

Thèse

Préparée conjointement au
Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systemes du CNRS et à
l'Université de Campinas (Brésil)

En vue de l'obtention du
Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliqués de Toulouse

par

Valter Júnior de Souza LEITE

Mestre em Engenharia Elétrica — Université Fédérale de Minas Gerais (UFMG/Brésil)
Engenheiro Eletricista — Université Fédérale de Minas Gerais (UFMG/Brésil)

**SUR LA STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES LINÉAIRES :
UNE APPROCHE PAR DES FONCTIONS DÉPENDANTES DE
PARAMÈTRES**

Soutenue le 23 Août 2005 devant le jury :

Président	W. C. AMARAL
Directeurs de thèse	P. L. D. PERES S. TARBOURIECH
Rapporteur	E. B. CASTELAN
Examineurs	P.-A. BLIMAN I. QUEINNEC
Invité	G. GARCIA

UNIVERSITÉ DE CAMPINAS
COMMISSION DE POST-GRADUATION EN GENIE ELECTRIQUE

SUR LA STABILITÉ ROBUSTE DE SYSTÈMES LINÉAIRES : UNE
APPROCHE PAR DES FONCTIONS DÉPENDANTES DE PARAMÈTRES

Thèse de doctorat de l'Université de Campinas (Brésil)
en co-tutelle avec l'Institut National des Sciences Appliqués de Toulouse (France)

Valter Júnior de Souza LEITE

Campinas — SP, Brésil
Le 23 Août 2005

Avant-Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué conjointement au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, au sein du groupe "Méthodes et Algorithmes en Commande" (MAC), et à l'Université de Campinas (UNICAMP, Brésil). Je remercie Mr. Malik Ghallab, Directeur du LAAS, pour m'avoir accueilli dans ce laboratoire et l'agence brésilienne Fundação Coordenação de Pessoal de Nível Superior (CAPES) qui a financé mon séjour en France. Je remercie également toutes les personnes du LAAS qui m'ont aidé.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude et reconnaissance à Mme. Sophie Tarbouriech, directrice de recherche au CNRS (LAAS-CNRS), et à Mr. Pedro Luis Dias Peres, professeur à l'UNICAMP, pour avoir encadré ce travail de thèse en co-tutelle entre l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse et l'UNICAMP. J'exprime aussi ma reconnaissance envers Mr. Germain Garcia, professeur à l'INSA de Toulouse et chercheur au LAAS-CNRS.

Je tiens à remercier Mr. Silviu-Iulian Niculescu, directeur de recherche au CNRS (Heudiasyc, Compiègne), et à Mr. Eugênio de Bona Castelan, professeur à l'Université Fédérale de Santa Catarina (UFSC, Brésil), d'avoir accepté d'examiner ce travail en tant que rapporteurs. Je remercie également Mme. Isabelle Queinnec, chargée de recherche au CNRS (LAAS-CNRS), MM. Wagner Caradori do Amaral, professeur à l'UNICAMP et Pierre-Alexandre Bliman, chargé de recherche à l'INRIA (INRIA, Rocquencourt), qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement toutes les membres du groupe MAC et plus particulièrement MM. Frédéric Gouaisbaut, Dimitri Peaucelle, Didier Henrion et Denis Arzelier. Un grand merci aussi pour l'aide que j'ai reçue en France de la part de Eduardo Loures, Magnos Martinello et Roberta Gomes. Je ne saurais oublier mon collègue Jean Rodrigues Sales et notre effort pour apprendre le français.

Finalement il me faut remercier Claudia qui était à mon côté tout le temps, pour son soutien et sa tendresse.

A CLÁUDIA ET GUSTAVO
AVEC TOUT MA TENDRESSE.

Résumé

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Sur la stabilité robuste de systèmes linéaires : une approche par des fonctions dépendantes de paramètres*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thèse (Doctorat). En Portuguais et en Français.

Ce travail concerne l'application des fonctions de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres à quelques problèmes sélectionnés dans le contexte de la commande robuste, à savoir : la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices, la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de polynômes de matrices, la stabilité robuste de systèmes neutres avec des retards variables dans le temps et la commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à états retardés. On utilise la représentation polytopique pour les incertitudes des systèmes étudiés. On obtient des formulations convexes, sous la forme d'inégalités matricielles linéaires, suffisantes pour la solution des problèmes sélectionnés. Ces conditions peuvent être résolues numériquement de manière efficace grâce à l'utilisation d'algorithmes spécialisés basés sur la méthode des points intérieurs. Les résultats obtenus sont moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature, basés, en général, sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, considérant des matrices des fonctionnelles fixes et indépendantes de l'incertitude.

Resumo

LEITE, Valter Júnior de Souza, *Estudos sobre estabilidade robusta de sistemas lineares por meio de funções dependentes de parâmetros*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Tese (Doutorado). Em Português e Francês.

Este trabalho trata da aplicação de funcionais de Lyapunov e Lyapunov-Krasovskii dependentes de parâmetro a alguns problemas selecionados da área de controle robusto, a saber : \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopo de matrizes, \mathcal{D} -estabilidade robusta de politopos de polinômios matriciais, estabilidade robusta de sistemas neutrais com atrasos variantes no tempo e controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos no tempo com atraso nos estados. É utilizada a representação politópica para as incertezas dos sistemas estudados. São obtidas formulações convexas, na forma de desigualdades matriciais lineares, suficientes para a solução dos problemas selecionados. Essas condições podem ser resolvidas numericamente de maneira eficiente por meio de algoritmos especializados baseados em pontos interiores. Os resultados obtidos são menos conservadores que os encontrados na literatura, baseados em geral na estabilidade quadrática, isto é, as matrizes dos funcionais são fixas e independentes da incerteza.

Abstract

LEITE, Valter Júnior de Souza, *On the robust stability of linear systems by means of parameter dependent functions*. Campinas, FEEC, UNICAMP, 2005. Thesis (Ph. D.). In Portuguese and French.

This work deals with the application of parameter dependent Lyapunov and Lyapunov-Krasovskii functionals to some selected problems of robust control : robust \mathcal{D} -stability of polytopes of matrices, robust \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices, robust stability of uncertain neutral systems with time-varying delays and robust \mathcal{H}_∞ control of uncertain discrete time delay systems. The polytopic representation is used to describe the uncertainties. Convex formulations are obtained, in terms of linear matrix inequalities, that are sufficient for the solution of the selected problems. Those conditions can be solved in a efficient way through specialized interior point algorithms. The obtained results are less conservative than those from the literature, in general based on quadratic stability, i.e., the matrices in the functionals are fixed and do not depend on the uncertainty.

Table des matières

Avant-Propos	iii
Résumé /Resumo / Abstract	vii
Table des figures	x
Liste des tableaux	xii
Notations	xv
Abréviations	xvii
1 Introduction	1
1.1 Étude de la stabilité robuste de systèmes incertains	2
1.2 Outils mathématiques employés	2
1.2.1 Seconde méthode de Lyapunov	2
1.2.2 Stabilité quadratique (SQ)	2
1.2.3 Fonctionnelles dépendantes de paramètres	3
1.2.4 Approximation de LMIs par des polynômes	3
1.2.5 Lemme de Finsler	4
1.3 Problèmes étudiés et structure de la thèse	5
1.4 Commentaires généraux	7
I \mathcal{D}-stabilité robuste	9
2 \mathcal{D}-Stabilité robuste des systèmes linéaires	13
2.1 Introduction	13
2.2 Préliminaires	15
2.3 Des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathcal{A}	16
2.4 Analyse des conditions LMIs	21
2.4.1 Complexité numérique	21
2.4.2 Le temps de calcul	22
2.5 Conclusion	24
3 \mathcal{D}-stabilité robuste de matrices polynomiales	25
3.1 Introduction	25
3.2 Préliminaires	26
3.3 Conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathbb{A}	28
3.3.1 Polynômes matriciels de premier ordre	30
3.3.2 Complexité numérique	31
3.4 Conclusion	32

II	Des systèmes à retard sur les états	33
4	Stabilité robuste de systèmes neutres avec retards variants dans le temps	37
4.1	Introduction	37
4.2	Préliminaires	38
4.3	Stabilité robuste indépendante du retard	40
4.4	Cas particuliers	43
4.4.1	Stabilité robuste du système incertain neutre	44
4.4.2	Stabilité robuste du système incertain à retard dans les états	44
4.4.3	Stabilité robuste du système incertain	45
4.5	Complexité numérique	46
4.6	Conclusion	47
5	La commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à retard dans les états	49
5.1	Préliminaires et formulation du problème	51
5.2	Stabilité robuste	53
5.3	Commande robuste	55
5.4	Commande robuste \mathcal{H}_∞	56
5.5	Complexité numérique et extensions	59
5.5.1	Commande décentralisée	60
5.5.2	Des fautes d'actionneurs	60
5.6	Conclusion	61
6	Commentaires finaux	63
6.1	D'Autres travaux réalisés	63
6.2	Perspectives	65
	Bibliographie	67

Table des figures

2.1	Complexité numérique relative (a) SR_1/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps discret).	23
2.2	Complexité numérique relative (a) SR_2/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps continu).	23
3.1	Région du plan complexe décrite par $\tilde{\mathcal{R}}_D$	30

Liste des tableaux

2.1	Nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et ordre de la région (d), quand pertinent, pour les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC_1) et 2.2 (SC_2), dans le Corollaire 2.1 <i>i</i>) (SQ_1) et <i>ii</i>) (SQ_2), en [PABB00] (SE), en [RP01a] (SR_1) pour le cas à temps discret et en [RP02] (SR_2) pour le cas à temps continu.	22
3.1	Le nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et le nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et degré du polynôme matriciel (g), pour les conditions proposées dans les Théorèmes 3.1 (TE_1) et 3.2 (TE_2), dans le Lemme 3.3 (DQ), dans le Théorème 1 de [HAPŠ01] ($T1_{HAPS}$) et dans les Théorèmes 1 ($T1_{dOOP}$) (demi-plan gauche du plan complexe) et 2 ($T2_{dOOP}$) (disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe) proposés dans [dOP02].	32
4.1	Nombre de variables scalaires \mathcal{K} et nombre de lignes \mathcal{L} en fonction du nombre d'état (n) et de sommets (N) pour les conditions d'analyse de stabilité étudiées.	46
5.1	Nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , et nombre de lignes LMI, \mathcal{L}	60

Notations

\otimes	Produit de Kronecker
\mathbb{N}	Corps des nombres naturels
\mathbb{R}	Corps des nombres réels
\mathbb{R}_+	Corps des nombres réels qui ne sont pas négatifs
\mathbb{R}^n	Espace des vecteurs à n entrées réelles
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$
\mathbb{C}	Corps des nombres complexes
A'	Transposée de A
A^*	Transposée conjuguée de A
\mathbf{I}_d	Matrice identité de dimension $d \times d$
$\mathbf{0}$	Matrice nulle
$M > P$ ($M < P$)	La matrice $M - P$ est définie positive (négative)
$M \geq P$ ($M \leq P$)	La matrice $M - P$ est semi-définie positive (négative)
\star	Les éléments ou blocs symétriques par rapport à la diagonale principale d'une matrice symétrique
ℓ_2	L'espace de toutes les séquences de vecteurs d'entrées réelles sur le corps des nombres entiers avec énergie finie
$\ x(k)\ _2$	l'énergie de $x(k)$
$\mathcal{C}_\tau = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	L'espace de Banach des fonctions vectorielle qui définies sur $[-\tau, 0]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , muni de la topologie de la convergence uniforme
\mathcal{C}_τ^v	Corps défini par $\mathcal{C}_\tau^v = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau ; \ \phi\ _c < v, v > 0\}$
$\ \phi\ _c$	Représente $\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \ \phi\ $, où $\ \phi\ $ est la norme 2 de ϕ
$\rho(A)$	Rayon spectral de A

Abréviations

LMI	Inégalité matricielle linéaire (en anglais, <i>Linear Matrix Inequality</i>)
LMIs	Inégalités matricielles linéaires
EQ	Stabilité quadratique

Chapitre 1

Introduction

La stabilité est la propriété qui permet à un système perturbé le retour à son état d'équilibre en temps fini lorsque l'effet de la perturbation a cessé. Cette propriété est essentielle pour garantir le fonctionnement sûr d'un système, représentant par exemple un système industriel. L'étude de la stabilité dans les systèmes réels trouve dans les études sur les retours de signaux faites par H.W. Bode une marque fondamentale : dans [Bod45] sont recherchées les propriétés de retour de signaux dans les circuits amplificateurs, à travers des modèles mathématiques, en analysant les effets du retour dans la stabilité de la boucle fermée et en proposant des méthodes pour la synthèse de compensateurs. Bode utilise l'analyse dans le domaine fréquentiel et des résultats de Nyquist [Nyg32] pour étudier le comportement des circuits électriques, en prenant en compte le fait que les paramètres de ces circuits peuvent souffrir de variations avec le temps, la température, etc. La prise en compte des incertitudes inhérentes aux modèles mathématiques, en général obtenus par des équations différentielles ou par des techniques d'identification et utilisés pour représenter les procédés réels, reste primordiale. En général, on peut considérer une représentation mathématique des systèmes dynamiques sous la forme

$$\dot{x} = f(x(t), \alpha(t), u(t)) \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\alpha(t)$ représente les incertitudes associées au modèle ou système, $u(t)$ est le vecteur de commande et $f(\cdot)$ est la fonction — équation différentielle — qui détermine les trajectoires du système au cours du temps, t . En général, $f(x(t), \alpha(t), u(t))$ est une fonction non-linéaire. Néanmoins, les boucles de commande, surtout en milieu industriel, sont établies à partir d'un modèle linéaire du système, en général du premier ou du second ordre, qui peut inclure, ou non, un retard, et qui fournit, la plupart du temps, une bonne représentation du comportement du système réel autour d'un point d'opération. Ces modèles, bien que simples, sont capables de capturer la dynamique principale de la variable qui doit être contrôlée, et servent de point de départ pour l'ajustement des contrôleurs. Cependant, en général, les paramètres du modèle ne sont pas précisément connus ou encore des dynamiques d'ordres plus élevés sont négligées. Une façon de contourner cette simplification peut être de prendre en compte des incertitudes de modélisation. Dans ce contexte, le fonctionnement sûr d'un système réel passe par la garantie de la stabilité de ce système incertain.

Ainsi, assurer la stabilité d'un système en boucle fermée, même en présence d'incertitudes, est devenu un important champ d'étude de la théorie de la commande. D'ailleurs, garantir certaines caractéristiques de performance pour le système bouclé affecté par des incertitudes a des implications immédiates dans les aspects de sécurité, qualité du produit et économie du procédé. Dans ce sens, une spécification commune consiste en la localisation des pôles de la boucle fermée du système incertain dans certaines régions du plan complexe. Ainsi, des méthodes d'analyse et de synthèse assurant une localisation régionale pour les pôles du système incertain bouclé occupent une place importante dans

la théorie de la commande. Ce type d'étude, appelé \mathcal{D} -stabilité, a connu un grand développement ces dernières années (voir, par exemple, [Bac98], [CG96] et [PABB00]).

1.1 Étude de la stabilité robuste de systèmes incertains

Dans le contexte de l'étude de la stabilité de systèmes avec incertitudes, c'est-à-dire dans le contexte de l'analyse de stabilité robuste, plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature. Parmi celles-ci, cela vaut la peine de mettre en évidence la μ -analyse [ZDG96], des méthodologies basées sur des polynômes de Kharitonov [BCK95], des méthodes dans le domaine fréquentiel [NT73] et les méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov. Ces dernières constituent une des approches les plus utilisées ces dernières années pour l'analyse de stabilité robuste et pour la synthèse de contrôleurs robustes. La représentation de systèmes incertains, dans l'espace des états, est donnée par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) \quad (1.2)$$

où $A(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice incertaine appartenant à un polytope convexe avec des sommets connus. L'étude de la stabilité de tels systèmes a été amplement abordée par des méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov. Dans ce cas, la stabilité du système est toujours étudiée par rapport à l'origine de l'espace des états.

1.2 Outils mathématiques employés

1.2.1 Seconde méthode de Lyapunov

Le large usage de la "seconde méthode" ou "méthode directe" de Lyapunov pour traiter la stabilité du système décrit par (1.2) est dû à la généralité des conditions établies par Lyapunov pour vérifier la stabilité asymptotique globale d'un système sujet à des incertitudes décrites par un paramètre $\alpha(t)$. Ce résultat est présenté dans le théorème suivant.

Théorème 1.1 (Lyapunov, [BS70]) *Le système incertain sujet à des incertitudes (1.2) est globalement asymptotiquement stable autour de l'origine (point d'équilibre du système) s'il existe une fonction à valeurs réelles $V(x(t), \alpha(t))$ telle que :*

1. $V(\mathbf{0}, \alpha(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0;$
2. $V(x(t), \alpha(t)) \rightarrow \infty$ quand $\|x(t)\| \rightarrow \infty;$
3. $V(x(t), \alpha(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$
4. $\dot{V}(x(t), \alpha(t)) < 0, \quad \forall x(t) \neq \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0;$

où $\dot{V}(\cdot)$ est la dérivée temporelle de $V(\cdot)$ le long des trajectoires du système (1.2).

Une fonction $V(x(t), \alpha(t))$ qui satisfait toutes les conditions du Théorème 1.1 est appelée "fonction de Lyapunov". Une observation importante est que, dans le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique en x et dépendante du paramètre incertain α est une condition nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité robuste asymptotique.

1.2.2 Stabilité quadratique (SQ)

Le problème de l'analyse de stabilité en utilisant la seconde méthode de Lyapunov vient de la détermination d'une fonction de Lyapunov. Ainsi, une grande part des recherches réalisées dans les

dix dernières années a consisté à vérifier l'existence d'une fonction de Lyapunov du type

$$V(x(t), \alpha(t)) = x(t)'P(\alpha(t))x(t) \quad (1.3)$$

où $P(\alpha(t))$ est une matrice définie positive pour toutes les valeurs possibles de $\alpha(t)$. Un choix possible, et assez commun, pour $P(\alpha(t))$ est

$$P(\alpha(t)) = P(\alpha(t))' \in \mathbb{R}^{n \times n} : P(\alpha(t)) = P > \mathbf{0} \quad (1.4)$$

où P est fixe (indépendamment des valeurs prises par $\alpha(t)$). Quand un système admet une fonction de Lyapunov donnée par (1.3)-(1.4), alors on dit que ce système est quadratiquement stable. Ce concept de stabilité quadratique (SQ) [Bar85], implique l'existence d'une même fonction de Lyapunov, indépendante des paramètres incertains, assurant la stabilité du système pour tout le domaine d'incertitudes. Cela constitue probablement le résultat le plus important des années 80 dans le contexte de la commande.

À partir de la stabilité quadratique, plusieurs résultats pour l'analyse, contrôle et filtrage robuste, avec des critères de performance tels que les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ , ont été développés (voir, par exemple, [BEFB94] et des références internes). Ces conditions, presque toujours formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires (en Anglais, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*), sont devenues facilement traitables numériquement avec l'apparition d'algorithmes de calcul spécialisés [GNLC95], [Stu99]. Quelques travaux ont abordé le problème avec des fonctions de Lyapunov quadratiques par parties (par exemple [XSF97], [RJ00], [LP04]), mais la solution numérique, en général, requiert un effort de calcul élevé.

1.2.3 Fonctionnelles dépendantes de paramètres

Quoique l'approche basée sur la stabilité quadratique soit spécialement adéquate à l'analyse de systèmes incertains avec des paramètres variables dans le temps, sans restriction de la valeur du taux de variation, les résultats obtenus par ce moyen peuvent être très conservatifs, spécialement quand on sait qu'il s'agit d'un système invariant dans le temps. Récemment, plusieurs extensions sont apparues dans la littérature pour l'analyse et la synthèse de contrôleurs pour des systèmes linéaires incertains. Avec l'intention d'obtenir des conditions d'analyse chaque fois moins conservatives, des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres ont été fréquemment utilisées [FAG96], [GAC96], [MK00], [Tro99]. Cependant, dans la plupart des conditions proposées, quelques restrictions structurelles ont besoin d'être vérifiées. Il y a encore des cas dans lesquels la procédure numérique pour le test de stabilité dépend de paramètres d'échelonnement ou de discrétisation de l'espace paramétrique dans une boucle suffisamment mince.

Ainsi, l'objectif de ce travail est de rechercher des conditions convexes et de dimensions finies capables de fournir des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres pour des systèmes linéaires incertains et invariants dans le temps. Pour cela, les incertitudes qui affectent le système sont supposées être sous la forme polytopique, avec N sommets connus, mais avec un vecteur paramétrique incertain invariant dans le temps : $\alpha(t) = \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq \mathbf{0}, j = 1, \dots, N$.

Les conditions obtenues, pour les différents problèmes étudiés, fournissent des résultats a priori moins conservatifs que ceux où on utilise la SQ comme base.

1.2.4 Approximation de LMIs par des polynômes

Pour le développement de ce travail, deux techniques sont plus particulièrement employées. La première, utilisée principalement dans les chapitres 2 et 3, est basée sur les résultats présentés en

[RP01a] et [RP02], dont l'idée principale est dans la solution d'une LMI paramétrisée en α

$$M(r, \alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

avec r dans le rôle de variable d'optimisation, à travers un second problème d'optimisation, suffisant pour la solution du problème original, donné par

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M(r)_j - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k M(r)_{jk} \leq \mathbf{0} \quad (1.6)$$

ou

$$M(r, \alpha) < \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M(r)_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M(r)_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M(r)_{jkl} \leq \mathbf{0} \quad (1.7)$$

La matrice $M(r)$ est une fonction indépendante du vecteur d'incertitudes α . Dans le cas général, $M(r, \alpha)$ peut être exprimée comme une fonction matricielle polynomiale en α de degré quelconque. Toutefois, la recherche réalisée dans ce travail ne touche qu'au cas où $M(r, \alpha)$ peut être écrite comme un polynôme en α de degré deux ou trois. De cette façon, en utilisant des relaxations LMI sur la restriction $M(r, \alpha) < \mathbf{0}$, des conditions convexes et de dimensions finies suffisantes pour garantir (1.5) sont obtenues. Parmi les travaux en rapport avec cette approche, méritent d'être mis en relief ceux qui utilisent la somme de carrés (en Anglais, SOS — *Sum of Squares*) et ceux qui abordent le problème à travers l'étude de la positivité de polynômes. Pour les détails, voir [Par00], [Las01] et [HL03].

1.2.5 Lemme de Finsler

L'autre technique utilisée dans ce travail est l'employé le Lemme de Finsler pour séparer des produits entre les matrices du système et celles de la fonctionnelle de Lyapunov. D'autre part, l'usage de ce lemme permet l'introduction de nouvelles variables matricielles d'optimisation qui sont exploitées pour la réduction du conservatisme des conditions étudiées. Ce lemme est présenté ici pour le cas dépendant de paramètres.

Lemme 1.1 *Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Q}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symétrique, et $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\alpha : \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N$, telles que $\text{rang}(\mathcal{B}(\alpha)) < n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $x' \mathcal{Q}(\alpha) x < \mathbf{0}, \quad \forall x : \mathcal{B}(\alpha) x = \mathbf{0}, \quad x \neq \mathbf{0}$
- ii) $\mathcal{B}^\perp(\alpha)' \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) < \mathbf{0}$, où $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ dénote une base pour l'espace nul de $\mathcal{B}(\alpha)$
- iii) $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{B}(\alpha) < \mathbf{0}$
- iv) $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)' \mathcal{X}(\alpha)' < \mathbf{0}$

Ainsi, ces deux techniques (approximation par des polynômes et Lemme de Finsler) sont utilisées pour rechercher l'usage de fonctionnelles de Lyapunov dépendantes de paramètres dans les systèmes linéaires. L'application de ces idées est présentée en deux parties. Dans la première, est recherchée la \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes linéaires. On étudie, donc, la \mathcal{D} -stabilité robuste de matrices incertaines (vérification de l'appartenance des valeurs propres d'un polytope de matrices à une région \mathcal{D} du plan complexe) autant que de polynômes matriciels incertains (vérification de l'appartenance des zéros d'un polytope de polynômes matriciels à une région \mathcal{D} du plan complexe). Dans la seconde partie de ce travail on recherche l'application de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres à des systèmes linéaires incertains avec des retards dans les états. Bien qu'ils ne soient pas présentés

dans ce travail, les résultats obtenus dans cette partie peuvent être développés en suivant les idées de [LP03a], [RP01a], [RP02] pour l'analyse robuste, idées qui sont exploitées dans la Partie I. En particulier pour les systèmes discrets dans le temps, des conditions pour l'estimation du coût garanti \mathcal{H}_∞ , ainsi que pour la synthèse de gains robustes de retour des états qui assurent un coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système en boucle fermée, sont présentées dans la Partie II.

De cette façon, quatre problèmes importants du point de vue de la théorie du contrôle ont été étudiés, en envisageant l'application de fonctions de Lyapunov (ou Lyapunov-Krasovskii) dépendantes de paramètres pour la réduction du conservatisme de conditions LMI basées sur la stabilité quadratique. Ces problèmes sont rapidement présentés dans la suite.

1.3 Problèmes étudiés et structure de la thèse

Dans la première partie de ce travail sont présentées des conditions convexes de dimension finie pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de deux problèmes fondamentaux de la théorie du contrôle. Dans le Chapitre 2 des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres sont utilisées pour analyser la \mathcal{D} -stabilité de systèmes linéaires incertains décrits par

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t)$$

où $\delta[\cdot]$ dénote la dérivée par rapport au temps pour les systèmes continus dans le temps et l'opérateur d'avancement pour les systèmes discrets dans le temps et $A(\alpha)$ est une matrice incertaine invariante dans le temps avec $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. Ce problème a été amplement étudié dans les dernières années, surtout avec des outils basés sur les LMIs comme peuvent en attester les travaux [GAC96], [PABB00], [dOBG99], [RP01a], [RP02], [LP03a]. Dans ce contexte, une discussion à propos de l'existence de solutions du type polynomiale pour les LMIs dépendantes de paramètres peut être trouvée dans [Bli04b]. Dans [CGTV03], des conditions LMIs pour l'existence des fonctions de Lyapunov quadratique dans les états, polynomiales, homogènes dans les paramètres incertains et basées en représentations matriciel de carrés sont présentées. Une famille de conditions LMI chaque fois plus précises pour la stabilité de systèmes incertains décrits sous la forme affine est donnée dans [Bli04a]. De telles conditions deviennent nécessaires si le nombre de LMIs est suffisamment grand et elles sont associées à l'existence d'une fonction de Lyapunov polynomiale dans les paramètres. Cette méthode peut être utilisée de façon récursive pour traiter des systèmes polytopique.

L'autre problème étudié dans cette première partie du travail concerne la \mathcal{D} -stabilité de matrices polynomiales, c'est-à-dire le cas où $A(\alpha)$ est une matrice dont les entrées sont des polynômes (incertains). Les matrices polynomiales constituent un outil important pour l'étude de systèmes de contrôle, car la dynamique de beaucoup de systèmes peut être décrite d'une manière plus naturelle à travers des représentations linéaires fractionnelles ou par des matrices dont les coefficients sont des polynômes [KV93]. Dans ce contexte, plusieurs approches pour l'analyse de stabilité robuste et pour le contrôle de systèmes sont basées sur l'utilisation de matrices polynomiales, comme par exemple, l'approche polynomiale [Kuč79] et l'approche comportementale [Wil91]. Dans le cas de la description d'un système par des matrices fractionnelles, la matrice polynomiale correspondant au dénominateur fournit des informations sur la dynamique et la stabilité du système [Kai80], et le positionnement des zéros de la matrice polynomiale correspondant au numérateur est associé aux spécifications de performance du système [Ack93]. Une bonne discussion sur l'importance de matrices polynomiales, l'analyse de la stabilité robuste de polynômes et l'évolution des méthodes numériques pour la vérification des conditions de stabilité peut être trouvée dans [HAPŠ01] et [HBŠ01]. Pour une étude plus approfondie sur

la nature et les propriétés générales des matrices polynomiales on recommande [GLR82]. Notons que, due à la présence de paramètres incertains, l'analyse de la stabilité robuste de systèmes dynamiques passe par la vérification de la stabilité de matrices polynomiales incertaines, et une des formes plus générales de représentation des incertitudes paramétriques est la représentation polytopique [Bar94]. Ainsi, dans le Chapitre 3, sont présentées des conditions convexes de dimension finie suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de polytopes de matrices polynomiales. Les résultats présentés contiennent et étendent ceux de [dOP02], [HBŠ01] et [HAPŠ01].

Dans la Partie II sont étudiés des systèmes linéaires incertains avec retard dans les états, qui représentent beaucoup de systèmes dynamiques (voir [DV97], [Mah00], [Hal77], [KR99], [MZJ87], [Nic01] et des références internes). L'usage de fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii est, sans doute, une des principales approches utilisées pour l'analyse de stabilité de ce type de système [KNR99], [Sko90] et on voit un effort significatif pour la caractérisation de la stabilité robuste à travers des LMIs. Dans [ZKT01], il est montré comment quelques conditions obtenues à travers des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii peuvent être vérifiées comme des cas particuliers d'une approche fréquentielle basée sur des techniques de μ -analyse. Les résultats présentés dans ce cas sont restreints au cas précisément connu.

Pour la classe de systèmes linéaires avec retard dans les états il existe deux types de conditions pour l'analyse de stabilité : celles qui sont dépendantes du retard et celles qui sont indépendantes du retard. Dans le premier cas les conditions permettent de garantir la stabilité d'un système avec retard dans les états pour toutes les valeurs du retard $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, où $\bar{\tau}$ dénote la valeur maximale que peut prendre τ . Les conditions indépendantes du retard sont capables de garantir (quand elles sont satisfaites) la stabilité de systèmes avec retard pour toute valeur (positive) de τ . Comme, en général, les conditions dépendantes du retard sont suffisantes, il n'est pas toujours possible de caractériser de manière adéquate la stabilité d'un système avec des retards dans les états. Dans ce travail sont développées des conditions du type indépendante du retard pour des systèmes incertains.

Dans le Chapitre 4, une autre classe de systèmes linéaires avec retard est étudiée : les systèmes neutres. Ce type de système possède une équation dynamique qui dépend de l'état actuel, de l'état retardé et de la dérivée de l'état retardé, et est modélisé par des équations différentielles [Hal77] du type

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (1.8)$$

$$\Delta(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (1.9)$$

Notons que ce type de système contient la classe (plus connue) des systèmes continus dans le temps avec retard dans les états dont la dynamique ne dépend que de l'état actuel et de l'état retardé ($E(\alpha) = \mathbf{0} \forall \alpha$ en (1.8)). Dans ce chapitre des conditions suffisantes sont présentées, basées sur des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètre, qui sont moins conservatives que celles disponibles dans la littérature, en considérant ici la situation plus générale de retards variables dans le temps. Des conditions plus simples pour l'analyse de stabilité robuste peuvent aussi être obtenues par l'utilisation de transformations de congruence appliquées aux conditions plus générales, quand une ou plus des matrices de l'équation dynamique (1.8) sont nulles.

Finalement, dans le Chapitre 5, des systèmes discrets dans le temps avec retard dans les états sont étudiés, encore ici à travers de conditions indépendantes du retard. Notons que, s'il existe une vaste littérature en ce qui concerne les systèmes continus dans le temps avec retard dans les états, ceci n'est pas le cas pour les systèmes discrets dans le temps. En effet, pour des retards connus et fixes dans le temps, il est toujours possible d'inclure des états en retard dans un vecteur d'état et d'appliquer des

techniques standard (d'analyse) au système augmenté [ÅW84]. Néanmoins, parmi d'autres difficultés telles que l'augmentation de la complexité et la nécessité d'imposer des restrictions structurelles au gain de retour d'état pour obtenir un gain de retour d'état pour l'état original, cette stratégie n'est pas applicable pour le cas de retards inconnus ou non-limités, car, dans ce cas, il faudrait le test d'un nombre infini de systèmes augmentés. D'ailleurs, la représentation par des états augmentés peut être assez complexe pour la synthèse d'une loi de contrôle pour le système original, qui considère un retour des états retardés. Observons encore que les conditions pour la stabilisation de systèmes discrets dans le temps avec des conditions du type dépendant du retard peuvent être, en général, assez conservatives, spécialement quand le système peut être stabiliser pour toute valeur du retard. Dans ce sens, les résultats du Chapitre 5 proposent des conditions indépendantes du retard plus précises (alors moins conservatives) pour rechercher la stabilité robuste de cette classe de systèmes, et pour traiter les problèmes d'estimation du coût garanti \mathcal{H}_∞ et de stabilisation robuste \mathcal{H}_∞ .

Dans le Chapitre 6 sont présentés les commentaires finaux à propos de l'usage de fonctions de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres dans les problèmes étudiés et quelques thèmes sélectionnés comme des perspectives pour la continuation des travaux. On présente encore une liste d'autres travaux développés, qui ont un rapport indirect avec les sujets traités ici.

1.4 Commentaires généraux

Dans ce travail la stabilité asymptotique est traitée, toujours en considérant l'origine comme point d'équilibre. Fréquemment ce concept de stabilité est référencé de façon simplifiée comme "stabilité". Ainsi, quand il est indiqué qu'un système est stable, on doit comprendre que, son vecteur d'état converge asymptotiquement vers l'origine de l'espace d'état, pour toute condition initiale différente de zéro, quand le temps tend vers infini.

On suppose que tous les systèmes incertains recherchés dans ce travail possèdent des matrices incertaines qui appartiennent à des polytopes convexes avec un nombre de sommets finis et connus.

Les résultats des exemples numériques présentés dans ce travail ont été obtenus à partir de la programmation des conditions LMI étudiées avec Matlab et la *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Dans ce cas, pour utiliser un algorithme de points intérieurs pour la solution des LMIs, la complexité des problèmes d'optimisation proposés est de l'ordre de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^3\mathcal{L})$, où \mathcal{K} est le nombre de variables scalaires d'optimisation et \mathcal{L} est le nombre de lignes dans les LMIs. D'autres algorithmes d'optimisation peuvent présenter une complexité différente. Par exemple, en utilisant le programme SeDuMi pour résoudre un problème de programmation semi-définie, la complexité est de l'ordre de $\mathcal{O}(\mathcal{K}^2\mathcal{L}^{5/2} + \mathcal{L}^{7/2})$. Pour des détails, voir [Stu99].

Première partie
D-stabilité robuste

Dans cette première partie du travail sont présentés des résultats moins conservatifs que ceux trouvés dans la littérature pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes linéaires incertains et de polynômes matriciels incertains, par rapport à une région (convexe) du plan complexe. Il s'agit d'étudier l'appartenance de toutes les valeurs propres du système linéaire incertain ou de tous les zéros du polynôme matriciel incertain à une région prédéterminée — et supposée convexe — du plan complexe. Quoique ce problème soit reconnu difficile, les résultats obtenus sont présentés via des conditions convexes (LMIs), dont les solutions sont basées sur des tests simples de faisabilité. Ces tests peuvent être résolus numériquement de manière efficace par des algorithmes spécialisés de points intérieurs. Premièrement on propose des conditions convexes pour la solution du problème d'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste, néanmoins de dimension infinie dans le paramètre d'incertitude. Deuxièmement, on propose des conditions convexes suffisantes pour assurer la vérification des conditions de dimension infinie au paramètre de l'incertitude. Ces nouvelles conditions, formulées dans un nombre fini de LMIs, sont numériquement possibles et d'application facile.

Chapitre 2

\mathcal{D} -Stabilité robuste des systèmes linéaires

Dans ce chapitre, le problème de l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste pour la classe des systèmes linéaires incertains et invariants dans le temps est étudié. Par \mathcal{D} -stabilité on comprend l'appartenance de toutes les valeurs propres du système incertain dans une région \mathcal{D} du plan complexe. Les incertitudes sont du type polytopique, avec des sommets connus. On présente des conditions convexes (LMIs) suffisantes pour la vérification de la \mathcal{D} -stabilité robuste de cette classe de systèmes incertains. Les conditions présentées, basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, possèdent une formulation convexe en les variables d'optimisation, cependant, de dimension infinie par rapport au paramètre d'incertitude. À partir de ces conditions, sont obtenues d'autres conditions, de dimension finie par rapport au paramètre de l'incertitude, et convexes par rapport aux variables d'optimisation. Dans ce cas là, le nombre de LMIs est plus grand que le nombre de sommets qui définissent le polytope, mais les conditions peuvent être résolues en temps polynomial avec des algorithmes spécialisés de points intérieurs. On démontre que ces conditions mènent à des résultats bien moins conservatifs que ceux obtenus, par exemple, avec la stabilité quadratique, c'est-à-dire, en utilisant une fonction de Lyapunov fixe et indépendante de l'incertitude associée au système. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être partiellement trouvés dans [LP03a], [LP03b], [LMd⁺04], [LMRP02], [dOOL⁺02a] et [dOOL⁺02b].

2.1 Introduction

Parmi les approches pour l'étude de stabilité des systèmes incertains disponibles dans la littérature, dans ce chapitre sont considérés les méthodes basées sur des formulations LMI et des incertitudes appartenant à des domaines polytopiques, dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps, à temps continu et à temps discret.

Dans ce contexte, plusieurs conditions basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres méritent de se détacher. Parmi elles, considérons celles proposées dans [GdOH98] où il s'agit de la stabilité robuste de systèmes linéaires à temps continu et invariants dans le temps. Dans ce travail, des conditions suffisantes pour la stabilité structurelle d'une classe de systèmes à temps continu ont été proposées en termes de LMIs, en établissant les rapports de ce résultat avec la positivité réelle et la passivité dans les systèmes linéaires. L'idée principale contenue dans cette approche est dans l'augmentation de l'ordre des LMIs et dans l'inclusion de nouvelles variables matricielles, de façon à obtenir, avec ces degrés de liberté additionnels, des résultats moins conservatifs que ceux obtenus avec la stabilité quadratique. Une propriété fondamentale de ces conditions est la séparation du produit de

la matrice dynamique du système et de la matrice de Lyapunov. Dans ce cas, la stabilité robuste est garantie par une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres, construite à partir des matrices de Lyapunov qui sont des solutions faisables pour un ensemble de LMIs décrites aux sommets du domaine des incertitudes (formulation des incertitudes dans un domaine polytopique). En dépit du fait qu'elles donnent des résultats meilleurs que ceux obtenus avec la stabilité quadratique, ces conditions (appelées ici de stabilité robuste étendue — SE) sont encore conservatives quand elles sont comparées avec le réel domaine de stabilité, probablement parce qu'elles exigent qu'une ou plusieurs variables satisfassent conjointement toutes les LMIs. Des conditions moins rigides (notamment pour les cas de plus grandes dimensions) ont été présentées dans [RP02], basées sur la construction appropriée d'un nombre plus grand de LMIs décrites en fonction des sommets du polytope des incertitudes, dénommées dans ce travail de stabilité robuste (SR_1 pour le cas à temps discret et SR_2 pour le cas à temps continu). Pour les systèmes à temps discret, les tests de stabilité ont évolué d'une manière similaire. Parmi les tests basés sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres on met en relief les approches LMI présentées dans [dOBG99], [dOGH99] (augmentation de l'ordre des LMIs et inclusion de nouvelles variables) et, plus récemment, dans [RP01a] (augmentation du nombre de LMIs).

Une ligne plus ample d'investigation de stabilité passe par l'étude de régions plus générales de stabilité. Dans ce contexte, les régions de stabilité pour les systèmes à temps continu (demi-plan complexe gauche ouvert) aussi bien que pour les systèmes à temps discret (disque unitaire ouvert centré à l'origine du plan complexe) peuvent être vues comme des cas particuliers de la \mathcal{D} -stabilité (robuste), c'est-à-dire l'appartenance de toutes les valeurs propres du système incertain à une région \mathcal{D} du plan complexe. Un avantage immédiat est que le test de stabilité robuste reste, d'une certaine manière, étendu à une région de "performance garantie" en termes du placement régional de pôles. Il est important de mentionner le travail de [GJ81] dans le contexte de l'analyse de \mathcal{D} -stabilité. Plus tard [CG96] propose la synthèse de contrôleurs qui minimisent la norme \mathcal{H}_∞ avec le placement régional de pôles pour lequel sont considérées les régions de premier ordre (voir [Bac98] pour les détails). Mais, dans ce travail, la stabilité quadratique est encore utilisée et, donc, un certain degré de conservatisme est inhérent aux résultats. Une extension des résultats de [GdOH98] est présentée en [PABB00], où, à travers une généralisation des régions traitées par [CG96], différentes régions convexes de premier ordre du plan complexe sont considérées. Dans [PABB00] des conditions convexes décrites par LMIs sont proposées en faisant l'usage de variables matricielles supplémentaires indépendantes du paramètre d'incertitude du système pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste. Les résultats d'analyse présentés dans [PABB00] contiennent ceux de [dOBG99] dans le cas d'analyse de stabilité robuste de systèmes à temps discret. Pour la synthèse, les propositions sont identiques pour le cas des systèmes à temps discret. Notez aussi que les résultats d'analyse de stabilité présentés en [PABB00] peuvent être facilement adaptés pour le cas de synthèse de gain robuste pourvu que la région du plan complexe soit décrite avec $R_{22} > \mathbf{0}$ (voir les équations (2.3)-(2.4)). Il est intéressant de commenter que [PABB00] autant que [RP01a] et [RP02] contiennent la stabilité quadratique comme un cas particulier, dans le sens qu'ils donnent toujours une solution faisable quand le polytope d'incertitude est quadratiquement stable, mais qu'ils sont, cependant, indépendants : une condition peut trouver une solution faisable pour un cas dans lequel l'autre échoue et vice versa.

Dans ce chapitre, une extension des résultats de [PABB00] de façon à obtenir un ensemble fini de conditions convexes qui assurent la \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes incertains, en considérant encore des régions de premier ordre, est présentée. La principale différence est que, ici, les variables de matrices additionnelles sont aussi considérées dépendantes du paramètre incertain. Les principales idées d'augmentation du nombre de LMIs pour la réduction du conservatisme des conditions d'analyse pré-

sentes dans [RP01a] et [RP02] sont utilisées pour obtenir des conditions convexes de dimension finie. Comme toutes les autres conditions, les LMIs proposées ici peuvent être testées par des méthodes numériques éprouvées et de complexité polynomiale [GNLC95]. Les cas des systèmes à temps continu et à temps discret sont abordés comme des cas particuliers de \mathcal{D} -stabilité. Une analyse de la complexité numérique des LMIs utilisées dans chaque type de test est aussi présentée.

2.2 Préliminaires

Considérons le système linéaire

$$\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t) \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\delta[\cdot]$ représente la dérivée par rapport au temps pour les systèmes à temps continu et l'opérateur d'avance pour les systèmes à temps discret et la matrice $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inconnue mais appartient à l'ensemble convexe \mathcal{A}

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \quad (2.2)$$

où les sommets A_j , $j = 1, \dots, N$ sont connus. Considérons aussi la région du plan complexe définie par

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d & z\mathbf{I}_d \end{bmatrix}^* < \mathbf{0} \right\} \quad (2.3)$$

avec $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$, symétrique, donnée par

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}' & R_{22} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

où d est l'ordre de la région. On suppose que $R_{22} \geq \mathbf{0}$ et alors \mathcal{D} définie en (2.3) représente des régions convexes et symétriques par rapport à l'axe réel du plan complexe (voir [PABB00] pour les détails). Observons encore que les régions associées à la stabilité de systèmes à temps continu et à temps discret, respectivement le demi-plan complexe gauche et le disque unitaire centré à l'origine, sont retrouvées avec des choix adéquats de \mathcal{R} et $d = 1$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Définition 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si toutes les valeurs propres de $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ appartiennent à la région \mathcal{D} spécifiée par (2.3).*

En suivant les idées de [CG96], une condition basée sur une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres qui vérifie si $A(\alpha)$ est \mathcal{D} -stable, est proposée dans le lemme suivant, comme cela est présentée dans [PABB00].

Lemme 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice de Lyapunov dépendante de paramètres, symétrique, définie positive, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telle que*

$$R_{11} \otimes P(\alpha) + R_{12} \otimes (P(\alpha)A(\alpha)) + R_{12}' \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.6)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Cela vaut la peine remarquer que l'approche utilisée dans [RP01a] peut être employée ici pour traiter le problème de dimension infinie en α présent dans le Lemme 2.1. On peut encore observer que, si $P(\alpha) = P$, alors ce qu'on appelle la \mathcal{D} -stabilité quadratique est retrouvée à partir du Lemme 2.1.

Définition 2.2 *Le polytope \mathcal{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice de Lyapunov symétrique, définie positive, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telle que*

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA(\alpha)) + R'_{12} \otimes (A(\alpha)'P) + R_{22} \otimes (A(\alpha)'PA(\alpha)) < \mathbf{0} \quad (2.7)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.

Le lemme suivant propose une condition équivalente au Lemme 2.1, cette fois-ci en utilisant des variables matricielles additionnelles et une LMI de dimension plus grande que celle employée en (2.6).

Lemme 2.2 *Le polytope \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice de Lyapunov dépendante de paramètres, symétrique, définie positive, $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices dépendantes de paramètres $F(\alpha) \in \mathcal{R}^{dn \times dn}$ et $G(\alpha) \in \mathcal{R}^{dn \times dn}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ \hline +F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (2.8)$$

pour tout $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. De plus, $P(\alpha)$ solution de (2.8) est aussi solution de (2.6).

Les conditions proposées dans les Lemmes 2.1 et 2.2 sont convexes dans les variables d'optimisation, néanmoins elles sont de dimension infinie en α , ce qui signifie qu'un effort numérique bien grand est nécessaire pour les vérifier (dans le cas où α possède un intervalle continu dans son domaine). Par ailleurs, les conditions établies dans ces deux lemmes n'exigent pas que la matrice $A(\alpha)$ appartienne à l'ensemble convexe \mathcal{A} , équation (2.2), puisque de telles conditions ont besoin d'être vérifiées pour tout α dans le domaine de l'incertitude.

En conséquence, le résultat principal de ce chapitre est présenté : une condition convexe de dimension finie suffisante pour la vérification du Lemme 2.2 dans le cas de \mathcal{A} donné en (2.2).

2.3 Des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathcal{A}

Supposons que les matrices $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ dans le Lemme 2.2 puissent être exprimées comme une combinaison convexe de matrices sommets comme il suit

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j ; \quad F(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j F_j ; \quad G(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G_j ; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

Donc, une condition suffisante pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de \mathcal{A} est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.1 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, telles que*

$$M_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P_j & R_{12} \otimes P_j + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_j - F_j \\ \hline +F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_j & R_{22} \otimes P_j - (G_j + G'_j) \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -(\mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right];$$

$$j = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

$$M_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes (2P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_j + F'_k) \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes (2P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_j + G_k) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - (2F_j + F_k) \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{l} R_{22} \otimes (2P_j + P_k) \\ - 2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.11)$$

$$M_{jkl} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} 2R_{11} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ + (F_j + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)(F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k)(\mathbf{I}_d \otimes A_\ell) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell)(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(F'_k + F'_\ell) \end{array} & \begin{array}{l} 2[R_{12} \otimes (P_j + P_k + P_\ell) \\ - (F_j + F_k + F_\ell)] \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)(G_k + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A_k)(G_j + G_\ell) \\ + (\mathbf{I}_d \otimes A'_\ell)(G_j + G_k) \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{l} R_{22} \otimes 2(P_j + P_k + P_\ell) \\ - 2(G_j + G_k + G_\ell) \\ - 2(G'_j + G'_k + G'_\ell) \end{array} \end{array} \right] \\ < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.12)$$

sont vérifiées, alors \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable et les conditions du Lemme 2.2 sont vérifiées avec $P(\alpha)$, $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$ données en (2.9). De plus, les conditions du Lemme 2.1 sont satisfaites avec cette même matrice $P(\alpha)$.

Preuve : La matrice dépendante de paramètre $P(\alpha)$ donnée par (2.9) avec $P_j > \mathbf{0}$ est, bien sûr, définie positive. En utilisant (2.9) et pour $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ on peut écrire

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{l} R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \end{array} \right] = \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 M_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1; k \neq j}^N \alpha_j^2 \alpha_k M_{jk} + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell M_{jkl} \quad (2.13)$$

En imposant (2.10)-(2.12) et en considérant que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, l'équation (2.13) implique

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} R_{11} \otimes P(\alpha) \\ + F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)') + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha))F(\alpha)' \end{array} & \begin{array}{l} R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \end{array} \\ \hline * & \begin{array}{l} R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \end{array} \right] < \\ - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j; k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.14)$$

Finalement, l'expression du coté droit de (2.14) est semi-définie négative, ce qui assure la faisabilité de (2.8). Voir [LP03a] et [RP01a] pour les détails. ■

Quelques observations par rapport aux LMIs (2.10)–(2.12) et (2.14) sont nécessaires. D'abord, toutes ces LMIs présentent la propriété d'homogénéité, ce qui implique que la matrice du côté droit de (2.14) peut être choisie de forme arbitraire, pourvu qu'elle soit semi-définie positive. Dans ce travail, des matrices indépendantes du paramètre de l'incertitude sont considérées. Cependant, un degré de

liberté additionnel est attendu quand cette matrice là est substituée par une matrice dépendante du paramètre incertain, mais ce cas n'est pas objet d'investigation ici (voir par exemple [LKH04]).

Pour des systèmes précisément connus, c'est-à-dire, avec $N = 1$, seulement la condition (2.10) a besoin d'être vérifiée (avec P_1 , F_1 et G_1). Naturellement, l'ensemble de LMIs (2.12) n'a besoin d'être vérifié que pour des systèmes incertains avec $N \geq 3$.

Comme illustration de régions plus communément utilisées pour l'analyse de stabilité, considérons les régions correspondantes au demi-plan gauche et au disque unitaire centré à l'origine (définies respectivement pour R_C et R_D , en (2.5)). Pour ces régions le Théorème 2.1 a des matrices M_j , M_{jk} et M_{jkl} données par

$$M_j \equiv M_j^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_j + A'_j F'_j}{\star} & \frac{P_j + A'_j G_j - F_j}{-G_j - G'_j} \\ \hline & \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.15)$$

$$M_{jk} \equiv M_{jk}^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{F_j A_k + A'_k F'_j + (F_j + F_k) A_j + A'_j (F'_j + F'_k)}{\star} & \frac{2P_j + P_k + A'_j (G_j + G_k) + A'_k G_j - 2F_j - F_k}{-2(G_j + G'_j) - G_k - G'_k} \\ \hline & \end{array} \right] < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.16)$$

$$M_{jkl} \equiv M_{jkl}^C \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{array}{l} (F_j + F_\ell) A_k + A'_k (F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k) A_\ell + A'_\ell (F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell) A_j + A'_j (F'_k + F'_\ell) \end{array}}{\star} & \frac{\begin{array}{l} 2(P_j + P_k + P_\ell - F_j + F_k + F_\ell) \\ + A'_j (G_k + G_\ell) + A'_k (G_j + G_\ell) \\ + A'_\ell (G_j + G_k) \end{array}}{-2(G_j + G_k + G_\ell) + G'_j + G'_k + G'_\ell} \\ \hline & \end{array} \right] < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.17)$$

pour des systèmes à temps continu et

$$M_j \equiv M_j^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{-P_j + F_j A_j + A'_j F'_j}{\star} & \frac{A'_j G_j - F_j}{P_j - (G_j + G'_j)} \\ \hline & \end{array} \right] < \left[\begin{array}{c|c} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

$$M_{jk} \equiv M_{jk}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{array}{l} -(2P_j + P_k) + F_j A_k + A'_k F'_j \\ (F_j + F_k) A_j + A'_j (F'_j + F'_k) \end{array}}{\star} & \frac{\begin{array}{l} A'_j (G_j + G_k) \\ + A'_k G_j - (2F_j + F_k) \end{array}}{2P_j + P_k - 2(G_j + G'_j) - (G_k + G'_k)} \\ \hline & \end{array} \right] < \frac{1}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; k \neq j \quad (2.19)$$

$$M_{jkl} \equiv M_{jkl}^D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \frac{\begin{array}{l} -2(P_j + P_k + P_\ell) \\ + (F_j + F_\ell) A_k + A'_k (F'_j + F'_\ell) \\ + (F_j + F_k) A_\ell + A'_\ell (F'_j + F'_k) \\ + (F_k + F_\ell) A_j + A'_j (F'_k + F'_\ell) \end{array}}{\star} & \frac{\begin{array}{l} -2(F_j + F_k + F_\ell) + (G_k + A'_j G_\ell) \\ + A'_k (G_j + G_\ell) + A'_\ell (G_j + G_k) \end{array}}{2(P_j + P_k + P_\ell - G_j - G_k - G_\ell) - G'_j - G'_k - G'_\ell} \\ \hline & \end{array} \right] < \frac{6}{(N-1)^2} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N-2; k = j+1, \dots, N-1; \ell = k+1, \dots, N \quad (2.20)$$

pour des systèmes à temps discret.

Notons encore que le résultat principal présenté dans [PABB00] peut être retrouvé dans les conditions du Théorème 2.1, simplement en posant $F_j = F$, $G_j = G$, $j = 1, \dots, N$ et en utilisant la propriété d'homogénéité des LMIs. Dans le cas de la \mathcal{D} -stabilité quadratique, seulement (2.10) a besoin d'être vérifiée car, dans ce cas, (2.11) et (2.12) sont toujours vérifiées. Ce fait peut être vérifié en faisant la somme de versions des M_j dans l'équation (2.10).

Les conditions du Théorème 2.1 peuvent aussi redonner une condition Schur-équivalente à celles présentées dans [RP01a], formulées pour les cas des systèmes à temps discret, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$. Pour cela, on impose $F_j = \mathbf{0}$ et $G_j = G'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ dans (2.18)-(2.20). Pour le cas à temps continu, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, le choix $F_j = F'_j = P_j$, $j = 1, \dots, N$ dans (2.15)-(2.17) récupère dans les blocs (1,1) des LMIs des résultats moins conservatifs que ceux présentés dans [RP02], à cause du plus grand degré en α utilisé dans (2.14).

La différence principale entre les approches présentées dans [RP01a] et [RP02] est le degré en α avec lequel le côté droit de (2.13) est écrit. Dans [RP01a] une fonction de degré trois est utilisée, ainsi que dans les conditions du Théorème 2.1 (voir (2.14)), tandis que dans [RP02] une fonction de degré deux est employée. Des expérimentations numériques ont démontré que l'augmentation du degré de la fonction en α_j au côté droit de (2.14) mène à des conditions chaque fois moins conservatives mais à un coût de calcul chaque fois plus cher. L'augmentation de l'ordre de cette fonction en α_j peut être réussie, par exemple, par la multiplication successive des deux côtés de (2.14) par n'importe quelle puissance de $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$. L'obtention des conditions chaque fois moins conservatives avec cette technique possède des connexions avec le Théorème de Pólya (voyez [HLP52]), mais la recherche de ces conditions est laissée pour des travaux futurs.

Un résultat similaire à celui présenté dans le Théorème 2.1 peut être obtenu en utilisant les idées présentées dans [RP02], c'est-à-dire, en utilisant une expression de degré deux à la place de degré trois du côté droit de (2.13) et (2.14). Ces conditions possèdent une complexité numérique plus petite mais sont plus conservatives que celles-là présentées dans le Théorème 2.1.

Théorème 2.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ et $G_j \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$, $j = 1, \dots, N$, telles que (2.10) et*

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes (P_j + P_k) + F_j(\mathbf{I}_d \otimes A_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)F'_j & R_{12} \otimes (P_j + P_k) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G_k \\ + F_k(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F'_k & + (\mathbf{I}_d \otimes A'_k)G_j - F_j - F_k \\ \hline \star & R_{22} \otimes (P_j + P_k) \\ & -G_j - G'_j - G_k - G'_k \end{array} \right]$$

$$< \frac{2}{N-1} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad j = 1, \dots, N-1; k = j+1, \dots, N; \quad (2.21)$$

sont vérifiées, alors \mathcal{A} est robustement \mathcal{D} -stable et les conditions du Lemme 2.2 et du Théorème 2.1 sont vérifiées avec $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et la matrice de Lyapunov dépendante de paramètres $P(\alpha)$ données en (2.9).

Preuve : Cette preuve est similaire à celle du Théorème 2.1. Notons que, en considérant $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ et avec les matrices $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $P(\alpha)$ données en (2.9), on a $P(\alpha) > \mathbf{0}$ et

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ \hline +F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] = \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 M_j + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \tilde{M}_{jk} \quad (2.22)$$

En imposant (2.10) et (2.21) et en considérant que $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, alors l'équation (2.22) implique

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ \hline +F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < - \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \right) \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \quad (2.23)$$

puisque l'expression dans les parenthèses est toujours plus grande ou égale à zéro :

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N (\alpha_j - \alpha_k)^2 = (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_j \alpha_k \geq 0 \quad (2.24)$$

Comme dans le cas du Théorème 2.1, les conditions du Théorème 2.2 contiennent le cas de \mathcal{D} -stabilité robuste proposé dans [PABB00] et les conditions proposées dans [RP02]. D'autre part, il n'est pas possible à partir de ces conditions de retrouver celles proposées dans [RP01a] à cause de la différence de degré en α_j du côté droit de (2.14) et (2.23). Pour cette raison, les conditions du Théorème 2.2 ne sont que suffisantes pour la faisabilité des LMIs proposées dans le Théorème 2.1.

Les conditions des Théorèmes 2.1 et 2.2 contiennent la \mathcal{D} -stabilité quadratique. Cette dernière peut être obtenue en posant $F_j = F$, $G_j = G$ et $P_j = P = P' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$. Dans ce cas, seule la condition (2.10) a besoin d'être vérifiée (les autres peuvent être écrites comme une somme de termes de celle-ci). Ce résultat est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 *Le polytope \mathcal{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

i) *Il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que*

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes PA_j + R'_{12} \otimes A'_j P & L \otimes A'_j P \\ \hline \star & -\mathbf{I}_d \otimes P \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

avec $R_{22} = LL'$.

ii) *Il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $G \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ et $F \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P + F(\mathbf{I}_d \otimes A_j) + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)F' & R_{12} \otimes P + (\mathbf{I}_d \otimes A'_j)G - F \\ \hline \star & R_{22} \otimes P - (G + G') \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (2.26)$$

Étant donné que les deux conditions du Corollaire 2.1 sont nécessaires et suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité quadratique, il est intéressant de souligner que la condition proposée en *i*) possède une complexité numérique plus petite que celle de la condition *ii*). En revanche, dans le cas de synthèse de contrôleurs (qui n'est pas présenté ici, voir [dOBG99] et [PABB00] pour les détails) la seconde condition présente des avantages sur la première.

2.4 Analyse des conditions LMIs

2.4.1 Complexité numérique

Les conditions suffisantes présentées ici pour la \mathcal{D} -stabilité robuste d'un polytope de matrices, c'est-à-dire les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC₁) et 2.2 (SC₂) et dans le Corollaire 2.1 *i*) (SQ₁) et *ii*) (SQ₂), s'expriment toutes par des tests de faisabilité d'un ensemble de LMIs. Des nos jours il y a des algorithmes efficaces basés sur des méthodes de points intérieurs, de complexité polynomiale, pour la résolution de ces problèmes. La complexité de problèmes formulés par des LMIs est associée au nombre \mathcal{K} de variables en échelle et aussi au nombre \mathcal{L} de lignes du système d'équations (LMIs). Le nombre d'opérations en point flottant ou le temps nécessaire pour résoudre un problème en utilisant des méthodes de points intérieurs du *LMI Control Toolbox* du Matlab [GNLC95], est proportionnel à $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$. D'autres programmes peuvent présenter une performance différente. Voir aussi [BEFB94] pour des commentaires sur des méthodes de résolution de LMIs.

La Table 2.1 montre les valeurs de \mathcal{K} et \mathcal{L} pour chaque test présenté — SC₁, SC₂, SQ₁ et SQ₂ — n étant le nombre d'états du système, N le nombre de sommets du polytope et d l'ordre de la région considérée. Dans cette table, les complexités associées aux tests de stabilité proposés dans [RP01a] (cas à temps discret, SR₁), [RP02] (cas à temps continu, SR₂) et [PABB00] (SE) sont montrées. Les expressions pour \mathcal{K} et \mathcal{L} pour les cas à temps continu et à temps discret sont aussi présentées.

Les conditions SQ₁ et SQ₂ présentent des complexités moins grandes que tous les autres critères, néanmoins les résultats produits sont plus conservatifs. Une comparaison plus détaillée de la complexité des méthodes SE, SR₁ et SR₂, toutes moins conservatives que SQ₁ et SQ₂ et basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, est dépeinte dans la Figure 2.1 pour le cas à temps discret et dans la Figure 2.2 pour le cas à temps continu. Dans le cas à temps discret, la complexité du critère SR₁ est moins grande que celle du SE pour $N \leq 5$ et plus grande pour $N > 6$, indépendamment de n . Pour $N = 8$ et $n \geq 3$ la complexité associée à SR₁ est à peu près deux fois plus grande que celle du critère SE (voir Figure 2.1.(a)). Dans la Figure 2.1.(b) la complexité relative SR₁/SE est montrée par rapport au nombre de sommets. On peut observer que l'influence de N^3 dans le critère SR₁ devient rapidement le facteur prépondérant de ce quotient.

Comme dans le cas à temps discret, la Figure 2.2.(a) décrit la complexité relative SR₂/SE en fonction du nombre d'états n pour plusieurs valeurs de N . On peut apercevoir que la complexité du critère SR devient plus grande que celle du SE pour $N > 11$. Dans la Figure 2.2.(b) la complexité relative SR₂/SE est exprimée par rapport au nombre de sommets. On peut aussi observer que l'influence de N^2 dans le critère SR₂ devient le facteur prépondérant pour des valeurs grandes de N ($N > 20$), indépendant du nombre d'états n .

Sûrement, les critères SC₁ et SC₂ sont de plus grande complexité, puisqu'ils possèdent plus de variables en échelle et plus de lignes de LMIs que tous les autres. Toutefois, ces critères continuent à être résolus en temps polynomial par des algorithmes spécialisés de points intérieurs. Le critère SC₁ possède une complexité plus grande que SC₂, car ce dernier utilise une augmentation basée sur une fonction de degré deux en α_j , alors que le premier utilise une augmentation de degré trois,

Critère		\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
SC ₁	Région \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$\frac{Nn}{3} (d(N^2 + 3N + 2) + 3)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2 + 3N + 5)$
SC ₂	Région \mathcal{D}	$\frac{Nn}{2} (1 + (4d^2 + 1)n)$	$Nn(1 + d(N + 1))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n + 1)$	$Nn(N + 2)$
SQ ₁	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2dNn$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n + 1)$	$2Nn$
SQ ₂	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1 + (1 + 4d^2)n)$	$(2dN + 1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n + 1)$	$(2N + 1)n$
SE	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (N + (N + 4d^2)n)$	$Nn(2d + 1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (N + (N + 4)n)$	$3Nn$
SR ₁	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2 + 3N + 8)$
SR ₂	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n + 1)$	$\frac{Nn}{2} (N + 3)$

TAB. 2.1 – Nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et ordre de la région (d), quand pertinent, pour les conditions proposées dans les Théorèmes 2.1 (SC₁) et 2.2 (SC₂), dans le Corollaire 2.1 *i*) (SQ₁) et *ii*) (SQ₂), en [PABB00] (SE), en [RP01a] (SR₁) pour le cas à temps discret et en [RP02] (SR₂) pour le cas à temps continu.

équation (2.14). Une comparaison de complexité entre les critères SC₁ et SC₂ montre que le rapport de complexité (en assumant la proportionnalité à $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$) est donné par

$$\mathcal{K}^3\mathcal{L} \left(\frac{\text{SC}_1}{\text{SC}_2} \right) = \frac{N^2 + 3N + 5}{3(N + 2)} \cong 0.3265N + 0.5118 \quad (2.27)$$

Cette évaluation nous enseigne que l'augmentation dans le degré de la fonction en α_j de deux à trois résulte dans un ajout relatif de complexité numérique qui varie de façon linéaire avec le nombre de sommets du polytope, N , et ne dépend pas du nombre d'états, n . Utilisant (2.27) on aperçoit que la complexité numérique de SC₁ double par rapport à celle de SC₂ quand le nombre de sommets N passe de 4 à 5.

2.4.2 Le temps de calcul

Quelques expérimentations numériques ont été réalisées afin de donner une estimation du temps de calcul nécessaire pour que chacune des conditions LMI considérées obtienne une solution faisable. Les conditions des Théorèmes 2.1 et 2.2 ont été considérées dans des versions particulières, c'est-à-dire,

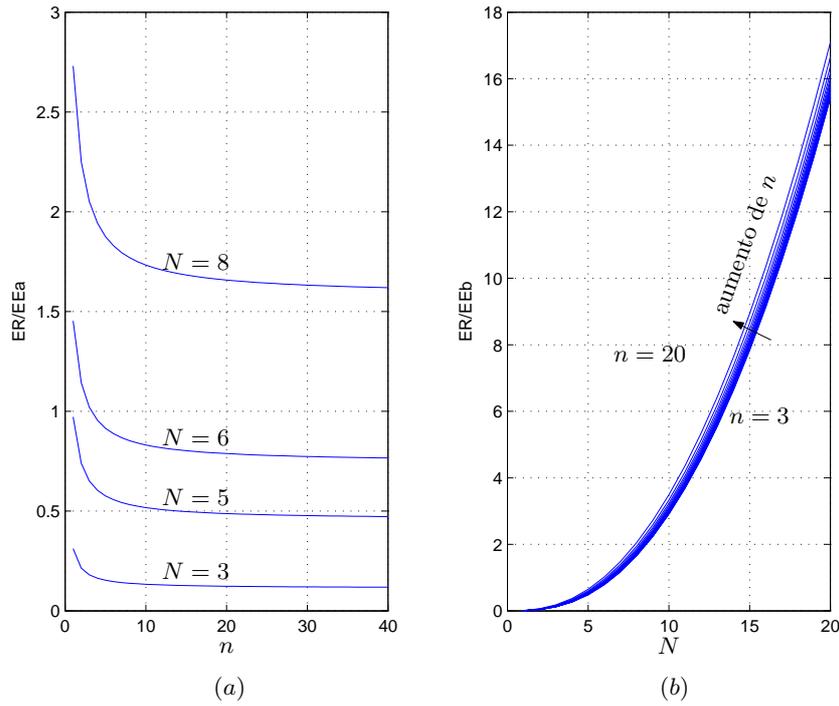


FIG. 2.1 – Complexité numérique relative (a) SR_1/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps discret).

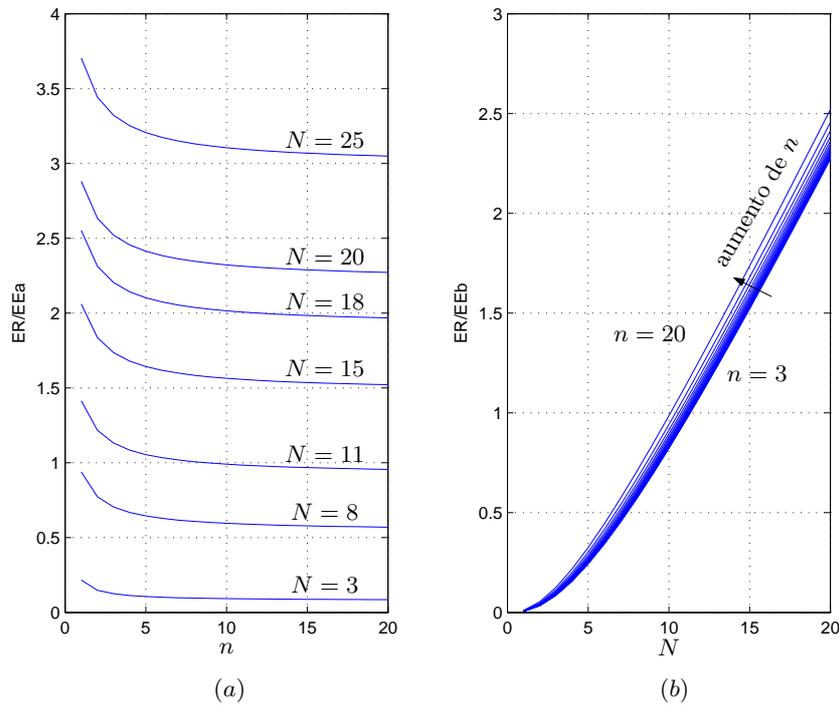


FIG. 2.2 – Complexité numérique relative (a) SR_2/SE en fonction du nombre d'états n et (b) SR_2/SE par rapport au nombre de sommets N (cas à temps continu).

avec M_j , M_{jk} et M_{jkl} données par (2.15)-(2.17) pour le cas à temps continu et par (2.18)-(2.20) pour le cas à temps discret.

Comme attendu, la complexité numérique associée à la condition LMI la moins conservatrice, du Théorème 2.1, est la plus grande de toutes les conditions, cependant elle n'est pas prohibitive. Le temps moyen pour chaque test avec $n = 2$ et $N = 2$ reste au-dessous de 20 ms pour tous les méthodes

(dans les deux cas : à temps continu et à temps discret). Pour les systèmes avec $n = 5$ et $N = 5$ les temps de calcul trouvés pour le cas à temps continu ont été de 40 ms (SQ_1), 70 ms (SE), 24 ms (SR_2), 101 s (SC_1) et 37 s (SC_2) (pour des systèmes à temps discret, 40 ms, 75 ms, 1.9 s 101 s et 37 s, respectivement). Les tests ont été faits avec un ordinateur muni d'un processeur AMD K7 Athlon 1.4 GHz, avec 256 Mbytes de RAM, en utilisant *Matlab* et le *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. On peut voir aussi [dOOL⁺02b] pour une comparaison numérique par rapport aux critères SQ_1 , SE, SR_1 et SR_2 et [LP03a] pour d'autre comparaison y compris avec les critères SC_1 et SC_2 .

2.5 Conclusion

Des conditions formulées en termes de tests de faisabilité d'un ensemble de LMIs définies par les sommets du polytope d'incertitude ont été proposées pour l'étude de la \mathcal{D} -stabilité robuste de systèmes linéaires incertains dans des domaines polytopiques. Même si ces conditions présentent une complexité numérique plus grande que d'autres basées sur des fonctions de Lyapunov linéaires dépendants de paramètres, l'amélioration dans le nombre de polytopes stables identifiés est significative (voir [LP03a]). En particulier la condition du Théorème 2.1 donne une évaluation positive par rapport aux autres conditions. Même avec un nombre plus élevé de variables en échelle et de lignes dans les LMIs, les conditions du Théorème 2.1 peuvent être calculées en temps polynomial avec des algorithmes de points intérieurs. À partir des résultats présentés, plusieurs extensions et généralisations peuvent être pressenties, comme par exemple, les problèmes de coûts garantis \mathcal{H}_2 [dOL⁺04a] et \mathcal{H}_∞ [dOL⁺04b].

Chapitre 3

\mathcal{D} -stabilité robuste de matrices polynomiales

Des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste d'un polytope de matrices polynomiales, c'est-à-dire, des tests qui assurent l'appartenance de tous les zéros d'un polynôme matriciel incertain à une région \mathcal{D} du plan complexe, sont proposées dans ce chapitre. Ces tests de stabilité robuste sont formulés en termes de LMIs définies aux sommets du polytope d'incertitude. Si ces tests sont faisables, alors ils fournissent une fonction de Lyapunov dépendante de paramètres qui assure la stabilité de tous les polynômes matriciels dans le domaine d'incertitude considéré. On analyse les cas de stabilité à temps continu (demi-plan gauche) et à temps discret (dans le disque unitaire). Ces conditions généralisent et contiennent d'autres conditions de la littérature. Elles fournissent également une méthode numérique efficace pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste de polynômes matriciels. Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être partiellement trouvés dans [LOdP04] et [dOLP04].

3.1 Introduction

Des tests de stabilité de polynômes ont joué un rôle d'importance dans la littérature spécialisée ces dernières années, comme par exemple le résultat de Kharitonov [Kha78] pour des polynômes aux coefficients définis par des intervalles, ou le théorème dit "théorème des bornes" [BHL88] pour les polytopes de polynômes. Il faut voir [Bar94] et [BCK95] pour plus de détails sur la stabilité robuste de polynômes. Cependant, l'extension de ces résultats pour traiter des polytopes de matrices polynomiales ne semble pas immédiate et des tests conclusifs sur la stabilité de familles de polynômes dont les coefficients sont des fonctions multilinéaires des paramètres d'incertitude sont des problèmes connus comme NP-difficiles [BT00].

Dans [HAPŠ01], des conditions formulées en termes de LMIs récemment publiées dans la littérature pour tester la stabilité d'un polytope de matrices [GdOH98], [dOBG99], [PABB00] ont été étendues au cas de polytope de matrices polynomiales. Toutefois, plus récemment de nouvelles conditions LMIs, moins conservatives que les dernières, ont été publiées pour l'analyse de stabilité de systèmes linéaires à temps discret [RP01a] et à temps continu [RP01b], [RP02].

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices polynomiales sont formulées en termes de LMIs, qui sont obtenues à partir de l'extension des résultats de [LP03a] (aussi discutés dans le Chapitre 2). Ces conditions aboutissent à des résultats moins conservatifs que ceux obtenus par les méthodes basées sur la stabilité quadratique et aussi moins conservatifs que les résultats de [HAPŠ01], surtout quand la complexité (c'est-à-dire, l'ordre et le nombre de sommets) des polytopes de matrices polynomiales est augmentée. La \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope est assurée par un test simple de faisabilité sur l'ensemble de LMIs, qui sont définies aux sommets du

domaine d'incertitude, et peuvent être résolues de façon efficace à l'aide des algorithmes de complexité polynomiale [GNLC95].

3.2 Préliminaires

Considérons une matrice polynomiale carrée $A(s)$ de dimension n et degré g avec coefficients $A^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, g$, définie comme

$$A(s) = A^0 + A^1 s + \dots + A^g s^g \quad (3.1)$$

où $s \in \mathbb{C}$. Définissons la matrice constante $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$, associée à $A(s)$ comme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^0 & A^1 & \dots & A^{g-1} & A^g \end{bmatrix}; \quad A^g = \mathbf{I}_n \quad (3.2)$$

dont l'espace nul à droite $\mathcal{N}_{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$, c'est-à-dire $\mathbf{A}\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, peut être donné par

$$\mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \\ -A^0 & -A^1 & \dots & -A^{g-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Un zéro de $A(s)$ est défini comme [Kai80] la valeur complexe ζ pour laquelle on a une perte du rang de la matrice $A(s)$, c'est-à-dire, $\text{rang}\{A(\zeta)\} < \text{rang}\{A(s)\}$, et il peut être déterminé par le calcul du déterminant de $A(s)$. Notons aussi que, pour une sous-région \mathcal{D} du plan complexe, le problème d'analyse de \mathcal{D} -stabilité de $A(s)$ se résume à déterminer des conditions qui assurent que tous les zéros de $A(s)$ appartiennent à \mathcal{D} . L'objectif de ce chapitre est de chercher des conditions qui puissent assurer la \mathcal{D} -stabilité robuste de matrices polynomiales incertaines, $A(s, \alpha)$. En d'autres termes, on veut déterminer des conditions qui vérifient si tous les zéros de $A(s, \alpha)$ appartiennent à une région bien déterminée \mathcal{D} du plan complexe pour tous les α admissibles. Pour cela, on considère la description de la région convexe \mathcal{D} donnée en (2.3), en ne prenant que des régions d'ordre $d = 1$, c'est-à-dire, pour $R_{11} = r_{11}$, $R_{12} = r_{12}$ et $R_{22} = r_{22}$ scalaires. Ainsi, on considère dans ce chapitre la portion du plan complexe déterminée par

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix} \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & z \end{bmatrix}^* < 0 \right\} \quad (3.4)$$

où

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}; \quad r_{22} \geq 0 \quad (3.5)$$

Comme dans le Chapitre 2, le demi-plan gauche et le disque unitaire à l'origine du plan complexe forment des régions d'intérêt particulier, pour lesquelles on a, respectivement, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$ donnés dans (2.5). Pour des détails par rapport aux autres façons de définition de régions du plan complexe, voir [CG96], [HAPŠ01], [HBS01], [PABB00]. On suppose, sans perte de généralité et aussi par simplicité, qu'il n'y a pas de matrices polynomiales incertaines avec des zéros à l'infini, et aussi que le terme de degré g est une matrice du type identité de dimension n , $A^g \equiv \mathbf{I}_n$ [HBS01].

Similairement au cas précisément connu, définissons pour la j -ème matrice polynomiale

$$A_j(s) = A_j^0 + A_j^1 s + \dots + \mathbf{I}_n s^g \quad (3.6)$$

de dimension n et degré g la j -ème matrice constante $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times (g+1)n}$ donnée par

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} A_j^0 & A_j^1 & \dots & A_j^g \end{bmatrix}; \quad A_j^g = \mathbf{I}_n \quad (3.7)$$

Ainsi, étant données N matrices polynomiales de dimension n et degré g , aux coefficients réels représentées par A_j , $j = 1, \dots, N$, on définit le polytope \mathbb{A} qui contient les matrices

$$A(s, \alpha) = \alpha_1 A_1(s) + \dots + \alpha_N A_N(s); \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$$

comme

$$\mathbb{A} \triangleq \left\{ A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times gn} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j ; \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \quad (3.8)$$

En dénotant par $\mathcal{N}_{A_j} \in \mathbb{R}^{(g+1)n \times gn}$ une base de l'espace nul à droite de la matrice A_j , c'est-à-dire, $A_j \mathcal{N}_{A_j} = \mathbf{0}$, et en reprenant que par hypothèse $A^g = \mathbf{I}_n$, on a

$$\mathcal{N}_{A_j} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n & & & \\ -A_j^0 & -A_j^1 & \dots & -A_j^{g-1} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Notons que, en utilisant cette structure pour la matrice \mathcal{N}_{A_j} , $\mathcal{N}_{A(\alpha)}$ est une base pour l'espace nul à droite de $A(\alpha)$ qui s'écrit comme

$$\mathcal{N}_{A(\alpha)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathcal{N}_{A_j} ; \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.10)$$

Comme dans [HAPŠ01], on définit la matrice de projection $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{2gn \times (g+1)n}$

$$\mathcal{T} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{gn \times n} \\ \mathbf{0}_{gn \times n} & \mathbf{I}_g \otimes \mathbf{I}_n \end{array} \right] \quad (3.11)$$

Dans ce qui suit, des définitions et des conditions essentielles trouvées dans la littérature et qui sont utilisées après pour l'obtention du résultat principal sont présentées.

Définition 3.1 *La matrice polynomiale $A(s)$ donnée en (3.1) est \mathcal{D} -stable si tous ces zéros appartiennent à la région \mathcal{D} du plan complexe décrite par (3.4)-(3.5).*

Une condition pour la vérification de \mathcal{D} -stabilité d'un polynôme matriciel précisément connu est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 3.1 *La matrice polynomiale $A(s)$ est \mathcal{D} -stable si et seulement s'il existe une matrice définie positive $P = P' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ telle que*

$$\mathcal{N}'_A \mathcal{T}' (\mathcal{R} \otimes P) \mathcal{T} \mathcal{N}_A < 0 \quad (3.12)$$

Pour le cas incertain, considérez la définition suivante de \mathcal{D} -stabilité robuste.

Définition 3.2 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable si tous les zéros de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ appartiennent à la région \mathcal{D} décrite par (3.4)-(3.5).*

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de $A(\alpha) \in \mathbb{A}$ sont données dans le lemme suivant.

Lemme 3.2 *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- a) *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable.*

b) Il existe une matrice définie positive et dépendante de paramètres $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ telle que

$$\mathcal{N}'_{\mathbb{A}(\alpha)} \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) \mathcal{T} \mathcal{N}_{\mathbb{A}(\alpha)} < \mathbf{0} \quad (3.13)$$

c) Il existe une matrice définie positive et dépendante de paramètres $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ et une matrice dépendante de paramètres $Q(\alpha) \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$ telles que

$$\mathbf{M}(\alpha) \triangleq \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P(\alpha)) \mathcal{T} + \mathbf{A}(\alpha)' Q(\alpha)' \mathcal{T} + \mathcal{T}' Q(\alpha) \mathbf{A}(\alpha) < \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Notons que la \mathcal{D} -stabilité de $\mathbb{A}(\alpha)$ dans le polytope \mathbb{A} peut être vérifiée par l'existence de $P(\alpha) = P(\alpha)'$ dans l'équation (3.13) ou (3.14). Dans cette dernière équation, une variable matricielle additionnelle, $Q(\alpha)$, est jointe. Cependant, un nombre infini de points α (dans le cas où α est continu dans ce domaine) aurait besoin d'être vérifié pour assurer la stabilité de tout le polytope \mathbb{A} .

Une simplification largement employée dans la littérature consiste à utiliser une même matrice $P = P'$, fixe et indépendante du paramètre, pour assurer la \mathcal{D} -stabilité de tout le polytope \mathbb{A} . Dans ce cas on a la \mathcal{D} -stabilité quadratique de \mathbb{A} .

Lemme 3.3 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est quadratiquement \mathcal{D} -stable s'il existe une matrice définie positive indépendante du paramètre, $P = P \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$, telle que*

$$\mathcal{N}'_{\mathbb{A}_j} \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P) \mathcal{T} \mathcal{N}_{\mathbb{A}_j} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Dans la suite, on donne des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope \mathbb{A} , exprimées comme un ensemble fini de LMIs décrites aux sommets de \mathbb{A} .

3.3 Conditions pour la \mathcal{D} -stabilité du polytope \mathbb{A}

Dans le théorème suivant sont fournies des conditions suffisantes pour la \mathcal{D} -stabilité robuste de \mathbb{A} par rapport à la région générale du plan complexe donnée par la matrice \mathcal{R} , à partir d'un nombre fini de LMIs.

Théorème 3.1 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable s'il existe des matrices définies positives $P_j = P_j' \in \mathbb{R}^{gn \times gn}$ et des matrices $Q_j \in \mathbb{R}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$, qui résolvent le problème de faisabilité pour les LMIs suivantes*

$$\mathbf{M}_j \triangleq \mathcal{T}'(\mathcal{R} \otimes P_j) \mathcal{T} + \mathbf{A}'_j Q'_j \mathcal{T} + \mathcal{T}' Q_j \mathbf{A}_j < -(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n); \quad j = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}_{jk} \triangleq \mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (2P_j + P_k)] \mathcal{T} + (\mathbf{A}'_j Q'_j + \mathbf{A}'_j Q'_k + \mathbf{A}'_k Q'_j) \mathcal{T} + \mathcal{T}'(Q_j \mathbf{A}_j + Q_k \mathbf{A}_j + Q_j \mathbf{A}_k) < \frac{1}{(N-1)^2} (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N, \quad k \neq j, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M}_{jkl} \triangleq 2\mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k + P_\ell)] \mathcal{T} + (\mathbf{A}'_j Q'_\ell + \mathbf{A}'_\ell Q'_j + \mathbf{A}'_k Q'_\ell + \mathbf{A}'_\ell Q'_k + \mathbf{A}'_j Q'_k + \mathbf{A}'_k Q'_j) \mathcal{T}$$

$$+ \mathcal{T}'(Q_j \mathbf{A}_\ell + Q_\ell \mathbf{A}_j + Q_k \mathbf{A}_\ell + Q_\ell \mathbf{A}_k + Q_k \mathbf{A}_j + Q_j \mathbf{A}_k) < \frac{6}{(N-1)^2} (\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N-2, \quad k = j+1, \dots, N-1, \quad \ell = k+1, \dots, N \quad (3.18)$$

où $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_j}$ et \mathcal{T} sont données dans (3.9) et (3.11), respectivement. Dans le cas positif, la matrice définie positive $P(\alpha)$ donnée par

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.19)$$

et la matrice

$$Q(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j Q_j > 0, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (3.20)$$

satisfont les conditions du Lemme 3.2.

D'abord notons que l'imposition de $(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n)$ dans le côté droit de (3.16)-(3.18) peut être faite sans perte de généralité, puisque ces équations sont homogènes en P_j et la \mathcal{D} -stabilité des sommets est une condition nécessaire pour la \mathcal{D} -stabilité du domaine \mathbb{A} .

Observons aussi que pour une matrice polynomiale précisément connue ($N = 1$), on n'a besoin de vérifier que la condition (3.16), avec P_1 et Q_1 . La condition (3.18) n'a besoin d'être considérée que pour $N \geq 3$.

Il est possible de retrouver les conditions de \mathcal{D} -stabilité quadratique du Lemme 3.3 à partir du Théorème 3.1, en imposant $Q_j = Q$ et $P_j = P = P'$, $j = 1, \dots, N$ dans les conditions (3.16)-(3.18). De plus, la condition de \mathcal{D} -stabilité robuste proposée dans [HAPŠ01] peut être reprise à partir des conditions du Théorème 3.1 (équation (3.16)), tout simplement en faisant $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ et en utilisant la propriété d'homogénéité des LMIs. Dans ce cas, les conditions (3.17)-(3.18) sont toujours vérifiées.

Les conditions des Théorèmes 1 (cas à temps continu) et 2 (cas à temps discret) de [dOP02] peuvent être reprises à partir du Théorème 3.1. Pour cela, il suffit de considérer les régions \mathcal{R}_C (demi-plan complexe gauche de \mathbb{R}^2) et \mathcal{R}_D (disque unitaire à la origine du plan complexe) définies en (2.5). Pour retrouver les conditions du Théorème 1 de [dOP02] il suffit d'imposer \mathcal{R}_C dans les équations du Théorème 3.1, choisir $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ dans (3.16)-(3.17), multiplier (3.16) par $\mathcal{N}'_{\mathbb{A}_j}$ à gauche et par son conjugué transposé à droite, et multiplier (3.17) par $\mathcal{N}'_{2\mathbb{A}_j+\mathbb{A}_k}$ à gauche et par son conjugué transposé à droite. De cette façon, l'inégalité (3.18) est toujours vérifiée.

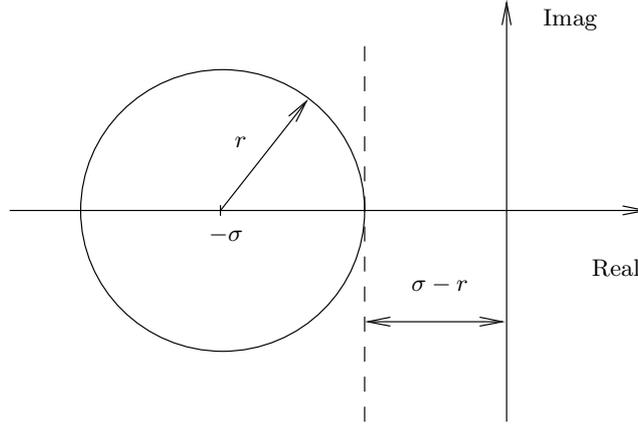
Similairement, la condition de stabilité pour les systèmes à temps discret et matrices polynomiales incertaines proposée dans le Théorème 2 de [dOP02] peut être retrouvée à partir des conditions du Théorème 3.1. Pour cela, il suffit de poser $Q_j = Q$, $j = 1, \dots, N$ dans (3.16)-(3.18) et de multiplier ces équations à droite et à gauche par des combinaisons adéquates de $\mathcal{N}'_{\mathbb{A}_j}$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_j}$, respectivement.

Donc, le Théorème 3.1 contient les résultats de [HAPŠ01] (qui utilisent une matrice dépendante de paramètres $Q(\alpha)$ au lieu d'utiliser une matrice fixe, Q) et de [dOP02] (quand on considère $Q(\alpha)$ et généralise la région du plan complexe qui va être testée).

Dans ce chapitre sont étudiés des régions de \mathcal{D} -stabilité largement employées dans le cadre de systèmes à temps continu et à temps discret : le demi-plan et le disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe. D'autres régions de premier ordre sont aussi de grand intérêt et peuvent, bien sûr, être investiguées. Par exemple, la \mathcal{D} -stabilité robuste de polytope de matrices polynomiales par rapport à l'intérieur du disque de rayon r centré sur $(-\sigma, 0)$ — c'est-à-dire, qu'il est déplacé en $\sigma - r$ à gauche de l'axe imaginaire — illustré dans la Figure 3.1. Cette portion du plan complexe — utilisée dans [HB92], [LMP04], [LMPJ02], [LP02], [LP05] — pourrait être considérée avec les conditions du Théorème 3.1, en remplaçant \mathcal{R} par

$$\tilde{\mathcal{R}}_D = \begin{bmatrix} 2\sigma^2 - r^2 & -\sigma \\ -\sigma & 1 \end{bmatrix}$$

Notons que, si les pôles d'un système à temps continu sont confinés dans la région présentée dans la Figure 3.1, on garantit que toute la dynamique du système peut être limitée par des exponentielles avec coefficients dans l'intervalle $-\sigma \pm r$ et des fréquences (partie imaginaire des pôles) plus petites ou égales à r . En particulier, pour les systèmes du second ordre, cette région du plan complexe garantit un

FIG. 3.1 – Région du plan complexe décrite par $\tilde{\mathcal{R}}_D$.

facteur d'amortissement (dans le pire cas) donné par le $\cos(\cdot)$ d'angle déterminé par la droite tangente au disque et qui passe par l'origine, et de fréquence naturelle amortie limitée par le rayon du disque.

Comme observé dans le Chapitre 2 relativement aux conditions LMI du Théorème 2.1, le Théorème 3.1 a été obtenu en utilisant une expression en α_j de degré trois. Un résultat similaire, cependant plus conservatif, peut être obtenu en utilisant une expression en α_j de degré deux, comme cela est présenté dans le Théorème suivant.

Théorème 3.2 *Le polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} est robustement \mathcal{D} -stable s'il existe des matrices positives définies $P_j \in \mathbb{R}^{g_n \times g_n}$ et des matrices $Q_j \in \mathbb{R}^{2g_n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, solutions de (3.16) et*

$$\tilde{M}_{jk} \triangleq \mathcal{T}'[\mathcal{R} \otimes (P_j + P_k)]\mathcal{T} + (A'_j Q'_k + A'_k Q'_j)\mathcal{T} + \mathcal{T}'(Q_k A_j + Q_j A_k) < \frac{2}{N-1}(\mathbf{I}_{g+1} \otimes \mathbf{I}_n);$$

$$j = 1, \dots, N-1, k = j+1, \dots, N \quad (3.21)$$

où N_{A_j} et \mathcal{T} sont données respectivement en (3.9) et (3.11). $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$, sont alors données respectivement par (3.19) et (3.20), et satisfont les conditions du Lemme 3.2.

Les conditions du Théorème 3.2 contiennent les conditions LMI du Lemme 3.3, les conditions proposées dans [HAPŠ01] et le Théorème 1 de [dOP02]. Cependant, le Théorème 2 proposé dans [dOP02] (cas à temps discret) n'est pas contenu dans le Théorème 3.2 à cause de la différence de degré en α_j . Toutefois, les conditions du Théorème 3.2 ne sont que suffisantes par rapport à celles du Théorème 3.1.

3.3.1 Polynômes matriciels de premier ordre

Un cas d'intérêt particulier pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité robuste est quand le degré du polynôme matriciel est $g = 1$. Dans ce cas, l'étude de \mathcal{D} -stabilité robuste du polynôme matriciel est équivalente à l'étude de la \mathcal{D} -stabilité de systèmes dynamique linéaires du type $\delta[x(t)] = A(\alpha)x(t)$. Considérez le polynôme matriciel de premier ordre donné par

$$A(s, \alpha) = -A(\alpha) + s\mathbf{I}_n \quad (3.22)$$

Dans ce cas, les conditions proposées dans ce chapitre permettent de retrouver celles proposées dans le Chapitre 2, pour les régions de premier ordre ($d = 1$).

De cette façon, pour le polynôme matriciel à degré $g = 1$ donné par (3.22) avec $A(\alpha) \in \mathcal{A}$, voir (2.2), les régions de stabilité concernant le cas à temps continu et à temps discret décrites par les matrices \mathcal{R}_C et \mathcal{R}_D , données dans (2.5), peuvent être retrouvées. En utilisant la formulation employée dans le Théorème 3.1 avec $g = 1$ et en supposant

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} -A_j & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} -F_j \\ -G_j \end{bmatrix}; \quad j = 1, \dots, N$$

on obtient que les conditions (3.16)-(3.18) peuvent être réécrites comme dans (2.15)-(2.17) pour $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ et comme dans (2.18)-(2.20) pour $\mathcal{R} = \mathcal{R}_D$, en changeant, dans les deux cas, les matrices du coté droit des inégalités par \mathbf{I}_n , sans affecter le résultat final grâce à la propriété d'homogénéité.

3.3.2 Complexité numérique

En termes de complexité, des méthodes de résolution basées sur des points intérieurs ont besoin d'un nombre d'opérations en point flottant de l'ordre de $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$, où \mathcal{K} est le nombre de variables scalaires du problème d'optimisation et \mathcal{L} est le nombre de lignes des LMIs [BEFB94], [GNLC95].

Le Tableau 3.1 montre les valeurs de \mathcal{K} et \mathcal{L} pour les Théorèmes 3.1 (TE₁) et 3.2 (TE₂), Lemme 3.3 (DQ), Théorème 1 proposé en [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) et pour les Théorèmes 1 (T1_{dOOP}) et 2 (T2_{dOOP}) proposés en [dOP02]. Dans ce tableau, n est le nombre d'états du polynôme matriciel, N est le nombre de sommets du polytope \mathbb{A} et g le degré du polynôme. Comme cela est pertinent, les expressions pour \mathcal{K} et \mathcal{L} sont spécialisées pour le demi-plan gauche où pour le disque unitaire centré sur l'origine (respectivement pour les cas à temps continu et à temps discret) sont aussi montrées.

Bien que le nombre de variables scalaires englobé dans T1_{dOOP} soit plus petit que dans T1_{HAPS}, le nombre de LMIs augmente avec N^2 et ce facteur devient dominant pour N grand, ($N > 20$). Notons que, dans le cas à temps discret, la complexité est augmentée par rapport au résultat de T1_{dOOP}, puisque, bien que le nombre de variables scalaires soit le même, le nombre de LMIs a augmenté. Finalement, dans le cas de matrices polynomiales de la forme $A_j(s) = -(A_j - s\mathbf{I}_n)$, les conditions du Théorème 3.1 se réduisent au résultat de la stabilité robuste de systèmes à temps discret, trouvé dans [RP01a], en suivant un développement identique à celui pris pour le cas à temps continu (voir les commentaires après le Théorème 3.1).

L'utilisation de matrices $P(\alpha)$ dépendantes de paramètres données par (3.19) a permis l'obtention de conditions suffisantes pour la stabilité robuste du polytope de matrices polynomiales \mathbb{A} . Le nombre de LMIs du Théorème 3.1 est le même que pour T2_{dOOP}, mais pour le premier le nombre de variables scalaires est plus grand que pour le dernier.

Des tests ont été réalisés avec un ordinateur muni d'un processeur Pentium IV 2.6 GHz avec 512 Mbytes de mémoire RAM en utilisant le logiciel *Matlab* et sa boîte à outil *LMI Control Toolbox* [GNLC95]. Le temps moyen en processeur utilisé par les conditions du Théorème 3.1 reste, typiquement, entre 1s (pour les cas à $n = 2$, $N = 2$ et $g = 2$) et 3000s (pour les cas à $n = 4$, $N = 5$ et $g = 4$) pour les systèmes à temps discret aussi bien que pour les systèmes à temps continu.

Remarque 3.1 Les conditions formulées dans ce chapitre supposent que le polytope \mathbb{A} est défini par des matrices réelles. Cependant, si les matrices en \mathbb{A} sont complexes, c'est-à-dire $\mathbf{A}_j \in \mathbb{C}^{n \times (g+1)n}$, alors les conditions proposées ici peuvent être utilisées à condition que la recherche de matrices $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ soit aussi faite dans le domaine des nombres complexes. Dans ce cas, on a $P_j = P_j^* \in \mathbb{C}^{gn \times gn}$, $j = 1, \dots, N$, matrices hermitiennes définies positives, $Q_j \in \mathbb{C}^{2gn \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et la région \mathcal{R} appartient au plan complexe.

Critère		\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
TE ₁	Région \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2+3N+2+g(N^2+3N+8))$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$\frac{Nn}{3} (N^2+3N+5)$
TE ₂	Région \mathcal{D}	$\frac{Nng}{2} ((4+g)n+1)$	$\frac{Nn}{2} (g(N+3)+N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (5n+1)$	$Nn(N+2)$
DQ	Région \mathcal{D}	$\frac{gn}{2} (gn+1)$	$gn(N+1)$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (n+1)$	$n(N+1)$
T1 _{HAPS}	Région \mathcal{D}	$\frac{n}{2} (1+(1+4d^2)n)$	$(2dN+1)n$
	\mathcal{R}_C ou \mathcal{R}_D	$\frac{n}{2} (5n+1)$	$(2N+1)n$
T2 _{dOOP}	\mathcal{R}_D	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{6} (N^2+3N+8)$
T1 _{dOOP}	\mathcal{R}_C	$\frac{Nn}{2} (n+1)$	$\frac{Nn}{2} (N+3)$

TAB. 3.1 – Le nombre de variables scalaires (\mathcal{K}) et le nombre de lignes LMI (\mathcal{L}) en fonction du nombre d'états (n), sommets (N) et degré du polynôme matriciel (g), pour les conditions proposées dans les Théorèmes 3.1 (TE₁) et 3.2 (TE₂), dans le Lemme 3.3 (DQ), dans le Théorème 1 de [HAPŠ01] (T1_{HAPS}) et dans les Théorèmes 1 (T1_{dOOP}) (demi-plan gauche du plan complexe) et 2 (T2_{dOOP}) (disque unitaire centré sur l'origine du plan complexe) proposés dans [dOP02].

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour l'analyse de \mathcal{D} -stabilité de polytope de matrices polynomiales moins conservatives que celles existantes dans la littérature sont étudiées. Ces conditions, de dimension finie en α , sont suffisantes pour la vérification d'une condition plus générale mais de dimension infinie en α . La \mathcal{D} -stabilité robuste du polytope est vérifiée par un test de faisabilité de LMIs qui ne sont décrites qu'aux sommets du polytope. Ce type de test peut être fait avec des méthodes numériques à complexité polynomiale. Le cas de \mathcal{D} -stabilité robuste présenté au Chapitre 2 a été repris à partir des conditions du Théorème 3.1 comme un cas particulier, c'est-à-dire pour le cas des polynômes matriciels incertains de premier ordre.

Deuxième partie

Des systèmes à retard sur les états

La stabilité robuste des systèmes à temps continu ou discret et à retard dans les états est l'objet d'étude de cette seconde partie du travail. Dans les deux cas sont utilisées des fonctions de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, ce qui mène à des résultats moins conservatifs par rapport à ceux trouvés normalement dans la littérature (généralement basés sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, des matrices de Lyapunov-Krasovskii indépendantes du paramètre de l'incertitude). Dans le Chapitre 4 on étudie les systèmes linéaires incertains neutres, pour lesquels des conditions LMI pour l'analyse de stabilité robuste sont données. On admet des incertitudes dans toutes les matrices du système neutre et, de plus, on admet que les retards, variables dans le temps, sont différents dans l'état et dans sa dérivée temporelle. Les conditions obtenues sont du type "indépendant du retard". La stabilité robuste des systèmes incertains à temps discret et à retard dans les états est étudiée dans le Chapitre 5. Grâce aux propriétés de la formulation obtenue, déjà connues et exploitées dans la littérature dans le contexte des systèmes discrets sans retard, de nouvelles conditions pour la stabilisation robuste sont aussi présentées. Des extensions pour le problème du coût garanti \mathcal{H}_∞ aussi bien que pour la synthèse des contrôleurs à la performance garantie \mathcal{H}_∞ sont présentées sous la forme des problèmes convexes. Les conditions étudiées sont, comme au Chapitre 4, du type "indépendant du retard".

Chapitre 4

Stabilité robuste de systèmes neutres avec retards variants dans le temps

On donne des conditions suffisantes sous la forme de LMIs pour l'analyse de stabilité de systèmes incertains du type neutre, où le vecteur d'état possède des retards variants dans le temps. Toutes les matrices du système sont supposées invariantes dans le temps, incertaines, néanmoins appartenant à un polytope dont les sommets sont connus. La stabilité robuste du système incertain neutre est assurée en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendant de paramètres. On montre comment des conditions pour la stabilité robuste de systèmes incertains à temps continu avec et sans retard dans les états peuvent être retrouvées à partir des conditions proposées dans ce chapitre.

4.1 Introduction

Le principal but de ce chapitre est d'obtenir des conditions convexes de type LMI pour l'étude de la stabilité robuste de systèmes incertains du type neutre, c'est-à-dire pour la classe des systèmes dont la dynamique dépend de la dérivée des états passés. Cette classe de systèmes est décrite par des équations différentielles hyperboliques [Hal77] dont la formalisation contient les équations différentielles ordinaires normalement utilisées dans le contexte de la théorie du contrôle. Des lignes de transmission [BGR99], des modèles de circuits équivalents aux éléments partiels (PEEC, de l'anglais *Partial Element Equivalent Circuit*) [CRZ00], [YH04], utilisés dans la modélisation de systèmes électroniques complexes, des circuits opérant en haute fréquence, des problèmes de propagation de flux électromagnétiques tridimensionnelles en circuits, et des processus dynamiques tels que des tubulaires à vapeur ou à fluide, sont autant d'exemples de systèmes physiques qui peuvent être modélisés par des équations différentielles hyperboliques avec des conditions initiales adéquates et dérivées comme des conditions de contour. Dans [Hal77], [Nic01], [CRZ00], et [BGR99] on peut trouver des détails sur ces systèmes neutres.

Parmi plusieurs travaux traitant de cette classe de systèmes, on peut citer [Nic01], où sont formulées autant des conditions dépendantes du retard que des conditions indépendantes du retard pour des systèmes connus et invariants dans le temps. Dans [BRT03], on donne aussi des conditions dépendantes du retard pour ce même type de système (connu et invariant dans le temps). Dans [Ver99], à travers de conditions indépendantes du retard, formulées en termes d'équations algébriques de Riccati, on s'occupe de systèmes variant dans le temps avec et sans retard. Dans [XLYV03], on considère des incertitudes du type bornée en norme pour les systèmes invariants dans le temps et à retard fixe. Dans [Bli02], sont proposées des conditions suffisantes indépendantes du retard, qui tendent à être

nécessaires à mesure que la complexité des inégalités matricielles augmente. Dans le système neutre

$$\dot{x}(t) - E\dot{x}(t - \tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h)$$

étudié dans [Bli02], on suppose que la matrice E est précisément connue, les retards τ et h sont invariants dans le temps et des matrices dynamiques $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ appartiennent à un polytope aux sommets connus. Dans [Fri01] une approche qui utilise la théorie de systèmes descripteurs est considérée. Dans ce travail, aucun type d'incertitudes dans le système, qui est considéré invariant dans le temps, n'est admis. D'autres résultats importants incluent [Par03], [CH04], [Che03], [PKW04], [Che04], [Fu04], [PW00], [Par01], [Han02], [Han04], [IND⁺03]. Néanmoins, la majeure partie de ces travaux ne considère que des retards invariants dans le temps, et généralement suppose que le même retard affecte l'état et sa dérivée, c'est-à-dire, $h = \tau$. De plus, généralement, la stabilité quadratique est la base des résultats. Ces hypothèses restrictives sont éliminées dans les résultats présentés dans ce chapitre. Dans le contexte des systèmes à retard ($E = \mathbf{0}$), il est important de citer [ZKT01] où est démontrée, par l'utilisation du lemme du petit gain avec matrices d'échelonnement constantes, l'équivalence de plusieurs conditions formulées par des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii et l'analyse de stabilité robuste d'un système de comparaison sans retard. Néanmoins, il n'y a pas d'incertitudes dans le système original et le retard est supposé constant. Dans [KR03], la stabilité de systèmes linéaires avec matrices connues et retards variants dans le temps est abordée. Une formulation basée sur les contraintes intégrales quadratiques (IQCs, de l'anglais *integral quadratic constraints*) est aussi présentée. Remarquons encore que, comme cela est montré dans [KR03], dans le contexte de systèmes à retard ($E = \mathbf{0}$), quand le retard est variant dans le temps, l'obtention de conditions pour l'analyse de stabilité devient plus élaborée.

On utilise fréquemment l'approche de la stabilité quadratique [Bar85] pour traiter la présence d'incertitudes, alors que cette approche peut présenter un haut degré de conservatisme. En particulier, la première partie de ce travail (chapitres 2 et 3), illustre bien comment des conditions basées sur la stabilité quadratique peuvent être conservatives. Ainsi, des conditions moins conservatives peuvent être obtenues par l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres dans le contexte de la stabilité robuste de systèmes linéaires incertains [dOBG99], [LP03a], [PABB00], [RP01a], [RP02].

Dans ce chapitre, on utilise des fonctionnelles dépendantes de paramètres pour l'étude de l'analyse de stabilité robuste de systèmes neutres incertains à retards variants dans le temps. Contrairement à la plus grande partie des travaux sur ce sujet, on considère des valeurs distinctes de retard, dans les états et dans leurs dérivées. De plus, on n'utilise aucune transformation de modèle, qui normalement introduit de nouvelles dynamiques, comme cela est examiné dans [GN01]. Par ailleurs, toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes du type polytopique aux sommets connus. On propose des conditions suffisantes de type LMIs pour l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendante de paramètres, en assurant la stabilité robuste du système neutre incertain, de manière indépendante des valeurs des retards variant dans le temps. Bien que présentées pour le cas des retards simples, les conditions peuvent être facilement généralisées pour le cas des retards multiples.

4.2 Préliminaires

Considérons la classe suivante de systèmes incertains neutres

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{\Delta}(x_\tau) \triangleq x(t) - E(\alpha)x(t - \tau(t)) \quad (4.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $h(t) \in \mathbb{R}_+$ et $\tau(t) \in \mathbb{R}_+$ sont des retards variant dans le temps. Les matrices invariantes dans le temps $E(\alpha)$, $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ ne sont pas précisément connues, mais appartiennent à un domaine polytopique \mathcal{P} aux sommets connus E_j, A_j, A_{hj} — où $(E, A, A_h)_j$ — donné par

$$\mathcal{P} = \left\{ (E, A, A_h)(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times 3n} : (E, A, A_h)(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (E, A, A_h)_j ; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \alpha_j \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Donc, n'importe quel triple $(E, A, A_h)(\alpha)$ dans \mathcal{P} peut être écrit comme une combinaison convexe des sommets $(E, A, A_h)_j$ du polytope des incertitudes, en termes de α , $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$.

Les conditions initiales qui assure l'existence et l'unicité des solutions pour (4.1)-(4.2) joignent

$$x(t_0 + \varsigma) = \phi(\xi), \forall \xi \in [-\varsigma, 0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_\varsigma^v \quad (4.4)$$

$$\varsigma \triangleq \max\{h(t), \tau(t)\}, h(t) \geq 0, \tau(t) \geq 0, \forall t, \quad (4.5)$$

et la stabilité Schur-Cohn de l'opérateur $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ définit dans (4.2). Dans le cas où $\tau(t)$ est invariant dans le temps, c'est-à-dire, $\tau(t) = \tau$, donc $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ est Schur-Cohn stable si

$$\rho(E(\alpha)) < 1, \quad \forall \alpha \text{ admissible.} \quad (4.6)$$

Toutefois, il est important de noter que les conditions qui assurent la stabilité Schur-Cohn de l'opérateur $\mathbf{\Delta}(\cdot)$, lorsque le retard varie (c'est-à-dire $\tau(t)$ dépend effectivement du temps), ne sont pas précisément établies dans la littérature. Une discussion intéressante concernant les équations différentielles avec des retards variants dans le temps et leurs conditions initiales peut être consultée dans [El'66]. Dans ce chapitre, afin de donner des conditions permettant d'étudier la stabilité du système (4.1)-(4.3), nous allons faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1 *L'opérateur (4.2) est supposé Schur-Cohn stable pour toute incertitude admissible¹.*

Dans le cas où $\tau(t) = \tau$, l'hypothèse 4.1 correspond à la condition (4.6). Dans la suite, il sera montré comment ce cas-là peut être obtenu à partir de nos conditions.

Dans ce travail, on adopte les définitions suivantes :

Définition 4.1 *On appelle système linéaire incertain neutre tout système qui peut être modélisé par (4.1), avec $E(\alpha) \neq \mathbf{0}$ pour tout α admissible.*

Définition 4.2 *On appelle système linéaire incertain à retard tout système qui peut être modélisé par (4.1), avec $E = \mathbf{0}$ pour tout α admissible et $A_h \neq \mathbf{0}$ pour certains α .*

Dans ce chapitre, on aborde le problème suivant :

Problème 4.1 *Déterminer, si possible, des conditions qui assurent la stabilité robuste pour le système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3) de manière indépendante des valeurs des retards variants dans le temps $h(t)$ et $\tau(t)$.*

¹Nous faisons cette hypothèse sachant qu'à l'heure actuelle il n'existe pas de méthode constructive permettant de la valider.

4.3 Stabilité robuste indépendante du retard

D'abord, on présente une LMI de dimension infinie en α comme solution du Problème 4.1. A partir de cette condition, on en propose une autre, suffisante pour que la première soit vérifiée, et cette fois définie en un nombre fini de LMIs. Pour cela, on choisit certaines variables matricielles indépendantes du paramètre α .

On utilise le lemme suivant, basé de la théorie de stabilité de Lyapunov, pour l'obtention des résultats de ce chapitre.

Lemme 4.1 *Le système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3) est robustement stable indépendamment des valeurs des retards variants dans le temps $h(t)$ et $\tau(t)$ s'il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0 \quad (4.7)$$

avec

$$V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) \triangleq \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) \quad (4.8)$$

$$V_2(\alpha, x(t), h(t)) \triangleq \int_{t-h(t)}^t x(\sigma)' S_1(\alpha) x(\sigma) d\sigma \quad (4.9)$$

$$V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) \triangleq \int_{t-\tau(t)}^t x(\varepsilon)' S_2(\alpha) x(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.10)$$

pour tout $\chi(t) \neq \mathbf{0}$,

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h(t)) \\ x(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) < 0 \quad (4.12)$$

Une observation important à propos du Lemme 4.1 est que ce lemme ne propose pas de méthode pour l'obtention des matrices $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$. Remarquons encore que l'équation (4.12) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) &= \dot{\Delta}(x_\tau)' P(\alpha) \Delta(x_\tau) + \Delta(x_\tau)' P(\alpha) \dot{\Delta}(x_\tau) \\ &\quad - (1 - \dot{h}(t)) x(t-h(t))' S_1(\alpha) x(t-h(t)) - (1 - \dot{\tau}(t)) x(t-\tau(t))' S_2(\alpha) x(t-\tau(t)) \\ &\quad + x(t)' (S_1(\alpha) + S_2(\alpha)) x(t) < \mathbf{0} \end{aligned}$$

où on n'impose aucun majorant sur les taux de variation des retards. Dorénavant, les limites suivantes sont assumées pour les taux de variation des retards, pour obtenir des conditions suffisantes pour la vérification du Lemme 4.1 et, donc, une solution pour le Problème 4.1. Ainsi, supposons que

$$|\dot{h}(t)| \leq \bar{h} < 1 \quad (4.13)$$

$$|\dot{\tau}(t)| \leq \bar{\tau} < 1 \quad (4.14)$$

et définissons les scalaires

$$\beta_{\bar{h}} \triangleq (1 - \bar{h}) \quad ; \quad \beta_{\bar{\tau}} \triangleq (1 - \bar{\tau}) \quad (4.15)$$

Avec ces définitions il est possible d'établir les principaux résultats de ce chapitre. La condition suivante est convexe dans les variables d'optimisation et de dimension infinie en α .

Théorème 4.1 *Les conditions équivalentes suivantes assurent la stabilité robuste indépendamment des retards variants dans le temps du système linéaire incertain neutre (4.1)-(4.3), soumis à (4.13)-(4.14), et sont suffisantes pour la vérification du Lemme 4.1, en assurant donc une solution pour le Problème 4.1 :*

i) *Il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + S_1(\alpha) + S_2(\alpha) & P(\alpha)A_h(\alpha) & -A(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) & -A_h(\alpha)'P(\alpha)E(\alpha) \\ \star & \star & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.16)$$

ii) *Il existe des matrices symétriques définies positives $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H_1(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$, $M_2(\alpha)$, $N_1(\alpha)$ et $N_2(\alpha)$ appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F_1(\alpha) + F_1(\alpha)' & P(\alpha) + F_2(\alpha) + G_1(\alpha)' & H_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)A(\alpha) + F_2(\alpha)) \\ \star & G_2(\alpha) + G_2(\alpha)' & H_2(\alpha)' - (G_1(\alpha)A(\alpha) + G_2(\alpha)) \\ \star & \star & S_1(\alpha) + S_2(\alpha) - (H_1(\alpha)A(\alpha) \\ & & + A(\alpha)'H_1(\alpha)' + H_2(\alpha) + H_2(\alpha)') \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ M_1(\alpha)' - F_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_1(\alpha)' + F_2(\alpha)E(\alpha) \\ M_2(\alpha)' - G_1(\alpha)A_h(\alpha) & N_2(\alpha)' + G_2(\alpha)E(\alpha) \\ -(H_1(\alpha)A_h(\alpha) & H_2(\alpha)E(\alpha) - (A(\alpha)'N_1(\alpha)' + N_2(\alpha)') \\ + A(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)') & \\ -\beta_{\bar{h}}S_1(\alpha) + M_1(\alpha)A_h(\alpha) & M_2(\alpha)E(\alpha) - A_h(\alpha)'N_1(\alpha)' \\ + A_h(\alpha)'M_1(\alpha)' & -\beta_{\bar{\tau}}S_2(\alpha) + N_2(\alpha)E(\alpha) + E(\alpha)'N_2(\alpha)' \\ \star & \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Les conditions présentées dans le Théorème 4.1 ne dépendent pas des valeurs de $h(t)$ et $\tau(t)$, mais seulement de leurs taux de variation maximal, respectivement $\bar{\tau}$ et \bar{h} . Par ailleurs, le Théorème 4.1 pourrait être utilisé pour vérifier la stabilité robuste d'un système neutre appartenant à n'importe quel domaine d'incertitudes paramétré dans α , en ayant besoin de tester toutes les valeurs possibles de α du domaine correspondant. Un test numériquement efficace, défini par un nombre fini de LMIs, qui assure les conditions du Lemme 4.1, peut être obtenu en imposant la structure suivante aux matrices symétriques $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S_1(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{1j}; \quad S_2(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_{2j}; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0 \quad (4.18)$$

et en choisissant les matrices additionnelles d'une manière indépendante du paramètre α , c'est-à-dire $F_1(\alpha) = F_1$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G_1(\alpha) = G_1$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H_1(\alpha) = H_1$, $H_2(\alpha) = H_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $N_1(\alpha) = N_1$ et $N_2(\alpha) = N_2$.

Théorème 4.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et des matrices F_1 , F_2 , G_1 , G_2 , H_1 , H_2 , M_1 , M_2 , N_1 et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$*

telles que

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F_1' & P_j + F_2 + G_1' & H_1' - (F_1 A_j + F_2) & M_1' - F_1 A_{hj} & N_1' + F_2 E_j \\ * & G_2 + G_2' & H_2' - (G_1 A_j + G_2) & M_2' - G_1 A_{hj} & N_2' + G_2 E_j \\ * & * & S_{1j} + S_{2j} - (H_1 A_j + A_j' H_1' + H_2 + H_2') & -(H_1 A_{hj} + A_j' M_1' + M_2') & H_2 E_j - (A_j' N_1' + N_2') \\ * & * & * & -\beta_{\bar{h}} S_{1j} + M_1 A_{hj} + A_{hj}' M_1' & M_2 E_j - A_{hj}' N_1' \\ * & * & * & * & -\beta_{\tau} S_{2j} + N_2 E_j + E_j' N_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0};$$

$j = 1, \dots, N$ (4.19)

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha)$, $S_1(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$ données par (4.18), et assurant donc une solution pour le Problème 4.1.

L'obtention d'une condition basée sur la stabilité quadratique et les variables supplémentaires à partir du Théorème 4.2 est immédiate. Ce résultat est présenté dans le corollaire qui suit.

Corollaire 4.1 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et des matrices $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, M_1, M_2, N_1$ et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_1' & P + F_2 + G_1' & H_1' - (F_1 A_j + F_2) & M_1' - F_1 A_{hj} & N_1' + F_2 E_j \\ * & G_2 + G_2' & H_2' - (G_1 A_j + G_2) & M_2' - G_1 A_{hj} & N_2' + G_2 E_j \\ * & * & S_1 + S_2 - (H_1 A_j + A_j' H_1' + H_2 + H_2') & -(H_1 A_{hj} + A_j' M_1' + M_2') & H_2 E_j - (A_j' N_1' + N_2') \\ * & * & * & -\beta_{\bar{h}} S_1 + M_1 A_{hj} + A_{hj}' M_1' & M_2 E_j - A_{hj}' N_1' \\ * & * & * & * & -\beta_{\tau} S_2 + N_2 E_j + E_j' N_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0};$$

$j = 1, \dots, N$ (4.20)

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_2$, en assurant une solution pour le Problème 4.1. Dans ce cas, le système incertain (4.1)-(4.3) est dit "quadratiquement stable".

Remarquons que la condition *i*) du Théorème 4.1 ne peut pas être transformée directement en une condition de dimension finie en α , comme cela peut être fait avec la condition *ii*) de ce théorème. L'obstacle principal, dans ce cas, est l'occurrence du produit triple dans les blocs (1,3) et (2,3) (et leurs symétriques) de (4.16). En raison de cela, plusieurs conditions convexes trouvées dans la littérature exigent que la matrice $E(\alpha)$ soit précisément connue, c'est-à-dire, $E(\alpha) = E, \forall \alpha$ (voir, par exemple, [Bli02]). Dans le cas où $E(\alpha) = E$, on peut obtenir une condition de stabilité quadratique pour le système neutre avec des matrices $A(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ incertaines et des retards $h(t)$ et $\tau(t)$ variants dans le temps et soumis à (4.13)-(4.14), comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} A_j' P + P A_j + S_1 + S_2 & P A_{hj} & -A_j' P E \\ * & -\beta_{\bar{h}} S_1 & -A_{hj}' P E \\ * & * & -\beta_{\tau} S_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.21)$$

alors les conditions du Lemme 4.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S_1(\alpha) = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_2$, en assurant que le système (4.1)-(4.3), avec $E_j = E$, $j = 1, \dots, N$ et des retards soumis à (4.13) et (4.14), est quadratiquement stable.

Le produit de matrices qui sont fonctions du paramètre α peut être traité en utilisant la technique présentée dans les Chapitres 2 et 3. Voir [PTGL03] pour l'application de cette technique dans le contexte de systèmes incertains à temps continu et à retards dans les états ($E = \mathbf{0}$) et avec $\beta_{\bar{h}} = 1$ (retard invariant dans le temps) dans (4.16).

4.4 Cas particuliers

Quelques cas dégénérés de l'équation différentielle hyperbolique donnée en (4.1) sont d'intérêt théorique et pratique. Ces cas peuvent être résumés par les situations suivantes :

1. Matrice $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, impliquant que le système (4.1) est décrit par

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta(x_\tau) = A(\alpha)x(t) \quad (4.22)$$

2. Matrice $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, ce qui fait que le système (4.1) n'est plus du type neutre et correspond à un système incertain à retard dans les états donné par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_h(\alpha)x(t - h(t)) \quad (4.23)$$

Dans ce cas, l'opérateur $\Delta(\cdot)$ dans (4.2) est simplement $\Delta(x_\tau) = x(t)$, puisque, sans perte de généralité, on suppose $\tau(t) = 0$, $\forall t$.

3. Les matrices $E(\alpha)$ et $A_h(\alpha)$ sont toutes les deux des matrices nulles, $\forall \alpha$, correspondant au cas classique d'un système linéaire incertain dans le temps et sans retards donné par

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) \quad (4.24)$$

Dans ces trois situations, des conditions de plus petite complexité, par rapport à celles présentées dans ce chapitre, peuvent être obtenues à partir des conditions présentées dans les théorèmes 4.1 et 4.2 pour l'analyse de stabilité robuste de (4.22)-(4.24). Ce fait découle de simplifications dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii communément employée dans chacune de ces situations. Il faut rappeler qu'en (4.22)-(4.24) les matrices dynamiques appartiennent au polytope \mathcal{P} donné en (4.3).

Remarquons que pour le cas où $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, la fonctionnelle (4.7)-(4.10) peut être simplifiée en imposant $S_1(\alpha) = \mathbf{0}$:

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_3(\alpha, x(t), \tau(t)) > 0 \quad (4.25)$$

et, dans le cas où seulement $E(\alpha) = \mathbf{0}$, on prend $S_2(\alpha) = \mathbf{0}$ en considérant la fonctionnelle (4.7) de la forme

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V_1(\alpha, \Delta(x_\tau)) + V_2(\alpha, x(t), h(t)) > 0 \quad (4.26)$$

soit encore

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t), h(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) + V_2(x(t), h(t)) > 0 \quad (4.27)$$

Dans la troisième situation, où $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$ et $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, la fonctionnelle examinée reste réduite à la fonctionnelle standard de Lyapunov, et est donné par

$$V(\alpha, x(t), h(t), \tau(t)) = V(\alpha, x(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) > 0 \quad (4.28)$$

Dans ce qui suit, on présente les conditions qui peuvent être obtenues comme des cas particuliers des théorèmes 4.1 et 4.2. Dans ce travail, on se focalise sur l'obtention de conditions convexes de dimension finie en α et pour cela les corollaires présentés ensuite sont déterminés à partir des conditions du Théorème 4.2. On peut faire, bien sûr, un développement analogue à partir du Théorème 4.1, en obtenant dans ce cas, des conditions de dimension infinie en α . Il est important de souligner que, bien que ces conditions puissent être obtenues à partir des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii (4.25)-(4.28), en suivant les démarches semblables à celles présentées dans les preuves des théorèmes 4.1 et 4.2, on a choisi l'obtention de ces conditions via l'application de transformations de congruence données dans (4.19).

4.4.1 Stabilité robuste du système incertain neutre

La situation étudiée ici est le système neutre (4.1) avec $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. La condition de stabilité robuste indépendante du retard pour ce cas peut être obtenue à partir de (4.19), en posant $S_{1j} = \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, et en appliquant la transformation de congruence

$$T_{A_h} \Xi_j T_{A_h}'; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.29)$$

avec Ξ_j donnée dans (4.19) et

$$T_{A_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

Ceci nous donne le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{2j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$ et des matrices $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2, N_1$ et N_2 appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{A_h j} \triangleq \begin{bmatrix} F_1 + F_1' & P_j + F_2 + G_1' & H_1' - (F_1 A_j + F_2) & N_1' + F_2 E_j \\ * & G_2 + G_2' & H_2' - (G_1 A_j + G_2) & N_2' + G_2 E_j \\ * & * & S_{2j} - (H_1 A_j + A_j' H_1' + H_2 + H_2') & H_2 E_j - (A_j' N_1' + N_2') \\ * & * & * & -\beta_\tau S_{2j} + N_2 E_j + E_j' N_2' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

alors $P(\alpha)$ et $S_2(\alpha)$ données en (4.18) assurent (4.25) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste de (4.22) avec $\tau(t)$ soumis à (4.14), indépendamment de la valeur du retard $\tau(t)$.

4.4.2 Stabilité robuste du système incertain à retard dans les états

Dans ce cas on considère $E(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$, impliquant que la caractéristique "neutre" du système est perdue et le système est décrit comme en (4.1), avec $h(t)$ soumis à (4.13). En posant $S_{2j} = \mathbf{0}$ dans (4.23) et en appliquant la transformation de congruence

$$\Xi_{Ej} = T_E \Xi_j T_E'; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.31)$$

avec Ξ_j donnée dans (4.19) et

$$T_E = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

on peut établir le corollaire suivant.

Corollaire 4.4 *S'il existe des matrices positives définies $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_{1j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{Ej} \triangleq \begin{bmatrix} F + F' & P_j + G' - FA_j & M' - FA_{hj} \\ \star & S_{1j} - GA_j - A_j'G' & -GA_{hj} - A_j'M' \\ \star & \star & -\beta_h S_{1j} - MA_{hj} - A_{hj}'M' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.32)$$

alors $P(\alpha)$ et $S_1(\alpha)$ données en (4.18) assurent (4.27) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste de (4.23) avec $h(t)$ soumis à (4.13), indépendamment de la valeur du retard $h(t)$.

Dans le corollaire 4.4, les variables additionnelles F , G et M sont liées à celles du Théorème 4.2 de la suivante manière :

$$F = F_1; \quad G = G_1 + H_1; \quad \text{et } M = M_1$$

4.4.3 Stabilité robuste du système incertain

Enfin, considérons le système linéaire incertain donné en (4.1) sans retard, c'est-à-dire, avec $E(\alpha) = \mathbf{0}$ et $A_h(\alpha) = \mathbf{0}$, $\forall \alpha$. Le système à temps continu résultant, $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, est le même que celui étudié dans le Chapitre 2. Dans ce cas, la condition présentée dans [PABB00] pour les systèmes à temps continu (et en considérant la région $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$ donnée dans (2.5)) peut être retrouvée à partir de (4.19) en imposant $S_1(\alpha) = S_2(\alpha) = \mathbf{0}$ et en considérant, donc, la fonctionnelle donnée dans (4.28). En appliquant la transformation de congruence

$$T_{EA_h} \Xi_j T_{EA_h}'; \quad j = 1, \dots, N$$

avec Ξ_j , $j = 1, \dots, N$, donnée dans (4.19) et

$$T_{EA_h} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Xi_{EA_hj} \triangleq \begin{bmatrix} -(FA_j + A_j'F') & P_j + F - A_j'G \\ \star & G + G' \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.33)$$

alors $P(\alpha)$ donnée dans (4.18) assure (4.28) et (4.12), en garantissant la stabilité robuste du système sans retards donné par (4.24).

Dans le cas du Corollaire 4.5 les relations entre les matrices F et G dans (4.33), celles correspondantes dans [PABB00] (F_{PABB} , G_{PABB}) et les matrices additionnelles de (4.19) sont données par

$$G = G_{\text{PABB}} = -(G_1 + H_1); \quad F = F_{\text{PABB}} = -F_1$$

Remarque 4.1 Il est important de souligner que tous les résultats présentés ici contiennent, comme cas particulier, la stabilité quadratique qui utilise des matrices constantes dans les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii considérées. On peut obtenir ces conditions à partir des résultats présentés ici en imposant $P(\alpha) = P_j = P$, $S_1(\alpha) = S_{1j} = S_1$ et $S_2(\alpha) = S_{2j} = S_2$.

Remarque 4.2 L'extension des résultats présentés dans ce travail pour le cas de plusieurs retards est immédiate.

Remarque 4.3 Il est important de souligner que le cas où les retards sont supposés invariants dans le temps, c'est-à-dire, $\tau(t) = \tau$ et $h(t) = h$, est contenu dans les conditions données dans ce chapitre. Dans ce cas, il suffit de faire $\beta_{\bar{\tau}} = 1$ et $\beta_{\bar{h}} = 1$, respectivement, dans les conditions y présentées.

4.5 Complexité numérique

La complexité numérique associée aux conditions LMIs présentées dans ce chapitre sont données dans le Tableau 4.1. Les LMIs peuvent être résolues en temps polynomial par des algorithmes de complexité numérique proportionnelle à $\mathcal{K}^3\mathcal{L}$, \mathcal{K} étant le nombre de variables scalaires et \mathcal{L} le nombre de lignes des LMIs, [GNLC95].

Critère	\mathcal{K} (n. de variables)	\mathcal{L} (n. de lignes)
Théorème 4.2	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corollaire 4.1	$\frac{3Nn}{2}(n+1) + 10n^2$	$8Nn$
Corollaire 4.2	$\frac{3n}{2}(n+1)$	$3Nn$
Corollaire 4.3	$Nn(n+1) + 8n^2$	$6Nn$
Corollaire 4.4	$Nn(n+1) + 3n^2$	$5Nn$
Corollaire 4.5	$\frac{Nn}{2}(n+1) + 2n^2$	$3Nn$

TAB. 4.1 – Nombre de variables scalaires \mathcal{K} et nombre de lignes \mathcal{L} en fonction du nombre d'état (n) et de sommets (N) pour les conditions d'analyse de stabilité étudiées.

Une autre approche, moins conservatrice, pour l'obtention de conditions convexes de dimension finie suffisantes pour celles établies dans le Théorème 4.1 consiste à utiliser les idées déjà explorées dans les Chapitres 2 et 3, en permettant que les variables additionnelles présentes dans la condition *ii*) de ce théorème soient aussi dépendantes, de manière semblable, du paramètre α . Bien sûr, dans ce cas, les conditions obtenues seront moins conservatrices que les conditions du Théorème 4.2, bien que de complexité plus élevée. Comme exemple de ce type d'approche, dans le contexte de systèmes incertains à temps continu et à retards (invariants dans le temps) dans les états, on peut voir [LPT03] pour des conditions indépendantes du retard avec des variables additionnelles et [PTGL03] pour des conditions dépendantes et indépendantes du retard (sans variables additionnelles).

4.6 Conclusion

Nous avons présenté des conditions LMI indépendantes du retard, suffisantes pour l'analyse de stabilité robuste de systèmes linéaires incertains neutres, appartenant aux domaines polytopiques, à retards variants dans le temps. Ces conditions sont basées sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, ce que rend les conditions bien moins conservatives que celles basées sur des matrices fixes (stabilité quadratique). On a montré que les conditions d'analyse de stabilité robuste de systèmes neutres contiennent d'autres conditions concernant certains cas dégénérés, comme les systèmes à retard et les systèmes sans retard.

Chapitre 5

La commande robuste \mathcal{H}_∞ de systèmes à temps discret et à retard dans les états

Dans ce chapitre, nous étudions des systèmes incertains à temps discret et à retard dans les états. Les incertitudes sont supposées appartenir à un polytope convexe connu et peuvent affecter toutes les matrices du système. On donne des conditions du type LMI suffisantes pour la stabilité robuste et pour la stabilisation robuste. Ensuite, ces conditions sont étendues au problème du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour la synthèse du gain robuste de retour d'état, en assurant un niveau pre-déterminé d'atténuation \mathcal{H}_∞ , en considérant un terme qui dépend de l'état et, s'il est disponible, aussi un terme qui dépend de l'état retardé. Les conditions proposées ici sont du type "indépendant du retard" au sens où la robustesse est assurée indépendamment de la valeur du retard et, différemment d'autres approches trouvées dans la littérature, sont formulées comme des problèmes d'optimisation convexe. Si le retard est connu et les états retardés sont disponibles, un gain de retour d'état dépendant des valeurs passées des états peut être utilisé pour améliorer la performance du système en boucle fermée. Les conditions proposées sont simples à appliquer et peuvent mener à des résultats moins conservatifs, comparées aux conditions du type "dépendant de retard". Quelques résultats présentés dans ce chapitre peuvent être trouvés dans [LTP04b], [LTP04a] et [LTP].

Dans la littérature, on peut trouver des approches pour traiter les problèmes de stabilité robuste, de stabilisation robuste, de coût garanti \mathcal{H}_∞ et de synthèse de contrôleur avec performance \mathcal{H}_∞ garantie associés à la classe de systèmes linéaires incertains, à temps discret et à retard dans les états. Dans [WH94], une condition indépendante du retard suffisante pour la stabilité exponentielle est présentée pour des systèmes précisément connus. Dans [CC03], sont proposées des conditions algébriques pour la stabilité robuste de systèmes singuliers à temps discret et avec incertitudes paramétriques structurées. Dans [HD03], les auteurs ont considéré le rayon de stabilité réel de systèmes invariants dans le temps avec perturbations limitées en norme et à retard dans les états. Dans [KP90], est présentée une technique du type LQG (de l'anglais Linear Quadratic Gaussian) pour les systèmes à retard précisément connus. En utilisant le concept de stabilité quadratique [Bar85], des conditions suffisantes pour l'analyse de stabilité indépendante du retard de systèmes incertains (à retard), ont été présentées dans plusieurs travaux, quelques uns proposant aussi une extension pour le cas de synthèse de contrôleur. En suivant cette méthodologie, dans [SBSA03], des systèmes avec incertitudes du type bornés en norme et avec des retards invariants dans le temps sont considérés. Ce travail inclut une fonction de coût quadratique, qui implique des conditions non-convexes pour le cas de synthèse de contrôleur.

Dans [MX00], les auteurs présentent une approche par commande optimale en ne considérant que des retards fixes et avec une formulation basée sur des équations couplées de Ricatti qui dépendent de variables scalaires pour être résolues. Dans [XLY01], on propose une approche utilisant la stabilité quadratique aussi pour les retards invariants dans le temps. Dans ce travail, sont présentées des conditions non-linéaires, nécessaires et suffisantes pour la stabilité et pour la stabilisation quadratique, pour les systèmes à perturbations du type limité en norme, présentes uniquement dans la matrice dynamique. Dans [ZWH04], on propose des conditions convexes pour l'analyse de stabilité de systèmes précisément connus, avec un terme additif du type non-linéaire borné en norme. Dans [Xu02], le problème de synthèse de filtres pour les systèmes à temps discret et à retard dans les états est traité. Pour le cas de perturbations bornées en norme, on peut trouver dans [WHU99] une approche basée sur la stabilité quadratique et LMI pour la synthèse d'observateurs avec performance \mathcal{H}_∞ . Dans [LHLK92], on peut trouver des conditions suffisantes pour l'analyse régionale de pôles. Ces conditions sont formulées en termes de normes matricielles, mais les tests ne peuvent être appliqués qu'à des systèmes précisément connus et avec un retard unitaire. En utilisant l'approche par stabilité quadratique, dans [Mah00], des conditions non-convexes en termes d'équations algébriques de Ricatti sont proposées.

Dans [FS03], un système augmenté du type descripteur est défini et des conditions sont établies pour l'analyse de stabilité basée sur des disparités matricielles avec des multiplicateurs scalaires.

Dans [KH98], une étude sur la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour des systèmes précisément connus, à temps discret et à retard dans les états, est décrite à travers des équations de Ricatti. Dans [SK98], les auteurs proposent une approche par disparité matricielle (non-convexe), pour des systèmes à incertitudes du type borné en norme. Les cas à temps continu et à temps discret sont étudiés dans [KP99], dans le contexte de commande par retour d'état avec une performance \mathcal{H}_∞ . Des conditions suffisantes pour la synthèse de gains de retour d'état qui garantissent une performance \mathcal{H}_∞ sont données en termes de LMI avec un paramètre d'échelonnement. Dans ce cas, on n'admet que des perturbations du type borné en norme. Dans [XC04], on propose des disparités matricielles non-convexes, pour résoudre le problème de la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour les systèmes à temps discret et à retards dans les états. Dans ce cas, le système est supposé variant dans le temps et l'approche utilise la stabilité quadratique pour la formulation des conditions de synthèse.

Tous ces résultats sont formulés en termes de matrices de Lyapunov fixes et peuvent, dans certains cas, donner des conditions pour la synthèse d'un gain robuste par retour d'état, le plus souvent avec des conditions non-convexes. Des extensions de ces conditions pour traiter le cas à incertitudes du type polytopique ne semblent pas immédiates. En outre, l'approche basée sur la stabilité quadratique (c'est-à-dire l'utilisation d'une matrice de Lyapunov fixe) peut présenter des résultats conservatifs dans l'évaluation des systèmes à incertitudes invariantes dans le temps. Malgré l'existence de résultats récents utilisant des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres pour étudier la stabilité robuste [dOBG99], [LP03a], [PABB00], [RP01a], [dOGB02], [DB01], [LP04], jusqu'à maintenant il n'y a pas d'extensions de ces résultats pour le cas de systèmes à retard dans les états.

Ce chapitre traite de systèmes linéaires à temps discret et à retard dans les états et dans les équations de sortie. Toutes les matrices des systèmes sont supposés invariantes dans le temps et incertaines, mais appartenant à un domaine polytopique à sommets connus. On étudie le problème de la stabilité robuste avec des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii. On présente des conditions équivalentes du type LMI, dont certaines utilisent des matrices additionnelles. A partir de ces conditions, on présente une approche convexe pour le cas de synthèse de gain stabilisant robuste. Bien que les LMI soient du type indépendant du retard, ces LMIs peuvent être aussi utilisées pour la synthèse de gain de retour d'état retardé. Quand le retard est connu, cette stratégie peut permettre d'obtenir des gains stabilisants

lorsque un retour d'état sans mémoire ne peut pas exister. Comme cela est examiné dans [Ric03], les lois de retour dépendantes d'état retardés peuvent induire des degrés de liberté utiles et intéressants, même pour les systèmes sans retard. On présente des conditions LMIs suffisantes et indépendantes du retard pour la détermination du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour l'obtention d'une commande robuste \mathcal{H}_∞ par retour d'état. Ces conditions permettent aussi de calculer un gain pour la commande robuste \mathcal{H}_∞ dépendante d'états retardés, qui peut être utilisé pour améliorer le niveau d'atténuation \mathcal{H}_∞ du système en boucle fermée, lorsque le retard est connu. De plus, les conditions convexes présentées ici peuvent être étendues pour traiter le cas de synthèse de commande décentralisée, sans imposer de restrictions de structure dans les matrices dépendantes de paramètres de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii utilisée pour assurer la stabilité de la boucle fermée.

Comme toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes polytopiques, l'approche proposée dans ce chapitre permet de traiter aussi les systèmes incertains soumis à des manques partiels ou totaux d'actionneurs. Bien que les incertitudes, de même que les retards, sont invariants dans le temps, quelques résultats présentés comme des corollaires et basés sur les fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii fixes peuvent être appliqués aussi aux systèmes à incertitudes variantes dans le temps et à retards constants.

5.1 Préliminaires et formulation du problème

Considérons le système linéaire incertain à temps discret donné par

$$\Omega(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + A_h(\alpha)x(k-h) + B(\alpha)u(k) + B_h(\alpha)u_h(k) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = C(\alpha)x(k) + C_h(\alpha)x(k-h) + D(\alpha)u(k) + D_h(\alpha)u_h(k) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $h \in \mathbb{N}$ est la valeur du retard (supposé constant), $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_h(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ représentent les entrées de commande, $w(k) \in \mathbb{R}^\ell$ est le vecteur exogène de perturbation et $z(k) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie contrôlée. Remarquons que les deux matrices d'entrée de commande peuvent avoir des dimensions différentes, en permettant une modélisation plus précise des dispositifs distincts de commande. Le retard h n'est pas utilisé dans le développement des conditions d'analyse et synthèse de commande, mais si h est connu, l'entrée de commande $u_h(k)$ dépendante de valeurs passées des états $x(k)$ peut être utilisée pour le retour, même dans le cas $B = B_h$. Bien qu'il ne s'agisse ici que d'un unique retard, l'extension des résultats pour des retards multiples est immédiate. Les matrices $A(\alpha)$, $A_h(\alpha)$, $B(\alpha)$, $B_h(\alpha)$, $B_w(\alpha)$, $C(\alpha)$, $C_h(\alpha)$, $D(\alpha)$, $D_h(\alpha)$, $D_w(\alpha)$, de dimensions adéquates, définissent le système $\Omega(\alpha)$ et sont supposées fixes, mais non précisément connues, c'est-à-dire, $\Omega(\alpha)$ appartient à l'ensemble polytopique \mathbb{A}_h décrit par

$$\mathbb{A}_h \triangleq \left\{ \Omega(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+m_1+m_2+\ell} : \Omega(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Omega_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (5.2)$$

avec des sommets

$$\Omega_j \triangleq \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_j & A_{hj} & B_j & B_{hj} & B_{wj} \\ C_j & C_{hj} & D_j & D_{hj} & D_{wj} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Remarquons que n'importe quel $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ peut être écrit comme une combinaison convexe de N sommets Ω_j de \mathbb{A}_h . Les lois de commande suivantes sont considérées

$$u(k) = Kx(k); \quad u_h(k) = K_h x(k-h) \quad (5.4)$$

dans lesquelles $K \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $K_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$. Dans ce chapitre, les conditions convexes pour la synthèse de K et K_h ne dépendent pas de la valeur du retard h , mais permettent l'utilisation de l'état en retard dans le cas de h connu. Si h est inconnu, alors on ne doit considérer que $u(k)$ (loi de commande sans mémoire), et dans ce cas, $K_h = \mathbf{0}$.

Donc, en utilisant (5.4) et (5.1)-(5.3), le système incertain en boucle fermée est donné par

$$\tilde{\Omega}(\alpha) : \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}(\alpha)x(k) + \tilde{A}_d(\alpha)x(k-h) + B_w(\alpha)w(k) \\ z(k) = \tilde{C}(\alpha)x(k) + \tilde{C}_d(\alpha)x(k-h) + D_w(\alpha)w(k) \\ x(k) = 0, \quad k \leq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ est donné par

$$\tilde{\mathbb{A}}_h \triangleq \left\{ \tilde{\Omega}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n+p \times 2n+\ell} : \tilde{\Omega}(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{\Omega}_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, N \right\} \quad (5.6)$$

et les matrices sommets de la boucle fermée sont

$$\tilde{A}_j \triangleq A_j + B_j K; \quad \tilde{A}_{dj} \triangleq A_{hj} + B_{hj} K_h \quad (5.7)$$

$$\tilde{C}_j \triangleq C_j + D_j K; \quad \tilde{C}_{dj} \triangleq C_{hj} + D_{hj} K_h \quad (5.8)$$

en définissant les sommets correspondants

$$\tilde{\Omega}_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & B_{wj} \\ \hline \tilde{C}_j & \tilde{C}_{dj} & D_{wj} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

Le but principal de ce chapitre est de résoudre les problèmes suivants, où le retard du système est considéré fixe et supérieur ou égal à zéro :

Problème 5.1 (*La commande robuste*)

Etant donné le système incertain $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ où Ω_j est donné par

$$\Omega_j = \left[\begin{array}{c|c|c} A_j & A_{hj} & B_j \quad B_{hj} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.10)$$

déterminer des gains de retour d'état K et K_h tels que le système incertain en boucle fermée correspondant $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec

$$\tilde{\Omega}_j = \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{A}_j & \tilde{A}_{dj} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

et $\tilde{A}_j, \tilde{A}_{dj}$ définies en (5.7) est robustement stable.

Problème 5.2 (*La commande robuste \mathcal{H}_∞*) Etant donné le système incertain $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ où Ω_j est défini en (5.3) et un scalaire $\gamma > 0$, déterminer des gains de retour d'état K et K_h , tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ donné par (5.5)-(5.9) est robustement stable et que, de façon additionnelle, pour tout $w(k) \in \ell_2$ on ait $z(k) \in \ell_2$ satisfaisant

$$\|z(k)\|_2 < \gamma \|w(k)\|_2 \quad (5.12)$$

Tout γ satisfaisant (5.12) est un coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système.

5.2 Stabilité robuste

Tout d'abord, on étudie l'analyse de stabilité robuste du système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ où $\tilde{\Omega}_j$ est donné en (5.11), et on présente des conditions suffisantes du type LMI. A partir de ces conditions, qui sont de dimension infinie dans le paramètre incertain α , on propose une solution convexe et de dimension finie pour le Problème 5.1.

Le théorème suivant établit quatre conditions équivalentes basées sur l'existence de matrices de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, qui assurent la stabilité robuste du système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11).

Théorème 5.1 *Le système incertain à temps discret $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est robustement stable indépendamment du retard de temps h , s'il existe des matrices symétriques définies positives et dépendantes de paramètres $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles qu'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:*

a) *La fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii $V(x(k))$ donnée par*

$$V(\alpha, x(k)) \triangleq x(k)'P(\alpha)x(k) + \sum_{j=0}^h x(k-j)'S(\alpha)x(k-j) \quad (5.13)$$

est telle que

$$V(\alpha, x(k)) > 0 \quad \text{et} \quad \Delta V(\alpha, x(k)) \triangleq V(\alpha, x(k+1)) - V(\alpha, x(k)) < 0 \quad (5.14)$$

pour tout $\begin{bmatrix} x(k)' & x(k-h)' \end{bmatrix}' \neq \mathbf{0}$.

b)

$$\Upsilon(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) - P(\alpha)) & \tilde{A}(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & \tilde{A}_d(\alpha)'((S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) - S(\alpha)) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.15)$$

c)

$$\Theta(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} -(S(\alpha) + P(\alpha)) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}(\alpha) & (S(\alpha) + P(\alpha))\tilde{A}_d(\alpha) \\ \star & -P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.16)$$

d) *Il existe des matrices dépendantes de paramètre $F(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\mathcal{M}(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} F(\alpha) + F(\alpha)' + P(\alpha) + S(\alpha) & G(\alpha)' - F(\alpha)'\tilde{A}(\alpha) \\ \star & -(P(\alpha) + G(\alpha)\tilde{A}(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'G(\alpha)') \\ \star & \star \\ & H(\alpha)' - F(\alpha)'\tilde{A}_d(\alpha) \\ & -(G(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'H(\alpha)') \\ & -(S(\alpha) + H(\alpha)\tilde{A}_d(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'H(\alpha)') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.17)$$

Remarquons que les quatre conditions équivalentes sont suffisantes pour la stabilité robuste de $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11), étant établies en termes de matrices dépendantes de paramètres $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $H(\alpha)$. Ces conditions ont besoin d'être vérifiées pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, ce que rend ce problème de dimension infinie en α (dans le cas où α a des intervalles continus en son domaine). Remarquons encore que les conditions du Théorème 5.1 sont valides pour n'importe quels ensembles $\tilde{\Omega}(\alpha)$, convexes ou non. Une observation à propos du Théorème 5.1 est que les variables matricielles additionnelles dans la condition d) peuvent être utilisées pour poser des

conditions moins conservatives pour l'évaluation de stabilité robuste, et aussi donner des conditions pour la synthèse de commande robuste comme solution du Problème 5.1.

Le problème de dimension infinie dans les équations (5.15)-(5.17) peut être approché par un ensemble fini de LMI, écrites en termes des sommets $\tilde{\Omega}_j$ de $\tilde{\mathbb{A}}_h$, en suivant les mêmes idées que celles présentées dans les chapitres 2 et 3. Cependant, ces extensions ne sont pas présentées dans ce travail. Une autre approche consiste à fixer les matrices additionnelles $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$ et $H(\alpha) = H$ et imposer la structure suivante pour les matrices dépendantes de paramètres $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j; \quad S(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j S_j; \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \quad \alpha_j \geq 0 \quad (5.18)$$

comme l'on expose dans le théorème suivant.

Théorème 5.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, et des matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\mathcal{M}_j \triangleq \begin{bmatrix} F + F' + P_j + S_j & G' - F\tilde{A}_j & H' - F\tilde{A}_{dj} \\ \star & -(P_j + G\tilde{A}_j + \tilde{A}'_j G') & -(G\tilde{A}_{dj} + \tilde{A}'_j H') \\ \star & \star & -(S_j + H\tilde{A}_{dj} + \tilde{A}'_{dj} H') \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.19)$$

alors les conditions du Théorème 5.1 sont vérifiées avec $F(\alpha) = F$, $G(\alpha) = G$, $H(\alpha) = H$ et $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, données en (5.18).

Remarquons que la condition de stabilité quadratique pourrait être imposée comme une solution particulière du Théorème 5.1, en fixant des matrices de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii, c'est-à-dire, en faisant $P(\alpha) = P$ et $S(\alpha) = S$. On peut retrouver cette condition à partir du Théorème 5.2, en imposant $P_i = P$, $S_i = S$, $F = F' = -(S + P)$ et $G = H = \mathbf{0}$ en (5.19), comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.1 *S'il existe des matrices symétriques positives définies $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$\Theta_j^q \triangleq \begin{bmatrix} -(P + S) & (P + S)\tilde{A}_j & (P + S)\tilde{A}_{dj} \\ \star & -P & \mathbf{0} \\ \star & \star & -S \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.20)$$

alors les conditions du Théorème 5.1 sont vérifiées avec $P(\alpha) = P$, $S(\alpha) = S$, $F(\alpha) = F(\alpha)' = -(P + S)$ et $G(\alpha) = H(\alpha) = \mathbf{0}$, en impliquant que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable indépendamment de la valeur h du retard.

L'utilisation de matrices fixes P et S dans le Corollaire 5.1 assure la stabilité du système, même dans le cas de matrices incertaines variants dans le temps $\tilde{A}(\alpha)$ et $\tilde{A}_d(\alpha)$. Observez encore que des conditions de stabilité robuste similaires à celles présentées ici peuvent être obtenues en termes du système dual $\tilde{\Omega}(\alpha)$, c'est-à-dire en changeant $\tilde{A}(\alpha)$ par $\tilde{A}(\alpha)'$ et $\tilde{A}_d(\alpha)$ par $\tilde{A}_d(\alpha)'$ dans (5.15)-(5.17) et \tilde{A}_j par \tilde{A}'_j et \tilde{A}_{dj} par \tilde{A}'_{dj} dans (5.19)-(5.20).

5.3 Commande robuste

Dans cette section, on utilise le degré de liberté additionnel proposé par les matrices F , G et H dans le Théorème 5.2 et dans le Corollaire 5.1, pour obtenir des conditions suffisantes pour résoudre le Problème 5.1. Pour cela, considérons le système incertain à temps discret et à retard dans les états défini par $\Omega(\alpha) \in \mathbb{A}_h$ avec (5.10) et supposons que les vecteurs d'état, $x(k)$, et d'état en retard, $x(k-h)$ soient disponibles pour retour. On donne ci-dessous une condition suffisante pour l'existence de gains robustes de retour d'état K et K_h tels que, avec $u(k)$ et $u(k-h)$ donnés en (5.4), le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha)$ soit robustement stable.

Théorème 5.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, et des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P}_j + \tilde{S}_j & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P}_j & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S}_j \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.21)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par

$$K = ZL^{-1} \text{ et } K_h = Z_h L^{-1} \quad (5.22)$$

sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est robustement stable, indépendamment de la valeur h du retard. De plus, $P_j = (L')^{-1} \tilde{P}_j L^{-1}$ et $S_j = (L')^{-1} \tilde{S}_j L^{-1}$, $j = 1, \dots, N$, $P(\alpha)$, $S(\alpha)$, données en (5.18) et $F = (L')^{-1}$, $G = H = \mathbf{0}$ sont telles que les conditions du Théorème 5.2 sont vérifiées.

Remarquons qu'une condition similaire à (5.21) pourrait être obtenue en imposant $G = H = \mathbf{0}$ dans \mathcal{M}_j (Théorème 5.2), en utilisant la représentation du système incertain dual, c'est-à-dire en changeant \tilde{A}_j par $(A_j + B_j K)'$ et \tilde{A}_{dj} par $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$ et alors en appliquant le changement de variables $Z = KL$ et $Z_h = K_h L$.

Remarquons encore que, si le vecteur d'état retardé, $x(k-h)$, n'est pas disponible (par exemple, si h est inconnu) les conditions du Théorème 5.3 peuvent encore être utilisées, en imposant $Z_h = \mathbf{0}$ dans (5.21). Enfin, il est important de relever que le Théorème 5.3 contient les résultats de stabilisation quadratique, comme cela est établi dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.2 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j^q \triangleq \begin{bmatrix} L' + L + \tilde{P} + \tilde{S} & -(A_j L + B_j Z) & -(A_{hj} L + B_{hj} Z_h) \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.23)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable, indépendamment de la valeur h du retard.

Bien qu'il existe dans la littérature des résultats équivalents pour la stabilisation quadratique (lesquels généralement ne sont pas formulés en termes de LMI), le Corollaire 5.2 dispense une condition plus intéressante pour traiter des restrictions de structure dans les gains de retour. Cela vient du fait que la matrice additionnelle L utilisée pour le calcul des gains de commande n'apparaît pas dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Le choix $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ récupère la condition de stabilisation quadratique standard, comme cela est présenté dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.3 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ et $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ telles que*

$$\Xi_j^{q2} \triangleq \begin{bmatrix} -(\tilde{P} + \tilde{S}) & A_j \tilde{P} + A_j \tilde{S} + B_j Z & A_{hj} \tilde{P} + A_{hj} \tilde{S} + B_{hj} Z_h \\ \star & -\tilde{P} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.24)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par

$$K = Z(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \text{ et } K_h = Z_h(\tilde{P} + \tilde{S})^{-1} \quad (5.25)$$

sont tels que le système incertain en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathbb{A}}_h$ avec (5.11) est quadratiquement stable, indépendamment de la valeur h du retard.

Remarquons qu'une condition équivalente pour la stabilisation quadratique pourrait être obtenue directement du Corollaire 5.1, en considérant le système dual, c'est-à-dire, en changeant \tilde{A}_j par $(A_j + B_j K)'$ et \tilde{A}_{dj} par $(A_{hj} + B_{hj} K_h)'$, et en utilisant la linéarisation de variables données par $(P + S)K' = Z$ et $(P + S)K_h' = Z_h$. Les bénéfices du Corollaire 5.2 par rapport au Corollaire 5.3 restent plus évidents dans la synthèse de commande décentralisée. En fait, grâce au degré supplémentaire de liberté amené par la matrice L , des gains robustes décentralisés pour le retour d'état peuvent être calculés à partir du Corollaire 5.2, sans imposer de restrictions de structure dans les matrices de Lyapunov-Krasovskii. Enfin, il est important de relever que, contrairement à la plus grande partie des résultats trouvés dans la littérature, les Théorèmes 5.2 et 5.3 et les Corollaires 5.1, 5.2 et 5.3 sont formulés comme des conditions LMI convexes, de dimension finie, permettant une solution efficace pour les problèmes de stabilité et stabilisation robuste, grâce à l'utilisation d'algorithmes spécialisés qui peuvent être résolus en temps polynomial.

5.4 Commande robuste \mathcal{H}_∞

Dans cette section, le coût garanti \mathcal{H}_∞ du système incertain $\tilde{\Omega}(\alpha)$ donné en (5.5)-(5.9) est lié à l'existence de matrices dépendantes de paramètres qui satisfont quelques conditions convexes équivalentes. En imposant une structure spéciale à ces matrices, il est possible obtenir des conditions LMI suffisantes pour le coût garanti \mathcal{H}_∞ . On peut alors proposer des conditions suffisantes LMI pour la synthèse de gains robustes K et K_h , résolvant le Problème 5.2.

Théorème 5.4 *Le système incertain à temps discret $\tilde{\Omega}(\alpha)$ donné en (5.5)-(5.9) est robustement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par $\gamma = \sqrt{\mu}$, indépendamment de la valeur h du retard, s'il existe des matrices symétriques définies positives dépendantes de paramètres $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles, qu'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$:*

a)

$$\mathcal{N}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Upsilon(\alpha) & \tilde{A}(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) & \\ & \tilde{A}_d(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) & \\ \star & B_w(\alpha)'(P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) - \mu \mathbf{I}_\ell & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \\ D_w(\alpha)' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(\alpha)' \\ \tilde{C}_d(\alpha)' \\ D_w(\alpha)' \end{array} \right]' < \mathbf{0} \quad (5.26)$$

où $\Upsilon(\alpha)$ est donné en (5.15).

b)

$$\mathcal{R}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Theta(\alpha) & \mathbf{0} & (P(\alpha) + S(\alpha))B_w(\alpha) \\ & \tilde{C}(\alpha)' & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}_d(\alpha)' & \mathbf{0} \\ \star & -\mathbf{I}_p & D_w(\alpha) \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (5.27)$$

où $\Theta(\alpha)$ est donné en (5.16).

c) Il existe des matrices dépendantes de paramètres $F(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $G(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $H(\alpha)$, $H_2(\alpha)$, $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$, $M_1(\alpha)$ et $M_2(\alpha)$, telles que

$$\mathcal{Q}(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}(\alpha) + \mathcal{Q}_1(\alpha) & \mathcal{Q}_2(\alpha) \\ \hline \star & \mathcal{Q}_3(\alpha) \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (5.28)$$

où $\mathcal{M}(\alpha)$ est donné en (5.17) et

$$\mathcal{Q}_1(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -F_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) & -F_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) \\ \star & -(G_2(\alpha)\tilde{C}(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'G_2(\alpha)') & -(G_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}(\alpha)'H_2(\alpha)') \\ \star & \star & -(H_2(\alpha)\tilde{C}_d(\alpha) + \tilde{C}_d(\alpha)'H_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.29)$$

$$\mathcal{Q}_2(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} X_1(\alpha)' + F_2(\alpha) \\ G_2(\alpha) - (\tilde{A}(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ H_2(\alpha) - (\tilde{A}_d(\alpha)'X_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'X_2(\alpha)') \\ M_1(\alpha)' - (F_1(\alpha)B_w(\alpha) + F_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(G(\alpha)B_w(\alpha) + G_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}(\alpha)'M_2(\alpha)') \\ -(H(\alpha)B_w(\alpha) + H_2(\alpha)D_w(\alpha) + \tilde{A}_d(\alpha)'M_1(\alpha)' + \tilde{C}_d(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.30)$$

$$\mathcal{Q}_3(\alpha) \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_p + X_2(\alpha) + X_2(\alpha)' \\ \star \\ M_2(\alpha)' - (X_1(\alpha)B_w(\alpha) + X_2(\alpha)D_w(\alpha)) \\ -(\mu\mathbf{I}_\ell + M_1(\alpha)B_w(\alpha) + B_w(\alpha)'M_1(\alpha)' + M_2(\alpha)D_w(\alpha) + D_w(\alpha)'M_2(\alpha)') \end{array} \right] \quad (5.31)$$

De même que dans le Théorème 5.1, les conditions du Théorème 5.4 ont besoin d'être vérifiées pour toutes les valeurs admissibles de α , en étant valides pour n'importe quel ensemble d'incertitudes $\tilde{\mathcal{D}}$. On donne ensuite une condition convexe de dimension finie, en assurant que les équations (5.26)-(5.28) sont vérifiées.

Théorème 5.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices de dimensions appropriées F , F_2 , G , G_2 , H , H_2 , X_1 , X_2 , M_1 , M_2 et un scalaire positif $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\mathcal{Q}_j \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{M}_j + \mathcal{Q}_{1j} & \mathcal{Q}_{2j} \\ \hline \star & \mathcal{Q}_{3j} \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.32)$$

où \mathcal{M}_j est définie en (5.19) et

$$\mathcal{Q}_{1j} \triangleq \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -F_2\tilde{C}_j & -F_2\tilde{C}_{dj} \\ \star & -(G_2\tilde{C}_j + \tilde{C}_j'G_2') & -(G_2\tilde{C}_{dj} + \tilde{C}_j'H_2') \\ \star & \star & -(H_2\tilde{C}_{dj} + \tilde{C}_{dj}'H_2') \end{array} \right] \quad (5.33)$$

$$\mathcal{Q}_{2j} \triangleq \left[\begin{array}{c} X_1' + F_2 \\ G_2 - (\tilde{A}_j'X_1' + \tilde{C}_j'X_2') \\ H_2 - (\tilde{A}_{dj}'X_1' + \tilde{C}_{dj}'X_2') \\ M_1' - (FB_{wj} + F_2D_{wj}) \\ -(GB_{wj} + G_2D_{wj} + \tilde{A}_j'M_1' + \tilde{C}_j'M_2') \\ -(HB_{wj} + H_2D_{wj} + \tilde{A}_{dj}'M_1' + \tilde{C}_{dj}'M_2') \end{array} \right] \quad (5.34)$$

$$\mathcal{Q}_{3j} \triangleq \left[\begin{array}{c} \mathbf{I}_p + X_2 + X_2' \\ \star \\ M_2' - (X_1B_{wj} + X_2D_{wj}) \\ -(\mu\mathbf{I}_\ell + M_1B_{wj} + B_{wj}'M_1' + M_2D_{wj} + D_{wj}'M_2') \end{array} \right] \quad (5.35)$$

alors le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est robustement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ . De plus, les conditions du Théorème 5.4 sont assurées avec $F(\alpha) = F$, $F_2(\alpha) = F_2$, $G(\alpha) = G$, $G_2(\alpha) = G_2$, $H(\alpha) = H$, $H_2(\alpha) = H_2$, $X_1(\alpha) = X_1$, $X_2(\alpha) = X_2$, $M_1(\alpha) = M_1$, $M_2(\alpha) = M_2$, $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ définies comme en (5.18).

Remarquons que, avec les résultats du Théorème 5.5, le problème d'optimisation convexe suivant peut être formulé, en cherchant le minimum $\gamma = \sqrt{\mu}$ tel que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ P_j = P'_j > \mathbf{0}; S_j = S'_j > \mathbf{0} \\ F, F_2, G, G_2, H, H_2, X_1, X_2, M_1, M_2 \\ \text{tel que (5.32) est vérifiée.} \end{cases} \quad (5.36)$$

On peut obtenir des conditions quadratiques à partir des résultats du Théorème 5.5 : pour cela, il est suffit d'imposer $P_j = P = P' > \mathbf{0}$ et $S_j = S = S' > \mathbf{0}$, $j = 1, \dots, N$, $F = -(P + S)$, $X_2 = -\mathbf{I}_p$, et en prenant les matrices $H, G, F_2, H_2, G_2, X_1, M_1$ et M_2 égales à zéro dans (5.32). Cette approche permet le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ pour le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ à paramètre incertain dans le temps et à retard fixe. On énonce ce résultat dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.4 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et un scalaire positif $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\mathcal{R}_j = \left[\begin{array}{c|cc} \Theta_j^q & \mathbf{0} & (P + S)B_{wj} \\ \hline & \tilde{C}'_j & \mathbf{0} \\ & \tilde{C}'_{dj} & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\mathbf{I}_p & D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.37)$$

où Θ_j^q est donnée en (5.20), alors le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ .

Ensuite, on utilise les variables matricielles additionnelles présentes dans le Théorème 5.5 pour proposer une solution pour le Problème 5.2.

Théorème 5.6 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \dots, N$, des matrices $Z \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$ tels que*

$$\Pi_j \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Xi_j & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \hline & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z'_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.38)$$

où Ξ_j est donnée en (5.21), alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que la boucle fermée du système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est robustement stable à coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

Comme dans le cas de la stabilisation robuste (Section 5.2), il est possible de traiter des systèmes variants dans le temps, en considérant des matrices fixes et indépendantes de paramètres dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. Le corollaire suivant présente une condition suffisante pour la stabilisation quadratique en assurant un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ pour le système $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ à paramètre variant dans le temps et à retard fixe.

Corollaire 5.5 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\Pi_j^q \triangleq \left[\begin{array}{c|cc} \Xi_j^q & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \hline & -(L'C'_j + Z'D'_j) & \mathbf{0} \\ & -(L'C'_{hj} + Z_h D'_{hj}) & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.39)$$

alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.22) sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

Le choix $L = -(\tilde{P} + \tilde{S})$ dans le Corollaire 5.5 donne aussi une condition de stabilisation à coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ .

Corollaire 5.6 *S'il existe des matrices symétriques définies positives $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, des matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$, $Z_h \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, et des scalaires $0 < \beta \leq 1$ et $\gamma = \sqrt{\mu}$ tels que*

$$\left[\begin{array}{c|cc} \Xi_j^{q2} & \mathbf{0} & -B_{wj} \\ \hline & \tilde{P}C'_j + \tilde{S}C'_j + Z'D'_j & \mathbf{0} \\ & \tilde{P}C'_{hj} + \tilde{S}C'_{hj} + Z_h D'_{hj} & \mathbf{0} \\ \hline \star & -\beta \mathbf{I}_p & -D_{wj} \\ & \star & -\mu \mathbf{I}_\ell \end{array} \right] < \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N \quad (5.40)$$

où Ξ_j^{q2} est donnée en (5.24), alors les gains robustes de retour d'état K et K_h donnés par (5.25) sont tels que le système en boucle fermée $\tilde{\Omega}(\alpha) \in \tilde{\mathcal{D}}$ est quadratiquement stable à un coût garanti \mathcal{H}_∞ donné par γ , indépendamment de la valeur h du retard.

De même qu'observé auparavant, les conditions proposées dans le Corollaire 5.5 sont plus adéquates pour traiter des restrictions de structure dans les gains de commande que les conditions du Corollaire 5.6. Cela est dû au degré supplémentaire de liberté induit par la matrice L .

Il est important de mentionner que le Théorème 5.6 présente une solution convexe sous forme de LMI à dimension finie pour le Problème 5.2, qui peut être évaluée en temps polynomial par des algorithmes spécialisés de points intérieurs [GNLC95]. De plus, toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes. Les gains de retour d'état K et K_h qui donnent le plus petit niveau d'atténuation $\gamma = \sqrt{\mu}$ tel que (5.38) est vérifiée, peuvent être obtenus à partir du problème convexe d'optimisation suivant :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty} : \begin{cases} \min & \mu \\ \tilde{P}_j = \tilde{P}'_j > \mathbf{0}; \tilde{S}_j = \tilde{S}'_j > \mathbf{0} \\ Z, Z_h, L, 0 < \beta \leq 1 \\ \text{tel que (5.38) est vérifiée} \end{cases} \quad (5.41)$$

5.5 Complexité numérique et extensions

Les conditions proposées dans ce chapitre peuvent être résolues en temps polynomial par l'utilisation d'algorithmes de points intérieurs, dont la complexité numérique est associée au nombre de lignes LMI, \mathcal{L} , et au nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , utilisées dans le problème. Par exemple, en utilisant la *LMI Control Toolbox*, le nombre d'opérations en point flottant est de l'ordre de $\mathcal{K}^3 \mathcal{L}$ [GNLC95]. D'autres méthodes peuvent avoir un comportement différent. Dans le Tableau 5.1, on donne le nombre

de variables scalaires, \mathcal{K} , et le nombre de lignes LMI, \mathcal{L} , associées à chaque condition présentée dans ce chapitre. Observons que dans les problèmes d'optimisation $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.36), et $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{H}_\infty}$, (5.41), le nombre de variables d'optimisation montré dans le Tableau 5.1 a besoin d'être augmenté de un, puisque dans ce cas la variable $\mu = \gamma^2$ est aussi une variable d'optimisation.

		Critère	\mathcal{K} (n. de variables scalaires)	\mathcal{L} (n. de lignes LMIs)
Analyse	Stabilité	Théorème 5.2	$3n^2 + Nn(n+1)$	$3Nn$
		Corollaire 5.1	$n(n+1)$	
	\mathcal{H}_∞	Théorème 5.5	$n^2(3+N) + n(p+N) + \ell(n+p) + p(3n+p)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corollaire 5.4	$n(n+1)$	
Synthèse	Stabilité	Théorème 5.3	$n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$3Nn$
		Corollaire 5.2	$n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corollaire 5.3	$n(n + m_1 + m_2 + 1)$	
	\mathcal{H}_∞	Théorème 5.6	$1 + n(N(n+1) + n + m_1 + m_2)$	$N(3n+p+\ell)$
		Corollaire 5.5	$1 + n(2n + m_1 + m_2 + 1)$	
		Corollaire 5.6	$1 + n(n + m_1 + m_2 + 1)$	

TAB. 5.1 – Nombre de variables scalaires, \mathcal{K} , et nombre de lignes LMI, \mathcal{L} .

5.5.1 Commande décentralisée

Les résultats présentés dans la Section 5.3 (Théorème 5.3 et Corollaire 5.2) et dans la Section 5.4 (Théorème 5.6 et Corollaire 5.5) peuvent aussi être utilisés pour la synthèse de commande décentralisée, par l'imposition d'une structure décentralisée aux matrices $L = L_D = \text{bloc-diagonal}\{L^1, \dots, L^M\}$, $Z = Z_D = \text{bloc-diagonal}\{Z^1, \dots, Z^M\}$, $Z_h = Z_{dD} = \text{bloc-diagonal}\{Z_h^1, \dots, Z_h^M\}$, où M dénote le nombre de sous-systèmes, résultant en gains de retour d'état bloc-diagonaux $K_D = Z_D L_D^{-1}$ et $K_{dD} = Z_{dD} L_D^{-1}$. Remarquons que dans ce cas on n'impose aucune restriction aux matrices $P(\alpha)$ et $S(\alpha)$ utilisées dans la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii. De plus, il est possible de chercher des lois de commande qui n'utilisent que $x(k)$ ou $x(k-h)$ pour le retour, décentralisées ou non, simplement en fixant $Z = \mathbf{0}$ ou $Z_h = \mathbf{0}$ dans les LMIs.

5.5.2 Des fautes d'actionneurs

Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être utilisés pour étudier la stabilité robuste et pour la synthèse de gains robustes pour le retour d'état, en assurant la stabilité et la performance du système en boucle fermée soumis à des fautes d'actionneurs. En fait, le problème de faute d'actionneurs peut être traité comme un cas spécial d'incertitude affectant les matrices d'entrées $B(\alpha)$ et $B_h(\alpha)$. De

plus, en utilisant les résultats basés sur la stabilité quadratique, c'est-à-dire, en fixant les matrices de Lyapunov-Krasovskii, on peut traiter des fautes d'actionneurs dans le contexte de systèmes variants dans le temps, en assurant la stabilité robuste et la performance \mathcal{H}_∞ garantie, même avec des fautes partielles ou totales d'actionneurs.

Remarque 5.1 Dans [LTP04a], on étudie des conditions pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ et pour la synthèse de gains robustes K et K_h , qui minimisent la norme \mathcal{H}_∞ entre le signal d'entrée de perturbation et le signal de sortie de systèmes linéaires incertains à temps discret et à retard dans les états, mais sans retard dans l'équation de sortie ($C_h = \mathbf{0}$ et $D_h = \mathbf{0}$).

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié la commande robuste \mathcal{H}_∞ pour les systèmes à temps discret et à retard dans les états. Contrairement à d'autres résultats de la littérature, toutes les matrices du système peuvent être affectées par des incertitudes. Ces incertitudes sont exprimées sous forme polytopique, à sommets connus. Par l'utilisation d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii dépendante de paramètres, on a obtenu, sous forme de LMI, des conditions du type "indépendant du retard", moins conservatives, pour l'analyse de stabilité robuste et pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ . De plus, on a présenté des conditions du type LMI, suffisantes pour la détermination de gains robustes de retour d'état pour la stabilisation et pour la commande à coût garanti \mathcal{H}_∞ . Ces conditions peuvent donner un gain qui dépend d'état retardé, utilisable seulement quand la valeur du retard est connue. Grâce à la convexité, des restrictions additionnelles, telles que décentralisation et commande soumise à des fautes d'actionneurs, peuvent être facilement incorporées aux conditions LMI.

Chapitre 6

Commentaires finaux

Dans ce travail, on a étudié des fonctionnelles de Lyapunov et de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, pour traiter des problèmes dans le contexte de la théorie de commande robuste. Avec l'utilisation de ces fonctionnelles, il a été possible d'obtenir des conditions, formulées comme des tests de faisabilité de LMI, qui présentent des résultats bien moins conservatifs que d'autres conditions trouvées dans la littérature pour des systèmes à incertitudes du type polytopique. On a obtenu des formulations convexes (suffisantes) pour la solution des problèmes suivants :

- \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de matrices ;
- \mathcal{D} -stabilité robuste de polytopes de polynômes matriciels ;
- Stabilité robuste de systèmes neutres à retards variants dans le temps et, en particulier, de systèmes à retard dans les états ;
- Stabilité robuste de systèmes discrets dans le temps et à retard dans les états ;
- Calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ de systèmes discrets dans le temps à retard dans les états et la sortie ;
- Synthèse de gains de retour d'état pour des systèmes discrets dans le temps et à retard dans les états, en assurant une performance \mathcal{H}_∞ .

Des parties des résultats présentés dans ce texte apparaissent dans les travaux [dOLP04], [dOOL⁺02a], [dOOL⁺02b], [LMd⁺04], [LMRP02], [LOdP04], [LP03b], [LP03a], [LPT03], [LTP04b], [LTP], [LTP04a] et [PTGL03].

On peut conclure que l'utilisation de fonctions de Lyapunov et de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres, alliée à l'application du Lemme de Finsler dans les problèmes étudiés, mène à une réduction significative du conservatisme des conditions d'analyse de stabilité robuste et de synthèse robuste. Comme conséquence de cette réduction de conservatisme, il y a une augmentation de complexité des conditions qui utilisent des fonctionnelles dépendantes de paramètres, ainsi que de matrices additionnelles dépendantes ou non de paramètre, par rapport aux conditions LMI correspondantes, formulées via l'approche par stabilité quadratique (fonctionnelles de Lyapunov et Lyapunov-Krasovskii à matrices fixes et indépendantes de paramètres). Cependant, l'effort de calcul nel additionnel, nécessaire pour les conditions proposées dans ce travail, est compensé, comme cela est démontré par des comparaisons numériques et des exemples présentés par les résultats obtenus. On observe encore que les conditions LMI peuvent être résolues par d'autres algorithmes spécialisés, tels que [Stu99], au-delà des algorithmes de points intérieurs utilisés dans ce travail [GNLC95].

6.1 D'Autres travaux réalisés

Quelques travaux réalisés pendant la période de doctorat ont abouti à des résultats qui ont des connexions avec les techniques et les problèmes abordés dans cette thèse. Ces travaux sont listés

maintenant.

- [LMPJ02] V. J. S. Leite, M. F. Miranda, P. L. D. Peres, and F. G. Jota. Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1618–1623, Seville, Spain, November 2002.
- [LP02] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 447–452, Glasgow, UK, September 2002.
- [LP05] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters. *Vehicle and System Dynamics*, 2005. Aceito para publicação.
- [LP04] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3) :230–238, February 2004.
- [LMP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.
- [MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems : pole location and structural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6242–6247, December 2003.
- [MLTP05] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005. Accepted for publication.
- [MLP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a ups system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2004*, pages 441–446, Ajaccio, France, May 2004.
- [MLOP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros : uma abordagem LMI. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [dOL⁺04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5) :305–315, April 2004.
- [dOL⁺04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(1) :1053–1061, January 2004.
- [LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *SBA Controle & Automação*, 15(2) :127–134, Abril / Junho 2004.
- [MOLP05] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2), 2005.

6.2 Perspectives

La recherche réalisée dans ce travail indique que certains thèmes d'intérêt peuvent être explorés dans de nouvelles directions. Parmi de ces thèmes, on peut souligner ceux qui nous paraissent être les plus prometteurs :

- Développer des conditions de \mathcal{D} -stabilité de polytopes de matrices en utilisant

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} \otimes P(\alpha) & R_{12} \otimes P(\alpha) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')G(\alpha) - F(\alpha) \\ \hline +F(\alpha)(\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)) + (\mathbf{I}_d \otimes A(\alpha)')F(\alpha)' & R_{22} \otimes P(\alpha) - (G(\alpha) + G(\alpha)') \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

avec $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ et en majorant l'équation ci-dessus par une fonction polynomiale où le degré de α_j est plus grand que 3. Les résultats présentés dans ce travail ont été obtenus pour le degré de α_j égal à 2 et 3. Pour cela, on doit formuler la condition ci-dessus, multipliée par $(\sum_{j=1}^N \alpha_j)^v$ $v \in \mathbb{N}$. On s'attend à que des conditions, chaque fois moins conservatives, soient obtenues à mesure que v augmente.

- Étudier des conditions pour la \mathcal{D} -stabilité de polytope de polynômes matriciels en utilisant des régions décrites par \mathcal{R} de dimensions plus grandes que 2. Cette étude peut encore contenir l'étude d'autres matrices de projection \mathcal{T} , de l'équation (3.11), dans la recherche de conditions moins conservatives.

- Étudier la synthèse de contrôleur pour la stabilisation robuste de polytopes de polynômes matriciels.

- Développer des conditions pour le calcul du coût garanti \mathcal{H}_∞ pour des systèmes neutres, ainsi que des conditions pour la synthèse de gains robustes pour le retour d'état qui puissent garantir *i)* la stabilité et *ii)* une performance (coût garanti \mathcal{H}_∞) du système en boucle fermée.

- Étudier des conditions dépendantes du retard, moins conservatives, en utilisant le Lemme de Finsler, pour des systèmes discrets dans le temps à retard dans les états. Dans ce cas, on doit réaliser une comparaison nécessaire avec des conditions basées sur l'augmentation du vecteur d'état.

- Aborder le problème du coût \mathcal{H}_2 pour des systèmes à retard dans les états.

- Étudier les systèmes avec retard dans les états et les traiter par des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii dépendantes de paramètres.

Bibliographie

- [Ack93] J. Ackermann. *Robust Control : Systems with Uncertain Parameters*. Springer Verlag, London, England, 1993.
- [ÅW84] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems : Theory and Design*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [Bac98] O. Bachelier. *Commande des Systèmes Linéaires Incertains : Placement de Pôles Robuste en \mathcal{D} -Stabilité*. PhD thesis, INSA, Toulouse, Septembre 1998.
- [Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4) :399–408, August 1985.
- [Bar94] B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, EUA, 1994.
- [BCK95] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust Control : The Parametric Approach*. Prentice-Hall Publishing Co., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [BGR99] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli. Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I : Fundamental Theory and Applications*, 46(1) :212–216, January 1999.
- [BHL88] A. C. Bartlett, C. V. Hollot, and H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials : it suffices to check the edges. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1 :61–71, 1988.
- [Bli02] P.-A. Bliman. Lyapunov equation for the stability of linear delay systems of retarded and neutral type. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(2) :327–335, February 2002.
- [Bli04a] P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(6) :2016–2042, 2004.
- [Bli04b] P. A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3-4) :165–169, March 2004.
- [Bod45] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. The Bell Telephone Laboratories Series. D. Van Nostrand Company, Inc., 1945.
- [BRT03] Y. Bin, Z. Ruijun, and L. Tao. Delay-dependent stability criterion for a class of neutral time-delay systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 2694–2696, Denver, CO, June 2003.

- [BS70] S. Barnett and C. Storey. *Matrix Methods in Stability Theory*. Applications of Mathematics Series. Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970.
- [BT00] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9) :1249–1274, September 2000.
- [CC03] S.-H. Chen and J.-H. Chou. Stability robustness of linear discrete singular time-delay systems with structured parameter uncertainties. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 150(3) :295–302, May 2003.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, March 1996.
- [CGTV03] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. Robust stability of polytopic systems via polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670–4675, Maui, HI, USA, December 2003.
- [CH04] D. Q. Cao and P. He. Stability criteria of linear neutral systems with a single delay. *Applied Mathematics and Computation*, 148(1) :135–143, January 2004.
- [Che03] J.-D. Chen. New stability criteria for a class of neutral systems with discrete and distributed time-delays : an LMI approach. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3) :719–736, March 2003.
- [Che04] J.-D. Chen. Robust control for uncertain neutral systems with time-delays in state and control input via LMI and GAs. *Applied Mathematics and Computation*, 157(2) :535–548, September 2004.
- [CRZ00] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang. A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application PEED models with retardation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II : Analog and Digital Signal Processing*, 47(4) :261–273, April 2000.
- [DB01] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5) :355–359, August 2001.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4) :261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9) :666–679, June 2002.
- [dOGH99] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability : the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3) :27–38, June 1999.
- [dOL⁺04a] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_2 guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5) :305–315, April 2004.
- [dOL⁺04b] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost computation by means of parameter-dependent Lyapunov functions. *Automatica*, 40(1) :1053–1061, January 2004.

- [dOLP04] P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Condições LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais. *SBA Controle & Automação*, 15(4) :388–400, 2004.
- [dOOL⁺02a] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2884–2889, Natal, RN, Setembro 2002.
- [dOOL⁺02b] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems : a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas, December 2002.
- [dOP02] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10) :1775–1779, October 2002.
- [DV97] L. Dugard and E. I. Verriest, editors. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1997.
- [El'66] L. E. El'sgol'ts. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Holden-Day, Inc., San Francisco, USA, 1966.
- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7) :1041–1046, July 1996.
- [Fri01] E. Fridman. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, 43(4) :309–319, July 2001.
- [FS03] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, Cambridge, UK, September 2003.
- [Fu04] X. Fu. Controllability of abstract neutral functional differential systems with unbounded delay. *Applied Mathematics and Computation*, 151(2) :299–314, April 2004.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :436–442, March 1996.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3) :69–80, December 1998.
- [GJ81] S. Gutman and E. I. Jury. A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :853–863, August 1981.
- [GLR82] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, New York, NY, USA, 1982.
- [GN01] K. Gu and S.-I. Niculescu. Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3) :497–500, March 2001.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.

- [Hal77] J. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Han02] Q.-L. Han. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type. *Automatica*, 38(4) :719–723, April 2002.
- [Han04] Q.-L. Han. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral system with discrete and distributed delays. *Automatica*, 40(10) :1791–1796, October 2004.
- [HAPŠ01] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and M. Šebek. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3) :461–468, March 2001.
- [HB92] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Controller design with regional pole constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(1) :54–69, January 1992.
- [HBS01] D. Henrion, O. Bachelier, and M. Šebek. \mathcal{D} -stability of polynomial matrices. *International Journal of Control*, 74(8) :845–846, May 2001.
- [HD03] G. Hu and E. J. Davison. Real stability radii of linear time-invariant time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 50(3) :209–219, October 2003.
- [HL03] D. W. C. Ho and G. P. Lu. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback : the unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2) :105–115, 2003.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1952.
- [IND⁺03] D. Ivănescu, S.-I. Niculescu, L. Dugard, J.-M. Dion, and E. I. Verriest. On delay-dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 39(2) :255–261, February 2003.
- [Kai80] T. Kailath. *Linear System*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.
- [KH98] V. Kapila and W. M. Haddad. Memoryless \mathcal{H}_∞ controllers for discrete-time systems with time delay. *Automatica*, 34(9) :1141–1144, 1998.
- [Kha78] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 14 :2086–2088, 1978.
- [KNR99] V. B. Kolmanovskii, S. I. Niculescu, and J. P. Richard. On the Liapunov-Krasovskii functionals for stability analysis of linear delay systems. *International Journal of Control*, 72(4) :374–384, March 1999.
- [KP90] M. Kinnaert and Y. Peng. Discrete-time LQG/LTR technique for systems with time delays. *Systems & Control Letters*, 15(4) :303–311, November 1990.
- [KP99] J. H. Kim and H. B. Park. \mathcal{H}_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. *Automatica*, 35(8) :1443–1451, August 1999.
- [KR99] V. B. Kolmanovskii and J. P. Richard. Stability of some linear systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :984–989, May 1999.
- [KR03] C.-Y. Kao and A. Rantzer. Stability criteria for systems with bounded uncertain time-varying delay. In *Proceedings of European Control Conference*, University of Cambridge, UK, 2003.
- [Kuč79] V. Kučera. *Discrete Linear Control : The Polynomial Equation Approach*. Wiley, Chichester, England, 1979.

- [KV93] W. C. Karl and G. C. Verghese. A sufficient condition for the stability of interval matrix polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7) :1139–1143, July 1993.
- [Las01] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 11(3) :796–817, 2001.
- [LHLK92] C.-H. Lee, T. Hseng, S. Li, and F.-C. Kung. D-stability analysis for discrete systems with a time delay. *Systems & Control Letters*, 19(3) :213–219, September 1992.
- [LKH04] Y.-S. Liu, C.-H. Fang S.-W. Kau, and L. Hong. An improved LMI-based \mathcal{D} -stability condition for polytopic uncertain systems. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design*, pages 237–242, Taipei, Taiwan, September 2004.
- [LMd⁺04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, P. J. de Oliveira, R. C. L. Oliveria, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *SBA Controle & Automação*, 15(1) :24–40, Janeiro / Março 2004.
- [LMP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Robust pole location by parameter dependent state feedback control. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1864–1869, Las Vegas, December 2002.
- [LMP04] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Alocação robusta de pólos através de realimentação de estados dependente de parâmetros. *SBA Controle & Automação*, 15(2) :127–134, Abril / Junho 2004.
- [LMPJ02] V. J. S. Leite, M. F. Miranda, P. L. D. Peres, and F. G. Jota. Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, volume 2, pages 1618–1623, Seville, Spain, November 2002.
- [LMRP02] V. J. S. Leite, V. F. Montagner, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas contínuos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2878–2883, Natal, RN, Setembro 2002.
- [LOdP04] V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, P. J. de Oliveira, and P. L. D. Peres. \mathcal{D} -stability of polytopes of polynomial matrices : characterization through LMIs. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 863–868, Atlantis, Bahamas, December 2004.
- [LP02] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust pole location for an active suspension quarter-car model through parameter dependent control. In *Proceedings of the 2002 International Conference on Control Applications*, volume 1, pages 447–452, Glasgow, UK, September 2002.
- [LP03a] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(3) :500–504, March 2003.
- [LP03b] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. An improved LMI condition for robust \mathcal{D} -stability of uncertain polytopic systems. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, pages 833–838, Denver, CO, June 2003.

- [LP04] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Robust control through piecewise Lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 77(3) :230–238, February 2004.
- [LP05] V. J. S. Leite and P. L. D. Peres. Pole location control design of an active suspension system with uncertain parameters. *Vehicle and System Dynamics*, 2005. Aceito para publicação.
- [LPT03] V. J. S. Leite, P. L. D. Peres, and S. Tarbouriech. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 3rd IFAC International Workshop on Linear Time Delay Systems*, Rocquencourt, France, September 2003.
- [LTP] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ state feedback control of discrete-time systems with state delay : an LMI approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Submitted for publication.
- [LTP04a] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. Controle robusto \mathcal{H}_∞ de sistemas discretos com atraso nos estados : condições LMI independentes do atraso. In *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [LTP04b] V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. Peres. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2870–2875, Boston, MS, June 2004.
- [Mah00] M. S. Mahmoud. *Robust Control and Filtering for Time-Dealy Systems*. Control Engineering Series. Marcekl Dekker, Inc., New York, 2000.
- [MK00] T. Mori and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8) :1516–1519, August 2000.
- [MLOP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros : uma abordagem LMI. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2004*, Gramado, RS, Setembro 2004.
- [MLP03] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Discrete-time switched systems : pole location and structural constrained control. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6242–6247, December 2003.
- [MLP04] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. Design of a switched control with pole location constraints for a ups system. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics - ISIE 2004*, pages 441–446, Ajaccio, France, May 2004.
- [MLTP05] V. F. Montagner, V. J. S. Leite, S. Tarbouriech, and P. L. D. Peres. Stability and stabilizability of discrete-time switched linear systems with state delay. In *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, June 2005. Accepted for publication.
- [MOLP05] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, and P. L. D. Peres. An LMI approach for \mathcal{H}_∞ linear parameter-varying state feedback control. *IEE Proceedings — Control Theory and Applications*, 152(2), 2005. Accepted for publication.
- [MX00] M. S. Mahmoud and L. Xie. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays. *International Journal of Control*, 73(2) :105–114, January 2000.
- [MZJ87] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi. *Time-Delay Systems : Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1987.

- [Nic01] S.-I. Niculescu. *Delay Effects on Stability : A Robust Control Approach*, volume 269 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, London, 2001.
- [NT73] K. S. Narendra and S. S. Tripathi. Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 10(4) :193–199, April 1973.
- [Nyq32] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Systems Technical Journal*, 11 :126–147, January 1932.
- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, May 2000.
- [Par00] P. A. Parrilo. *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 2000.
- [Par01] J.-H. Park. A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays. *Applied Mathematics and Computation*, 136(1-2) :177–184, November 2001.
- [Par03] J. H. Park. Simple criterion for asymptotic stability of interval neutral delay-differential systems. *Applied Mathematics Letters*, 16(7) :1063–1068, October 2003.
- [PKW04] J. H. Park, O. Kwon, and S. Won. LMI approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering for neutral delay differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 150(1) :235–244, February 2004.
- [PTGL03] P. L. D. Peres, S. Tarbouriech, G. Garcia, and V. J. S. Leite. Robust stability of time-delay continuous-time systems in polytopic domains. In *Proceedings of the 2003 European Control Conference*, University of Cambridge, UK, September 2003.
- [PW00] J. H. Park and S. Won. Stability analysis for neutral delay-differential systems. *Journal of The Franklin Institute*, 337(1) :1–9, January 2000.
- [Ric03] J.-P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694, October 2003.
- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4) :629–637, April 2000.
- [RP01a] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5) :371–378, August 2001.
- [RP01b] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI approach to compute robust stability domains for uncertain linear systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, volume 1, pages 4073–4078, Arlington, VA, June 2001.
- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4) :675–678, April 2002.
- [SBSA03] P. Shi, E.-K. Boukas, Y. Shi, and R. K. Agarwal. Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157(2) :435–451, August 2003.
- [SK98] S. H. Song and J. K. Kim. \mathcal{H}_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, 34(1) :137–139, January 1998.

- [Sko90] V. I. Skorodinskii. Iterational method of construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for linear systems with delay. *Automation and Remote Control*, 51(9) :1205–1212, 1990.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12 :625–653, 1999. URL : <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.
- [Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems : an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.
- [Ver99] E. I. Verriest. Robust stability and adaptive control of time-varying neutral systems. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4690–4695, Phoenix, AZ, December 1999.
- [WH94] J. W. Wu and K. S. Hong. Delay-independent exponential stability-criteria for time-varying discrete delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(4) :811–814, 1994.
- [WHU99] Z. D. Wang, B. Huang, and H. Unbehauen. Robust \mathcal{H}_∞ observer design of linear state delayed systems with parametric uncertainty : the discrete-time case. *Automatica*, 35(6) :1161–1167, 1999.
- [Wil91] J. C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3) :259–294, March 1991.
- [XC04] S. Xu and T. Chen. Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 51(3-4) :171–183, March 2004.
- [XLY01] S. Xu, J. Lam, and C. Yang. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay. *Systems & Control Letters*, 43(2) :77–84, June 2001.
- [XLYV03] S. Xu, J. Lam, C. Yang, and E. I. Verriest. An LMI approach to guaranteed cost control for uncertain linear neutral delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(1) :35–53, January 2003.
- [XSF97] L. Xie, S. Shishkin, and M. Fu. Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems. *Systems & Control Letters*, 31(3) :165–171, August 1997.
- [Xu02] S. Xu. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part I : Fundamental Theory and Applications*, 49(12) :1853–1859, December 2002.
- [YH04] D. Yue and Q.-L. Han. A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part II : Analog and Digital Signal Processing*, 51(12) :685–689, December 2004.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [ZKT01] J. Zhang, C. R. Knopse, and P. Tsiotras. Stability of time-delay systems : equivalence between Lyapunov and scaled small-gain conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3) :482–486, March 2001.
- [ZWH04] Z. Zuo, J. Wang, and L. Huang. Robust stabilization for non-linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 77(4) :384–388, 2004.