle_3 + \dots \tag{7.28}$$

$$\langle x_1(0)x_2(0)\rangle = \langle x_1(0)x_2(0)\rangle_0 + \langle x_1(0)x_2(0)\rangle_2 + \dots \tag{7.29}$$

Les différents ordres de $H_{int,1(2)}$ sont liés au cumulant du courant, $\langle x_{1(2)}(0)\rangle_1$ qui contient les informations à propos du courant moyen, $\langle x_1(0)x_2(0)\rangle_2$ des fluctuations de courants, $\langle x_{1(2)}(0)\rangle_3$ du moment d'ordre 3, ou l'asymétrie, et ainsi de suite. Le moment qui nous intéresse ici est le second, $\langle x_1(0)x_2(0)\rangle$.

La contribution d'ordre 0 ne dépend pas du courant du circuit mésoscopique. Grâce aux propriétés des oscillateurs, cet ordre correspond au carré de la moyenne d'une charge. Le premier ordre des fluctuations de courant est nulle. Nous nous intéressons au premier terme non nul, qui dépend du carré de courant :

$$\begin{aligned}\langle x_1(0)x_2(0)\rangle_2 =& \Big\langle \frac{1}{2}\Big(\frac{-i}{\hbar M}\Big)^2 \int_{-\infty}^{0} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \\ & \Big[[x_1(0)x_2(0), p_1(t_1)\alpha_1 I_1(t_1) + p_2(t_1)\alpha_2 I_2(t_1)], \\ & p_1(t_2)\alpha_1 I_1(t_2) + p_2(t_2)\alpha_2 I_2(t_2)\Big]\Big\rangle \\ & - \frac{1}{2}\Big(\frac{-i}{\hbar 2M}\Big)^2 \int_{-\infty}^{0} dt \langle(\alpha_1 I_1(t))^2 + (\alpha_2 I_2(t))^2\rangle\langle x_1(0)x_2(0)\rangle \\ & - \langle x_1(0)x_2(0)\rangle\langle(\alpha_1 I_1(t))^2 + (\alpha_2 I_2(t))^2\rangle\end{aligned} \tag{7.30}$$

Le calcul des fluctuations de charge donne quatre termes : deux termes d'auto-corrélations, multiples de α_1^2 et α_2^2, qui décrivent les corrélations d'une des sorties sur elle-même. Deux termes associés aux corrélations entre les sorties, proportionnelles à $\alpha_1\alpha_2$, sont également présents. Ce

sont ces deux derniers termes qui décrivent les corrélations croisées. Le dernier terme présent dans l'équation (7.30) s'annule.

Pour les termes d'autocorrélations, nous faisons la moyenne d'un nombre impair d'opérateurs de création et de destruction pour chaque circuit. L'autocorrélation est donc nulle.

En choisissant le cas particulier où les deux circuits ont exactement la même fréquence caractéristique ($\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$), les fluctuations de charges correspondent exactement au résultat trouvé dans le cadre d'un montage avec un seul condensateur et deux inductances[93]. En pratique, il est très difficile de construire deux circuits avec exactement la même fréquence caractéristique. Donc dans le cas où les fréquences sont différentes, les fluctuations de charge ont la forme :

$$\begin{aligned}\langle x_1(0)x_2(0)\rangle = &-\frac{\alpha_1\alpha_2}{2}\int_0^{+\infty} dt\Big\{\\ &\times\left(\frac{e^{it(\omega_1-\omega_2)/2}}{\eta+i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}+\frac{e^{-it(\omega_2+\omega_1)/2}}{\eta+i\frac{-\omega_1+\omega_2}{2}}\right)[(N(\omega_2)+1)\langle I_1(t)I_2(0)\rangle - N(\omega_2)\langle I_2(0)I_1(t)\rangle]\\ &+\left(\frac{e^{it(\omega_2+\omega_1)/2}}{\eta+i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}+\frac{e^{it(\omega_2-\omega_1)/2}}{\eta-i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}\right)[N(\omega_2)\langle I_1(t)I_2(0)\rangle - (N(\omega_2)+1)\langle I_2(0)I_1(t)\rangle]\\ &+\left(\frac{e^{it(\omega_2-\omega_1)/2}}{\eta+i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}+\frac{e^{-it(\omega_1+\omega_2)/2}}{\eta+i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}\right)[(N(\omega_1)+1)\langle I_2(t)I_1(0)\rangle - N(\omega_1)\langle I_1(0)I_2(t)\rangle]\\ &+\left(\frac{e^{it(\omega_1+\omega_2)/2}}{\eta+i\frac{-\omega_1+\omega_2}{2}}+\frac{e^{it(\omega_1-\omega_2)/2}}{\eta+i\frac{-\omega_1-\omega_2}{2}}\right)[N(\omega_1)\langle I_2(t)I_1(0)\rangle - (N(\omega_1)+1)\langle I_1(0)I_2(t)\rangle]\Big\}\end{aligned} \tag{7.31}$$

Ce résultat contient aussi bien des fonctions delta de Dirac que des parties principales (non désirées) : strictement parlant les fluctuations de charges ne se simplifient pas. Cependant les mesures ont toujours une largeur de bande finie qui pourrait amener à un résultat proche du cas $\Omega_1 = \Omega_2$.

7.5 Exemple : jonction Y normale

7.5.1 Corrélations croisées

Nous allons nous intéresser au bruit mesuré à l'aide d'un circuit composé d'un condensateur et de deux inductances comme proposé initialement. Il sera testé à l'aide d'un système comportant trois terminaux, également appelé "jonction Y" (figure 7.3). Les électrons sont injectés dans le terminal 1 dont le potentiel chimique est plus que ceux des terminaux 2 et 3. Les corrélations de bruit sont alors mesurées.

Ceci correspond au montage de l'analogue fermionique de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss[94] qui fut proposé[37] et mesuré[95]. Sans perte de généralité, nous allons considérer les trois différences de tension, $\mu_{ij} = \mu_i - \mu_j$, $(i, j = 1, 2, 3)$ qui sont choisies telles que $\mu_{13} > \mu_{12}, \mu_{23}$.

A l'aide de la théorie de diffusion, nous pouvons calculer l'expression générale pour le bruit à fréquence finie non-symétrisé [4].

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta}(\omega) =&\frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_{\gamma\delta}\int dE\ (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\alpha\delta} - s^\dagger_{\alpha\gamma}(E)s_{\alpha\gamma}(E-\hbar\omega))(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\alpha\gamma} - s^\dagger_{\alpha\gamma}(E-\hbar\omega)s_{\alpha\gamma}(E))\\ &\times f_\gamma(E)(1-f_\delta(E-\hbar\omega))\end{aligned} \tag{7.32}$$

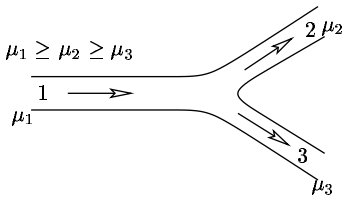

FIG. 7.3 – Dans la jonction Y normale, les électrons sont injectés dans la branche 1 et ressortent dans les branches 2 et 3. Les potentiels chimiques sont ordonnés, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu 3$ et impose l'ordre des différences de tension entre les branches, $\mu_{13} > \mu_{12}, \mu_{23}$ avec $\mu_{ij} = \mu_i - \mu_j$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Les lettres grecques représentent les terminaux et $s_{\alpha\gamma}$ est l'amplitude de diffusion des électrons qui viennent de γ et arrivent en α. $f_\gamma(E)$ est la distribution de Dirac associée au terminal γ dont le potentiel chimique est μ_γ. Dans ce qui suit nous allons considérer que la température (de la jonction) est bien plus petite que les tensions appliquées, et nous allons négliger les dépendances énergétiques de la matrice de diffusion. De plus, nous allons négliger les termes oscillants $\pm 2k_F$, ce qui assure que les régions, sur lesquelles sont mesurées le bruit, sont bien plus grandes que la longueur d'onde de Fermi, $l \gg \lambda_F$.

Pour $\mu_{12} > \mu_{23}$ et à des fréquences négatives, les corrélations entre les terminaux 2 et 3 donnent :

$$\begin{aligned} S_{23}(\omega) &= -\frac{e^2}{2\pi}\omega(T_{21}T_{13} - (2 - R_2 - R_3)T_{23}) \\ &\quad -\frac{e^2}{2\pi\hbar}\begin{cases} -\hbar\omega(2T_{13}R_3 + 2T_{12}R_2 + 2T_{23}R_2) & \text{si } \hbar\omega < -\mu_{13} \\ -\hbar\omega(2T_{12}R_2 + 2T_{23}R_2) + T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < -\mu_{12} \\ -\hbar\omega(2T_{23}R_2) + T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) + T_{12}R_2(\mu_{12} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < -\mu_{23} \\ T_{23}R_2(\mu_{23} - \hbar\omega) + T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) + T_{12}R_2(\mu_{12} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{7.33}$$

Et les fréquences positives :

$$S_{23}(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi\hbar}\begin{cases} T_{23}R_2(\mu_{23} - \hbar\omega) + T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) + T_{12}R_2(\mu_{12} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < \mu_{23} \\ T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) + T_{12}R_2(\mu_{12} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < \mu_{12} \\ T_{13}R_3(\mu_{13} - \hbar\omega) & \text{si } \hbar\omega < \mu_{13} \\ 0 & \text{si } \hbar\omega > \mu_{13} \end{cases} \tag{7.34}$$

Où $R_\alpha = s^\dagger_{\alpha\alpha}s_{\alpha\alpha}$ est la probabilité de réflexion du fil α et $T_{\alpha\beta} = s^\dagger_{\alpha\beta}s_{\alpha\beta}$ est la probabilité de transmission de α vers β. A cause de la symétrie des probabilité de transmission nous avons ici, $S^\pm_{23} = S^\pm_{32}$ [12, 79], les corrélations croisées sont donc purement réelles pour ce système. Les deux fonctions de corrélations ne sont, en réalité, physiquement valables que pour des fréquences positives. Nous choisissons donc, $S^+_{23}(\omega)$ est égal aux corrélations croisées sur les fréquences positives et $S^-_{23}(\omega)$ sur les fréquences négatives.

Comme nous nous y attendions, la dépendance en fréquence est linéaire par partie, avec des dérivées singulières lorsque la fréquence égalise une des différences de potentiel. A fréquence nulle, les corrélations croisées donnent :

$$S^+_{23}(\omega = 0) = -\frac{e}{h}(T_{23}R_2\mu_{23} + T_{13}R_3\mu_{13} + T_{12}R_2\mu_{12}) \tag{7.35}$$

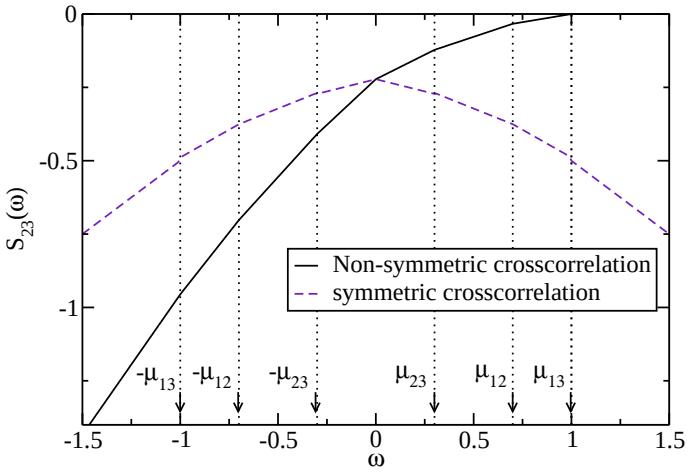

FIG. 7.4 – Comparaison entre les corrélations croisées symétrisées et non-symétrisées en fonction de la fréquence dans les unités $e^2\mu_{13}/2\pi\hbar$. Les singularités apparaissent pour $\hbar\omega = 0, \pm\mu_{23}, \pm\mu_{12} \pm \mu_{13}$. Les courbes sont tracées pour $\mu_{12} = 0.7\mu_{13}$ et $\mu_{23} = 0.3\mu_{13}$.

Les corrélations croisées sont négatives et recouvrent le résultat de la référence [12].

D'autre part les corrélations symétrisées sont définies par :

$$S_{23}^S = \int d\omega e^{i\omega t} \langle \Delta I_2(t)\Delta I_3(0) + \Delta I_3(0)\Delta I_2(t)\rangle \tag{7.36}$$

avec $\Delta I(t) = I(t) - \langle I(t)\rangle$. Quand $\mu_{12} > \mu_{23}$ et la température est nulle, nous obtenons :

$$S_{23}^S(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi}|\omega|(T_{21}T_{13} - (2 - R_2 - R_3)T_{23}) \tag{7.37}$$

$$-\frac{e^2}{2\pi\hbar}\begin{cases} T_{23}R_2\mu_23 + T_{12}R_2\mu_{12} + T_{13}R_3\mu_{13} & \text{si } |\hbar\omega| < \mu_{23} \\ |\hbar\omega|T_{23}R_2 + T_{12}R_2\mu_{12} + T_{13}R_3\mu_{13} & \text{si } \mu_{23} < |\hbar\omega| < \mu_{12} \\ |\hbar\omega|(T_{23}R_2 + T_{12}R_2) + T_{13}R_3\mu_{13} & \text{si } \mu_{12} < |\hbar\omega| < \mu_{13} \\ |\hbar\omega|(T_{23}R_2 + T_{12}R_2 + T_{13}R_3) & \text{si } \mu_{13} < |\hbar\omega| \end{cases} \tag{7.38}$$

La dépendance en fréquence de S_{23}^S est symétrique en ω. Les corrélations croisées non-symétriques ont la même valeur que leurs homologues symétrisés à la fréquence nulle. Le comportement des corrélations non-symétrisées est très différent de son équivalent symétrisés bien que les singularités apparaissent aux mêmes valeurs de la fréquence (figure 7.4). Les deux corrélations, symétriques et non-symétriques, sont négatives mais seule la deuxième expression est monotonement croissante jusqu'à égaler zéro.

Les corrélations mesurées sont des fonctions de la température du circuit qui, rappelons-le, n'est par forcément égale à la température du circuit mésoscopique. Grâce aux symétries des probabilités de transmission, il n'est plus nécessaire de préciser que c'est la partie réelle des fluctuations de charges qui apparaît, et les corrélations croisées ressemblent alors au bruit d'autocorrélation :

$$\langle x^2(0)\rangle_2 = \frac{\pi\alpha_1\alpha_2}{\eta(2M)^2}[(N(\Omega)+1)S_{23}^+(\Omega) - N(\Omega)\Delta S_{23}(\Omega)] \tag{7.39}$$

Avec $\Delta S_{23}(\Omega) = S^{+}_{23}(\Omega) - S^{-}_{23}(\Omega)$ est la différence des deux corrélateurs non-symétrisés, qui est multiplié à la distribution de Bose $N(\Omega)$.

$$\Delta S_{23}(\omega) = -\frac{e^2}{2\pi}\omega\big(T_{12}T_{13} - (2 - R_2 - R_3)T_{23} - 2T_{13}R_3 - 2T_{12}R_2 - 2T_{23}R_2 \tag{7.40}$$

La différence est linéaire avec une pente positive, elle n'a pas de singularité.

7.5.2 Résultats

Dans un premier temps, pour plus de simplicité, nous choisissons que les terminaux 2 et 3 ont le même potentiel chir ont suffisamment

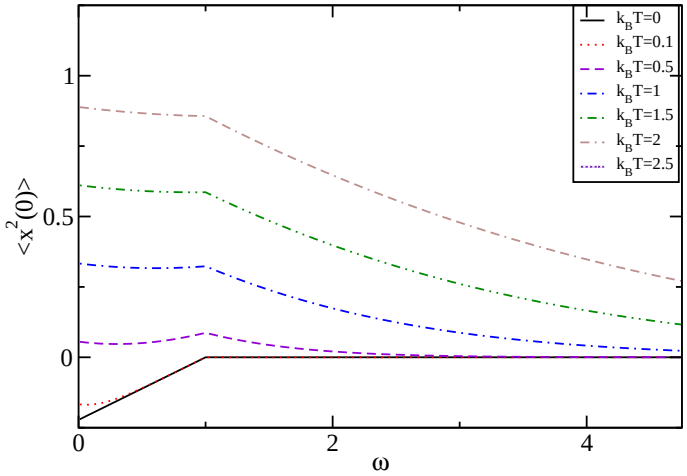

FIG. 7.5 – Les fluctuations de charge mesurées sont fonction de la fréquence, en unité de μ_{13}, pour différentes températures k_bT. La fréquence et les tensions sont en unité de μ_{13}.

élevées, $k_BT \gtrsim \mu_{13}$, la distribution de Bose est alors très large, $N(\omega) \sim k_BT \gg 1$ (figure 7.5). Le terme proportionnel à la différence de corrélation, $N(\omega)\Delta S_{23}$ est donc bien plus grande que $|S^{+}_{23}|$, qui devient négligeable. Lorsque la température augmente, le terme positif domine et les fluctuations de charge deviennent alors également positives. Le principal message de cette configuration est que lorsque la température devient trop importante, l'interprétation de la mesure pourrait être faussée : nous observons des corrélations croisées positives pour une fourchette fermionique normale alors que le système devrait avoir un comportement "anti-bunching". Néanmoins, nous observons une singularité qui apparaît autour de $\omega = \mu_{13}$. En effet si la fréquence est supérieure à la tension appliquée, μ_{13}, seul le terme $N(\omega)\Delta S_{23}$ subsiste, S^{+}_{13} est nul, alors que pour des fréquences inférieures à μ_{13}, S^{+}_{23}, qui est non nulle, abaisse la valeur des fluctuations.

Pour les basses températures (figure de gauche de 7.6), $k_BT \ll \mu_{13}$, $|S^{+}_{23}|$ est dominant vis à vis de $N(\omega)\Delta S_{23}$, car la distribution de Bose est cette fois exponentiellement petite avec la température, qui diminue, donc le second terme devient négligeable. Pour compléter les résultats ci dessus, nous faisons le même calcul avec tous les potentiels chimiques différents mais qui satisfont la relation $\mu_{13} > \mu_{12} > \mu_{23} > 0$ (figure de droite de 7.6). Nous remarquons qu'imposer une différence de potentiel non nulle, entre les terminaux 2 et 3, diminue la contribution de S^{+}_{23} qui devient moins dominante même pour de faibles températures. En général, à basse température, les fluctuations de charges restent négatives, et les singularités apparaissent à des fréquences égales à

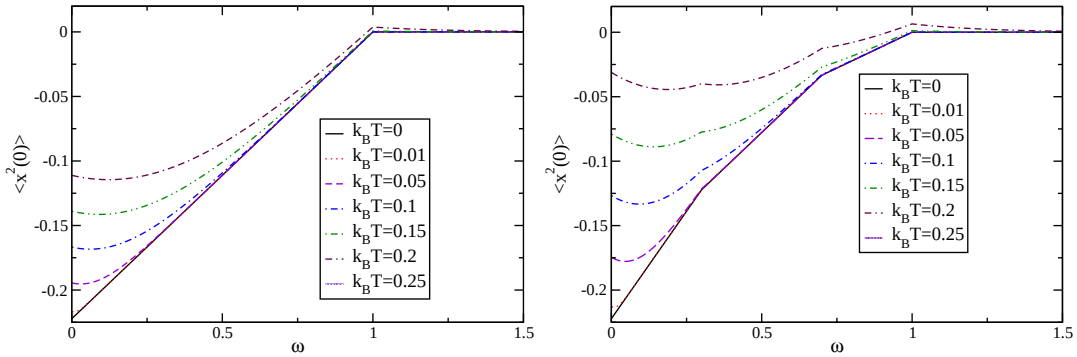

FIG. 7.6 – A gauche : idem que pour la figure 7.5, avec des plages de fréquences et des températures plus basses. A droite : Idem que pour la figure 7.5, avec des plages de fréquences et des températures plus basses. $\mu_{12} = 0.7\mu_{13}$ et $\mu_{23} = 0.3\mu_{13}$ ont été choisi.

μ_{13}, μ_{23}, μ_{12}. Les fluctuations deviennent également proportionnelles à S_{23}^{+} pour une température qui s'annule.

Pour résumer, l'effet de l'augmentation de la température est de rendre positive les fluctuations de charge alors que lorsqu'elle s'annule, les fluctuations ont tendance à égaliser S_{23}^{+}. Quand la différence entre les potentiels chimiques des terminaux 2 et 3 augmente, l'effet de la température est accrue, c'est à dire que à basse température l'amplitude de $N(\omega)\Delta S_{23}$ est plus grande et l'effet de S_{23}^{+} diminue pour les hautes températures.

Il faut s'assurer que le circuit de mesure soit à "basse" température pour s'assurer de mesurer des corrélations négatives pour des fréquences inférieures à la tension.

Conclusions

Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'approche de Landauer à l'aide du formalisme de diffusion en seconde quantification. Ce formalisme permet de calculer le courant moyen et de retrouver la formule de Landauer de quantification de la conductance. Dans un deux temps, il permet d'établir le bruit et de retrouver une formule similaire à celle de Schottky, le bruit est proportionnel au courant avec une charge effective, mais un facteur de réduction apparaît, il est appelé facteur de Fano.

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'injection de quasiparticules dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté une revue de la théorie des états de bords dans l'effet Hall quantique fractionnaire et avons montré, grâce au calcul du bruit, que les porteurs de charge présents sur ces états de bords sont des fractions de l'électron. Ce chapitre a fait un rappel de la théorie des liquides de Luttinger, qui permet de traiter le problème des électrons en interaction dans un système unidimensionnel. La technique de bosonisation nous a permis de rendre quadratique l'hamiltonien qui fut alors écrit sous forme de champs bosoniques, qui représentent les excitations électron-trou. Un liquide de Luttinger chiral constitue un bon modèle pour les états de bord de l'effet Hall fractionnaire.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié les effets d'une perturbation tunnel dans l'effet Hall fractionnaire. Le formalisme Keldysh a permis d'appliquer la théorie des perturbations. Le calcul du bruit et du courant moyen nous a permis de retrouver la relation de Schottky et d'isoler la charge effective qui est soumise à l'effet tunnel.

Le quatrième chapitre est un chapitre central de cette partie puisque nous avons évalué la charge et les fluctuations de charge lorsqu'un électron est injecté dans un état de bord de l'effet Hall fractionnaire. Le but a été de minimiser les fluctuations afin de contrôler la charge injectée. Dans un premier temps, nous avons fait un calcul perturbatif. Lorsque les deux conducteurs sont des systèmes d'électrons sans interactions (des métaux normaux), la divergence trouvée par Levitov a réapparu pour les fluctuations de charge sauf lorsque le flux ($\phi = \int V dt$) est un "entier" du quantum de flux, $\phi = n\phi_0$. Par contre, les interactions entre électrons des liquides de Luttinger chiraux préviennent cette divergence puisque les fluctuations de charge convergent quelque soit le flux. D'autre part, l'approximation adiabatique nous a permis d'établir une expression pour la charge moyenne injectée et les fluctuations de charge. Pour le cas particulier de l'effet Hall quantique de fraction de remplissage $\nu = 1/3$, un résultat non perturbatif a pu être calculé grâce aux techniques de refermionisation et en calculant dans une représentation duale (mais non physique) du système qui admet une impureté entre deux bords d'un liquide de Hall de fraction 1/2.

Dans la deuxième partie, nous avons voulu évaluer les corrélations de courant à haute fréquences. Nous nous sommes inspirés cette fois du travail de Lesovik et Loosen qui ont couplé un circuit oscillant LC à un circuit mésoscopique à l'aide d'une inductance. Une mesure répétitive de la charge

aux bornes du condensateur a été faite pour obtenir une largeur dans l'histogramme de la charge. Les fluctuations de charge ainsi obtenues dépendent d'une combinaison de bruits non-symétrisés, S_+ et S_-, qui sont décrits comme l'émission ou l'absorption de photons par le système. La relation obtenue pour le bruit mesuré diverge lorsque le paramètre adiabatique utilisé pour la théorie des perturbation est mis à zéro. L'ajout de la dissipation, due aux résistances des composants et des fils, au circuit LC a permis de montrer que le paramètre adiabatique représente la largeur de résonance du circuit de mesure. Lorsque cette largeur s'annule les équations divergent à nouveau. Nous avons identifié quelle combinaison de trois courants le circuit LC est capable de mesurer en vue de caractériser le troisième moment. Nous avons remarqué que la dissipation du circuit de mesure a une influence bien plus faible sur le comportement du troisième moment. Finalement, les calculs numériques, pour un point contact, ont mis en évidence la disparition des singularités lorsque la dissipation est ajoutée. Pour le troisième moment, il n'existe pas de singularité à la fréquence défini par la tension, mais, en absence de dissipation, la courbe s'annule pour des fréquences supérieures à la tension. L'effet de la dissipation est de faire disparaître cette annulation de la courbe, qui décroit jusque zéro plus lentement. L'augmentation de la température, pour le second et le troisième moments, a rendu négative la valeur des corrélations. Ce comportement n'est pas étonnant car nous calculons le bruit et le troisième moment en excès. La dissipation semble contrer les effets de la température, sa présence élève les courbes.

Dans le dernier chapitre, nous avons calculé les corrélations croisées en supposant que la dissipation est faible. Nous considérons un circuit LC avec deux inductances, qui ont été couplées à deux sorties du circuit, et un condensateur aux bornes duquel la charge est mesurée. Quatre configurations du circuit de détection ont alors été possible, soit les composants étaient en série soit en parallèles et pour ces deux montages, les inductances pouvait induire des courants dans le même sens ou dans des sens opposés. Pour isoler les corrélations croisées, nous avons proposé alors de faire deux mesures, une avec l'addition des deux courants induits et une avec leur différence, et de soustraire les résultats. Quatre corrélations non-symétrisées peuvent être définies, S_{ij}^+ et S_{ij}^- avec i, j qui représentent les deux sorties du circuit (différentes). Nous avons trouvés un résultat généralisé aux corrélations croisées ayant la forme que celui de Lesovik et Loosen pour l'autocorrélation, c'est-à-dire les fluctuations de charge dépendent d'une combinaisons des corrélations croisées non-symétrisées. Des simulations numériques ont permis d'étudier l'influence de la température qui avait tendance à rendre positive les fluctuations de charge pour une jonction Y normale, et ont montré que la présence de potentiels chimiques différents pour les deux sorties augmente l'effet de la température. Cette partie a montré finalement que pour le bruit, le troisième moment et les corrélations croisées, la température peut changer le signe des corrélations et rendre l'interprétation du signe des corrélations ambiguë.

En conclusion, nous avons exploré durant cette thèse comment la physique du bruit intervient dans un problème dépendant du temps où des charges sont injectées. Cette thématique possède des applications pour la notion de qubit volants (charges se propageant le long d'un état de bord), développé dans certains laboratoires de l'école normale supérieure. Dans un deuxième temps, nous nous sommes penchés sur le problème de la mesure des fluctuations courant-courant à haute fréquence. Il s'agit d'un problème d'actualité qui stimule une activité importante au sein de la communauté de la nanophysique quantique. Cette communauté a effectué un travail de pionnier sur les mesures à basses fréquences depuis le début des années 90, et il est maintenant primordial de s'intéresser aux domaines temporelles où les hautes fréquences sont mises en jeu. Elle s'intéresse en particulier aux composants mésoscopiques élémentaires tels que les circuits RC et

LR mésoscopiques. En électrocinétique classique, une circuit RC classique est caractérisé par un temps de charge (ou de décharge) $\tau = R \times C$, ce qui amène a considérer l'étude dynamique de la relaxation de charge du circuit mésoscopique dans le régime cohérent. Dans toutes ces études, qu'il s'agisse de la mesure du bruit ou du transport en régime alternatif, la caractéristique du dispositif de mesure est cruciale. Elle requiert parfois que le dispositif de mesure décrit au même niveau théorique que le dispositif expérimental à mesurer.

Annexe A

Preuve que $\partial_{\bar{z}}(\frac{1}{z}) = \pi\delta^2(x, y)$

L'équation $\partial_{\bar{z}}(1/z) = \pi\delta^2(x, y)$ nous fais penser à l'équation de Poisson appliqué au plan complexe, on s'inspire donc de sa démonstration pour prouver cette relation.

On pose que $z = x + iy$ et $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $dzd\bar{z} = 2idxdy$.

Soit $z \neq 0$,

$$\partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}\partial_x\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{1}{2}\partial_y\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = 0 \tag{A.1}$$

Pour $z = 0$, on intègre sur une petite surface autour de 0. De ce fait, on a besoin de l'équation de Stockes complexe :

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_C \left(\frac{x}{|z|} - i\frac{y}{|z|}\right)(dx + idy) = \int_S i\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{z}dxdy \tag{A.2}$$

$$= \int_S \frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}}dzd\bar{z} \tag{A.3}$$

Donc l'intégration sur la surface autour de 0 est égale à l'intégrale sur une courbe entourant ce point, qui est facilement résoluble grâce au théorème des résidus.

$$\int_S \frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}}dzd\bar{z} = \int_C \frac{1}{z}dz = 2i\pi\sum res(1/z) = 2i\pi \tag{A.4}$$

$$= \int_S 2i\frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}}dxdy \tag{A.5}$$

$$\text{soit} \int_S \frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}}dxdy = \pi \tag{A.6}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \int_S \frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}}dxdy = \pi & \text{près } 0 \\ \frac{\partial(1/z)}{\partial\bar{z}} = 0 & z \neq 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

soit que $\partial(1/z)/\partial\bar{z}$ est nul sur tout le plan sauf en $z = 0$ où il est égale à π, donc égale à une fonction de Dirac centré en zéro et de hauteur π, $\partial(1/z)/\partial\bar{z} = \pi\delta^2(x, y)$ et $f = 1/z$.

Annexe B

Généralisation à plusieurs oscillateurs

Nous considérons le cas où le circuit LC à une largeur de résonance finie. Pour une distribution d'oscillateurs, l'opérateur de charge à maintenant la forme :

$$x(t) = \sum_{\omega} x_{\omega} = \sum_{\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2} (a_{\omega} e^{-i\omega t} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega t}) \tag{B.1}$$

où le couplage $-\alpha I p/M$ devient $-I \sum_{\omega} \alpha_{\omega} p_{\omega}/M$

Ces expressions sont substituées dans le commutateur imbriqué Eq. (7.14), qui comporte maintenant une somme sur quatre fréquences, ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4. A cause des intégrations sur le temps, des fonctions delta apparaissent et imposent des égalités entre les fréquences. Deux sommes subsistent :

$$\begin{aligned}\langle[[x^2(0), p(t_1)I_i(t_1)], p(t_2)I_j(t_2)]\rangle = \sum_{\omega_1,\omega_2} \hbar^2 \cos(\omega_1 t_1)\{\langle I_i(t_1)I_j(t_2)\rangle[N_{\omega_2} e^{-i\omega_2 t_2} - (N_{\omega_2}+1)e^{i\omega_2 t_2}] \\ - \langle I_j(t_2)I_i(t_1)\rangle[(N_{\omega_2}+1)e^{-i\omega_2 t_2} - N_{\omega_2} e^{i\omega_2 t_2}]\}\end{aligned} \tag{B.2}$$

Nous substituons cette expression dans les fluctuations de charge et procédons au changement de variable, en utilisant l'invariance par translation, $t = t_1 - t_2$ et $T = t1 + t_2$ et $\langle I(t)I(0)\rangle = \langle I(0)I(-t)\rangle$. En utilisant les définitions (5.2) et (5.3), l'intégration sur T donne deux contributions :

$$K_1 = \int_{-\infty}^{0} dT e^{i(\omega_1+\omega_2)T/2} e^{\eta T + i(\omega 1 - \omega_2)\mathrm{sign}(t)T/2} = \frac{e^{i(\omega_1+\omega_2)T/2}}{\eta + i(\omega_1-\omega_2)/2} \tag{B.3}$$

$$K_2 = -\int_{-\infty}^{0} dT e^{i(-\omega_1+\omega_2)T/2} e^{\eta T - i(\omega 1 + \omega_2)\mathrm{sign}(t)T/2} = -\frac{e^{i(-\omega_1+\omega_2)T/2}}{\eta - i(\omega_1+\omega_2)/2} \tag{B.4}$$

La largeur de résonance $L(\omega - \Omega)$, qui est un pic autour Ω, est introduite lors de la conversion des sommes discrètes sur les fréquences en intégrales. L'intégrale sur t est alors réalisée.

Les dénominateurs de K_1 et K_2 apportent une partie réelle, qui est une partie principale, et une partie imaginaire qui se révèle être une fonction de Dirac. Nous obtenons quatre contributions : $\langle x^2(0)\rangle = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ où :

$$A_1 = 2\pi^2 \int d\omega L^2(\omega-\Omega)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(2m)^2}\mathrm{Re}\left[(N_\omega+1)S_+^{12}(\omega)-N_\omega S_-^{12}(\omega)\right] \tag{B.5}$$

$$A_2 = -\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 L(\omega_1-\Omega)L(\omega_2-\Omega)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(2m)^2}\mathcal{P}\Big(((\omega_1+\omega_2)/2-\omega_3)^{-1}\Big)\mathcal{P}\Big(2/(\omega_1-\omega_2)\Big)$$
$$\mathrm{Re}\left[(N_{\omega_2}+1)S_+^{12}(\omega_3)-N_{\omega_2}S_-^{12}(\omega_3)\right] \tag{B.6}$$

$$A_3 = 2\pi^2 \int d\omega L(\omega-\Omega)L(-\omega-\Omega)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(2m)^2}\mathrm{Re}\left[(N_\omega+1)S_+^{12}(-\omega)-N_\omega S_-^{12}(-\omega)\right] \tag{B.7}$$

$$A_4 = -\int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 L(\omega_1-\Omega)L(\omega_2-\Omega)\mathcal{P}\Big(((\omega_1-\omega_2)/2-\omega_3)^{-1}\Big)\mathcal{P}\Big(2/(\omega_1+\omega_2)\Big)\frac{\alpha_1\alpha_2}{(2m)^2}$$
$$\Big[(N_{\omega_2}+1)(C_+^{12}(\omega_3)+C_+^{21}(\omega_3))-N_{\omega_2}\Big(C_-^{12}(\omega_3)+C_-^{21}(\omega_3)\Big)\Big] \tag{B.8}$$

avec $\mathcal{P}$ donne la partie principale. La contribution dominante est celle où les deux fonctions $L(\omega-\Omega)$ ont leur pic à la même fréquence, c'est à dire l'équation (B.5). La quantité η, qui apparaît dans le modèle avec un seul oscillateur correspond physiquement à la largeur de résonance comme nous nous y attendions.

Bibliographie

[1] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957).

[2] S. Washburn, R. A. Webb, E. E. Mendez, L. L. Chang, and L. Esaki, Phys. Rev. B **33**, 8848 (1986).

[3] J. Torrès, PhD Thesis (2001).

[4] T. Martin in *Les Houches Summer School session LXXXI*, edited by E. Akkermans, H. Bouchiat, S. Gueron, and G. Montambaux (Springer, 2005).

[5] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **65**, 2901 (1990).

[6] M. Büttiker, Phys. Rev. B **46**, 12485 (1992).

[7] W. Schottky, Ann. Phys. (Leipzig) **57**, 541 (1918).

[8] S. Tomonag, Prog. Theor. Phys **5**, 544 (1950).

[9] J.M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[10] D.C. Mattis and E.H. Lieb, J. Math. Phys **6**, 304 (1965).

[11] F.D.M. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).

[12] G. B. Lesovik and R. Loosen, Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. **65**, 280 (1997) [JETP Lett. **65**, 295, (1997)].

[13] M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986) ; M. Bttiker, Phys. Rev. B**38**, 9375 (1988).

[14] S. Datta "Electronic Transport in Mesoscopic Systems", Cambridge university Press (1996)

[15] P. W. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams et D. S. Fisher, Phys. Rev. B **22**, 3519 (1980).

[16] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel et C. T. Foxon, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988).

[17] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newburry, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D.G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie et G. A. C. Jones, J. Phys. C **21**, L209 (1988).

[18] P. Dutta and P. M. Horn, Rev. Mod. Phys. **53**, 497 (1981) ; M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys. **60**, 537 (1988).

[19] S. Feng, dans *Mesoscopic Phenomena in Solids*, edit e par B. Altshuler, P. A. Lee et R. A. Webb, North-Holland, 1991.

[20] Sh. M. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids* (Cambridge University Press, 1996).

[21] S. Feng, P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **56**, 1960 (1986).

[22] R. Landauer, Phys. Rev. B **47**, 16427 (1993).

[23] J. B. Johnson, Phys. Rev. B **29**, 367 (1927) ; H. Nyquist, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).

[24] J. R. Pierce, Bell Syst. Tech. J. **27**, 15 (1948).

[25] G. B. Lesovik, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49** 513 (1989) [JETP Lett. **49** 592 (1989)].

[26] R. Cron, M. Goffman, D. Esteve, and C. Urbina Phys. Rev. Lett. **86**, 115 (2001).

[27] Y.M. Blanter and M. Büttiker, Phys. Rep. **336**, 1 (2000).

[28] H. E. van den Brom et J. M. van Ruitenbeek, Phys. Rev. Lett. **82**, 1526 (1999).

[29] R. Landauer and Th. Martin, Physica B **175**, 167 (1991) ; **182**, 288 (1992).

[30] Y. P. Li, D. C. Tsui, J. J. Heremans, J. A. Simmons et G. W. Weimann, Appl. Phys. Lett. **57**, 774 (1990).

[31] M. Reznikov, M. Heiblum, H. Shtrikman et D. Mahalu, Phys. Rev. Lett. **75**, 3340 (1995).

[32] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin et B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **76**, 2778 (1996).

[33] L. DiCarlo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**,036810 (2006).

[34] L. DiCarlo *et al.*, cond-mat/07043892

[35] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin, and B. Etienne, Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).

[36] R. de Picciotto, M. Reznikov, M. Heiblum, V. Umansky, G. Bunin et D. Mahalu, Nature **389**, 162 (1997).

[37] T. Martin and R. Landauer, Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992) ; M. Büttiker, Phys. Rev. B **45**, 3807 (1992).

[38] H. Birk, M. J. M. de Jong et C. Schonenberger, Phys. Rev. Lett. **75**, 1610 (1995).

[39] S.R. Eric Yang, Solid State Commun. **81**, 375 (1992).

[40] G. B. Lesovik, JETP Lett. **70**, 208 (1999).

[41] R. J. Schoelkopf, P. J. Burke, A. A. Kozhevnikov, D. E. Prober, and M. J. Rooks, Phys. Rev. Lett. **78**, 3370 (1997).

[42] B. Trauzettel and H. Grabert, Phys. Rev. B **67**, 245101 (2003).

[43] Y. Levinson and Y. Imry, in Proc. of the NATO ASI "Mesoscope 99" in Ankara, Antalya, Kluver 1999.

[44] J. Torrès, T. Martin, and G. Lesovik Phys. Rev. B **63**, 134517 (2001).

[45] C. Chamon, D. E. Freed, and X. G. Wen, Phys. Rev. B **53**, 4033 (1996).

[46] K. V. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494, (1980)

[47] D. C Tsui, H. L. Stormer et A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett **48**, 1559, (1982).

[48] X. G. Wen, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 1711 (1992).

[49] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).

[50] J. M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).

[51] M. P. A. Fisher et L. I. Glazman, cond-mat/9610037.

[52] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **47**, 1840 (1981), J. Phys. C **14**, 2585 (1981).

[53] C. Chamon et D. E. Freed, Phys. Rev. B **60**, 1842 (1999).

[54] M. E. Peskin et D. V. Schroeder, "an introduction to quantum field theory", West-View Press (1995).

[55] P. Feyman et A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hills,Inc. USA, (1965).

[56] C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, D. Saint-James , J. Phys C : Solid St. Phys. **4**, 916, 1971.

[57] C. de C. Chamon, D. E. Freed, and X. G. Wen, Phys. Rev. B **51**, 2363 (1995).

[58] A. Crépieux, R. Guyon, P. Devillard, and T. Martin, Phys. Rev. B **67**, 205408 (2003).

[59] I. Safi, P. Devillard, and T. Martin Phys. Rev. Lett. **86**, 4628 (2001).

[60] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov et I. E. Dzyaloshinski, "Methods of quantum field theory in statistical physics", Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J.(1963)

[61] J. Rammer et H. Smith, Rev. Mod. Phys **58**, 323 (1986).

[62] G. D. Mahan, "Many-Particle Physics" 3 ème éd. Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York (2000).

[63] I. Safi, P. Devillard, T. Martin, non publié.

[64] G. B. Lesovik, T. Martin and J. Torrès, Phys. Rev. B **60**,11935 (1999) ; J. Torrès, T. Martin, and G. B. Lesovik Phys. Rev. B **63**, 134517 (2001).

[65] L. S. Levitov, H. Lee, G. B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).

[66] P.W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **18**, 1049 (1967)

[67] C. de C. Chamon and E. Fradkin, Phys.Rev. B **56**, 2012 (1997).

[68] N.P. Sandler, C.de C. Chamon and E. Fradkin, Phys. Rev. B **59**, 12521 (1999).

[69] R. Egger and A.O. Gogolin, Eur. Phys. J. B **3**, 281 (1998).

[70] P.-M. Billangeon, F.Pierre, H. Bouchiat, and R. Deblock, Phys. Rev. **96**, 136804 (2006).

[71] E. Onac, F. Balestro, L. H. W. van Beveren, U. Hartmann, Y. V. Nazarov, and L. P. Kouwenhoven Phys. Rev. Lett. **96**, 176601 (2006) ; E. Onac, F. Balestro, B. Trauzettel, C. F. J. Lodewijk, and L. P. Kouwenhoven ibid. **96**, 026803 (2006) .

[72] R. Aguado and L. Kouwenhoven, Phys. Rev. Lett. **84**, 1986 (2000).

[73] A. V. Lebedev, A. Crépieux, and T. Martin, Phys. Rev. B **71**, 075416 (2005).

[74] C. W. J. Beenakker, M. Kindermann, and Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **90**, 176802 (2003).

[75] J. Tobiska and Yu. V. Nazarov Phys. Rev. Lett. **93**, 106801 (2004) ; J. P. Pekola, *ibid.*, **93**, 206601 (2006) ; T. T. Heikkilä, P. Virtanen, G. Johansson, and F. K. Wilhelm *ibid.*, **93**, 247005 (2004) ; T. Ojanen and T. T. Heikkilä Phys. Rev. B **73**, 020501 (2006) ; V. Brosco, R. Fazio, F. W. J. Hekking, and J. P. Pekola *ibid.*, **74**, 024524 (2006).

[76] B. Reulet, J. Senzier, and D. E. Prober Phys. Rev. Lett. **91**, 196601 (2003).

[77] Yu. Bomze, G. Gershon, D. Shovkun, L. S. Levitov, and M. Reznikov Phys. Rev. Lett. **95**, 176601 (2005).

[78] T. Fujisawa, *et al.*, Science **312**, 1634 (5780) ; S. Gustavsson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 076605 (2006). S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, M. Reinwald, W. Wegscheider, cond-mat/0607192.

[79] U. Gavish, Y. Levinson, and Y. Imry, Phys. Rev. B **62**, 10637 (2000).

[80] R. Deblock, E. Onac, L. Gurevich, and L. P. Kouvenhoven, Science **301**, 203 (2003).

[81] J. Gabelli, L.-H. Reydellet, G. Feve, J.-M. Berroir, B. Plaçais, P. Roche, and D. C. Glattli, Phys. Rev. Lett. **93**, 056801 (2004).

[82] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Physica **121**A, 587 (1983).

[83] A.I. Larkin and Yu. N. Ovchinikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53**, 2159 (1967) [Sov. Phys. JETP **26**, 1219 (1968)].

[84] U. Gavish,Y. Imry, and Y. Levinson cond-mat/0211681 ;U. Gavish, Y. Imry and B. Yurke cond-mat/0404270.

[85] H. Grabert, P. Schramm, and G.-L. Ingold Phys. Rep. **168**, 115 (1988).

[86] I. Chiorescu et.al., Nature, **431**, 159 (2004) ; J. Johansson *et al.*, Phys. Rev. Lett., **96**, 127006 (2006).

[87] P. Recher, E.V. Sukhorukov, and D. Loss, Phys. Rev. B **63**, 165314 (2001).

[88] G. B. Lesovik, T. Martin, and G. Blatter, Eur. Phys. J. B. **24**, 287 (2001).

[89] N. Chtchelkatchev, G. Blatter, G. Lesovik, and T. Martin, Phys. Rev. B **66**, 161320 (2002).

[90] C. W. J. Beenakker, C. Emary, M. Kindermann, and J. L. van Velsen, Phys. Rev. Lett **91**, 147901 (2003) ; C. W. J. Beenakker and M. Kindermann, Phys. Rev. Lett **92**, 056801 (2004) ; P. Samuelsson, E. V. Sukhorukov, and M. Büttiker, Phys. Rev. Lett **91**, 157002 (2003) ; P. Samuelsson, E.V. Sukhorukov, and M. Büttiker Phys. Rev. Lett. **92**, 026805 (2004).

[91] A. V. Lebedev, G. B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. B **71**, 045306 (2005).

[92] U. Gavish, Y. Levinson, and Y. Imry, Phys. Rev. Lett. **87**, 216807 (2001).

[93] U. Gavish, PhD Thesis (2003).

[94] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956).

[95] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönenberger, Science **284**, 296 (1999) ; W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu, and Y. Yamamoto, Science **284**, 299 (1999).

[96] P. M. Chaikin et T. C. Lubensky "Principles of condensed matter physics", Cambridge University Press (2000)

[97] T. Duty et al., Phys. Rev. Lett. **95**, 206807 (2005).

[98] R. Guyon, T. Martin, I. Safi, P. Devillard C. R. Physique **3**, 697 (2002).

[99] V. A. Khlus, Sov. phys. JETP **66** 1243 (1987) (Zh. EKsp. Teor. Fiz. **93**, 2179 (1987)).

[100] C. L. Kane and M. P. A. Fisher Phys. Rev. Lett. **68**, 1220 (1992) ; C. L. Kane and M. P. A. Fisher Phys. Rev. B **46**, 15233 (1992).

[101] R. Landauer, Physica D**38**, 226 (1987).

[102] G. B. Lesovik, A. V. Lebedev, and G. Blatter, Phys. Rev. B **71**, 125313 (2005).

[103] T. Martin, Phys. Lett. A **220**, 137 (1996).

[104] J. Torrès and T. Martin, European Phys. J. B **12**, 319 (1999).

[105] B. Trauzettel, I. Safi, F. Dolcini, and H. Grabert Phys. Rev. Lett. **92**, 226405 (2004).

Résumé : Un conducteur est bien caractérisé par sa conductance donnée par la formule de Landauer. Mais le bruit contient davantage d'informations que la conductance. Il mesure les fluctuations temporelles du courant autour de sa valeur moyenne. De plus, le signe des corrélations croisées est lié à la statistique des porteurs de charges.

Nous considérons l'injection controllée d'une charge d'un métal normal sur un état de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire, à l'aide d'une tension dépendant du temps $V(t)$. Nous montrons que les corrélations électroniques préviennent les divergences des fluctuations de charge pour un pulse de tension générique. La formule de la charge moyenne et des fluctuations de charges sont obtenue en utilisant l'approximation adiabatique et les résultats non perturbatifs pour un bord de l'effet Hall quantique Fractionnaire de facteur de remplissage 1/3. Nous faisons également une généralisation aux systèmes décrits par les autres modèles des liquides de Luttinger.

Nous considérons la mesure à haute fréquence des corrélations de courant à l'aide d'un circuit résonnant, qui est couplé inductivement au circuit mésoscopique dans le régime cohérent. Les informations sur les corrélations apparaissent dans les histogrammes de la charge aux bornes de la capacité du circuit résonnant. La dissipation est essentiel afin de conserver des fluctuations de charge finis. Nous identifions quelle combinaison du courant de corrélation entre dans la mesure du troisième moment. Ce dernier reste stable pour une dissipation nulle. Nous proposons alors une généralisation du circuit LC résonant afin de sonder directement les corrélations croisées. Les corrélations croisées dépendent de quatre corrélateurs non-symétrisés. Les résultats sont illustrés pour un point contact.

Detection of finite frequency current moments with a dissipative resonant circuit

---

Abstract : The conductance is the most natural quantity to characterize a quantum conductor. It is given by the Landaeur formula. Yet, noise contains more information than conductance. It measures the current fluctuations around average value. Moreover, the sign of the cross correlations is related to the statistics of carriers.

We consider the injection of a controlled charge from a normal metal into an edge state of the fractional quantum Hall effect, with a time-dependent voltage $V(t)$. Using perturbative calculations in the tunneling limit, and a chiral Luttinger liquid model for the edge state, we show that the electronic correlations prevent the charge fluctuations to be divergent for a generic voltage pulse. We show that explicit formulae for the mean injected charge and its fluctuations can be obtained using an adiabatic approximation, and that non perturbative results can be obtained for injection in an edge state of the FQHE with filling factor $\nu = 1/3$. Generalization to other correlated systems which can be described with the Luttinger liquid model is given.

We consider the measurement of higher current moments with a dissipative resonant circuit, which is coupled inductively to a mesoscopic device in the coherent regime. Information about the higher current moments is coded in the histogramms of the charge on the capacitor plates of the resonant circuit. Dissipation is essential to include it in order for the charge fluctuations (or the measured noise) to remain finite. We identify which combination of current correlators enter the measurement of the third moment. The latter remains stable for zero damping. We thus propose a generalisation of this resonant LC circuit setup in order to probe directly noise cross-correlations. The measured cross-correlations then depend on four non-symmetrized correlators. Results are illustrated briefly for a quantum point contact.

Mots cles :bruit quantique, troisième moment, approche de Landaeur, courant, corrélation croisée, liquide de Luttinger, formalisme Keldysh, effet Hall quantique fractionnaire,

---

centre de physique Théorique, Université de la Méditerranée, Luminy case 907, 13288 Marseille cedex 09