



# Elaboration sans prototypage du circuit équivalent de transformateurs de type planar

Xavier Margueron

## ► To cite this version:

Xavier Margueron. Elaboration sans prototypage du circuit équivalent de transformateurs de type planar. Energie électrique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00151063

**HAL Id: tel-00151063**

**<https://theses.hal.science/tel-00151063>**

Submitted on 1 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université Joseph Fourier*

N° attribué par la bibliothèque

/ \_ / \_ / \_ / \_ / \_ / \_ / \_ / \_ / \_ /

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER**

**Spécialité : « Génie Electrique »**

Préparée au **Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

Dans le cadre de l'Ecole Doctorale « **Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunication, Signal** »

Présentée et soutenue publiquement par

**Xavier MARGUERON**

Le 23 octobre 2006

**Elaboration sans prototypage du circuit équivalent  
de transformateurs de type planar**

Directeur de thèse : **Jean-Pierre KERADEC**

M. Pierre BEAUVILLAIN  
M. Francis PIRIOU  
M. Bruno ALLARD  
M. Jean-Pierre KERADEC  
M. Gérard MEUNIER  
M. Hervé STEPHAN  
M. Robert PERRET

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Co-encadrant  
Co-encadrant industriel  
Invité



# Remerciements

Les remerciements... C'est une partie du mémoire importante puisque c'est sûrement celle qui sera lue le plus souvent. Vu les difficultés que j'ai rencontrées pour finir les remerciements "oraux" le jour de ma thèse, je me dis que ça ne peut pas être pire, et que je devrais réussir à les finir sans avoir à mouiller le clavier d'EP3 !!! Je l'ai déjà fait une fois, mais c'était de la bière qu'il a légèrement ingurgitée un vendredi après midi sur le bloc de son lecteur CD...

Ca fait maintenant 3 mois tout juste que j'ai soutenu... il est donc temps d'en finir et d'écrire les remerciements et de citer quelques personnes qui m'ont accompagné de près ou de loin pendant ces trois dernières années jusqu'à la naissance du "bébé" (©B. F.).

Comme il est de tradition, je voudrais commencer mes remerciements par les différents membres du jury :

**Pierre Beauvillain...** Merci de s'être déplacé de Paris pour venir présider le jury de ma thèse. Etant un peu extérieur au monde du génie électrique, j'espère que j'ai pu lui montrer que nos travaux de modélisation n'étaient pas dénués d'intérêts et de science et que les recherches dans ce sens sont encore promises à un bel avenir.

**Francis Piriou et Bruno Allard...** qui ont eu la lourde tâche de rapporter ma thèse... il faut quand même savoir qu'on leur a laissé environ une semaine et demie pour ingurgiter et digérer les 269 pages du mémoire provisoire. Merci pour leur rapidité, leurs remarques et surtout merci pour l'attention qu'ils ont portée à mes travaux.

Pour compléter ce jury, merci à **Robert Perret**, avec son statut d'invité à cause de sa nouvelle activité de professeur à la retraite. En plus de sa participation à mon jury, je souhaiterais le remercier pour ce qu'il a su me montrer de l'électronique de puissance, des cours en amphithéâtre jusqu'à la direction d'une équipe de recherche...

Que dire ensuite sur mes chefs ? **Kéké** et **Gégé**... J'ai eu, je pense, la chance d'être encadré par le meilleur binôme de tout le laboratoire. Au delà de leurs capacités scientifiques (je reviendrais là dessus), c'est avant tout leur gentillesse, leur bonne humeur et leur disponibilité de tous les instants qui font d'eux des personnes incontournables et surtout indispensables. Cette fois je vais commencer par mon Kéké... Comment décrire Jean-Pierre Keradec ??? Un scientifique ? Un physicien ? Un professeur passionné ? Un bon vivant ? Un narrateur ? Un comique ? C'est finalement un mélange de tous ces termes. C'est le permanent proche des doctorants, toujours prêt à raconter une anecdote autour d'un café, parler science ou champignon dans un couloir ou bien encore placer une petite blague subtile (que je ne comprenais pas toujours immédiatement... on se mettait souvent à plusieurs pour la comprendre) au milieu d'une

réunion d'équipe. Le "Mr Transfo", comme on l'appelle m'aura énormément appris et c'est sûr que sans lui, sans son aide et sans son amitié, aucun de ces travaux n'auraient vu le jour. J'aurais un message à dire à ses thésards et à ses étudiants, voire à toutes les personnes du laboratoire : profitez-en tant qu'il n'est pas à la retraite car il a encore énormément de choses à vous apprendre... ;-)

Mon deuxième chef est tout autant important à mes yeux. Même si j'ai moins eu l'occasion de travailler avec, c'est une personne qui m'a beaucoup aidé dès que j'avais un souci. Toujours accueillant (tous les doctorants vous le diront), sa motivation, sa sympathie et son savoir font de lui une personnalité à connaître. J'ai un regret, comme je l'ai dit lors de ma soutenance, c'est qu'il n'ait pas pu venir avec moi en conférence à Miami...

Merci aussi à mon autre co-encadrant, industriel cette fois, **Hervé Stéphan**... Cette thèse n'aurait pas été possible sans ce soutien financier. Merci de m'avoir fait ou plutôt de "nous" avoir fait confiance dans cette tâche. En espérant que ce mémoire soit exploitable et surtout que les résultats obtenus soient intéressants pour THALES et utilisés dans les futurs transformateurs...

Je souhaiterais remercier un certain nombre de personnes au laboratoire, certaines personnes avec qui j'ai eu ou j'ai encore l'occasion de travailler (thèse et enseignement) et d'autres simplement de discuter... Alors dans le désordre : **Tuan** (le mien, pas celui d'Gami), **Bertrand R.**, **Olivier C.**, **René**, **Jérémie**, **Yvan**, **Marc B.**, **Djidji**, **Emmanuel**, **Raph**, **Gilles**, **Hichem**, **Lalao**, **Jean-Louis**, **Jean-Christophe**, **Viet**, **Binh**, **Jean-Paul**, **Yves**, **James**, **POJ**, **Aiman**, **Erwan**, **Elisabeth**, **Christian**, **Jean-Luc**, **Gaël**, **Max**, **Haizea**, **Amaia** etc... sans oublier les quatre personnes sans qui le labo ne tournerait pas et qui se sont toujours arrangées avec mes histoires difficiles d'argent (mon CDI de chantier), d'inscription, de transport, de fax pour les Etats Unis etc : **Jacqueline**, **Danielle**, **Elise** et **Monique** !!!!

Une pensée peut-être à tous les créateurs de l'Esprit EPTE... sans les citer car ils sont nombreux. J'espère avoir été digne, malgré ma Main Molle (et la demie sur la route du retour de Bulgarie)...

Si vous aviez une bonne opinion de moi, vous pouvez vous arrêter là... Il me reste pas mal de personnes "plus proches" à remercier alors commençons par les gens du labo...

*\*\*\*Ciblon le bureau D055 : Merci...*

Les actuels :

**Benj'** : mon copain d'puis l'IUT toujours assis au 1<sup>er</sup> rang, mais toujours là (ou presque) pour un apéro-Star Wars... Comme on disait : **DEGACHE** !!!!!

**Alex** : à qui j'ai sifflé une partie du bar... fan de foot, de legos, de Matsé et de dopamylne...

**Guybrush "Le Grand"** : J'veux être clair (d'accord mais moi je reste Gart), son ombre plane sur tous les doctorants d'EPTE depuis maintenant quelques générations. Merci à toi mon gars !

**Hervé** : Le doyen... Je vais finalement arriver à envoyer ma thèse avant lui !!! Futur responsable de la filière EPTE, de la salle EPTE voir Chef de MADEA... il est promis à un grand avenir in the G2Elab world...

**Nico** : Cet homme est énervant puisqu'il est doué en tout... C'est un peu le problème avec certains agrégés, mais celui-là, je vous le conseille, soit pour parler science, soit OM, soit Guitare ! Rock 'N Roll....

**Dimitrios** : il possède plusieurs surnoms dont le vendeur de Kebab ou encore Grec le Missionnaire...

Les anciens :

**Gami** : Mon 'BBYSH, mon copain d'pot, mon copain d'bureau, mon copain d'ju-jitsu, mon copain d'musique, mon copain d'apéro... 'BBYSH Them All !!!

**Branck Farruel** : mon Maître... il m'a tout appris... j'ai réussi à le rendre malade... la boucle est bouclée... en tout cas merci pour tout... parce que toi mon gars, toi mon gars et bah... :'( "On se souviendra" ... Biz à sa policewoman !

**Kiki** : le chasseur de OnsaitPasTropQuoi... Ouaiç 7-3 représente, qui comme tous les savoyards et moi le premier ne possédait que 5 slips...

**John Peg** : Sa thèse restera LA référence... Tremblez futurs thésards de Schneider car ce gars la vous a déjà fait du mal !!!

Les filles :

**Nath'** : la blonde... Tout le monde nous a envié d'être amis avec cette fille... A ma collègue de promo je dirai bonne continuation au pays de la saucisse et de la bière et à très bientôt...

**Maria** : la brune... Merci pour le voyage en Bulgarie... Ca restera un très fort moment de ces 3 années...

**Co** : Super admin... Toujours là pour nous faire fonctionner ces p..... de logiciels, mails et autres ressources nymphomatiques...

**Adi** : Tu as très bien fait de choisir un savoyard :-D

**Aude** : Tu as très bien fait de choisir le labo pour faire ton stage :-D

*\*\*\*Tout en nous éloignant : Merci...*

Le corbeau du LEG et son fils, le corbeau du G2Elab

Les nouveaux : **Abdel** (la très bonne relève)

Mes stagiaires : **Alfred** (Chaton, mon binôme de l'IUT), **Julien**, **Quentin**, **Hussey**,  
**Aurelien**, **Yves** et **Hamza**

Les roumain(e)s : **Dan**, **Bianca** et **Maria**

Les musiciens : **Steph**, **Antoine**

*\*\*\*En sortant du labo : Merci...*

Les bières : Kro, Heineken

Les frères Berthom

Les autres Ibbysh et rattachés : **Philou 22** (et sa matou), **JR**, le **Ben**, **Lapin**, **Raph**,  
**Tramb**

Les saucissons : Justin Bridou (avec et sans noisettes)

Les Mets : Lars, Jaymz, Kirk, Robert, Jason et Cliff



Les Marcells : Mouloud, James, JB, Bouli, Tof, Tibal...

Les Tamhtama (Rdv le 24 mai à Meylan)

La baguetterie

WWtdd.com

Et pis surtout **Les BLUM** (à votre avis, je suis où dans le groupe ???) : **Alf** (CLC), **Lionel** (Jack), **Oliv'** (Payen), **Pierrick** (Clowny), **Benj'** (BenBen)



Mes collègues z'et amis musiciens : **Jacques, Gab, Ester, Clémence, Céline, Laurent, Aurélie, Carole** euh... (et les 80 autres qui ne sont pas venus) !

Mes avant-dernières pensées vont à ma famille. Merci de vous être déplacés en nombre ! C'était très émouvant et vous n'êtes pas innocents au fait que j'ai complètement craqué à la fin de la soutenance... Merci d'avoir accepté/supporté mes choix et tout le reste... enfin MERCI pour tout !

Et puis il reste ma **Lora**... Merci aux pays de l'Est et surtout à toi, pour tout ce que tu m'as déjà apporté et tout ce que tu m'apportes au quotidien !

Je ne remercie pas : CrèvePasLaC..... et CeluiQuiSeBaladeSansChaussure... :-D

Thanks a lot for coming...

See ya next year (ou pas), same place...

X.







# Table des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>13</b>
<b>CHAPITRE 1 : TOPOLOGIE DES CIRCUITS EQUIVALENTS</b>	<b>19</b>
I. INTRODUCTION	21
II. CIRCUITS TRADITIONNELS	22
II.1. Coupleurs parfaits	22
II.2. Schéma général pour un transformateur à deux enroulements	23
II.3. Transformateurs à enroulements multiples	25
II.3.a. Schéma traditionnel pour un transformateur à trois enroulements	25
II.3.b. Présentation d'autres modèles et de leurs limites	26
III. SCHEMAS EQUIVALENTS POUR N-ENROULEMENTS	28
III.1. Présentation intuitive	29
III.1.a. Transformateur à deux enroulements	29
III.1.b. Transformateur à trois enroulements	29
III.1.c. Transformateur à quatre enroulements et généralisation	30
III.2. Approche théorique	31
III.2.a. Expression de l'énergie d'un système dans différentes bases	31
III.2.b. Changement de base : Exemple pratique	33
III.3. Simplifications des schémas équivalents	33
III.3.a. Identité de deux enroulements	34
III.3.b. Couplage dominant	35
III.3.c. Couplage négligeable dans le transformateur de fuite	36
IV. APPLICATIONS DES SCHEMAS EQUIVALENTS	37
IV.1. Modélisation des coupleurs sous Pspice®	37
IV.2. Inductance triphasée	38
IV.3. Transformateur triphasé	40
V. CONCLUSION	43
<b>CHAPITRE 2 : IDENTIFICATION EXPERIMENTALE</b>	<b>45</b>
I. INTRODUCTION	47
I.1. Comment élaborer le circuit équivalent d'un transformateur ?	48
I.2. Impédances à vide, en court circuit et relations dans un quadripôle	49
I.3. Séparation Statique-dynamique	50
I.4. Séparation de la partie électrostatique	51
I.5. Constantes localisées ou réparties ?	51
I.6. Prise en compte de la variation fréquentielle des éléments	53
II. LES MESURES D'IMPEDANCES	54
II.1. Mesure voltampèremétrique et autres techniques	54
II.2. Mesures "4 fils"	55
II.3. Méthode du pont auto calibré	56
II.4. Problèmes de mesure et recommandations	57
II.4.a. Comment choisir les mesures à effectuer ?	57
II.4.b. Intérêt de la mesure redondante	58
II.4.c. Compensation du pont d'impédance	58
II.4.d. Quelques précautions utiles	60
II.4.e. Limites pratiques des mesures inductives et résistives	60
II.4.f. Mesure valide ou non ?	63
III. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU MODELE INDUCTIF	63

III.1. Calcul et grandeurs complexes	63
III.2. Caractérisation d'un transformateur deux enroulements	64
III.2.a. Impédances mesurables	64
III.2.b. Identification d'un transformateur à deux enroulements	65
III.2.c. Application à un transformateur torique	66
III.2.d. Détermination de l'impédance d'un court circuit	68
III.3. n-enroulements	69
III.3.a. Dénombrement des impédances et généralisation	70
III.3.b. Exemple d'un transformateur planar à trois enroulements	70
III.3.c. Conclusion sur la généralisation	80
IV. VERS UN MODELE COMPLET... L'ASPECT CAPACITIF	80
IV.1. Quelques rappels	80
IV.2. Aspect pratique pour un transformateur à trois enroulements	82
IV.3. Validation pour le transformateur trois enroulements	83
V. VALORISATION D'UNE CARACTERISATION H.F.	85
VI. CONCLUSION	87
 <b>CHAPITRE 3 : CALCULS ANALYTIQUES DES PARAMETRES STATIQUES DU TRANSFORMATEUR DE FUITES</b>	 <b>89</b>
I. INTRODUCTION	91
I.1. Définition des inductances de fuites	91
I.2. Pourquoi est-il important d'évaluer un tel paramètre ?	92
I.3. Etat de l'art	93
II. METHODE DE CALCUL DES INDUCTANCES DE FUITE STATIQUES	94
II.1. Simulation Flux3D® et observation	94
II.2. Hypothèses de calcul	95
II.3. Principe de calcul	96
II.4. Potentiel vecteur et induction d'un méplat infini	97
II.4.a. Expressions analytiques	97
II.4.b. Validation des expressions	98
II.5. Prise en compte du circuit magnétique	99
II.5.a. Circuit magnétique supposé "infini"	100
II.5.b. Circuit magnétique d'épaisseur finie	102
II.5.c. Milieu infini ou épaisseur finie ?	103
II.6. Calcul de densité d'énergie et intérêt du potentiel vecteur	104
II.6.a. Intégration numérique	105
II.6.b. Intégration analytique	105
II.7. Chemin moyen	107
II.8. Synthèse de la méthode	108
III. APPLICATION A UN TRANSFORMATEUR EP13	109
III.1. Description du transformateur	109
III.2. Comparaison des énergies	110
III.2.a. Simulation 3D et simplification en 2D	110
III.2.b. Intégration de l'énergie par AJ et BH	110
III.2.c. Simulations et calculs analytiques	111
III.3. Evaluation de l'inductance	113
IV. APPLICATION A UN TRANSFORMATEUR PLANAR	115
IV.1. Description du transformateur	115
IV.2. Inductance de fuite primaire/auxiliaire	116
IV.2.a. Description des enroulements	116
IV.2.b. Forme des champs et énergies	116
IV.2.c. Evaluation de l'inductance de fuite	118
IV.3. Homogénéisation partielle des enroulements	118

IV.4. Inductance de fuite Primaire/Secondaire	120
IV.4.a. Description des enroulements	120
IV.4.b. Forme des champs et énergies	121
IV.4.c. Evaluation de l'inductance de fuite	121
V. EXTENSION AU TRANSFORMATEUR DE FUITE	122
VI. CONCLUSION ET LIMITES DE CETTE METHODE	125
 <b>CHAPITRE 4 : TECHNIQUES ANALYTIQUES DE CALCUL DES PERTES CUIVRE ET DES FUTES DYNAMIQUES</b>	 <b>127</b>
I. INTRODUCTION	129
II. LES DIFFERENTS TYPES DE PERTES H.F. DANS LE CUIVRE	130
II.1. Effet de peau	130
II.2. Effet de proximité	131
II.3. Courants de circulation	132
II.4. Théorème d'orthogonalité	133
III. CALCULS EXACTS DES COURANTS INDUITS DANS LES CONDUCTEURS	135
III.1. Equation à résoudre et conditions aux limites	135
III.2. Problèmes résolus	136
III.2.a. Plaques infinies	136
III.2.b. Fil cylindrique	137
III.3. Fil méplat rectiligne	139
III.3.a. Simulation d'un méplat	139
III.3.b. Décomposition de la densité de courant double polynôme de Legendre	140
III.4. Conclusion sur le calcul exact des courants induits	141
IV. CALCULS BASES SUR DES APPROXIMATIONS	142
IV.1. Méthode de Dowell	142
IV.1.a. Principe de la méthode	142
IV.1.b. Résistance et inductance d'une association de plaque	143
IV.1.c. Equivalence nappe de conducteurs-plaque	145
IV.1.d. Limites en général et dans les transformateurs planar	146
IV.2. Circuits équivalents de plaques	147
IV.2.a. Circuit équivalent associé à une plaque	147
IV.2.b. Expressions des impédances pour les trois types de plaque	150
IV.2.c. Plaque constituée de fils parallèles connectés en série	151
IV.2.d. Groupement de plaques conductrices identiques	151
IV.2.e. Illustration de la méthode	155
IV.3. Perméabilité complexe	156
IV.3.a. Equivalence pour une plaque-Modèle 1D	157
IV.3.b. Extension au modèle 2D et limites	158
IV.3.c. Equivalence pour un réseau rectangulaire de fils méplats-Application aux transformateurs planar	159
IV.3.d. Conclusion sur la méthode de la perméabilité complexe	160
IV.4. Méthode $\mu$ PEEC	160
IV.4.a. Principe de la méthode PEEC	161
IV.4.b. Prise en compte des matériaux magnétique-Extension au $\mu$ PEEC	163
IV.4.c. Vers une formulation analytique des courants de surface pour des fenêtres de transformateur	164
IV.4.d. Exemple de calcul : Fil dans un cylindrique magnétique	165
IV.4.e. Importance de la mise en parallèle	168
IV.4.f. Perspectives ouverte par la méthode $\mu$ PEEC	170
V. CONCLUSION	171

<b>CHAPITRE 5 : DEVELOPPEMENTS TECHNOLOGIQUES POUR LA REDUCTION DES PERTES CUIVRE : DES TRANSFORMATEURS PLANARS AUX CONDUCTEURS MEPLATS...</b>	<b>173</b>
I. INTRODUCTION	175
II. PERTES SUPPLEMENTAIRES LORS DE LA MISE EN PARALLELE DE CONDUCTEURS	176
II.1. Influence des courants dans un transformateur planar	176
II.2. Prise en compte de ces courants de circulation	177
II.2.a. Modélisation des couches secondaires uniquement	178
II.2.b. Modélisation du transformateur complet	179
II.3. Réduction des courants de circulation	180
III. BLINDAGE PAR DES CONDUCTEURS ECRANS DANS UN COMPOSANT BOBINE	181
III.1. Effets de blindage dans un transformateur planar	181
III.2. Réduction des pertes par déplacement de conducteurs	182
III.3. Réduction des pertes cuivres dans une inductance	185
IV. GUIDAGE DU FLUX DANS LES TRANSFORMATEURS	187
IV.1. Principe de la méthode	187
IV.2. Deux conducteurs méplats parcourus par des courants de sens inverses	189
IV.3. Deux conducteurs méplats dans lesquels les courants circulent dans le même sens.	192
IV.4. Conducteur méplat seul	193
V. MINIMISATION DES PERTES DANS UN CONDUCTEUR MEPLAT	194
V.1. Description du dispositif étudié et but recherché	194
V.2. Identification et recréation des champs	195
V.3. Principe de l'optimisation	199
V.4. Résultats de l'optimisation	199
V.4.a. Optimisation de $\text{Re}(a_2)$ et $\text{Im}(a_2)$	199
V.4.b. Optimisation de $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$	200
V.4.c. Optimisation de $\text{Re}(a_2)$ , $\text{Im}(a_2)$ , $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$	200
V.4.d. Conclusion sur les optimisations	200
VI. CONCLUSION	202
 <b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	 <b>203</b>
 <b>BIBLIOGRAPHIE</b>	 <b>209</b>
 <b>ANNEXE I : CALCUL DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE CREE PAR UN FIL RECTILIGNE SUR UN MILIEU MAGNETIQUE SUPPOSE INFINI</b>	 <b>217</b>
<b>ANNEXE II : CALCUL DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE CREE PAR UN FIL RECTILIGNE SUR UN MATERIAU MAGNETIQUE D'EPAISSEUR FINIE</b>	<b>227</b>
<b>ANNEXE III : FEUILLE DE CALCUL MATHCAD® DES INDUCTANCES DE FUITES STATIQUES</b>	<b>239</b>
<b>ANNEXE IV : DOUBLE INTEGRALE DES POLYNOMES DE LEGENDRE POUR LE CALCUL DU POTENTIEL VECTEUR DANS UN MEPLAT</b>	<b>261</b>
<b>ANNEXE V : QUADRIPOLE EQUIVALENT A N QUADRIPOLES IDENTIQUES CONNECTES EN CASCADE</b>	<b>265</b>
<b>ANNEXE VI : FONDEMENT DU DEVELOPPEMENT MULTIPOLAIRE</b>	<b>271</b>

## ***INTRODUCTION GENERALE***



Le développement de l'électronique de puissance a connu, depuis une vingtaine d'année, un essor remarquable. Des convertisseurs de plus en plus performants et de plus en plus petits sont présents dans la plupart des dispositifs utilisés quotidiennement : téléphone portable, ordinateurs... Hormis le coût, les deux préoccupations prioritaires des développeurs sont l'encombrement et le rendement. Les redresseurs, hacheurs et autres alimentations à découpage ont donc subi des évolutions importantes tant au niveau de leur structure que de leurs composants actifs et passifs. La miniaturisation des alimentations a, en grande partie, été facilitée par l'élévation des fréquences de découpage, ce qui n'est pas sans induire un certain nombre de contraintes au niveau des composants. En effet, pour une puissance équivalente, une diminution de taille nécessite souvent un changement de technologie et de nouveaux problèmes apparaissent. Plus un composant est petit, plus le rendement est essentiel puisque les calories sont plus difficiles à évacuer d'un petit composant.

Au coeur des convertisseurs, les transformateurs sont un élément essentiel qui permet le transfert de l'énergie, l'adaptation des niveaux de tension et de courant et l'isolation galvanique de deux parties d'une alimentation. Leur rendement doit être élevé afin de transférer l'énergie sans pénaliser le rendement global. Dans une optique de réduction de dimensions, les composants bobinés, "classiques", se retrouvent limités puisque ces derniers sont bobinés avec du fil de cuivre (émaillé ou de technologie Litz), dont on ne peut diminuer la section. Pour surmonter ce problème, les composants planars ont été introduits.

Les transformateurs planars (ou les inductances) sont constitués d'un circuit magnétique mince (généralement en ferrite usiné) dans lequel on insère un circuit imprimé (PCB multicouche) sur lequel les spires sont gravées (Figure 1). La technologie de circuit imprimé permet d'obtenir des conducteurs d'épaisseurs réduites (de  $50\text{ }\mu\text{m}$  jusqu'à une centaine de  $\mu\text{m}$ ). Ainsi l'empilage de nombreuses couches de conducteurs dans un espace réduit devient possible. En outre, lorsqu'elle est bien maîtrisée, cette technologie procure des rendements souvent supérieurs à 98.5% et elle favorise l'évacuation des calories à travers le circuit magnétique.

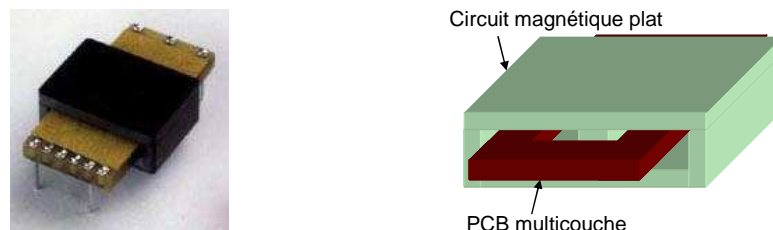


Figure 1 : Transformateur de type planar



Tourné vers le marché aéronautique, notre partenaire industriel, THALES, développe des alimentations pour toutes les fonctions (principales et de secours) présentes dans des avions militaires ou civil. Suivant l'application visée, les contraintes diffèrent et, entre le poids et le rendement, la priorité n'est pas placée de la même façon. Typiquement, pour des applications militaires, les rendements les plus élevés sont recherchés de même qu'un volume minimum, alors que, pour l'aviation civile, la taille est primordiale mais le rendement est moins critique. Pour des composants bobinés de structure classique, le savoir actuel est tel que les concepteurs parviennent souvent à concevoir le transformateur satisfaisant le cahier dès le premier prototype. Pour les composants planars, les connaissances ne sont pas suffisantes pour prétendre à une efficacité comparable. En effet, même si le principe de fonctionnement est le même dans les deux cas, la forme des conducteurs utilisés, ainsi que leur disposition dans les fenêtres des transformateurs, ne permettent pas d'appliquer les mêmes règles de conceptions.

La conception d'un transformateur, passe par plusieurs phases : analyse du cahier des charges, calcul des paramètres, validation par simulation numérique, prototypage, mesures (Figure 2). Le développement de nouvelles alimentations exploitant des transformateurs planars, nécessite une longue phase de prototypage, basée sur une méthode de type essai-erreur, coûteuse en temps et, bien entendu, en argent.

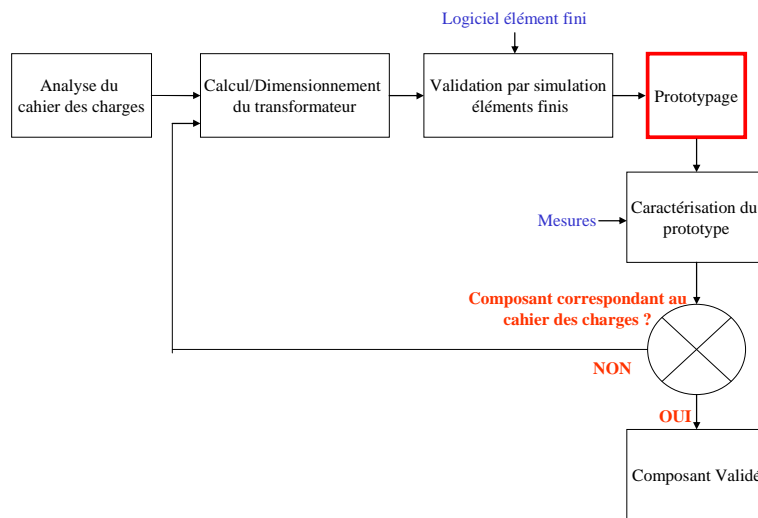


Figure 2 : Synopsis de la conception d'un transformateur

Ayant en vue les réductions de temps et, surtout, de coût du prototypage, les travaux de cette thèse visent à fournir des outils, basés sur des formulations analytiques, pour aider à concevoir et à dimensionner les transformateurs planar. Les formulations analytiques présentent deux intérêts principaux. Premièrement, elles sont essentielles pour éviter (ou du moins limiter) le recours à des simulations électromagnétiques par éléments finis, qui prennent beaucoup de temps. Deuxièmement elles ouvrent les perspectives d'optimisations. En effet, les logiciels actuels

d'optimisation nécessitent le recours à des "fonctions objectifs" qui doivent être minimisées en utilisant des algorithmes. Les optimisations numériques (à l'aide de logiciels éléments finis) étant à l'heure actuelle impossibles vue la complexité des problèmes traités, l'approche analytique paraît bien mieux adaptée pour ajuster un paramètre à une valeur désirée.

Le but de cette thèse est donc de comprendre les phénomènes internes aux transformateurs planars et de les formuler analytiquement afin de pouvoir élaborer, sans avoir recours à des simulations, ni à des mesures, le circuit équivalent de transformateurs de type planar et ce, en vue de pouvoir prédire son comportement en fonction de la fréquence. Avant de pouvoir atteindre ce but, différentes étapes ont été franchies progressivement, en s'aidant de mesures et de simulations par éléments finis pour valider nos approches.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous nous intéressons à la représentation, par un circuit équivalent, du couplage magnétique des transformateurs. Même dans l'hypothèse simplificatrice d'un fonctionnement linéaire, peu de circuits équivalents ont été proposés pour représenter ce couplage lorsque le nombre d'enroulements dépasse trois. L'équipe du LEG a progressivement introduit une méthode générale d'élaboration de ces circuits qui est maintenant bien étayée et qui a été testée sur de nombreux cas pratiques. Ces circuits fournissent naturellement l'ossature des circuits représentant le comportement complet du transformateur. C'est pourquoi nous faisons une présentation synthétique de cette méthode en mettant en lumière certaines propriétés dégagées durant ce travail ainsi que des applications nouvelles.

Dans le chapitre 2, nous présentons notre façon d'identifier les paramètres du circuit équivalent en partant de mesures d'impédances. Bien entendu, le circuit équivalent recherché ne se borne pas à représenter le couplage magnétique. En prenant l'exemple d'une inductance pour justifier la démarche, nous séparons les effets électrostatiques et les pertes statiques du composant pour bâtir un circuit équivalent qui prend tout en compte, y compris les variations fréquentielles des pertes et des inductances. Pour identifier les éléments de ce circuit équivalent général, nous pouvons relever une multitude d'impédances distinctes entre les bornes d'un enroulement aussi bien qu'entre deux enroulements. La stratégie guidant le choix des mesures à effectuer est présentée. Enfin, les problèmes inhérents aux mesures elles-mêmes sont détaillés avec une attention particulière portée aux impédances faibles et à l'incidence des courts-circuits.

Avec le chapitre 3, nous commençons la détermination des éléments du circuit équivalent à l'aide de formule analytiques. L'évaluation des résistances des enroulements, ainsi que de l'inductance magnétisante d'un transformateur ne posant pas de problèmes particuliers, nous nous intéressons dans ce chapitre à la détermination des éléments statiques de ce que nous appelons "transformateur de fuite". Ce dernier est constitué d'inductances de fuites et de

coupleurs parfaits. Leurs valeurs sont déterminées à des fréquences inférieures à celles où les courants induits se développent dans les conducteurs. La méthode de calcul est basée sur la détermination de l'énergie de fuite à l'intérieur des fenêtres du transformateur en utilisant des formules analytiques connues pour des conducteurs rectangulaires : celles exploitées par la méthode PEEC. Les calculs analytiques sont comparés à des simulations électromagnétiques ainsi qu'à des mesures effectuées sur deux prototypes de conceptions différentes.

Nous abordons ensuite, dans le chapitre 4, l'étude des courants induits dans les conducteurs rectangulaires. Lorsque la fréquence du courant augmente, sa répartition dans un conducteur n'est plus uniforme. Il s'ensuit une augmentation des pertes (de la résistance apparente) et une diminution de certaines inductances. Ces modifications doivent être prises en compte lors du dimensionnement d'un transformateur. Les transformateurs planars font appel à des conducteurs rectangulaires aplatis : des méplats. Pour ce type de conducteur, la solution exacte de l'équation de diffusion qui régit les courants induits est indisponible et seules des solutions approximatives sont proposées dans la littérature. Nous présentons brièvement plusieurs d'entre elles : la méthode de Dowell, la méthode des circuits équivalents de plaques et nous introduisons la méthode  $\mu$ PEEC. Un début de solution analytique de l'équation de diffusion dans un méplat, basé sur les doubles polynômes de Legendre est introduit dans ce chapitre.

Le chapitre 5 est dédié aux améliorations technologiques. En premier, nous utilisons une des méthodes présentées au chapitre précédent pour étudier les courants de circulations supplémentaires qui circulent dans les spires en parallèles d'un transformateur planar, fourni par notre partenaire industriel. Nous montrons ensuite que la réduction des pertes dans les transformateurs planars est possible si on tire profit des effets de blindage procurés par des conducteurs écrans. Le transformateur planar utilisant majoritairement des conducteurs méplats, nous tentons enfin de réduire les pertes d'un conducteur méplat en jouant sur son environnement. Certains résultats sont probants. Ils incitent à approfondir la réflexion durant la phase de conception du composant. Pour finir, un champ extérieur variable est appliqué à un méplat parcouru par un courant dans le but de modifier la répartition de son courant. Nous trouvons ainsi quelle forme de champ minimise les pertes par effet de peau du méplat.

# ***CHAPITRE 1 : Topologie des circuits équivalents***



## I. INTRODUCTION

La simulation en électronique de puissance s'est progressivement imposée comme une phase incontournable de la conception. En effet, cet outil permet de limiter le recours aux méthodes de type essai-erreur et, en conséquence, il réduit le coût de développement. Toutefois, obtenir des prévisions fiables nécessite de disposer d'une part, de logiciels appropriés et, d'autre part, de modèles représentant le comportement des éléments constitutifs du système.

Un modèle ne peut être fourni seul. Il doit être accompagné des hypothèses sur lesquelles il se fonde, de son domaine de validité ainsi que de la méthode d'identification des différentes grandeurs qui le caractérisent. Les transformateurs utilisés en électronique de puissance n'entrent en général pas en saturation et ils sont réalisés autour de noyaux ferrites. Ceci nous autorise à accorder un large crédit aux modèles linéaires. Cette hypothèse simplificatrice étant adoptée, il reste, pour que les prévisions soient fiables lorsque les signaux sont chargés en harmoniques, à développer des modèles précis sur une large gamme de fréquence (au moins jusqu'à dix fois la fréquence de travail du montage). Ceci n'est pas simple lorsque les composants comptent trois, quatre, cinq enroulements ou plus.

Les transformateurs multi-enroulements se rangent parmi les composants les plus complexes à modéliser surtout lorsqu'ils possèdent plus de trois enroulements. Nous allons rappeler, dans ce chapitre, les différentes topologies de circuits équivalents, développées par l'équipe du LEG, lors de précédents travaux [COGITORE-94], [SCHELLMANN-99-1].

Lors de la modélisation de ces transformateurs, les effets magnétiques et capacitifs peuvent être complètement séparés. Pour illustrer ce raisonnement, considérons une simple inductance. Le schéma équivalent de ce composant peut s'obtenir en associant des éléments discrets (constantes localisées). A partir du moment où un fil est bobiné sur un noyau magnétique, l'inductance  $L_s$  n'est pas idéale. Il faut lui ajouter une résistance série  $r_s$  qui représente la résistance des fils et une résistance de pertes parallèles  $R_f$  qui rend compte sommairement des pertes dues au circuit magnétique.

Lorsque la fréquence augmente, la tension qui apparaît entre les spires proches est responsable d'un courant capacitif de moins en moins négligeable. Il convient d'introduire cet effet ( $C_{fil}$ ) dans le schéma initial (Figure 1-1).

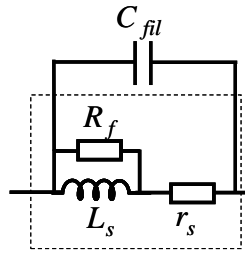


Figure 1-1 : Circuit équivalent d'une inductance

Le circuit obtenu montre que les aspects magnétique et capacitif peuvent être découplés selon la Figure 1-2. En basse et moyenne fréquence, seule la partie magnétique, qui inclut les pertes, est impliquée. En revanche, en haute fréquence, la partie capacitive est prépondérante.

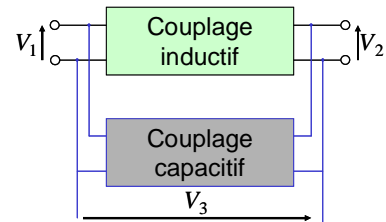


Figure 1-2 : Séparation magnétique/électrostatique

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement au couplage magnétique. Ce type d'étude a déjà donné lieu à de nombreuses publications, chaque auteur proposant son propre schéma, applicable dans certaines conditions. [ROBERT-99] recense les différents circuits équivalents proposés, pour en dégager les plus intéressants.

Afin d'élaborer des circuits équivalents aussi généraux que possible, nous avons adopté une approche énergétique [MARGUERON-04]. Le travail présenté abouti à des résultats généraux qui s'appliquent pleinement à l'électronique de puissance. Des modèles simplifiés mais génériques sont proposés pour certains types de transformateurs communs.

## II. CIRCUITS TRADITIONNELS

Un circuit équivalent de transformateur se décompose donc en une partie magnétique et résistive d'un côté et une partie capacitive de l'autre. Les circuits qui en résultent sont composés d'inductances, de résistances, de capacités et de coupleurs, ces derniers composants permettant de représenter les liens énergétiques entre les différents enroulements. Dans cette partie, nous allons nous intéresser au comportement magnétique des transformateurs et voir de quelle façon les transformateurs à plusieurs enroulements sont traditionnellement décrits.

### II.1. Coupleurs parfaits

Avant d'aborder l'élaboration de modèles, il est important d'introduire la notion de coupleur. En effet, ce composant permet de traduire tout couplage passif, qu'il soit magnétique ou électrostatique. C'est une reprise du "transformateur parfait", utilisé depuis longtemps par les

électrotechniciens mais, désormais, son rapport indépendant de la fréquence n'est plus systématiquement donné par un rapport de nombre de spires. Pour ces composants (Figure 1-3), les tensions et les courants en entrée et en sortie sont dans un rapport constant. Ils sont définis par les relations (1.1) pour le coupleur simple et (1.2) pour le coupleur à multiples entrées.

$$V_1 = \eta_{21}V_2 \text{ et } I_2 + \eta_{21}I_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$V_1 = \eta_{31}V_3, V_2 = \eta_{32}V_3 \text{ et } I_3 + \eta_{31}I_1 + \eta_{32}I_2 = 0 \quad (1.2)$$

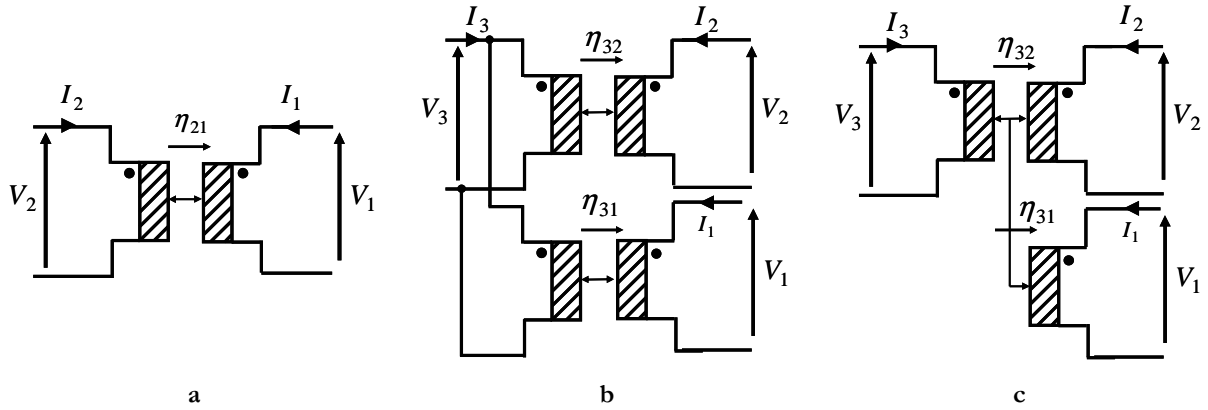


Figure 1-3 : Coupleurs parfaits

a : Coupleur simple | b : Coupleur à multiples entrées | c : Coupleur à multiples entrées (simplifié)

## II.2. Schéma général pour un transformateur à deux enroulements

Du point de vue magnétique, un transformateur à deux enroulements se caractérise par le système d'équations (1.3).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = j\omega \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les éléments de la matrice inductance peuvent être déterminés à l'aide de trois mesures. Le terme  $L_{11}$  correspond à l'inductance à vide vue du primaire.  $L_{22}$  correspond à l'inductance à vide vue de l'autre enroulement. Le troisième élément de la matrice,  $L_{12}$ , est lié au couplage du transformateur. Une troisième mesure en court-circuit est alors nécessaire pour déterminer la valeur du coefficient  $k$  (1.4), image du couplage des deux enroulements. La valeur de  $L_{12}$  est ensuite calculée en fonction de ce coefficient de couplage (1.5).

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_{cc}}{L_{11}}} \quad (1.4)$$

$$L_{12} = k\sqrt{L_{11}L_{22}} \quad (1.5)$$



Le circuit équivalent classique [KERADEC-94] pour ce type de transformateur est présenté sur la Figure 1-4.

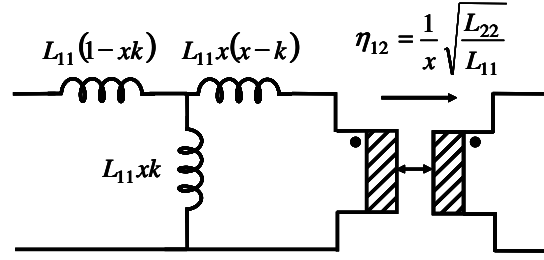


Figure 1-4 : Schéma équivalent pour un transformateur deux enroulements

Les valeurs des éléments de ce circuit sont données en fonction des éléments de la matrice inductance du transformateur, du coefficient algébrique de couplage  $k$  et d'un paramètre  $x$ , choisi arbitrairement. Ce dernier a été introduit car ce schéma équivalent comporte quatre éléments alors que la matrice inductance n'est caractérisée que par trois paramètres (1.3). Ainsi, les inductances de fuite du transformateur dépendent du paramètre  $x$ . S'il est pris respectivement égal à  $k$ ,  $1$  ou  $1/k$ , les fuites semblent localisées sur l'enroulement primaire, partagées équitablement entre les deux enroulements ou totalement dues au secondaire du transformateur. Localiser les fuites sur un enroulement plutôt qu'un autre est en général totalement arbitraire. En effet, les fuites surviennent entre les deux enroulements et, pour les répartir, on recourt, en général, à une carte de champ qui est le fruit d'une hypothèse et non d'un résultat de mesure.

Si  $x$  est choisi en dehors de l'intervalle  $\left[k; \frac{1}{k}\right]$ , une des inductances de fuites est négative.

Ceci ne doit pas choquer car seules les inductances directement mesurables doivent être positives. Les inductances de fuites ne pouvant être mesurées individuellement, elles peuvent être négatives.

Si le rapport de transformation est pris égal au rapport du nombre de spires des enroulements,  $x$  peut être en dehors de l'intervalle indiqué ci-dessus et une des inductances du schéma peut être négative. Dans ce modèle, nous évitons de faire appel au paramètre "nombre de spires", car ce dernier n'est pas toujours accessible à la mesure. Le rapport de transformation (1.6) du modèle pour deux enroulements est exprimé en fonction des inductances directement mesurables  $L_{11}$  et  $L_{22}$  et du paramètre arbitraire  $x$ .

$$\eta_{12} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} \quad (1.6)$$

En pratique, nous choisirons souvent  $x$  égal à une des trois valeurs évoquées ci-dessus. Cela conduit soit à ne placer qu'une inductance de fuite, soit à en introduire deux identiques.

### II.3. Transformateurs à enroulements multiples

#### II.3.a. Schéma traditionnel pour un transformateur à trois enroulements

Pour représenter le couplage magnétique d'un transformateur à trois enroulements, le schéma, appelé modèle en 'T' (Figure 1-5), est communément utilisé [CUK-81].

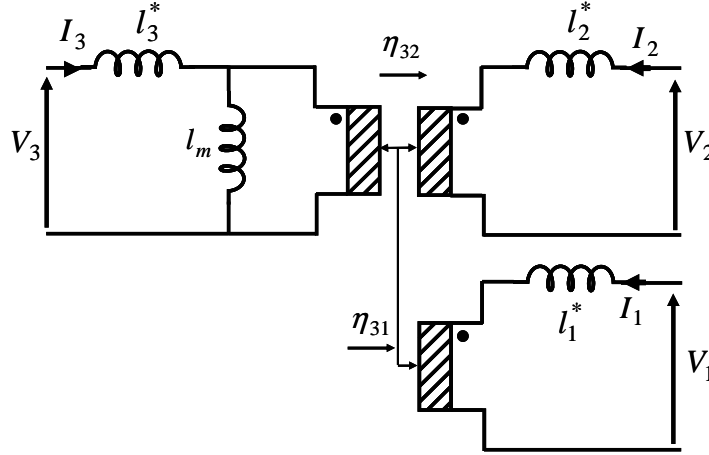


Figure 1-5 : Schéma équivalent traditionnel pour un transformateur trois enroulements

Il est décrit par quatre inductances et deux rapport de transformation, soit six paramètres, ce qui correspond au nombre d'éléments indépendants de sa matrice inductance (1.7) qui est toujours symétrique ( $L_{ij} = L_{ji}$ ).

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

D'un point de vue énergétique, la forme quadratique donnant l'énergie de ce circuit peut être égale à la forme générale exprimée en fonction des éléments de sa matrice inductance (1.8).

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 L_{ij} I_i I_j \right] = l_1^* I_1^2 + l_2^* I_2^2 + l_3^* I_3^2 + l_m (\eta_{31} I_1 + \eta_{32} I_2 + I_3)^2 \quad (1.8)$$

avec  $L_{ij} = L_{ji}$

De cette façon, les six paramètres du schéma équivalent s'expriment en fonction des éléments de la matrice inductance (1.9).

$$\begin{aligned} l_1^* &= L_{11} - \frac{L_{12}L_{13}}{L_{23}} & l_2^* &= L_{22} - \frac{L_{12}L_{23}}{L_{13}} & l_3^* &= L_{33} - \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12}} \\ l_m &= \frac{L_{13}L_{23}}{L_{12}} & \eta_{31} &= \frac{L_{12}}{L_{23}} & \eta_{32} &= \frac{L_{12}}{L_{13}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Comme dans le cas du transformateur à deux enroulements, les inductances de ce circuit peuvent être négatives. Depuis quelques années, les logiciels de simulation acceptent l'introduction de valeurs négatives pour les inductances et capacités. Le recours à des astuces de contournement de cette règle limitative n'est donc plus d'actualité.

Pour un transformateur à deux enroulements, ce modèle traditionnel en T correspond, en fait, à une inductance magnétisante placée entre deux inductances de fuite. Lorsque l'on ajoute un enroulement, une inductance de fuite est placée sur cet enroulement supplémentaire, de l'autre côté d'un coupleur. Ce type de modèle, valide pour un transformateur à deux ou à trois enroulements (Figure 1-5), cesse d'être utilisable lorsque le nombre d'enroulements dépasse trois. Pour un transformateur à quatre enroulements par exemple, cinq inductances et trois coupleurs (soit huit paramètres ajustables au total) sont nécessaires alors que la matrice inductance possède dix paramètres indépendants.

### II.3.b. Présentation d'autres modèles et de leurs limites

Plusieurs modèles sont fréquemment utilisés. Le premier d'entre eux, introduit dans [KERADEC-94], consiste à relier chaque terminaison d'un enroulement par une inductance. Ce schéma découle d'une analyse du système en admittances. Pour  $n$  enroulements, l'isolation galvanique est assurée par  $n - 1$  coupleurs. Le point froid du secondaire des coupleurs est relié au point froid de l'entrée non isolée. Il reste à dessiner le circuit de couplage entre les  $n + 1$  bornes ainsi définies. On le fait en insérant une inductance entre toutes les paires de bornes. Ce type de circuit a l'avantage de comporter  $\frac{n(n+1)}{2}$  inductances, ce qui correspond aux nombres d'éléments indépendants de la matrice. La symétrie de cette représentation ne privilégie aucun enroulement mais le schéma obtenu est quand même difficile à interpréter physiquement.

Une autre version de ce modèle, plus connu sous le nom du modèle "cantilever étendu" [ERICKSON-98] permet de déterminer un schéma électrique directement transposable d'une matrice inductance (Figure 1-6). Une inductance magnétisante est placée sur l'enroulement primaire entre le point d'alimentation et une masse. Chaque enroulement est séparé du reste du montage par un coupleur parfait. Une des bornes de chaque coupleur est placée à la masse et  $n - 1$  autres potentiels sont donc disponibles à la sortie des coupleurs. Tous ces potentiels sont reliés un à un par des inductances qui peuvent toutes être déterminées directement avec des mesures de tension et de courant dans différents enroulements.

Des simplifications découlent également de ce modèle "cantilever étendu", notamment lorsque certaines inductances sont beaucoup plus grandes que d'autres. Les inductances sont alors simplement ôtées du circuit équivalent (Figure 1-7) [CHANGTONG-01].

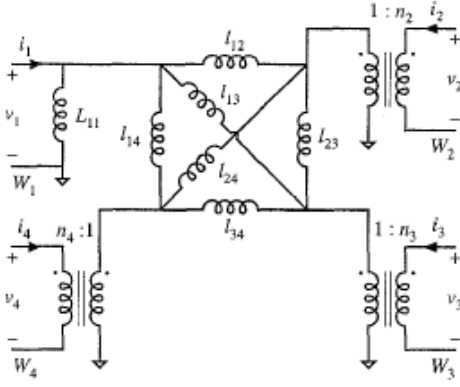


Figure 1-6 : Modèle "cantilever étendu" pour un transformateur quatre enroulements [ERICKSON-98]

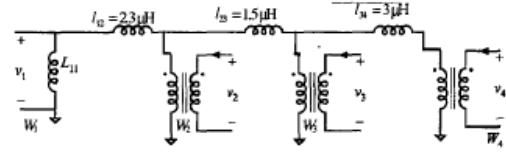


Figure 1-7 : Exemple d'un schéma équivalent modèle "cantilever" simplifié [CHANGTONG-01]

Ce type de modèle est comparé à un modèle dit "T étendu" dans [HAYES-04]. Ce dernier dispositif est en fait un agencement d'un transformateur primaire secondaire, mis en cascade avec un autre secondaire etc... (Figure 1-8) dont les inductances et mutuelles inductances entre les enroulements sont déterminées en considérant différentes lignes de flux dans la fenêtre de transformateur. Pour un composant à trois enroulements par exemple, six inductances et quatre coupleurs sont nécessaires, soit 10 paramètres, soit quatre de trop pour coïncider avec le nombre des éléments indépendants de la matrice inductance. Plus le nombre d'enroulements augmente, plus la complexité du circuit s'accroît. Pour un transformateur à quatre enroulements (Figure 1-8b), neuf inductances et neuf coupleurs sont nécessaires.

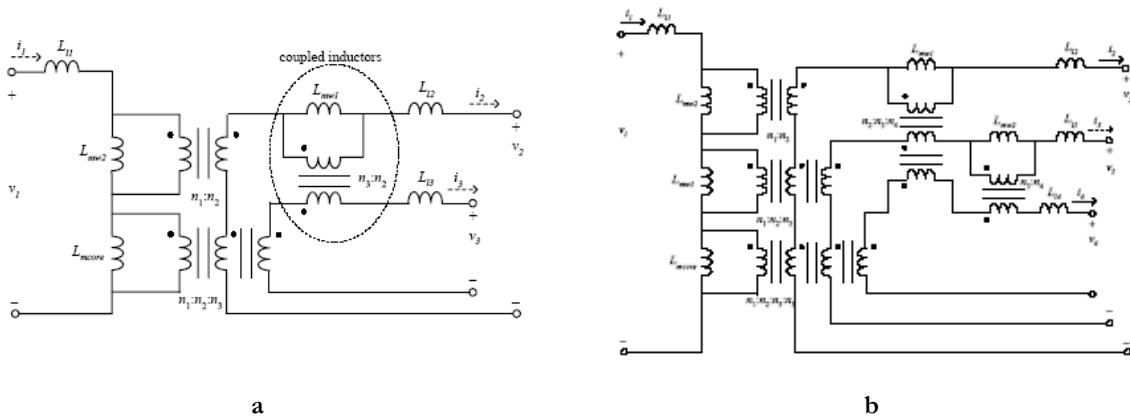


Figure 1-8 : Modèle T étendu pour un transformateur [HAYES-04]

a : Trois enroulements | b : Quatre enroulements

Les circuits équivalents obtenus par cette méthode sont donc surchargés par rapport au nombre de variables nécessaires pour retranscrire le comportement magnétique du transformateur. On peut cependant noter l'apparition d'inductances couplées et de

transformateurs de rang  $n-1$ , concept que nous retrouverons dans les schémas développés au sein de notre équipe.

Un troisième type de modèle, basé sur des mutuelles impédances, est communément utilisé (Figure 1-9) [ASENSI-94] [ASENSI-99].

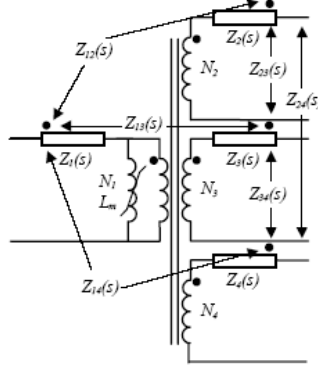


Figure 1-9 : Modèle dépendant de la fréquence [ASENSI-99]

Un transformateur à quatre enroulements est décrit par quatre impédances et six mutuelles impédances, comme dans sa matrice inductance. Le paramètre  $L_m$  représente le comportement non linéaire du noyau magnétique. Un tel modèle est pratique lorsque l'on s'intéresse à des variations fréquentielles des composants puisque que chaque impédance est exprimée sous des formes polynomiales en  $s$ . Les expressions analytiques sont issues d'une combinaison de simulations électromagnétiques et d'optimisation. Ce modèle est très fiable sur le plan fréquentiel, mais il ne peut être obtenu à l'aide de mesures. Des simulations électromagnétiques sont nécessaires. Son utilisation reste cependant limitée puisqu'un tel modèle est difficilement implantable dans un logiciel de simulation circuit classique.

### III. SCHEMAS EQUIVALENTS POUR N-ENROULEMENTS

Les modèles proposés par le LEG [COGITORE-94] [SCHELLMANN-99-1], visent à palier les défauts des précédents. Ils sont généraux, fidèles au comportement décrit par la matrice inductance et ils dépendent d'un nombre de paramètres égal à celui des éléments indépendants de la matrice inductance, ce qui simplifie leur implantation dans un logiciel de simulation. Cette approche présente deux autres avantages. Le premier est que les modèles sont facilement simplifiables lorsque les composants présentent certaines propriétés courantes. Il est en effet intéressant de pouvoir réduire nos schémas autant que possible pour faciliter la compréhension et accélérer la simulation des circuits. Le second intérêt est que la méthode d'obtention des circuits équivalents est récursive. Un transformateur à  $n$  enroulements inclut un transformateur à  $n-1$  enroulements qui lui-même inclut un transformateur de rang  $n-2 \dots$ . Ceci rend cette méthode d'élaboration simple à retenir.

### III.1. Présentation intuitive

#### III.1.a. Transformateur à deux enroulements

Considérons un transformateur à deux enroulements. Si son premier enroulement (primaire) est alimenté alors que le secondaire est à vide, l'inductance vue du primaire est l'inductance magnétisante et, d'autre part, le rapport de tension secondaire/primaire correspond au rapport de transformation. Si, pour compléter, une mesure d'impédance est effectuée en alimentant le secondaire alors que le primaire est court-circuité, l'inductance magnétisante est shuntée par le court circuit et une inductance doit être ajoutée en série du côté du secondaire pour rendre compte de l'inductance résiduelle observée.

Le schéma obtenu (Figure 1-10) correspond au schéma classique d'un transformateur à deux enroulements (Figure 1-4), avec les fuites localisées au secondaire ( $x = \frac{1}{k}$ ).

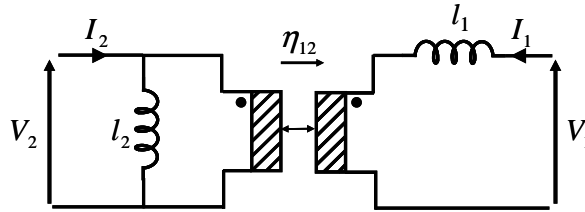


Figure 1-10 : Schéma équivalent d'un transformateur à deux enroulements

Le transformateur est décrit par trois paramètres, l'inductance magnétisante, celle de fuite, ainsi que le rapport de transformation. Ce nombre est égal à celui des éléments indépendants de la matrice inductance (1.10).

$$[L_2] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \eta_{12}^2 & \eta_{12} \\ \eta_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

#### III.1.b. Transformateur à trois enroulements

La démarche menant au schéma équivalent d'un transformateur à trois enroulements (Figure 1-11) est similaire. L'inductance magnétisante  $l_3$  vue d'un enroulement est observée lorsque les deux autres enroulements sont à vide. Deux rapports de tensions permettent, dans cette configuration, de trouver les rapports  $\eta_{13}$  et  $\eta_{23}$ . Lorsque le primaire est court-circuité, l'inductance magnétisante est shuntée et nous avons à caractériser le lien qui existe entre les deux secondaires. A partir du moment où ces deux enroulements sont couplés, ils peuvent être représentés comme indiqué par la Figure 1-10. On introduit alors un transformateur dit "de fuite", entre les deux secondaires du transformateur (Figure 1-11).

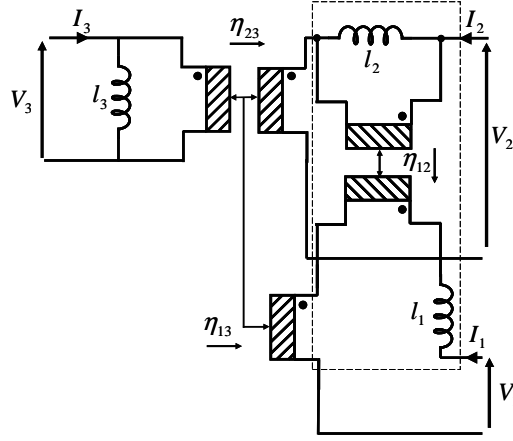


Figure 1-11 : Schéma équivalent d'un transformateur à trois enroulements

Le schéma équivalent obtenu comporte trois inductances et trois coupleurs ce qui est en accord avec le nombre d'éléments indépendants de la matrice inductance (1.11).

$$[L_3] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} \eta_{13}^2 & \eta_{13}\eta_{23} & \eta_{13} \\ \eta_{13}\eta_{23} & \eta_{23}^2 & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

### III.1.c. Transformateur à quatre enroulements et généralisation

Le schéma équivalent d'un transformateur à quatre enroulements est obtenu de la même façon (Figure 1-12). Lorsque l'enroulement magnétisant est court circuité, le couplage des trois autres enroulements se décrit à l'aide du schéma équivalent d'un transformateur à trois enroulements. La matrice inductance (1.12) s'écrit aussi en fonction de celle d'un transformateur à trois enroulements.

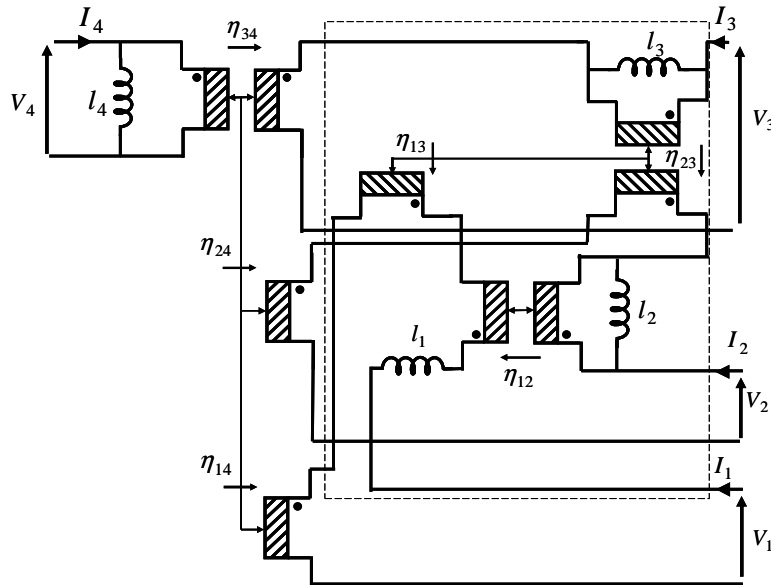


Figure 1-12 : Schéma équivalent d'un transformateur à quatre enroulements

$$[L_4] = \begin{bmatrix} [L_3] & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + L_4 \begin{bmatrix} \eta_{14}^2 & \eta_{14}\eta_{24} & \eta_{14}\eta_{34} & \eta_{14} \\ \eta_{14}\eta_{24} & \eta_{24}^2 & \eta_{24}\eta_{34} & \eta_{24} \\ \eta_{14}\eta_{34} & \eta_{24}\eta_{34} & \eta_{34}^2 & \eta_{34} \\ \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

L'intérêt de cette méthode qui n'introduit aucune approximation apparaît désormais clairement. Un transformateur de rang  $n$  est constitué d'une inductance, de  $n-1$  coupleurs et d'un transformateur de rang  $n-1$ , lui-même constitué d'une inductance, de  $n-2$  coupleurs et d'un transformateur de rang  $n-2$ , etc... L'approche est récursive et tous les schémas suivants peuvent être créés par déduction progressive.

Les schémas pour des transformateurs à  $n$  enroulements sont composés de  $\frac{n(n+1)}{2}$  paramètres qui se décomposent en  $n$  inductances et  $\frac{n(n-1)}{2}$  coupleurs. Le nombre de paramètres ajustables est donc strictement égal à celui des éléments indépendants de la matrice inductance. Les matrices inductances se calculent d'ailleurs en tenant compte de la matrice de rang précédent.

Le courant dans chaque inductance s'exprime en fonction de combinaisons linéaires des courants dans le transformateur  $I_i$  (1.13).

$$\begin{aligned} I_{l1} &= I_1 \\ I_{l2} &= \eta_{12}I_1 + I_2 \\ I_{l3} &= \eta_{13}I_1 + \eta_{23}I_2 + I_3 \\ I_{l4} &= \eta_{14}I_1 + \eta_{24}I_2 + \eta_{34}I_3 + I_4 \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'expression générale de l'énergie magnétostatique du système s'écrit alors simplement (1.14).

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \left( \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{ji} I_j + I_i \right)^2 \quad (1.14)$$

## III.2. Approche théorique

La forme minimale et récursive obtenue lors du développement précédent est totalement intuitive. Cette méthode admet cependant une justification théorique que nous présentons maintenant.

### III.2.a. Expression de l'énergie d'un système dans différentes bases

Pour un composant magnétique à  $n$  entrées dont le comportement est supposé linéaire, l'énergie magnétostatique est une fonction quadratique des  $n$  courants. Elle peut s'exprimer sous



la forme générale (1.15) et sous la forme matricielle (1.16), en introduisant le vecteur des courants  $[I]$ .

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j \right] \quad \text{avec } L_{ij} = L_{ji} \quad (1.15)$$

$$W = \frac{1}{2} [I]^t [L] [I] \quad (1.16)$$

La matrice inductance  $[L]$  est réelle et symétrique. On peut déjà en déduire que ses valeurs propres sont réelles [GANTMACHER]. Cependant, puisque la densité d'énergie magnétostatique est donnée par  $\mu H^2$ , l'énergie magnétique totale d'un système ne peut être que positive. Il s'en suit que, selon (1.16), la matrice inductance est définie positive. Ses valeurs propres sont donc réelles et positives [CAIGNAERT] et il est alors commode de procéder, pour les courants, au changement de base (1.17).

$$[I'] = [M] [I] \quad \text{avec } [M] : \text{Matrice de changement de base} \quad (1.17)$$

En effet, pour une matrice réelle, symétrique définie positive  $[L]$ , il existe une matrice diagonale  $[L']$  constituée des valeurs propres de  $[L]$  et une matrice triangulaire  $[M]$  dont la diagonale est constituée de 1, telle que la relation (1.18) soit vérifiée [RAKOTOMAMONJY].

$$[L] = [M]^t [L'] [M] \quad \text{avec } [M] : \text{Matrice triangulaire de changement de base} \quad (1.18)$$

La forme triangulaire de  $[M]$  et le fait que sa diagonale soit constituée de 1, nous permettent de retrouver les relations (1.13) liant les différents courants (1.19).

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ I_3' \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \dots \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} I_1' &= I_1 \\ I_2' &= \lambda_{12}' I_1 + I_2 \\ I_3' &= \lambda_{13}' I_1 + \lambda_{23}' I_2 + I_3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.19)$$

En effectuant ce changement de base, la forme quadratique de l'énergie (1.15) peut être réduite. L'énergie magnétostatique s'identifie maintenant à la somme des énergies stockées par les inductances  $L_{ii}'$ , parcourus par les courants de la nouvelle base  $I_i'$  (1.20). Cette énergie est toujours positive quels que soient les courants car les inductances propres sont toutes positives.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_{ii}' I_i'^2 \quad (1.20)$$

Cette formulation issue d'une factorisation est directement transposable à un circuit équivalent. En effet, l'expression (1.19) est similaire à (1.13). Les schémas conçus à l'origine intuitivement, trouvent ici leur justification théorique.

### III.2.b. Changement de base : Exemple pratique

Nous avons vu qu'il était utile de changer la base des courants pour exprimer l'énergie de façon plus simple. Cette opération se traduit simplement, sur le circuit équivalent grâce aux coupleurs.

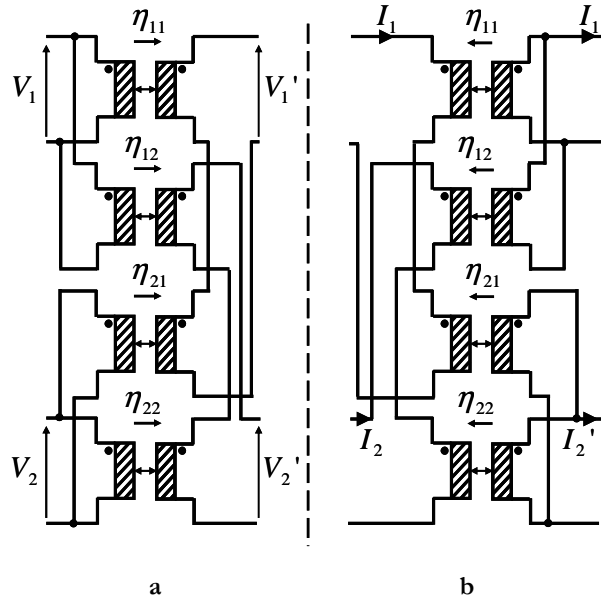


Figure 1-13 : Changement de base des tensions (a) ou des courants (b) à l'aide de coupleurs parfaits

Les variables tensions et courants s'expriment dans la nouvelle base de la façon suivante (1.21) :

$$\begin{aligned} V_1' &= \eta_{11}V_1 + \eta_{21}V_2 & I_1' &= \eta_{11}I_1 + \eta_{21}I_2 \\ V_2' &= \eta_{12}V_1 + \eta_{22}V_2 & I_2' &= \eta_{12}I_1 + \eta_{22}I_2 \end{aligned} \quad \text{et} \quad (1.21)$$

### III.3. Simplifications des schémas équivalents

Si la récurrence aide à retenir le mécanisme de création, la généralité de la méthode fait que le circuit associé à un transformateur à  $n$  enroulements inclut  $n$  inductances et  $\frac{n(n-1)}{2}$  coupleurs. Lorsque  $n$  dépasse cinq ce circuit, qui n'inclut encore ni les pertes, ni les capacités parasites, devient complexe. Pour cette raison, nous envisageons ci-dessous des situations particulières où certains éléments de la matrice inductance sont liés. Le circuit, qui dépend alors d'un nombre de paramètres indépendants plus restreint, devient plus simple.

Pour faire face à ces situations compliquées, nous allons montrer que les circuits équivalents introduits ci-dessus peuvent se simplifier très facilement. Ceci les distingue des schémas dits "matriciels" présentés dans [KERADEC-94] ou [ERICKSON-98]. Pour cela, trois situations vont être envisagées. Dans un premier temps, nous allons considérer l'identité de deux enroulements. Nous traiterons ensuite le cas où un enroulement est couplé de façon plus forte avec un deuxième enroulement qu'avec tous les autres. Nous finirons avec le cas particulier d'un couplage négligeable dans le transformateur de fuite.

### III.3.a. Identité de deux enroulements

Prenons l'exemple d'un transformateur à quatre enroulements (Figure 1-12). L'énergie du circuit équivalent (1.15) s'écrit sous la forme (1.22). En supposant maintenant que les enroulements 1 et 2 soient identiques, la permutation des courants  $I_1$  et  $I_2$  ne doit pas modifier l'énergie magnétostatique (1.23).

$$W = \frac{1}{2} [L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + L_{33}I_3^2 + L_{44}I_4^2 + 2L_{12}I_1I_2 + 2L_{13}I_1I_3 + 2L_{14}I_1I_4 + 2L_{23}I_2I_3 + 2L_{24}I_2I_4 + 2L_{34}I_3I_4] \quad (1.22)$$

$$W = \frac{1}{2} [L_{11}I_2^2 + L_{22}I_1^2 + L_{33}I_3^2 + L_{44}I_4^2 + 2L_{12}I_1I_2 + 2L_{13}I_2I_3 + 2L_{14}I_2I_4 + 2L_{23}I_1I_3 + 2L_{24}I_1I_4 + 2L_{34}I_3I_4] \quad (1.23)$$

Trois égalités doivent être respectées pour que ces deux valeurs soient égales, quels que soient les courants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  (1.24) :

$$L_{11} = L_{22} \quad L_{13} = L_{23} \quad L_{14} = L_{24} \quad (1.24)$$

La matrice inductance n'a plus dix éléments indépendants, mais seulement sept. L'énergie magnétostatique s'écrit alors sous la forme simplifiée (1.25).

$$W = \frac{1}{2} [L_{11}(I_1^2 + I_2^2) + L_{33}I_3^2 + L_{44}I_4^2 + 2L_{12}I_1I_2 + 2L_{13}(I_1 + I_2)I_3 + 2L_{14}(I_1 + I_2)I_4] \quad (1.25)$$

Cette expression est très proche de celle de l'énergie stockée dans un transformateur à trois enroulements traversés par des courants  $I_1 + I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$ . Si on pose  $L = \frac{1}{2}(L_{11} + L_{12})$  et  $l = \frac{1}{2}(L_{11} - L_{12})$ , l'expression (1.25) se met sous la forme (1.26).

$$W = \frac{1}{2} [L(I_1 + I_2)^2 + l(I_1 - I_2)^2 + L_{33}I_3^2 + L_{44}I_4^2 + 2L_{13}(I_1 + I_2)I_3 + 2L_{14}(I_1 + I_2)I_4] \quad (1.26)$$

L'énergie est alors stockée dans un transformateur à trois enroulements ayant  $I_1 + I_2$ ,  $I_3$  et  $I_4$  comme courants d'entrées et dans une inductance supplémentaire traversée par un courant  $I_1 - I_2$ . Le schéma équivalent simplifié obtenu dans ce cas est présenté sur la Figure 1-14. Tous

les coupleurs utilisés ont un rapport de 1 et l'inductance  $l$  est le seul paramètre venant s'ajouter aux six du transformateur à trois enroulements, le nombre de paramètres ajustables correspond bien aux sept éléments indépendants de la matrice inductance. Notons que la sortie apparaît plus symétrique si on remplace l'inductance  $l$  par une de valeur  $2l$  et que l'on place aussi  $2l$  de l'autre côté du coupleur.

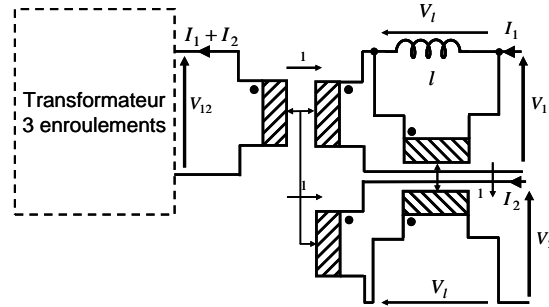


Figure 1-14 : Schéma simplifié dans le cas de deux enroulements identiques

Si les deux enroulements identiques sont les deux parties d'un enroulement à point milieu, le schéma peut encore être simplifié en retirant le coupleur entre les enroulements 1 et 2 (Figure 1-15).

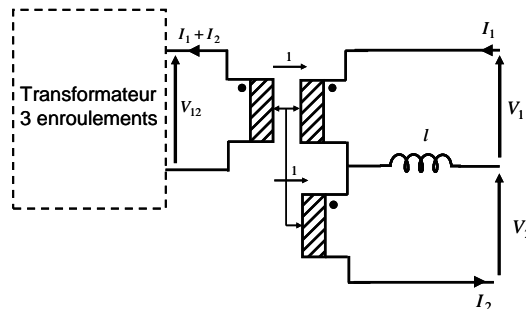


Figure 1-15 : Schéma simplifié dans le cas d'un enroulement à point milieu

### III.3.b. Couplage dominant

Ce cas de Figure apparaît lorsqu'un enroulement est fortement couplé avec un deuxième et nettement moins avec le ou les autres. Le coefficient  $k$  (1.4) image de ce couplage est alors très proche de 1 et les autres sont plus faibles. En considérant de nouveau un transformateur à quatre enroulements et en ajoutant l'hypothèse que les enroulements 3 et 4 sont parfaitement couplés entre eux et moins avec le 1 et 2, le schéma équivalent peut se représenter comme sur la Figure 1-16. La matrice inductance de ce schéma est singulière (1.27) car deux de ses lignes ( $V_3$  et  $V_4$ ) et donc deux de ses colonnes, sont proportionnelles.

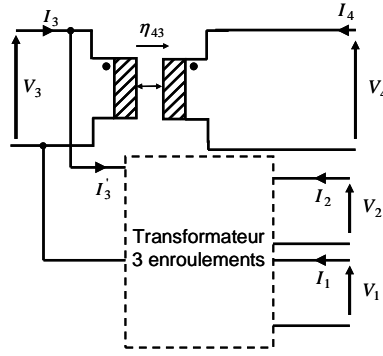


Figure 1-16 : Schéma simplifié dans le cas d'un couplage idéal

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \eta_{43} L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \eta_{43} L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & \eta_{43} L_{33} \\ \eta_{43} L_{13} & \eta_{43} L_{23} & \eta_{43} L_{33} & \eta_{43}^2 L_{33} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

D'un point de vue pratique, des enroulements ne peuvent jamais être "parfaitement" couplés. Pour tenir compte de cette imperfection, une inductance de fuite est ajoutée (Figure 1-17). La répartition amont/aval de l'inductance de fuite par rapport au transformateur à trois enroulements est arbitraire. Cette fois, la matrice inductance n'est plus singulière.

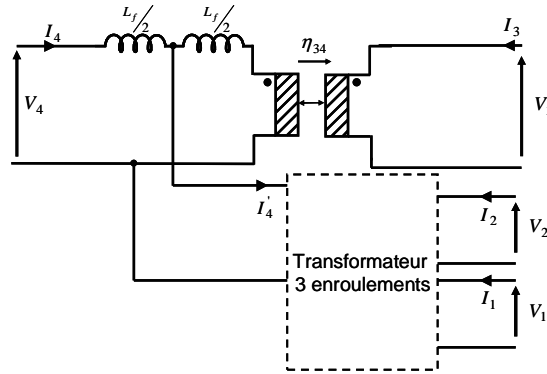


Figure 1-17 : Schéma simplifié dans le cas d'un couplage 3-4 plus fort que les autres

### III.3.c. Couplage négligeable dans le transformateur de fuite

Alors que les coefficients de couplage définis par la matrice inductance du composant sont rarement faibles, il n'est pas rare que certains de ceux figurant dans la matrice inductance de son transformateur de fuite le soient. Ces coefficients, qui ne représentent pas directement la force du couplage de deux enroulements, dépendent souvent de différences entre coefficients de couplages du composant. Ces différences peuvent être positives, négatives ou nulles. Il n'est donc pas surprenant que ces coefficients puissent parfois être négligeables.

Afin d'illustrer ceci, considérons un transformateur à trois enroulements (Figure 1-11). Son transformateur de fuite comprend deux enroulements (1.28) et le coefficient de couplage associé  $k$  s'exprime en fonction des trois coefficients de couplage du composant  $k_{12}$ ,  $k_{13}$  et  $k_{23}$  (1.29).

$$[L_f] = \begin{bmatrix} L_{11} - \frac{L_{13}^2}{L_{33}} & L_{12} - \frac{L_{13}L_{23}}{L_{33}} \\ L_{12} - \frac{L_{13}L_{23}}{L_{33}} & L_{22} - \frac{L_{23}^2}{L_{33}} \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$k = \frac{k_{12} - k_{13}k_{23}}{\sqrt{(1 - k_{13}^2)(1 - k_{23}^2)}} \quad (1.29)$$

L'expression de  $k$  (1.30) dépend bien de la différence de couplage entre les enroulements. Si cette valeur est, par exemple, inférieure à 0.2, dans le pire des cas, l'inductance de fuite sera modifiée de 4%.

$$\frac{L_{cc}}{L_0} = 1 - k^2 \approx 1 \text{ si } k < 0.2 \quad (1.30)$$

Le transformateur de fuite pourra donc, sous certaines conditions de couplage, être négligé. Dans ce cas, le ou les coupleurs parfaits, liant les enroulements pourront être supprimés. Nous présenterons un exemple concret de ce cas dans le chapitre 2 de ce mémoire.

## IV. APPLICATIONS DES SCHEMAS EQUIVALENTS

Afin d'illustrer les méthodes précédentes, nous allons maintenant chercher le circuit équivalent d'une inductance triphasée et d'un transformateur triphasé. L'objectif commun de ces deux études est de parvenir à un circuit équivalent simple et facilement identifiable, compatible avec Pspice® [PSPICE].

### IV.1. Modélisation des coupleurs sous Pspice®

Le composant charnière de tous ces modèles est le coupleur parfait que nous avons introduit dans la partie II.1. Il est composé (Figure 1-18) de deux sources contrôlées, commandable respectivement en tension et en courant. Une résistance de très forte valeur est également insérée dans le montage afin de ne pas laisser de potentiel flottant lors de la simulation. L'ajout d'inductances autour de ce coupleur risque d'introduire des boucles inductives proscrites par Pspice®. Dans ce cas, l'ajout d'une résistance de très faible valeur ( $\approx 1n\Omega$ ) en série avec une des inductances permet de contourner le problème.

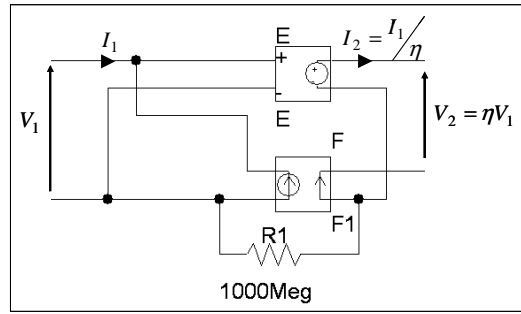


Figure 1-18 : Représentation d'un coupleur parfait sous Pspice®

## IV.2. Inductance triphasée

Pour assurer le filtrage CEM d'une ligne triphasée, une inductance doit être insérée en série avec chaque phase du système. Deux techniques peuvent être utilisées pour réaliser ce filtrage.

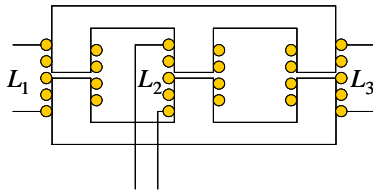


Figure 1-19 : Inductance triphasée

Soit on utilise trois inductances identiques que l'on insère sur chacune des phases. Soit trois bobines identiques sont enfilées sur le même noyau magnétique (Figure 1-19). Cette dernière solution est largement préférable lorsque l'on doit faire face à des contraintes de masse et de volume.

En pratique, un noyau en E avec entrefer épais est utilisé et chaque bobine est enroulée autour d'une jambe du circuit magnétique. Ce dispositif ne peut se représenter par des inductances seules, puisqu'un couplage existe entre les différents enroulements.

Magnétiquement, l'inductance se comporte comme un transformateur à trois enroulements (Figure 1-11). En observant la Figure 1-19, on constate que les enroulements  $L_1$  et  $L_3$  sont identiques. Le schéma de la Figure 1-14 peut être utilisé en remplaçant le transformateur à trois enroulements par un à deux enroulements (Figure 1-20).

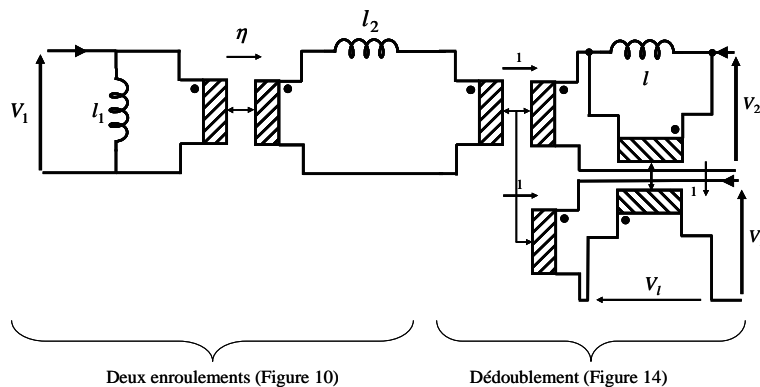


Figure 1-20 : Circuit équivalent d'un inductance triphasée en tenant compte de l'identité de deux enroulements

En pratique, les entrefers d'une inductance triphasée sont suffisamment épais pour régir entièrement le partage du flux, si bien que celui créé par une colonne, se partage équitablement entre les deux autres. Ce fonctionnement se traduit par une matrice inductance très simple définie par un paramètre unique (1.31).

$$[L] = \begin{bmatrix} 2L & -L & -L \\ -L & 2L & -L \\ -L & -L & 2L \end{bmatrix} \text{ avec } L = \frac{N^2}{3R} \quad (1.31)$$

$N$  : Nombre de spires d'une bobine et  $R$  : Réductance de l'entrefer

L'expression générale de l'énergie (1.32) s'écrit simplement à l'aide des termes de la matrice inductances (1.31).

$$W = L(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) - L(I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3) \quad (1.32)$$

L'identification de l'énergie du circuit de la Figure 1-20 avec l'expression (1.32) permet de déterminer les valeurs des paramètres du schéma équivalent (1.33).

$$l_1 = 2L \quad l_2 = 0 \quad l = \frac{3L}{2} \quad \eta = -\frac{1}{2} \quad (1.33)$$

Puisque l'inductance de fuite  $l_2$  est nulle et que les rapports de transformation sont égaux à 1, les coupleurs peuvent être regroupés. L'inductance  $l$  peut être doublée et placée sur chaque phase. Ces deux modifications permettent d'obtenir un schéma encore plus simple et symétrique (Figure 1-21).

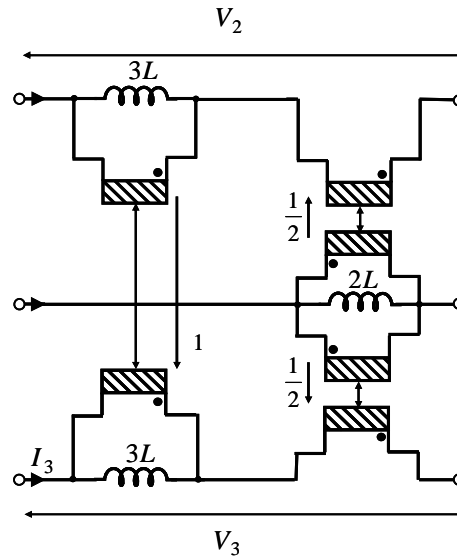


Figure 1-21 : Schéma simplifié d'une inductance triphasée



Ce dernier circuit n'est pas unique. Il est certes simplifié, mais une écriture différente de l'expression de l'énergie (1.34) permet de trouver un autre circuit symétrique très simple (Figure 1-22).

$$W = \frac{1}{2}L(I_1 - I_2)^2 + \frac{1}{2}L(I_2 - I_3)^2 + \frac{1}{2}L(I_3 - I_1)^2 \quad (1.34)$$

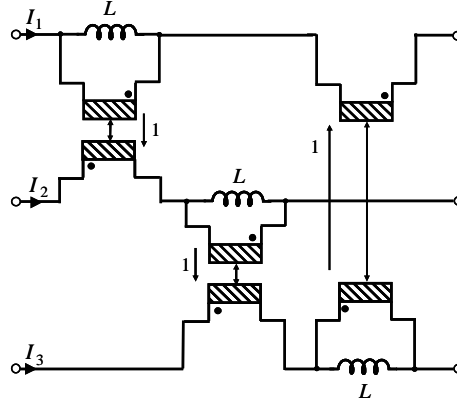


Figure 1-22 : Schéma équivalent d'une inductance triphasée

### IV.3. Transformateur triphasé

Intéressons nous maintenant à un transformateur triphasé de 12.5kVA (Figure 1-23). Le modèle étudié fonctionne sous des tensions nominales primaires de  $V_{N1} = 83V$  et secondaires de  $V_{N2} = 220V$ .

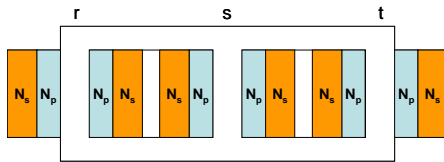


Figure 1-23 : Transformateur triphasé

Un enroulement primaire et un secondaire sont bobinés sur chaque jambe du transformateur (r, s et t). Au total, six enroulements sont présents dans ce composant. Pour représenter les différents couplages liant ces enroulements il faudrait 6 inductances et 15 coupleurs (Figure 1-24), soit 21 grandeurs ajustables.

Ce nombre coïncide, bien entendu, avec celui des éléments indépendants de sa matrice inductance. Cependant, la géométrie de la structure permet de formuler quelques hypothèses simplificatrices. Deux remarques découlent directement de l'observation de la Figure 1-23. Premièrement, les enroulements portés par la colonne r sont permutable avec ceux portés par la colonne t. Deuxièmement, le couplage entre primaires et secondaires d'une même jambe doit être beaucoup plus fort que vis-à-vis des autres enroulements. Ces deux hypothèses sont confirmées par l'analyse de la matrice inductance relevée expérimentalement (1.35). En effet, les inductances propres et mutuelles des colonnes  $r_1$  et  $t_1$  sont égales, aux erreurs de mesures près, et le couplage

entre un primaire et un secondaire d'une même jambe ( $k_{r_1 r_2} = k_{t_1 t_2} = 0.996$  ou  $k_{s_1 s_2} = 0.998$ ) est plus fort qu'avec un enroulement disposé sur une autre jambe ( $k_{r_1 s_2} \approx k_{s_1 t_2} \approx -0.55$  ou  $k_{r_1 t_2} \approx -0.38$ ).

$$[L] = \begin{matrix} & \begin{matrix} r_1 & s_1 & t_1 & r_2 & s_2 & t_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \\ r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 110.5 & -68.5 & -42 & 293 & -181.5 & -111.5 \\ -68.5 & 137 & -68.5 & -181.5 & 363 & -181.5 \\ -42 & -68.5 & 110.5 & -111.5 & -181.5 & 293 \\ 293 & -181.5 & -111.5 & 776 & -481 & -295 \\ -181.5 & 363 & -181.5 & -481 & 962 & -481 \\ -111.5 & -181.5 & 293 & -295 & -481 & 776 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Les inductances sont exprimées en  $mH$  (1.35)

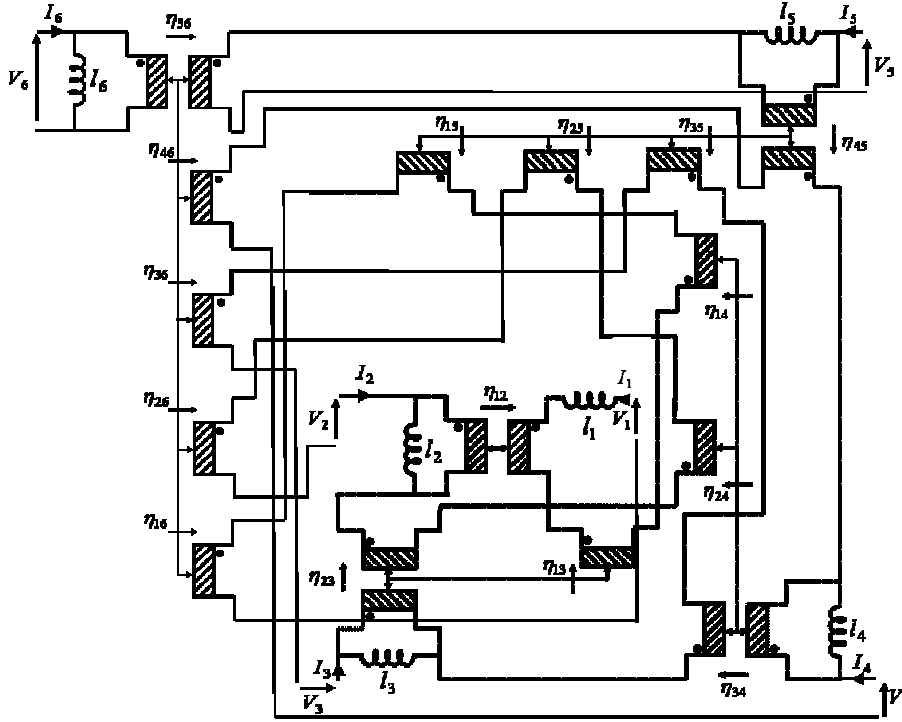


Figure 1-24 : Schéma équivalent six enroulements

Ces hypothèses permettent, au vu des simplifications présentées dans la partie III.3, de modifier le schéma équivalent de la Figure 1-24 [MARGUERON-04]. Le résultat de ces simplifications est présenté sur la Figure 1-25.

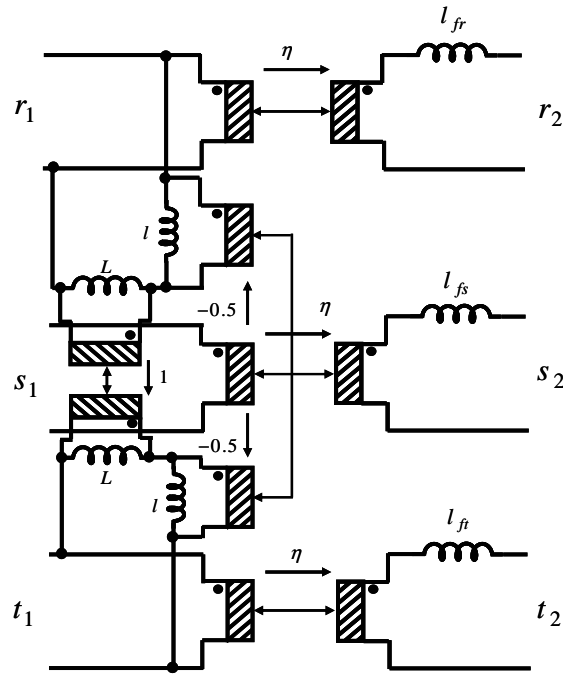


Figure 1-25 : Schéma simplifié du transformateur triphasé

Le schéma obtenu est générique pour un transformateur triphasé à six enroulements. En effet, si le transformateur est bien construit, les hypothèses de couplage dominant entre primaire et secondaire d'une même colonne ainsi que celle d'identité des colonnes extérieures, sont très souvent respectées. Les 21 paramètres du transformateur se réduisent alors à deux inductances ( $L$  et  $l$ ), un rapport de transformation ( $\eta$ ) et trois inductances de fuites ( $L_{fr} = L_{ft}$  et  $L_{fs}$ ), soit cinq paramètres indépendants au total.

L'identification est donc rapide. Les deux inductances  $L$  et  $l$  se déduisent directement des inductances vues des primaires central et latéral lorsque aucun enroulement n'est chargé. L'inductance vue de la jambe centrale  $L_{s_1s_1}$  est égale à  $2l$  et celle vue d'une des colonnes latérales  $r$  ou  $t$  ( $L_{r_1r_1} = L_{t_1t_1}$ ) est égale à  $\frac{L+l}{2}$ . Le rapport des tensions à vide sur une colonne donne la valeur de  $\eta$  et l'inductance vue d'un secondaire quand le primaire correspondant est en court circuit donne l'inductance de fuite correspondante.

Nous avons eu l'occasion de tester la généralité de ce circuit en l'appliquant à un autre transformateur triphasé (Figure 1-26).

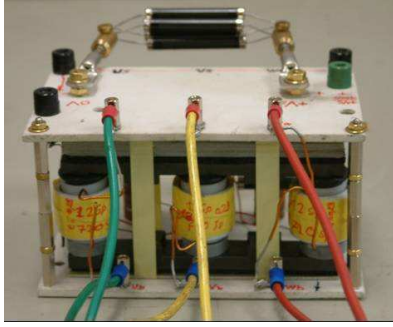


Figure 1-26 : Transformateur Triphasé

Ce dernier est destiné à un onduleur triphasé travaillant à une fréquence de  $20\text{kHz}$ . Outre les couplages dominants et l'identité des colonnes externes, un entrefer est présent sur chaque colonne du transformateur. Ceci rapproche les caractéristiques de la colonne centrale de celles des deux autres et les réluctances sont majoritairement dues à ces entrefers.

En cas d'égalité parfaite on aurait  $2l = \frac{L+l}{2}$  soit  $L=3l$ . Ici, nous avons trouvé  $37\mu\text{H}$  et  $93\mu\text{H}$ . Ce circuit équivalent (Figure 1-25) a permis de tenir compte du couplage des trois phases de l'onduleur, ce qui s'est avéré être très important pour l'étude de l'onduleur.

## V. CONCLUSION

Afin de réaliser des simulations fiables en électronique de puissance, des circuits équivalents, aptes à représenter les composants bobinés sont nécessaires. Si celui d'un transformateur à deux enroulements est largement connu, lorsque le nombre d'enroulements dépasse trois, peu de représentations générales sont proposées.

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode permettant de trouver des schémas magnétiques équivalents de transformateurs à  $n$ -enroulements. C'est sur le couplage magnétique que repose le fonctionnement des transformateurs. Il est donc naturel de commencer par s'intéresser à sa représentation. Bien entendu, il faudra ensuite introduire les pertes et les capacités parasites, mais l'étude menée ici fournira toujours la "colonne vertébrale" des circuits finalement exploités.

La méthode introduite dans ce chapitre et basée sur des critères énergétiques, présente plusieurs intérêts. Premièrement, elle n'introduit que le nombre minimal de composant nécessaire afin de bien retranscrire le couplage magnétique tel qu'il est décrit par la matrice inductance. Deuxièmement, l'approche présentée ici est récursive et les schémas équivalents se construisent très facilement lorsque l'on augmente le nombre des enroulements. Nous avons présenté ici les circuits équivalents généraux de transformateurs possédant jusqu'à six enroulements et dépasser ce nombre est aisé.

Ces circuits tiennent compte de tous les couplages potentiels à l'intérieur des transformateurs. Toutefois, en pratique, ces circuits équivalents peuvent être simplifiés pour tenir compte d'une caractéristique particulière du transformateur. Cette possibilité constitue le troisième intérêt de la méthode. Les schémas présentés peuvent être simplifiés si certains

couplages sont négligeables, ou si certains dominant, ou encore si des enroulements sont identiques. Ceci présente un grand intérêt lors des simulations puisque les schémas peuvent être allégés, sans altérer la précision. Un transformateur triphasé à six enroulements a pu ainsi être décrit par cinq paramètres alors que dans le cas général il en aurait fallu vingt et un. Cet exemple de transformateur triphasé n'est pas le seul que nous ayons traité. Nous avons établi le schéma équivalent d'une inductance triphasée et montré que les schémas obtenus n'étaient pas uniques.

Notons pour finir que toutes les inductances présentes dans nos circuits sont positives. Cela garantit la positivité de l'énergie stockée quels que soient les rapports de transformation des coupleurs impliqués.

Nous nous servirons de ces circuits équivalents et de leurs simplifications dans toute la suite de ce mémoire, et en particulier lors de l'étude et de la caractérisation de transformateurs planar.

## ***CHAPITRE 2 : Identification expérimentale***



## I. INTRODUCTION

Au cours du chapitre 1 nous avons vu comment représenter, par un circuit à constantes localisées, le couplage magnétique tel qu'il est traduit par la matrice inductance. Bien qu'un transformateur soit conçu pour assurer ce couplage, des phénomènes parasites inévitables compliquent le fonctionnement et gênent l'identification expérimentale. Il est donc indispensable de recenser ces principaux phénomènes et de savoir comment on peut en tenir compte dans le circuit équivalent, pour apprécier les difficultés de mesures dont nous allons parler dans ce chapitre. A cet effet, nous résumons ci-dessous les principales étapes qui nous ont menés aux circuits équivalents actuels.

Contrairement à leurs homologues B. F. qui exploitent des matériaux ferromagnétiques pour réaliser le circuit magnétique, les transformateurs H. F. font appel à des ferrites ou ils fonctionnent sans circuit magnétique. De ce fait, leur comportement est quasiment linéaire tant que l'induction n'est pas trop grande. En pratique, les phénomènes non linéaires sont visibles en B. F. lorsque l'impédance est faible et que le pont de mesure permet d'injecter un courant suffisant (Figure 2-1).

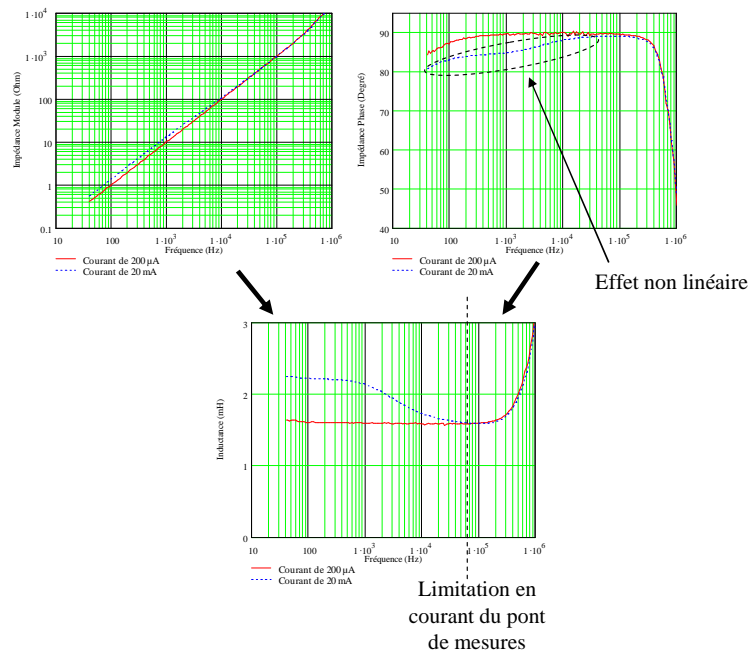


Figure 2-1 : Courbe d'inductance en fonction de l'amplitude du signal

Aussi longtemps qu'il se comporte linéairement, un transformateur à  $n$  enroulements apparaît comme un circuit électrique linéaire à  $2n-1$  entrées qui se caractérise, à chaque fréquence, par sa matrice impédance (2.1). Etant donnée la symétrie de cette matrice, elle comprend  $n(2n+1)$  éléments indépendants.



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ Z_{n1} & \cdots & & Z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad \text{Avec } Z_{ij} = Z_{ji} \quad (2.1)$$

La connaissance de sa matrice impédance, sur une large plage de fréquence, permet d'étudier le comportement du composant lorsqu'il est soumis à un régime quelconque, sous réserve que celui-ci ne sorte pas du domaine de fonctionnement linéaire. Pour fixer les idées, on sait par expérience que la prévision précise du comportement en onde carrée exige que le circuit équivalent soit connu correctement jusqu'à une fréquence environ 10 fois supérieure à celle du fondamental. C'est pourquoi, lorsqu'un transformateur doit être inclus dans un convertisseur fonctionnant à quelques centaines de kHz, on considère que son circuit équivalent doit être précis jusqu'à quelques MHz. D'autres considérations, telles que la conformité avec les normes CEM par exemple, élèvent parfois le niveau d'exigence.

Pour faire court, on peut dire que notre objectif consiste à connaître la matrice impédance d'un transformateur du continu jusqu'à, au minimum, quelques MHz. Il faut cependant préciser deux points. Tout d'abord, il faut que cette connaissance du composant puisse être facilement et rapidement introduite dans un logiciel de simulation électronique. Notre but est en effet de mener des simulations précises sur tout montage électronique incluant un transformateur. La représentation par un circuit à constantes localisées est, de ce point de vue, très intéressante car un tel circuit se décrit par un petit nombre de paramètres. Ensuite, il faut que cette connaissance soit identifiable expérimentalement, si possible sans démontage du composant. A terme, c'est certain, cette caractérisation expérimentale sera évitée aussi souvent que possible : des calculs analytiques ou des simulations électromagnétiques conduiront de la description physique du composant à son circuit équivalent. Il n'en demeure pas moins que, de temps en temps, des validations expérimentales seront nécessaires.

### I.1. Comment élaborer le circuit équivalent d'un transformateur ?

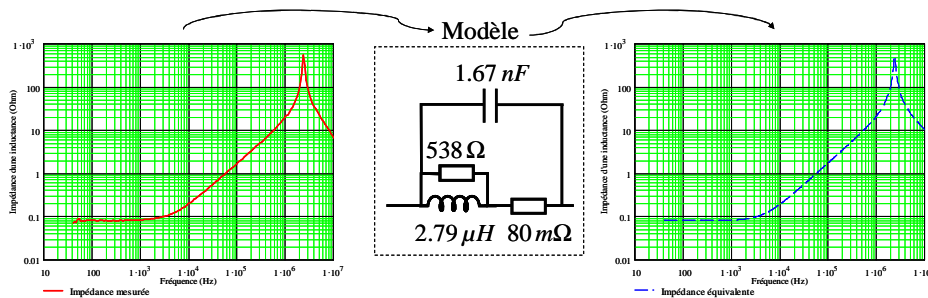


Figure 2-2 : Circuit équivalent d'une inductance

Pour élaborer le circuit équivalent d'un transformateur, nous procédons comme pour l'inductance (Figure 2-2). Nous partons de la représentation du couplage magnétique élaborée au chapitre 1 et nous lui adjoignons, en série avec chaque enroulement, la résistance du fil en continu. Nous plaçons également, pour tenir compte des pertes fer, une résistance en parallèle sur l'inductance magnétisante (Figure 2-3). Nous obtenons ainsi un circuit à  $n$  entrées qui autorise une bonne estimation des pertes séries et parallèles. Parfois, des phénomènes hautes fréquences (effets de courants induits dans les fils, courants de déplacement dans les ferrites) bien identifiables expérimentalement, amènent à introduire quelques résistances supplémentaires mais cela se fait sans changer l'essentiel du circuit.

Il faut également tenir compte des capacités parasites. Comme pour l'inductance, nous supposons qu'elles interviennent en parallèle sur l'intégralité du composant. En clair, nous considérons qu'un système électrostatique linéaire, soumis à  $2n-1$  différences de potentiel indépendantes, est connecté exclusivement aux  $2n$  bornes extérieures du composant. En pratique, toute représentation dont l'énergie prend la forme d'une fonction quadratique de ces différences de potentiel est admissible. La matrice capacité est, elle aussi, symétrique si bien qu'en règle générale, pour représenter ce couplage capacitif, il faut introduire  $n(2n-1)$  condensateurs dans le circuit. Cependant, lorsqu'un couplage magnétique est très fort, il est loisible de considérer que les deux tensions correspondantes sont liées. Dans ces conditions, le nombre des tensions indépendantes diminue et le nombre de capacités nécessaires aussi (Figure 2-3).

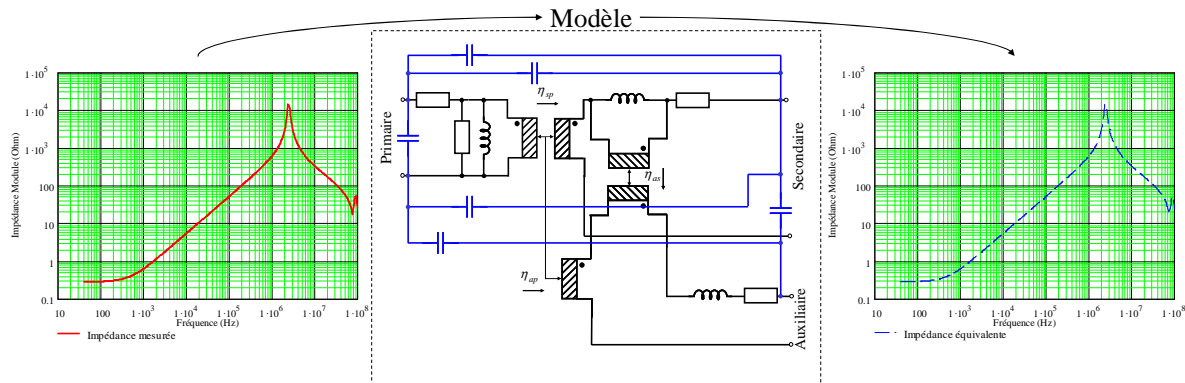


Figure 2-3 : Circuit équivalent d'un transformateur à trois enroulements

## I.2. Impédances à vide, en court circuit et relations dans un quadripôle

Un circuit linéaire passif peut se caractériser à l'aide de différents lots de rapports de tension ou de courants (impédances, mutuelles impédances, gains en tension,...). Les arguments

en faveur des mesures d'impédances ayant déjà été présentées [SCHELLMANN-98], nous ne les répéterons pas ici. En revanche, nous allons examiner attentivement les mesures d'impédances.

En électronique de commutation, les transformateurs sont périodiquement connectés à des charges très variables et ils fonctionnent périodiquement à vide ( $R \rightarrow \infty$ ) ou en court circuit ( $R=0$ ). Il faut que les modèles mis en œuvre soient précis lors de ces conditions extrêmes. Caractériser un transformateur en s'appuyant sur des mesures d'impédances à vide et en court-circuit semble donc tout indiqué.

Attention, toutes les impédances mesurables à vide et en court circuit, ne sont pas indépendantes. Pour un quadripôle passif (Figure 2-4), les quatre impédances mesurables dans ces conditions sont liées par la relation (2.2).

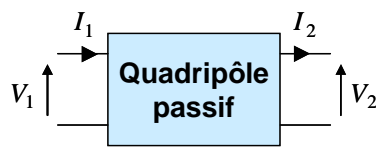


Figure 2-4 : Quadripôle passif

$$Z_0 Z'_{cc} = Z'_0 Z_{cc} \quad (2.2)$$

avec :

- $Z_0$  : Impédance à vide vue de '1'
- $Z_{cc}$  : Impédance vue de '1', '2' étant court-circuité
- $Z'_0$  : Impédance à vide vue de '2'
- $Z'_{cc}$  : Impédance vue de '2', '1' étant court-circuité

Avec les appareils de mesures disponibles actuellement, les impédances "facilement" mesurables sont comprises entre quelques  $m\Omega$  et quelques  $M\Omega$  si la fréquence reste dans l'intervalle  $50Hz - 10MHz$ . Au-delà, de nombreuses précautions doivent être prises pour que les mesures soient fiables. On peut parfois tirer profit de la relation (2.2) car, avec trois mesures choisies pour leur précision, il est possible de déduire précisément la quatrième, même si elle est plus difficile à mesurer directement.

La quatrième mesure, à première vue redondante, permet parfois d'évaluer une impédance parasite comme, par exemple, celle d'un court-circuit de mesure. Nous reviendrons sur ce point dans ce chapitre.

### I.3. Séparation Statique-dynamique

Lorsqu'un transformateur est alimenté par un courant basse fréquence, les pertes cuivre sont uniquement dues aux résistances propres des enroulements. Le courant est uniforme dans la section du conducteur, ce qui minimise les pertes qui lui sont dues. Quand la fréquence de fonctionnement augmente, les résistances augmentent de même que les pertes cuivre, sous l'effet des courants induits dans les conducteurs.

Le fait que la résistance d'un enroulement soit minimum en continu permet de représenter les pertes statiques par des résistances séries « extérieures » (Figure 2-5). L'ensemble de ces résistances d'enroulements en continu donne la totalité des pertes survenant en continu. Le sous-

circuit restant ne traduit que les pertes supplémentaires qui apparaissent lorsque la fréquence augmente (pertes dynamiques).

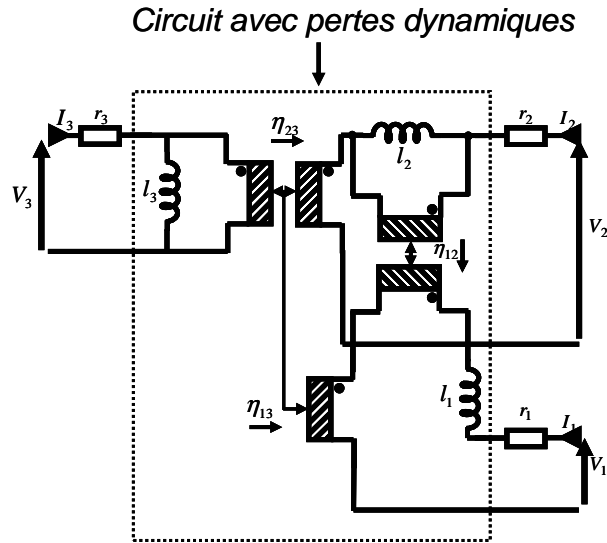


Figure 2-5 : Circuit statique-dynamique

Les deux parties du schéma sont identifiées successivement. Dès que les mesures d'impédances sont relevées, nous déduisons les résistances en continu (de ces mesures ou de mesures réalisées avec le micro ohmmètre) puis nous les retranchons des impédances mesurées pour accéder aux impédances du sous-circuit magnétodynamique du modèle. Il est clair qu'en très basse fréquence le sous-circuit magnétodynamique ne pourra pas être caractérisé avec précision puisqu'il est masqué par les résistances séries et que ses impédances s'obtiennent par différence de quantités proches.

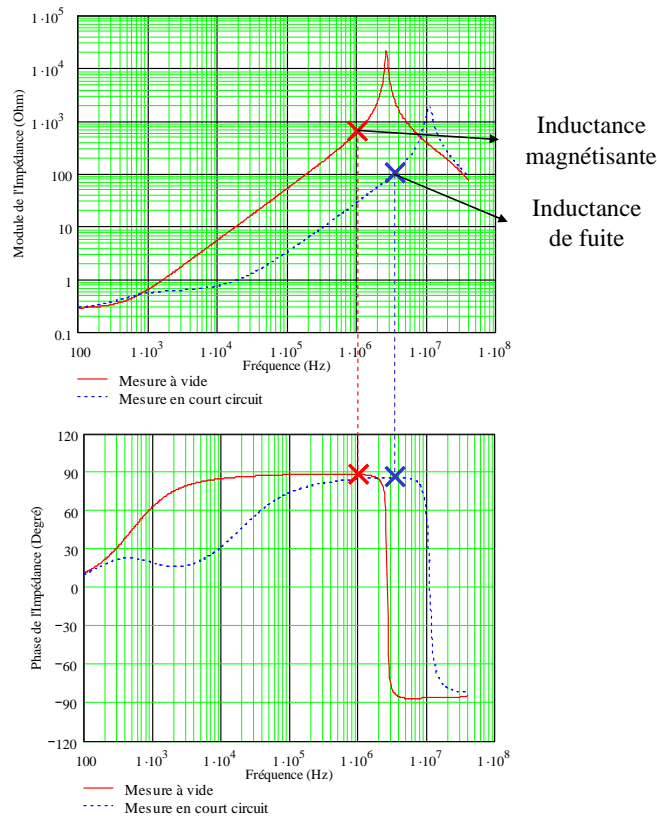
#### I.4. Séparation de la partie électrostatique

Alors que transformateur à trois enroulements présente cinq entrées selon le raisonnement de l'introduction de ce chapitre, la Figure 2-5 n'en montre que trois. Cette contradiction n'est qu'apparente car le circuit de la Figure 2-5 est encore incomplet : il n'inclut pas le circuit électrostatique qui intervient en parallèle. Comme nous le verrons, celui-ci présente bien 5 entrées indépendantes ! Nous pouvons déjà prévoir que l'identification de la partie magnétodynamique sera difficile en haute fréquence car elle sera masquée, cette fois, par un circuit capacitif en parallèle.

#### I.5. Constantes localisées ou réparties ?

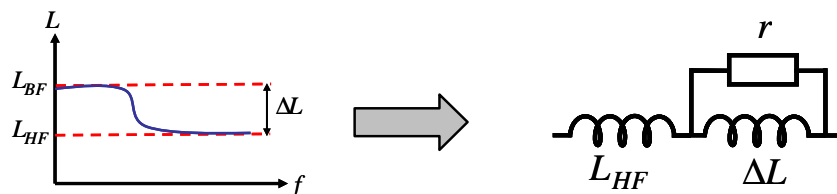
Lors des précédentes études, les éléments (inductances en particulier) des modèles magnétodynamiques étaient supposés indépendants de la fréquence [SCHELLMANN-98]. Les mesures destinées à caractériser un transformateur étaient réalisées à vide ou en court-circuit et

les inductances étaient déduites de ces courbes d'impédance au point où la phase était la plus proche de  $90^\circ$  (Figure 2-6).



**Figure 2-6 : Détermination des valeurs des inductances par la méthode "Schellmanns"**

En fait, pour bien des transformateurs, cette approximation est acceptable. L'inductance magnétisante est quasiment indépendante de la fréquence et seule l'inductance de fuite varie, en haute fréquence, sous l'effet des courants induits. Cette variation peut d'ailleurs être modélisée grossièrement en associant en série (Figure 2-7), une inductance et un dipôle inductance/résistance en parallèle. En basse fréquence, les deux inductances  $L_{HF}$  et  $\Delta L$  s'additionnent :  $L_{BF} = L_{HF} + \Delta L$ . En haute fréquence, la résistance  $r$  shunte l'inductance  $\Delta L$ . L'inductance équivalente se réduit à  $L_{HF}$ .



**Figure 2-7 : Variation d'inductance et modélisation**

L'étude approfondie des courants induits nous enseigne que ces phénomènes sont à constantes réparties. C'est pourquoi, en haute fréquence, il peuvent conduire à des impédances

On voit dans l'exemple ci-contre que, selon cette méthode, l'inductance magnétisante était évaluée à une fréquence quatre fois plus faible que l'inductance de fuite.

Cette méthode très pratique a été appliquée avec succès à la caractérisation de nombreux transformateurs et même d'autres composants tel que des LCT [LEMBEYE-05].

Les modèles ainsi obtenus sont précis, sous réserve que les différentes inductances varient peu en fonction de la fréquence.

proportionnelles à  $f^{1/2}$ . En dépit de cela, la représentation par des constantes localisées reste possible, à condition d'accepter un petit taux d'imprécision et de borner la zone fréquentielle de validité. Cela nous a amenés à remplacer la cellule parallèle de la Figure 2-7 par plusieurs cellules de ce type connectées en série. Il faut préciser que le nombre des cellules Rp-Lp ainsi introduites pour garantir la précision souhaitée n'a jamais dépassé quatre...

### I.6. Prise en compte de la variation fréquentielle des éléments

En dépit de ce qui précède, durant nos travaux, nous avons constaté que l'inductance magnétisante de l'un des transformateurs planar étudié variait sensiblement avec la fréquence. Nous savons maintenant que ce comportement est assez fréquent dans les transformateurs planar munis d'un entrefer, surtout si certains de leurs conducteurs sont larges. La méthode de caractérisation que nous utilisons (cf. § I.5) était mal adaptée à un tel cas ; il en résultait une détermination imprécise de certaines inductances et certaines comparaisons modèles/mesures étaient décevantes. En outre, comme la détermination de la plupart des capacités parasites se fait en exploitant les fréquences de certaines résonances [SCHELLMANN-99-2], toute imprécision sur les inductances entraîne une imprécision sur les capacités.

Pour surmonter cette difficulté, nous avons décidé de chercher une méthode de mesure qui ne postule pas l'invariance fréquentielle des éléments. Nous l'avons trouvée en remarquant que l'approche empruntée pour trouver les circuits équivalents au couplage magnétique s'étendait à n'importe quel circuit linéaire passif, à condition de remplacer les inductances par des impédances et d'admettre que les rapports de transformations pouvaient être complexes. La Figure 2-8 illustre ceci pour un circuit à trois entrées. Le circuit représenté est déduit de celui de la Figure 11 (chapitre 1), à condition de choisir :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{22}Z_{33} - Z_{23}^2}{Z_{33}} - \frac{(Z_{12}Z_{33} - Z_{23}Z_{13})^2}{Z_{33}(Z_{22}Z_{33} - Z_{23}^2)} & Z_2 &= \frac{Z_{22}Z_{33} - Z_{23}^2}{Z_{33}} & Z_3 &= Z_{33} \\ \eta_{12} &= \frac{Z_{12}Z_{33} - Z_{23}Z_{13}}{Z_{22}Z_{33} - Z_{23}^2} & \eta_{13} &= \frac{Z_{13}}{Z_{33}} & \eta_{23} &= \frac{Z_{23}}{Z_{33}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le circuit représenté admet une équation aux impédances conforme à (2.1), c'est-à-dire la plus générale pour un circuit linéaire passif.

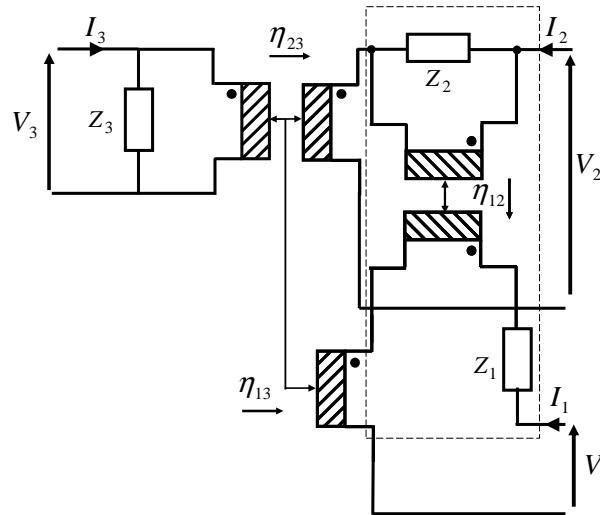


Figure 2-8 : Circuit équivalent d'un circuit linéaire passif à trois entrées

La méthode de caractérisation expérimentale mise au point consiste donc à conserver la topologie obtenue au chapitre 1 et à rechercher, à toutes les fréquences, les valeurs complexes des rapports de transformation et des impédances (qui remplacent les inductances).

## II. LES MESURES D'IMPEDANCES

### II.1. Mesure voltampèremétrique et autres techniques

Le principe le plus simple pour effectuer une mesure d'impédance consiste à injecter un courant calibré dans l'impédance et à mesurer la chute de tension qui en résulte aux bornes du composant. Cette méthode, qui nécessite un ampèremètre et un voltmètre, est connue sous le nom de "méthode voltampèremétrique". Elle donne toujours un résultat plus ou moins erroné en raison des impédances internes non idéales des deux appareils.

Des méthodes plus sophistiquées ont été mises au point pour mesurer des impédances avec précision. Elles présentent toutes des avantages et des inconvénients [AGILENT-00], [TI-R1078]. Trois de ces méthodes sont comparées dans le Tableau 2-1. La méthode de mesure "4 fils" ainsi que celle "du pont auto calibré" sont décrites plus loin. Le choix entre ces différentes techniques se fait en fonction de la gamme de fréquence, de l'ordre de grandeur des impédances à mesurer, de la précision désirée et, aussi, de la simplicité de mise en œuvre. Quelle que soit la méthode choisie, des précautions d'utilisation appropriées sont requises pour obtenir des résultats précis.

Méthode	Avantages	Inconvénients	Gamme de fréquence	Application
Pont	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Faible imprécision (0.1% typiquement)</li> <li>- Large gamme de fréquences avec différents types de ponts</li> <li>- Faible coût</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Réglages manuels</li> <li>- Gamme de fréquences étroite pour chaque type de pont</li> </ul>	0 à 300 MHz	Mesure de laboratoire
Q-mètre (méthode résonante)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Très bonne précision pour les mesures de fortes valeurs de Q</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Imprécision pour les faibles valeurs d'impédances</li> </ul>	10 kHz à 70 MHz	Mesure de composants à fort facteur de qualité Q
Analyseur de réseau	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Large gamme de fréquence</li> <li>- Très bonne précision lorsque l'impédance à mesurer est proche de l'impédance caractéristique</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Calibration à refaire à chaque changement de fréquence</li> <li>- Gamme d'impédance mesurable étroite</li> </ul>	Supérieure à 300 kHz	Mesure de composants Radio Fréquence

Tableau 2-1 : Comparaison des différentes méthodes de mesure

Nous avons utilisé deux appareils de mesure : un microhmmètre [OM10] et un pont d'impédance [4294A]. Nous allons maintenant nous attarder sur les méthodes exploitées par ces deux appareils, à savoir la méthode "4 fils" et la méthode du "pont auto calibré".

## II.2. Mesures "4 fils"

Des mesures précises de faibles résistances peuvent être réalisées à l'aide d'un microhmmètre. Cet appareil s'avère souvent utile pour mesurer les résistances des enroulements. Il s'appuie sur la méthode 4 fils (Figure 2-9) et permet de réaliser des mesures de  $10\mu\Omega$  à  $50k\Omega$ .

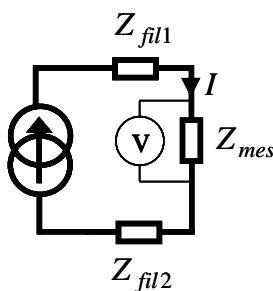


Figure 2-9 : Mesure en 4 points

Le principe de la mesure 4 fils consiste à injecter un courant  $I$  et à mesurer la tension induite  $V$  directement aux bornes du composant. De cette façon, elle s'affranchit des chutes de tensions dues aux impédances des fils d'amenées du courant ( $Z_{fil1}$ ,  $Z_{fil2}$ ).

Cette méthode ne peut être utilisée qu'en basse fréquence, jusqu'à quelques  $kHz$ . Avec un multimètre classique, la mesure s'effectue en "2 points", suivant la méthode voltampèremétrique ; l'impédance des fils d'amenées de courant s'ajoute alors à celle recherchée.



### II.3. Méthode du pont auto calibré

Le schéma de principe de cette méthode est présenté sur la Figure 2-10. Le courant  $I_1$  traversant le composant à mesurer  $Z_x$  est opposé au courant  $I_2$  traversant la résistance  $R$ . L'amplificateur maintient le potentiel du point "L" proche de zéro volt, créant ainsi une masse virtuelle. A l'équilibre, la relation (2.4) est respectée.

$$\frac{V_1}{Z_x} - \frac{V_2}{R} = 0 \quad (2.4)$$

En pratique, les composants exploités par cet appareil diffèrent suivant la gamme des fréquences couvertes. Pour des fréquences inférieures à la centaine de  $kHz$ , l'amplificateur A (Figure 2-10) est un simple amplificateur opérationnel. Pour monter plus haut en fréquence, un amplificateur dédié, ayant un très grand produit gain-bande doit être utilisé. Les caractéristiques, avantages et inconvénients de cette méthode sont présentés dans le Tableau 2-2.

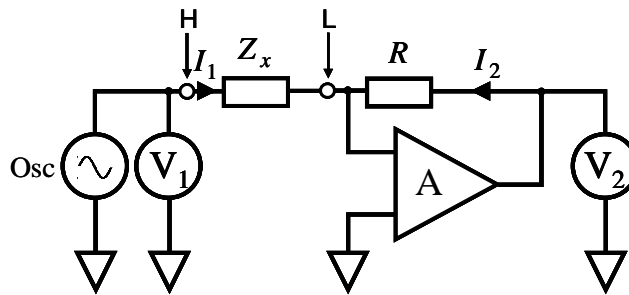


Figure 2-10 : Mesure d'impédance par méthode du pont auto calibré

Méthode	Avantages	Inconvénients	Gamme de fréquence	Application
Pont auto calibré	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Large gamme de fréquences avec différents types de ponts</li> <li>- Grande précision sur une large gamme d'impédances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Les plus hautes fréquences ne sont pas accessibles</li> <li>- Plusieurs appareils sont nécessaires pour couvrir toute la gamme de fréquence</li> </ul>	40 Hz à 110 MHz	Usage général

Tableau 2-2 : Méthode du pont auto calibré

Cette méthode de mesure est mise en œuvre par le pont d'impédance [4294A] que nous avons employé pour caractériser expérimentalement nos composants. Dans une gamme de fréquence allant de  $40Hz$  à  $110MHz$ , cet appareil (Figure 2-11) fournit le tracé d'impédances s'étendant de  $3m\Omega$  à  $500M\Omega$  en BF, cette gamme rétrécissant lorsque la fréquence augmente.

Son schéma de principe est visible sur la Figure 2-12 et la manière dont est réalisée l'auto compensation est présentée sous la forme d'un diagramme fonctionnel.

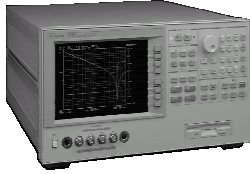


Figure 2-11 : Agilent 4294A

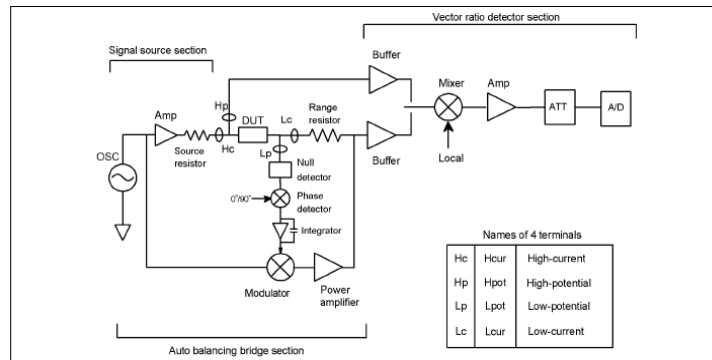


Figure 2-12 : Schéma analogique de fonctionnement du 4294A

Des modulateurs suivis de filtres permettent de connaître les deux composantes (en phase et en quadrature avec le courant) de la tension  $V_1$  aux bornes de  $Z_x$ , l'origine des phases étant fixée par la tension  $V_2$  aux bornes de  $R$ .

## II.4. Problèmes de mesure et recommandations

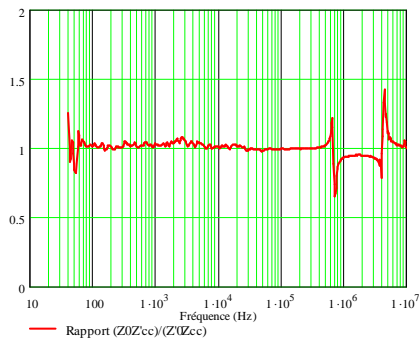
Avant de présenter la méthodologie mise au point pour identifier expérimentalement les éléments du circuit équivalent, il est intéressant de présenter quelques conseils pour choisir les impédances à mesurer et pour les acquérir le plus précisément possible.

### II.4.a. Comment choisir les mesures à effectuer ?

La caractérisation magnétique s'effectue en basse fréquence soit, en pratique, de  $40\text{ Hz}$  (limite inférieure du pont) aux premières résonances visibles du transformateur. Dans cette gamme fréquentielle, les impédances ne sont jamais trop élevées pour être mesurées précisément. Les problèmes apparaissent plutôt lorsqu'elles sont trop faibles. Les impédances à vide sont plus fortes que celles en court-circuit; elles seront donc toutes mesurées dans un premier temps. Cependant, pour déterminer tous les éléments d'un schéma équivalent, elles ne suffisent pas. Il faut réaliser des mesures avec court-circuit. Pour un quadripôle passif, par exemple, deux mesures en court-circuit peuvent être réalisées. Il est conseillé de mesurer la plus forte des deux afin de s'affranchir des problèmes d'incertitude sur les faibles valeurs. La relation (2.2) permet de se dispenser de la mesure la plus délicate.

#### II.4.b. Intérêt de la mesure redondante

La relation (2.2) évoquée ci-dessus est indépendante du circuit équivalent adopté pour la représentation. Elle se traduit par le fait que  $\frac{Z_0 Z'_{cc}}{Z_0' Z_{cc}} = 1$ . Vérifier cette égalité, dont nous appelons le module "indice de confiance", à chaque fréquence, est instructif (Figure 2-13).



**Figure 2-13 : "Indice de confiance" des quatre impédances d'un quadripôle**

Les écarts par rapport à 1 peuvent, certes, être imputables à des imprécisions sur chacune des mesures ou à des non linéarités. Ils peuvent aussi être dus à l'imperfection des impédances de charge utilisées : impédance de court-circuit non nulle, ou impédance à vide non infinie. Cette remarque constitue une première incitation à relever la quatrième mesure.

Il est possible également d'exploiter cette quatrième mesure redondante pour réduire l'impact d'une impédance de charge imparfaite. Nous verrons dans la partie caractérisation (cf. III) comment on peut, grâce à cette égalité supplémentaire, évaluer l'impédance d'un court-circuit et, en conséquence, affiner la caractérisation du quadripôle.

#### II.4.c. Compensation du pont d'impédance

L'appareil de mesure présenté sur la Figure 2-11 doit être utilisé avec un bornier de mesure dans lequel on place le composant à étudier (Figure 2-14). Le pont d'impédance évite lui-même des erreurs en combinant la méthode du pont auto calibré et la méthode 4 fils. Cependant, le bornier qui assure le lien au composant introduit lui aussi des impédances parasites qui faussent la mesure. En dépit de toutes les précautions prises lors de la réalisation de ce dernier, il présente une résistance et une inductance série ainsi qu'une capacité parallèle. Bref, c'est aussi un quadripôle.



**Figure 2-14 : Bornier 16047E**

Pour atténuer l'influence du bornier, il faut le caractériser avant de soustraire son incidence par calcul. Deux mesures sont nécessaires si le quadripôle peut être considéré comme symétrique, ce qui est toujours admissible si son impédance série est beaucoup plus petite que son impédance parallèle.

Les deux mesures nécessaires se nomment "compensation à vide" et "compensation en court circuit". Pour comprendre leur procédure et leur utilité, il faut s'attarder sur la Figure 2-15

qui présente le schéma de connexion d'un bornier "inconnu" sur lequel est placé une impédance à mesurer ( $Z_x$ ). Ce dispositif "inconnu" se comporte comme un quadripôle passif et il peut être décrit par sa matrice impédance (2.5).

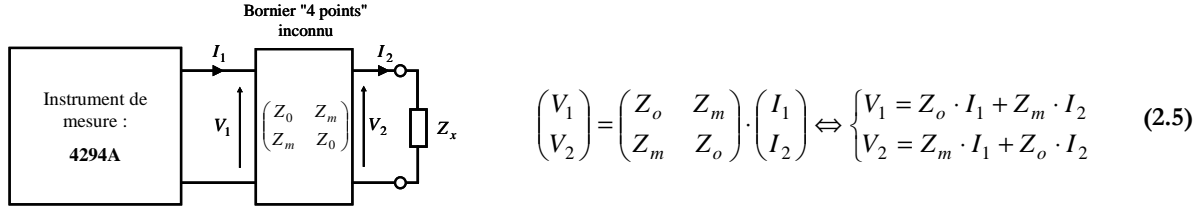


Figure 2-15 : Caractérisation du bornier

L'impédance d'entrée de ce quadripôle symétrique inconnu, chargé par cette impédance à déterminer  $Z_x$ , s'exprime suivant (2.6).

$$Z_{xm} = Z_o - \frac{Z_m^2}{Z_o + Z_x} \quad (2.6)$$

On peut déduire de cette expression, la valeur  $Z_x$  que l'on souhaite déterminer (2.7).

$$Z_x = \frac{Z_m^2 - Z_o^2 + Z_o Z_{xm}}{Z_o - Z_{xm}} \quad (2.7)$$

Pour évaluer les paramètres du quadripôle ( $Z_o$  et  $Z_m$ ), on réalise ensuite deux mesures complémentaires. La "compensation à vide" donne l'impédance d'entrée à vide du quadripôle (2.8). La "compensation en court circuit", quant à elle, est égale à l'impédance d'entrée du quadripôle en court circuit. Elle s'exprime selon (2.9).

$$Z_{om} = Z_o \quad (2.8)$$

$$Z_{sm} = Z_o - \frac{Z_m^2}{Z_o} = \frac{Z_o^2 - Z_m^2}{Z_o} \quad (2.9)$$

En reportant (2.8) et (2.9) dans (2.7), nous obtenons l'impédance recherchée  $Z_x$  fonction des trois impédances relevées (2.10). C'est le calcul réalisé automatiquement par notre appareil.

$$Z_x = Z_{om} \frac{Z_{sm} - Z_{xm}}{Z_{xm} - Z_{om}} \quad (2.10)$$

avec :

$Z_{om}$  : Impédance de compensation en circuit ouvert

$Z_{sm}$  : Impédance de compensation en court circuit

$Z_{xm}$  : Impédance d'entrée du quadripôle chargé par  $Z_x$

Lorsque le bornier ne permet pas de fixer le composant, il faut ajouter des fils pour réaliser les connexions. Cet ajout introduit, lui aussi, des impédances. Nous verrons plus tard son

influence et nous ferons apparaître des limitations pratiques aux valeurs qu'il est possible de mesurer.

#### II.4.d. Quelques précautions utiles

Pour que les compensations soient efficaces, il faut veiller à ce que les impédances parasites relevées par le pont durant les compensations restent constantes jusqu'à la mesure. Il faut donc éviter toute déformation d'un fil de connexion ainsi que toute déconnection des fils sur le composant à caractériser ou sur le bornier de mesure. Pour fixer l'espacement des fils, un câble bifilaire (voire coaxial) peut être utilisé. Cela peut sembler évident, mais il faut, lorsque l'ajout de fils est nécessaire, privilégier des fils épais, courts et rapprochés, pour réduire les résistances et inductances parasites. Des précautions inverses peuvent être nécessaires pour mesurer les fortes impédances capacitatives.

Au niveau du bornier, le contact est réalisé en serrant chaque fil entre deux lames plates et souples. Avec des fils circulaires, ce contact est mauvais car le métal se déforme, élastiquement ou non. L'impédance de contact risque de changer entre la compensation et la mesure. Pour éviter ce problème, il est recommandé de souder des petites terminaisons planes aux extrémités des fils pour que le contact entre ces plaques et le bornier soit reproductible.

Une fois que toutes ces précautions sont prises, les acquisitions à vide et en court circuit vues de cet enroulement peuvent être effectuées. Dans cet esprit, les mesures nécessaires doivent recensées et réalisées dans un ordre précis afin de minimiser les déconnexions inutiles.

#### II.4.e. Limites pratiques des mesures inductives et résistives

La compensation en court-circuit est obligatoire lorsque les impédances sont faibles. Pour situer les limites de cette compensation, un transformateur planar, abaisseur de tension, de 250 W, devant fonctionner à 250kHz a été testé. Le but de cette essai était de mesurer son impédance de fuite (inductance de fuite+résistance de l'enroulement) vue du secondaire, lorsque son primaire était court-circuité. Pour donner un ordre de grandeur, on peut dire que la résistance à mesurer est de  $1m\Omega$  et l'inductance de  $12nH$ . Nous avons mis en œuvre les précautions présentées dans la partie précédente et le dispositif de test est présenté sur la Figure 2-16.

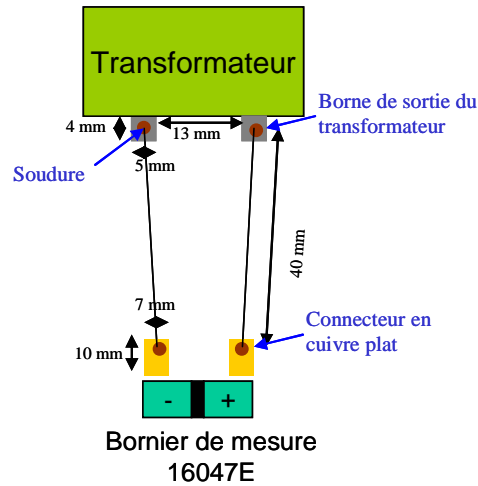


Figure 2-16 : Dispositif de mesures

Des fils de 40 mm ont été placés entre le bornier du pont d'impédance et les connexions de sortie du transformateur. La compensation en court circuit vise à annuler l'influence de ces fils. La Figure 2-17 présente deux méthodes envisageables pour effectuer la compensation du câblage, en court circuit. Dans la première (Figure 2-17a), l'impédance de court-circuit est mesurée avant que le fil inter-bornes soit coupé. Cette technique surestime l'impédance mesurée car la connexion reliant les pattes de sortie du transformateur (13 mm) n'est plus présente lors de la mesure de composant. L'impédance de court-circuit est donc trop élevée avec ce fil et la mesure est surcompensée.

Dans la seconde (Figure 2-17b), les fils de connexion sont rapprochés le plus possible du composant en réalisant deux demi boucles; le court circuit est réalisé en plaçant une goutte de soudure à la jonction entre ces deux boucles. Dans ce cas, les deux parties reliant les bornes du composant à la soudure ne sont pas prises en compte lors de l'acquisition de l'impédance en court circuit. La mesure est alors sous compensée.

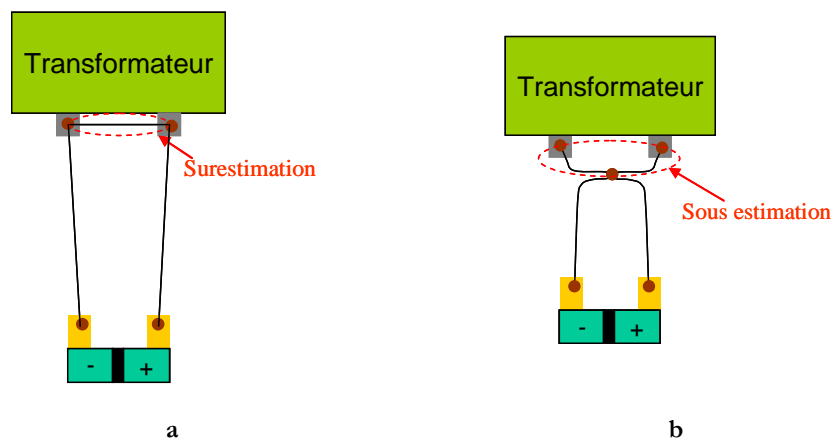


Figure 2-17 : Méthodes de compensation en court circuit

Les deux compensations décrites précédemment ont été comparées lors du test évoqué au début de ce paragraphe. Les résultats de ces mesures sont représentés sur la Figure 2-18.

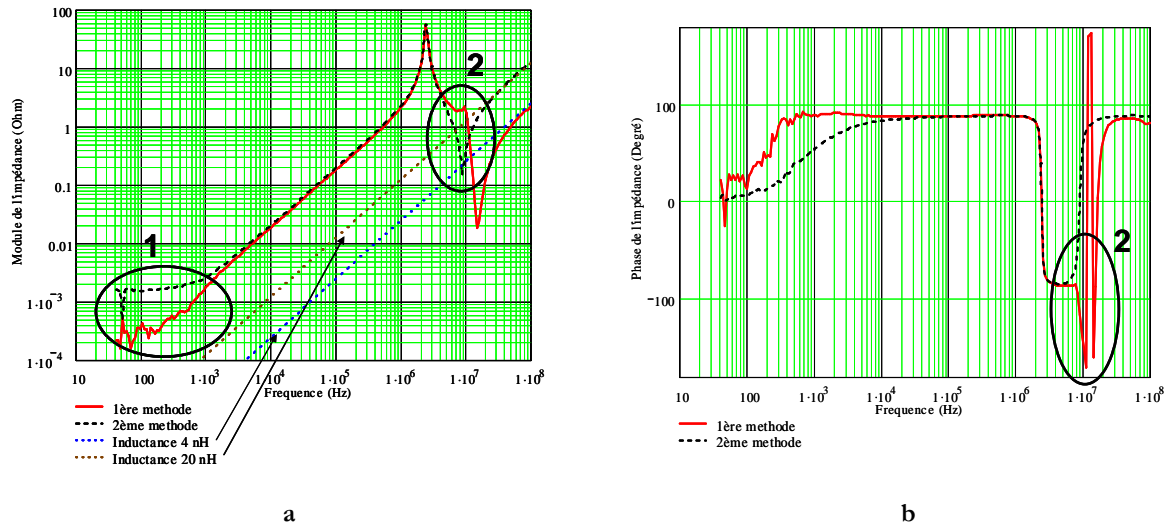


Figure 2-18 : Mesures de la même impédance après les deux types de compensation en court-circuit

Du côté des basses fréquences, la résistance mesurée est comprise entre  $0.5m\Omega$  et  $1.5m\Omega$  (cercle 1 sur la figure). Avec un micro ohmmètre, la résistance mesurée est de  $0.77m\Omega$ . Pour les fréquences élevées, l'inductance série vaut  $4nH$  avec la première compensation et  $20nH$  avec la seconde (cercle 2). Ces mesures montrent que, même en utilisant un appareil de mesure très précis avec ses accessoires d'origine et en prenant les précautions supplémentaires requises, la résistance série peut être évaluée à  $\pm 0.5m\Omega$  près tandis que l'inductance est déterminée avec une incertitude de  $\pm 8nH$ . Pour mesurer l'inductance, il est tentant de se placer à une fréquence plus haute pour que l'impédance soit plus forte. Malheureusement, ces inductances varient avec la fréquence, une telle mesure ne permet pas de déduire la valeur cherchée à la fréquence d'intérêt.

La résistance mesurée est étroitement liée aux fils non compensés (Figure 2-17b). Pour situer les choses, on peut indiquer qu'un fil de cuivre de diamètre  $0.7mm$ , d'une longueur de  $26mm$  a une résistance d'environ  $1m\Omega$ . Descendre en dessous de cette limite est possible en utilisant du fil plus épais ou un appareil plus précis du type microhmmètre.

Pour mesurer précisément de faibles impédances, il est tentant d'appliquer la technique 4 fils directement sans passer par le bornier de mesure. Pour essayer cette méthode nous avons relié le composant à l'analyseur directement à l'aide de quatre câbles coaxiaux. Malheureusement, l'appareil se mettait en défaut dès que nous lançons la mesure. Il faudra consacrer un peu plus de temps pour comprendre la cause de cet échec.

Soulignons pour finir que, lors de nos mesures, la surcompensation fait apparaître une résistance négative (cercle 2). L'équation (2.10) montre que, si l'impédance  $Z_x$  est inférieure à

zéro, cela est dû au fait que l'impédance de court circuit est plus élevée que celle du composant mesuré ( $Z_{sm} > Z_{xm}$ ) car le dénominateur de l'expression est quant à lui toujours négatif ( $Z_{om} > Z_{xm}$ ). L'impédance délivrée est une valeur évidemment erronée car une phase inférieure à  $-90^\circ$ , n'a pas de réalité physique pour un composant passif. Un tel résultat aberrant n'est pas fréquent. Il survient dans des conditions difficiles, c'est-à-dire lorsqu'il faut mesurer de très faibles impédances.

#### II.4.f. Mesure valide ou non ?

Il est difficile d'énoncer un critère permettant de savoir si une mesure réalisée seule est valable. En règle générale, mesurer des résistances de l'ordre de  $0.1m\Omega$  ou des inductances de l'ordre de  $10nH$  est un challenge intéressant ! Même avec des appareils très performants, ce type de mesure nécessite beaucoup de précautions et une méthodologie très élaborée.

Des signes sur les relevés peuvent cependant alerter l'utilisateur, par exemple du "bruit" sur les mesures (surtout en basse fréquence), des résonances "aplaties" ou encore des phases d'impédances qui ne sont pas comprises dans l'intervalle  $[-90^\circ; +90^\circ]$ ... Le tracé de l'indice de confiance est un repère instructif et parfois cruel !

Dernière remarque, pour tester des composants magnétiques, il faut aussi veiller à ne pas saturer le circuit magnétique en réglant de façon correcte le courant de test. Lorsqu'on travaille avec une tension de mesure constante, c'est vers les très basses fréquences qu'il faut surveiller les saturations. En cas de doute, un essai mené avec une tension 2 ou 3 fois plus petite est instructif.

### III. CARACTERISATION EXPERIMENTALE DU MODELE INDUCTIF

Nous allons maintenant présenter la méthode mise au point pour tenir compte de la variation fréquentielle des éléments du circuit équivalent [MARGUERON-05]. Comme nous l'avons précisé précédemment, elle est basée uniquement sur des mesures d'impédances à vide et en court circuit et elle est généralisable à  $n$ -enroulements.

#### III.1. Calcul et grandeurs complexes

Bien que l'étude du chapitre 1 nous suggère, avec des arguments forts, une certaine topologie de circuit équivalent, il est clair que celle-ci est provisoire car les phénomènes de courants induits dans les conducteurs et les pertes fers ont été négligées. Durant la caractérisation expérimentale, nous supposons que les inductances ne sont pas pures (autrement dit, ce sont des impédances) et que les rapports de transformation peuvent être complexes ( $\bar{\eta}$ ). La



détermination étant menée sur cette base, nous verrons bien si les résultats sont très éloignés des résultats établis au chapitre 1.

Nous allons d'abord présenter la méthode élaborée pour un transformateur à deux enroulements puis nous généraliserons cette approche à un nombre quelconque d'enroulements.

### III.2. Caractérisation d'un transformateur deux enroulements

#### III.2.a. Impédances mesurables

Les précédentes grandeurs complexes sont représentées sur le schéma équivalent d'un transformateur à deux enroulements (Figure 2-19).

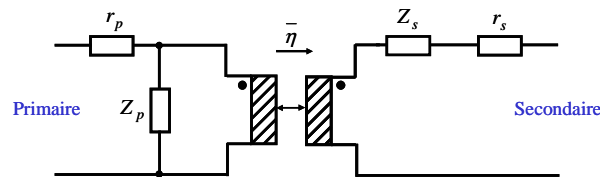


Figure 2-19 : Transformateur à deux enroulements avec grandeurs complexes

Pour ce nombre d'enroulements, deux impédances à vide et deux impédances en court circuit sont mesurables (Tableau 2-3). Ces quatre impédances sont liées par la relation (2.2).

Mesures	Impédance	Vue de l'enroulement	avec
(m1)	$Z_0$	1	$I_2 = 0$
(m2)	$Z'_0$	2	$I_1 = 0$
(m3)	$Z_{cc}$	1	$V_2 = 0$
(m4)	$Z'_{cc}$	2	$V_1 = 0$

Tableau 2-3 : Dénombrement des impédances mesurables pour un transformateur 2 enroulements

Seulement trois mesures (deux à vide,  $Z_0$  et  $Z'_0$ , et une avec un court circuit  $Z_{cc}$  ou  $Z'_{cc}$ ) sont nécessaires pour caractériser entièrement le transformateur. Le modèle obtenu doit être précis donc, de manière générale, les mesures alliant facilité d'exécution et précision seront favorisées.

Il est intéressant, lors de l'indentification d'un composant inconnu, de procéder à une première caractérisation grossière afin d'avoir un ordre de grandeur des valeurs à mesurer. On peut ensuite choisir les mesures les plus faciles à acquérir avec précision et réfléchir aux précautions appropriées. Dans un deuxième temps, les mesures sélectionnées sont reprises en prenant toutes les précautions utiles. Elles mènent au modèle final.

### III.2.b. Identification d'un transformateur à deux enroulements

Le cheminement suivi pour cette identification est schématisé par le synoptique présenté sur la Figure 2-20. Il mène aux valeurs des éléments du circuit équivalent. On voit que le circuit choisi sépare les pertes statiques et dynamiques mais qu'il n'introduit pas encore la partie électrostatique.

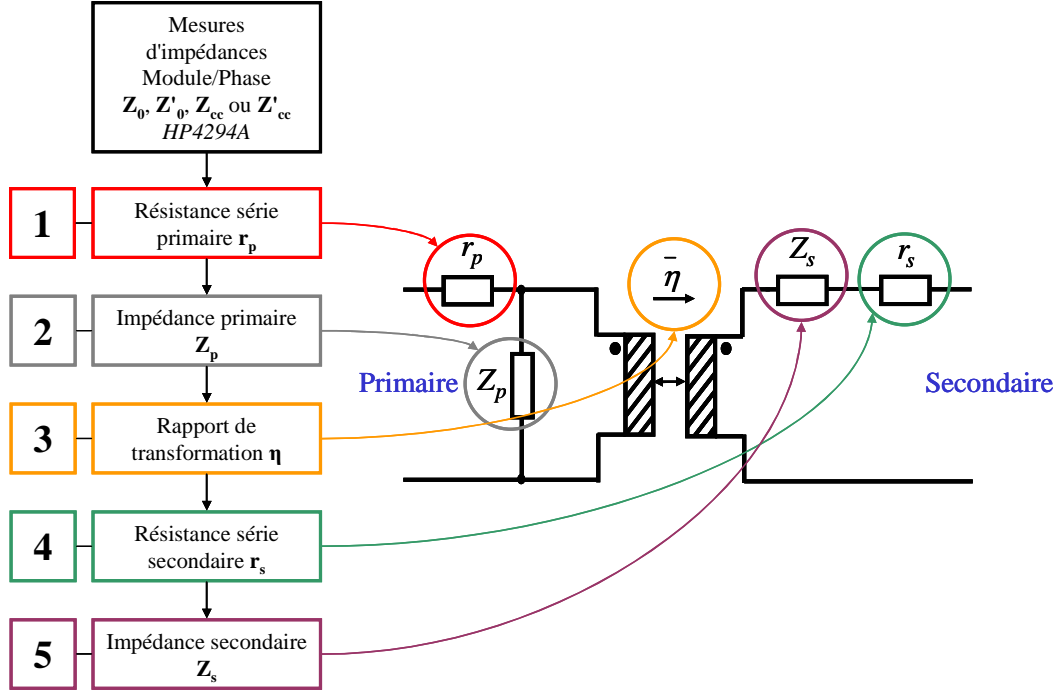


Figure 2-20 : Processus d'identification d'un transformateur à un deux enroulements

- **Etape 1** : La résistance primaire  $r_p$  est déterminée en prenant la partie réelle de l'impédance  $Z_0$  en basse fréquence.
- **Etape 2** : L'impédance magnétisante  $Z_p$  est déterminée à partir de  $Z_0$  à laquelle on retranche  $r_p$  (2.11).

$$Z_p = Z_0 - r_p \quad (2.11)$$

- **Etape 3** : Pour trouver le rapport de transformation  $\eta$  du coupleur, il faut exprimer les deux autres impédances mesurées en fonction des éléments du circuit équivalent (2.12) (2.13).

$$Z_0' = Z_p \cdot \eta^2 + Z_s + r_s \quad (2.12)$$

$$Z_{cc} = r_p + \frac{Z_p(Z_s + r_s)}{Z_p \cdot \eta^2 + Z_s + r_s} \quad (2.13)$$

Un bref calcul mène alors à la valeur cherchée (2.14). Cette équation peut, bien entendu, être réécrite (2.15) en fonction de l'autre impédance mesurable en court circuit, en utilisant le lien (2.2).

$$\eta^2 = \frac{Z'_0(Z_0 - Z_{cc})}{(Z_0 - r_p)^2} \Rightarrow \eta = \left[ \frac{Z'_0(Z_0 - Z_{cc})}{(Z_0 - r_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

$$\eta^2 = \frac{Z_0(Z'_0 - Z'_{cc})}{(Z_0 - r_p)^2} \Rightarrow \eta = \left[ \frac{Z_0(Z'_0 - Z'_{cc})}{(Z_0 - r_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

- **Etape 4 :** La résistance de l'enroulement secondaire  $r_s$  est déterminée en prenant la partie réelle de l'impédance  $Z'_0$  en basse fréquence.
- **Etape 5 :** Pour calculer l'impédance de fuite secondaire  $Z_s$  (2.16), il suffit d'introduire (2.14) dans (2.12).

$$Z_s = \frac{Z'_0(Z_{cc} - r_p)}{Z_0 - r_p} - r_s = \frac{Z_0 Z'_{cc} - Z'_0 r_p}{Z_0 - r_p} - r_s \quad (2.16)$$

Ces cinq étapes permettent, à l'aide des trois mesures choisies, de caractériser entièrement le comportement magnétique du transformateur. Notons cependant qu'une mesure complémentaire est nécessaire pour accéder au signe de  $\eta$  puisque seul son carré est directement accessible.

### III.2.c. Application à un transformateur torique

A titre d'exemple, nous allons caractériser un transformateur à deux enroulements bobinés sur un tore en ferrite. Les caractéristiques de ce transformateur sont inconnues et nous souhaitons établir son circuit équivalent grâce à la méthode précédemment décrite. La Figure 2-21 présente les d'impédances mesurées ainsi que les 3 paramètres du circuit équivalent, tracés en fonction de la fréquence.

Les valeurs des résistances des enroulements,  $r_p = 55 \text{ m}\Omega$  et  $r_s = 135 \text{ m}\Omega$ , sont déduites des mesures à vide  $Z_0$  et  $Z'_0$  en basse fréquence. Les impédances mesurées vues du secondaire sont plus élevées que celles vues du primaire. A priori, ce transformateur fonctionne donc en élévateur de tension.

Le rapport de transformation est ensuite calculé selon (2.14). Sans faire d'hypothèses sur la nature complexe et la variation fréquentielle de ce rapport, le calcul donne une valeur constante et réelle sur une plage de fréquence  $\Delta f_\eta$  de l'ordre de trois décades. En basse fréquence

( $f < 300 \text{ Hz}$ ), le rapport apparaît perturbé. Comme nous l'avons déjà expliqué, dans cette zone fréquentielle, les résistances séries masquent la partie magnétodynamique du circuit et nuisent à la précision de sa caractérisation. En haute fréquence, les résonances qui apparaissent sur les courbes d'impédances montrent que les capacités sont de plus en plus influentes et, elles aussi, dégradent la sensibilité de l'identification magnétodynamique.

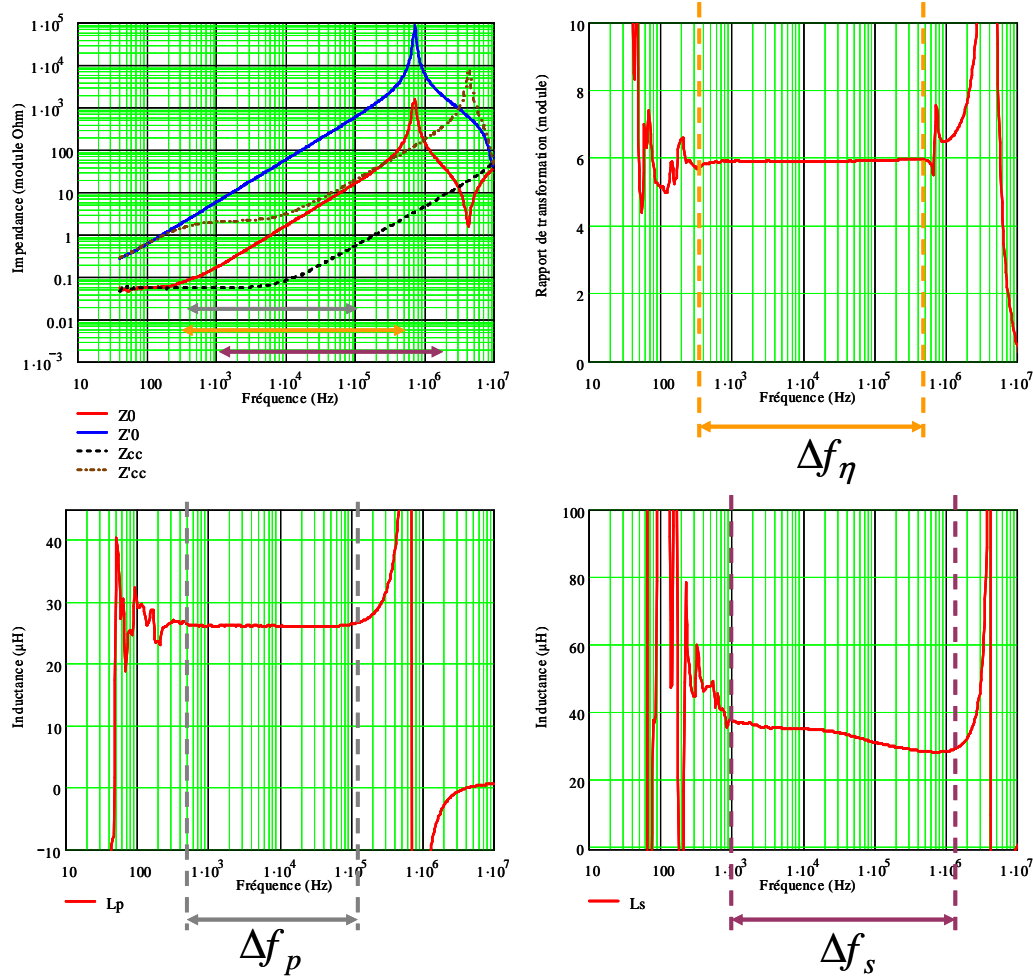


Figure 2-21 : Caractérisation d'un transformateur deux enroulements (tore bobiné)

Il en est de même pour l'inductance magnétisante  $L_p$ . Cette dernière a été calculée en supposant que l'impédance magnétisante se décomposait en une inductance et une résistance de pertes fer en parallèle (représentée en bas de la figure). L'inductance est constante sur une zone de fréquence  $\Delta f_p$  légèrement plus étroite que celle du rapport de transformation. En basse et haute fréquence, l'inductance magnétisante (et la résistance de pertes fer) est masquée respectivement par les résistances des enroulements et par les effets capacitifs du transformateur. L'inductance de fuite, quant à elle, décroît sur un intervalle  $\Delta f_s$  à cause, vraisemblablement, des courants induits. Cette variation peut être représentée par une suite de cellule de type Lp-Rp

(Figure 2-7). En dehors de cette zone fréquentielle, elle est, elle aussi, masquée par les résistances et les capacités du composant.

En résumé, le modèle magnétodynamique de ce transformateur paraît assez simple : son rapport de transformation est constant ainsi que son inductance magnétisante. Dans la zone où elle est déterminée précisément (de  $10\text{kHz}$  à  $300\text{kHz}$ ) la résistance de pertes fer varie de  $400\Omega$  à  $2\text{k}\Omega$  (Figure 2-22). En pratique sa représentation par une valeur constante ne conduit pas à des écarts décelables sur les impédances mesurées.

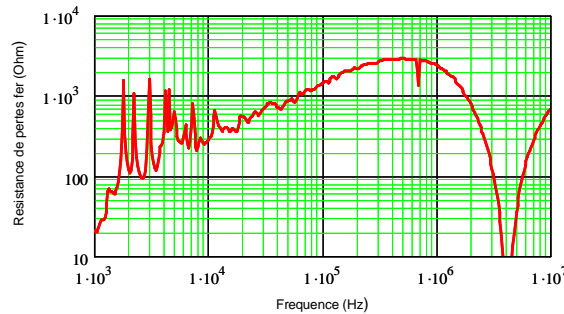


Figure 2-22 : Résistance de pertes fer

Seule l'inductance de fuite varie avec la fréquence et justifie l'introduction de cellules Lp-Rp. En adjoignant à ces composants les deux impédances série, on obtient un circuit qui représente le comportement du composant depuis le continu jusqu'à, au moins,  $100\text{kHz}$ .

### III.2.d. Détermination de l'impédance d'un court circuit

Nous avons déjà signalé que le tracé du rapport  $\left| \frac{Z_0 Z'_{cc}}{Z'_0 Z_{cc}} \right|$  peut être utile pour détecter si une des impédances de mesure est imparfaite : court-circuit non nul ou impédance à vide non infinie. Nous montrons maintenant comment évaluer l'impédance du court-circuit fautif à l'aide de la mesure redondante d'impédance.

A titre d'exemple, supposons que le transformateur étudié soit abaisseur de tension. L'impédance en court-circuit vue du secondaire est la plus faible des deux et le court-circuit que l'on va placer de ce côté perturbe beaucoup l'impédance en court-circuit vue du primaire. Les impédances primaires étant plus grandes, il est fréquent que cette mesure soit la seule des quatre à être perturbée de cette façon. Dans ce cas, l'impédance du court circuit est déductible.

Les impédances mesurées  $Z_0$ ,  $Z'_0$  et  $Z'_{cc}$  sont supposées correctes. Seule la mesure  $Z_{ccmes}$  pose problème car, dans cette configuration, la charge du quadripôle n'est pas négligeable : elle est égale à la valeur du court circuit  $Z_{ds}$  que l'on recherche.

Selon la théorie des quadripôles, dans le cas idéal (court circuit parfait  $Z_{ds} = 0$ ) l'impédance  $Z_{cc}$  prend la valeur (2.17), alors que, dans notre cas, l'impédance mesurée s'écrit suivant (2.18).

$$Z_{cc} = Z_0 - \frac{Z_m^2}{Z_0'} \quad \Leftrightarrow Z_m^2 = Z_0 Z_0' - Z_{cc} Z_0' = Z_0 Z_0' - Z_0 Z_{cc}' \quad (2.17)$$

$$Z_{ccmes} = Z_0 - \frac{Z_m^2}{Z_0' + Z_{ds}} \quad (2.18)$$

L'impédance  $Z_{ccmes}$  s'exprime donc facilement à l'aide des trois autres impédances mesurées ainsi que celle du court circuit (2.19).

$$Z_{ccmes} = Z_0 - \frac{Z_0 Z_0' - Z_0 Z_{cc}'}{Z_0' + Z_{ds}} \quad (2.19)$$

On peut finalement déduire, des quatre impédances mesurées, l'impédance du court circuit incriminé (2.20).

$$Z_{ds} = \frac{Z_0' Z_{ccmes} - Z_0 Z_{cc}'}{Z_0 - Z_{ccmes}} \quad (2.20)$$

Ce qui a été dit précédemment (cf. § II.4.a) sur le choix des mesures à effectuer peut ici être remis en question lorsque des impédances faibles doivent être mesurées. Au lieu de n'en mesurer que trois parmi les quatre disponibles, il vaut mieux les acquérir toutes afin de tirer parti de toutes les informations qu'elles contiennent. De cette façon on détermine quelles mesures il faut réellement exploiter pour avoir un modèle fiable et savoir quelles sont le ou les courts-circuits qui perturbent nos mesures.

Si seul le court-circuit placé au primaire est imparfait, un changement d'indices dans (2.19) permet de trouver son expression. En revanche, si les deux sont imparfaits, aucune évaluation n'est possible car le nombre d'équations indépendantes est insuffisant.

### III.3. n-enroulements

Au cours du paragraphe précédent, nous avons présenté une méthode permettant de caractériser un transformateur à deux enroulements. Nous envisageons maintenant l'identification des paramètres d'un transformateur possédant davantage d'enroulements.

### III.3.a. Dénombrement des impédances et généralisation

Dans le chapitre 1 nous avons montré que le circuit équivalent  $n$  inductances couplées contient :

- $n$  inductances
- $n - 1$  coupleurs principaux
- $n - 2$  coupleurs pour le transformateur de fuite de rang  $n - 1$
- $n - 3$  coupleurs pour le transformateur de fuite de rang  $n - 2$
- ...

Au total  $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$  éléments sont à déterminer. Ce nombre coïncide avec celui des éléments indépendants de la matrice inductance qui le caractérise.

En vu de l'identification et conformément à ce qui a été fait pour le transformateur à deux enroulements, nous sortons la résistance continue de chaque enroulement, nous considérons que les inductances sont en pratique des impédances et que les rapports de transformation sont complexes. Nous obtenons ainsi le circuit équivalent magnétodynamique à identifier (Figure 2-23).

Pour ce transformateur, les enroulements sont caractérisés deux par deux. Nous avons vu que, pour identifier le couplage de deux enroulements, il fallait relever, au minimum, deux impédances à vide et une en court-circuit. Par extension, pour un transformateur à  $n$  enroulements, il faut mesurer  $n$  impédances à vide et  $n(n-1)/2$  impédances avec un court-circuit. En théorie, ces mesures suffisent pour caractériser complètement le composant (tant qu'on ne s'intéresse pas à ses capacités). Les premières donnent les impédances propres et les secondes, jointes aux premières, donnent accès aux impédances mutuelles.

Pour une large majorité des transformateurs, les couplages entre enroulements sont forts. En revanche, ceux du transformateur de fuite (entre les inductances de fuite) sont faibles, voire négligeables. Parfois cependant, les couplages du transformateur de fuite ne peuvent pas être négligés et, des mesures d'impédances avec au moins deux courts circuits sont nécessaires pour caractériser ces couplages du second ordre.

### III.3.b. Exemple d'un transformateur planar à trois enroulements

#### *III.3.b.i. Description et mesures possibles*

Pour illustrer les propos du paragraphe précédent, nous prenons l'exemple d'un transformateur à trois enroulements réalisé en technologie planar. Ce composant est constitué d'un enroulement primaire (1), d'un secondaire (2) et d'un auxiliaire (3). Le circuit équivalent de

ce transformateur (sans sa partie électrostatique) comporte 3 résistances, 3 impédances et 3 rapports de transformation (Figure 2-23).

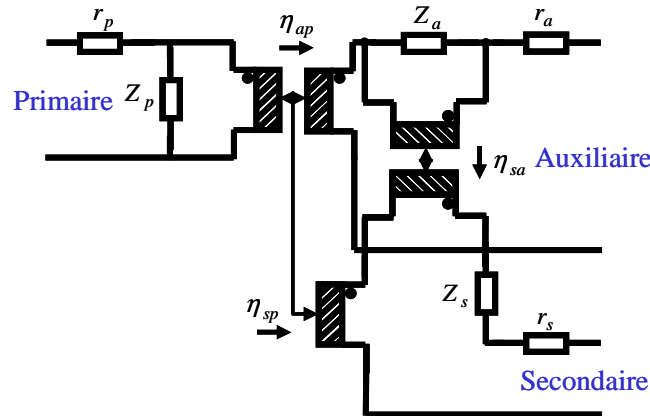


Figure 2-23 : Transformateur à 3 enroulements avec grandeurs complexes

Le Tableau 2-4 recense les impédances mesurables sans impédance extérieure autre qu'un court-circuit. On en compte 12 : 3 à vide, 6 avec un court circuit et 3 avec 2 court circuits. Elles ne sont pas toutes indépendantes car tous les groupes de 4 impédances associés à un même quadripôle satisfont la relation (2.2). En l'absence de court-circuit, il y a 3 façons de choisir deux enroulements et donc 3 relations à écrire. Avec 1 court-circuit, il ne reste qu'un quadripôle, ce qui donne trois relations supplémentaires.

Mesure	Impédance	Vue de l'enroulement	avec	
(m1)	$Z_{1\_2o\_3o}$	1	$I_2 = 0, I_3 = 0$	0 court-circuit
(m2)	$Z_{2\_1o\_3o}$	2	$I_1 = 0, I_3 = 0$	
(m3)	$Z_{3\_1o\_2o}$	3	$I_1 = 0, I_2 = 0$	
(m4)	$Z_{1\_2cc\_3o}$	1	$V_2 = 0, I_3 = 0$	1 court-circuit
(m5)	$Z_{1\_2o\_3cc}$	1	$I_2 = 0, V_3 = 0$	
(m6)	$Z_{2\_1cc\_3o}$	2	$V_1 = 0, I_3 = 0$	
(m7)	$Z_{2\_1o\_3cc}$	2	$I_1 = 0, V_3 = 0$	
(m8)	$Z_{3\_1cc\_2o}$	3	$V_1 = 0, I_2 = 0$	
(m9)	$Z_{3\_1o\_2cc}$	3	$I_1 = 0, V_2 = 0$	2 courts-circuits
(m10)	$Z_{1\_2cc\_3cc}$	1	$V_2 = 0, V_3 = 0$	
(m11)	$Z_{2\_1cc\_3cc}$	2	$V_1 = 0, V_3 = 0$	
(m12)	$Z_{3\_1cc\_2cc}$	3	$V_1 = 0, V_2 = 0$	

Tableau 2-4 : Dénombrement des impédances mesurables d'un transformateur à 3 enroulements

Toutes ces relations figurent ci-dessous et, finalement, compte tenu de ces 6 liens, seules 6 de ces impédances sont indépendantes (2.21).



$$\begin{aligned}
 m1 \cdot m6 &= m2 \cdot m4 & m5 \cdot m11 &= m7 \cdot m10 & m1 \cdot m8 &= m3 \cdot m5 \\
 m4 \cdot m12 &= m9 \cdot m10 & m2 \cdot m9 &= m3 \cdot m7 & m6 \cdot m12 &= m8 \cdot m11
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Comme nous l'avons écrit précédemment, pour caractériser ce transformateur, il faut mesurer au moins 6 impédances. Une septième mesure, effectuée avec deux courts circuits, est parfois indispensable pour caractériser précisément le couplage du transformateur de fuite. Les trois mesures incontournables sont celles des impédances vues de chaque enroulement avec les autres à vides :  $m1$ ,  $m2$  et  $m3$ . Ensuite, il faut en choisir au moins trois autres. Le choix est orienté par les ordres de grandeur et par tous les repères énumérés pour le transformateur à deux enroulements. Soulignons que des mesures redondantes procurent une plus grande confiance dans la validité des mesures et, en conséquence, dans ce qu'on en déduit. Elles permettent en particulier de tracer l'indice de confiance de tous les quadripôles.

### III.3.b.ii. Détail de la méthode pour 3 enroulements

Le synopsis de la méthode pour un transformateur à 3 enroulements est présenté sur la Figure 2-24.

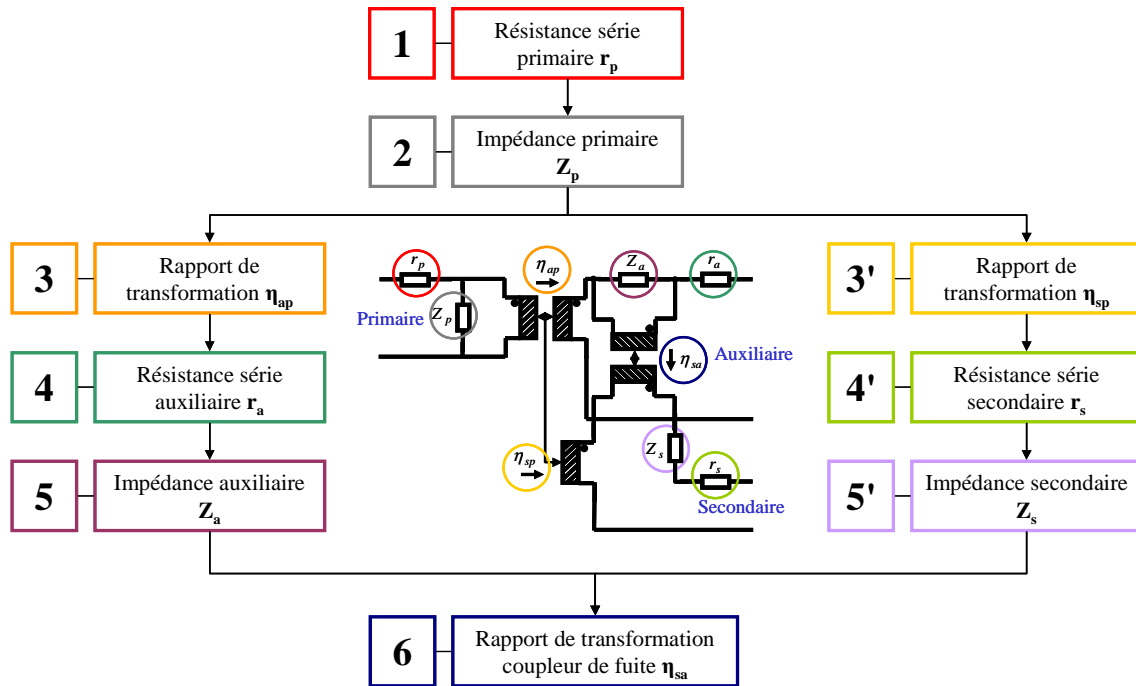


Figure 2-24 : Synopsis pour un 3 enroulements

- En premier, les composants caractéristiques du primaire seul sont évalués:
  - **Etape 1** : La résistance primaire  $r_p$  est déterminée en prenant la partie réelle de l'impédance  $Z_{1\_2o\_3o}$  en basse fréquence (mesure  $m1$  cf. Tableau 2-4).

- **Etape 2** : L'impédance  $Z_p$  est déterminée avec cette même impédance  $Z_{1\_2o\_3o}$  (2.11).
- Dans un deuxième temps, le transformateur primaire/secondaire est identifié:
  - **Etape 3'** : Le rapport de transformation  $\eta_{sp}$  est calculé en fonction de  $Z_{1\_2o\_3o}$  (m1),  $Z_{2\_1o\_3o}$  (m2) et d'une autre mesure avec un court circuit (à choisir entre m4 ou m6) (2.14).
  - **Etape 4'** : La résistance secondaire  $r_s$  est déterminée en prenant la partie réelle de l'impédance  $Z_{2\_1o\_3o}$  en basse fréquence (mesure m2).
  - **Etape 5'** : L'impédance  $Z_s$  est déterminée avec (2.16).
- Ensuite, le transformateur primaire/auxiliaire est caractérisé comme le précédent :
  - **Etape 3** : Le rapport de transformation  $\eta_{ap}$  est calculé en fonction de  $Z_{1\_2o\_3o}$  (m1),  $Z_{3\_1o\_2o}$  (m3) et d'une autre mesure avec un court circuit (à choisir entre m5 ou m8) (2.14).
  - **Etape 4** : La résistance auxiliaire  $r_a$  est déterminée en prenant la partie réelle de l'impédance  $Z_{3\_1o\_2o}$  en basse fréquence (mesure m3).
  - **Etape 5** : L'impédance  $Z_a$  est déterminée avec (2.16).
- Enfin, une mesure complémentaire est réalisée pour caractériser le coupleur de fuite. Cette dernière fait appel à deux courts-circuits :
  - **Etape 6** : Le rapport de transformation  $\eta_{as}$  est finalement déterminé en court-circuitant l'enroulement primaire et en considérant le transformateur de fuite comme un transformateur à 2 enroulements.

### III.3.b.iii. Premières mesures et interprétations

Les diagrammes de Bode des 12 impédances mesurables de ce transformateur sont représentés sur la Figure 2-25. Les impédances vues de l'enroulement secondaire sont très faibles et difficilement mesurables en basse fréquence. Au microhmmètre, la résistance de cet enroulement est égale à  $0.77\text{ m}\Omega$ , ce qui est difficilement mesurable avec un pont d'impédance, malgré toutes les précautions prises. Cet ordre de grandeur nous laisse à penser qu'un simple fil de quelque millimètre de longueur, utilisé pour réaliser le court-circuit, peut perturber de façon notable nos mesures. Il en est de même au niveau inductif puisque le fil devrait présenter une inductance non négligeable vis-à-vis de quelques  $nH$ .

Pour les autres enroulements, les impédances sont bien plus fortes et les courts-circuits réalisés ne peuvent en aucun cas fausser les mesures.

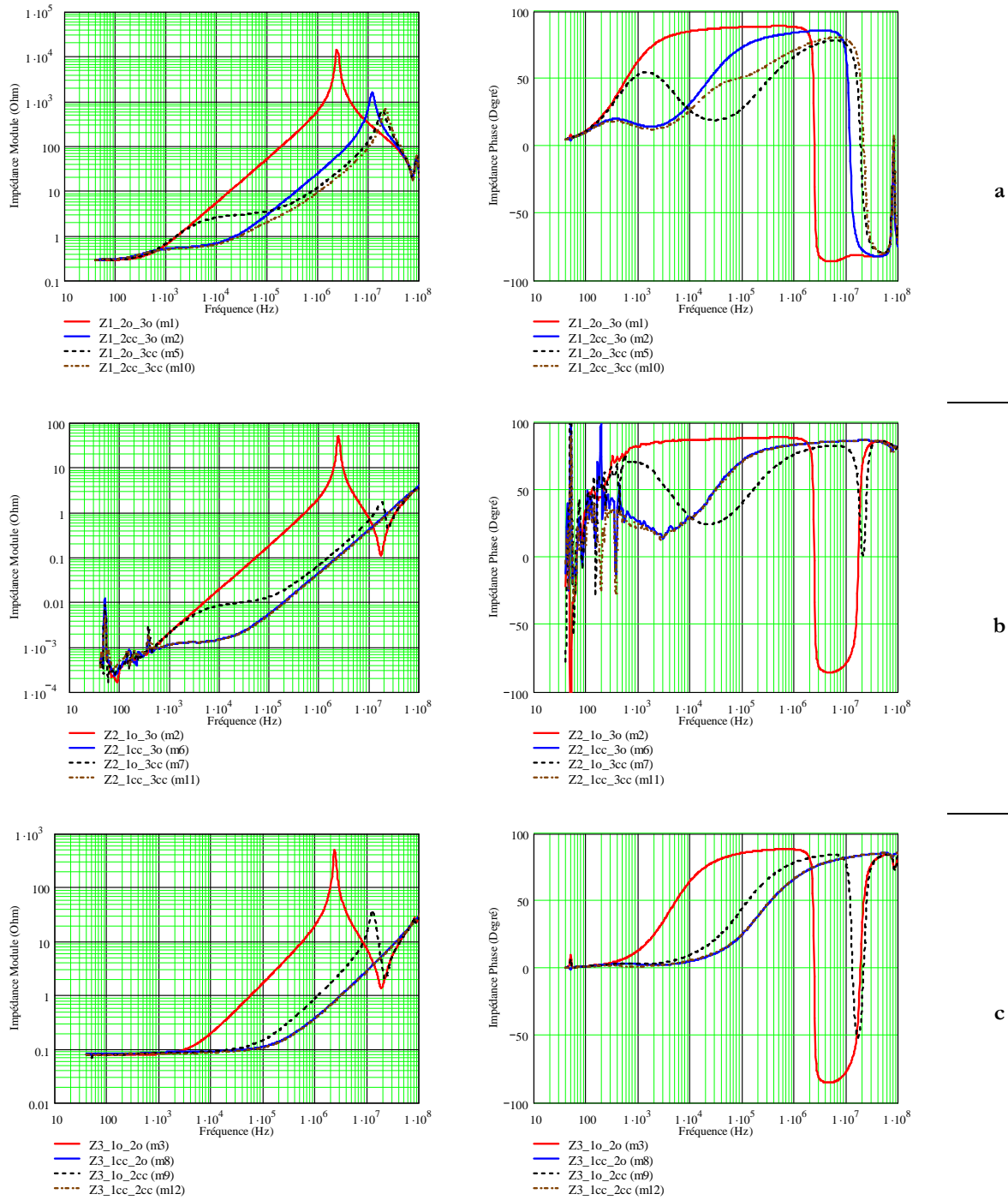


Figure 2-25 : 12 impédances mesurables du transformateur 3 enroulements (Module et Phase)

a : Vue du primaire | b : Vue du secondaire | c : Vue de l'auxiliaire

Les deux observations que l'on vient de faire sont validées par la Figure 2-26. L'indice de confiance reste voisin de 1 dans le cas du transformateur Primaire/Auxiliaire (Figure 2-26a).

Aucune impédance parasite ne perturbe les mesures. Ce n'est pas le cas du transformateur Primaire/Secondaire. Ce rapport est éloigné de 1 (Figure 2-26b).

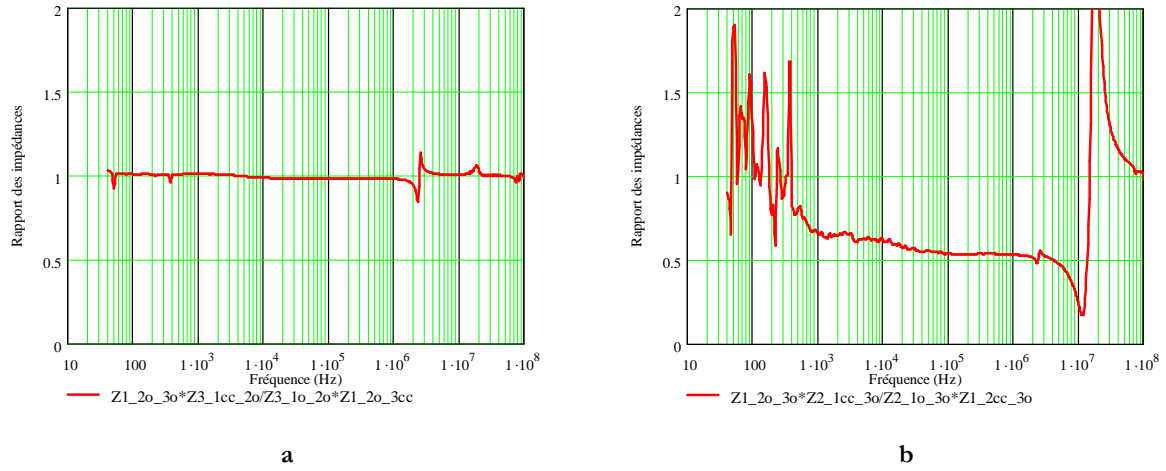


Figure 2-26 : Indices de confiance

a : Primaire/Auxiliaire | b : Primaire/Secondaire

Dans ce cas de figure, seule la mesure ( $m4$ ) pose problème, donc la détermination des éléments du schéma équivalent doit se faire obligatoirement avec les trois autres ( $m1$ ), ( $m2$ ) et ( $m6$ )) pour le transformateur Primaire/Secondaire.

Une autre observation peut être faite à propos des relevés d'impédances (Figure 2-25). Le couplage entre les inductances de fuites secondaire et auxiliaire semble très faible car les impédances vues du secondaire lorsque le primaire est court-circuité ne change presque pas suivant que l'auxiliaire est à vide ou en court circuit. Même chose vue de l'auxiliaire si le secondaire est court-circuité ou à vide. Ce couplage semble donc négligeable. Le circuit équivalent pourra être simplifié en conséquence (cf. chapitre 1 § III.3.c).

### III.3.b.iv. Composants du circuit équivalent

Toutes les résistances des enroulements sont relevées au micro ohmmètre :  $r_p = 285 \text{ m}\Omega$ ,  $r_s = 0.77 \text{ m}\Omega$  et  $r_a = 79.2 \text{ m}\Omega$ . Le processus de caractérisation (Figure 2-27) est ensuite appliqué. Les rapports de transformation obtenus sont réels et constants sur plusieurs décades. Les inductances varient en fonction de la fréquence et elles sont modélisées par des cellules Lp-Rp (Figure 2-7).

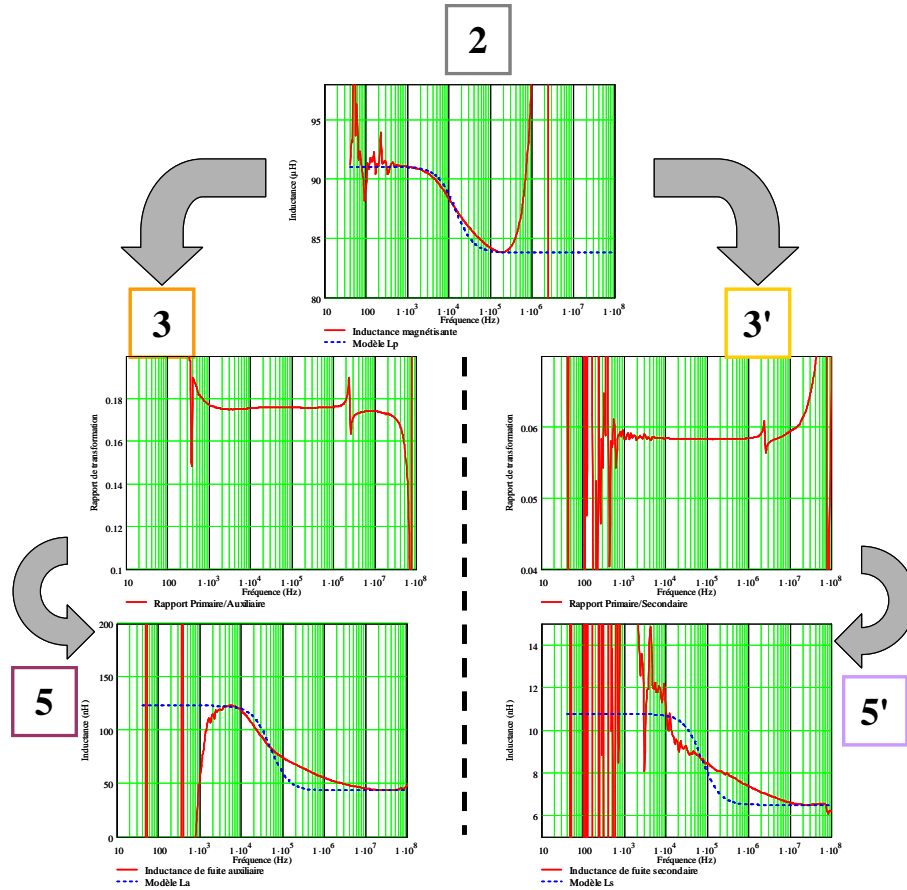


Figure 2-27 : Détermination des éléments du circuit équivalent

Si nécessaire, il est possible de se conformer plus précisément aux courbes expérimentales en accroissant le nombre des cellules Lp-Rp. Pour finir, nous pouvons maintenant évaluer l'impédance du court-circuit perturbateur au secondaire. L'écart par rapport à 1 observé sur la Figure 2-26b est dû à une impédance qui peut être déterminée à l'aide de (2.20). En plus d'une résistance, le court circuit présente une inductance qui diminue lorsque la fréquence augmente. Le fil utilisé est relativement gros (diamètre  $0.8\text{ mm}$ ) et des courants induits apparaissent à partir de  $30\text{ kHz}$ .

La Figure 2-28 présente le modèle du court-circuit et son effet sur l'indice de confiance. Pour calculer sa valeur, l'impédance du court-circuit est directement retranchée de la mesure en court-circuit ( $Z_{1\_2cc\_30}$ ) car on considère que pour les fréquences qui nous intéressent pour ce couplage de fuite ( $>10\text{ kHz}$ ), l'impédance magnétisante est shuntée par l'impédance de l'enroulement secondaire à laquelle s'ajoute l'impédance recherchée du court circuit.

Le rapport est encore très différent de 1 pour des fréquences inférieures à  $1\text{ kHz}$  mais ceci est dû aux mesures vues de l'enroulement secondaire qui sont trop imprécises en basse fréquence.

La partie inductive qui nous intéresse vraiment (entre  $10\text{kHz}$  et  $4\text{MHz}$ ) correspond assez bien à la théorie : il montre une variation autour de 1 de plus ou moins 10%. L'expression de cette impédance peut nous être utile pour évaluer le rapport du coupleur de fuite.

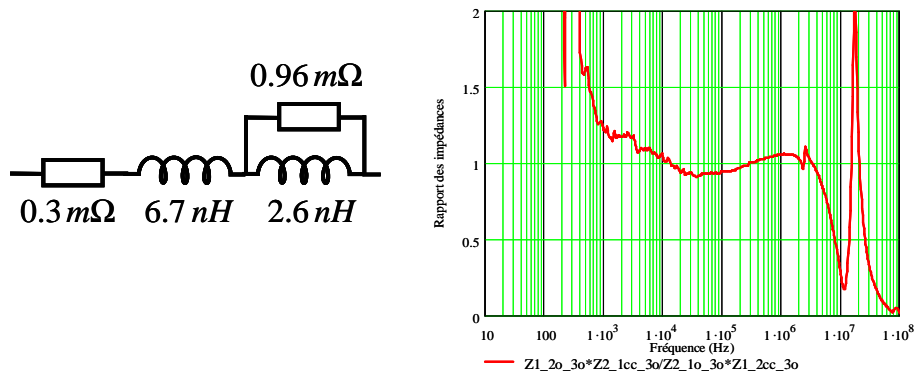


Figure 2-28 : Modèle de court circuit et validation

### III.3.b.v. Coupleur de fuite

Pour caractériser le couplage des inductances de fuites auxiliaire et secondaire, il faut court-circuiter l'enroulement primaire. Les mesures qui nous sont utiles sont  $m6$ ,  $m8$ ,  $m11$  et  $m12$ .

Nous avons vu préalablement que le couplage entre ces deux enroulements semblait faible. Le rapport de transformation de ce coupleur  $\eta_{sa}$  peut cependant être calculé en considérant que le transformateur de fuite possède deux enroulements (2.14) ; on peut considérer que c'est le cas lorsque le primaire est court-circuité car aux fréquences qui nous intéressent ici ( $>10\text{kHz}$ ), la résistance de l'enroulement primaire n'a plus d'impact. Le résultat est présenté sur la figure (Figure 2-29).

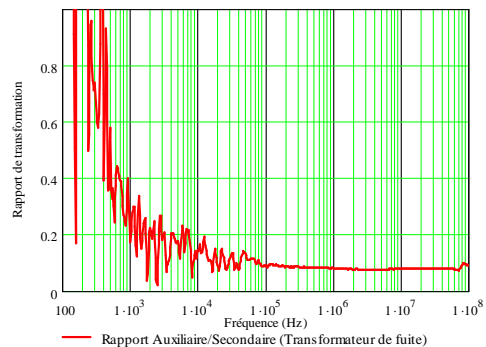


Figure 2-29 : Rapport de transformation coupleur de fuite

Le rapport obtenu est réel et quasi-constant à partir de  $100\text{kHz}$ . Une incertitude persiste concernant le signe des rapports de transformation. En effet, si les sens des couplages Primaire/Secondaire et Primaire/Auxiliaire découlent de la construction du composant, celui du transformateur de fuite n'est pas défini. Il est parfois positif, parfois négatif et ce signe ne se déduit pas d'un raisonnement simple. Les mesures d'impédances que nous réalisons ne donnent que le carré de ce rapport. Un essai supplémentaire, la mesure d'un gain en tension doit être effectuée pour déterminer le sens de ce couplage.

Le coefficient de couplage du transformateur de fuite est de l'ordre de  $k = 0.4$ . Ce couplage a été calculé en fonction des valeurs déterminées précédemment. Lorsque le coefficient de couplage est faible, les deux inductances couplées sont presque découplées. Bien entendu, une tension proportionnelle au courant primaire est induite aux bornes du secondaire, mais dans le transformateur de fuite, le plus important ce sont les impédances qui s'insèrent en série. On peut dans ce cas supprimer ce coupleur.

### III.3.b.vi. Schéma final

Le dernier paramètre du schéma inductif est la résistance équivalente de pertes parallèles qui peut être déterminée en fonction de la première résonance lors de la mesure de l'impédance à vide. Après tous ces calculs le circuit inductif final obtenu est présenté sur la Figure 2-30.

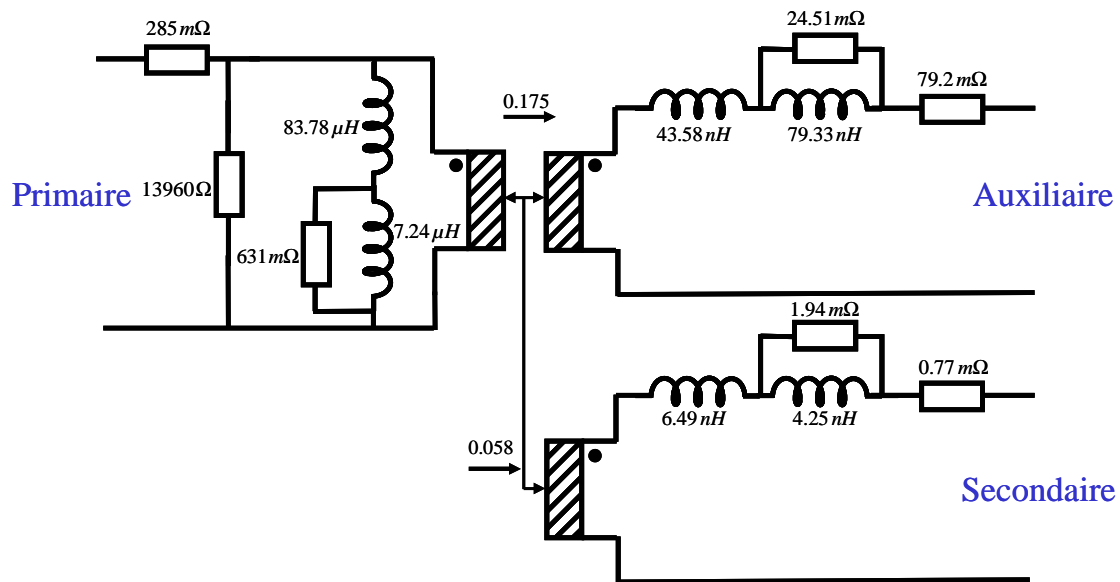


Figure 2-30 : Modèle inductif du transformateur

### III.3.b.vii. Validation du modèle inductif

Ce modèle a été introduit sous Pspice pour être validé. Toutes les configurations de mesures ont été simulées et comparées aux mesures réelles. Les résultats de la Figure 2-31 sont six différents exemples avec 0, 1 ou 2 courts circuits.

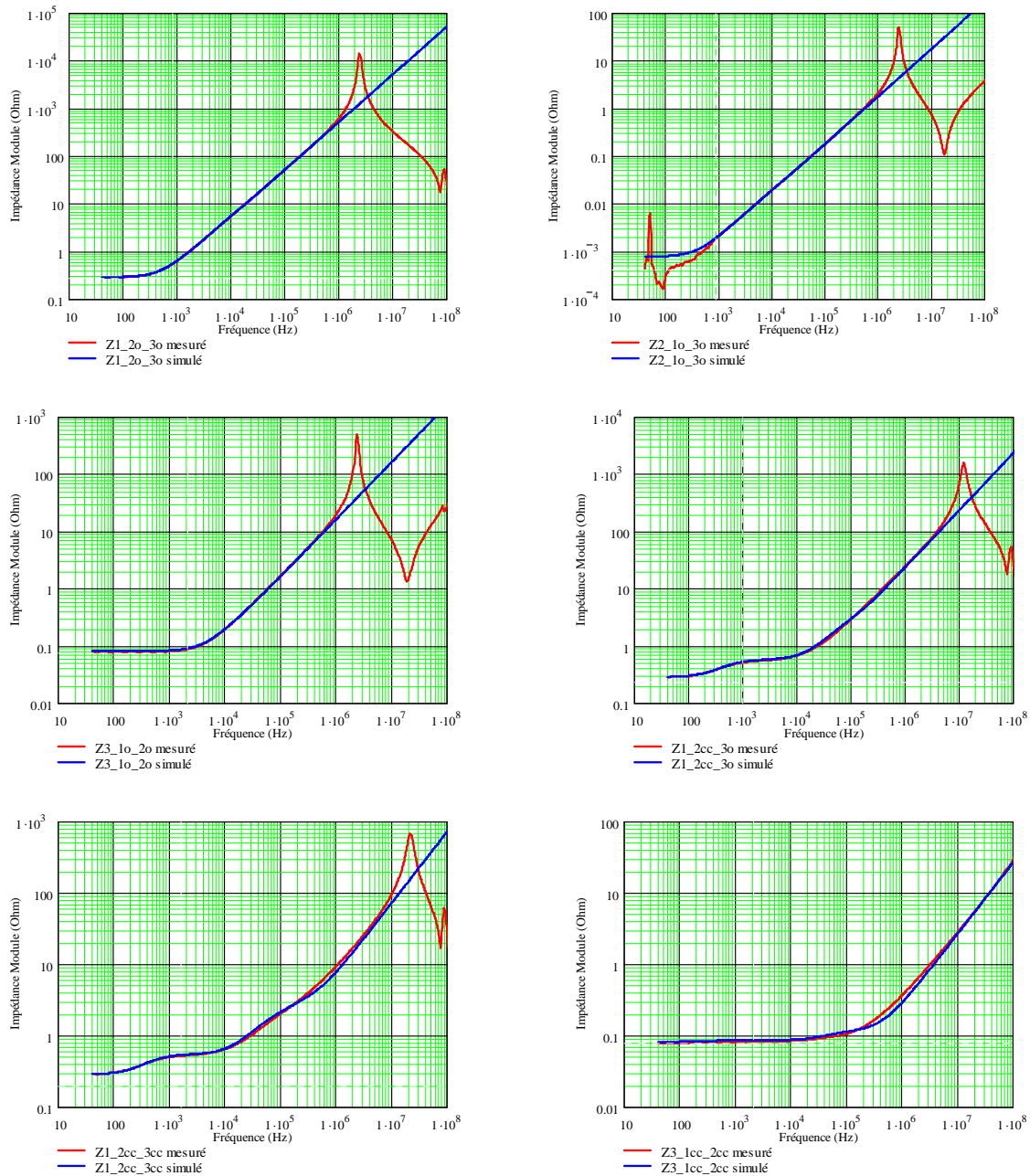


Figure 2-31 : Validation du modèle inductif

Le modèle donne de bons résultats. Les différences qui apparaissent au niveau inductif sont dues à une modélisation insuffisamment précise des variations d'inductance et des pertes. Il faudrait ajouter des cellules Lp-Rp pour tenir compte, de façon plus fine, de la décroissance des inductances de fuite en fonction de la fréquence (Figure 2-27). Les principales différences apparaissent dans le cas extrême où deux enroulements sont court-circuités en même temps. Cette configuration n'étant pas courante, nous n'avons pas voulu compliquer nos modèles pour tenir compte finement de ces variations inductives.



### III.3.c. Conclusion sur la généralisation

L'exemple du transformateur à trois enroulements que nous avons traité a fourni l'occasion d'étendre la méthode de caractérisation que nous avons mise au point pour un transformateur à deux enroulements. Si le nombre d'enroulement augmente, la technique reste la même. Il faut, dans un premier temps, caractériser deux par deux les enroulements par des mesures à vide et des mesures avec un court-circuit. Quel que soit le nombre d'enroulements, il faut ensuite caractériser de façon plus précise le transformateur de fuite. Pour ce faire, l'enroulement magnétisant est court-circuité et la détermination continue en s'appuyant sur des mesures d'impédances avec au moins deux courts-circuits. S'il reste encore des couplages influents à caractériser, l'enroulement "magnétisant" du transformateur de fuite est lui aussi court-circuité et d'autres mesures, avec au moins trois courts-circuits, sont réalisées, etc. En pratique, nous n'avons encore jamais eu à exploiter des mesures avec trois courts-circuits ou plus.

## IV. VERS UN MODELE COMPLET... L'ASPECT CAPACITIF

Nous avons vu que les parties inductives et capacitives d'un composant magnétique pouvaient être séparées et représentées par deux circuits indépendants mis en parallèle. Les modèles inductifs qui ont été obtenus dans le paragraphe précédent sont fiables. Nous allons maintenant nous intéresser à l'aspect capacitif, de façon à obtenir un modèle de transformateur valable sur une large plage fréquentielle, s'étendant au delà des premières résonances.

Sans reprendre toute la théorie et la méthode de détermination des capacités développées par notre équipe [SCHELLMANN-99-1], nous allons nous intéresser à l'aspect pratique concernant un transformateur à trois enroulements afin de disposer d'une méthode rapide pour obtenir ses capacités parasites.

### IV.1. Quelques rappels

A chaque fois que des surfaces métalliques proches se font faces, des capacités apparaissent. Dans un transformateur, les diverses spires de tous les enroulements sont à l'origine d'une multitude de capacités et il n'est pas facile, en analysant les choses de façon locale, de savoir combien de capacités doivent être introduites et où elles doivent l'être dans le circuit équivalent.

L'approche adoptée par notre équipe est globale. De même que l'ensemble des effets électrostatiques d'une inductance se manifeste, en première approximation, par une seule capacité en parallèle, le comportement électrostatique d'un transformateur se traduit par la présence, en parallèle sur le système magnétique, d'un système électrostatique. Nous supposons en outre que ce système est linéaire et stationnaire et, puisque l'état d'un transformateur à  $n$  enroulements se

décrit par  $2n-1$  différences de potentiels indépendantes, la matrice capacité (symétrique) du système électrostatique comprend  $n \cdot (2n-1)$  éléments indépendants.

Une première représentation du couplage électrostatique du transformateur est obtenue en plaçant une capacité entre toutes les paires de bornes du transformateur (soit  $n \cdot (2n-1)$  capacités). Les valeurs positives ou négatives de ces capacités sont ajustées pour que le dispositif stocke, en permanence, la même énergie électrostatique que le transformateur. Ainsi, 15 capacités bien choisies donnent une très bonne image du comportement d'un transformateur à trois enroulements (Figure 2-32).

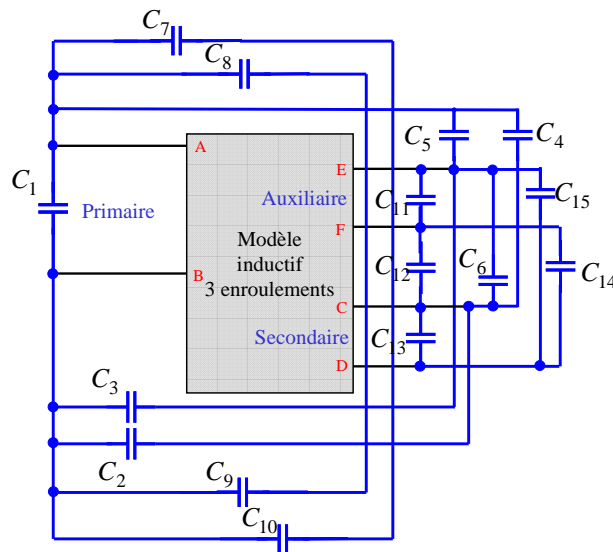


Figure 2-32 : Modèle capacitif complet à 15 condensateurs

Dans le cas où certains couplages magnétiques sont très serrés, une approximation permet de simplifier la représentation et de faciliter l'identification. En effet, dès que deux enroulements sont très fortement couplés, la tension aux bornes de l'un est quasiment proportionnelle aux bornes de l'autre : ces tensions ne sont plus indépendantes. Par exemple, lorsque les trois enroulements d'un transformateur sont fortement couplés, on peut dire, en première approximation, que son état électrostatique est décrit par trois différences de potentiels indépendantes. Le circuit équivalent (Figure 2-33) se contente alors de six capacités (nombre d'éléments indépendants d'une matrice symétrique  $3 \times 3$ ).

Pour trois et plus d'enroulements, on procède de la même façon pour positionner les capacités des modèles "allégés". On place premièrement une capacité entre les bornes de l'enroulement primaire. On relie ensuite tous les points chauds des autres enroulements, en partant de chaque borne primaire, par une capacité (soit  $(n-1) + (n-1)$  capacités au total). Il reste enfin à relier entre eux tous les autres points chauds des enroulements restant par une capacité. Au final, cette méthode nous donne 6 capacités pour un transformateur à trois enroulements, 10

pour un transformateur à quatre enroulements, 15 pour un transformateur à cinq enroulements (soit autant que le nombre d'éléments indépendants dans la matrice)...

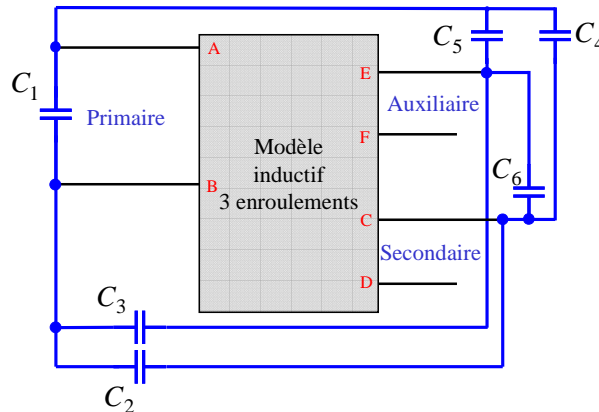


Figure 2-33 : Modèle capacitif à 6 condensateurs

Cette représentation simplifiée peut, si nécessaire, être complétée par l'adjonction de 9 autres capacités pour atteindre la représentation complète. En cas de couplages forts, cet ajout est souvent inutile : les différences ne se manifestant que sur les 2<sup>ème</sup> ou 3<sup>ème</sup> résonances, c'est-à-dire au-delà de la fréquence de travail.

#### IV.2. Aspect pratique pour un transformateur à trois enroulements

En théorie, pour un transformateur 3 enroulements, il faut donc 15 capacités pour représenter l'aspect capacitif du transformateur (5 potentiels sont indépendants donc la matrice capacité est une matrice 5x5 symétrique qui possède 15 éléments indépendants). En pratique, nous avons vu que seulement 6 capacités (Figure 2-33) suffisent pour rendre compte des principaux phénomènes.

Pour déterminer les 6 capacités du schéma ci-dessus, il est nécessaire d'avoir 6 équations indépendantes découlant de différentes mesures. Dans un premier temps, les capacités inter-enroulements sont identifiées. Pour ce faire, les trois enroulements sont court-circuités ce qui ramène le schéma à un système électrostatique à trois points. En reliant deux de ces points à chaque mesure, trois mesures indépendantes sont possibles (Figure 2-34). Dans un deuxième temps on mesure des capacités sans court circuit d'enroulement. Dans ces conditions, seule l'inductance magnétisante intervient. La fréquence de résonance est mesurée et les capacités sont calculées en fonction de la valeur de l'inductance magnétisante à cette fréquence.

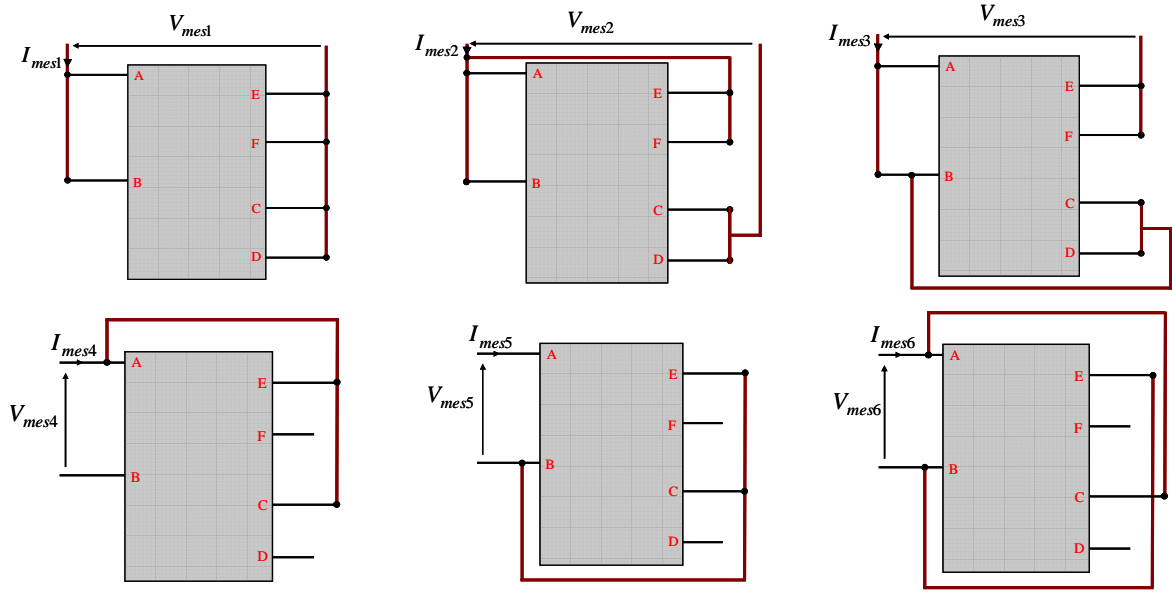


Figure 2-34 : Six mesures capacitives

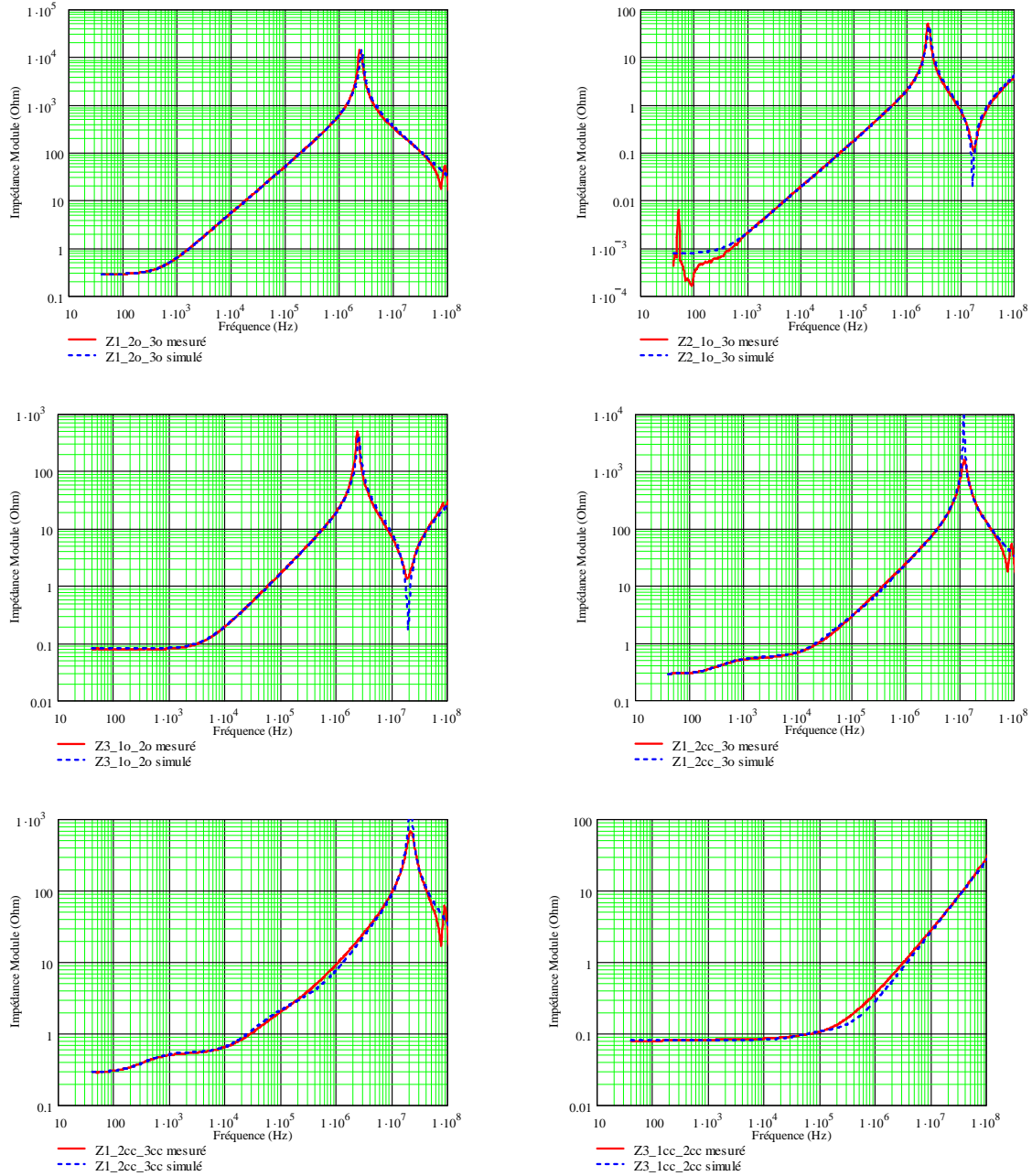
Ces 6 mesures nous donnent un système de 6 équations à 6 inconnues (2.22) qui se résout aisément (2.23).

$$\begin{cases} C_{m1} = C_2 + C_3 + C_4 + C_5 \\ C_{m2} = C_2 + C_4 + C_6 \\ C_{m3} = C_3 + C_5 + C_6 \\ C_{m4} = C_1 + C_2 + C_3 \\ C_{m5} = C_1 + C_4 + C_5 \\ C_{m6} = C_1 + C_2 + C_5 + C_6 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2}(C_{m4} + C_{m5} - C_{m1}) \\ C_2 = \frac{1}{2}(C_{m1} - C_{m3} + C_{m6} - C_{m5}) \\ C_3 = \frac{1}{2}(C_{m3} + C_{m4} - C_{m6}) \\ C_4 = \frac{1}{2}(C_{m2} + C_{m5} - C_{m6}) \\ C_5 = \frac{1}{2}(C_{m1} - C_{m2} + C_{m6} - C_{m4}) \\ C_6 = \frac{1}{2}(C_{m2} + C_{m3} - C_{m1}) \end{cases} \quad (2.23)$$

### IV.3. Validation pour le transformateur trois enroulements

Ces mesures de capacités ont été réalisées lors de mon DEA [MARGUERON-03]. Les six valeurs de condensateurs ont été déterminées à partir des relevés d'impédances présentés ci-dessus.



avec  $C_1 = -2.6 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 37.4 \text{ pF}$ ,  $C_3 = 28.6 \text{ pF}$ ,  $C_4 = 385.9 \text{ pF}$ ,  $C_5 = 16.6 \text{ pF}$ ,  $C_6 = 52.8 \text{ pF}$

**Figure 2-35 : Validation du modèle complet**

La Figure 2-35 présente, pour diverses configurations, la comparaison du module des impédances mesurées avec celui déduit de la simulation du modèle sous Pspice. Les résultats issus du modèle concordent très bien avec les valeurs mesurées. Plus précisément, toutes les fréquences des premières résonances parallèles sont bien localisées. Pour les impédances à vide, les amplitudes des résonances sont identiques à celles mesurées. Concernant les autres résonances (série pour les impédance à vide ou parallèle pour celles en court circuit), les fréquences sont bien évaluées, mais il subsiste un écart au niveau de l'amplitude. Ce dernier est essentiellement dû à la

simplicité du modèle adopté pour les inductances de fuite. Une cellule  $L_p$ - $R_p$ , c'est trop peu pour rendre compte précisément de la variation fréquentielle des inductances due aux courants induits. Cette diminution s'accompagne toujours d'une croissance de la résistance série et c'est cette résistance qui amortit les résonances. Avec plus de cellules, la variation résistive serait mieux représentée et l'amortissement du modèle serait plus conforme à celui observé expérimentalement. L'ajustage manuel d'un nombre plus grand de cellules est très long. Nous envisageons, par la suite, de réaliser cette opération automatiquement en utilisant un algorithme d'optimisation.

Ces modèles obtenus sont précis jusqu'à plus de  $10\text{ MHz}$ . La fréquence fondamentale de fonctionnement de ce transformateur étant de  $250\text{ kHz}$ , le schéma est valable jusqu'à l'harmonique de rang 40.

## V. VALORISATION D'UNE CARACTERISATION H.F.

Les modèles de transformateurs semblent aptes à bien traduire leur comportement électrique. Nous avons eu l'occasion de tester l'intérêt de ce type de modèle au cours de la simulation d'une structure d'électronique de puissance. Ce travail a été l'objet d'un stage de master professionnel [MOREL-04], en collaboration avec THALES.

Sans entrer dans des détails techniques de la structure, le convertisseur s'appuie sur les structures FORWARD et FLYBACK dont il reprend les principes de base. Il délivre  $50\text{ A}$  sous  $5\text{ V}$ . L'originalité de cette structure réside dans le fait que l'inductance FORWARD, normalement au secondaire, est ramenée au primaire. Cette inductance est en réalité l'inductance magnétisante d'un autre transformateur qui, en phase de restitution, permet de récupérer l'énergie stockée pendant la phase de FORWARD.

Le but de l'étude était d'évaluer l'intérêt que pouvait apporter notre modèle de transformateur par rapport à un autre, plus classique, qui était utilisé jusque là pendant les simulations de structure. Ce dernier était simplement composé d'une résistance série, d'une inductance magnétisante, de deux coupleurs et de deux inductances de fuite "fixes" (Figure 2-36). Notre nouveau modèle "H.F." tient compte des variations fréquentielles des inductances et des aspects capacitifs qui lient les trois enroulements.

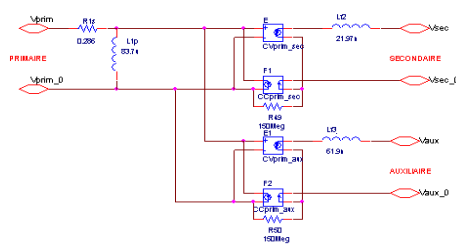


Figure 2-36 : Modèle classique

Conformément à l'observation, il montre que des oscillations hautes fréquences apparaissent sur le courant. Cependant, leur amplitude et leur fréquence ne coïncident pas parfaitement avec la mesure.

L'inductance de fuite de l'enroulement secondaire est très importante puisqu'elle influe sur des minimums de tensions et sur la fréquence des oscillations du courant. Celles qui ont été identifiées, que ce soit pour le modèle H.F. ou pour celle fixe du modèle classique, sont très imprécises puisqu'elles ne sont que de quelques  $nH$ .

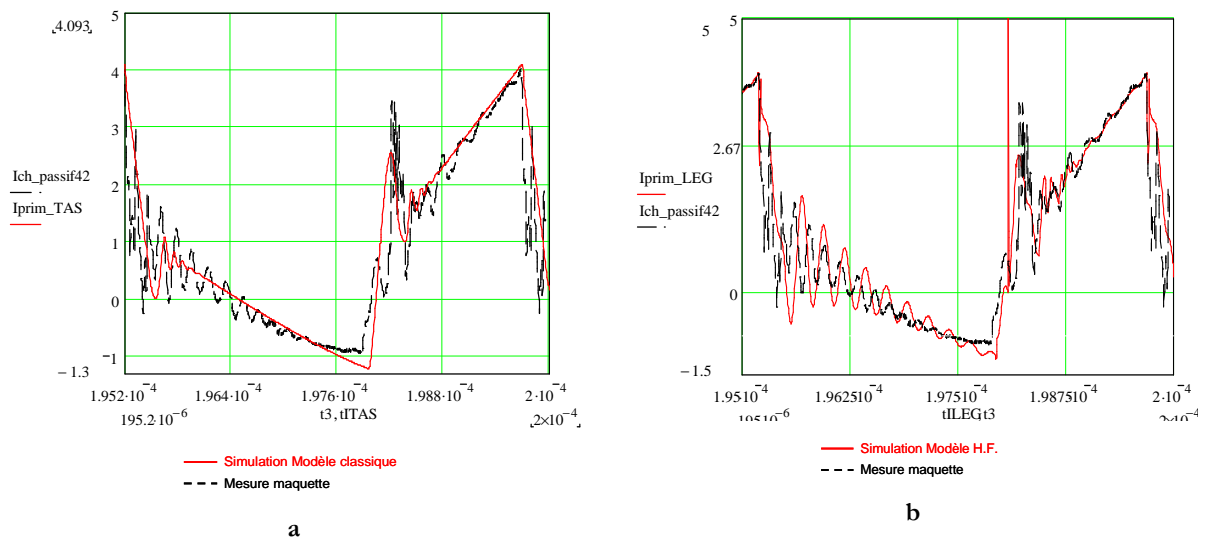


Figure 2-37 : Comparaison de formes d'ondes simulées et mesurées

a : Modèle classique | b : Modèle H.F.

Les résultats obtenus sur charge passive ne sont pas aussi concluant que nous l'aurions imaginé. Le modèle de transformateur H.F. permet de faire apparaître des phénomènes que le modèle simplifié ne montrait pas, même si ces derniers restent approximatifs. En fait, des problèmes autres que ceux concernant la modélisation du transformateur sont apparus lors de cette étude. Les modèles des autres composants de la structure ont posé des problèmes, car soit ils n'étaient pas disponibles, soit ils n'étaient pour la plupart, pas très élaborés (exemple : paramètres inductifs et capacitifs des MOS, représentation de la charge passive...). Les impédances parasites de câblage ont aussi joué un rôle important. Elles n'étaient pas prises en

compte lors des simulations, or, vu l'ordre de grandeur des impédances au secondaire du transformateur, leur influence est loin d'être négligeable !

Pour conclure brièvement, il semble que disposer d'un modèle précis de transformateur soit très intéressant, mais il faut que ce dernier soit accompagné par des modèles fiables de tous les composants de la structure de puissance, câblage compris. Dans l'alimentation testée, beaucoup trop d'imprécisions existaient au niveau des modèles de composants et des éléments de câblage parasites non pris en compte, pour modéliser la totalité du circuit.

N'oublions pas non plus de regarder objectivement les mesures : non seulement leur précision est limitée, mais en plus, l'introduction des sondes perturbe notablement le montage [CAUFFET-92].

## VI. CONCLUSION

Une méthode pratique de détermination des éléments inductifs du schéma équivalent d'un transformateur à  $n$  enroulements a été mise au point. Elle est basée uniquement sur des mesures d'impédances. Le modèle obtenu est intéressant puisqu'il tient compte des variations fréquentielles des différentes inductances.

Toute la caractérisation s'effectue uniquement à l'aide de mesures d'impédances à vide et en court-circuit, ce qui correspond aux zones extrêmes de fonctionnement pour un transformateur. Toutes les mesures effectuées sont choisies de telle façon qu'elles nous apportent soit le maximum d'informations soit la meilleure précision, soit les deux combinés. Les relevés d'impédances que nous réalisons sont souvent imprécis lorsqu'ils concernent des inductances et des résistances faibles. Un grand nombre de précautions, notamment au niveau des compensations, des fils d'amenée et des courts-circuits, a été présenté afin de s'affranchir de toutes ces imprécisions. En outre, nous avons introduit l'indice de confiance qui est un excellent repère pour évaluer la qualité des mesures et détecter les problèmes.

La méthode d'identification a été appliquée à deux transformateurs (à deux et à trois enroulements) et elle est généralisable à un nombre quelconque d'enroulements. Les modèles inductifs obtenus sont fiables jusqu'à plusieurs dizaines de  $MHz$  lorsqu'ils sont associés à leurs homologues capacitifs.

Ces schémas équivalents s'avèrent très utiles pour effectuer des simulations précises en électronique de puissance, à condition d'être associés à des modèles aussi précis pour tous les autres composants, notamment pour les interrupteurs.



Le circuit équivalent du transformateur planar à trois enroulements a été amélioré pour avoir une référence en vue du développement de formules analytiques. Les valeurs trouvées pour les divers éléments sont celles qu'il nous faudra retrouver par des calculs analytiques.

Cette détermination a été suivie d'autres concernant des composants plus performants et plus puissants. Les résistances des enroulements secondaires étant de l'ordre de quelques dixièmes de  $m\Omega$  et les inductances en court circuit de quelques  $nH$ , les mesures au pont sont, malgré les précautions draconiennes prises, à leur limite de sensibilité. Il faudra s'en souvenir quand nous envisagerons de comparer la valeur calculée d'un élément du circuit équivalent avec sa valeur identifiée expérimentalement.

## ***CHAPITRE 3 : Calculs analytiques des paramètres statiques du transformateur de fuites***



## I. INTRODUCTION

La prédétermination des inductances de fuites est un enjeu important pour le monde industriel. En effet, au sein d'un convertisseur, les fuites d'un transformateur jouent un rôle capital lors des phases de commutation. Conformément à la demande industrielle qui, à terme, vise l'optimisation automatique des composants, notre objectif ici, est de parvenir à cette prédétermination par des moyens analytiques. Comme toujours, pour ce type d'approche, des approximations sont nécessaires. Celles retenues ici sont issues de deux observations faites au cours de la simulation, sous Flux3D® [FLUX], d'un transformateur de type EP13. Ces observations seront présentées par la suite.

Les prémices de ces travaux ont été menés en collaboration avec David Magot lors de sa thèse. Les premiers résultats ont été présentés dans [MAGOT-04-1] et [MAGOT-04-2].

### I.1. Définition des inductances de fuites

Le schéma équivalent inductif d'un transformateur deux enroulements peut être représenté par deux inductances, trois résistances et un coupleur parfait (Figure 3-1).

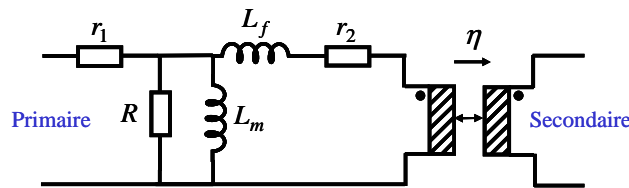


Figure 3-1 : Schéma équivalent transformateur deux enroulements

Avec :

- $r_1$  : Résistance de l'enroulement primaire
- $r_2$  : Résistance de l'enroulement secondaire (ramenée au primaire)
- $L_m$  : Inductance magnétisante
- $L_f$  : Inductance de fuite (ramenée au primaire)
- $R$  : Résistance de pertes fer
- $\eta$  : Rapport de transformation du coupleur parfait

Si le couplage entre le primaire et le secondaire du transformateur est fort ( $k$  tendant vers 1), le rapport de transformation  $\eta$  est pratiquement égal au rapport du nombre de spires des deux enroulements et l'inductance de fuite est beaucoup plus faible que l'inductance magnétisante. L'influence de  $L_f$  apparaît, sur une mesure d'impédance (Figure 3-2) lorsque l'enroulement secondaire est court-circuité. Cette mesure peut être effectuée sur une certaine

plage de fréquences (zone 4). Les autres zones sont dominées respectivement par d'autres composants : résistance primaire (zone 1), inductance magnétisante (zone 2), résistance des deux enroulements (secondaire ramené au primaire) (zone 3) et capacités (zone 5). En dehors de la zone 4, l'inductance de fuite est masquée par au moins un autre composant.

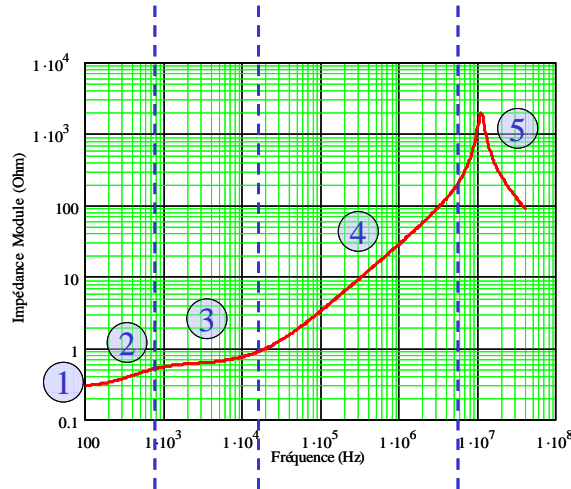


Figure 3-2 : Mesure d'impédance et zones caractéristiques

Si les deux enroulements (Figure 3-1) sont parcourus par des courants de sens opposés dont le rapport est égal au rapport du nombre de spires, le courant dans l'inductance magnétisante s'annule. Cette situation se rencontre lorsque la fréquence est assez élevée et que l'enroulement secondaire est court-circuité. Les ampères tours sont alors compensés et l'énergie magnétique est intégralement stockée dans l'inductance de fuite (3.1).

$$W = \frac{1}{2} L_f I^2 \quad (3.1)$$

## I.2. Pourquoi est-il important d'évaluer un tel paramètre ?

Les inductances de fuites jouent un rôle déterminant lors des commutations des structures d'électronique de puissance. Contrairement aux inductances magnétisantes, il n'est pas aisé de prédéterminer leurs valeurs par calcul. Généralement, les inductances de fuite sont mesurées en phase de post conception ou évaluées antérieurement par des simulations "éléments finis", très coûteuses en temps de calcul.

Connaissant leur impact sur les commutations (surtensions, pertes supplémentaires...), les concepteurs doivent prévoir les valeurs des inductances de fuites pour être certain que leurs montages fonctionneront correctement, avec des pertes raisonnables lors des changements d'état des composants actifs.

L'objectif de cette partie est de trouver une formulation analytique donnant, pour de nombreuses formes d'enroulements, la valeur de l'inductance de fuite avec une précision suffisante (de l'ordre de quelques %).

### I.3. Etat de l'art

Les méthodes de calcul des inductances de fuite sont basées sur la détermination de l'énergie magnétique stockée, dans le cas où les Ampère tours se compensent. Cette énergie peut être calculée à partir de l'expression du champ  $\vec{H}$  (3.2) ou, à partir de l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}$  (3.3).

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mu \cdot \vec{H}^2 \cdot dV \quad (3.2)$$

$\vec{H}$  : Champ magnétique  
 $\mu$  : Perméabilité du milieu

$$W = \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{J} \cdot dV \quad (3.3)$$

$\vec{A}$  : Potentiel vecteur  
 $\vec{J}$  : Densité de courant

L'intégrale (3.2) doit être étendue jusqu'à l'infini, tandis que l'intégrale (3.3) se limite à la région dans laquelle la densité de courant  $\vec{J}$  n'est pas nulle, c'est à dire à la région occupée par les conducteurs. Pour simplifier ces calculs, les conducteurs sont généralement supposés rectilignes (système 2D plan). Dans cette situation, la composante de l'induction parallèle aux conducteurs est nulle.

En admettant cette hypothèse géométrique, deux méthodes sont traditionnellement utilisées pour calculer des inductances de fuite. Pour la première, le calcul est issu d'une simplification [FERRIEUX-99] qui consiste à négliger une des composantes du champ. Ensuite, pour des enroulements concentriques, le profil du champ magnétique est tracé dans une "configuration d'inductances de fuites" (c'est-à-dire lorsque les Ampère tours se compensent) en s'appuyant sur le théorème d'Ampère. La valeur de l'énergie magnétostatique (3.2) est alors calculée et la valeur de l'inductance de fuite (3.1) en découle. Cette méthode est très pratique dans le cas d'enroulements ayant la même "hauteur" dans la fenêtre, ce qui est assez fréquent pour les transformateurs bobinés standards. La formule qui en résulte est simple et adaptée à l'optimisation. Pour des géométries plus complexes, notamment lorsque les enroulements n'ont pas la même hauteur (cas des transformateurs planars), cette méthode est inapplicable. En effet, dans ces transformateurs, pratiquement toutes les couches de circuit imprimé sont différentes; elles présentent des nombres de conducteurs et des agencements différents. Les hypothèses de calculs évoqués ci-dessus, sont donc loin de la réalité.

La deuxième méthode de calcul repose sur un calcul de double série de Fourier [SCHUTZ-99]. La résolution de l'équation de Poisson 2D à l'intérieur d'une fenêtre de transformateur, effectuée en séparant les variables et en s'appuyant sur les doubles séries de Fourier, permet d'évaluer le champ dans la fenêtre. La composante du champ, négligée dans la précédente méthode, est ici prise en compte. Pour la résolution de l'équation de Poisson on a besoin d'une condition aux limites : on suppose que les lignes de flux sont perpendiculaires aux bords de la fenêtre de bobinage. Cette hypothèse n'est pas toujours acceptable, notamment pour les bobinages dont les enroulements ne sont pas complètement entourés par le circuit magnétique. Autre inconvénient, la décomposition en série de Fourier converge lentement, surtout en présence de fonctions à variations brusques: conducteurs méplats, fenêtre rectangulaire. Vu que la décomposition est double, si 10 harmoniques sont nécessaires dans un sens et 10 dans l'autre, la série inclut déjà une centaine de termes...

Les deux méthodes précédentes sont pratiques pour obtenir des expressions analytiques approchées, mais leurs hypothèses fondatrices ne s'appliquent pas à tous les cas. Une méthode plus générale a donc été développée pour évaluer l'inductance de fuite d'un transformateur à deux enroulements.

## II. METHODE DE CALCUL DES INDUCTANCES DE FUITE STATIQUES

La méthode mise au point dans cette partie repose sur les expressions exactes du potentiel vecteur et des deux composantes de l'induction créés par des conducteurs rectilignes de section rectangulaire. Nous allons montrer que, lorsque le courant total qui la traverse est nul, le champ dans une fenêtre de transformateur s'en déduit facilement.

### II.1. Simulation Flux3D® et observation

Un transformateur de type EP a été simulé sous le logiciel Flux3D®.

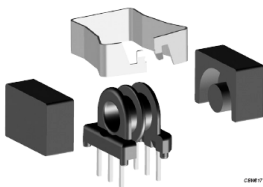


Figure 3-3 : Noyau de type EP

Ce transformateur EP [FERROXCUBE] possède la particularité d'avoir un circuit magnétique qui n'est pas fermé (Figure 3-3). Il possède une jambe centrale cylindrique et seule une partie des enroulements est entourée par du matériau magnétique. L'autre est dans l'air et la jambe centrale du noyau s'en approche sur un seul côté.

Les densités d'énergie ont été représentées sur deux sections orthogonales passant par l'axe de la jambe centrale (Figure 3-4). Celle de gauche est dans l'air tandis que celle de droite est entourée de matériau magnétique.

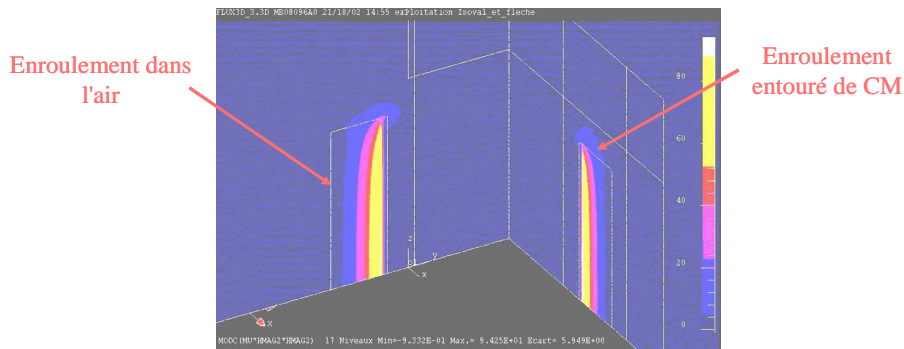


Figure 3-4 : Densité d'énergie dans un transformateur EP13

Deux remarques s'imposent lors de l'exploitation de ces résultats :

- Premièrement, il semblerait que l'énergie magnétostatique soit négligeable dans le noyau magnétique. En effet, la densité d'énergie qui parvient à la surface du ferrite est au moins vingt fois plus petite que le maximum (localisé entre les deux enroulements primaire/secondaire). La faible incidence du noyau magnétique est confirmée par le fait que la densité d'énergie dans le plan où l'enroulement est dans l'air a le même aspect que dans le plan où l'enroulement est entouré de ferrite.
- Dans un deuxième temps, une densité d'énergie de même profil a été trouvée, en 2D, pour deux conducteurs rectangulaires traversés par des courants égaux et opposés (Figure 3-5).

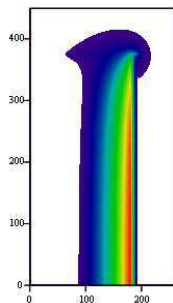


Figure 3-5 : Densité d'énergie calculée pour 2 conducteurs rectangulaires rectilignes

Ce tracé fait apparaître les mêmes formes que dans le cas du transformateur (Figure 3-4). Ce calcul ayant été effectué en supposant les conducteurs rectilignes, la courbure autour de la jambe centrale du circuit magnétique ne semble pas déterminante pour la forme de la densité d'énergie. Les calculs n'ont donc pas, à première vue, besoin d'être effectués en trois dimensions.

Le bien fondé de ces remarques, concernant l'influence du circuit magnétique, ainsi que celle de la courbure des enroulements, sera établi au cours du traitement des applications (cf. § III).

## II.2. Hypothèses de calcul

Dans le cas où tous les matériaux sont linéaires, homogènes, isotropes, nous allons tirer profit des observations ci-dessus, en formulant trois hypothèses.



- Les calculs sont réalisés en 2D plan. Les courants sont perpendiculaires aux sections des conducteurs et ils sont uniformes sur ces sections.
- Le dispositif est en situation de "mesure" d'inductance de fuites, c'est-à-dire avec un nombre total d'Ampère tours égal à zéro, ou, en 2D avec un courant total dans la fenêtre égal à zéro.
- Les enroulements sont constitués soit de conducteurs rectangulaires soit de groupements de fils pouvant être assimilés à des conducteurs rectangulaires parcourus par des courants uniformes.

### II.3. Principe de calcul

Le champ d'un conducteur rectiligne (Figure 3-6), infini, de section rectangulaire  $2a \cdot 2b$ , parcouru par un courant uniforme  $I$  est connu. Dans un repère  $Oxyz$  dont l'axe  $z$  est parallèle au conducteur les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont parallèles aux faces de la section, le potentiel vecteur est dirigé suivant  $Oz$  et l'induction lui est perpendiculaire. En outre, la champ ne varie pas suivant  $Oz$ .

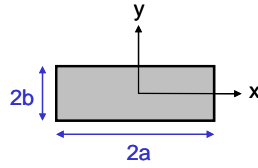


Figure 3-6 : Conducteur méplat

Pour calculer le champ dans un fenêtre de transformateur, il faut d'abord ajouter les champs dus à tous les conducteurs rectangulaires, ou ensembles de conducteurs assimilables à de tels conducteurs (Figure 3-7). Ainsi, l'influence de chacun d'entre eux est sommée pour obtenir les expressions globales de  $A_z$ ,  $B_x$  et  $B_y$  (3.4) (3.5) (3.6).

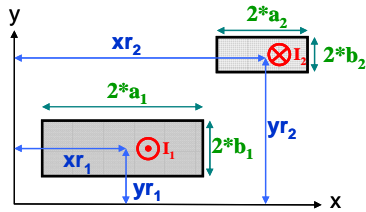


Figure 3-7 : Influence de plusieurs conducteurs

$$A_z(x, y) = \sum_{k=1}^{Nbr\_cond} A_{z_k}(x - xr_k, y - yr_k) \quad (3.4)$$

$$B_x(x, y) = \sum_{k=1}^{Nbr\_cond} B_{x_k}(x - xr_k, y - yr_k) \quad (3.5)$$

$$B_y(x, y) = \sum_{k=1}^{Nbr\_cond} B_{y_k}(x - xr_k, y - yr_k) \quad (3.6)$$

avec  $Nbr\_cond$  le nombre de conducteurs

Ensuite, la prise en compte du circuit magnétique, dont l'influence rappelons-le est faible, se fait par la méthode des images magnétiques. Comme le courant total dans la fenêtre est nul, le

champ qu'elle crée décroît assez vite avec la distance et seules les images proches doivent être prises en compte.

Une densité d'énergie par unité de longueur (3.7) ou (3.8) est ensuite calculée à partir des formules (3.2) ou (3.3).

$$Wl = \frac{1}{2\mu_0} \iint B^2(x, y) \cdot dx dy \quad (3.7) \quad B : \text{Module de l'induction}$$

$$Wl = \frac{1}{2} \iint A_z \cdot J_z \cdot dx dy \quad (3.8) \quad \begin{array}{l} A_z : \text{Potentiel vecteur} \\ J_z : \text{Densité de courant uniforme} \end{array}$$

Le domaine d'intégration des relations (3.7) et (3.8) n'est pas le même. En effet, si l'intégrale de l'induction doit être réalisée dans tout l'espace, celle sur le potentiel vecteur se limite aux conducteurs. Le champ décroît lorsqu'on s'éloigne des conducteurs si bien que l'intégration de  $B$  croît de plus en plus lentement lorsqu'on élargit la surface d'intégration, sans jamais atteindre la valeur exacte de la densité d'énergie. En revanche, l'intégrale sur le potentiel vecteur (3.8) atteint sa valeur finale dès que tous les conducteurs sont englobés.

Pour obtenir l'énergie totale du système, il faut ensuite trouver un chemin moyen, correspondant à une spire dite "moyenne", pour effectuer l'intégrale sur la troisième dimension. Etant donné que le calcul est en 2D plan, il suffit de multiplier la valeur obtenue précédemment par une longueur. Enfin, la formule (3.1) donne la valeur de  $L_f$  en partant de l'énergie.

## II.4. Potentiel vecteur et induction d'un méplat infini

L'expression du potentiel vecteur est issue de la formulation PEEC [RUEHLI-74], [CLAVEL-96].

### II.4.a. Expressions analytiques

Pour un conducteur rectiligne infini, une distribution uniforme du courant sur la section rectangulaire  $2a \cdot 2b$  donne un potentiel vecteur dont l'expression est :

$$\begin{aligned} A_z(x, y) = \frac{-\mu_0 \cdot I}{16 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \cdot & [(x-a)(y-b) \ln((x-a)^2 + (y-b)^2) + (x-a)^2 \arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right) + (y-b)^2 \arctan\left(\frac{x-a}{y-b}\right) \\ & - (x+a)(y-b) \ln((x+a)^2 + (y-b)^2) - (x+a)^2 \arctan\left(\frac{y-b}{x+a}\right) - (y-b)^2 \arctan\left(\frac{x+a}{y-b}\right) \\ & - (x-a)(y+b) \ln((x-a)^2 + (y+b)^2) - (x-a)^2 \arctan\left(\frac{y+b}{x-a}\right) - (y+b)^2 \arctan\left(\frac{x-a}{y+b}\right) \\ & + (x+a)(y+b) \ln((x+a)^2 + (y+b)^2) + (x+a)^2 \arctan\left(\frac{y+b}{x+a}\right) + (y+b)^2 \arctan\left(\frac{x+a}{y+b}\right)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cette équation (3.9) peut s'écrire sous une forme plus compacte :

$$A_z(x, y) = \frac{-\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot 2a \cdot 2b} \left[ F(X, Y) \right]_{X=x-a}^{X=x+a} \Big|_{Y=y-b}^{Y=y+b} \quad (3.10)$$

avec  $F(X, Y) = XY \ln(X^2 + Y^2) + X^2 \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) + Y^2 \arctan\left(\frac{X}{Y}\right)$

Sachant que  $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$ , les composantes de l'induction s'écrivent :

$$B_x(x, y) = \frac{\mu_0 \cdot I}{16 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \cdot \left[ 2 \cdot (y-b) \left( \arctan\left(\frac{x+a}{y-b}\right) - \arctan\left(\frac{x-a}{y-b}\right) \right) - 2 \cdot (y+b) \left( \arctan\left(\frac{x+a}{y+b}\right) - \arctan\left(\frac{x-a}{y+b}\right) \right) \right. \\ \left. + (x+a) \cdot \ln\left(\frac{(x+a)^2 + (y-b)^2}{(x+a)^2 + (y+b)^2}\right) + (x-a) \cdot \ln\left(\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2}\right) \right] \quad (3.11)$$

$$B_y(x, y) = -\frac{\mu_0 \cdot I}{16 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \cdot \left[ 2 \cdot (x-a) \left( \arctan\left(\frac{y+b}{x-a}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right) \right) - 2 \cdot (x+a) \left( \arctan\left(\frac{y+b}{x+a}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x+a}\right) \right) \right. \\ \left. + (y+b) \cdot \ln\left(\frac{(x-a)^2 + (y+b)^2}{(x+a)^2 + (y+b)^2}\right) + (y-b) \cdot \ln\left(\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x+a)^2 + (y-b)^2}\right) \right] \quad (3.12)$$

#### II.4.b. Validation des expressions

Les expressions de  $B_x$  et  $B_y$  (3.11) (3.12) peuvent être confrontées aux valeurs résultant de simulations Flux2D. Dans ce but, nous nous intéressons à l'agencement de conducteurs décrit par la Figure 3-8 avec deux enroulements alimentés: Le primaire (34 conducteurs) et l'auxiliaire (3 conducteurs), parcourus respectivement par un courant de  $0.5A$  et de  $-17/3 A$ . Le courant total est nul et les conditions de "calcul d'inductance de fuite" sont réunies. Les conducteurs ne sont pas, pour l'instant, entourés de circuit magnétique et ils sont considérés comme infiniment longs, ceci afin de respecter les hypothèses permettant d'obtenir les expressions analytiques.

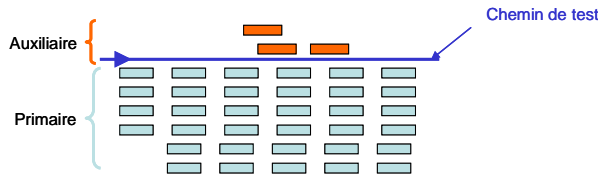


Figure 3-8 : Agencement de conducteurs méplats

Les composantes du champ ( $B_x$  et  $B_y$ ) sont calculées sur le chemin de test de la Figure 3-8, de façon analytique et par simulation. La comparaison des résultats, présentée sur la Figure 3-9, valide les expressions analytiques.

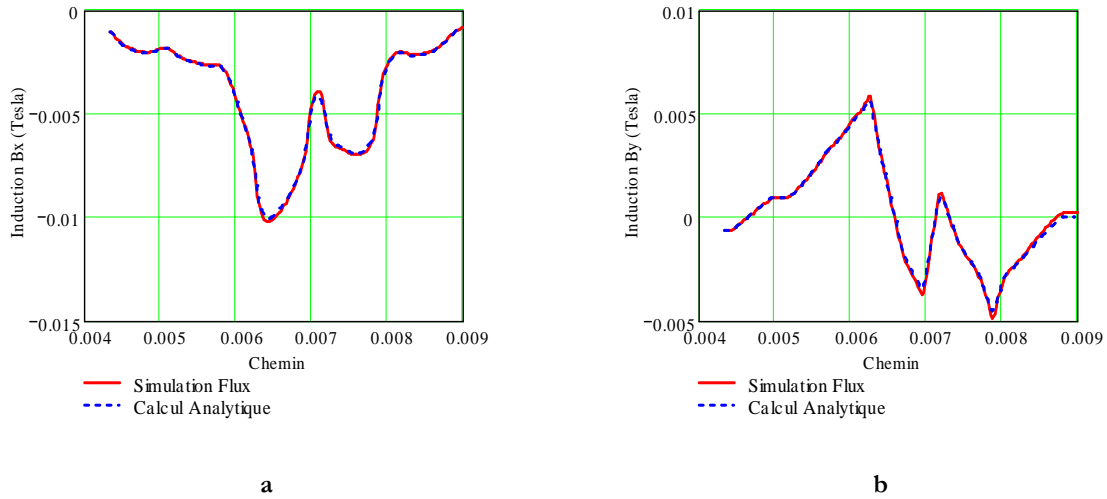


Figure 3-9 : Comparaison Calcul analytique/Simulation Flux2D pour l'induction sur le chemin de test

a :  $B_x$  | b :  $B_y$

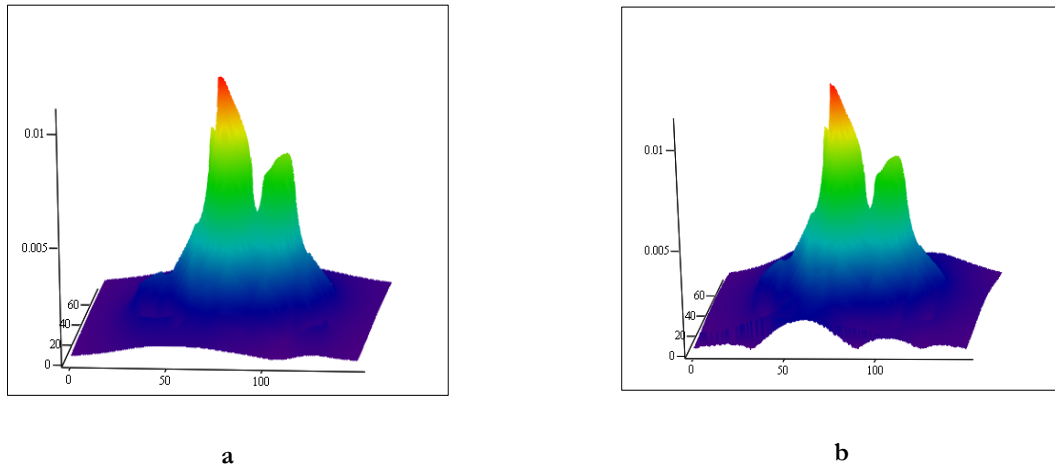
Partant de ce bon résultat, obtenu pour des conducteurs seuls, nous allons maintenant introduire la méthode des images magnétiques afin de tenir compte des matériaux magnétique entourant la fenêtre de transformateur.

## II.5. Prise en compte du circuit magnétique

Nous avons vu (Figure 3-4) qu'en configuration "d'inductance de fuite", l'énergie magnétique dépend peu de la présence d'un matériau magnétique autour de la fenêtre. En effet, la valeur de l'énergie sur le bord de la fenêtre était très faible et très peu d'énergie pénétrait à l'intérieur du circuit magnétique. Sur la Figure 3-10 nous comparons, pour une fenêtre entière de transformateur planar, l'allure du module de l'induction  $B$  pour une simulation FEM et un calcul analytique. Ce dernier est réalisé en tenant compte uniquement de la description des conducteurs alors que la simulation FEM est réalisé avec les conducteurs entourés par un circuit magnétique sans pertes ( $\mu_r = 2300$ ).

A première vue, la concordance est bonne, notamment là où l'induction est forte. Toutefois, sur la simulation (Figure 3-10b), des ondulations marquées apparaissent près des bords de la fenêtre alors qu'elles sont plus faibles selon le calcul analytique lorsque seuls les conducteurs sont considérés (Figure 3-10a). Ceci montre que, près des bords, le circuit magnétique renvoie une partie non négligeable de l'induction incidente. La variation relative est plus faible lors du calcul d'énergie, puisque l'induction est élevée au carré (3.7).

Pour estimer l'énergie de fuite de façon plus précise, nous allons tenir compte, au moins approximativement, de l'incidence du noyau magnétique.



**Figure 3-10 : Comparaison module de B dans une fenêtre de transformateur**

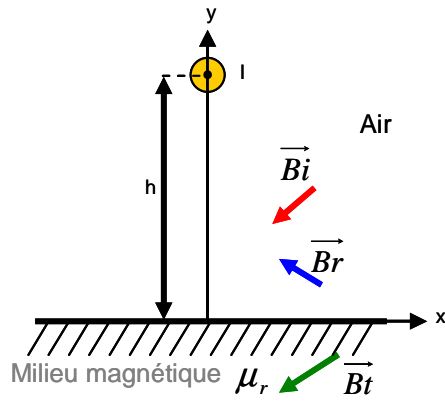
**a : Calcul analytique | b : Simulation Flux2D**

La technique des "images magnétiques" peut être utilisée pour évaluer l'effet des matériaux magnétiques [STRATTON-41]. Dans un premier temps, nous ferons le calcul en supposant que le matériau magnétique se comporte comme s'il était infiniment épais. Nous chercherons ensuite à quelles conditions cette approximation est acceptable en comparant ses résultats avec le calcul des images pour un matériau magnétique d'épaisseur finie.

L'établissement de la méthode des "images magnétiques" repose sur l'obtention de la position et de la valeur du courant à faire circuler, en remplacement du ferrite, pour respecter les conditions de continuité (conservation du  $H$  tangentiel et du  $B$  normal) à l'interface entre les milieux différents, vide et magnétique.

#### II.5.a. Circuit magnétique supposé "infini"

Un fil est positionné à une distance  $h$  d'un milieu magnétique semi infini de perméabilité  $\mu_r$  (Figure 3-11). Des travaux sur la prise en compte de matériaux magnétiques supposés infinis ont déjà été réalisés pour des composants planars [ROSHEN-88] [ROSHEN-90-2].



**Figure 3-11 : Influence d'un milieu magnétique infini**

Pour le fil placé en  $(0, h)$  et parcouru par un courant  $I$ , trois types d'inductions cohabitent :

- L'induction incidente  $\vec{B}_i$  qui correspond à celle émise par le fil.
- L'induction réfléchie par le milieu magnétique  $\vec{B}_r$ .
- L'induction  $\vec{B}_t$  qui est transmise à travers la surface séparant les deux milieux.

La démonstration de cette méthode des images est présentée dans l'Annexe I. L'équation de Laplace 2D est résolue et sa solution générale, associée aux conditions de continuité à la surface séparant les deux milieux, permet de déduire les courants images équivalents. Elles peuvent se résumer de la façon suivante :

- L'induction incidente  $\vec{B}_i$  est l'induction propre du fil positionné en  $(0, h)$  et parcouru par le courant  $I$ .
- L'induction réfléchie  $\vec{B}_r$  correspond à l'induction créée par un fil positionné en  $(0, -h)$  et parcouru par un courant  $I \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$ .
- L'induction  $\vec{B}_t$  est égale à l'induction incidente multipliée par un facteur  $\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}$ .

Cette démonstration s'étend sans difficulté à des conducteurs rectilignes de section quelconque et elle s'applique quelle que soit la perméabilité du matériau magnétique. Le problème se complique un peu lorsque le conducteur se situe entre deux matériaux magnétiques parallèles. Des images d'images, en nombre infini, doivent alors être invoquées. Heureusement, des approximations sont acceptables. Non seulement nous savons que le circuit magnétique n'intervient que pour 4 à 5% de la valeur cherchée, mais, en outre, nous avons dans la fenêtre un courant total nul. Le champ créé par l'ensemble des conducteurs décroît donc vite avec la distance (pas de terme polaire) ce qui nous autorise à négliger l'influence des images lointaines. Après quelques essais concernant une fenêtre entourée sur ses quatre côtés, nous avons remarqué que la limitation à 8 images (Figure 3-13) donnait un très bon résultat alors que la prise en compte de seulement 4 images (Figure 3-12) conduisait à une sur estimation sensible de l'induction.

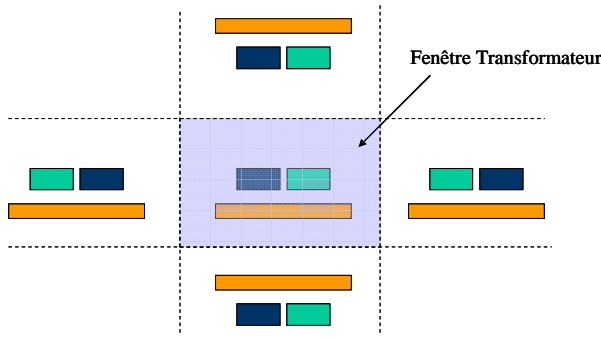


Figure 3-12 : Quatre images magnétiques

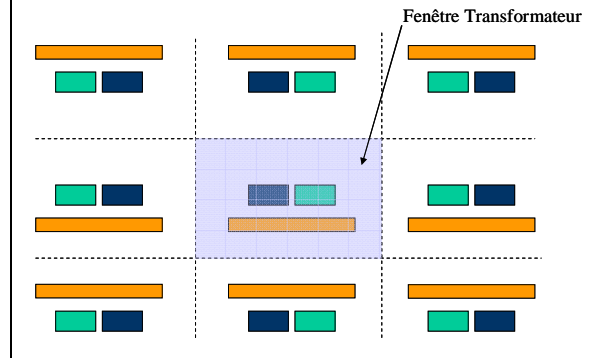


Figure 3-13 : Huit images magnétiques

### II.5.b. Circuit magnétique d'épaisseur finie

Reprenons le problème du fil fin parallèle à un milieu magnétique mais admettons cette fois que le matériau magnétique présente une épaisseur finie  $ep$  (Figure 3-14). Trois zones apparaissent:

- le milieu '1', composé d'air dans lequel est plongé le fil.
- le milieu '2', magnétique avec une perméabilité  $\mu_r$ .
- le milieu '3', composé d'air, situé de l'autre côté du milieu magnétique.

Antérieurement, des travaux ont été menés pour prendre en compte l'épaisseur finie de matériaux magnétiques dans la méthode des images. Pour les composants planar, on peut citer [ROSHEN-90-1] qui donne des expressions, basées sur les travaux de [SILVESTER-68], permettant de calculer cette influence pour une inductance constituée d'une spirale de courant positionnée au dessus d'un substrat magnétique d'épaisseur finie.

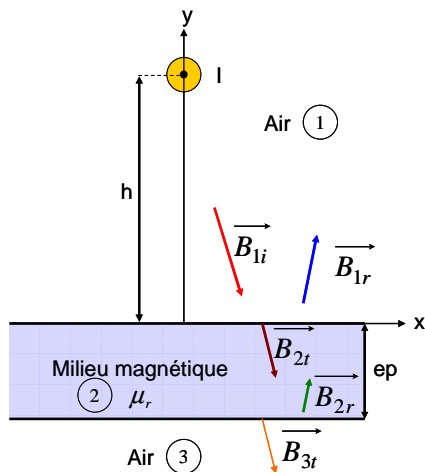


Figure 3-14 : Influence d'un milieu magnétique d'épaisseur finie

Pour le fil placé en  $(0, h)$  dans un milieu appelé '1' et parcouru par un courant  $I$ , cinq inductions doivent être distinguées :

- L'induction incidente  $\vec{B}_{1i}$  qui correspond à celle émise par le fil dans le milieu '1'.
- L'induction réfléchie  $\vec{B}_{1r}$  par le milieu magnétique '2' dans '1'.
- L'induction  $\vec{B}_{2t}$  qui est transmise dans le milieu '2'.
- Une nouvelle induction  $\vec{B}_{2r}$  qui est réfléchie par la 2<sup>ème</sup> face du ferrite
- Une dernière induction  $\vec{B}_{3t}$  qui est transmise dans le milieu '3'.

La démonstration menant aux expressions des différents champs est présentée dans l'Annexe II. Pour une fenêtre de transformateur, le champ réfléchi  $\vec{H}_{lr}$  est celui qui est renvoyé vers la fenêtre. Il donne, avec le champ incident  $H_{li}(x, y, I)$ , la valeur du champ total dans lequel sont plongés les conducteurs. Il peut se mettre sous la forme générale (3.13) :

$$H_{lr} = \frac{1}{2\pi} \left[ H_{li} \left( x, y + h, I \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right) - \frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} H_{li} \left( x, y + h + 2nep, I \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \right) \right] \quad (3.13)$$

Cette expression se décompose en 2 termes :

- Le 1<sup>er</sup> est, comme pour le cas milieu infini, le champ créé par un fil positionné en  $(0, -h)$  et parcouru par un courant  $I \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$ .
- Le 2<sup>nd</sup> correspond à la somme des champs créés par une infinité de fils positionnés en  $(0, -h - 2n \cdot ep)$  et parcourus par des courants  $I \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n}$ . Ce terme est pondéré par un facteur  $-\frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1}$ . Cette somme est due aux réflexions multiples du champ entre les bords du ferrite.

#### II.5.c. Milieu infini ou épaisseur finie ?

Le premier terme de l'équation (3.13) est identique à l'image que nous avons d'un milieu magnétique infini. Pour le second terme, le facteur  $\left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n}$  est forcément inférieur à un et il diminue quand l'image considérée recule. Ainsi, au fur et à mesure que  $n$  croît, le courant image est plus faible et il est situé de plus en plus loin la surface. Son incidence dans la fenêtre est donc de plus en plus petite. Le modèle "milieu infini" doit donc, dans certaines situations, être suffisant.

Pour chercher les approximations acceptables, nous avons étudié le champ créé par un fil fin rectiligne parcouru par 5 A et placé à  $h = 50 \text{ mm}$  d'une plaque infinie de ferrite. Nous avons choisi de comparer le module de l'excitation obtenue dans l'air, contre la surface, en  $x = 50 \text{ mm}$  Figure 3-14.



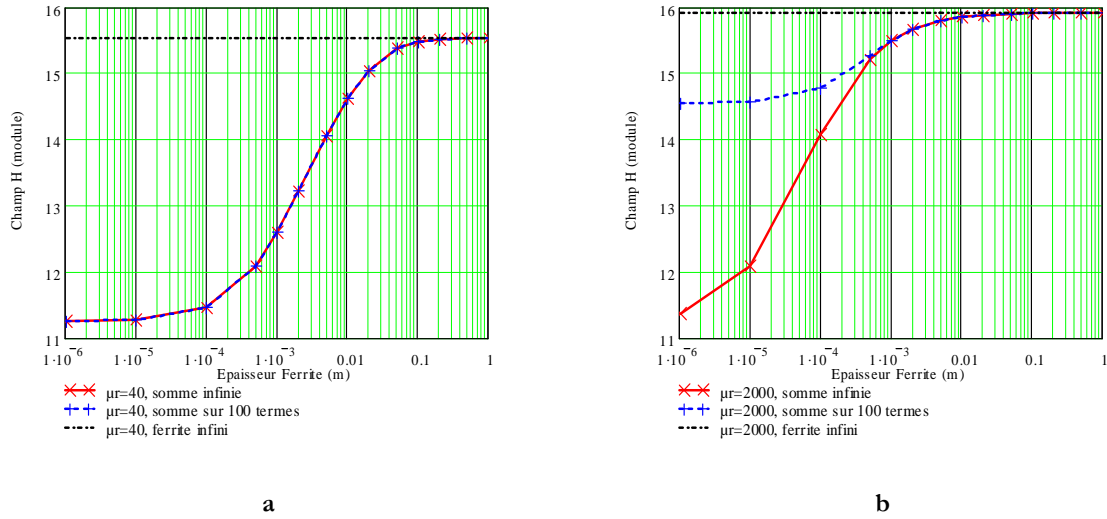


Figure 3-15 : Influence de l'épaisseur du matériau sur le module de l'excitation près de la surface

a :  $\mu_r=40$  | b :  $\mu_r=2000$

La comparaison des deux courbes montre d'abord que, pour une épaisseur infinie, le module de l'excitation ne varie que de 3% (16 contre 15.5) lorsque  $\mu_r$  passe de 40 à 2000. Nous voyons ensuite qu'au-delà d'une certaine épaisseur, la plaque donne le même résultat que le milieu semi infini. En notant la variation du module de  $H$  provoquée par le passage d'une épaisseur nulle à une épaisseur infinie, on peut prendre comme repère l'épaisseur pour laquelle 90% de cette variation est atteinte. On conclut alors qu'au-delà d'une épaisseur d'1mm pour  $\mu_r = 2000$  et de 20mm pour  $\mu_r = 40$ , la plaque peut être considérée comme infiniment épaisse.

On retiendra qu'en pratique il est inutile de tenir compte de l'épaisseur lorsque la perméabilité est de l'ordre de 2000. En revanche, prendre en compte l'épaisseur lorsque  $\mu_r$  est de l'ordre de 40 est souvent justifié. Pour cette perméabilité, le champ correct est obtenu en tenant compte de 20 à 25 images.

Maintenant que les matériaux magnétiques peuvent être pris en compte de façon analytique, il reste à calculer l'énergie de fuite en combinant les champs initiaux créés par les conducteurs et ceux renvoyés par le ferrite.

## II.6. Calcul de densité d'énergie et intérêt du potentiel vecteur

Connaissant l'expression de l'induction et du potentiel vecteur du champ total dans la fenêtre du transformateur, la densité d'énergie par unité de longueur peut être calculée à l'aide de (3.7) et (3.8). L'intégrale double de l'induction doit être étendue à tout l'espace alors que celle du potentiel vecteur se limite aux régions où le courant n'est pas nul, c'est-à-dire dans les

conducteurs. Il est donc plus facile d'obtenir la bonne valeur à l'aide de cette seconde formulation. L'intégration peut être menée soit numériquement, soit analytiquement.

### II.6.a. Intégration numérique

Ce type d'intégration est indispensable pour comparer les résultats analytiques aux résultats issus de simulations f.e.m.. Le même algorithme d'intégration est appliqué dans les deux cas.

Prenons une fenêtre discrétisée (Figure 3-16) puis calculons en chacun de ses rectangles, les différentes fonctions.

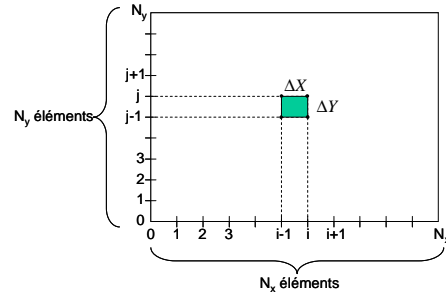


Figure 3-16 : Discrétisation d'une fenêtre

Pour l'induction, sur cette grille  $N_x \cdot N_y$ , l'intégrale (3.7) devient l'intégrale numérique (3.14). Par rapport à une intégration sur un espace infini, le résultat obtenu ici est un résultat par défaut puisque l'énergie au delà de la grille n'est pas nulle.

$$Wl = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \left[ \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \sum_{j=1}^{N_y} \left( B_{i,j}^2 + B_{i-1,j}^2 + B_{i,j-1}^2 + B_{i-1,j-1}^2 \right) \right] \right] \cdot \Delta X \Delta Y \quad (3.14)$$

Pour le potentiel vecteur, une grille doit être définie sur chaque conducteur. Cette méthode d'intégration prend un temps de calcul important et nous amène à préférer une intégration analytique.

### II.6.b. Intégration analytique

Le calcul analytique de la densité d'énergie est basé sur l'expression du potentiel vecteur (3.9). Pour expliquer la démarche, nous détaillons un exemple à deux conducteurs (Figure 3-7) avant de généraliser à n conducteurs.

#### II.6.b.i. Exemple pour deux conducteurs

Pour l'exemple de la Figure 3-7, nous nous intéressons à deux conducteurs d'indice "1" et "2" ayant respectivement :

- une largeur  $2a_1$  et  $2a_2$

- une épaisseur  $2b_1$  et  $2b_2$
- un décentrage de  $(xr_1, yr_1)$  et  $(xr_2, yr_2)$
- un courant  $I_1$  et  $I_2$

Dans ce cas, la combinaison de (3.4) et (3.8) nous donne l'expression globale de l'énergie par unité de longueur :

$$\begin{aligned} Wl &= \frac{1}{2} \iint J \cdot [A_1(x - xr_1, y - yr_1) + A_2(x - xr_2, y - yr_2)] \cdot dx dy \\ &= \frac{1}{2} J_1 \iint_{Scond1} (A_1 + A_2) \cdot dx dy + \frac{1}{2} J_2 \iint_{Scond2} (A_1 + A_2) \cdot dx dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

La primitive double  $G$  de  $F$  (et donc du potentiel vecteur  $A$  (3.10)) suivant  $x$  et  $y$  est accessible analytiquement (3.16).

$$G(X, Y) = -\frac{1}{24} (X^4 - 6X^2Y^2 + Y^4) \cdot \ln(X^2 + Y^2) + \frac{1}{3} XY \left( X^2 \arctan\left(\frac{X}{Y}\right) + Y^2 \arctan\left(\frac{X}{Y}\right) \right) - \frac{7}{24} X^2 Y^2 \quad (3.16)$$

Le calcul de (3.15) se mène donc en calculant la variation de  $G$  suivant  $x$  et  $y$  sur la surface des conducteurs.

$$\begin{aligned} Wl &= \frac{1}{2} J_1 \iint_{Scond1} (A_1 + A_2) \cdot dx dy + \frac{1}{2} J_2 \iint_{Scond2} (A_1 + A_2) \cdot dx dy \\ &= \frac{1}{2} J_1 \left[ G_1 + G_2 \right]_{xr_1 - a_1}^{xr_1 + a_1} \left[ yr_1 - b_1 \right]^{yr_1 + b_1} + \frac{1}{2} J_2 \left[ G_1 + G_2 \right]_{xr_2 - a_2}^{xr_2 + a_2} \left[ yr_2 - b_2 \right]^{yr_2 + b_2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le potentiel vecteur créé par un conducteur centré en  $(0,0)$  étant lui-même issu d'une double variation de la fonction  $F$  (3.10), il faut en tenir compte dans l'expression de  $G$ . Le positionnement de chaque conducteur en  $(xr_k, yr_k)$  doit aussi être pris en compte. L'expression (3.17) peut ainsi s'écrire suivant (3.18).

$$\begin{aligned} Wl &= \frac{1}{2} J_1 \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \left[ G_1(X - xr_1, Y - yr_1) \right]_{X=x+a_1}^{X=x-a_1} \left[ Y=y+b_1 \right]^{Y=y-b_1} - \frac{\mu_0}{4\pi} J_2 \left[ G_2(X - xr_2, Y - yr_2) \right]_{X=x+a_2}^{X=x-a_2} \left[ Y=y+b_2 \right]^{Y=y-b_2} \right]_{x=xr_1-a_1}^{x=xr_1+a_1} \left[ y=yr_1-b_1 \right]^{y=yr_1+b_1} \\ &+ \frac{1}{2} J_2 \left[ -\frac{\mu_0}{4\pi} J_1 \left[ G_1(X - xr_1, Y - yr_1) \right]_{X=x+a_1}^{X=x-a_1} \left[ Y=y+b_1 \right]^{Y=y-b_1} - \frac{\mu_0}{4\pi} J_2 \left[ G_2(X - xr_2, Y - yr_2) \right]_{X=x+a_2}^{X=x-a_2} \left[ Y=y+b_2 \right]^{Y=y-b_2} \right]_{x=xr_2-a_2}^{x=xr_2+a_2} \left[ y=yr_2-b_2 \right]^{y=yr_2+b_2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cette dernière équation donne l'expression de l'énergie, par unité de longueur, du dispositif présenté sur la Figure 3-7. L'étape suivante consiste à généraliser la formulation de ce calcul à  $Nbr\_cond$  conducteurs

### II.6.b.ii. Généralisation à un nombre quelconque de conducteurs

Pour un nombre  $Nbr\_cond$  de conducteurs, l'expression (3.18) se généralise et s'écrit :

$$Wl = -\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{n=1}^{Nbr\_cond} J_n \left[ \sum_{k=1}^{Nbr\_cond} \left( J_k \left[ G(X - xr_k, Y - yr_k) \right]_{X=x+a_k}^{X=x-a_k} \right) \right]_{Y=y+b_k}^{Y=y-b_k} \quad (3.19)$$

L'expression obtenue est la valeur exacte de l'énergie par unité de longueur du système de conducteurs auquel on s'intéresse. Dans le cas où la somme des courants est nulle, elle correspond à l'énergie de fuite emmagasinée par le transformateur.

### II.7. Chemin moyen

Toutes les énergies calculées précédemment sont évaluées pour une unité de longueur. Pour connaître l'énergie de fuite nécessaire au calcul de  $L_f$ , il faut donc multiplier les valeurs obtenues par une longueur moyenne. En première approximation cette longueur coïncide avec celle de la spire moyenne. Cependant, puisqu'il faut évaluer l'énergie totale, il semble judicieux d'évaluer cette longueur là où est le pic de densité d'énergie.

Dans les transformateurs planar, les fenêtres aller et retour sont rarement symétriques l'une de l'autre. Les inductions dans chaque fenêtre étant différentes, nous évaluons le chemin moyen en localisant le pic de densité d'énergie dans chaque fenêtre du transformateur. La distance séparant ces maximums est représentée par la variable  $d$  sur la Figure 3-17.

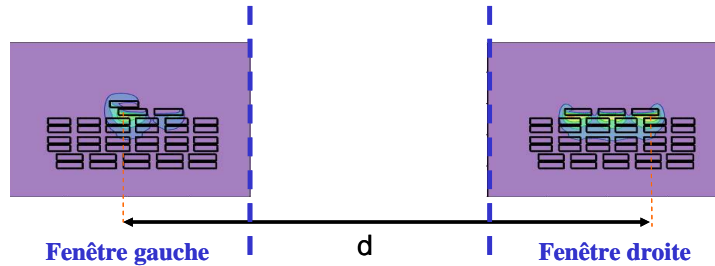
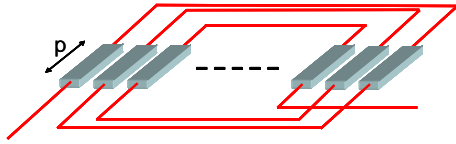


Figure 3-17 : Distance entre les maximums d'énergie de deux fenêtres

Vue la forme des spires, la profondeur  $p$  (Figure 3-18) est la seconde grandeur à prendre en compte pour calculer le chemin moyen. Sa longueur vaut donc  $l = 2d + 2p$ .



Les densités d'énergie étant différentes pour les deux fenêtres ( $W_G$ ,  $W_D$ ), la disparité est prise en compte en pondérant chacune par la moitié du chemin moyen.

Figure 3-18 : Profondeur des conducteurs

L'énergie totale se met donc sous la forme :

$$W = (p + d) \cdot W_G + (p + d) \cdot W_D \quad (3.20)$$

Cette expression, rapprochée de (3.1), mène à la valeur de l'inductance de fuite du transformateur.

## II.8. Synthèse de la méthode

Toutes les formules et méthodes présentées dans cette partie sont regroupées dans une feuille Mathcad® [MATHCAD] de calcul d'inductance de fuites. Cette feuille est présentée en Annexe III.

L'inductance de fuite d'un transformateur est calculée à partir de cinq évaluations distinctes de l'énergie qui sont proposées pour comparer les différents modes de calcul exposés dans ce chapitre:

- *1<sup>ère</sup> évaluation* : L'énergie est calculée à partir de l'induction  $B$  en réalisant l'intégrale de  $B^2 / \mu_0$  de façon numérique.
- *2<sup>ème</sup> évaluation* : L'énergie est calculée à partir du potentiel vecteur  $A$  en calculant l'intégrale de  $A \cdot J$  de façon numérique.
- *3<sup>ème</sup> évaluation* : L'énergie est calculée à partir du potentiel vecteur  $A$  en calculant l'intégrale de  $A \cdot J$  de façon analytique.
- *4<sup>ème</sup> évaluation* : L'énergie est calculée à partir du potentiel vecteur  $A$  en calculant l'intégrale de  $A \cdot J$  de façon analytique en tenant compte de 4 images magnétiques.
- *5<sup>ème</sup> évaluation* : L'énergie est calculée à partir du potentiel vecteur  $A$  en calculant l'intégrale de  $A \cdot J$  de façon analytique en tenant compte de 8 images magnétiques.

Le fichier est documenté et automatisé. La seule contrainte est de décrire par un tableau Excel ou un fichier texte, la géométrie des conducteurs et du circuit magnétique. Bien entendu, on peut se contenter de la 5<sup>ème</sup> évaluation qui est désormais la plus précise et la plus rapide.

Nous allons maintenant appliquer cette méthode à deux types de transformateur (bobiné et planar) afin de tester sa validité et ses limites.

### III. APPLICATION A UN TRANSFORMATEUR EP13

Nous allons maintenant confronter notre méthode de calcul à la réalité d'un transformateur "classique" bobiné. Les résultats obtenus seront comparés à ceux déduits des mesures et à ceux résultant de la méthode traditionnelle.

#### III.1. Description du transformateur

Le composant étudié est un transformateur d'isolation de rapport 1 composé de deux enroulements de 46 spires (Figure 3-19). L'isolation des enroulements est obtenue grâce à l'isolant plastique du fil secondaire. Le bobinage est réalisé sur un noyau de format EP13 réalisé en 3C90.

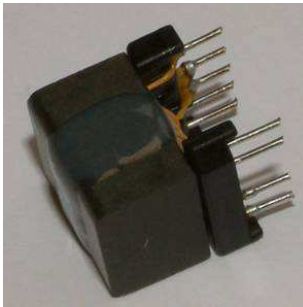


Figure 3-19 : Transformateur d'isolation

Les deux enroulements ont la même hauteur. Le primaire est bobiné sur un peu plus d'une couche; il est constitué de fils de cuivre de diamètre  $0.125\text{ mm}$ , l'émaillage portant le diamètre extérieur du fil à  $0.15\text{ mm}$ . Le secondaire, réalisé en fil de cuivre isolé au polyamide, est bobiné sur trois couches. Les diamètres respectifs du fil et du cuivre sont  $0.4\text{ mm}$  et  $0.2\text{ mm}$ .

La particularité de ce format de noyau magnétique (Figure 3-3) est qu'il ne couvre pas entièrement le bobinage du transformateur. La moitié environ de chaque spire est entourée de circuit magnétique tandis que l'autre est entourée d'air.

Nous avons déjà modélisé ce dispositif en trois dimensions (Figure 3-4). Pour le modéliser en deux dimensions (Figure 3-20), nous le décrivons par deux conducteurs rectangulaires adjacents, parcourus par des courants uniformes et opposés. Le primaire, qui n'inclut pas d'isolant plastique, est beaucoup plus fin que le secondaire. Pour l'intégration de  $BH$ , nous utiliserons deux grilles identiques pour la fenêtre gauche et la fenêtre droite. Le pas est suffisamment fin pour que le primaire soit décrit avec précision.

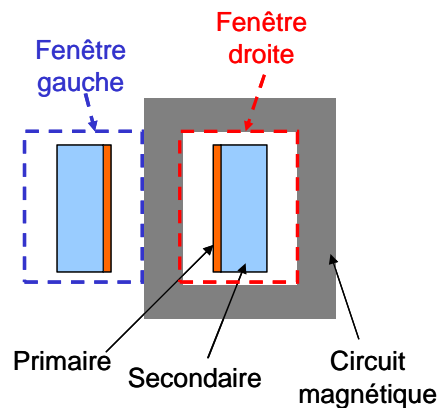


Figure 3-20 : Modélisation 2D

### III.2. Comparaison des énergies

Ce système est un bon test pour notre méthode de calcul. Il permet en effet, avec un dispositif simple, de tester le calcul d'inductance de fuite et d'étudier l'influence du circuit magnétique sur les calculs d'énergie. Les deux fenêtres, identiques d'un point de vue conducteur, diffèrent au niveau de leur environnement magnétique. On peut ainsi comparer les différentes méthodes d'intégration ( $AJ$  et  $B^2 / \mu_0$ ).

#### III.2.a. Simulation 3D et simplification en 2D

Ce transformateur a d'abord été modélisé sous Flux3D® par David Magot [MAGOT-04-2]. Au cours de cette simulation, l'énergie par unité de longueur sur une fenêtre a été calculée numériquement (3.14) (cf. § II.6.a) et comparée à nos simulations réalisées en deux dimensions (Tableau 3-1). Le but de ce calcul est d'évaluer l'impact de la courbure des enroulements.

	Fenêtre gauche	Fenêtre droite
<b>Simulation 3D</b>	$67.4 \mu J / m$	$70.0 \mu J / m$
<b>Simulation 2D</b>	$71.2 \mu J / m$	$73.8 \mu J / m$

Tableau 3-1 : Comparaisons simulations 2D / 3D pour une fenêtre

Les valeurs obtenues pour ce composant justifient notre choix puisque l'effet "3 dimensions" est faible (5% d'énergie en plus). La courbure des enroulements peut être négligée car des conducteurs rectilignes donnent à peu de choses près le même champ. Dans ce cas, les formules de la méthode PEEC sont adéquates. Ce tableau montre également que le circuit magnétique n'ajoute que 3.5% d'énergie lorsqu'il entoure les enroulements.

#### III.2.b. Intégration de l'énergie par $AJ$ et $BH$

Puisqu'elle n'inclue que deux conducteurs rectangulaires, cette simulation nous a permis de tester nos algorithmes d'intégration numérique. Nous nous en servons ici pour comparer les deux types d'intégrations  $AJ$  et  $BH$  (Tableau 3-2).

	Fenêtre gauche	Fenêtre droite
<b>Intégration BH</b>	$71.2 \mu J / m$	$73.8 \mu J / m$
<b>Intégration AJ</b>	$71.8 \mu J / m$	$73.9 \mu J / m$

Tableau 3-2 : Comparaison intégration de  $AJ$  et  $BH$  sur une fenêtre

Les valeurs obtenues à l'aide du potentiel vecteur (intégration sur chaque conducteur) sont supérieures à celles obtenues avec l'induction. L'intégration de l'induction devrait être étendue à l'infini pour fournir le même résultat. On note également que, pour la fenêtre entourée par le

3C90, très peu d'énergie est présente dans le circuit magnétique et à l'extérieur de celui-ci puisque les 2 intégrations donnent quasiment le même résultat.

### III.2.c. Simulations et calculs analytiques

Nous appliquons maintenant notre méthode de calcul analytique à la détermination de l'énergie de fuite. Les inductions sont calculées dans les deux fenêtres du transformateur en utilisant les formules PEEC et la méthode des images magnétiques (Tableau 3-3).

	Fenêtre gauche	Fenêtre droite
<b>Simulation numérique 2D</b>	$71.2 \mu J / m$	$73.8 \mu J / m$
<b>Analytique simple</b>	$63.0 \mu J / m$	
<b>Analytique avec image(s)</b>	$70.8 \mu J / m$ (1 image)	$77.2 \mu J / m$ (8 images)

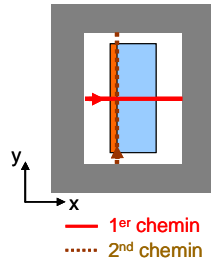
**Tableau 3-3 : Energie par calcul analytique (intégration BH)**

En l'absence du matériau magnétique, une densité d'énergie par unité de longueur de  $63.0 \mu J / m$  est présente dans les deux fenêtres puisqu'elles sont identiques. Si l'on compare cette valeur avec celles obtenues pour notre modèle numérique 2D (Tableau 3-1), une différence de l'ordre de 12% apparaît.

Tenons compte maintenant du circuit magnétique. Pour la fenêtre gauche, une seule image est considérée. Elle donne une valeur très proche de celle obtenue par simulation. Pour la fenêtre droite, huit images sont ajoutées aux conducteurs initiaux et la valeur d'énergie obtenue est un peu supérieure à la simulation. Cette différence a été évoquée lorsque la technique des images magnétiques a été introduite. Le fait d'utiliser huit images a tendance à surestimer l'énergie. Il faudrait tenir compte de plus d'images pour réduire cette surestimation, mais sur le plan pratique, la précision obtenue actuellement nous semble suffisante.

L'évaluation précédente nous a permis d'obtenir l'énergie globale contenue par une fenêtre de transformateur. Nous allons maintenant tester le bien fondé de nos approximations de façon plus locale. Pour cela, nous observons l'induction dans la fenêtre droite, en traçant, sur deux chemins (Figure 3-21), la variation du champ prépondérant  $H_y$ .

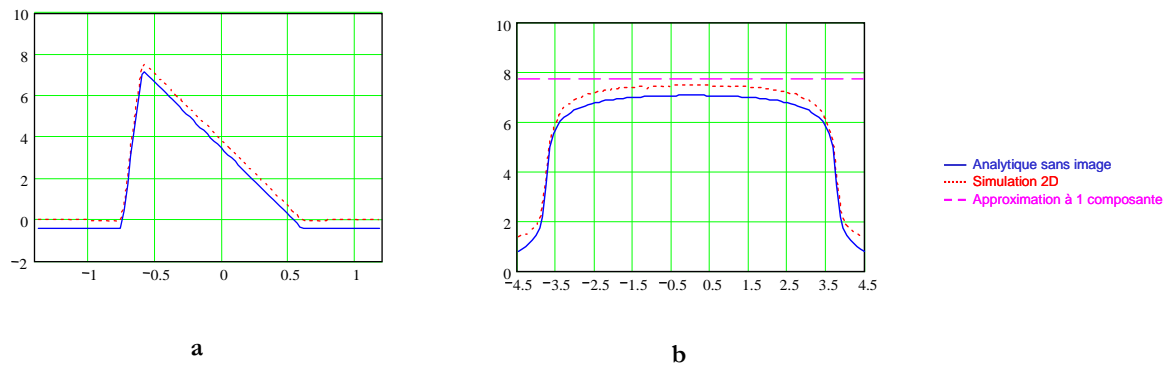




**Figure 3-21 : Chemins pour validation de  $B_y$**

Le 1<sup>er</sup> chemin est pris au centre des enroulements, sur toute la largeur de la fenêtre. Le 2<sup>nd</sup> est tracé à la jonction entre les 2 enroulements, sur toute la hauteur du circuit magnétique. Les résultats de la simulation 2D ainsi que ceux du modèle simplifié "une composante" sont présentés sur les Figure 3-22 et Figure 3-23. Sur la première figure, le champ analytique est tracé en tenant compte uniquement des conducteurs alors que, sur la seconde, des champs issus des 8 images magnétiques sont ajoutés au champ initial.

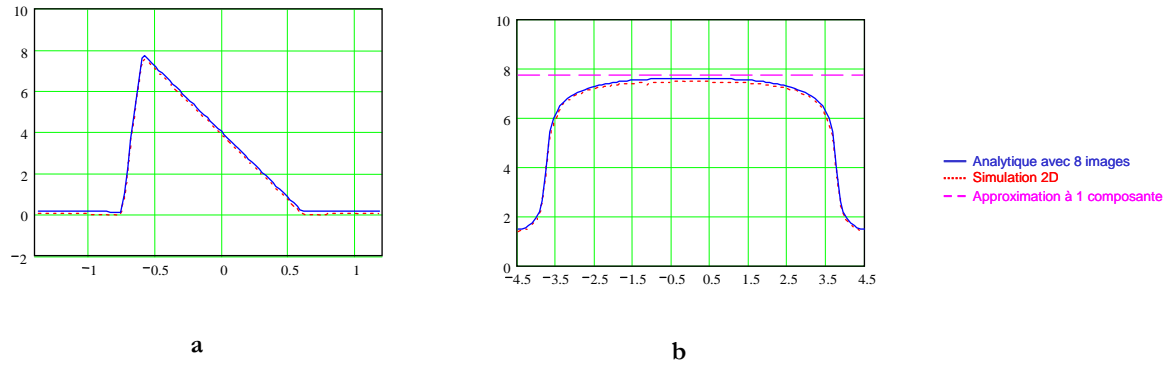
Les deux figures "a" rappellent les formes de champ obtenues, pour des enroulements concentriques, lorsque les ampères-tours sont compensés. Le champ calculé analytiquement, sans tenir compte du matériau magnétique (Figure 3-22), est décalé par rapport à celui obtenu par simulation. Ce dernier est nul aux extrémités de la fenêtre, étant donné que la composante  $y$  de l'excitation dans le circuit magnétique est nulle lorsque les Ampères tours se compensent. Enfin, l'approximation "une composante" donne une valeur par excès de ce champ.



**Figure 3-22 :  $H_y$  dans la fenêtre droite**

**a : Chemin 1 | b : Chemin 2**

Le fait d'ajouter des images magnétiques (Figure 3-23) rehausse les courbes qui étaient sous-estimées. Sur les différents chemins "a" et "b", le champ est légèrement surévalué. La composante tangentielle sur le bord de la fenêtre est quasiment nulle.


 Figure 3-23 :  $H_y$  dans la fenêtre droite avec 8 images magnétiques

a : Chemin 1 | b : Chemin 2

Les résultats obtenus avec les huit images magnétiques sont très proches de ceux issus de la simulation numérique. Considérer les conducteurs seuls n'est donc pas suffisant. Il faut tenir compte du circuit magnétique pour avoir une idée précise des champs à l'intérieur d'une fenêtre et, par la même occasion, obtenir une valeur d'énergie de fuite très proche de la réalité. La méthode présentée ici donne une valeur correcte de l'énergie parce que l'approximation adoptée pour le champ est très réaliste.

### III.3. Evaluation de l'inductance

Une mesure au pont d'impédance HP4294A a permis de tracer l'impédance en court-circuit et sa partie inductive en fonction de la fréquence (Figure 3-24).

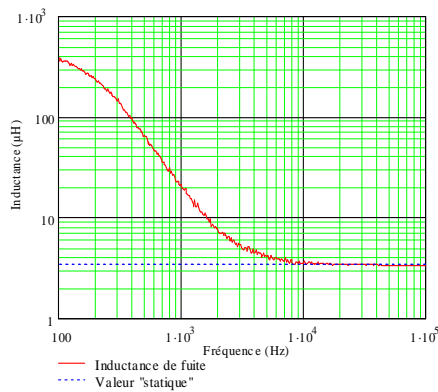


Figure 3-24 : Mesure de l'inductance de fuite

L'inductance varie sur la plage de fréquence  $100\text{ Hz} - 10000\text{ Hz}$ . Pour trouver la valeur de l'inductance de fuite en "statique", on se place après cette décroissance, lorsque l'inductance se stabilise. On trouve alors une inductance  $L_f = 3.4\mu\text{H}$ . Pour des fréquences plus basses, l'inductance de fuite est masquée par la résistance de l'enroulement, si bien qu'en très basse fréquence, on ne voit plus que l'inductance magnétisante (Figure 3-1).

Comme le noyau de type EP possède une jambe circulaire, l'énergie de fuite à l'intérieur du composant peut s'exprimer en coordonnées cylindriques. L'approximation consistant à localiser le maximum de l'induction pour évaluer un rayon moyen, peut être affinée si l'on procède à une

intégration numérique. Si l'on appelle  $r_0$  le rayon origine du 1<sup>er</sup> rectangle, l'expression (3.21) peut être utilisée.

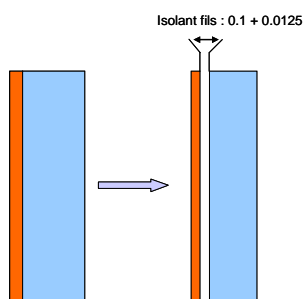
$$W = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{i=1}^{N_x} \left[ \sum_{j=1}^{N_y} B_{moy_{i,j}}^2 \cdot 2\pi \left( r_0 + \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \right] \cdot dS \quad (3.21)$$

$$\text{avec } B_{moy_{i,j}}^2 = \frac{B_{i,j}^2 + B_{i-1,j}^2 + B_{i,j-1}^2 + B_{i-1,j-1}^2}{4} \quad (3.22)$$

Avec ce noyau EP, la longueur de la partie des spires entourée complètement par le circuit magnétique est plus grande que celle de la partie située à l'extérieur. En conséquence, pour calculer l'inductance de fuite, nous prenons la valeur de l'énergie de la fenêtre droite (celle entourée par le matériau magnétique). Ceci doit logiquement mener à une valeur par excès. De façon surprenante, il n'en est rien. Selon les résultats de la 2<sup>ème</sup> colonne du Tableau 3-4, l'inductance calculée est bien plus faible que celle mesurée (sauf pour l'approximation du champ à une seule composante).

A la réflexion, c'est notre description des enroulements qui est en cause. La simplification qui consiste à représenter les conducteurs par des blocs rectangulaires adjacents n'est pas assez fine. En effet, lors des simulations et des calculs, nous n'avons pas tenu compte de l'isolation des fils. Celle-ci introduit un petit espace entre les enroulements et on sait que le champ est maximum entre les deux enroulements. En écartant les conducteurs, on devrait obtenir une image plus réaliste de la densité d'énergie.

Pour tenir compte de cela, nous avons oté, sur chaque face des deux rectangles, une épaisseur égale à celle de l'isolant impliqué, le courant de l'enroulement restant uniformément réparti dans la surface restante. Le principal effet de cette modification est d'introduire, entre les deux enroulements, un espace d'épaisseur égale à la somme des épaisseurs d'isolants entre les deux fils (Figure 3-25).



**Figure 3-25 : Enroulement avec isolants de fils**

Dans ces conditions, on obtient les résultats de la 3<sup>ème</sup> colonne du Tableau 3-4. La simulation F.E.M. n'a pas été refaite avec cette nouvelle géométrie. Les formules analytiques donnent un bon ordre de grandeur pour le calcul analytique simple et même une valeur précise si on tient compte du circuit magnétique par la méthode des images. On a alors une inductance calculée de  $3.58\mu H$  pour une valeur mesurée de  $3.4\mu H$ . On constate également que, la méthode "1 composante", qui semblait pourtant appropriée à cette géométrie, donne une valeur assez largement surestimée.

	Géométrie initiale	Avec isolant
Simulation F.E.M. 2D	$3.07\mu H$	<i>Non simulé</i>
Analytique simple	$2.61\mu H$	$2.93\mu H$
Analytique avec 8 images	$3.21\mu H$	$3.58\mu H$
Approximation "1 composante"	$3.97\mu H$	$4.51\mu H$

Tableau 3-4 : Evaluation de l'inductance de fuite-Transformateur EP

A l'issue de ce test, nous pouvons dire que la méthode développée s'applique bien à des transformateurs bobinés classiques. Décrire un ensemble de fils par un conducteur rectangulaire ne semble pas poser de problème, sous réserve d'évaluer correctement l'espace du à l'isolation des deux enroulements. Le champ, ainsi que l'énergie stockée, sont en effet maximum dans cet espace.

#### IV. APPLICATION A UN TRANSFORMATEUR PLANAR

Contrairement à l'exemple précédent auquel les méthodes "classiques" pouvaient être appliquées, aucune formule connue ne s'applique à la géométrie originale de notre transformateur planar. Nous allons donc tester notre méthode en la comparant à des simulations f.e.m. en deux dimensions et à des mesures effectuées sur un prototype.

##### IV.1. Description du transformateur

Le composant planar que nous étudions ici, est un transformateur à 3 enroulements (primaire, secondaire et auxiliaire) ayant respectivement 17, 1 et 3 spires.

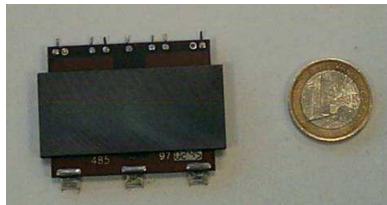


Figure 3-26 : Transformateur planar

Les spires sont réalisées dans un PCB multicouche et le matériau magnétique est du 3C90. Les mesures au pont d'impédance ont permis de relever les valeurs "statiques" des inductances de fuites ( $10.6nH$  pour le couplage primaire/secondaire et  $123nH$  pour le couplage primaire/auxiliaire).

L'inductance primaire/secondaire, très faible, est difficile à mesurer. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous nous intéressons à l'autre inductance qui lui est plus de dix fois supérieure pour valider notre approche. Pour une inductance de cet ordre de grandeur, nous avons pu nous assurer que nos mesures étaient correctes et qu'elles reflétaient bien le couplage entre les enroulements primaire et auxiliaire. Pour l'inductance de fuite primaire/secondaire, il est

probable que des conducteurs non pris en compte dans nos calculs (typiquement les conducteurs nécessaires pour amener les extrémités des spires sur les sorties, les picots etc...) jouent un rôle non négligeable dans la valeur mesurée.

## IV.2. Inductance de fuite primaire/auxiliaire

### IV.2.a. Description des enroulements

Les agencements des conducteurs sont différents dans les deux fenêtres du transformateur (Figure 3-27). Les 17 spires primaires sont constituées chacune de deux conducteurs mis en parallèle. On a donc au total 34 conducteurs primaires. L'enroulement auxiliaire, quant à lui, est constitué de 3 spires simples qui sont réparties sur deux couches dans la fenêtre de gauche et sur la même couche dans la fenêtre de droite. Les deux fenêtres sont discrétisées selon une grille contenant 200 points sur la largeur et 100 points sur la hauteur.

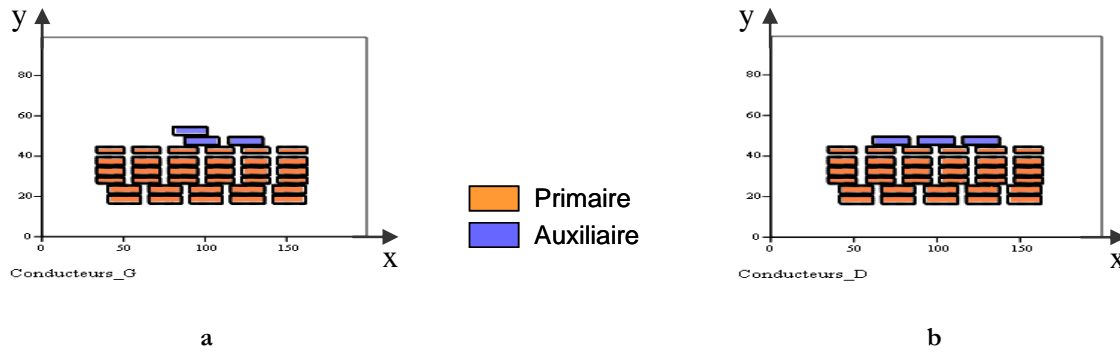


Figure 3-27 : Agencement des conducteurs primaire/auxiliaire

a : Fenêtre gauche | b : Fenêtre droite

En configuration d'inductance de fuite, c'est-à-dire lorsque le courant total de la fenêtre est nul, les conducteurs primaires sont parcourus par un courant que l'on fixe arbitrairement à  $0.5\text{ A}$  et les conducteurs auxiliaires, par un courant opposé de  $-17/3\text{ A}$ .

### IV.2.b. Forme des champs et énergies

Rappelons que nous avons déjà testé la précision de nos approximations pour cet agencement de conducteurs en relevant les composantes du champ sur un chemin test (Figure 3-9). Sur la Figure 3-28, les composantes  $B_x$  et  $B_y$  de l'induction sont tracées sur la grille à l'intérieur de chaque fenêtre telles qu'elles résultent du calcul analytique avant l'introduction des images.

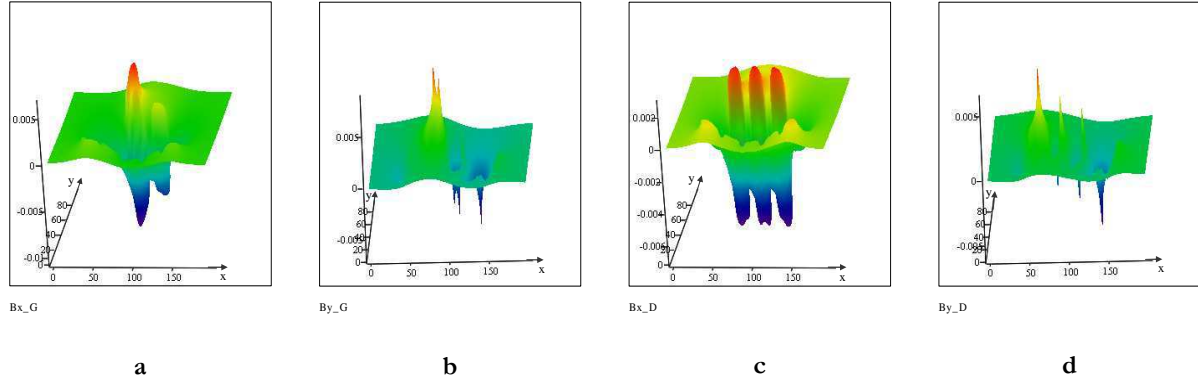


Figure 3-28 : Composantes de l'induction

a : B<sub>x</sub>-fenêtre gauche | b : B<sub>y</sub>-fenêtre gauche | c : B<sub>x</sub>-fenêtre droite | d : B<sub>y</sub>-fenêtre droite

A partir de ces composantes, une image de la densité d'énergie (3.23) est obtenue (Figure 3-29).

$$W_{i,j} = \frac{1}{2\mu_0} \sqrt{Bx_{i,j}^2 + By_{i,j}^2} \quad (3.23)$$

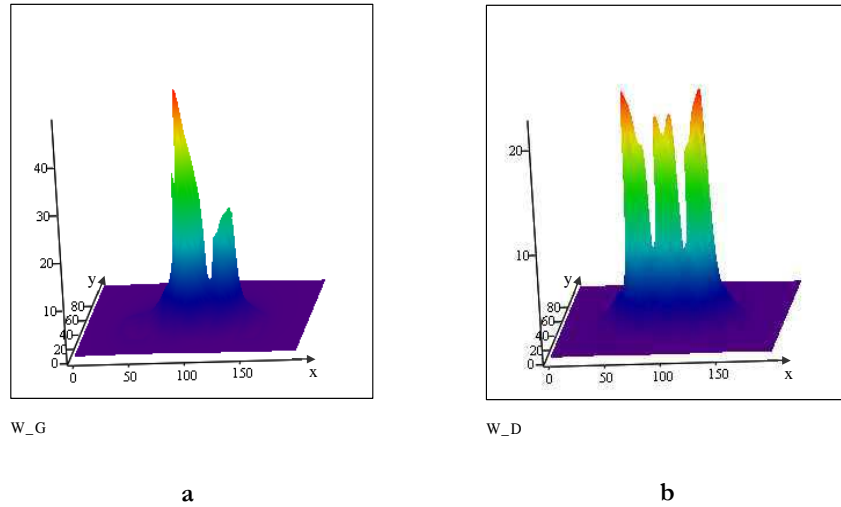


Figure 3-29 : Energie sur les grilles

a : Fenêtre gauche | b : Fenêtre droite

Ces tracés nous permettent de déterminer la distance qui sépare les deux pics d'énergie dans les enroulements. Pour la fenêtre droite nous avons pris le pic le plus haut (le plus éloigné de la jambe centrale). Choisir le centre de gravité de la densité ne change que très peu ( $\approx 0.5 \text{ mm}$ ) le chemin moyen. En considérant les dimensions du transformateur et de ses fenêtres, ainsi que le positionnement des maximums d'énergie, on trouve que la distance  $d$  séparant les pics vaut

14 mm (Figure 3-17). La profondeur des conducteurs (Figure 3-18) est aussi relevée:  $p = 23 \text{ mm}$ . Le chemin moyen (cf. § II.7) est donc égal à  $2 \times 37 \text{ mm}$ .

#### IV.2.c. Evaluation de l'inductance de fuite

L'énergie par unité de longueur est calculée de différentes manières en utilisant la feuille de calcul Mathcad (Tableau 3-5). Seule l'intégration numérique du potentiel vecteur n'est pas réalisée car ce calcul demande un temps de calcul très important (chaque conducteur doit être discrétisé finement). A titre d'exemple, sur un ordinateur de type Pentium IV, pour la configuration des enroulements primaire/auxiliaire, ce type d'intégration numérique prend environ une dizaine de minutes contre quelques secondes pour le calcul analytique.

Les énergies obtenues pour les deux fenêtres sont différentes (35% de différence). Il est donc indispensable de tenir compte de la disposition réelle des conducteurs dans chaque fenêtre, lorsque aucune symétrie n'est apparente.

La valeur de l'inductance de fuite, calculée suivant les quatre expressions de l'énergie est inscrite dans le Tableau 3-5. Celui-ci montre que notre méthode donne des résultats proches de la valeur mesurée :  $L_f = 123 \text{ nH}$ . Pour ce composant, l'intégration analytique de  $AJ$  (3.19) donne une inductance de fuite de  $112.5 \text{ nH}$ , soit 9% de moins. Il ne semble pas forcément nécessaire de tenir compte d'images magnétiques dans ce cas; cela corrobore le fait que, sur la Figure 3-29, l'énergie est quasiment nulle sur le bord de la fenêtre.

Toutefois, si le noyau est pris en compte à l'aide de huit images magnétiques, l'inductance obtenue est de  $121.3 \text{ nH}$ , soit 2% de moins que la valeur mesurée. La méthode semble donc applicable également à ce type de transformateur, alors que, rappelons-le, la méthode traditionnelle est inapplicable.

	Energie Fenêtre Gauche	Energie Fenêtre Droite	Inductance de fuite
$B^2/2\mu_0$ numérique	$28.01 \mu\text{H} / m$	$18.40 \mu\text{H} / m$	$107.9 \text{ nH}$
AJ analytique	$29.25 \mu\text{H} / m$	$19.14 \mu\text{H} / m$	$112.5 \text{ nH}$
AJ analytique +4 images	$32.01 \mu\text{H} / m$	$20.74 \mu\text{H} / m$	$122.7 \text{ nH}$
AJ analytique +8 images	$31.73 \mu\text{H} / m$	$20.45 \mu\text{H} / m$	$121.3 \text{ nH}$

Tableau 3-5 : Evaluation de l'inductance de fuite Primaire/Auxiliaire-Transformateur Planar

### IV.3. Homogénéisation partielle des enroulements

Le nombre élevé de conducteurs (37) nous incite à chercher une description plus simple des enroulements. Pour des fils ronds, représenter une nappe de conducteurs par un conducteur

rectangulaire équivalent est une technique très utilisée. La méthode de Dowell [DOWELL-66] ou celle de la perméabilité complexe [KERADEC-91] en sont de bons exemples.

Pour le problème qui nous intéresse ici, la simplification ne nécessite pas d'hypothèses à priori sur la carte de champ, ni de calculs supplémentaires sur les conducteurs. Les expressions du champ et du potentiel vecteur sont connus pour un conducteur rectangulaire, quelle que soit sa taille. Nous allons donc essayer de simplifier la description des enroulements en regroupant plusieurs conducteurs dans un même rectangle. Nous chiffrerons ensuite l'erreur qui résulte de cette homogénéisation.

En observant l'agencement des conducteurs, les regroupements semblent évidents (Figure 3-30). Les méplats sont regroupés en quatre zones distinctes dans la fenêtre de gauche et trois pour celle de droite.

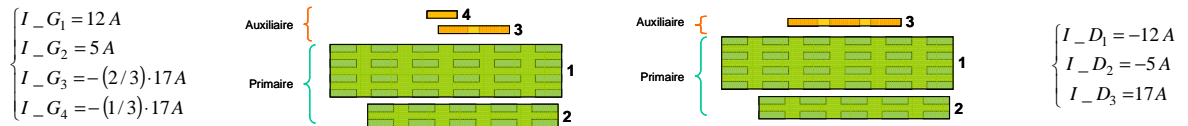


Figure 3-30 : Homogénéisation des enroulements Primaire/Auxiliaire

Sur le chemin de test défini par la Figure 3-8, les composantes  $B_x$  et  $B_y$  de l'induction sont tracées avant et après homogénéisation (Figure 3-31). L'allure globale du champ est respectée, mais elle est lissée : Les pics associés à certains conducteurs disparaissent.

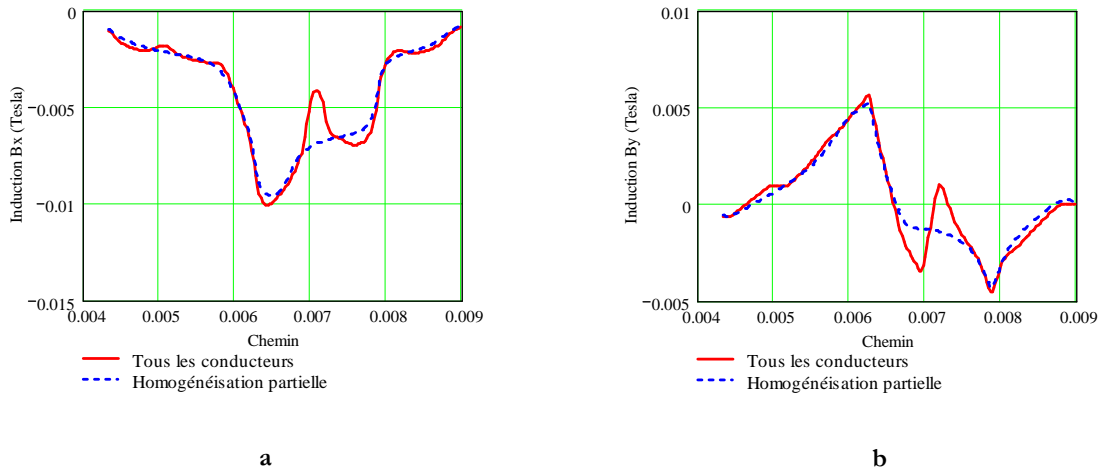


Figure 3-31 : Comparaison de l'induction, Tous les conducteurs/Homogénéisation partielle

a : Composante  $B_x$  | b : Composante  $B_y$



L'induction n'est pas trop modifiée par cette simplification, mais il faut s'intéresser à l'énergie dans les deux fenêtres pour conclure au sujet de l'utilisabilité de ce type d'homogénéisation.

Comme dans le cas précédent, nous calculons les deux énergies en utilisant plusieurs méthodes (Tableau 3-6). Une longueur de spire moyenne est ensuite utilisée pour calculer la valeur de l'inductance de fuite. Les maximum d'induction étant localisés aux mêmes endroits (Figure 3-31), cette longueur ne varie pas ( $2 \times 37 \text{ mm}$ )

	Energie Fenêtre Gauche	Energie Fenêtre Droite	Inductance de fuite
$B^2/2\mu_0$ numérique	$26.94 \mu H / m$	$15.83 \mu H / m$	$99.4 nH$
AJ analytique	$28.06 \mu H / m$	$16.45 \mu H / m$	$103.5 nH$
AJ analytique +4 images	$30.53 \mu H / m$	$17.74 \mu H / m$	$112.2 nH$
AJ analytique +8 images	$30.30 \mu H / m$	$17.53 \mu H / m$	$111.2 nH$

Tableau 3-6 : Evaluation de l'inductance de fuite Primaire/Auxiliaire (géométrie simplifiée)

L'homogénéisation des enroulements a tendance à réduire un peu la valeur de l'inductance de fuite. Dans le pire des cas, l'inductance de fuite est 9% plus petite, ce qui est très convenable, vu la simplification que cette homogénéisation apporte au moment de l'introduction des données.

#### IV.4. Inductance de fuite Primaire/Secondaire

L'exemple précédent, relatif à l'inductance de fuite entre les enroulements primaire et auxiliaire, a montré que notre technique de calcul donne des valeurs proches de celles mesurées, que les enroulements soient décrits de façon complète ou de façon simplifiée. L'évaluation de l'inductance de fuite entre le primaire et le secondaire va nous mettre devant les limites d'une telle comparaison lorsque les valeurs d'inductances sont faibles.

##### IV.4.a. Description des enroulements

Le primaire est celui qui a été décrit précédemment. Le secondaire, quant à lui, (Figure 3-32) est constitué d'une seule spire composée de six conducteurs mis en parallèle. Pour se placer en configuration d'inductance de fuites, les conducteurs primaires sont toujours parcourus par un courant de  $0.5 \text{ A}$  et les conducteurs secondaires par un courant opposé de  $-17/6 \text{ A}$ .

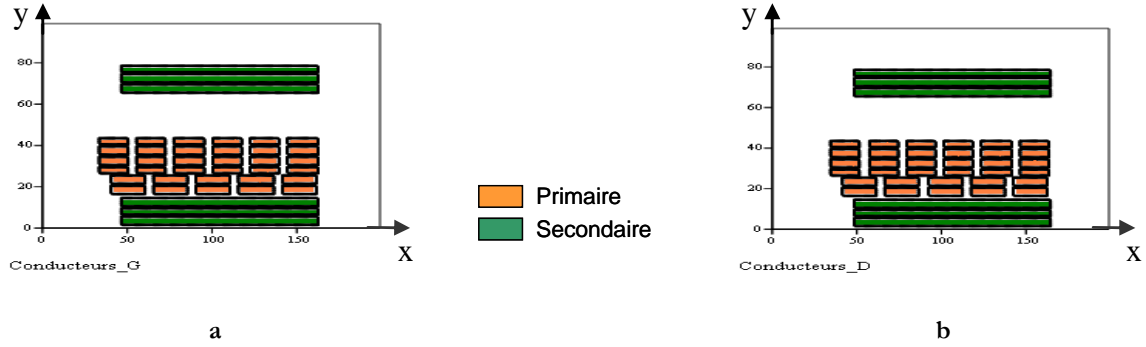


Figure 3-32 : Agencement des conducteurs primaire/secondaire

a : Fenêtre gauche | b : Fenêtre droite

#### IV.4.b. Forme des champs et énergies

En raison de la quasi-identité des deux fenêtres du transformateur, les composantes de l'induction  $B_x$  et  $B_y$  ne sont représentées que sur une seule fenêtre (Figure 3-33). L'énergie (3.23) tracée sur la grille est présentée sur la Figure 3-34. Les conducteurs secondaires étant très proches du circuit magnétique l'énergie à l'interface entre l'air et le milieu magnétique n'est pas nulle. Il est donc nécessaire de tenir compte du circuit magnétique.

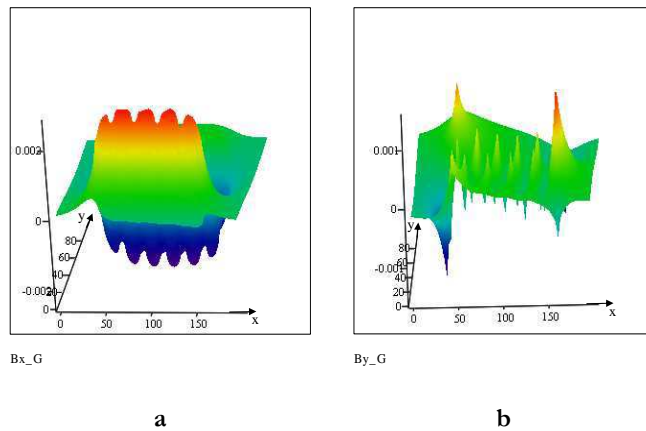


Figure 3-33 : Composantes de l'induction

a :  $B_x$  | b :  $B_y$

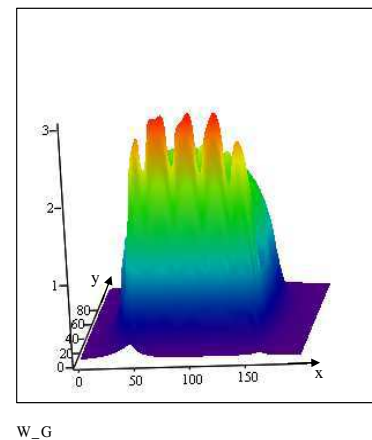


Figure 3-34 : Energie sur la grille

#### IV.4.c. Evaluation de l'inductance de fuite

On procède de la même façon que lors des deux évaluations précédentes. On calcule pour chaque fenêtre de transformateur, l'énergie par unité de longueurs avec plusieurs types d'intégration (Tableau 3-7). L'ordre de grandeur de l'inductance obtenue se situe autour de  $5.5nH$ . Cette valeur doit être comparée à celle obtenue par mesure ( $10.6nH$ ).

	Energie Fenêtre Gauche	Energie Fenêtre Droite	Inductance de fuite
$B^2/2\mu_0$ numérique	$9.74\mu H / m$	$18.40\mu H / m$	$4.8nH$
AJ analytique	$10.17\mu H / m$	$10.17\mu H / m$	$5.0nH$
AJ analytique +4 images	$11.14\mu H / m$	$11.13\mu H / m$	$5.52nH$
AJ analytique +8 images	$11.12\mu H / m$	$11.11\mu H / m$	$5.51nH$

Tableau 3-7 : Evaluation de l'inductance de fuite Primaire/Secondaire-Transformateur Planar

La limite de notre méthode apparaît clairement. D'une part notre méthode de calcul idéalise la forme des conducteurs : Elle ne tient pas compte de la liaison des pistes aux picots de sortie, ni des vias de connexions internes. D'autre part, la valeur mesurée est sujette à caution puisque aucun court-circuit ne présente une résistance et une inductance suffisamment faible pour être négligées et que la compensation de court circuit mise en œuvre pour cette mesure de faible impédance n'est pas parfaite non plus.

En définitive, bien que la valeur calculée vaille  $5.5nH$  et que la valeur mesurée en vaille  $10.6nH$ , il est impossible de conclure en donnant la "vraie" valeur. Il faut donc être critique vis-à-vis de ce résultat. En effet, est ce que cette faible valeur représente réellement les fuites dans le transformateur ? Quelle est l'incidence des inductances parasites typiquement dues aux connexions de sortie du transformateur et aux fils d'amenés ? Le moindre  $cm$  de fil peut avoir une inductance propre de quelques  $nH$  ; à priori, rien ne nous dit que le résultat du calcul est erroné. Tout au plus, il faut lui ajouter les impédances, négligées jusqu'ici, de certaines connexions.

Le problème que pose la mesure des très faibles inductances par rapport aux inductances des connexions de sortie de transformateur est particulièrement ardu à résoudre [SKUITT-94] (cf. Chapitre 2). Dans les transformateurs actuels abaisseur de tension, le problème est aggravé par le fait que, les tensions étant de plus en plus faibles, les courants augmentent pour délivrer une puissance équivalente.

## V. EXTENSION AU TRANSFORMATEUR DE FUITE

La méthode de calcul présentée dans ce chapitre ne se limite pas aux seules inductances de fuite. En effet, le transformateur de fuite, qui représente le couplage entre les différentes inductances de fuites, peut aussi être prédéterminé à l'aide de cette technique.

Considérons un transformateur quelconque à trois enroulements (Figure 3-35). Pour calculer ses fuites, il faut que le courant traversant l'inductance magnétisante  $L_p$  soit nul; les

Ampères tours sont alors compensés. Physiquement, dans le composant, cette propriété lie les courants des trois enroulements par la relation (3.24).

$$I_p + \eta_{ap} I_a + \eta_{sp} I_s = 0 \quad (3.24)$$

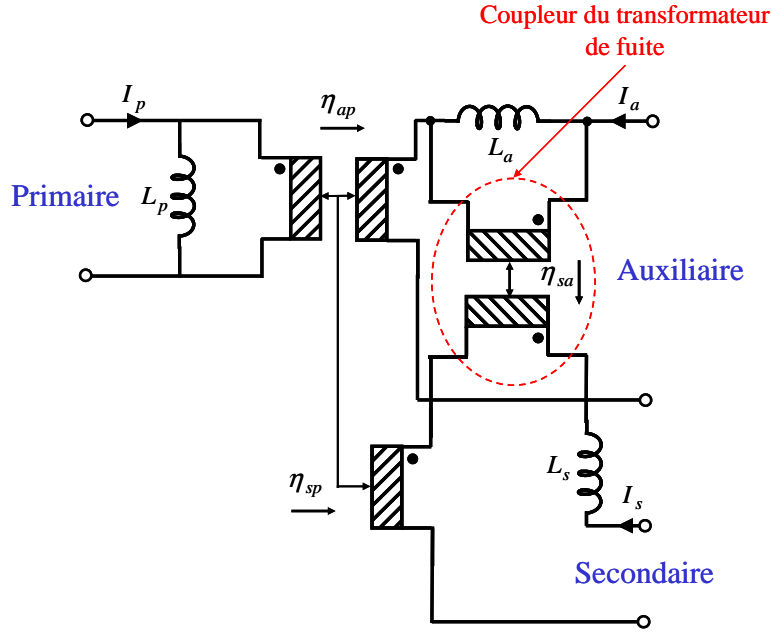


Figure 3-35 : Détermination du coupleur du transformateur de fuite

Pour déterminer les différentes inductances de fuite des enroulements, on procède comme nous l'avons présenté dans la partie IV de ce chapitre, en annulant un par un les courants dans les enroulements. Ainsi, pour déterminer l'inductance de fuite auxiliaire, vis-à-vis du primaire, il faut annuler le courant dans l'enroulement secondaire ( $I_s = 0$ ). L'énergie dans le transformateur s'écrit alors suivant la relation (3.25).

$$Wm_1 = \frac{1}{2} L_a I_a^2 \quad \Rightarrow Lf_a = L_a \quad (3.25)$$

Dans un deuxième temps, pour calculer l'inductance de fuite secondaire, il faut annuler le courant dans l'enroulement auxiliaire ( $I_a = 0$ ). L'énergie du système s'écrit alors selon (3.26).

$$Wm_2 = \frac{1}{2} (L_s + \eta_{sa}^2 L_a) I_s^2 \quad \Rightarrow Lf_s = L_s + \eta_{sa}^2 L_a \quad (3.26)$$

Le transformateur de fuite étant constitué de deux inductances et d'un coupleur, il ne manque plus qu'une seule équation pour trouver le rapport de transformation du coupleur. N'importe quelle combinaison des courants respectant (3.24) permet d'écrire cette équation

supplémentaire. Ainsi, avec deux courants quelconques  $I_a$  et  $I_s$ , l'énergie emmagasinée dans le transformateur de fuite s'écrit :

$$Wm_3 = \frac{1}{2} L_s I_s^2 + \frac{1}{2} L_a (I_a + \eta_{sa} I_s)^2 \quad (3.27)$$

Cette énergie s'identifie à celle stockée dans tout le transformateur si aucun courant ne passe dans  $L_p$ , autrement dit, lorsque le total des Ampères tours est nul ( $I_p = -\eta_{ap} I_a - \eta_{sp} I_s$ ). Le développement de (3.27) fait apparaître les inductances de fuites calculées précédemment (3.28).

$$\begin{aligned} Wm_3 &= \frac{1}{2} (L_s + \eta_{sa}^2 L_a) I_s^2 + \frac{1}{2} L_a I_a^2 + L_a \eta_{sa} I_s I_a \\ &= \frac{1}{2} Lf_s I_s^2 + \frac{1}{2} Lf_a I_a^2 + Lf_a \eta_{sa} I_s I_a \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le rapport de transformation du coupleur se déduit (3.29) de cette expression.

$$\eta_{sa} = \frac{Wm_3 - \frac{1}{2} Lf_s I_s^2 + \frac{1}{2} Lf_a I_a^2}{Lf_a I_s I_a} \quad (3.29)$$

Il est utile d'évaluer le coefficient de couplage  $k_f$  du transformateur de fuite. Pour cela, remarquons tout d'abord que la mutuelle  $M$  du transformateur de fuite vaut  $\eta_{sa} L_a$ . De là, on déduit que :

$$k_f = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} = \frac{\eta_{sa} L_a}{\sqrt{L_a (L_s + \eta_{sa}^2 L_a)}} = \eta_{sa} \sqrt{\frac{Lf_a}{Lf_s}} \quad (3.30)$$

C'est ce coefficient (3.30) qui permet de décider si on peut réduire le transformateur de fuite à deux inductances  $Lf_a$  et  $Lf_s$  non couplées (cf. Chapitre 1).

Si l'on s'intéresse de nouveau au transformateur planar à 3 enroulements, on peut calculer le rapport de transformation et le coefficient de couplage du transformateur de fuite (3.31). La valeur faible du coefficient de couplage confirme que ce coupleur peut être négligé vis-à-vis des autres coupleurs et supprimé du circuit équivalent.

$$\eta_{sa} = 0.04 \quad k_f = 0.2 \quad (3.31)$$

Nous venons de montrer que, moyennant un calcul supplémentaire d'énergie, notre méthode permet d'évaluer tous les paramètres du transformateur de fuite d'un transformateur à trois enroulements. Cette extension vaut pour  $n$  enroulements, sous réserve d'effectuer un

nombre suffisant (autant que de coupleurs dans le transformateur de fuite) de calculs supplémentaires d'énergie.

## VI. CONCLUSION ET LIMITES DE CETTE METHODE

Une méthode d'évaluation des inductances de fuite statiques a été mise au point pour offrir une alternative aux calculs traditionnels qui nécessitent des hypothèses soit sur les champs soit sur la géométrie. Le calcul donne des résultats très prometteurs.

Ce calcul s'appuie sur l'expression PEEC du champ et du potentiel vecteur créés par un conducteur méplat, infiniment long et parcouru par un courant réparti uniformément. Ces expressions sont largement exploitées par la méthode PEEC. La méthode peut être appliquée à des transformateurs de tous types, qu'ils soient classiquement bobinés avec du fil rond (à condition de fusionner des conducteurs pour obtenir des regroupements rectangulaires), ou qu'ils soient planar, avec des conducteurs méplats et présentant des géométries ne permettant d'utiliser aucune des approximations habituelles. Que l'on homogénéise ou non la représentation des conducteurs ou du circuit magnétique autour des fenêtres d'un transformateur, une estimation des inductances des fuites d'un transformateur peut être obtenue à  $\pm 10\%$ .

Cette précision est limitée par l'incertitude que l'on a sur certains paramètres géométriques. Par exemple, pour deux bobinages réalisés en fil rond, il faut tenir compte de l'espacement qui sépare les surfaces en regard des deux enroulements sous peine de sous-estimer, de façon notable, la valeur de l'inductance de fuite. Un autre type d'incertitude apparaît lorsque les inductances calculées sont très faibles ( $< 10nH$ ), ce qui est le cas pour les transformateurs abaisseurs de tension. Si l'on cherche à comparer les résultats obtenus par calcul avec les mesures effectuées sur un prototype, les inductances de quelques  $nH$  sont toujours masquées par des inductances parasites de câblage situées à l'intérieur même du composant ou à l'extérieur pour le relier à l'appareil de mesure.

La formulation finale du calcul de l'inductance de fuite exploite l'intégrale du potentiel vecteur. Elle est complètement analytique et peut être utilisée dans un logiciel destiné à réaliser des optimisations. Pour un concepteur de transformateur, cet outil est intéressant, puisqu'il permet d'obtenir rapidement la valeur de l'inductance de fuite. Il peut ainsi ajuster les paramètres géométriques des enroulements (largeur, hauteur, positionnement...) pour obtenir une inductance de valeur proche de celle désirée. Un très grand nombre de conducteurs n'est plus un obstacle car nous avons montré que des simplifications de la géométrie sont acceptables. Elles allègent la description du problème et facilitent les optimisations.

La méthode de calcul présentée s'étend à l'ensemble des paramètres du transformateur de fuite. En effet, le rapport de transformation, image du couplage entre les inductances de fuite peut être déterminé par un calcul similaire, en utilisant une combinaison différente des courants dans le transformateur. Ce calcul, accompagné de celui du coefficient de couplage, permet de décider de la représentation du circuit équivalent à adopter et d'identifier totalement les éléments statiques du transformateur de fuite.

## ***CHAPITRE 4 : Techniques analytiques de calcul des pertes cuivre et des fuites dynamiques***





## I. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons introduit une méthode permettant d'évaluer les inductances de fuite "statique", et plus généralement tout les éléments du transformateur de fuite. Les valeurs trouvées sont valables en basse fréquence, c'est-à-dire jusqu'aux fréquences où les courants induits apparaissent dans les conducteurs. Ces effets, dits "hautes fréquences", modifient la répartition du courant à l'intérieur des conducteurs. De ce fait, ils induisent une augmentation de la résistance série des enroulements ainsi qu'une diminution des inductances de fuite. Cette variation peut être significative et, suivant la fréquence de travail, l'inductance de fuite à prendre en considération lors du dimensionnement du transformateur peut être assez différente de celle que nous sommes capables de calculer en statique.

Les deux effets évoqués ici, sont attribués aux "courants induits". Ils apparaissent lorsque la fréquence augmente et ils sont généralement répartis entre effets de peau et effets de proximité. Pour un concepteur de transformateur, il est nécessaire de tenir compte de ces deux phénomènes, non seulement pour avoir la véritable valeur de l'inductance de fuite à la fréquence de travail, mais aussi pour optimiser les pertes du composant [HURLEY-98].

D'une manière générale, un transformateur à 2 enroulements est un quadripôle passif qui introduit des pertes séries et des pertes parallèles. La plupart du temps, les pertes séries sont dues aux conducteurs alors que les pertes parallèles sont attribuées au circuit magnétique. C'est pourquoi on les nomme respectivement pertes cuivre et pertes fer. Dans ce travail nous avons consacré davantage de temps à l'étude des pertes cuivre; nous ne nous étendrons pas plus sur les pertes fer.

Nous revenons donc maintenant en détail sur les pertes dites "cuivre" qui sont des pertes localisées dans les conducteurs. Nous allons tout d'abord décrire brièvement les deux phénomènes évoqués plus haut et qui sont responsable de cette variation fréquentielle. Devant la difficulté d'une formulation analytique exacte des effets de courant induits dans les conducteurs méplats, nous ferons le point sur plusieurs méthodes analytiques approximatives. Nous évoquerons ainsi successivement la méthode de Dowell, les circuits équivalents de plaques, la perméabilité complexe et les potentialités de la méthode  $\mu$ PEEC.

La réduction des pertes cuivre évoquées à plusieurs reprises dans ce chapitre et diverses applications des méthodes présentées dans cette partie seront traitées dans le chapitre 5 de ce mémoire.

## II. LES DIFFERENTS TYPES DE PERTES H.F. DANS LE CUIVRE

Le minimum de pertes dans un conducteur, quelque soit sa forme, est atteint lorsque le courant qui le traverse a une répartition uniforme sur toute sa section. Cette uniformité s'établit naturellement si la fréquence du courant est suffisamment basse, c'est-à-dire si l'épaisseur de peau (4.1) est nettement plus grande que les dimensions transversales du conducteur. Lorsque la fréquence de fonctionnement augmente, la répartition du courant est modifiée à l'intérieur des conducteurs. Les pertes augmentent, la résistance série s'accroît et puisque les courants induits s'opposent à la pénétration du champ magnétique, l'énergie stockée dans le cuivre diminue et les inductances de fuites aussi.

### II.1. Effet de peau

Le courant qui parcourt un conducteur crée un champ magnétique à l'intérieur de lui même. A partir d'une certaine fréquence, le courant résultant de ce champ n'est plus négligeable et il se superpose au courant initial. Le courant a alors tendance à se concentrer sur la périphérie du conducteur. Un effet de pellicule apparaît comme le montre la Figure 4-1.

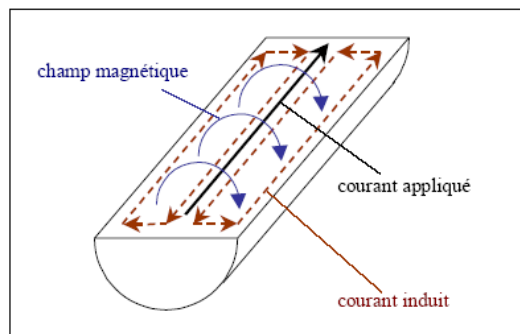


Figure 4-1 : Illustration de l'effet de peau [ROBERT-99]

Plus la fréquence augmente, plus cet effet est marqué. L'épaisseur équivalente sur laquelle se répartit le courant, appelée épaisseur de peau, est donnée par (4.1).

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{2\pi \cdot f \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} \quad (4.1)$$

Avec  $\rho$  : résistivité du matériau  $\mu_0$  : perméabilité du vide  
 $f$  : fréquence du courant  $\mu_r$  : perméabilité du matériau

Afin d'illustrer ce phénomène et pouvoir ultérieurement le comparer aux autres, la Figure 4-2 montre la répartition du courant obtenue dans un fil de cuivre cylindrique de diamètre  $0.75 \text{ mm}$ , alimenté par un courant de  $1 A_{eff}$  à  $100 \text{ kHz}$ .

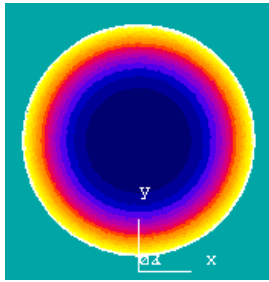


Figure 4-2 : Densité de courant à 100 kHz dans un conducteur cylindrique en cuivre de diamètre 0.75 mm

La puissance dissipée dans ce cas est de  $46.1 \text{ mW/m}$ . Pour comparaison, elle ne s'élève qu'à  $38.9 \text{ mW/m}$  en continu lorsque les courants induits ne se manifestent pas. La surface que le courant traverse est réduite, la résistance apparente augmente et les pertes aussi.

## II.2. Effet de proximité

Lorsqu'un second conducteur non alimenté, est placé à proximité du précédent qui est alimenté, un courant se développe dans ce second conducteur sous l'effet du champ magnétique créé par le premier (Figure 4-3). Le courant moyen reste nul puisque le conducteur n'est pas alimenté, mais cette circulation de courant, appelée effet de proximité, cause forcément des pertes à l'intérieur du conducteur. Le courant se répartit également sur la périphérie du conducteur mais le phénomène est différent de celui causée par l'effet de peau puisque le champ magnétique est créé par un autre conducteur et non pas par lui-même.

Cet effet est présenté sur la Figure 4-4a. Le premier conducteur est toujours alimenté par  $1 A_{eff}$  à  $100 \text{ kHz}$ , mais un deuxième conducteur, lui aussi en cuivre, est placé à côté du premier. La densité de courant qui le traverse peut être observée sur la Figure 4-4a.

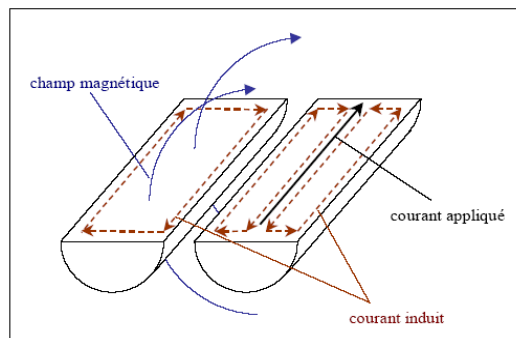


Figure 4-3 : Illustration de l'effet de proximité [ROBERT-99]

Les Figure 4-2 et Figure 4-4a ne peuvent être directement comparées puisque les échelles de couleur sont différentes. L'allure de la densité de courant illustre cependant de façon très claire l'influence de la proximité d'un conducteur alimenté. Au niveau des puissances,  $9.8 \text{ mW/m}$  sont dissipées dans le conducteur non alimenté. La proximité du second conducteur modifie aussi la répartition du courant dans le premier. La puissance due à l'effet de peau dans ce fil passe ainsi de

46.1mW à 46.3mW . Les effets de peau doivent donc être évalués en présence de l'environnement réel du fil et non pas, comme c'est habituel, en considérant un fil éloigné de tout. Nous verrons par la suite qu'il est parfois possible de réduire les pertes dues aux effets de peau en modifiant l'environnement du conducteur de façon adéquate.

Pour calculer analytiquement les effets de proximité, on considère généralement que le conducteur baigne dans un champ uniforme, égal à celui existant au centre du conducteur en son absence. Nous avons montré [MARGUERON-06-1], comment créer un champ parfaitement uniforme. La densité de courant obtenue par simulation en appliquant le champ uniforme défini ci-dessus (Figure 4-4b) est différente de la précédente. Les pertes, dans ce cas, sont de 14.2mW . Cette valeur est supérieure à celle obtenue dans le cas réel. En tout état de cause, lorsqu'on les calcule ainsi, les pertes par proximité sont très approximatives.



Figure 4-4 : Densités de courants associées aux effets de proximité

a : Effet de proximité d'un conducteur cylindrique | b : Approximation "champ uniforme"

### II.3. Courants de circulation

Dans un enroulement de transformateur, lorsque plusieurs conducteurs sont connectés en parallèle, chaque spire n'est pas soumise au même flux puisqu'elle n'est pas positionnée au même endroit dans l'enroulement. Cette différence de flux crée une différence de potentiel entre les conducteurs. Des courants peuvent alors circuler entre les différents fils en parallèles, l'intensité dépendant de l'impédance propre des conducteurs. Plus cette dernière est faible, plus le courant circulant risque d'être élevé pour une tension induite donnée.

Prenons l'exemple d'un transformateur en court-circuit (Figure 4-5). L'enroulement primaire est composé de 15 spires, bobinées deux fils en main, ce qui signifie que deux conducteurs sont reliés en parallèles pour former chaque spire. Nous allons concentrer notre attention sur ce qui se passe pour les deux fils en parallèles, encadrés sur la Figure 4-5.

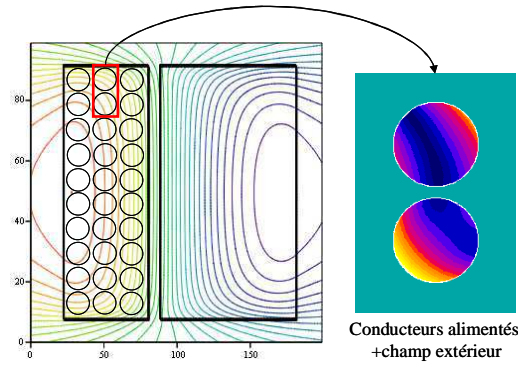


Figure 4-5 : Conducteurs en parallèle un enroulement de transformateur

Lorsque cette paire de conducteurs n'est pas alimentée, un courant de  $1.83 A_{eff}$  circule dans la boucle formée par les deux conducteurs. Cette circulation occasionne  $402.6 mW$  de pertes dans chaque fil. Le courant se répartit comme indiqué par la Figure 4-6. Lorsque les conducteurs sont alimentés et soumis au champ du transformateur, le courant ne se répartit pas équitablement entre les deux conducteurs (Figure 4-5). Tout se passe comme si le dispositif se comporte comme si le courant de circulation de  $1.83 A_{eff}$  s'ajoutait au courant initial dans un fil et se retranchait de celui parcourant l'autre (Figure 4-7). Cette différence se ressent au niveau des puissances, puisque  $242.8 mW$  sont dissipées dans le premier fil et  $671.3 mW$  dans le second.

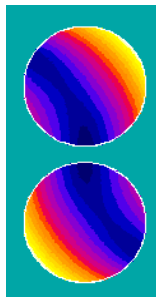


Figure 4-6 : Répartition des courants lorsque les conducteurs ne sont pas alimentés mais soumis au champ de la fenêtre de transformateur

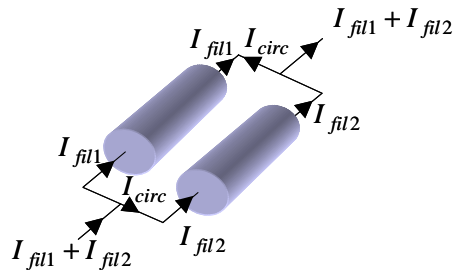


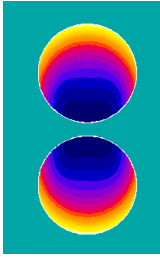
Figure 4-7 : Parcours des différents courants

Les pertes engendrées par ces courants de circulation peuvent être importantes. Ce problème est bien connu des modélisateurs, mais les concepteurs de transformateurs ne disposent pas de formules analytiques pour évaluer ces pertes supplémentaires.

## II.4. Théorème d'orthogonalité

Lorsque plusieurs conducteurs sont parcourus par des courants non nuls et positionnés à proximité l'un de l'autre, ils subissent les deux effets précédents. Chaque fil est le siège d'un effet de peau modifié, tenant compte des matériaux alentours et chaque fil crée, dans ceux qui lui sont proches, un courant de proximité. Pour calculer la puissance équivalente totale, les puissances

dues aux deux effets, peuvent être additionnées. Cette propriété est connue sous le nom de théorème d'orthogonalité.



**Figure 4-8 : Superposition des effets de peau et de proximité**

Cette superposition des deux effets est mise en évidence par la Figure 4-8. Chaque fil est ici alimenté par un courant de  $1A_{eff}$  à  $100kHz$ . La simulation donne une puissance dissipée dans chaque fil de  $54.4mW$ . Cette valeur est à comparer à  $46.3+9.8=56.1mW$ . Les deux chiffres sont très proches et la petite différence est due à des problèmes de résolution.

Pour réduire les pertes par effet de peau, les conducteurs massifs sont généralement fractionnés en des conducteurs de plus petite section, reliés en parallèle. Dans le cas de conducteurs cylindriques, du fil de Litz est généralement utilisé. Les conducteurs sont alors remplacés par des brins, dont l'épaisseur est plus faible que l'épaisseur de peau, tous reliés en parallèle. Les brins sont torsadés afin que chaque spire soit soumise statistiquement au même flux. Cette technique permet d'éviter que des différences de flux ne créent des f.e.m. induites et donc, par la même occasion, des courants de circulation. Les brins sont tressés afin que le principe fonctionne bien dans un champ supposé uniforme, ce qui est rarement le cas dans un enroulement. Pour des conducteurs rectangulaires, ce torsadage est irréalisable. Les fils sont alors découpés en rectangles de taille plus petite et reliés en parallèle aux extrémités.

La puissance totale ( $914.1mW$ ) correspond bien aux pertes dans chaque conducteur ( $2 \times 54.4mW$ ), additionnée de celles dues au champ extérieur ( $2 \times 402.6mW$ ). Le théorème d'orthogonalité s'applique donc aux deux fils considérés comme un tout.

Les deux effets que nous venons de citer modifient donc les répartitions de courants dans les conducteurs et, par la même, les valeurs des inductances, des résistances et des pertes. Un concepteur de transformateur doit être capable de prévoir ces modifications qui apparaissent en haute fréquence [REATTI-02]. Le calcul analytique exact de ces pertes n'est résolu que dans le cas de conducteurs ronds ou de plaques infinies. Cependant, lorsque l'on s'intéresse à des conducteurs rectangulaires de dimensions transversales finies, les expressions analytiques exactes n'existent pas. Les formulations existantes, disponibles dans la littérature, sont toutes basées sur des approximations simplificatrices du champ régnant autour des conducteurs.

### III. CALCULS EXACTS DES COURANTS INDUITS DANS LES CONDUCTEURS

Nous allons maintenant nous intéresser aux expressions analytiques exprimant les courants induits dans des conducteurs massifs. Pour des raisons de simplicité, nous considérerons dans cette partie des conducteurs rectilignes et infiniment longs (système 2D plan).

#### III.1. Equation à résoudre et conditions aux limites

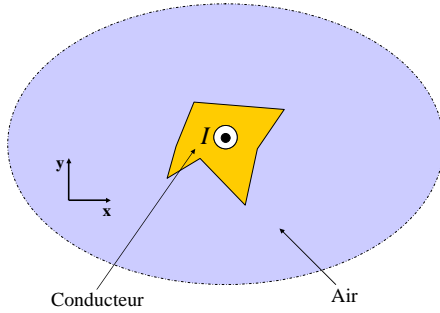


Figure 4-9 : Conducteur dans l'air

Un conducteur de forme quelconque est parcouru par un courant sinusoïdal total  $I$  de fréquence telle que l'effet de peau se manifeste (Figure 4-9). La répartition du courant dans ce cas, n'est pas uniforme. Chercher le champ créé par un tel dispositif revient à résoudre l'équation vectorielle de Poisson (4.2) dans les conducteurs et à raccorder ses solutions à celles de Laplace dans l'espace séparant les conducteurs.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \text{Equation de Poisson} \quad (4.2)$$

Puisque nous travaillons en 2D plan, seules les composantes suivant  $z$  de  $\vec{A}$  et  $\vec{J}$  sont non nulles. Les courants sources de champs sont créés par l'application d'un champ électrostatique  $\vec{E}_0$  aux bornes du conducteur (de conductivité  $\sigma$ ). En magnétostatique, ce champ est uniforme, tout comme la densité de courant  $\vec{J}$ . En revanche, lorsque la fréquence augmente, le champ électromoteur, dépendant de  $\vec{A}$ , cesse d'être négligeable. Ainsi, à l'intérieur du conducteur, la densité de courant  $\vec{J}$  est due à l'addition d'un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}_0$  et d'un champ électromoteur  $i\omega \vec{A}$ . Dans ce cas, le potentiel vecteur satisfait l'équation de diffusion (4.3) alors que, dans l'air autour du conducteur, aucun courant n'étant présent, l'équation de Laplace (4.4) régit le champ (Figure 4-14).

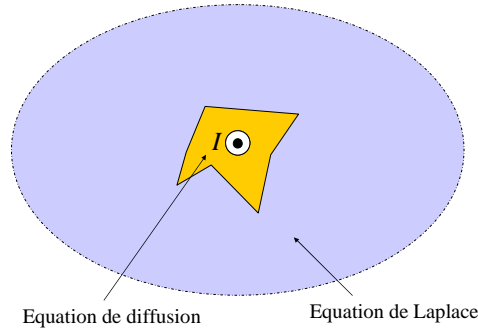
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - j\omega\sigma\mu A = -\mu\sigma E_0 \quad \text{Equation de diffusion} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Equation de Laplace} \quad (4.4)$$



Pour ces calculs, nous introduisons l'épaisseur de peau  $\delta$  (4.1) dans l'équation de diffusion (4.5).

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \left( \frac{1+j}{\delta} \right)^2 A = -\mu \sigma E_0 \quad \text{Equation de diffusion} \quad (4.5)$$



**Figure 4-10 : Equations pour un conducteur dans l'air**

Nous devons donc résoudre des équations linéaires aux différentielles partielles dépendant de deux coordonnées dans l'air (4.4) et dans le conducteur (4.5). Les solutions générales de telles équations s'obtiennent en ajoutant, à la solution générale de l'équation sans second membre, une solution particulière de l'équation avec second membre.

Les solutions pour ces deux types d'équations sont connues [GOLDNER] mais, physiquement, seules celles qui satisfont les conditions aux limites doivent être retenues. Plus précisément, il faut que l'excitation tangentielle et l'induction normale soient continues au passage de la surface externe du conducteur. Lorsque le périmètre de la section des conducteurs présente des discontinuités, il n'est pas facile d'appliquer ces conditions aux limites. Dans la littérature, seules les sections les plus simples, les plaques infinies et les cylindres, sont traitées complètement.

## III.2. Problèmes résolus

### III.2.a. Plaques infinies

Considérons une plaque infinie d'épaisseur  $a$  (Figure 4-11). Le champ autour de la plaque se décompose en deux parties superposables [LEFEVRE-04] : le champ propre, créé par le courant circulant dans la plaque ( $H_{prop}$ ) et le champ de proximité induit par d'autres conducteurs ( $H_{prox}$ ). L'intérêt de cette décomposition apparaît principalement lorsque l'on s'intéresse à l'étude des puissances. Le théorème d'orthogonalité permet d'additionner les puissances dues à chacune de ces deux causes.

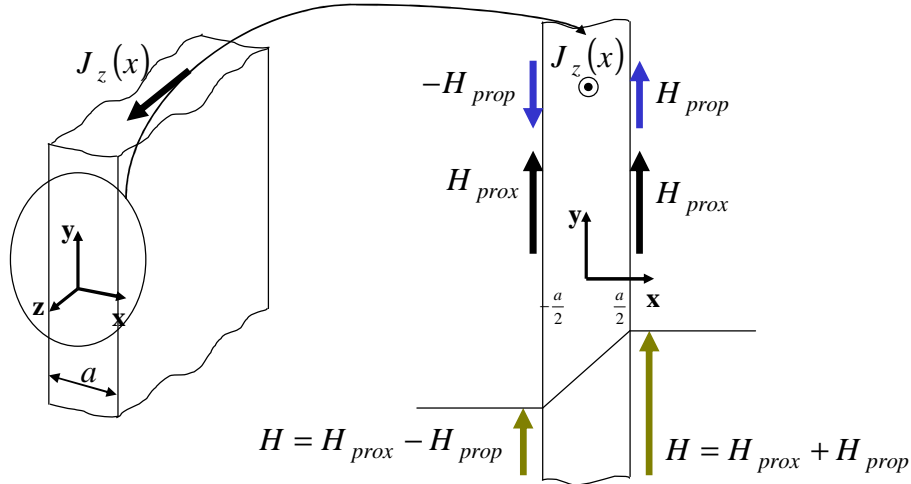


Figure 4-11 : Plaque infinie

Pour résoudre analytiquement ce problème de plaque infinie, il faut écrire l'équation de diffusion du champ magnétique [RAULET-98] :

$$\Delta \vec{H} = \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Equation de diffusion du champ magnétique} \quad (4.6)$$

Appliquée au problème de la Figure 4-11, l'équation de diffusion (4.6) devient :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = j\omega \cdot \mu \cdot \sigma \cdot H_y \quad (4.7)$$

La solution de ce type d'équation est de la forme :

$$H_y(x) = A \cdot e^{\frac{(1+j)x}{\delta}} + B \cdot e^{-\frac{(1+j)x}{\delta}} \quad (4.8)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  pour le cas du champ propre et pour le champ de proximité, se déduisent des conditions aux limites sur les faces de la plaque. Le champ total s'exprime ensuite en combinant les expressions obtenues pour le champ propre et le champ de proximité (4.9).

$$\begin{aligned} H_y(x) &= H_{prop}(x) + H_{prox}(x) \\ &= H_{prop} \cdot \frac{\sinh\left[(1+j)\frac{x}{\delta}\right]}{\sinh\left[(1+j)\frac{a}{2\delta}\right]} + H_{prox} \cdot \frac{\cosh\left[(1+j)\frac{x}{\delta}\right]}{\cosh\left[(1+j)\frac{a}{2\delta}\right]} \end{aligned} \quad (4.9)$$

### III.2.b. Fil cylindrique

Considérons maintenant un fil cylindrique plongé dans un champ uniforme  $H_{ext}$  (Figure 4-12). Le fil est, dans ce cas, non alimenté. Les courants induits se développant à l'intérieur du cylindre sont de somme nulle.

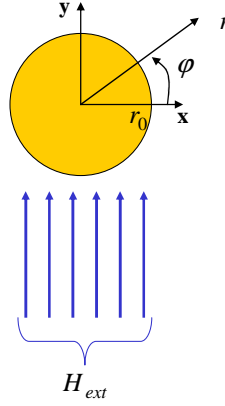


Figure 4-12 : Fil cylindrique soumis à un champ uniforme

Vu la symétrie du système, le problème peut être résolu en coordonnées cylindriques. A l'intérieur du cylindre, l'équation de diffusion sans second membre (4.5) peut s'écrire de la façon suivante:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 A = 0 \text{ avec } \alpha = \left( \frac{1+j}{\delta} \right) \quad (4.10)$$

La solution générale de cette équation s'exprime à l'aide des fonctions Bessel [LAROCHÉ]. Etant donné la symétrie du champ incident, seul le terme d'indice  $n=1$  est susceptible d'intervenir et on ne doit garder que cette partie qui donne une excitation paire par rapport à  $Oy$  (4.11)

$$\begin{aligned} A(r, \varphi) &= a_1 J_1(kr) e^{j\varphi} + a_{-1} J_{-1}(kr) e^{-j\varphi} \\ &= a J_1(kr) \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

La constante  $a$  est déterminée en respectant, au passage de la surface cylindrique, les conditions de continuité de la composante tangentielle du champ  $H_\varphi$  et de la composante normale de l'induction  $B_r$ . Ces deux équations permettent de trouver la valeur de la constante  $a$  ainsi que celle du moment dipolaire par unité de longueur  $M$  du fil [LAVEUVE-94].

$$a = -\frac{\mu_0}{\alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r_0)} \cdot H_{ext} \quad (4.12)$$

$$M = -2\pi \cdot r_0^2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha \cdot r_0} \frac{J_1(\alpha \cdot r_0)}{J_0(\alpha \cdot r_0)} \right) H_{ext} \quad (4.13)$$

Les deux problèmes que nous venons de présenter admettent des solutions analytiques simples, calculées à partir de conditions aux limites formulables analytiquement. Nous allons maintenant nous intéresser au cas plus complexe d'un conducteur méplat et présenter le problème des courants induits à l'intérieur de ce type de conducteur.

### III.3. Fil méplat rectiligne

#### III.3.a. Simulation d'un méplat

Une simulation "éléments finis" est réalisée pour connaître la répartition du courant à l'intérieur d'un conducteur rectangulaire supposé infiniment long. La Figure 4-13 présente le profil du module du courant dans un conducteur rectangulaire, sur le plan de symétrie et près de la surface. Comme dans le cas des conducteurs ronds, le courant a tendance à se concentrer vers les extrémités.

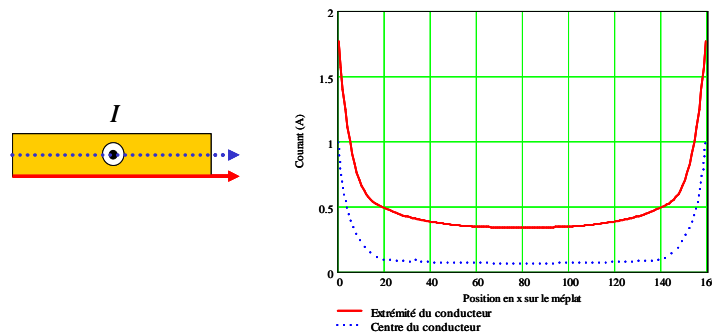


Figure 4-13 : Effet de peau dans un conducteur rectangulaire

Comme nous l'avons vu (III.1), le champ interne est décrit par l'équation de diffusion (4.3) alors que, dans l'air autour du conducteur, le champ se déduit de l'équation de Laplace (4.4) où sont trouvées les solutions générales de ces deux équations. La difficulté vient ensuite : comment satisfaire les conditions aux limites sur chaque face du rectangle (Figure 4-14) ?

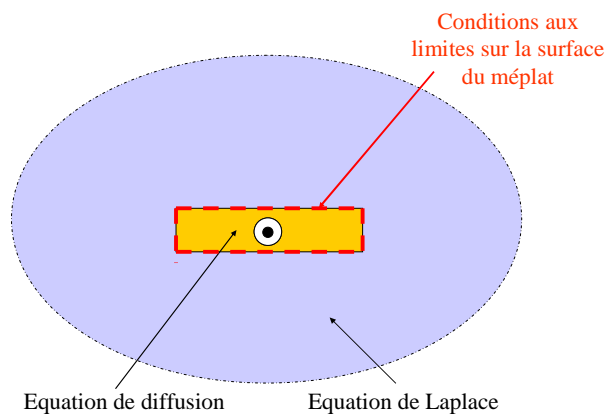


Figure 4-14 : Problématique pour un conducteur méplat

Ce problème est essentiel pour trouver les champs à l'intérieur et à l'extérieur de conducteurs rectangulaires. La solution publiée est basée sur l'hypothèse que le champ sur la surface du conducteur est tangentiel et constant [JOAN-04]. Malheureusement, à l'intérieur d'une fenêtre de transformateur, cette hypothèse est loin d'être réaliste. Vu les problèmes de formulation des conditions aux limites dans ce type de problème, un autre type de résolution

analytique a été envisagé. Ce calcul est basé sur la décomposition de la densité de courant sur une base polynomiale orthogonale, en utilisant les polynômes de Legendre.

### III.3.b. Décomposition de la densité de courant double polynôme de Legendre

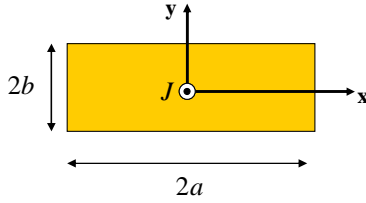


Figure 4-15 : Conducteur méplat

Le calcul du potentiel vecteur d'un conducteur méplat (Figure 4-15) parcouru par une densité de courant non uniforme  $J$ , supposée unidirectionnelle et infiniment longue, peut être effectué à l'aide la loi de Biot et Savart. En coordonnées cartésiennes, cette expression s'écrit suivant (4.14).

$$A(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-a}^a J(x_0, y_0) \cdot \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \cdot dx_0 \cdot dy_0 \quad (4.14)$$

Pour une densité de courant constante, en statique donc, cette expression nous a permis de redémontrer les expressions du potentiel vecteur présentées au chapitre 3. Dans le cas de la magnétodynamique, la densité de courant n'est pas uniforme.  $J$  est donc une fonction de  $(x, y)$ . Cette dernière est multipliée par un logarithme népérien et le terme obtenu est ensuite intégré deux fois. Il semblerait intéressant d'exprimer la densité à l'aide de fonctions "facilement" intégrables lorsqu'elles sont multipliées par un logarithme népérien.

Les polynômes de Legendre présentent cet avantage. Ces derniers ont été introduits en physique à propos de la théorie du potentiel Newtonien [AYANT]. Un polynôme de degré  $l$  est défini de la façon suivante :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} \quad \text{où } K = \begin{cases} k/2 \\ (k-1)/2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur l'intervalle  $[-1; 1]$  avec un poids uniformément réparti. En pratique, il est commode de les normer en les multipliant chacun par un coefficient (4.16).

$$P_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} \quad (4.16)$$

Il est possible d'étendre la portée de ces fonctions afin qu'elles couvrent l'intervalle  $[-a; a]$  (4.17).

$$P_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2a}} \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{l-2k} \quad (4.17)$$

Le produit de deux fonctions de ce type, l'une de la variable  $x$ , l'autre de  $y$ , est un élément d'une base orthonormée pour  $J$  et pour toute fonction définie dans un rectangle. En utilisant des doubles polynômes de Legendre pour décrire la densité de courant et en effectuant un changement de variable, tous les termes à intégrer de (4.14) peuvent se mettre sous la forme générale (4.18).

$$u^p \cdot v^q \cdot \ln(u^2 + v^2) \quad (4.18)$$

L'Annexe IV présente les résultats de la double intégrale de (4.18) pour différentes valeurs de  $p$  et  $q$  ainsi que dans le cas général.

L'utilisation de cette base de fonction semble donc être une piste intéressante puisque le calcul analytique peut être mené jusqu'à son terme. Il reste maintenant à décrire la densité de courant dans cette base pour déterminer la valeur du potentiel vecteur partout.

### III.4. Conclusion sur le calcul exact des courants induits

Nous avons vu, au cours de cette partie, que la formulation des conditions aux limites sur un conducteur, en vue du calcul analytique de courants induits était un problème difficile. Seul le cas des plaques infinies et celui des fils cylindriques admettent des solutions analytiques sans approximation.

Pour ce qui concerne les conducteurs rectangulaires, une solution existe, mais elle est basée sur une hypothèse non réaliste puisque le champ autour du conducteur est supposé parfaitement parallèle et constant sur chacune de ses quatre faces. Nous avons ensuite exploré une piste permettant d'obtenir une formulation complète du potentiel vecteur. Cette dernière s'appuie sur la décomposition de la densité de courant sur une base orthonormée constituée de doubles polynômes de Legendre. Cette méthode sera approfondie dans de futurs travaux.

Face à la difficulté à surmonter pour établir la formulation exacte, nous allons présenter d'autres calculs analytiques, basés sur des approximations et utilisés pour calculer les effets des courants induits dans des conducteurs rectangulaires.

## IV. CALCULS BASES SUR DES APPROXIMATIONS

Dans cette partie nous présentons trois méthodes analytiques permettant : soit de prédire la variation fréquentielle de la partie résistive et inductive d'un enroulement, soit d'élaborer des circuits équivalents de transformateurs à conducteurs rectangulaires, soit d'évaluer les pertes par effet de proximité dans des enroulements de transformateurs. Nous recensons les hypothèses sur lesquelles ces outils reposent ainsi que les limites associés à ces modèles. Nous finissons cette partie par la présentation de la méthode PEEC et de son extension  $\mu$ PEEC.

### IV.1. Méthode de Dowell

Intéressons nous en premier à la méthode analytique la plus utilisée pour calculer les pertes cuivre dans un transformateur, à savoir la méthode de Dowell [DOWELL-66]. Elle est basée sur l'approximation d'un champ unidirectionnel, tangent aux faces des couches conductrices qui sont séparées par de l'air et bobinées autour d'un noyau magnétique.

#### IV.1.a. Principe de la méthode

Cette méthode vise à calculer l'inductance de fuite et la résistance série d'un transformateur à deux enroulements. Elle repose sur la solution de l'équation de diffusion dans une plaque conductrice infinie (cf. III.2.a). Pour appliquer cette méthode, les conducteurs doivent ressembler à des plaques parallèles, où pouvoir se ramener à un ensemble de plaques parallèles. Le champ magnétique doit être parfaitement parallèle aux plaques, ce qui suppose que les plaques remplissent entièrement la largeur de la fenêtre du transformateur (Figure 4-16).

Une association de plaques supposées infinies, utilisées pour modéliser des enroulements dans une fenêtre de transformateur est présentée sur la Figure 4-16. Pour chaque couche de cet empilement, comme pour la solution du problème des plaques infinies, le champ de proximité est uniforme. Le champ propre de chaque couche est, quant à lui, antisymétrique et il vient s'ajouter au champ créé par les autres conducteurs. On obtient ainsi le profil du champ total dans la fenêtre de bobinage (Figure 4-16).

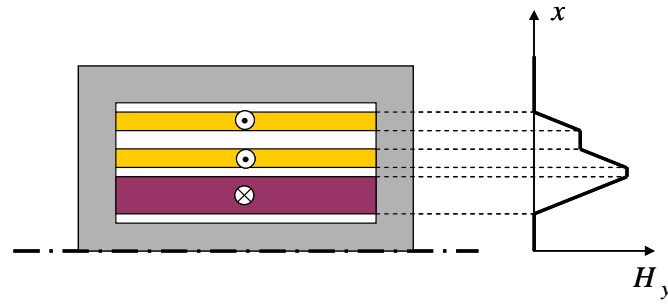


Figure 4-16 : Champ dans la fenêtre du transformateur

En considérant que les conducteurs sont parcourus par un courant uniforme, le théorème d'Ampère permet d'obtenir la répartition du champ dans la fenêtre du transformateur. Dowell montre que, dans l'air, la valeur du champ magnétique  $H_y(x)$  est indépendante de la fréquence et peut être trouvée en connaissant les courants portés par les enroulements. Dans les conducteurs en revanche, le profil du champ varie en fonction de la fréquence. La méthode de Dowell propose donc de le déterminer analytiquement en résolvant un problème à une dimension. La répartition du courant et les pertes sont ensuite déduits de ce résultat.

#### IV.1.b. Résistance et inductance d'une association de plaque

Sur la base des équations obtenues pour des plaques infinies (modèle unidimensionnel), Dowell a développé des formules permettant de calculer directement la variation de la résistance et l'inductance de fuite d'un enroulement en fonction de la fréquence. Ces formules s'appliquent uniquement à une portion d'enroulement, définie comme un nombre entier de couches situées entre une valeur nulle et une valeur maximale de la force magnétomotrice (Figure 4-17).

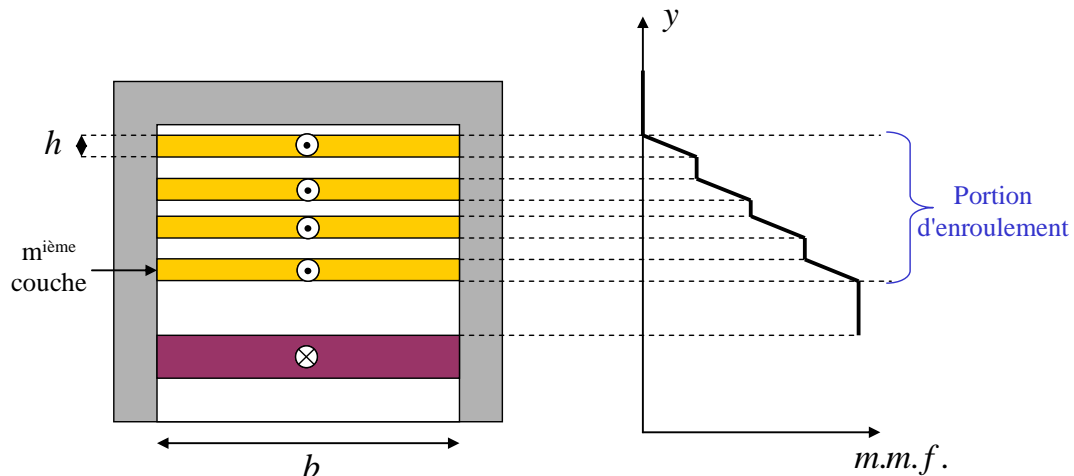


Figure 4-17 : Modèle unidirectionnel

La résistance et l'inductance d'une association de  $m$  plaques conductrices connectées en série sont respectivement données par (4.19) et (4.20).



$$R_{AC} = R_{DC} \cdot \left[ M' + \frac{(m^2 - 1)}{3} \cdot D' \right] \quad (4.19)$$

$$L_{AC} = L_{BF} \cdot \left[ \frac{3 \cdot M'' + (m^2 - 1) \cdot D''}{m^2 |\alpha^2 h^2|} \right] \quad (4.20)$$

$$\text{Avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \alpha h \cdot \coth(\alpha h) = M' + j \cdot M'' \\ D = 2\alpha h \cdot \tanh\left(\frac{\alpha h}{2}\right) = D' + j \cdot D'' \\ \alpha = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot \mu}{\rho}} = \frac{1 + j}{\delta} \\ m : \text{nombre de couches} \\ h : \text{épaisseur d'une couche} \end{array} \right.$$

En développant les calculs, on obtient les expressions de la résistance et de l'inductance d'un enroulement. Dowell nomme facteur de résistance  $F_R$  (4.21) et facteur d'inductance  $F_L$  (4.22) les quotients de ces quantités par leur valeur basse fréquence.

$$F_R = \frac{R_{AC}}{R_{DC}} = X \frac{\sinh(2X) + \sin(2X)}{\cosh(2X) - \cos(2X)} + \frac{2}{3} (m^2 - 1) \left( 2X \frac{\sinh(X) - \sin(X)}{\cosh(X) + \cos(X)} \right) \quad (4.21)$$

$$F_L = \frac{L_{DC}}{L_{BF}} = \left[ \frac{1}{2 \cdot m^2 X^2} \left[ 3 \cdot X \frac{\sinh(2X) - \sin(2X)}{\cosh(2X) - \cos(2X)} + (m^2 - 1) \cdot 2X \frac{\sinh(X) + \sin(X)}{\cosh(X) + \cos(X)} \right] \right] \quad (4.22)$$

$$\text{Avec} \quad X = \frac{h}{\delta}$$

Les formules (4.21) et (4.22) sont issues de la résolution des équations de Maxwell à une dimension. Cependant, elles nécessitent quelques hypothèses simplificatrices pour être appliquées. Les trois premières permettent de limiter le problème à une dimension et les deux dernières permettent de simplifier la complexité des solutions mathématiques.

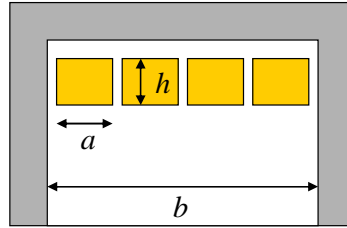
- Les couches conductrices occupent toute la largeur  $b$  de la fenêtre de bobinage.
- L'épaisseur d'une couche est plus petite que le rayon de courbure de cette couche.
- La perméabilité du ferrite sur les côtés de la fenêtre est considérée comme infinie.
- Toutes les couches d'un même enroulement possèdent la même épaisseur.
- Le champ magnétique est nul d'un côté d'une portion d'enroulement et maximum de l'autre côté.

La justification des trois premières hypothèses est, bien entendu, que le champ soit tangent aux plaques conductrices. La méthode de Dowell ne se limite cependant pas à ce genre de conducteurs "plaque", puisque dès le début, d'autres formes de conducteurs (rectangulaire, rond)

ont été traitées. La géométrie de ces couches de conducteurs est alors modifiée en vue d'être ramenée à une plaque équivalente.

#### IV.1.c. Equivalence nappe de conducteurs-plaque

Prenons l'exemple de conducteurs rectangulaires répartis de façon régulière dans une fenêtre de transformateur (Figure 4-18). Tant que les conducteurs ne sont pas trop espacés, le champ possède toujours le profil désiré.



**Figure 4-18 : Conducteurs rectangulaires**

Pour ce type de conducteurs, Dowell a défini un facteur de remplissage image de la proportion de cuivre dans la largeur de la fenêtre (4.23). Ce facteur est encore appelé porosité. En multipliant la résistivité initiale par ce facteur, une couche de même épaisseur qui occupe toute la largeur de la fenêtre a la même résistance que les fils initiaux en parallèles.

$$\eta = \frac{N_l \cdot a}{b} \quad \text{Avec } N_l : \text{nombre de conducteurs par couche} \quad (4.23)$$

Pour tenir compte de ce facteur dans les expressions de la variation de la résistance et de l'inductance, il faut remplacer la valeur de  $X$  par  $X^*$  (4.24) dans (4.21) et (4.22)

$$X^* = \frac{h}{\delta} \sqrt{\eta} = X \sqrt{\eta} \quad (4.24)$$

La justification et l'influence de la porosité ont donné lieu à de nombreuses publications. [ROBERT-99] présente d'ailleurs de façon très détaillée, l'erreur commise par Dowell dans son article initial.

Les conducteurs rectangulaires (ou carrés) ne sont pas les seuls à être pris en compte. Dowell a aussi proposé une approche pour des fils circulaires, transformés en conducteurs carrés puis en couche conductrice équivalente (Figure 4-19).

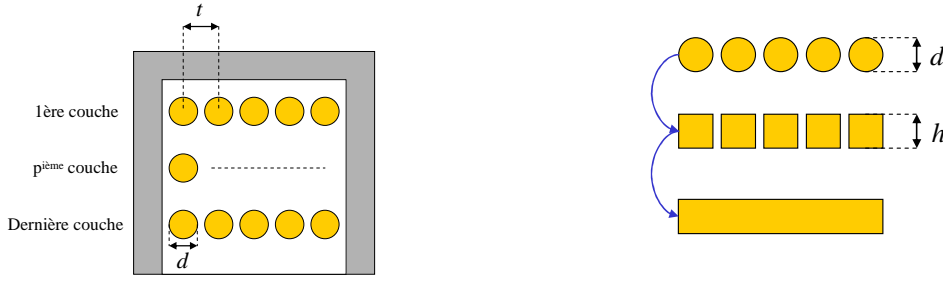


Figure 4-19 : Transformation de conducteurs ronds en plaques

Les conducteurs ronds de diamètre  $d$  sont transformés en carrés de même surface et de côté  $h$  (4.25). Les carrés sont alors accolés puis le rectangle obtenu est étendu à la hauteur du bobinage sans changer son épaisseur. Enfin, la résistivité est ajustée pour conserver la résistance en continu. Les expressions de la résistance (4.21) de l'inductance (4.22) sont ensuite modifiées pour tenir compte de cette transformation. Il faut alors remplacer la valeur de  $X$  par  $X^{**}$  (4.26).

$$h = d \sqrt{\frac{\pi}{4}} \approx 0.886d \quad (4.25)$$

$$X^{**} = \frac{h}{\delta} \sqrt{\eta} = \frac{d}{\delta} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \eta = \frac{1}{\delta} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{3/4} \frac{d^{3/2}}{t^{1/2}} \quad (4.26)$$

Sans plus s'étendre sur la méthode de Dowell puisque de nombreux auteurs l'ont déjà fait, nous allons maintenant présenter ses limites et son utilisation dans des transformateurs planar

#### IV.1.d. Limites en général et dans les transformateurs planar

La méthode de Dowell utilise un modèle simplifié unidimensionnel. C'est la technique la plus utilisée dans le monde industriel pour calculer des pertes cuivres d'un composant passif. Cependant, l'hypothèse concernant le champ, à savoir que ce dernier ne présente qu'une composante tangente la couche de conducteur n'est que très approximativement vérifiée dans un composant réel. En effet dans les transformateurs, différents éléments modifient l'allure supposée de ce champ. Trois facteurs peuvent avoir une importance fondamentale.

Premièrement, les couches sont supposées occuper la majeure partie des fenêtres de bobinage du transformateur. Cette hypothèse est souvent respectée dans les transformateurs bobinés, malgré le fait qu'une distance d'isolement est généralement requise entre les spires et le circuit magnétique. En technologie planar, cette hypothèse est souvent loin d'être respectée. Si on revient aux descriptions des fenêtres de transformateur présentées dans le Chapitre 3, on s'aperçoit que les conducteurs sont loin d'être répartis sur une fenêtre complète.

Dans un deuxième temps, lorsque les enroulements sont constitués de conducteurs distincts, le champ n'est pas souvent tangent aux conducteurs : il a tendance à tourner autour. C'est d'ailleurs le cas dans le transformateur présenté au Chapitre 3. Le transformateur que nous

étudierons au Chapitre 5 ne comprendra qu'une seule spire par couche. Dans ce cas, l'hypothèse du champ tangentiel sera respectée.

La troisième limitation apparaît lorsque le composant bobiné comporte un entrefer. Ce dernier vient modifier de façon notable le champ dans la fenêtre en créant un flux de fuite parasite près de l'entrefer. Le transformateur que nous avons eu l'occasion d'étudier et de caractériser finement (Chapitre 2) possède un large entrefer. De part son environnement d'électronique de puissance, il sert à la fois d'inductance pendant une demie période et de transformateur pendant l'autre.

Pour ces trois raisons, le comportement fréquentiel de ces transformateurs planars ne peut être déduit des formulations analytiques de Dowell. La géométrie très particulière des fenêtres et des conducteurs nous oblige à utiliser d'autres méthodes.

## IV.2. Circuits équivalents de plaques

La seconde méthode que nous allons présenter est appelée méthode des circuits équivalents de plaques. L'approche analytique proposée ici repose sur des études précédentes [KERADEC-96] [SCHELLMANN-00], dont le principe consiste à considérer un transformateur comme un empilement de plaques conductrices, isolantes et magnétiques. Toutes ces plaques sont supposées infinies. Elles sont constituées de matériaux supposés linéaires, homogènes et isotropes, décrits par leur perméabilité et leur permittivité complexes. Les échanges d'énergie se font par des ondes planes, perpendiculaires aux plaques. Cette approche permet d'associer, à chaque couche traversée, un circuit équivalent électrique.

### IV.2.a. Circuit équivalent associé à une plaque

Pour développer l'approche unidirectionnelle, considérons une plaque infinie, perpendiculaire à  $Oz$ , d'épaisseur  $a$ , dont une portion de hauteur  $b$  et de profondeur  $c$  est prise en considération (Figure 4-20). Cette plaque est exposée à des ondes planes incidentes et réfléchies sur ses deux faces. L'excitation magnétique  $H$  est parallèle à  $Oy$ . Si la plaque est conductrice, une alimentation électrique, caractérisée par un courant  $I$  et une tension  $V$ , peut être reliée à cette couche. Un courant de conduction parallèle à  $Ox$  circule alors à l'intérieur. La couche est soumise à trois flux de puissance, une puissance d'entrée, une puissance injectée et une puissance de sortie.

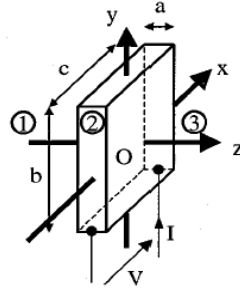


Figure 4-20 : Plaque élémentaire

Les relations liant les six variables externes ( $E_g$  et  $H_g$  en entrée,  $E_d$  et  $H_d$  en sortie ainsi que  $I$  et  $V$ ) admettent une écriture matricielle. La matrice 3x3 impliquée est symétrique (système passif) et le théorème d'Ampère montre que le courant  $I$  est lié aux excitations  $H_g$  et  $H_d$  appliquées sur les deux faces (4.27).

$$H_g - H_d = J \quad (4.27)$$

En définitive, la relation matricielle se réduit à deux équations [KERADEC-96] qui se représentent sous forme quadripolaire (Figure 4-21).

$$E_g - E_s = Z_1 \cdot H_g + Z_2 \cdot J \quad (4.28)$$

$$E_d - E_s = -Z_1 \cdot H_d + Z_2 \cdot J \quad (4.29)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} J = -\frac{I}{b} \\ E_s = -\frac{V}{c} \end{cases} \Leftrightarrow Z = \frac{V}{I} = \frac{E_s}{J} \frac{c}{b} \quad (4.30)$$

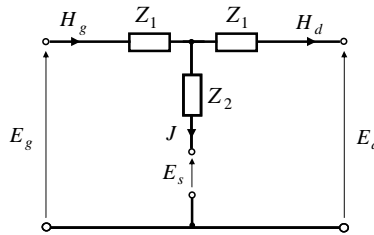


Figure 4-21 : Schéma équivalent sous forme quadripolaire

On peut modifier la Figure 4-21 afin d'introduire la tension  $V$  et le courant  $I$  d'alimentation à la place du champ électromoteur  $E_s$  et le courant par unité de longueur  $J$ . Ces quatre grandeurs sont liées par (4.30). Le schéma peut donc être modifié en conséquence en utilisant un coupleur parfait de rapport  $\sqrt{\frac{c}{b}}$  (Figure 4-22).

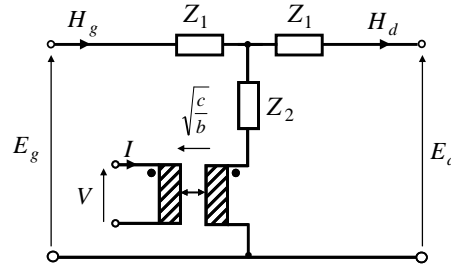


Figure 4-22 : Circuit électrique équivalent d'une plaque conductrice

Les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  dépendent du déphasage  $\phi$  (4.31) et de l'atténuation  $A$  (4.32) provoqués par la traversée du milieu d'épaisseur  $a$  ainsi que de l'impédance caractéristique  $Z_c$  de ce milieu (4.33).

$$\phi = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \cdot a \quad (4.31)$$

$$A = e^{-j\phi} \quad (4.32)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (4.33)$$

$Z_1$  et  $Z_2$  s'expriment alors simplement selon (4.34) et (4.35).

$$Z_1 = Z_c \frac{1-A}{1+A} = Z_c \cdot j \cdot \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (4.34)$$

$$Z_2 = Z_c \frac{2A}{1-A^2} = Z_c \frac{1}{j \cdot \sin(\phi)} \quad (4.35)$$

En basse fréquence, ces expressions se simplifient. Les impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  sont alors homogènes respectivement à une inductance (4.36) et à une capacité (4.37), tout au moins si  $\mu$  et  $\varepsilon$  ne varient pas avec la fréquence.

$$\text{en B.F. } Z_1 \approx j \cdot Z_c \frac{\phi}{2} = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \frac{a}{2} \Leftrightarrow \mu \frac{a}{2} = L \quad (4.36)$$

$$\text{en B.F. } Z_2 = Z_c \frac{1}{\phi} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot a} \Leftrightarrow \varepsilon \cdot a = C \quad (4.37)$$

Lorsque plusieurs couches parallèles sont traversées les unes à la suite des autres, il suffit de relier leurs quadripôles représentatifs en cascade pour obtenir le circuit équivalent de l'ensemble. Grâce à cette technique, le problème de modélisation électromagnétique se réduit à un simple problème de circuiterie électrique.

#### IV.2.b. Expressions des impédances pour les trois types de plaque

Le circuit présenté sur la Figure 4-22 est général mais, pour être utilisé, il doit être personnalisé pour chaque type de matériau. Par exemple, seules les couches conductrices nécessitent une alimentation électrique. Les autres types de matériaux, non alimentés, se représentent simplement par un dipôle série ( $2Z_1$ ). Pour étudier le comportement d'un transformateur, trois types de milieu doivent être distingués : conducteur, isolant et magnétique. Nous allons maintenant traiter ces trois cas particuliers.

##### IV.2.b.i. Couche conductrice (Cuivre...)

Une plaque conductrice est définie par sa résistivité  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  et son épaisseur  $ep$ . Pour un conducteur, la permittivité  $\varepsilon$  est directement reliée à la conductivité  $\sigma$  (4.38). Le déphasage  $\phi$  et l'impédance caractéristique s'expriment alors avec (4.39) et (4.40).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{j \cdot \omega} \quad (4.38)$$

$$\phi = \omega \sqrt{\frac{\sigma}{i \cdot \omega} \mu_0} \cdot ep = (1 - j) \frac{ep}{\delta} \quad (4.39)$$

$$Z_c = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \rho \cdot \mu_0} = (1 + j) \frac{1}{\sigma \delta} \quad (4.40)$$

En posant  $x = \frac{ep}{\delta}$ , les expressions des éléments  $Z_1$  et  $Z_2$  du quadripôle équivalent se mettent sous la forme :

$$Z_1 = r_0 \cdot x \cdot \frac{\sinh(x) - \sin(x) + j \cdot [\sinh(x) + \sin(x)]}{\cosh(x) + \cos(x)} \quad (4.41)$$

$$Z_2 = r_0 \cdot 2x \cdot \frac{\sinh(x) \cdot \cos(x) + \cosh(x) \cdot \sin(x) + j \cdot [\sinh(x) \cdot \cos(x) - \cosh(x) \cdot \sin(x)]}{\cosh(2x) - \cos(2x)} \quad (4.42)$$

$$\text{Avec} \left| \begin{array}{l} x = \frac{ep}{\delta} \\ r_0 = \frac{1}{\sigma \cdot a} : \text{Valeur de } Z_2 \text{ en B.F.} \end{array} \right.$$

##### IV.2.b.ii. Couche d'air (ou d'isolant)

Contrairement à une couche conductrice, l'approximation B.F. d'une couche d'air est valable très haut en fréquence. Une couche d'air d'épaisseur  $ep\_a$  se modélise donc simplement par un dipôle dont l'impédance est donnée par la relation (4.43) : c'est une inductance.

$$Z_a = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot ep\_a \quad \Leftrightarrow \mu_0 ep\_a = L \quad (4.43)$$

#### IV.2.b.iii. Matériau magnétique (Ferrite)

Une couche magnétique est caractérisée par son épaisseur  $ep\_f$  et sa perméabilité  $\mu_r$ . L'approximation B.F. étant valable très haut en fréquence, comme pour modéliser une couche d'air, le modèle le plus simpliste est une inductance (4.44). Ses pertes peuvent cependant être prises en compte de diverses manières. Une résistance en parallèle peut être ajoutée à l'inductance magnétisante en première approximation. D'autres modèles plus élaborés ont été développés [KERADEC-03], mais leur utilisation n'est pas justifiée dans la gamme de fréquence envisagée ici.

$$Z_f = i \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot ep\_f \Leftrightarrow \mu_0 \mu_r ep\_f = L \quad (4.44)$$

#### IV.2.c. Plaque constituée de fils parallèles connectés en série

Les plaques invoquées traditionnellement dans le cas de transformateurs bobinés sont des regroupements de  $n_t$  conducteurs connectés en série et transformés en rectangle équivalent par la méthode de Dowell [DOWELL-66]. Nous avons vu dans la partie IV.1.c comment procéder à la transformation de conducteurs cylindriques en plaques équivalentes. Au niveau du schéma équivalent, une plaque de  $n_t$  conducteurs cylindriques sera représentée par le circuit de la Figure 4-23. Le nombre de conducteurs est introduit à l'intérieur du coupleur pour respecter le théorème d'Ampère.

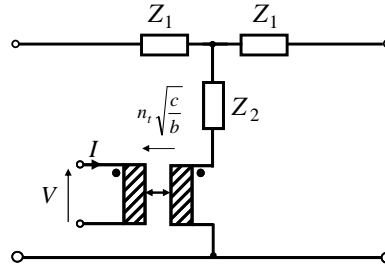


Figure 4-23 : Circuit équivalent d'une plaque de  $n_t$  conducteurs

#### IV.2.d. Groupeement de plaques conductrices identiques

Nous venons de voir qu'une couche équivalente pouvait être constituée de plusieurs conducteurs cylindriques ou rectangulaires, connectés en série. Un transformateur est généralement constitué de plusieurs couches de ce type, reliées en série ou en parallèle. Chaque couche se représentant à la manière de la Figure 4-23, la multiplication des couches induit forcément une complication du circuit électrique. Des regroupements de couches sont possibles



en vue de limiter le nombre d'éléments du circuit équivalent et réduire sa complexité. Nous allons maintenant voir comment mettre des couches en série ou en parallèle.

#### IV.2.d.i. Mise en série de couches conductrices

$n_l$  couches identiques de  $n_t$  spires sont électriquement reliées en série. Chaque couche élémentaire, séparée de sa voisine par une zone d'air (d'impédance  $Z_a$ ), a pour éléments caractéristiques  $Z_1$  et  $Z_2$  (Figure 4-24).

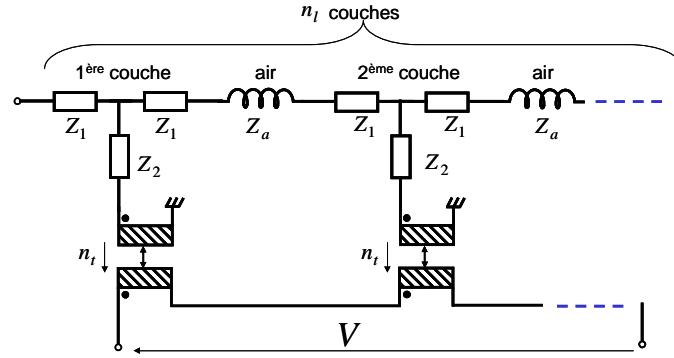


Figure 4-24 :  $n_l$  couches de  $n_t$  spires en série

Le schéma équivalent de cet ensemble, issu de [SCHELLMANNNS-00], est donné par la Figure 4-25.

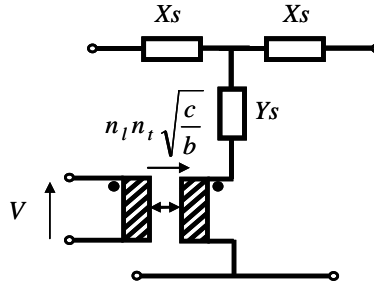


Figure 4-25 : Circuit équivalent d'un enroulement de  $n_l$  couches de  $n_t$  spires en série

Les impédances  $X_s$  (4.45) et  $Y_s$  (4.46), s'expriment en fonction des éléments  $Z_1$  et  $Z_2$  d'une couche de cuivre et de l'impédance  $Z_a$  de l'air séparant chaque couche.

$$X_s = n_l Z_1 + \frac{n_l - 1}{2} Z_a \quad (4.45)$$

$$Y_s = \frac{Z_2}{n_l} - \frac{n_l^2 - 1}{6n_l} (2Z_1 + Z_a) \quad (4.46)$$

#### IV.2.d.ii. Mise en parallèle de couches conductrices

La mise en parallèle de couches conductrices identiques consiste à relier en parallèle les alimentations électriques de ces couches (Figure 4-26). Cette représentation peut être simplifiée (Figure 4-27) car tous les coupleurs impliqués présentent le même rapport de transformation.

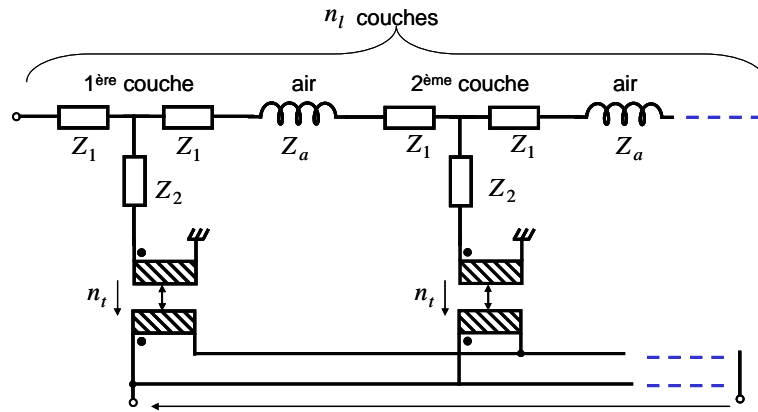


Figure 4-26 :  $n_l$  couches de  $n_t$  spires en parallèle

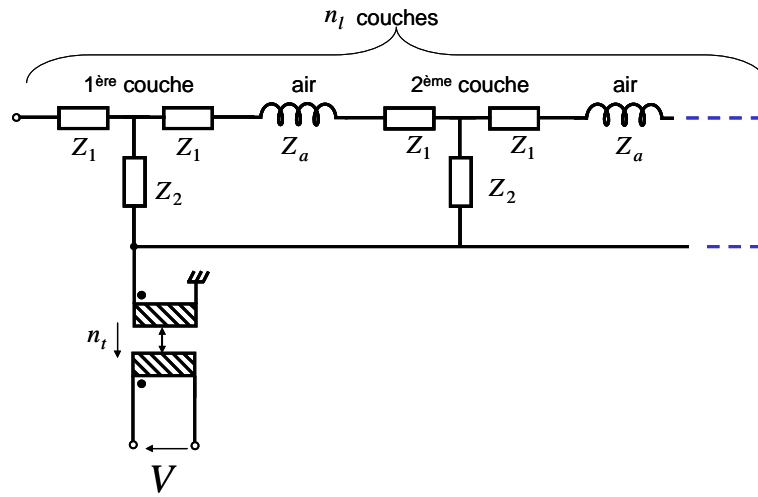


Figure 4-27 : Simplification du schéma équivalent de  $n_l$  couches de  $n_t$  spires en parallèle à un seul coupleur

Nous allons maintenant regrouper ces  $n_l$  quadripôles en seul (Figure 4-28).

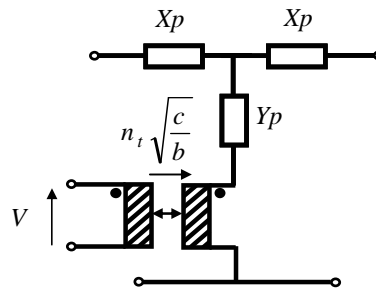
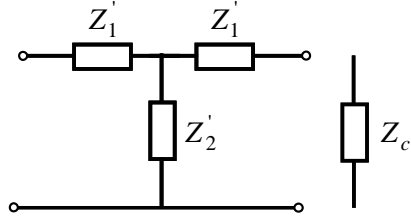


Figure 4-28 : Circuit équivalent d'un enroulement de  $n_l$  couches de  $n_t$  spires en parallèle

En coupant les impédances d'air en deux parties égales, le circuit électrique de la Figure 4-27 se ramène à une succession de quadripôles symétriques identiques (Figure 4-29). On a alors

$Z'_1 = Z_1 + \frac{Z_a}{2}$ . Pour établir le schéma équivalent dans cette configuration, il est commode d'utiliser les propriétés des quadripôles symétriques.



**Figure 4-29 : Quadripôle symétrique et impédance caractéristique**

L'impédance caractéristique  $Z_c$  d'un quadripôle est définie de façon telle que, lorsqu'un quadripôle est chargé par cette impédance, l'impédance vue de son entrée est égale à  $Z_c$ . Cette impédance caractéristique peut s'exprimer en fonction des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  de sa représentation en 'T' (4.47). Avec cette impédance de charge, l'atténuation en tension vaut  $Gva$  (4.48).

$$Z_c = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_2} \quad (4.47)$$

$$Gva = \frac{Z_2}{Z_c + Z_1 + Z_2} \quad (4.48)$$

Si  $N$  quadripôles identiques sont placés en cascade, l'impédance caractéristique vue de l'entrée de l'ensemble vaut aussi  $Z_c$  et le gain en tension vaut  $Gva^N$ . En partant de ces deux valeurs, les expressions des deux impédances  $Xp$  et  $Yp$  du quadripôle en 'T' équivalent (Figure 4-28) sont données par (4.49) et (4.50) (cf. Annexe V).

$$Xp = Z_c \frac{1 - Gva^N}{1 + Gva^N} \quad (4.49)$$

$$Yp = Z_c \frac{2Gva^N}{1 - Gva^{2N}} \quad (4.50)$$

Afin de faire apparaître, dans le circuit de la Figure 4-27, une succession de quadripôles identiques, chaque couche conductrices a été associée à une demie couche d'air. Sur les faces d'entrées et de sortie d'un bloc de couches en parallèle, il faut maintenant ôter cette demie couche d'air en soustrayant son impédance de  $Xp$ . On obtient ainsi l'impédance  $X'p$  (4.51) de la représentation finale de l'enroulement.

$$X'p = Z_c \frac{1 - Gva^N}{1 + Gva^N} - \frac{Z_a}{2} \quad (4.51)$$

## IV.2.e. Illustration de la méthode

Considérons un transformateur à deux enroulements monocouches réalisé sur un noyau de type EP. Il possède une symétrie de révolution autour de son axe  $Ox$ . Après déroulement, l'agencement de ses couches ressemble à un empilement (Figure 4-30) dont la profondeur  $c$  est prise égale à la longueur de la spire moyenne. La hauteur  $b$  est égale à la largeur des couches. Chaque couche conductrice est séparée par une couche d'isolant, magnétiquement équivalente à de l'air. Le nombre de spires du primaire ( $n_{11}$ ) ainsi que celui du secondaire ( $n_{12}$ ) du transformateur sont introduits dans les rapports de transformation des coupleurs qui assurent l'alimentation des couches.

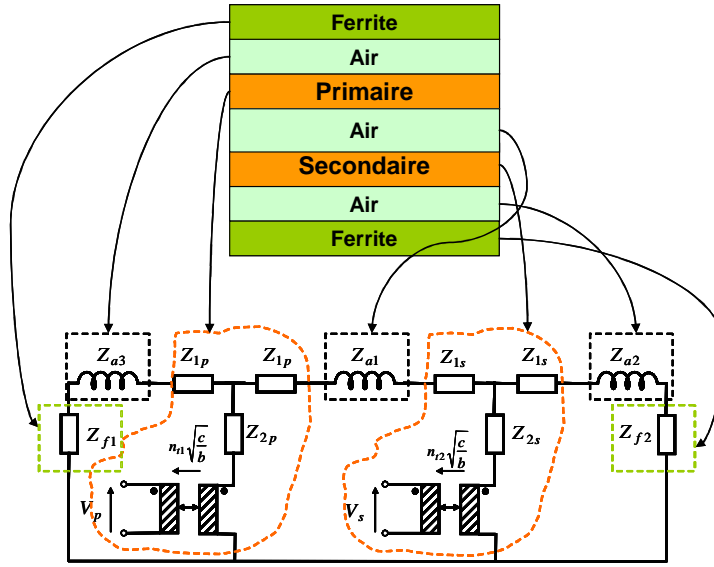


Figure 4-30 : Circuit équivalent établi par la méthode des plaques d'un transformateur deux enroulements

Après plusieurs transformations de circuit classique, le schéma de la Figure 4-30 se représente aussi sous la forme, plus habituelle, d'un modèle en  $\pi$  (Figure 4-31). Toutes les impédances introduites dépendent de la fréquence. L'impédance équivalente du circuit à vide dépend essentiellement de l'impédance magnétisante  $\eta_1^2 \cdot (Z_{1p} + Z_{a3} + Z_{f1})$ . En pratique, l'impédance du ferrite ( $Z_{f1}$ ) est prépondérante dans cette expression.

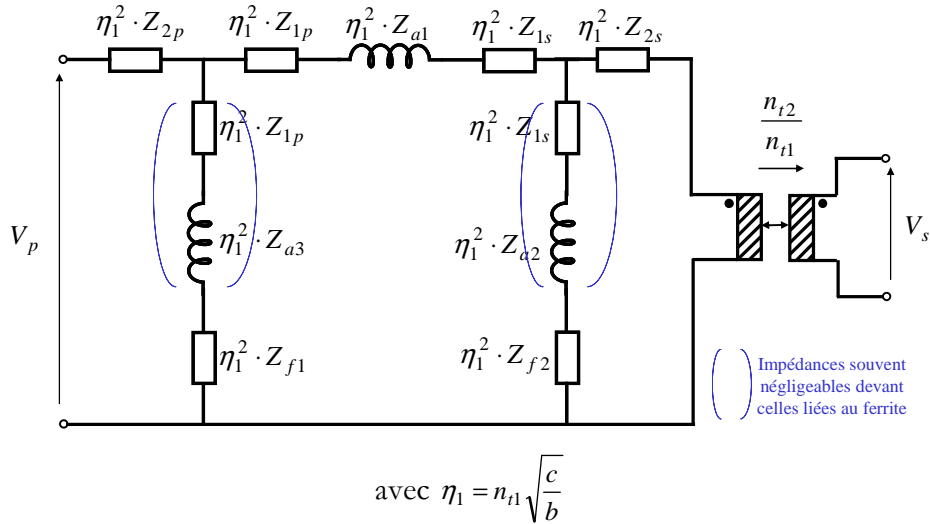


Figure 4-31 : Circuit équivalent au transformateur de la figure 8

Il faut cependant être critique vis-à-vis de ce modèle. Ce dernier est valable, lorsque les conducteurs, ou plutôt les couches de conducteurs, occupent toutes la même largeur, sont alignés face à face et que, sur toutes les surfaces conductrices, l'excitation magnétique est constante et parallèle à la surface. Une limitation supplémentaire provient du fait que seul le champ électrique considéré est parallèle aux couches. Ce modèle ne peut donc pas rendre compte des effets électrostatiques.

En dépit de ses limitations, cette méthode présente l'intérêt de transcrire le comportement magnétique en un circuit équivalent et nous verrons, dans le chapitre 5 qu'elle peut nous servir pour expliquer quantitativement la mauvaise répartition du courant entre les couches parallèles d'enroulement.

### IV.3. Perméabilité complexe

Pour tenir compte des effets de courants induits dans un conducteur au cours de simulations électromagnétiques, le maillage du dispositif est essentiel. En effet, au moins deux mailles doivent être présente dans l'épaisseur de peau, afin que le système puisse être résolu de façon correcte. Au vu de la complexité de certains dispositifs à simuler, le maillage est très difficile à réaliser et nécessite des ordinateurs très puissant.

Afin de remédier à ce problème de surcharge mémoire, lorsque l'on s'intéresse aux pertes par effet de proximité dans un composant, la méthode dite de la "perméabilité complexe", ou " $\mu$ -complexe", a été introduite. Elle consiste à considérer qu'une zone conductrice comprenant des conducteurs et de l'air est homogène et de perméabilité complexe  $\mu^*$  ( $\mu^* = \mu' + j \cdot \mu''$ ). C'est donc une technique d'homogénéisation et  $\mu^*$  est choisi pour que le volume considéré conduise aux

mêmes échanges énergétiques que le système initial. A partir du moment où le conducteur n'est plus le siège d'effets de peau ni de proximité (puisque sa conductivité  $\sigma$  a été intégrée dans la perméabilité  $\mu^*$ ), la règle des deux mailles dans l'épaisseur de peau ne se justifie plus.

De nombreuses études ont été menées par différents auteurs pour trouver la perméabilité complexe de conducteurs ronds [NAN-05] ou de formes diverses [GYSELINCK-05]. Au sein de notre laboratoire, les travaux sur ce sujet ont été initiés afin de calculer les pertes par effet de proximité dans une nappe de conducteurs cylindriques [KERADEC-91]. Ces travaux ont ensuite été approfondis dans le cas de transformateurs de distribution dans le cas 2D [MOREAU-98], puis dans le cas 3D [JOAN-04] [MOREAU-05] et, plus récemment, au cas particulier des transformateurs planars [PHUNG-06-1].

#### IV.3.a. Equivalence pour une plaque-Modèle 1D

Le principe de base consiste à attribuer, à une zone de conductivité  $\sigma$ , une perméabilité complexe absorbant la même puissance complexe lorsqu'elle est soumise à un champ incident  $H_0$  homogène. Le calcul analytique direct de la perméabilité équivalente est ici un calcul à une dimension. On considère que le champ incident n'est pas modifié par la plaque infinie (Figure 4-32).

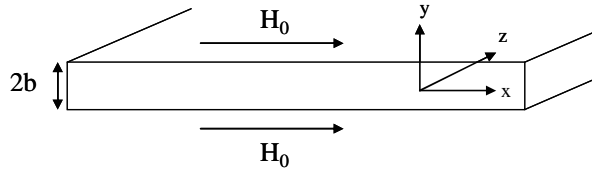


Figure 4-32 : Modèle une dimension pour une plaque infinie

Le champ dans la plaque peut se mettre sous la forme (4.52) et la puissance complexe s'exprime en fonction de cette valeur (4.53).

$$H_x(y) = H_0 \cdot \frac{ch(\alpha y)}{ch(\alpha b)} \text{ avec } \alpha = \frac{1+j}{\delta} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{1}{\sigma} J \bar{J} + j\mu\omega H \bar{H} \\ &= i\mu\omega H_0^2 \left( \frac{ch\left(\frac{2y}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{ch\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + j \cdot \frac{ch\left(\frac{2y}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2y}{\delta}\right)}{ch\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

En intégrant ensuite cette puissance sur l'épaisseur du conducteur, on obtient l'expression de la puissance pénétrant dans la plaque (4.54).

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-b}^b p(y) dy \\
 &= \sqrt{\frac{2\mu\omega}{\sigma}} H_0^2 \left( \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} + j \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

En remplaçant le matériau conducteur par un matériau 'magnétique', les pertes dans ce dernier s'expriment suivant (4.55)

$$P = j \cdot \mu^* \omega \cdot H \bar{H} = j \cdot (\mu' + j \cdot \mu'') \omega \cdot H \bar{H} \tag{4.55}$$

L'équivalence s'effectuant au niveau de l'égalité des puissances, les valeurs de la perméabilité complexe (4.56) se déduisent de l'identification de (4.54) et (4.55).

$$\begin{aligned}
 \mu' &= \frac{\mu\delta}{2b} \left( \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right) \\
 \mu'' &= -\frac{\mu\delta}{2b} \left( \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Les valeurs de perméabilité obtenues, très simples à implémenter dans logiciel de calcul, sont exactes si la plaque est considérée comme infinie et que le champ incident sur ses faces est uniforme. En pratique, ces conditions sont très difficile à obtenir.

#### IV.3.b. Extension au modèle 2D et limites

Pour étendre cette méthode unidimensionnelle à deux dimensions et déterminer une perméabilité anisotropique, un calcul est mené en considérant que le champ  $H_0$  de la Figure 4-32 subit une rotation de  $90^\circ$  et est maintenant perpendiculaire à la plaque [MOREAU-98]. On voit ici apparaître de façon notable les limites de cette méthode. En effet, le champ parfaitement tangentiel sur les faces d'un conducteur ne peut être réaliste que si l'on s'intéresse à une plaque infinie. A partir du moment où le conducteur considéré est fini, des effets de bords apparaissent et les champs n'ont pas du tout la forme désirée, nécessaire à l'application de la méthode 1D dans les deux dimensions. Le calcul de la perméabilité complexe, dans ce cas, est sujet à des erreurs significatives, limitant grandement l'utilisation de cette méthode.

#### IV.3.c. Equivalence pour un réseau rectangulaire de fils méplats- Application aux transformateurs planar

Nous avons collaboré avec l'équipe modélisation afin d'appliquer la méthode de la perméabilité complexe à un transformateur planar en 2 et 3 dimensions [PHUNG-06-1]. Le principe de calcul est basé sur l'hypothèse qu'il y a une infinité de conducteurs rectangulaires identiques, disposés selon un réseau périodique rectangulaire (Figure 4-33). Dans ce cas, la contribution de chaque conducteur est négligeable par rapport au champ total. Pour créer un champ parfaitement horizontal autour du conducteur, on fixe les conditions aux limites d'une cellule élémentaire, qui, pour des raisons de symétrie, correspond au quart d'un conducteur.

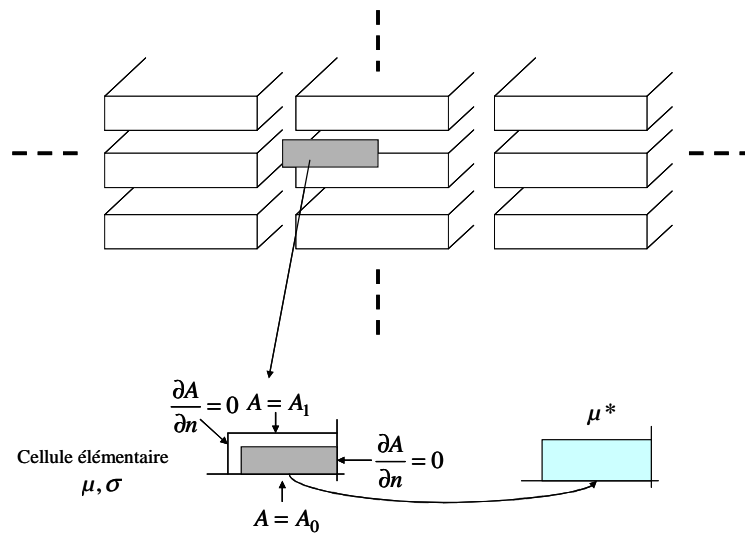


Figure 4-33 : Paquet de conducteurs et cellule élémentaire

La simulation, très simple, d'une cellule élémentaire à l'aide d'un logiciel de calcul éléments finis permet de déterminer la perméabilité complexe  $\mu^*$  à attribuer à une cellule.

Une simulation complète d'un transformateur planar à deux enroulements a ensuite été réalisée afin de tester cette technique d'homogénéisation. Les résultats de la simulation avec perméabilité complexe sont comparés à une simulation du dispositif réel, maillé en fonction de l'épaisseur de peau. Les résultats sont très intéressants puisque, pour un transformateur constitué d'une spire primaire et de deux couches secondaires de cinq spires chacune, les évaluations de la puissance dues aux effets de proximité dans le secondaire à vide sont correctes à 6% près.

Dans le cas d'une simulation en 3 dimensions du même dispositif, les résultats sont encore plus intéressants. En effet, à 500 kHz, les pertes calculées à l'aide de la perméabilité complexe sont surestimée de 10%, mais pour un temps de calcul réduit à 1 minute et demie, alors que le calcul élément fini complet demande plus de 12 heures.



#### IV.3.d. Conclusion sur la méthode de la perméabilité complexe

Nous venons de présenter une technique de calcul permettant de déterminer les pertes par effet de proximité dans un transformateur. Cette méthode, dite de perméabilité complexe, donne des résultats intéressants mais elle est cependant bâtie sur des hypothèses de champ souvent non respectées dans la réalité. L'autre défaut de cet outil est qu'il n'est développé en deux dimensions que grâce à des simulations électromagnétiques et non de façon analytique. Le calcul analytique à une dimension (plaque) est valable sous condition que le champ considéré soit bien tangentiel aux différentes plaques conductrices.

Nous retrouvons ici la même hypothèse restrictive que pour les autres méthodes décrites plus haut. Pour éviter de recourir à de telles considérations sur la forme du champ dans une fenêtre de transformateur, nous allons maintenant nous attarder un peu sur une méthode ne nécessitant aucune hypothèse de ce genre, la méthode PEEC.

#### IV.4. Méthode $\mu$ PEEC

Les méthodes introduites ont montré leurs limites lorsque le champ n'est pas parfaitement tangent aux conducteurs. Sans faire aucune hypothèse sur le type de champ, ni sur la répartition du courant dans les conducteurs, une méthode a été mise au point par [RUEHLI-74] pour chercher le circuit équivalent de systèmes composés de multiples conducteurs. Cette méthode est connue sous l'abréviation PEEC (Partial Element Equivalent Circuit). Elle consiste à diviser tout conducteur parcouru par un courant non uniforme en un assemblage, en parallèle, de conducteurs plus fins parcourus chacun par un courant uniforme. S'ils sont suffisamment fins, ces conducteurs ne sont plus le siège de courants induits.

Des études ont été menées, au sein de notre laboratoire [CLAVEL-96], afin d'utiliser cette méthode pour accéder à la répartition des courants dans des conducteurs rectangulaires. Elles ont abouti lieu à la création d'un logiciel de calcul d'inductances de câblage InCa<sup>®</sup> [INCA]. De nombreuses études ont ensuite mis à profit cette méthode et ce logiciel, notamment pour réduire les pertes d'un jeu de barres de distribution [GUICHON-01] et pour connaître la répartition du courants dans des interconnexions d'électronique de puissance [MARTIN-05] ou tout récemment, dans des redresseurs forte puissance [AIME-06].

L'utilisation de la méthode PEEC a longtemps été restreinte à des conducteurs seuls ou multiples mais positionnés dans l'air, car les matériaux magnétiques ne pouvaient pas être pris en compte. Des travaux récents de notre équipe ont abouti à développer une formulation spécifique, exploitable en présence de matériaux magnétiques [GONNET-05]. Cette méthode plus complète est maintenant connue sous le nom de  $\mu$ PEEC.

#### IV.4.a. Principe de la méthode PEEC

Des conducteurs massifs, parcourus par des courants et soumis à des effets de peau et de proximité sont décomposés en une multitude de conducteurs élémentaires qui sont supposés parcourus par des courants uniformes (Figure 4-34).

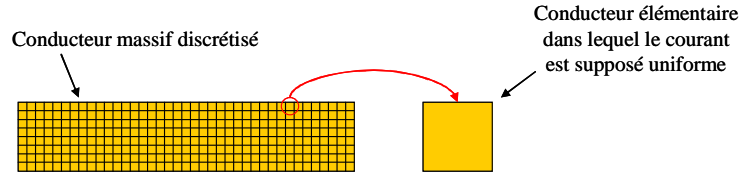


Figure 4-34 : Discretisation d'un conducteur massif en conducteurs élémentaires

Chaque conducteur élémentaire peut être représenté, de façon schématique, par son inductance partielle, sa résistance propre et les mutuelles partielles entre ce conducteur et tous les autres conducteurs élémentaires. D'un point de vue électrique, la relation matricielle (4.57) regroupe toutes les relations qui résultent de cette représentation.

$$[V] = [Z] \cdot [I]$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & R_i & \\ 0 & & \end{bmatrix} + j \cdot \omega \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & M_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Tous les fils élémentaires d'un même conducteur sont ensuite reliés électriquement en parallèle. Toutes les tensions de la matrice  $[V]$  sont, dans un premier temps, supposées égales mais nous reviendrons sur l'importance de cette mise en parallèle à la fin de ce chapitre. Un exemple de circuit équivalent obtenu pour un conducteur découpé en quatre cellules élémentaires est présenté sur la Figure 4-35.

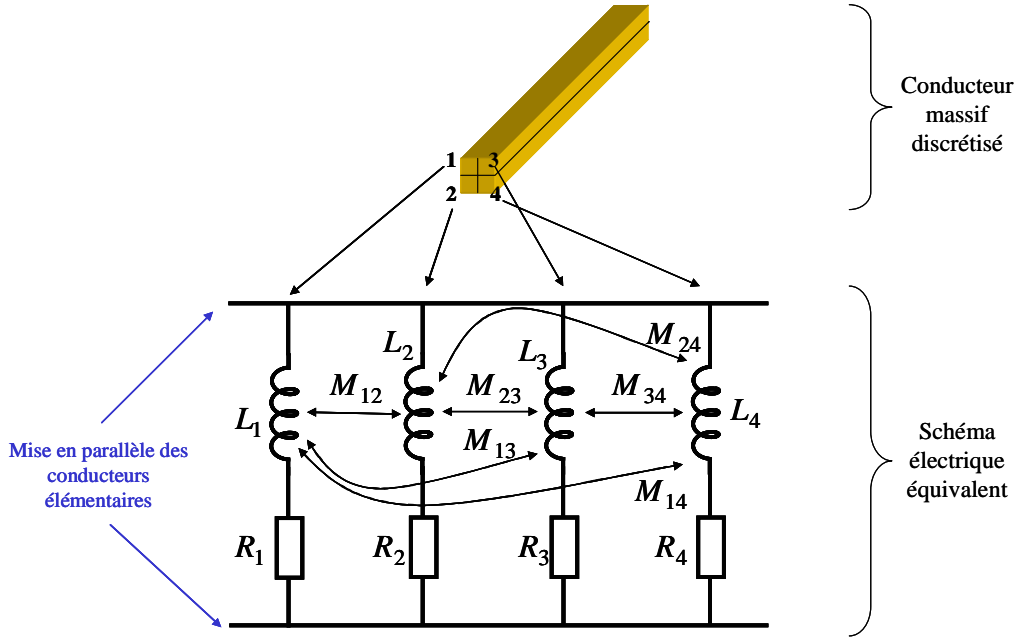


Figure 4-35 : Schéma équivalent obtenu après discrétisation d'un conducteur massif

A ce stade de la présentation de la méthode PEEC, il est nécessaire d'introduire la notion d'inductance et de mutuelle partielle. La définition habituelle de l'inductance suppose qu'elle est associée à un circuit fermé. Pourtant, chaque portion d'un circuit contribue à l'inductance totale d'une boucle de courant. En conséquence, l'inductance partielle peut être définie à condition de considérer aussi la contribution à l'inductance créée par un segment sur un autre [SCHANEN-00]. D'un point de vue mathématique, ceci se traduit par la formulation (4.58),  $Mp$  représentant la mutuelle partielle entre le segment  $n$  et le segment  $m$ . Dans le cas où  $m = n$  la valeur obtenue correspond une inductance partielle.

$$Mp_{n,m} = \frac{1}{I} \int_{S_n} \vec{A}_{S_m} \cdot d\vec{l} \quad \text{Avec :} \quad \begin{array}{l} A_{S_m} : \text{Potentiel vecteur créé par le segment } S_m \\ I : \text{Courant dans le segment} \end{array} \quad (4.58)$$

Le schéma équivalent obtenu (Figure 4-35) est constitué d'éléments localisés. Cela signifie que l'énergie du système peut toujours être transcrite par des éléments localisés à condition d'en introduire un nombre suffisant.

La méthode PEEC présente un autre avantage important. L'air entourant le système n'a pas besoin d'être maillé puisque l'énergie est totalement calculée dans les régions conductrices. Pour des simulations de dispositifs nécessitant un maillage important en éléments finis, ce dernier peut être allégé de façon drastique puisque seuls les zones conductrices doivent être maillés (découpés en zones élémentaires).

Les formules, nécessaires pour calculer les éléments des schémas équivalents dans le cas de conducteurs rectangulaires, sont présentées dans [CLAVEL-96] ou [GUICHON-01]. Ces calculs

ne sont valables que si les conducteurs élémentaires sont parallèles ou perpendiculaires entre eux. Toutefois, ces hypothèses ne constituent pas une limitation incontournable de la méthode.

#### IV.4.b. Prise en compte des matériaux magnétique-Extension au $\mu$ PEEC

La méthode PEEC a longtemps été limitée, en terme d'utilisation, à des dispositifs composés uniquement de conducteurs et excluant tout matériaux magnétique. Lors de ses travaux de thèse, Jean-Paul Gonnet [GONNET-05] a développé une méthode permettant de prendre en compte ces matériaux magnétiques. L'utilisation de la méthode PEEC n'est donc plus limitée aux conducteurs seuls. Des matériaux magnétiques peuvent être présents sous réserve qu'ils soient linéaires homogènes et isotropes, autrement dit qu'ils soient descriptibles par une perméabilité complexe et une résistivité.

Dans la méthode  $\mu$ PEEC, les dispositifs incluant un matériau magnétique sont modifiés en un dispositif équivalent (Figure 4-36). Des courants de surface sont ajoutés à l'interface séparant le milieu magnétique de l'air. On obtient ainsi un dispositif n'incluant plus que des courants circulant dans l'air et dans lequel le potentiel vecteur et l'induction sont identiques aux champs initiaux [KERADEC-05] (ce qui n'est pas le cas de l'excitation magnétique à l'intérieur des matériaux magnétiques).

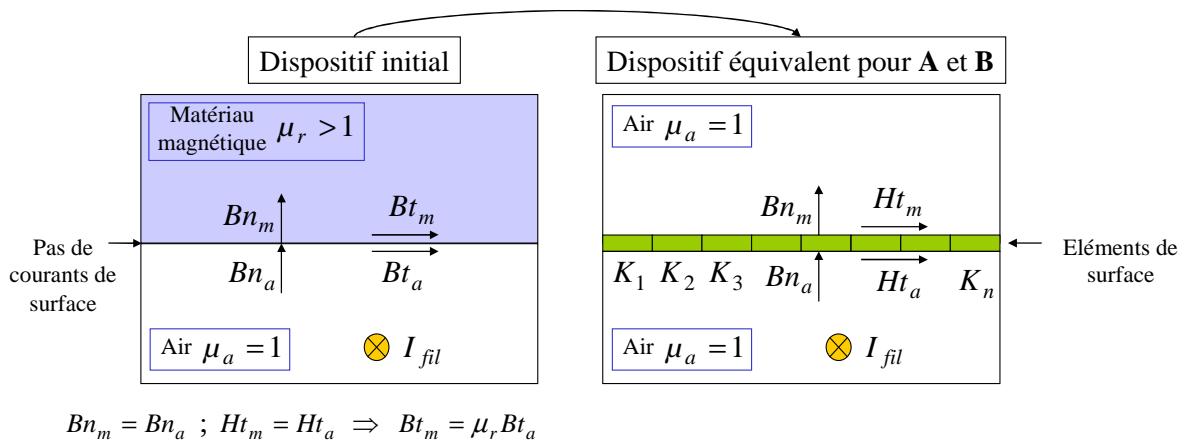


Figure 4-36 : Courants de surface à l'interface entre les milieux

Le champ créé en tout point d'un tel système est la somme des contributions des courants sources et des courants de surface. Si le matériau n'est pas purement magnétique ( $\sigma \neq 0$ ), ou si des conducteurs sont présents dans le dispositif étudié, ces derniers doivent, comme le requiert la méthode PEEC être subdivisé en conducteurs élémentaires. Dans ce cas, les éléments surfaciques et les conducteurs élémentaires contribuent à la création du champ dans tout l'espace.

La complexité de mise en œuvre d'une telle méthode nécessite un solveur numérique pour tenir compte de l'influence de tous les éléments, conducteurs ou courants surfaciques, dans le

calcul du champ total. Malgré cette complexité apparente, nous allons présenter une approche analytique visant à évaluer ces courants de surface.

#### IV.4.c. Vers une formulation analytique des courants de surface pour des fenêtres de transformateur

Intéressons nous de façon plus précise, aux conditions de passages entre les deux surfaces de la Figure 4-36 et à l'écriture matricielle qui en découle. La continuité de l'excitation tangentielle du système initial induit une discontinuité de l'induction tangentielle :  $Bt_m = \mu_r Bt_a$ .

Par définition, dans le système équivalent, les inductions sont identiques. Puisque ce système n'inclut plus de matériau magnétique, les excitations tangentielles sont de part et d'autre de la surface dans un rapport  $\mu_r$  et puisqu'il y a discontinuité, c'est qu'un courant  $K$  circule sur la surface. Ce courant ajoute une excitation tangentielle d'un côté et il soustrait la même de l'autre côté. Ainsi, si  $Ht$  est l'excitation tangentielle existant sur un point de la surface lorsque aucun courant superficiel ne circule en ce point, on a :

$$\frac{Ht + \frac{K}{2}}{Ht - \frac{K}{2}} = \frac{1}{\mu_r} \quad (4.59)$$

Cette relation (4.59) permet d'exprimer  $K$  en fonction de l'excitation tangentielle et de la valeur de la perméabilité du matériau magnétique (4.60).

$$K = -2Ht \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \quad (4.60)$$

Le premier objectif de la méthode étant de calculer les interactions entre deux fils fins élémentaires, nous cherchons ici le champ créé par un fil unique dans tout l'espace. Le champ tangentiel présent dans (4.60) peut se décomposer en deux parties. La première contribution,  $Hwt$ , est due au fil source parcouru par un courant  $I_{fil}$ . La seconde,  $Hst$ , est générée par tous les courants de surface. L'équation (4.60) peut donc s'écrire sous la forme (4.61).

$$K = -2 \cdot (Hwt + Hst) \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \quad (4.61)$$

Le champ tangentiel créé par le fil source en un point s'exprime donc simplement en fonction du courant de surface au même point et du champ généré par tous les courants de surface (4.62). Ce dernier dépend linéairement de tous les courants de surface, donc la relation (4.62) peut aussi s'écrire de façon matricielle (4.63).

$$Hwt = -\frac{1}{2} \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} K - Hst \quad (4.62)$$

$$Hwt_i = -\frac{1}{2} \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} K_i - Hst_i \text{ avec } Hst_i = \sum_j U_{i,j} K_j \quad (4.63)$$

En définitive, l'excitation tangentielle que crée un fil près d'un élément de surface, peut s'écrire en fonction des courants de surface uniquement (4.64). La matrice de transformation  $[V]$  inclut une partie qui dépend du courant de surface de l'élément considéré et une autre qui traduit l'influence de tous les autres courants de surface.

$$[Hwt] = [V][K] \quad (4.64)$$

$$\text{avec } V_{i,j} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} \delta_{i,j} - U_{i,j} \text{ et } \delta_{i,j} : \text{symbole de Kronecker}$$

Finalement, la relation (4.64) peut être inversée (4.65) afin de trouver le courant de surface qui circule partout sur le système équivalent.

$$[K] = [V]^{-1} [Hwt] \quad (4.65)$$

Dès que les courants de surface sont connus, le potentiel vecteur dû au conducteur élémentaire peut être connu partout. Cette méthode de calcul pour déterminer les courants surfaciques est valable pour toutes les positions de la source de champ. Pour un dispositif fixé, les matrices  $U$ ,  $V$  et  $V^{-1}$  restent inchangées quelque soit la position du fil source.

#### IV.4.d. Exemple de calcul : Fil dans un cylindrique magnétique

Les transformateurs qui nous intéressent sont composés de conducteurs rectangulaires et entourés par un circuit magnétique. Ils sont donc intégrables dans une approche  $\mu$ PEEC. Cependant, le calcul complet dans une géométrie suffisamment réaliste pour représenter un transformateur demande encore un peu de temps et quelques simplifications complémentaires. Nous allons revenir à un exemple simple afin d'illustrer la méthode à appliquer pour effectuer le remplacement du matériau magnétique par des courants de surface.

Pour appliquer la technique de calcul de courants de surface, prenons l'exemple d'un cylindre magnétique parfait (sans pertes) de rayon  $R$  et de perméabilité  $\mu_r$  (Figure 4-37). Nous cherchons l'induction créé par un fil localisé en  $(rw, \theta w)$  et parcouru par un courant  $I$ .

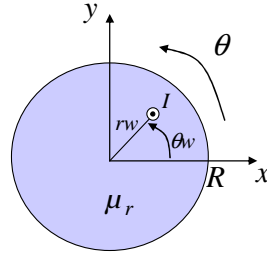


Figure 4-37 : Cylindre magnétique

Le potentiel vecteur créé par ce fil seul à l'intérieur du cylindre est décrit en coordonnées cylindriques par l'expression (4.66). Le courant dans le fil est multiplié par la perméabilité du milieu dans lequel il se trouve.

$$A_w(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \mu_r \cdot \ln(r^2 + r_w^2 - 2 \cdot r \cdot r_w \cdot \cos(\theta - \theta_w)) \quad (4.66)$$

La composante tangentielle de l'induction est obtenue en dérivant (4.66) et l'excitation s'en déduit en divisant l'induction par  $\mu_0$  puisque le matériau est considéré maintenant comme non magnétique (4.67)

$$H_w\theta(r, \theta) = \frac{\partial A_w}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} I \cdot \mu_r \cdot \frac{2(r - r_w \cdot \cos(\theta - \theta_w))}{r^2 + r_w^2 - 2 \cdot r \cdot r_w \cdot \cos(\theta - \theta_w)} \quad (4.67)$$

Des densités de courants sont créées sur la surface du cylindre en divisant cette dernière en  $N$  éléments (4.68).

$$\theta_i = \frac{2\pi}{N} i \quad (4.68)$$

Pour déterminer la matrice  $U$  dans cette configuration, on écrit l'expression de l'excitation tangentielle créée sur la surface du cylindre par un élément  $i$  sur un élément  $j$  (4.69).

$$H_s\theta_{i,j} = \frac{1}{4\pi} K_i \frac{2\pi R}{N} \cdot \frac{2(R - R \cdot \cos(\theta_i - \theta_j))}{R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos(\theta_i - \theta_j)} = \frac{1}{2N} K_i \quad (4.69)$$

La matrice  $U$  se déduit aisément de (4.69) et finalement la matrice  $V$  prend la forme (4.71).

$$U_{i,j} = \frac{1}{2N} \quad (4.70)$$

$$V_{i,j} = -\frac{1}{2} \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} \delta_{i,j} - U_{i,j} \quad (4.71)$$

Il ne reste plus qu'à inverser  $V$  pour déduire la valeur des courants de surface  $K_i$  (4.65).

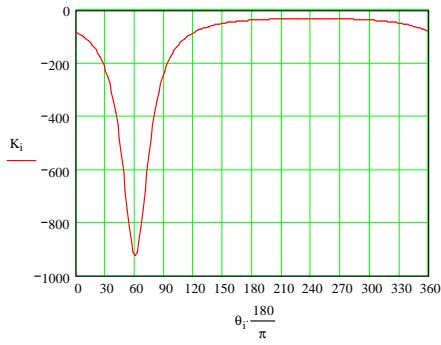


Figure 4-38 : Courant de surface

Le profil des courants sur la surface est présenté sur la Figure 4-38. Ce dernier a été tracé avec un cylindre de rayon  $R=1\text{cm}$  et de perméabilité  $\mu_r=10$  et un fil positionné en  $rw=0.75R$ ,  $\theta_v=60^\circ$  et  $I=1\text{A}$ . Le champ magnétique, quant à lui, est présenté sur la Figure 4-39. L'effet du fil seul, des courants de surface seuls et la combinaison des deux effets peuvent être visualisés sur ces trois figures.

Le champ obtenu finalement correspond bien à celui créé par un fil dans un cylindre magnétique. Les courants de surface calculés permettent donc d'éliminer le matériau magnétique qui posait problème lors de l'application de la méthode PEEC traditionnelle.

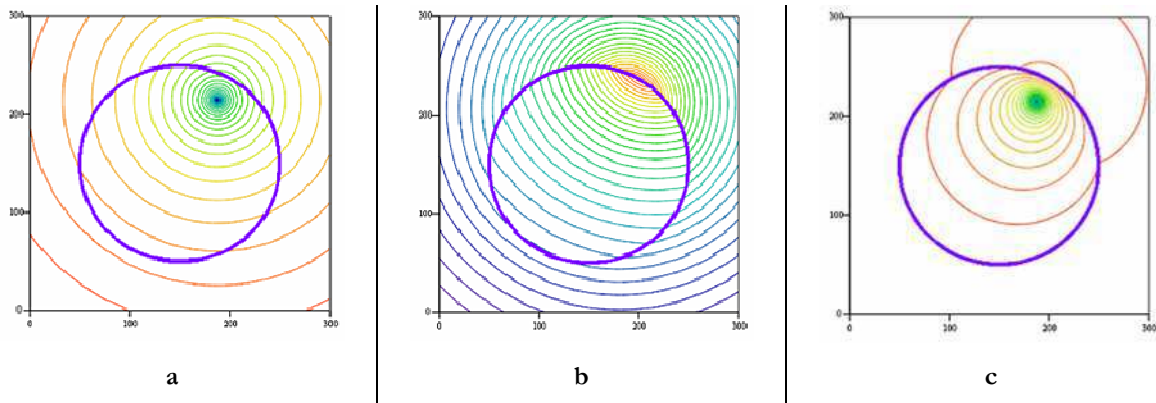


Figure 4-39 : Cartographie du champ magnétique

a : Fil seul | b : Courants de surface seuls | c : Fil et courants de surface

Cette première étape valide le principe de calcul des courants de surface dans le cas d'un cylindre magnétique. Ce cas admet une solution analytique exacte qui coïncide rigoureusement avec nos résultats. Afin d'étendre cette méthode à une fenêtre de transformateur, plusieurs étapes devront être franchies successivement (Figure 4-40). En premier, le fil sera placé dans un barreau de ferrite rectangulaire. Ce dispositif est très proche du cylindre magnétique que nous venons d'étudier, la différence venant de la forme rectangulaire et donc de l'expression du champ tangentiel. Lorsque cette première étude sera validée, on pourra aborder celle d'un barreau de ferrite avec un trou à l'intérieur. Cette deuxième étape permettra, avec des densités de courant sur les deux surfaces du matériau magnétique, de se rapprocher de la géométrie d'une fenêtre de transformateur. Enfin, la troisième étape consistera à étudier la mutuelle existant entre deux fils fins à l'intérieur de ce type de fenêtre.



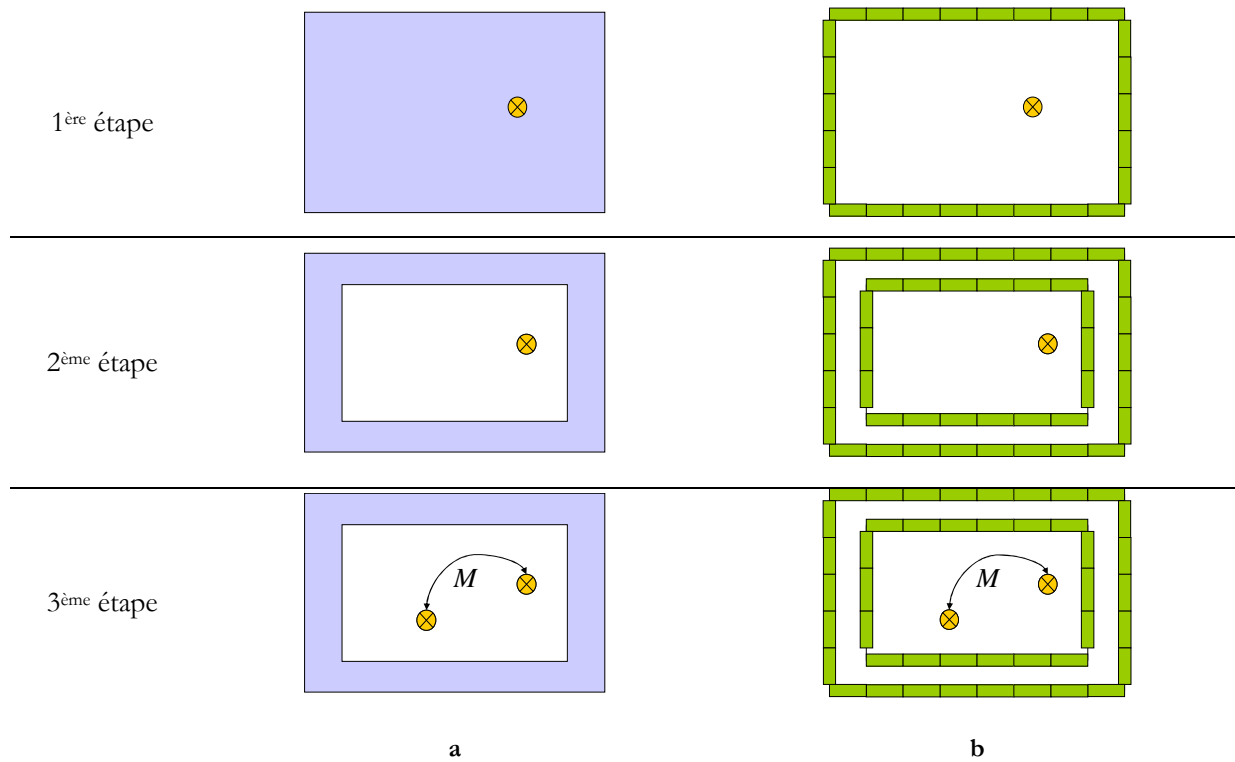


Figure 4-40 : Extension progressive de la méthode à une fenêtre de transformateur

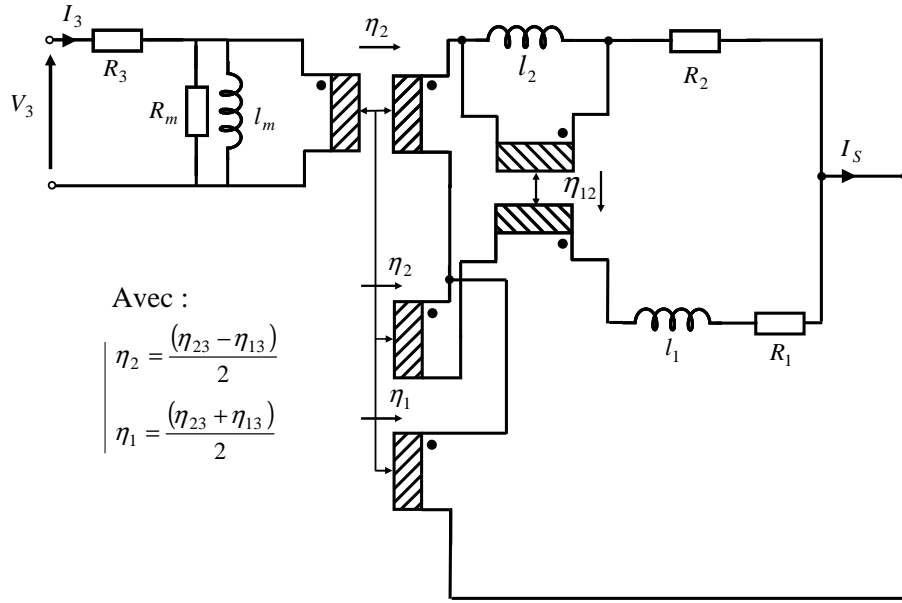
a : Dispositif réel | b : Dispositif équivalent

Lorsque l'expression de cette mutuelle sera connue, tous les éléments nécessaires à l'application de la méthode  $\mu$ PEEC seront disponibles pour effectuer des calculs. Les conducteurs rectangulaires, présents dans les fenêtres de transformateur planar, seront divisés (Figure 4-35) et les éléments du circuit équivalent liant tous les fils élémentaires seront calculés. Il restera alors à connecter en parallèle tous les fils élémentaires d'un même conducteur.

#### IV.4.e. Importance de la mise en parallèle

Pour résoudre les équations de circuit liant les diverses impédances aux courants dans les conducteurs, une mise en parallèle des conducteurs élémentaires est nécessaire. Les conducteurs élémentaires utilisés dans la méthode PEEC sont très fins. Pour étudier l'incidence de la mise en parallèle de deux fils très fins sur les pertes, nous avons étudié et caractérisé [THIOLIERE-06], un transformateur à trois enroulements, constitué de trois brins élémentaires de fil de Litz : un brin pour le primaire et un pour chaque secondaire. Nous l'avons réalisé sur un noyau ETD39 en ferrite 3C90. Chaque enroulement comporte 10 spires. Ce nombre est suffisamment petit pour que les capacités inter-spires soient négligeables et assez grand pour que les inductances soient facilement mesurables. Puisque les fils étudiés sont suffisamment fins pour éviter les courants induits, le schéma équivalent de ce transformateur est celui de la Figure 11 (chapitre 1) auquel il faut ajouter les résistances des différents enroulements, ainsi qu'une résistance de pertes fer. Si

l'on relie en parallèle les deux enroulements secondaires de ce transformateur, un nouveau schéma équivalent est obtenu en remplaçant les coupleurs  $\eta_{23}$  et  $\eta_{13}$  par des coupleurs donnant la moyenne ( $\eta_1$ ) et la demi différence ( $\eta_2$ ) des deux tensions propres à chaque brin (Figure 4-41).



**Figure 4-41 : Schéma équivalent d'un transformateur à trois enroulements en brins élémentaires de Litz dont les deux secondaires sont en parallèle**

Ce schéma peut encore être modifié pour faire apparaître le phénomène engendré par la mise en parallèle de conducteurs. En plaçant les résistances secondaires et l'inductance  $l_1$  du côté des nouveaux coupleurs, un quadripôle magnétique apparaît. Les deux fils étant fortement couplés les inductances de fuite sont très faible et leur influence relative par rapport aux résistances n'est visible qu'au-delà de  $200\text{kHz}$ . Le schéma obtenu en négligeant leur influence est présenté sur la Figure 4-42. Ce schéma permet de voir qu'une résistance  $\frac{R_1 + R_2}{(\eta_{23} - \eta_{13})^2}$  (avec  $R_1 = R_2$ ) est ramené en parallèle sur l'impédance magnétisante. Les pertes parallèles vont donc s'en trouver augmentées car un courant circulera dans  $R_1$  et  $R_2$  même si le secondaire est à vide. C'est la première conséquence de cette mise en parallèle.

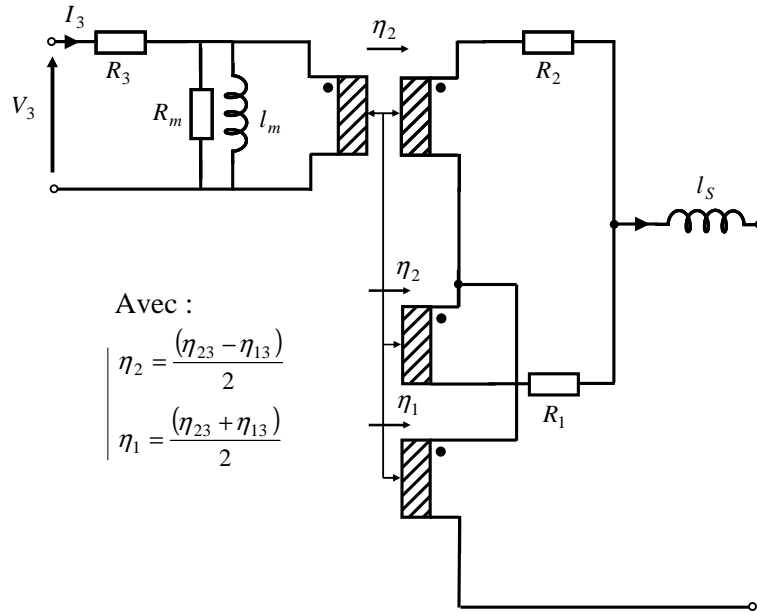


Figure 4-42 : Schéma équivalent simplifié d'un transformateur à trois enroulements en brins élémentaires de Litz dont les deux secondaires sont en parallèle

Pour évaluer complètement l'impact de cette mise en parallèle, il faut procéder à l'identification du circuit de la Figure 4-41 comme on le ferait pour un transformateur à deux enroulements. En complétant cette étude par la connaissance statistique des différences de potentiel existant entre chaque brin de fil de Litz, on est en mesure d'évaluer les pertes dues à cette mise en parallèle de conducteurs élémentaires.

Nous reviendrons, dans le chapitre 5, sur ces pertes supplémentaires qui apparaissent lors de la mise en parallèle de conducteurs, afin de les quantifier en prenant l'exemple de transformateurs industriels.

#### IV.4.f. Perspectives ouverte par la méthode $\mu$ PEEC

Contrairement aux autres méthodes décrites dans ce chapitre, la méthode  $\mu$ PEEC ne nécessite aucune hypothèse sur la forme du champ autour des conducteurs pour être appliquée. L'introduction des matériaux magnétiques dans la méthode PEEC connue ouvre des perspectives très intéressantes pour le dimensionnement non seulement des transformateurs, mais encore de tous les dispositifs de connectiques dans des armoires de distribution et, plus généralement, de tous les dispositifs électromagnétiques où l'énergie est localisée dans les conducteurs proches de matériaux magnétiques.

L'exemple d'application de la méthode  $\mu$ PEEC que nous avons traité (cylindre magnétique), pourra être prolongé en compliquant progressivement les structures étudiées (Figure 4-40). Lorsque l'on sera en mesure d'évaluer la mutuelle inductance entre deux fils fins

situés dans un circuit magnétique rectangulaire, la solution au problème posé par la détermination des courants induits dans un transformateur sera alors très proche.

## V. CONCLUSION

La prévision des pertes dans un composant est essentielle lorsqu'on cherche à le dimensionner. Au sein des dispositifs d'électronique de puissance et plus particulièrement dans les composants bobinés, l'élévation continue des fréquences de découpage entraîne un accroissement des pertes dues aux courants induits dans les conducteurs. Cette augmentation se traduit, sur le circuit équivalent, par une augmentation des résistances séries et une diminution des inductances de fuites.

Nous nous sommes intéressés, dans ce chapitre, aux différentes sortes de pertes cuivre qui apparaissent en haute fréquence. Nous avons ainsi présenté quelques méthodes permettant de prévoir la variation fréquentielle qui en résulte. Ces méthodes sont à répartir dans deux catégories. La première regroupe les méthodes qui se basent sur des hypothèses concernant la forme des champs autour des conducteurs. Elle englobe la méthode de Dowell, permettant de déterminer la variation fréquentielle des résistances et inductances d'un transformateur, la méthode des plaques qui permet d'associer à chaque fréquence un circuit équivalent de transformateur sous forme quadripolaire. La méthode de la perméabilité complexe permet aussi de déterminer les pertes par effet de proximité dans des conducteurs, mais cette dernière est basée sur des simulations électromagnétiques et ne trouve pas de solution analytique valide.

La deuxième catégorie comporte en fait une seule méthode. Il s'agit de la méthode PEEC qui, depuis peu, permet de tenir compte des matériaux magnétiques. Cette méthode, appelée  $\mu$ PEEC, ouvre des perspectives prometteuses pour l'étude de dispositifs électromagnétiques complexes. Lorsque cette technique sera applicable directement aux fenêtres rectangulaires des transformateurs, les courants induits et leurs conséquences, à savoir l'augmentation des pertes et la variation fréquentielle des composants seront accessibles analytiquement.



***CHAPITRE 5 : Développements  
technologiques pour la réduction des pertes  
cuivre : des transformateurs planars aux  
conducteurs méplats...***



## I. INTRODUCTION

L'objectif prioritaire des concepteurs d'alimentation à découpage est, souvent, d'obtenir un bon rendement énergétique. Deux raisons peuvent être invoquées pour justifier ceci. Premièrement, à une époque où l'écologie et l'avenir de la planète sont, on l'espère, au coeur des préoccupations du monde entier, les économies d'énergie sont devenues primordiales pour limiter le réchauffement climatique. La deuxième raison est plus industrielle. En effet, les alimentations sont souvent confinées et le concepteur doit minimiser leur volume ou leur poids... Un point de rendement gagné pour une alimentation et ce sont quelques watts de moins à évacuer. Les refroidisseurs peuvent donc être allégés, le poids et le volume de l'alimentation peuvent être réduits et cela peut contrebalancer le surcoût pour certaines applications. Compte tenu de ces conséquences, on peut dire que gagner en rendement fait vendre.

La réduction des pertes sera donc le fil directeur de ce chapitre. Nous allons présenter quelques concepts et résultats significatifs en partant des pertes dans un transformateur planar pour finir par celles créées dans l'élément clé de ces transformateurs, à savoir : le conducteur méplat.

Dans un passé récent, connaître la valeur des pertes cuivre engendrées par les deux effets de peau et de proximité ainsi que les pertes fer était suffisant, pour dimensionner de façon correcte un transformateur. Les applications actuelles, nécessitant à la fois un très fort courant et des transformateurs de tailles réduites, obligent les concepteurs à utiliser des conducteurs très fins, placés en parallèles, afin de disposer d'une surface effective de conducteur suffisante pour que le courant puisse circuler. L'influence de cette mise en parallèle, qui est bien connue en simulation, n'est jamais quantifiée de manière analytique. C'est pourquoi il est difficile d'en tenir compte lors du dimensionnement [WEI-03] et surtout, lors d'une hypothétique optimisation. Une des approches analytiques que nous avons présentée dans le chapitre précédent va nous permettre de quantifier ses effets [MARGUERON-06-3].

Les transformateurs planar ont souvent des rendements élevés. Cette bonne performance est parfois due au fait que certains conducteurs jouent un rôle d'écran magnétique. Nous essayerons, dans un exemple concret, de profiter de ce phénomène afin de réduire encore plus les pertes cuivre.

En fait, les pertes cuivre des transformateurs planar, sont fortement conditionnées par la forme des conducteurs utilisés. Ces derniers sont de forme rectangulaire aplatie (méplat). Alors que les expressions analytiques des effets de courants induits ne sont pas aisées à établir pour les conducteurs de cette forme, nous allons tenter, à l'aide d'approches par simulation, de



comprendre ces phénomènes et de trouver comment les modifier pour réduire les pertes associées.

## II. PERTES SUPPLEMENTAIRES LORS DE LA MISE EN PARALLELE DE CONDUCTEURS

### II.1. Influence des courants dans un transformateur planar

Afin d'apprécier l'impact de ces courants parasites de façon réaliste, intéressons nous maintenant au cas d'un transformateur planar industriel (Figure 5-1).

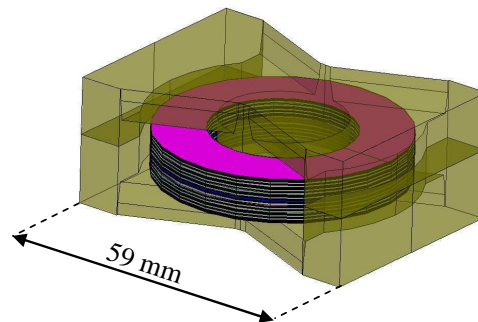


Figure 5-1 : Transformateur planar 48 couches

Le composant étudié ici est composé de 48 couches de circuit imprimé et d'un circuit magnétique de type PQ réalisé en ferrite (matériau PC40) [TDK]. Chaque couche se présente sous la forme d'un disque de diamètre extérieur  $24\text{ mm}$ , de diamètre intérieur  $14\text{ mm}$  et d'épaisseur  $70\text{ }\mu\text{m}$ .

L'enroulement primaire de ce transformateur est constitué de plusieurs spires en série. Il possède aussi deux enroulements secondaires identiques de 11 couches en parallèle (Figure 5-2) et délivre  $275\text{ A}_{eff}$ . En fonctionnement normal, en sinusoïdal à  $125\text{ kHz}$ , un des secondaires est chargé par une résistance  $R = 0.12\text{ }\Omega$ , tandis que l'autre est à vide. A la demi alternance suivante, le fonctionnement s'inverse. La Figure 5-2 présente les densités de courant obtenue en fonctionnement normal dans les deux demi secondaires, telles qu'elles résultent d'une simulation en 2D plan.

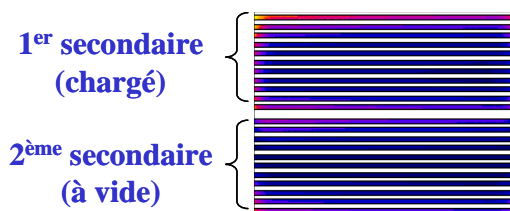


Figure 5-2 : Enroulements secondaires

La répartition des courants sur les différentes couches est présentée Figure 5-3. Dans le premier secondaire, la somme de tous les courants est bien de  $275\text{ A}_{eff}$ , mais dans ce dernier, le courant se répartit très inégalement entre les 11 couches.

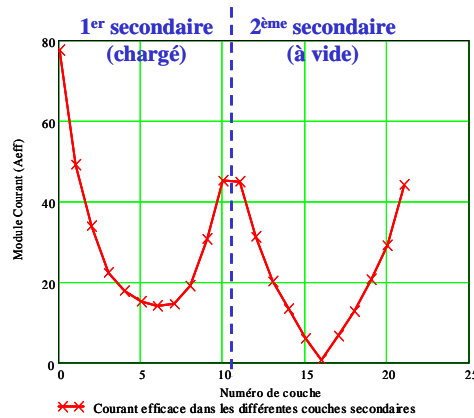


Figure 5-3 : Module du courant dans les enroulements secondaires

La valeur maximale du courant est cinq fois plus grande dans la première couche que dans les couches centrales de l'enroulement. La somme des courants dans le deuxième secondaire (à vide) est nulle, mais individuellement, les courants ne le sont pas. Le courant maximum atteint même  $40A_{eff}$ . La répartition des courants obtenue pour l'enroulement chargé fait penser à celle obtenue dans un conducteur massif soumis à l'effet de peau. En revanche, celui de l'enroulement à vide ressemble d'avantage à la répartition caractéristique de l'effet de proximité.

Cette mauvaise répartition du courant, même si elle ne pénalise pas trop le rendement du composant (celui-ci restant supérieur à 98.5%), peut s'avérer problématique. Des points chauds peuvent être créés à l'intérieur du transformateur puisque 25 fois plus de puissance est dissipée dans les couches extérieures que dans celles situées au centre de l'enroulement. Ces fortes puissances localisées peuvent détruire le composant.

## II.2. Prise en compte de ces courants de circulation

La géométrie de ce transformateur semble se prêter à un traitement par les circuits équivalents de plaques. En effet, tous les conducteurs possèdent la même largeur et sont séparés par des couches d'isolant de même perméabilité que l'air. Nous allons donc tenter d'emprunter cette approche pour retrouver la répartition des courants à l'intérieur de ce transformateur planar (Figure 5-3).

La complexité de modélisation engendrée par le nombre très important de couches nous pousse à scinder l'étude en deux parties. Dans un premier temps, aidés de simulations électromagnétiques, nous allons essayer de retrouver les courants dans les 22 conducteurs secondaires. Le transformateur complet (primaire+secondaire) sera modélisé globalement dans un deuxième temps.

## II.2.a. Modélisation des couches secondaires uniquement

Si l'on s'intéresse uniquement aux conducteurs secondaires, pour calculer la répartition des courants dans les différentes couches à l'aide de la méthode des plaques, il faut connaître la valeur du champ tangentiel sur les faces des enroulements (Figure 5-4).

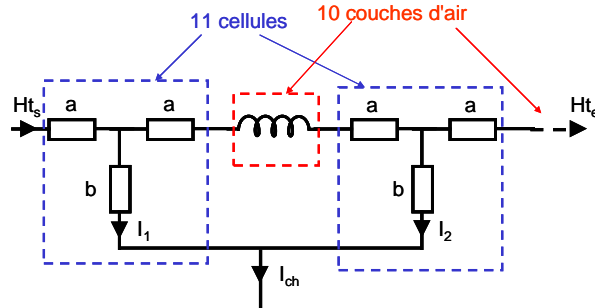


Figure 5-4 : Modélisation de l'enroulement secondaire chargé

La simulation que nous avons réalisée dans la partie II.1 nous permet d'accéder à ces champs. Afin d'évaluer l'influence de la courbure des pistes, la simulation est réalisée en Axisymétrique et en 2D plan. Les excitations tangentielles sur le long des faces, obtenues dans les deux simulations, sont ensuite comparées (Figure 5-5).

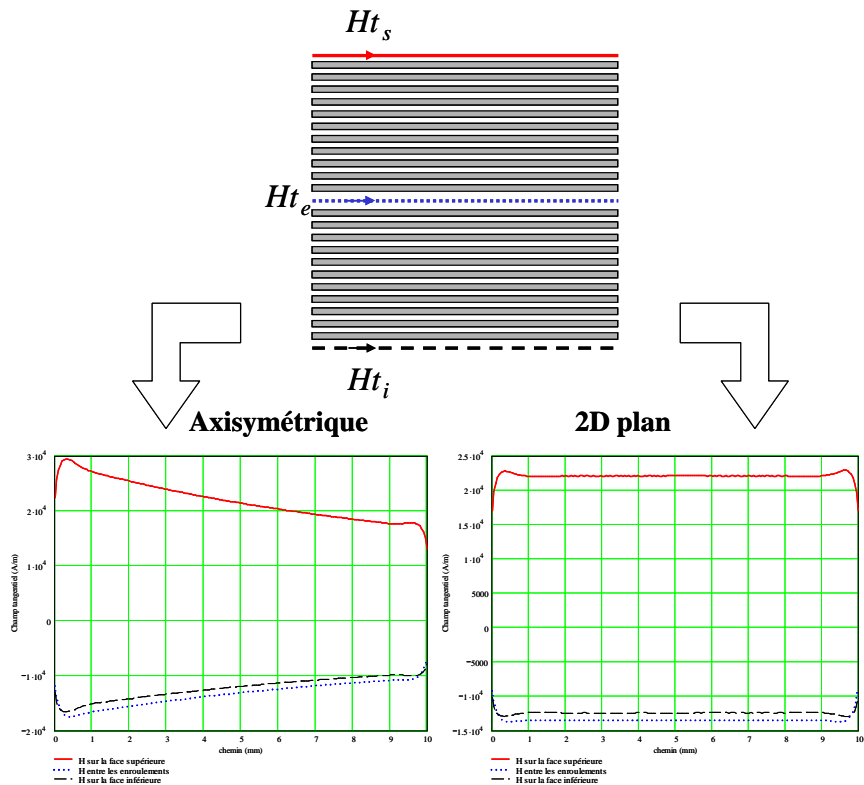


Figure 5-5 : Champ tangentiel sur les faces des enroulements secondaires (en phase)

La simulation en axisymétrique fait ressortir l'influence de la symétrie de rotation par rapport à celle effectuée en 2D plan. Les valeurs moyennes des champs sont cependant similaires

et ce sont ces valeurs en phase (5.1) et en quadrature (5.2) que nous allons introduire à l'entrée et à la sortie de notre circuit équivalent d'enroulement.

$$\text{En phase :} \quad H_{t_s} = 22100 \text{ A/m} \quad H_{t_e} = -13500 \text{ A/m} \quad H_{t_i} = -12400 \text{ A/m} \quad (5.1)$$

$$\text{En quadrature :} \quad H_{t_s} = -480 \text{ A/m} \quad H_{t_e} = 440 \text{ A/m} \quad H_{t_i} = 360 \text{ A/m} \quad (5.2)$$

Le circuit équivalent est ensuite traité sous Pspice (Figure 5-4) pour calculer la répartition des courants dans les 22 couches secondaires. Le résultat est présenté sur la Figure 5-6.

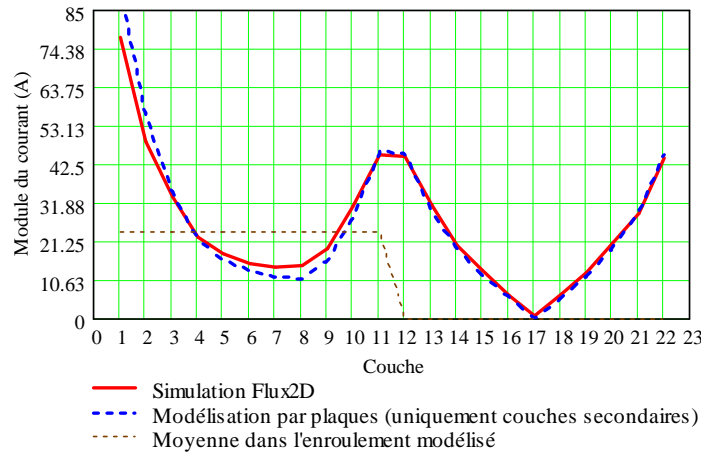


Figure 5-6 : Répartition du courant dans les couches secondaires

(Modélisation des couches secondaires uniquement)

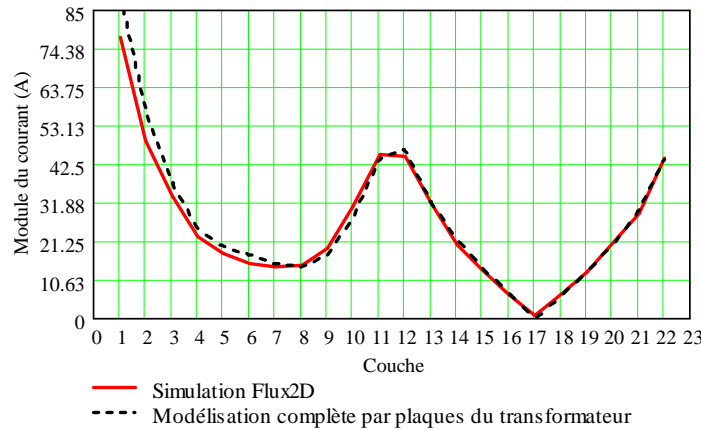
Le profil du courant est correct, la plus grande divergence apparaissant pour le courant de la couche extérieure de l'enroulement chargé. Le courant total est, en revanche, un peu trop faible. En effet, selon Pspice, ce dernier atteint 261 A dans l'enroulement chargé alors que sa valeur devrait être de 275 A. Ce déficit de 5% est du principalement au fait que l'excitation sur le petit coté des plaques est négligée dans notre modèle alors que la simulation la montre non nulle.

Le bon accord obtenu en ne représentant que les enroulements secondaires nous incite à représenter le transformateur complet. Une telle représentation ne nécessiterait plus le recours à une simulation f.e.m. préalable.

## II.2.b. Modélisation du transformateur complet

Chaque couche du transformateur est maintenant selon la technique présentée dans le Chapitre 4. Si aucun regroupement en série et/ou en parallèle n'est réalisé, il faut à chaque fréquence 339 impédances (3 résistances et 3 réactances par cellule) et 48 coupleurs pour modéliser entièrement le transformateur.

Le résultat de la simulation Pspice est présenté sur la Figure 5-7. Cette fois cette modélisation donne de très bons résultats. Le courant total débité par l'enroulement est bien de 275 A car, dans cette configuration, aucune valeur de champ n'est extraite d'une simulation f.e.m.



**Figure 5-7 : Répartition du courant dans les couches secondaires (Transformateur complet)**

La méthode des plaques équivalentes donne des résultats similaires à ceux issus de la simulation par éléments finis. L'intérêt principal de cette méthode est un énorme gain de temps au niveau des simulations. En effet, une simulation électromagnétique prend énormément de temps pour la description du modèle et des propriétés physiques ainsi que lors de la résolution. Une simulation de type circuit est beaucoup plus rapide puisque quelques secondes suffisent pour résoudre un problème. L'introduction du circuit équivalent aurait pu être très longue mais elle est facilitée par la répétition de cellules identiques (associées aux couches identiques).

### II.3. Réduction des courants de circulation

En vue de réduire les pertes par courants de circulation et d'uniformiser les courants dans les couches conductrices, deux solutions sont généralement préconisées: Le rapprochement des couches conductrices et l'enchevêtrement de couches primaire et secondaire [YUEQUAN-02].

Les comparaisons des diverses solutions sont dorénavant très rapides en utilisant les circuits équivalents de plaques puisqu'elles consistent à changer, soit quelques valeurs d'impédances, soit quelques connexions électriques entre les couches. Les optimisations, réalisées en utilisant des simulations électromagnétiques [PRIETO-01] sont très coûteuses en temps puisqu'à chaque fois toute la géométrie du composant est à modifier.

Pour trouver la meilleure disposition des couches conductrices, la méthode des plaques constitue donc une bonne alternative à la simulation par éléments finis.

### III. BLINDAGE PAR DES CONDUCTEURS ECRANS DANS UN COMPOSANT BOBINE

Les transformateurs planar, en règle générale, présentent des rendements très intéressants pour les concepteurs d'alimentation. Les constructeurs de transformateurs, comme [PAYTON] ou [PLANARMAGNETICS], garantissent des rendement souvent supérieurs à 97% pour leurs produits. En outre, leur faible épaisseur facilite l'évacuation thermique.

Les composants que nous avons eu l'occasion d'étudier [THALES], montrent des rendements supérieurs à 98%. Ces valeurs très élevées nous ont poussés à analyser les phénomènes internes qui sont à l'origine de pertes si faibles.

#### III.1. Effets de blindage dans un transformateur planar

Le transformateur planar caractérisé dans le chapitre 2, a été introduit sous Flux2D en vue de réaliser des simulations électromagnétiques. Ce composant, comme nous l'avons déjà décrit, possède trois enroulements: un primaire, un secondaire et un auxiliaire. En raison du fonctionnement spécifique de la structure d'électronique de puissance, ce transformateur possède un entrefer partagé en deux parties d'inégales épaisseurs : une dans chaque coin supérieur de la fenêtre (Figure 5-8). De ce fait, des pertes supplémentaires sont créées dans les conducteurs localisés à proximité de ces entrefers [LEONAVICIUS-04]. Ce phénomène s'observe sur la Figure 5-8 issue d'une simulation électromagnétique. Dans cette dernière, le transformateur est alimenté au primaire par un courant de  $2.85\text{ A}$  à  $250\text{ kHz}$ . Les deux autres enroulements ne sont pas chargés.

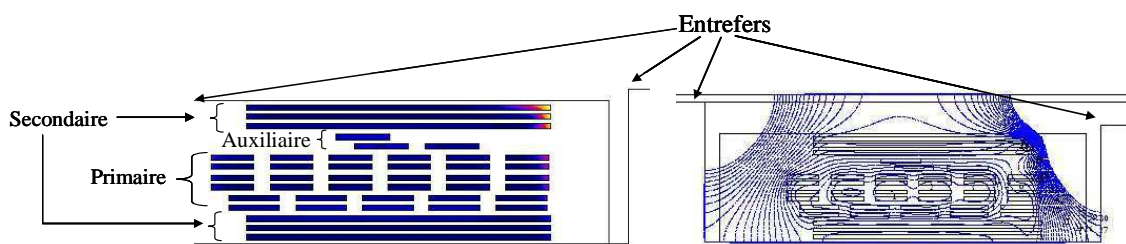


Figure 5-8 : Densité de courant et lignes de flux dans la fenêtre du transformateur

Les conducteurs proches de l'entrefer sont parcourus par des densités de courant plus fortes. Pour une puissance fournie par l'alimentation de  $10.25\text{ W}$ , les pertes sont de  $3.79\text{ W}$  dans le primaire,  $5.95\text{ W}$  dans le secondaire et  $0.5\text{ W}$  de pertes dans le matériau magnétique. Les pertes dans l'enroulement auxiliaire sont négligeables.

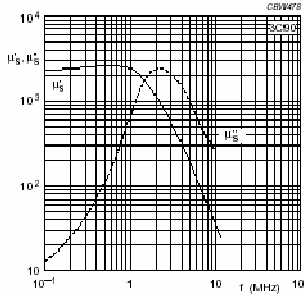


Figure 5-9 : Perméabilité du 3C90

Ainsi, alors que seul le primaire est parcouru par un courant global non nul, le secondaire qui est soumis à l'induction d'un entrefer, dissipe plus que le primaire. Les pertes dans le ferrite ont été calculées par Flux2D après qu'on ait introduit la perméabilité imaginaire à la fréquence de travail (Figure 5-9). Soulignons que, lors de cet essai à vide, la majeure partie des pertes se situe dans le cuivre.

Si la même simulation est réalisée en considérant que les conducteurs secondaire et auxiliaire sont isolants, la puissance fournie par l'alimentation atteint 11.5W dont 11W sont dissipés dans l'enroulement primaire. En rapprochant ces grandeurs, nous observons que la puissance dissipée dans le cas où le primaire est seul est supérieure à la totalité des pertes cuivre relevée en présence de tous les enroulements. Le rôle de l'enroulement auxiliaire étant négligeable, cette diminution s'explique par le fait que les conducteurs secondaires se comportent comme un blindage qui protège les conducteurs primaires du champ de l'entrefer. C'est ainsi qu'ils permettent de réduire les pertes cuivre globales du transformateur.

Ce phénomène intéressant nous a incité à mener successivement plusieurs études concernant les pertes dans le transformateur planar, dans une inductance et, plus généralement, dans des conducteurs méplats. Nous présentons maintenant les principaux résultats de ces études.

### III.2. Réduction des pertes par déplacement de conducteurs

Puisque les pertes dans le transformateur étudié sont principalement localisées à proximité de l'entrefer, nous avons essayé de déplacer les conducteurs soumis à son influence afin de les réduire [MOREL-04]. Les conducteurs des trois enroulements ont été séparés en quatre groupes en tenant compte de leur agencement par couche dans le circuit imprimé (Figure 5-10).

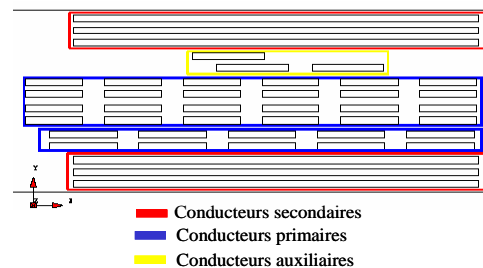


Figure 5-10 : Groupement des conducteurs

Trois configurations ont ensuite été testées (Figure 5-11). Premièrement, les conducteurs secondaires et primaires soumis aux effets de bord de l'entrefer sont repoussés le plus loin possible de ce dernier. Deuxièmement, les conducteurs primaires restent fixés à l'extrémité gauche de la fenêtre et les blocs secondaires sont ramenés vers l'entrefer pour protéger les primaires. Enfin, troisième configuration, les conducteurs auxiliaires sont, eux aussi, placés pour protéger le primaire. Les puissances dissipées dans chaque cas sont présentées dans le Tableau 5-1.

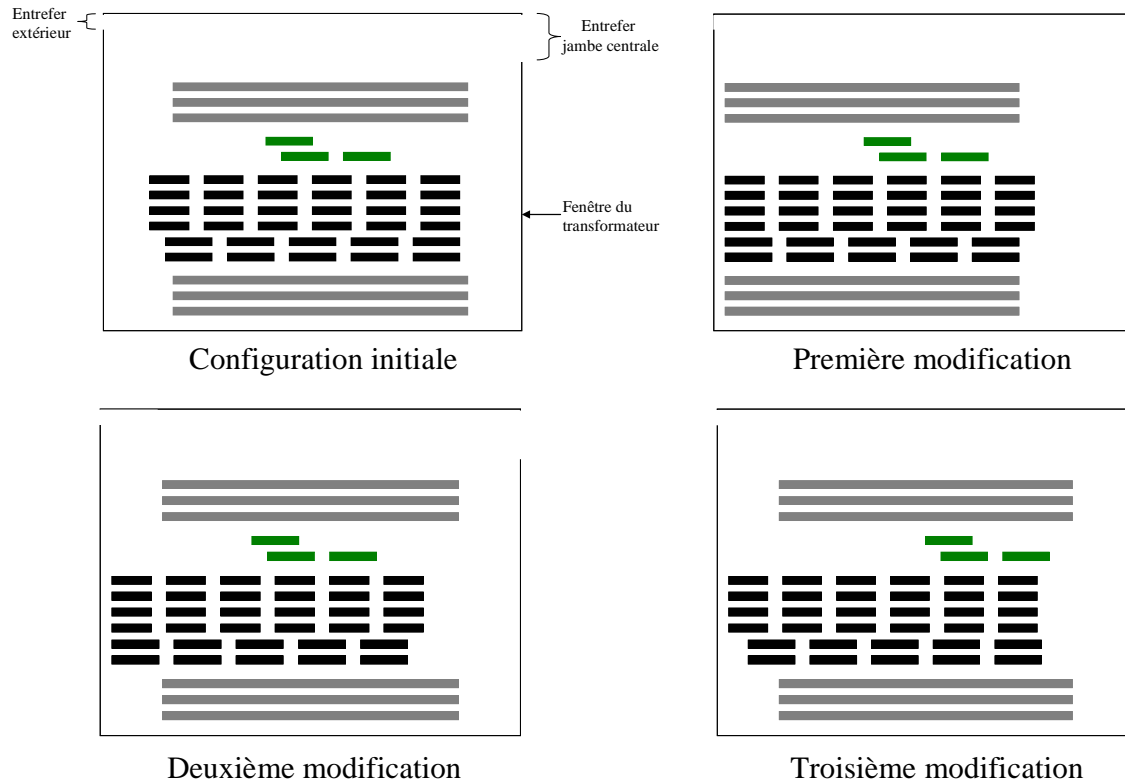


Figure 5-11 : Déplacements testés des conducteurs dans la fenêtre

	Puissance fournie par l'alimentation	Pertes dans le primaire	Pertes dans le secondaire	Pertes dans l'auxiliaire
<b>Disposition initiale</b>	10.25 W	3.79 W	5.95 W	0.02 W
<b>1<sup>ère</sup> modification</b>	10.78 W	5.49 W	4.59 W	0.17 W
<b>2<sup>ème</sup> modification</b>	9.49 W	2.33 W	6.51 W	0.13 W
<b>3<sup>ème</sup> modification</b>	9.36 W	2.58 W	5.86 W	0.39 W

Tableau 5-1 : Pertes parallèles dans le transformateur pour différents agencements de conducteurs

Ces différents essais ont mené à un compromis intéressant entre le blindage des conducteurs primaires par les conducteurs secondaires et les pertes dans ces derniers. En effet, si les conducteurs primaires sont laissés sans protection, leurs pertes sont très importantes. D'un



autre coté, si les conducteurs secondaires sont placés très près de l'entrefer principal, ce sont eux qui sont le siège de pertes très importantes. La troisième modification (Figure 5-11) réduit les pertes à vide dans l'enroulement primaire de 9.6% alors qu'elle ne modifie quasiment pas celles de l'enroulement secondaire.

Dans ces essais nous nous sommes uniquement intéressés aux pertes à vides dans le transformateur. Il faut donc nuancer le résultat obtenu : réduction des pertes de quasiment 10%. Des simulations ont été réalisées dans la configuration de charge opposée, c'est-à-dire en court-circuit (Tableau 5-2) pour évaluer l'influence de ce déplacement sur les pertes séries (Figure 5-12).

	Puissance fournie par l'alimentation	Pertes dans le primaire	Pertes dans le secondaire	Pertes dans l'auxiliaire
<b>Cas initial</b>	4.02 W	1.92 W	2.01 W	0.09 W
<b>3<sup>ème</sup> modification</b>	4.12 W	1.96 W	2.07 W	0.09 W

Tableau 5-2 : Pertes séries dans le transformateur pour différents agencements de conducteurs

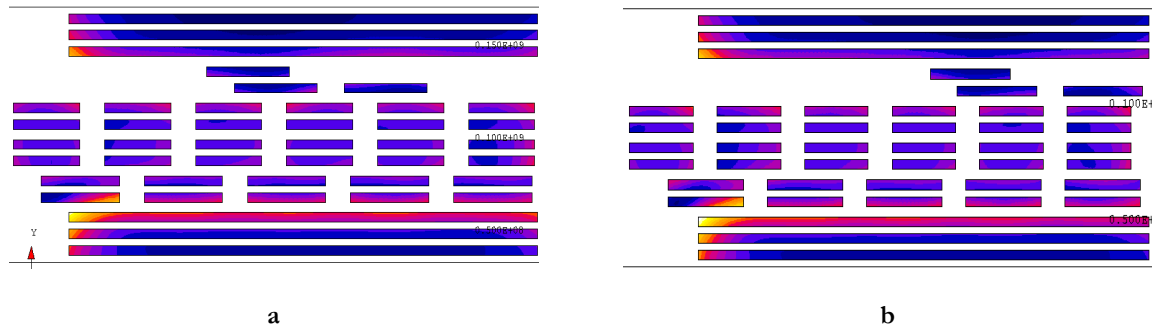


Figure 5-12 : Densité de courant en court circuit

a : Configuration initiale | b : Troisième modification

Ce déplacement des conducteurs fait augmenter les pertes séries de 2.3%. Il faut donc effectuer des essais en charge pour valider l'intérêt de la solution testée. En définitive, les diverses simulations en charge laissent espérer un gain de l'ordre de 4.4% sur les pertes totales du transformateur.

Même si l'amélioration obtenue n'est pas spectaculaire, c'est le concept du blindage par des conducteurs écrans qu'il faut retenir. Sans cet effet des larges conducteurs secondaires, les pertes du transformateur seraient beaucoup plus fortes. En analysant la forme de lignes de flux dans la fenêtre du transformateur, on constate que les pertes sont minimales dans les conducteurs lorsque les lignes de flux sont parallèles aux longs cotés des conducteurs [CHEW-91]. Au contraire, si le flux de fuite a tendance à couper perpendiculairement ces côtés (Figure 5-8), les pertes sont plus importantes.

### III.3. Réduction des pertes cuivres dans une inductance

Afin de mieux comprendre les interactions impliquées ci-dessus, nous allons poursuivre nos comparaisons en étudiant le même composant comme une inductance. Nous conservons le circuit magnétique, les spires primaires et nous tentons d'introduire des écrans conducteurs pour réduire les pertes globales. Ces écrans ne jouent plus aucun rôle concernant la circulation du courant. Lorsque seules les spires primaires sont présentes dans la fenêtre, les pertes totales ont été évaluées (cf. § III.1) à 11 W.

La Figure 5-13 présente les essais réalisés avec différents écrans en cuivre. Les puissances trouvées sont regroupées dans le Tableau 5-3. Le premier cas traité est celui de l'inductance initiale, sans aucun écran. Le courant est mal réparti dans les conducteurs proches de l'entrefer. Dans le deuxième cas, nous utilisons un écran de la même largeur qu'une couche de secondaire et de  $50\text{ }\mu\text{m}$  d'épaisseur. La puissance totale dissipée est alors de 10.25 W, les pertes dans le primaire étant réduites de moitié. Les spires proches de l'entrefer sont encore soumises aux effets de l'entrefer. Nous tentons donc d'élargir les écrans pour protéger totalement les conducteurs (troisième cas). Dans ce cas, les pertes sont localisées dans le conducteur écran, près de l'entrefer, tandis que dans les spires de l'inductance, elles sont réduites de moitié.

Puisque seule une partie du blindage est parcourue par du courant, nous tentons de l'éviter : nous ne gardons, dans chaque fenêtre, que leur deux côtés (quatrième cas). Cet essai donne de moins bons résultats que les autres car les lignes de flux ne sont pas parallèles aux conducteurs situés au milieu de la fenêtre. Durant le 5<sup>ème</sup> et le 6<sup>ème</sup> essai, des conducteurs écrans, juste un peu plus larges que les spires de l'inductances sont placés au dessus et au dessous de ces dernières. L'épaisseur de ces écrans passe de  $50\text{ }\mu\text{m}$  (5<sup>ème</sup> essai) à  $300\text{ }\mu\text{m}$  (6<sup>ème</sup> essai). Ce que nous voyons, c'est qu'avec des écrans de  $300\text{ }\mu\text{m}$  d'épaisseur, les pertes totales dans l'inductance sont réduites de 26%.

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5 50 $\mu\text{m}$	Cas 5 300 $\mu\text{m}$
<b>Pertes dans les spires de l'inductance</b>	11 W	5.22 W	2.61 W	5.63 W	3.86 W	2.73 W
<b>Pertes dans les écrans</b>		5.03 W	8.28 W	4.8 W	6.86 W	5.42 W
<b>Pertes cuivre totales</b>	11 W	10.25 W	9.89 W	10.43 W	10.72 W	8.15 W

Tableau 5-3 : Pertes cuivre dans l'inductance

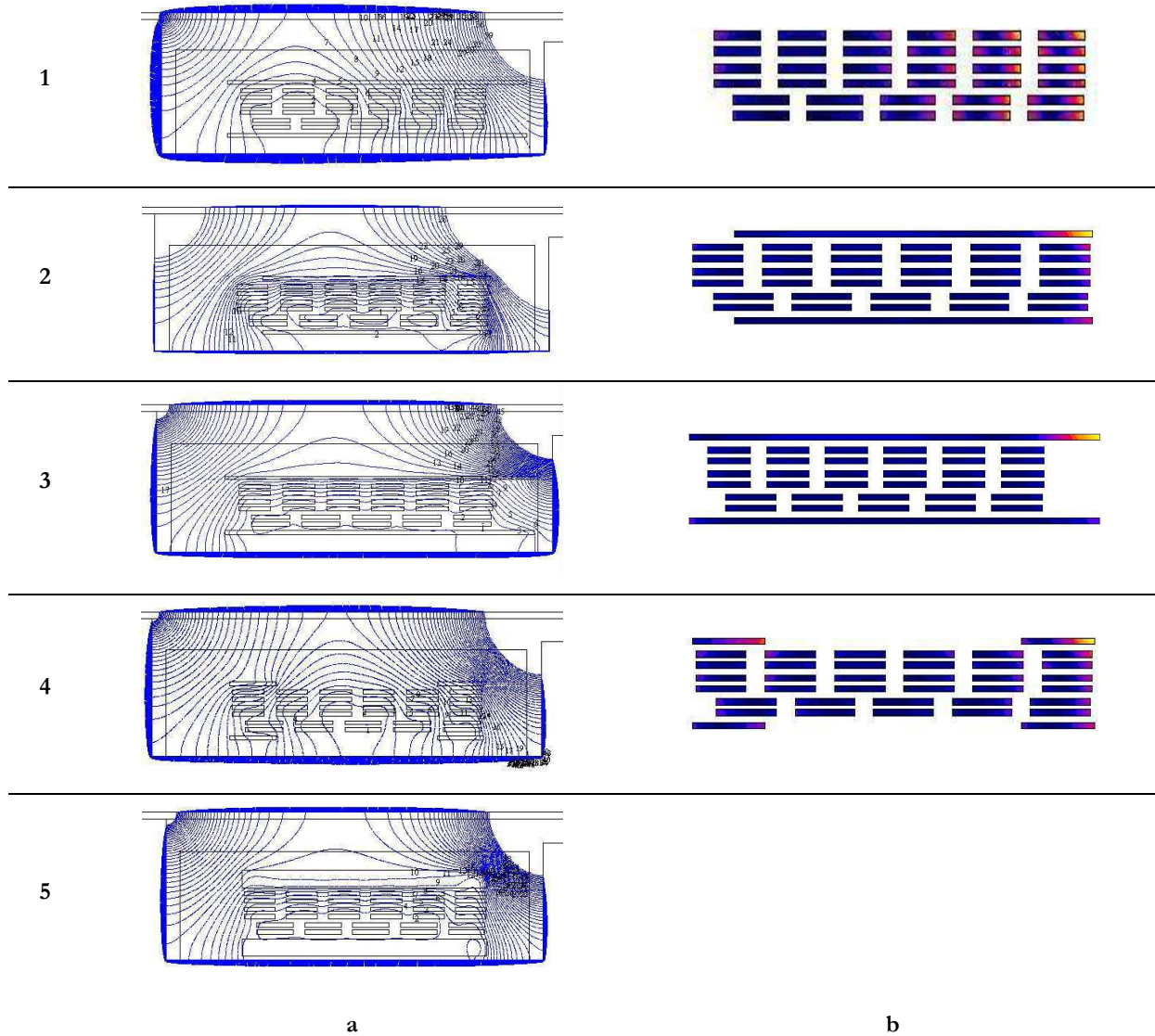


Figure 5-13 : Effets d'écrans conducteurs placés dans la fenêtre d'une inductance

a : Lignes de flux | b : Densité de courant

Tous les écrans sont bénéfiques pour gagner quelques watts de pertes. Plus les écrans sont placés près de l'entrefer, mieux ils en détournent les lignes de flux, plus les spires de l'inductance sont protégées. En revanche, dans le même temps, les pertes dans ces écrans augmentent. L'épaisseur des écrans est un paramètre sensible. En effet, plus les écrans sont épais, plus les lignes de flux sont déviées et mieux les conducteurs sont protégés.

La recherche d'optimum fera l'objet d'études qui seront menées durant la prochaine thèse. Des techniques d'optimisation sous contraintes seront alors mises en œuvre.

## IV. GUIDAGE DU FLUX DANS LES TRANSFORMATEURS

Si les matériaux conducteurs repoussent les lignes de flux, à l'opposé, les matériaux magnétiques ont tendance à canaliser ces lignes de flux. Toujours afin d'essayer de diminuer les pertes dans les transformateurs, nous avons lancé une étude pour essayer de drainer le flux dans les transformateurs planar [MONTARROS-05]. L'idée directrice était d'utiliser soit des matériaux uniquement conducteurs (cuivre  $\rho = 1.72 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ), soit des matériaux purement magnétiques (Ferrite 3C90  $\mu_r = 2300$  sans pertes), afin de guider, en les attirant ou en les repoussant, les lignes de flux. Cette modification du champ autour des conducteurs induit une variation de la répartition des courants dans les conducteurs et donc des pertes.

La trop grande complexité d'une fenêtre de transformateur nous a poussé à lancer des études exploratoires dans trois cas simples n'impliquant qu'un ou deux conducteurs. Le premier système étudié concerne deux conducteurs méplats parcourus par des courants de sens opposé. Le deuxième s'intéresse toujours à deux conducteurs méplats mais ces derniers sont traversés par des courants de même sens. Le dernier est un conducteur méplat seul.

Afin de quantifier à la fois l'influence des courants induits à une fréquence donnée et le gain résultant de la modification, nous définissons la puissance normalisée qui est égale au rapport des pertes dissipées dans chaque dispositif par la puissance consommée dans le même dispositif en continu (5.3).

$$P_N = \frac{\sum \text{Pertes}}{P_{DC}} \quad (5.3)$$

### IV.1. Principe de la méthode

Considérons deux conducteurs rectangulaires parcourus par des courants en sens inverse (Figure 5-14) de  $1 A_{eff}$ .

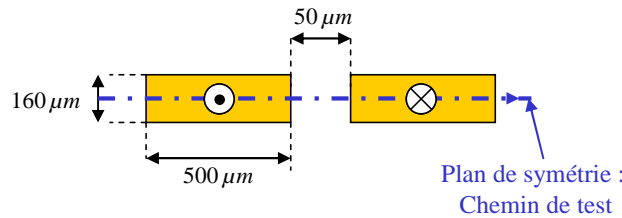


Figure 5-14 : Conducteur rectangulaires parcourus par des courants en sens inverse : Système de référence

Dans les différents essais réalisés, la fréquence ( $f = 1 MHz$ ) est choisie de façon telle que des courants induits notables se manifestent à l'intérieur des conducteurs. La puissance normalisée reflète l'importance de ces pertes. Elle vaut ici  $P_N = 2.27$ . La densité de courant est

tracée sur le chemin de test (Figure 5-15). Les conducteurs sont soumis à un effet de peau accentué par un effet de proximité puisque les deux conducteurs sont placés côte à côte.

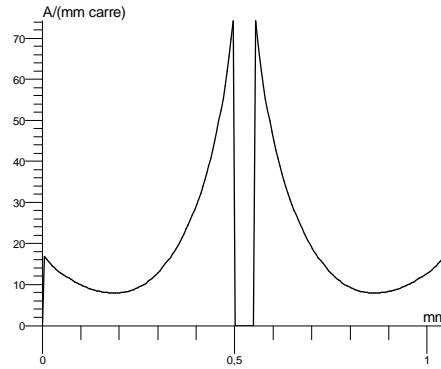


Figure 5-15 : Densité de courant dans les conducteurs méplat

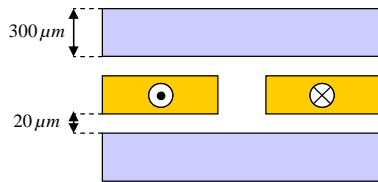


Figure 5-16 : Ecrans de cuivre

Le fait de placer d'autres éléments conducteurs non alimentés à proximité des deux conducteurs rectangulaire (Figure 5-16), modifie la répartition du courant dans les conducteurs (Figure 5-17). Le courant obtenu est plus uniforme et les pertes s'en trouvent diminuées de 15% ( $P_N = 1.93$  contre 2.27 sans les écrans).

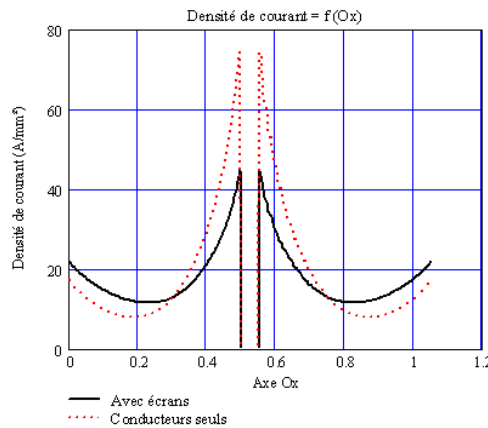


Figure 5-17 : Comparaison des densités de courant dans les conducteurs méplat avec et sans écrans conducteurs

L'observation des lignes de flux (Figure 5-18) montre que ces dernières ont tendance à s'aplatir lorsque l'on ajoute les écrans de cuivre.

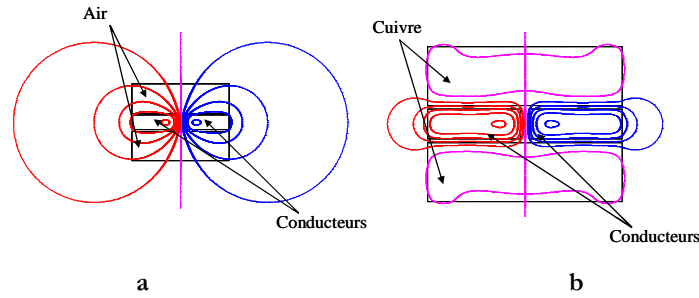


Figure 5-18 : Lignes de flux

a : Sans écrans | b : Avec écrans de cuivre

L'exemple traité ici est très simple mais assez démonstratif pour comprendre le phénomène qui permet de diminuer les pertes dans des conducteurs méplats.

#### IV.2. Deux conducteurs méplats parcourus par des courants de sens inverses

Les écrans de cuivre positionnés en dessus et en dessous des conducteurs (Figure 5-16) permettent de modifier l'allure des lignes de flux, la répartition du courant et ainsi de diminuer les pertes dans les conducteurs. Cette configuration n'est pas la seule à être bénéfique sur la réduction des pertes.

Les écrans de cuivre placés sur les cotés des conducteurs (Figure 5-19a) réorientent les lignes de flux sur l'extrémité des conducteurs. Plusieurs simulations ont été réalisées, avec des épaisseurs différentes, pour trouver un optimum de réduction de pertes. Dans le meilleur cas, les pertes sont réduites de 6% ( $P_N = 2.2$ ). Le cumul des écrans placés en dessus et en dessous (Figure 5-16) avec les latéraux (Figure 5-19a) conduit à une solution où le cuivre entoure complètement les conducteurs (Figure 5-19b). Dans ce cas, les pertes sont diminuées de 18.5% ( $P_N = 1.84$ ). Cependant, la quantité de cuivre rajoutée est très importante et un compromis entre le gain sur les pertes et le volume de cuivre utilisé est à rechercher. Dans certaines applications on peut envisager d'utiliser des conducteurs ayant une utilité précise pour faire écran.

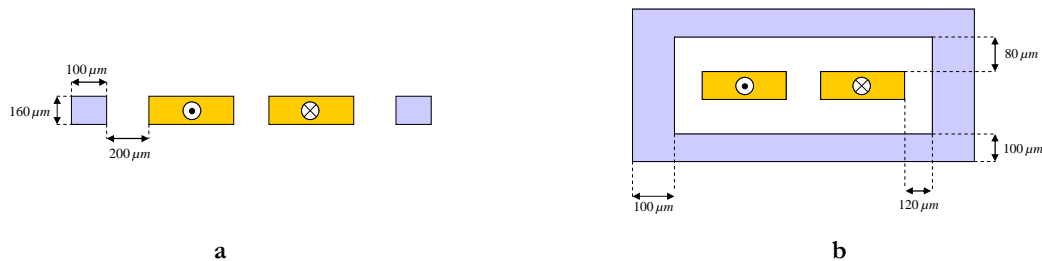


Figure 5-19 : Autres configurations avec des écrans de cuivre

a : Ecrans sur les cotés | b : Ecran entourant les conducteurs

Ce volume de cuivre supplémentaire est coûteux, encombrant et lourd. Les allures du champ créé par ces conducteurs nous ont poussé à étudier une configuration différente en utilisant des capuchons de cuivre de part et d'autre des conducteurs méplats (Figure 5-20). La réduction des pertes est alors un peu moins efficace mais le gain atteint tout de même 17% ( $P_N = 1.87$ ). L'intérêt de cette configuration est qu'elle permet de limiter le cuivre supplémentaire nécessaire pour réaliser les écrans magnétiques.

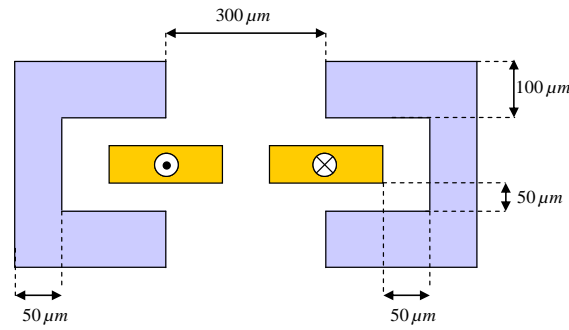


Figure 5-20 : Capuchons de cuivre

Un matériau conducteur comme le cuivre peut être utilisé pour repousser, en haute fréquence, des lignes de flux. A l'opposé, un matériau magnétique a plutôt tendance à attirer les lignes de flux.

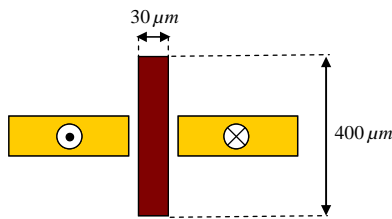


Figure 5-21 : Matériau magnétique entre les conducteurs

Si l'on part de ce principe, le dispositif comprenant un barreau de ferrite entre les deux conducteurs méplats (Figure 5-21) peut être utilisé pour guider les lignes de flux (Figure 5-22).

Les lignes de flux ne sont alors pas tangentes aux conducteurs, mais le champ localisé entre les conducteurs, responsable des pertes par effet de proximité, est modifié par l'utilisation d'un matériau magnétique.

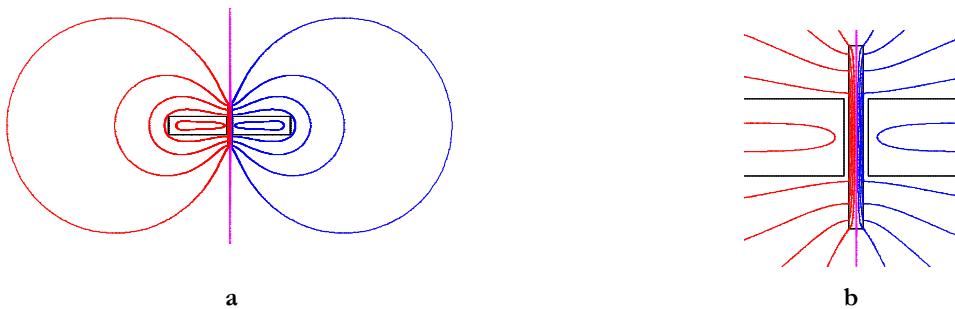
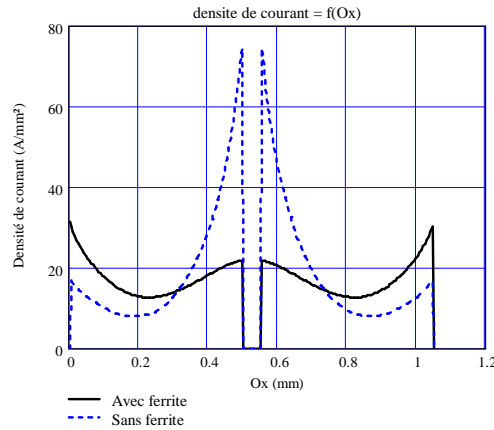


Figure 5-22 : Lignes de flux avec drain magnétique

a : Vue générale | b : Flux dans le barreau

Cette diminution de l'effet de proximité est confirmée par l'allure de la densité de courant circulant dans les conducteurs (Figure 5-23). Le courant est beaucoup plus uniforme, les pics dus à la proximité des conducteurs étant réduits d'un facteur quasiment égal à quatre. Les pertes dans les conducteurs sont réduites de 44% pour une puissance normalisée  $P_N = 1.2$ .



**Figure 5-23 : Comparaison des densités de courant dans les conducteurs méplat avec et sans drain magnétique (ferrite)**

Cette valeur de pertes est discutable puisque le ferrite considérée dans l'exemple est supposée sans pertes. Le fait d'ajouter une pièce magnétique dans un composant magnétique modifie sa réluctance et donc l'inductance propre du dispositif. Il existe de nombreuses optimisations à mener pour savoir comment exploiter ces résultats mais ils nous apprennent déjà que ces tentatives ne sont pas désespérées. En outre, il est envisageable d'appliquer ces principes à des systèmes beaucoup plus gros comme les barres d'amenées de courant à 50 Hz. L'insertion de matériaux magnétiques entre les barres pourrait économiser des kW ou plus...

En constatant que, séparément, un écran de cuivre et un drain en ferrite sont efficaces, il est tentant de les associer. Un essai a été réalisé dans ce sens, en combinant les capuchons de cuivre (Figure 5-20) et le drain en ferrite (Figure 5-21). Le gain obtenu est quasiment nul puisque les pertes ne sont diminuées que de 0.7%. Le cumul des deux solutions n'est donc pas une bonne chose car la modification du flux engendrée par un des dispositifs est néfaste pour l'autre (Figure 5-24). Il est donc à peu près certain que les gains des deux dispositifs ne se cumulent pas mais l'essai réalisé ici ne remplace pas une optimisation bien menée pour édicter une conclusion définitive.



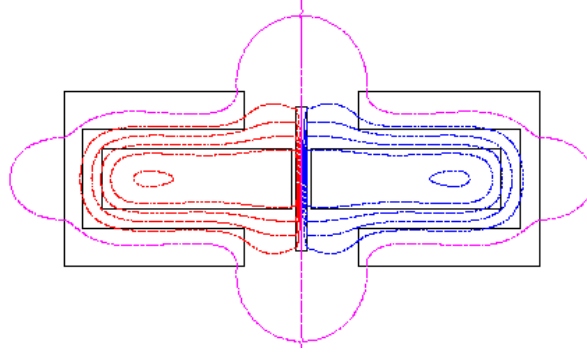


Figure 5-24 : Lignes de flux lorsque deux solutions sont combinées

### IV.3. Deux conducteurs méplats dans lesquels les courants circulent dans le même sens.

Nous avons vu que les puissances dissipées dans deux conducteurs rectangulaires parcourus par des courants de sens opposés peuvent être réduites en utilisant des écrans de cuivre ou des drains de ferrite. Nous allons maintenant nous intéresser au cas où les conducteurs sont parcourus par des courants de même sens.

De nombreux essais ont montré que, pour cette configuration, aucune solution utilisant des écrans de cuivre ne permettait de diminuer les pertes du dispositif. On peut cependant nuancer ceci car en utilisant un matériau plus conducteur que le cuivre, il n'est pas exclu que les pertes pourraient diminuer. En effet, le ferrite utilisé est plus de deux mille fois meilleure que le matériau des conducteurs ( $\mu_r = 1$ ). On peut donc penser que l'utilisation d'un matériau beaucoup plus conducteur que le cuivre pourrait apporter le gain recherché. Reste à trouver ce matériau...

En utilisant des drains magnétiques, deux barreaux de ferrite, placés de part et d'autre des conducteurs (Figure 5-25) ont un effet positif sur la modification des lignes de flux (Figure 5-26) et donc la réduction des pertes (moins 25%).

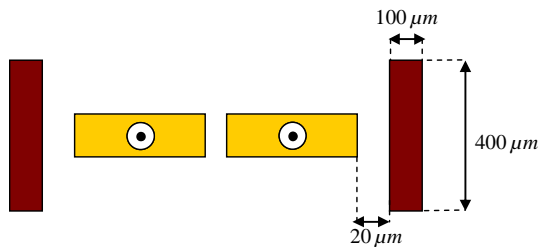


Figure 5-25 : Solution avec deux drains de ferrite autour des conducteurs méplats

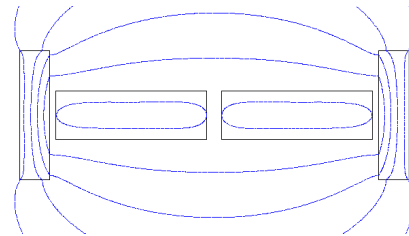


Figure 5-26 : Lignes de flux avec deux drains de ferrite

#### IV.4. Conducteur méplat seul

Les lignes de flux créées par deux conducteurs parcourus par des courants de même sens (Figure 5-27a) sont comparable à celles issues d'un seul conducteur méplat (Figure 5-27b). La solution qui consiste à placer deux drains de ferrite sur les cotés du conducteur mérite donc d'être analysée (Figure 5-28).

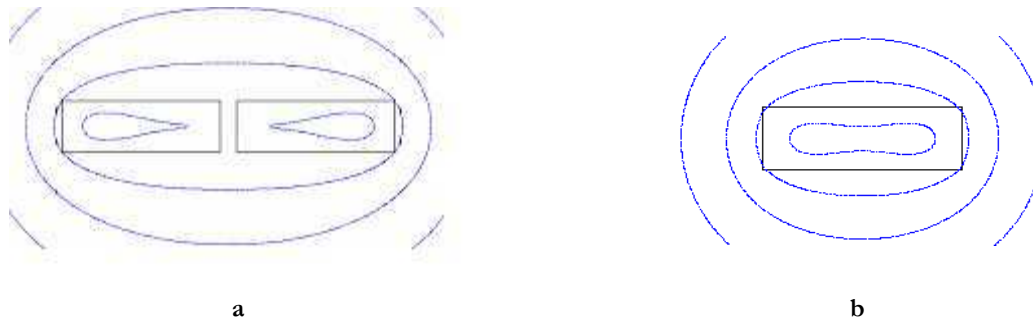
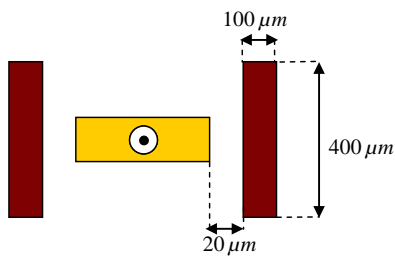


Figure 5-27 : Lignes de flux autour des conducteurs méplats

a : Deux conducteurs méplats | b : conducteur seul



La puissance dans ce cas est diminuée de 16% pour une puissance normalisée  $P_N = 1.17$ . La hauteur des drains joue un rôle important pour obtenir ce gain. Au contraire, l'épaisseur des drains de ferrite ne semble pas critique pour que la réduction s'opère.

Figure 5-28 : Solution avec deux drains de ferrite autour d'un conducteur méplat

Comme pour l'ensemble de deux conducteurs parcourus par des courants de même sens, aucune solution n'utilisant que des écrans de cuivre n'a permis de diminuer les pertes de ce conducteur méplat seul.

Tous ces essais sont empiriques et exploratoires. Ils visent à préparer des phases d'optimisation menées de façon plus rigoureuse avec les outils adéquats. A titre d'illustration de ce qui pourra être entrepris, nous allons tenter, ci-dessous, de réduire les pertes par effet de peau dans un conducteur méplat en lui appliquant un champ extérieur.

On montre, pour un conducteur cylindrique, que les pertes sont minimales lorsque le champ appliqué extérieurement est nul. Intuitivement, on a tendance à généraliser ce résultat à toutes les formes de conducteurs alors que, nous venons de le voir, le recours à deux drains de ferrite permet de réduire sensiblement les pertes dans un méplat. Fort de cet enseignement, il est intéressant de chercher à connaître le champ qui, appliqué de l'extérieur, ramène les pertes du méplat au minimum.

## V. MINIMISATION DES PERTES DANS UN CONDUCTEUR MEPLAT

Le conducteur méplat, plus ou moins allongé, est le seul type de conducteur présent dans les transformateurs planar. Les bus barres [GONNET-03], généralement utilisés dans des dispositifs de distribution d'énergie électrique, recourent également à des conducteurs de cette forme.

Cette allure rectangulaire est très intéressante. En effet, nous avons vu dans la partie précédente, qu'il était possible de réduire les pertes par effet de peau et de proximité dans les conducteurs de ce type en modifiant le champ autour et, en conséquence, la répartition des courants à l'intérieur d'un conducteur méplat. Une telle réduction est impossible pour des conducteurs cylindriques. La symétrie de rotation d'un fil cylindrique isolé, ne permet pas de modifier la répartition du courant de façon à gagner sur les pertes dans ce conducteur. Cette propriété se démontre en utilisant l'orthogonalité des fonctions de Bessel, utilisées pour décrire la répartition du courant à l'intérieur du fil.

Puisque la diminution des pertes pour des conducteurs rectangulaires est avérée, l'idée nous est venue de chercher à minimiser les pertes en appliquant un champ extérieur et de trouver quel champ donnait le meilleur résultat [MARGUERON-06-2]. Lorsque l'on parle d'optimisation, on est souvent confronté au problème de formulation. L'approche initiale présentée précédemment étant totalement intuitive, nous avons décidé d'approfondir la problématique en y ajoutant les outils théoriques utiles pour poser le problème simplement.

### V.1. Description du dispositif étudié et but recherché

Nous nous intéresserons donc à un conducteur méplat en cuivre dont la section est assez allongée : largeur égale à huit fois la hauteur (Figure 5-29).

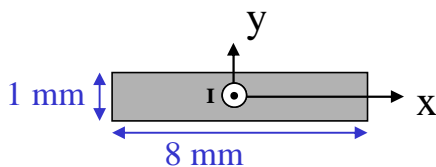


Figure 5-29 : Conducteur méplat 8x1 mm<sup>2</sup>

Pour un courant de 1 A, ses pertes en continu sont de  $2.15 \text{ mW/m}$ . Afin de minimiser les pertes par effet de peau dans ce conducteur, on se place à une fréquence où ces pertes sont nettement perceptibles. À  $100 \text{ kHz}$ , pour un courant de  $1 A_{\text{eff}}$ , les pertes sont de  $6.9 \text{ mW/m}$ , soit trois fois plus qu'en continu.

Lorsqu'un fil est parcouru par un courant continu, la répartition de ce dernier est uniforme sur la section du conducteur. Les pertes créées à l'intérieur du conducteur sont alors minimales.

Quand la fréquence augmente, le courant n'est plus uniforme (Figure 5-30) et les pertes augmentent très rapidement avec la fréquence.

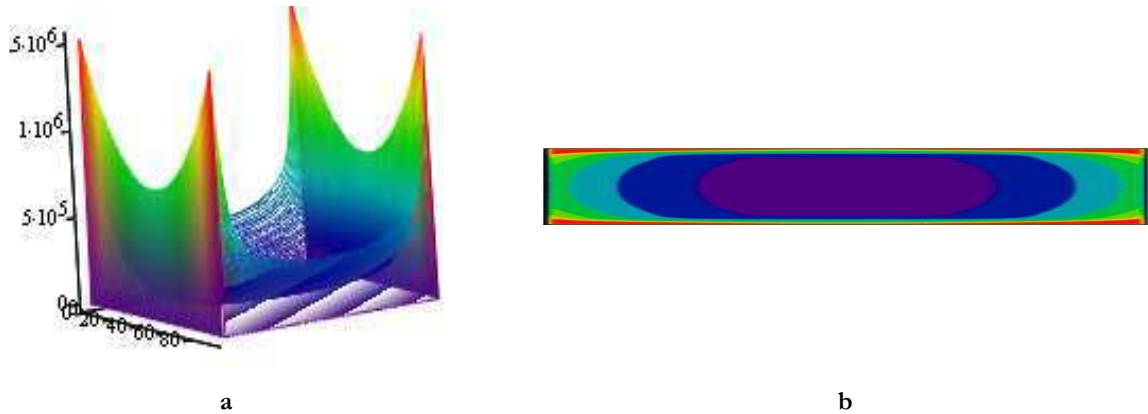


Figure 5-30 : Densité de courant sur la section du conducteur méplat  
a : Représentée en trois dimensions | b : A l'échelle pour le méplat 8x1 mm<sup>2</sup>

Nous avons vu qu'il était possible de modifier ces pertes en jouant sur l'environnement des conducteurs méplats. La réduction obtenue ne pourra jamais revenir au niveau continu. Nous souhaitons cependant trouver le minimum de pertes dissipables pour faire passer un courant donné, à l'intérieur d'un conducteur méplat. Dans le méplat de la Figure 5-29, les deux drains de ferrite sans perte ( $\mu_r = 2300$ ) disposés comme sur la Figure 5-31, permettent déjà d'obtenir un gain de 22% avec des pertes ramenées à 5.34 mW / m .

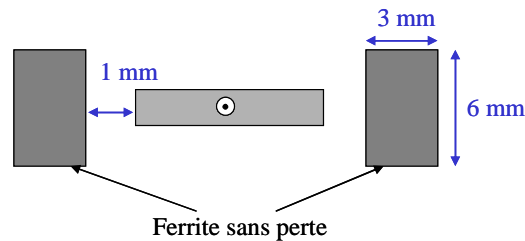


Figure 5-31 : Configuration pour la réduction des pertes par effet de peau

## V.2. Identification et recréation des champs

En partant de cet exemple qui donne un gain intéressant, nous voulons savoir quel champ extérieur permettrait de minimiser les pertes à l'intérieur du méplat. Pour mener notre étude d'optimisation en jouant sur un minimum de paramètre, nous allons utiliser la technique du développement multipolaire qui a été développée par notre équipe au cours de travaux précédents [LAVEUVE-91] [KERADEC-91]. Les fondements et les intérêts de cette technique sont présentés en Annexe VI.

Afin de formuler les champs impliqués dans la configuration de la Figure 5-31, nous allons utiliser une des propriétés du développement multipolaire qui permet d'identifier les champs présents dans un dispositif électromagnétique [MARGUERON-06-1].

Dans la zone se situant entre le conducteur méplat et les pièces de ferrite (Figure 5-31), les champs émis et réfléchis coexistent. Sur un cercle situé à une distance  $R$ , l'induction s'exprime comme la somme des inductions émises et réfléchies (5.4).

$$B_{\varphi}^{tot} = B_{\varphi}^{int}(R, \varphi) + B_{\varphi}^{ext}(R, \varphi) \\ = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\alpha_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{R} \left( \frac{\alpha_n}{R^n} - R^n a_n \right) \cos(n\varphi) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{R} \left( \frac{\beta_n}{R^n} - R^n b_n \right) \sin(n\varphi) \right] \quad (5.4)$$

Pour les séparer, on relève les champs tangentiels sur deux cercles de rayons différents ( $\rho_i$  et  $\rho_e$ ) passant entre le méplat et les ferrites (Figure 5-32) puis on les décompose en série de Fourier de coefficients respectifs sont  $C\rho_i$ ,  $S\rho_i$  et  $C\rho_e$  et  $S\rho_e$ .

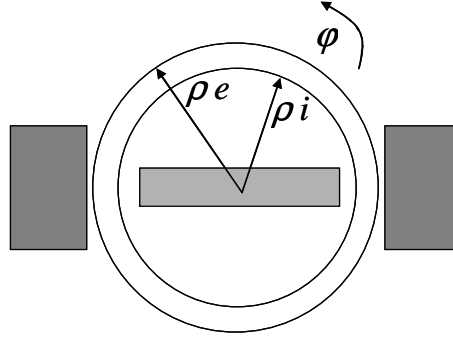


Figure 5-32 : Décomposition en série de Fourier

Les coefficients obtenus sont liés aux composantes figurant dans l'induction (5.4). Après identification on obtient par les quatre relations (5.5).

$$C\rho_i = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{\rho_i} \left( \frac{\alpha_n}{\rho_i^n} - \rho_i^n a_n \right) \quad S\rho_i = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{\rho_i} \left( \frac{\beta_n}{\rho_i^n} - \rho_i^n b_n \right) \\ C\rho_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{\rho_e} \left( \frac{\alpha_n}{\rho_e^n} - \rho_e^n a_n \right) \quad S\rho_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{n}{\rho_e} \left( \frac{\beta_n}{\rho_e^n} - \rho_e^n b_n \right) \quad (5.5)$$

Les valeurs de  $a_n$ ,  $\alpha_n$  se déduisent ensuite en résolvant le système d'équation (5.6). Les expressions de  $b_n$  et  $\beta_n$  sont identiques à celles de  $a_n$ ,  $\alpha_n$  en modifiant les coefficients  $C\rho$  en  $S\rho$ .

$$a_n = -\frac{2\pi}{\mu_0 n} \frac{C\rho_e \cdot \rho_e^{n+1} - C\rho_i \cdot \rho_i^{n+1}}{\rho_e^{2n} - \rho_i^{2n}} \\ \alpha_n = -\frac{2\pi}{\mu_0 n} \frac{C\rho_e \cdot \rho_e^{n+1} \cdot \rho_i^{2n} - C\rho_i \cdot \rho_i^{n+1} \cdot \rho_e^{2n}}{\rho_e^{2n} - \rho_i^{2n}} \quad (5.6)$$

Le dispositif de la Figure 5-32 est inchangé si il subit une rotation de  $180^\circ$ . La décomposition en série de Fourier ne comporte donc que des termes pairs. De plus, le conducteur est symétrique par rapport à l'origine de l'angle  $\varphi$ . La décomposition ne donne que des termes en cosinus. Seuls les termes paires de  $\alpha_{2k}$  et  $a_{2k}$  sont donc nécessaires pour connaître les différents champs émis par le conducteur méplat ( $\alpha_{2k}$ ) et réfléchis par le ferrite ( $a_{2k}$ ).

Pour recréer le champ obtenu par ces ferrites justement, on utilise deux cylindres parcourus par des densités de courants, une en phase et une en quadrature avec le courant injecté dans le méplat (Figure 5-33).

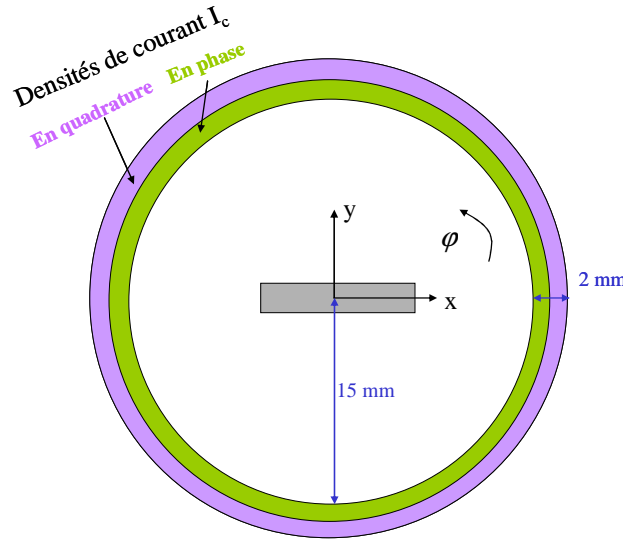


Figure 5-33 : Densité de courant pour recréer artificiellement le champ réfléchi

Au vu des symétries décrites ci-dessus, le courant ne comporte que certains termes (5.7). La fonction  $C(r)$  (5.8) permet de faire le lien entre les  $a_{2k}$  du champ et les coefficients injectés dans les densités de courant positionnés à une distance  $r$  du centre du méplat.

$$I_c = -I \cdot \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C(r) \cdot [\operatorname{Re}(a_{2k}) + i \cdot \operatorname{Im}(a_{2k})] \cdot \cos(2k\varphi) \right) \quad (5.7)$$

$$C(r) = \frac{1}{2\pi} k \cdot r^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{e} \quad \text{Avec } e : \text{épaisseur du cylindre dans lequel le courant est injecté.} \quad (5.8)$$

La partie en quadrature des champs tangentiels, obtenus dans les deux cas d'étude (dispositif avec ferrite et avec densités de courants), tracés sur les rayons  $\rho_i$  et  $\rho_e$ , sont présentés sur la Figure 5-34. Le champ recréé ne possède que trois composantes  $a_2$ ,  $a_4$  et  $a_6$  (Tableau 5-4), ce qui explique les oscillations supplémentaires. Le champ créé à l'aide de la densité de courant correspond très bien à celui qui était réfléchi par le ferrite.

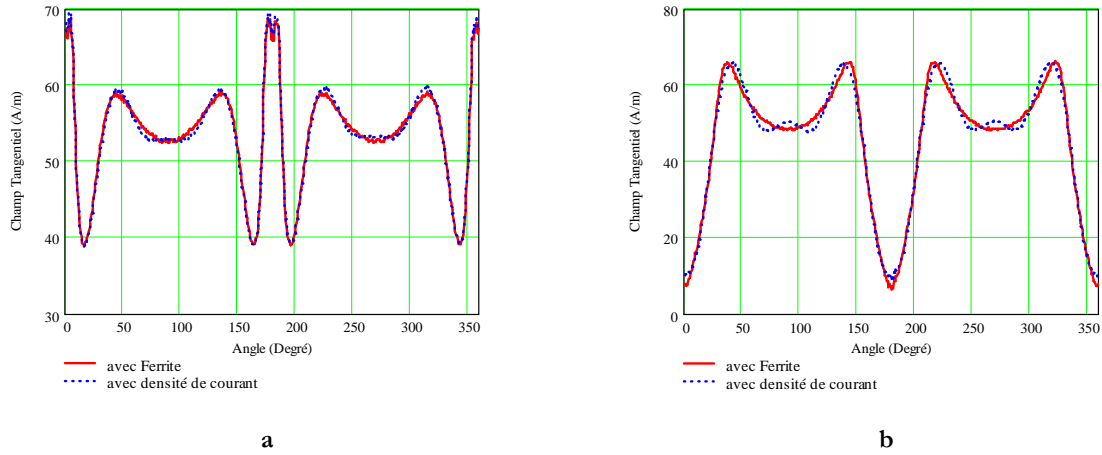


Figure 5-34 : Comparaison des champs tangentiels en phase obtenus avec le ferrite et les densités de courant cylindriques

a : Rayon intérieur  $\pi_i$  | b : Rayon extérieur  $\pi_e$

	Coefficients réels $\text{Re}(a_n)$	Coefficients imaginaires $\text{Im}(a_n)$
n=2	$1.235 \cdot 10^5$	-807
n=4	$1.084 \cdot 10^6$	$-1.198 \cdot 10^4$
n=6	$4.988 \cdot 10^6$	$-1.068 \cdot 10^5$

Tableau 5-4 : Coefficients identifiés

Les résultats pour la partie en quadrature sont nettement moins bons (Figure 5-35), mais leur impact n'est en fait pas très significatif car leur ordre de grandeur est beaucoup plus faible. En effet, la puissance obtenue en ne considérant que la partie en phase du champ est égale à  $5.37 \text{ mW/m}$ . Les deux valeurs avec ferrite et avec densité de courant sont donc identiques, et le manque de précision sur la partie en quadrature n'est pas vraiment un problème.

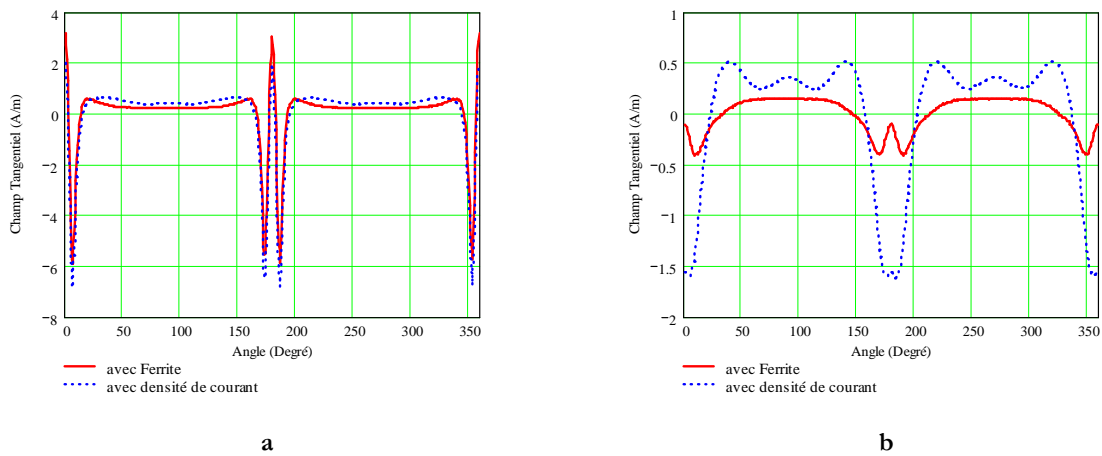


Figure 5-35 : Comparaison des champs tangentiels en quadrature obtenus avec le ferrite et les densités de courant cylindriques

a : Rayon intérieur  $\pi_i$  | b : Rayon extérieur  $\pi_e$

### V.3. Principe de l'optimisation

Cette partie a été menée en collaboration avec l'équipe Modélisation du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble et plus particulièrement avec un de ses doctorants, Ahn Tuan Phung [PHUNG-06-2].

Le but recherché ici, est de déterminer les valeurs des coefficients à choisir dans (5.7) pour minimiser les pertes cuivre dans le conducteur méplat. Pour réaliser cette optimisation, le logiciel de calcul par éléments finis, Flux<sup>®</sup> est couplé avec un outil d'optimisation appelé GOT (General Optimization Toolbox) [COULOMB-02].

La technique exploitée lors de cette optimisation est basée sur la méthode des plans d'expériences [GILLON-98]. Un certain nombre de simulations sont lancées, ce dernier dépendant essentiellement du nombre de paramètres influents. Les résultats de ces simulations sont ensuite traités pour créer une surface de réponse [COSTA-03]. Un algorithme génétique est ensuite appliqué sur cette surface de réponse pour trouver le minimum de la fonction objectif qui est, dans notre cas, la minimisation des pertes cuivre.

Le nombre de simulations dépend de celui des paramètres ajustables  $\text{Re}(a_{2k})$  et  $\text{Im}(a_{2k})$  et du nombre de valeurs que l'on veut tester pour chacun. Plus l'espace de recherche est restreint, plus la surface de réponse créée est petite et moins nombreuses sont les simulations nécessaires à sa création.

Pour limiter la variation de nos paramètres et le nombre de simulations à réaliser, l'intervalle est choisi en fonction des coefficients identifiés précédemment (Tableau 5-4); ces derniers permettent, on l'a vu, d'obtenir un résultat intéressant (Figure 5-31).

### V.4. Résultats de l'optimisation

Nous avons réalisé différentes optimisations en augmentant progressivement le nombre des coefficients ajustables de notre problème. Dans un premier temps, nous avons seulement optimisé les coefficients  $\text{Re}(a_2)$  et  $\text{Im}(a_2)$ . Les valeurs ainsi trouvées ont été figées et nous avons optimisé les paramètres  $\text{Re}(a_4)$  et  $\text{Im}(a_4)$ . Ceci a permis de mieux délimiter l'intervalle dans lequel se situaient les paramètres optimaux. La troisième optimisation a été réalisée en faisant varier les quatre paramètres à la fois.

#### V.4.a. Optimisation de $\text{Re}(a_2)$ et $\text{Im}(a_2)$

Ce calcul n'a donc été réalisé qu'avec les harmoniques deux de la décomposition du champ. Les intervalles initiaux ont été découpés en 20 éléments pour  $\text{Re}(a_2)$  et 20 également pour  $\text{Im}(a_2)$ . Ceci nous donne 400 simulations nécessaires pour créer la surface de réponse.



L'algorithme génétique a trouvé un minimum de pertes de  $5.37 \text{ mW} / m$  pour les valeurs de coefficient (5.9).

$$\text{Re}(a_2) = 334000 \quad \text{Im}(a_2) = 0 \quad (5.9)$$

La valeur de pertes obtenue est supérieure à celle que nous avons dans le cas du ferrite ( $5.37 \text{ mW} / m$ ), mais à ce niveau, le champ émis par les sources de courant est très simplifié puisqu'il ne comprend qu'un harmonique de rang 2 (cf. Annexe VI Figure 3c).

#### V.4.b. Optimisation de $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$

Les valeurs (5.9) sont ensuite figées et une optimisation est lancée avec les coefficients  $\text{Re}(a_4)$  et  $\text{Im}(a_4)$ . 400 simulations sont de nouveau réalisées et un point optimum est trouvé (5.10) avec une puissance dissipée de  $4.87 \text{ mW} / m$ , soit un gain de 29% par rapport à un conducteur seul.

$$\text{Re}(a_4) = -426 \quad \text{Im}(a_4) = -43 \quad (5.10)$$

#### V.4.c. Optimisation de $\text{Re}(a_2)$ , $\text{Im}(a_2)$ , $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$

Les deux optimisations précédentes n'ont sûrement pas donné l'optimum global, mais plutôt des optimums locaux. Nous avons donc optimisé les quatre coefficients simultanément. Chaque paramètre a été découpé en cinq éléments.  $5^4 = 625$  simulations ont donc été réalisées et la surface de réponse a donné un optimum de  $4.86 \text{ mW} / m$  pour les paramètres (5.11).

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_2) &= 330970 & \text{Im}(a_2) &= 4271 \\ \text{Re}(a_4) &= -854 & \text{Im}(a_4) &= 854 \end{aligned} \quad (5.11)$$

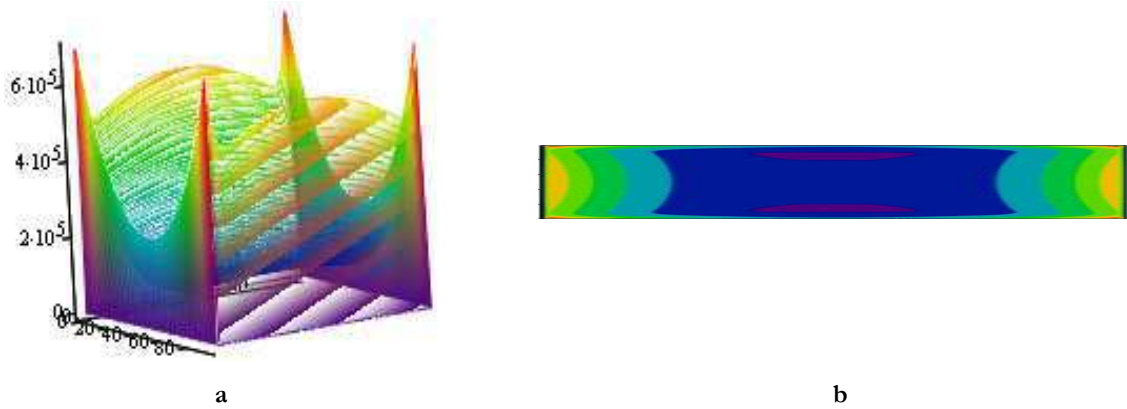
#### V.4.d. Conclusion sur les optimisations

Les résultats de ces optimisations sont regroupées dans le Tableau 5-5. L'optimisation simultanée des quatre coefficients donne le meilleur résultat. Les pertes sont alors réduites de 29% par rapport à un conducteur seul mais, au-delà de cette valeur, qui n'est sûrement pas idéalement optimisée, c'est la forme du champ incident, du champ global autour du méplat et le profil du courant qui nous intéressent.

Nombre de coefficients optimisés	Nombre de simulation éléments finis	Pertes
2 : $\text{Re}(a_2)$ et $\text{Im}(a_2)$	400	$5.36 \text{ mW} / m$
2 : $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$ , ( $\text{Re}(a_2)$ et $\text{Im}(a_2)$ étant fixés)	400	$4.87 \text{ mW} / m$
4 : $\text{Re}(a_2)$ , $\text{Im}(a_2)$ , $\text{Re}(a_4)$ et $\text{Im}(a_4)$	625	$4.86 \text{ mW} / m$

Tableau 5-5 : Comparaison des différentes optimisations

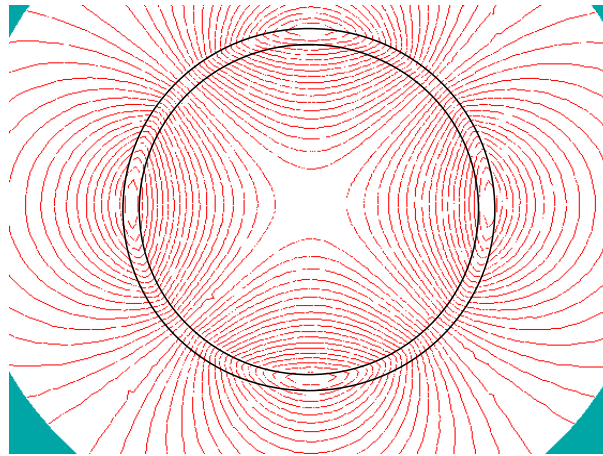
Le courant dans le conducteur méplat soumis au champ optimisé est plus uniforme (Figure 5-36), que celui circulant dans le méplat seul (Figure 5-30). Les pics de courant sont proportionnellement moins hauts et le courant passe d'avantage près du petit côté du conducteur rectangulaire.



**Figure 5-36 : Densité de courant sur la surface du conducteur méplat (cas optimisé)**

**a : Représentée en trois dimensions | b : A l'échelle pour le méplat 8x1 mm<sup>2</sup>**

L'analyse du champ émis par les densités de courant (Figure 5-37) montre que l'harmonique de rang 2 est bien plus fort que les autres. L'allure du champ obtenu est finalement très proche de celle présentée par la Figure 3c de l'Annexe VI.



**Figure 5-37 : Champ extérieur minimisant les pertes dans le conducteur méplat**

Lorsque que le champ propre du méplat et celui émis par les densités de courant sont cumulés, le champ total obtenu tangente les cotés du conducteur (Figure 5-38). Cette figure nous fait penser que le minimum de pertes est peut être atteint pour un champ parallèle aux quatre faces du méplat.

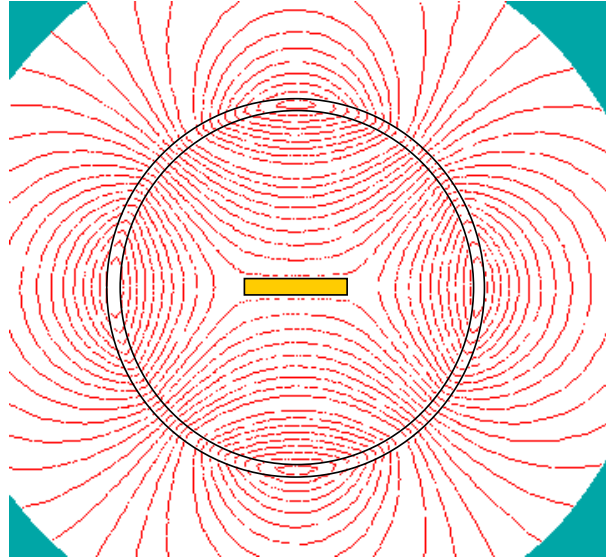


Figure 5-38 : Champ total vu par le méplat

Des simulations et des optimisations avec des harmoniques supplémentaires auraient pu conforter cette idée, mais l'outil d'optimisation GOT ne permet pas, à l'heure actuelle, de gérer plus de cinq paramètres indépendants.

## VI. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre divers développements qui ont été menés au long de cette thèse, en vue de réduire les pertes dans des composants planars et d'une manière plus générale dans des conducteurs rectangulaires.

Toutes ces idées ont découlé d'une simulation par éléments finis nous montrant l'intérêt d'un enroulement secondaire jouant un rôle d'écran, dans la réduction des pertes cuivre d'un transformateur.

Des rendements de plus en plus proches de 1 étant toujours visés par les concepteurs de convertisseurs d'électronique de puissance, nous avons essayé, au cours de ces diverses études de dégager quelques pistes de réflexion.

Nous nous sommes aussi intéressé aux courants de circulation qui apparaissent dès la mise en parallèle d'enroulements dans une fenêtre de transformateur. Ce phénomène, connu des modélisateurs, a reçu ici une solution analytique précise et simple d'utilisation pour un concepteur. Elle réduit considérablement le temps nécessaire pour comparer divers empilements de couches.

## ***CONCLUSION ET PERSPECTIVES***



Les transformateurs planars sont de plus en plus utilisés dans les structures d'électronique de puissance car ils présentent des intérêts majeurs, au niveau de l'encombrement, du rendement et de la méthode industrielle de fabrication.

L'objectif de cette thèse était de fournir le schéma équivalent d'un transformateur planar ainsi que les formules analytiques permettant d'en calculer les composants.

Nous avons donc orienté les études analytiques vers les composants planars mais certains aspects de notre travail sont applicables à des transformateurs de tous types. Nous avons ainsi présenté une topologie de circuit équivalent permettant la retranscription exacte de tous les couplages internes d'un composant magnétique (transformateur, inductance). Un transformateur triphasé (6 enroulements) a ainsi été modélisé de même qu'une inductance triphasée. En outre, d'importantes inégalités liant les éléments de la matrice inductance ont été dégagées.

Toujours de manière générale, nous avons travaillé à la caractérisation expérimentale des transformateurs en partant de mesures d'impédances. Les schémas inductifs présentés dans le premier chapitre ont trouvé leur justification puisque tous les éléments du schéma équivalent d'un transformateur à  $n$  enroulements peuvent se déduire d'une série de mesures d'impédances. Suivant la fréquence et leur grandeur, ces dernières peuvent s'avérer problématique. De nombreuses précautions utiles ont été présentées dans le but d'obtenir des mesures précises et significatives. Nous avons proposé une méthode de caractérisation, sans limitations du nombre d'enroulements, permettant d'accéder aux valeurs de tous les composants et nous avons exposé comment tenir compte des imperfections de mesures dues aux connexions du composant au pont de mesure ou à des court circuits non idéaux. Les paramètres du circuit équivalent final sont obtenus en fonction de la fréquence, ce qui est très pratique pour observer puis représenter, par exemple, les effets des courants induits. Nous avons évalué l'intérêt d'un tel modèle par rapport aux modèles habituels, ainsi que ses limites, en comparant des formes d'ondes relevées sur une maquette de convertisseur.

Nous nous sommes ensuite intéressé à la détermination analytique des éléments du circuit équivalent. Dans un premier temps, nous avons focalisé notre attention sur les composants de ce que nous appelons "transformateur de fuite", qui comprend les inductances de fuites de chaque enroulement et les couplages qui les relient. En se basant sur la formulation PEEC utilisée pour des conducteurs rectangulaire, nous avons mis au point une méthode de calcul permettant de déterminer tous les paramètres statiques du transformateur de fuite, c'est-à-dire ceux que l'on observe en l'absence de courants induits dans les conducteurs. Cette étude a donné lieu à la création d'une feuille de calcul permettant aux concepteurs de faire des calculs facilement et rapidement.

Nous avons ensuite réfléchi à la façon d'obtenir ces mêmes valeurs lorsque les courants induits apparaissent dans les conducteurs. En effet, l'élévation de la fréquence du courant induit une modification de sa répartition sur la section du conducteur et donc une modification de sa résistance et de son inductance. Face à la difficulté de formulation des courants induits dans les conducteurs méplats utilisés en technologie planar, nous avons présenté quelques méthodes, basées sur des approximations, menant aux paramètres cherchés pour des conducteurs rectangulaires. La méthode des circuits équivalents de plaques s'avère très pratique pour étudier les courants de circulation dans des couches en parallèles. La dernière méthode présentée, appelée  $\mu$ PEEC ouvre des perspectives très en vue de s'affranchir de ces problèmes. Une amorce de résolution analytique de l'équation de diffusion dans un conducteur méplat a également été présentée.

Dans la dernière partie nous nous sommes intéressé aux pertes dans les transformateurs, et à celles du conducteur méplat isolé. Nous avons cherché, par diverses approches, à réduire les pertes des composants planar en utilisant des effets de blindage. De même pour les conducteurs rectangulaires, nous avons tenté de minimiser leurs pertes en modifiant la répartition des courants due à l'effet de peau, en approchant des matériaux conducteurs, des matériaux magnétiques et même en appliquant un champ extérieur.

Le travail développé dans ce mémoire, et, plus généralement, la connaissance des transformateurs (travaux commencés il y a plus de 15 ans au laboratoire) ne s'achèvent pas avec cette thèse. Par rapport au sujet initial, nous avons résolu de nombreux problèmes, mais d'autres ne sont que dégrossis. Nous espérons que ces investigations inachevées aideront à la finalisation de ce projet industriel. La topologie des circuits équivalents, ainsi que la méthode de caractérisation sont maintenant matures et les prochains travaux vont être axés vers le calcul analytique car les outils d'optimisation actuels nécessitent le recours à de telles formulations.

A l'heure actuelle, le plus gros problème concerne les aspects de courants induits dans les conducteurs rectangulaires. Deux approches prometteuses ont été introduites dans ce mémoire, à savoir la possibilité d'utiliser les doubles polynômes de Legendre pour décomposer une densité de courant, ainsi que la méthode  $\mu$ PEEC. Cette dernière est, sans aucun doute, la méthode qui permettra d'appréhender ce problème dans les mois/années à venir. La réduction des pertes dans les composants et, de façon plus générale, dans les conducteurs rectangulaires, est liée à cette compréhension des courants induits. Les pistes que nous avons introduites en vue de la diminution des pertes demandent à être approfondie. Les pertes réduites dans un conducteur rectangulaire, par différents moyens, n'ont pas encore suscité une application pratique. Une

forme particulière du champ devrait permettre d'atteindre le minimum recherché. Il pourrait être intéressant ensuite d'essayer de recréer ce champ à l'aide de composant discrets conducteurs et/ou magnétiques.

L'aspect capacitif n'a pas été traité dans cette thèse au-delà de l'identification expérimentale d'un transformateur. Des formules analytiques devront être élaborées pour évaluer les capacités présentes dans la partie électrostatique du circuit équivalent.

Le tout donnera lieu à la création d'un ou de plusieurs outils de calcul permettant au partenaire industriel de concevoir ses transformateurs de façon plus simple, sans avoir à recourir à la fabrication de nombreux prototypes.





## ***BIBLIOGRAPHIE***



**[4294A]** : Agilent 4294A Precision Impedance Analyser-Operation Manual, Agilent Technologies.

**[AGILENT-00]** : "*Impedance Measurement Handbook*", 2<sup>nd</sup> Edition, Agilent Technologies, 2000.

**[AIME-06]** : J. Aimé, J-M. Guichon, L. Meysenc, D. Bouchat, J-L. Schanen, J. Roudet, "*Etude de l'Equilibrage en Courants d'un Redresseur Triphasé Forte Puissance par Modélisation PEEC*", Electronique de puissance du Futur, EPF06, Juillet 2006, Grenoble, France.

**[ASENSI-94]** : R. Asensi, J. A. Cobos, O. Garcia, R. Prieto, J. Uceda, "*A Full procedure to Model High Frequency Transformer Winding*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC94, June 1994, Taipei, Taiwan, in proceeding pp. 856-863.

**[ASENSI-99]** : R. Asensi, J. A. Cobos, P. Alou, R. Prieto, J. Uceda, "*Characterization of Windings Coupling in Multi-Winding Magnetic Components*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC99, June 1999, Charleston (South California), USA, in proceeding Vol. 2, pp. 753-758.

**[AYANT]** : Y. Ayant, M. Borg "*Fonctions spéciales à l'usage des étudiants en physique*", Chapitre IX-Les polynômes de Legendre, maîtrise de physique, Editions Dunod Université, 1971.

**[CAIGNAERT]** : C. Caignaert, "*Algèbre Bilinéaire, Produit Scalaire*", Chapitre 5, partie 6 Endomorphismes Symétriques et Applications. <http://c.caignaert.free.fr/chapitre5/node6.html>

**[CAUFFET-92]** : G. Cauffet, J-P. Keradec, "*Digital Oscilloscope Measurements in High Frequency Power Electronics*", IEEE Instrumentation and Measurement Society, IMTC92, May 1992, pp. 445-447.

**[CHANGTONG-01]** : K. Changtong, R. W. Erickson, "*A Comparison of the Ladder and Full-order Magnetic Models*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC01, June 2001, in proceeding Vol. 4, pp. 2067-2071.

**[CHEW-91]** : W. M. Chew, P. D. Evans, W. J. Heffernan, "*High Frequency Inductor Design Concepts*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC91, June 1991, in proceeding pp. 673-678.

**[CLAVEL-96]** : E. Clavel, "*Vers un outil de conception de câblage : Le logiciel INCA*", Thèse de INPG, Grenoble, Novembre 1996.

**[COGITORE-94]** : B. Cogitore, "*Recherche de circuits équivalents pour les composants magnétiques haute fréquence*", Thèse de l'INPG, Grenoble, Juillet 1994.

**[COSTA-03]** : M. C. Costa, M. L. P. Filho, Y. Maréchal, J-L. Coulomb, J. R. Cardoso "*Optimization of Grounding Grids by Response Surfaces and Genetic Algorithms*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 39, Issue 3, Part 1, pp. 1301-1304, May 2003.

**[COULOMB-02]** : J-L. Coulomb, "*Electromagnétisme et problèmes couplés*", "*Electromagnétisme et éléments finis 3*", Chapitre 8, Optimisation, EGEM, HERNES, 2002.

**[CUK-81]** : S. Cuk, R.D. Middlebrook, "*Advances in Switched Mode Power Conversion*", Vol. 1, pp. 205-218, TESLaco, Pasadena, USA, 1981.

**[DOWELL-66]** : P. L. Dowell, "*Effects of eddy currents in transformer windings*", Proc. of the IEE, vol. 113, No. 8, pp. 1387-1394, August 1966.

**[ERICKSON-98]** : R. W. Erickson, D. Maksimovic, "*A Multiple-Winding Model Having Directly Measurable Parameters*", IEEE Power Electronics Specialist Conference, PESC98, 1998, Fukuoka Japan, in proceeding pp. 1472-1478.

**[FERRIEUX-99]** : J. P. Ferrieux, F. Forest, "*Alimentation à découpage, convertisseurs à résonances*", Editions Dunod, 3<sup>ième</sup> édition, 1999.

**[FERROXCUBE]** : [www.ferroxcube.com](http://www.ferroxcube.com).

**[FLUX]** : Flux, Cedrat, 10 Chemin de Pré Carré-ZIRST, 38426 Meylan, France. <http://www.cedrat.com>.

- [GANTMACHER]** : F. R. Gantmacher, "*Théorie des matrices*", Chapitre 10, Formes quadratiques et hermitiques, § 4 et 5, Editions Jacques Gabay, 1990.
- [GOLDNER]** : P. Goldner, "*Méthodes mathématiques de la physique*", Notes, Chapitre 10, Département Méthodes Mathématiques et Informatiques, Laboratoire de Chimie Appliquée de l'Etat Solide, 2005-2006.
- [GONNET-03]** : J-P. Gonnet, J-M. Guichon, E. Clavel, J. Roudet, V. Mazauric, "*Improving the energetic efficiency of distribution busbars*", IEE PES Transmission and Distribution Conference and Exposition, Vol. 2, pp. 663-638, September 2003.
- [GONNET-05]** : J-P. Gonnet, "*Optimisation des Canalisations Electriques et des Armoires de Distribution*", Thèse de l'UJF, Grenoble, Juin 2005.
- [GILLON-98]** : F. Gillon, P. Brochet, "*Optimization of a Brushless Permanent Magnet Motor with the Experimental Design Method*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 5, pp. 3646-3651, 1998.
- [GUICHON-01]** : J-M. Guichon, "*Modélisation, caractérisation, dimensionnement de jeux de barres*", Thèse de INPG, Grenoble, Novembre 2001.
- [GYSELINCK-05]** : J. Gyselinck, P. Dular, "*Frequency-Domain homogenization of Bundles of Wires in 2-D Magnetodynamic FE Calculations*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 41, No. 5, pp. 1416-1419, May 2005.
- [HAYES-04]** : J. G. Hayes, N. O'Donovan, M. G. Egan, "*The Extended T Model of the Multiwinding Transformer*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC04, June 2004, Aachen, Germany in proceeding pp. 1812-1817.
- [HURLEY-98]** : W. G. Hurley, W. H. Wölfe, J. G. Breslin, "*Optimized Transformer Design: Inclusive of High-Frequency Effects*", IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 13, No. 4, pp. 651-659, July 1998.
- [INCA]** : InCa, "*Inductance Calculation*", Cedrat, 10 Chemin de Pré Carré-ZIRST, 38426 Meylan, France. <http://www.cedrat.com>
- [JOAN-04]** : M. Joan, "*Modélisation des paramètres R et L de matériels électriques bobinés par la méthode des éléments finis 3D*", Thèse de INPG, Grenoble, Janvier 2004.
- [KERADEC-91]** : J-P. Keradec, E. Laveuve, J. Roudet, "*Multipolar development of Vector Potential for parallel wires. Application to the study of Eddy currents effects in transformer windings*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 4242-4245, September 1991.
- [KERADEC-94]** : J-P. Keradec, B. Cogitore, E. Laveuve, M. Bensoam "*Des schémas équivalents pour les circuits couplés multi-enroulements*", Journal de Physique III, n°4, pp. 751-773, Avril 1994.
- [KERADEC-96]** : J-P. Keradec, B. Cogitore, F. Blache, "*Power Transfer in a Two winding Transformer: From 1D Propagation to an Equivalent Circuit*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 1, January 1996.
- [KERADEC-03]** : J-P. Keradec, P. Fouassier, B. Cogitore, F. Blache "*Accounting for Resistivity and Permeability in High Frequency Permeability measurements: Application to MnZn Ferrites*", IEEE Instrumentation and Measurement Society, IMTC03, Vol. 2, May 2003, Vail USA, pp. 1252-1256.
- [KERADEC-05]** : J-P. Keradec, E. Clavel, J-P. Gonnet, V. Mazauric "*Introducing Linear Magnetic Materials in PEEC Simulations. Principles, Academic and Industrial Applications*", IEEE Industrial Application Society, IAS05, Vol. 3, Oct. 2005, Ottawa, Canada, pp. 2236 – 2240.
- [LAVEUVE-91]** : E. Laveuve, "*Modélisation des transformateurs des convertisseurs haute fréquence*", Thèse de INPG, Grenoble, Septembre 1991.
- [LAROCHE]** : F. Laroche, "*Promenade Mathématiques - Histoire, fondement, application*", Editions Ellipses, [http://promenadesmaths.free.fr/fonctions\\_de\\_Bessel.htm](http://promenadesmaths.free.fr/fonctions_de_Bessel.htm).
- [LEFEVRE-04]** : G. Lefevre, "*Conception de convertisseurs statiques pour l'utilisation de la pile à combustible*", Thèse de l'UJF, Grenoble, Novembre 2004.

- [LEMBEYE-05]** : Y. Lembeye, P. Goubier, J. P. Ferrieux, "*Integrated Planar L-C-T component: Design, Characterization and Experimental Efficiency Analysis*", IEEE Transaction on Power Electronics, Vol. 20, No. 3, pp. 593-599, May 2005.
- [LEONAVICIUS-04]** : V. Leonavicius, M. Duffy, U. Boeke, S. C. O Mathuna, "*Comparison of Realization Techniques for PFC Inductor Operating in Discontinuous Conduction Mode*", IEEE Transaction on Power Electronics, Vol. 19, No. 2, pp. 531-541, March 2004.
- [LORRAIN-70]** : P. Lorrain, D. Corson, "Electromagnetic fields and waves", W. H. Freeman and company, San Fransisco (U.S.A.), 1970.
- [MAGOT-04-1]** : D. Magot, X. Margueron, J-P. Keradec, "*PEEC-Like Analytical Calculation of Static Leakage Inductances of H.F. Transformers*", IEEE Industrial Application Society, IAS04, Oct. 2004, Seattle (Washington) USA, CD proceeding 15p3.
- [MAGOT-04-2]** : D. Magot, "*Méthodes et outils logiciels d'aide au dimensionnement. Application aux composants magnétiques et aux filtres passifs*", Thèse de l'INPG, Grenoble, Septembre 2004.
- [MARGUERON-03]** : X. Margueron, "*Modélisation et optimisation de transformateurs de type "PLANAR"*", DEA de Génie Electrique, INPG, Grenoble, Septembre 2003.
- [MARGUERON-04]** : X. Margueron, J-P. Keradec, "*Design of the Equivalent Circuits and Characterization Strategy for n-input Coupled Inductors*", IEEE Industrial Application Society, IAS04, Oct. 2004, Seattle (Washington) USA, CD proceeding 15p3.
- [MARGUERON-05]** : X. Margueron, J-P. Keradec, "*Identifying the Magnetic Part of the Equivalent Circuit of a n-winding Transformer*", IEEE Instrumentation and Measurement Society, IMTC05, May 2005, Ottawa (Ontarion) Canada, CD proceeding IM5320.
- [MARGUERON-06-1]** : X. Margueron, J-P. Keradec, A-T. Phung, O. Chadebec, G. Meunier, "*Applying, Canceling and Identifying the Magnetic Field Received and Emited by a 2D Plan System*", IEEE Magnetics society, CEFC06, May 2006, Miami (Florida) USA, CD proceeding PB1-8 pp. 87.
- [MARGUERON-06-2]** : X. Margueron, J-P. Keradec, A-T. Phung, O. Chadebec, G. Meunier, "*Minimization of Eddy Current Losses in a Straight Rectangular Cross Section Conductor*", IEEE Magnetics society, CEFC06, May 2006, Miami (Florida) USA, CD proceeding PE1-6 pp. 357.
- [MARGUERON-06-3]** : X. Margueron, J-P. Keradec, H. Stéphan, "*Les Courants de Circulation dans les Conducteurs en Parallèle : Influence dans un Transformateur Planar*", Electronique de puissance du Futur, EPF06, Juillet 2006, Grenoble, France.
- [MARTIN-05]** : C. Martin, "*Vers une méthodologie de conception des interconnexions pour les dispositifs de l'Electronique de Puissance*", Thèse de l'UJF, Grenoble, Juillet 2005.
- [MATHCAD]** : Mathcad 11 Enterprise Edition, Mathsoft Engineering and Education, Inc. 101 Main Street, Cambridge, MA 02142, USA.
- [MONTARROS-05]** : J. Montarros, "*Drainage de flux dans les transformateurs planar*", Rapport de stage de Master Recherche spécialité Génie Electrique, INPG, Grenoble, Juin 2005.
- [MOREAU-98]** : O. Moreau, L. Popiel, J-L. Pages, "*Proximity Losses Computation with a 2D Complex Permeability Modelling*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 56, pp. 3616-3619, September 1998.
- [MOREAU-05]** : O. Moreau, R. Michel, T. Chevalier, G. Meunier, M. Joan, J-B. Delcroix, "*3-D High Frequency Computation of Transformer R, L Parameters*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 41, No. 5, pp. 1364-1367, May 2005.
- [MOREL-04]** : A. Morel, "*Valorisation d'une caractérisation HF d'un transformateur "PLANAR" et perspectives d'optimisation*", Rapport de stage de Master Professionnel Conception Des Systèmes d'Energie, INPG, Grenoble, Septembre 2004.
- [NAN-05]** : X. Nan, C. R. Sullivan, "*A Two-Dimensional Equivalent Complex Permeability Model for Round-Wire Windings*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC05, June 2005, pp. 613-618.

[OM10] : OM 10 Microhmètre portatif, AOIP Instrumentation, <http://www.aoip.fr/>.

[PAYTON] : <http://www.paytongroup.com/>

[PHUNG-06-1] : A-T. Phung, O. Chadebec, G. Meunier, X. Margueron, J-P. Keradec, "High Frequency Proximity Losses Determination for Rectangular Cross Section Conductors", IEEE Magnetics society, CEFC06, May 2006, Miami (Florida) USA, CD proceeding PD1-8 pp. 263.

[PHUNG-06-2] : A-T. Phung, "Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquences élevées", Thèse de INPG, Grenoble, Septembre 2006.

[PLANARMAGNETICS] : <http://www.planarmagnetics.com/>

[PSPICE] : Pspice Student Evaluation Version 9.1, OrCAD Inc, <http://www.orcad.com>.

[PRIETO-01] : R. Preto, J. A. Cobos, O. Garcia, P. Alou, J. Uceda, "Using parallel Windings in Planar Magnetic Components", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC01, June 2001, Vol. 4, pp. 2055-2060.

[RAKOTOMAMONJY] : A. Rakotomamonjy, "Support de cours", Méthodes Numériques pour l'ingénieur, INSA Rouen, <http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/anamum/>, Février 2000.

[RAULET-98] : M. A. Raulet, J-P. Masson, D. Gaude, "Introduction d'une représentation dynamique de matériau dans l'équation de diffusion du champ magnétique", The European Physical Journal, Applied Physics 1, pp. 73-76, 1998.

[REATTI-02] : A. Reatti, K. Kazimierczuk, "Comparison of Various Methods for Calculating the AC resistance of inductors", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 3, pp. 1512-1518, May 2002.

[ROBERT-99] : F. Robert, "Modélisation et simulation de transformateurs pour alimentations à découpage", Thèse de Docteur en Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles, Août 1999.

[ROSHEN-88] : W. A. Roshen, D. A. Turcotte, "Planar Inductors on Magnetic Substrates", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 6, pp. 3213-3216, November 1988.

[ROSHEN-90-1] : W. A. Roshen, "Effect of Finite Thickness of Magnetic Substrate on Planar Inductors", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 1, pp. 270-275, January 1990.

[ROSHEN-90-2] : W. A. Roshen, "Analysis of Planar Sandwich Inductors by Current Images", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, No. 5, pp. 2880-2887, September 1990.

[RUEHLI-74] : A. E. Ruehli, "Equivalent Circuit Models for Three Dimensional Multiconductor System", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. MTT-22, No. 3, pp. 216-221, March 1974.

[SCHANEN-00] : J-L. Schanen, "Vers Electronique de puissance: au coeur de la commutation...Modèles pour l'analyse, modèles de conception", Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, Novembre 2000.

[SCHELLMANN-98] : A. Schellmanns, K. Berrouche, J-P. Keradec, "Multiwinding Transformers: A Successive Refinement Method to Characterize a General Equivalent Circuit", IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements, Vol. 47, No. 5, pp. 1316-1321, October 1998.

[SCHELLMANN-99-1] : A. Schellmanns, "Circuits équivalents pour transformateurs multi-enroulements : Application à la CEM conduite d'un convertisseur", Thèse de l'INPG, Grenoble, Juillet 1999.

[SCHELLMANN-99-2] : A. Schellmanns, J-P. Keradec, J-L. Schanen, K. Berrouche, "Representing electrical behaviour of transformers by lumped element circuits: a global physical approach", IEEE Industrial Application Society, IAS99, oct. 1999, Phoenix (Arizona) USA, in proceeding Vol. 3, pp. 2100-2107.

[SCHELLMANN-00] : A. Schellmanns, P. Fouassier, J-P. Keradec, J-L. Schanen, "Equivalent Circuits for Transformers Based on One-Dimensional Propagation: Accounting for Multilayer Structure of Windings and Ferrite Losses", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 5, September 2000.

- [SCHUTZ-99] : J. Schutz, "*Méthodologie de conception d'une alimentation à découpage*", Thèse de l'INPG, Grenoble, Janvier 1999.
- [SKUTT-94] : G. Skutt, F. C. Lee, R. Ridley, D. Nicol, "*Leakage Inductance and Termination Effects in High-Power Planar Magnetic Structure*", Applied Power Electronics Conference, APEC94, 1994, Orlando (Floride) USA, in proceeding pp. 295-301.
- [STRATTON-41] : J. D. Stratton, "*Electromagnetic Theory*", New York : Mc Graw-Hill, 1941, ch.4.
- [SILVESTER-68] : P. Silvester, Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 115, pp. 43-48, 1968.
- [TDK] : [www.tdk.de/productsearch/ferrite.html](http://www.tdk.de/productsearch/ferrite.html).
- [THALES] : <http://www.thalesgroup.com>
- [THIOLIERE-06] : Y. Thiolière, "*Pertes supplémentaires dues à la mise en parallèle d'enroulements de transformateurs H.F.*", Rapport de stage de Master Recherche spécialité Génie Electrique, INPG, Grenoble, Juin 2006.
- [TI-R1078] : J.C. Gourdon, P. Prodhomme, "*Mesure des composants électroniques*", Techniques de l'ingénieur, R1078, Janvier 1993.
- [WEI-03] : C. Wei, Y. Yipen, H. Yuenquan, L. Quing, "*Model and Desing of PCB Parallel Winding for Planar Transformer*", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 39, No. 5, pp. 3202-3204, September 2003.
- [YUEQUAN-02] : H. Yuequan, G. Junfeng, B. Xinmin, C. Wie, "*Problems of Paralleling Windings for Planar Transformer and Solutions*", IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC02, June 2002, Vol. 2, pp. 597-601.





***ANNEXE I : Calcul du champ magnétostatique  
créé par un fil rectiligne sur un milieu  
magnétique supposé infini***



## I. PRESENTATION DU PROBLEME

Le calcul qui suit vise à connaître le champ magnétique créé par un fil fin dans l'air, placé au dessus d'un milieu magnétique supposé infini (Figure 1). Ce dernier, de perméabilité  $\mu_r$  est positionné en  $y=0$ . Le courant filiforme, de valeur  $I$  est dirigé suivant  $Oz$ . Il est situé en  $(0, h)$  dans le repère  $Oxy$ . Les champs sont donc plans et invariants suivant  $z$ .

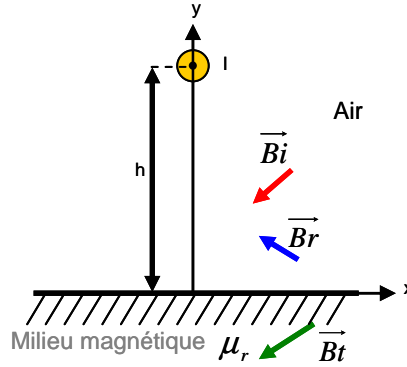


Figure 1 : Fil sur milieu magnétique infini

Dans ce dispositif, trois types d'inductions cohabitent :

- L'induction incidente  $\vec{B}_i$  qui correspond à celle émise par le fil.
- L'induction réfléchi par le milieu magnétique  $\vec{B}_r$ .
- L'induction  $\vec{B}_t$  qui est transmise à travers la surface séparant les deux milieux.

## II. EXPRESSIONS DES DIFFERENTS CHAMPS

### II.1. Champ incident

Le champ incident est celui créé par le fil positionné en  $(0, h)$  dans l'air (1).

$$\begin{aligned} B_{i_x}(x, y) &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \\ B_{i_y}(x, y) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

### II.2. Potentiels transmis et réfléchis

Les potentiels transmis et réfléchis, tous deux parallèles à  $Oz$ , sont solution de l'équation de Laplace 2D (2).

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode de séparation des variables. On pose donc  $A(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ . L'équation (2) devient :

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \cdot G(y) + \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} \cdot F(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{F(x)} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{G(y)} \frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} \quad (3)$$

Cette égalité doit être vérifiée quels que soient  $x$  et  $y$ . Elle met en œuvre une fonction de  $x$  (à gauche) et une autre de  $y$  (à droite) ; elle ne peut donc être satisfaite que si ces deux quantités sont constantes. Il est commode d'écrire cette constante sous la forme  $-(2\pi k)^2$ , si bien que :

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = -(2\pi k)^2 \cdot F(x) \quad (4)$$

Toute fonction du type  $F(x) = e^{j2\pi kx}$  avec  $k$  réel est donc solution de l'équation (4). De plus, la relation (3) montre que  $G(y)$  admet l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 G(y)}{\partial y^2} = (2\pi k)^2 \cdot G(y) \quad (5)$$

Pour chaque valeur de  $k$ ,  $G(y)$  admet deux solutions  $G(y) = e^{2\pi|k|y}$  et  $G(y) = e^{-2\pi|k|y}$ . Le paramètre  $k$  ayant un signe quelconque, l'introduction des valeurs absolues facilite, dans ce qui suit, l'appréhension du sens de variation suivant  $y$ .

Au final, la solution de  $A(x, y)$  pour une valeur de  $k$  est une combinaison linéaire des deux types de fonction (6).

$$A_k(x, y) = P(k)e^{j2\pi kx} e^{2\pi|k|y} + Q(k)e^{j2\pi kx} e^{-2\pi|k|y} \quad (6)$$

Pour obtenir la solution générale de l'équation, il faut sommer toutes les solutions particulières car toutes les valeurs réelles de  $k$  sont admissibles (7).

$$A(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [P(k)e^{j2\pi kx} e^{2\pi|k|y} + Q(k)e^{j2\pi kx} e^{-2\pi|k|y}] \cdot dk \quad (7)$$

### II.3. Champs transmis et réfléchis

Les expressions générales des champs transmis et réfléchis se déduisent directement du potentiel précédent avec la relation (8).

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \Leftrightarrow \begin{cases} B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi |k| P(k) e^{j2\pi kx} e^{2\pi |k|y} - 2\pi |k| Q(k) e^{j2\pi kx} e^{-2\pi |k|y} \right] \cdot dk \\
 B_y(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -j2\pi |k| P(k) e^{j2\pi kx} e^{2\pi |k|y} - j2\pi |k| Q(k) e^{j2\pi kx} e^{-2\pi |k|y} \right] \cdot dk
 \end{aligned} \tag{9}$$

Ces deux champs étant issus, dans le problème traité, de la surface  $y = 0$ , il est logique de postuler qu'ils diminuent lorsqu'ils s'en éloignent. Cela revient à admettre que, pour chacun d'eux l'une des fonctions  $P$  ou  $Q$  est nulle.

Pour le champ réfléchi dans l'air ( $y > 0$ ), nous considérerons que  $P = 0$ . Pour le champ transmis dans le matériau magnétique ( $y < 0$ ), nous poserons que  $Q = 0$

### III. CONDITIONS DE CONTINUITE

Des conditions de continuité doivent être respectées sur la surface séparant le milieu magnétique de l'air. Le champ tangentiel et l'induction normale doivent être continu à l'interface entre les deux milieu (9).

Dans l'air, le champ (ou l'induction) est la somme du champ incident créé par le fil et celui réfléchi par le milieu magnétique.

$$\begin{aligned}
 Hi_x(x, 0) + Hr_x(x, 0) &= Ht_x(x, 0) \\
 Bi_x(x, 0) + Br_x(x, 0) &= Bt_x(x, 0)
 \end{aligned} \tag{10}$$

#### III.1. Champ tangentiel

Sur la surface, les trois champs s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 Hi_x(x, 0) &= \frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} \\
 Hr_x(x, 0) &= \frac{-1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi |k| Q(k) e^{j2\pi kx} \right] \cdot dk \\
 Ht_x(x, 0) &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi |k| P(k) e^{j2\pi kx} \right] \cdot dk
 \end{aligned} \tag{11}$$

On peut donc réécrire l'équation (10) de la façon suivante :

$$\frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} + \frac{-1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi |k| Q(k) e^{j2\pi kx} \right] \cdot dk = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi |k| P(k) e^{j2\pi kx} \right] \cdot dk \tag{12}$$

On voit apparaître l'expression de transformées de Fourier de  $|k|Q(k)$  et  $|k|P(k)$ . On peut donc simplifier la relation (12) en multipliant par  $\frac{\mu_0}{2\pi}$  et en prenant la transformée de Fourier de l'expression obtenue (13).

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} e^{-j2\pi kx} \cdot dx = \frac{1}{\mu_r} |k|P(k) + |k|Q(k) \quad (13)$$

La transformée de Fourier qui reste suite à ce calcul est disponible dans la littérature [AYANT]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} e^{-j2\pi kx} \cdot dx = \pi \cdot e^{-2\pi h|k|} \quad (14)$$

(13) peut donc s'écrire :

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{|k|} e^{-2\pi h|k|} = \frac{1}{\mu_r} P(k) + Q(k) \quad (15)$$

### III.2. Induction normale

On procède de la même façon pour la condition sur l'induction. Sur la surface, les trois inductions normales s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Bi_y(x,0) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + h^2} \\ Br_y(x,0) &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} [2\pi |k|Q(k)e^{j2\pi kx}] \cdot dk \\ Bt_y(x,0) &= -j \int_{-\infty}^{+\infty} [2\pi |k|P(k)e^{j2\pi kx}] \cdot dk \end{aligned} \quad (16)$$

Ces trois inductions sont reliées par l'équation (17) :

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + h^2} - j \int_{-\infty}^{+\infty} [2\pi |k|Q(k)e^{j2\pi kx}] \cdot dk = -j \int_{-\infty}^{+\infty} [2\pi |k|P(k)e^{j2\pi kx}] \cdot dk \quad (17)$$

De la même façon que précédemment, on peut transformer la relation (17) :

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-j2\pi kx} \cdot dx = j|k|Q(k) - j|k|P(k) \quad (18)$$

La transformée de Fourier qui reste est aussi disponible dans la littérature [AYANT]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-j2\pi kx} \cdot dx = \pi \cdot e^{-2\pi h|k|} \cdot \text{sgn}(k) \frac{1}{j} \quad (19)$$

En remplaçant (19) dans (18), on obtient :

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot e^{-2\pi h|k|} \cdot \text{sgn}(k) \frac{1}{k} \cdot d = P(k) - Q(k) \quad (20)$$

#### IV. RESOLUTION DES EQUATIONS

Nous avons maintenant deux équations permettant de déterminer les constantes  $P(k)$  et  $Q(k)$  (21). La résolution de ce système nous permet d'obtenir les deux fonctions recherchées (22).

$$\begin{cases} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{|k|} e^{-2\pi h|k|} = \frac{1}{\mu_r} P(k) + Q(k) \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot e^{-2\pi h|k|} \cdot \frac{1}{|k|} = P(k) - Q(k) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \\ Q(k) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \end{aligned} \quad (22)$$

On peut revenir maintenant aux expressions des inductions recherchées en injectant dans (9) les valeurs de  $P(k)$  et  $Q(k)$ . La valeur absolue de  $k$  oblige à scinder l'intégrale en deux.

$$\begin{aligned} Br_x(x, y) &= -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{j2\pi kx} e^{-2\pi|k|(y+h)} \right] \cdot dk \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \int_{-\infty}^0 \left[ e^{2\pi((y+h)+jx)k} \right] \cdot dk + \int_0^{+\infty} \left[ e^{-2\pi((y+h)-jx)k} \right] \cdot dk \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \left[ \frac{e^{2\pi((y+h)+jx)k}}{2\pi((y+h)+jx)} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-2\pi((y+h)-jx)k}}{-2\pi((y+h)-jx)} \right]_0^{+\infty} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \frac{1}{(y+h)+jx} + \frac{1}{(y+h)-jx} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Finalement on obtient :

$$Br_x(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} \quad (24)$$

Les trois autres calculs, de la composante  $y$  du champ réfléchi et des deux composantes du champ transmis, peuvent être menés de façon similaire. On obtient au final :

$$Br_y(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{x}{x^2 + (y+h)^2} \quad (25)$$



$$Bt_x(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2} \quad (26)$$

$$Bt_y(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{x}{x^2 + (y - h)^2} \quad (27)$$

## V. RECAPITULATIF ET INTERPRETATION

Il est possible d'interpréter les différentes valeurs d'induction que nous avons obtenu :

L'induction incidente  $\vec{B}_i$  est l'induction propre du fil positionné en  $(0, h)$  et parcouru par le courant  $I$ .

$$Bi_x(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2}$$

$$Bi_y(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y - h)^2}$$

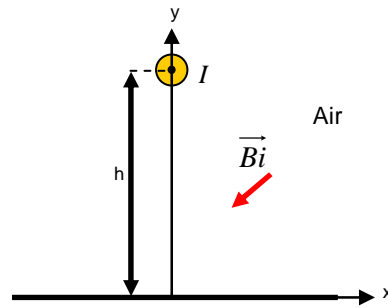


Figure 2 : Induction incidente

L'induction réfléchi  $\vec{B}_r$  correspond à une induction créée par un fil positionné en  $(0, -h)$  et parcouru par un courant  $I \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$ .

$$Br_x(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y + h}{x^2 + (y + h)^2}$$

$$Br_y(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{x}{x^2 + (y + h)^2}$$

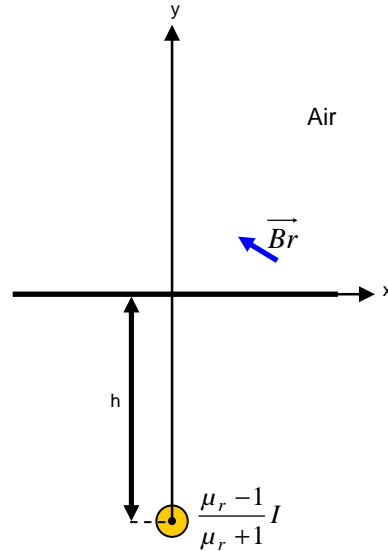


Figure 3 : Induction réfléchi dans l'air

L'induction  $\vec{B}_i$  est égale à l'induction incidente multipliée par un facteur

$$\frac{2\mu_r}{\mu_r + 1}.$$

$$B_{t_x}(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2}$$

$$B_{t_y}(x, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \frac{x}{x^2 + (y - h)^2}$$

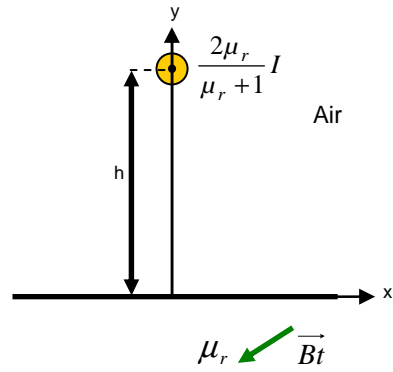


Figure 4 : Induction transmise dans le matériau magnétique



***ANNEXE II : Calcul du champ  
magnétostatique créé par un fil rectiligne sur un  
matériau magnétique d'épaisseur finie***



## I. PRESENTATION DU PROBLEME

Le calcul qui suit vise à connaître le champ magnétique créé par un fil fin dans l'air, placé au dessus d'un milieu magnétique de perméabilité  $\mu_r$  et d'épaisseur  $ep$  (Figure 1). Le courant filiforme, de valeur  $I$  est dirigé suivant  $Oz$ . Il est situé en  $(0, h)$  dans le repère  $Oxy$ . Les champs sont donc plans et invariants suivant  $z$ .

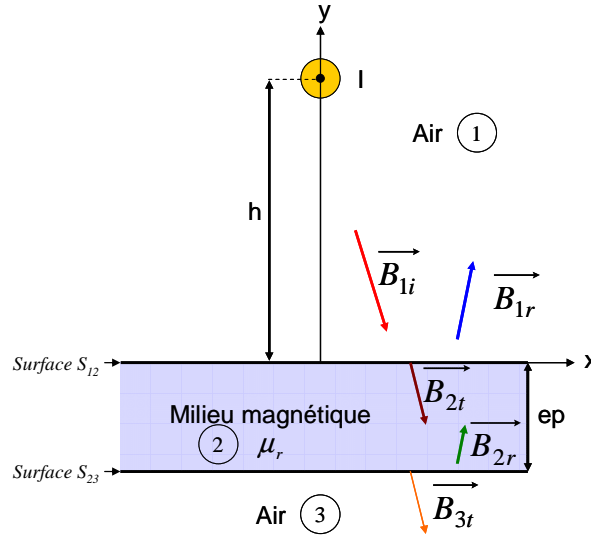


Figure 1 : Fil sur milieu magnétique infini

Dans ce dispositif, cinq inductions doivent être distinguées dans trois différents milieux :

- L'induction incidente  $\vec{B}_{1i}$  qui correspond à celle émise par le fil dans le milieu '1'.
- L'induction réfléchie  $\vec{B}_{1r}$  par le milieu magnétique '2' dans '1'.
- L'induction  $\vec{B}_{2t}$  qui est transmise dans le milieu '2'.
- Une nouvelle induction  $\vec{B}_{2r}$  qui est réfléchie par la 2<sup>ème</sup> face du ferrite.
- Une dernière induction  $\vec{B}_{3t}$  qui est transmise dans le milieu '3'.

## II. CALCULS DES DIFFERENTS CHAMPS

### II.1. Expression générale

Nous allons reprendre la méthode utilisée dans l'annexe précédent. Les champs peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 B_x(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 2\pi|k|P(k)e^{i2\pi kx}e^{2\pi|k|y} - 2\pi|k|Q(k)e^{i2\pi kx}e^{-2\pi|k|y} \right] dk \\
 B_y(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -i2\pi kP(k)e^{i2\pi kx}e^{2\pi|k|y} - i2\pi kQ(k)e^{i2\pi kx}e^{-2\pi|k|y} \right] dk
 \end{aligned} \tag{1}$$

## II.2. Conditions de continuité

Des conditions de continuité pour le champ tangentiel et l'induction normale doivent être respectée sur les deux surfaces  $S_{12}$  ( $y = 0$ ) et  $S_{23}$  ( $y = -ep$ ).

- $S_{12}$  ( $y = 0$ )

$$H_{1ix}(x,0) + H_{1rx}(x,0) = H_{2ix}(x,0) + H_{2rx}(x,0) \quad (2)$$

$$B_{1iy}(x,0) + B_{1ry}(x,0) = B_{2iy}(x,0) + B_{2ry}(x,0) \quad (3)$$

- $S_{23}$  ( $y = -ep$ )

$$H_{2ix}(x,-ep) + H_{2rx}(x,-ep) = H_{3ix}(x,-ep) \quad (4)$$

$$B_{2iy}(x,-ep) + B_{2ry}(x,-ep) = B_{3iy}(x,-ep) \quad (5)$$

Pour les champs étant issus des surfaces  $S_{12}$  et  $S_{23}$ , il est logique de postuler qu'ils diminuent lorsqu'ils s'en éloignent. Cela revient à admettre que pour chacun d'entre eux l'une des fonctions  $P$  ou  $Q$  est nulle.

Par rapport à la surface  $S_{12}$  :

$$B_{1r} \text{ décroît quand } y \text{ augmente} \rightarrow P_{12}(k) = 0$$

$$B_{2i} \text{ décroît quand } y \text{ diminue} \rightarrow Q_{12}(k) = 0$$

Par rapport à la surface  $S_{23}$  :

$$B_{2r} \text{ décroît quand } y \text{ augmente} \rightarrow P_{23}(k) = 0$$

$$B_{3i} \text{ décroît quand } y \text{ diminue} \rightarrow Q_{23}(k) = 0$$

## II.3. Relations sur la surface $S_{12}$

On peut exprimer les différents champs simplifiés sur la surface  $S_{12}$  suite au postulat précédent:

Champ incident :

$$H_{1ix}(x,0) = \frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} \quad (6)$$

Champ réfléchi dans l'air :

$$H_{1rx}(x,0) = -\frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (7)$$

Champ transmis dans la ferrite :

$$H_{2ix}(x,0) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (8)$$

Champ réfléchi dans la ferrite :

$$H_{2rx}(x,0) = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (9)$$

La relation sur la surface  $S_{12}$  nous donne :

$$H_{1ix}(x,0) + H_{1rx}(x,0) = H_{2ix}(x,0) + H_{2rx}(x,0)$$

$$\frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (10)$$

De même, on peut exprimer les différentes inductions simplifiées sur la surface  $S_{12}$  suite au postulat précédent:

Induction incidente :

$$B_{1iy}(x,0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + h^2} \quad (11)$$

Induction réfléchiée dans l'air :

$$B_{1ry}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (12)$$

Induction transmise dans la ferrite :

$$B_{2iy}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (13)$$

Induction réfléchiée dans la ferrite :

$$B_{2ry}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (14)$$

La relation sur la surface  $S_{12}$  nous donne :

$$B_{1iy}(x,0) + B_{1ry}(x,0) = B_{2iy}(x,0) + B_{2ry}(x,0)$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + h^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (15)$$

On peut exprimer les différents champs simplifiés sur la surface  $S_{12}$  suite au postulat précédent:

Champ incident :

$$H_{1ix}(x,0) = \frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} \quad (16)$$

Champ réfléchi dans l'air :

$$H_{1rx}(x,0) = - \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (17)$$

Champ transmis dans la ferrite :

$$H_{2ix}(x,0) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (18)$$

Champ réfléchi dans la ferrite :

$$H_{2rx}(x,0) = - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (19)$$



La relation sur la surface  $S_{12}$  nous donne :

$$H_{1ix}(x,0) + H_{1rx}(x,0) = H_{2tx}(x,0) + H_{2rx}(x,0)$$

$$\frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (20)$$

De même, on peut exprimer les différentes inductions simplifiées sur la surface  $S_{12}$  suite au postulat précédent:

Induction incidente :

$$B_{1iy}(x,0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + h^2} \quad (21)$$

Induction réfléchiée dans l'air :

$$B_{1ry}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (22)$$

Induction transmise dans la ferrite :

$$B_{2ry}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (23)$$

Induction réfléchiée dans la ferrite :

$$B_{2ry}(x,0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (24)$$

La relation sur la surface  $S_{12}$  nous donne :

$$B_{1iy}(x,0) + B_{1ry}(x,0) = B_{2ty}(x,0) + B_{2ry}(x,0)$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + h^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk \quad (25)$$

## II.4. Relations sur la surface $S_{23}$

On exprime de la même façon les conditions de passage sur la surface  $S_{23}$ .

Champ transmis dans la ferrite :

$$H_{2tx}(x,-ep) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k| ep} dk \quad (26)$$

Champ réfléchi dans la ferrite :

$$H_{2rx}(x,-ep) = - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k| ep} dk \quad (27)$$

Champ transmis dans l'air :

$$H_{3tx}(x,-ep) = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k| ep} dk \quad (28)$$

La relation sur la surface  $S_{23}$  nous donne :

$$H_{2tx}(x, -ep) + H_{2rx}(x, -ep) = H_{3tx}(x, -ep)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k|ep} dk = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk \quad (29)$$

De même, on peut exprimer les différentes inductions simplifiées sur la surface  $S_{23}$  suite au postulat précédent:

$$\text{Induction transmise dans la ferrite : } B_{2ty}(x, -ep) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk \quad (30)$$

$$\text{Induction réfléchie dans la ferrite : } B_{2ry}(x, -ep) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k|ep} dk \quad (31)$$

$$\text{Induction transmise dans l'air : } B_{3ty}(x, -ep) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk \quad (32)$$

La relation sur la surface  $S_{23}$  nous donne :

$$B_{2ty}(x, -ep) + B_{2ry}(x, -ep) = B_{3ty}(x, -ep)$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k|ep} dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk \quad (33)$$

On a donc les 4 équations tenant compte du H tangentiel et du B normal sur les 2 surfaces.

$$\frac{I}{2\pi} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + h^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k P_{12}(k) e^{i2\pi kx} dk - \int_{-\infty}^{+\infty} i2\pi k Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} dk$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k|ep} dk = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk$$

$$\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{12}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk - \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| Q_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{2\pi |k|ep} dk = \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi |k| P_{23}(k) e^{i2\pi kx} e^{-2\pi |k|ep} dk$$

### III. RESOLUTION DU SYSTEME

On veut donc placer ces 4 équations sous forme telle que l'on puisse déterminer les valeurs des fonctions  $P_{12}$ ,  $Q_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $Q_{23}$ .

On remarque que toutes les équations contiennent des transformés de Fourier inverses. On peut, en utilisant les mêmes transformés de Fourier que dans l'annexe précédent, exprimer le système d'équation sous forme plus simple

$$\begin{cases} P_{12}(k) - Q_{23}(k) + \mu_r Q_{12}(k) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \\ -P_{12}(k) - Q_{23}(k) + Q_{12}(k) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \\ P_{12}(k) - \mu_r P_{23}(k) = Q_{23}(k) e^{4\pi|k|ep} \\ -P_{12}(k) + P_{23}(k) = Q_{23}(k) e^{4\pi|k|ep} \end{cases} \quad (34)$$

On peut encore ce système sous forme plus simple :

$$\begin{cases} P_{12} - Q_{23} + \mu_r Q_{12} = \mu_r A \\ -P_{12} - Q_{23} + Q_{12} = -A \\ P_{12} - \mu_r P_{23} = B Q_{23} \\ -P_{12} + P_{23} = B Q_{23} \end{cases} \quad (35)$$

Les quatre solutions peuvent ensuite être déduites :

$$\begin{aligned} P_{12} &= 2\mu_r AB \frac{\mu_r + 1}{B(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ Q_{12} &= A \frac{(\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(B - 1)}{B(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ P_{23} &= 4\mu_r AB \frac{1}{B(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ Q_{23} &= -2\mu_r A \frac{(\mu_r - 1)}{B(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \end{aligned} \quad (36)$$

Les quatre "constantes" s'écrivent au final de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{12}(k) &= 2 \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} e^{4\pi|k|ep} \frac{\mu_r + 1}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ Q_{12}(k) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \frac{(\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(e^{4\pi|k|ep} - 1)}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ P_{23}(k) &= 4 \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} e^{4\pi|k|ep} \frac{1}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \\ Q_{23}(k) &= -2 \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi h|k|}}{|k|} \frac{(\mu_r - 1)}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

## IV. FORME EXPLICITE DU CHAMP REFLECHI DANS L'AIR

$$\begin{aligned}
 H_{1rx}(x, y) &= -\frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi|k| \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{-2\pi|k|} (\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(e^{4\pi|k|ep} - 1)}{|k| e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} e^{i2\pi kx} e^{-2\pi|k|y} dk \\
 &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{2} \frac{(\mu_r + 1)(\mu_r - 1)(e^{4\pi|k|ep} - 1)}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} e^{i2\pi kx} e^{-2\pi|k|(y+h)} dk \\
 &= -\frac{I(\mu_r + 1)(\mu_r - 1)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{4\pi|k|ep} - 1)}{e^{4\pi|k|ep} (\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2} e^{i2\pi kx} e^{-2\pi|k|(y+h)} dk \\
 &= -\frac{I}{2} \frac{(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-4\pi|k|ep})}{1 - \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\right)^2 e^{-4\pi|k|ep}} e^{i2\pi kx} e^{-2\pi|k|(y+h)} dk
 \end{aligned}$$

Le dénominateur dans l'intégrale peut être assimilé à (1-r) ou r est la raison d'une série géométrique. Cette série pourrait provenir des réflexions successives : le champ réfléchi peut provenir de la première réflexion (sur la première surface). Ensuite, pour ressortir vers l'avant, il faut qu'il pénètre dans le matériau, qu'il le traverse, qu'il se réfléchisse sur la face arrière, qu'il traverse en retour, qu'il ressorte. Chacune de ces opérations correspond à une atténuation et cet ensemble peut être répété n fois.

Avec cette série, le champ tangentiel peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
 H_{1rx}(x, y) &= -\frac{I}{2} \frac{(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^2 e^{-4\pi|k|ep} \right]^n (1 - e^{-4\pi|k|ep}) \cdot e^{i2\pi kx} e^{-2\pi|k|(y+h)} dk \\
 &= -\frac{I}{2} \frac{(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\pi|k|(y+h+2nep)} - e^{-2\pi|k|(y+h+2(n+1)ep)}) \cdot e^{i2\pi kx} dk
 \end{aligned}$$

Sous cette forme, l'intégrale se calcule ensuite facilement (*voir démonstration à la fin de l'annexe*):

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\pi|k|(y+h+2nep)+i2\pi kx} - e^{-2\pi|k|(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx}) dk \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(y+h+2nep)}{[(y+h-2nep)]^2 + x^2} - \frac{(y+h+2(n+1)ep)}{[(y+h+2(n+1)ep)]^2 + x^2} \right]
 \end{aligned}$$

Le champ réfléchi vaut donc :

$$H_{1rx}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{(y+h+2nep)}{[(y+h-2nep)]^2 + x^2} - \frac{(y+h+2(n+1)ep)}{[(y+h+2(n+1)ep)]^2 + x^2} \right]$$

Après simplification, on obtient (*voir démonstration à la fin de l'annexe*):

$$H_{1rx}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \left[ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y+h}{[y+h]^2 + x^2} - \frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2m} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \right]$$

Cette expression se décompose en 2 termes :

- Le 1<sup>er</sup> est, comme pour le cas milieu infini, le champ créé par un fil positionné en  $(0, -h)$  et parcouru par un courant  $I \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}$ .
- Le 2<sup>nd</sup> correspond à la somme des champs créés par une infinité de fils positionnés en  $(0, -h - 2n \cdot ep)$  et parcourus par des courants  $I \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n}$ . Ce terme est pondéré par un facteur  $-\frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1}$ . Cette somme est due aux réflexions multiples du champ entre les bords de la ferrite.

## V. BILAN

Vu la complexité des différents calculs, nous n'allons pas rentrer dans les détails de l'expression pour les 7 autres champs. La méthode à appliquer est la même et les astuces de calcul sont similaires. Nous présenterons juste les huit expressions recherchées initialement :

$$H_{1rx}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \left[ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y + h}{[y + h]^2 + x^2} - \frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \frac{(y + h + 2nep)}{[(y + h + 2nep)]^2 + x^2} \right] \quad (38)$$

$$H_{1ry}(x, y) = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{(\mu_r - 1)}{(\mu_r + 1)} \frac{x}{(y + h)^2 + x^2} - \frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \frac{x}{(y + h + 2nep)^2 + x^2} \right]$$

$$H_{2tx}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{2}{\mu_r + 1} \left[ \frac{(y - h)}{(y - h)^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{(y - h - 2nep)}{(y - h - 2nep)^2 + x^2} \right] \right] \quad (39)$$

$$H_{2ty}(x, y) = \frac{I}{2\pi} \frac{2}{(\mu_r + 1)} \left[ \frac{x}{(y - h)^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{x}{(y - h - 2nep)^2 + x^2} \right] \right]$$

$$H_{2rx}(x, y) = \frac{I}{2\pi} \frac{2}{(\mu_r - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{(y + h + 2nep)}{(y + h + 2nep)^2 + x^2} \right] \quad (40)$$

$$H_{2ry}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{2}{(\mu_r - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{x}{(y + h + 2nep)^2 + x^2} \right]$$

$$H_{3tx}(x, y) = -\frac{I}{2\pi} \frac{4\mu_r}{(\mu_r + 1)^2} \left[ \frac{(y - h)}{(y - h)^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{(y - h - 2nep)}{(y - h - 2nep)^2 + x^2} \right] \right] \quad (41)$$

$$H_{3ty}(x, y) = \frac{I}{2\pi} \frac{4\mu_r}{(\mu_r + 1)^2} \left[ \frac{x}{(y - h)^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{x}{(y - h - 2nep)^2 + x^2} \right] \right]$$

\*\*\*\*\*

### Démonstrations :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{-2\pi|k|(y+h+2nep)+i2\pi kx} - e^{-2\pi|k|(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx} \right) dk \\
 &= \int_{-\infty}^0 \left( e^{+2\pi k(y+h+2nep)+i2\pi kx} - e^{+2\pi k(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx} \right) dk + \int_0^{+\infty} \left( e^{-2\pi k(y+h+2nep)+i2\pi kx} - e^{-2\pi k(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx} \right) dk \\
 &= \left[ \frac{e^{+2\pi k(y+h+2nep)+i2\pi kx}}{2\pi(y+h+2nep)+i2\pi k} - \frac{e^{+2\pi k(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx}}{2\pi(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi k} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-2\pi k(y+h+2nep)+i2\pi kx}}{-2\pi(y+h+2nep)+i2\pi k} - \frac{e^{-2\pi k(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi kx}}{-2\pi(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi k} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \left[ \frac{1}{2\pi(y+h+2nep)+i2\pi k} - \frac{1}{2\pi(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi k} \right] + \left[ -\frac{1}{-2\pi(y+h+2nep)+i2\pi k} + \frac{1}{-2\pi(y+h+2(n+1)ep)+i2\pi k} \right] \\
 &= \left[ \frac{2\pi(y+h+2nep)-i2\pi k}{[2\pi(y+h+2nep)]^2 + 4\pi^2 k^2} - \frac{2\pi(y+h+2(n+1)ep)-i2\pi k}{[2\pi(y+h+2(n+1)ep)]^2 + 4\pi^2 k^2} \right] + \\
 &\quad \left[ \frac{-2\pi(y+h+2nep)-i2\pi k}{[2\pi(y+h+2nep)]^2 + 4\pi^2 k^2} + \frac{-2\pi(y+h+2(n+1)ep)-i2\pi k}{[2\pi(y+h+2(n+1)ep)]^2 + 4\pi^2 k^2} \right] \\
 &= \frac{4\pi(y+h+2nep)}{[2\pi(y+h+2nep)]^2 + 4\pi^2 k^2} - \frac{4\pi(y+h+2(n+1)ep)}{[2\pi(y+h+2(n+1)ep)]^2 + 4\pi^2 k^2} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(y+h+2nep)}{[(y+h+2nep)]^2 + x^2} - \frac{(y+h+2(n+1)ep)}{[(y+h+2(n+1)ep)]^2 + x^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{1rx}(x, y) &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \left[ \frac{(y+h+2nep)}{[y+h+2nep]^2 + x^2} - \frac{(y+h+2(n+1)ep)}{[(y+h+2(n+1)ep)]^2 + x^2} \right] \\
 &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \frac{(y+h+2nep)}{[y+h+2nep]^2 + x^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2(m-1)} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \right] \\
 &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \frac{(y+h+2nep)}{[y+h+2nep]^2 + x^2} - \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2m} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \right] \\
 &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \frac{y+h}{[y+h]^2 + x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2n} \frac{(y+h+2nep)}{[y+h+2nep]^2 + x^2} - \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2m} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \right] \\
 &= -\frac{I}{2\pi} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \left[ \frac{y+h}{[y+h]^2 + x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2m} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \left( 1 - \left( \frac{\mu_r + 1}{\mu_r - 1} \right)^2 \right) \right] \\
 &= -\frac{I}{2\pi} \left[ \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{y+h}{[y+h]^2 + x^2} - \frac{4\mu_r}{\mu_r^2 - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \right)^{2m} \frac{(y+h+2mep)}{[(y+h+2mep)]^2 + x^2} \right]
 \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*



***ANNEXE III : Feuille de calcul Mathcad® des  
inductances de fuites statiques***





## Inductances de fuite "basse fréquence"

Cette feuille de calcul peut être utilisée pour déterminer de façon analytique la valeur de l'inductance de fuite d'un transformateur en basse fréquence.

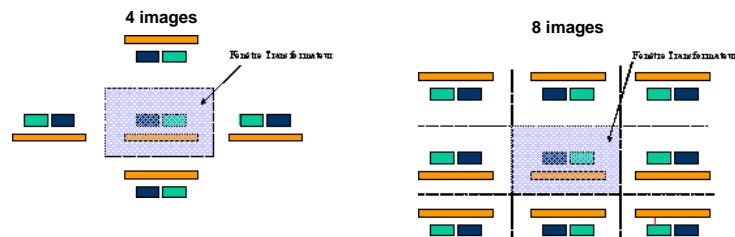
Le calcul est basé sur un calcul d'énergie en considérant le cas où les ampères tours sont compensés (essai en court-circuit).

Pour plus de clarté, les seules données que doit rentrer l'utilisateur sont décrites dans [cette police](#).

Les différentes fonctions utilisées par la feuille de calcul sont elles décrites dans [cette police](#).

5 calculs d'énergie sont réalisés pour déterminer la valeur de l'inductance de fuite :

- 1) L'énergie est évaluée à partir de l'induction B en calculant l'intégrale de  $B^2/\mu_0$  de façon numérique
- 2) L'énergie est évaluée à partir du potentiel vecteur A en calculant l'intégrale de AJ de façon numérique
- 3) L'énergie est évaluée à partir du potentiel vecteur A en calculant l'intégrale de AJ de façon analytique
- 4) L'énergie est évaluée à partir du potentiel vecteur A en calculant l'intégrale de AJ de façon analytique en tenant compte de 4 images magnétiques (influence du circuit magnétique)
- 5) L'énergie est évaluée à partir du potentiel vecteur A en calculant l'intégrale de AJ de façon analytique en tenant compte de 8 images magnétiques (influence du circuit magnétique). D'après les essais cette valeur semble être la meilleure, même si elle surestime l'énergie dans la fenêtre de transformateur.



Le calcul 1 est nécessaire pour évaluer ensuite un "chemin" moyen entre les 2 pics de l'induction par unité de longueur.

Le calcul 2 peut être très long suivant le nombre de conducteurs puisque l'intégration est à réaliser sur chaque conducteur, donc à chaque fois sur une grille différente. De plus, si le nombre d'éléments de chaque grille est trop faible, il se peut que la valeur de l'intégration soit légèrement sous-évaluée.

Cette faible erreur ne se retrouve pas lors de l'intégration analytique (calcul 3) puisqu'elle tient compte de l'énergie dans tout l'espace et non pas seulement dans la fenêtre du transformateur.

Pour tenir compte de l'influence du CM, les 8 images magnétiques (calcul 5) donnent de meilleurs résultats que le calcul réalisé avec 4 images (calcul 4).

Pour ne pas effectuer l'intégration numérique il faut placer un "0" dans la variable *numerique* ci-dessous. Au contraire, il faut placer un "1" dans cette variable pour réaliser cette intégration numérique.

**Variable pour valider l'intégration numérique :** `numerique := 0`

On a vu l'utilité de décrire séparément les fenêtres des transformateurs, l'énergie contenue dans chaque fenêtre pouvant varier de façon considérable suivant le placement des conducteurs. Dans la feuille de calcul, les données contenues dans la "colonne" gauche concernent la fenêtre de gauche et celles contenues dans la "colonne" de droite concernent l'autre fenêtre.

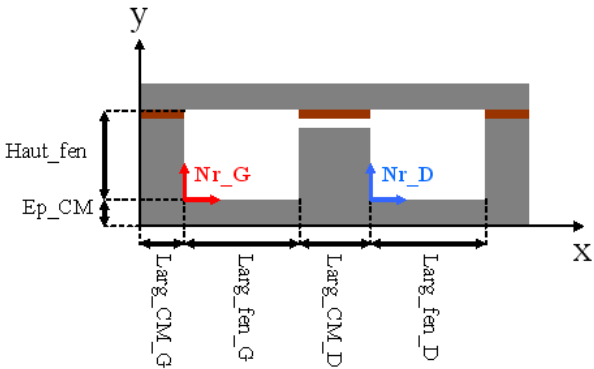
Il faut choisir l'unité dans laquelle toutes les données du problème seront rentrées : 1) m  
2) mm  
3) µm

Variable pour les unités : unite := 3

\*\*\*\*\*

1-Description du Circuit magnétique

L'origine des axes (x,y) est prise dans le coin inférieur gauche du circuit magnétique



Largueurs des fenêtres : Larg\_fen\_G := 6800      Larg\_fen\_D := 6900

Hauteur de la fenêtre :    Haut\_fen := 2520

Largeurs colonnes Circuit magnétique : Larg\_CM\_G := 3000      Larg\_CM\_D := 6000

Epaisseur Circuit magnétique :    Ep\_CM := 1600

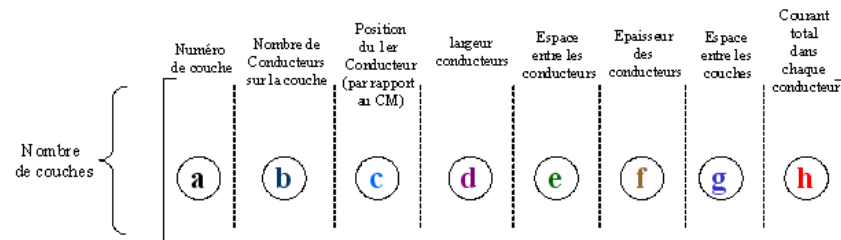
Les grilles sur laquelle seront tracées les composantes de l'induction et l'énergie sont contenues dans les fenêtres du transformateur. Elles ont pour origine les nouveaux repères **Nr\_G**, **Nr\_D** ; elles s'étendent sur Larg\_fen\_ en x et Haut\_fen\_ en y.

Nombre d'intervalles en x (nombre de points - 1) :    Nx := 199

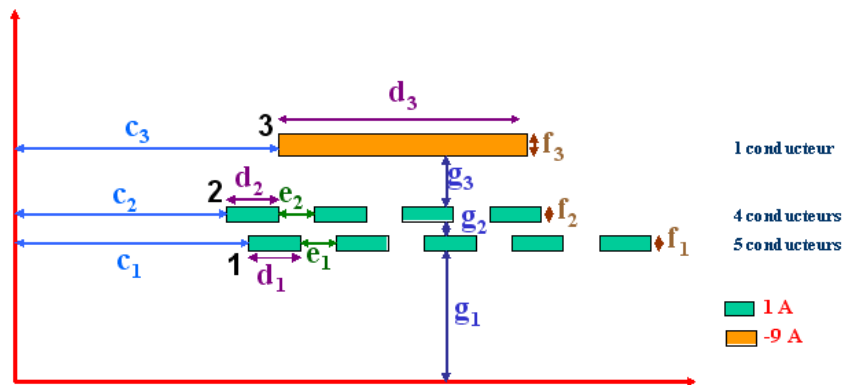
Nombre d'intervalles en y (nombre de points - 1) :    Ny := 99

## 2-Description des couches et conducteurs

On crée une matrice pour décrire de façon géométrique les conducteurs.



Exemple avec 2 enroulements répartis sur 3 couches



1	5	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$f_1$	$g_1$	1
2	4	$c_2$	$d_2$	$e_2$	$f_2$	$g_2$	1
3	1	$c_3$	$d_3$	$e_3$	$f_3$	$g_3$	-9

Les conducteurs des couches 1 et 2 sont tous placés en série et traversés par un courant de 1A. L'unique conducteur de la couche 3 est quant à lui traversé par un courant égal à -9 fois le courant d'un conducteur d'une autre couche (9 conducteurs donc -9 A.tr)

La matrice "**Desc\_c**" décrivant les conducteurs possède donc 8 colonnes ; son nombre de ligne dépend du nombre de couches du transformateur où sont répartis les enroulements.

Matrice décrivant le placement des couches et conducteurs (longueurs exprimées dans l'unité précédente) :

$$\text{Desc\_c\_G} := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1385 & 656 & 208 & 70 & 435 & 0.5 \\ 2 & 5 & 1385 & 656 & 208 & 70 & 50 & 0.5 \\ 3 & 6 & 1155 & 554 & 208 & 70 & 50 & 0.5 \\ 4 & 6 & 1155 & 554 & 208 & 70 & 50 & 0.5 \\ 5 & 6 & 1155 & 554 & 208 & 70 & 50 & 0.5 \\ 6 & 6 & 1155 & 554 & 208 & 70 & 75 & 0.5 \\ 7 & 2 & 3002 & 693 & 230 & 70 & 50 & \frac{-17}{3} \\ 8 & 1 & 2771 & 693 & 0 & 70 & 50 & \frac{-17}{3} \end{pmatrix}$$

Matrice décrivant le placement des couches et conducteurs (longueurs exprimées dans l'unité précédent

Les conducteurs de la fenêtre droite sont décrits par rapport au repère  $Nr\_D$

$$\text{Desc\_c\_D} := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1435 & 656 & 208 & 70 & 435 & -0.5 \\ 2 & 5 & 1435 & 656 & 208 & 70 & 50 & -0.5 \\ 3 & 6 & 1205 & 554 & 208 & 70 & 50 & -0.5 \\ 4 & 6 & 1205 & 554 & 208 & 70 & 50 & -0.5 \\ 5 & 6 & 1205 & 554 & 208 & 70 & 50 & -0.5 \\ 6 & 6 & 1205 & 554 & 208 & 70 & 75 & -0.5 \\ 7 & 3 & 2128 & 693 & 230 & 70 & 50 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

▼

$$\text{Somme des ampères tours : } \Sigma \text{Atr\_G} := \sum_{k1=0}^{\text{lignes}(\text{Desc\_c\_G})-1} (\text{Desc\_c\_G}_{k1,1} \cdot \text{Desc\_c\_G}_{k1,7})$$

$$\Sigma \text{Atr\_G} = 0$$

Test sur la somme

$$\begin{aligned} \text{des ampères tours : } \text{Atr} := & \left| \begin{array}{l} \text{test\_Atr}_0 \leftarrow \text{"Fenetre Gauche : COMPENSES"} \text{ if } \Sigma \text{Atr\_G} < |0 + 0.002| \\ \text{test\_Atr}_0 \leftarrow \text{"Fenetre Gauche : NON COMPENSES"} \text{ otherwise} \\ \text{test\_Atr}_1 \leftarrow \text{"Fenetre Droite : COMPENSES"} \text{ if } \Sigma \text{Atr\_D} < |0 + 0.002| \\ \text{test\_Atr}_1 \leftarrow \text{"Fenetre Droite : NON COMPENSES"} \text{ otherwise} \\ \text{test\_Atr} \end{array} \right. \end{aligned}$$

▲

**Il faut, pour que le calcul soit valide, que la somme des ampères tours dans chaque fenêtre du transformateur soit nulle. Si dans la fenetre suivante "COMPENSES" apparait pour les fenetre gauche et droite, le calcul sera valide. Dans le cas contraire, il faut modifier la valeur des courants (derniere colonne de la matrice) pour obtenir une somme des ampères tours nulle.**

Les Ampères tours sont

$$\text{Atr} = \begin{pmatrix} \text{"Fenetre Gauche : COMPENSES"} \\ \text{"Fenetre Droite : COMPENSES"} \end{pmatrix}$$

### 3-Discrétisation de la grille (fenêtre)

$$\text{Unité : } u := \begin{cases} 1 & \text{if unite} = 1 \\ 10^{-3} & \text{if unite} = 2 \\ 10^{-6} & \text{if unite} = 3 \end{cases}$$

$$\text{Coordonnées du nouveau repère : } \text{Nr\_G} := \begin{pmatrix} \text{Larg\_CM\_G} \cdot u \\ \text{Ep\_CM} \cdot u \end{pmatrix}$$

$$\text{Indice pour balayer l'axe x : } i := 0..N_x$$

$$\text{Indice pour balayer l'axe y : } j := 0..N_y$$

$$\text{Longueur de la grille en x : } l_x := \text{Larg\_fen\_G} \cdot u$$

$$\text{Longueur de la grille en y : } l_y := \text{Haut\_fen} \cdot u$$

$$\text{Discrétisation des axes : } \begin{aligned} x\_G_i &:= \text{Nr\_G}_0 + \frac{l_x}{N_x} \cdot i \\ y\_G_j &:= \text{Nr\_G}_1 + \frac{l_y}{N_y} \cdot j \end{aligned}$$

$$\text{Element de surface : } dS := \frac{l_x}{N_x} \cdot \frac{l_y}{N_y}$$

$$\text{Coordonnées du nouveau repère : } \text{Nr\_D} := \begin{pmatrix} \text{Larg\_CM\_G} \cdot u \\ \text{Ep\_CM} \cdot u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Larg\_fen\_G} + \text{Larg\_CM\_D} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u$$

$$\text{Discrétisation des axes : } \begin{aligned} x\_D_i &:= \text{Nr\_D}_0 + \frac{l_x}{N_x} \cdot i \\ y\_D_j &:= \text{Nr\_D}_1 + \frac{l_y}{N_y} \cdot j \end{aligned}$$

### 4-Initialisation des fonctions et variables

$$\text{Perméabilité du vide : } \mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$\begin{aligned} \text{Fonctions pour arrondir : } \text{mantisce}(x) &:= x - \text{partenti\`ere}(x) \\ \text{roundoff}(x) &:= \text{si}(\text{mantisce}(x) < .5, \text{partenti\`ere}(x), \text{plafond}(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Précision : } \varepsilon := 10^{-12}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour différentier fenêtre gauche et fenêtre droite : } \text{gauche} &:= 1 \\ \text{droite} &:= 2 \end{aligned}$$

**Fonction pour tracer les conducteurs dans une fenêtre graphique :**

```

Cond(A1, fen) :=
  for n ∈ 0.. Nx
    for m ∈ 0.. Ny
      Cn,m ← 0
    fac ← 10-6
    for r ∈ 0.. lignes(A1) - 1
      for n ∈ roundoff $\left[\left(A1_{r,1} \cdot u - Nr\_G_0\right) \cdot \frac{Nx}{Lx}\right]..roundoff\left[\left(A1_{r,3} \cdot u - Nr\_G_0\right) \cdot \frac{Nx}{Lx}\right]$  if fen = gauche
        for m ∈ roundoff $\left[\left(A1_{r,4} \cdot u\right) \cdot \frac{Ny}{ly}\right]..roundoff\left[\left(A1_{r,2} \cdot u\right) \cdot \frac{Ny}{ly}\right]$ 
          Cn,m ← fac
        for n ∈ roundoff $\left[\left(A1_{r,1} \cdot u - Nr\_D_0\right) \cdot \frac{Nx}{Lx}\right]..roundoff\left[\left(A1_{r,3} \cdot u - Nr\_D_0\right) \cdot \frac{Nx}{Lx}\right]$  if fen = droite
          for m ∈ roundoff $\left[\left(A1_{r,4} \cdot u\right) \cdot \frac{Ny}{ly}\right]..roundoff\left[\left(A1_{r,2} \cdot u\right) \cdot \frac{Ny}{ly}\right]$ 
            Cn,m ← fac
    C

```

**Fonction de Sommation (pour B : Grille sur la fenetre)**

```

Sg(G,dS) :=
  S ← 0
  for n ∈ 1.. Nx
    for m ∈ 1.. Ny
      Wcn,m ←  $\frac{1}{4} \cdot (G_{n,m} + G_{n-1,m} + G_{n-1,m-1} + G_{n,m-1})$ 
      S ← S + Wcn,m
  S · dS

```

**Fonction de Sommation (pour A : Grille sur conducteurs)**

```

Sg1(G,dS1,Nx1,Ny1) :=
  S ← 0
  for n ∈ 1.. Nx1
    for m ∈ 1.. Ny1
      Wcn,m ←  $\frac{1}{4} \cdot (G_{n,m} + G_{n-1,m} + G_{n-1,m-1} + G_{n,m-1})$ 
      S ← S + Wcn,m
  S · dS1

```

### Composantes de l'induction pour un méplat

$$B_x(x, y, a, b, I) := \frac{\mu_0 \cdot I}{16 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \cdot \left[ \begin{aligned} & 2 \cdot (y - b) \cdot \left( \arctan\left(\frac{x + a}{y - b}\right) - \arctan\left(\frac{x - a}{y - b}\right) \right) \dots \\ & + \left[ (-2) \cdot (y + b) \cdot \left( \arctan\left(\frac{x + a}{y + b}\right) - \arctan\left(\frac{x - a}{y + b}\right) \right) \right] \dots \\ & + (x + a) \cdot \ln \left[ \frac{(x + a)^2 + (y - b)^2}{(x + a)^2 + (y + b)^2} \right] + (x - a) \cdot \ln \left[ \frac{(x - a)^2 + (y + b)^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \right] \end{aligned} \right]$$

$$B_y(x, y, a, b, I) := \frac{-\mu_0 \cdot I}{16 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \cdot \left[ \begin{aligned} & 2 \cdot (x - a) \cdot \left( \arctan\left(\frac{y + b}{x - a}\right) - \arctan\left(\frac{y - b}{x - a}\right) \right) \dots \\ & + \left[ (-2) \cdot (x + a) \cdot \left( \arctan\left(\frac{y + b}{x + a}\right) - \arctan\left(\frac{y - b}{x + a}\right) \right) \right] \dots \\ & + (y + b) \cdot \ln \left[ \frac{(x - a)^2 + (y + b)^2}{(x + a)^2 + (y + b)^2} \right] + (y - b) \cdot \ln \left[ \frac{(x + a)^2 + (y - b)^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \right] \end{aligned} \right]$$

### Recherche de maximum dans une fenetre

```

max(W_, fen) :=
  m ← 0
  im ← 0
  jm ← 0
  for k ∈ 0..Nx
    for l ∈ 0..Ny
      if W_{-k,l} > m
        im ← k
        jm ← l
        m ← W_{-k,l}
  if fen = gauche
    xm ← Nr_G_0 +  $\frac{l_x}{N_x} \cdot im$ 
    ym ← Nr_G_1 +  $\frac{l_y}{N_y} \cdot jm$ 
  if fen = droite
    xm ← Nr_D_0 +  $\frac{l_x}{N_x} \cdot im$ 
    ym ← Nr_D_1 +  $\frac{l_y}{N_y} \cdot jm$ 
  (
    xm
    ym
    m
    im
    jm
  )

```

### Primitive du potentiel vecteur d'un fil

$$F(x, y, a, b) := (x - a) \cdot (y - b) \cdot \ln \left[ (x - a)^2 + (y - b)^2 \right] + (x - a)^2 \cdot \arctan \left( \frac{y - b}{x - a} \right) + (y - b)^2 \cdot \arctan \left( \frac{x - a}{y - b} \right)$$



### Variation de la primitive

$$A(x, y, ae, be, I) := \frac{-\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot (2 \cdot ae \cdot 2 \cdot be)} \cdot [(F(x, y, ae, be) - F(x, y, -ae, be)) - (F(x, y, ae, -be) - F(x, y, -ae, -be))]$$

## 5-Calcul de l'emplacement des conducteurs

Pointeur pour se déplacer dans la matrice décrivant les couches :  $ind\_G := 0..lignes(Desc\_c\_G) - 1$

Extraction de vecteurs de l'intérieur de la matrice :

$$\begin{aligned} Abscisse\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 2} \\ Largeur\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 3} \\ Espace\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 4} \\ Epaisseur\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 5} \\ Ecart\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 6} \\ Courant\_G_{ind\_G} &:= Desc\_c\_G_{ind\_G, 7} \end{aligned}$$

Nombre de couches du transformateur :  $Nbr\_couch\_G := lignes(Desc\_c\_G)$  **Nbr\_couch\_G = 8**

Nombre de conducteurs dans la fenêtre :  $Nbr\_cond\_G := \sum_{i=0}^{Nbr\_couch\_G-1} Desc\_c\_G_{i, 1}$  **Nbr\_cond\_G = 37**

Mise en forme de la matrice de description des couches et des conducteurs :

$$\begin{aligned} Desc\_c1\_G &:= \text{for } i \in 0..lignes(Desc\_c\_G) - 1 \\ &\quad \text{for } j \in (0..cols(Desc\_c\_G) - 1) \\ &\quad \quad Desc\_c1\_G_{i, j} \leftarrow Desc\_c\_G_{i, j} \\ &\quad \text{for } i \in (0..lignes(Desc\_c\_G) - 1) \\ &\quad \quad Desc\_c1\_G_{i, 2} \leftarrow Desc\_c\_G_{i, 2} + \frac{Nr\_G_0}{u} \\ &\quad \text{for } i \in 0..lignes(Desc\_c\_G) - 1 \\ &\quad \quad \text{if } i = 0 \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_G_{0, 6} \leftarrow Desc\_c\_G_{0, 6} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_G_{0, 5} \leftarrow Desc\_c1\_G_{0, 6} + Desc\_c\_G_{0, 5} \\ &\quad \quad \text{otherwise} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_G_{i, 6} \leftarrow Desc\_c1\_G_{i-1, 5} + Desc\_c\_G_{i, 6} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_G_{i, 5} \leftarrow Desc\_c1\_G_{i, 6} + Desc\_c\_G_{i, 5} \\ &\quad Desc\_c1\_G \end{aligned}$$

Pointeur pour se déplacer dans la matrice décrivant les couches :  $ind\_D := 0..lignes(Desc\_c\_D) - 1$

Extraction de vecteurs de l'intérieur de la matrice :

$$\begin{aligned} Largeur\_D_{ind\_D} &:= Desc\_c\_D_{ind\_D, 3} \\ Espace\_D_{ind\_D} &:= Desc\_c\_D_{ind\_D, 4} \\ Epaisseur\_D_{ind\_D} &:= Desc\_c\_D_{ind\_D, 5} \\ Ecart\_D_{ind\_D} &:= Desc\_c\_D_{ind\_D, 6} \\ Courant\_D_{ind\_D} &:= Desc\_c\_D_{ind\_D, 7} \end{aligned}$$

Nombre de couches du transformateur :  $Nbr\_couch\_D := lignes(Desc\_c\_D)$  **Nbr\_couch\_D = 7**

Nombre de conducteurs dans la fenêtre :  $Nbr\_cond\_D := \sum_{i=0}^{Nbr\_couch\_D-1} Desc\_c\_D_{i, 1}$  **Nbr\_cond\_D = 37**

Mise en forme de la matrice de description des couches et des conducteurs :

$$\begin{aligned} Desc\_c1\_D &:= \text{for } i \in 0..lignes(Desc\_c\_D) - 1 \\ &\quad \text{for } j \in (0..cols(Desc\_c\_D) - 1) \\ &\quad \quad Desc\_c1\_D_{i, j} \leftarrow Desc\_c\_D_{i, j} \\ &\quad \text{for } i \in (0..lignes(Desc\_c\_D) - 1) \\ &\quad \quad Desc\_c1\_D_{i, 2} \leftarrow Desc\_c\_D_{i, 2} + \frac{Nr\_D_0}{u} \\ &\quad \text{for } i \in 0..lignes(Desc\_c\_D) - 1 \\ &\quad \quad \text{if } i = 0 \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_D_{0, 6} \leftarrow Desc\_c\_D_{0, 6} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_D_{0, 5} \leftarrow Desc\_c1\_D_{0, 6} + Desc\_c\_D_{0, 5} \\ &\quad \quad \text{otherwise} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_D_{i, 6} \leftarrow Desc\_c1\_D_{i-1, 5} + Desc\_c\_D_{i, 6} \\ &\quad \quad \quad Desc\_c1\_D_{i, 5} \leftarrow Desc\_c1\_D_{i, 6} + Desc\_c\_D_{i, 5} \\ &\quad Desc\_c1\_D \end{aligned}$$

$$\text{Desc\_cl\_G} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4.385 \times 10^3 & 656 & 208 & 505 & 435 & 0.5 \\ 2 & 5 & 4.385 \times 10^3 & 656 & 208 & 625 & 555 & 0.5 \\ 3 & 6 & 4.155 \times 10^3 & 554 & 208 & 745 & 675 & 0.5 \\ 4 & 6 & 4.155 \times 10^3 & 554 & 208 & 865 & 795 & 0.5 \\ 5 & 6 & 4.155 \times 10^3 & 554 & 208 & 985 & 915 & 0.5 \\ 6 & 6 & 4.155 \times 10^3 & 554 & 208 & 1.13 \times 10^3 & 1.06 \times 10^3 & 0.5 \\ 7 & 2 & 6.002 \times 10^3 & 693 & 230 & 1.25 \times 10^3 & 1.18 \times 10^3 & -5.667 \\ 8 & 1 & 5.771 \times 10^3 & 693 & 0 & 1.37 \times 10^3 & 1.3 \times 10^3 & -5.667 \end{pmatrix}$$

**Extraction de vecteurs de l'intérieur de la matrice :**

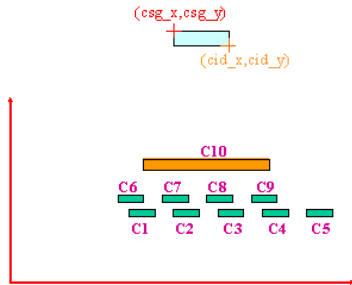
$\text{PosH\_G}_{\text{ind\_G}} := \text{Desc\_cl\_G}_{\text{ind\_G}, 5}$

$\text{PosB\_G}_{\text{ind\_G}} := \text{Desc\_cl\_G}_{\text{ind\_G}, 6}$

$\text{Abscisse\_G}_{\text{ind\_G}} := \text{Desc\_cl\_G}_{\text{ind\_G}, 2}$

**Génération de la matrice décrivant tous les conducteurs indépendamment :**

Chaque conducteur va être décrit dans une matrice. une ligne de cette dernière correspond à un conducteur. Pour décrire un conducteur on utilise les coordonnées de 2 de ses coins, le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit :



Dans l'exemple utilisé ci-dessus, la matrice comportera 10 lignes correspondant à chaque conducteur.

$$\begin{bmatrix} 1 & C1\_csg\_x & C1\_csg\_y & C1\_cid\_x & C1\_cid\_y \\ 2 & C2\_csg\_x & C2\_csg\_y & C2\_cid\_x & C2\_cid\_y \\ 3 & C3\_csg\_x & C3\_csg\_y & C3\_cid\_x & C3\_cid\_y \\ 4 & C4\_csg\_x & C4\_csg\_y & C4\_cid\_x & C4\_cid\_y \\ 5 & C5\_csg\_x & C5\_csg\_y & C5\_cid\_x & C5\_cid\_y \\ 6 & C6\_csg\_x & C6\_csg\_y & C6\_cid\_x & C6\_cid\_y \\ 7 & C7\_csg\_x & C7\_csg\_y & C7\_cid\_x & C7\_cid\_y \\ 8 & C8\_csg\_x & C8\_csg\_y & C8\_cid\_x & C8\_cid\_y \\ 9 & C9\_csg\_x & C9\_csg\_y & C9\_cid\_x & C9\_cid\_y \\ 10 & C10\_csg\_x & C10\_csg\_y & C10\_cid\_x & C10\_cid\_y \end{bmatrix}$$

$$\text{Desc\_cl\_D} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1.724 \times 10^4 & 656 & 208 & 505 & 435 & -0.5 \\ 2 & 5 & 1.724 \times 10^4 & 656 & 208 & 625 & 555 & -0.5 \\ 3 & 6 & 1.7 \times 10^4 & 554 & 208 & 745 & 675 & -0.5 \\ 4 & 6 & 1.7 \times 10^4 & 554 & 208 & 865 & 795 & -0.5 \\ 5 & 6 & 1.7 \times 10^4 & 554 & 208 & 985 & 915 & -0.5 \\ 6 & 6 & 1.7 \times 10^4 & 554 & 208 & 1.13 \times 10^3 & 1.06 \times 10^3 & -0.5 \\ 7 & 3 & 1.793 \times 10^4 & 693 & 230 & 1.25 \times 10^3 & 1.18 \times 10^3 & 5.667 \end{pmatrix}$$

**Extraction de vecteurs de l'intérieur de la matrice :**

$\text{PosH\_D}_{\text{ind\_D}} := \text{Desc\_cl\_D}_{\text{ind\_D}, 5}$

$\text{PosB\_D}_{\text{ind\_D}} := \text{Desc\_cl\_D}_{\text{ind\_D}, 6}$

$\text{Abscisse\_D}_{\text{ind\_D}} := \text{Desc\_cl\_D}_{\text{ind\_D}, 2}$

```

A_G := Nc ← 0
cmpt ← 0
for k ∈ 0.. Nbr_cond_G - 1
    Mk,0 ← k + 1
while Nc ≤ Nbr_couch_G - 1
    cond ← 0
    while cond < Desc_c_GNc,1
        if Desc_c_GNc,1 = 1
            Mcmpt,1 ← Abscisse_GNc
            Mcmpt,2 ← PosH_GNc
            Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
            Mcmpt,4 ← PosB_GNc
            Mcmpt,5 ← Courant_GNc
            cmpt ← cmpt + 1
            cond ← cond + 1
        otherwise
            Mcmpt,1 ← Abscisse_GNc
            Mcmpt,2 ← PosH_GNc
            Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
            Mcmpt,4 ← PosB_GNc
            Mcmpt,5 ← Courant_GNc
            cmpt ← cmpt + 1
            cond ← cond + 1
            for k ∈ 2.. Desc_c_GNc,1
                Mcmpt,1 ← Mcmpt-1,3 + Espace_GNc
                Mcmpt,2 ← PosH_GNc
                Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
                Mcmpt,4 ← PosB_GNc
                Mcmpt,5 ← Courant_GNc
                k ← k + 1
                cmpt ← cmpt + 1
            cond ← k
    Nc ← Nc + 1

```

M

```

A_G := Nc ← 0
cmpt ← 0
for k ∈ 0.. Nbr_cond_G - 1
    Mk,0 ← k + 1
while Nc ≤ Nbr_couch_G - 1
    cond ← 0
    while cond < Desc_c_GNc,1
        if Desc_c_GNc,1 = 1
            Mcmpt,1 ← Abscisse_GNc
            Mcmpt,2 ← PosH_GNc
            Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
            Mcmpt,4 ← PosB_GNc
            Mcmpt,5 ← Courant_GNc
            cmpt ← cmpt + 1
            cond ← cond + 1
        otherwise
            Mcmpt,1 ← Abscisse_GNc
            Mcmpt,2 ← PosH_GNc
            Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
            Mcmpt,4 ← PosB_GNc
            Mcmpt,5 ← Courant_GNc
            cmpt ← cmpt + 1
            cond ← cond + 1
            for k ∈ 2.. Desc_c_GNc,1
                Mcmpt,1 ← Mcmpt-1,3 + Espace_GNc
                Mcmpt,2 ← PosH_GNc
                Mcmpt,3 ← Mcmpt,1 + Largeur_GNc
                Mcmpt,4 ← PosB_GNc
                Mcmpt,5 ← Courant_GNc
                k ← k + 1
                cmpt ← cmpt + 1
            cond ← k
    Nc ← Nc + 1

```

M

**Détermination des paramètres a1, b1** (largeur et épaisseur des conducteurs) et **x1,y1** (décentrage des conducteurs par rapport à l'origine)

$$kg := 0.. Nbr\_cond\_G - 1$$

$$\text{Décentrage : } x1\_G_{kg} := \left[ \frac{(A\_G_{kg,1} + A\_G_{kg,3}) \cdot u}{2} \right] \quad y1\_G_{kg} := \left[ \frac{(A\_G_{kg,2} + A\_G_{kg,4}) \cdot u}{2} + Nr\_G1 \right]$$

$$\text{Dimensions : } a1\_G_{kg} := \frac{(A\_G_{kg,3} - A\_G_{kg,1}) \cdot u}{2} \quad b1\_G_{kg} := \frac{(A\_G_{kg,2} - A\_G_{kg,4}) \cdot u}{2}$$

Chaque conducteur est parcouru par un courant ; ces derniers sont placés dans un vecteur. Chaque ligne de ce vecteur correspond à la ligne de la atrice ou le conducteur est décrit géométriquement.

$$\text{Matrice des courants : } I1\_G_{kg} := A\_G_{kg,5}$$

$$kd := 0.. Nbr\_cond\_D - 1$$

$$\text{Décentrage : } x1\_D_{kd} := \left[ \frac{(A\_D_{kd,1} + A\_D_{kd,3}) \cdot u}{2} \right] \quad y1\_D_{kd} := \left[ \frac{(A\_D_{kd,2} + A\_D_{kd,4}) \cdot u}{2} + Nr\_D1 \right]$$

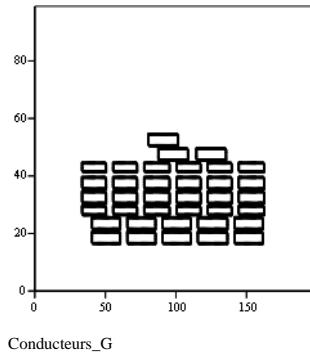
$$\text{Dimensions : } a1\_D_{kd} := \frac{(A\_D_{kd,3} - A\_D_{kd,1}) \cdot u}{2} \quad b1\_D_{kd} := \frac{(A\_D_{kd,2} - A\_D_{kd,4}) \cdot u}{2}$$

$$\text{Matrice des courants : } I1\_D_{kd} := A\_D_{kd,5}$$

## 6-Validation du placement des conducteurs dans la fenêtre

$$\text{Conducteurs\_G} := \text{Cond}(A\_G, \text{gauche})$$

$$Nr\_G = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-3} \\ 1.6 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$



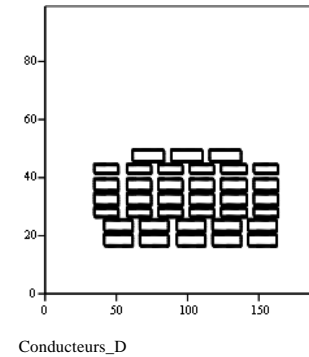
Si plusieurs conducteurs apparaissent groupés (n'en formant qu'un seul) il faut augmenter le nombre de points en x et/ou y (**Nx** et/ou **Ny**). Cette augmentation sert juste à valider la disposition des conducteur. il faut veiller à ne pas faire effectuer les calculs suivant (induction Bx et By) pour un trop grand nombre de point pour des raisons de temps de calcul qui seraient alors très (trop) important.

## 7-Discretisation des Grilles (conducteur)

$$\text{Nombre d'intervalles en x sur chaque conducteur (nombre de points - 1) : } Nx\_c := 299$$

$$\text{Nombre d'intervalles en y sur chaque conducteur (nombre de points - 1) : } Ny\_c := 299$$

$$\text{Conducteurs\_D} := \text{Cond}(A\_D, \text{droite})$$



Indice pour balayer en x chaque conducteur :  $cx := 0.. Nx\_c$

Indice pour balayer en y chaque conducteur :  $cy := 0.. Ny\_c$

Element de surface d'un conducteur :  $dS\_G := \begin{cases} \text{for } l \in 0.. Nbr\_cond\_G - 1 \\ d_l \leftarrow \frac{A\_G_{l,3} - A\_G_{l,1}}{Nx\_c} \cdot \frac{A\_G_{l,2} - A\_G_{l,4}}{Ny\_c} \\ d \cdot 10^{-12} \end{cases}$

Element de surface d'un conducteur :  $dS\_D := \begin{cases} \text{for } l \in 0.. Nbr\_cond\_D - 1 \\ d_l \leftarrow \frac{A\_D_{l,3} - A\_D_{l,1}}{Nx\_c} \cdot \frac{A\_D_{l,2} - A\_D_{l,4}}{Ny\_c} \\ d \cdot 10^{-12} \end{cases}$

## 8-Calcul et représentation des composantes de l'induction (Bx, By et B)

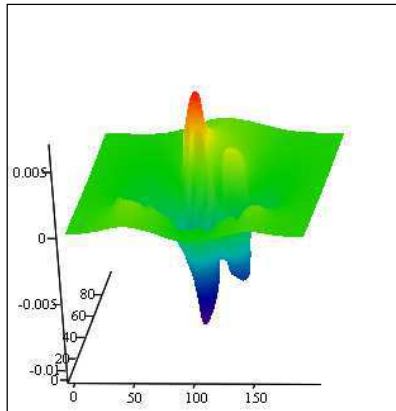
Somme de l'influence de chaque conducteur :

$$B_{x\_G}(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} Bx(x - x1\_G_k, y - y1\_G_k, a1\_G_k + \varepsilon, b1\_G_k + \varepsilon, I1\_G_k)$$

$$B_{y\_G}(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} By(x - x1\_G_k, y - y1\_G_k, a1\_G_k + \varepsilon, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k)$$

Calcul de Bx sur la grille :  $Bx\_G_{i,j} := B_{x\_G}(x\_G_i, y\_G_j)$

Représentation de Bx sur la grille :



Bx\_G

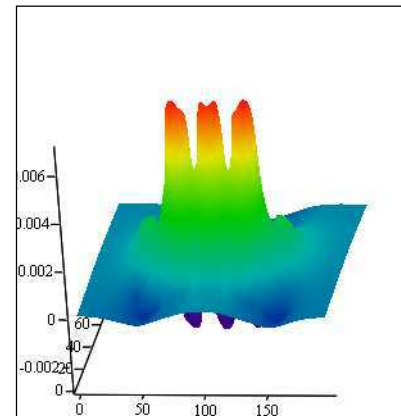
Somme de l'influence de chaque conducteur :

$$B_{x\_D}(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} Bx(x - x1\_D_k, y - y1\_D_k, a1\_D_k + \varepsilon, b1\_D_k + \varepsilon, I1\_D_k)$$

$$B_{y\_D}(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} By(x - x1\_D_k, y - y1\_D_k, a1\_D_k + \varepsilon, b1\_D_k + \varepsilon, I1\_D_k)$$

Calcul de Bx sur la grille :  $Bx\_D_{i,j} := B_{x\_D}(x\_D_i, y\_D_j)$

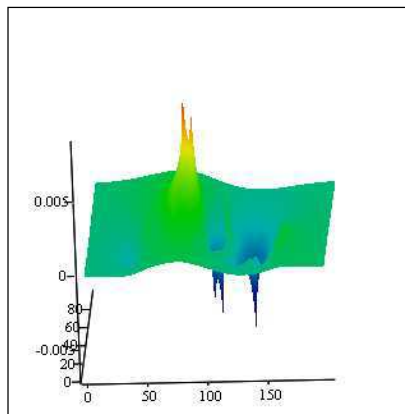
Représentation de Bx sur la grille :



Bx\_D

Calcul de By sur la grille :  $By_{G_{i,j}} := B_{y\_G}(x_{G_i}, y_{G_j})$

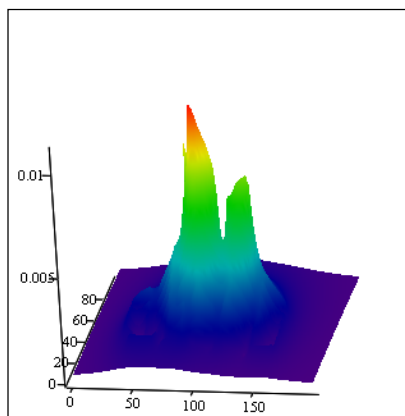
Représentation de By sur la grille :



By\_G

Calcul du module de B sur la grille :  $B_{G_{i,j}} := \sqrt{(B_{x\_G_{i,j}})^2 + (B_{y\_G_{i,j}})^2}$

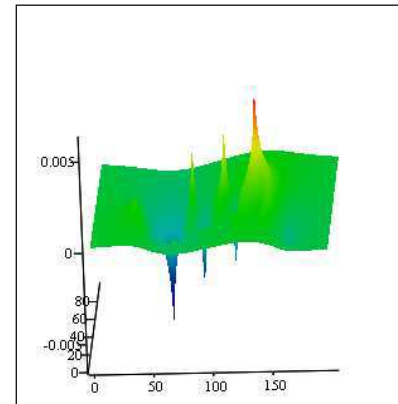
Représentation de B sur la grille :



B\_G

Calcul de By sur la grille :  $By_{D_{i,j}} := B_{y\_D}(x_{D_i}, y_{D_j})$

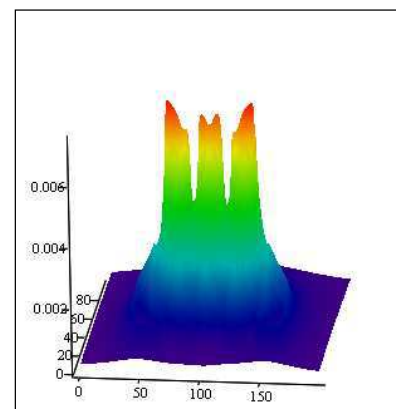
Représentation de By sur la grille :



By\_D

Calcul du module de B sur la grille :  $B_{D_{i,j}} := \sqrt{(B_{x\_D_{i,j}})^2 + (B_{y\_D_{i,j}})^2}$

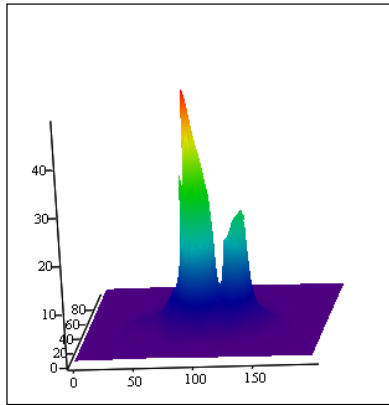
Représentation de B sur la grille :



B\_D

Calcul de l'énergie sur la grille :  $W_{G_{i,j}} := \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot (B_{G_{i,j}})^2$

Représentation de W :



W\_G

Energie par unité de longueur :  $\Sigma WB_G := Sg(W_G, dS)$   $\Sigma WB_G = 2.801 \times 10^{-5}$

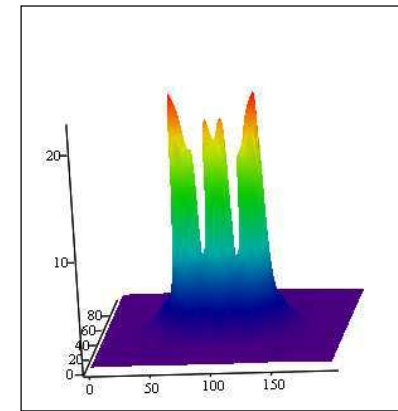
### 9-Calcul du potentiel vecteur Az (intégration numérique)

Somme de l'influence de chaque conducteur :

$$AzG(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} A(x - x1\_G_k, y - y1\_G_k, a1\_G_k + \varepsilon, b1\_G_k + \varepsilon, I1\_G_k)$$

Calcul de l'énergie sur la grille :  $W_{D_{i,j}} := \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot (B_{D_{i,j}})^2$

Représentation de W :



W\_D

Energie par unité de longueur :  $\Sigma WB_D := Sg(W_D, dS)$   $\Sigma WB_D = 1.84 \times 10^{-5}$

Somme de l'influence de chaque conducteur :

$$AzD(x, y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} A(x - x1\_D_k, y - y1\_D_k, a1\_D_k + \varepsilon, b1\_D_k + \varepsilon, I1\_D_k)$$

**Intégration numérique :**

```

S_c(fen,num) := S ← 0
if num = 1
    for k ∈ 0.. Nbr_cond_G - 1                                if fen = gauche
        for c1 ∈ 0.. Nx_c
            xa_c1 ←  $\left( A_{G,k,1} + \frac{A_{G,k,3} - A_{G,k,1}}{Nx_c} \cdot c1 \right) \cdot u$ 
            for c2 ∈ 0.. Ny_c
                ya_c2 ←  $\left( A_{G,k,4} + \frac{A_{G,k,2} - A_{G,k,4}}{Nx_c} \cdot c2 \right) \cdot u + Nr_{G1}$ 
                for i ∈ 0.. Nx_c
                    for j ∈ 0.. Ny_c
                        Ai,j ← AzG(xai, yaj)
                Sk ← Sgl[A], dSGk, Nx_c, Ny_c]
        for k ∈ 0.. Nbr_cond_D - 1                                if fen = droite
            for c1 ∈ 0.. Nx_c
                xa_c1 ←  $\left( A_{D,k,1} + \frac{A_{D,k,3} - A_{D,k,1}}{Nx_c} \cdot c1 \right) \cdot u$ 
                for c2 ∈ 0.. Ny_c
                    ya_c2 ←  $\left( A_{D,k,4} + \frac{A_{D,k,2} - A_{D,k,4}}{Nx_c} \cdot c2 \right) \cdot u + Nr_{G1}$ 
                    for i ∈ 0.. Nx_c
                        for j ∈ 0.. Ny_c
                            Ai,j ← AzD(xai, yaj)
                    Sk ← Sgl[A], dSDk, Nx_c, Ny_c]
    S

```

**Intégration de A :** Sdroite := S\_c(droite, numerique)

**Calcul de l'énergie (par unité de longueur) :**

$$\Sigma WA\_D\_num := \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} \left( \text{Sdroite}_k \cdot \frac{I1\_D_k}{4 \cdot a1\_D_k \cdot b1\_D_k} \right)$$

**ΣWA D num = ■**

**Intégration de A :** Sgauche := S\_c(gauche , numerique)

**Calcul de l'énergie (par unité de longueur) :**

$$\Sigma WA\_G\_num := \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} \left( \text{Sgauche}_k \cdot \frac{I1\_G_k}{4 \cdot a1\_G_k \cdot b1\_G_k} \right)$$

**ΣWA G num = ■**

**10-Calcul du potentiel vecteur Az (intégration analytique)**



**Double Primitive du potentiel vecteur d'un méplat :**

$$G(m,n) := \left[ -\frac{1}{24} \cdot (m^4 - 6 \cdot m^2 \cdot n^2 + n^4) \cdot \ln(m^2 + n^2) \right] \dots \\ + \frac{1}{3} \cdot m \cdot n \cdot \left( m^2 \cdot \arctan\left(\frac{n}{m}\right) + n^2 \cdot \arctan\left(\frac{m}{n}\right) \right) - \frac{7}{24} \cdot m^2 \cdot n^2$$

$$F(x,y,a,b) := G(x-a,y-b)$$

**Variation du potentiel (primitive de l'induction) :**

$$H(x,y,ae,be,I) := \frac{-\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot 4 \cdot ae \cdot be} \cdot [(F(x,y,ae,be) - F(x,y,-ae,be)) - (F(x,y,ae,-be) - F(x,y,-ae,-be))]$$

**Somme de l'influence de tous les conducteurs :**

$$ZG(X,Y) := \left( \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} H\left(X-x1\_G_k, Y-y1\_G_k, a1\_G_k + \varepsilon, b1\_G_k + \varepsilon, I1\_G_k\right) \right)$$

**Variation de la double primitive du potentiel vecteur :**

$$KG(xM, xm, yM, ym) := ZG(xM, yM) - ZG(xm, yM) - ZG(xM, ym) + ZG(xm, ym)$$

**Calcul de l'énergie (analytique) :**

$$\Sigma WA\_G\_anal := \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} KG\left(x1\_G_k + a1\_G_k, x1\_G_k - a1\_G_k, y1\_G_k + b1\_G_k, y1\_G_k - b1\_G_k\right) \cdot \left( \frac{I1\_G_k}{4 \cdot a1\_G_k \cdot b1\_G_k} \right) \right]$$

$$\Sigma WA\_G\_anal = 2.925 \times 10^{-5}$$

**Somme de l'influence de tous les conducteurs :**

$$ZD(X,Y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} H\left(X-x1\_D_k, Y-y1\_D_k, a1\_D_k + \varepsilon, b1\_D_k + \varepsilon, I1\_D_k\right)$$

**Variation de la double primitive du potentiel vecteur :**

$$KD(xM, xm, yM, ym) := ZD(xM, yM) - ZD(xm, yM) - ZD(xM, ym) + ZD(xm, ym)$$

**Calcul de l'énergie (analytique) :**

$$\Sigma WA\_D\_anal := \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} KD\left(x1\_D_k + a1\_D_k, x1\_D_k - a1\_D_k, y1\_D_k + b1\_D_k, y1\_D_k - b1\_D_k\right) \cdot \left( \frac{I1\_D_k}{4 \cdot a1\_D_k \cdot b1\_D_k} \right) \right]$$

$$\Sigma WA\_D\_anal = 1.914 \times 10^{-5}$$



## 11-Calcul du potentiel vecteur avec images magnétiques



### 4 Images

**Somme de l'influence de tous les conducteurs et de leurs 4 images :**

$$ZG4(X,Y) := \left[ \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} \left[ \begin{aligned} &H\left(X-x1\_G_k, Y-y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k\right) \dots \\ &+ H\left[X-x1\_G_k, Y-\left[2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_G_k\right], a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k\right] \dots \\ &+ H\left[X-x1\_G_k, Y-\left[2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_G_k\right], a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k\right] \dots \\ &+ H\left[X-\left[2 \cdot (Larg\_CM\_G \cdot u) - x1\_G_k\right], Y-y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k\right] \dots \\ &+ H\left[X-\left[2 \cdot (Larg\_CM\_G + Larg\_fen\_G) \cdot u - x1\_G_k\right], Y-y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k\right] \dots \end{aligned} \right] \right]$$

Somme de l'influence de tous les conducteurs et de leurs 4 images :

$$ZD4(X, Y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} \left[ \begin{array}{l} H \left( X - x1\_D_k, Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, I1\_D_k \right) \dots \\ + H \left[ X - x1\_D_k, Y - \left[ (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_D) \right]_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, I1\_D_k \right] \dots \\ + H \left[ X - x1\_D_k, Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_D \right]_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, I1\_D_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D0) - x1\_D_k \right], Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, I1\_D_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D0 + Larg\_fen\_D \cdot u) - x1\_D_k \right], Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, I1\_D_k \right] \dots \end{array} \right]$$

Variation de la double primitive du potentiel vecteur (4 images) :

$$KG4(xM, xm, yM, ym) := ZG4(xM, yM) - ZG4(xm, yM) - ZG4(xM, ym) + ZG4(xm, ym)$$

Variation de la double primitive du potentiel vecteur (4 images) :

$$KD4(xM, xm, yM, ym) := ZD4(xM, yM) - ZD4(xm, yM) - ZD4(xM, ym) + ZD4(xm, ym)$$

Calcul de l'énergie (analytique) (4 images) :

$$\Sigma WA\_G\_anal4 := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} KG4 \left( x1\_G_k + a1\_G_k, x1\_G_k - a1\_G_k, y1\_G_k + b1\_G_k, y1\_G_k - b1\_G_k \right) \cdot \left( \frac{I1\_G_k}{4 \cdot a1\_G_k \cdot b1\_G_k} \right)$$

$$\Sigma WA\_G\_anal4 = 3.201 \times 10^{-5}$$

Calcul de l'énergie (analytique) (4 images) :

$$\Sigma WA\_D\_anal4 := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} KD4 \left( x1\_D_k + a1\_D_k, x1\_D_k - a1\_D_k, y1\_D_k + b1\_D_k, y1\_D_k - b1\_D_k \right) \cdot \left( \frac{I1\_D_k}{4 \cdot a1\_D_k \cdot b1\_D_k} \right)$$

$$\Sigma WA\_D\_anal4 = 2.074 \times 10^{-5}$$

## 8 Images

Somme de l'influence de tous les conducteurs et de leurs 8 images :

$$ZG8(X, Y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} \left[ \begin{array}{l} H \left( X - x1\_G_k, Y - y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right) \dots \\ + H \left[ X - x1\_G_k, Y - \left[ (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_G) \right]_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - x1\_G_k, Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_G \right]_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G \cdot u) - x1\_G_k \right], Y - y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G + Larg\_fen\_G) \cdot u - x1\_G_k \right], Y - y1\_G_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G + Larg\_fen\_G) \cdot u - x1\_G_k \right], Y - (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_G)_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G + Larg\_fen\_G) \cdot u - x1\_G_k \right], Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_G \right]_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G \cdot u) - x1\_G_k \right], Y - (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_G)_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \\ + H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Larg\_CM\_G \cdot u) - x1\_G_k \right], Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_G \right]_k, a1\_G_k + 10^{-12}, b1\_G_k + 10^{-12}, I1\_G_k \right] \dots \end{array} \right]$$

Somme de l'influence de tous les conducteurs et de leurs 8 images :

$$ZD8(X, Y) := \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} \left[ \begin{aligned} &H \left( X - x1\_D_k, Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right) \dots \\ &+ H \left[ X - x1\_D_k, Y - \left[ (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_D_k)_k \right], a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - x1\_D_k, Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_D_k \right], a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0) - x1\_D_k \right], Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0 + Larg\_fen\_D \cdot u) - x1\_D_k \right], Y - y1\_D_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0 + Larg\_fen\_D \cdot u) - x1\_D_k \right], Y - (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_D_k)_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0 + Larg\_fen\_D \cdot u) - x1\_D_k \right], Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_D_k \right], a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0) - x1\_D_k \right], Y - (2 \cdot Ep\_CM \cdot u - y1\_D_k)_k, a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \dots \\ &+ H \left[ X - \left[ 2 \cdot (Nr\_D_0) - x1\_D_k \right], Y - \left[ 2 \cdot (Ep\_CM + Haut\_fen) \cdot u - y1\_D_k \right], a1\_D_k + 10^{-12}, b1\_D_k + 10^{-12}, \Pi\_D_k \right] \end{aligned} \right]$$

Variation de la double primitive du potentiel vecteur :

$$KG8(xM, xm, yM, ym) := ZG8(xM, yM) - ZG8(xm, yM) - ZG8(xM, ym) + ZG8(xm, ym)$$

Variation de la double primitive du potentiel vecteur :

$$KD8(xM, xm, yM, ym) := ZD8(xM, yM) - ZD8(xm, yM) - ZD8(xM, ym) + ZD8(xm, ym)$$

Calcul de l'énergie (analytique) :

$$\Sigma WA\_G\_anal8 := \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_G-1} KG8 \left( x1\_G_k + a1\_G_k, x1\_G_k - a1\_G_k, y1\_G_k + b1\_G_k, y1\_G_k - b1\_G_k \right) \cdot \left( \frac{\Pi\_G_k}{4 \cdot a1\_G_k \cdot b1\_G_k} \right) \right]$$

$$\Sigma WA\_G\_anal8 = 3.173 \times 10^{-5}$$

Calcul de l'énergie (analytique) :

$$\Sigma WA\_D\_anal8 := \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^{Nbr\_cond\_D-1} KD8 \left( x1\_D_k + a1\_D_k, x1\_D_k - a1\_D_k, y1\_D_k + b1\_D_k, y1\_D_k - b1\_D_k \right) \cdot \left( \frac{\Pi\_D_k}{4 \cdot a1\_D_k \cdot b1\_D_k} \right) \right]$$

$$\Sigma WA\_D\_anal8 = 2.045 \times 10^{-5}$$

## 12-Calcul de l'inductance de fuite

Rappel des valeurs calculées de l'énergie :

	Fenêtre Gauche	Fenêtre Droite	
B²/2μ₀	$\Sigma W_{B\_G} = 2.801 \times 10^{-5}$	$\Sigma W_{B\_D} = 1.84 \times 10^{-5}$	(1)
AJ (numérique)	$\Sigma W_{A\_G\_num} = \blacksquare$	$\Sigma W_{A\_D\_num} = \blacksquare$	(2)
AJ (analytique)	$\Sigma W_{A\_G\_anal} = 2.925 \times 10^{-5}$	$\Sigma W_{A\_D\_anal} = 1.914 \times 10^{-5}$	(3)
AJ (analytique 4 images)	$\Sigma W_{A\_G\_anal4} = 3.201 \times 10^{-5}$	$\Sigma W_{A\_D\_anal4} = 2.074 \times 10^{-5}$	(4)
AJ (analytique 8 images)	$\Sigma W_{A\_G\_anal8} = 3.173 \times 10^{-5}$	$\Sigma W_{A\_D\_anal8} = 2.045 \times 10^{-5}$	(5)

} *Prise en compte du circuit magnétique*

Il faut choisir la valeur d'énergie permettant de déterminer l'inductance de fuite :

- 1) Intégration de B²/2μ₀ *valeur sous estimée*
- 2) Intégration de AJ (numérique)
- 3) Intégration de AJ (analytique)
- 4) Intégration de AJ (analytique avec prise en compte du CM (4 images)) *valeur sur estimée*
- 5) Intégration de AJ (analytique avec prise en compte du CM (8 images)) *valeur sur estimée*

Si l'on veut tenir compte du circuit magnétique, la meilleure valeur est celle obtenue avec 8 images, même si elle est légèrement sur estimée

*Variable pour le choix de l'énergie :* energie := 5

Il faut aussi déterminer un chemin moyen sur lequel on va sommer l'énergie. On recherche l'écart entre les 2 maximum d'énergie (fenêtre gauche et fenêtre droite) dans le plan x y.

Si le transformateur a une jambe centrale circulaire, la longueur moyenne peut être calculée en fonction de cet écart en considérant un rayon moyen entre ces 2 pics.

Si le transformateur a une jambe rectangulaire, on peut considérer cette longueur comme la somme de cet écart et de la profondeur du circuit magnétique (dans le cas de transformateur planar puisque cette distance correspond à la longueur d'une spire moyenne).

*Type de jambe centrale (rectangulaire=1, circulaire =2) :* jambe := 1

*Profondeur du circuit magnétique dans le cas rectangulaire (en m) :* prof :=  $23 \cdot 10^{-3}$

Recherche de l'abscisse du maximum :

$$\max(W_G, \text{gauche}) = \begin{pmatrix} 6.075 \times 10^{-3} \\ 2.771 \times 10^{-3} \\ 48.744 \\ 90 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Recherche du maximum :

$$\max(W_D, \text{droite}) = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 2.771 \times 10^{-3} \\ 22.225 \\ 135 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Recherche de l'abscisse du maximum :  $X_{\max\_G} := \max(W_G, \text{gauche})_0$

Recherche de l'abscisse du maximum :  $X_{\max\_D} := \max(W_D, \text{droite})_0$

Distance entre les 2 pics :  $d := X_{\max\_D} - X_{\max\_G}$

Calcul de l'inductance :

```

L(co,en,ja) := if numerique = 0
               |
               | ΣWA_G_num ← 0
               | ΣWA_D_num ← 0
               |
               | long ← d + prof if ja = 1
               |
               | long ← π ·  $\frac{d}{2}$  if ja = 2
               |
               | ΣW_G ← |
               |         | ΣWB_G if en = 1
               |         | ΣWA_G_num if en = 2
               |         | ΣWA_G_anal if en = 3
               |         | ΣWA_G_anal4 if en = 4
               |         | ΣWA_G_anal8 if en = 5
               |
               | ΣW_D ← |
               |         | ΣWB_D if en = 1
               |         | ΣWA_D_num if en = 2
               |         | ΣWA_D_anal if en = 3
               |         | ΣWA_D_anal4 if en = 4
               |         | ΣWA_D_anal8 if en = 5
               |
               | L ←  $\frac{2 \cdot \Sigma W\_G \cdot \text{long}}{(|co|)^2} + \frac{2 \cdot \Sigma W\_D \cdot \text{long}}{[(|co|)^2]}$ 
               |
               | L ← "Non calculée" if en = 2 if numerique = 0
               |
               | L

```

Courant dans l'enroulement ou est placée l'inductance de fuite (Schéma équivalent) :

$$\text{courant} := \frac{17}{3}$$

Inductance de fuite : Lf := L(courant , energie , jambe)

$$Lf = 1.21338 \times 10^{-7}$$

***ANNEXE IV : Double intégrale des polynômes  
de Legendre pour le calcul du potentiel vecteur  
dans un méplat***



### Intégration du potentiel vecteur sur un méplat.

Nous cherchons maintenant la primitive double de la fonction ci-dessous qui intervient dans le calcul du potentiel d'un méplat. L'objectif est de lui donner une forme analytique générale.

$$u^p \cdot v^q \cdot \ln(u^2 + v^2)$$

p, q

$$0,0 \quad u \cdot v \cdot \ln(u^2 + v^2) - 3 \cdot u \cdot v + u^2 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right) + v^2 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$1,0 \quad \left(\frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot v + \frac{1}{6} \cdot v^3\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) - \frac{7}{6} \cdot u^2 \cdot v + \frac{2}{3} \cdot u^3 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$0,1 \quad \left(\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot u \cdot v^2 + \frac{1}{6} \cdot u^3\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) - \frac{7}{6} \cdot u \cdot v^2 + \frac{2}{3} \cdot v^3 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$1,1 \quad \left(\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot u^2 \cdot v^2 + \frac{1}{8} \cdot u^4 + \frac{1}{8} \cdot v^4\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) - \frac{3}{8} \cdot u^2 \cdot v^2$$

$$2,0 \quad \frac{1}{3 \cdot 1} \cdot u^3 \cdot v \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{6} \cdot u \cdot v^3 - \frac{13}{18} \cdot u^3 \cdot v - \frac{1}{6} \cdot v^4 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{2} \cdot u^4 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$2,1 \quad \left(\frac{1}{3 \cdot 2} \cdot u^3 \cdot v^2 + \frac{1}{10} \cdot u^5\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{2}{15} \cdot u \cdot v^4 - \frac{19}{90} \cdot u^3 \cdot v^2 - \frac{2}{15} \cdot v^5 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$2,2 \quad \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot u^3 \cdot v^3 \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{9} \cdot u \cdot v^5 - \frac{1}{9} \cdot u^3 \cdot v^3 + \frac{1}{9} \cdot u^5 \cdot v - \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot \left(u^6 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right) + v^6 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

$$3,0 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 1} \cdot u^4 \cdot v - \frac{1}{20} \cdot v^5\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{20} \cdot u^2 \cdot v^3 - \frac{21}{40} \cdot u^4 \cdot v + \frac{2}{5} \cdot u^5 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$3,1 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 2} \cdot u^4 \cdot v^2 + \frac{1}{12} \cdot u^6 - \frac{1}{24} \cdot v^6\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{24} \cdot u^2 \cdot v^4 - \frac{7}{48} \cdot u^4 \cdot v^2$$

$$3,2 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 3} \cdot u^4 \cdot v^3 - \frac{1}{28} \cdot v^7\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{28} \cdot u^2 \cdot v^5 - \frac{37}{504} \cdot u^4 \cdot v^3 + \frac{2}{21} \cdot u^6 \cdot v - \frac{2}{3 \cdot 7} \cdot u^7 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$3,3 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 4} \cdot u^4 \cdot v^4 - \frac{1}{32} \cdot v^8 - \frac{1}{32} \cdot u^8\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{32} \cdot u^2 \cdot v^6 - \frac{3}{64} \cdot u^4 \cdot v^4 + \frac{1}{32} \cdot u^6 \cdot v^2$$

$$3,4 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 5} \cdot u^4 \cdot v^5 - \frac{1}{36} \cdot v^9\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{36} \cdot u^2 \cdot v^7 - \frac{61}{1800} \cdot u^4 \cdot v^5 + \frac{2}{135} \cdot u^6 \cdot v^3 - \frac{2}{45} \cdot u^8 \cdot v + \frac{2}{5 \cdot 9} \cdot u^9 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$3,5 \quad \left(\frac{1}{4 \cdot 6} \cdot u^4 \cdot v^6 + \frac{1}{60} \cdot u^{10} - \frac{1}{40} \cdot v^{10}\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{40} \cdot u^2 \cdot v^8 - \frac{19}{720} \cdot u^4 \cdot v^6 + \frac{1}{120} \cdot u^6 \cdot v^4 - \frac{1}{60} \cdot u^8 \cdot v^2$$

$$7,10 \quad \left(\frac{-1}{152} \cdot v^{19} + \frac{1}{88} \cdot v^{11} \cdot u^8\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{1}{152} \cdot v^{17} \cdot u^2 - \frac{1}{304} \cdot v^{15} \cdot u^4 + \frac{1}{456} \cdot v^{13} \cdot u^6 - \frac{273}{73568} \cdot v^{11} \cdot u^8 + \frac{2}{1881} \cdot v^9 \cdot u^{10} - \left(\frac{2}{1463} \cdot v^7 \cdot u^{12}\right) \dots$$

$$+ \frac{2}{1045} \cdot v^5 \cdot u^{14} - \frac{2}{627} \cdot v^3 \cdot u^{16} + \frac{2}{209} \cdot u^{18} \cdot v - \frac{2}{209} \cdot u^{19} \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$$



#### Formule générale

$$\text{INT}(u, v, p, q) := \frac{u^{q+p+2}}{(q+1) \cdot (q+p+2)} \cdot \left( \sin\left(q \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + 2 \cdot \cos\left(q \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \right) + \frac{v^{q+p+2}}{(p+1) \cdot (q+p+2)} \cdot \left( \sin\left(p \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \ln(u^2 + v^2) + 2 \cdot \cos\left(p \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right) \right) \dots$$

$$+ \frac{u^{p+1} \cdot v^{q+1}}{(p+1) \cdot (q+1)} \cdot \left( \ln(u^2 + v^2) - \frac{2}{p+q+2} \right) + \frac{2}{p+q+2} \cdot \left[ \frac{u^{p+1}}{q+1} \cdot \sum_{k=1}^{q+1} \sin\left[(q-k) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \cdot \frac{v^k}{k} \cdot u^{q+1-k} + \frac{v^{q+1}}{p+1} \cdot \sum_{k=1}^{p+1} \sin\left[(p-k) \cdot \frac{\pi}{2}\right] \cdot \frac{u^k}{k} \cdot v^{p+1-k} \right]$$

#### Vérifications

$$0,0 \quad \text{INT}(u, v, p, q) := u^2 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right) + v^2 \cdot \arctan\left(\frac{u}{v}\right) + u \cdot v \cdot \left( \ln(u^2 + v^2) - 1 \right) - 2 \cdot u \cdot v$$

$$3,4 \quad \text{INT}(u, v, p, q) := \frac{u^9}{5 \cdot 9} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{v^9}{4 \cdot 9} \cdot \ln(u^2 + v^2) + \frac{u^4 \cdot v^5}{4 \cdot 5} \cdot \left( \ln(u^2 + v^2) - \frac{2}{9} \right) - \frac{2}{9} \cdot \left( \frac{u^4}{5} \cdot \sum_{k=1}^5 \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{v^k}{k} \cdot u^{5-k} + \frac{v^5}{4} \cdot \sum_{k=1}^4 \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{u^k}{k} \cdot v^{4-k} \right)$$

***ANNEXE V : Quadripôle équivalent à N  
quadripôles identiques connectés en cascade***



Nous cherchons maintenant le circuit équivalent en T (Figure 2) à un ensemble de N quadripôles identiques connectés en cascade (Figure 1). Dans un premier temps nous supposons que les quadripôles constitutifs sont symétriques et, dans cette hypothèse, le quadripôle résultant de la mise en cascade l'est également.

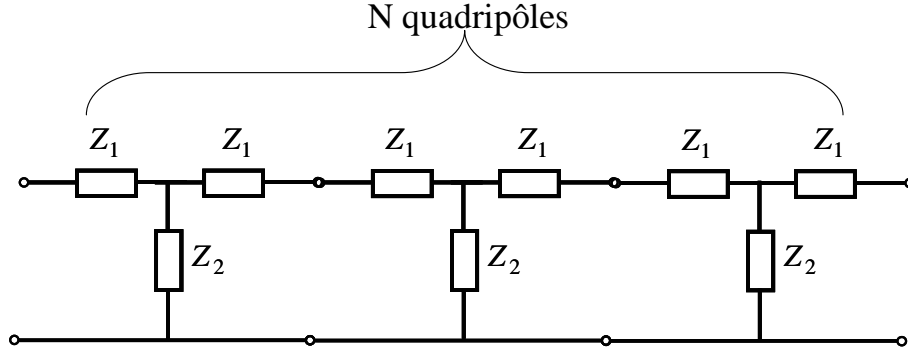


Figure 1 : N quadripôles en cascade

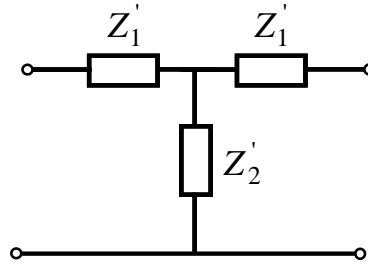


Figure 2 : Circuit équivalent en T

On calcule facilement l'impédance caractéristique  $Z_c$  du quadripôle élémentaire et le gain en tension  $G_{va}$  de ce même quadripôle lorsqu'il est chargé par son impédance caractéristique. En effet, d'après la définition de l'impédance caractéristique, on a :

$$Z_c = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_c)}{Z_2 + Z_1 + Z_c} \quad (1)$$

$$G_{va} = \frac{Z_2 Z_c}{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_1 Z_c + Z_2 Z_c} \quad (2)$$

Il en résulte que :

$$Z_c = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2} \quad (3)$$

$$G_{va} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_c + Z_2} \quad (4)$$

Inversement, on peut établir les expressions de  $Z_1$  et  $Z_2$  en fonction de  $Z_c$  et de  $G_{va}$  (voir la démonstration à la fin de l'annexe).

$$Z_1 = Z_c \frac{1 - G_{va}}{1 + G_{va}} \quad (5)$$

$$Z_2 = Z_c \frac{2G_{va}}{1 - G_{va}^2} \quad (6)$$

Pour trouver l'impédance caractéristique et le gain en tension adapté du quadripôle équivalent à l'ensemble en cascade, il suffit de se rappeler de la définition de l'impédance caractéristique : lorsque le dernier quadripôle est chargé par  $Z_c$  son impédance d'entrée a la même valeur, celle du quadripôle précédent aussi, etc. L'impédance caractéristique de l'ensemble est donc égale à  $Z_c$  ..

Dans les mêmes conditions, le gain en tension adapté du dernier quadripôle vaut  $G_{va}$ , celle de l'avant dernier aussi, etc... Le gain en tension adapté de toute la chaîne vaut donc  $G_{va}^N$ . Finalement, les impédances  $Z_1'$  et  $Z_2'$  du circuit équivalent global (Figure 2) s'obtiennent en remplaçant  $G_{va}$  par  $G_{va}^N$  dans les expressions donnant respectivement  $Z_1$  et  $Z_2$ .

$$Z_1' = Z_c \cdot \frac{1 - G_{va}^N}{1 + G_{va}^N} \quad (7)$$

$$Z_2' = Z_c \cdot \frac{2G_{va}^N}{1 - G_{va}^{2N}} \quad (8)$$

\*\*\*\*\*

### **Démonstration :**

On pose  $x = \frac{Z_1}{Z_2}$

On exprime ensuite  $Z_1$  et  $Z_2$  en fonction de  $x$  et de  $Z_c$ .

$$Z_c = Z_1 \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \quad Z_1 = Z_c \sqrt{\frac{x}{2+x}} \quad Z_2 = \frac{Z_1}{x} = Z_c \sqrt{\frac{1}{2x+x^2}}$$

On exprime ensuite  $x$  en fonction de  $G_{va}$  :

$$\frac{1}{G_{va}} = 1 + x + \frac{Z_c}{Z_2} = 1 + x + \sqrt{2x+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{G_{va}} - (1+x) \right]^2 = 2x + x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(G_{va}-1)^2}{2G_{va}}$$

Au final, on réinjecte cette solution dans les expressions de  $Z_1$  et  $Z_2$

$$Z_1 = Z_c \sqrt{\frac{\frac{(G_{va}-1)^2}{2G_{va}}}{2 + \frac{(G_{va}-1)^2}{2G_{va}}}} \quad Z_2 = \frac{Z_1}{\frac{(G_{va}-1)^2}{2G_{va}}}$$

\*\*\*\*\*



***ANNEXE VI : Fondement du développement  
multipolaire***





La technique du développement multipolaire est très utilisée pour des problèmes tridimensionnels en physique [LORRAIN-70]. Cette technique a été reprise en 2D, par notre équipe, pour étudier le champ émis par un courant unidirectionnel [LAVEUVE-91] [KERADEC-91].

Tout champ autour d'un objet peut se décomposer en une partie émise et une partie réfléchi (Figure 1). Il est sous entendu que la partie réfléchi est créée par l'enroulement. Pour trouver l'expression générale de ces deux champs autour de systèmes invariant par translation, la solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques peut être invoquée. Elle se décompose en une partie émise (1) correspondant au développement multipolaire et une partie réfléchi (2). Ces deux champs sont entièrement définis par leurs coefficients respectifs  $\alpha_n$  et  $a_n$ .

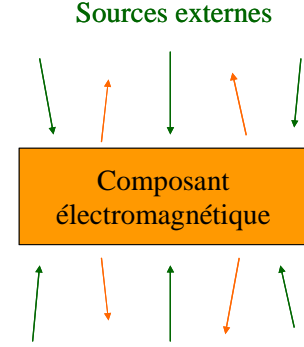


Figure 1 : Champ émis et réfléchi

$$A_{\text{int}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ -\alpha_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r^{-n} [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)] \right\} \right] \quad (1)$$

$$A_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ r^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] \right\} \quad (2)$$

L'expression des potentiels vecteurs (1) et (2) peut être dérivée pour obtenir les équations des composantes radiales et tangentielles des inductions internes et externes (3) (4).

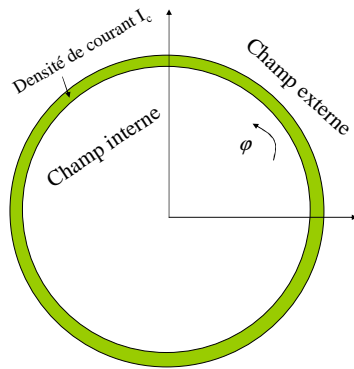
$$B_r^{\text{int}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ nr^{-(n+1)} [-\alpha_n \sin(n\varphi) + \beta_n \cos(n\varphi)] \right\} \right] \quad (3)$$

$$B_{\varphi}^{\text{int}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\alpha_0}{r} + \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ nr^{-(n+1)} [\alpha_n \cos(n\varphi) + \beta_n \sin(n\varphi)] \right\} \right]$$

$$B_r^{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ nr^{n-1} [-a_n \sin(n\varphi) + b_n \cos(n\varphi)] \right\} \right] \quad (4)$$

$$B_{\varphi}^{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -nr^{n-1} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)] \right\} \right]$$

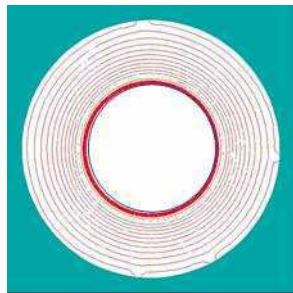
Trois intérêts majeurs découlent de cette expression analytique de champ. Premièrement, ce développement s'avère très utile pour étudier l'impact d'un champ magnétique appliqué à un composant.



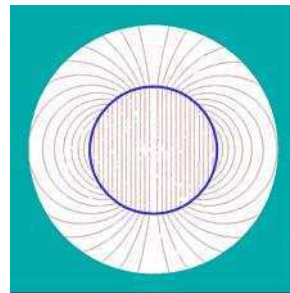
**Figure 2 : Cylindrique parcouru par une densité de courant**

En effet, n'importe quel champ peut être généré, à l'intérieur d'un cylindre, sous réserve qu'une densité de courant adéquate parcourt sa surface (Figure 2). En général, le champ uniforme qui correspond au premier terme de ce développement est souvent considéré. Lorsque l'on a besoin d'une description plus fine du champ, les termes suivants peuvent être pris en compte aisément [MARGUERON-06-1]. La Figure 3 nous renseigne sur l'allure du champ dû aux termes suivants du développement.

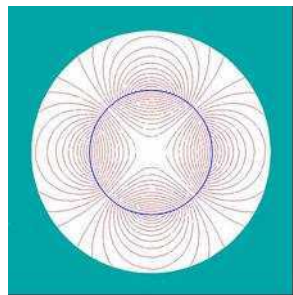
Lorsque le cylindre est parcouru par un courant constant (Figure 3a) le champ à l'intérieur du cylindre est nul. Vu de l'extérieur, le champ est celui créé par un fil parcouru par un courant uniforme. Dans le cas de la Figure 3b, le courant varie en  $\cos(\varphi)$ . Le champ créé à l'intérieur du cylindre est uniforme et dipolaire vu de l'extérieur. On trouve ici une méthode permettant d'obtenir un champ parfaitement uniforme sans aucun effet de bord. Les Figure 3c et d correspondent aux termes suivants du développement à savoir un courant proportionnel à  $\cos(2\varphi)$  et à  $\cos(3\varphi)$ .



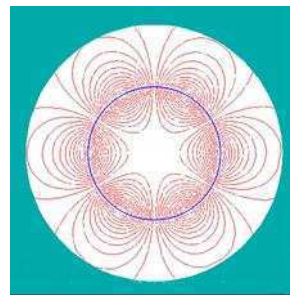
**a**



**b**



**c**



**d**

**Figure 3 : Champ magnétique créé par une densité de courant surfacique**

**a : Constant en fonction de  $\varphi$  | b : Proportionnel à  $\cos(\varphi)$**

**c : Proportionnel à  $\cos(2\varphi)$  | d : Proportionnel à  $\cos(3\varphi)$**

Dans un deuxième temps, le développement multipolaire peut servir pour annuler des champs à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cylindre en générant un champ opposé à celui incident. Cette technique peut s'avérer utile pour blinder des zones et des composants lors de simulations.

Lors de simulations électromagnétiques, il est impossible de séparer les champs issus de différentes sources lors d'une même simulation. Le développement multipolaire permet de séparer la partie émise d'un champ (s'annulant à l'infini car les coefficient varient en  $r^{-n}$ ), de sa partie réfléchie (s'annulant à l'origine du repère avec des coefficient varient en  $r^n$ ).