



**HAL**  
open science

# Formulations discontinues de Galerkin pour les équations de Maxwell

A. Zaghdani

► **To cite this version:**

A. Zaghdani. Formulations discontinues de Galerkin pour les équations de Maxwell. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT: . tel-00151255

**HAL Id: tel-00151255**

**<https://theses.hal.science/tel-00151255v1>**

Submitted on 2 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N D'ORDRE :

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelhamid ZAGHDANI

Sujet : **Formulations discontinues de Galerkin pour les équations de Maxwell.**

Soutenue le 08 Septembre 2006 devant le jury composé de :

Mr	François ALOUGES	
Mr	Gabriel CALOZ	Rapporteur
Mr	Christian DAVEAU	Directeur de thèse
Mr	Olivier GOUBET	
Mr	François GERMINET	Invité
Mr	Jacques LAMINIE	Directeur de thèse
Mr	Serge NICAISE	Rapporteur



# Remerciement

Mes premiers remerciements iront à mes directeurs de thèse Christian DAVEAU & Jacques LAMINIE qui ont accepté de co-encadrer cette thèse et qui m'ont témoigné leurs soutien et confiance. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Christian DAVEAU pour son soutien et ses conseils scientifiques qui m'ont beaucoup aidé à finir cette thèse. En l'absence de Christian DAVEAU ou de Jacques LAMINIE je n'aurais pas sans doute aboutit aux résultats de cette thèse. Je reste tout le temps redevant à mes encadreurs grâce aux services qu'ils m'ont rendus.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur Frédéric PASCAL pour les conseils qu'il m'a donnés.

Je tiens à remercier chaleureusement les professeurs Serge NICAISE & Gabriel CALOZ qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Les professeurs François ALOUGES, Olivier GOUBET & François GERMINET m'ont fait l'honneur d'accepter d'être parmi le jury de cette thèse. Je les en remercie.

J'exprime ma sincère reconnaissance aux membres du Jury.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues aux universités d'Orsay, de Paris XII et de Cergy-Pontoise. Je remercie aussi tous mes amis sans exception.



---

# Introduction

Le sujet de cette thèse est le calcul des champs électrique et magnétique qui sont solution des équations de Maxwell par des méthodes de Galerkin discontinues. Pour la résolution des équations aux dérivées partielles par des méthodes numériques on peut citer les travaux de Claes Johnson [39] et pour la résolution des équations de Maxwell par des méthodes des éléments finis, on peut citer les travaux de P. Monk [43]. Il existe de nombreux travaux sur la méthode de Galerkin discontinue pour la résolution de différents problèmes d'équations aux dérivées partielles. Pour des problèmes de diffusion et de convection on peut citer les travaux de la thèse de Baumann [10] et le papier de Oden, Babuška et Baumann [46]. D'autres versions de la méthode de Galerkin discontinue avec des variantes sont données dans le volume édité par Cockburn, Karniadakis et Shu [21]. On cite aussi les travaux de S. Prudhomme, F.Pascal, J.T. Oden et A. Romkes [49] qui analysent différentes formulations de type Galerkin discontinue pour la résolution du problème de Poisson, Ilaria Perugia et al.[47, 48] qui présentent des formulations de type Galerkin discontinue pour la résolution des équations de Maxwell dans des domaines fréquentiels et les travaux de B. Rivière, V. Girault et al.[53] qui résolvent les équations de Navier Stokes par une méthode de Galerkin discontinue.

La méthode de Galerkin discontinue possède plusieurs propriétés importantes : elle est localement conservative, les degrés des polynômes d'approximation peuvent varier de façon non uniforme sur les éléments du maillage, elle est aisément parallélisable et pour les problèmes où intervient le temps, elles conduisent à des matrices de masse diagonales par blocs même pour des degrés élevés. Ces propriétés donnent à la méthode un grand intérêt.

Concernant l'analyse de l'erreur pour les méthodes de type Galerkin discontinue, de nombreux papiers sont publiés dans la littérature mathématique et qui traitent divers problèmes. Par exemple, une analyse unidimensionnelle de la méthode de Baumann et Oden est rapportée en [46]. On cite aussi les travaux de B. Rivière, M. F. Wheeler et V. Girault [53] et ceux de Süli, Schwab et Houston [56]. Dans [49] on trouve une étude détaillée pour l'analyse de différentes formulations de type Galerkin discontinue associées au problème de Poisson dans un domaine bidimensionnel.

Les méthodes de résolution des problèmes de l'électromagnétisme sont multiples : on peut par exemple se ramener à un problème à deux champs par le biais de formulations mixtes ( voir Kikuchi [40] et Bossavit [12]). On peut aussi utiliser des formulations en éléments finis continus mixtes couplées avec

des méthodes intégrales pour résoudre des problèmes posés dans des domaines non bornés [42]. Pendant les dernières années, le choix des formulations mixtes a connu un grand essor suite aux travaux de F. Brezzi et M. Fortin [13] ainsi que P.A. Raviart et J.M. Thomas [50] pour des problèmes d'ordre deux et de F. Brezzi et P.A. Raviart [14] ainsi que R. Scholtz [55] pour des problèmes elliptiques d'ordre quatre.

Le but de cette thèse est l'étude de trois problèmes dérivant des équations de Maxwell par des formulations de type Galerkin discontinues. Les points de départ de cette thèse sont les travaux de I. Perugia et al. [47, 48] et les travaux de P.A. Raviart et J.M. Thomas [50] pour les formulations mixtes.

Le premier objectif de cette thèse est d'établir une formulation de type Galerkin discontinue pour calculer le champ électrique en régime harmonique à basse fréquence. On s'intéresse à la résolution du problème  $\nabla \times (\nabla \times u) = J$  et  $\nabla \cdot u = 0$  dans un domaine borné avec des conditions aux limites. Ici  $u$  est lié au champ électrique  $\mathcal{E}$  par la relation  $\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{R}e(u(x) \exp(iwt))$ ,  $w \neq 0$  est une fréquence donnée. Une formulation mixte pour ce type de problème est bien adaptée, un multiplicateur de Lagrange relaxant la divergence nulle est introduit.

Le deuxième objectif de cette thèse est le calcul du champ électrique qui est solution d'une équation d'ondes avec des conditions aux limites. La variable d'espace sera discrétisée en utilisant une méthode de Galerkin discontinue et la variable en temps par un schéma de type Newmark. Dans ce travail qui n'est plus de nature fréquentielle mais temporelle, on sera amené à utiliser le lemme de Gronwall et une méthode d'énergie pour obtenir des estimations d'erreur.

Le troisième travail consiste à étudier le couplage d'une méthode locale discontinue de Galerkin avec une méthode d'éléments finis qui elle-même est couplée avec une méthode intégrale pour résoudre le problème de la magnétostatique dans  $\mathbb{R}^3$  tout entier. Le couplage FEM-BEM est une technique connue pour ramener l'étude du problème sur un domaine borné. Par contre, peu de travaux existent sur l'étude du couplage LDG- FEM et du couplage LDG-BEM [54].

Le document se présente essentiellement en trois grandes parties.

- Dans la première partie on commence par montrer deux nouvelles inégalités de type Poincaré-Friedrichs sur les espaces discontinus [59]. La démonstration des inégalités est basée sur des formules de décomposition orthogonale de  $L^2(\Omega)^3$  où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ . Ces inégalités sont utilisées dans

---

les autres chapitres pour montrer la coercivité de certaines formes bilinéaires sur les espaces discrets. Ensuite, on introduit des problèmes de type point selle perturbés posés sur un domaine borné dont l'inconnue principale est le champ électrique et la deuxième inconnue représente un multiplicateur de Lagrange. Des résultats d'existence et d'unicité de solution sont prouvés. Des estimations de l'erreur entre les solutions exactes et les solutions discrètes sont établies et finalement des résultats numériques pour des solutions exactes explicites et analytiques sont donnés.

- Dans une deuxième partie on propose une formulation de Galerkin discontinue pour le calcul du champ électrique solution de l'équation des ondes avec des conditions aux limites du type  $n \times u = 0$ . La méthode consiste à utiliser une méthode discontinue de Galerkin pour la variable en espace. Pour discrétiser le problème en temps, on utilise un schéma de Newmark puisqu'on dispose d'un problème d'ordre deux en temps. Des résultats de consistance, d'existence et d'unicité de solution sont établis. Des analyses de l'erreur justifiant la convergence du schéma en fonction du pas de discrétisation en espace et du degré des polynômes d'approximation sont démontrés. On finit aussi par tester la convergence du schéma sur des solutions exactes explicites et analytiques.

- Dans la troisième partie on introduit une formulation locale discontinue de Galerkin (LDG) couplée avec une méthode d'éléments finis continus et avec une méthode intégrale dont l'inconnue principale est le champ magnétique solution d'un problème de la magnétostatique posé dans  $\mathbb{R}^3$ . Le problème à résoudre se pose sur un domaine borné. La méthode intégrale fait introduire des opérateurs intégraux qui sont définis pour des fonctions possédant des propriétés minimales de régularité et ne sont pas définis pour des fonctions discontinues. Pour contourner ce problème de régularité, on définit à l'intérieur du domaine une couche dont l'un de ses bords est le bord du domaine de calcul. Dans cette couche, on discrétise les équations par une méthode d'éléments finis continus. On a ainsi deux couplages à réaliser. Un couplage à l'intérieur du domaine entre une méthode d'éléments finis continus et une méthode de Galerkin discontinue. Un couplage sur le bord entre la méthode d'éléments finis continus et une méthode intégrale. Les deux couplages sont assurés en exploitant la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique et la continuité de la composante normale de l'induction magnétique. Des résultats de consistance de la formulation couplée, d'existence et d'unicité de solution sont prouvés. La méthode LDG introduit de façon naturelle des variables auxiliaires pour les problèmes d'ordre supérieur à un. Pour étudier la convergence de la formulation couplée, on élimine les variables auxiliaires et on aboutit ainsi à une formulation primale qui conduit à des estimations optimales et donc à la



convergence de la méthode.

# Chapitre 1

## Cadre fonctionnel

### 1.1 Préliminaires et notations

Soit  $D$  un sous-domaine ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on note par  $H^s(D)^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  et  $s \in \mathbb{R}^+$ , les espaces de Sobolev usuels munis des normes habituelles notées par  $\|\cdot\|_{s,D}$ . Les propriétés de ces espaces sont données en [41, 1].

Si  $u$  est une fonction régulière sur  $D$ , on note par  $\nabla \times u$  le rotationnel de  $u$  et par  $\nabla \cdot u$  la divergence de  $u$ .

On note par  $H(\nabla \times, D)$  l'espace des fonctions complexes  $u \in L^2(D)^3$  vérifiant  $\nabla \times u \in L^2(D)^3$ . Il est muni de la norme du graphe,

$$\|u\|_{H(\nabla \times, D)} := (\|u\|_{0,D}^2 + \|\nabla \times u\|_{0,D}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On introduit aussi l'espace des fonctions complexes  $u \in L^2(D)^3$  vérifiant  $\nabla \cdot u \in L^2(D)$  noté  $H(\nabla \cdot, D)$ . Il est aussi muni de la norme du graphe,

$$\|u\|_{H(\nabla \cdot, D)} := (\|u\|_{0,D}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{0,D}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On note par  $H^1(\nabla \times, D)$  l'ensemble des fonctions complexes  $u \in H^1(D)^3$  vérifiant  $\nabla \times u \in H^1(D)^3$ .

$H(\nabla \times 0, D)$  et  $H(\nabla \cdot 0, D)$  sont respectivement les sous-espaces de  $H(\nabla \times, D)$  et  $H(\nabla \cdot, D)$  à rotationnel nul et à divergence nulle dans  $D$  respectivement.

$H_0^1(D)$ ,  $H_0(\nabla \times, D)$  et  $H_0(\nabla \cdot, D)$  sont respectivement les sous-espaces de  $H^1(D)$ ,  $H(\nabla \times, D)$  et  $H(\nabla \cdot, D)$  qui ont une trace nulle, une trace tangentielle nulle et une trace normale nulle respectivement. (Les traces sont définies ultérieurement).

On définit aussi  $H_0(\nabla \times 0, D)$  et  $H_0(\nabla \cdot 0, D)$  comme les sous-espaces de  $H(\nabla \times 0, D)$  et  $H(\nabla \cdot 0, D)$  à trace tangentielle nulle et à trace normale nulle sur le bord de  $D$  respectivement.

**Opérateurs de traces** : Soit  $\Gamma$  le bord de  $D$ . On suppose que  $\Gamma$  est suffisamment régulier et on définit l'espace de trace suivant

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} ; v \in H^1(D)\}.$$

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  désigne l'espace dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est l'ensemble des fonctions de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  à moyenne nulle sur  $\Gamma$ . *i.e*

$$H_*^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) ; \int_{\Gamma} v ds = 0\}.$$

Le produit de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est noté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , c'est-à-dire  $\langle u, v \rangle := \int_{\Gamma} u(s)v(s)ds$  pour des fonctions  $u$  et  $v$  suffisamment régulières.

Les opérateurs de traces suivants sont bien définis [35] :

$$\begin{aligned} \gamma : v \in H^1(D) &\longrightarrow \gamma(v) := v|_{\Gamma} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_n : v \in H(\nabla \cdot, D) &\longrightarrow \gamma_n(v) := v \cdot n|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_t : v \in H(\nabla \times, D) &\longrightarrow \gamma_t(v) := v \times n|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3. \end{aligned}$$

Dans le cas où le bord de  $D$  n'est pas simplement connexe, si  $\Gamma_0$  est une partie non vide de  $\partial D$ , on note par  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  le sous-espace de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  constitué par les fonctions définies sur  $\Gamma_0$  dont leur extension par zéro sur  $\partial D \setminus \Gamma$  appartient à  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . le dual de  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est noté par  $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Dans ce cas les opérateurs de traces suivants sont bien définis :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : v \in H^1(D) &\longrightarrow \gamma_0(v) := v|_{\Gamma_0} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \\ \gamma_{n0} : v \in H(\nabla \cdot, D) &\longrightarrow \gamma_{n0}(v) := v \cdot n|_{\Gamma_0} \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \\ \gamma_{t0} : v \in H(\nabla \times, D) &\longrightarrow \gamma_{t0}(v) := v \times n|_{\Gamma_0} \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)^3. \end{aligned}$$

Pour plus de propriétés sur ces espaces on se réfère à [3].

## 1.2 Partition en éléments finis

$D$  désigne une partie non vide de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Pi_h$  est une partition en sous-domaines de  $D$ , c'est-à-dire que  $\Pi_h$  est une collection finie de  $N$  sous-domaines  $K_i$ ,

$i = 1, 2, 3, \dots, N$  vérifiant

$$\overline{\Omega} = \cup_{K_i \in \Pi_h} \overline{K_i} \quad \text{et} \quad K_i \cap K_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

La taille et la forme des éléments de la partition sont mesurées par les deux quantités suivantes :

$$h_K := \text{diam}(K) \quad \text{et} \quad \rho_K := \sup\{\text{diam}(B), B \text{ est une boule } \subset K\}.$$

On introduit aussi le paramètre  $h$  associé à la partition  $\Pi_h$  défini par :

$$h := \max_{K \in \Pi_h} h_K.$$

**Definition 1.2.1** Une famille de partition  $\Pi_h$  est dite régulière lorsque le paramètre  $h$  tend vers zéro, s'il existe un nombre réel  $\varrho > 0$  indépendant de  $h$  et  $K$  et vérifiant

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \varrho \quad \forall K \in \Pi_h.$$

La partition de  $D$  conduit à une collection d'interfaces. Celles-ci sont des arêtes lorsque  $D \subset \mathbb{R}^2$  et sont des faces lorsque  $D \subset \mathbb{R}^3$ . Dans ce document  $F_h^I$  désigne l'ensemble des interfaces intérieures, c'est-à-dire celles qui ne sont pas sur le bord de  $D$ . Ces interfaces sont les intersections de  $\partial K_1 \cap \partial K_2$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont deux éléments adjacents de la partition.  $F_h^D$  dénote l'ensemble des interfaces extérieures, c'est-à-dire celles qui sont sur le bord de  $D$ . Celles-ci sont les intersections de  $\partial K \cap \partial D$  avec  $K$  un élément de  $\Pi_h$ .

**Espaces fonctionnels discontinus :** Dans ce document on utilise les espaces discontinus suivants.

Pour  $s > \frac{1}{2}$ , on note par  $H^s(\Pi_h)$  l'espace de Sobolev "brisé"

$$H^s(\Pi_h) := \{v \in L^2(D) : v|_K \in H^s(K) \quad \forall K \in \Pi_h\}.$$

Il sera muni de la norme du graphe

$$\|v\|_{s, \Pi_h}^2 := \sum_{K \in \Pi_h} \|v\|_{s, K}^2.$$

On note par  $H^1(\nabla \times, \Pi_h)$  l'espace des fonctions discontinues lié à  $H^1(\nabla \times, D)$  et défini par

$$H^1(\nabla \times, \Pi_h) := \{v \in L^2(D)^3 : v|_K \in H^1(K)^3 \quad \text{et} \quad \nabla \times (v|_K) \in H^1(K)^3\}.$$

Si  $u \in H^s(\Pi_h)^3$ , on note par  $\nabla_h \times u$  le rotationnels discret de  $u$ .

Si  $u \in H^s(\Pi_h)^3$ , on note par  $\nabla_h \cdot u$  la divergence discrète de  $u$ .

Si  $\psi \in H^s(\Pi_h)$ , on note par  $\nabla_h \psi$  le gradient discret de  $\psi$ .

**Traces :** Une fonction  $v \in H^s(\Pi_h)$  est régulière sur tout élément de la partition, mais elle est discontinue sur les interfaces intérieures et donc les traces de  $v$  sur une interface intérieure peuvent avoir deux valeurs distinctes. Ainsi les traces des éléments de  $H^s(\Pi_h)$  sont des éléments de l'espace

$$TR(F_h) := \Pi_{K \in \Pi_h} L^2(\partial K).$$

On définit l'espace "brisé"  $L^2(F_h)$  comme le sous-espace de  $TR(F_h)$  dont les valeurs distinctes sur une même interface coïncident.

**Opérateurs de traces :**

Soit  $w \in TR(F_h)^3$  et  $e$  un élément de  $F_h$ . Pour définir les opérateurs de traces, on distingue deux cas :

- Si  $e$  est une interface intérieure, soient  $K_1$  et  $K_2$  les éléments de la partition de face commune  $e$  et soit  $n_i$  la normale unitaire sortante en  $\partial K_i$ .

On définit :

- 1) La valeur moyenne de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$\{\omega\} = \frac{w_1 + w_2}{2}.$$

- 2) Le saut tangentiel de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega]_T = n_1 \times \omega_1 + n_2 \times \omega_2.$$

- 3) Le saut normal de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega]_N = n_1 \cdot \omega_1 + n_2 \cdot \omega_2.$$

- 4) Le saut de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega] = \omega_1 - \omega_2.$$

- Si  $e$  est une interface extérieure sur  $\partial D$  et si  $n$  est la normale unitaire sortante au  $\partial D$ , on définit

- 1) La valeur moyenne de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$\{\omega\} = \omega.$$

2) Le saut tangentiel de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega]_T = n \times \omega.$$

3) Le saut normal de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega]_N = n \cdot \omega.$$

4) Le saut de  $\omega$  pour  $x \in e$  par

$$[\omega] = \omega.$$

On introduit des définitions similaires pour les fonctions scalaires  $\psi \in TR(F_h)$  :

- sur les interfaces intérieures

$$\{\psi\} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \quad , \quad [\psi] = \psi_1 - \psi_2 \quad \text{et} \quad [\psi]_N = \psi_1 n_1 + \psi_2 n_2.$$

- sur les interfaces extérieures

$$\{\psi\} = \psi \quad , \quad [\psi] = \psi \quad \text{et} \quad [\psi]_N = \psi n.$$

## 1.3 Méthodes mixtes

Dans cette section, on rappelle le cadre abstrait pour traiter les problèmes mixtes.

Soient  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Q}$  deux espaces de Hilbert munis respectivement des produits scalaires notés  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$  et  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{Q}}$  et on se donne trois formes bilinéaires

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) &: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ b(\cdot, \cdot) &: \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ c(\cdot, \cdot) &: \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On considère le problème de type point selle perturbé suivant : étant donné  $l_1 \in \mathcal{V}'$  et  $l_2 \in \mathcal{Q}'$ , trouver un couple  $(u, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  vérifiant

$$\begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = \langle l_1, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ b(u, \psi) - c(p, \psi) = \langle l_2, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Notons par  $V$  le noyau de la forme bilinéaire  $b$  défini par

$$V := \{v \in \mathcal{V} : b(v, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}\}.$$

On a le résultat suivant présenté dans [13].

**Théorème 1.3.1** *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *V-ellipticité de a : il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in V.$$

2. *Condition inf-sup pour b : il existe une constante  $\beta > 0$  telle que*

$$\inf_{q \in \mathcal{Q} \setminus \{0\}} \sup_{v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}}} \geq \beta.$$

3. *La forme bilinéaire c est symétrique positive.*

Alors  $\forall l_1 \in \mathcal{V}'$  et  $l_2 \in \mathcal{Q}'$ , il existe un unique couple  $(u, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  solution du problème (1.1), de plus l'application  $(l_1, l_2) \in \mathcal{V}' \times \mathcal{Q}' \longrightarrow (u, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  est continue.

**Remarque 1.3.1** *La démarche générale utilisée pour vérifier la condition inf-sup est la suivante : On construit un opérateur  $L : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{Q}$  continu et tel que  $b(L(v), v) \geq \|v\|_{\mathcal{Q}}^2$ . La condition inf-sup se déduit alors immédiatement : en effet en posant  $p = L(v)$  on a*

$$b(p, v) \geq \|v\|_{\mathcal{Q}}^2 = \|p\|_{\mathcal{Q}} \|v\|_{\mathcal{Q}} \frac{\|v\|_{\mathcal{Q}}}{\|p\|_{\mathcal{V}}} \geq \|p\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{Q}} \frac{1}{\|L\|},$$

d'où la condition inf-sup avec  $\beta = \frac{1}{\|L\|}$ .

### 1.3.1 Approximation du problème

Soient  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  deux sous-espaces de dimension fini inclus respectivement dans  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{Q}$ .

L'approximation du problème continu consiste à chercher  $(u_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  tel que

$$\begin{cases} a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle l_1, v \rangle & \forall v \in \mathcal{V}_h, \\ b(u_h, \psi) - c(p_h, \psi) = \langle l_2, \psi \rangle & \forall \psi \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (1.2)$$

On a aussi le résultat suivant présenté dans [13].

**Théorème 1.3.2** *On note  $V_h$  le noyau discret de la forme bilinéaire b défini par*

$$V_h := \{v \in \mathcal{V}_h : b(v, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h\}.$$

Sous les hypothèses suivantes :

1.  $V_h$ -ellipticité : il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v_h \in V_h.$$

2. Condition inf-sup discrète pour  $b$  : il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in \mathcal{V}_h \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}}} \geq \beta.$$

3. La forme bilinéaire  $c$  est symétrique positive.

Alors  $\forall l_1 \in \mathcal{V}'$  et  $l_2 \in \mathcal{Q}'$ , il existe un unique couple  $(u_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  solution du problème (1.2). En outre, si les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont indépendantes de  $h$ , on a l'estimation d'erreur

$$\|p - p_h\|_{\mathcal{Q}} + \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq c_1 \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}} + c_2 \inf_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \|p - q_h\|_{\mathcal{Q}}$$

avec des constantes  $c_1$  et  $c_2$  indépendantes de  $h$ .





# Chapitre 2

## Deux nouvelles inégalités discrètes de type Poincaré-Friedrichs sur les espaces discontinus

### Introduction

Soit  $\Omega$  un sous-domaine borné et Lipschitzien de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose que  $\Omega$  est connexe et simplement connexe et que le bord de  $\Omega$  noté  $\Gamma$  est aussi connexe et simplement connexe. On suppose aussi que  $\Omega$  vérifie l'hypothèse :

Les injections de  $H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega)$  et  $H(\nabla \times, \Omega) \cap H_0(\nabla \cdot, \Omega)$  dans  $H^1(\Omega)^3$  sont continues. Cette hypothèse est vérifiée si  $\Omega$  est borné et  $\Gamma$  présente une régularité  $\mathcal{C}^{1,1}$  ou si  $\Omega$  est à bord polyédral mais convexe ( voir [35] page 51).

On présente deux nouvelles inégalités de type Poincaré-Friedrichs sur les espaces discontinus. La preuve des inégalités est basée sur des formules de décomposition orthogonale de  $L^2(\Omega)^3$ . Soit  $\Pi_h$  une partition  $\Omega$ . On a les formules d'intégration par parties :

$\forall v, u \in H^1(\Pi_h)^3$ ,  $\forall \psi \in H^1(\Pi_h)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \cdot \nabla_h \times u &= \int_{\Omega} u \cdot \nabla_h \times v + \sum_{e \in F_h^D} \int_e (n \times u) v \\ &+ \sum_{e \in F_h^I} \int_e ([u]_T \{v\} - [v]_T \{u\}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi \nabla_h \cdot u &= - \int_{\Omega} u \cdot \nabla_h \psi + \sum_{e \in F_h^D} \int_e (u \cdot n) \psi \\ &+ \sum_{e \in F_h^I} \int_e ([u]_N \{\psi\} + [\psi] \{u\} \cdot n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans ce chapitre  $h$  désigne un paramètre lié au maillage et vérifiant les hypothèses suivantes :

soit  $e$  une interface et distinguons les deux cas suivants :

dans le cas où  $e$  est une interface intérieure, soit  $K$  et  $K'$  les deux éléments du maillage qui vérifient  $\partial K \cap \partial K' = e$ , soit  $h_K$  et  $h_{K'}$  les tailles respectives de  $K$  et  $K'$ . On suppose que  $h$  vérifie

$$\frac{h}{h_K} \leq C \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_{K'}} \leq C$$

avec  $C$  une constante positive indépendante de  $h$ .

Dans le cas où  $e$  est une interface extérieure, soit  $K \in \Pi_h$  vérifiant  $\partial K \cap \partial \Omega = e$  et soit  $h_K$  la taille de  $K$ . On suppose que  $h$  vérifie

$$\frac{h}{h_K} \leq C$$

avec  $C$  une constante positive indépendante de  $h$ .

Les hypothèses précédentes sont éventuellement satisfaites lorsqu'on dispose d'un maillage uniforme avec le paramètre  $h = \max_{K \in \Pi_h} h_K$  ou si  $h$  est le paramètre local lié à la taille des mailles et défini sur l'ensemble des faces intérieures par  $h := \min(h_K, h_{K'})$  où  $K$  et  $K'$  sont les éléments cités précédemment et sur les faces extérieures par  $h := h_K$ .

## 2.1 La première inégalité

**Lemme 2.1.1** *Soient  $u \in H^1(\Pi_h)^3$  et  $\sigma = \frac{1}{h}$ . Alors, il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $h$  et vérifiant*

$$\|u\|^2 \leq C \left( \|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \sum_{e \in F_h} \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,e}^2 \right).$$

**Preuve :** Comme  $\Gamma$  est simplement connexe, on a la formule de décomposition orthogonale suivante (voir [35, 40])

$$L^2(\Omega)^3 = H_0(\nabla \times 0, \Omega) \oplus H(\nabla \cdot 0, \Omega).$$

Ainsi, si  $u \in H^1(\Pi_h)^3$ , alors  $u \in L^2(\Omega)^3$  et on peut décomposer  $u$  comme suit

$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } u_1 \in H_0(\nabla \times 0, \Omega) \text{ et } u_2 \in H(\nabla \cdot 0, \Omega). \quad (2.3)$$

Comme  $u_1 \in H_0(\nabla \times 0, \Omega)$ , on peut écrire  $u_1 = \nabla q$  avec  $q \in H_0^1(\Omega)$  ( voir [35] ). On peut aussi écrire  $u_2 = \nabla \times \phi$  dans  $\Omega$  avec  $\phi \in H(\nabla \times, \Omega) \cap H_0(\nabla \cdot 0, \Omega)$  ( voir aussi [35] ). En particulier, les traces de  $\phi$  sont bien définies dès que  $\phi \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega)$  s'injecte continûment dans  $H^1(\Omega)^3$ . Notons que l'égalité (2.3) implique

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} (\nabla q + \nabla \times \phi) \cdot (\nabla q + \nabla \times \phi) \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla q|^2 + |\nabla \times \phi|^2) \\ &= \|\nabla q\|^2 + \|\nabla \times \phi\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant les formules d'intégration (2.1) et (2.2), on obtient alors

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \int_{\Omega} u \cdot \nabla q + \int_{\Omega} u \cdot \nabla \times \phi \\ &= - \int_{\Omega} q \nabla_h \cdot u + \int_{\Omega} \phi \nabla_h \times u + \sum_{e \in F_h^I} \int_e ([u]_N q - [u]_T \phi) \\ &\quad + \sum_{e \in F_h^D} \int_e ((u \cdot n) q + (n \times u) \phi). \end{aligned}$$

Comme  $q \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= - \int_{\Omega} (q \nabla_h \cdot u + \phi \nabla_h \times u) + \sum_{e \in F_h^I} \int_e ([u]_N q - [u]_T \phi) \\ &\quad + \sum_{e \in F_h^D} \int_e (n \times u) \phi. \end{aligned}$$

Il résulte

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq C(\|\nabla_h \cdot u\|^2 + \|\nabla_h \times u\|^2 + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma} [u]_N\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in F_h} \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_{0,e}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times (\|q\|^2 + \|\phi\|^2 + \sum_{e \in F_h^I} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} q\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in F_h} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \phi\|_{0,e}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\|q\|^2 \leq C\|\nabla q\|^2 \leq C\|u\|^2.$$

Comme  $\phi \in H(\nabla \times, \Omega) \cap H_0(\nabla \cdot, \Omega)$  et  $\nabla \cdot \phi = 0$ , on obtient ( voir [35] pour la première inégalité )

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &\leq C(\|\nabla \times \phi\|^2 + \|\nabla \cdot \phi\|^2) \\ &\leq C\|\nabla \times \phi\|^2 \\ &\leq C\|u\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant une inégalité des traces (voir [2] ), on a pour toute interface  $e \subset F_h$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} q \right\|_{0,e}^2 &\leq \frac{C}{\sigma} \left( \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 + \|q\|_{0,K} \|\nabla q\|_{0,K} \right) \\ &\leq Ch \left( \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 + \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 + h_K \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq Ch \left( \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 + \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 + \frac{1}{h_K} \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq C(\|q\|_{0,K}^2 + \|\nabla q\|_{0,K}^2). \end{aligned}$$

En sommant

$$\begin{aligned} \sum_{e \subset F_h^I} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} q \right\|_{0,e}^2 &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} (\|q\|_{0,K}^2 + \|\nabla q\|_{0,K}^2) \\ &\leq C(\|q\|^2 + \|\nabla q\|^2) \\ &\leq C\|u\|^2. \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant le fait que l'injection de  $H(\nabla \times, \Omega) \cap H_0(\nabla \cdot, \Omega)$  dans  $H^1(\Omega)^3$  est continue, on peut majorer  $\sum_{e \subset F_h} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \phi \right\|_{0,e}^2$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \phi \right\|_{0,F_h}^2 &\leq C\|\phi\|_{1,\Omega}^2 \leq C\|\phi\|_{H(\nabla \times, \Omega) \cap H_0(\nabla \cdot, \Omega)}^2 \leq C(\|\nabla \times \phi\|^2 + \|\nabla \cdot \phi\|^2) \\ &\leq C\|\nabla \times \phi\|^2 \\ &\leq C\|u\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\|u\|^2 \leq C(\|\nabla_h \cdot u\|^2 + \|\nabla_h \times u\|^2 + \sum_{e \subset F_h^I} \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,e}^2 + \sum_{e \subset F_h} \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,e}^2)^{\frac{1}{2}} \|u\|$$

ce qui est équivalent à

$$\|u\|^2 \leq C(\|\nabla_h \cdot u\|^2 + \|\nabla_h \times u\|^2 + \sum_{e \subset F_h^I} \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,e}^2 + \sum_{e \subset F_h} \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,e}^2). \quad \square$$

## 2.2 La deuxième inégalité

**Lemme 2.2.1** *Soient  $u \in H^1(\Pi_h)^3$  et  $\sigma = \frac{1}{h}$ . Alors, il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $h$  et vérifiant*

$$\|u\|^2 \leq C(\|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in F_h} \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0,e}^2).$$

**Preuve :** La preuve est assez semblable à la preuve de la première inégalité, mais ici on utilise la formule de décomposition orthogonale suivante (voir aussi [35], [40])

$$L^2(\Omega)^3 = H(\nabla \times 0, \Omega) \oplus H_0(\nabla \cdot 0, \Omega).$$

Ainsi, pour  $u \in L^2(\Omega)^3$  on écrit

$$u = u_1 + u_2$$

avec  $u_1 \in H(\nabla \times 0, \Omega)$  et  $u_2 \in H_0(\nabla \cdot 0, \Omega)$ . Comme  $\nabla \times u_1 = 0$ , on écrit  $u_1 = \nabla q$  avec  $q \in H^1(\Omega)$  et comme  $u_2 \in H_0(\nabla \cdot 0, \Omega)$ , on écrit  $u_2 = \nabla \times \varphi$  avec  $\varphi \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot 0, \Omega)$  (voir [35], [40]).



# Chapitre 3

## Résolution d'un problème électrostatique par une méthode de Galerkin discontinue

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on dispose d'un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  contenant seulement des matériaux isolants et d'une source de courant  $J_s$ . On note par  $\Gamma$  le bord de  $\Omega$  et on suppose connexe et simplement connexe.

Le problème que nous considérons ici consiste à trouver le champ  $u$  solution des équations

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times u) & = -i\omega J_s =: J & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u & = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

$u$  est relié au champ électrique  $\mathcal{E}$  par

$$\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{R}e(u(x) \exp(i\omega t))$$

où  $\omega \neq 0$  est une fréquence donnée supposée basse.

En appliquant la divergence à la première équation de (3.1), on voit qu'on doit supposer que  $J$  est à divergence nulle. Cependant si l'on souhaite traiter le cas général où  $J$  n'est pas à divergence nulle, on retrouve dans la littérature l'idée d'introduire un multiplicateur de Lagrange  $p$  et de considérer le problème suivant, voir [35, 17] : Trouver  $(u, p)$  vérifiant le système d'équation

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times u) - \nabla p & = J & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u & = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$



au lieu du problème initial (3.1).

Appliquons la divergence à la première équation en (3.2), alors on voit que  $p$  satisfait

$$-\nabla \cdot (\nabla p) = \nabla \cdot J \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.3)$$

Il résulte que si le problème (3.2) est donné avec une condition aux limites

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.4)$$

alors  $p$  est nul dans  $\Omega$  et on recupère le problème initial dès que  $J$  est à divergence nulle dans  $\Omega$ .

Si la condition aux limites du champ  $u$  est donnée par :

$$n \times u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.5)$$

alors il n'est pas difficile (voir par exemple [17, 35]) de montrer que le problème :

Étant donné  $J \in L^2(\Omega)^3$ , trouver  $(u, p) \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$  vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times u) - \nabla p & = J & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u & = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

admet une unique solution  $(u, p)$  telle que

$$\nabla \times u \in H(\nabla \times, \Omega) \quad (3.7)$$

et que si  $J$  est à divergence nulle, alors  $p = 0$  dans  $\Omega$  et  $u$  satisfait le problème désiré (3.1) et la condition aux limites (3.5). On pourra considérer la formulation :

Trouver  $(u, p) \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot u)(\nabla \cdot v) - \int_{\Omega} v \cdot \nabla p \\ = \int_{\Omega} J \cdot v \quad \forall v \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega) \\ - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \psi = 0 \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

## 3.2 Formulation discontinue du problème

Soit  $\Pi_h$  une partition formée de tétraèdres de  $\Omega$ . Pour démontrer une condition inf-sup par la suite, on fait l'hypothèse suivante ( ce qui ne restreint en rien le problème ) :

Aucun tétraèdre de  $\Pi_h$  n'a plus d'une face sur  $\Gamma$ .

### 3.2.1 Dérivation de la formulation

Pour alléger les notations, on introduit les espaces discontinus suivants

$$\mathcal{V}(h) := H^1(\nabla \times, \Pi_h) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(h) := H^1(\Pi_h).$$

On s'intéresse dans cette section à donner une formulation de Galerkin discontinue associée au problème (3.2).

Soit  $K \in \Pi_h$  fixé et soit  $n_K$  la normale unitaire sortante sur  $\partial K$ . Multiplions la première équation de (3.2) par une fonction test  $v \in \mathcal{V}(h)$  et intégrons sur  $K$  avec les formules de Stokes et Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_K (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_K p \nabla \cdot v - \int_{\partial K} (v \cdot n_K) p \\ - \int_{\partial K} v \cdot ((\nabla \times u) \times n_K) = \int_K J \cdot v. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De même en multipliant la deuxième équation de (3.2) par une fonction test  $\psi \in \mathcal{Q}(h)$  et en intégrant avec la formule de Green, on obtient

$$- \int_K u \cdot \nabla \psi + \int_{\partial K} (u \cdot n_K) \psi = 0. \quad (3.9)$$

Étant donné que les fonctions considérées dans les équations (3.8) et (3.9) sont totalement discontinues sur les interfaces intérieures de la partition de  $\Omega$ , les traces sur ces interfaces peuvent avoir des valeurs distinctes. Pour cela on approche les traces sur les interfaces par des flux numériques qui seront définis dans la prochaine section.

On obtient ainsi la formulation discontinue :

Trouver  $(u, p) \in \mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  vérifiant

$$\begin{aligned}
\int_K (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) &+ \int_K p \nabla \cdot v - \int_{\partial K} (v \cdot n_K) \widehat{p} \\
&- \int_{\partial K} v \cdot (\widehat{(\nabla_h \times u)} \times n_K) \\
&= \int_K J \cdot v \\
- \int_K u \cdot \nabla \psi + \int_{\partial K} (\widehat{u} \cdot n_K) \psi &= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

pout tout  $K \in \Pi_h$  et pour toutes les fonctions tests  $(v, \psi) \in \mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$ . Ici  $\widehat{u}$ ,  $\widehat{p}$  et  $\widehat{(\nabla_h \times u)}$  sont les flux numériques qui approchent les solutions exactes  $u$ ,  $p$  et  $\nabla \times u$  au niveau des interfaces de la partition de  $\Omega$  respectivement.

### Introduction des flux numériques

Pour  $\varphi \in H^s(\Pi_h)^3$  avec  $s > \frac{1}{2}$  une fonction donnée, les flux numériques  $\widehat{\varphi}$  sont des éléments de  $L^2(F_h)^3$ . Ils ont en particulier une valeur unique sur l'ensemble des interfaces, on dit qu'ils sont conservatifs. De même si  $\varrho \in H^s(\Pi_h)$  avec  $s > \frac{1}{2}$  est une fonction scalaire donnée, les flux numériques  $\widehat{\varrho}$  sont des éléments de  $L^2(F_h)$ .

**Definition 3.2.1** *On définit les flux numériques conservatifs et consistants au sens de Arnold [4] comme suit :*

- *Sur les interfaces intérieures de la partition de  $\Omega$  :*

$$\begin{cases} \widehat{(\nabla_h \times u)} &= \{\nabla_h \times u\} - \sigma_a[u]_T, \\ \widehat{u} &= \{u\} - \sigma_c[p]_N, \\ \widehat{p} &= \{p\} - \sigma_a[u]_N. \end{cases} \tag{3.11}$$

- *Sur les faces de  $\Gamma$  :*

$$\begin{cases} \widehat{(\nabla_h \times u)} &= \{\nabla_h \times u\} - \sigma_a[u]_T, \\ \widehat{u} &= u - \sigma_c p n, \\ \widehat{p} &= 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

où  $\sigma_a$  et  $\sigma_c$  sont des paramètres de stabilisation qui seront précisés ultérieurement.

### 3.2.2 La formulation de Galerkin discontinue

Pour trouver une formulation de Galerkin discontinue, un simple calcul permet de montrer que :

$\forall v, t \in TR(F_h)^3, \forall \psi \in TR(F_h)$  on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} v(t \times n_K) &= \int_{F_h} [v]_T \{t\} - \int_{F_h^I} [t]_T \{v\}; \\ \sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} \psi(v \cdot n_K) &= \int_{F_h^I} ([v]_N \{\psi\} + [\psi]_N \{v\}) + \int_{F_h^D} \psi(v \cdot n). \end{aligned} \quad (3.13)$$

En utilisant (3.13), on a

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} v \cdot ((\widehat{\nabla} \times u) \times n_K) &= \int_{F_h} [v]_T \{\widehat{\nabla}_h \times u\} \\ &\quad - \int_{F_h^I} [\widehat{\nabla}_h \times u]_T \{v\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comme  $F_h = F_h^D \cup F_h^I$  et  $F_h^D = \Gamma$ , alors en utilisant les définitions des flux numériques introduits dans la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} v \cdot ((\widehat{\nabla} \times u) \times n_K) &= \int_{F_h^I} [v]_T \{\nabla_h \times u\} - \int_{F_h^I} \sigma_a[u]_T [v]_T \\ &\quad + \int_{\Gamma} [v]_T \{\nabla_h \times u\} - \int_{\Gamma} \sigma_a[v]_T [u]_T \\ &= \int_{F_h} [v]_T \{\nabla_h \times u\} - \int_{F_h} \sigma_a[v]_T [u]_T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On fait de même pour calculer  $\sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} (v \cdot n_K) \widehat{p}$  et on a

$$\sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} (v \cdot n_K) \widehat{p} = - \int_{F_h^I} \sigma_a[u]_N [v]_N + \int_{F_h^I} \{p\} [v]_N. \quad (3.16)$$

En utilisant la formule de Green, on voit que la deuxième équation de (3.10) est équivalente à

$$\int_K \psi \nabla_h \cdot u + \int_{\partial K} ((\widehat{u} - u) \cdot n_K) \psi = 0. \quad (3.17)$$

En suivant la même démarche que précédemment, on obtient à l'aide de (3.13) et de la définition des flux numériques de  $u$ ,

$$\sum_{K \in \Pi_h} \int_{\partial K} ((\hat{u} - u) \cdot n_K) \psi = - \int_{F_h^I} \sigma_c [p]_N [\psi]_N - \int_{F_h^I} [u]_N \{\psi\} - \int_{\Gamma} \sigma_c p \psi. \quad (3.18)$$

Pour trouver la formulation discontinue de Galerkin, il suffit d'effectuer la somme des équations (3.10) sur tous les éléments de la partition de  $\Omega$  et de remarquer que le terme

$$r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u)(\nabla_h \cdot v), \text{ avec } r > 0 \text{ et indépendante de } h \quad (3.19)$$

est identiquement nul pour la solution exacte, sera introduit comme un terme de pénalisation pour stabiliser la formulation (3.22). On obtient la formulation suivante :

Trouver  $(u, p) \in \mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  vérifiant

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla_h \times u) \cdot (\nabla_h \times v) + \int_{\Omega} p^h \nabla_h \cdot v - \int_{F_h} [v]_T \{\nabla_h \times u\} \\ & + r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u)(\nabla_h \cdot v) + \int_{F_h} \sigma_a [u]_T [v]_T \\ & - \int_{F_h^I} [v]_N \{p\} + \int_{F_h^I} \sigma_a [u]_N [v]_N = \int_{\Omega} J \cdot v, \\ & \int_{\Omega} \psi \nabla_h \cdot u - \int_{F_h^I} \{\psi\} [u]_N - \int_{F_h} \sigma_c [p] [\psi] = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

pour toutes les fonctions test  $(v, \psi) \in \mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$ .

Afin de symétriser la forme bilinéaire principale de la formulation précédente, on introduit le terme

$$J(u, v) = \int_{F_h} [u]_T \{\nabla_h \times v\} \quad (3.21)$$

qui est nul pour la solution exacte, comme un terme de pénalisation. On associe ainsi au problème (3.2) la formulation suivante

Trouver  $(u, p) \in \mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  vérifiant

$$\begin{cases} A(u, v) + B(v, p) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}(h), \\ B(u, \psi) - C(p, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}(h) \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les formes bilinéaires définies sur  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{V}(h)$ ,  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  et  $\mathcal{Q}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  par

$$A(u, v) := a(u, v) - J(v, u) - J(u, v). \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} (\nabla_h \times u) \cdot (\nabla_h \times v) + \int_{F_h} \sigma_a[u]_T [v]_T + \int_{F_h^I} \sigma_a[u]_N [v]_N \\ &\quad + r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u)(\nabla_h \cdot v), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$B(v, p) := \int_{\Omega} p \nabla_h \cdot v - \int_{F_h^I} [v]_N \{p\} \quad (3.25)$$

et

$$C(p, \psi) := \int_{F_h} \sigma_c[p][\psi]. \quad (3.26)$$

On démontre maintenant un théorème d'équivalence entre les solutions du problème (3.2) et celles de (3.22).

### 3.3 Équivalence des problèmes (3.22) et (3.2)

**Théorème 3.3.1** *Soit  $(u, p)$  une solution régulière du problème (3.2) avec les conditions aux limites (3.4) et (3.5), alors  $(u, p)$  est une solution du problème variationnel (3.22). Réciproquement, si  $(u, p)$  est une solution de (3.22), alors  $(u, p)$  est une solution du problème (3.2) et vérifie les conditions aux limites (3.4) et (3.5). Aussi, si  $J$  est à divergence nulle et si  $(u, p)$  est une solution de (3.22), alors  $p$  est identiquement nul dans  $\Omega$  et  $u$  satisfait le problème (3.1) avec la condition aux limites (3.5).*

**Démonstration :** Soit  $(u, p)$  une solution régulière du problème fort (3.2) avec les conditions aux limites (3.4) et (3.5), alors  $(u, p)$  est une solution du problème variationnel (3.22), ceci est déjà démontré pendant la dérivation de la formulation (3.22).

Réciproquement, soit  $(u, p)$  une solution du problème variationnel (3.22) et

montrons qu'elle vérifie (3.2) avec les conditions aux limites (3.4) et (3.5). Soient  $K \in \Pi_h$  un élément fixé et  $\mathcal{D}(K)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact contenu dans  $K$ . Commençons par montrer que  $\nabla \cdot u = 0$  dans  $K$ . Soit  $\varphi \in H_0^1(K)$  et considérons  $(v, \psi) = (0, \varphi)$  dans  $K$  et prolongée par zéro dans  $\Omega$ , alors la deuxième équation de la formulation (3.22) se réduit à

$$\int_K \varphi \nabla \cdot u = 0. \quad (3.27)$$

Il résulte par densité de  $H_0^1(K)$  dans  $L^2(K)$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{p.p. dans } K. \quad (3.28)$$

Pour montrer que  $u$  est à divergence nulle dans  $\Omega$ , il suffit alors de montrer que  $u$  est à composante normale continue au niveau des interfaces intérieures de  $\Omega$ . Pour cela soit  $f_{ij}$  une interface intérieure et soit  $K_1, K_2$  deux éléments de  $\Pi_h$  vérifiant  $\partial K_1 \cap \partial K_2 = f_{ij}$ . Soit  $\varphi \in H_0^1(K_1 \cup K_2)$ , prolongée par zéro dans  $\Omega$ , alors  $\varphi|_{K_1} \in H^1(K_1)$  et  $\varphi|_{K_2} \in H^1(K_2)$ . Considérons  $(v, \psi) = (0, \varphi)$ , alors la deuxième équation de la formulation (3.22) se réduit à

$$\int_{K_1 \cup K_2} \varphi \nabla \cdot u = 0. \quad (3.29)$$

En multipliant (3.28) par  $\varphi$  et en intégrant par parties sur  $K_i, i = 1, 2$ , on aura

$$\int_{K_i} u \cdot \nabla \varphi + \int_{f_{ij}} (u \cdot n) \varphi = 0, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.30)$$

Il résulte alors que

$$\int_{K_1 \cup K_2} u \cdot \nabla \varphi + \int_{f_{ij}} [u]_N \varphi = 0. \quad (3.31)$$

On intègre (3.29) par parties, pour obtenir

$$\int_{K_1 \cup K_2} u \cdot \nabla \varphi = 0. \quad (3.32)$$

En identifiant les deux équations précédentes, on aura

$$\int_{f_{ij}} [u]_N \varphi = 0. \quad (3.33)$$

Ceci implique que  $u$  est à composante normale continue à travers  $f_{ij}$  qui est arbitraire. On déduit que  $u \in H(\nabla \cdot, \Omega)$  et donc

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{p.p dans } \Omega. \quad (3.34)$$

Montrons maintenant que la solution de (3.22) vérifie

$$\nabla \times (\nabla \times u) - \nabla p = J \quad \text{p.p dans } \Omega. \quad (3.35)$$

Soit  $v \in \mathcal{D}(K)^3$ , alors la première égalité de la formulation (3.22) se réduit à

$$\int_K (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_K p \nabla \cdot v = \int_K J \cdot v. \quad (3.36)$$

Ce qui implique après une intégration par parties que  $(u, p)$  vérifie

$$\nabla \times (\nabla \times u) - \nabla p = J \quad \text{p.p. dans } K. \quad (3.37)$$

Pour montrer (3.35), il suffit maintenant de montrer que

$$\nabla \times u \in H(\nabla \times, \Omega) \quad \text{et} \quad p \in H^1(\Omega). \quad (3.38)$$

Comme  $u$  vérifie (3.34) et  $u \in H(\nabla \cdot, \Omega)$ , alors  $B(u, p) = 0$  et la deuxième équation de la formulation avec  $\psi = p$  implique

$$\int_{F_h} \sigma_c[p]^2 = 0 \quad (3.39)$$

et donc  $p \in H^1(\Omega)$  et vérifie la condition aux limites (3.4). Il reste à montrer que  $\nabla \times u \in H(\nabla \times, \Omega)$  et la condition aux limites (3.5). Soit  $f_{ij}$  une interface interne et soit  $K_1, K_2$  les deux éléments de face commune  $f_{ij}$ .

Soit  $v \in H_0^2(K_1 \cup K_2)^3$ , la première équation de la formulation (3.22) se réduit à

$$\int_{K_1 \cup K_2} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_{K_1 \cup K_2} p \nabla \cdot v = \int_{K_1 \cup K_2} J \cdot v. \quad (3.40)$$

En intégrant par parties (3.37) sur  $K_1$  et  $K_2$  séparément et en utilisant la continuité de  $p$  démontrée précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{K_i} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) - \int_{K_i} v \cdot \nabla p + \int_{f_{ij}} (n \times \nabla \times u) \cdot v \\ = \int_{K_i} J \cdot v, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$



En particulier

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cup K_2} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) - \int_{K_1 \cup K_2} v \cdot \nabla p + \int_{f_{ij}} v \cdot [\nabla \times u]_T \\ = \int_{K_1 \cup K_2} J \cdot v. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En identifiant les équations (3.42) et (3.40) et étant donné que  $f_{ij}$  est arbitraire, on déduit que  $[\nabla \times u]_T = 0$  sur  $F_h^I$  et par suite  $(u, p)$  vérifie (3.35). Il ne reste qu'à vérifier que  $u$  satisfait la condition aux limites (3.5). Pour cela soit  $v \in H^2(\Omega)^3$  avec  $v \times n = 0$  sur  $\Gamma$ . Alors la première équations de (3.22) se réduit à

$$\int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_{\Omega} p \nabla \cdot v + \int_{\Gamma} (n \times u) \cdot (\nabla \times v) = \int_{\Omega} J \cdot v. \quad (3.43)$$

D'autre part en multipliant (3.35) par  $v$  et en intégrant par parties et en utilisant la condition  $p = 0$  sur  $\Gamma$  démontrée précédemment, on se ramène à

$$\int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_{\Omega} p \nabla \cdot v = \int_{\Omega} J \cdot v. \quad (3.44)$$

Il résulte après identification que

$$\int_{\Gamma} (n \times u) \cdot (\nabla \times v) = 0 \quad \forall v \in H^2(\Pi_h)^3 \text{ avec } v \times n = 0 \quad (3.45)$$

et donc  $u$  vérifie (3.5).

Montrons maintenant que si  $J$  est à divergence nulle dans  $\Omega$  et que si  $(u, p)$  est une solution de (3.22), alors  $p$  est nul dans  $\Omega$  et  $u$  résoud le problème (3.1) avec la condition aux limites (3.5). En suivant la même démarche que précédemment, on pourra montrer que la solution  $(u, p)$  de (3.22) vérifie  $p \in H_0^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) + \int_{\Omega} p \nabla \cdot v = \int_{\Omega} J \cdot v \quad \forall v \in H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega) \quad (3.46)$$

En particulier, si on considère  $v = \nabla \varphi$  où  $\varphi$  est l'unique solution de

$$\Delta \varphi = p \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (3.47)$$

on obtient dès que  $v \in H_0(\nabla \times 0, \Omega)$

$$\|p\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} J \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} \varphi \nabla \cdot J = 0. \quad (3.48)$$

Ce qui implique que  $p$  est nul partout dans  $\Omega$  et  $u$  est solution de (3.1) avec la condition aux limites (3.5).

### 3.4 Approximation du problème

Pour  $k \geq 1$ , on note par  $P_k(K)$  l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $k$  et on définit les espaces de discrétisation de  $u$  et  $p$  respectivement par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &:= \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in P_k(K)\}^3, \\ \mathcal{Q}_h &:= \{q \in L^2(\Omega) : q|_K \in P_{k-1}(K)\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

La discrétisation en éléments finis correspondant à la formulation (3.22) est donnée par :

trouver  $(u^h, p^h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  vérifiant

$$\begin{cases} A(u^h, v) + B(v, p^h) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_h, \\ B(u^h, \psi) - C(p^h, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (3.50)$$

**Remarque 3.4.1** *Pour la résolution de (3.2), d'autres formulations DG peuvent être considérées, on cite par exemple le cas non symétrique de la forme bilinéaire principale  $A$  donnée par*

$$A(u, v) := a(u, v) - J(v, u) + J(u, v). \quad (3.51)$$

*Nous noterons aussi que les résultats démontrés au cours de ce chapitre sont vérifiés pour le cas non symétrique.*

*Les formulations (3.22) et (3.51) sont aussi des formulations augmentées dans le sens où nous avons ajouté le terme*

$$r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u)(\nabla_h \cdot v).$$

*En intégrant par parties, on a*

$$B(v, p) = - \int_{\Omega} v \cdot \nabla_h p + \int_{F_h} [p]_N \{v\}.$$

*En posant  $r = 0$  et en intégrant  $B$  par parties, la formulation proposée ici coïncide avec celle en [37].*

#### 3.4.1 Les paramètres de stabilisation

On définit maintenant les paramètres de stabilisation en fonction de la taille des mailles, ceci conduira à des constantes de continuité, de coercivité et de

condition inf–sup indépendantes de cette quantité. On suppose que l'on dispose d'une partition du domaine en éléments ayant des tailles différentes, pour cela commençons par introduire le paramètre  $h \in L^\infty(F_h)$  relié à la taille locale des mailles comme suit

$$h = h(x) := \begin{cases} \min(h_K, h_{K'}) & \text{si } x \in \partial K \cap \partial K' \text{ , } K, K' \in \Pi_h; \\ h_K & \text{si } x \in \partial K \cap \Gamma \text{ , } K \in \Pi_h. \end{cases}$$

Soit  $\kappa$  une constante strictement positive et définissons les paramètres de stabilisation  $\sigma_a$  et  $\sigma_c$  comme suit

$$\sigma_a := \kappa h^{-1} \in L^\infty(F_h) \quad \text{et} \quad \sigma_c := \frac{1}{\sigma_a}. \quad (3.52)$$

### 3.5 Propriétés des formes bilinéaires

On commence par définir des normes sur les espaces  $\mathcal{V}(h)$  et  $\mathcal{Q}(h)$ .

Pour  $u \in \mathcal{V}(h)$  on pose

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 := & \|\nabla_h \times u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_N\|_{0,F_h^I}^2 + r\|\nabla_h \cdot u\|_{0,\Omega}^2 \\ & + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0,F_h}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla \times u\} \right\|_{0,F_h}^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Pour  $p \in \mathcal{Q}(h)$  on pose

$$\|p\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 := \|p\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_c}[p]\|_{0,F_h}^2 + \|\sqrt{\sigma_c}\{p\}\|_{0,F_h}^2. \quad (3.54)$$

Dans la proposition suivante, on montre que les quantités définies par (3.53) et (3.54) sont des normes sur  $\mathcal{V}(h)$  et  $\mathcal{Q}(h)$  respectivement.

**Proposition 3.5.1** *Les quantités définies par (3.54) et (3.53) définissent des normes sur  $\mathcal{V}(h)$  et  $\mathcal{Q}(h)$  respectivement.*

**Démonstration :** Il est clair que la quantité (3.54) définit une norme sur  $\mathcal{Q}(h)$ . Pour montrer que la quantité définie par (3.53) définit une norme sur  $\mathcal{V}(h)$ , il suffit de montrer que si  $v \in \mathcal{V}(h)$  est telle que  $\|v\|_{\mathcal{V}(h)} = 0$  alors  $v = 0$ , quant aux deux autres propriétés d'une norme, elles sont évidemment vérifiées. Soit  $v \in \mathcal{V}(h)$  telle que  $\|v\|_{\mathcal{V}(h)} = 0$ . Par définition de la norme on a :

$$\nabla \times v = 0 \quad \text{sur } K \quad \forall K \in \Pi_h$$

et

$$[v]_T = 0 \quad \text{sur } F_h.$$

Ceci implique que  $v \in H_0(\nabla \times 0, \Omega)$  et donc  $v$  peut s'écrire sous la forme  $v = \nabla \varphi$  avec  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  ( voir [35] ). On a aussi

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{sur } K \quad \forall K \in \Pi_h$$

et

$$[v]_N = 0 \quad \text{sur } F_h^I.$$

Il résulte que  $v \in H(\nabla \cdot 0, \Omega)$ . Ainsi  $\varphi$  est l'unique solution de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ceci implique que  $\varphi$  est identiquement nulle sur  $\Omega$  et par suite  $v$  l'est aussi, et donc  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(h)}$  définit bien une norme sur  $\mathcal{V}(h)$ .

**Remarque 3.5.1** *Si nous avons introduit les hypothèses*

$$r \geq 1 \quad \text{et} \quad \kappa \geq 1,$$

*nous aurions pu utiliser la première inégalité du chapitre 1 qui implique*

$$\|u\|_{0,\Omega}^2 \leq C(\|\nabla_h \times u\|_{0,\Omega}^2 + r\|\nabla_h \cdot u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_N\|_{0,F_h^I}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0,F_h}^2) \\ \forall r \geq 1, \quad \forall \kappa \geq 1.$$

*et donc  $u$  est identiquement nul dès que  $u \in H_0(\nabla \times 0, \Omega) \cap H(\nabla \cdot 0, \Omega)$ .*

Afin d'appliquer les théorèmes classiques pour les problèmes de type point selle perturbé pour déduire l'existence et l'unicité de la solution associée à la formulation (3.22), on est amené à étudier les propriétés des formes bilinéaires introduites dans la section 3.2.3.

Dans la suite, on va montrer la continuité des formes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur leur domaine de définition, mais il n'est pas évident de vérifier la coercivité de  $A$  sur le noyau de  $B$ . La difficulté se pose au niveau de l'estimation de  $\|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times u\}\|_{0,F_h}$  lorsque  $u$  est un élément de  $\mathcal{V}(h)$ .

Si la quantité  $\|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times u\}\|_{0,F_h}$  est éliminée de la définition de la norme, alors c'est la démonstration de la continuité de  $A$  qui pose problème.

Par contre, grâce à une inégalité inverse valable uniquement sur les espaces discrets, on va pouvoir montrer l'existence et l'unicité de solution discrète ainsi que la coercivité de  $A$  sur les espaces discrets.

**Remarque 3.5.2** *Le problème de coercivité est aussi rencontré pour les formulations DG associées au problème de Poisson lorsqu'on considère la norme proposée par Baumann et al. [10, 46], par Baker et Karakashian [8] et demeure une question ouverte [49].*

Commençons par montrer l'existence et l'unicité de solution discrète.

### 3.5.1 Existence et unicité de solution discrète

On étudie maintenant l'existence et l'unicité de la solution discrète associée à la formulation (3.50) ainsi que la consistance de cette formulation.

On a la proposition suivante.

**Proposition 3.5.2** *Soient  $\sigma_a$  et  $\sigma_c$  les paramètres de stabilisation définis par (3.52) alors il existe  $\kappa_0 > 0$  telle que pour tout  $\kappa > \kappa_0$ , la formulation (3.50) est consistante et admet une et une seule solution discrète.*

**Démonstration** On commence par montrer l'existence et l'unicité de la solution discrète associée à la formulation (3.50). Dès qu'il s'agit d'un problème linéaire en dimension finie, pour montrer l'existence et l'unicité de solution, il suffit de montrer que si  $J = 0$  alors  $(u^h, p^h) = (0, 0)$ .

Prenons  $v = u^h$  et  $\psi = p^h$  dans les deux équations de (3.50) on obtient après soustraction

$$A(u^h, u^h) + C(p^h, p^h) = 0. \quad (3.55)$$

Soit par définition de  $A$  et  $C$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla_h \times u^h)^2 + \int_{F_h} \sigma_a [u^h]_T^2 + r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u^h)^2 \\ - 2J(u^h, u^h) + \int_{F_h^I} \sigma_a [u^h]_N^2 + \int_{F_h} \sigma_c [p^h]^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Notons que par définition du terme de pénalisation  $J(u, v)$  et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$2J(u^h, u^h) \leq 2\epsilon \int_{F_h} \sigma_a [u^h]_T^2 + \frac{2}{\epsilon} \int_{F_h} \frac{1}{\sigma_a} |\{\nabla_h \times u^h\}|^2. \quad (3.57)$$

En utilisant la définition du paramètre de stabilisation  $\sigma_a$ , l'inégalité inverse suivante (voir [57] pour la démonstration en deux dimension et [36] pour la démonstration en trois dimension.)

$$\|q\|_{0,\partial K}^2 \leq C \frac{1}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 \quad \forall q \in P_k(K) \quad (3.58)$$

et le fait que  $\nabla \times \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h$ , on peut écrire

$$\int_{F_h} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla_h \times v\} \right|^2 \leq \frac{C}{\kappa} \int_{\Omega} |\nabla_h \times v|^2 \quad \forall v \in \mathcal{V}_h. \quad (3.59)$$

Il résulte que

$$A(u^h, u^h) + C(p^h, p^h) \geq (1 - \frac{2C}{\epsilon\kappa}) \int_{\Omega} (\nabla_h \times u^h)^2 + r \int_{\Omega} (\nabla_h \cdot u^h)^2 \\ + (1 - 2\epsilon)C \int_{F_h} \sigma_a [u^h]_T^2 + \int_{F_h^I} \sigma_a [u^h]_N^2 + \int_{F_h} \sigma_c [p^h]^2. \quad (3.60)$$

Maintenant si  $\epsilon$  est choisi de façon que  $2\frac{C}{\epsilon\kappa} < \epsilon < \frac{1}{2}$  (un tel choix est possible si  $\kappa > \kappa_0 := \frac{1}{2C}$ ) et si  $A(u^h, u^h) + C(p^h, p^h) = 0$ , alors tous les termes figurant dans l'équation (3.60) sont identiquement nuls. Soit

$$\begin{aligned} \nabla \times u^h &= 0 \text{ dans } \Omega, \quad [u^h]_T = 0 \text{ sur } F_h, \\ \nabla \cdot u^h &= 0 \text{ dans } \Omega, \quad [u^h]_N = 0 \text{ sur } F_h^I \end{aligned} \quad (3.61)$$

et

$$[p^h] = 0 \text{ sur } F_h. \quad (3.62)$$

On déduit de (3.61) et du fait que  $u^h \in \mathcal{V}_h$ , que  $u^h$  est telle que

$$u^h \in H_0(\nabla \times 0, \Omega), \quad (3.63)$$

$$u^h \in H(\nabla \cdot 0, \Omega). \quad (3.64)$$

Ceci implique que  $\|u^h\|_{\mathcal{V}(h)} = 0$  et par suite  $u^h$  est nul partout dans  $\Omega$ . On déduit aussi de (3.62) que  $p^h \in H_0^1(\Omega)$ . Ainsi les sauts à travers les interfaces de  $\Omega$  disparaissent et la deuxième équation de (3.50) implique après une intégration par parties

$$- \int_{\Omega} v \cdot \nabla p^h = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_h. \quad (3.65)$$

Il résulte de l'équation précédente et du fait que  $p^h \in H_0^1(\Omega)$  que  $p^h$  est nul sur  $\Omega$ .

-La consistance de la formulation est déjà démontrée grâce au théorème 3.3.1.

### 3.5.2 Continuité

On étudie dans cette section la continuité des formes bilinéaires  $A$  sur  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{V}(h)$ ,  $B$  sur  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  et  $C$  sur  $\mathcal{Q}(h) \times \mathcal{Q}(h)$ .

On a la proposition suivante.

**Proposition 3.5.3** *Les formes bilinéaires  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont continues respectivement sur  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{V}(h)$ ,  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  et  $\mathcal{Q}(h) \times \mathcal{Q}(h)$  et il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $h$  et vérifiant*

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq C \|u\|_{\mathcal{V}(h)} \|v\|_{\mathcal{V}(h)} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}(h), \\ |B(u, \psi)| &\leq C \|u\|_{\mathcal{V}(h)} \|\psi\|_{\mathcal{Q}(h)} \quad \forall u \in \mathcal{V}(h), \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}(h), \\ |C(p, q)| &\leq C \|p\|_{\mathcal{Q}(h)} \|q\|_{\mathcal{Q}(h)} \quad \forall p, q \in \mathcal{Q}(h). \end{aligned} \quad (3.66)$$

**Démonstration :** La démonstration résulte facilement de la définition des formes bilinéaires, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la définition des normes. On montre la continuité de la forme bilinéaire  $A$ , pour les formes bilinéaires  $B$  et  $C$  le raisonnement est identique.

Soit  $u, v \in \mathcal{V}(h)$ , il est clair par définition de  $A$  et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq C \left\{ \|\nabla_h \times u\|_{0,\Omega} \|\nabla_h \times v\|_{0,\Omega} + r \|\nabla_h \cdot u\|_{0,\Omega} \|\nabla_h \cdot v\|_{0,\Omega} \right. \\ &\quad + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0,F_h} \|\sqrt{\sigma_a}[v]_T\|_{0,F_h} \\ &\quad + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_N\|_{0,F_h^I} \|\sqrt{\sigma_a}[v]_N\|_{0,F_h^I} \\ &\quad + \|\sqrt{\sigma_a}[v]_T\|_{0,F_h} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times u\}\|_{0,F_h} \\ &\quad \left. + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0,F_h} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times v\}\|_{0,F_h} \right\}. \end{aligned}$$

Une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète conduit à

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq C \left\{ \|\nabla_h \times u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0,F_h}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_N\|_{0,F_h^I}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r} \|\nabla_h \cdot u\|_{0,\Omega}^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times u\}\|_{0,F_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \|\nabla_h \times v\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[v]_T\|_{0,F_h}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[v]_N\|_{0,F_h^I}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r} \|\nabla_h \cdot v\|_{0,\Omega}^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{\nabla_h \times v\}\|_{0,F_h}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{V}(h)} \|v\|_{\mathcal{V}(h)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique la continuité de  $A$  sur  $\mathcal{V}(h) \times \mathcal{V}(h)$ .

### 3.5.3 Coercivité de $A$

On sait que si  $A$  est coercive sur le noyau de  $B$  alors on peut établir des résultats de convergence. Neanmoins, on montre ici que  $A$  est coercive sur

$\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ , où  $\mathcal{V}_h$  est l'espace introduit en (3.49)

On a la proposition suivante.

**Proposition 3.5.4** *Soit  $\sigma_a$  le paramètre de stabilisation défini par (3.52). Alors il existe  $\kappa_0 > 0$  telle que si  $\kappa \geq \kappa_0$  on a*

$$A(u, u) \geq \alpha_0 \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 \quad \forall u \in \mathcal{V}_h \quad (3.67)$$

avec  $\alpha_0$  une constante positive indépendante de  $h$ .

**Démonstration :** Notons d'abord que par définition de la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}(h)}$  et la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  on a

$$\|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 = a(u, u) + \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla_h \times u\} \right\|_{0, F_h}^2. \quad (3.68)$$

Il résulte par définition de  $A$  que pour tout paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} A(u, u) - \alpha \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 &= (1 - \alpha)a(u, u) - 2J(u, u) \\ &\quad - \alpha \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla_h \times u\} \right\|_{0, F_h}^2. \end{aligned} \quad (3.69)$$

En utilisant l'inégalité inverse (3.58), on aura

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla_h \times u\} \right\|_{0, F_h}^2 \leq \frac{C}{\kappa} \|\nabla_h \times u\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall u \in \mathcal{V}_h. \quad (3.70)$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} &A(u, u) - \alpha \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 \\ &\geq (1 - \alpha)a(u, u) - 2J(u, u) - \alpha \frac{C}{\kappa} \|\nabla_h \times u\|_{0, \Omega}^2 \\ &= (1 - \alpha - \alpha C) \left[ \|\nabla_h \times u\|_{0, \Omega}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0, F_h}^2 + \|\sqrt{\sigma_a}[u]_N\|_{0, F_h^I}^2 + r \|\nabla_h \cdot u\|_{0, \Omega}^2 \right] \\ &\quad - 2J(u, u) - \alpha \frac{C}{\kappa} \|\nabla_h \times u\|_{0, \Omega}^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

En utilisant les inégalités (3.57), (3.70) et si  $\alpha$  est choisi de façon que

$$1 - \alpha > 0,$$

on aura

$$\begin{aligned} A(u, u) - \alpha \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 &\geq (1 - \alpha - \frac{2C}{\epsilon\kappa}) \|\nabla_h \times u\|_{0, \Omega}^2 \\ &\quad + (1 - \alpha - \alpha C - 2\epsilon) C \|\sqrt{\sigma_a}[u]_T\|_{0, F_h}^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$



Il suffit alors de trouver  $\alpha > 0$  vérifiant à la fois

$$1 - \alpha > 0, \quad 1 - \alpha - \frac{2C}{\epsilon\kappa} > 0 \quad \text{et} \quad 1 - \alpha - \alpha C - 2\epsilon > 0. \quad (3.73)$$

La première inéquation est satisfaite dès que la deuxième est vérifiée. La troisième inéquation est satisfaite si

$$0 < \alpha \leq \frac{1 - 2\epsilon}{1 + C}, \quad (3.74)$$

ce qui implique

$$\epsilon < \frac{1}{2}. \quad (3.75)$$

D'autre part, la deuxième inégalité est satisfaite si

$$0 < \alpha \leq 1 - 2C/\epsilon\kappa \leq 1 - C/\kappa. \quad (3.76)$$

Et donc si la quantité  $1 - \frac{C}{\kappa}$  est strictement positive, soit  $\kappa > \kappa_0$  avec  $\kappa_0 > C$ , on peut trouver  $\alpha_0 > 0$  vérifiant

$$A(u, u) - \alpha_0 \|u\|_{\mathcal{V}(h)}^2 \geq 0 \quad (3.77)$$

et la coercivité de  $A$  se déduit immédiatement.

### 3.5.4 Condition inf-sup

Le but de cette section est de montrer que la forme bilinéaire  $B$  vérifie une condition inf-sup. On remarque d'abord que par définition des normes (3.54) et en utilisant l'inégalité inverse (3.58), on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \|q\|_{0,\Omega}^2 &\geq \frac{1}{3}\|q\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{3}\|q\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{3}\|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \frac{1}{3}\|q\|_{0,\Omega}^2 + C\left\|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}[q]\right\|_{0,F_h}^2 + C\left\|\frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\{q\}\right\|_{0,F_h}^2 \\ &\geq C\|q\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Pour montrer la condition inf-sup, on utilise les résultats suivants :

Si  $k \in \{1, 2\}$ , on a la proposition suivante

**Proposition 3.5.5** *Si  $\widetilde{\mathcal{V}}_h$  dénote l'espace*

$$\widetilde{\mathcal{V}}_h := \{v_h \in \mathcal{V}_h : \forall f \subset F_h, \int_f q_h \cdot [v_h] = 0 \quad \forall q_h \in P_{k-1}(f)^3\},$$

alors il existe un opérateur  $\mathbf{R}_h : H^1(\Omega)^3 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_h$  continu et telle que :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \forall q_h \in P_{k-1}(K), \quad \int_K q_h \nabla \cdot (\mathbf{R}_h(v) - v) &= 0, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \forall e \subset F_h, \quad \forall q_h \in P_{k-1}(e)^3, \quad \int_e q_h \cdot [\mathbf{R}_h(v)] &= 0, \\ \forall v \in W^{s,t}(\Omega)^3, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall s \in [1, k+1], \quad \forall m \in \{0, 1\}, \\ |v - \mathbf{R}_h(v)|_{W^{m,t}(K)} &\leq Ch^{s-m} |v|_{W^{s,t}(\Delta_K)} \end{aligned}$$

où  $\Delta_K$  sont des macro-éléments contenant  $K$ .

**Démonstration :** Il s'agit de l'opérateur de M. Fortin ( voir [26] pour la démonstration en deux dimensions et [27] pour la démonstration en trois dimensions ).

Si  $k \geq 3$ , on a la proposition suivante [34].

**Proposition 3.5.6** *Il existe un opérateur d'interpolation  $\widetilde{\mathbf{R}}_h : H_0^1(\Omega)^3 \longrightarrow \mathcal{V}_h \cap H_0^1(\Omega)^3$  continu et vérifiant*

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega)^3, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{R}}_h(v) - v) &= 0, \\ \forall v \in W^{s,p}(\Omega)^3, \quad \forall T \in \Pi_h, \\ |\widetilde{\mathbf{R}}_h(v) - v|_{W^{m,q}(T)} &\leq Ch^{s-m+3(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} |v|_{W^{s,p}(\Delta_T)} \\ \forall s \in [1, k+1], \quad \forall 1 \leq p, q \leq \infty, \quad \forall m \in \{0, 1\} \text{ vérifiant } W^{s,p}(\Omega) &\subset W^{m,q}(\Omega). \end{aligned}$$

Pour montrer la condition inf-sup, on se sert aussi du résultat suivant dû à [17].

**Proposition 3.5.7** *Pour toute face  $f \subset \Gamma$ , il existe une fonction  $\rho_h$  vérifiant  $\rho_h|_{\Gamma}$  est à support compact dans  $f$  et telle que la fonction*

$$\vec{\rho}_h := \rho_h \vec{n}_f \in Y_h := \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tq } q_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \Pi_h\}^3 \cap H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega).$$

et vérifie

$$\int_f \rho_h = \int_f \vec{\rho}_h \cdot \vec{n}_f = 1 \quad ; \quad |\rho_h|_{1,\Omega} \leq K_2$$

où  $K_2$  est une constante positive indépendante de  $h$  et  $\vec{n}_f$  est la restriction de  $n$  : la normale sortante en  $\Gamma$  à  $f$ . i.e.  $\vec{n}_f = n|_f$ .

**Démonstration :** Si  $\Pi_{\frac{h}{2}}$  est la partition de  $\Omega$  déduite de  $\Pi_h$  en considérant le raffinement standard suivant. On appelle  $T$  un tétraèdre générique de  $\Pi_h$ ,  $T$  est divisé en huit sous tétraèdres  $(T_i)_{i=1,8}$  dont les sommets sont les milieux des six arêtes de  $T$  et le volume est  $\frac{1}{8}$  ième du volume de  $T$ . Alors en [17] on montre que  $\rho_h$  existe et  $\rho_h \in Y_{\frac{h}{2}}$ . Notre proposition se déduit juste après un changement d'échelle.

On peut maintenant montrer la condition inf-sup pour la forme bilinéaire  $B$  donnée par (3.25). On a

**Proposition 3.5.8** *La forme bilinéaire  $B$  vérifie la condition*

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in \mathcal{V}_h \setminus \{0\}} \frac{B(v, q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}(h)} \|v\|_{\mathcal{V}(h)}} \geq \beta > 0 \quad (3.79)$$

où  $\beta$  est indépendante de  $h$ .

**Démonstration :** On s'inspire de la démonstration d'une condition inf-sup pour une formulation de Galerkin discontinue pour le problème de Stokes (voir [33]). Fixons  $q_h \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\}$ , il s'agit de trouver  $v_h \in \mathcal{V}_h \setminus \{0\}$  et une constante positive  $C$  indépendante de  $h$  vérifiant

$$B(v_h, q_h) \geq C \|q_h\|_{\mathcal{Q}(h)} \|v_h\|_{\mathcal{V}(h)}. \quad (3.80)$$

On distingue les cas

- Premier cas  $k \geq 3$ .

On décompose  $q_h$  sous la forme

$$q_h = \tilde{q}_h + \bar{q}_h \quad \text{avec} \quad \tilde{q}_h = q_h - \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} q_h. \quad (3.81)$$

Comme  $\tilde{q}_h \in L_0^2(\Omega)$ , donc ( voir [35]) il existe  $v_h \in H_0^1(\Omega)^3$  qui vérifie

$$\nabla \cdot v_h = \tilde{q}_h \quad \text{et} \quad \|v_h\|_{1,\Omega} \leq C \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.82)$$

Posons  $\tilde{v}_h = \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{h}}(v_h)$  avec  $\widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{h}}$  est l'opérateur d'interpolation donnée par la proposition 3.5.6. On cherche  $v_h$  sous la forme

$$v_h = \alpha \tilde{v}_h + \bar{v}_h \quad \text{et} \quad \bar{v}_h = \bar{q}_h \vec{\rho}_h \quad (3.83)$$

où  $\vec{\rho}_h$  est donnée par la proposition 3.5.7 et  $\alpha$  une constante positive à choisir. On a

$$\begin{aligned} B(v_h, q_h) &= B(\tilde{v}_h + \bar{v}_h, \tilde{q}_h + \bar{q}_h) \\ &= B(\tilde{v}_h, \tilde{q}_h) + B(\tilde{v}_h, \bar{q}_h) + B(\bar{v}_h, \tilde{q}_h) + B(\bar{v}_h, \bar{q}_h). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Comme  $\tilde{v}_h \in H_0^1(\Omega)^3$  et  $\bar{q}_h \in \mathbb{R}$ , on aura après une intégration par parties

$$B(\tilde{v}_h, \bar{q}_h) = 0. \quad (3.85)$$

On a aussi après une intégration par parties et en utilisant la proposition 3.5.7

$$B(\bar{v}_h, \bar{q}_h) = \bar{q}_h^2 \int_f \rho_h \vec{n}_f \cdot \vec{n}_f = \bar{q}_h^2. \quad (3.86)$$

Par définition de  $\bar{v}_h$ , on obtient

$$B(\bar{v}_h, \tilde{q}_h) = \int_{\Omega} \tilde{q}_h \bar{q}_h \nabla \cdot \vec{\rho}_h \leq K_2 \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.87)$$

En utilisant (3.82) et la proposition 3.5.6, on a

$$B(\tilde{v}_h, \tilde{q}_h) = \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} B(v_h, q_h) &\geq \alpha \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 - \frac{K_2}{\text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} \\ &\geq \alpha \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2\epsilon} \frac{K_2^2}{\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad - \frac{\epsilon}{2} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall \epsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Si, par exemple, on prend  $\epsilon = \alpha = K_2^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} B(v_h, q_h) &\geq \alpha \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \frac{K_2^2}{2} \|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2\text{mes}(\Omega)} \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq C \|q\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq C \|q\|_{\mathcal{Q}(h)}^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

La condition inf-sup se déduit car

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{\mathcal{V}(h)} &\leq C \|v_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq C (\|\tilde{v}_h\|_{1,\Omega} + \|\bar{v}_h\|_{1,\Omega}) \\ &\leq C (\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} + \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega} \|\rho_h\|_{1,\Omega}) \\ &\leq C (\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} + \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}) \\ &\leq C (\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega} + \|\bar{q}_h\|_{0,\Omega}) \\ &\leq C \|q_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|q_h\|_{\mathcal{Q}(h)}. \end{aligned}$$

- Deuxième cas  $k \in \{1, 2\}$ , soit  $q_h \in \mathcal{Q}_h$  alors il est bien connu qu'il existe  $\tilde{v}_h \in H^1(\Omega)^3$  vérifiant

$$\nabla \cdot \tilde{v}_h = q_h \quad \text{et} \quad \|\tilde{v}_h\|_{1,\Omega} \leq C \|q_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.90)$$

On pose  $v_h = \mathbf{R}_h(\tilde{v}_h)$  où  $\mathbf{R}_h$  est l'opérateur donné par la proposition 3.5.5. On a

$$B(v_h, q_h) = \sum_{K \in \Pi_h} \int_K q_h \nabla \cdot \mathbf{R}_h(\tilde{v}_h) = \sum_{K \in \Pi_h} \int_K q_h \nabla \cdot \tilde{v}_h = \|q_h\|_{0,\Omega}^2 \geq C \|q_h\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 \quad (3.91)$$

Étant donné que  $\mathbf{R}_h$  est continu, on a

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{\mathcal{V}(h)} &= \|\mathbf{R}_h(\tilde{v}_h)\|_{\mathcal{V}(h)} \\ &\leq C \|\tilde{v}_h\|_{1,\Omega} \\ &\leq C \|q_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq C \|q_h\|_{\mathcal{Q}(h)} \end{aligned}$$

et la condition inf-sup se déduit.

### 3.6 Estimation d'énergie

Dans cette section on calcule des estimations d'erreurs par la méthode d'énergie. On rappelle que  $(u, p)$  dénote la solution exacte de (3.2) et  $(u^h, p^h)$  désigne la solution discrète de la formulation (3.50). Soit  $z_u$  un interpolant associé à  $u$  et  $z_p$  un interpolant associé à  $p$ . On note par

$$e := u - u^h, \quad e' := p - p^h$$

et on décompose  $e, e'$  comme suit :

$$\begin{aligned} e &= \eta - \xi \quad \text{avec} \quad \xi := u^h - z_u \quad \text{et} \quad \eta := u - z_u \\ e' &= \eta' - \xi' \quad \text{avec} \quad \xi' := p^h - z_p \quad \text{et} \quad \eta' := p - z_p. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Par l'inégalité triangulaire on obtient

$$\|e\|_{\mathcal{V}(h)} + \|e'\|_{\mathcal{Q}(h)} \leq \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} + \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)}. \quad (3.93)$$

Dans ce qui suit on va montrer que

$$\|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)} \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]. \quad (3.94)$$

**Remarque 3.6.1** *Dès que la forme bilinéaire  $C$  est positive, on peut écrire*

$$C(p, q) \leq C(p, p)^{\frac{1}{2}} C(q, q)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.95)$$

*En effet, le polynôme  $P(t) := C(p + tq, p + tq)$  vérifie  $P(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .*

*On déduit aussi par continuité de  $C$  qu'il existe une constante positive  $M$  indépendante de  $h$  vérifiant*

$$C(p, q) \leq MC(p, p)^{\frac{1}{2}} \|q\|_{\mathcal{Q}(h)} \quad \forall p, q \in \mathcal{Q}(h). \quad (3.96)$$

En utilisant le caractère consistant de la formulation (3.50) et que  $(u^h, p^h)$  est solution de (3.50), on remarque que les erreurs  $e$  et  $e'$  vérifient

$$\begin{cases} A(e, v) + B(v, e') = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_h, \\ B(e, \psi) - C(e', q) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (3.97)$$

On déduit alors que  $\xi$  et  $\xi'$  vérifient le système d'équations de point selle perturbé suivant

$$\begin{cases} A(\xi, v) + B(v, \xi') = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_h, \\ B(\xi, \psi) - C(\xi', q) = g(\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{Q}_h \end{cases} \quad (3.98)$$

où  $L$  et  $g$  sont les applications linéaires définies respectivement sur  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$  par

$$L(v) = A(\eta, v) + B(v, \eta') \quad \text{et} \quad g(\psi) = B(\eta, \psi) - C(\eta', \psi). \quad (3.99)$$

Par application de la condition inf–sup donnée à la proposition 3.5.8, on obtient,

$$\begin{aligned} \beta \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 &\leq \sup_{v \in \mathcal{V}_h \setminus \{0\}} \frac{B(v, \xi')}{\|v\|_{\mathcal{V}(h)}} \\ &\leq \sup_{v \in \mathcal{V}_h \setminus \{0\}} \frac{A(\xi, v) - L(v)}{\|v\|_{\mathcal{V}(h)}}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

En utilisant la définition de  $L$  et la continuité des formes bilinéaires introduites dans l'inégalité précédente, en particulier la proposition 3.5.2, on aboutit à

$$\beta \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 \leq C [\|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]. \quad (3.101)$$

Il s'agit maintenant d'estimer  $\|\xi\|_{\mathcal{V}(h)}$ . Notons qu'on peut décomposer  $\mathcal{V}_h$  de la façon suivante

$$\mathcal{V}_h = \text{Ker} B \oplus (\text{Ker} B)^\perp, \quad (3.102)$$

on peut écrire

$$\xi = \xi^c + \xi^{c\perp} \quad \text{avec} \quad \xi^c \in \text{Ker} B, \xi^{c\perp} \in (\text{Ker} B)^\perp. \quad (3.103)$$

De nouveau la condition inf-sup de la proposition 3.5.8 implique

$$\begin{aligned} \beta \|\xi^{c\perp}\|_{\mathcal{V}(h)} &\leq \sup_{q \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\}} \frac{B(\xi^{c\perp}, q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}(h)}} \\ &\leq \sup_{q \in \mathcal{Q}_h \setminus \{0\}} \frac{C(\xi', q) - g(q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}(h)}}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

En utilisant la définition de  $g$ , on obtient

$$\beta \|\xi^{c\perp}\|_{\mathcal{V}(h)} \leq C \left[ C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right]. \quad (3.105)$$

D'autre part, en utilisant la coercivité de  $A$  sur le noyau de  $B$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|\xi^c\|_{\mathcal{V}(h)} &\leq \sup_{v_0 \in \text{Ker} B} \frac{A(\xi, v_0)}{\|v_0\|_{\mathcal{V}(h)}} \\ &= \sup_{v_0 \in \text{Ker} B} \frac{(\xi, v_0) - A(\xi^{c\perp}, v_0)}{\|v_0\|_{\mathcal{V}(h)}} \\ &\leq C \left[ \|\xi^{c\perp}\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right] \\ &\leq C \left[ C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Il résulte que

$$\|\xi^c\|_{\mathcal{V}(h)} \leq C \left[ C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right]. \quad (3.107)$$

Considérons maintenant  $v = \xi$  et  $\psi = \xi'$ , on obtient après soustraction des équations de (3.98)

$$A(\xi, \xi) + C(\xi', \xi') = L(\xi) - g(\xi'). \quad (3.108)$$

Par définition de  $L$ ,  $g$  et en utilisant la continuité on a

$$A(\xi, \xi) + C(\xi', \xi') \leq C \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right] \left[ \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right]. \quad (3.109)$$

En utilisant l'estimation de  $\|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)}$  donnée par (3.105), on obtient

$$\begin{aligned} &A(\xi, \xi) + C(\xi', \xi') \\ &\leq C \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right] \left[ \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} + \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} \right] \\ &\leq C \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right] \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} + \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} \right] \\ &\leq C \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right] C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} + C \left[ \|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Il résulte que

$$C(\xi', \xi') \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}] C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} + C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]^2 \quad (3.111)$$

En particulier,

$$C(\xi', \xi')^{\frac{1}{2}} \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]. \quad (3.112)$$

On déduit alors que

$$\|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}] \quad (3.113)$$

et par suite en utilisant (3.105), on voit que

$$\|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)} \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]. \quad (3.114)$$

En particulier

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)} &\leq \|\xi\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\xi'\|_{\mathcal{Q}(h)} \\ &\leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

On conclut alors que

$$\|e\|_{\mathcal{V}(h)} + \|e'\|_{\mathcal{Q}(h)} \leq C [\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}] \quad (3.116)$$

et donc il s'agit d'estimer  $\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}$  par la théorie des polynômes d'interpolation. Dans cet ordre, on dresse les résultat d'interpolation suivant.

**Proposition 3.6.1** *Soit  $K \in \Pi_h$  et on suppose que  $u \in H^{t_K}(K)$ ,  $t_K \geq 0$ , alors il existe une suite de polynôme  $\pi^{h_K} \in P_k(K)$ , vérifiant*

$$\|u - \pi^{h_K}(u)\|_{q,K} \leq Ch_K^{\min(k+1, t_K) - q} \|u\|_{t_K, K} \quad \forall 0 \leq q \leq t_K. \quad (3.117)$$

Si de plus  $t_K \geq 1$ , alors

$$\|u - \pi^{h_K}(u)\|_{0, \partial K} \leq Ch_K^{\min(k+1, t_K) - \frac{1}{2}} \|u\|_{t_K, K}. \quad (3.118)$$

La constante  $C$  est indépendante de  $u$ ,  $h_K$  mais dépend de  $k$ , la constante de régularité du maillage et de  $t = \max_{K \in \Pi_h} t_K$ .

**Démonstration :** l'assertion (3.117) a été démontré en [7] pour les espaces en deux dimensions. Pour les espaces en trois dimensions, la démonstration est analogue [36]. L'assertion (3.118) est démontré en [48].

Afin d'interpoler les fonctions vectorielles, on note par  $\pi^h$  l'opérateur défini sur chaque élément de la partition de  $\Omega$  par  $\pi^h(u)|_K = \pi^{h_K}(u|_K)$  et par  $\mathbf{\Pi}^h$  l'opérateur défini par  $\mathbf{\Pi}^h(u) := (\pi^h(u_1), \pi^h(u_2), \pi^h(u_3))$  si  $u = (u_1, u_2, u_3)$ .

Maintenant, on a le résultat d'approximation suivant.



**Proposition 3.6.2** Soit  $(u^h, p^h)$  la solution discrète de la formulation (3.50), soit  $(u, p)$  la solution exacte de (3.2), supposons que  $u \in H^{t+1}(\Pi_h)^3$ ,  $p \in H^{s-1}(\Pi_h)$ ,  $t \geq 1$ ,  $s \geq 2$ ; alors les erreurs  $e = u - u^h$  et  $e' = p - p^h$  vérifient

$$\|e\|_{\mathcal{V}(h)}^2 + \|e'\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 \leq C [h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, \Pi_h}^2 + h^{2\min(k,s)-2} \|p\|_{s, \Pi_h}^2] \quad (3.119)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $h$ .

**Démonstration :** On a montré que  $\|e\|_{\mathcal{V}(h)} + \|e'\|_{\mathcal{Q}(h)} \leq C(\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)})$ . Il s'agit alors d'estimer  $\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)} + \|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}$ .

Commençons par estimer  $\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)}$ . On a d'abord

$$\|\eta\|_{0, \Omega}^2 = \sum_{K \in \Pi_h} \|\eta\|_{0, K}^2. \quad (3.120)$$

En utilisant la proposition 3.6.2, on déduit que

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{0, \Omega}^2 &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} h^{2\min(k,t)+2} \|u\|_{t+1, K}^2 \\ &\leq C (h^{2\min(k,t)+2} \|u\|_{t+1, \Pi_h}^2). \end{aligned} \quad (3.121)$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla_h \times \eta\|_{0, \Omega}^2 &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, K}^2 \\ &\leq C (h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, \Pi_h}^2). \end{aligned} \quad (3.122)$$

En utilisant la définition du paramètre de stabilisation  $\sigma_a$  et une inégalité des traces, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\nabla_h \times \eta\} \right\|_{0, F_h} &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} \|\nabla \times \eta\|_{0, K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, K}^2 \\ &\leq C h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, \Pi_h}^2. \end{aligned} \quad (3.123)$$

En utilisant la deuxième inégalité de la proposition 3.6.2, on aura

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\sigma_a}[\eta]_N\|_{0, F_h^I}^2 &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1, K}^2 \\ &\leq C h^{2\min(k,t)+2} \|u\|_{t+1, \Pi_h}^2. \end{aligned} \quad (3.124)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}} \{\eta\} \right\|_{0,F_h}^2 &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} \|\eta\|_{1,K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1,K}^2 \\ &\leq Ch^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1,\Pi_h}^2. \end{aligned}$$

On conclut alors que

$$\|\eta\|_{\mathcal{V}(h)}^2 \leq C (h^{2\min(k,t)} \|u\|_{t+1,\Pi_h}^2).$$

Similairement, on obtient

$$\|\eta'\|_{\mathcal{Q}(h)}^2 \leq C (h^{2\min(k-1,s-1)} \|p\|_{s,\Pi_h}^2)$$

et la démonstration de la proposition s'achève.

### 3.7 Résultats numériques

Dans cette section, on donne des résultats numériques permettant de valider les résultats théoriques obtenus précédemment. Dans les tests numériques  $\Omega$  est le cube de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On considère comme intensité de courant

$$J(x, y, z) := \begin{pmatrix} J_1(x, y, z) \\ J_2(x, y, z) \\ J_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1(x, y, z) = & -\exp(yz) \left[ (z^2 - z) (2 + 2z(2y - 1) + z^2(y^2 - y)) \right] \\ & -\exp(yz) \left[ (y^2 - y) (2 + 2y(2z - 1) + y^2(z^2 - z)) \right] \\ & -\exp(xyz) \left[ (2x - 1)(y^2 - y)(z^2 - z) + yz(x^2 - x)(y^2 - y)(z^2 - z) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2(x, y, z) = & -\exp(xz) \left[ (x^2 - x) (2 + 2x(2z - 1) + x^2(z^2 - z)) \right] \\ & -\exp(yz) \left[ (z^2 - z) (2 + 2z(2x - 1) + z^2(x^2 - x)) \right] \\ & -\exp(xyz) \left[ (2y - 1)(x^2 - x)(z^2 - z) + xz(x^2 - x)(y^2 - y)(z^2 - z) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J_3(x, y, z) = & -\exp(xy) \left[ (y^2 - y) (2 + 2y(2x - 1) + y^2(x^2 - x)) \right] \\ & -\exp(yx) \left[ (x^2 - x) (2 + 2x(2y - 1) + x^2(y^2 - y)) \right] \\ & -\exp(xyz) \left[ (2z - 1)(x^2 - x)(y^2 - y) + xy(x^2 - x)(y^2 - y)(z^2 - z) \right]. \end{aligned}$$

La solution exacte  $(u, p)$  correspondante est donnée par :

$$u(x, y, z) = \begin{pmatrix} (y^2 - y)(z^2 - z) \exp(yz) \\ (z^2 - z)(x^2 - x) \exp(xz) \\ (y^2 - y)(x^2 - x) \exp(yx) \end{pmatrix}, \quad (3.125)$$

$$p(x, y, z) = (y^2 - y)(z^2 - z)(x^2 - x) \exp(xyz).$$

Dans la formulation, il apparaît un terme de stabilisation  $\sigma_a$  qui est défini à partir d'un coefficient multiplicateur  $\kappa$ . Celui-ci, comme le dit la proposition 3.5.1, est choisi de façon que la forme bilinéaire  $A$  soit coercive. Cela se traduit numériquement par une matrice définie positive. Donc, il est en général choisi suffisamment grand, mais pas trop grand car dans ce cas, la matrice associée à la forme bilinéaire  $A$  sera mal conditionnée et on ne peut pas aboutir à une convergence du code. On choisit, par exemple,  $\kappa$  égale à 100. Quant au paramètre  $r$  qui apparaît aussi dans la formulation, il suffit de le prendre strictement positif et pas trop grand. Ici, il est pris égal à 1. On détaille maintenant le code de calcul.

- Les algorithmes sont implantés dans un code d'éléments finis 3D et codés en fortran 90. le code est testé sur les machines de l'Université d'Orsay et il se compose essentiellement de

- Première partie : Lecture du maillage.

Il s'agit de construire les tableaux nécessaires à la formation des matrices à partir du maillage du domaine.

- Deuxième partie : Allocation dynamique pour la construction des matrices. Notons qu'il s'agit de matrices creuses, le stockage que nous avons utilisé est le stockage morse **CSR** ( **compressed sparse row** ) [13]. Ainsi on ne stocke que les coefficients des matrices qui sont non nuls.

- Troisième partie : Construction des matrices.

Il s'agit ici de calculer les coefficients des matrices. Soit  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  et  $K$  un tétraèdre quelconque du maillage. Une fonction  $u = (u_1, u_2, u_3)$  définie sur  $K$  sera approchée par les éléments  $(P_2)^3$  de Lagrange

$$u(x) = \sum_{1 \leq i \leq 3} u_i \vec{e}_i \simeq \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 10} c_{ij} \lambda_j(x) \vec{e}_j.$$

La fonction  $p$  sera approchée par les éléments  $P_1$  de Lagrange

$$p(x) \simeq \sum_{1 \leq j \leq 4} p_j \widetilde{\lambda}_j(x).$$

Les fonctions  $\lambda_j(x)$  et  $\widetilde{\lambda_j(x)}$  sont les fonctions de bases de Lagrange. Les coefficients  $c_{ij}$  sont les degrés de liberté de  $u$  et les coefficients  $p_j$  sont ceux de  $p$ .

Les fonctions tests  $\psi$  sont considérées comme les fonctions de base de Lagrange scalaires  $\widetilde{\lambda_j(x)}$  associées aux sommets du tétraèdre. Les fonctions tests  $v$  sont les fonctions vectorielles

$$v(x) = \lambda_p(x)\vec{e}_k; \quad 1 \leq p \leq 10; \quad 1 \leq k \leq 3$$

où  $\lambda_p(x)$  est la fonction de base de Lagrange associée au sommet  $p$  du tétraèdre et  $\vec{e}_k$  est un vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Pour calculer, par exemple

$$\int_{\Omega} (\nabla_h \times u) \cdot (\nabla_h \times v);$$

on calcule les intégrales  $\int_K (\nabla \times (\lambda_i(x)\vec{e}_k)) \cdot (\nabla \times (\lambda_p(x)\vec{e}_j))$  pour tout tétraèdre  $K$ . Ces quantités sont calculées à l'aide des formules de quadratures.

**Calcul des traces :** Pour calculer les sauts, on est amené à calculer des intégrales du type, par exemple

$$\int_T \sigma_a[u]_T[v]_T$$

où  $T$  est un triangle de l'ensemble des faces et ici le calcul dépend de la position de  $T$ . Si  $T$  est une facette extérieure, en utilisant la définition des traces sur les faces extérieures, on écrit

$$\int_T \sigma_a[u]_T[v]_T = \frac{\kappa}{h} \int_T (n \times u)(n \times v).$$

Si  $T$  est une parmi les facettes intérieures, soit  $K_1$  et  $K_2$  les deux tétraèdres telle que  $\partial K_1 \cap \partial K_2 = T$ . Par définition des traces sur les faces intérieures  $\int_T \sigma_a[u]_T[v]_T$  se partage en quatre parties et on est amené à calculer des intégrales de type

$$\int_T \frac{\kappa}{h_K} (n \times u|_{K_i})(n \times v|_{K_j}); \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

• Quatrième partie : résolution du système

Pour la formulation (3.50), le système s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{cases} Au & + & Bp & = & f, \\ B^t u & - & Cp & = & 0. \end{cases}$$

Pour la résolution du système linéaire précédent, nous avons utilisé l'algorithme d'Uzawa [13] qui est aussi l'algorithme du gradient conjugué appliqué à la matrice  $B^t A^{-1} B + C$ . En effet nous avons calculé séparément les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  et étant donné que la matrice  $A$  est inversible, on peut, de la première équation du système éliminer la variable  $u$

$$u = A^{-1}(f - Bp)$$

et on résout le système

$$(B^t A^{-1} B + C)p = B^t A^{-1} f. \quad (3.126)$$

La matrice  $B^t A^{-1} B + C$  est symétrique et définie positive. Ainsi on résout le système (3.126) en utilisant une méthode du gradient conjugué. Les itérations sont stoppées dès que  $\frac{\|(B^t A^{-1} B + C)p - B^t A^{-1} f\|}{\|B^t A^{-1} f\|}$  est plus petit qu'un paramètre petit fixé. D'autre part, nous avons précédemment calculé  $A^{-1}$  en résolvant un système linéaire par une méthode du gradient conjugué.

- Cinquième partie : Calcul de la solution exacte dans le cube et calcul de l'erreur. Comme la solution exacte est connue, on peut calculer l'erreur avec les normes définies par (3.53) et (3.54) et déterminer l'ordre de convergence en  $u$  et  $p$  de la méthode. Dans la suite de ce chapitre, on note par **Nbte** le nombre de tétraèdres qui maillent  $\Omega$  et **Nbdl** le nombre de degrés de liberté associés à la partition correspondante. On a les tableaux d'erreurs suivants :

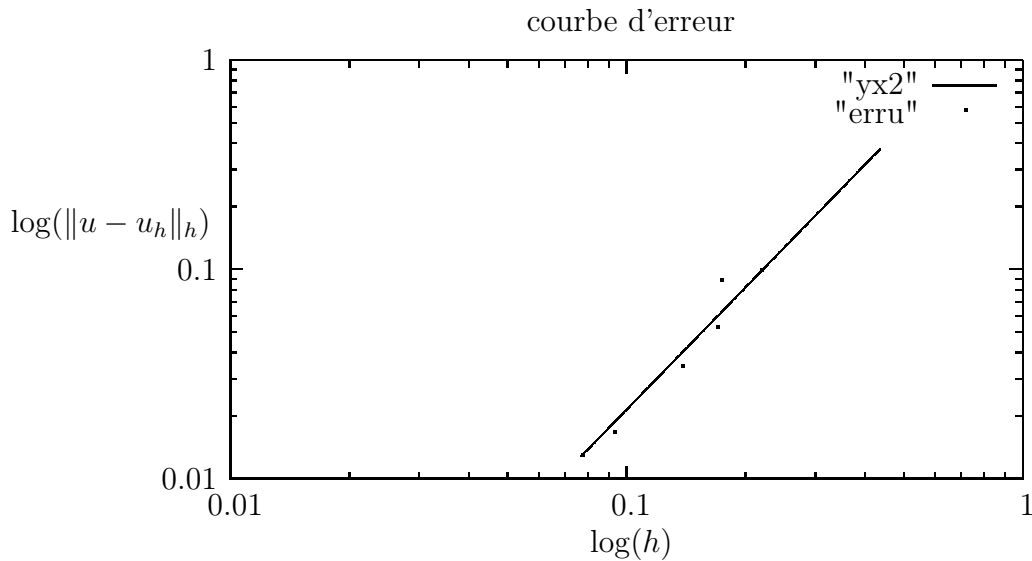
$h$	<b>Nbte</b>	<b>Nbdl</b>	$\ u - u^h\ _{\mathcal{V}(h)}$	$\ p - p^h\ _{\mathcal{Q}(h)}$	$\ \nabla \cdot u^h\ _{0,\Omega}$
0.4367	12	408	0.2556E+00	0.9835E+00	0.1875E-01
0.2184	96	3264	0.9773E-01	0.2894E+00	0.1820E-01
0.1733	192	6528	0.8762E-01	0.2303E+00	0.2658E-01
0.1694	371	12614	0.5237E-01	0.1082E+00	0.1192E-01
0.1379	660	22440	0.3413E-01	0.8491E-01	0.7485E-02
9.26E-02	2631	89454	0.1652E-01	0.5016E-01	0.4248E-02
7.70E-02	4682	159188	0.1277E-01	0.4459E-01	0.3477E-02

TAB. 3.1 – Tableau d'erreurs

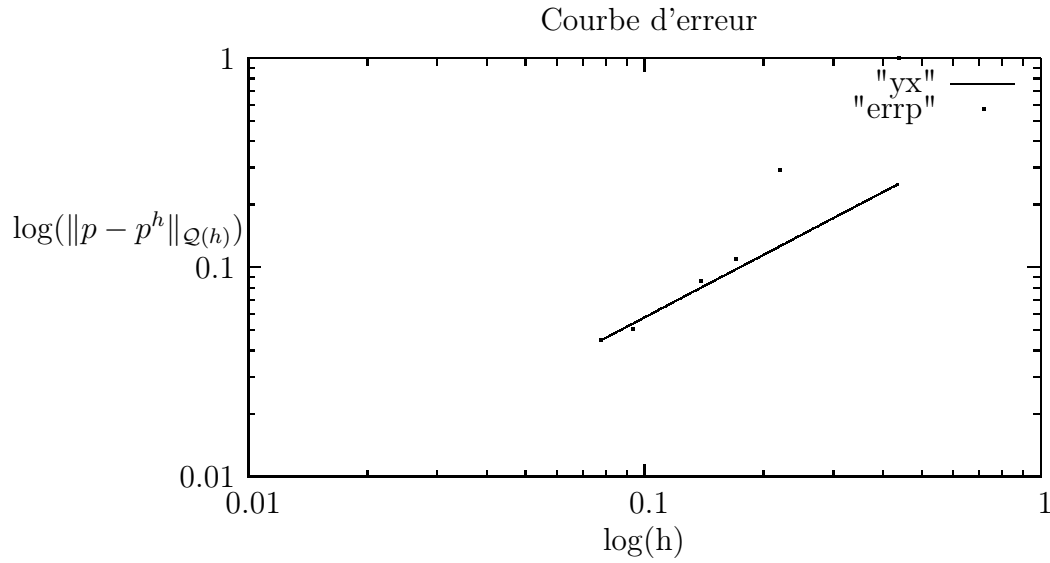
On remarque que les erreurs sont petites sur un maillage grossier et diminuent lorsque  $h$  diminue. On remarque aussi que  $\|\nabla \cdot u^h\|_{0,\Omega}$  est petite pour un maillage fin. On retrouve la solution exacte  $u$  à  $10^{-3}$  près et  $p$  à  $10^{-2}$  près en normes  $L^1(\Omega)$  et  $L^2(\Omega)$ . Cela montre que le code converge bien vers la solution exacte  $(u, p)$  donnée par (3.125). Dans les deux figures suivantes, on construit dans des bases logarithmiques les courbes  $\|u - u^h\|_{\mathcal{V}(h)}$  et  $\|p - p^h\|_{\mathcal{Q}(h)}$  en fonction de  $h$ .

$h$	Nbte	Nbdl	$\ u - u^h\ _{L^1(\Omega)^3}$	$\ p - p^h\ _{L^1(\Omega)}$	$\ u - u^h\ _{L^2(\Omega)^3}$	$\ p - p^h\ _{L^2(\Omega)}$
0.4367	12	408	0.3788-01	0.8678E-01	0.4897E-01	0.1176E+00
0.2184	96	3264	0.7731E-02	0.1633E-01	0.9761E-02	0.2127E-01
0.1733	192	6528	0.4632E-02	0.1031E-02	0.6232E-02	0.1421E-01
0.1694	371	12614	0.2679E-02	0.6541E-02	0.3489E-02	0.8212E-02
0.1379	660	22440	0.1641E-02	0.5702E-02	0.2153E-02	0.7459E-02
9.26E-02	2631	89454	0.6709E-03	0.5396E-02	0.8692E-03	0.7041E-02
7.70E-02	4682	159188	0.5129E-03	0.5277E-02	0.6394E-03	0.694E-02

TAB. 3.2 – Tableau d’erreurs



La courbe “yx2” est le graphe d’une droite de pente égale à deux et la courbe “erru” représente le graphe de  $\|u - u^h\|_{V(h)}$  en fonction de  $h$ . On remarque que les points de la courbe “erru” sont assez proches de la droite et sont sur la droite lorsque le maillage devient suffisamment fin. Ceci montre que la décroissance de  $\|u - u^h\|_{V(h)}$  en fonction de  $h$  est d’ordre deux.



La courbe "yx" est le graphe d'une droite de pente égale à un et la courbe "errp" représente le graphe de  $\|p - p^h\|_{\mathcal{Q}(h)}$  en fonction de  $h$ . On remarque que les points de la courbe "errp" sont proches de la droite qui devient une asymptote à la courbe  $\|p - p^h\|_{\mathcal{Q}(h)}$  lorsque  $h$  se rapproche de zéro. Cela implique que la décroissance de  $\|p - p^h\|_{\mathcal{Q}(h)}$  en fonction de  $h$  est d'ordre un.

# Chapitre 4

## An $hp$ – discontinuous Galerkin method for the time-dependent Maxwell’s equations

**Abstract** *A discontinuous Galerkin method for the numerical approximation for the time-dependent Maxwell’s equations in “stable medium” with superconductive boundary, is introduced and analysed. Its  $hp$ –analysis is carried out and error estimates that are optimal in the meshsize  $h$  and slightly suboptimal in the approximation degree  $p$  are obtained. We also give some numerical results to confirm the convergence rate as a function of the meshsize  $h$ .*

### 4.1 Introduction

In this paper, we propose and analyse an  $hp$ –discontinuous Galerkin method for the time–dependent Maxwell’s equations in “stable medium” with superconductive boundary. Approximate continuity is imposed by including penalty terms in the form which defines the method. This method was first analysed for advection-diffusion-reaction problems in [36] and for the approximation of second order elliptic equations [58]. In [5], an interior penalty finite element method with discontinuous element has been introduced and analysed. This method is inspired from the DG method with the addition of penalty terms. For the time-harmonic Maxwell’s equations, an  $hp$ –DG version has been presented and analysed in [38].

The primary motivation for the interior penalty method is the enhanced flexibility afforded by discontinuous elements. This allows meshes which are more general in their construction and degree of nonuniformity than is permitted by more conventional finite element methods. Moreover the local nature of the trial space and the compability to regulate the degree of smoothness of



the approximate solution by local variation of the penalty weighting function should enable closer approximation of solutions which vary in character from one part of the domain to another and should allow the incorporation of partial knowledge of the solution into the scheme.

The problem considered for the most of this paper is the initial-boundary value problem derived from Maxwell's equations in "stable medium" with supraconductive boundary

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla \times (\nabla \times u(x, t)) & = f(x, t, u(x, t)) & (x, t) \in \Omega \times I, \\ \nabla \cdot u(x, t) & = g(x, t) & (x, t) \in \Omega \times I, \\ n \times u(x, t) & = 0 & (x, t) \in \partial\Omega \times I, \\ u(x, 0) & = u_0(x) & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) & = u_1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Here  $\Omega$  is a convex polyhedron included in  $\mathbb{R}^3$ ,  $I = [0, t^*] \subset \mathbb{R}$ ,  $u_0$  and  $u_1$  are in  $H_0(\nabla \times, \Omega) \cap H(\nabla \cdot, \Omega)$ ,  $g \in L^2(I, L^2(\Omega))$  and  $f$  is defined on  $\Omega \times I \times \mathbb{R}^3$  and satisfies a Lipschitz condition to its third argument uniformly over  $\Omega \times I$  with Lipschitz constant  $M$ , we assume further that  $f(\cdot, \cdot, y) \in C^0(I, L^2(\Omega)^3)$  for any  $y \in \mathbb{R}^3$  (for the definition of these latter spaces see the following section). Physically,  $u$  is the electric field and is related to the magnetic induction  $B$  by the identity  $u = \mu^{-1}B$ ,  $\mu$  is the magnetic permeability and is supposed constant on  $\Omega$ .  $f$  and  $g$  are related to a current and "charge" density, respectively.  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  where  $\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup> and  $\varepsilon_0 \approx (36\pi 10^9)^{-1}$  F.m<sup>-1</sup> are the magnetic permeability and the electric permittivity in vacuum, respectively. In fact, many of the result proved below are valid so long as  $\Omega$  is a bounded, convex domain with Lipschitz, connected and simply connected boundary. If we assume that the domain  $\Omega$  is "stable medium" with supraconductive boundary, then if  $u$  is the exact solution of Maxwell problem in the case where  $f$  is independent of  $u$ , then  $u$  belong to  $H^1(\Omega)^3$  (see [32]).

The outline of this paper is as follows. In the following section some notations are collected and preliminary results relating to the mesh and finite element space are presented. In section 4.3, we derive the **DG** method and show that it defines a unique approximate solution. More precisely, we start by study the Maxwell problem (4.1) in the case where the data  $f$  is independent of  $u$  and extend the results proved in this case to a general where  $f$  satisfies properties given in (4.1), also in this section we give some a priori error estimates. In section 4.4 we give some numerical results to confirm the expected convergence rate as a function of  $h$  and in section 4.5 concluding remarks are given.

## 4.2 Preliminaries and notations

Given a domain  $D$  in  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$ , we denote, as usual by  $H^s(D)^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , the Sobolev spaces of real function with integer or fractional regularity exponent  $s \geq 0$ , endowed with the norm  $\|\cdot\|_{s,D}$ ; see, e.g, [41].

For  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $H(\nabla \times, D)$  and  $H(\nabla \cdot, D)$  are the spaces of real vector functions  $u \in L^2(D)^3$  with  $\nabla \times u \in L^2(D)^3$  and  $\nabla \cdot u \in L^2(D)$ , respectively, endowed with the graph norms. We denote by  $H_0^1(D)$ ,  $H_0(\nabla \times, D)$ ,  $H_0(\nabla \cdot, D)$  the subspaces of  $H^1(D)$ ,  $H(\nabla \times, D)$ ,  $H(\nabla \cdot, D)$  of function with zero trace, tangential trace and normal trace, respectively.

Now, if  $K$  is an interval,  $X$  is one of the function spaces introduced above, and  $\phi$  is a function on  $\Omega \times K$  then  $\|\phi\|_{L^p(K,X)}$  denote the norm in  $L^p(K)$  of the function  $t \rightarrow \|\phi(\cdot, t)\|_X$ .  $L^p(X)$  is short for  $L^p(K, X)$ .

We denote by  $(\cdot, \cdot)$  the scalar product in  $L^2(\Omega)^3$  or  $L^2(\Omega)$  and by  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)^3}$  or  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ .

### 4.2.1 Traces and discontinuous finite element spaces

We start by introducing certain traces operators and finite element spaces used in the definition of the method. Let  $\Pi_h$  be a shape regular triangulation of  $\Omega$  into tetrahedra. If  $K \in \Pi_h$ , we denote by  $h_K$  the diameter of  $K$ .

**Faces :** We define and characterise the faces of the triangulation  $\Pi_h$ . An interior face of  $\Pi_h$  is defined as the (non-empty) two-dimensional interior of  $\partial K_1 \cap \partial K_2$ , where  $K_1$  and  $K_2$  are two adjacent elements of  $\Pi_h$ . A boundary face of  $\Pi_h$  is defined as the (non-empty) two-dimensional interior of  $\partial K \cap \partial \Omega$ , where  $K$  is a boundary element of  $\Pi_h$ . We denote by  $F_h^I$  the union of all interior faces of  $\Pi_h$ , by  $F_h^D$  the union of all boundary faces of  $\Pi_h$  and set  $F_h$  the union of all faces of  $\Pi_h$ . Furthermore we identify  $F_h^D$  to  $\partial \Omega$  since  $\Omega$  is polyhedron.

**Traces :** Let  $H^s(\Pi_h) = \{v : v|_K \in H^s(K) \ \forall K \in \Pi_h\}$  for  $s > \frac{1}{2}$  endowed with the norm  $\|v\|_{s,\Pi_h}^2 = \sum_{K \in \Pi_h} \|v\|_{s,K}^2$ . Then the elementwise traces of functions in  $H^s(\Pi_h)$  belongs to  $TR(F_h) = \prod_{K \in \Pi_h} L^2(\partial K)$ ; they are double-valued on  $F_h^I$  and single-valued on  $F_h^D$ . The space  $L^2(F_h)$  can be identified with the functions in  $TR(F_h)$  for which the two traces values coincide.

**Traces operators :** Let us introduce the following traces operators for piecewise smooth functions. First, let  $w \in TR(F_h)^3$  and  $e \subset F_h$ . If  $e$  is an interior face in  $F_h^I$ , we denote by  $K_1$  and  $K_2$  the elements sharing  $e$ , by  $n_i$  the normal unit vector pointing exterior to  $K_i$  and we set  $\omega_i = \omega|_{\partial K_i}$ ,  $i = 1, 2$ . We

define the *average*, *tangential* and *normal jumps* of  $w$  at  $x \in e$  as

$$\{\omega\} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad [\omega]_T = n_1 \times \omega_1 + n_2 \times \omega_2 \quad \text{and} \quad [\omega]_N = n_1 \cdot \omega_1 + n_2 \cdot \omega_2.$$

If  $e \subset F_h^D$ , we set for  $x \in e$

$$\{\omega\} = \omega, \quad [\omega]_T = n \times \omega \quad \text{and} \quad [\omega]_N = n \cdot \omega.$$

If  $w \in H(\nabla \times, \Omega)$ , then, for all  $e \subset F_h^I$  the jump condition  $[\omega]_T = 0$  holds true in  $L^2(e)^3$  and if  $w \in H(\nabla \cdot, \Omega)$ , then, for all  $e \subset F_h^I$  the jump condition  $[\omega]_N = 0$  holds true in  $L^2(e)$ .

For  $e \subset F_h$ , we denote by  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  the scalar product in  $L^2(e)^3$  or  $L^2(e)$ , furthermore if  $F_h^D$  is identified to  $\partial\Omega$ , we identify  $\sum_{e \subset F_h^D} \langle \cdot, \cdot \rangle_e$  to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , the scalar product in  $L^2(\partial\Omega)^3$  or  $L^2(\partial\Omega)$ .

In order to define the average of  $\nabla \times u$  in the formulation (4.6), we set for  $s > \frac{1}{2}$ ,

$$H^s(\nabla \times, \Pi_h) := \{v : v|_K \in H^s(K)^3 \text{ and } \nabla \times (v|_K) \in H^s(K)^3, \forall K \in \Pi_h\}.$$

**Finite element spaces :** Let  $p = (p_K)_{K \in \Pi_h}$  be a degree vector that assigns to each element  $K \in \Pi_h$  a polynomial approximation order  $p_K \geq 1$ . The generic  $hp$ -finite element space of piecewise polynomials is given by

$$S^p(\Pi_h) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in S^{p_K}(K) \quad \forall K \in \Pi_h\}$$

where  $S^{p_K}(K)$  is the space of real polynomials of degree at most  $p_K$  in  $K$ .

Now, we set

$$\Sigma_h = S^p(\Pi_h)^3. \tag{4.2}$$

### 4.3 Formulation for the Maxwell problem

In the previous notation we can state the basic integration by parts formulas  $\forall v, u \in H^1(\Pi_h)^3$ ,  $\forall \psi \in H^1(\Pi_h)$ , we have ( see [59] )

$$\begin{aligned} (\nabla_h \times u, v) &= (u, \nabla_h \times v) + \langle n \times u, v \rangle \\ &+ \sum_{e \subset F_h^I} \langle [u]_T, \{v\} \rangle_e - \langle [v]_T, \{u\} \rangle_e \end{aligned} \tag{4.3}$$

and

$$\begin{aligned} (\nabla_h \cdot u, \psi) &= -(u, \nabla_h \psi) + \langle u \cdot n, \psi \rangle \\ &+ \sum_{e \subset F_h^I} \langle [u]_N, \{\psi\} \rangle_e + \langle [\psi], \{u\} \cdot n \rangle_e. \end{aligned} \tag{4.4}$$

In order to derive a weak formulation of (4.1), we note that (4.3) implies for any  $u$  with  $\nabla \times u \in H(\nabla \times, \Omega)$

$$c^2(\nabla \times (\nabla \times u), v) = c^2(\nabla \times u, \nabla \times v) + a(u, v) \quad (4.5)$$

where we have denoted by

$$a(u, v) = c^2 \langle n \times (\nabla \times u), v \rangle - c^2 \sum_{e \in F_h^I} \langle [v]_T, \{\nabla \times u\} \rangle_e.$$

Now, we introduce the penalty term via the form

$$J_0(u, v) = J(u, v) + J^\sigma(u, v) + a(v, u) \quad u, v \in H^1(\Pi_h)^3$$

where

$$J(u, v) = (\nabla_h \cdot u, \nabla_h \cdot v) \quad u, v \in H^1(\Pi_h)^3$$

and

$$J^\sigma(u, v) = \sum_{e \in F_h^I} \langle \sigma [u]_N, [v]_N \rangle_e + \sum_{e \in F_h} \langle \sigma [u]_T, [v]_T \rangle_e \quad u, v \in H^1(\Pi_h)^3$$

where  $\sigma$  is a stabilization parameter and will be chosen depending on the local *meshsize* and *polynomial degree*.

We also define

$$A_0(u, v) = c^2(\nabla_h \times u, \nabla_h \times v) + a(u, v) + a(v, u);$$

$$A(u, v) = A_0(u, v) + J(u, v);$$

$$B(u, v) = A(u, v) + J^\sigma(u, v).$$

Now, since  $J_0(u, v) = (g, \nabla_h \cdot v)$  for the exact solution  $u$  of (4.1), then  $u$  satisfies

$$(u_{tt}, v) + B(u, v) = (f(u), v) + (g, \nabla_h \cdot v) \quad \forall v \in H^1(\nabla \times, \Pi_h). \quad (4.6)$$

### 4.3.1 The discontinuity stabilization parameter

In this Section we define the discontinuity stabilization parameter  $\sigma$  in terms of the *local meshsize* and *local polynomial degree*. This allows us to obtain continuity and coercivity constants independent of global bound for these quantities.

Let us start by introducing the function  $h$  and  $p$  in  $L^\infty(F_h)$ , related to the *local meshsize* and *local polynomial degree*, defined as

$$h = h(x) := \begin{cases} \min(h_K, h_{K'}) & \text{if } x \in \partial K \cap \partial K'; \\ h_K & \text{if } x \in \partial K \cap \partial \Omega. \end{cases}$$

$$p = p(x) := \begin{cases} \max(p_K, p_{K'}) & \text{if } x \in \partial K \cap \partial K'; \\ p_K & \text{if } x \in \partial K \cap \partial \Omega. \end{cases}$$

Now, we define the stabilization parameter as the same in [48]

$$\sigma = \kappa h^{-1} p^2 \in L^\infty(F_h) \tag{4.7}$$

where  $\kappa$  is a constant independent of the *meshsize* and *polynomial degree* and supposed  $\geq 1$ .

### 4.3.2 Properties of the bilinear form

#### Mesh-dependent norm

We now, introduce norm associated with the bilinear form  $B$  and set for  $u \in H^1(\nabla \times, \Pi_h)$

$$\begin{aligned} \|u\|_h^2 = & \|u\|^2 + \|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \nabla \times u \rangle \right\|_{0, F_h}^2 \\ & + \|\sqrt{\sigma}[u]_N\|_{0, F_h^I}^2 + \|\sqrt{\sigma}[u]_T\|_{0, F_h}^2. \end{aligned}$$

We start by studying the continuity of the bilinear forms introduced above. We have

**Proposition 4.3.1**  $\forall v, u \in H^1(\nabla \times, \Pi_h)$ ,

$$\begin{aligned} |A(u, v)| & \leq C \|u\|_h \|v\|_h, \\ |J^\sigma(u, v)| & \leq C \|u\|_h \|v\|_h \end{aligned}$$

with a constant  $C$  independent of  $h$  and  $p$ .

**Proof :** From the definition of  $J^\sigma(u, v)$ , the Cauchy-Schwarz inequality and  $\|\cdot\|_h$ , we obtain easily

$$|J^\sigma(u, v)| \leq C \|u\|_h \|v\|_h$$

with a constant  $C$  independent of  $h$  and  $p$ .

Let us show the first inequality of the Proposition. First we have by using the definition of  $A(u, v)$  and the triangular inequality

$$|A(u, v)| \leq |A_0(u, v)| + |J(u, v)|.$$

Using the fact that  $\langle n \times (\nabla \times u), v \rangle_e = \langle \nabla \times u, n \times v \rangle_e = \langle \nabla \times u, [v]_T \rangle_e$ , for any  $e \in F_h^D$  and  $u, v \in H^1(\nabla \times, \Pi_h)$ , we obtain from the definition of  $A_0(u, v)$

$$\begin{aligned} |A_0(u, v)| &\leq C [\|\nabla_h \times u\| \|\nabla_h \times v\| + \sum_{e \in F_h^D} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \nabla \times u \rangle_e\| \|\sqrt{\sigma} [v]_T\|_e \\ &\quad + \sum_{e \in F_h^D} \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \nabla \times v \rangle_e\| \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_e \\ &\quad + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_e \|\sqrt{\sigma} [v]_T\|_e + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma} [u]_N\|_e \|\sqrt{\sigma} [v]_N\|_e]. \end{aligned}$$

Then by using the discrete Cauchy-Schwarz inequality and the definition of  $J(u, v)$  and  $\|\cdot\|_h$ , we obtain

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &\leq C \left\{ \begin{aligned} &\|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \nabla_h \times u \rangle\|_{0, F_h^D}^2 \\ &+ \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_{0, F_h^D}^2 + \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_{0, F_h^I}^2 + \|\sqrt{\sigma} [u]_N\|_{0, F_h^I}^2 \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ \begin{aligned} &\|\nabla_h \times v\|^2 + \|\nabla_h \cdot v\|^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \langle \nabla_h \times v \rangle\|_{0, F_h^D}^2 \\ &+ \|\sqrt{\sigma} [v]_T\|_{0, F_h^D}^2 + \|\sqrt{\sigma} [v]_T\|_{0, F_h^I}^2 + \|\sqrt{\sigma} [v]_N\|_{0, F_h^I}^2 \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_h \|v\|_h \end{aligned}$$

with a constant  $C$  independent of  $h$  and  $p$ .  $\blacksquare$

In order to study the coercivity of the bilinear form, we start by introducing the following inequality of Poincaré-Friedrichs type valid for  $u \in H^1(\Pi_h)^3$ .

**Lemma 4.3.1** *Let  $u \in H^1(\Pi_h)^3$  and  $\sigma$  the stabilization parameter defined by (4.7), then there exists  $C$  independent of  $h$  and  $p$  such that*

$$\|u\|^2 \leq C (\|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \sum_{e \in F_h} \|\sqrt{\sigma} [u]_T\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in F_h^I} \|\sqrt{\sigma} [u]_N\|_{0,e}^2)$$

**Proof :** As in [59] we show that for all  $u \in H^1(\Pi_h)^3$  we have

$$\|u\|^2 \leq C(\|\nabla_h \times u\|^2 + \|\nabla_h \cdot u\|^2 + \sum_{e \subset F_h} \|\frac{1}{\sqrt{h}}[u]_T\|_{0,e}^2 + \sum_{e \subset F_h^I} \|\frac{1}{\sqrt{h}}[u]_N\|_{0,e}^2).$$

Then the proof follows immediately since  $\sqrt{\sigma} = \frac{p\sqrt{\kappa}}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{h}}$ . ■

**Remark 4.3.1** *We deduce in particular that there exists a constant  $C$  independent of  $h$  and  $p$  such that*

$$\|u\|^2 \leq C(A(u, u) + J^\sigma(u, u)).$$

Now, the following coercivity result on the discrete space  $\Sigma_h$  holds.

**Proposition 4.3.2** *Let  $\sigma$  the stabilization parameter defined by (4.7), then there exists two constants  $\alpha > 0$  and  $\tilde{C} > 0$  independent of  $h$  and  $p$  such that*

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_h^2 + \tilde{C} J^\sigma(v, v) \quad \forall v \in \Sigma_h.$$

**Proof :** Let us first recall the following inverse inequality

$$\|q\|_{0,\partial K}^2 \leq C_{inv} \frac{p_K^2}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 \quad \forall q \in S^{p_K}(K) \quad (4.8)$$

with a constant  $C_{inv} > 0$ , only depending on the shape regularity of the mesh. For the two-dimensional elements, the proof of (4.8) can be found in [57]. For the three dimension space, the proof is analogous, see [36].

Now, Let  $\alpha$  be an arbitrary real number and choose  $v \in \Sigma_h$ . Then

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 &= (1 - \alpha)A(v, v) + (1 - \alpha)J^\sigma(v, v) \\ &\quad - \alpha \int_{F_h} \langle \nabla_h \times v \rangle^2 / \sigma ds - \alpha \|v\|^2. \end{aligned}$$

Since  $\langle \nabla \times v \rangle$  is the average of the flux at the face of two elements  $K_i$  and  $K_j$ , the corresponding integral can be split into two integrals with integrands  $(\nabla \times v)_i / \sigma$  and  $(\nabla \times v)_j / \sigma$ , each one associated with the elements  $K_i$  or  $K_j$  respectively. Therefore, let  $e \subset F_h$  and consider the integral associated with the element  $K$ . Using the inverse inequality (4.8), we have since  $\nabla \times \Sigma_h \subset \Sigma_h$ ,

$$\int_e (\nabla \times v)^2 / \sigma ds = \frac{1}{\sigma} \|\nabla \times v\|_{0,e}^2 \leq \frac{C_{inv} p_K^2}{\sigma h_K} \|\nabla \times v\|_{0,K}^2 \quad (4.9)$$

so that, selecting  $\sigma$  to be equal to  $\kappa p^2 / h$  in (4.9), we obtain

$$- \int_e (\nabla \times v)^2 / \sigma ds \geq - \frac{C_{inv}}{\kappa} \|\nabla \times v\|_{0,K}^2.$$

In particular,

$$\begin{aligned} -\int_{F_h} \langle \nabla_h \times v \rangle^2 / \sigma ds &\geq -\frac{C_{inv}}{\kappa} \sum_{K \in \Pi_h} \|\nabla_h \times v\|_{0,K}^2 \\ &\geq -\frac{C_{inv}}{\kappa} A(v, v). \end{aligned}$$

It then follows that

$$B(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 \geq (1 - \alpha - \alpha \frac{C_{inv}}{\kappa}) A(v, v) + (1 - \alpha) J^\sigma(v, v) - \alpha \|v\|^2$$

and by using remark 4.3.1, we obtain

$$\begin{aligned} B(v, v) - \alpha \|v\|_h^2 &\geq (1 - \alpha C - \alpha - \alpha C_{inv}/\kappa) A(v, v) + (1 - \alpha - \alpha C) J^\sigma(v, v) \\ &\geq (1 - \alpha(C + 1 + C_{inv}/\kappa)) A(v, v) + (1 - \alpha(1 + C)) J^\sigma(v, v). \end{aligned}$$

Thus, if  $\alpha$  is chosen for example  $\alpha = \frac{1}{C+1+C_{inv}/\kappa}$  and  $\tilde{C} = 1 - \frac{1+C}{C+1+C_{inv}/\kappa} > 0$ , we immediately obtain the coercivity result.  $\blacksquare$

Now, the following  $hp$ -approximation result to interpolate scalar function holds

**Proposition 4.3.3** *Let  $K \in \Pi_h$  and suppose that  $u \in H^{t_K}(K)$ ,  $t_K \geq 0$ . Then there exists a sequence of polynomials  $\pi_{p_K}^{h_K}(u) \in S^{p_K}(K)$ ,  $p_K = 1, 2, \dots$  satisfying*

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{q,K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-q}}{p_K^{t_K-q}} \|u\|_{t_K, K} \quad \forall 0 \leq q \leq t_K. \quad (4.10)$$

Furthermore, if  $t_K \geq 1$ ,

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{0, \partial K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-\frac{1}{2}}}{p_K^{t_K-\frac{1}{2}}} \|u\|_{t_K, K}. \quad (4.11)$$

The constant  $C$  is independent of  $u$ ,  $h_K$  and  $p_K$ , but depends on the shape regularity of the mesh and on  $t = \max_{K \in \Pi_h} t_K$ .

**Proof** The assertion (4.10) has been proved in [7] (Lemma 4.5) for two-dimensional domains. For three-dimensional domains, the proof is analogous, see also [36]. The assertion (4.11) has been proved in [48].

In order to interpolate vector function, we define

**Definition 4.3.1** *For  $u = (u_1, u_2, u_3)$  we define*

$\Pi_p^h : H^t(\nabla \times, \Pi_h) \longrightarrow \Sigma_h$  by  $\Pi_p^h(u) = (\pi_p^h(u_1), \pi_p^h(u_2), \pi_p^h(u_3))$  with  $\pi_p^h$  is defined by  $\pi_p^h(u)|_K = \pi_{p_K}^{h_K}(u|_K)$  where  $\pi_{p_K}^{h_K}$  is given in Proposition 4.3.3.



### 4.3.3 Model problem

In this Section, we interest to the study of the system of equations (4.6), where the data  $f$  is supposed independent of  $u$ .

If  $u$  is the exact solution of Maxwell problem, then  $u$  satisfies

$$(u_{tt}, v) + B(u, v) = (f, v) + (g, \nabla \cdot v) \quad \forall v \in H^1(\nabla \times, \Pi_h).$$

The interior penalty finite element approximation to  $u$  is to find  $u^h : I \longrightarrow \Sigma_h$  such that

$$\begin{cases} (u_{tt}^h, v) + B(u^h, v) &= (f, v) + (g, \nabla \cdot v) & \forall v \in \Sigma_h, \\ u^h(0) &= \mathbf{\Pi}_p^h(u_0), \\ u_t^h(0) &= \mathbf{\Pi}_p^h(u_1). \end{cases} \quad (4.12)$$

Upon choice of a basis for  $\Sigma_h$  and the data  $f$  and  $g$ , (4.12) determines  $u^h$  as the only solution to an initial value problem for a linear system of ordinary differential equations. Note that if  $u$  is the exact solution of (4.1) and  $f$  is independent of  $u$ , then  $u$  satisfies the first equation in (4.12) and thus the problem is consistent.

We now analyse the proposed procedure by the method of energy estimates.

#### A priori error estimate

In this Section,  $u$  denote the exact solution of (4.1) and  $u^h$  the discrete solution of (4.12).  $C$  is generic constant independent of  $h$  and  $p$  which takes different values at the different places and depends of  $\alpha$ ,  $\tilde{C}$  the coercivity constants of the form  $B$ ,  $t^*$  and  $\Omega$ .

Let  $\zeta = u^h - u$ , then  $\zeta$  satisfies

$$(\zeta_{tt}, v) + B(\zeta, v) = 0 \quad \forall v \in \Sigma_h. \quad (4.13)$$

Decompose  $\zeta$  as  $\mu - \nu$  where  $\mu = \mathbf{\Pi}_p^h(u) - u$  and  $\nu = \mathbf{\Pi}_p^h(u) - u^h$ . Note that  $[\mu]_N = [\mu]_T = 0$  on  $F_h^I \times I$  and  $[\mu]_T = 0$  on  $F_h^D \times I$  thus

$$(\nu_{tt}, v) + B(\nu, v) = (\mu_{tt}, v) + A(\mu, v) \quad \forall v \in \Sigma_h.$$

Since  $\nu_t(t) \in \Sigma_h$ , we can set  $v = \nu_t(t)$ , obtaining

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nu_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} B(\nu(t), \nu(t)) &= (\mu_{tt}(t), \nu_t(t)) + A(\mu(t), \nu_t(t)) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mu_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nu_t(t)\|^2 + A(\mu(t), \nu_t(t)). \end{aligned}$$

So

$$\frac{d}{dt}\|\nu_t(t)\|^2 + \frac{d}{dt}B(\nu(t), \nu(t)) \leq \|\mu_{tt}(t)\|^2 + \|\nu_t(t)\|^2 + 2A(\mu(t), \nu_t(t)).$$

Since  $\nu_t(0) = \nu(0) = 0$ , integration over  $[0, t] \subset I$ , yields

$$\|\nu_t(t)\|^2 + B(\nu(t), \nu(t)) \leq \|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \int_0^t \|\nu_t(t)\|^2 dt + 2 \int_0^t A(\mu(t), \nu_t(t)) dt.$$

The final term may be integrated by parts in time. Hence,

$$2 \int_0^t A(\mu(t), \nu_t(t)) dt \leq 2|A(\mu(t), \nu(t))| + 2 \int_0^t |A(\mu_t(t), \nu(t))| dt.$$

Therefore, we can apply the coercivity of  $B$  and continuity of  $A$  to get

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \alpha\|\nu(t)\|_h^2 &+ \tilde{C}J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq \|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \int_0^t \|\nu_t(t)\|^2 dt + C\|\nu(t)\|_h\|\mu(t)\|_h \\ &\quad + 2 \int_0^t |A(\mu_t(t), \nu(t))| dt \\ &\leq \|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \int_0^t \|\nu_t(t)\|^2 dt + C\|\mu(t)\|_h^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\|\nu(t)\|_h^2 + C \int_0^t (\|\mu_t(t)\|_h^2 + \|\nu(t)\|_h^2) dt \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2 + \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2}\|\nu(t)\|_h^2 + C \int_0^t (\|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2) dt. \end{aligned}$$

In particular,

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2 + \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt) \\ &\quad + C \int_0^t (\|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2) dt. \end{aligned}$$

As this holds for all  $t \in I$ , Gronwall's Lemma implies that

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2 + \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Since  $\zeta = \mu - \nu$  and  $J^\sigma(\mu, \mu) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \|\zeta_t(t)\|^2 + \|\zeta(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\zeta(t), \zeta(t)) \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2 + \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt) \\ &+ C\|\mu_t\|_{L^\infty(L^2)}^2. \end{aligned}$$

Thus, error bounds for the finite element approximation to the true solution reduce to the error bounds for the piecewise polynomial interpolant. Thus, we start by estimating  $\|u - \mathbf{\Pi}_p^h(u)\|_h$ , where  $\mathbf{\Pi}_p^h$  is defined after Proposition 4.3.3. By using Proposition 4.3.3 and the definition of  $\|\cdot\|_h$ , we obtain the following

**Proposition 4.3.4** *Let  $u$  be the exact solution of (4.1) and suppose that  $u(\cdot, t)|_K \in H^{t_K}(K)^3$ , for any  $t \in I$  with  $t_K \geq 2$ , then we have*

$$\|u(\cdot, t) - \mathbf{\Pi}_p^h(u(\cdot, t))\|_h^2 \leq C \sum_{K \in \Pi_h} \frac{h_K^{2\mu_K-2}}{p_K^{2t_K-3}} \|u(\cdot, t)\|_{t_K, K}^2 \quad \forall t \in I$$

and

$$\|u(\cdot, t) - \pi_{p_K}^{h_K}(u(\cdot, t))\|_{q, K} \leq C \frac{h_K^{\mu_K-q}}{p_K^{t_K-q}} \|u(\cdot, t)\|_{t_K, K} \quad \forall 0 \leq q \leq t_K, \quad \forall t \in I,$$

where  $\mu_K = \min(p_K + 1, t_K)$  and  $C$  is independent of  $h$  and  $p$ .

In order to obtain an estimation of  $\|\zeta_t(t)\|^2 + \|\zeta(t)\|_h^2 + J^\sigma(\zeta(t), \zeta(t))$ , we apply the previous proposition and get

**Proposition 4.3.5** *Let  $u$  be the exact solution of (4.1) and suppose that  $u|_K \in C^2(I, H^{t_K}(K)^3)$ ,  $\forall K \in \Pi_h$  with  $t_K \geq 2$ . Let  $u^h$  the discrete solution of (4.12), then, the error  $\zeta = u^h - u$  satisfies*

$$\begin{aligned} \|\zeta_t(t)\|^2 + \|\zeta(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\zeta(t), \zeta(t)) \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h} \frac{h_K^{2\mu_K-2}}{p_K^{2t_K-3}} (\|u_{tt}\|_{L^2(H^{t_K}(K)^3)}^2 + \|u\|_{L^\infty(H^{t_K}(K)^3)}^2) \\ &+ C \sum_{K \in \Pi_h} \frac{h_K^{2\mu_K-2}}{p_K^{2t_K-3}} (\|u_t\|_{L^2(H^{t_K}(K)^3)}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^{t_K}(K)^3)}^2) \end{aligned}$$

where  $\mu_K = \min(p_K + 1, t_K)$  and  $C$  is independent of  $h$  and  $p$ .

**Remark 4.3.2** *In order to find an estimate of  $\|\zeta(t)\|$ , we can set  $v = \nu(t)$  in (4.13), but this estimate can be deduced from Proposition 4.3.5 since  $\|\zeta(t)\| \leq \|\zeta(t)\|_h$ .*

### 4.3.4 Generalization

We now study the system of equations (4.1) and generalise the results of existence and uniqueness of solution and the error estimate in the previous Section, to the case where  $f$  is defined on  $\Omega \times I \times \mathbb{R}^3$  and satisfies a Lipschitz condition to its third argument uniformly over  $\Omega \times I$  with Lipschitz constant  $M$ .

If  $u$  denote the exact solution of (4.1), then  $u$  satisfies

$$(u_{tt}, v) + B(u, v) = (f(u), v) + (g, \nabla \cdot v) \quad \forall v \in H^1(\nabla \times, \Pi_h). \quad (4.15)$$

The interior penalty finite element approximation to  $u$  is to find  $u^h : I \rightarrow \Sigma_h$  such that

$$\begin{cases} (u_{tt}^h, v) + B(u^h, v) &= (f(u^h), v) + (g, \nabla \cdot v) & \forall v \in \Sigma_h, \\ u^h(0) &= \mathbf{\Pi}_p^h(u_0), \\ u_t^h(0) &= \mathbf{\Pi}_p^h(u_1). \end{cases} \quad (4.16)$$

Since  $\Sigma_h$  is finite dimensional space, the first equation in (4.16) defines, upon initial conditions, only one maximal solution  $u^h$  defined on  $[0, T[ \subset I$  and if  $T < t^*$ , then

$$\|u^h(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad T \rightarrow t^*.$$

It follows that, (4.16) has one and only one maximal solution  $u^h$  and by the estimate made in Proposition 4.3.6, this solution persists for all  $t \in I$ .

#### A priori error estimates

We conserve the same notation in Section 3.3.1, but in this Section  $C$  is independent of  $t^*$  and dependent of  $M$ . If  $\zeta = u - u^h$ , then  $\zeta$  satisfies

$$(\zeta_{tt}, v) + B(\zeta, v) = (f(u^h) - f(u), v) \quad \forall v \in \Sigma_h. \quad (4.17)$$

Decompose  $\zeta$  as  $\mu - \nu$  with  $\mu = \mathbf{\Pi}_p^h(u) - u$  and  $\nu = \mathbf{\Pi}_p^h(u) - u^h$ .

Note that  $[\mu]_N = [\mu]_T = 0$  on  $F_h^I \times I$  and  $[\mu]_T = 0$  sur  $F_h^D \times I$  we obtain

$$\begin{aligned} (\nu_{tt}, v) + B(\nu, v) &= (\mu_{tt}, v) + A(\mu, v) + (f(u^h) - f(u), v) \\ &\leq (\mu_{tt}, v) + A(\mu, v) + M\|\zeta\|\|v\| \\ &\leq (\mu_{tt}, v) + A(\mu, v) + C(\|\mu\|^2 + \|\nu\|^2) + C\|v\|^2 \end{aligned}$$

where  $M$  is a Lipschitz constant associated to  $f$ .

Since  $\nu_t(t) \in \Sigma_h$ , we can set  $v = \nu_t(t)$  and get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nu_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} B(\nu(t), \nu(t)) &\leq (\mu_{tt}(t), \nu_t(t)) + A(\mu(t), \nu_t(t)) \\ &\quad + C(\|\mu(t)\|^2 + \|\nu(t)\|^2(t)) + C\|\nu_t(t)\|^2 \\ &\leq C(\|\mu_{tt}(t)\|^2 + \|\mu(t)\|^2) + A(\mu(t), \nu_t(t)) \\ &\quad + C(\|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|^2). \end{aligned}$$

Since  $\nu_t(0) = \nu(0) = 0$ , we obtain, after integration by parts over  $[0, t] \subset I$  and using the coercivity of the form  $B$  and the continuity of the form  $A$ ,

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \alpha \|\nu(t)\|_h^2 &+ \tilde{C} J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\mu\|_{L^2(L^2)}^2) + C\|\mu(t)\|_h^2 + \frac{\alpha}{2}\|\nu(t)\|_h^2 \\ &\quad + C\left(\int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt + \int_0^t \|\nu(t)\|_h^2 dt + \int_0^t (\|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|^2) dt\right). \end{aligned}$$

Since  $\|\nu(t)\|^2 \leq \|\nu(t)\|_h^2$ , we obtain

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq C(\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\mu\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2) \\ &\quad + C\int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt + C\int_0^t (\|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2) dt. \end{aligned}$$

As this hold, for all  $t \in I$ , Gronwall's Lemma implies that

$$\begin{aligned} \|\nu_t(t)\|^2 + \|\nu(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\nu(t), \nu(t)) \\ &\leq C e^{t^*} (\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\mu\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2) \\ &\quad + C e^{t^*} \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt. \end{aligned}$$

Since  $\zeta = \mu - \nu$  and  $J^\sigma(\mu, \mu) = 0$  we obtain

$$\begin{aligned} \|\zeta_t(t)\|^2 + \|\zeta(t)\|_h^2 &+ J^\sigma(\zeta(t), \zeta(t)) \\ &\leq C e^{t^*} (\|\mu_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \|\mu\|_{L^2(L^2)}^2 + \sup_{t \in I} \|\mu(t)\|_h^2) \\ &\quad + C e^{t^*} (\sup_{t \in I} \|\mu_t(t)\|^2 + \int_0^{t^*} \|\mu_t(t)\|_h^2 dt). \end{aligned}$$

We now apply Proposition 4.3.4 and get

**Proposition 4.3.6** *Let  $u$  be the exact solution of (4.1) and suppose that  $u|_K \in C^2(I, H^{t_K}(K)^3)$ ,  $\forall K \in \Pi_h$  with  $t_K \geq 2$ . Let  $u^h$  the discrete solution of (4.16), then, the error  $\zeta = u^h - u$  satisfies*

$$\begin{aligned} \|\zeta_t(t)\|^2 &+ \|\zeta(t)\|_h^2 + J^\sigma(\zeta(t), \zeta(t)) \\ &\leq C e^{t^*} \sum_{K \in \Pi_h} \frac{h_K^{2\mu_K-2}}{p_K^{2t_K-3}} (\|u_{tt}\|_{L^2(H^{t_K}(K)^3)}^2 + \|u\|_{L^\infty(H^{t_K}(K)^3)}^2 + \|u\|_{L^2(H^{t_K}(K)^3)}^2) \\ &\quad + C e^{t^*} \sum_{K \in \Pi_h} \frac{h_K^{2\mu_K-2}}{p_K^{2t_K-3}} (\|u_t\|_{L^2(H^{t_K}(K)^3)}^2 + \|u_t\|_{L^\infty(H^{t_K}(K)^3)}^2) \end{aligned}$$

where  $\mu_K = \min(p_K + 1, t_K)$  and  $C$  is independent of  $h$  and  $p$ .

## 4.4 Numerical results

We shall now present some numerical results which verify the sharpness of the theoretical error bounds stated in Proposition 4.3.5. To obtain a fully discrete discretization of our wave equation, we choose to augment our DG spatial discretization with the second order Newmark scheme in time, see [51].

In our example, the DG stabilization parameter is set to  $\kappa = 10$ .

### 4.4.1 Time discretization

The discretization of (4.1) in space by the DG method (4.10) leads to the linear second order system of ordinary differential equations

$$\mathbf{M}\ddot{u}^h(t) + \mathbf{A}u^h(t) = f^h(t), \quad t \in I \quad (4.18)$$

with initial conditions

$$\mathbf{M}u^h(0) = u_0^h, \quad \mathbf{M}\dot{u}^h(0) = u_1^h. \quad (4.19)$$

Here,  $\mathbf{M}$  denote the mass matrix and  $\mathbf{A}$  the stiffness matrix. To discretize (4.16) in time, we employ the Newmark time stepping scheme; see, e.g. [51]. We let  $k$  denote the time step and set  $t_n = n \cdot k$ . Then the Newmark method consists in finding approximation  $\{u_n^h\}_n$  to  $u^h(t_n)$  such that

$$(\mathbf{M} + k^2\beta\mathbf{A})u_1^h = \left[ \mathbf{M} - k^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{A} \right] u_0^h + k\mathbf{M}u_1^h + k^2 \left[ \beta f_n^1 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)f_n^0 \right] \quad (4.20)$$

and

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + k^2\beta\mathbf{A})u_1^h = & \left[ \mathbf{M} - k^2\left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)\mathbf{A} \right] u_n^h \\ & - \left[ \mathbf{M} + k^2\left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right)\mathbf{A} \right] u_{n-1}^h \\ & + k^2 \left[ \beta f_{n+1}^h + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)f_n^h + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)f_{n-1}^h \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

for  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Here  $f_n := f(t_n)$  while  $\beta \geq 0$  and  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  are free parameters that still can be chosen. We recall that for  $\gamma = \frac{1}{2}$  the Newmark scheme is second order accurate in time, whereas it is only first order accurate for  $\gamma > \frac{1}{2}$ . For  $\beta = 0$ , the Newmark scheme (4.20)-(4.21) requires at each time step the solution of a linear system with the matrix  $\mathbf{M}$ . However, because individual elements decouples,  $\mathbf{M}$  is a bloc diagonal with a bloc size equal to the number of degrees of freedom per element. It can be inverted at very low computational cost and the scheme is essentially explicit. In fact, if the basis

functions are chosen mutually orthogonal,  $\mathbf{M}$  reduces to the identity; see [20] and the references therein. Then, with  $\gamma = \frac{1}{2}$ , the explicit Newmark method corresponds to the standart leap-frog scheme.

For  $\beta > 0$ , the resulting scheme is implicit and involves the solution of a linear system with the symmetric positive definite stiffness matrix  $\mathbf{A}$  at each time step. We finally note that the second order Newmark scheme with  $\gamma = \frac{1}{2}$  is unconditionally stable for  $\beta \geq \frac{1}{4}$ , whereas for  $\frac{1}{4} > \beta \geq 0$  the time step  $k$  has to be restricted by a CFL condition. In the case  $\beta = 0$  the condition is  $k^2 \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq 4(1 - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ , where  $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$  is the maximal eigenvalue of the DG stiffness matrix  $\mathbf{A}$ .

In our test, we will employ the implicit second order Newmark scheme, setting  $\gamma = \frac{1}{2}$  and  $\beta = \frac{1}{2}$  in (4.20)-(4.21).

#### 4.4.2 Example

We consider the three dimensional wave equation (4.1) in  $\Omega \times I := (0, 1)^3 \times (0, 1)$  and data  $f, g, u_0$  and  $u_1$  chosen such that the analytical solution is given by

$$u(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \sin(t(y^2 - y)(z^2 - z)) \\ \sin(t(x^2 - x)(z^2 - z)) \\ \sin(t(x^2 - x)(y^2 - y)) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

This solution is arbitrarily smooth so that our theoretical assumptions are satisfied. We discretize this problem using the polynomial spaces  $\mathcal{P}^p(K)^3$ ,  $p = 1, 2$ , on a sequence  $\Pi_h$  of tetrahedral meshes. With decreasing meshsize  $h$ , smaller time step  $k$  is not necessary, because the scheme is unconditionally stable. In table Tab. 4.1, we show the relative errors at time  $T = 1$  in the energy norm, as we decrease  $h$ . In (fig 1) and (fig 2) we see that the decrease of the energy norm as a function of the meshsize  $h$  is of order one for  $p = 1$  and of order two for  $p = 2$ . Then the numerical results corroborate with the expected theoretical rates of  $O(h^p)$  as we decrease the meshsize.

$h$	<b>Nbte</b>	<b>Nbtr</b>	$\ u - u^h\ _h, p = 1$	$\ u - u^h\ _h, p = 2$
0.4367	12	30	0.2781E+00	0.1516E+00
0.2184	96	216	0.1867E+00	0.4129E-01
0.1733	192	432	0.1485E+00	0.2140E-01
0.1694	371	826	0.1122E+00	0.1935E-01
0.1379	660	1416	0.1002E+00	0.1176E-01
9.268E-02	2631	5502	0.6927E-01	0.4619E-02
7.703E-02	4682	9793	0.5584E-01	0.3152E-02

TAB. 4.1 – Table of errors in the energy norm.

Here **Nbte** is the number of tetrahedra on  $\Omega$  and **Nbtr** is the number of triangles on the set of  $F_h$ .

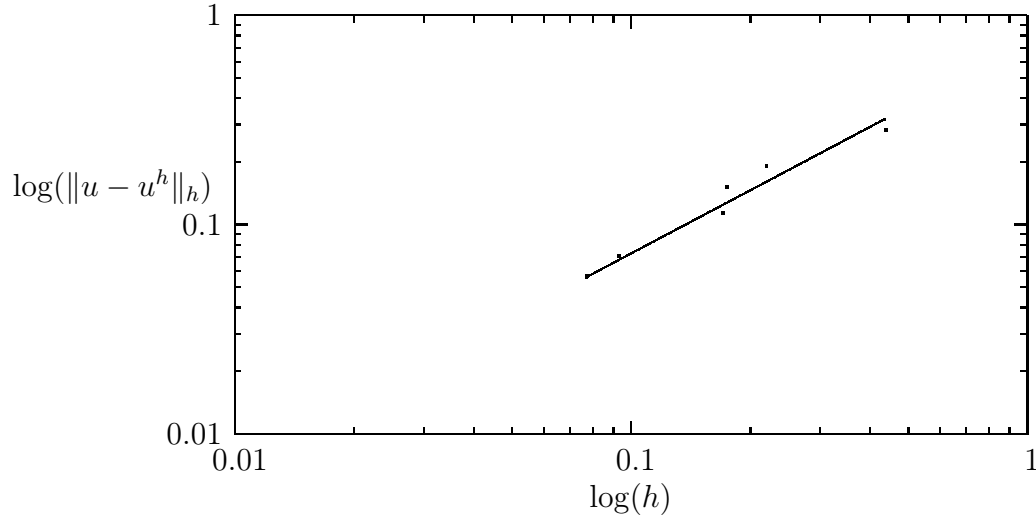
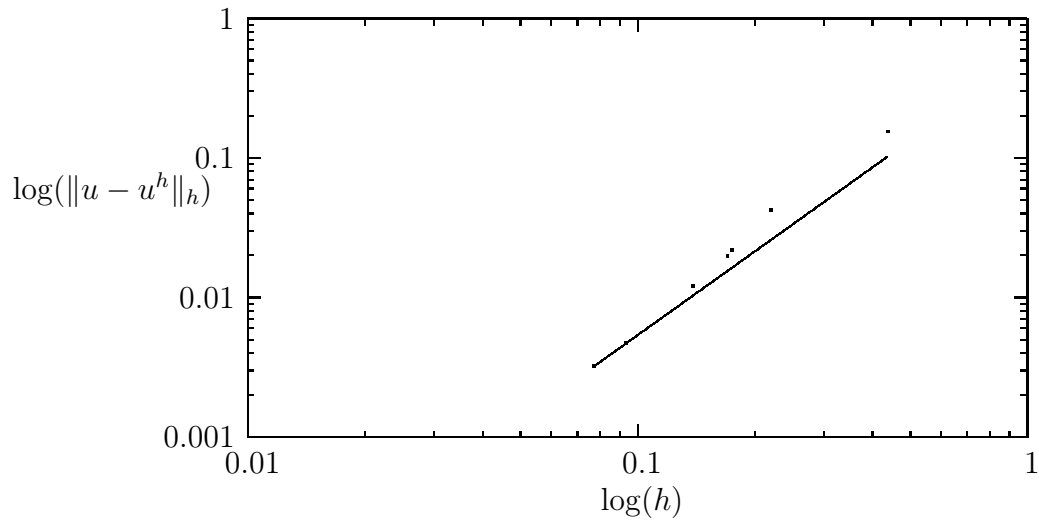
fig 1 : Errors of the energy norm at time  $T = 1$  for  $p = 1$ 



fig 2 : Errors of the energy norm at time  $T = 1$  for  $p = 2$



## 4.5 Concluding remarks

In this paper, a discontinuous Galerkin method for the discretization of the time-dependent Maxwell's equations in "stable medium" with superconductive boundary has been proposed and its  $hp$ -error analysis has been carried out. The extension to a nonlinear case where the data  $f$  satisfies a Lipschitz condition is analysed. The  $hp$ -error estimates obtained are optimal in the meshsize and suboptimal in the approximation degree. Some numerical results are given to confirm the convergence rates as a function of the meshsize.

# Chapitre 5

## On the coupling LDG-FEM and BEM method for the three dimensional magnetostatic problem

**Abstract** *We present two new coupling models for the three dimensional magnetostatic problem. In the first model, we propose a new coupled formulation, we prove that it is well posed and solves Maxwell's equations in the whole space. In the second, we propose a new coupled formulation for the Local Discontinuous Galerkin method, the finite element method and the boundary element method. This formulation is obtained by coupling the LDG method inside a bounded domain  $\Omega_1$  with the FEM method inside a "couronne"  $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$  where  $\Omega$  is a bounded domain which is made up of material of permeability  $\mu$  and such that  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ , and with a boundary element method involving Calderon's equations. We prove that our formulation is consistent and well posed and we present some a priori error estimates for the method.*

### 5.1 Introduction

We study Maxwell's equations for magnetostatic in  $\mathbb{R}^3$ . We consider a bounded domain  $\Omega$  which is made up of material of permeability  $\mu$ . Outside the domain  $\Omega$ , in  $\Omega^c$  we assume that the permeability  $\mu$  is a constant and the value of  $\mu$  in  $\Omega^c$  is the permeability in vacuum. Inside  $\Omega$ , we suppose that  $\mu$  is a function of  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  which is in  $L^\infty(\Omega)$  and  $\mu(x) \geq c > 0$  for all  $x \in \Omega$ . For the current density  $J$ , we suppose that it has a bounded support included in  $\Omega$

and is in  $H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  (for the definition of this space, see the following section). We study the following problem : for a given field  $J$ , find the magnetic field  $h$  which solves the following magnetostatic problem model which is derived from Maxwell's equations

$$\begin{cases} \operatorname{rot} h = J & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \mu h = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (5.1)$$

The outline of this chapter is as follows. In the next section some notations and general results are presented which are necessary for the study of our model problem (5.1). In Section 5.3, by introducing a scalar potential and a vector potential, we establish a variational formulation associated to the continuous problem, we prove that it is well posed and show the equivalence to the model problem. In Section 5.4 we present our coupled LDG-FEM and BEM formulation, for the LDG method, we introduce auxiliary variables. The coupling of the LDG with FEM methods is introduced by using numerical fluxes. We prove that our formulation is consistent and well posed. We finish this section by giving a primal formulation which we use in Section 5.5 to establish error estimates. An  $h$ -version error analysis is carried out in Section 5.5 and concluding remarks are presented in Section 5.6.

## 5.2 Preliminaries and notations

Given a domain  $D$  in  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$ , we denote by  $H^s(D)^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , the Sobolev space of real valued functions with integer or fractional regularity exponent  $s \geq 0$ , endowed with the norm  $\|\cdot\|_{s,D}$ ; see, e.g, [41].

For  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $H(\operatorname{rot}, D)$  and  $H(\operatorname{div}, D)$  are the spaces of real valued vector functions  $u \in L^2(D)^3$  with  $\operatorname{rot} u \in L^2(D)^3$  and  $\operatorname{div} u \in L^2(D)$ , respectively, endowed with the graph norms. We denote by  $H_0^1(D)$ ,  $H_0(\operatorname{rot}, D)$ ,  $H_0(\operatorname{div}, D)$  the subspaces of  $H^1(D)$ ,  $H(\operatorname{rot}, D)$ ,  $H(\operatorname{div}, D)$  of functions with zero trace, tangential trace and normal trace on  $\partial D$ , respectively. The spaces  $H(\operatorname{rot}^0, D)$  and  $H(\operatorname{div}^0, D)$  are the subspaces of  $H(\operatorname{rot}, D)$  and  $H(\operatorname{div}, D)$  consisting of irrotational and *divergence*-free functions, respectively. Let  $(\cdot, \cdot)$  denote the scalar product on  $L^2(D)$  or  $L^2(D)^3$ .

If  $\Gamma = \partial D$ , we define

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{v \in L^2(\Gamma), \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} < \infty\}$$

where

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 := \frac{1}{\operatorname{diam}(D)} \int_{\partial D} |v(x)|^2 ds_x + \int_{\partial D} \int_{\partial D} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2} ds_x ds_y, \quad (5.2)$$

is the corresponding norm. See [1].

We denote by  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  the dual space of  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and by  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the duality pairing between  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . More generally, if  $\Gamma$  is a proper (non-empty) open subset of  $\partial D$ , we define  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  as the subspace of  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  consisting those functions defined on  $\Gamma$  and whose extension by zero on  $\partial D \setminus \Gamma$  belongs to  $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ . Let us recall that it coincides with  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  provided that  $\Gamma$  is a surface without boundary; see e.g [3]. The space  $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  is the dual space of  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

### 5.2.1 Variational framework

Throughout this paper,  $\Omega$  will denote a bounded Lipschitz polyhedron included in  $\mathbb{R}^3$  which is supposed to be both connected and simply connected; in particular we suppose that  $\Omega$  is such that  $H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)^3$ .  $\Gamma$  is the boundary of  $\Omega$  which is also assumed to be sufficiently smooth, connected and simply connected and  $n$  is the unit outward normal on  $\Gamma$ ; we also set  $\Omega' := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ .

### 5.2.2 Integral operators and Calderon's equations

Now we turn to the study of the properties of integral operators which will be involved in the boundary integral method.

The integral operators  $V$ ,  $K$ , and  $W$  denote the single layer potential, the double layer potential and the hypersingular operator, respectively, and are defined by :

$$Ku(x) = \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) ds_y \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$$Vu(x) = \int_{\Gamma} u(y) E(x, y) ds_y \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \forall u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

and

$$Wu(x) = -\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) ds_y \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \forall u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Here,  $E(x, y) = (4\pi|x - y|)^{-1}$  is the fundamental solution for the three-dimensional Laplacian problem and  $\frac{\partial}{\partial n_y}$  denotes the weak derivative with respect to the variable  $y$ .

We have the following properties for these operators.

**Lemma 5.2.1** *The operators previously defined satisfy :*

$$\begin{aligned} V &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ K &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ K' &: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ W &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

where  $K'$  is the adjoint operator of  $K$ . Furthermore, all four operators are linear and continuous.  $V$  is symmetric, self-adjoint, and positive definite.  $W$  is symmetric, self-adjoint and positive semidefinite provided that the capacity of  $\Gamma$  is smaller than 1 which is assumed here.

**Proof :** See [25].

Let  $(\phi, \lambda)$ ,  $\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial n}$  be the Cauchy data of the function  $\psi \in H^1(\Omega')$  with  $\Delta \psi = 0$  in  $\Omega'$ . We have Calderon's equations on  $\Gamma$  :

$$\begin{cases} \frac{\phi}{2} = K\phi - V\lambda & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\lambda}{2} = -W\phi - K'\lambda & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (5.3)$$

Moreover the following formula holds for Lipschitz domains :

$$\psi(x) = \langle K(x, \cdot), \phi \rangle - \langle E(x, \cdot), \lambda \rangle \quad \text{for } x \in \Omega'. \quad (5.4)$$

We now introduce some results that we use in this paper.

**Theorem 5.2.1** *Let  $\Omega$  be a simply connected domain and  $v \in H(\text{rot}, \Omega)$  with  $\text{rot } v = 0$ . Then, there exists a  $p \in H^1(\Omega)$  such that*

$$v = \nabla p$$

*If, addition,  $v \in H_0(\text{rot}, \Omega)$  then  $p \in H_0^1(\Omega)$ .*

**Proof :** The proof follows directly from Corollary 3.4 in [35].

**Lemma 5.2.2** *Let  $\Omega$  be a bounded, simply-connected Lipschitz domain. Then there exists a positive constant  $C$  such that*

$$\|v\|_0 \leq C(\|\text{rot } v\|_0 + \|\text{div } v\|_0), \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega).$$

**Proof :** See [35] Lemma 3.6

**Theorem 5.2.2** *Let  $\Omega$  be a bounded domain with a sufficiently smooth and connected boundary. Then for all  $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  with  $\operatorname{div} v = 0$ . there exists a unique  $u \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  such that*

$$v = \operatorname{rot} u \quad \text{in } \Omega.$$

**Proof :** As in [40], we see that the problem :

For a given  $v \in H(\operatorname{div}^0, \Omega)$ , find  $(u, p) \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \times H^1(\Omega)$  such that

$$\begin{cases} (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u') + (\nabla p, u') = (v, u') & \forall u' \in H(\operatorname{rot}, \Omega), \\ (u, \nabla q) = 0 & \forall q \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

has only one solution and is equivalent to  $p = \text{const}$  and  $u \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  with  $\operatorname{rot} u = v$  in  $\Omega$ . ■

### 5.3 Variational formulation

Now, we establish a variational formulation associated to problem (5.1). In order to define the solution  $h$  of (5.1) in  $H(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3)$  and  $\mu h$  in  $H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ , we introduce the following interface conditions which result from the continuity of the tangential component of  $h$  and the normal component of  $\mu h$  and are written as follows

$$\begin{cases} h_1 \times n = h_2 \times n & \text{on } \Gamma, \\ \mu_1 h_1 \cdot n = \mu_2 h_2 \cdot n & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (5.5)$$

where  $\mu_i$  and  $h_i$  denote the restrictions of  $\mu$  and  $h$  on  $\Omega$  and  $\Omega'$ , respectively.

Since  $J = 0$  in  $\Omega'$ , we deduce from Theorem 5.2.1 that there exists a scalar potential  $\psi \in H^1(\Omega')$  such that

$$h_2 = \nabla \psi \quad \text{in } \Omega'.$$

Since  $\operatorname{div}(\mu_1 h_1) = 0$  in  $\Omega$ , we deduce from Theorem 5.2.2 that there exists a vector field  $u \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  such that

$$\mu_1 h_1 = \operatorname{rot} u \quad \text{in } \Omega.$$

If we introduce the interface condition (5.5) in terms of scalar and vector potentials by

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(u) \cdot n = \mu_2 \nabla \psi \cdot n & \text{on } \Gamma, \\ \mu_1^{-1} \operatorname{rot}(u) \times n = \nabla \psi \times n & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

we can rewrite the magnetostatic problem as the following equivalent transmission problem :

$$(\mathbf{A}) : \begin{cases} \operatorname{rot}(\mu_1^{-1} \operatorname{rot} u) & = J & \text{in } \Omega, \\ \Delta \psi & = 0 & \text{in } \Omega', \\ \operatorname{div}(u) & = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{rot}(u) \cdot n & = \mu_2 \nabla \psi \cdot n & \text{on } \Gamma, \\ \mu_1^{-1} \operatorname{rot}(u) \times n & = \nabla \psi \times n & \text{on } \Gamma, \\ u \cdot n & = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

For the coupling on  $\Gamma$ , we introduce the following result

**Lemma 5.3.1** *Let  $\Omega$  be a simply connected domain, included in  $\mathbb{R}^3$  with Lipschitz boundary  $\Gamma$  and let  $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ . Then, for all  $\psi \in H^1(\Omega')$  with  $\psi|_{\Gamma} = \phi$  and for all  $v \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ , we have*

$$\int_{\Gamma} (\nabla \psi \times n) v ds = \int_{\Gamma} (\operatorname{rot} v \cdot n) \phi ds. \quad (5.6)$$

**Proof :** We start by showing (5.6) for  $\psi \in H^2(\Omega)$ . Let  $\psi \in H^2(\Omega)$  with  $\phi = \psi|_{\Gamma}$  and  $v \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ . Then, by using the Stokes and Green formulas, we obtain

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} v \nabla \psi dx = \int_{\Gamma} (\operatorname{rot} v \cdot n) \phi ds = - \int_{\Gamma} (v \times n) \nabla \psi ds = \int_{\Gamma} (\nabla \psi \times n) v ds. \quad (5.7)$$

From the density of  $H^2(\Omega)$  in  $H^1(\Omega)$ , we deduce that (5.6) is satisfied for all  $\psi \in H^1(\Omega)$ .

Now, for  $\zeta \in H^1(\Omega')$  we have  $n \cdot \nabla \zeta \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and  $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and there exists  $\tilde{\zeta} \in H^1(\Omega)$  such that  $\tilde{\zeta}|_{\Gamma} = \phi$  and  $n \cdot \nabla \tilde{\zeta} = n \cdot \nabla \zeta$ ; moreover  $\tilde{\zeta}$  can be chosen as defined by (5.4) in  $\Omega$  with  $\lambda = n \cdot \nabla \zeta$ .

Define  $\varphi$  by  $\varphi = \zeta$  in  $\Omega'$  and  $\varphi = \tilde{\zeta}$  in  $\Omega$ ; then  $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$  since  $\tilde{\zeta}|_{\Gamma} = \zeta|_{\Gamma} = \phi$ . From the continuity of the tangential component of  $\nabla \varphi$  we have  $\nabla \zeta \times n = \nabla \tilde{\zeta} \times n$  on  $\Gamma$ .

Since  $\tilde{\zeta} \in H^1(\Omega)$ , (5.6) is satisfied for  $\psi = \tilde{\zeta}$  and we have

$$\int_{\Gamma} (\nabla \tilde{\zeta} \times n) v ds = \int_{\Gamma} (\operatorname{rot} v \cdot n) \phi ds \quad \forall v \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega).$$

Using  $\nabla \zeta \times n = \nabla \tilde{\zeta} \times n$  on  $\Gamma$ , we obtain

$$\int_{\Gamma} (\nabla \zeta \times n) v ds = \int_{\Gamma} (\operatorname{rot} v \cdot n) \phi ds \quad \forall v \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega).$$

Note that since  $\zeta$  is arbitrary, we deduce that, for all  $\psi \in H^1(\Omega')$  with  $\psi|_\Gamma = \phi$  and for all  $v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ ,

$$\int_\Gamma (\nabla \psi \times n) v ds = \int_\Gamma (\text{rot } v \cdot n) \phi ds \quad \blacksquare$$

Now, for the simplicity of notation, we define

$$T_n : \begin{cases} H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) & \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u & \longrightarrow T_n(u) = \text{rot}(u) \cdot n \end{cases} \quad (5.8)$$

Then we have, for all  $\psi \in H^1(\Omega')$  with  $\psi|_\Gamma = \phi$ ,

$$\int_\Gamma (\nabla \psi \times n) v ds = \int_\Gamma T_n(v) \phi ds \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \quad (5.9)$$

**Remark 5.3.1** Assume that  $\Gamma$  is regular and let  $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and  $\psi \in H^2(\Omega)$  with  $\psi|_\Gamma = \phi$ . Then, by using the Stokes formula, we have

$$\int_\Omega \text{rot } v \nabla \psi dx = \int_\Gamma \phi T_n(v) ds \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \quad (5.10)$$

Since  $H^2(\Omega)$  is dense in  $H^1(\Omega)$ , we deduce that (5.10) is satisfied for all  $\psi \in H^1(\Omega)$  with  $\psi|_\Gamma = \phi$  and thus  $T_n$  is continuous on  $H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$  and there exists  $C_T > 0$  such that

$$\|T_n(u)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_T \|\mu_1^{-\frac{1}{2}} \text{rot } u\|_{0,\Omega} \quad (5.11)$$

In order to obtain the variational formulation of problem **(A)**, we set  $Z := H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  endowed with the norm  $\|(v, \phi)\|_Z^2 := \|v\|_{H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)}^2 + \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$  where

$$\|v\|_{H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)}^2 := \|\mu_1^{-\frac{1}{2}} \text{rot } v\|_{0,\Omega}^2 + \|\text{div } v\|_{0,\Omega}^2. \quad (5.12)$$

**Remark 5.3.2** Since  $\mu(x) \geq c > 0$  for all  $x \in \Omega$  and using Lemma 5.2.2, we see that  $H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$  endowed with the scalar product  $(u, v) := (\mu_1^{-\frac{1}{2}} \text{rot } u, \mu_1^{-\frac{1}{2}} \text{rot } v) + (\text{div } u, \text{div } v)$  is a Hilbert space and the quantity defined by (5.12) is the norm associated to this scalar product. It then follows that  $Z$ , endowed with the norm  $\|\cdot\|_Z$  defined above, is a Hilbert space.



Now, by multiplying the first identity in **(A)** by a test function in  $H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ , integrating by parts and using  $\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n = \nabla \psi \times n$  on  $\Gamma$  and (5.9), we obtain

$$\int_{\Omega} \mu_1^{-1} \text{rot } u \text{ rot } v dx - \langle T_n(v), \phi \rangle = \int_{\Omega} J v dx. \quad (5.13)$$

To the equation  $\text{div } u = 0$  in  $\Omega$ , we associate

$$\int_{\Omega} \text{div } u \text{ div } v dx = 0 \quad \text{for any } v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega). \quad (5.14)$$

Now, since  $\psi$  satisfies  $\Delta \psi = 0$  in  $\Omega'$ ,  $\psi$  is known by (5.4) since  $\lambda = n \cdot \nabla \psi$  and  $\phi = \psi|_{\Gamma}$ , due to Calderon's equations (5.3) are known. Introduce the condition  $\text{rot } u \cdot n = \mu_2 \nabla \psi \cdot n$  by  $\lambda = \mu_2^{-1} T_n(u)$ , where  $T_n$  is defined by (5.8). Then, Calderon's equations (5.3) can be written as

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu_2^{-1} T_n(u) & = -W\phi - \mu_2^{-1} K' T_n(u) & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\phi}{2} & = K\phi - \mu_2^{-1} V T_n(u) & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

The proposed variational formulation is :

Find  $(u, \phi) \in Z$  such that

$$A_0(u, \phi, v, \phi') := a_0(u, v) + b_0(u, \phi, v, \phi') = L(v) \quad \forall (v, \phi') \in Z, \quad (5.15)$$

where

$$a_0(u, v) := \int_{\Omega} \mu_1^{-1} \text{rot } u \text{ rot } v dx + \int_{\Omega} \text{div } u \text{ div } v dx.$$

$$b_0(u, \phi, v, \phi') := \frac{1}{2} \langle T_n(u), \phi' \rangle + \mu_2 \langle W\phi, \phi' \rangle + \langle K' T_n(u), \phi' \rangle - \frac{1}{2} \langle T_n(v), \phi \rangle - \langle T_n(v), K\phi \rangle + \mu_2^{-1} \langle T_n(v), V T_n(u) \rangle.$$

and

$$L(v) := \int_{\Omega} J v dx.$$

In the following theorem we prove that the variational problem (5.15) is well posed.

**Theorem 5.3.1** *The variational problem (5.15) has only one solution  $(u, \phi) \in Z$ ; furthermore, if  $J$  satisfies  $\text{div } J = 0$  in  $\Omega$  and  $J \cdot n = 0$  on  $\Gamma$ , and if  $\psi$  is defined by (5.4) where  $\lambda = \mu_2^{-1} \text{rot } u \cdot n$ , then  $(u, \psi)$  satisfies all equations in **(A)**.*

**Proof :** In order to prove the existence and uniqueness of solution, we use the Lax-Milgram lemma.

By using Cauchy-Schwarz inequality, Lemma 5.2.2 and since  $\mu \in L^\infty(\Omega)$ , we deduce that the linear form  $L(\cdot)$  is continuous on  $Z$ .

Since all operators used in the definition of the bilinear form  $A_0$  are continuous, we obtain easily the continuity of  $A_0$  on  $Z \times Z$ .

For the coercivity of  $A_0$ , let  $(v, \phi) \in Z$ ; then

$$A_0(v, \phi, v, \phi) = \|\mu_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{rot} v\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} v\|_{0,\Omega}^2 + \mu_2^{-1} \langle T_n(v), VT_n(v) \rangle + \mu_2 \langle W\phi, \phi \rangle.$$

By using Lemma 5.2.1, we obtain

$$\begin{aligned} A_0(v, \phi, v, \phi) &\geq \|\mu_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{rot} v\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} v\|_{0,\Omega}^2 + \alpha \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \\ &\geq C \|(v, \phi)\|_Z^2. \end{aligned}$$

Thus  $A_0$  is coercive and the variational problem (5.15) has only one solution  $(u, \phi)$  in  $Z$ .

Now, let  $(u, \phi) \in Z$  be the only solution of (5.15) and suppose that the current density is in  $H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  and let  $\psi$  be defined by (5.4) with  $\lambda = \mu_2^{-1} \operatorname{rot} u \cdot n$ , and let us show that  $(u, \psi)$  satisfies all equations in **(A)**.

We have by (5.15) that  $A_0(u, \phi, v, \phi') = L(v) \quad \forall (v, \phi') \in Z$ .

In particular, if we choose  $\phi' = 0$ , we see that (5.15) is reduced to

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J v dx &= \int_{\Omega} \mu_1^{-1} \operatorname{rot} u \operatorname{rot} v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle T_n(v), \phi \rangle - \langle T_n(v), K\phi \rangle + \mu_2^{-1} \langle T_n(v), VT_n(u) \rangle. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Now, we define  $L_*^2(\Omega)$  and  $H_*^1(\Omega)$  as the spaces of functions  $u$  in  $L^2(\Omega)$  and  $H^1(\Omega)$  with  $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$ , respectively. For any  $p \in L_*^2(\Omega)$ , let  $\rho \in H_*^1(\Omega)$  be the solution of the Neumann problem

$$\begin{cases} \Delta \rho &= p & \text{in } \Omega, \\ n \cdot \nabla \rho &= 0 & \text{in } \Gamma. \end{cases}$$

Setting  $v = \nabla \rho \in H(\operatorname{rot}^0, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega)$  in (5.16), we obtain, since  $J \in H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$ ,

$$0 = \int_{\Omega} J \nabla \rho dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) \Delta \rho dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) p dx$$

Note that, when  $u \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ ,  $\text{div } u \in L_*^2(\Omega)$ , then we deduce from the previous identity that

$$\text{div } u = 0 \quad a.e \quad \text{in } \Omega. \quad (5.17)$$

Now, by using (5.17) and setting  $v \in C_0^\infty(\Omega)^3$ , we see that (5.16) is reduced to

$$\int_{\Omega} \mu_1^{-1} \text{rot } u \text{ rot } v dx = \int_{\Omega} J v dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)^3.$$

We deduce in particular that  $\text{rot}(\mu_1^{-1} \text{rot } u) \in L^2(\Omega)^3$  and we obtain after an integration by parts that  $\text{rot}(\mu_1^{-1} \text{rot } u) = J$  in the sence of distributions on  $\Omega$ . Since  $J \in L^2(\Omega)^3$ , we obtain

$$\text{rot}(\mu_1^{-1} \text{rot } u) = J \quad a.e \quad \text{in } \Omega. \quad (5.18)$$

On the other hand, setting  $v = 0$  and  $\phi' \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  in (5.15) we get

$$\frac{T_n(u)}{2} = -\mu_2 W \phi - K' T_n(u).$$

Define  $\psi \in H^1(\Omega')$  by (5.4) with  $\lambda = \mu_2^{-1} \text{rot } u \cdot n$  and suppose that  $\phi$  is a solution of (5.15). Then  $\psi$  is a harmonic function; i.e  $\psi$  satisfies  $\Delta \psi = 0$  in  $\Omega'$ . In particular, we obtain

$$\frac{\phi}{2} = K \phi - \mu_2^{-1} V T_n(u).$$

In order to deduce the interface condition  $\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n = \nabla \psi \times n$  on  $\Gamma$ , let us start by showing that the mapping

$$\varphi : \begin{cases} H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) & \longrightarrow \{v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3 : v \cdot n = 0 \text{ in } \Gamma\} \\ v & \longrightarrow \varphi(v) = v|_{\Gamma} \end{cases}$$

is surjective.

Let  $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ ; then there exists  $\psi \in H^1(\Omega)^3$  such that  $\psi|_{\Gamma} = \phi$ . If additionally  $\phi \cdot n|_{\Gamma} = 0$  then  $\psi \cdot n|_{\Gamma} = 0$  and thus  $\psi \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ . This implies that  $\varphi$  is surjective.

Using (5.17), (5.9) and the previous identity, we see that (5.16) is reduced to

$$\int_{\Omega} \mu_1^{-1} \text{rot } u \text{ rot } v dx - \int_{\Gamma} (\nabla \psi \times n) v ds = \int_{\Omega} J v dx \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega).$$

Multiplying (5.18) by  $v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$  and integrating by parts, we arrive at

$$\int_{\Omega} \mu_1^{-1} \text{rot } u \text{ rot } v dx - \int_{\Gamma} (\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n) v ds = \int_{\Omega} J v dx \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$$

If we compare the two previous identities, we obtain

$$\int_{\Gamma} (\nabla\psi \times n) v ds = \int_{\Gamma} (\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n) v ds \quad \forall v \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega).$$

This implies that  $\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n = \nabla\psi \times n$  on  $\Gamma$ . ■

**Remark 5.3.3** Let  $(u, \psi) \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega')$  be the solution of **(A)** and set

$$h := \begin{cases} \mu_1^{-1} \text{rot } u & \text{in } \Omega, \\ \nabla\psi & \text{in } \Omega'. \end{cases}$$

Then  $h \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^3)$  since  $\mu_1^{-1} \text{rot } u \times n = \nabla\psi \times n$  on  $\Gamma$  and  $\mu h \in H(\text{div}, \mathbb{R}^3)$  since  $\text{rot } u \cdot n = \mu_2 \nabla\psi \cdot n$  on  $\Gamma$  and satisfies  $\text{rot } h = J$  in  $\Omega$ ,  $\text{rot } h = 0$  in  $\Omega'$  and  $\text{div } \mu h = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ .

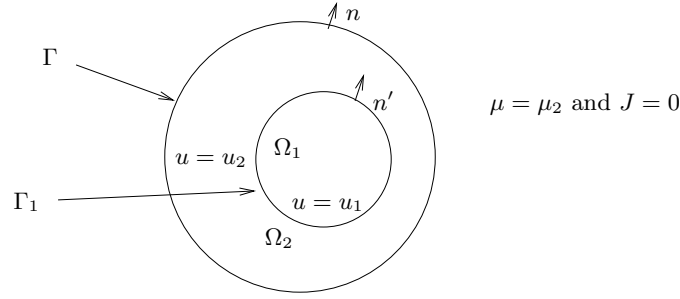
Now, we transform problem **(A)** since in  $\Omega$  we want to use the Local Discontinuous Galerkin method for the discretization of problem **(A)**. We rewrite **(A)** as

$$(\mathbf{A}_0) : \begin{cases} \text{rot } (\mu_1^{-1} \text{rot } u) - \nabla(\text{div } u) & = J & \text{in } \Omega, \\ \Delta\psi & = 0 & \text{in } \Omega', \\ u \cdot n & = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \text{rot } (u) \cdot n & = \mu_2 \nabla\psi \cdot n & \text{on } \Gamma, \\ \mu_1^{-1} \text{rot } (u) \times n & = \nabla\psi \times n & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

**Remark 5.3.4** It is clear that, if  $(u, \psi)$  solves **(A)** then  $(u, \psi)$  solves **(A<sub>0</sub>)**. Conversely, (5.15) is the corresponding formulation for **(A<sub>0</sub>)** and thus **(A<sub>0</sub>)** has only one solution. Hence **(A)** and **(A<sub>0</sub>)** are equivalent.

## 5.4 Discretization

Now, we are interested in the application of the Local Discontinuous Galerkin method to the problem **(A<sub>0</sub>)**. In order to use the previous results for integral operators, high regularity of  $u$  on  $\Gamma$  is necessary. More precisely, if  $u$  is discontinuous over the interface  $\Gamma$ , then  $T_n(u)$  is not in  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and the operator  $V o T_n$  is not well defined. Thus we assume that there exists a bounded, Lipschitz polyhedron  $\Omega_1$  such that  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$  and we define the ‘‘couronne’’  $\Omega_2$  by  $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ , we assume that  $\Omega_2$  is non-empty and denote by  $\Gamma_1$  the boundary of  $\Omega_1$ , (See fig 1). Then, we use the LDG method in  $\Omega_1$  and the FEM method in  $\Omega_2$ .

fig 1.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 

If  $u$  is a function defined on  $\Omega$ , we denote by  $u_1$  and  $u_2$  the restrictions of  $u$  on  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , respectively.

By using (5.18), we deduce that  $\mu_1^{-1} \text{rot } u \in H(\text{rot}, \Omega)$ , then if  $n'$  is the unit outward normal on  $\Gamma_1$ , we have from the continuity of the tangential component of  $\mu_1^{-1} \text{rot } u$ ,  $\mu_{11}^{-1} \text{rot } u_1 \times n' = \mu_{12}^{-1} \text{rot } u_2 \times n'$  on  $\Gamma_1$ . Since  $u \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ , the normal and tangential components of  $u$  are continuous over the interface  $\Gamma_1$  which implies that  $u_1 = u_2$  on  $\Gamma_1$ . In the same manner, we deduce that  $\text{div } u_1 = \text{div } u_2$  on  $\Gamma_1$ . Then, we conclude that the problem associated with  $\Omega_1$  is given by

$$(\mathbf{A}_1) : \begin{cases} \text{rot } (\mu_{11}^{-1} \text{rot } u_1) - \nabla(\text{div } u_1) & = J_1 & \text{in } \Omega_1, \\ u_1 & = u_2 & \text{on } \Gamma_1, \\ \text{div } u_1 & = \text{div } u_2 & \text{on } \Gamma_1, \\ \mu_{11}^{-1} \text{rot } u_1 \times n' & = \mu_{12}^{-1} \text{rot } u_2 \times n' & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$

and the problem associated with  $\Omega_2$  is given by

$$(\mathbf{B}_1) : \begin{cases} \text{rot } (\mu_{12}^{-1} \text{rot } u_2) - \nabla(\text{div } u_2) & = J_2 & \text{in } \Omega_2, \\ \Delta \psi & = 0 & \text{in } \Omega', \\ u_2 \cdot n & = 0 & \text{on } \Gamma, \\ \text{rot } (u_2) \cdot n & = \mu_2 \nabla \psi \cdot n & \text{on } \Gamma, \\ \mu_{12}^{-1} \text{rot } (u_2) \times n & = \nabla \psi \times n & \text{on } \Gamma, \\ u_2 & = u_1 & \text{on } \Gamma_1, \\ \text{div } u_2 & = \text{div } u_1 & \text{on } \Gamma_1, \\ \mu_{11}^{-1} \text{rot } u_1 \times n' & = \mu_{12}^{-1} \text{rot } u_2 \times n' & \text{on } \Gamma_1. \end{cases}$$

Let  $\Pi_h$  be a shape-regular triangulation of the domain  $\Omega$  made up tetrahedra and  $\mathbf{R}_h$  the triangulation of  $\Gamma$  deduced from  $\Pi_h$ . We set  $\Pi_h^1 = \Pi_h|_{\Omega_1}$ ,  $\Pi_h^2 = \Pi_h|_{\Omega_2}$  and have  $\overline{\Omega}_1 = \cup_{K \in \Pi_h^1} \overline{K}$  and  $\overline{\Omega}_2 = \cup_{K \in \Pi_h^2} \overline{K}$ . We will denote by  $h_K$  the diameter of the element  $K \in \Pi_h$ .

### 5.4.1 The mixed formulation LDG

#### Traces and discontinuous finite element spaces

We now introduce certain trace operators and finite element spaces used in the definition of the LDG method.

**Faces :** We define and characterise the faces of the triangulation  $\Pi_h^1$ . An interior face of  $\Pi_h^1$  is defined as the (non-empty) two-dimensional interior of  $\partial K_1 \cap \partial K_2$ , where  $K_1$  and  $K_2$  are two adjacent elements of  $\Pi_h^1$ . A boundary face of  $\Pi_h^1$  is defined as the (non-empty) two-dimensional interior of  $\partial K \cap \partial \Omega_1$ , where  $K$  is a boundary element of  $\Pi_h^1$ . We denote by  $F_h^I$  the union of all interior faces of  $\Pi_h^1$ , by  $F_h^D$  the union of all boundary faces of  $\Pi_h^1$  and let  $F_h$  denote the union of all faces of  $\Pi_h^1$ . Furthermore we associate  $F_h^D$  with  $\Gamma_1$  since  $\Omega_1$  is a polyhedron.

**Traces :** Let  $H^s(\Pi_h^1) = \{v : v|_K \in H^s(K) \quad \forall K \in \Pi_h^1\}$  for  $s > \frac{1}{2}$  be endowed with the norm  $\|v\|_{s, \Pi_h^1}^2 = \sum_{K \in \Pi_h^1} \|v\|_{s, K}^2$ . Then the elementwise traces of functions in  $H^s(\Pi_h^1)$  belong to  $TR(F_h) = \prod_{K \in \Pi_h^1} L^2(\partial K)$ ; they are double-valued on  $F_h^I$  and single-valued on  $F_h^D$ . The space  $L^2(F_h)$  can be identified with the functions in  $TR(F_h)$  for which the two traces values coincide.

**Trace operators :** Let us introduce the following trace operators for piecewise smooth functions. First, let  $w \in TR(F_h)^3$  and  $e \in F_h$ . If  $e$  is an interior face in  $F_h^I$ , we denote by  $K_1$  and  $K_2$  the elements sharing  $e$ , by  $n_i$  the normal unit vector pointing exterior to  $K_i$  and we set  $\omega_i = \omega|_{\partial K_i}$ ,  $i = 1, 2$ . We define the *average*, *tangential* and *normal jumps* of  $w$  at  $x \in e$  as

$$\{\omega\} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad [\omega]_T = n_1 \times \omega_1 + n_2 \times \omega_2 \quad \text{and} \quad [\omega]_N = n_1 \cdot \omega_1 + n_2 \cdot \omega_2$$

if  $e \in F_h^D$ , we set for  $x \in e$

$$\{\omega\} = \omega, \quad [\omega]_T = n' \times \omega \quad \text{and} \quad [\omega]_N = n' \cdot \omega.$$

If  $w \in H(\text{rot}, \Omega_1)$ , then, for all  $e \in F_h^I$  the jump condition  $[\omega]_T = 0$  holds in  $L^2(e)^3$  and if  $w \in H(\text{div}, \Omega_1)$ , then, for all  $e \in F_h^I$  the jump condition  $[\omega]_N = 0$  holds in  $L^2(e)$ .

**Finite element spaces.** Let  $p = (p_K)_{K \in \Pi_h^1}$  be a degree vector that assigns to each element  $K \in \Pi_h^1$  a polynomial approximation order  $p_K \geq 1$ . The generic  $hp$ -finite element space of piecewise polynomials is given by

$$S^p(\Pi_h^1) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in S^{p_K}(K) \quad \forall K \in \Pi_h^1\},$$

where  $S^{p_K}(K)$  is the space of real valued polynomials of degree at most  $p_K$  in  $K$ .

Now, we set

$$\Sigma_h = S^p(\Pi_h^1)^3 \quad , \quad Q_h = \{\text{div}_h(v) : v \in \Sigma_h\} \quad (5.19)$$

where  $\text{div}_h$  is the elementwise *divergence* operator defined over the partition of  $\Omega_1$ .

### Derivation of The LDG method

As a first step, we rewrite  $(\mathbf{A}_1)$  as a first-order problem by introducing auxiliary variables  $s_1, w_1$  and  $\rho_1$ , where

$$s_1 = \mu_{11}^{-1}w_1, \quad w_1 = \text{rot } u_1 \quad \text{and} \quad \rho_1 = \text{div } u_1 \quad \text{in } \Omega_1. \quad (5.20)$$

The problem  $(\mathbf{A}_1)$  can be written as the following equivalent transmission problem

$$(\mathbf{A}_2) : \left\{ \begin{array}{lll} \text{rot } s_1 - \nabla \rho_1 & = & J_1 \quad \text{in } \Omega_1, \\ s_1 & = & \mu_{11}^{-1}w_1 \quad \text{in } \Omega_1, \\ w_1 & = & \text{rot } u_1 \quad \text{in } \Omega_1, \\ \rho_1 & = & \text{div } u_1 \quad \text{in } \Omega_1, \\ u_1 & = & u_2 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ \rho_1 & = & \text{div } u_2 \quad \text{on } \Gamma_1, \\ s_1 \times n' & = & \mu_{12}^{-1}\text{rot } u_2 \times n' \quad \text{on } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Multiplying the identities in  $(\mathbf{A}_2)$  by a functions test  $v_1, z_1, t_1$  and  $\psi_1$  and integrating by parts, using Stokes and Green formulas, we arrive at

$$(\mathbf{A}_3) : \left\{ \begin{array}{l} \int_K \mu_{11}^{-1}w_1 z_1 dx = \int_K s_1 z_1 dx \\ \int_K w_1 t_1 dx = \int_K u_1 \text{rot } t_1 dx - \int_{\partial K} t_1 (u_1 \times n_K) ds \\ \int_K J_1 v_1 dx = \int_K s_1 \text{rot } v_1 dx + \int_K \rho_1 \text{div } v_1 dx - \int_{\partial K} v_1 (s_1 \times n_K) ds \\ \quad \quad \quad - \int_{\partial K} (v_1 \cdot n_K) \rho_1 ds \\ \int_K \rho_1 \psi_1 dx = - \int_K u_1 \nabla \psi_1 dx + \int_{\partial K} (u_1 \cdot n_K) \psi_1 ds. \end{array} \right.$$

For all  $K \in \Pi_h^1$ , where  $n_K$  is the unit outward normal on  $\partial K$ .

Now, we approximate the variables  $(w_1, s_1, u_1, \rho_1)$  in  $(\mathbf{A}_3)$  by a functions  $(w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h) \in \Sigma_h^3 \times Q_h$  and we obtain the following discrete formulation.

Find  $(w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h) \in \Sigma_h^3 \times Q_h$  such that, for all  $K \in \Pi_h^1$  and for any choice of test functions  $(z_1, t_1, v_1, \psi_1) \in \Sigma_h^3 \times Q_h$  we have

$$(\mathbf{A}_4) : \left\{ \begin{array}{l} \int_K \mu_{11}^{-1} w_1 z_1 dx = \int_K s_1 z_1 dx \\ \int_K w_1 t_1 dx = \int_K u_1 \operatorname{rot} t_1 dx - \int_{\partial K} t_1 (\hat{u}_1^h \times n_K) ds \\ \int_K J_1 v_1 dx = \int_K s_1 \operatorname{rot} v_1 dx + \int_K \rho_1 \operatorname{div} v_1 dx - \int_{\partial K} v_1 (\hat{s}_1^h \times n_K) ds \\ \quad - \int_{\partial K} (v_1 \cdot n_K) \hat{\rho}_1^h ds \\ \int_K \rho_1 \psi_1 dx = - \int_K u_1 \nabla \psi_1 dx + \int_{\partial K} (\hat{u}_1^h \cdot n_K) \psi_1 ds. \end{array} \right.$$

Here  $\hat{u}_1^h, \hat{s}_1^h, \hat{\rho}_1^h$  denote the so-called numerical fluxes which are approximations to the traces of  $u_1^h, s_1^h$  and  $\rho_1^h$  on  $\partial K$ . They are defined in the next section.

### The numerical fluxes

As in [4], we study the numerical fluxes as follows. Given  $u$  and  $s$  in  $H^s(\Pi_h^1)^3$  with  $s > \frac{1}{2}$ , the fluxes  $\hat{u} = \hat{u}(u)$  and  $\hat{s} = \hat{s}(s, u)$  belong to  $L^2(F_h)^3$ . Similarly, for a given  $\rho \in H^s(\Pi_h^1)$  with  $s > \frac{1}{2}$ , the fluxes  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\rho, u)$  belong to  $L^2(F_h)$ . The fluxes are thus single valued on the union of faces. Furthermore the flux  $\hat{u}_1^h$  is assumed to be independant of the auxiliary variables in order to be able to eliminate it from the system of equations for the derivation of the primal formulation.

Now, we define the following conservative and consistent (in the sence of [4]) numerical fluxes as follows

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{s}_1^h = \{s_1^h\} - a[u_1^h]_T & \text{on } F_h^I \quad \text{and} \quad \hat{s}_1^h = s_1^h - a(u_2^h - u_1^h) \times n' & \text{if } e \subset \Gamma_1 \\ \hat{\rho}_1^h = \{\rho_1^h\} - a[u_1^h]_N & \text{on } F_h^I \quad \text{and} \quad \hat{\rho}_1^h = \rho_1^h - a(u_1^h - u_2^h) \cdot n' & \text{if } e \subset \Gamma_1 \\ \hat{u}_1^h = \{u_1^h\} & \text{on } F_h^I \quad \text{and} \quad \hat{u}_1^h = u_2^h & \text{if } e \subset \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

where  $a$  is a stabilization parameter and will be chosen depending on the local *meshsize* and *polynomial degree* and the magnetic permeability.

### The mixed formulation of the LDG method

Using the numerical fluxes defined by (5.21) and summing the equations in  $(\mathbf{A}_4)$ , noting that

$\forall v, t \in TR(F_h)^3, \forall \psi \in TR(F_h)$  we have

$$\sum_{K \in \Pi_h^1} \int_{\partial K} v(t \times n_K) ds = \int_{F_h} [v]_T \{t\} ds - \int_{F_h^I} [t]_T \{v\} ds \quad (5.22)$$



$$\sum_{K \in \Pi_h^1} \int_{\partial K} \psi(v \cdot n_K) ds = \int_{F_h^I} ([v]_N \{\psi\} + [\psi]_N \{v\}) ds + \int_{F_h^D} \psi(v \cdot n') ds \quad (5.23)$$

we obtain

**The mixed formulation of the LDG method in  $\Omega_1$  :** Find  $(w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h) \in \Sigma_h^3 \times Q_h$  such that

$$(\mathbf{A}_5) : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1} w_1^h z_1 dx = \int_{\Omega_1} s_1^h z_1 dx, \\ \int_{\Omega_1} w_1^h t_1 dx = \int_{\Omega_1} t_1 \text{rot}_h(u_1^h) dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_T \{t_1\} ds - \int_{\Gamma_1} [u^h]_T t_1 ds, \\ \int_{\Omega_1} \rho_1^h \psi_1 dx = \int_{\Omega_1} \psi_1 \text{div}_h(u_1^h) dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_N \{\psi_1\} ds - \int_{\Gamma_1} [u^h]_N \psi_1 ds, \\ \int_{\Omega_1} J_1 v_1 dx = \int_{\Omega_1} s_1^h \text{rot}_h(v_1) dx - \int_{F_h^I} [v_1]_T \{s_1^h\} ds + \int_{F_h^I} a[u_1^h]_T [v_1]_T ds \\ \quad + \int_{\Omega_1} \rho_1^h \text{div}_h(v_1) dx - \int_{F_h^I} [v_1]_N \{\rho_1^h\} ds + \int_{F_h^I} a[u_1^h]_N [v_1]_N ds \\ \quad - \int_{\Gamma_1} (n' \times v_1) s_1^h ds - \int_{\Gamma_1} a[u^h]_T (v_1 \times n') ds - \int_{\Gamma_1} (v_1 \cdot n') \rho_1 ds \\ \quad + \int_{\Gamma_1} a[u^h]_N (v_1 \cdot n') ds \end{array} \right.$$

for any choice of test functions  $(z_1, t_1, v_1, \psi_1) \in \Sigma_h^3 \times Q_h$ , where we have denoted by

$$[u^h]_T = (u_2^h - u_1^h) \times n' \quad \text{and} \quad [u^h]_N = (u_1^h - u_2^h) \cdot n' \quad \text{on } \Gamma_1.$$

### 5.4.2 Coupling LDG with the FEM and BEM methods

Let us first recall that for all  $u \in H(\text{rot}, \Omega_2)$ , we have  $\text{rot } u \cdot n|_{\Gamma} \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and since the two components of  $\partial\Omega_2$  are two subsets of  $\partial\Omega_2$  without boundary (*i.e.* :  $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega_2 \setminus \Gamma$  is empty),  $H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  coincides with  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ; see, e.g., [3]. It follows that for all  $u \in H(\text{rot}, \Omega_2)$ , we have  $\text{rot } u \cdot n|_{\Gamma} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

In order to obtain the variational formulation, we introduce

$$V_0 = \{v \in H^1(\Omega_2)^3 \quad : \quad v \cdot n = 0 \quad \text{on } \Gamma\}$$

By multiplying the equation in  $(\mathbf{B}_1)$  by a function  $v_2 \in V_0$  and integrating by parts, we obtain

$$(\mathbf{B}_2) : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2) \text{rot}(v_2) dx - \int_{\partial\Omega_2} v_2 (\mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2) \times n_2) ds \\ \quad + \int_{\Omega_2} \text{div}(u_2) \text{div}(v_2) dx - \int_{\partial\Omega_2} (v_2 \cdot n_2) \text{div } u_2 ds, \end{array} \right.$$

where  $n_2$  is the unit outward normal on  $\partial\Omega_2$ .

If  $n'$  denotes the unit outward normal on  $\Gamma_1$ , we obtain, since  $\partial\Omega_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma$  and  $\Gamma_1 \cap \Gamma$  is empty,

$$\int_{\partial\Omega_2} (v_2 \cdot n_2) \operatorname{div} u_2 ds = - \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \operatorname{div} u_2 ds + \int_{\Gamma} (v_2 \cdot n) \operatorname{div} u_2 ds.$$

Using the conditions  $\rho_1 = \operatorname{div} u_2$  on  $\Gamma_1$  and  $v_2 \cdot n = 0$  on  $\Gamma$ , we get

$$\int_{\partial\Omega_2} (v_2 \cdot n_2) \operatorname{div} u_2 ds = - \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \rho_1 ds. \quad (5.24)$$

Similarly, we have, since  $\mu_{11}^{-1} \operatorname{rot}(u_1) \times n' = \mu_{12}^{-1} \operatorname{rot}(u_2) \times n' = s_1 \times n'$  on  $\Gamma_1$ ,

$$\int_{\partial\Omega_2} v_2 (\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} u_2 \times n_2) ds = - \int_{\Gamma_1} v_2 (s_1 \times n') ds + \int_{\Gamma} v_2 (\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} u_2 \times n) ds.$$

For coupling the FEM method with the boundary element method, we define here

$$T'_n : \begin{cases} V_0 & \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u & \longrightarrow T'_n(u) = \operatorname{rot}(u) \cdot n|_{\Gamma}. \end{cases} \quad (5.25)$$

Let  $v \in V_0$  and  $\tilde{v}$  be prolongation by 0 of  $v$  on  $\Omega$ ; then  $v|_{\Gamma} = \tilde{v}|_{\Gamma}$  and  $T'_n(v) = T'_n(\tilde{v})$  where  $T'_n$  is given by (5.8). Using (5.9) we obtain, for all  $\psi \in H^1(\Omega')$  with  $\psi|_{\Gamma} = \phi$ , and for all  $v \in V_0$ ,

$$\int_{\Gamma} (\nabla \psi \times n) v ds = \int_{\Gamma} \phi T'_n(v) ds. \quad (5.26)$$

Then, by using the condition  $\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} u_2 \times n = \nabla \psi \times n$  on  $\Gamma$ , we obtain

$$\int_{\partial\Omega_2} v_2 (\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} u_2 \times n_2) ds = - \int_{\Gamma_1} v_2 (s_1 \times n') ds + \int_{\Gamma} \phi T'_n(v_2) ds. \quad (5.27)$$

Now, we introduce the condition  $\operatorname{rot}(u_2) \cdot n = \mu_2 \lambda$  on  $\Gamma$  in  $(\mathbf{B}_1)$  by  $\lambda = \mu_2^{-1} T'_n(u_2)$  where  $\lambda = n \cdot \nabla \psi$ . Then Calderon's equations can be written as :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu_2^{-1} T'_n(u_2) & = -W\phi - \mu_2^{-1} K' T'_n(u_2) & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\phi}{2} & = K\phi - \mu_2^{-1} V T'_n(u_2) & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

By multiplying the previous identities by test functions  $\phi'$  and  $T'_n(v_2)$ , we obtain the following formulation  $(\mathbf{B}_3)$  associated with  $(\mathbf{B}_1)$

$$(\mathbf{B}_3) : \begin{cases} \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \operatorname{rot}(u_2) \operatorname{rot}(v_2) dx + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(u_2) \operatorname{div}(v_2) dx \\ \quad + \int_{\Gamma_1} (n' \times v_2) s_1 ds + \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \rho_1 ds - \frac{1}{2} \langle T'_n(v_2), \phi \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \langle T'_n(u_2), \phi' \rangle + \mu_2 \langle W\phi, \phi' \rangle + \langle K' T'_n(u_2), \phi' \rangle \\ \quad - \langle T'_n(v_2), K\phi \rangle + \mu_2^{-1} \langle T'_n(v_2), V T'_n(u_2) \rangle. \end{cases}$$

Now, we have to construct finite element spaces which approximate the space

$$H_{0n}^1(\Omega_2)^3 := \{v \in H^1(\Omega_2)^3, \quad v \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

The idea consists in satisfying the boundary condition  $v \cdot n = 0$  only in a weak sense. We remark that

$$v \cdot n = 0 \iff \int_{\Gamma} (v \cdot n) \Psi = 0 \quad \forall \Psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Let us first define the spaces

$$S_h := \{\varphi \in C^0(\overline{\Omega_2}); \varphi \in P_1(K), \quad \forall K \in \Pi_h^2 \}.$$

and

$$S_{h,0n}^3 := \{v \in S_h^3; \int_{\Gamma} (v \cdot n) \Psi = 0 \quad \forall \Psi \in S_h(\Gamma) \}$$

where

$$S_h(\Gamma) = \{\varphi|_K; \varphi \in S_h \}.$$

Observe that  $S_{h,0n}^3$  is not included in  $H_{0n}^1(\Omega_2)^3$  at least in general. In fact, an approximate way to deal with the constraint

$$\int_{\Gamma} (v \cdot n) \Psi = 0 \quad \forall \Psi \in S_h(\Gamma) \tag{5.28}$$

is to use a quadrature formula for computing the integral over  $\Gamma$ . On a triangle  $T \in \mathbf{R}_h$  with vertices  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , we use the quadrature formula

$$\int_T \varphi dx \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^{i=3} \varphi(a_i), \quad |T| = \text{area of } T.$$

Then the constraint  $\int_{\Gamma} (v \cdot n) \Psi = 0$  is approximated by

$$\sum_{i \in I} \sum_{T \in A(i)} \frac{|T|}{3} (v(a_i) \cdot n_T) \Psi(a_i) = 0 \quad \forall \Psi \in S_h(\Gamma)$$

where  $\{a_i; i \in I\}$  denotes the set of all vertices of the triangulation  $\mathbf{R}_h$ ,  $A(i)$  the set of all triangles  $T \in \mathbf{R}_h$  which are  $a_i$  as a vertex and  $n_T$  the unit normal to  $T$ . Hence defining an approximate normal  $n_i$  to  $\Gamma$  at the vertex  $a_i \in \mathbf{R}_h$  by

$$n_i = \frac{\sum_{T \in A(i)} |T| n_T}{\sum_{T \in A(i)} |T|},$$

the constraint (5.28) becomes

$$v(a_i) \cdot n_i = 0, \quad i \in I.$$

Now, instead of  $S_{h,0n}^3$ , we use the subspace

$$V_h = \{u \in S_h^3 \quad ; \quad u(a_i) \cdot n_i = 0, \quad i \in I\} \quad (5.29)$$

of  $S_h^3$  for approximation of  $H_{0n}^1(\Omega_2)^3$ . Then we approximate the variables  $(u_2, \phi)$  in  $(\mathbf{B}_3)$  by functions  $(u_2^h, \phi^h)$  in the finite dimensional space  $V_h \times Y_h$  with :

$$Y_h = \{\phi \in C^0(\Gamma) \quad : \quad \phi|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathbf{R}_h\}. \quad (5.30)$$

We know that  $Y_h \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Now, we associate with  $(\mathbf{B}_3)$ , the following discrete formulation :

Find  $(u_2^h, \phi^h) \in V_h \times Y_h$  such that :

$$(\mathbf{B}_4) : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2^h) \text{rot}(v_2) dx + \int_{\Omega_2} \text{div}(u_2^h) \text{div}(v_2) dx \\ \quad + \int_{\Gamma_1} (n' \times v_2) \hat{s}_1^h ds + \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \hat{\rho}_1^h ds - \frac{1}{2} \langle T'_n(v_2), \phi^h \rangle \\ \quad + \frac{1}{2} \langle T'_n(u_2^h), \phi' \rangle + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi' \rangle + \langle K' T'_n(u_2^h), \phi' \rangle \\ \quad - \langle T'_n(v_2), K \phi^h \rangle + \mu_2^{-1} \langle T'_n(v_2), VT'_n(u_2^h) \rangle, \end{array} \right.$$

for any choice of test functions  $(v_2, \phi') \in V_h \times Y_h$ , where  $\hat{s}_1^h$  and  $\hat{\rho}_1^h$  are the numerical fluxes associated to the auxiliary variables  $s_1$  and  $\rho_1$  and defined in (5.21). By using these fluxes, we obtain the following formulation :

Find  $(u_2^h, \phi^h) \in V_h \times Y_h$  such that

$$(\mathbf{B}_5) : \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2^h) \text{rot}(v_2) dx + \int_{\Omega_2} \text{div}(u_2^h) \text{div}(v_2) dx \\ \quad - \int_{\Gamma_1} a(n' \times v_2) [u^h]_T ds + \int_{\Gamma_1} (n' \times v_2) \hat{s}_1^h ds + \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \hat{\rho}_1^h ds \\ \quad - \int_{\Gamma_1} a(v_2 \cdot n') [u^h]_N ds - \frac{1}{2} \langle T'_n(v_2), \phi^h \rangle + \frac{1}{2} \langle T'_n(u_2^h), \phi' \rangle \\ \quad + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi' \rangle + \langle K' T'_n(u_2^h), \phi' \rangle - \langle T'_n(v_2), K \phi^h \rangle \\ \quad + \mu_2^{-1} \langle T'_n(v_2), VT'_n(u_2^h) \rangle, \end{array} \right.$$

for any choice of test functions  $(v_2, \phi') \in V_h \times Y_h$ .

### 5.4.3 The coupled LDG-FEM-BEM formulation

The coupled LDG-FEM-BEM formulation associated to the problem  $(\mathbf{A}_0)$ , is given by :

Find  $(w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h, u_2^h, \phi^h) \in \Sigma_h^3 \times Q_h \times V_h \times Y_h$  such that  $(\mathbf{A}_5)$  and  $(\mathbf{B}_5)$  hold; *i.e.*,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1} w_1^h z_1 dx = \int_{\Omega_1} s_1^h z_1 dx \\ \int_{\Omega_1} w_1^h t_1 dx = \int_{\Omega_1} t_1 \text{rot}_h(u_1^h) dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_T \{t_1\} ds - \int_{\Gamma_1} [u^h]_T t_1 ds \\ \int_{\Omega_1} \rho_1^h \psi_1 dx = \int_{\Omega_1} \psi_1 \text{div}_h(u_1^h) dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_N \{\psi_1\} ds - \int_{\Gamma_1} [u^h]_N \psi_1 ds \\ \int_{\Omega_1} J_1 v_1 dx = \int_{\Omega_1} s_1^h \text{rot}_h(v_1) dx - \int_{F_h^I} [v_1]_T \{s_1^h\} ds + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_T [v_1]_T ds \\ \quad + \int_{\Omega_1} \rho_1^h \text{div}_h(v_1) dx - \int_{F_h^I} [v_1]_N \{\rho_1^h\} ds + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_N [v_1]_N ds \\ \quad - \int_{\Gamma_1} (n' \times v_1) s_1^h ds - \int_{\Gamma_1} a [u^h]_T (v_1 \times n') ds - \int_{\Gamma_1} (v_1 \cdot n') \rho_1 ds \\ \quad + \int_{\Gamma_1} a [u^h]_N (v_1 \cdot n') ds \\ \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2^h) \text{rot}(v_2) dx + \int_{\Omega_2} \text{div}(u_2^h) \text{div}(v_2) dx \\ \quad - \int_{\Gamma_1} a (n' \times v_2) [u^h]_T ds + \int_{\Gamma_1} (n' \times v_2) s_1^h ds + \int_{\Gamma_1} (v_2 \cdot n') \rho_1^h ds \\ \quad - \int_{\Gamma_1} a (v_2 \cdot n') [u^h]_N ds - \frac{1}{2} \langle T_n'(v_2), \phi^h \rangle + \frac{1}{2} \langle T_n'(u_2^h), \phi' \rangle \\ \quad + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi' \rangle + \langle K' T_n'(u_2^h), \phi' \rangle - \langle T_n'(v_2), K \phi^h \rangle \\ \quad + \mu_2^{-1} \langle T_n'(v_2), V T_n'(u_2^h) \rangle, \end{array} \right.$$

for any choice of test functions  $(z_1, t_1, v_1, \psi_1, v_2, \phi') \in \Sigma_h^3 \times Q_h \times V_h \times Y_h$ .

In the following theorem we show that the coupled formulation is well posed and we prove the consistency of the method.

**Theorem 5.4.1** *The LDG-FEM-BEM formulation introduced above is consistent and has only one solution  $(w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h, u_2^h, \phi^h) \in \Sigma_h^3 \times Q_h \times V_h \times Y_h$ .*

**Proof :** We start by showing the consistency of the method. It is necessary to show that the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$  satisfies all identities in  $(\mathbf{A}_5)$  and  $(\mathbf{B}_5)$ . The first three identities of  $(\mathbf{A}_5)$  are trivial since  $s_1 = \mu_{11}^{-1} w_1$ ,  $w_1 = \text{rot } u_1$  and

$\rho_1 = \operatorname{div} u_1$  in  $\Omega_1$ .

If  $(u, \psi)$  is the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$ , then  $u \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H(\operatorname{div}, \Omega)$ . In particular the normal and tangential jumps of  $u_1$  over the interior faces of  $\Pi_h^1$  are identically zero and the normal and tangential jumps of  $u$  over  $\Gamma_1$  are also zero.

From (5.17) and (5.18), we deduce that  $s_1 \in H(\operatorname{rot}, \Omega_1)$  and  $\rho_1 \in H^1(\Omega_1)$ . Then by using (5.22) and (5.23), we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} s_1 \operatorname{rot}_h v_1 dx - \int_{F_h} [v_1]_T \{s_1\} ds &= \int_{\Omega_1} v_1 \operatorname{rot} s_1 dx, \\ \int_{\Omega_1} \rho_1 \operatorname{div}_h v_1 dx - \int_{F_h} [v_1]_N \{\rho_1\} ds &= - \int_{\Omega_1} \nabla \rho_1 v_1 dx. \end{aligned}$$

Thus we deduce after an integration by parts that the fourth identity in  $(\mathbf{A}_5)$  is satisfied.

In order to prove the consistency of  $(\mathbf{B}_5)$ , we first note that if  $u$  is the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$ , then  $u \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)^3$  and in particular  $u_2 \in H^1(\Omega_2)^3$  with  $u_2 \cdot n = 0$  on  $\Gamma$ .

Let  $(u, \psi)$  be a solution of  $(\mathbf{A}_0)$ ; then since  $\operatorname{div} u_1 = \operatorname{div} u_2 = \rho_1$  on  $\Gamma_1$  and  $s_1 \times n' = \mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} u_2 \times n'$  on  $\Gamma_1$  and knowing that the normal and tangential jumps of  $u$  over  $\Gamma_1$  are zero, we see after an integration by parts and using (5.9) that the identity  $(\mathbf{B}_5)$  is reduced to

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} J_2 v_2 ds &= \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} (u_2^h)) v_2 dx - \int_{\Omega_2} \nabla (\operatorname{div} (u_2^h)) v_2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle T'_n(v_2), \phi^h \rangle + \frac{1}{2} \langle T'_n(u_2^h), \phi' \rangle + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi' \rangle \\ &\quad + \langle K' T'_n(u_2^h), \phi' \rangle - \langle T'_n(v_2), K \phi^h \rangle + \mu_2^{-1} \langle T'_n(v_2), V T'_n(u_2^h) \rangle. \end{aligned}$$

Now, if  $\phi = \psi|_\Gamma$  and  $\lambda = \mu_2^{-1} \operatorname{rot} (u_2) \cdot n = n \cdot \nabla \psi$ , then  $\phi$  and  $\lambda$  satisfy Calderon's equations (5.3) and the previous identity is reduced to

$$\int_{\Omega_2} J_2 v_2 ds = \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (\mu_{12}^{-1} \operatorname{rot} (u_2^h)) v_2 dx - \int_{\Omega_2} \nabla (\operatorname{div} (u_2^h)) v_2 dx,$$

which is trivially satisfied by  $u_2$  the restriction on  $\Omega_2$  of the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$ . It follows that the FEM-LDG-BEM formulation is consistent.

Let us show the existence and uniqueness of solution associated to the coupled formulation. Since our problem is linear and finite-dimensional, in order to show the existence and uniqueness of solution, it suffices to show that if  $J_1 = J_2 = 0$ , then  $w_1^h = s_1^h = \rho_1^h = u_1^h = u_2^h = \phi^h = 0$ .

Setting  $(z_1, t_1, v_1, \psi_1) = (w_1^h, s_1^h, u_1^h, \rho_1^h)$  in  $(\mathbf{A}_5)$ , we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1} (w_1^h)^2 dx &= \int_{\Omega_1} s_1^h w_1^h dx \\ \int_{\Omega_1} s_1^h w_1^h dx &= \int_{\Omega_1} \text{rot}_h(u_1^h) s_1^h dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_T \{s_1^h\} ds - \int_{\Gamma_1} (u_2^h \times n' - u_1^h \times n') s_1^h ds \\ \int_{\Omega_1} (\rho_1^h)^2 dx &= \int_{\Omega_1} \rho_1^h \text{div}_h(u_1^h) dx - \int_{F_h^I} [u_1^h]_N \{\rho_1^h\} ds - \int_{\Gamma_1} ((u_1^h - u_2^h) \cdot n') \rho_1^h ds. \end{aligned}$$

Introducing these identities in the fourth identity of **(A<sub>5</sub>)**, we obtain, since  $J_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1} (w_1^h)^2 dx + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_T^2 ds + \int_{\Omega_1} (\rho_1^h)^2 dx + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_N^2 ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} a ((u_1^h - u_2^h) \times n') (u_1^h \times n') ds + \int_{\Gamma_1} a ((u_1^h - u_2^h) \cdot n') (u_1^h \cdot n') ds. \end{aligned}$$

In the same manner, if we set  $v_2 = u_2^h$  and  $\phi' = \phi^h$  in **(B<sub>5</sub>)**, we obtain, since  $J_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} (\text{rot}(u_2^h))^2 dx + \int_{\Omega_2} (\text{div} u_2^h)^2 dx + \int_{\Gamma_1} (n \times u_2^h) s_1^h ds + \int_{\Gamma_1} (u_2^h \cdot n) \rho_1^h ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} a (n' \times u_2^h) (n' \times (u_2^h - u_1^h)) ds - \int_{\Gamma_1} a ((u_1^h - u_2^h) \cdot n') (u_2^h \cdot n') ds \\ &\quad + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi^h \rangle + \mu_2^{-1} \langle T_n(u_2^h), VT_n(u_2^h) \rangle. \end{aligned}$$

Summing the two previous identities, we arrive at

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1} (w_1^h)^2 dx + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_T^2 ds + \int_{\Omega_1} (\rho_1^h)^2 dx + \int_{F_h^I} a [u_1^h]_N^2 ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} a [u^h]_T^2 ds + \int_{\Gamma_1} a [u^h]_N^2 ds + \int_{\Omega_2} (\text{div} u_2^h)^2 ds + \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} (\text{rot}(u_2^h))^2 dx \\ &\quad + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi^h \rangle + \mu_2^{-1} \langle T_n'(u_2^h), VT_n'(u_2^h) \rangle. \end{aligned}$$

Note that the operators  $V$  and  $W$  are elliptic by Lemma 5.2.1, we deduce from the previous identity, since  $\mu_{11}, a, \mu_{12}, \mu_2 > 0$ , that :

$$\phi^h = \rho_1^h = w_1^h = 0, \quad (5.31)$$

$$[u^h]_T = [u^h]_N = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (5.32)$$

$$[u_1^h]_T = [u_1^h]_N = 0 \quad \text{on } F_h^I, \quad (5.33)$$

$$\text{rot}(u_2^h) = \text{div}(u_2^h) = 0 \quad \text{in } \Omega_2. \quad (5.34)$$

Now, noting that  $w_1^h = 0$  and setting  $z_1 = s_1^h$  in the first identity of  $(\mathbf{A}_5)$ , we obtain

$$s_1^h = 0.$$

From the third and second identities of  $(\mathbf{A}_5)$  we have, respectively.

$$0 = \int_{\Omega_1} \psi_1 \operatorname{div}(u_1^h) dx \quad \forall \psi_1 \in Q_h \text{ and } 0 = \int_{\Omega_1} t_1 \operatorname{rot}_h(u_1^h) dx \quad \forall t_1 \in \Sigma_h.$$

In particular, for  $\psi_1 = \operatorname{div}_h(u_1^h) \in Q_h$  and since  $\operatorname{rot}_h(\Sigma_h) \subset \Sigma_h$  we obtain

$$0 = \operatorname{div}_h(u_1^h) = \operatorname{rot}_h(u_1^h) \text{ in } \Omega_1.$$

Using (5.33), we deduce from the previous identity that  $u_1^h \in H(\operatorname{rot}^0, \Omega_1) \cap H(\operatorname{div}^0, \Omega_1)$ . Now, from the definition of  $V_h$ ,  $u_2^h$  satisfies  $u_2^h \cdot n_{|\Gamma} = 0$ . From (5.32), (5.34) and  $u_1^h \in H(\operatorname{rot}^0, \Omega_1) \cap H(\operatorname{div}^0, \Omega_1)$  and  $u_2^h \cdot n_{|\Gamma} = 0$ , we deduce that the function  $u$  defined by  $u = u_1^h$  in  $\Omega_1$  and  $u = u_2^h$  in  $\Omega_2$  satisfies  $u \in H(\operatorname{rot}^0, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}^0, \Omega)$  and thus by using Lemma 5.2.2  $u$  is identically zero since  $\Omega$  is simply connected and Lipschitz-continuous. It then follows that the formulation has a unique solution ■

#### 5.4.4 Primal formulation

In this subsection, we eliminate the auxiliary variables  $s, w$  and  $\rho$  introduced in (5.20) and derive the primal formulation only with the variable  $u := (u_1, u_2)$  and  $\phi$ . This is possible since the fluxes  $\hat{u}_1$  are chosen independently of  $s$  and  $\rho$ . Let us define

$$V_h^* := \Sigma_h \times V_h \text{ and } V(h) := \{w = (w_1, w_2) \in H(\operatorname{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega)\} + V_h^* \quad (5.35)$$

For  $v \in V(h)$ , let  $L_1$  and  $L_2$  be the lifting operators defined as follows

$$L_1 : V(h) \rightarrow \Sigma_h \text{ and } L_2 : V(h) \rightarrow Q_h \quad \text{such that}$$

$$\int_{\Omega_1} L_1(v) t dx = \int_{F_h^I} [v_1]_T \{t\} ds + \int_{\Gamma_1} t [v]_T ds \quad \forall t \in \Sigma_h \quad (5.36)$$

and

$$\int_{\Omega_1} L_2(v) \psi dx = \int_{F_h^I} [v_1]_N \{\psi\} ds + \int_{\Gamma_1} [v]_N \psi ds \quad \forall \psi \in Q_h. \quad (5.37)$$



Now, from the first identity in **(A<sub>5</sub>)**, we have  $s_1^h = \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1}w_1^h)$ , where  $\Pi_{\Sigma_h}$  denote the  $L^2$ - projection onto  $\Sigma_h$ , then, knowing that  $\text{rot}_h(\Sigma_h) \subset \Sigma_h$ , we deduce from the definition of  $L_1$  and the second identity in **(A<sub>5</sub>)** that

$$s_1^h = \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1}(\text{rot}_h(u_1^h) - L_1(u^h))).$$

In the same manner, if we denote by  $\Pi_{Q_h}$  the  $L^2$ - projection onto  $Q_h$ , we have

$$\rho_1^h = \Pi_{Q_h}(\text{div}_h(u_1^h) - L_2(u^h)).$$

Summing the fourth identity in **(A<sub>5</sub>)** with **(B<sub>5</sub>)** and using the two previous identities, we obtain the following

**Primal formulation :** Find  $(u^h, \phi^h) = ((u_1^h, u_2^h), \phi^h) \in V_h^* \times Y_h$  such that

$$A_h(u^h, v, \phi^h, \phi') := B_h(u^h, v) + I_h(u^h, v) + J_h(u^h, v, \phi^h, \phi') = F_h(v), \quad (5.38)$$

for any choice of test functions  $(v, \phi') = ((v_1, v_2), \phi') \in V_h^* \times Y_h$ , where

$$\begin{aligned} B_h(u^h, v) := & \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1}(\text{rot}_h u_1^h - L_1(u^h))(\text{rot}_h v_1 - L_1(v)) dx \\ & + \int_{\Omega_1} (\text{div}_h(u_1^h) - L_2(u^h))(\text{div}_h(v_1) - L_2(v)) dx \\ & + \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-1} \text{rot}(u_2^h) \text{rot}(v_2) dx + \int_{\Omega_2} \text{div}(u_2^h) \text{div} v_2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_h(u^h, v) := & \int_{F_h^I} a[u_1^h]_T[v_1]_T ds + \int_{F_h^I} a[u_1^h]_N[v_1]_N ds + \int_{\Gamma_1} a[u^h]_T[v]_T ds \\ & + \int_{\Gamma_1} a[u^h]_N[v]_N ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_h(u^h, v, \phi^h, \phi') := & \frac{1}{2} \langle T'_n(u_2^h), \phi' \rangle + \mu_2 \langle W \phi^h, \phi' \rangle + \langle K' T'_n(u_2^h), \phi' \rangle \\ & - \frac{1}{2} \langle T'_n(v_2), \phi^h \rangle - \langle T'_n(v_2), K \phi^h \rangle \\ & + \mu_2^{-1} \langle T'_n(v_2), V T'_n(u_2^h) \rangle \end{aligned}$$

and

$$F_h(v) := \int_{\Omega_1} J_1 v_1 dx + \int_{\Omega_2} J_2 v_2 dx.$$

## 5.5 Error analysis

Our goal in this section is to establish some a priori error estimates in terms of  $h$  in order to deduce the convergence of the coupled LDG-FEM-BEM method. Our analysis is based on the primal formulation. Note that the primal formulation is no longer consistent due to the nature of the lifting operators. The inconsistent character of the formulation will be treated by Strang's lemma. The outline of this section is as follows. First, we define the stabilization parameter in terms of the local meshsize, approximation degree and magnetic permeability. In subsection 5.2, we estimate the lifting operators introduced in (5.36), (5.37). We finish the section by giving some a priori error estimates in terms of  $h$  for regular solutions.

### 5.5.1 The discontinuity stabilization parameter

In this section we define the discontinuity stabilization parameter  $a$  in terms of the *local meshsize* and the *local polynomial degree* and the magnetic permeability. This allows us to obtain continuity and coercivity constants independent of the global bound for these quantities.

Let us start by introducing the functions  $h$  and  $p$  in  $L^\infty(F_h)$ , related to the *local meshsize* and *local polynomial degree*, defined as

$$h = h(x) := \begin{cases} \min(h_K, h_{K'}) & \text{if } x \in \partial K \cap \partial K' ; \quad K, K' \in \Pi_h^1 \\ h_K & \text{if } x \in \partial K \cap \partial\Omega_1 ; \quad K \in \Pi_h^1 \end{cases}$$

$$p = p(x) := \begin{cases} \max(p_K, p_{K'}) & \text{if } x \in \partial K \cap \partial K' ; \quad K, K' \in \Pi_h^1 \\ p_K & \text{if } x \in \partial K \cap \partial\Omega_1 ; \quad K \in \Pi_h^1. \end{cases}$$

For the permeability, we suppose that  $\mu_{11}$  is a Lipschitz function over any  $K \in \Pi_h^1$ , in particular  $\mu_{11|K}$  can be extended to  $\partial K$ ; this extension is also denoted by  $\mu_{11|K}$ . Therefore, for all  $K \in \Pi_h^1$ , there are positives constants  $m_K$  and  $M_K$  such that

$$m_K \leq \mu_{11K}(x) \leq M_K \quad \forall x \in \overline{K}. \quad (5.39)$$

We also suppose that there exist  $m$  and  $M$  such that

$$0 < m \leq m_K \quad \text{and} \quad M_K \leq M < \infty. \quad (5.40)$$

Now, we define the stabilization parameter via the form

$$a = \alpha h^{-1} p^2 m^{-1} \in L^\infty(F_h), \quad (5.41)$$

where  $\alpha$  is a strictly positive constant independent of the *meshsize* and *polynomial degree* and  $m$  is the function defined by

$$m = m(x) := \begin{cases} \min(|\mu_{11K}(x)|, |\mu_{11K'}(x)|) & \text{if } x \in \partial K \cap \partial K' ; \quad K, K' \in \Pi_h^1 \\ |\mu_{11K}(x)| & \text{if } x \in \partial K \cap \partial\Omega_1 ; \quad K \in \Pi_h^1. \end{cases}$$

### 5.5.2 The lifting operators

Now, we estimate the lifting operators introduced in (5.36), (5.37). We have the following result.

**Proposition 5.5.1** *Let  $L_1$  and  $L_2$  be the lifting operators defined by (5.36), (5.37) and  $a$  the stabilization parameter defined by (5.41). Then, under the assumptions on  $\mu$ , we have for all  $v \in V(h)$ ,*

$$\begin{aligned} \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} L_1(v)\|_{0,\Omega_1} &\leq C_{lift} (\|\sqrt{a}[v_1]_N\|_{0,F_h^I} + \|\sqrt{a}[v]_T\|_{0,\Gamma_1}). \\ \|L_2(v)\|_{0,\Omega_1} &\leq C_{lift} (\|\sqrt{a}[v_1]_T\|_{0,F_h^I} + \|\sqrt{a}[v]_N\|_{0,\Gamma_1}) \end{aligned}$$

with a constant  $C_{lift}$  only depending on the shape regularity of the mesh,  $M$  and  $m$ .

**Proof :** Let us first recall the following inverse inequality

$$\|q\|_{0,\partial K}^2 \leq C_{inv} \frac{p_K^2}{h_K} \|q\|_{0,K}^2 \quad \forall q \in S^{p_K}(K), \quad \forall K \in \Pi_h \quad (5.42)$$

with a constant  $C_{inv} > 0$ , only depending on the shape regularity of the mesh. For the two-dimensional elements the proof of (5.42) can be found in [57]. For the three dimensional space, the proof is analogous, see [36].

Now, let  $v \in V(h)$  and  $\Pi_{\Sigma_h}$  the  $L^2$ -projection onto  $\Sigma_h$ . Then, from the definition of  $L_1$  and the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\begin{aligned} \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} L_1(v)\|_{0,\Omega_1} &= \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \frac{|\int_{\Omega_1} L_1(v) \mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z dx|}{\|z\|_{0,\Omega_1}} \\ &= \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \frac{|\int_{\Omega_1} L_1(v) \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z) dx|}{\|z\|_{0,\Omega_1}} \\ &= \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \frac{|\int_{F_h^I} [v_1]_T \{\Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\} ds + \int_{\Gamma_1} [v]_T \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z) ds|}{\|z\|_{0,\Omega_1}} \\ &\leq \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \frac{|\int_{F_h^I} [v_1]_T \{\Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\} ds| + |\int_{\Gamma_1} [v]_T \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z) ds|}{\|z\|_{0,\Omega_1}} \\ &\leq \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \|z\|_{0,\Omega_1}^{-1} \|\sqrt{a}[v_1]_N\|_{0,F_h^I} \|\frac{1}{\sqrt{a}} \{\Pi_{\Sigma_h}(z)\}\|_{0,F_h^I} \\ &\quad + \sup_{z \in L^2(\Omega_1)^3} \|z\|_{0,\Omega_1}^{-1} \|\sqrt{a}[v]_T\|_{0,\Gamma_1} \|\frac{1}{\sqrt{a}} \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\|_{0,\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Using the definition of  $\{\cdot\}$ , the parameters  $h, m$  and  $p$ , the definition of the stabilization parameter  $a$ , the inverse inequality (5.42) and the assumption on  $\mu$ , we obtain

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\sqrt{a}} \{ \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z) \} \right\|_{0, F_h^I}^2 &\leq \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K M_K}{p_K^2} \|\Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\|_{0, \partial K}^2 \\
&\leq C_{inv} \sum_{K \in \Pi_h^1} M_K \|\Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\|_{0, K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \Pi_h^1} M_K \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z\|_{0, K}^2 \\
&\leq \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{M_K}{m_K} \|z\|_{0, K}^2 \\
&\leq C_{inv} \frac{M}{m} \|z\|_{0, \Omega_1}^2.
\end{aligned}$$

In the same manner, we estimate  $\|\frac{1}{\sqrt{a}} \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} z)\|_{0, \Gamma_1}^2$ , which implies the proof of the first inequality in the proposition. Similarly we can show the second inequality. ■

### 5.5.3 Continuity and coercivity

In order to study the continuity and coercivity of the form  $A_h$ , we introduce  $Z_h := V_h^* \times Y_h$  endowed with the norm  $\|(v, \phi)\|_h^2 := \|v\|_h^2 + \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$  with :

$$\begin{aligned}
\|v\|_h^2 := & \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} \text{rot}_h v_1\|_{0, \Omega_1}^2 + \|\text{div}_h v_1\|_{0, \Omega_1}^2 + \|\sqrt{a}[v_1]_N\|_{0, F_h^I}^2 \\
& + \|\sqrt{a}[v_1]_T\|_{0, F_h^I}^2 + \|\sqrt{a}[v]_T\|_{0, \Gamma_1}^2 \\
& + \|\sqrt{a}[v]_N\|_{0, \Gamma_1}^2 + \|\mu_{12}^{-\frac{1}{2}} \text{rot} v_2\|_{0, \Omega_2}^2 + \|\text{div} v_2\|_{0, \Omega_2}^2
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$Z(h) := Z_h + \{w = (w_1, w_2) \in H(\text{rot}, \Omega_2) \cap H_0(\text{div}, \Omega_2)\} \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{5.44}$$

**Remark 5.5.1** *By using Lemma 5.2.2, we see that the quantity defined by (5.43) defines a norm on  $V_h^*$ .*

Now, we have the following result

**Lemma 5.5.1** *Under the assumptions on  $\mu$  and the definition of the stabilization parameter, there exists a constant  $C = C(\alpha, C_{ift}) > 0$  such that*

$$|B_h(u, v) + I_h(u, v)| \leq C \|v\|_h \|u\|_h \quad \forall u, v \in V(h).$$

**Proof :** By using Proposition 5.5.1 and the definition of the norm  $\|\cdot\|_h$ , we see that  $\|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}}L_1(u)\|_{0,\Omega_1} \leq C\|u\|_h$  and  $\|L_2(u)\|_{0,\Omega_1} \leq C\|u\|_h$ , then the proof of Lemma 5.5.1 yields from the definition of  $B_h, I_h$  and the Cauchy-Schwarz inequality. ■

Concerning coercivity, we have :

**Lemma 5.5.2** *Under the assumptions on  $\mu$  and the definition of the stabilization parameter, there exists a constant  $C = C(\alpha, C_{ift}) > 0$  such that*

$$B_h(v, v) + I_h(v, v) \geq C\|v\|_h^2 \quad \forall v \in V_h, \forall \alpha > 0.$$

**Proof :** It is clear that

$$\begin{aligned} B_h(v, v) + I_h(v, v) = & \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1}(\text{rot}_h v_1 - L_1(v))^2 dx + \int_{\Omega_1} (\text{div}_h v_1 - L_2(v))^2 dx \\ & + \|\sqrt{a}[v_1]_N\|_{0,F_h^I}^2 + \|\sqrt{a}[v_1]_T\|_{0,F_h^I}^2 + \|\sqrt{a}[v]_T\|_{0,\Gamma_1}^2 \\ & + \|\sqrt{a}[v]_N\|_{0,\Gamma_1}^2 + \|\mu_{12}^{-\frac{1}{2}} \text{rot } v_2\|_{0,\Omega_2}^2 + \|\text{div } u_2\|_{0,\Omega_2}^2. \end{aligned}$$

The first term of the previous identity can be estimated as follows

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1}(\text{rot}_h v_1 - L_1(v))^2 dx = & \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} \text{rot}_h v_1\|_{0,\Omega_1}^2 - 2 \int_{\Omega_1} \mu_{11}^{-1}(\text{rot}_h v_1)L_1(v) dx \\ & + \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} L_1(v)\|_{0,\Omega_1}^2 \\ \geq & (1 - \epsilon) \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} \text{rot}_h v_1\|_{0,\Omega_1}^2 + (1 - \epsilon^{-1}) \|\mu_{11}^{-\frac{1}{2}} L_1(v)\|_{0,\Omega_1}^2 \end{aligned}$$

for all  $\epsilon > 0$ .

Similarly, we have for the second term

$$\int_{\Omega_1} (\text{div}_h v_1 - L_2(v))^2 dx \geq (1 - \epsilon) \|\text{div}_h u_1\|_{0,\Omega_1}^2 + (1 - \epsilon^{-1}) \|L_2(v)\|_{0,\Omega_1}^2.$$

By using Proposition 5.5.1, we see that the proof of the proposition is obtained for any choice of  $\epsilon$  such that  $\frac{C_{ift}^2}{C_{ift}^2 + \alpha} < \epsilon < 1$ , this choice being possible since  $\alpha > 0$ . ■

Now we study the continuity of the operator  $T'_n$  defined by (5.25). We have :

**Proposition 5.5.2** *The operator  $T'_n$  defined by (5.25) is continuous and there exists  $C_{T'} > 0$  such that*

$$\|T'_n(u_2)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_{T'} \|\mu_{12}^{-\frac{1}{2}} \text{rot } u_2\|_0 \quad \forall u_2 \in V_h. \quad (5.45)$$

**Proof :** Since  $u_2 \in V_h$ ,  $T'_n(u_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  and we have the following Green's formula

$$\int_{\Gamma} T'_n(u_2) \phi ds = \int_{\Omega_2} \mu_{12}^{-\frac{1}{2}} \mu_{12}^{\frac{1}{2}} \text{rot } u_2 \nabla \phi^* dx \quad \forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

where  $\phi^* \in H^1(\Omega_2)$  is any extension of  $\phi$  which vanishes on  $\Gamma_1$ . Then, (5.45) holds since  $\mu_{12} \in L^\infty(\Omega_2)$ . ■

Now, we give the continuity and coercivity results.

**Proposition 5.5.3** *The form  $A_h$  in the primal formulation satisfies*

$$\begin{aligned} |A_h(u, \phi, v, \phi')| &\leq C_{cont} \|(u, \phi)\|_{Z_h} \|(v, \phi')\|_{Z_h} \quad \forall (u, \phi), (v, \phi') \in Z(h), \\ |A_h(u, \phi, u, \phi)| &\geq C_{coer} \|(u, \phi)\|_{Z_h}^2 \quad \forall (u, \phi) \in Z_h, \end{aligned}$$

with constants  $C_{cont}$  and  $C_{coer}$  depending only of  $\alpha$  and  $C_{lift}$ .

**Proof :** Since the operators  $V$  and  $W$  are elliptic by Lemma 5.2.1, the second inequality of the proposition is immediately deduced from Lemma 5.5.2. The first inequality of the proposition can be deduced from Lemma 5.5.1 and since all operators used in the definition of  $A_h$  are continuous. ■

Under the results given in the previous proposition, we can apply the second Strang's Lemma (Ciarlet (1978) theorem 4.2.2) and get the following error estimate.

**Theorem 5.5.1** *Under the assumptions on  $\mu$  and the definition of the stabilization parameter, there exists a constant  $C > 0$  independant of  $h$  and  $p$  such that*

$$\begin{aligned} \| \|u - u_h\| \|_h + \|\phi - \phi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq C \left[ \inf_{z:=(v,\phi') \in Z_h} (\| \|u - v\| \|_h + \|\phi - \phi'\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \right. \\ &\quad \left. + \sup_{z:=(v,\phi') \in Z_h} \frac{|A_h(u, \phi, z) - F_h(v)|}{\|z\|_h} \right]. \end{aligned}$$

### 5.5.4 $h$ -error estimates

In this subsection we estimate the term on the right-hand side in the error bound established in the previous theorem and derive an a priori error estimate for piecewise smooth solutions. For this purpose, we need the following  $hp$ -approximation result to interpolate scalar functions.

**Proposition 5.5.4** *Let  $K \in \Pi_h$  and suppose that  $u \in H^{t_K}(K)$ ,  $t_K \geq 0$ . Then there exists a sequence of polynomials  $\pi_{p_K}^{h_K}(u) \in S^{p_K}(K)$ ,  $p_K = 1, 2, \dots$  satisfying*

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{q,K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-q}}{p_K^{t_K-q}} \|u\|_{t_K, K} \quad \forall 0 \leq q \leq t_K.$$

Furthermore, if  $t_K \geq 1$ ,

$$\|u - \pi_{p_K}^{h_K}(u)\|_{0, \partial K} \leq C \frac{h_K^{\min(p_K+1, t_K)-\frac{1}{2}}}{p_K^{t_K-\frac{1}{2}}} \|u\|_{t_K, K}.$$

The constant  $C$  is independent of  $u$ ,  $h_K$  and  $p_K$ , but depends on the shape-regularity of the mesh and on  $t = \max_{K \in \Pi_h} t_K$ .

In order to interpolate vector functions, we will denote by  $\pi_p^h$  the operator defined by  $\pi_p^h(u)|_K = \pi_{p_K}^{h_K}(u|_K)$ ,  $\forall K \in \Pi_h$  and by  $\hat{\pi}_p^h(u)$  the operator that maps  $u = (u_1, u_2, u_3)$  into  $(\pi_p^h(u_1), \pi_p^h(u_2), \pi_p^h(u_3))$ .

Now we estimate the term  $R_h(u, \phi, z) := A_h(u, \phi, z) - F_h(v)$  in the followig Lemma.

**Lemma 5.5.3** *Let  $(u, \phi)$  be the exact solution of **(A)** and suppose that  $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,  $u_2 \in H^{t+1}(\Omega_2)^3$  with  $t \geq 1$  and  $u_1$  satisfies*

$$(\mu_{11}^{-1} \text{rot } u_1)|_K \in H^{s_K}(K)^3, (\text{div } u_1)|_K \in H^{s_K}(K) \quad \forall K \in \Pi_h^1 \quad \text{with } s_K \geq 1.$$

Then for all  $z = (v, \phi') \in Z_h$ , we have

$$|R_h(u, \phi, z)| \leq C \left( \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p_K+1, s_K)}}{p_K^{2s_K}} (\|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{s_K, K}^2 + \|\text{div}_h u_1\|_{s_K, K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \|z\|_h,$$

with a constant  $C$  independant of  $h$  and  $p$ .

**Proof :** Under the assumptions on  $\mu$ , the definition of the numerical fluxes, integration by parts and using  $u \in H(\text{rot}, \Omega) \cap H_0(\text{div}, \Omega)$ , we obtain

$$R_h(u, \phi, z) := T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

with

$$\begin{aligned} T_1 &:= \int_{\Gamma_1} (\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) [v]_T ds, \\ T_2 &:= \int_{F_h^I} \{ \mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) \} [v_1]_T ds, \\ T_3 &:= \int_{F_h^I} \{ \text{div}_h u_1 - \Pi_{Q_h}(\text{div}_h u_1) \} [v_1]_N ds, \\ T_4 &:= \int_{\Gamma_1} (\text{div}_h u_1 - \Pi_{Q_h}(\text{div}_h u_1)) [v]_N ds, \end{aligned}$$

where  $\Pi_{\Sigma_h}$  and  $\Pi_{Q_h}$  denote the  $L^2$ -projections onto  $\Sigma_h$  and  $Q_h$ , respectively. We start by estimating  $T_1$ , we first have

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\Gamma_1} (\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) [v]_T ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) [v]_T ds. \end{aligned}$$

In particular

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \|z\|_h \left( \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,\Gamma_1} \right. \\ &\quad \left. + \|z\|_h \left( \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,\Gamma_1} \right). \end{aligned}$$

By using the definition of  $h$ ,  $m$  and  $p$  and applying the second inequality of the proposition 5.5.4 with  $t_K = s_K$ , we get

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 &\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 - \hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,F_h}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p_K+1, s_K)}}{p_K^{2s_K+1}} \|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{s_K, K}^2. \end{aligned}$$

Similarly, we have using the inverse inequality(5.42), the fact that  $\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) = \Pi_{\Sigma_h}(\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1))$ , the first inequality of Proposition 5.4 and the assumption (5.40) on  $\mu$ ,

$$\begin{aligned} b &:= \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,\Gamma_1}^2 \\ &\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)) \right\|_{0,F_h}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K M_K}{p_K^2} \|\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)\|_{0,\partial K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} M_K \|\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \Pi_{\Sigma_h}(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)\|_{0,K}^2 \\ &= C \sum_{K \in \Pi_h^1} M_K \|\Pi_{\Sigma_h}(\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)\|_{0,K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} M_K \|\hat{\pi}_p^h(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1) - \mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{0,K}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p_K+1, s_K)}}{p_K^{2s_K}} \|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h(u_1)\|_{s_K, K}^2. \end{aligned}$$



It then follows that

$$T_1^2 \leq C \left( \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p_K+1, s_K)}}{p_K^{2s_K}} \|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h(u_1)\|_{s_K, K}^2 \|z\|_h^2 \right).$$

In the same manner we estimate  $T_2$ ,  $T_3$  and  $T_4$  and then we conclude that

$$|R_h(u, \phi, z)| \leq C \left( \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p_K+1, s_K)}}{p_K^{2s_K}} (\|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{s_K, K}^2 + \|\text{div}_h u_1\|_{s_K, K}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \|z\|_h.$$

■

In order to estimate the infimum at the right-hand side of the bound in Theorem 5.5.1, we assume that the approximation degrees are constant for all  $K \in \Pi_h^1$  and the local meshsizes has bounded variation, *i.e.* that there exists a constant  $\kappa > 0$  such that

$$\kappa^{-1} h_K \leq h_{K'} \leq \kappa h_K \quad \forall K, K' \in \Pi_h, \quad (5.46)$$

for all  $K$  and  $K'$  sharing a two-dimensional face. In particular the assumption on the local meshsizes forbids the situation where the mesh is indefinitely refined in only one of two adjacent subdomains.

We now estimate the infimum appearing on the right-hand side in Theorem 5.5.1 in the following proposition.

**Proposition 5.5.5** *Under the assumption on  $\mu$  and the definition of the stabilization parameter. consider shape regular meshes obeying (5.46) and with constant polynomial degree. Furthermore, let  $(u, \phi)$  be the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$  with  $u = (u_1, u_2)$  and suppose that  $u_2 \in H^{t+1}(\Omega_2)^3$  with  $t \geq 1$  and that  $u_1$  satisfies  $u_1|_K \in H^{s+1}(K)^3$ ,  $(\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1)|_K \in H^{s+1}(K)^3$  with  $s \geq 1$ . Then we have :*

$$\inf_{v \in V_h^*} \| \|u - v\| \|_h^2 \leq C \left( \sum_{K \in \Pi_h^1} h_K^{2\min(p, s)} \|u_1\|_{s+1, K}^2 + \sum_{K \in \Pi_h^2} h_K^2 \|u_2\|_{t+1, K}^2 \right),$$

with a constant  $C$  independent of  $h$  and  $p$ , but dependent on the shape regularity of the mesh,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  and the polynomial degree of the approximation.

**Proof :** For the simplicity of notation, we define  $\hat{\pi}_p^h(u) = (\hat{\pi}_p^h(u_1), \hat{\pi}_1^h(u_2))$ , where  $\hat{\pi}_p^h$  is the operator defined after Proposition 5.5.4 and  $\hat{\pi}_1^h$  is the operator  $\hat{\pi}_p^h$  with  $p = 1$ , introduced to interpolate  $u_2$ . We also set

$$\zeta_K := \{K \in \Pi_h^1, K' \in \Pi_h^2 : \partial K \cap \partial K' \text{ non-empty}\}.$$

Then, we have from the definition of  $\|\cdot\|_h$  and the assumption (5.40) on  $\mu$  that

$$\inf_{v \in V_h^*} \|u - v\|_h^2 \leq \|u - \hat{\pi}_p^h(u)\|_h^2 \leq I_1 + I_2$$

with

$$\begin{aligned} I_1 := C [ & \sum_{K \in \Pi_h^1} \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{1,K}^2 + \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{p^2}{h_K} \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K}^2 \\ & + \sum_{\zeta_K} \frac{p^2}{h_K} \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K \cap \partial K'}^2 ] \end{aligned}$$

and

$$I_2 := C \left( \sum_{K \in \Pi_h^2} \|u_2 - \hat{\pi}_1^h(u_2)\|_{1,K}^2 + \sum_{\zeta_K} \frac{p^2}{h_K} \|u_2 - \hat{\pi}_1^h(u_2)\|_{0,\partial K \cap \partial K'}^2 \right).$$

Knowing that :

$$\|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K \cap \partial K'}^2 \leq \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K}^2 \quad \forall K \in \Pi_h^1, K' \in \Pi_h^2$$

we get

$$\sum_{\zeta_K} \frac{p^2}{h_K} \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K \cap \partial K'}^2 \leq \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{p^2}{h_K} \|u_1 - \hat{\pi}_p^h(u_1)\|_{0,\partial K}^2.$$

Then, by applying Proposition 5.5.4 with  $t_K = s + 1$ , we obtain

$$I_1 \leq C \sum_{K \in \Pi_h^1} \frac{h_K^{2\min(p,s)}}{p^{2s-1}} \|u_1\|_{s+1,K}^2.$$

For the estimation of  $I_2$ , using the second inequality of proposition 5.5.4 with  $p_K = 1$  and  $t_K = t + 1$ , we arrive at

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta_K} \frac{p^2}{h_K} \|u_2 - \hat{\pi}_1^h(u_2)\|_{0,\partial K \cap \partial K'}^2 & \leq \sum_{\zeta_K} \frac{p^2}{h_K} \|u_2 - \hat{\pi}_1^h(u_2)\|_{0,\partial K'}^2 \\ & \leq C \sum_{\zeta_K} \frac{p^2 h_{K'}^{2\min(1,t)+1}}{h_K} \|u_2\|_{t+1,K'}^2 \\ & \leq C \sum_{\zeta_K} p^2 h_{K'}^{2\min(1,t)} \|u_2\|_{t+1,K'}^2 \\ & \leq C \sum_{K' \in \Pi_h^2} h_{K'}^{2\min(1,t)} \|u_2\|_{t+1,K'}^2, \end{aligned}$$

where we have used the assumption (5.46) and the constant  $C$  depends on  $p$ . It follows, by using the first inequality of Proposition 5.5.4 with  $p_K = 1$  and  $t_K = t + 1$ , that

$$I_2 \leq C \sum_{K' \in \Pi_h^2} (h_{K'}^2 \|u_2\|_{t+1, K'}^2 + h_{K'}^2 \|u_2\|_{t+1, K'}^2) \leq C \sum_{K' \in \Pi_h^2} h_{K'}^2 \|u_2\|_{t+1, K'}^2. \quad \blacksquare$$

We are now ready to give the main approximation result.

**Proposition 5.5.6** *Under the assumption on  $\mu$  and the definition of the stabilization parameter. consider shape regular meshes obeing (5.46) and polynomial degree constant. Furthemore, let  $(u, \psi)$  be the exact solution of  $(\mathbf{A}_0)$  with  $u = (u_1, u_2)$  and suppose that  $\phi = \psi|_\Gamma \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ ,  $u_2 \in H^{t+1}(\Omega_2)^3$  with  $t \geq 1$  and that  $u_1$  satisfies  $u_1 \in H^{s+1}(\Pi_h^1)^3$ ,  $\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1 \in H^s(\Pi_h^1)^3$ , with  $s \geq 1$ . Then if  $h = \max_{K \in \Pi_h} h_K$ , we have*

$$\begin{aligned} \| \|u - u_h\|_h^2 + \|\phi - \phi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 &\leq C[h^{2\min(p,s)}(\|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{s, \Pi_h^1}^2 + \|\text{div}_h u_1\|_{s, \Pi_h^1}^2 + \|u_1\|_{s+1, \Pi_h^1}^2) \\ &\quad + h^2 \|u_2\|_{t+1, \Pi_h^2}^2 + h^2 \|\phi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}^2], \end{aligned}$$

with a constant  $C$  independent of  $h$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  and  $\phi$ , but dependent on the shape-regularity of the mesh, the polynomial degree approximation,  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ .

**Proof :** As in [42], we have  $\|\phi - \phi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq Ch \|\phi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)}$ .

From lemma 5.5.3, proposition 5.5.5 and theorem 5.5.1 we get

$$\begin{aligned} \| \|u - u_h\|_h^2 &\leq C[h^{2\min(p,s)}(\|\mu_{11}^{-1} \text{rot}_h u_1\|_{s, \Pi_h^1}^2 + \|\text{div}_h u_1\|_{s, \Pi_h^1}^2 + \|u_1\|_{s+1, \Pi_h^1}^2) \\ &\quad + h^2 \|u_2\|_{t+1, \Pi_h^2}^2]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 5.6 Concluding Remarks

For the time-harmonic magnetostatic problem, we have presented and studied a new coupled formulation in the continuous case. In the discrete case, we have introduced a new coupled model based on the Local Discontinuous Galekin method, the finite element method by using numerical fluxes, and a boundary integral method. We have also proved an optimal a priori error estimate which implies to the convergence of the discretization.

## Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, différentes formulations de type Galerkin discontinues sont établies pour la résolution de quelques problèmes d'équations aux dérivées partielles dérivant des équations de Maxwell. Les inconnues principales des formulations sont soit le champ électrique, soit le champ magnétique. Pour étudier la convergence des formulations, des conditions de continuité, de coercivité et de condition inf-sup sont établies selon la nécessité. Dans la troisième partie, on s'est intéressé au calcul du champ magnétique dans l'espace entier  $\mathbb{R}^3$  par un modèle de couplage, des résultats théoriques ont été établis en se basant sur les travaux de [48, 47]. Dans le futur, on s'intéresse à l'étude numérique du couplage. Une première idée est de tester la convergence du couplage LDG-FEM-BEM et ensuite essayer de réduire la taille de la couronne introduite pour contourner le problème de régularité en faisant rapprocher son diamètre vers zéro. Il sera aussi intéressant d'introduire des méthodes de discrétisations des opérateurs intégraux qui interviennent pour le couplage avec la méthode intégrale.

## Conclusions and objectives in the future

In this memory, various discontinuous Galerkin formulations are established to solve some problems of partial differential equations deriving from Maxwell's equations. The principal unknown factors of the formulations are either the electric field, or the field magnetic. To study the convergence of the formulations, some conditions of continuity, coercivity and inf-sup are established. In the third part, we are interested to the calculation of the magnetic field in whole space by a coupling model. Theoretical results were established while basing on the work in [48, 47]. In the futur, we wish to study the numerical convergence of the coupled formulation in a first step and to the discretization of the integral operators, used for the coupling with the integral method, by discontinuous elements in a second step.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cadre fonctionnel</b>	<b>5</b>
1.1	Préliminaires et notations . . . . .	5
1.2	Partition en éléments finis . . . . .	6
1.3	Méthodes mixtes . . . . .	9
1.3.1	Approximation du problème . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Deux nouvelles inégalités discrètes de type Poincaré-Friedrichs sur les espaces discontinus</b>	<b>13</b>
2.1	La première inégalité . . . . .	14
2.2	La deuxième inégalité . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Résolution d'un problème électrostatique par une méthode de Galerkin discontinue</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Formulation discontinue du problème . . . . .	21
3.2.1	Dérivation de la formulation . . . . .	21
3.2.2	La formulation de Galerkin discontinue . . . . .	23
3.3	Équivalence des problèmes (3.22) et (3.2) . . . . .	25
3.4	Approximation du problème . . . . .	29
3.4.1	Les paramètres de stabilisation . . . . .	29
3.5	Propriétés des formes bilinéaires . . . . .	30
3.5.1	Existence et unicité de solution discrète . . . . .	32
3.5.2	Continuité . . . . .	33
3.5.3	Coercivité de $A$ . . . . .	34
3.5.4	Condition inf-sup . . . . .	36
3.6	Estimation d'énergie . . . . .	40
3.7	Résultats numériques . . . . .	45
<b>4</b>	<b>An <math>hp</math>- discontinuous Galerkin method for the time-dependent Maxwell's equations</b>	<b>51</b>
4.1	Introduction . . . . .	51

4.2	Preliminaries and notations . . . . .	53
4.2.1	Traces and discontinuous finite element spaces . . . . .	53
4.3	Formulation for the Maxwell problem . . . . .	54
4.3.1	The discontinuity stabilization parameter . . . . .	56
4.3.2	Properties of the bilinear form . . . . .	56
4.3.3	Model problem . . . . .	60
4.3.4	Generalization . . . . .	63
4.4	Numerical results . . . . .	65
4.4.1	Time discretization . . . . .	65
4.4.2	Example . . . . .	66
4.5	Concluding remarks . . . . .	68
<b>5</b>	<b>On the coupling LDG-FEM and BEM method for the three dimensional magnetostatic problem</b>	<b>69</b>
5.1	Introduction . . . . .	69
5.2	Preliminaries and notations . . . . .	70
5.2.1	Variational framework . . . . .	71
5.2.2	Integral operators and Calderon's equations . . . . .	71
5.3	Variational formulation . . . . .	73
5.4	Discretization . . . . .	79
5.4.1	The mixed formulation LDG . . . . .	81
5.4.2	Coupling LDG with the FEM and BEM methods . . . . .	84
5.4.3	The coupled LDG-FEM-BEM formulation . . . . .	88
5.4.4	Primal formulation . . . . .	91
5.5	Error analysis . . . . .	93
5.5.1	The discontinuity stabilization parameter . . . . .	93
5.5.2	The lifting operators . . . . .	94
5.5.3	Continuity and coercivity . . . . .	95
5.5.4	$h$ -error estimates . . . . .	97
5.6	Concluding Remarks . . . . .	102

# Bibliographie

- [1] R. Adams, "Sobolev Spaces", *Academic. Press*, 1975
- [2] S. Agmon, "Lectures on Elliptic Boundary value Problems ". *Van Nostrand, Princeton, NJ*, 1965
- [3] A. Alonso and A. Valli, "Some Remarks on the characterization of the space of tangential trace of  $H(\text{rot}, \Omega)$  and the construction of an extension operator." *manuscripta mathematica*, 89 (1996) pp 159-178
- [4] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini, "Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems." *SIAM, J. Numer. Anal.* 39, 2001/02 no.5, pp 1749-1779.
- [5] D.N. Arnold, "An interior penalty finite element method with discontinuous elements". *SIAM. J. Numer. Anal.* 19, 1982, pp.742-760.
- [6] I. Babuška, C. E. Baumann, and J. T. Oden " A discontinuous hp finite element method for diffusion problems : 1-D analysis", *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 1999, pp 103-122.
- [7] I. Babuška and M. Suri, " The hp version of the finite element method with quasiuniform meshes. *Modél. Maaath. Anal. Numér.* 21 (1987), 199-238. MR **88d** :65154
- [8] G. Baker, W. N. Jureidini and O. A. Karakashian "Piecewise solenoidal vector fields and the stokes problem.", *SIAM J. Numer. Anal.*, 27-6, 1990, pp 45-59. 103-122.
- [9] B. Bandelier, C. Daveau, J. Laminie, M. Mefire and F.Rioux-Damidau, "Three-Dimensional Magnetostatic Problem ", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 46, 1999, pp 117-130.
- [10] C. E. Baumann, " An h-p adaptative discontinuous finite element method for computational fluid dynamics ", PHD thesis, *The University of Texas at Austin*, 1997.
- [11] O. Biro and K. Preis, " On the use of magnetic vector potential in the finite element analysis of 3D eddy currents", *IEEE.Trans. on Magnetics*, 25, 1989, pp 3145-3149.



- 
- [12] A. Bossavit, “Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementary, Edges Elements.” *Academic Press*, 1998.
- [13] F. Brezzi, M. Fortin, “Mixed and hybrid Finite Element Method,” *Springer, New-york*, 1991.
- [14] F. Brezzi, P. A. Raviart, “A mixed finite element method for fourth order elliptic equations.” *Topics in Numerical Analysis III, (J.J.H. Miller, ED.)*, 1997, pp 35-56.
- [15] P. Castillo, B. Cockburn, D. Schötzau and C. Schwab, “Optimal a priori error estimates for the  $hp$ -version of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Math. Comp.*, 71 (2002), pp 455–478.
- [16] P. Castillo, B. Cockburn, D. Schötzau, C. Schwab and I. Perugia, “An a priori error estimates for the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems”, *SIAM J. Numer. Anal.* 38(2000), pp 1676-1706.
- [17] P. Ciarlet Jr, Vivette Girault, “Condition inf-sup pour l’élément fini de Taylor-Hood  $P_2$ -iso- $P_1$ , 3-D ; application pour les équations de Maxwell.” *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.* 335-2002 pp 827-832.
- [18] P.G. Ciarlet, “ Confirming Finite element methods for second order problems.”
- [19] Z. Chen. “ On the relationship of various discontinuous finite element method for second-order elliptic equations.”, *SMU Math Report 2000-02, Southern Methodist University*, 2000.
- [20] B. Cockburn, G. E. Karniadakis and C. W. Shu. The development of discontinuous Galerkin methods. In B. Cockburn, G.E. Karniadakis and C. W. Shu, editors, *Discontinuous Galerkin Methods : Theory, Computation And Applications*, volume 11 of *Lect. Notes Comput. Sci. Engrg.* pages 3-50. Springer-Velag, 2000.
- [21] B. Cockburn, G. E. karniadakis, and C. W. Shu, editors “ Discontinuous Galerkin Methods - Theory, Computations and Applications”, *volume 11 of Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer, Berlin, 2000.
- [22] B. Cockburn and C. W. Shu, “ The local discontinuous Galerkin method for time-dependant convection-diffusion systems”, *SIAM J. Numer. Anal.* 35 (1998), pp 2440-2463.
- [23] B. Cockburn and C. W. Shu, “Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems.” *J. Sci. Comput.* 16(2001), pp 173-261.

- [24] B. Cockburn and C. Dawson, "Some extensions for the local discontinuous Galerkin method for the convection-diffusion equations in multidimensions." The Proceedings of the 10th Conference on the Mathematics of Finite Element and Applications : MAFELAPX(J. Whitemann, ed.), Elsevier, (2000), pp 225-238.
- [25] M. Costabel, "Boundary Integral operators on Lipschitz domains : Elementary results ", *SIAM. J. Math. Anal.* 19 (1988), pp 613-626.
- [26] M. Fortin and M. Soulié, "A non confirming piecewise quadratic finite element on triangles," *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 19 1983, pp 505-520. MR 84g :76004.
- [27] M. Fortin, "A three dimensional Quadratic Nonconforming Element". *Numer. Math.* 46, 1985 pp. 269-279
- [28] C. Daveau and J. Laminie, "Mixed and Hybrid Formulation For The Three-Dimensional Magnetostatic problem ", *Num. Meth. Part. Diff. Equ.* 2002, pp 85-104.
- [29] C. Daveau, J. Laminie and A. Zaghdani. "An  $hp$ - discontinuous Galerkin method for the time dependent Maxwell's equations". Submitted in revised form. *Num. Meth. Part. Diff. Equ.*
- [30] C. Daveau and A. Zaghdani. "On the coupling LDG-FEM and BEM method for the three dimensional magnetostatic problem ". Prépublication de l'université de Paris-sud. 2005
- [31] C. Daveau and M. Menad, "Mixed FEM and BEM Coupling For The Three-Dimensional Magnetostatic Problems", *Num. Meth. Part. Diff. Equ.*,19, 2003, no.4 pp 443-462.
- [32] G. Duvaut and P. L. Lions, "Inequalities in Mechanics and physics." *Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York* , 1976.
- [33] V. Girault, B. Rivière and Mary F. Wheeler, "A Discontinuous Galerkin Method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems." *Mathematics of Computation* 74, 2005, pp 53-84.
- [34] V. Girault, L.R. Scott, "A quasi local interpolation operator preserving the discrete divergence." *Calcolo* 40, 2003, pp 1-19.
- [35] V. Girault and P.A. Raviart " Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and Algorithms" Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [36] P. Houston, C. Schwab and E. Süli "Discontinuous  $hp$ -finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. ", *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2002), pp 2133–2163.

- [37] P. Houston, I. Perugia, and D. Schötzau "Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator." *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 42, No. 1, pp. 434-459.
- [38] P. Houston, I. Perugia and D. Schötzau. "hp DGFEM for Maxwell's equations." In F. Brezzi, A. Buffa, S. Corsaro, and A. Murli, editors, *Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH 2001*, pp. 785-794, Springer-Verlag, 2003.
- [39] Claes Johnson. "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method." *Cambridge University Press, Cambridge, 1987*.
- [40] F. Kikuchi, "Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems", *Japan J. Appl. Math.*, 6, 1989, pp 209-221
- [41] J. L. Lions and E. Magenes, "Problèmes aux limites non homogènes et applications", *Dunot, Paris*, 1968
- [42] M. Menad, "Formulations Mixtes hybrides pour le problème de la magnéto-statique dans  $\mathbb{R}^3$  obtenues en couplant une méthode d'éléments finis conforme avec une méthode intégrale". 2005 *Université de Cergy-Pontoise, France*.
- [43] P. Monk, "Finite element methods for Maxwell's equations." *Oxford University Press, New York*. 2003
- [44] T. Nakata and K. Fujiwara, "Summary on results for Benchmark problem 13 (3D Non-linear magnetostatic model)", *COMPEL*, 11, 1992, pp 345-369.
- [45] J.C. Nédélec, "A New Family of Mixed finite elements in  $R^3$ ", *Numer. Math.*, 35, 1986, pp 57-80.
- [46] J.T. Oden, I. Babuška, and C.E. Baumann, "A discontinuous hp finite element method for diffusion problems", *J. Comput. Phys.*, 146, 1998, pp 491-519.
- [47] I. Perugia and D. Schötzau, "On the Coupling of Local Discontinuous Galerkin and Conforming Finite element Methods." *J. Sci. Comput* 16, 2001/02 no.4, pp 411-433.
- [48] I. Perugia and D. Schötzau, "The hp-Local Discontinuous Galerkin method for the Low-Frequency Time-Harmonic Maxwell's Equations." *Math. Comp.*, 2003, no.243 pp 1179-1214.
- [49] S. Prudhomme, F. Pascal, J. T. Oden and A. Romkes, "Review of a priori estimation for discontinuous Galerkin method." *TICAM, University of Texas at Austin*, 2000, Tech. report 2000-27.

- 
- [50] P. A. Raviart, J.M. Thomas, “A mixed finite element method for second order elliptic problems.” *Mathematical Aspects of Finite Element Methods (I Galligani and E. Magenes, Eds.) Lecture Notes in Mathematics 606, 292-315, Springer, Berlin, 1997.*
- [51] P. A. Raviart and J. M. Thomas. “Introduction à l’analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris. 1983.
- [52] B. Riviere. “Discontinuous Galerkin Methods for Solving the Miscible Displacement Problem in Porous Media.”, PhD thesis, *The University of Texas at Austin*. May 2000.
- [53] B. Riviere, M.F. Wheeler and V. Girault “Improved energy estimates for interior penalty constrained and discontinuous Galerkin methods for elliptics problems.”, *Part I. Computational Geosciences*, 3-4, 1999, pp 337-360.
- [54] J. Sayas, “Coupling of Boundary Elements and Discontinuous Galerkin Methods “. *Canum 2006*
- [55] R. Scholtz, “A mixed method for fourth problems using linear elements.” *RAIRO. Anal. Num* 12 1978, pp 85-90.
- [56] E. Süli, C. Shwab and P. Houston “hp DGFEM for partial differential equations with nonnegative characteristic form. ” In B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C. W. Shu, editors, *Discontinuous Galerkin Methods*, volume 11 of *Lectures Notes in Computational Science and Engineering*, pages 221-230. Springer, Berlin, 2000. *IEEE. Trans. on Magnetism*, 25, 1989, pp 3145-3149.
- [57] C. Schwab, “ $p$ - and  $hp$ -FEM-theory and application to solid and fluid mechanics”, *Oxford University Press, Oxford*, 1998.
- [58] M.F. Wheeler, “An elliptic collocation-finite element method with interior penalties.” *SIAM J. Numer. Anal.*, 15, 1978, pp. 152-161.
- [59] A. Zaghdani and C. Daveau “Two new discrete inequalities of Poincaré-Friedrichs on discontinuous spaces for Maxwell’s equations.” *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser.I*. 342, 2006, pp 29-32.



## Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier différents problèmes d'électromagnétisme dans des domaines tridimensionnels par des méthodes de type Galerkin discontinues. Dans une première partie, on présente une étude d'une formulation mixte pour la résolution d'un problème électrostatique sur un domaine fréquentiel. Des résultats d'existence et unicité de solutions sont prouvés. Des estimations a priori de l'erreur sont obtenues en utilisant une méthode standard. Des résultats numériques prouvant la convergence de la formulation sont obtenus. Dans une deuxième partie, on propose une formulation de type Galerkin discontinue en espace et de type Newmark en temps pour la résolution de l'équation des ondes qui dérive des équations de Maxwell. Des estimations  $hp$  de l'erreur sont établies en se basant sur une méthode standard et en utilisant le lemme de Gronwall. Aussi des résultats numériques justifiant la convergence du schéma sont obtenus. Enfin, on a établi un modèle de couplage entre une méthode LDG, une méthode d'éléments finis continus et une méthode intégrale pour le calcul du champ magnétique dans un domaine non borné. Une étude théorique de la convergence de ce modèle est développée. L'étude numérique du couplage constitue un parmi nos objectifs dans le futur.

## Abstract

The subject of this thesis is the study various problems of electromagnetism which derive from the Maxwell's equations by the discontinuous Galerkin method. In a first part, we present a study of a mixed formulation for the resolution of an electrostatic problem on frequency domain. Some results of existence and uniqueness of solutions are shown. A priori error estimates are obtained by using one standart method. Some numerical results proving the convergence of the formulation are obtained. In a second part, we propose one discontinuous Galerkin formulation in space and Newmark type in time for the resolution of the wave equation deriving from the Maxwell's equations. Some optimal  $hp$ -estimates are obtained by using one standart method and the Gronwall Lemma. Also some numerical results are given. Finally, we present one LDG-FEM and BEM coupling model to calculate the magnetic field on the whole space  $\mathbb{R}^3$ . Some error analysis are based on the method used in [48] are obtained. The numerical study of the coupling model is one objectif in the future.