



HAL
open science

Sur le développement de certaines méthodes analytiques spectrales pour la diffraction par des objets génériques comportant des singularités de géométrie et/ou de matériaux en 2D et 3D

J.M.L. Bernard

► **To cite this version:**

J.M.L. Bernard. Sur le développement de certaines méthodes analytiques spectrales pour la diffraction par des objets génériques comportant des singularités de géométrie et/ou de matériaux en 2D et 3D. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2007. tel-00152803

HAL Id: tel-00152803

<https://theses.hal.science/tel-00152803>

Submitted on 7 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DOCUMENT DE SYNTHÈSE

présenté à
L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

pour obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par
Jean-Michel, L. BERNARD

**Sur le développement de certaines méthodes analytiques spectrales
pour la diffraction par des objets génériques comportant des
singularités de géométrie et/ou de matériaux en 2D et 3D**

soutenue le 26 Janvier 2007 devant le jury composé de :

Mr L. Desvilletes,	Président
Mr V.P. Smyshlyaev,	Rapporteur
Mr O. lafitte,	Rapporteur
Mr A. Bendali,	Rapporteur
Mr D. Bouche,	Examineur
Mr M. Lenoir,	Examineur
Mr O. Acher,	Examineur
Mme M. Bergounioux,	Examineur

Remerciements

Je remercie Valery Smyshlyaev, expert dans l'analyse mathématique des problèmes de diffraction par des singularités, en particulier coniques, d'avoir accepté de juger de mes travaux en tant que rapporteur.

Je remercie Olivier lafitte, spécialiste de l'analyse microlocale, de son intérêt constant pour mes travaux, et d'avoir accepté d'être rapporteur.

Je remercie Abderrahmane Bendali, expert dans la modélisation des phénomènes de diffraction et de propagation d'ondes, d'avoir accepté de juger ce travail en tant que rapporteur.

Je remercie Daniel Bouche de son soutien et des discussions fort intéressantes que nous avons eues sur les méthodes analytiques et l'analyse asymptotique, et pour sa participation à mon jury.

Je remercie Marc Lenoir, de l'Ecole nationale supérieure des techniques avancées, d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie Laurent Desvilletes, de l'Ecole Normale supérieure de Cachan, de m'avoir parrainer auprès du Laboratoire de Mathématiques de l'Université d'Orléans, et de faire partie de ce jury.

Je remercie Olivier Acher, du CEA le Ripault, de son intérêt pour mes travaux, et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie Maïtine Bergounioux, du laboratoire de mathématiques d'Orléans, d'avoir accepté de juger ce travail.

Enfin je remercie Romain Abraham, Jean-Philippe Anker, et Stéphane Cordier de m'avoir accompagné dans la mise sur pied de cette hdr et de sa soutenance.

Sur le développement de certaines méthodes analytiques spectrales pour la diffraction par des objets génériques comportant des singularités de géométrie et/ou de matériaux en 2D et 3D

J.M.L. Bernard

Résumé

A) Introduction générale

Liste de publications

B) Exposé concernant la diffraction par des objets 2D du type dièdre ou polygone :

- 1) Généralités
- 2) Présentation des problèmes nouveaux en géométrie 2D explorés dans nos recherches
- 3) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence normale par rapport à l'arête en régime stationnaire : problème scalaire en régime harmonique
 - 3.1) Le problème dans le cas de conditions de surface multimodes
 - 3.2) Le cas du dièdre à faces courbes imparfaitement conducteur d'angle arbitraire
 - 3.3) Le problème avec des conditions de surface fonctions de la distance à l'arête
- 4) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence quelconque en régime stationnaire : problème vectoriel en régime harmonique
- 5) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane ou cylindrique quelconque en régime non stationnaire : problème vectoriel en régime temporel quelconque
- 6) Diffraction par des objets 2D comportant plusieurs singularités de géométries et/ou de matériaux
 - 6.1) Diffraction par un corps avec plusieurs discontinuités : le cas du plan composé de trois parties d'impédances de surface distinctes
 - 6.2) Diffraction par un polygone imparfaitement conducteur avec conditions d'impédances
- 7) Nouvelles propriétés générales de la fonction spectrale f

C) Exposé concernant la diffraction par des objets 3D du type cône :

- 1) Généralités
- 2) Exposé de nos cas canoniques avec singularités 3D :
 - . cône à impédance de section circulaire
 - . cône à impédance de section convexe arbitraire.

D) Conclusion et perspectives

Résumé

De nombreux ouvrages d'électromagnétisme ou d'acoustique classent les méthodes de résolution des problèmes de diffraction suivant le qualificatif d'analytique ou de numérique. Les premières donnent des formes explicites exactes ou asymptotiques des champs tandis que les secondes aboutissent à des expressions implicites en champ que l'on résout numériquement. Cette présentation se rapporte à certaines de nos publications relatives à la première catégorie. On y présente les solutions originales, exactes ou asymptotiques, de problèmes de diffraction d'une onde par des corps élémentaires comportant une ou plusieurs discontinuités de géométrie et/ou de matériau en 2D et 3D, en régime stationnaire ou instationnaire. Plusieurs de ces problèmes ainsi traités deviennent de nouveaux cas canoniques. On notera que les problèmes étudiés ne sont pas solubles par les méthodes classiques de séparation des variables.

Indiquons par ailleurs qu'étant donné la complexité des problèmes posés, nous avons proscrit les arguments heuristiques qui limitent trop souvent le domaine de validité de nombreuses méthodes analytiques.

A) Introduction générale

De nombreux ouvrages d'électromagnétisme ou d'acoustique classent les méthodes de résolution des problèmes de diffraction suivant le qualificatif d'analytique ou de numérique. Les premières donnent des formes explicites exactes ou asymptotiques des champs tandis que les secondes aboutissent à des expressions implicites en champ que l'on résout numériquement.

Les différents cas de diffraction, dits canoniques, possédant une solution analytique exacte ou approchée sont en général peu nombreux, difficiles à établir et donc passionnants à découvrir.

Ils permettent de connaître, à moindre coût, la contribution d'éléments de géométrie simple composant un objet complexe, que les programmes de calculs numériques classiques ne peuvent généralement isoler qu'au prix d'un temps de calcul important. Ils peuvent donc être utilisés comme un outil aidant à la compréhension des phénomènes de diffraction, à la définition d'objets ou de systèmes, à la validation et à l'amélioration des codes de simulation.

Dans le domaine de la diffraction en espace ouvert, ils apparaissent nécessaires pour calculer le champ se propageant en milieu complexe (montagnes, immeubles, superstructures, ...), celui capté directement par une antenne, un cornet, ou réfléchi par un élément de son environnement proche, ou encore pour déterminer l'écho d'une cible illuminée par un radar (avion, bateau, ...). Ils font l'objet d'études de nombreux laboratoires de mathématiques, de physique mathématique, de techniques de l'ingénieur en acoustique et en électricité, et tout livre sur la théorie des ondes en liste les quelques cas connus.

Pour ma part, après avoir commencé mes études sur les problèmes de diffraction par des méthodes numériques à schémas discrets, je me suis orienté assez vite vers la recherche d'expressions analytiques explicites pour des problèmes de diffraction encore non résolus. Le vaste domaine de la diffraction par des objets imparfaitement conducteurs avec singularités de géométrie ou de matériaux est alors devenu mon domaine d'étude de prédilection et l'essentiel de mes publications s'y rapportent. En effet, commençant par exploiter les résultats mathématiques de Maliuzhinets sur le cas canonique du dièdre avec conditions d'impédance, je m'aperçus progressivement que le développement de nouvelles méthodes utilisant l'analyse dans le plan complexe était possible, permettant de résoudre de façon assez élégante des cas toujours plus généraux et conduisant souvent à l'obtention de résultats simples où l'influence des paramètres apparaît clairement.

Mon exposé est constitué de deux parties : celle concernant la diffraction par des objets 2D comportant une ou plusieurs singularités, et celle concernant nos cas canoniques sur la diffraction par des objets 3D du type cône semi-infini imparfaitement réflecteur. Les méthodes présentées ici utilisent des représentations intégrales spectrales exactes des champs dont on déduit de nouvelles formulations dites spectrales des problèmes dans le plan complexe. Les représentations étant différentes pour les cas 2D et de 3D, les méthodes le sont alors souvent aussi, même si l'outil de l'analyse dans le plan complexe y est d'un usage commun. Ces deux parties font l'objet de deux introductions distinctes.

Dans la première partie, on étudie la diffraction par des corps 2D pouvant comporter une ou plusieurs singularités de géométrie. Une représentation des potentiels sous forme d'intégrales de Sommerfeld-Maliuzhinets vérifiant l'équation de Helmholtz en régime harmonique est généralement le point de départ de l'étude. Elle permet de transposer le problème pour des fonctions d'une variable complexe, satisfaisant des équations fonctionnelles scalaires couplées ou découplées valides dans tout le plan complexe mais restant délicates à résoudre.

Celles-ci correspondent à différentes conditions de surface en acoustique (problème scalaire), ou en électromagnétisme (problème vectoriel) jusque-là peu étudiées, traduisant entre autres les caractéristiques complexes d'un matériau, la courbure d'une face, l'anisotropie. Tout ceci nous amène, à force de généralités dans les conditions de surface, la géométrie, l'illumination, à approfondir les propriétés fondamentales des fonctions spectrales dans les problèmes de diffraction, jusqu'à définir une approche générale nouvelle pour des corps pouvant comporter plusieurs singularités.

Les problèmes ainsi résolus constituent certains jalons que l'on détaillera :

- expression du premier résultat connu pour un dièdre d'angle arbitraire avec conditions isotropes de surface imparfaitement conductrice, en incidence arbitraire en électromagnétisme,
- expression du premier résultat connu pour un dièdre d'angle arbitraire avec cette fois des conditions anisotropes de surface imparfaitement conductrice, en incidence quelconque en électromagnétisme,
- premier cas connu d'expression explicite du coefficient de diffraction pour un dièdre à faces courbes imparfaitement réfléchissantes, valide quelque soit l'angle de dièdre,
- premier cas connu d'expression analytique causale pour la réponse impulsionnelle d'un dièdre passif avec conditions d'impédance de caractéristiques dispersives en fréquence, ceci en illumination plane ou cylindrique,
- première approche spectrale, non asymptotique mais exacte, du problème de la diffraction par des corps 2D semi-infinis présentant simultanément plusieurs singularités de géométries d'espacements arbitraires, permettant pour la première fois la réduction à des équations intégrales non singulières.

La seconde partie concerne l'analyse de problèmes de la diffraction par un cône 3D avec conditions de surface mixtes, dite d'impédance ou de Leontovich. Bien que le cas du cône soit un problème fort ancien, et que la condition d'impédance soit une condition absolument classique pour caractériser une surface imparfaitement réfléchissante, le problème pour un cône à impédance fut longtemps considéré comme inaccessible du fait de sa complexité : en particulier, la dépendance radiale de la condition aux limites d'impédance constante rend impossible le recours aux techniques usuelles pratiquées pour les conditions simples de Dirichlet ou de Neuman. Pour cela, on a développé une nouvelle méthode, passant par une réduction du problème, d'abord à des équations fonctionnelles dans le plan complexe puis à des équations intégrales dans le domaine spectral, dont on déduit de nombreux résultats originaux pour un cône imparfaitement conducteur.

On développe ainsi chronologiquement :

- une méthode de réduction spectrale du problème de la diffraction par un cône 3D de section circulaire avec conditions d'impédance constante, ceci en acoustique et en électromagnétisme,
- l'expression du coefficient de diffraction pour un cône d'angle petit avec conditions d'impédance, pour les cas de l'acoustique et de l'électromagnétisme, pendant pour le cas de

conditions mixtes (ou d'impédance) du fameux résultat de Felsen pour un cône parfaitement réfléchissant établi en 1957,

- une méthode de réduction spectrale du problème 3D de la diffraction par un cône de section convexe arbitraire avec conditions d'impédance constante, en acoustique et en électromagnétisme,

- les expressions analytiques dans les domaines de l'acoustique et de l'électromagnétisme, du coefficient de diffraction pour un cône d'angle petit, de section convexe arbitraire, non parfaitement conducteur.

Liste de publications

- [1] J.M.L. Bernard ,'Diffraction by a metallic wedge covered with a dielectric material', Wave Motion, 9, pp. 543-561, 1987.
- [2] J.M.L. Bernard ,'Exact analytical solution for the diffraction at skew incidence by a class of wedge with absorbing material',Rev. Techn. Th. , Vol. 20-21 , pp. 523-527, 1989.
- [3] J.M.L. Bernard ,'Properties of the solution and reciprocity theorem for a class of wedge problem at skew incidence ' , conf. IEEE-AP de Dallas 1990.
- [4] J.M.L. Bernard ,'On the diffraction of an electromagnetic skew incident wave by a non perfectly conducting wedge', Ann. Telecom. , vol.45, 1-2, pp. 30-39, 1990 (Errata 9-10, p.577).
- [5] J.M.L. Bernard ,'Diffraction par un dièdre à faces courbes non parfaitement conducteur', Rev. Techn. Th. , vol. 23, pp. 321-330 ,1991.
- [6] J.M.L. Bernard ,G. Pelosi ,'Diffraction par un dièdre avec variation d'impedance dépendant de la distance à l'arête', Ann. Telecom.,Vol.47, 9-10, pp. 421-423, 1992.
- [7] J.M.L. Bernard ,'Progresses on the diffraction by a wedge : transient solution for line source illumination, single face contribution to scattered field, and new consequence of reciprocity on the spectral function', Rev. Techn. Th., Vol.25, 4, pp.1209-1220, 1993 .
- [8] J.M.L. Bernard ,G. Pelosi ,'Nouvelle formule d'inversion pour la fonction spectrale de Sommerfeld-Maliuzhinets et applications à la diffraction', Rev. Techn. Th., Vol.25, 4, pp.1189-1200, 1993 .
- [9] J.M.L. Bernard ,'On the time-domain scattering by a passive classical frequency dependent wedge-shaped region in a lossy dispersive medium', Ann. Telecom., vol. 49, 11-12 , pp.673-683, 1994.
- [10] J.M.L. Bernard ,'Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction par une singularité conique 3D : équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante', 1997, Editions Dist-Saclay.
- [11] J.M.L. Bernard ,'A solution for the diffraction by a semi-infinite impedance cone', Proceedings de la conférence IEEE/Ursi d'Atlanta, pp. 2136-2139, 1998.
- [12] J.M.L. Bernard ,'A new class of canonical cases for the diffraction by an anisotropic impedance wedge', Proceedings de la conférence IEEE/Ursi d'Atlanta, pp. 1558-1561, 1998.
- [13] J.M.L. Bernard , 'Diffraction at skew incidence by an anisotropic impedance wedge in electromagnetism theory : a new class of canonical cases', J. of Phys. A: Math. Gen., 31, 595-613, 1998.

- [14] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'the leading asymptotic term for the scattering diagram in the problem of diffraction by a narrow circular impedance cone', *J. Phys. A: Math. Gen.* 32 (4), L43-48, 1999.
- [15] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'the scattering diagram of a narrow cone with arbitrary cross section', *Conf. of Manchester on Math. aspects of Diff. by Wedges, Cones and other Canonical geometry*, June 28- July 2 1999.
- [16] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'The leading asymptotic term for the scattering diagram by a narrow impedance cone', *Proceedings / IEEE Conf. Salt Lake City*, pp.398-401, 2000.
- [17] J.M.L. Bernard, 'Diffraction by a curved impedance wedge of arbitrary angle', *Proceedings / IEEE Conf. Boston*, pp.204-207, 2001.
- [18] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Diffraction of scalar waves by an impedance cone of arbitrary cross-section', *Wave Motion*, 33, pp.155-181, 2001.
- [19] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone', *IEEE-AP Transactions*, 49, 12, pp. 1633-1638, 2001.
- [20] J.M.L. Bernard, 'The diffraction by a curved impedance wedge : diffracted and creeping waves', *proceedings du congrès URSI de Maastricht*, 18-23 Août 2002.
- [21] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone', *IMA J. of Applied Mathematics*, 69, pp. 285-333, 2004.
- [22] J.M.L. Bernard, 'On new spectral method and its application to the diffraction by a three-part impedance plane', *Conf. PIERS 2004, Pisa*, session on canonical objects.
- [23] J.M.L. Bernard, 'On some elements of the spectral theory of diffraction by singularities', *Felsen Symp., Munich 2004*, article publié dans le livre 'Fields, Networks, Computational methods and systems in modern electrodynamics. A tribute to L.B. Felsen. Springer-Verlag, 2004.
- [24] J.M.L. Bernard, 'Scattering by a three-part impedance plane : a new spectral approach', *Quarterly J. of Mech. and Appl. Mathematics*, 58, 3, pp. 383-418, 2005.
- [25] J.M.L. Bernard, D. Bouche, I. Andronov, F. Guyon, 'Expression du champ diffracté par une inclusion', *Annales Telecom.*, 60, 5-6, pp.630-648, 2005.
- [26] J.M.L. Bernard, 'A spectral approach for scattering by impedance polygons', *Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.*, 59, 4, pp.517-549, 2006.

B) Exposé concernant la diffraction par des objets 2D comportant une ou plusieurs singularités

1) Généralités

Le premier problème de diffraction par une discontinuité résolu explicitement fut celui du demi-plan parfaitement conducteur étudié par Sommerfeld en 1896 [1] en régime harmonique, (les conditions aux limites considérées sur chacune des faces sont respectivement de Dirichlet et de Neumann sur les champs électriques et magnétiques tangentiels). Macdonald [2] et Carslaw [3] généralisèrent le résultat au cas du dièdre d'angle quelconque. Vint ensuite l'utilisation des techniques de Wiener-Hopf pour les cas avec rupture dans une structure rectiligne qui emploient la transformée de Fourier et usent directement d'une représentation du champ diffracté sous forme d'ondes planes sortantes satisfaisant l'équation des ondes [4].

De fait, si la solution de Sommerfeld pour le demi-plan a bien, elle aussi, la forme d'une somme pondérée d'ondes planes de directions complexes, son contour d'intégration diffère. Sur ce chemin, chaque onde plane ne satisfait pas, a priori, la condition d'onde sortante ou la convergence à l'infini, car Sommerfeld veut exprimer le champ total, qui comporte une onde incidente entrante illuminant le dièdre. De plus, la représentation utilisée sera valide partout à l'extérieur du demi-plan diffractant sans avoir à changer le contour d'intégration, alors que signalons-le une représentation de Fourier n'est valide que dans un demi-espace. Ce sera donc grâce aux propriétés de la fonction analytique, retenue comme fonction de pondération dans l'intégrale, que le champ proprement diffracté (champ total - champ incident) pourra satisfaire la condition de rayonnement d'onde sortante à l'infini.

Le degré de liberté ainsi offert par ce type de représentation devait bientôt entraîner un nouveau développement : le théorème d'inversion de l'intégrale de Sommerfeld découvert par Maliuzhinets. Publié dans sa thèse en 1950 [5], puis démontré sous une forme aboutie en 1958 [6], il permet de traduire des conditions aux limites en champ sur la frontière d'un dièdre par des équations fonctionnelles sur les fonctions poids (dites aussi spectrales) associées à ce champ. Son auteur en déduit alors, de façon explicite, le rayonnement, en acoustique, d'un dièdre d'angle quelconque avec une distribution de vitesses donnée à sa surface, mais plus encore, celui du dièdre de surface non rigide, modélisée par des conditions d'impédances (dites aussi mixtes ou conditions de Léontovich) sur le champ en chaque face, et illuminé par une onde de pression plane. Le problème électromagnétique associé, du dièdre avec des conditions de surface de Léontovich, illuminé par une onde plane de direction perpendiculaire à l'arête, s'en trouvait simultanément résolu.

L'élégance des développements mathématiques de Maliuzhinets à partir de cette forme intégrale du champ nous a alors conduit à utiliser ce type de représentation pour aborder et résoudre de nouvelles classes de problèmes à frontières singulières, pour des cas originaux de conditions aux limites, d'illuminations, de géométrie, ceci en acoustique et en électromagnétisme pour des problèmes scalaires (dits 2D) et vectorielles (dits 2D1/2) en géométrie 2D.

Détaillons plus avant, quelques caractéristiques de l'approche de Maliuzhinets à l'origine de nos travaux :

Dans le problème résolu en 1950 par Maliuzhinets, en illumination plane, le champ u est mis sous la forme d'une intégrale dans le plan complexe, satisfaisant l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2)u = 0$,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha + \varphi) e^{ik\rho \cos\alpha} d\alpha . \quad (1)$$

où f est à définir. Le contour γ est composé de deux boucles infinies dans le plan complexe. La particularité de ce type de représentation est de pouvoir être valide dans tout le domaine hors le secteur dièdre défini par $|\varphi| > \Phi$, y compris donc sur chacune des faces $\varphi = \pm \Phi$, alors que la représentation spectrale classique de Fourier n'est valable que dans un demi-plan de l'espace.

Le grand mérite de Maliuzhinets est d'avoir découvert le théorème d'inversion de ce type de représentation, en usant d'une transformée de Laplace.

Par voie de conséquence, le problème aux limites en champ avec

$$\mathcal{A}^{\pm}(u)|_{\varphi=\pm\Phi} = 0$$

où \mathcal{A} est un opérateur différentiel du premier ordre en dérivées normales aux faces, se trouve transposé en un problème en f dans le plan complexe en α , suivant

$$A_{\alpha}^{\pm}(f(\alpha \pm \Phi)) - A_{-\alpha}^{\pm}(f(-\alpha \pm \Phi)) = 0$$

que l'on doit résoudre, moyennant certaines propriétés de f induites par celles du champ. Maliuzhinets résout ainsi le problème fondamental du dièdre à impédances constantes, avec

$$\mathcal{A}^{\pm} = \left(\mp \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} - ik \sin\theta^{\pm} \right) \rightarrow A_{\alpha} = \sin\alpha \pm \sin\theta^{\pm}, \sin\theta^{\pm} = \text{impédances relatives.}$$

L'avantage de ce type d'approche est en outre, qu'après déformation de γ vers les chemins de descente rapide SDP_{\pm} , on réussit à détailler les différents types d'ondes excitées suivant

$$u(\rho, \varphi) = u_i + \sum u_r^{\pm} + \sum u_s^{\pm} + \frac{e^{-ik\rho}}{2\pi i} \int_{SDP} f(\alpha + \varphi) e^{ik\rho(\cos\alpha+1)} d\alpha, \quad (2)$$

où

- le terme u_i est le *champ incident* dans la zone illuminée et *zéro* dans la zone d'ombre;
- les termes u_r^{\pm} correspondent aux champs d'Optique Géométrique *réfléchis* par chaque faces $\varphi = \pm \Phi$;
- les termes u_s^{\pm} sont des termes d'*ondes guidées excitées par l'arête*, qui correspondent aux contributions des pôles complexes α_s^{\pm} de $f(\alpha + \varphi)$;
- le dernier terme *est principalement rayonné de façon cylindrique quand $\rho \rightarrow \infty$ autour de l'arête*. Approchant $f(\alpha + \varphi)$ sur SDP_{\pm} par ses valeurs aux points de phase stationnaire $\alpha = \pm \pi$, nous obtenons

$$\frac{-e^{-i\pi/4-ik\rho}}{\sqrt{2\pi k\rho}} [f(\pi + \varphi) - f(-\pi + \varphi)] + O(1/(k\rho)^{3/2}) \quad (3)$$

où $F(\varphi) = f(\pi + \varphi) - f(-\pi + \varphi)$ est le coefficient de diffraction (ou diagramme de rayonnement en champ lointain).

2) Présentation des problèmes nouveaux en géométrie 2D explorés dans nos recherches

A ce stade, différentes questions se posent alors, définissant chacune une classe de nouveaux problèmes qui furent l'objet de nos recherches :

- *Peut-on prendre une condition aux limites d'ordre de dérivées élevé, dite d'impédance généralisée, pour mieux modéliser les caractéristiques d'un matériau et résoudre le problème en f alors posé ?*

- *Peut-on trouver la solution du problème si A_α est un opérateur vectoriel, comme cela est souvent le cas en électromagnétisme, et qu'en est-il du délicat problème de couplage des polarisations que l'on rencontre quand une onde plane d'incidence arbitraire est diffractée par un dièdre imparfaitement conducteur ?*

- *Qu'en est-il si les faces du dièdre ne sont plus planes et peut-on obtenir dans ce cas des expressions valides quel que soit l'angle du dièdre ?*

- *Qu'en est-il si le problème n'est plus stationnaire et peut-on obtenir des expressions des champs diffractés explicitement causales pour des conditions très générales de passivité ?*

- *Que devient le problème si les conditions d'impédance sur chacune des faces du dièdre sont fonctions de la distance à l'arête ?*

- *Peut-on généraliser cette approche de façon rigoureuse au problème de la diffraction par un objet imparfaitement conducteur comportant plusieurs singularités ?*

et entre autres questions annexes :

- *Que devient le problème si l'illumination n'est plus plane mais cylindrique et peut-on le résoudre en définissant une expression valide quel que soit le point d'observation ?*

- *La transformée de Fourier du champ sur un plan F est donnée par le diagramme de rayonnement champ lointain, qu'en est-il de f et de sa signification physique ?*

- *Les conditions sur le champ (à l'arête, à l' ∞ , ...) sont-elles suffisantes pour l'unicité en f ?*

Nous classons les problèmes étudiés dans mes publications suivant les cinq rubriques ci-dessous :

- *Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence normale par rapport à l'arête en régime stationnaire : problème scalaire en régime harmonique*
- *Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence quelconque en régime stationnaire : problème vectoriel en régime harmonique*
- *Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane ou cylindrique quelconque en régime non stationnaire : problème vectoriel en régime temporel quelconque*
- *Diffraction par un corps avec plusieurs discontinuités : le cas du plan à trois parties*
- *Diffraction par un corps avec plusieurs singularités : le cas du polygone*
- *Nouvelles propriétés générales de la fonction spectrale f*

On en présente maintenant une synthèse.

3) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence normale par rapport à l'arête en régime stationnaire : problème scalaire en régime harmonique

3.1) Problème avec conditions d'ordre de dérivées élevées

En 1970, Maliuzhinets reprit le problème du dièdre à impédance, cette fois en considérant de nouvelles conditions aux limites, qui permettent de mieux modéliser les propriétés acoustiques de chacune des faces composant son dièdre. Aidé de son collègue Tuzhilin, il prit le cas de la plaque élastique modélisée à sa surface par une condition différentielle d'ordre de dérivées élevé (> 1) [7], travaux que Tuzhilin étendit, en 1973, au cas du dièdre d'angle quelconque constitué de deux demi-plans élastiques d'épaisseur faible [8].

Morgan (avec des hypothèses très restrictives sur les matériaux), puis nous-mêmes, traitons ce type de problème en électromagnétisme, en incidence normale par rapport à l'arête, et cela sans connaître alors les recherches de Tuzhilin. Morgan [9] considéra un système sans pertes. Il n'approfondit pas assez l'étude de l'équation fonctionnelle associée à son problème pour se rendre compte, en particulier, que sa fonction spectrale n'avait une forme réellement définie que s'il mettait des pertes, même infiniment petites, qui donnaient un signe à la partie réelle de certains de ses paramètres physiques. Quant aux résultats de mon étude publiée en 1987 [10], je le constatai après coup, ils recoupaient correctement les travaux de Tuzhilin. En outre, ils contenaient une démonstration complète pour le choix d'une condition aux limites de surface

correcte au sens physique et mathématique, respectivement pour une bonne modélisation et un bon comportement de la fonction spectrale associée à la solution :

On montre que, modélisant un multicouche avec pertes, par une condition du type

$$\left(\sum_{p=1}^r a_p^{\pm} \frac{\partial^p}{\partial n^p}\right)u|_{\varphi=\pm\Phi} = 0$$

on est conduit à la condition sur f suivante

$$\prod_{p=1}^r (\sin\alpha \pm \sin\theta_p^{\pm})f(\alpha \pm \Phi) - \prod_{p=1}^r (-\sin\alpha \pm \sin\theta_p^{\pm})f(-\alpha \pm \Phi) = \sum_{p=1}^{r-1} c_p^{\pm} \sin\alpha (\cos\alpha)^{p-1}$$

qui implique, du fait de propriétés élémentaires du champ à l'arête, à l'infini, et des coefficients a_p (pour des pertes non nulles), que

$$r \text{ doit être impair et } \sum_{p=1}^r \text{signe}(\text{Re}(\sin\theta_p^{\pm})) = 1$$

On définit alors, par un calcul original des fonctions spéciales attachées à chaque mode dont on montre que la forme diffère suivant le signe de $\text{Re}(\sin\theta_p^{\pm})$, une expression que l'on valide par différentes applications numériques.

On notera que ce travail [10] fut de nombreuses fois repris par des publications de laboratoires universitaires étrangers, et contribua au succès actuel des conditions multimodes.

3.2) Cas du dièdre à faces courbes imparfaitement conducteur d'angle arbitraire

Il nous a semblé ensuite fort intéressant de prendre en compte la courbure des faces d'un dièdre imparfaitement conducteur d'angle arbitraire, ce que ne permettait aucune méthode existante.

Le dièdre à faces courbes d'angle quelconque avait été jusqu'alors étudié par Filippov [17] et Borovikov [18] mais leurs expressions n'étaient valides que dans le cas parfaitement conducteur. Elles n'étaient en outre pas uniformes au voisinage des plans tangents aux faces du dièdre. Michaeli [19] avait bien une solution uniforme, mais, déterminée heuristiquement à partir de la solution d'Idemen et Felsen [20] pour le demi-plan courbe (de courbure constante) parfaitement conducteur, elle ne pouvait prendre partout en compte l'influence de la courbure. Buyukaskoy et Uzgören [22], prolongeant les travaux d'Idemen, avaient donné, quant à eux, une solution uniforme pour le demi-plan courbe à impédance.

En 1991 [23], nous avons donc publié une méthode pour le dièdre à faces courbes, d'angle et d'impédances de faces quelconques. On y considère une condition différentielle développée suivant les puissances de la courbure, à imposer au champ sur chacun des plans tangents, du type de celle dont Kaminetsky et Keller [24] (voir aussi Montarnal et Bouche [25]) se servent pour la discontinuité de rayon de courbure, elle nous permet d'arriver à une solution

asymptotique explicite pour la fonction spectrale attachée à la représentation du champ sous forme d'intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets.

L'obtention d'un théorème d'inversion original nous permet de la raccorder, pour tout ordre du développement asymptotique, à une expression uniforme au passage des plans tangents, nous fournissant, par là-même, la transformation du champ diffracté d'arête en somme d'ondes rampantes.

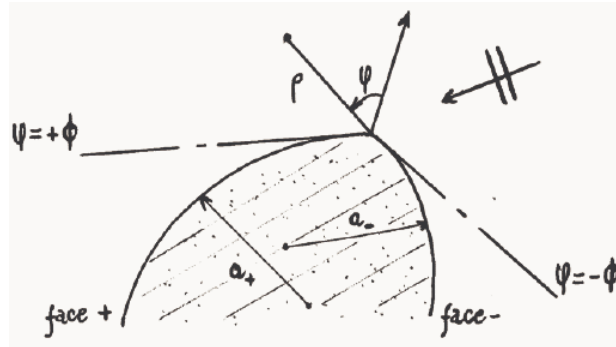
Notons qu'encore récemment, les travaux d'O. Lafitte [21] (généralisant l'approche de Lebeau et Gérard) et ceux de Borovikov en 1998 [26] ont tout deux validé par des approches indépendantes nos expressions obtenues en 1991.

Détaillons certaines expressions clés de ce développement original et de ses résultats :

On considère des conditions d'impédance sur la surface du dièdre à faces courbes,

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - ik \sin\theta^\pm\right)u|_{\text{curved face}\pm} = 0$$

avec n la normale sortante, $\sin\theta^\pm$ une constante.



On approche ces équations par des conditions asymptotiques en puissances entières des courbures $1/a^\pm$ des faces, sur chacun des plans tangents à l'arête $\varphi = \pm\Phi$ [1,5] :

$$\left(\mp \frac{\partial}{\rho \partial \varphi} - ik \sin\theta^\pm - \frac{1}{2a^\pm} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \pm ik \sin\theta^\pm \frac{\rho \partial}{\partial \varphi} \right) + O\left(\frac{\rho}{(a^\pm)^2}\right) u |_{\varphi=\pm\Phi} = 0.$$

Nous pouvons montrer, en utilisant le théorème d'inversion de Maliuzhinets, que nous obtenons les équations fonctionnelles asymptotiques suivantes,

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha \pm \sin\theta^\pm \pm \frac{1}{ika^\pm} D_\alpha(\cdot) + O(\frac{1}{(ka^\pm)^2})) f(\alpha \pm \Phi) \\ & - (-\sin\alpha \pm \sin\theta^\pm \pm \frac{1}{ika^\pm} D_{-\alpha}(\cdot) + O(\frac{1}{(ka^\pm)^2})) f(-\alpha \pm \Phi) = 0, \end{aligned}$$

où

$$D_\alpha^\pm(\cdot) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cot\alpha(\cdot)) \pm \sin\theta^\pm \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}(\cdot) \right) \right].$$

On pose alors $f = \sum_{n \geq 0} f_n/k^n$ dans l'équation fonctionnelle. Considérant les termes de même puissance en k , nous obtenons une succession d'équations fonctionnelles d'ordre m pour les

fonctions $f_{n \leq m}$, que nous résolvons successivement. L'expression de f_0 correspond à la fonction spectrale que nous obtiendrions pour un dièdre à faces planes.

Développons l'expression intégrale pour f_1 , le premier terme influencé par les courbures. Pour cela, on laisse $f_0(\alpha) = \Psi(\alpha)\sigma(\alpha)$ où $\sigma(\alpha) = \mu \cos(\mu\varphi_0) / (\sin(\mu\alpha) - \sin(\mu\varphi_0))$, $\mu = \pi/2\Phi$, φ_0 est l'angle d'incidence, et $f_1(\alpha)/k = \Psi(\alpha)\chi(\alpha)/k$. Considérant l'expression initiale de χ , on est autorisé à translater les chemins d'intégrations de quantités réelles $\pm d^\pm$ le long de l'axe réel, pour chaque terme concernant les faces \pm , et nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \chi(\alpha') = & \frac{i}{8\Phi\Psi(\varphi_0)} \sum_{\pm} \frac{1}{ia^\pm} \left(\int_{-i\infty \pm d^\pm}^{i\infty \pm d^\pm} d\alpha [(-W^\pm \partial_\alpha \ln((- \sin\alpha \pm \sin\theta^\pm)\Psi(-\alpha \pm \Phi)) \right. \\ & + \partial_\alpha W^\pm)(-\partial_\alpha \ln(\frac{\Psi(-\alpha \pm \Phi)}{(\sin\alpha \pm \sin\theta^\pm)}) \sigma(\alpha \pm \Phi) - \partial_\alpha \sigma(\alpha \pm \Phi)) \frac{1}{\sin\alpha}] \\ & \mp 2\pi i \operatorname{sgn} d^\pm \cdot \sum_s \operatorname{Residu}[..] \Big|_{\substack{\alpha=\alpha'_s \text{ pole of }[..] \\ 0 < \pm \operatorname{sgn} d^\pm \operatorname{Re} \alpha'_s < |d^\pm|}} \Big) \end{aligned} \quad (7)$$

où $W^\pm = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha' \pm \Phi - \alpha))$, Ψ est la fonction spéciale déjà étudiée pour le dièdre à faces planes, et les constantes d^\pm sont arbitraires. On note que cette expression est analytique pour $\alpha' \in]-3\Phi + d^+, \Phi + d^+[\cap]-\Phi - d^-, 3\Phi - d^-[$.

On obtient alors une expression du champ pour $|\varphi| < \Phi$. La convergence du développement asymptotique en puissances entières de la courbure est faible à grande distance dans la zone d'excitation des ondes rampantes et c'est pourquoi on démontre que, pour $\varphi \sim \pm \Phi$, il est préférable de réécrire la fonction de rayonnement F , comme la transformée de l'expression initiale de F (à tout ordre du développement en puissances entières), suivant

$$F(\varphi) \equiv \frac{-e^{ika^\pm \sin(\pm\varphi - \Phi)}}{i\pi k a^\pm} \int_{-\infty - i\epsilon_1}^{+\infty - i\epsilon_1} \frac{e^{-i\nu(\pm\varphi - \Phi)} \mathcal{M}^\pm(\pm\nu)}{H_\nu^{(2)'}(ka^\pm) + Q^\pm H_\nu^{(2)}(ka^\pm)} d\nu,$$

quand $|\pm\varphi - \Phi| < \pi/2$, avec $Q^\pm = -i\sin\theta^\pm$, et

$$\mathcal{M}^\pm(ka^\pm \sin\alpha) = \frac{i\pi k a^\pm}{2\cos\alpha} \cdot \mathcal{O}_\alpha^\pm(F(\alpha \mp (\pi/2 - \Phi)))$$

où \mathcal{O}_α^\pm est un opérateur asymptotique différentiel, que l'on peut déduire, à tout ordre, des conditions asymptotiques considérées sur chacun des plans tangents $\varphi = \pm \Phi$, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\pm(\pm ka^\pm \cos\alpha) = & \frac{1}{\sin\alpha} ([(\sin\alpha - \sin\theta^\pm) \cdot (.) \\ & - D_{\pm\alpha \mp \pi}^\pm (.) / ika^\pm + 0(1/(ka^\pm)^2)] F(\pm(\alpha + \Phi))). \end{aligned}$$

Cette expression de F est uniforme dans la région $\varphi \sim \pm \Phi$. Elle permet la transformation continue du champ en ondes rampantes (un développement en puissances entières des courbures change alors continuellement en un développement en puissances fractionnaires lorsque φ varie), ceci quelque soit l'angle de dièdre. Notons que les expressions précédentes possèdent certains termes séculaires d'optique géométrique, que peut corriger une méthode d'extraction d'onde de frange.

Nous pouvons comparer les résultats obtenus par les expressions précédentes avec ceux déjà connus pour certains angles de dièdre. Pour $\Phi \geq \pi/2$, dans le cas limite $\sin\theta^\pm \rightarrow \infty$, on a $\Psi = 1$. Posant $\epsilon = \text{sgn} \text{Re}\alpha'$, on choisit de prendre

$$d^+ = (1 + \epsilon)\Phi \quad \text{and} \quad d^- = (1 - \epsilon)\Phi.$$

Posant $a^\delta = a^+$ ou a^- quand $\delta = +1$ ou -1 , on dérive de notre expression

$$\begin{aligned} \chi(\alpha') &= \left(\frac{1}{8\Phi} \partial_{\alpha'} \partial_{\varphi_0} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\alpha \left[\text{tg}\left(\frac{\pi}{2\Phi}(\alpha' - \epsilon\Phi - \alpha)\right) \frac{\frac{\pi}{2\Phi} \sin \frac{\pi}{2\Phi} \alpha}{\left(\cos \frac{\pi}{2\Phi} \alpha + \epsilon \sin \frac{\pi}{2\Phi} \varphi_0\right)} \right. \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{a^{-\epsilon} \sin \alpha} + \frac{1}{a^\epsilon \sin(\alpha + 2\epsilon\Phi)} \right) \right] + \left(i \frac{\epsilon}{a^\epsilon} \frac{\pi}{4\Phi} \partial_{\alpha'} \partial_{\varphi_0} \left[\frac{1}{\sin(\epsilon\Phi - \varphi_0)} \right. \right. \\ &\times \left. \left. \text{tg}\left(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha' + \varphi_0)\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha' + \epsilon(\Phi - \pi))\right) \right] \frac{\frac{\epsilon\pi}{2\Phi} \sin \frac{\pi}{2\Phi} \pi}{\left(\cos \frac{\pi}{2\Phi} \pi - \epsilon \sin \frac{\pi}{2\Phi} \varphi_0\right)} \right) \right], \end{aligned}$$

cette expression étant valide pour $\alpha' \in] -3\Phi, 3\Phi[$, $\epsilon = \text{sgn} \text{Re}\alpha'$.

Dans le cas du demi-plan courbe, $\Phi = \pi$ et $\epsilon a^\epsilon = a$, de sorte que

$$\chi(\alpha') = (0) + i \frac{1}{4a} \partial_{\alpha'} \partial_{\varphi_0} \left[\frac{1}{\sin(\varphi_0)} \text{tg}\left(\frac{1}{4}(\alpha' + \varphi_0)\right) - \frac{1}{2} \text{tg}\left(\frac{1}{4}\alpha'\right) \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\varphi_0)} \right].$$

Cela nous donne le terme du second ordre pour la fonction de rayonnement, premier terme influencé par la courbure des faces, suivant

$$(f_1(\pi + \varphi) - f_1(-\pi + \varphi))/k = \frac{i}{4ka} \partial_\varphi \partial_{\varphi_0} \left(\frac{\text{tg}((\varphi + \varphi_0)/2)}{\cos(\varphi/2)\cos(\varphi_0/2)} \right),$$

qui est conforme au résultat donné par Borovikov et V.B. Filippov.

Pour la discontinuité de rayon de courbure, $\Phi = \frac{\pi}{2}$ et le terme intégral pour χ est

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \partial_{\alpha'} \partial_{\varphi_0} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\alpha \left[\frac{\cos \alpha'}{(\cos \alpha + \epsilon \sin \alpha')} \frac{1}{(\cos \alpha + \epsilon \sin \varphi_0)} \left(\frac{1}{a^+} - \frac{1}{a^-} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2\pi} \partial_{\alpha'} \partial_{\varphi_0} \frac{\epsilon \cos \alpha'}{(\sin \varphi_0 - \sin \alpha')} \left(\frac{\pi/2 - \epsilon \alpha'}{\cos \alpha'} - \frac{\pi/2 - \epsilon \varphi_0}{\cos \varphi_0} \right) \left(\frac{1}{a^+} - \frac{1}{a^-} \right) \end{aligned}$$

pour $-\pi/2 < \epsilon \text{Re}\alpha' < 3\pi/2$. Cette expression pour χ nous donne alors

$$(f_1(\pi + \varphi) - f_1(-\pi + \varphi))/k = -2i \frac{\cos \varphi \cos \varphi_0}{(\sin \varphi + \sin \varphi_0)^3} \left(\frac{1}{ka^+} - \frac{1}{ka^-} \right),$$

qui est conforme au coefficient de diffraction de Kaminetzky et Keller.

3.3) Le problème avec des conditions de surface fonctions de la distance à l'arête :

On s'est aussi intéressé au problème du dièdre à impédances de faces fonction de la distance à l'arête [33]. Le seul résultat connu avant 1992, date de notre publication, concernait le cas

d'une variation de l'impédance proportionnelle ou inversement proportionnelle à la distance à l'arête, découvert par Felsen [34].

Par une généralisation du théorème d'inversion de Maliuzhinets, nous avons obtenu *l'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction spectrale associée à des impédances exprimées comme une somme d'exponentielles*. La résolvant alors par une technique de perturbation, nous avons trouvé une solution approchée explicite au problème [33].

4) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane d'incidence quelconque en régime stationnaire : problème vectoriel en régime harmonique

Dans le travail précédent, la direction de l'onde plane incidente était dans le plan perpendiculaire à l'axe de l'arête, et une suite naturelle à ce travail consistait à s'affranchir de cette condition pour considérer une direction quelconque, oblique par rapport à l'arête du dièdre.

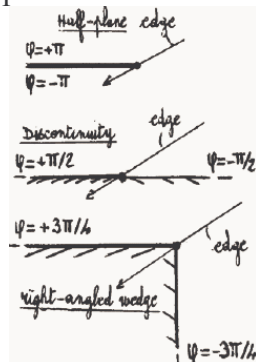
Pour le cas de surface imparfaitement réfléchissante, le problème prend en électromagnétisme, un degré de complexité supplémentaire du fait du couplage des composantes du champ : en posant deux conditions aux limites à deux inconnues en champ pour chacune des faces du dièdre, on n'aboutit plus en particulier, à deux problèmes indépendants sur une composante fixe du champ indépendante du choix des faces, excepté pour certains angles de dièdre.

Pour la recherche d'une solution analytique complète, on retient alors comme inconnues les deux composantes du champ électromagnétique suivant l'arête, qui sont couplées. Du fait de ce couplage, la méthode utilisée pour le cas scalaire n'est plus applicable : même si l'on considère des opérateurs vectoriels au lieu de scalaire, la multiplication des opérateurs en jeu n'est plus commutative.

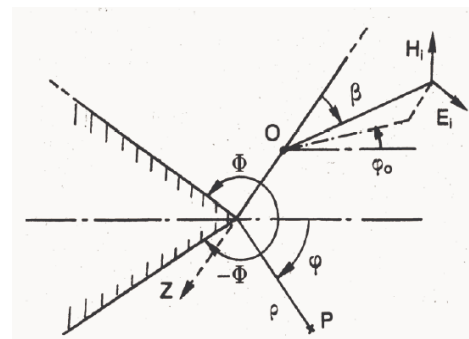
Bucci et Franceschetti [11], puis Vaccaro [12] et Rojas [13], avaient proposé une solution dans le cas où l'on pouvait écrire les deux conditions aux limites sur chacune des deux faces, à partir des composantes suivant la normale à une des faces. Ils avaient ainsi résolu les cas suivants : le cas de la discontinuité plane, celui du demi-plan avec des impédances de faces quelconques, ainsi que celui du dièdre d'angle droit avec une face parfaitement conductrice.

Recherchant quant à nous, *une méthode dans le cas d'un angle de dièdre quelconque et des conditions aux limites d'ordre de dérivées élevé sur chaque face, nous avons publié une démarche originale en 1989 [14] et 1990 [15-16].*

champ d'application des méthodes jusqu'en 1989



pour notre méthode (Φ arbitraire)



En réduisant le problème de couplage à la résolution d'un nouveau type d'équation fonctionnelle scalaire, notre approche nous conduit, en particulier, à la détermination complète de la solution du problème concernant le dièdre d'impédance relative unité (impédance de surface couramment considérée pour modéliser un absorbant radioélectrique) d'angle quelconque.

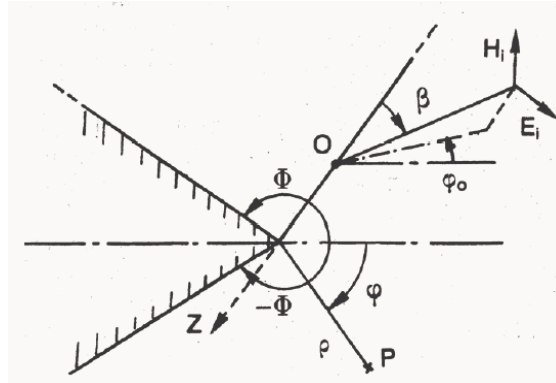
Notons que ce cas constitue, à ce jour, le seul cas canonique concernant un dièdre imparfaitement conducteur d'angle quelconque en incidence arbitraire, hormis dans le cas anisotrope où récemment deux classes de cas canoniques furent découvertes (voir notre article [36], et celui de Lyalinov [37]).

Indiquons le développement mathématique de certains de ces résultats tirés de [36] :

Dans le cas d'incidence oblique, l'onde plane incidente est caractérisée par les composantes des champs électrique et magnétique, respectivement E_z^i et H_z^i , donnés par

$$\begin{vmatrix} E_z^i(\rho, \varphi, z) \\ H_z^i(\rho, \varphi, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2/Z_0 \end{vmatrix} \cdot e^{ik[\rho \sin \beta \cos(\varphi - \varphi') - z \cos \beta]}.$$

Dans cette expression, k ($\text{Im}k \leq 0$) et Z_0 dénotent respectivement le nombre d'onde et l'impédance du milieu de propagation extérieur au dièdre, et β est l'angle de la direction d'incidence avec l'arête du dièdre.



Les composantes en z du champ, en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , peuvent être recherchées sous la forme d'intégrales de Sommerfeld-Maliuzhinets, suivant

$$\begin{vmatrix} E_z(\rho, \varphi, z) \\ H_z(\rho, \varphi, z) \end{vmatrix} = \frac{e^{-ikz \cos \beta}}{2\pi i} \int_{\gamma} \begin{vmatrix} f_1(\alpha + \varphi) \\ f_2(\alpha + \varphi)/Z_0 \end{vmatrix} \cdot e^{ik\rho \sin \beta \cos \alpha} d\alpha,$$

qui satisfont l'équation de Helmholtz $(\Delta + k^2)u = 0$. Le contour γ est composé de deux boucles symétriques dans le plan complexe. Considérant des conditions à l'arête et à l'infini, on assume des conditions d'impédance anisotrope

$$(E - n^\pm(n^\pm E)) = (Z^\pm)(n^\pm \wedge H) \text{ sur chaque face } \varphi = \pm \Phi,$$

où n^\pm est le vecteur unité le long de la normale sortante à chaque face, et $(Z^\pm)/Z_0$ est le tenseur d'impédance relative. Ceci implique les équations couplées

$$A_{\alpha}^{\pm} \begin{vmatrix} f_1(\alpha \pm \Phi) \\ f_2(\alpha \pm \Phi) \end{vmatrix} - A_{-\alpha}^{\pm} \begin{vmatrix} f_1(-\alpha \pm \Phi) \\ f_2(-\alpha \pm \Phi) \end{vmatrix} = \sin \alpha \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix},$$

avec

$$A_{\alpha}^{\pm} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \sin \alpha \pm \eta_h^{\pm} \sin \beta \\ \sin \alpha \pm \sin \beta / \eta_e^{\pm} & -\cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix},$$

quand $(Z^{\pm})/Z_0$ est caractérisé par une classe de matrice d'impédance diagonale, d'éléments $\eta_h^{\pm}, \eta_e^{\pm}$. Définissant une approche originale de la factorisation pour les équations couplées de ce type, on réduit le problème à la recherche de la solution de l'équation

$$(C_{\alpha \pm \Phi})[(A_{\alpha}^{\pm})^{-1}(A_{-\alpha}^{\pm})](C_{-\alpha \pm \Phi})^{-1} = \epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

puis à la recherche d'une solution analytique quelconque de l'équation non linéaire suivante

$$n^{\pm}(\alpha)r(\alpha \pm \Phi)r(-\alpha \pm \Phi) - (l^{\pm}(\alpha)r(\alpha \pm \Phi) - l^{\pm}(-\alpha)r(-\alpha \pm \Phi)) - p^{\pm}(\alpha) = 0$$

où l^{\pm}, n, p sont des combinaisons des éléments de (A_{α}) .

On établit alors en particulier l'expression exacte de la solution quand les produits de ces éléments sont égaux à l'unité, i.e. $\eta_h^{\pm}\eta_e^{\pm} = 1$.

Ce cas d'anisotropie est particulièrement intéressant. Il correspond à un coefficient de réflexion d'optique géométrique qui est indépendant de la polarisation quand la direction de l'onde plane incidente est perpendiculaire à l'arête (incidence normale). Ce type de condition appelée du nom de "balanced hybrid condition" est bien connue dans le domaine des antennes et cornets, ainsi que dans celui des matériaux absorbants.

Nous obtenons alors

$$\begin{bmatrix} f_1(\alpha) \\ f_2(\alpha) \end{bmatrix} = \frac{\Psi_{an}(\alpha)}{\Psi_{an}(\varphi')} \begin{bmatrix} \cos \Delta(\alpha) & \sin \Delta(\alpha) \\ -\sin \Delta(\alpha) & \cos \Delta(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \sigma(\alpha),$$

où $\Delta(\alpha) = v_{an}(\alpha) - v_{an}(\varphi')$, $\sigma(\alpha) = \mu \cos(\mu \varphi')(\sin(\mu \alpha) - \sin(\mu \varphi'))^{-1}$, $\mu = \pi/2\Phi$, avec les expressions explicites suivantes des deux nouvelles fonctions spéciales $\Psi_{an}(\alpha)$ and $v_{an}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \Psi_{an}(\alpha) &= \prod_{\epsilon=-1,1} \prod_{\pm} \left(\prod_{l=0}^N \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi}((\alpha \pm \Phi) + \theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta + l\pi)\right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi}(-(\alpha \pm \Phi) + \theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta + l\pi)\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi}((\alpha \pm \Phi) + \pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta + l\pi)\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi}(-(\alpha \pm \Phi) + \pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta + l\pi)\right)^{-\frac{1}{2}} J^{(-1)^l} \\ &\left. \times \exp\left(\int_0^{\infty} (-e^{-\nu\pi})^{N+1} \times \frac{e^{-\nu(\theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta)} + e^{-\nu(\pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta)}}{2 \times (1 + e^{-\nu\pi})} \times \frac{1 - \cosh(\nu(\alpha \pm \Phi))}{\nu \sinh(2\nu\Phi)} d\nu\right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v_{an}(\alpha) &= i \sum_{\pm} \sum_{\epsilon=-1,+1} \left(\sum_{l=0}^N \ln \left[\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi} \left(-(\alpha \pm \Phi) + \theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta + l\pi \right) \right)^{\mp \frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi} \left((\alpha \pm \Phi) + \theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta + l\pi \right) \right)^{\mp \frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi} \left((\alpha \pm \Phi) + \pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta + l\pi \right) \right)^{\pm \frac{1}{2}} \\
&\Gamma \left. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\Phi} \left(-(\alpha \pm \Phi) + \pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta + l\pi \right) \right)^{\pm \frac{1}{2}} J^{\epsilon} \right) \\
&+ \epsilon \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu(\theta_1^{\pm} - \epsilon i \delta)} - e^{-\nu(\pi - \theta_1^{\pm} + \epsilon i \delta)}}{2 \times (1 - e^{-\nu\pi})} \times e^{-\nu(N+1)\pi} \times \frac{\mp (\cosh(\nu(\alpha \pm \Phi)) - 1)}{\nu \sinh(2\nu\Phi)} d\nu.
\end{aligned}$$

où $\eta_h^{\pm} = \sin\theta_1^{\pm}$ ($0 < \text{Re}\theta_1^{\pm} \leq \pi/2$), $\delta = \ln(\tan(\beta/2))$.

Résultats numériques :

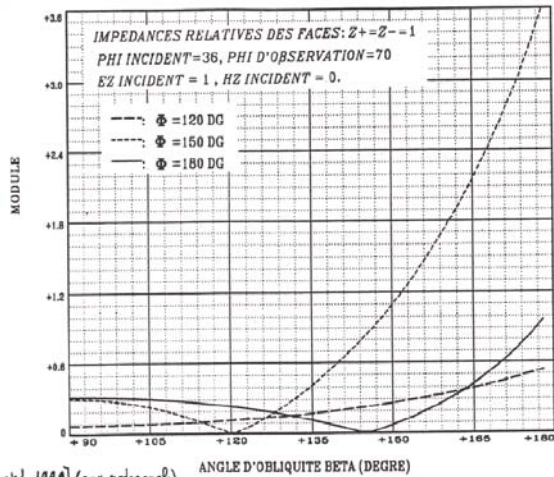
dièdre d'angle arbitraire par
notre expression analytique
pour différents angles de dièdre

$\Phi = \frac{2\pi}{3}$, $\Phi = \frac{5\pi}{6}$ et $\Phi = \pi$
(éch. $Ezd : 0, 3.6$; $Hzd : 0, 2.5$)

dièdre / demi-plan, i.e. $\Phi = \pi$, par
l'expression de Bucci et Franceschetti

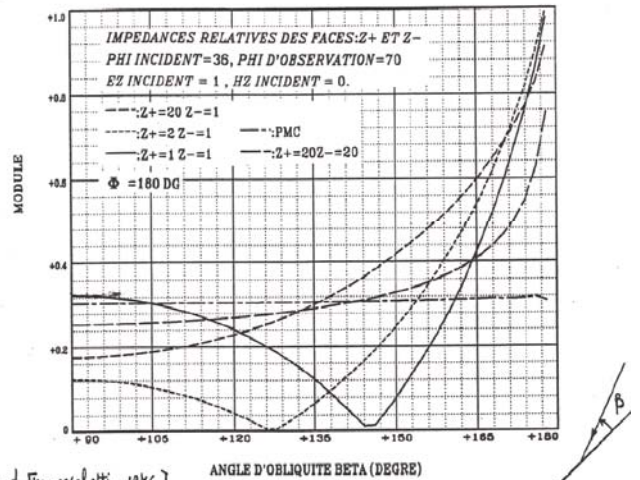
(éch. $Ezd : 0, 1.$; $Hzd : 0, .7$)

TERME DE CHAMP DIFFRACTE Ezd



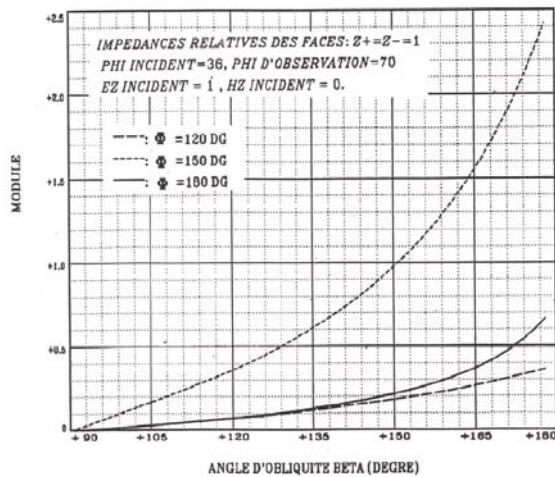
[Bornard 1990] (any wedge angle)
[Ann. of Telec. 15, 4-2, pp.30-39]

TERME DE CHAMP DIFFRACTE Ezd

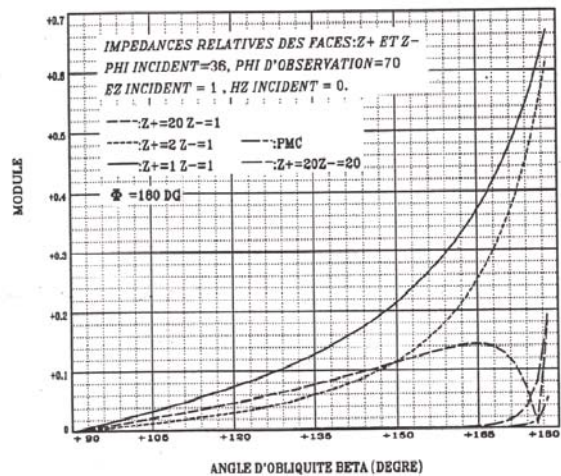


[Bucci and Franceschetti 1976]
(Half-Plane)

TERME DE CHAMP DIFFRACTE Hzd



TERME DE CHAMP DIFFRACTE Hzd



Les courbes de gauche utilisent nos expressions qui s'appliquent pour un angle de dièdre arbitraire. Elles donnent les composantes suivant z du champ diffracté pour différents angles Φ de dièdre quand les impédances relatives de faces sont égales à l'unité.

Les courbes de droites utilisent les expressions de Bucci et Franceschetti (1976), qui ne s'appliquent qu'au demi-plan. On les applique pour différentes impédances de faces.

On remarque l'excellent accord pour le cas commun du demi-plan ($\Phi = \pi$, i.e. 180°) avec impédances relatives de faces égales à l'unité.

5) Diffraction par un dièdre avec des conditions aux limites complexes, illuminé par une onde plane ou cylindrique quelconque en régime non stationnaire : problème vectoriel en régime temporel quelconque

Quittant le domaine harmonique, nous avons considéré, dans un article de 1991 [27], la réponse d'un dièdre à une onde plane non stationnaire. En effet, s'il existait une solution analytique particulière au cas du dièdre à faces planes à impédance réelle, indépendante de la fréquence en régime harmonique [Papadopoulos [28], Sakharova et Filippov [29]], il n'y avait en revanche aucune expression explicite générale quand l'impédance, arbitraire, peut varier avec la pulsation.

En travaillant l'expression de la transformée de Laplace inverse de l'intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets, tout en utilisant la causalité et la réalité du champ dans le domaine temporel, on aboutit à certaines propriétés générales de la transformée de la fonction spectrale et ainsi, à une expression originale et compacte du champ. Dans cette expression, le contour d'intégration sur les angles complexes, infini en régime harmonique, est remplacé par un chemin fini, fonction du temps.

Cette forme exacte permet, comme l'intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets dans le domaine fréquentiel, de distinguer aisément les termes d'optique géométrique du terme de champ proprement excité par l'arête (champ diffracté d'arête plus ondes de surface). Elle permet d'effectuer facilement toutes les approximations nécessaires pour aboutir aux solutions de Papadopoulos, Sakharova, ou celle de Veruttipong [30] pour le cas parfaitement conducteur. Cette approche est, en outre, généralisable à une large classe de dièdres dont on connaît le champ diffracté, en régime harmonique, par une intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets, ainsi qu'au cas de l'illumination cylindrique, comme on l'expose dans [31] et [32] .

Indiquons certains de nos résultats obtenus par notre méthode :

Alors qu'en régime harmonique, les chemins d'intégration dans le plan complexe étaient infinis, on démontre qu'en régime non stationnaire, la causalité et la passivité du système entraînent un chemin fini dépendant du temps et de la position.

Dans le cas de l'illumination plane de direction φ' , si $f(\alpha + \varphi; \omega)$ n'a aucune singularité (excepté peut-être à l'infini) en ω pour ω réel, quand $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$, $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, et est $O(e^{a|\operatorname{Im}\alpha|})$ quand $|\operatorname{Im}\alpha| \rightarrow \infty$, $|\operatorname{Re}\alpha| < \pi$, on démontre que la transformée de Laplace inverse des composantes suivant z des champs électrique et magnétique s'écrit de façon générale :

$$u(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}(t, \rho, z)} \mathcal{F}_z(\alpha + \varphi, \tau(\alpha), t) d\alpha$$

où $\mathcal{H}(t, \rho, z)$ est un chemin fini, tel que $\tau(\alpha) = (\rho \sin\beta \cos\alpha - z \cos\beta)/c + t$ réel > 0 ,

avec \mathcal{F}_ζ , donné par :

$$\mathcal{F}_\zeta(\alpha + \varphi, \tau(\alpha), t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{+\infty - i\sigma} f(\alpha + \varphi, \varphi'; \omega) e^{i\omega\tau_\zeta(\alpha)} d\omega,$$

où $\tau_\zeta(\alpha) = \zeta(\omega)(\rho \sin\beta \cos\alpha - z \cos\beta)/c + t$, et $k = \zeta(\omega)\omega/c$, le nombre d'onde du milieu de propagation. Ce résultat s'obtient du fait que l'on a démontré, que, moyennant les conditions de causalité et de passivité, la transformée \mathcal{F}_ζ de f satisfait des propriétés de causalité.

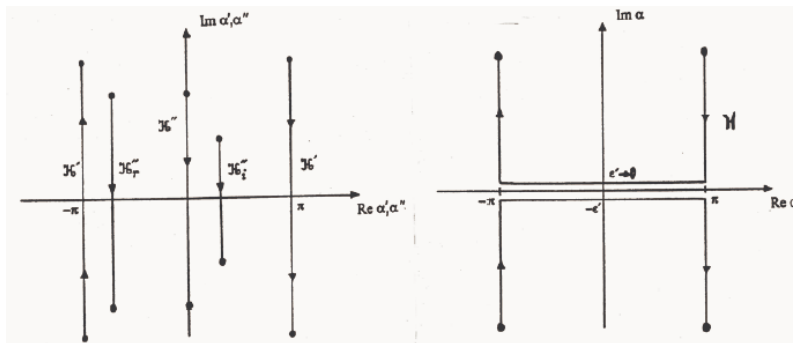
De même pour une illumination provenant d'une ligne source, on peut montrer que la partie du champ diffracté par l'arête (\neq optique géométrique) s'écrit

$$u_{se}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{+\infty - i\sigma} d\omega \left(\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}''} \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{H}'} e^{i\omega\tau_\zeta(\alpha', \alpha'')} f(\alpha' + \varphi, \alpha'' + \varphi'; \omega) d\alpha' d\alpha'' \right)$$

avec

$$\tau_\zeta(\alpha', \alpha'') = \zeta(\omega)((\rho \cos\alpha' - \rho' \cos\alpha'') \sin\beta - z \cos\beta)/c + t$$

où les chemins \mathcal{H}' and \mathcal{H}'' sont composés de segments avec $\tau(\alpha', \alpha'') = ((\rho \cos\alpha' - \rho' \cos\alpha'') \sin\beta - z \cos\beta)/c + t > 0$, respectivement le long des droites $\text{Re}\alpha'' = 0$ et $\text{Re}\alpha' = \pm\pi$.



On remarque l'originalité de la méthode qui permet de considérer le dièdre imparfaitement conducteur ainsi que le milieu externe à celui-ci comme dispersifs en fréquence, ce que la méthode de Cagniard-De Hoop ne peut permettre (comme le précise Felsen dans ses travaux sur le dièdre). Notons que dans le cas particulier du demi-plan dispersif en fréquence, on retrouve les expressions obtenues par Kuester (demi-espace dispersif).

Comme en régime harmonique, on peut développer le champ suivant les différents types d'ondes excitées, en particulier les ondes d'optique géométrique et l'onde diffractée d'arête, et aussi généraliser les expressions pour une excitation cylindrique plutôt que plane.

6) Problèmes de la diffraction par des objets 2D comportant plusieurs singularités de géométries ou de matériaux

La réduction du problème de la diffraction par un corps 2D comportant plusieurs singularités est un problème encore peu exploré de façon rigoureuse par des méthodes spectrales. Le corps principal de notre nouvelle approche n'est pas asymptotique et permet, de façon tout à fait originale, des approximations analytiques de la solution dans les cas de singularités proches ou éloignées.

Dans notre analyse, on utilise une expression particulière de la fonction spectrale en fonction du champ sur une face quelconque d'un secteur dièdre que nous avons défini en 1994 mais que nous n'avons réellement exploité qu'en 2003, au cours de l'étude de la diffraction par un plan composé de trois parties distinctes que nous résumons en section 6.1. L'expression de base dérivant d'une utilisation particulière du second théorème de Green, elle nous a permis ensuite de résoudre le cas de la diffraction par un polygone imparfaitement conducteur semi-infini (cas jamais résolue jusqu'alors) résumée dans la section 6.2.

6.1) Diffraction par un corps avec plusieurs discontinuités : le cas du plan composé de trois parties d'impédances de surface distinctes.

Dans le problème délicat de la diffraction par des objets avec plusieurs singularités proches, la plupart des résultats analytiques proviennent de la méthode spectrale de Wiener-Hopf (voir par exemple [4]) ou de la méthode consistant à considérer la fonction de Green pour l'objet sans singularité et à approximer le champ dans la zone perturbée dans les équations intégrales.

Généralement, la représentation de Fourier conjuguée à la méthode spectrale de Wiener-Hopf conduit à des résultats intéressants dans le domaine des hautes fréquences, tandis que les équations sur le champ sont appropriés pour déduire des approximations dans le domaine des basses fréquences. Pourtant, le problème devient très compliqué pour un objet imparfaitement conducteur tel le plan à trois parties d'impédances distinctes.

Nous avons développé récemment de nouveaux résultats utilisant cette fois la représentation de Sommerfeld-Maliuzhinets du champ et une représentation nouvelle des fonctions spectrales. Les avantages en sont : une analyse simple dans le plan complexe pour des objets comportant plusieurs singularités, l'obtention d'équations intégrales découplées à noyaux réguliers convenant à des approximations pour la fonction de rayonnement quand les discontinuités sont faiblement ou largement espacées.

Présentons certains des résultats obtenus dans [38], [39], [40].

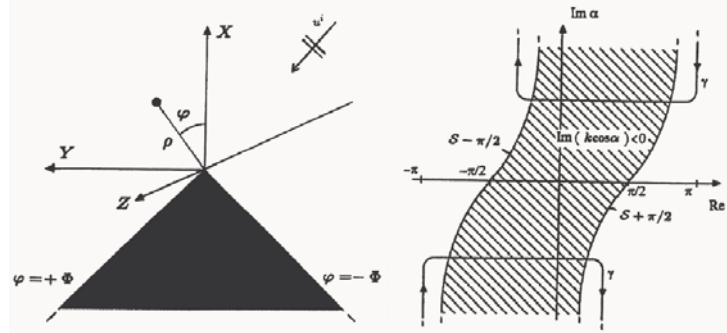
6.1.1) Expression pour la fonction spectrale attachée à la représentation de Sommerfeld-Maliuzhinets du champ à partir de la connaissance du champ sur une face quelconque d'un domaine angulaire.

Considérons le cas de la diffraction en espace libre d'une onde plane

$$u^i(\rho, \varphi) = e^{ik\rho\cos(\varphi-\varphi_0)}, \quad (1)$$

par un secteur angulaire, défini en coordonnées cylindriques (ρ, φ) par $|\varphi| > \Phi$, avec

$|\varphi_0| < \Phi$. Les variations des caractéristiques passives de cette région sont supposées indépendantes de z . Une dépendance harmonique en temps $e^{i\omega t}$ est considérée.



Dans la région $|\varphi| \leq \Phi$, le champ satisfait l'équation de Helmholtz. Le champ total $u = u_s + u^i$ est alors recherché sous la forme d'une intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha + \varphi) e^{ik\rho \cos \alpha} d\alpha,$$

où f est une fonction analytique et $(\Delta + k^2)u(\rho, \varphi) = 0$. Nous avons récemment montré que

$$f(\pm \pi + \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (iku(\rho', \pm \Phi) \sin(\varphi \mp \Phi) \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho', \pm \Phi)) e^{ik\rho' \cos(\varphi \mp \Phi)} d\rho',$$

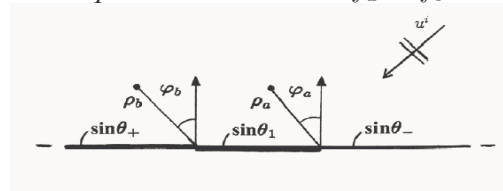
lorsque $\pi/2 < \Phi \mp \varphi_0 < 3\pi/2$ et $\pi/2 < \Phi \mp \varphi < 3\pi/2$, $|\arg(ik)| < \pi/2$. La fonction spectrale peut donc s'exprimer comme le rayonnement d'une face. Cette expression est particulièrement adaptée pour un changement d'origine ou de coordonnées. Il est important de noter que, suivant le second théorème de Green, certaines déformations du chemin d'intégration sont possibles.

6.1.2) Application au problème d'un plan à trois parties d'impédances distinctes.

Nous considérons la diffraction par un plan divisé en trois parties S_- , S_1 et S_+ , chacune caractérisée par une condition de surface mixte, dite d'impédance, du type

$$\frac{\partial u}{\partial n} - ik \sin \theta u = 0$$

de paramètre d'impédance $\sin \theta$ respectivement égale à $\sin \theta_-$, $\sin \theta_1$, and $\sin \theta_+$. On définit deux systèmes de coordonnées cylindriques d'origines respectives aux deux points de discontinuité, et les fonctions spectrales associées f_a et f_b .



Définir deux origines distinctes a plusieurs conséquences. En premier lieu,

$$(f_a(\alpha) - 1/(\alpha - \varphi_0)) \text{ and } (f_b(\alpha) - e^{ik\Delta \sin \varphi_0}/(\alpha - \varphi_0))$$

sont réguliers dans la bande $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \pi/2$. Par ailleurs, considérant notre expression de $\pm f(\pm\pi + \alpha)$ avec u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur la face $\varphi = \pm\Phi$, nous obtenons

$$f_a(\alpha) = e^{-ik\Delta\sin\alpha} f_b(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^\Delta (-iku(\rho_a, \pi/2)\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial n}(\rho_a, \pi/2)) e^{-ik\rho_a\sin\alpha} d\rho_a,$$

$$f_b(\alpha) = e^{ik\Delta\sin\alpha} f_a(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^\Delta (iku(\rho_b, -\pi/2)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial n}(\rho_b, -\pi/2)) e^{+ik\rho_b\sin\alpha} d\rho_b,$$

pour α quelconque.

6.1.3) Equations fonctionnelles pour f_a et f_b

Considérant l'expression de $f_a(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) - e^{\mp ik\Delta\cos\alpha} f_b(\alpha \pm \frac{\pi}{2})$, et la parité de $\cos\alpha$, nous déduisons des conditions aux limites les équations fonctionnelles suivantes, pour f_a ,

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha + \sin\theta_1) f_a(\alpha + \pi/2) - (-\sin\alpha + \sin\theta_1) f_a(-\alpha + \pi/2) \\ &= -2\sin\alpha \frac{(\sin\theta_1 - \sin\theta_+)}{(-\sin\alpha + \sin\theta_+)} e^{-ik\Delta\cos\alpha} f_b(\alpha + \pi/2), \\ & (\sin\alpha - \sin\theta_-) f_a(\alpha - \pi/2) - (-\sin\alpha - \sin\theta_-) f_a(-\alpha - \pi/2) = 0. \end{aligned}$$

et pour f_b ,

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha - \sin\theta_1) f_b(\alpha - \pi/2) - (-\sin\alpha - \sin\theta_1) f_b(-\alpha - \pi/2) \\ &= -2\sin\alpha \frac{(\sin\theta_1 - \sin\theta_-)}{(\sin\alpha + \sin\theta_-)} e^{-ik\Delta\cos\alpha} f_a(\alpha - \pi/2). \\ & (\sin\alpha + \sin\theta_+) f_b(\alpha + \pi/2) - (-\sin\alpha + \sin\theta_+) f_b(-\alpha + \pi/2) = 0. \end{aligned}$$

6.1.4) Equations intégrales spectrales

Nous avons quatre équations sur f_a et f_b . Nous pouvons alors utiliser la théorie des équations fonctionnelles pour dériver des équations intégrales pour

$$f_{a0}(\alpha) = f_a(\alpha) - f_0(\alpha), \quad f_{b0}(\alpha) = f_b(\alpha) - e^{ik\Delta\sin\alpha} f_0(\alpha),$$

où f_0 est la solution quand $\Delta = 0$. Après des calculs élémentaires, nous obtenons des équations intégrales sur de nouvelles fonctions $S(\alpha)$ et $D(\alpha)$ sur l'axe imaginaire :

$$\begin{aligned} (S, D) &= ((\sin\theta_1 - \sin\theta_-)^{1/2} (\sin\theta_1 - \sin\theta_+)^{1/2}) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{2i\sin\alpha'}{(\sin\alpha' - \sin\theta_1)} C(\alpha') \right) \\ & ((S, -D) e^{-ik\Delta\cos\alpha'} + (S^i, -D^i)) \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha + \cos\alpha'} d\alpha', \end{aligned}$$

où S et D sont des combinaisons de f_{a0} et f_{b0} , S^i et D^i sont des fonctions connues.

Nous pouvons considérer chaque noyau pour Δ arbitraire comme la somme du noyau pour $\Delta = 0$ plus un autre terme s'annulant lorsque $\Delta \rightarrow 0$. En conséquence, nous pouvons grandement améliorer la réduction du problème pour Δ petit si nous développons une

expression analytique du résolvant dans le cas $\Delta = 0$ et procédons à une semi-inversion des équations, de sorte que

$$e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \leftrightarrow e^{-ik\Delta\cos\alpha'} - 1, \quad \frac{\pm \sin\alpha'}{\cos\alpha + \cos\alpha'} \leftrightarrow R_{\pm}(\alpha, \alpha').$$

Le système d'équations en résultant est un système d'équations intégrales non singulières de Fredholm dans L^2 particulièrement adaptées quand Δ est petit pour une inversion numérique ou des approximations.

6.1.5) Un calcul asymptotique pour Δ petit et approximation du diagramme de rayonnement

Après déformation du contour γ vers le chemin de phase stationnaire passant par le point de phase stationnaire $\alpha = \pm \pi$, la partie du champ rayonné cylindriquement à grande distance s'écrit

$$u_d(\rho_a, \varphi_a) = \frac{-e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k\rho_a}} e^{-ik\rho_a} (f_a(\pi + \varphi_a) - f_a(-\pi + \varphi_a)) + O(1/(k\rho_a)^{3/2}).$$

Or, utilisant les équations fonctionnelles, nous avons

$$f_a(\pi + \varphi) - f_a(-\pi + \varphi) = \left(\frac{-\cos\varphi + \sin\theta_+}{(\cos\varphi + \sin\theta_+)} - \frac{(-\cos\varphi + \sin\theta_-)}{(\cos\varphi + \sin\theta_-)} \right) f_a(-\varphi) + \\ + \frac{2\cos\varphi}{(\cos\varphi + \sin\theta_+)} \left(\frac{f_a(-\varphi) - e^{ik\Delta\sin\varphi} f_b(-\varphi)}{(\cos\varphi + \sin\theta_1)/(\sin\theta_1 - \sin\theta_+)} \right).$$

Pour simplifier, on considère le cas où $\sin\theta_+ = \sin\theta_-$. Une bonne approximation pour Δ petit consiste alors à prendre $\frac{f_a(-\varphi) - e^{ik\Delta\sin\varphi} f_b(-\varphi)}{(\cos\varphi + \sin\theta_1)} \simeq \frac{ik\Delta}{2} u|_{\rho_a=0} = -k\Delta f_a(i\infty)$, ce qui nous donne

$$f_a(\pi + \varphi) - f_a(-\pi + \varphi) \simeq \frac{-2(\sin\theta_1 - \sin\theta_+)k\Delta f_a(i\infty)\cos\varphi}{(\cos\varphi + \sin\theta_+)}.$$

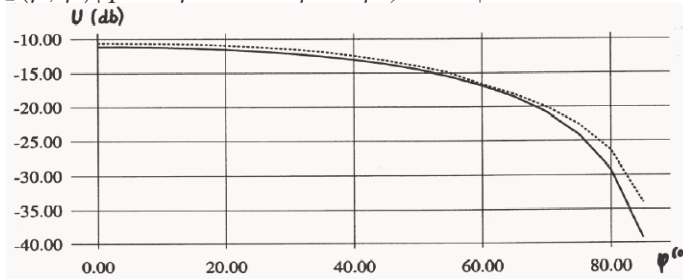
Utilisant alors les équations intégrales sur f_a et f_b pour Δ petit et $Im\alpha$ grand, on dérive une approximation pour $f_a(i\infty)$ dont on déduit

$$f_a(\pi + \varphi) - f_a(-\pi + \varphi) \simeq \frac{ik\Delta \frac{2\cos\varphi}{(\cos\varphi + \sin\theta_+)} \frac{2\cos\varphi_0}{(\cos\varphi_0 + \sin\theta_+)}}{k\Delta(1 - i\frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma k \Delta}{2e}) + 2/(\sin\theta_1 - \sin\theta_+)}.$$

On note que cette expression satisfait le théorème de réciprocité, et montre certaines résonances. Quand $\sin\theta_+ = 0$, on retrouve l'expression de Barkeshli et Volakis (excepté que $\ln \frac{\gamma k \Delta}{2e}$ est remplacé par $\ln \frac{\gamma k \Delta}{8}$).

6.1.6) Résultats numériques

Pour $U = (k\rho)^{1/2} |u_d(\rho, \varphi)|$ pour $\rho \rightarrow \infty, \varphi = \varphi_0, \sin\theta_+ = \sin\theta_- :$



Comparaisons sur le diagramme de rayonnement U pour

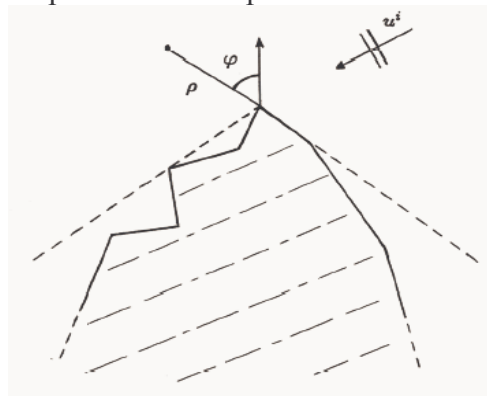
$\sin\theta_+ = 0.625, \sin\theta_1 = 0.625i$ (--- méthode des moments, — notre expression analytique);

6.2) Diffraction par un polygone imparfaitement conducteur avec conditions d'impédances

Nous avons développé, à la suite de nos travaux sur le plan avec plusieurs discontinuités, une méthode générale pour la diffraction en espace libre par des objets polygonaux 2D [42], que nous avons en particulier illustré en détaillant le cas du polygone semi-infini composé d'un segment attaché à deux demi-plans d'impédances distinctes. Dans ce cas, la méthode de Wiener-Hopf [4] ne peut s'appliquer, tandis que les méthodes asymptotiques [41] ne peuvent être utilisées que lorsque les arêtes sont largement espacées.

Cette méthode originale, basée sur la représentation intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets des champs, permet de réduire le problème à des équations simples dans le plan complexe. Pour cela, nous utilisons notre expression générale en champ de la fonction spectrale, déjà considérée pour le problème du plan à plusieurs parties (sect. 6.1), et déformons le contour d'intégration, ce qui est possible du fait du second théorème de Green. Il devient alors possible de dériver des équations fonctionnelles sur les fonctions spectrales dont nous pouvons déduire des équations intégrales.

Appliquant cette approche au polygone semi-infini à trois parties, nous réduisons pour la première fois ce problème à un système d'équations de Fredholm non-singulières de seconde espèce, particulièrement adapté pour des approximations ou une inversion numérique. On remarquera que, dans le cas d'un plan à trois parties ou celui d'un polygone symétrique, le système d'équations intégrales peut être découplé.



Présentons certains des résultats obtenus dans [42].

6.2.1) Généralisation de l'expression de la fonction spectrale dans le cas polygonal

On considère une surface polygonale, dans le domaine $|\varphi| > \Phi$ englobant l'objet diffractant (voir figure précédente), composé de deux faces polygonales, dénotées $+$ et $-$, respectivement avec m^\pm segments de longueurs d_j^\pm d'angles tangents $\pm \Phi_j^\pm$, $j = 1, 2, \dots, m^\pm$ et un plan semi-infini d'angle tangent $\pm \Phi_e^\pm$. On considère l'expression déjà obtenue pour f dans la section 6.1.1)

$$f(\pm \pi + \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (iku(\rho', \pm \Phi) \sin(\varphi \mp \Phi) \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho', \pm \Phi)) e^{ik\rho' \cos(\varphi \mp \Phi)} d\rho'.$$

Celle-ci dérive du second théorème de Green. On montre alors qu'on peut déformer le contour suivant la surface polygonale définie, et écrire

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq m^\pm} e^{-ik \sum_{1 \leq i < j} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} \int_0^{d_j^\pm} (-iku(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm) \sin(\alpha \mp \Phi_j^\pm) \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm)) e^{-ik\rho'_j \cos(\alpha \mp \Phi_j^\pm)} d\rho'_j + e^{-ik \sum_{1 \leq i \leq m^\pm} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha),$$

où $f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha)$ est la continuation analytique de l'expression intégrale

$$f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha' \pm \Phi_e^\pm) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (-iku(\rho'_e, \pm \Phi_e^\pm) \sin \alpha' \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho'_e, \pm \Phi_e^\pm)) e^{-ik\rho'_e \cos \alpha'} d\rho'_e,$$

valide lorsque $Re(ik(\cos \alpha' - \cos(\Phi_e^\pm \mp \varphi_0))) > 0$, $|Re \alpha'| < \pi$, $|\arg(ik)| < \pi/2$.

La fonction f_{e,m^\pm}^\pm est la fonction spectrale attachée au champ dans les coordonnées cylindriques $(\rho_e^\pm, \varphi_e^\pm)$ d'origine à l'arête du demi-plan $\varphi_e^\pm = \pm \Phi_e^\pm$, suivant

$$u(\rho_e^\pm, \varphi_e^\pm) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha + \varphi_e^\pm) e^{ik\rho_e^\pm \cos \alpha} d\alpha,$$

dans le secteur en espace libre $\Phi_e^\pm - \delta_e^\pm \leq \pm \varphi_e^\pm \leq \Phi_e^\pm$, où δ_e^\pm est une constante strictement positive définie par la géométrie. On peut montrer par ailleurs que $f(\alpha)$ et $f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha)$ sont des fonctions régulières dans le domaine $-\Phi_e^- \leq Re \alpha \leq \Phi_e^+$, excepté à l'infini où elles se comportent comme des fonctions entières et au point $\alpha = \varphi_0$ où elles ont un pôle simple. On peut alors considérer le cas d'une surface polygonale avec conditions aux limites d'impédance.

6.2.2) Application au cas de conditions aux limites d'impédance

On considère maintenant que la surface polygonale satisfait des conditions d'impédance par parties.

6.2.2.1) Equations fonctionnelles dues aux conditions aux limites sur chaque demi-plan et méromorphie

On considère d'abord les conditions sur les deux demi-plans appartenant à chacune des faces polygonales,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\rho_e^\pm, \pm \Phi_e^\pm) - ik \sin \theta_p^\pm u(\rho_e^\pm, \pm \Phi_e^\pm) = 0,$$

puis l'expression intégrale de $f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha \pm \Phi_e^\pm)$ en fonction du champ, pour $Re(ik(\cos \alpha - \cos(\Phi_e^\pm \mp \varphi_o))) > 0$, $|Re \alpha| < \pi$, $|\arg(ik)| < \pi/2$. Utilisant la parité de $\cos \alpha$, on dérive alors que

$$(\sin \alpha \pm \sin \theta_e^\pm) f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha \pm \Phi_e^\pm) - (-\sin \alpha \pm \sin \theta_e^\pm) f_{e,m^\pm}^\pm(-\alpha \pm \Phi_e^\pm) = 0.$$

Prenant en compte l'analyticité des fonctions spectrales en α and φ_o , cette équation peut être considérée, par continuation analytique, pour α et φ_o arbitraires.

Du fait que $f_{e,m^\pm}^\pm = e^{A^\pm} f + B^\pm$ où A^\pm et B^\pm sont des fonctions entières, $e^{A^\pm} f$ satisfait des équations fonctionnelles similaires. Comme $f(\alpha)$ est régulière dans la bande $-\Phi_e^- \leq Re \alpha \leq \Phi_e^+$, excepté pour le pôle à $\alpha = \varphi_o$ et à l'infini (comme une fonction entière), il s'en suit que f , et donc f_{e,m^\pm}^\pm , sont des fonctions méromorphes.

6.2.2.2) Equations fonctionnelles dues aux conditions sur chacun des segments finis

Considérant, pour $p \leq m^\pm$, les fonctions

$$f_a^\pm(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{p \leq j \leq m^\pm} e^{-ik \sum_{p \leq i < j} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} \int_0^{d_j^\pm} (-iku(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm) \sin(\alpha \mp \Phi_j^\pm) \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm)) e^{-ik \rho'_j \cos(\alpha \mp \Phi_j^\pm)} d\rho'_j + e^{-ik \sum_{p \leq i \leq m^\pm} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha),$$

et

$$f_b^\pm(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{p+1 \leq j \leq m^\pm} e^{-ik \sum_{p+1 \leq i < j} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} \int_0^{d_j^\pm} (-iku(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm) \sin(\alpha \mp \Phi_j^\pm) \pm \frac{\partial u}{\partial n}(\rho'_j, \pm \Phi_j^\pm)) e^{-ik \rho'_j \cos(\alpha \mp \Phi_j^\pm)} d\rho'_j + e^{-ik \sum_{p+1 \leq i \leq m^\pm} d_i^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_i^\pm)} f_{e,m^\pm}^\pm(\alpha),$$

ainsi que les conditions d'impédance,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}(\rho'_p, \pm \Phi_p^\pm) - ik \sin \theta_p^\pm u(\rho'_p, \pm \Phi_p^\pm) \right]_{0 \leq \rho'_p \leq d_p^\pm} = 0,$$

on obtient, en laissant

$$f_1^\pm(\alpha) = f_a^\pm(\alpha) - e^{-ik d_p^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_p^\pm)} f_b^\pm(\alpha)$$

$$f_2^\pm(\alpha) = f_b^\pm(\alpha) - e^{ik d_p^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_p^\pm)} f_a^\pm(\alpha) = -e^{ik d_p^\pm \cos(\alpha \mp \Phi_p^\pm)} f_1^\pm(\alpha),$$

et en utilisant la parité de $\cos\alpha$, les équations fonctionnelles suivantes

$$(\sin\alpha \pm \sin\theta_p^\pm) f_1^\pm(\alpha \pm \Phi_p^\pm) - (-\sin\alpha \pm \sin\theta_p^\pm) f_1^\pm(-\alpha \pm \Phi_p^\pm) = 0,$$

$$(\sin\alpha \mp \sin\theta_p^\pm) f_2^\pm(\alpha \pm (\Phi_p^\pm - \pi)) - (-\sin\alpha \mp \sin\theta_p^\pm) f_2^\pm(-\alpha \pm (\Phi_p^\pm - \pi)) = 0.$$

Utilisant les propriétés des fonctions spectrales et la théorie des équations fonctionnelles aux différences, on obtient des équations intégrales, que nous développons pour le cas du polygone semi-infini à trois parties.

6.2.3) Illustration par le problème du polygone à trois parties

Nous considérons la diffraction par un polygone semi-infini divisé en trois parties, caractérisées respectivement par des impédances de surface $\sin\theta_-$, $\sin\theta_1$, and $\sin\theta_+$, strictement passives. Considérant les notations précédentes, on pose $m^+ = 1$, $m^- = 0$, $\Phi_1^+ = \pi/2$, $\Phi_e^+ = \pi/2 + \Phi_b$, $\Phi_e^- = -\pi/2 - \Phi_a$, $f_a = f_a^+ = f_e^-$, $f_b = f_b^+ = f_e^+$. Les deux fonctions spectrales f_a et f_b sont attachées aux représentation intégrales du champ dans les coordonnées cylindriques (ρ_a, φ_a) et (ρ_b, φ_b) d'origines respectives aux deux discontinuités de la surface. Dans ces deux repères, nous avons,

$$(\rho_a \in]0, \infty[, \varphi_a = -\pi/2 - \Phi_a) \text{ avec } \partial u / \partial n - ik \sin\theta_- u = 0,$$

$$(\rho_a \in [0, \Delta], \varphi_a = +\pi/2) \text{ avec } \partial u / \partial n - ik \sin\theta_1 u = 0,$$

où le champ incident u^i s'exprime $e^{ik\rho_a \cos(\varphi_a - \varphi_0)}$, et

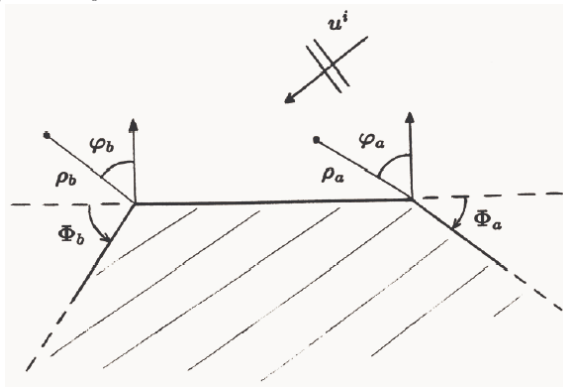
$$(\rho_b \in [0, \Delta], \varphi_b = -\pi/2) \text{ avec } \partial u / \partial n - ik \sin\theta_1 u = 0,$$

$$(\rho_b \in]0, \infty[, \varphi_b = +\pi/2 + \Phi_b) \text{ avec } \partial u / \partial n - ik \sin\theta_+ u = 0,$$

où le champ incident u^i s'exprime $e^{ik(\rho_b \cos(\varphi_b - \varphi_0) + \Delta \sin\varphi_0)}$, notant que

$$(f_a(\alpha) - 1/(\alpha - \varphi_0)) \text{ et } (f_b(\alpha) - e^{ik\Delta \sin\varphi_0}/(\alpha - \varphi_0))$$

sont respectivement réguliers dans les bandes $-\pi/2 - \Phi_a \leq \text{Re}\alpha \leq \pi/2$ et $-\pi/2 \leq \text{Re}\alpha \leq \pi/2 + \Phi_b$.



6.2.3.1) Expressions et équations intégrales pour le polygone à trois parties

6.2.3.1.1) Equations fonctionnelles

Nous utilisons les équations fonctionnelles obtenues dans le cas général. Notant $f_{br}(\alpha - \frac{\Phi_b}{2}) = f_b(\alpha)$ et $\Phi_+ = \frac{\pi}{2} + \frac{\Phi_b}{2}$, nous avons

$$(\sin\alpha + \sin\theta_+)f_{br}(\alpha + \Phi_+) - (-\sin\alpha + \sin\theta_+)f_{br}(-\alpha + \Phi_+) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha - \sin\theta_1)f_{br}(\alpha - \Phi_+) - (-\sin\alpha - \sin\theta_1)f_{br}(-\alpha - \Phi_+) \\ &= e^{-ik\Delta\cos\alpha}((\sin\alpha - \sin\theta_1)f_a(\alpha - \frac{\pi}{2}) - (-\sin\alpha - \sin\theta_1)f_a(-\alpha - \frac{\pi}{2})) \\ &= M_b^-(\alpha), \end{aligned}$$

tandis qu'en notant $f_{ar}(\alpha + \frac{\Phi_a}{2}) = f_a(\alpha)$ et $\Phi_- = \frac{\pi}{2} + \frac{\Phi_a}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\sin\alpha + \sin\theta_1)f_{ar}(\alpha + \Phi_-) - (-\sin\alpha + \sin\theta_1)f_{ar}(-\alpha + \Phi_-) \\ &= e^{-ik\Delta\cos\alpha}((\sin\alpha + \sin\theta_1)f_b(\alpha + \frac{\pi}{2}) - (-\sin\alpha + \sin\theta_1)f_b(-\alpha + \frac{\pi}{2})) \\ &= M_a^+(\alpha), \end{aligned}$$

et

$$(\sin\alpha - \sin\theta_-)f_{ar}(\alpha - \Phi_-) - (-\sin\alpha - \sin\theta_-)f_{ar}(-\alpha - \Phi_-) = 0.$$

6.2.3.1.2) Les expressions intégrales dérivant des équations fonctionnelles

Considérant la théorie des équations fonctionnelles, la fonction analytique $\chi(\alpha)$ vérifiant

$$\chi(\alpha \pm \Phi) - \chi(-\alpha \pm \Phi) = \vartheta^\pm(\alpha),$$

et régulière dans la bande $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \Phi$ (y compris à l'infini), est donnée pour $|\operatorname{Re}\alpha| < \Phi$, par

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) = & \frac{\chi(i\infty) + \chi(-i\infty)}{2} + \frac{-i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\alpha' (\vartheta^+(\alpha') \tan(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \Phi - \alpha')) \\ & - \vartheta^-(\alpha') \tan(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha - \Phi - \alpha'))), \end{aligned}$$

quand les $\vartheta^\pm(\alpha)$ sont régulières et sommables sur l'axe imaginaire. Nous utilisons alors les solutions $\Psi_{+1}(\alpha)$ (resp. $\Psi_{1-}(\alpha)$), sans pôle ou zéro dans la bande $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \Phi_+$ (resp. $|\operatorname{Re}\alpha| \leq \Phi_-$) et $O(\cos(\pi\alpha/2\Phi_+))$ (resp. $O(\cos(\pi\alpha/2\Phi_-))$) dans ce domaine, des équations fonctionnelles précédentes prises sans second membre. On obtient alors, pour $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2 + \Phi_b$ et $-\Phi_+ < \operatorname{Re}\alpha < 3\Phi_+$,

$$\begin{aligned}\frac{f_{br}(\alpha)}{\Psi_{+1}(\alpha)} &= \frac{i}{8\Phi_+} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{M_b^-(\alpha') \tan(\frac{\pi}{4\Phi_+}(\alpha - \Phi_+ - \alpha'))}{(\sin\alpha' - \sin\theta_1)\Psi_{+1}(\alpha' - \Phi_+)} d\alpha' + \chi_b^i(\alpha) \\ &= \frac{-i}{4\Phi_+} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f_{ar}(\alpha' - \pi/2 + \Phi_a/2)}{\Psi_{+1}(\alpha' - \Phi_+)} \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_+}(\alpha - \Phi_+)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})} d\alpha' + \chi_b^i(\alpha),\end{aligned}$$

où l'expression du terme source χ_b^i est donnée par

$$\chi_b^i(\alpha) = e^{ik\Delta\sin\varphi_0} \chi_{+1}^i(\alpha) = \frac{\pi}{2\Phi_+} \left(\frac{e^{ik\Delta\sin\varphi_0} \cos\frac{\pi\varphi_{0,b}}{2\Phi_+}}{\Psi_{+1}(\varphi_{0,b}) (\sin\frac{\pi\alpha}{2\Phi_+} - \sin\frac{\pi\varphi_{0,b}}{2\Phi_+})} \right),$$

et, pour $-\pi/2 - \Phi_b < \varphi_0 < \pi/2$ et $-3\Phi_- < \text{Re}\alpha < \Phi_-$,

$$\begin{aligned}\frac{f_{ar}(\alpha)}{\Psi_{1-}(\alpha)} &= \frac{-i}{8\Phi_-} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{M_a^+(\alpha') \tan(\frac{\pi}{4\Phi_-}(\alpha + \Phi_- - \alpha'))}{(\sin\alpha' + \sin\theta_1)\Psi_{1-}(\alpha' + \Phi_-)} d\alpha' + \chi_a^i(\alpha) \\ &= \frac{i}{4\Phi_-} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f_{br}(\alpha' + \pi/2 - \Phi_b/2)}{\Psi_{1-}(\alpha' + \Phi_-)} \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_-}(\alpha + \Phi_-)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})} d\alpha' + \chi_a^i(\alpha),\end{aligned}$$

où le terme source χ_a^i est donné par

$$\chi_a^i(\alpha) = \frac{\pi}{2\Phi_-} \left(\frac{\cos\frac{\pi\varphi_{0,a}}{2\Phi_+}}{\Psi_{1-}(\varphi_{0,a}) (\sin\frac{\pi\alpha}{2\Phi_-} - \sin\frac{\pi\varphi_{0,a}}{2\Phi_-})} \right).$$

où $\varphi_{0,a} = \varphi_0 + \Phi_a/2$ et $\varphi_{0,b} = \varphi_0 - \Phi_b/2$.

Ces équations peuvent être continuées pour $|\varphi_0| \geq \pi/2$, considérant les pôles de $f_a(\alpha)$ et $f_b(\alpha)$ à $\alpha = \varphi_0$ capturés par le chemin d'intégration.

On peut dériver de ces expressions des équations intégrales pour $f_{br}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)$ et $f_{ar}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)$ sur l'axe imaginaire. Dans ce qui suit, nous nous restreignons au cas $\Phi_{a,b} > -\pi/2$ pour simplifier l'analyse.

6.2.3.1.2) Equations intégrales non-singulières quand $\Phi_{a,b} > -\pi/2$

Pour simplifier l'écriture, nous donnons les équations intégrales dans le cas $\Phi_{a,b} > -\pi/2$.

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}\frac{f_{br}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)}{\Psi_{+1}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)} &= \frac{-i}{4\Phi_+} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{f_{ar}(\alpha' - \pi/2 + \Phi_a/2)}{\Psi_{+1}(\alpha' - \Phi_+)} \right) \\ &\quad \times \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_+}(\alpha - \Phi_b)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})} d\alpha' + \chi_{br}^i(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2),\end{aligned}$$

quand $-\Phi_+ < \text{Re}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2) < 3\Phi_+$, et,

$$\frac{f_{ar}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)}{\Psi_{1-}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)} = \frac{i}{4\Phi_-} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{f_{br}(\alpha' + \pi/2 - \Phi_b/2)}{\Psi_{1-}(\alpha' + \Phi_-)} \right) \times \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_-}(\alpha + \Phi_a)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})} d\alpha' + \chi_{ar}^i(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2),$$

quand $-3\Phi_- < \text{Re}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2) < \Phi_-$, pour $-\pi/2 < \varphi_0 < \pi/2$.

Pour satisfaire une meilleure convergence des intégrales ainsi que les propriétés élémentaires des fonctions spectrales, nous pouvons les réécrire pour les inconnues

$$\begin{aligned} \frac{2S_b^-(\alpha)}{(\sin\alpha - \sin\theta_1)} &= f_{ar}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2) - \frac{(-\sin\alpha - \sin\theta_1)f_{ar}(-\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)}{(\sin\alpha - \sin\theta_1)} \\ \frac{2S_a^+(\alpha)}{(\sin\alpha + \sin\theta_1)} &= f_{br}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2) - \frac{(-\sin\alpha + \sin\theta_1)f_{br}(-\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)}{(\sin\alpha + \sin\theta_1)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

dans $L^2(iR)$, de sorte que l'on a,

$$\begin{aligned} \frac{S_a^+(\alpha)}{(\sin\alpha + \sin\theta_1)} &= \frac{-i}{4\Phi_+} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{S_b^-(\alpha')}{(\sin\alpha' - \sin\theta_1)} \times \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})}{\Psi_{+1}(\alpha' - \Phi_+)} \\ &+ \left[\frac{\Psi_{+1}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_+}(\alpha - \Phi_b)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})} + \frac{(\sin\alpha - \sin\theta_1)}{(\sin\alpha + \sin\theta_1)} \frac{\Psi_{+1}(-\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_+}(\alpha + \Phi_b)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_+})} \right] d\alpha' \\ &+ [\Psi_{+1}(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)\chi_{br}^i(\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2) \\ &+ \frac{(\sin\alpha - \sin\theta_1)\Psi_{+1}(-\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)}{(\sin\alpha + \sin\theta_1)} \chi_{br}^i(-\alpha + \pi/2 - \Phi_b/2)]/2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{S_b^-(\alpha)}{(\sin\alpha - \sin\theta_1)} &= \frac{i}{4\Phi_-} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{S_a^+(\alpha')}{(\sin\alpha' + \sin\theta_1)} \times \frac{e^{-ik\Delta\cos\alpha'} \sin(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})}{\Psi_{1-}(\alpha' + \Phi_-)} \\ &+ \left[\frac{\Psi_{1-}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_-}(\alpha + \Phi_a)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})} + \frac{(\sin\alpha + \sin\theta_1)}{(\sin\alpha - \sin\theta_1)} \frac{\Psi_{1-}(-\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)}{\cos(\frac{\pi}{2\Phi_-}(\alpha - \Phi_a)) + \cos(\frac{\pi\alpha'}{2\Phi_-})} \right] d\alpha' \\ &+ [\Psi_{1-}(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)\chi_{ar}^i(\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2) \\ &+ \frac{(\sin\alpha + \sin\theta_1)\Psi_{1-}(-\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)}{(\sin\alpha - \sin\theta_1)} \chi_{ar}^i(-\alpha - \pi/2 + \Phi_a/2)]/2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ces équations peuvent être résolues numériquement ou analytiquement par approximations (de façon similaire aux équations du chapitre 6.1.2 pour le plan à trois parties), du fait que le terme dépendant de $k\Delta$ est simple, et que les termes sources sont faiblement oscillants.

7) Nouvelles propriétés générales de la fonction spectrale f

En premier lieu, ces nouvelles propriétés concernent les liens entre la transformée de Fourier du champ sur un plan, appelée communément fonction de rayonnement grande distance, et la fonction spectrale de l'intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets attachée à ce champ. On

connaissait l'expression de la première par la seconde, il manquait la réciproque, dont nous avons donné une forme explicite simple. Les conséquences en sont nombreuses : d'abord, la possibilité d'exprimer la fonction spectrale attachée au rayonnement d'une ligne-source de Dirac parallèle à l'arête, et par conséquent la fonction spectrale associée à une distribution arbitraire de sources, ou encore celle attachée à la réponse d'un objet exposé au rayonnement d'une ligne source, la réponse à une onde plane étant supposée connue ; puis , la traduction (et l'extension éventuelle) de toutes les expressions déjà obtenues par d'autres méthodes (ex. Théorie Géométrique de la Diffraction), sous la forme d'une intégrale de Sommerfeld-Maliuzhinets ; enfin, deux résultats généraux complémentaires donnés dans [29-30] : pour l'un, l'obtention de l'expression analytique de la fonction spectrale attachée au rayonnement d'une face à partir de celle associée au rayonnement total, pour l'autre la détermination d'une équation fonctionnelle définie sur la variable d'angle d'incidence de l'onde plane illuminant le dièdre (ce dernier résultat est loin d'être trivial car les fonctions spectrales de Sommerfeld-Maliuzhinets n'ont pas la symétrie permettant d'interchanger les angles d'incidence et d'observation.)

Indiquons le développement mathématique de certains de ces résultats :

La découverte de la fonction spectrale f_H attachée à la représentation de $H_o^{(2)}(kR\sin\beta)$, avec $R = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i\cos(\varphi - \varphi_i)}$,

$$f_H = \frac{-1}{2\pi} \int_{S_o} e^{ik\rho_i\sin\beta\cos(\alpha' - \varphi_i)} \left(\text{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \varphi - \alpha')\right) - g_o(\alpha') \right) d\alpha'$$

avec $R = \sqrt{\rho^2 + \rho_i^2 - 2\rho\rho_i\cos(\varphi - \varphi_i)}$, si $\text{signe}(\varphi_i)(\varphi - \varphi_i) > 0$, a d'étonnantes et importantes conséquences sur la détermination de nouvelles propriétés des fonctions spectrales f .

En premier lieu, on démontre que la fonction spectrale attachée au rayonnement (simple et double couche) d'une face d'un secteur dièdre sans source externe, qui s'écrit

$$\tilde{u}_{\pm} = \frac{e^{-ikz\cos\beta}}{4i} \int_{\varphi_i = \pm\pi/2, z=0} \tilde{u}(\rho_i, \varphi_i) \frac{\partial H_o^{(2)}(kR\sin\beta)}{\partial n} - \frac{\partial \tilde{u}(\rho_i, \varphi_i)}{\partial n} H_o^{(2)}(kR\sin\beta) d\rho_i$$

a aussi pour expression

$$\tilde{u}_{\pm} = \frac{e^{-ikz\cos\beta}}{2\pi i} \int_{\gamma} f_{\pm}(\alpha + \varphi) e^{-ik\rho\sin\beta\cos\alpha} d\alpha$$

où

$$f_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \int_{S_{\pm}^{\pm}} \pm f(\pm\pi + \alpha') \left(\text{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right) - g(\alpha') \right) d\alpha'.$$

De ce fait la fonction de rayonnement attachée à une face s'écrit :

$$F_{\pm}(\alpha) = f_{\pm}(\pi + \alpha) - f_{\pm}(-\pi + \alpha) = \pm f(\pm\pi + \alpha).$$

Ce résultat, outre son intérêt mathématique, donne un sens physique à la fonction spectrale f d'une manière générale (ce résultat n'avait pu être démontré (voir Michaeli) jusque-là que pour le cas particulier où le dièdre était parfaitement conducteur).

On en déduit par ailleurs que le champ rayonné par le dièdre entier a pour fonction spectrale associée

$$f(\alpha) = \frac{1}{4\pi i} \int_{S_o} F(\alpha') (tg(\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')) - g(\alpha')) d\alpha' - \frac{1}{4\pi i} \int_{l_s} f(\mp \pi + \alpha') tg(\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')) d\alpha'$$

où

$$F = \sum F_{\pm} = f(\pi + \alpha) - f(-\pi + \alpha)$$

pour S_o est un contour infini ouvert, et l_s un contour fermé [32].

Si le système satisfait le théorème de réciprocité, on démontre, du fait de la symétrie de la fonction de rayonnement F entre angle d'observation et angle d'incidence, que toute équation fonctionnelle sur f ,

$$A_{\alpha, \beta}^{\pm} \bar{f}(\alpha \pm \Phi, \alpha', \beta) - A_{-\alpha, \beta}^{\pm} \bar{f}(-\alpha \pm \Phi, \alpha', \beta) = \sum c_n \sin \alpha \cos^n \alpha,$$

satisfaite pour une onde plane incidente de direction α' , permet d'écrire une nouvelle équation fonctionnelle dans l'espace des α' suivant

$$A_{\pi + \alpha', \pi - \beta}^{\pm} \bar{f}(\alpha, \alpha' \pm \Phi, \beta) + A_{\pi - \alpha', \pi - \beta}^{\pm} \bar{f}(\alpha, -\alpha' \pm \Phi, \beta) = 0.$$

L'expression avec la fonction de rayonnement F a aussi pour conséquence une extension directe et globale au cas de l'illumination cylindrique pour tous les cas étudiés en illumination plane. Ainsi, le champ total en présence d'un dièdre imparfaitement conducteur illuminé par un point source (ρ, φ) rayonnant $e^{-ik_z \cos \beta} H_o^{(2)}(k_t R)$, avec $R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}$, s'écrit

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon}} e^{ik_t \rho \cos \alpha} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_{\varepsilon}'} e^{ik_t \rho' \cos \alpha'} f_{sd}(\alpha + \varphi, \alpha' + \varphi') d\alpha' \right) d\alpha + H_o^{(2)}(k_t R)$$

où f_{sd} s'écrit, grâce à la fonction spectrale $f(\alpha, \alpha')$ attachée au champ pour une illumination plane de direction α' , suivant

$$f_{sd}(\alpha, \alpha') = \frac{1}{4\pi i} \int_{S_o} (f(\alpha', \alpha'') - \frac{1}{2} \cot(\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha''))) \tan(\frac{1}{2}(\alpha - \alpha'')) d\alpha''.$$

C) Exposé concernant nos cas canoniques sur la diffraction par des objets 3D du type cône semi-infini de surface imparfaitement réfléchissante :

1) Généralités

Le problème de la diffraction par un cône est un des problèmes canoniques les plus importants de la théorie de la diffraction. En effet, il est bien connu que, dans la théorie géométrique de la diffraction, la connaissance des coefficients de diffraction attachés aux principaux éléments composant un objet complexe permet de reconstruire asymptotiquement le rayonnement global de l'objet et le cône est l'un des modèles les plus communs de singularité en 3D.

Depuis la découverte en 1900 par Macdonald de la série exprimant le rayonnement d'un cône circulaire parfaitement conducteur, de nombreux scientifiques cherchèrent à améliorer et approfondir ce résultat. La série initiale convergeant très lentement aux hautes fréquences, les principaux efforts consistèrent à la transformer et à en extraire l'expression des ondes rayonnées par la pointe. Dans cette optique, deux des résultats analytiques les plus fameux de ces quarante dernières années pour le cas d'un cône de surface parfaitement réfléchissante furent l'expression exacte du terme prédominant pour un angle de cône petit défini en 1957 par L.B. Felsen [41], puis celle pour le cas d'un cône de section arbitraire découvert par V.M. Babich en 1996 [43] à partir des approches de Smyshlyaev [44] et de Il'in [45].

Cependant, alors que la condition d'impédance modélisant une surface imparfaitement réfléchissante est couramment utilisée depuis les années 1950, il n'existait, jusqu'à mes travaux sur le sujet, aucun résultat exact concernant la détermination du champ diffracté par un cône imparfaitement conducteur avec cette condition. En effet, la dépendance radiale d'une condition de ce type défait toute résolution par l'application des méthodes connues. D.S. Jones lui-même concluait dans ses travaux sur le cône qu'il ne pouvait construire une généralisation de ses résultats au cas de l'impédance constante. On peut comparer ce cas à celui du dièdre avec conditions d'impédance qui attendit la méthode tout à fait originale de Maliuzhinets pour être résolu.

Pour ajouter à la difficulté, les méthodes pour les géométries 2D sont loin d'être applicables aux cas 3D. Il suffit pour cela de comparer les résultats bien connus pour le dièdre et le cône parfaitement conducteur. On notera de plus, que le problème du cône imparfaitement conducteur, comme ce fut le cas pour le dièdre, ne se prête pas à une résolution par décomposition en modes propres.

2) Exposés de nos cas canoniques en 3D : cône à impédance de section circulaire et cône à impédance de section convexe arbitraire.

On rechercha donc une méthode résolument originale, se servant de plusieurs transformations intégrales pour mieux étudier les propriétés dans le plan complexe de la fonction spectrale attachée à la représentation de Kantorovich-Lebedev, et réussissant à définir un problème bien posé dans le domaine spectral.

On définit ainsi en 1997 pour la première fois une équation intégrale sur cette fonction spectrale en acoustique et en électromagnétisme pour le cas circulaire [46-47]. Ces équations intégrales sont non-oscillantes (indépendantes de la fréquence) et elles possèdent une solution

unique. On peut les résoudre numériquement, mais on montre aussi que leurs noyaux possèdent chacun un développement asymptotique aux angles de cône petit permettant l'extraction directe de l'expression asymptotique du coefficient de diffraction.

Ce résultat, remarquable du fait qu'il est explicite, l'est aussi par la simplicité de l'expression obtenue [48]. Récemment, j'ai amélioré et étendu la méthode avec la collaboration du professeur Lyalinov [49-52] pour pouvoir l'appliquer au cas du cône de section arbitraire. Là aussi, on peut, de par mon approche, définir des équations intégrales non oscillantes pour les fonctions spectrales, dont on peut dériver des expressions simples pour le coefficient de diffraction. On notera que ces résultats s'obtiennent pour une illumination plane de direction quelconque, ainsi que pour le cas d'une source ponctuelle.

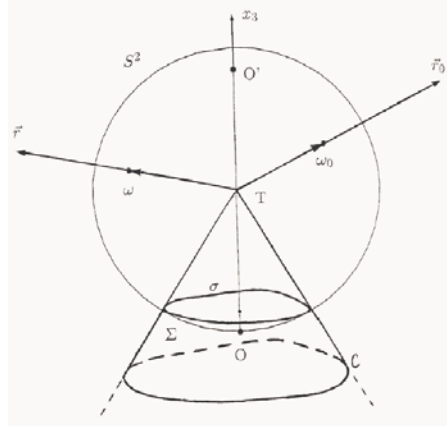
Détaillons plus avant certains des résultats obtenus :

Considérons la méthode récemment développée pour le calcul de la fonction spectrale attachée au rayonnement d'un cône avec condition d'impédance, en particulier dans le cas d'illumination plane en régime harmonique ($\sim e^{i\Omega t}$). Dans ces travaux, nous réussissons à réduire le problème à celui de la résolution d'une équation intégrale non-oscillante, i.e. une équation de noyau non-oscillant, et à donner de façon analytique le terme prédominant du coefficient de diffraction pour un angle de cône petit.

Notant \mathcal{U} le champ diffracté, et r la distance du point d'observation ($\vec{r} = r\omega$) à la pointe du cône, nous déterminons le coefficient de diffraction F qui satisfait

$$F(\omega) = ikr e^{ikr} \mathcal{U}, \text{ for } r \rightarrow \infty,$$

en zone illuminée, hors zone de champ réfléchi d'optique géométrique. Le nombre d'onde $k = \Omega/c_0$ est défini tel que $\text{Re}(ik)$ est positif, ce qui correspond à considérer une pulsation Ω de partie imaginaire négative et c_0 une constante réelle positive.



(i) le cas du cône de section circulaire

Nous commençons par considérer la diffraction en acoustique d'une onde plane scalaire

$$\mathcal{U}^i(r, \theta, \varphi) = e^{ikr(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos\varphi)},$$

par un cône semi-infini (figure) de section circulaire $\theta = \theta_1 \geq \pi/2$, en coordonnées

sphériques (r, θ, φ) , avec $(\theta = \theta_0, \varphi = 0)$ la direction de l'onde incidente. La condition aux limites considérée sur la surface du cône est du type impédance constante suivant

$$\left(\frac{\partial}{\sqrt{ikr}\partial\theta} + \sin\zeta \sqrt{ikr}\right)(\mathcal{U} + \mathcal{U}^i)|_{\theta=\theta_1} = 0,$$

où une stricte passivité est assumée, de sorte que $\text{Re}(\sin\zeta) > 0$.

Nous considérons que \mathcal{U} est $O(r^l)$ avec $l > -1/2$ au voisinage de la pointe $r = 0$, et $O(e^{ikr\cos(\epsilon+\pi/2)})$ à l'infini avec $\epsilon(\theta, \theta_0) = \min(\pi/2, 2\theta_1 - (\theta + \theta_0 + \pi/2))$. Nous développons dans un premier temps le champ sous la forme suivante

$$\mathcal{U} = \sum_n i^n \mathcal{E}_n e^{-in\varphi}, \quad i^{-n} \mathcal{E}_{-n} = i^n \mathcal{E}_n,$$

écrivant $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_n$, for $n = \mu - 1/2 \geq 0$, $2\theta_1 - (\theta + \theta_0 + \pi/2) > |\arg(ik)|$, et

$$\mathcal{E} = \int_0^{i\infty} G(\nu) (\mp i)^{\mu-1/2} P_{\nu-1/2}^{-\mu+1/2}(\cos(\theta \mp i0^+)) K_\nu(ikr) (ikr)^{-1/2} d\nu/i.$$

Ici, $P_{\nu-1/2}^{-\mu+1/2}$ et K_ν sont les fonctions de Legendre associées et de Macdonald.

Posant

$$\mathcal{R}(\nu) = \frac{\pi}{4\nu\sin(\nu\pi)} G(\nu) \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1}, \quad \mathcal{W}(\nu) = -i\nu \left[\mathcal{P} / \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{\theta=\theta_1}$$

avec $\mathcal{P}|_\theta = (\mp i)^{\mu-1/2} P_{\nu-1/2}^{-\mu+1/2}(\cos(\theta \mp i0^+))$, et, après plusieurs étapes dans le développement, le problème est réduit à la résolution d'une équation intégrale non-oscillante, indépendante de la fréquence :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\nu)\cos\pi\nu &= \mathcal{S}^i(\nu)\cos\pi\nu - \\ &- \frac{\sin\zeta}{\pi} \int_0^1 \mathcal{W}(\nu') \mathcal{R}(\nu') \cos\pi\nu' \frac{1}{1/\cos\pi\nu' + 1/\cos\pi\nu} d\left(\frac{1}{\cos\pi\nu'}\right) \end{aligned}$$

avec \mathcal{S}^i , une fonction connue attachée au champ incident, et ν, ν' appartenant à l'intervalle $[0, i\infty]$. Quoique cette équation ne soit pas de Fredholm, on l'étudie et on arrive à montrer que sa solution existe et est unique dans un certain espace L^1 (i.e.

$\int_0^1 |\mathcal{R}(\nu)\cos\nu\pi| d(1/\cos\pi\nu) < \infty$), lorsque $\text{Re}(\sin\zeta) > 0$.

La fonction \mathcal{W} tend à s'annuler quand l'angle de cône diminue, et on peut déterminer le terme prédominant du développement asymptotique de F par une méthode perturbative, de sorte que l'on peut écrire de façon rigoureuse :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{-(\pi - \theta_1)\sin\zeta}{2(\cos\theta + \cos\theta_0)^2} + O((\sin\theta_1)^2 \ln(\sin\theta_1)), \quad \text{quand } \theta < |\sin\zeta| < \infty.$$

Pour le cas d'un champ électromagnétique, le problème est plus complexe. La condition d'impédance $E - (E \cdot n) \cdot n|_C = Z_0 \sin \zeta (n \wedge H)|_C$ (n : normale sortante) est maintenant liée à deux quantités vectorielles E and $Z_0 H$ (électrique and magnétique). Par l'utilisation de potentiels de Debye, et une méthode similaire à celle développée en acoustique, on réduit le problème à deux équations couplées pour les fonctions spectrales attachées à ces potentiels. Il est alors possible d'obtenir le terme prédominant pour $F = F_\theta e_\theta + F_\varphi e_\varphi$ aux angles de cône petits, suivant

$$F_{\theta,\varphi}(\theta, \varphi) = (h_{1,\theta,\varphi}^{inc.} \sin \zeta + h_{2,\theta,\varphi}^{inc.} (\sin \zeta)^{-1}) \frac{(\pi - \theta_1) \sin \theta \sin \theta_0}{2(\cos \theta + \cos \theta_0)^2} + o(\sin \theta_1),$$

où les $h_{j,\theta,\varphi}^{inc.}$ sont certaines constantes attachées au champ incident, $0 < |\sin \zeta| < \infty$.

(ii) le cas d'un cône à impédance de section convexe arbitraire.

Nous ne présentons, pour simplifier, que la théorie développée pour le cas scalaire (acoustique). On considère un domaine ouvert de l'espace cartésien R^3 ayant pour limites la surface du cône C (figure). Le cône est assumé convexe. S^2 est la surface de la sphère unité dont le centre T appartenant à C correspond à la pointe, et $\sigma = S^2 \cap C$. On dénote par ω_0 et ω le point de la S^2 spécifiant la direction d'incidence et la direction de la pointe au point d'observation.

On introduit alors la représentation

$$U(\omega, \omega_0, kr) = \frac{4}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu \sin(\pi\nu) u_\nu(\omega, \omega_0) \frac{K_\nu(ikr)}{\sqrt{ikr}} d\nu$$

et l'expression, dans la zone hors champ d'optique géométrique,

$$F(\omega, \omega_0) = -2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} \nu u_\nu(\omega, \omega_0) e^{i\nu\pi} d\nu.$$

Puisque le champ satisfait l'équation de Helmholtz, on a

$$(\Delta_\omega + \nu^2 - 1/4)u_\nu = 0,$$

avec Δ_ω l'opérateur de Laplace-Beltrami. On dérive alors, après quelques étapes,

$$1_\omega \nu u_\nu(\omega, \omega_0) = \int_\sigma \left(\frac{\partial(g_\nu^0(\omega, \omega'))}{\partial N} \nu u_\nu(\omega', \omega_0) - \frac{\partial(u_\nu(\omega', \omega_0))}{\partial N} \nu g_\nu^0(\omega, \omega') \right) dl_{\omega'}$$

où, d'après la condition d'impédance en champ, on trouve que

$$\frac{\partial(u_\nu + u_\nu^i)}{\partial N} \Big|_\sigma = \sin(\zeta) B(\nu(u_\nu + u_\nu^i)) \Big|_\sigma$$

avec $u_\nu^i(\omega, \omega_0) = g_\nu^0(\omega, \omega_0) = \frac{-P_{\nu-1/2}(-\cos(\theta(\omega, \omega_0)))}{4\cos\pi\nu}$, $\theta(\omega, \omega_0)$ est la distance géodésique entre ω et ω_0 sur S^2 , i.e. $\cos(\theta(\omega, \omega_0)) = \bar{\omega} \cdot \bar{\omega}_0$. On a $1_\omega = 1$ lorsque $\omega \notin \sigma$ et $1_\omega = 1/2$ lorsque

$\omega \in \sigma$ (les tangentes à σ sont définies), $\partial./\partial N = \langle -n, r\nabla \rangle$ (avec n : vecteur normal externe à C), et $B(f)(\nu) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \sin \pi t}{\cos \pi t + \cos \pi \nu} dt$.

Dans le cas d'un cône d'angle petit, on peut utiliser

$$g_\nu^0(\omega, \omega') \sim g^{as}(\omega, \omega') = \ln(1/2 - 1/2\cos(\theta(\omega, \omega')))/4\pi,$$

pour étudier l'équation intégrale quand $\omega \in \sigma$. On dérive alors, après quelques étapes, que

$$\nu u_\nu(\omega, \omega_0) \sim - \int_\sigma g_\nu^0(\omega, \omega') (\nu \sin(\zeta) B - \frac{\partial}{\partial N}) \nu u_\nu^i(\omega', \omega_0) dl_{\omega'}$$

lorsque $\omega \notin \sigma$, de sorte que l'on obtient l'expression exacte du terme prédominant pour F , suivant

$$F(\omega, \omega_0) = l_\sigma \frac{-\sin \zeta}{4\pi(\cos \vartheta + \cos \vartheta_0)^2} + O(l_\sigma^2 \ln l_\sigma)$$

quand $0 < |\sin \zeta| < \infty$, $l_\sigma = \int_\sigma dl_{\omega'}$, $\vartheta = \pi - \theta(\omega, 0)$, $\vartheta_0 = \pi - \theta(\omega_0, 0)$ (voir figure). Il est intéressant de noter la remarquable simplicité du résultat obtenu, alors que les développements mathématiques pour l'obtenir sont fort délicats. Notons que nous retrouvons, en posant $l_\sigma = 2\pi \sin \theta_1$, le résultat précédemment obtenu pour le cas circulaire.

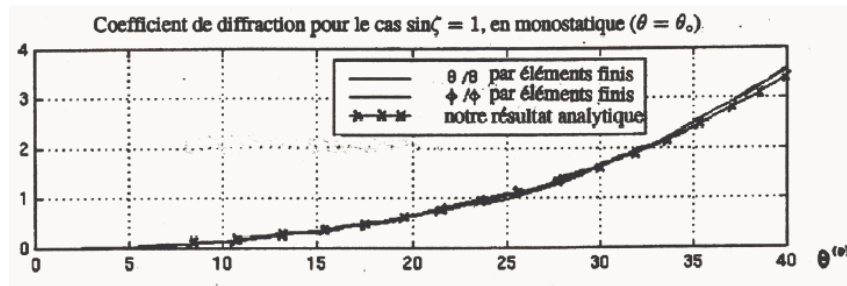
Sans détailler la méthode pour le cas d'un champ électromagnétique (E, H) , on note qu'en présence d'un cône à impédance de section arbitraire, on obtient que le diagramme de rayonnement en champ électrique, attaché à la diffraction par la pointe du cône, s'écrit

$$\mathcal{F}_E = -l_\sigma (\hat{\theta} \sin \beta / \sin \zeta - \hat{\varphi} \cos \beta \sin \zeta) \frac{\sin \theta \sin \theta_0}{2(\cos \theta + \cos \theta_0)^2} + O(l_\sigma^2 \ln(l_\sigma)),$$

pour une onde plane incidente quelconque décrite par

$$E^i = (\hat{\theta}_0 \sin \beta + \hat{\varphi}_0 \cos \beta) e^{ikR(\sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta_0)},$$

$$H^i = \frac{1}{Z_0} (\hat{\theta}_0 \cos \beta - \hat{\varphi}_0 \sin \beta) e^{ikR(\sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta_0)},$$



D) Conclusion et perspectives

Les méthodes analytiques développées nous ont permis de résoudre de nombreux problèmes élémentaires nouveaux en théorie de la diffraction pour des objets imparfaitement conducteurs possédant une ou plusieurs singularités, en géométrie 2D et 3D. On obtient ainsi de nombreux résultats rigoureux, exacts ou asymptotiques, pour l'expression des champs, jusque-là inaccessibles aux techniques usuelles et qui sont maintenant reconnus et utilisés par la communauté scientifique internationale. Les méthodes établies, de par leur généralité, nous permettent d'envisager assez naturellement d'autres développements, pour des conditions aux limites plus complexes et/ou des géométries plus générales, par exemple un polygone 2D comportant un revêtement de caractéristiques périodiques, aléatoires, multimodales, ou transparentes, à faces planes ou courbes, ou un cône avec certaines conditions de transparence.

REFERENCES :

- [1] A. Sommerfeld, 'Mathematische theorie der diffraction', Math. Ann., Vol. 47, pp. 317-341, 1896.
- [2] H.M. Macdonald, 'A class of diffraction problems', Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 14, pp. 410-427, 1915.
- [3] H.S. Carslaw, 'Diffraction of waves by a wedge of any angle', Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 18, pp. 291-306, 1920.
- [4] B. Nobel, 'Methods based on the Wiener-Hopf technique', Elmsford, Pergamon, 1958.
- [5] G.D. Maliuzhinets, 'Certain generalizations of the reflection method in the theory of the diffraction of sinusoidal waves (Doctoral Dissertation, Phys. Inst. Acad. Sci.)', Fian, Moscow, 1950.
- [6] G.D. Maliuzhinets, 'Inversion formula for the Sommerfeld integral', Sov. Phys. Dokl., 3, pp. 52-56, 1958.
- [7] G.D. Maliuzhinets, A.A. Tuzhilin, 'Plane acoustic wave diffraction at a semi-infinite thin elastic plate', Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz., 10, 5, pp. 1210-1227, 1970.
- [8] A.A. Tuzhilin, 'Diffraction of plane sound wave in an angular domain with absolutely hard and slippery face bounded by thin elastic plates', Different. Urav., vol. 9, 10, pp. 1875-1888, 1973.
- [9] R.C. Morgan, S.N. Karp, 'Multi-mode surface wave diffraction by a wedge', Siam J. Appl. Math., Vol. 26, 3, pp. 531-538, 1974.

- [10] J.M.L. Bernard, 'Diffraction by a metallic wedge covered with a dielectric material', *Wave Motion*, 9, pp. 543-561, 1987.
- [11] O.M. Bucci, G. Franceschetti, 'Electromagnetic scattering by a half-plane with two faces impedances', *Radio Sci.*, vol.11, 1, pp. 49-59, 1976.
- [12] V.G. Vaccaro, 'The generalised reflection method in electromagnetism', *Arch. Elekt. Ubertrag. Tech.*, 34, pp. 493-500, 1980.
- [13] R. Rojas, 'Wiener-Hopf analysis of the EM diffraction by an impedance discontinuity in a planar surface and by an impedance half-plane', *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, vol.36,1, pp.71-83, 1988.
- [14] J.M.L. Bernard, 'Exact analytical solution for the diffraction at skew incidence by a class of wedge with absorbing material', *Rev. Techn. Thomson-Csf*, Vol. 20-21, pp. 523-527, 1989.
- [15] J.M.L. Bernard, 'On the diffraction of an electromagnetic skew incident wave by a non perfectly conducting wedge', *Ann. Telecom.*, vol.45,1-2, pp. 30-39, 1990 (Errata n°9-10, p.577).
- [16] J.M.L. Bernard, 'Properties of the solution and reciprocity theorem for a class of wedge problem at skew incidence', conf. IEEE-AP de Dallas 1990.
- [17] V.B. Filippov, 'Diffraction by a curved half-plane', *Zap. Nauchn. Sem. LOMI (Leningrad)* 42, 244, 1974.
- [18] V.A. Borovikov, 'Diffraction by a wedge with curved faces', *Akust. Zh.*, Vol. 25(6), pp. 825-835, 1979.
- [19] A. Michaeli, 'Transition functions for high frequency diffraction by a curved perfectly wedge', (part 1,2,3), *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, Vol.37, pp.1073-1092, 1989.
- [20] A. Büyükkaksoy, G. Uzgoren, 'High frequency scattering by a cylindrically curved impedance surface', *AEU*, 39, pp. 351-358, 1985.
- [21] O. Lafitte, 'The wave diffracted by a wedge with mixed boundary conditions', rapport MIT 1994 et mémoire de la SMF 88 (2002).
- [22] M. Idemen, L.B. Felsen, 'Diffraction of a whispering gallery mode by the edge of a thin concave cylindrically curved surface', *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, Vol.29, pp. 571-579, 1981.
- [23] J.M.L. Bernard, 'Diffraction par un dièdre à faces courbes non parfaitement conducteur', *Rev. Techn. Thomson-Csf*, vol.23, pp. 321-330, 1991.
- [24] L. Kaminetzky, J.B. Keller, 'Diffraction coefficients for high order edges and vertices', *SIAM J. Appl. Math.*, vol.22,1, pp. 109-134, 1972.
- [25] P. Montarnal, D. Bouche, 'Fringe wave diffraction coefficients for higher order discontinuities', *Ann. des Telecom.*, 51, 3-4, 1996.
- [26] V.A. Borovikov, 'Diffraction by an impedance wedge with curved sides', *J. communication technology and electronics*, 43, (12), pp. 1337-1346, 1998.
- [27] J.M.L. Bernard, G. Pelosi, G. Manara, A. Freni, 'Time domain scattering by an impedance wedge for skew incidence', *Proceedings conf. ICEAA / Turin*, pp.11-14, 1991.
- [28] V.M. Papadopoulos, 'Pulse diffraction by an imperfectly reflecting wedge', *J. Aust. Math. Soc.*, Vol. 2,1, pp. 97-106, 1961.
- [29] M.P. Sakharova, A.F. Filippov, 'The solution of non-stationary problem of the diffraction at an impedance wedge using tabulated functions', *Zh. vychisl. Mat. Fiz.*, Vol.7, 4, pp.825-835, 1967.
- [30] T.W. Veruttipong, 'Time domain version of the uniform GTD', *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, Vol. 38, pp.1757-1764, 1990.

- [31] J.M.L. Bernard, 'Progresses on the diffraction by a wedge : transient solution for line source illumination, single face contribution to scattered field, and new consequence of reciprocity on the spectral function', Rev. Techn. Thomson-Csf, Vol.25, n°4, pp.1209-1220, déc. 1993 .
- [32] J.M.L. Bernard, 'On the time-domain scattering by a passive classical frequency dependent wedge-shaped region in a lossy dispersive medium', Ann. Telecom., vol. 49, n° 11-12, pp.673-683, 1994 .
- [33] J.M.L. Bernard, G. Pelosi, 'Diffraction par un dièdre avec variation d'impédance dépendant de la distance à l'arête ', Ann. Telecom. , Vol.47, 9-10, pp. 421-423, 1992.
- [34] L.N. Felsen, N. Marcuvitz, 'Radiation and scattering of waves', PrenticeHall, 1973.
- [35] J.M.L. Bernard ,G. Pelosi, 'Nouvelle formule d'inversion pour la fonction spectrale de Sommerfeld-Maliuzhinets et applications à la diffraction', Rev. Techn. Thomson-Csf,Vol.25, n°4, pp.1189-1200, déc. 1993 .
- [36] J.M.L. Bernard, 'Diffraction at skew incidence by an anisotropic impedance wedge in electromagnetism theory : a new class of canonical cases, J. of Phys. A: Math. Gen., 31, pp.595-613, 1998.
- [37] M.A. Lyalinov, N.Y. Zhu, 'Exact solution to diffraction problem by wedges with a class of anisotropic impedances faces : oblique incidence of a plane electromagnetic wave', IEEE Trans. on Antennas and propagation, 51 (6), pp. 1216-1220, 2003.
- [38] J.M.L. Bernard, 'Diffraction by a three-part impedance plane : a new spectral approach', Quarterly J. of Mech. and Appl. Mathematics, 58, 3, pp. 383-418, 2005.
- [39] J.M.L. Bernard, 'On new spectral method and its application to the diffraction by a three-part impedance plane', Conf. PIERS 2004, Pisa, session on canonical objects.
- [40] J.M.L. Bernard, 'On some elements of the spectral theory of diffraction by singularities', Felsen Symp., Munich 2004, article publié dans le livre 'Fields, Networks, Computational methods and systems in modern electrodynamics. A tribute to L.B. Felsen. (Springer-V.)
- [41] L.B. Felsen, N. Marcuvitz, 'Radiation and scattering of waves', Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [42] J.M.L. Bernard, 'A spectral approach for the scattering by impedance polygons', Quarterly J. of Mech. and Appl. Math., 59, 4, pp.517-549, 2006.
- [43] V.M. Babich, 'The diffraction of a high-frequency acoustic wave by a narrow-angle absolutely rigid cone of arbitrary shape', PMM J. of Appl. Math. Mech., 60(1), 67-73, 1996.
- [44] V.P. Smyshlyaev, 'Diffraction by conical surfaces at high frequencies', Wave Motion, 12, 4, pp. 329-339, 1990.
- [45] A.M. Il'in, 'Matching of the asymptotic expansions of the solutions of boundary-value problems', Nauka, Moscow, 1989.
- [46] J.M.L. Bernard, 'Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction par une singularité conique 3D : équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante', 1997, Editions Dist Saclay.
- [47] J.M.L. Bernard, 'A solution for the diffraction by a semi-infinite impedance cone', Proceedings / IEEE Conf. Atlanta, pp. 2136-2139, 1998.
- [48] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'the leading asymptotic term for the scattering diagram in the problem of diffraction by a narrow circular impedance cone', J. Phys. A: Math. Gen. 32 (4), L43-48, 1999.

- [49] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Diffraction of scalar waves by an impedance cone of arbitrary cross-section', *Wave Motion*, 33, pp.155-181, 2001.
- [50] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'The leading asymptotic term for the scattering diagram by a narrow impedance cone', *Proceedings / IEEE Conf. Salt Lake City*, pp.398-401, 2000.
- [51] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Spectral domain solution and asymptotics for the diffraction by an impedance cone', *IEEE-AP Transactions*, 49, 12, pp. 1633-1638, 2001.
- [52] J.M.L. Bernard, M.A. Lyalinov, 'Electromagnetic scattering by a smooth convex impedance cone', *IMA J. of Applied Mathematics*, 69, pp. 285-333, 2004.