



**HAL**  
open science

# Application de l'approche X-FEM aux calculs parallèles et problèmes multi-échelles

Mathieu Cloirec

► **To cite this version:**

Mathieu Cloirec. Application de l'approche X-FEM aux calculs parallèles et problèmes multi-échelles. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2005. Français. NNT: . tel-00155147

**HAL Id: tel-00155147**

**<https://theses.hal.science/tel-00155147>**

Submitted on 15 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année : 2005

N° B.U. :

Thèse de Doctorat

Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Présentée par

**Mathieu CLOIREC**

le 30 septembre 2005  
à l'École Centrale de Nantes

Titre

**APPLICATION D'X-FEM AUX CALCULS PARALLÈLES  
ET PROBLÈMES MULTI-ÉCHELLES**

JURY

Président	P. Pilvin	<i>Professeur, LG2M, IUP de Lorient</i>
Rapporteurs	H. Ben Dhia	<i>Professeur, LMSSMat, École Centrale de Paris</i>
	L. Champaney	<i>Maître de Conférences, HDR, LMA, Université de Versailles</i>
Examineurs	F. Feyel	<i>Chargé de Recherche, ONERA, Chatillon</i>
	N. Moës	<i>Professeur, GeM, École Centrale de Nantes</i>
	P. Cartraud	<i>Maître de Conférences, HDR, GeM, École Centrale de Nantes</i>

Directeur de thèse : Nicolas Moës

Co-encadrant : Patrice Cartraud

Laboratoire : GeM

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) au sein de l'École Centrale de Nantes.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Nicolas Moës ainsi que Patrice Cartraud pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant ces trois ans de thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à l'égard de Monsieur Philippe Pilvin pour avoir accepté de présider mon jury, à Messieurs Hachmi Bend Dhia et Laurent Champaney pour avoir bien voulu rapporter mon mémoire. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Frédéric Feyel pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

J'adresse également toute ma gratitude aux membres du Laboratoire qui ont su m'accueillir et m'ouvrir l'esprit sur divers aspects du calcul de structures.

Enfin, un grand merci à ma famille et mes amis pour m'avoir soutenu moralement dans les derniers moments difficiles de la thèse.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Homogénéisation numérique sur VER</b>	<b>13</b>
1.1 Contexte . . . . .	14
1.2 Formulation sur le volume élémentaire représentatif . . . . .	15
1.3 Introduction à la méthode des éléments finis étendus . . . . .	18
1.4 X-FEM et homogénéisation . . . . .	27
1.5 Applications . . . . .	42
Conclusion . . . . .	55
<b>2 Analyse multi-échelle d'une structure contenant un détail</b>	<b>57</b>
2.1 Description de la méthode . . . . .	58
2.2 Formulation du problème . . . . .	62
2.3 Mise en oeuvre . . . . .	67
Conclusion . . . . .	82
<b>3 Application de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle</b>	<b>83</b>
3.1 Machines parallèles . . . . .	84
3.2 X-FEM et calculs parallèles . . . . .	88
3.3 Applications . . . . .	110
Conclusion . . . . .	127
<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
<b>Références</b>	<b>131</b>
<b>A Tri séquentiel des entités dans le cas de trous et d'inclusions</b>	<b>137</b>
<b>B Tri séquentiel des entités dans le cas de fissure</b>	<b>139</b>
<b>C Tri parallèle des entités dans le cas de trous et d'inclusions</b>	<b>141</b>
<b>D Définitions des cas 3d contenant une fissure</b>	<b>145</b>



# Introduction

A l'heure actuelle, il ne suffit plus que la structure résiste sous un chargement imposé, mais il est nécessaire de savoir décrire précisément son comportement. Or, les structures, de par leur taille et les détails qu'elles contiennent, sont de plus en plus complexes. Pour parvenir à une analyse correcte du problème, il semble impératif de prendre en compte ces détails en respectant scrupuleusement leur forme. Par conséquent, nous sommes contraints d'utiliser des maillages de taille importante induisant un nombre de degrés de liberté très élevé. Bien que les moyens numériques actuels évoluent rapidement, il peut s'avérer que le passage des fichiers représentant la géométrie d'une pièce (fichiers *CAD*) au maillage soit très difficile. Dans certains cas extrêmes, les maillages, ne peuvent respecter scrupuleusement la géométrie. De plus, le respect de la géométrie des détails, au niveau du maillage, engendre un temps de résolution très important. Pour parer à ces difficultés, de nombreuses méthodes ont été développées. Deux voies complémentaires peuvent en être dégagées : les approches multi-échelles et le calcul intensif. D'une part, les méthodes multi-échelles permettent de se concentrer sur l'effet du détail permettant de réduire le nombre d'éléments finis impliqués nécessaires dans la résolution, et d'autre part, le calcul parallèle permet de fournir une capacité de calcul accrue.

La première propose d'effectuer l'analyse sur plusieurs échelles. Les échelles impliquées sont d'ordre spatial. Elles représentent, d'une part la structure à analyser et d'autre part, la ou les discontinuités qu'elle comprend. La dissociation de ces échelles doit permettre de résoudre de façon distincte des problèmes à plusieurs échelles. Ces discontinuités peuvent être répétitives ou au contraire ponctuelles. C'est pourquoi, nous considérons deux types d'études : celles concernant les structures périodiques et celles impliquant l'introduction de détails (cavités, inclusions, fissures). De plus, ces deux études se distinguent par le fait que les discontinuités évoquées dans les structures périodiques sont infiniment petites vis à vis de la structure alors qu'un détail ponctuel représente une partie locale de taille moindre par rapport à celle de la structure.

Le deuxième axe concerne le calcul multi-domaine. Il s'agit de découper le domaine initial, sur lequel s'applique l'étude, en plusieurs parties et de résoudre un problème identique

sur chacun d'entre eux. Le temps de calcul global se trouve réduit par la répartition d'un grand nombre de données à traiter entre plusieurs moyens de calcul.

Dans un premier temps nous tentons d'exposer les méthodes traitant de structures périodiques.

Lors de l'apparition de structures composées de matériaux composites, une multitude de méthodologies sont apparues afin de décrire au mieux leur comportement sans représenter la totalité des discontinuités telles que, entre autres, la théorie des modules effectifs ou des modèles auto-cohérents ([22],[7]). Une, parmi celles-ci, s'est particulièrement illustrée. Il s'agit de la théorie de l'homogénéisation [5], [56].

La méthode développée dans [62] propose de définir des caractéristiques mécaniques généralisées d'une structure comprenant deux matériaux ayant des propriétés distinctes. La structure se décompose en volumes répétitifs appelés V.E.R. (volume élémentaire représentatif). La résolution du problème microscopique sur le V.E.R., nous permet de définir les caractéristiques de la structure entière.

Dorénavant et pour la suite du mémoire, nous définissons les tenseurs d'ordre supérieur ou égal à 1 en **gras**.

Deux échelles sont définies : l'échelle microscopique ( $\mathbf{y}$ ) et macroscopique ( $\mathbf{x}$ ). On considère que le champ de déformations total s'exprime par la somme du champ de déformations macroscopique et d'une correction microscopique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \boldsymbol{\varepsilon}^M(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m(\mathbf{y})) \quad (1)$$

Le problème microscopique est résolu en soumettant la cellule de base à une déformation macroscopique et en définissant des conditions particulières sur le V.E.R. Dans le cadre de l'homogénéisation périodique, les déplacements sur les faces opposés de la cellule sont égaux alors que les contraintes sont opposées. Ensuite, les champs microscopiques sont moyennés spatialement pour définir les champs macroscopiques. La formulation du problème sur le V.E.R. est détaillée dans le premier chapitre.

La plupart des travaux utilise la méthode des éléments finis afin de résoudre les problèmes d'homogénéisation périodique cf [25], [40], [6] et [18], [19]. Nous pouvons néanmoins citer quelques travaux utilisant la méthode des éléments frontières (BEM) cf [50], [31] ou employant des transformées de Fourier (FFT) cf [45].

Lorsque les approches abordent la théorie de l'homogénéisation périodique, les principales difficultés résident alors dans la réalisation des maillages. En effet, bien que toutes les discontinuités de la structure ne soient pas représentées, il est néanmoins nécessaire de définir correctement les interfaces au sein de la cellule de base. Nous pouvons ajouter à ces difficultés la prise en compte d'inclusions positionnées aléatoirement au sein du V.E.R. décrit dans [62].

Une première alternative aux difficultés rencontrées lors de la représentation des interfaces est étudiée dans [29], [33] et [64] où l'emploi d'outils complexes permettent de générer automatiquement les interfaces matériaux au niveau du maillage. Les deux premiers travaux basent leur représentation des interfaces sur une grille de pixels ou de voxels. Dans [29], on utilise une image digitale de la structure afin de déterminer le maillage. Chaque voxel (ou pixel) est identifié par un élément fini. Dans [33], les auteurs étendent cette technique en y associant une fonction (MDIFs) permettant de se situer par rapport à l'interface. Ces fonctions sont issues de scans ou sont d'origine analytique. Lorsque des images sont utilisées, la densité est interpolée sur une grille et définit par conséquent la fonction MDIFs. Cette fonction est ensuite employée pour définir des éléments finis ne contenant qu'un seul matériau par une technique de découpe de triangles (tétraèdres) ou de déplacement de noeuds.

Une deuxième réponse à ces difficultés est de permettre à un élément fini de contenir plusieurs matériaux. Les approches qui suivent vont dans ce sens.

Dans les travaux présentés dans [28], les éléments peuvent être coupés par l'interface ( $\gamma$ ). Les fonctions classiques sur les éléments coupés par l'interface sont remplacées par deux nouvelles fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$  actives seulement sur la partie de l'élément concerné (cf figure 1) et la condition suivante est imposée à l'interface :

$$\int_{\gamma} (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) ((\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^1) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^2)) \cdot \mathbf{n}) d\gamma = 0 \quad (2)$$

Enfin, nous pouvons citer les méthodes basées sur la partition de l'unité ([39]) telle que la méthode des éléments finis généralisés et la méthode des éléments finis étendus. Toutes deux se basent sur la décomposition du champ par la relation suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N} a_i \phi_i + \sum_{i \in N_{enr}} b_i \phi_i F(\mathbf{x}) \quad (3)$$

où  $\phi_i$  définit les fonctions de forme classique,  $a_i$  les degrés de liberté classiques,  $b_i$  les



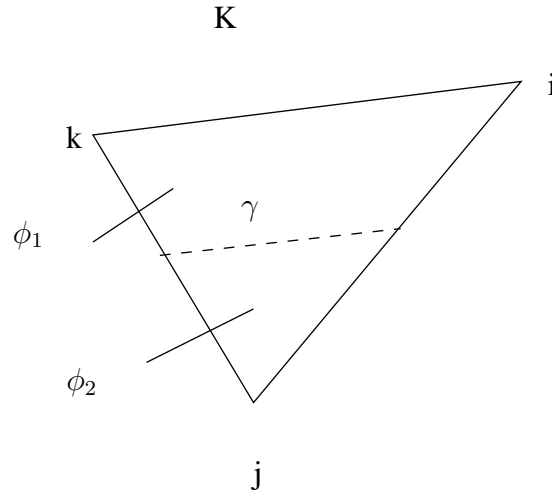


figure 1 – Principe de découpage.

degrés de liberté apportant un enrichissement et  $F(\mathbf{x})$  la fonction qui leur est associée.

Dans la méthode des éléments finis généralisés [59], les fonctions d'enrichissement sont choisies dans une famille de fonctions suivant la discontinuité à traiter au sein de l'élément. Ces fonctions peuvent être analytiques ou numériques. Les fonctions peuvent provenir, par exemple, de solutions approchées calculées sur un cas simple représentant le comportement de la discontinuité [60]. Ces fonctions sont ensuite réinjectées en tant que fonction d'enrichissement dans un problème plus complexe. Les maillages sur lesquels on procède aux calculs sont dissociés. Un maillage est utilisé pour l'approximation des champs et un plus fin est dédié à l'intégration.

La méthode des éléments finis étendus est décrite dans le chapitre 1.

D'un autre point de vue, la difficulté peut se situer au niveau de la liaison de l'échelle microscopique avec l'échelle macroscopique. L'approche des  $EF^2$ , développée dans [17], traite de ce problème. Cette technique emploie la théorie de l'homogénéisation périodique mais les conditions cinématiques, statiques et le comportement ne sont définis qu'à l'échelle microscopique. La relation entre les deux échelles s'effectue au niveau des points d'intégration du domaine macroscopique. La méthode définit trois étapes : la localisation, la résolution du problème de la cellule et la moyenne spatiale des contraintes définissant l'homogénéisation.

Pour chaque point d'intégration macroscopique, une résolution sur un maillage microscopique correspondant, prenant en compte l'interface matériau, est réalisée. Le tenseur de déformations  $\mathbf{E}$  associé au point d'intégration macroscopique est pris en compte aux

niveaux des conditions limites périodiques de la cellule de base avec la relation suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}') + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4)$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  représentent deux points sur des faces opposées de la cellule. Enfin, la contrainte macroscopique est déduite de la solution sur la cellule de base.

Cette approche s'applique au comportement non-linéaire en profitant de chaque itération macroscopique d'une résolution Newton-Raphson pour définir un problème sur la cellule de base.

Enfin, concernant l'homogénéisation périodique, nous pouvons discerner un dernier groupe qui tente de représenter la liaison entre les échelles microscopique et macroscopique au sein même de la formulation des éléments finis.

De nombreuses structures composites sont constituées de tissus. Les travaux, décrit dans [27], apportent une réponse particulière à ces structures. Ils proposent une nouvelle formulation d'élément fini tenant compte spécifiquement de la forme des interfaces de ces composites. Le problème macroscopique est assimilé à une plaque composite sous chargement constituée d'éléments finis spécifiques à quatre noeuds définissant les cellules de base. La forme des fonctions décrivant les déplacements sur l'élément provient directement d'une technique semi-analytique développée dans [35] et sont définies par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y, z) \\ \mathbf{v}(x, y, z) \\ \mathbf{w}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{w}_0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_0, x \\ \mathbf{w}_0, y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

où  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$  se décomposent en  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)^x$ ,  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)^y$  et  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)^{xy}$  représentant les champs de déplacements induits par les états de déformations macroscopiques élémentaires. Grâce à cette formulation, les variations microscopiques sont prises en compte implicitement par l'utilisation des éléments finis spécifiques définissant le maillage macroscopique.

Dans ce cadre nous pouvons aussi citer l'approche développée dans [21], où les auteurs profitent de la partition de l'unité [39] pour définir la variation microscopique du champ comme un enrichissement de la formulation éléments finis. Enfin, une autre technique est *the Voronoi cell finite element method* développée dans [23], dans laquelle l'effet d'une inclusion comprise dans une matrice est induit dans un élément. Mais, dans cette technique, les champs des déplacements et des contraintes ont besoin d'être discrétisés.

Après avoir présenté différentes approches impliquant des structures périodiques traitées avec la théorie de l'homogénéisation périodique, nous attachons, à présent, à décrire quelques méthodes permettant l'analyse d'un détail ponctuel au sein d'une structure.

Une première approche permettant la résolution de problèmes multi-échelles impliquant un détail est la méthode *ARLEQUIN*. Cette méthode propose de mener des calculs sur des échelles différentes représentant des zones impliquant une analyse différente ([1], [2], [4], [3]). Un des avantages de cette méthode est d'assembler des zones sans que celles-ci n'aient de frontières géométriques communes. Une superposition de niveaux d'analyses est alors possible.

L'approche se résume en trois points : superposer différents états mécaniques, coupler ces états de manière faible et répartir l'énergie globale du système à travers les différentes échelles.

Dans [3], [2], [52], pour illustrer la méthode, deux domaines sont superposés en appliquant les conditions limites en déplacement sur un domaine ( $\Omega_1$ ) et le chargement sur l'autre domaine ( $\Omega_2$ ). Une zone  $S$  où se recouvrent les deux domaines apparaît alors. Dans cette zone deux nouveaux domaines sont considérés : une zone sans collage et une avec collage ( $S_c$ ). Cette zone  $S_c$  permet de lier les deux domaines d'analyse en utilisant un espace pivot associé à un opérateur de couplage permettant de comparer les états mécaniques des deux domaines initiaux. Le couplage est imposé de manière faible en utilisant un champ de forces fictives. Enfin une distribution de l'énergie est effectuée sur l'ensemble du domaine en utilisant des paramètres de pondération affectés aux forces de volumes et aux déplacements sur les deux domaines. Les déplacements dans cet exemple suivent la répartition suivante :

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ \mathbf{u}_2 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \text{ sur } S \end{array} \right\}$$

Cette méthode propose un large éventail d'applications. Des zooms localisant une zone particulière d'un maillage peu raffiné permettent de décrire correctement un comportement local. L'approche permet aussi, par exemple, d'opérer des jonctions entre deux types de modèles (éléments coques et 3D par exemple).

Les travaux développés dans [34] apporte une autre perspective afin de représenter les fortes variations microscopiques en superposant deux maillages. Le maillage de base est constitué d'éléments finis de haut degré d'interpolation (p-version). Sur celui-ci vient se superposer un autre maillage sur lequel le champ de déplacements est décrit par le biais de fonctions d'interpolation linéaires (h-version). Ce dernier maillage est raffiné près de la zone d'intérêt. Une fois les deux champs superposés, la méthode est capable de tenir

compte des variations locales du champ. Le système matriciel est résolu par blocs en dissociant les termes "p", "h" et "hp".

Dans [20], deux maillages sont définis : un à l'échelle globale et l'autre à une échelle locale (celle du détail). De ce fait le champ de déplacements se décompose suivant la relation :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L$  où  $\mathbf{u}^G$  définit le déplacement à l'échelle globale et  $\mathbf{u}^L$  le déplacement local. Le maillage local se superpose au maillage global en assurant la continuité des déplacements ( $\mathbf{u}^L = 0$  sur la frontière entre les deux maillages) et une continuité  $C^1$  entre les maillages ( $\mathbf{u}_{,n}^L = 0$  sur la frontière entre les deux maillages). Les maillages n'étant pas emboîtés, une stratégie de partitionnement des éléments du maillage global est mise en oeuvre afin de définir l'interface entre les deux maillages.

Le choix de la zone locale est définie par l'emploi d'un calcul d'erreur basé sur la différence de représentation réalisée lorsqu'on emploie des fonctions d'interpolation de degrés différents. Si l'erreur dépasse une certaine valeur, un maillage local est créé. Celui-ci doit permettre de mieux approcher la variation locale. Le type de raffinement choisi pour la zone locale dépend alors du type de détails à prendre en compte (déplacement de noeud pour les fissures, augmentation du degré des polynômes d'approximation ...).

Nous pouvons aussi citer la méthode utilisée dans [30] et [38], inscrite dans le cadre d'Arlequin en superposant deux échelles. Une échelle macroscopique est représentée par un maillage grossier et chaque élément fini macroscopique est maillé plus finement définissant ainsi l'échelle microscopique. Les quantités macroscopiques sont déduites à partir des calculs microscopiques définissant ainsi la loi de comportement au niveau de l'élément fini et non plus au point de Gauss. Le potentiel élastique global est décomposé en trois potentiels différents :

- $\Pi_{micro}$ , représentant l'énergie libre à l'échelle microscopique ;
- $\Pi_{ext}$ , représentant l'énergie des efforts extérieurs macroscopiques et l'énergie des efforts de volume microscopiques ;
- $\Pi_{int}$ , représentant l'énergie d'interface induite par la liaison des champs macroscopiques et microscopiques via l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

En dérivant ce potentiel, les auteurs obtiennent la formulation faible du problème microscopique, la liaison "micro-macro" ainsi que l'équilibre macroscopique en y incluant la relation de comportement. La liaison "micro-macro" est assurée de manière forte par les multiplicateurs de Lagrange uniquement sur l'interface  $\Gamma$  (zone où se superposent le bord des éléments macroscopiques et les arêtes des éléments microscopiques) impliquant trois intégrations :

- $\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^m \lambda dS$ , au niveau de l'équation d'équilibre microscopique ;

- $\int_{\Gamma} \delta\lambda(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^M) dS = 0$ , représentant la compatibilité des déplacements microscopiques et macroscopiques ;
- $\int_{\Gamma} \delta\mathbf{u}^M \lambda dS$ , au niveau de l'équation d'équilibre macroscopique.

Le système global est résolu par une élimination de Gauss permettant de résoudre, dans un premier temps, les équations locales en fixant les variables globales, puis, dans un deuxième temps d'obtenir la solution microscopique permettant d'enrichir l'approximation du champ global.

Dans les travaux présentés dans [26], une approche multi-échelle est employée pour le suivi de fissures afin de séparer les effets locaux engendrés par la fissure des effets globaux. Les points recherchés sont, dans un premier temps, de garder un maillage macroscopique inchangé et de ne discrétiser finement que les zones nécessaires. La méthode repose sur trois points : un partitionnement de la structure en sous-structures et interfaces, une liaison entre les deux échelles effectuée au niveau des interfaces et la vérification de l'équilibre des efforts macroscopiques d'interface.

La structure  $\Omega$  est décomposée en sous-structures  $\Omega_e$  et interfaces  $\Gamma_e$  sur lesquelles des termes en effort et en déplacement sont définis comme la somme respective des termes macroscopiques et microscopiques. Par ce biais une relation est créée entre les deux échelles permettant de plus une définition des conditions de raccord entre les sous-structures voisines.

Le système global à résoudre est décomposé en deux séries d'équations : une sur l'interface et l'autre sur la cellule. Ce système est résolu par l'algorithme itératif LATIN [36].

Enfin, concernant les approches traitant de problèmes impliquant un détail, Les travaux présentés dans [65] et [49] utilisent une approche décomposant le problème en deux échelles (macroscopique et microscopique). Une solution est calculée à l'échelle macroscopique en utilisant un tenseur d'élasticité homogénéisé (basé sur la proportion de chaque matériau dans une barre par exemple) sur un maillage peu raffiné. Cette solution est utilisée à une échelle plus fine où le maillage permet de décrire les interfaces matériaux dans la barre. La barre est partagée en sous-domaines et sur chaque bord de ceux-ci le déplacement macroscopique est imposé à condition qu'aucune autre condition limite n'y soit déjà définie. La solution, ainsi obtenue, permet alors d'enrichir la solution globale.

Après avoir décrit une partie des études concernées par l'analyse multi-échelle d'un détail périodique ou ponctuel, nous posons succinctement la situation du calcul parallèle. Dans un premier temps, nous pouvons citer [16], [15], [11], [12] et [24] pour un état de l'art dans ce domaine.

Nous nous plaçons dans le contexte des méthodes de décomposition de domaines permettant le calcul parallèle. Deux types de méthodes se distinguent dans ce domaine : les méthodes avec recouvrement dites méthodes de Schwarz et les méthodes sans recouvrement dites de Schur. La première méthode implique qu'une "bande" d'éléments est commune entre deux parties issues d'une décomposition en deux domaines par exemple alors que, pour la seconde, seule l'interface (les arêtes et les noeuds dans le cas d'un maillage 2D) est commune aux deux parties.

Parmi ces dernières, nous pouvons distinguer deux types de résolution : Schur primal et Schur dual (*FETI* cf [16]). La différence entre ces deux types de résolutions réside dans les conditions à l'interface. Pour la première, les déplacements à l'interface entre deux sous-structures sont égaux. La deuxième utilise des inter-efforts (par le biais de multiplicateurs de Lagrange) à l'interface entre deux sous-structures voisines comme inconnues principales. L'égalité des déplacements est écrite au sens faible. Nous décrivons plus en avant la méthode de Schur primal que nous utilisons dans le dernier chapitre.

Plusieurs solveurs itératifs peuvent être employés (GMRes, Gradient Conjugué,...) associés à divers préconditionneurs (ILU, ILUT) pour résoudre ces problèmes (cf [55]).

Après avoir présenté les domaines multi-échelles et du calcul parallèle, nous présentons, à présent, le déroulement du mémoire.

Les travaux présentés comprennent trois parties : l'étude de problèmes d'homogénéisation périodique traités avec X-FEM, une analyse multi-échelle et le développement de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle.

En premier lieu, ce mémoire porte sur le domaine de l'homogénéisation périodique qui s'est développée lors de l'apparition des matériaux composites. La méthode des éléments finis (FEM) a été employée à cet usage. Elle est confrontée à des géométries qui peuvent être très complexes et ou à des représentations de micro-structures aléatoires. Parfois, dans certains cas extrêmes, la géométrie d'une pièce définie par les fichiers *CAD* n'est pas retranscrite correctement au niveau du maillage. Les géométries, citées dans ce cadre, définissent l'interface entre deux matériaux. L'objectif est donc de proposer une méthode permettant de contourner ces difficultés.

La méthode X-FEM (eXtended Finite Element Method) a pour intérêt, dans ce domaine, de s'affranchir des difficultés du maillage dues aux frontières entre différents matériaux (dans l'approche FEM classique, le maillage doit respecter exactement les interfaces entre matériaux). En d'autres termes, les éléments du maillage permettant la discrétisation ne sont pas limités par l'interface. Contrairement à la méthode des éléments finis où chaque élément du maillage n'est constitué que d'un seul matériau, X-FEM permet aux éléments de contenir les deux matériaux. Les éléments coupés par l'interface sont alors enrichis afin de représenter la discontinuité des déformations au passage de celle-ci. La position de cette interface est prise en compte par la technique des fonctions de niveau (ou level set).

La partie suivante présente une analyse multi-échelle d'une structure comprenant un détail. Pour traiter ce type de problèmes, il a souvent été d'usage d'employer des méthodes telle que l'approche globale-locale. À l'instar de ces méthodes, nous proposons une approche à deux échelles : microscopique (à l'échelle du détail) et macroscopique (à l'échelle de la structure). L'objectif est d'apporter une correction au problème de la structure, ne tenant pas compte explicitement du détail, déduite d'une analyse locale de celui-ci. L'approche X-FEM couplée à la technique des fonctions de niveau est utilisée pour la résolution du problème microscopique. L'objectif est d'apporter une correction dans la zone du détail tout en laissant le maillage macroscopique inchangé.

Enfin, le dernier développement traite de résolutions de problèmes multi-domaines sur une machine parallèle. Il s'agit, dans ce cadre, d'augmenter la capacité de calcul pour la résolution de problèmes impliquant une somme de données à traiter très importante.

Le but recherché n'est pas de développer une méthode de calcul multi-domaine, mais de permettre la gestion de l'enrichissement entraîné par l'approche X-FEM sur plusieurs domaines. La méthode de calcul employée est une méthode sans recouvrement de type Schur primal associé à un solveur GMRes, lui-même accompagné d'un préconditionneur ILUT.





---

# 1

# Homogénéisation numérique sur VER

<b>1.1</b>	<b>Contexte</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Formulation sur le volume élémentaire représentatif</b>	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis étendus</b>	<b>18</b>
1.3.1	Méthode des éléments finis étendus (X-FEM) . . . . .	18
1.3.2	Fonction de Niveau (Level Set) . . . . .	24
<b>1.4</b>	<b>X-FEM et homogénéisation</b> . . . . .	<b>27</b>
1.4.1	Enrichissement pour les interfaces matériaux . . . . .	27
1.4.2	Évaluation des fonctions d'enrichissement . . . . .	34
1.4.3	Erreur locale . . . . .	36
1.4.4	Précisions sur l'intégration . . . . .	36
1.4.5	Conditions aux limites des problèmes d'homogénéisation	37
<b>1.5</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>42</b>
1.5.1	Homogénéisation périodique . . . . .	42
1.5.2	Représentation de frontières complexes . . . . .	49
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>55</b>

Ce chapitre concerne la résolution de problèmes de micro-mécanique et plus particulièrement de problèmes d'homogénéisation périodique avec la méthode des éléments finis étendus. Il se déroule en cinq parties.

En premier lieu, nous situons notre étude dans le cadre de la micro-mécanique. Nous précisons les spécificités qu'elle engendre et nous présentons succinctement les facilités que nous procure la méthode des éléments finis étendus pour résoudre ce type de problèmes. Puis, après avoir rappelé la formulation des problèmes d'homogénéisation périodique, nous introduisons les fondements de la méthode des éléments finis étendus et le type de représentation géométrique utilisée. Ensuite, nous détaillons les capacités d'une telle représentation et les performances de l'approche, en terme de convergence. Enfin, nous appliquons cette méthode à des cas d'homogénéisation classiques afin d'en évaluer l'efficacité.

## 1.1 Contexte

Malgré la capacité grandissante des moyens numériques, le calcul de structure met encore en évidence, à l'heure actuelle, certaines lacunes lorsqu'une étude comprend plusieurs degrés d'analyse. En effet, l'introduction d'un détail (imperfections, inclusions, cavités, irrégularités, congés ...) ou l'utilisation d'un comportement décrit sur plusieurs échelles (macroscopique, microscopique, moléculaire, atomique, ...) accroît considérablement la complexité de la résolution. C'est pourquoi de nombreuses approches ont été développées dans ces divers domaines et en particulier dans celui de la micro-mécanique.

Ces problèmes sont souvent rencontrés dans le cadre des matériaux composites. Leur structure peut souvent être facilement définie par une répétition de domaines identiques. Ceux-ci sont appelés Volumes Élémentaires Représentatifs : V.E.R. . Notre étude se situe dans ce cadre, il s'agit de l'homogénéisation périodique décrit plus particulièrement dans [5], [56] et [62]. Le but recherché de ces méthodes est d'obtenir une variation du champ microscopique en réponse à une sollicitation macroscopique dans le cadre de problèmes élastiques linéaires.

L'objectif de l'étude proposée est de définir un comportement homogénéisé de la cellule à l'échelle microscopique afin de repercuter cette information sur le comportement global de la structure, composée de ces volumes élémentaires, sous contraintes extérieures tout en s'affranchissant des difficultés induites par la prise en compte de la géométrie des interfaces matériaux.

En effet, la majeure partie des études sur ce sujet utilise la méthode des éléments finis

impliquant le fait que le maillage doit se conformer à ces irrégularités afin de séparer les matériaux en présence, un élément du maillage ne doit contenir qu'un seul matériau. Mais la complexité des formes des détails à traiter ou le caractère aléatoire (cf [62]) de leur apparition rend fastidieux et parfois impossible la réalisation des maillages censés représenter ces formes. Nous avons pu voir dans l'introduction que plusieurs alternatives ont été apportées à ces problèmes par l'introduction de méthodes automatiques de maillage des surfaces par exemple. La méthode X-FEM, se distingue de ces méthodes en introduisant un enrichissement sur les éléments du maillage proche de l'interface via la partition de l'unité (aussi utilisée dans les travaux développés dans [59]), permettant ainsi de s'affranchir de ces discontinuités. Les interfaces n'ont plus besoin d'être maillées. A la différence des études décrites dans [60] et [28], elles sont simplement représentées implicitement par une fonction de niveau (cf [57]) à l'origine de la construction de la fonction d'enrichissement capable de prendre en compte l'interface au sein d'un élément. C'est pourquoi nous développons par la suite l'application de cette approche pour les problèmes multi-échelles, et par conséquent, pour l'homogénéisation périodique. L'objectif principal de cette étude est de développer la théorie de l'homogénéisation périodique par des calculs sur V.E.R. en employant la méthode des éléments finis étendus associée aux fonctions de niveaux afin de faciliter ou de rendre possible la prise en compte des interfaces matériaux au sein du maillage.

## 1.2 Formulation sur le volume élémentaire représentatif

La formulation du problème provient des études réalisées pour les matériaux composites à structure périodique ou aléatoire développées dans [62].

La micro-structure est décrite comme l'agencement périodique de volumes élémentaires représentatifs ou cellules de base notés  $\Omega$ . Nous distinguons deux échelles : l'échelle microscopique ( $\mathbf{y}$ ) et macroscopique ( $\mathbf{x}$ ). Au niveau macroscopique, les champs de contraintes et de déformations sont respectivement notés  $\boldsymbol{\sigma}^M$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  et les champs microscopiques de contraintes et de déformations sont respectivement notés  $\boldsymbol{\sigma}^m$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ . Le point de départ est de déduire une relation liant  $\boldsymbol{\sigma}^M$  à  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  en tenant compte des variations microscopiques. Pour cela, on résout un problème de micromécanique à conditions aux limites périodiques

sur le V.E.R. :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^m = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^m = \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\sigma}^m \text{ anti-périodique et } \boldsymbol{\varepsilon}^m \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^M = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^m \rangle \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^m \rangle (= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^m d\Omega)$  représente la moyenne spatiale sur la cellule de base du champ de déformations microscopique.

Chercher sur la cellule de base  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  périodique sachant que  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^m \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^M$  nous permet de définir la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m) + \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (1.2)$$

Ce qui nous amène à chercher  $\mathbf{u}^m$  périodique sur la cellule de base et à introduire la relation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^m(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\varepsilon}^M(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \quad (1.3)$$

Le comportement homogénéisé reliant le champ de contraintes macroscopique  $\boldsymbol{\sigma}^M$  au champ de déformations macroscopique  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  est donc construit par localisation, en soumettant successivement la cellule de base à des cas de déformations macroscopiques élémentaires. En effet, nous nous trouvons dans le cadre de l'élasticité linéaire et par le biais du principe de superposition, nous pouvons décomposer notre champ de déplacements total  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en un champ déduit de la sollicitation macroscopique et en une perturbation microscopique (1.3).

Une fois les définitions du champ de déplacements et de déformations établies, Le problème sur la cellule de base, de façon générale, s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{y}) = \mathbf{E}^m(\mathbf{y}) : \boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathbf{y}) = \mathbf{E}^m(\mathbf{y}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m(\mathbf{y}))) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \\ \mathbf{u}^m \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\sigma}^m \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique} \end{cases} \quad (1.4)$$

où périodique signifie que les déplacements sur les faces opposées de la cellule de base sont identiques et anti-périodique le fait que les contraintes sur ces mêmes faces sont opposées. Le problème 1.4 à résoudre revient à trouver  $\mathbf{u}^m$  périodique tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^m) : \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^M : \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \forall \mathbf{v} \text{ périodique} \quad (1.5)$$

La décomposition de la déformation macroscopique imposée en sollicitations élémentaires revient à remplacer  $\boldsymbol{\varepsilon}^M$  par  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^M \mathbf{I}^{ij}$ ,  $\mathbf{I}^{ij}$  étant défini par :

$$\mathbf{I}_{kl}^{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.6)$$

Ce qui induit les relations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^M = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^M \mathbf{I}^{ij} \\ \mathbf{u}^m = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^M \boldsymbol{\chi}^{ij} \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $\boldsymbol{\chi}$  définit les solutions élémentaires des variations du champ de déplacements microscopique. Il s'ensuit la décomposition du champ de déplacements total en champ de déplacements élémentaires avec  $\boldsymbol{\chi}^{ij}$  solution du problème quand  $\boldsymbol{\varepsilon}^M = \mathbf{I}^{ij}$

$$\mathbf{u}^{ij} = \mathbf{I}^{ij} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\chi}^{ij} \quad (1.8)$$

Le problème 1.4 revient à chercher  $\boldsymbol{\chi}^{ij}$  périodique tel que :

$$\begin{cases} a_\Omega(\boldsymbol{\chi}^{ij}, \mathbf{v}) = -a_\Omega(\mathbf{I}^{ij}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \text{ périodique} \\ \text{avec } a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

Une fois résolus les six problèmes élémentaires, nous pouvons en déduire l'expression de la déformation microscopique totale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathbf{u}) = (\mathbf{I}^{kl} + \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\chi}^{kl})) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^M \quad (1.10)$$

soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^m(\mathbf{u}) = (\mathbf{I}^{kl} + \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\chi}^{kl}))_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^M \quad (1.11)$$

et en déduire le tenseur de localisation :

$$\mathbf{D}_{ijkl} = \mathbf{I}_{ij}^{kl} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^m(\boldsymbol{\chi}^{kl}) \quad (1.12)$$

En reprenant l'équation 1.4, le champ de contraintes microscopiques peut se définir comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \mathbf{E} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (1.13)$$

et en ajoutant la définition sur la moyenne spatiale provenant de 1.1, nous pouvons en déduire l'expression de la matrice homogénéisée  $\mathbf{E}^{hom}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^M = \langle \mathbf{E} : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}^M \rangle = \mathbf{E}^{hom} : \boldsymbol{\varepsilon}^M \quad (1.14)$$

En pratique la matrice homogénéisée est calculée par la résolution de la forme bilinéaire suivante :

$$\mathbf{E}_{ijkl}^{hom} = a_{\Omega}(\mathbf{I}^{kl} + \chi_{kl}^m, \mathbf{I}^{ij} + \chi_{ij}^m) \quad (1.15)$$

Après avoir défini les principes mécaniques permettant l'analyse microscopique portant sur la cellule de base d'une structure périodique et l'effet qui en résulte sur le problème à l'échelle macroscopique, nous présentons la méthode numérique employée pour calculer les différents termes du problème, i.e. champ de déplacements, de déformations et de contraintes ainsi que le calcul de la matrice homogénéisée, et les avantages qu'elle procure.

## 1.3 Introduction à la méthode des éléments finis étendus

Dans les méthodes des éléments finis classiques, le maillage doit se conformer aux surfaces de discontinuité. Afin d'apporter une plus grande facilité de mise en oeuvre des maillages, l'approche X-FEM permet la présence de telles discontinuités au sein même des éléments par l'utilisation de la méthode de la partition de l'unité développée par Melenk et Babuska (1996) [39]. Dans le cadre de l'homogénéisation périodique et plus généralement dans les problèmes portant sur les matériaux composites, les géométries auxquelles on peut être confronté sont rapidement complexes. C'est pourquoi l'utilisation de cette méthode dans ce domaine peut s'avérer très avantageuse.

### 1.3.1 Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

#### 1.3.1.1 Partition de l'unité [39]

Le principe premier de la méthode réside dans le fait que l'approximation du champ de déplacements classique  $\mathbf{u}^{fem}$  est enrichie par une correction  $\mathbf{u}^{enr}$  sous la forme :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{fem} + \mathbf{u}^{enr}$  tout en respectant la partition de l'unité. Tout d'abord, nous rappelons la définition de l'approximation du champ de déplacements de la méthode des éléments finis :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_n(\mathbf{x})} \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (1.16)$$

où  $N_n(\mathbf{x})$  est l'ensemble des noeuds de l'élément contenant le point  $\mathbf{x}$  et  $a_i^{\alpha}$  représente les degrés de liberté classiques. Le domaine d'influence (support) de la fonction d'interpolation  $\phi_i^{\alpha}$  est l'ensemble des éléments connectés au noeud  $i$ . L'ensemble  $N_n(\mathbf{x})$  est donc également l'ensemble des noeuds dont le support couvre le point  $\mathbf{x}$ . Cette approximation de base est enrichie par l'ajout de degrés de liberté, pour les éléments concernés par la discontinuité, multipliés par les fonctions de forme classiques et par une fonction

d'enrichissement représentant au mieux le phénomène physique à évaluer :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in N_n(\mathbf{x})} \sum_{\alpha} \phi_i^{\alpha} a_i^{\alpha} + \sum_{i \in N_n(\mathbf{x}) \cap N_F} \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \phi_i^{\alpha}(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) \quad (1.17)$$

où  $N_F$  est l'ensemble des noeuds dont le support a une intersection avec le domaine  $\Omega_F$  (domaine dans lequel on souhaite un enrichissement) et où  $b_i^{\alpha}$  représente les nouveaux degrés de liberté. Cette dernière formulation exprime la partition de l'unité : la somme des fonctions de forme sur le domaine est égale à l'unité. Ceci permet de représenter la fonction  $F(x)$  dans la solution X-FEM.

### 1.3.1.2 Application première aux fissures

La méthode des éléments finis étendus a été introduite, au commencement, pour tenir compte de fissures au sein d'un domaine. Nous rappelons brièvement l'intérêt et la mise en oeuvre d'une telle application développée dans [43] et [41].

Dans les méthodes classiques, pour représenter le saut de déplacement imposé par la présence d'une fissure, il est d'usage d'employer la notion de double noeud représenté sur la figure (1.1(a)) par le couple 9-10. Celui-ci est remplacé dans l'approche X-FEM par un seul noeud 11 (cf. figure 1.1(b)). L'approximation éléments finis peut être définie comme

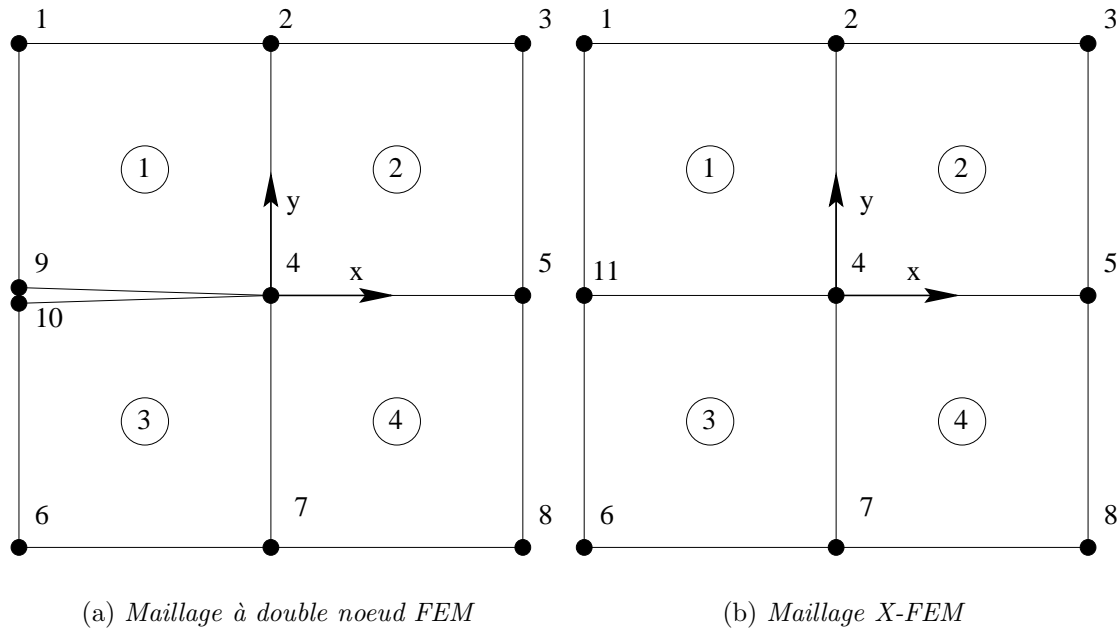


figure 1.1 – Comparaison des maillages utilisés par l'approche FEM et X-FEM.

suit :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{u}_i \phi_i \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{u}_i$  est le déplacement au noeud  $i$  et  $\phi_i$  est la fonction de forme associée au noeud  $i$ .



Toujours dans [41], deux nouveaux termes sont définis qui font apparaître le déplacement moyen  $\mathbf{a}$  et le saut déplacement  $\mathbf{b}$  du double noeud :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{u}_9 + \mathbf{u}_{10}}{2}; \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}_9 - \mathbf{u}_{10}}{2} \quad (1.19)$$

En inversant ce système, il vient :

$$\mathbf{u}_9 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \mathbf{u}_{10} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad (1.20)$$

L'approximation éléments finis (1.18) peut alors se réécrire

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^8 \mathbf{u}_i \phi_i + \mathbf{a}(\phi_9 + \phi_{10}) + \mathbf{b}(\phi_9 - \phi_{10})H(\mathbf{x}) \quad (1.21)$$

où  $H(\mathbf{x})$  est une fonction discontinue, appelée Heaviside, donnée par :

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0 \\ -1 & \text{pour } y < 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

La somme des fonctions de forme associées aux noeuds 9 et 10 correspond à la fonction de forme du noeud 11 (figure 1.1). La relation (1.21) peut donc se réécrire comme :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^8 \mathbf{u}_i \phi_i + \mathbf{u}_{11} \phi_{11} + \mathbf{b} \phi_{11} H(\mathbf{x}) \quad (1.23)$$

Les deux premiers termes du membre de droite correspondent à une approximation éléments finis classique sur le maillage. La fonction intervenant dans le troisième terme est le produit d'une fonction de forme classique  $\phi_{11}$  par la fonction discontinue  $H(\mathbf{x})$ . Ce troisième terme peut s'interpréter comme un enrichissement de la base éléments finis par une technique de type partition de l'unité.

Cet exemple illustre la prise en compte d'une fissure qui suit le bord des éléments. A présent, nous nous intéressons au cas où la fissure passe au milieu des éléments. La figure 1.2 décrit ce type de problème.

Elle présente deux types de noeuds enrichis. Les noeuds cerclés sont enrichis par la fonction Heaviside présentée précédemment, les noeuds entourés d'un carré sont enrichis par des fonctions discontinues déduites des modes de déplacements asymptotiques permettant de représenter au mieux le comportement en pointe de fissure.

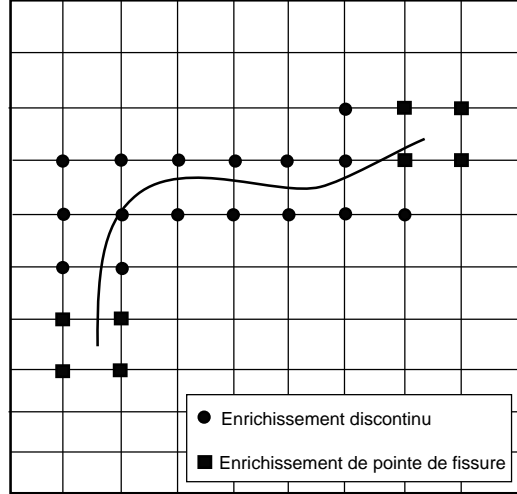


figure 1.2 – Enrichissement de fissure.

La nouvelle approximation éléments finis enrichie s'écrit alors :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in L} \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{i \in K_1} \phi_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 \mathbf{b}_{i,1}^l F_l^1(\mathbf{x}) \right) + \sum_{i \in K_2} \phi_i(\mathbf{x}) \left( \sum_{l=1}^4 \mathbf{b}_{i,2}^l F_l^2(\mathbf{x}) \right) \quad (1.24)$$

où :

- $I$  est l'ensemble des noeuds du maillage ;
- $\mathbf{u}_i$  est le degré de liberté classique au noeud  $i$  ;
- $\phi_i$  est la fonction de forme associée au noeud  $i$  ;
- $L$  est l'ensemble des noeuds enrichis pour tenir compte du passage de la fissure ;
- $\mathbf{a}_i$  est le degré de liberté enrichi par la fonction Heaviside ;
- $K_1$  est l'ensemble des noeuds enrichis pour tenir compte de la première pointe de fissure ;
- $K_2$  est l'ensemble des noeuds enrichis pour tenir compte de la deuxième pointe de fissure ;
- $\mathbf{b}_{i,1}^l$  sont les degrés de liberté enrichis par la fonction  $F_l^1(\mathbf{x})$  ;
- $\mathbf{b}_{i,2}^l$  sont les degrés de liberté enrichis par la fonction  $F_l^2(\mathbf{x})$ .

avec les fonctions  $F_l^1(\mathbf{x})$  et  $F_l^2(\mathbf{x})$  définissant le comportement du front de fissure en élasticité telles que :

$$\{F_l^i(\mathbf{x})\} \equiv \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (1.25)$$

où  $(r, \theta)$  représentent les coordonnées polaires dans un repère local à la pointe de fissure.

### 1.3.1.3 Application aux trous et interfaces matériau

La seconde application directe concerne la modélisation des trous et des inclusions développées dans [61]. Cette extrapolation permet la présence de deux constituants dans un élément du maillage. Qu'il s'agisse, pour un domaine, de contenir du vide et de la matière ou deux matériaux différents, la méthode des éléments finis nous impose de représenter la frontière entre deux zones aux caractéristiques mécaniques différentes. X-FEM, au contraire, permet de s'affranchir de ces contraintes.

**Cas des trous** Dans le cadre des trous, l'interpolation du champ va être modifiée en utilisant une fonction spécifique  $F(\mathbf{x})$  prenant 0 comme valeur dans le trou et 1 dans la matière. L'utilisation de cette fonction n'est effective que pour les éléments qui sont coupés par la frontière. Ceux dont le support se trouve totalement dans le vide sont éliminés et ceux dont le support est situé totalement dans la matière ne subissent aucun enrichissement. L'approximation précédente induit, lorsqu'un élément est coupé par la discontinuité, que l'intégration se fait seulement sur la partie de l'élément située dans la matière. Pour que cette approximation soit effective, il est nécessaire de sélectionner les noeuds à garder et ceux à éliminer. La figure 1.3 illustre cette sélection.

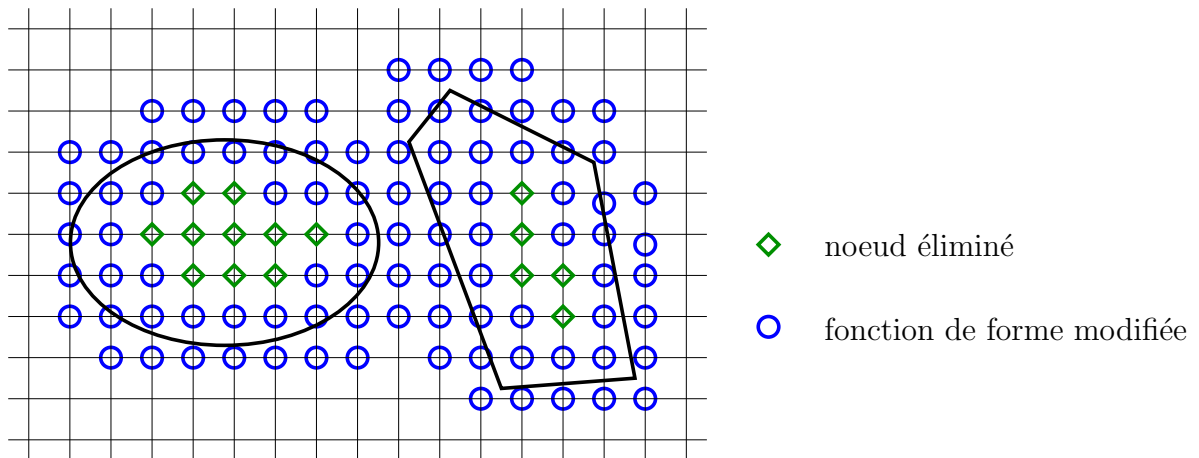


figure 1.3 – Sélection des noeuds pour les trous

Nous verrons plus en détail dans la section 1.3.2.2 la technique qui nous permet d'effectuer cette sélection.

**Cas des interfaces matériaux** Nous venons de définir comment X-FEM permet de matérialiser une discontinuité du champ de déplacements au sein même d'un élément du maillage grâce à une fonction d'enrichissement discontinue qu'il s'agisse de fissures ou de vides. À présent, nous nous intéressons au cas des interfaces matériaux, qui elles n'impliquent pas une discontinuité du champ de déplacements mais une discontinuité au niveau des déformations. C'est pourquoi, l'approximation du champ de déplacements doit

contenir des modes de déformations discontinus au passage de l'interface. Un exemple de problèmes impliquant des interfaces matériaux est illustré figure 1.4. Afin de satisfaire ces

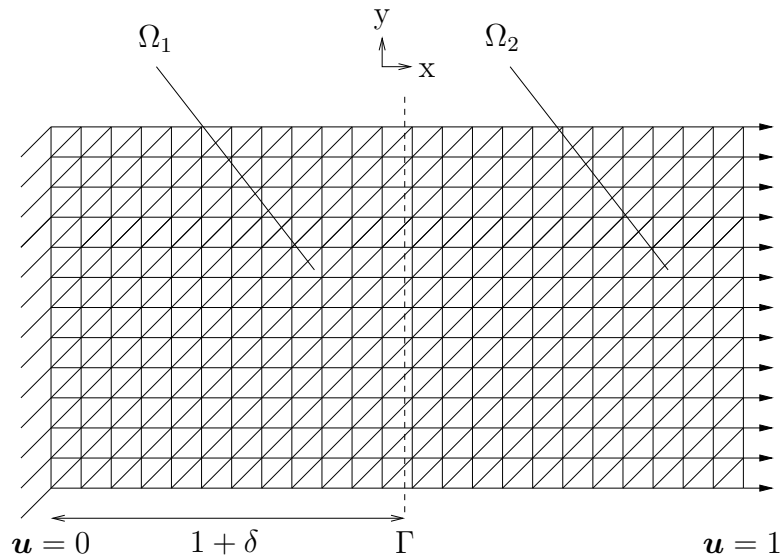


figure 1.4 – Exemple de problèmes à interface matériaux

exigences, l'approximation classique est enrichie de la même façon que pour les vides à l'exception de la fonction d'enrichissement  $\rho(\mathbf{x})$  qui doit permettre de représenter le saut de déformation :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i \phi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in D} \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

Un exemple de fonction d'enrichissement est décrit sur la figure suivante. Cette fonction

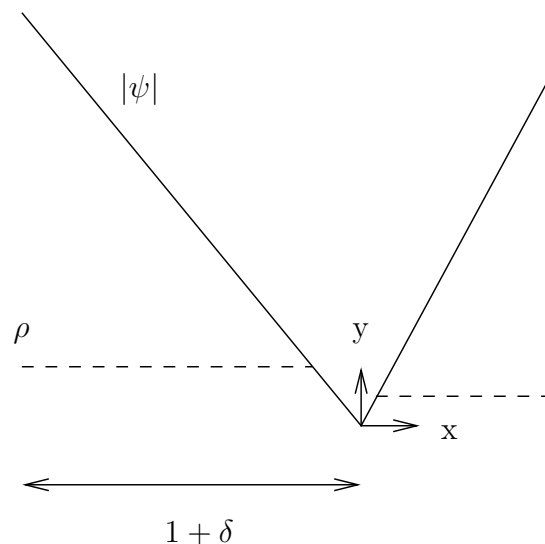


figure 1.5 – Exemple de fonctions d'enrichissement

$\rho(\mathbf{x})$  est constante sur l'ensemble des éléments du domaine à l'exception de ceux coupés par l'interface. À cet endroit,  $\rho(\mathbf{x})$  est équivalente à la fonction  $|\psi(\mathbf{x})|$ , qui représente la valeur absolue de la distance entre un point du domaine et l'interface. Le choix de cette

fonction n'est pas sans conséquence. En effet, elle a une grande influence sur le taux de convergence de la méthode. Ce choix sera discuté dans une section ultérieure.

Après avoir défini les différents aspects de l'enrichissement, nous allons préciser la méthode de modélisation de la géométrie des frontières qui nous permettra, par exemple, de sélectionner les noeuds à enrichir dans les cas décrits précédemment. Les level sets ou fonctions de niveau sont à l'origine de cette technique.

### 1.3.2 Fonction de Niveau (Level Set)

Dans la méthode d'approximation classique par éléments finis, les frontières sont définies explicitement par des entités géométriques (segments de droite, de parabole ...). La méthode des Level Sets, introduite par Sethian (1999) [57] et Osher (Osher et Sethian 1988) [51], propose une autre alternative en décrivant implicitement la géométrie des frontières. Cette technique a été développée par Sukumar, Chopp, Moës et Belytschko (2001) [61] dans le cadre de trous et d'inclusions.

#### 1.3.2.1 Description

Une fonction de niveau s'apparente à un champ de valeurs associé à la frontière. Cette fonction peut être calculée pour n'importe quel point de l'espace. Elle représente alors la distance qui sépare ces points de la frontière. Dans le cadre de résolutions numériques de problèmes mécaniques sur des maillages, la fonction de niveau est calculée en chaque noeud du maillage. Les noeuds se voient alors assignés une valeur signée donnant la distance de ceux-ci à la frontière. La fonction de niveau prend, par exemple, une valeur négative à l'intérieur d'un trou et positive à l'extérieur. Par conséquent, l'iso-zéro de la fonction de niveau, illustrée sur la figure 1.6, dans le cas d'un trou, définit la frontière. En ce qui concerne les applications qui suivent dans ce chapitre, cette fonction est calculée aux noeuds et interpolée entre les noeuds par les fonctions d'interpolation classiques :

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{I}} \psi_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) \quad (1.27)$$

La fonction de niveau représente donc une fonction continue sur le domaine permettant de faciliter la définition de la fonction d'enrichissement pour les problèmes incluant une interface matériau. Mis à part cet aspect, les fonctions de niveau ont pour rôle de définir implicitement la position de l'interface ou de la frontière afin d'effectuer la sélection des noeuds à supprimer ou à enrichir.

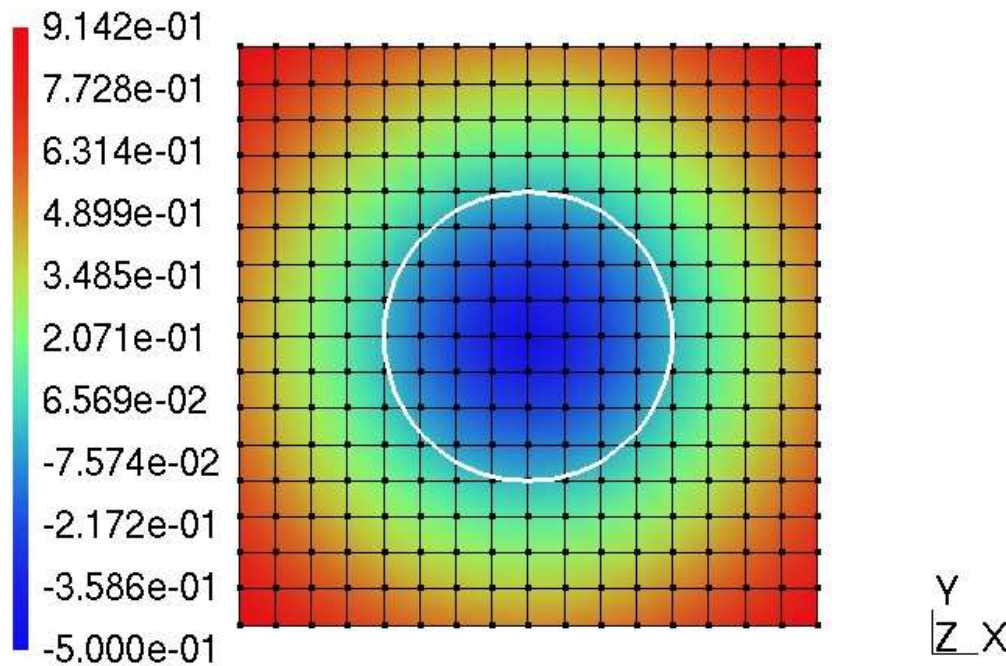


figure 1.6 – Iso-zéro d'une fonction de niveau représentant un trou circulaire.

### 1.3.2.2 Sélection des noeuds à enrichir ou à supprimer

Nous avons pu voir que l'affectation de l'enrichissement impliquait une sélection des noeuds. Concernant les trous, figure 1.3, la fonction de niveau correspondant à la frontière permet cette sélection. Si le support d'un noeud, c'est-à-dire tous les éléments connectés à celui-ci, n'a pour valeur de level set en ses noeuds que des valeurs négatives, alors celui-ci sera supprimé. Au contraire, si ses valeurs sont positives il sera conservé mais aucun enrichissement ne lui sera affecté. Pour les noeuds dont le support est coupé, c'est-à-dire si on est présence de valeurs négatives et positives, alors le noeud sera enrichi. La même démarche est appliquée pour les interfaces matériau dans le sens où si le support d'un noeud est coupé par l'interface, celui-ci est enrichi. Dans le cas contraire, l'interpolation est identique à la méthode des éléments finis. L'implémentation précise est discutée dans le dernier chapitre concernant le calcul parallèle.

### 1.3.2.3 Fonction xFit

L'introduction des fonctions de niveau dans la méthode des éléments finis étendus nécessite, au niveau numérique, une tolérance. Il est à noter que si l'interface matériau coupe un élément en une partie très petite par rapport à l'autre, il paraît inutile d'effectuer un enrichissement car il aurait un effet négligeable. Par conséquent, lorsqu'un noeud se situe très près de l'interface la valeur de la fonction de niveau calculée au niveau de celui-ci

est ramenée à zéro. Ainsi, si cela se produit pour deux noeuds d'un triangle, comme le montre la figure 1.7, celui-ci est considéré totalement dans un matériau et les noeuds qui le composent ne sont pas enrichis. En pratique, on considère  $ls_0$  et  $ls_1$  les valeurs de la fonction de niveau aux deux noeuds appartenant à un arête coupée par l'interface. On calcule le rapport  $\frac{-ls_0}{ls_1 - ls_0}$  si celui est inférieur à  $TOL$ , une tolérance définie arbitrairement,  $ls_0$  est mise à zéro et si celui-ci est supérieur à  $1 - TOL$ ,  $ls_1$  est mise à zéro. Dans la majorité des cas,  $TOL$  prend  $10^{-3}$  comme valeur.

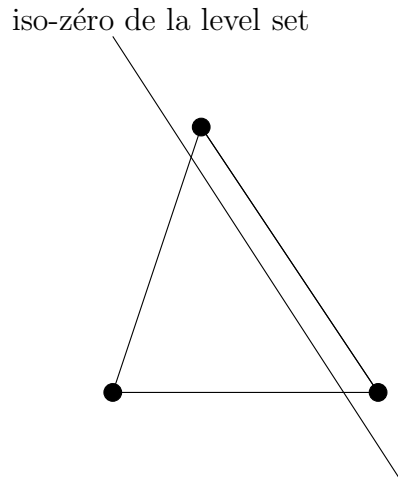


figure 1.7 – Tolérance pour l'enrichissement.

Après avoir présenté la méthode des éléments finis étendus, nous abordons sa mise en oeuvre pour l'homogénéisation, en détaillant, dans un premier temps, la définition des fonctions d'enrichissement impliquant les fonctions de niveau, puis en évaluant la capacité de cette approche en terme de convergence via des calculs d'erreurs sur des cas tests et enfin en décrivant les différentes conditions aux limites.

## 1.4 X-FEM et homogénéisation

### 1.4.1 Enrichissement pour les interfaces matériaux

Lorsque la méthode des éléments finis est utilisée pour représenter ces interfaces matériaux, le maillage se conforme à celles-ci dans le sens où elles sont décrites par des éléments du maillage. Le taux de convergence, basé sur l'erreur en énergie du problème, obtenu alors varie linéairement en fonction de la taille des éléments du maillage (de type  $O(h)$  où  $h$  représente la taille caractéristique des éléments du maillage). A contrario, si le maillage ne suit pas la discontinuité, le taux de convergence est très faible. C'est pourquoi, comme il est décrit section 1.3.1.3, l'enrichissement de l'approximation classique doit rendre possible l'obtention du même ordre de convergence que dans le cas de l'utilisation de la méthode des éléments finis classique. Il est donc indispensable, dans notre cas, de définir une fonction d'enrichissement capable d'approcher les convergences obtenues lors de l'emploi des méthodes classiques afin d'en garder tous leurs bénéfices.

#### 1.4.1.1 Choix de l'enrichissement

La fonction d'enrichissement, capable de représenter le saut de déformation, utilisée en tout premier lieu, est décrite dans [61] et représente la valeur absolue de la fonction de niveau ( $\phi_I$ ) interpolée sur le maillage par l'intermédiaire des fonctions de forme ( $N_I$ ) :

$$F^1(\mathbf{x}) = \left| \sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} N_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) \right| \quad (1.28)$$

Cette fonction est lissée et permet d'obtenir une nouvelle fonction nommée  $F^1 + \text{smoothing}$ . Elle correspond à la fonction  $F^1$  à l'intérieur de l'élément coupé par l'interface et à une fonction constante sur le reste du domaine. Il a été exposé, dans [61], que celle-ci procurait un meilleur taux de convergence que la première étant donné que le *lissage* de la fonction d'enrichissement permet de limiter la perturbation sur les éléments voisins de ceux contenant l'interface.

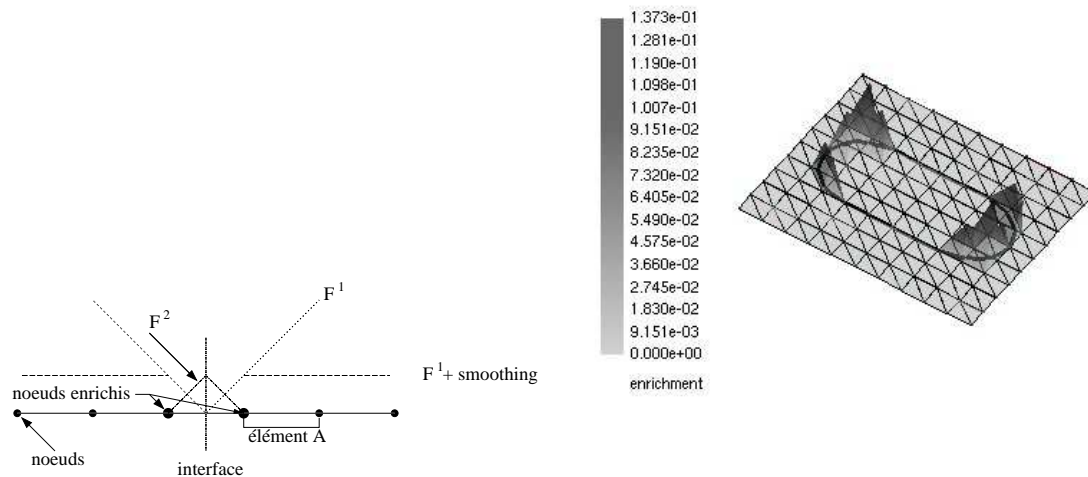
Nous proposons une nouvelle fonction d'enrichissement permettant d'avoir un effet uniquement sur les éléments coupés par l'interface. Au contraire des précédentes, celle-ci prend une valeur nulle sur les bords des éléments enrichis comme on peut le voir sur la figure 1.8(b). Ceci permet de limiter l'action de cette fonction aux éléments coupés par l'interface. Elle est décrite par la relation suivante :

$$F^2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{I}} |\phi_{\mathbf{I}}| N_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) - \left| \sum_{\mathbf{I}} \phi_{\mathbf{I}} N_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) \right| \quad (1.29)$$

Les trois fonctions sont représentées en 1D sur la figure 1.8(a) suivante et la dernière en



2D sur la figure 1.8(b). Sur cette dernière, on peut voir que lorsque l'interface (définie en trait gras sur la figure) coïncide avec les arêtes des éléments, la fonction d'enrichissement est nulle, alors que lorsqu'un élément est coupé par l'interface elle définit un pic au niveau de l'iso-zéro de la fonction de niveau représentant l'interface au sein de l'élément. Ce pic permet ainsi de représenter le saut de déformation au sein d'un élément induit par l'interface entre les deux matériaux. Les résultats obtenus, en terme de convergence, pour



(a) Les différents choix pour la fonction d'enrichissement.

(b) Représentation en 2D de la fonction  $F^2$

ces différentes fonctions d'enrichissement sont détaillés dans la section suivante sur des cas tests classiques.

#### 1.4.1.2 Calculs d'erreurs

Afin d'évaluer l'efficacité de la méthode sur des problèmes contenant des vides ou sur des problèmes bi-matériaux, nous cherchons à comparer les taux de convergence obtenus par celle-ci avec ceux réalisés avec la méthode des éléments finis. Dans un deuxième temps, nous comparons ces mêmes taux de convergence suivant les différentes fonctions d'enrichissement sur des cas tests.

Pour cela, nous allons, tout d'abord, définir les calculs d'erreurs utilisés qui permettent de connaître les erreurs effectuées entre la solution du problème traité et la solution de référence. Plusieurs solutions de référence sont possibles. La solution exacte du problème peut être prise comme référence dans un premier temps, mais le nombre de cas où elle est connue est évidemment restreint.

Nous rappelons, au préalable, les expressions de l'erreur à évaluer. L'erreur en norme énergie sur un élément du maillage s'écrit :

$$\epsilon_{\Omega_e} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{ref}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{ref}) d\Omega_e}}{\sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ref} d\Omega}} \quad (1.30)$$

où  $\Omega_e$  représente l'espace d'un élément du maillage, les termes indicés  $^{ref}$  les solutions de référence et les termes indicés  $^h$  les solutions calculées par la méthode dont l'erreur est à évaluer. L'erreur totale sur le domaine est définie par :

$$\epsilon = \sqrt{\sum_{N_e} \epsilon_{\Omega_e}^2} \quad (1.31)$$

où  $N_e$  définit l'ensemble des éléments du maillage.

#### 1.4.1.2.1 Erreur exacte

Lorsque la solution du problème est connue l'erreur relative sur un élément est définie en remplaçant  $\mathbf{u}^{ref}$  par  $\mathbf{u}^{ex}$  définissant la solution exacte du problème. L'erreur relative exacte qui en résulte est définie par :

$$\epsilon_{\Omega}^{ex} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{ex}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{ex}) d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^{ex} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^{ex} d\Omega}} \quad (1.32)$$

#### 1.4.1.3 Test de convergence

Les cas traités, à présent, sont des tests classiques qui vont nous permettre d'évaluer, dans un premier temps, l'efficacité de la méthode en terme de convergence, puis, concernant les problèmes bi-matériaux, d'évaluer les différences entre les fonctions d'enrichissement présentées auparavant.

##### 1.4.1.3.1 Plaque Percée sous tension

Le problème que nous considérons est une plaque infinie contenant un vide circulaire de rayon  $a$ , soumise à une traction uniaxiale uniforme. Nous modélisons ce problème en imposant une traction équivalente à la contrainte exacte, induite par la traction uniforme à l'infini, sur les bords d'un carré de dimension finie. Les caractéristiques du problème sont  $E = 10$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 0.4$  mm,  $\boldsymbol{\sigma}^{\infty} = 1$  MPa et  $L = 2$  mm (cf. figure 1.8).

Le graphique suivant (cf figure 1.9) représente les variations des erreurs totales exactes pour les méthodes FEM et X-FEM. La convergence ( $\alpha$ ) de X-FEM, correspondant à la pente de la courbe, est équivalente à celle de la méthode classique et proche de 1. La méthode X-FEM converge en  $O(h)$ .

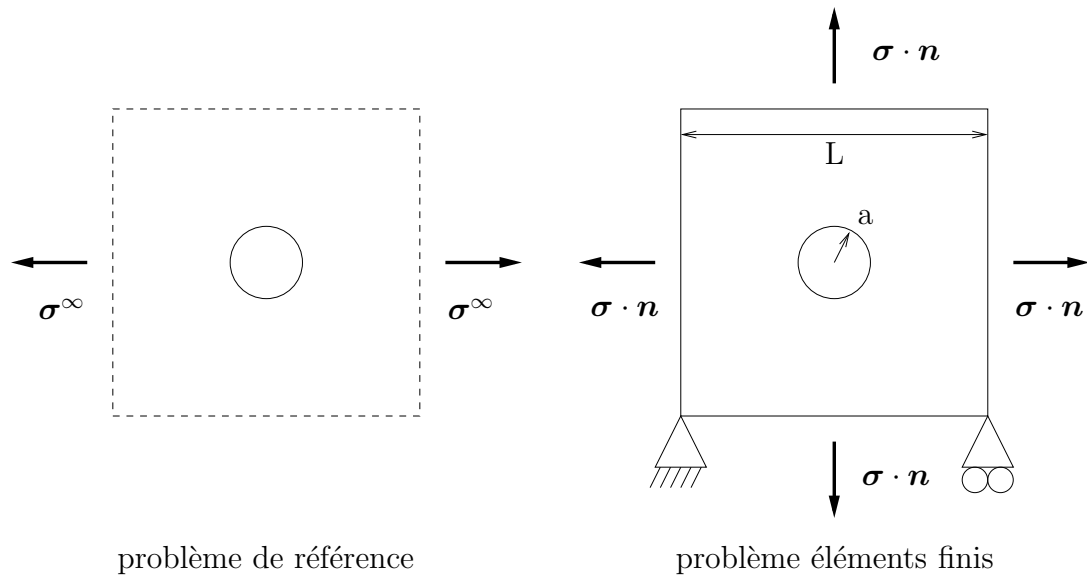


figure 1.8 – Plaque contenant un trou circulaire sous tension.

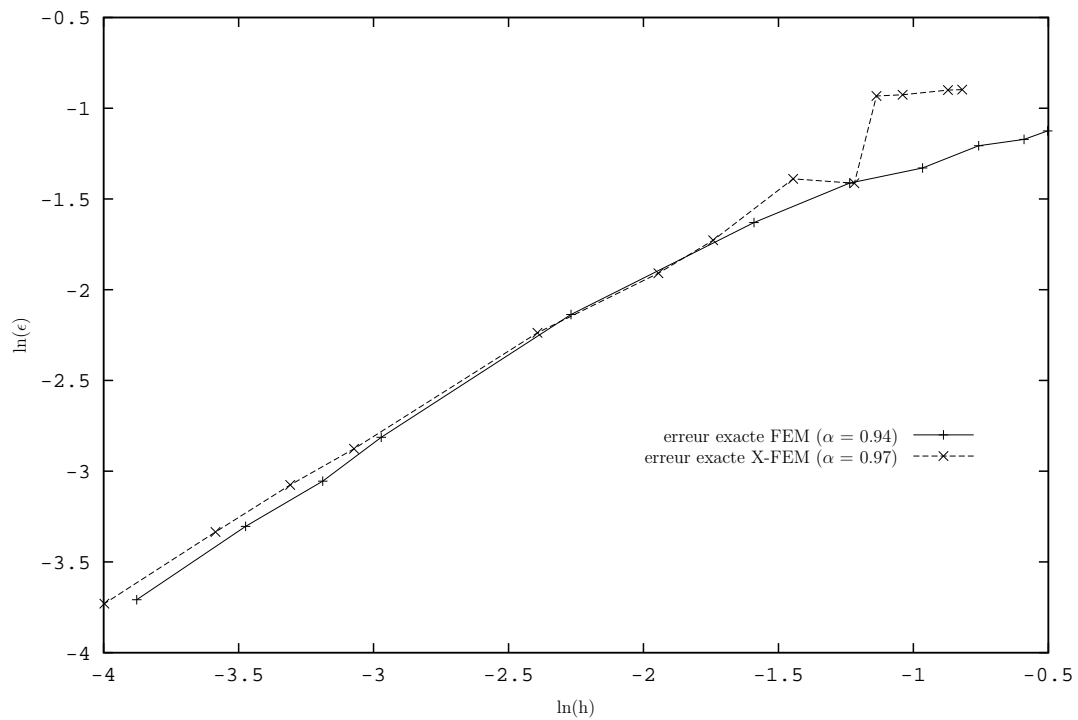


figure 1.9 – Variation des erreurs exactes pour le problème de la plaque avec trou circulaire.

De plus, l'effectivité, c'est-à-dire le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur exacte, est proche de 1 lorsque le nombre d'éléments dépasse 1 000 dans les deux cas. En conséquence, il s'avère que les résultats obtenus par la méthode X-FEM sont aussi précis que ceux de la méthode FEM.

### 1.4.1.3.2 Cube contenant une cavité sphérique sous tension

Sur la figure 1.10, un cube infini contenant une cavité sphérique de rayon  $a$  soumis à une traction uniaxiale uniforme est représenté. Nous modélisons ce problème en imposant une traction équivalente à la contrainte exacte induite par la traction uniforme à l'infini sur les bords d'un cube de côté  $L$ . Les caractéristiques du problème sont  $E = 1$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 0.4$  mm,  $\sigma^\infty = 1$  MPa et  $L = 2$  mm.

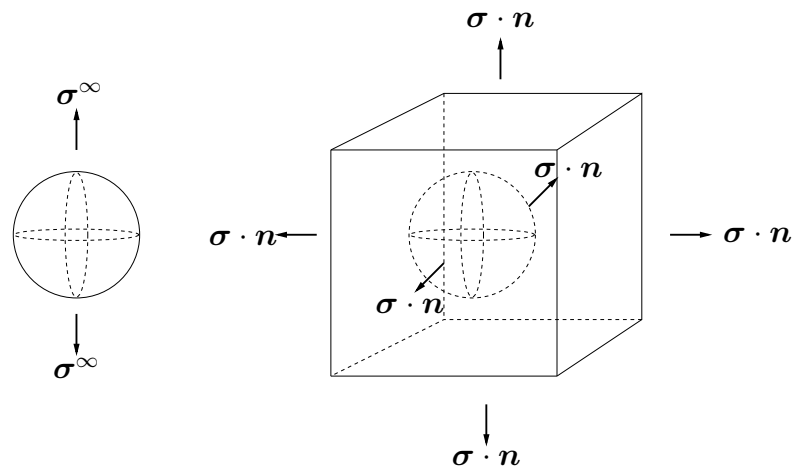


figure 1.10 – Cube contenant une cavité sphérique sous tension.

Le graphique suivant (cf figure 1.11) représente les variations des erreurs exactes pour les méthodes FEM et X-FEM. La convergence de X-FEM est de 0.91 c'est à dire proche de la convergence optimale. Également dans ce cas, la méthode semble efficace.

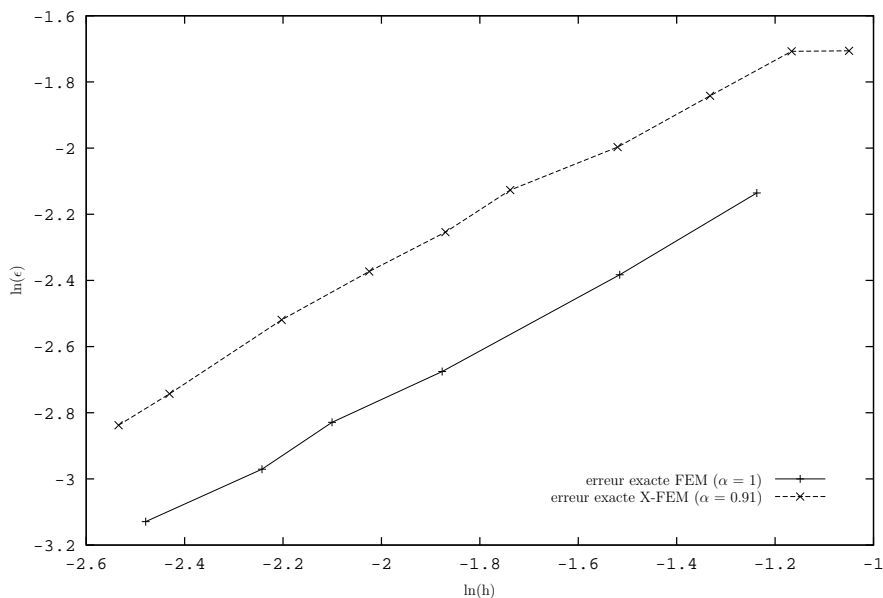


figure 1.11 – Variation des erreurs exactes pour le problème du cube avec cavité sphérique.

### 1.4.1.3.3 Plaque contenant une inclusion circulaire sous tension

Sur la figure de gauche 1.12, un domaine contenant une inclusion circulaire est représentée. Sur la frontière  $\Gamma^2$ ,  $\mathbf{u}_x = x$ ,  $\mathbf{u}_y = y$  est imposé et sur la frontière  $\Gamma^1$  la continuité des tractions et des déplacements est assurée. Nous modélisons ce problème en imposant une traction équivalente à la contrainte exacte ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) sur les bords d'un carré de dimension finie (figure de droite 1.12). Les caractéristiques du problème sont  $E^1 = 1$  MPa,  $E^2 = 10$  MPa,  $\nu^1 = 0.3$ ,  $\nu^2 = 0.25$ ,  $a = 0.4$  mm,  $\boldsymbol{\sigma}^\infty = 1$  MPa et  $L = 2$  mm.

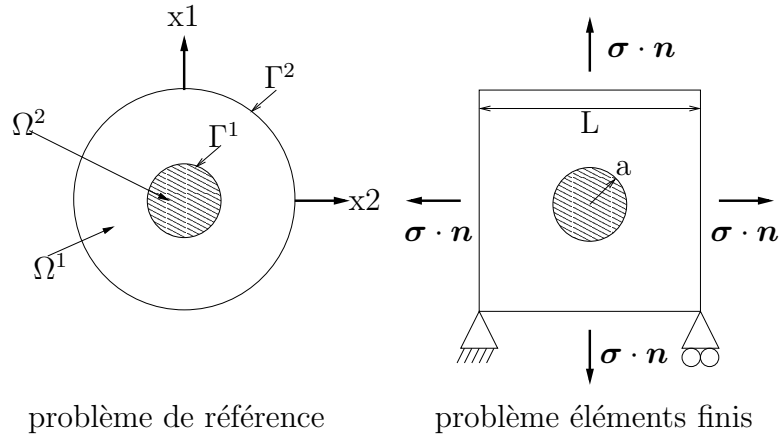


figure 1.12 – Plaque contenant une inclusion circulaire sous tension.

Le graphique suivant (cf figure 1.13) représente les variations des erreurs exactes pour les méthodes FEM et X-FEM (avec la fonction d'enrichissement  $F^2$ ).

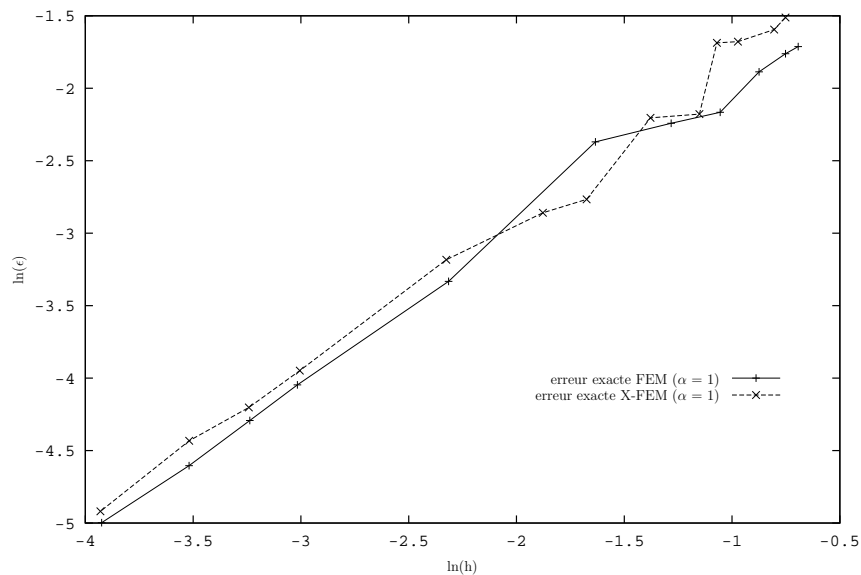


figure 1.13 – Variation des erreurs exactes pour le problème de la plaque avec inclusion.

Les convergences, avec les différentes méthodes, sont équivalentes. La fonction d'enrichissement choisie, comme pour le cas suivant, est la fonction  $F^2$  citée précédemment.

#### 1.4.1.3.4 Cube contenant une inclusion sphérique sous tension

Le problème, que nous considérons à présent, est un cube infini contenant une inclusion sphérique de rayon  $a$  soumis à une traction uniaxiale uniforme. Nous modélisons ce problème en imposant une traction équivalente à la contrainte exacte induite par la traction uniforme à l'infini sur les bords d'un cube de côté  $L$ . Les caractéristiques pour l'inclusion et la matrice du problème sont  $E_{inc} = 10$  MPa,  $\nu_{inc} = 0.25$ ,  $E_{mat} = 1$  MPa,  $\nu_{mat} = 0.3$ . Les dimensions sont  $a = 0.4$  mm,  $L = 2$  mm et la contrainte à l'infini  $\sigma^\infty = 1$  MPa.

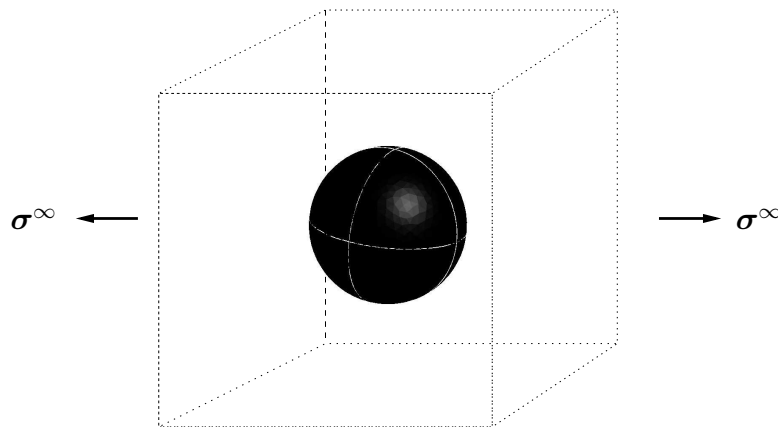


figure 1.14 – Cube contenant une inclusion sphérique sous tension.

Le graphique suivant (cf figure 1.15) représente les variations des erreurs exactes pour les méthodes FEM et X-FEM (avec la fonction d'enrichissement  $F^2$ ).

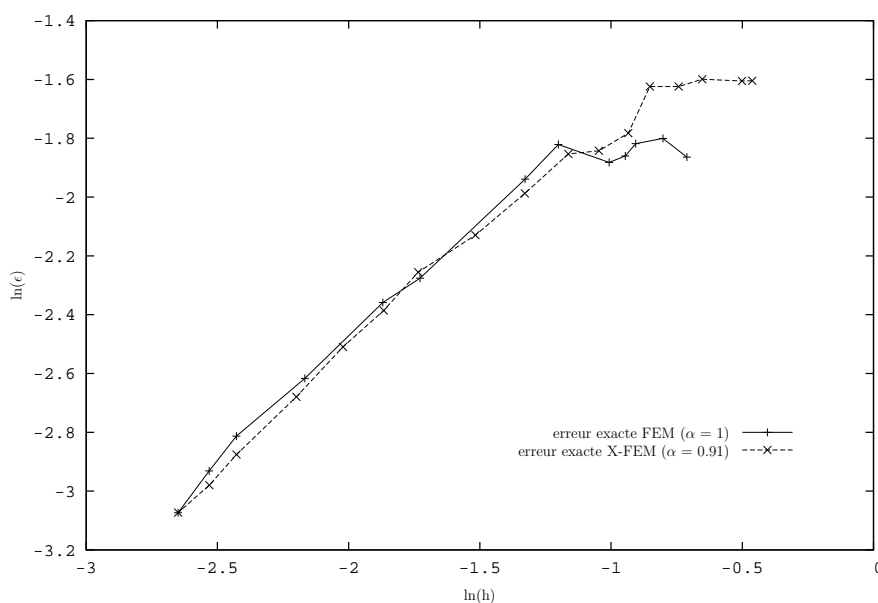


figure 1.15 – Variation des erreurs exactes pour le problème du cube avec inclusion.

Pour ce dernier cas, les convergences obtenues avec X-FEM s'avèrent de nouveau très proche de la méthode des éléments finis.

cas test 2D	plaque percée FEM	plaque percée X-FEM	inclusion plaque FEM	inclusion plaque X-FEM
conv. ex. (**)	0.98	0.98	1	1
eff. (***)	0.95	0.95	0.95	0.95

cas test 3D	cube évidé FEM	cube évidé X-FEM	inclusion cube FEM	inclusion cube X-FEM
conv. ex. (**)	1	0.91	1	0.91
eff. (***)	0.95	0.78	0.95	0.83

(\*\*) : convergence de l'erreur exacte.

(\*\*\*) : En 2D, effectivité pour 1 000 éléments, erreur exacte  $< 6/100$ ,

En 3D, cube inclusion, effectivité pour 140 000 éléments, erreur exacte  $= 4/100$ ,

En 3D, cube évidé, effectivité pour 100 000 éléments, erreur exacte  $= 5/100$ .

tableau 1.1 – Tableau récapitulatif

Le tableau 1.1 résume les résultats obtenus pour les différents cas testés. La convergence obtenue pour les cas précédents avec la méthode X-FEM est de type  $O(h)$  ou en est très proche. Nous pouvons donc en conclure que la méthode des éléments finis étendus garde les mêmes caractéristiques, en terme de convergence, que la méthode des éléments finis tout en profitant de la mise en oeuvre aisée de la définition des interfaces ou frontières.

## 1.4.2 Évaluation des fonctions d'enrichissement

Nous tentons dans ce paragraphe d'apporter quelques précisions quant au choix de la fonction d'enrichissement pour les problèmes bi-matériaux. Les taux de convergence obtenus avec deux choix de fonction d'enrichissement sur les deux cas tests bi-matériaux peuvent être comparés sur les figures 1.16 et 1.17 par rapport à ceux obtenus avec la méthode des éléments finis utilisant un maillage conforme et un autre non conforme. Quatre approches sont traitées. La première, notée FEM, désigne l'approche éléments finis standard : le maillage respecte les interfaces. Les trois autres ne respectent pas cette contrainte. La première d'entre elles, FEM non conforme, ne subit aucun enrichissement. Simplement, lors de l'intégration, suivant où le point de Gauss se trouve par rapport à l'iso-zéro de la level set, la loi de comportement appropriée est choisie. Pour les deux dernières, nous effectuons un enrichissement, l'un noté X-FEM 1 (+ smoothing) et l'autre XFEM 2, correspondant respectivement à l'emploi des fonctions  $F^1 + smoothing$  et  $F^2$  décrites figure 1.8(a). Ces courbes nous montrent que le taux de convergence, dans le premier cas, est très mauvais et que l'enrichissement proposé XFEM 2 améliore le taux

obtenu avec XFEM 1 (+ smoothing) jusqu'à devenir très proche de celui de la méthode des éléments finis.

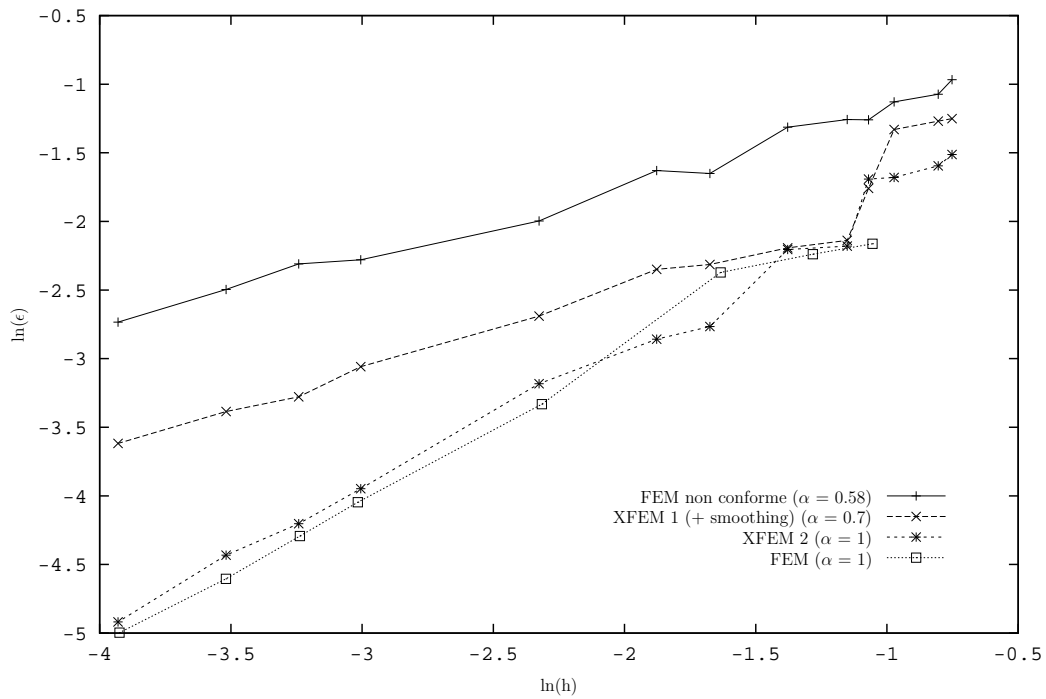


figure 1.16 – Taux de convergence pour le problème de la plaque avec inclusion.

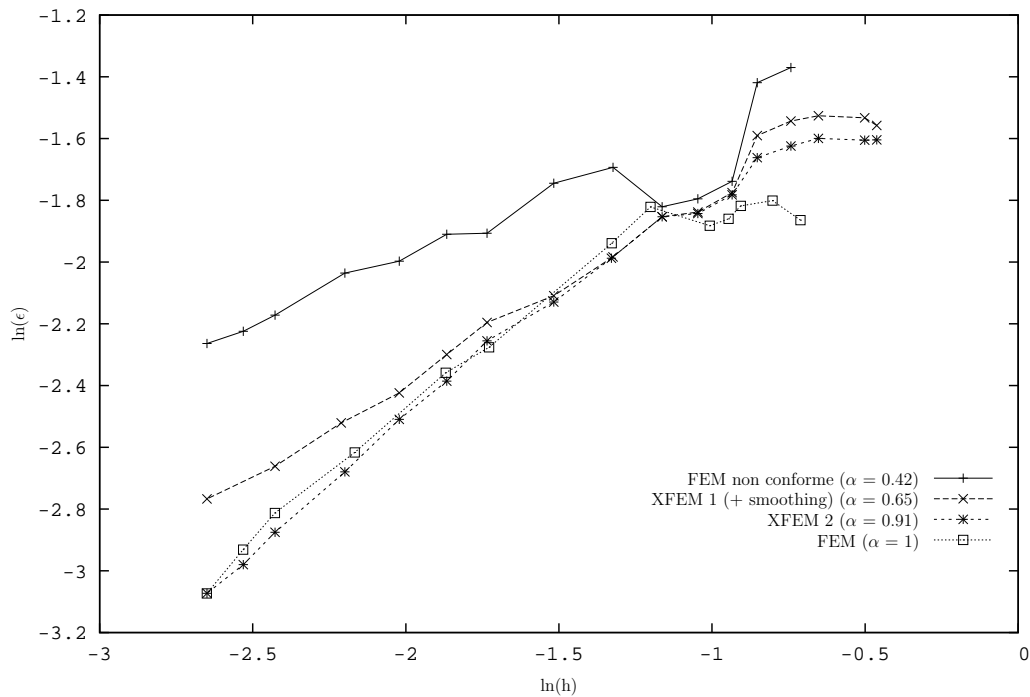


figure 1.17 – Taux de convergence pour le problème du cube avec inclusion.



### 1.4.3 Erreur locale

Les résultats évoqués précédemment représentent l'erreur globale sur le domaine. Les tracés représentés sur la figure 1.18 définissent l'erreur commise en fonction du rapport  $r/a$  pour les problèmes à inclusion avec la fonction d'enrichissement  $F^2$ . Le rapport définit la position du point où l'erreur est calculée avec  $a$  le rayon de l'inclusion et  $r$  la coordonnée radiale du point ; i.e. nous nous situons sur l'interface quand le rapport vaut 1. L'erreur tracée est une erreur cumulée. Elle représente la somme des erreurs relatives exactes au fur et à mesure que l'on s'écarte du centre de l'inclusion. Nous pouvons nous apercevoir que la majorité de l'erreur commise se situe à proximité de l'interface et conclure que la qualité de la solution dépend, comme dans le cas de la méthode des éléments finis classique, essentiellement de l'exactitude du champ de déformations près de l'interface.

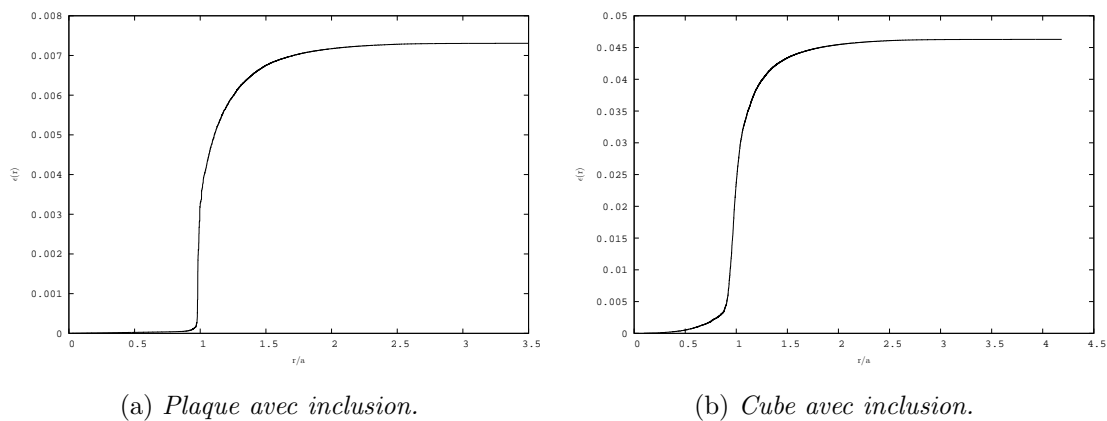


figure 1.18 – Répartition de l'erreur par rapport à la position de l'interface.

### 1.4.4 Précisions sur l'intégration

Nous avons évoqué, dans les sections précédentes, l'enrichissement défini pour l'approche X-FEM qui régit la définition du champ solution et l'utilisation de level set capable de décrire des géométries complexes dans le cadre de l'homogénéisation. Nous détaillons, à présent, quelques points particuliers sur l'implémentation de la méthode au niveau de l'intégration.

En ce qui concerne les frontières vide-matière, il a été défini une fonction d'enrichissement discontinue en déplacement pour les noeuds dont le support est coupé par celles-ci. Cette fonction prenait 1 comme valeur pour la partie matière et 0 pour la partie vide. Pour simplifier la résolution, la prise en compte de la frontière est en réalité effectuée lors de l'intégration. En effet, lorsqu'on rencontre un élément coupé par la frontière, un sous découpage est opéré séparant un triangle, par exemple, en plusieurs sous-triangles. Le dé-

coupage se fait par l'intermédiaire de la level set, comme il est présenté sur la figure 1.19, une arête est créée grâce aux deux points d'intersection et un certain nombre de sous-triangles en sont déduits. L'intégration n'est donc effective que pour les sous-triangles se trouvant dans le solide. Ce qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté déclarés lors de la résolution.

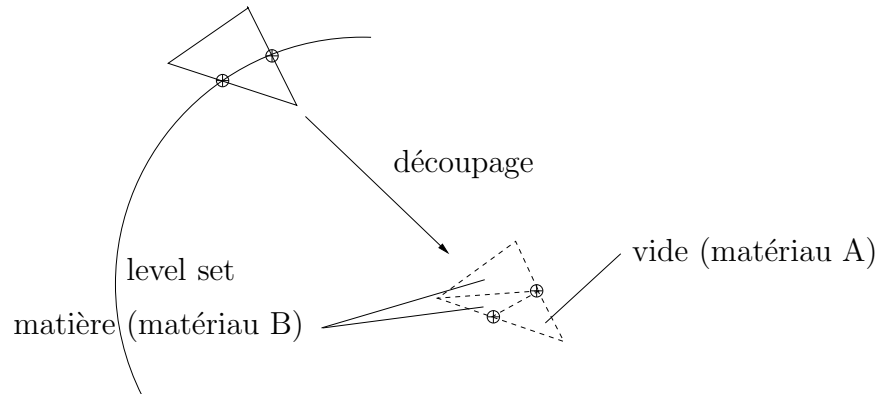


figure 1.19 – Principe de découpage.

Le même découpage est utilisé pour l'intégration pour les problèmes bi-matériaux. Les éléments sont découpés en sous-éléments et la loi de comportement adéquate (matériau A ou matériau B) est choisie pour l'intégration sur chacun des sous-éléments.

## 1.4.5 Conditions aux limites des problèmes d'homogénéisation

### 1.4.5.1 Conditions périodiques

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons évoqué les conditions périodiques au niveau des déplacements ; les noeuds se trouvant sur des faces ou côtés opposés prennent la même valeur de déplacement. Pour ce faire nous utilisons un maillage périodique. La figure 1.20 suivante montre un exemple de cellule de base en deux dimensions. Pour respecter ces conditions spécifiques, les valeurs des noeuds périodiques (noeuds situés symétriquement sur les faces opposées) sont liées. Le noeud K et le noeud L sont associés. La position de l'interface, dans ce cas, amène à enrichir le noeud K puisque son support (les éléments hachurés) est coupé par celle-ci. Le noeud L profite donc implicitement de cet enrichissement puisque la valeur associée à celui-ci sera identique à celle du noeud K et les conditions de périodicité à l'échelle du support sont donc respectées. Après avoir détaillé les différents aspects du principe d'homogénéisation périodique ainsi que la méthode des éléments finis étendus et la technique des fonctions de niveau, nous présentons dans la partie suivante quelques exemples numériques d'homogénéisation périodique afin de confronter les résultats obtenus avec ceux de la littérature. Les exemples traitent de matériaux composites

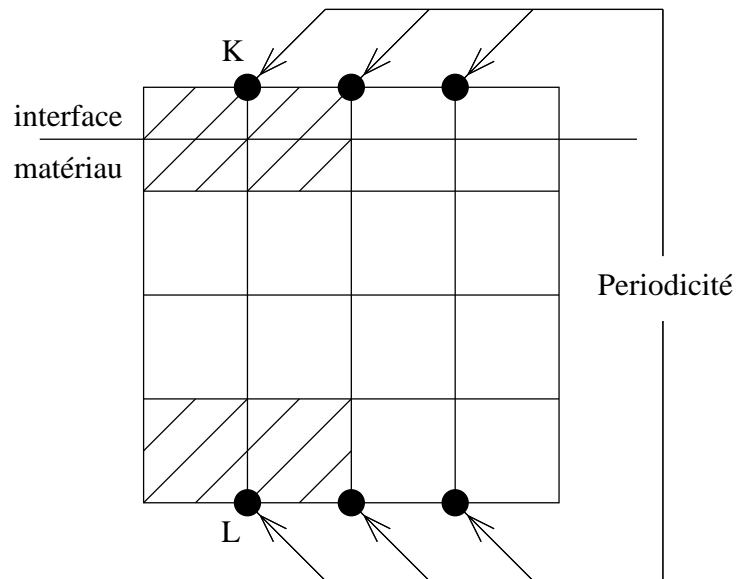


figure 1.20 – Support d’un noeud localisé sur un côté d’une cellule 2D

bicouches, de matériaux contenant une matrice et des fibres de directions orthogonales, de tissus ainsi que des matériaux contenant des inclusions à positions aléatoires.

#### 1.4.5.2 Conditions limites pour les domaines infinis

Lors de résolutions de problèmes d’homogénéisation, certains travaux emploient la théorie des modules effectifs ([22]). Dans ces types de problèmes, le milieu macroscopique est parfois considéré comme infini. Les auteurs utilisent alors des conditions aux limites infinies, donc loin des détails de la structure, afin de ne pas perturber la réponse de ceux-ci.

L’application présentée ici ne résout pas ce type de problèmes mais propose un développement sur des conditions aux limites à l’infini pouvant fournir un outil à la mise en oeuvre de telles conditions dans les méthodes citées précédemment.

Cette application concerne des problèmes à domaine infini incluant en son centre un détail. Il s’agit ici de trous ou de cavités sphériques soumis à une pression. L’effet du détail à l’infini est supposé sans effet sur le problème, c’est pourquoi nous imposons un déplacement nul à l’infini en utilisant un mapping spécifique [48] représenté figure 1.21. Ce mapping se compose de deux régions, une région centrale de rayon  $A$  utilisant un mapping lagrangien et une couronne de rayon intérieur  $A$  et de rayon extérieur  $B$  utilisant un mapping définissant une projection des coordonnées à l’infini.

L’équation suivante définit la relation entre les coordonnées d’un point du maillage et les

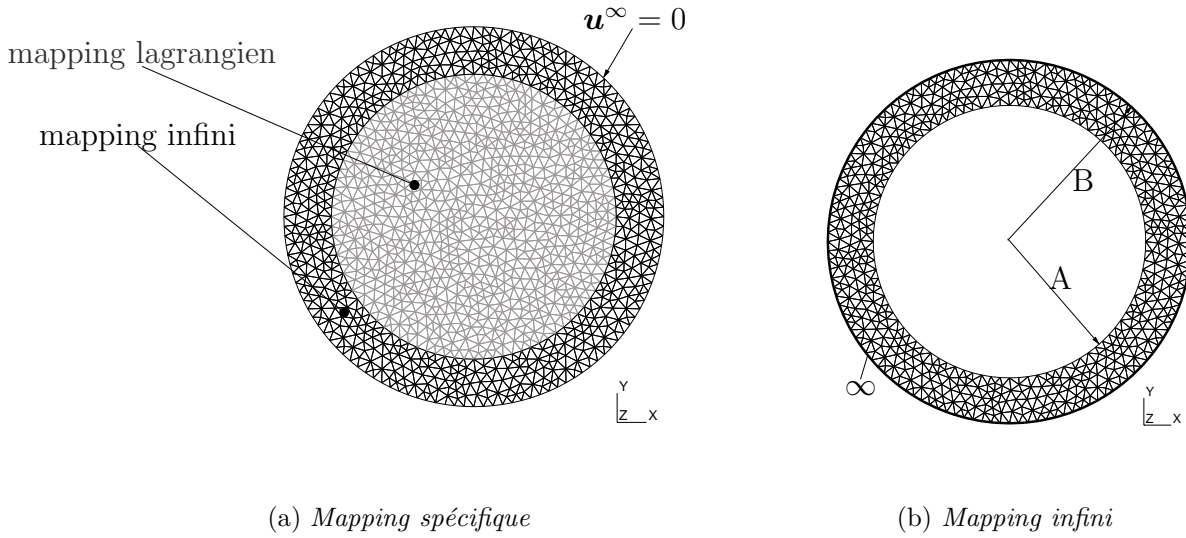


figure 1.21 – Définition du mapping infini

coordonnées réelles pour le mapping de la couronne.

$$\vec{x} = \vec{X} \frac{A(B-A)}{R(B-R)} \quad (1.33)$$

où  $\vec{X}$  représente les coordonnées d'un point d'un élément du maillage,  $\vec{x}$  les coordonnées projetées à l'infini et  $R$  la distance du point au centre de la couronne sur le maillage initial. En résumé, pour passer de l'élément parent à l'élément réel, nous effectuons deux transformations : une classique lagrangienne (de  $u,v,w$  vers  $X,Y,Z$ ) et la deuxième utilisant la relation définie précédemment (de  $X,Y,Z$  vers  $x,y,z$ ). Nous pouvons illustrer cette transformation par la définition de la jacobienne de passage (équation 1.34).

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial w} & \frac{\partial Y}{\partial w} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Y} \\ \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Nous tentons, à présent, d'étudier l'influence du mapping sur la convergence de l'erreur en énergie. Pour cela, nous souhaitons que la représentation des coordonnées réelles évolue, vers l'infini, de la même façon que le déplacement. Dans un premier temps, nous exprimons le déplacement en fonction des coordonnées réelles. Nous nous plaçons en une dimension et dans le cadre d'éléments isoparamétriques. Soient les expressions des coordonnées réelles,

sur le maillage, suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \beta \\ X = R \cos \beta \end{cases} \quad (1.35)$$

Si on se place en une dimension, il vient :

$$x = \left( \frac{A(B-A)}{B - \frac{X}{\cos \beta}} \right) \cos \beta = \frac{A(B-A)}{B-X} \quad (1.36)$$

La formulation de l'élément isoparamétrique s'écrit :

$$\begin{cases} U = U_1 \frac{1-\varphi}{2} + U_2 \frac{1+\varphi}{2} \\ X = X_1 \frac{1-\varphi}{2} + X_2 \frac{1+\varphi}{2} \end{cases} \quad (1.37)$$

d'où, il vient :

$$\varphi = \frac{X - \frac{X_1+X_2}{2}}{\frac{X_2-X_1}{2}} \quad (1.38)$$

Si un seul élément décrit le problème, alors  $U_2$  est équivalent à  $U^\infty$  soit 0 et  $X_2 = B$ . D'où, en réinjectant les expressions 1.36 et 1.38 dans la définition de U, il vient :

$$U = U_1 \frac{A(B-A)}{x(X_2 - X_1)} \quad (1.39)$$

Pour que la coordonnée réelle évolue de la même façon que le déplacement, l'expression du mapping devient :

$$\vec{x} = \vec{X} \left( \frac{A}{R} \right) \left( \frac{B-A}{B-R} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (1.40)$$

Avec  $\theta$  suivant l'ordre des déplacements, par exemple, si  $U$  tend vers  $1/r^2$  à l'infini alors  $\theta = 2$ . Nous évaluons l'influence du type de convergence du champ de déplacements ( $1/r$ ,  $1/r^2$ ) sur la formulation du mapping sur deux cas en deux et trois dimensions correspondant respectivement à une pression radiale unitaire dans un trou circulaire et dans une cavité sphérique contenue dans un domaine infini (figure 1.22).

Les résultats en terme de convergence de l'erreur en énergie par rapport à l'énergie exacte du problème sont représentés sur les figures 1.23 et 1.24

La convergence ( $\alpha$ ), pour les deux cas, est très proche de l'unité. Ce mapping permet donc, pour ce genre de problèmes, d'atteindre une convergence en  $O(h)$ . Pour le problème de la cavité, trois valeurs de  $\theta$  ont été utilisées. Il s'avère que le paramètre  $\theta$  a peu d'influence sur les résultats obtenus au niveau de la convergence.

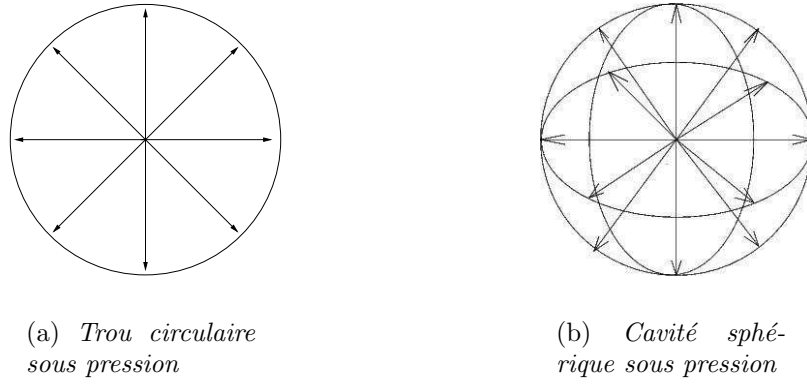


figure 1.22 – Cas tests pour solution avec mapping infini

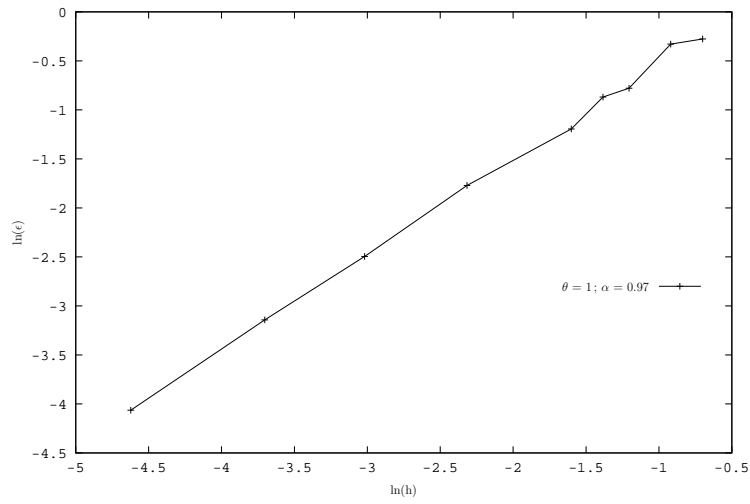


figure 1.23 – Trou circulaire sous pression

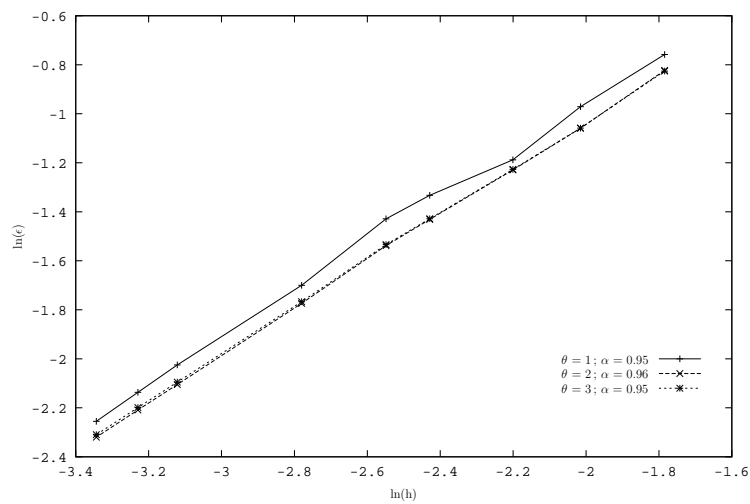


figure 1.24 – Cavité sphérique sous pression

## 1.5 Applications

### 1.5.1 Homogénéisation périodique

Les différents exemples d'homogénéisation présentés par la suite proviennent des travaux développés dans [42] et [9].

#### 1.5.1.1 Matériau bicouche

Le premier problème est une cellule de base cubique d'un matériau bicouche dont les caractéristiques mécaniques pour l'un des matériaux sont le module d'Young  $E = 10$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et pour le second  $E = 1$  MPa et  $\nu = 0.3$ . Le maillage utilisé pour ce cas est un maillage régulier de tétraèdres. La figure 1.25 présente les données du problème (position de l'interface et nature des noeuds) sur une face interne du maillage. La figure 1.26 présente la déformée due à une déformation macroscopique

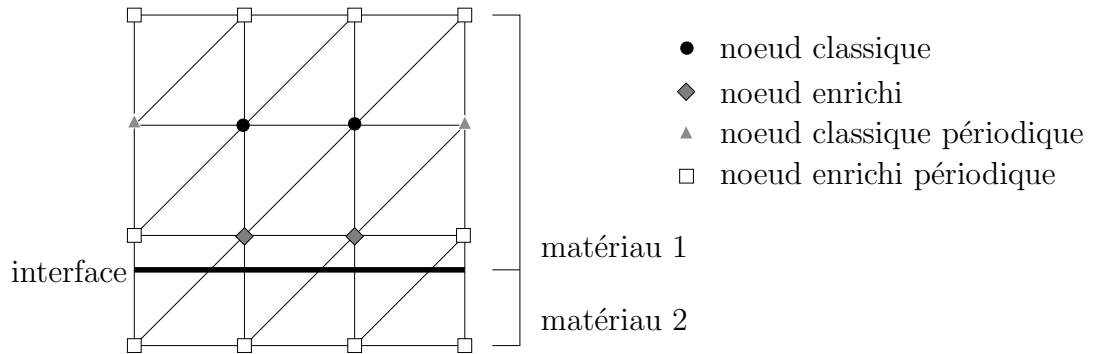


figure 1.25 – Plan interne du cube maillé

de cisaillement. Nous pouvons noter que la fonction d'enrichissement nous amène à une discontinuité des déformations au sein des éléments coupés par l'interface étant donné que la déformée est linéaire par morceaux dans ces éléments. Les résultats obtenus coïncident avec les valeurs analytiques données dans [14].

Chacun des exemples suivants traités avec X-FEM utilise le même maillage de tétraèdres présenté figure 1.27

#### 1.5.1.2 Matériaux à fibres tridirectionnelles

Cet exemple est issu des travaux développés dans [13] utilisant la méthode des éléments finis. Le volume élémentaire est décrit par la figure 1.28. Il s'agit d'un cube de 2 mm de côté contenant des fibres de diamètre 0.45 mm orientées selon trois directions orthogonales dont les surfaces sont représentées sur la figure 1.28 avec une fonction de niveau. La matrice époxy a pour module d'Young  $E_m = 3.5$  GPa, pour module de cisaillement  $G_m = 1.3$  GPa

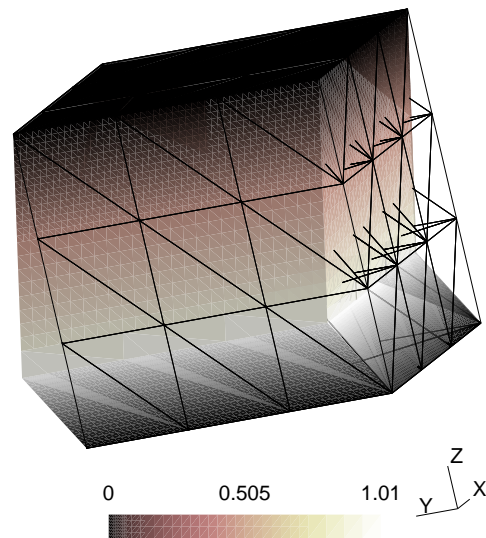


figure 1.26 – Mode de glissement  $yz$  obtenu pour une cellule à deux couches de matériaux

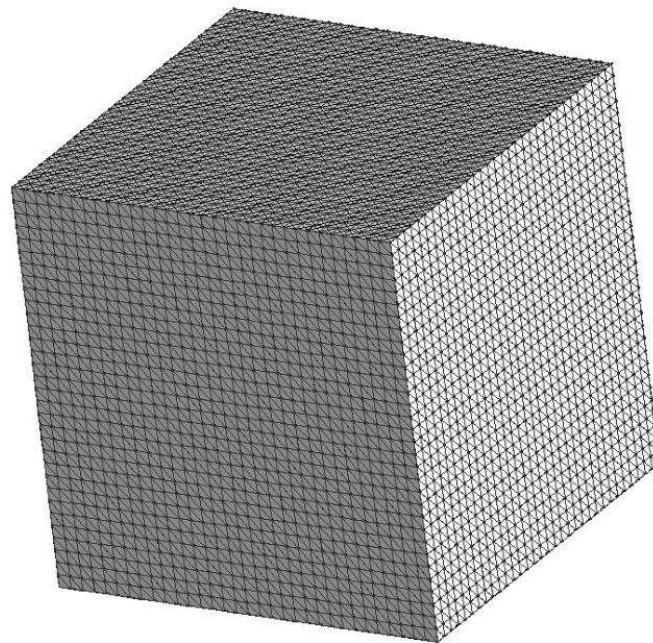


figure 1.27 – Maillage uniforme

et pour coefficient de Poisson  $\nu_m = 0.35$ . Les fibres sont des fibres de verre ayant pour module d'Young  $E_f = 72.0$  GPa, pour module de cisaillement  $G_f = 27.7$  GPa et pour coefficient de Poisson  $\nu_f = 0.30$ .

La figure 1.29(a) présente les résultats obtenus avec FEM ainsi que le maillage utilisé et la figure 1.29(b) ceux obtenus avec X-FEM. Les résultats des deux techniques sont



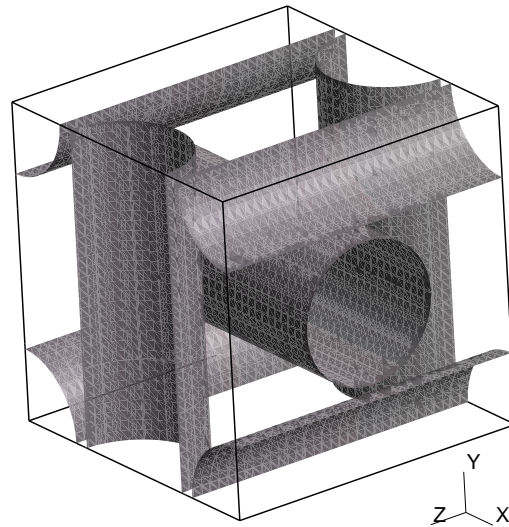


figure 1.28 – Exemple d'interface d'une cellule à fibres orthogonales

comparés sur les figures 1.29(a) et 1.29(b) pour un mode de déformation macroscopique en glissement. Ces figures montrent également, comme dans le cas du bicouche, une déformation microscopique discontinue aux interfaces. Il est à noter que le maillage utilisé avec X-FEM est plus fin mais il est uniforme alors que le celui utilisé dans [13] est optimisé. Enfin, les deux relations 1.41 et 1.42 suivantes définissent les matrices homogénéisées

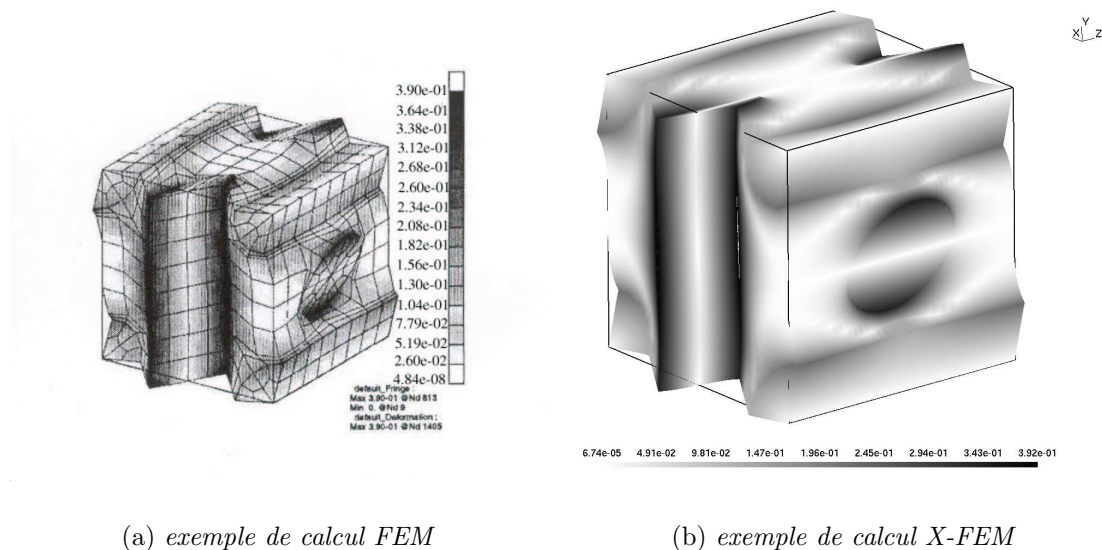


figure 1.29 – Mode de glissement  $xy$  obtenu pour une cellule de composite à fibres orthogonales

obtenues suivant respectivement FEM et X-FEM.

$$[\mathbf{a}_{ortho}^{hom}] = \begin{bmatrix} 21.1 & 5.3 & 5.3 & 0 & 0 & 0 \\ 5.3 & 21.1 & 5.3 & 0 & 0 & 0 \\ 5.3 & 5.3 & 21.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$[\mathbf{a}_{ortho}^{hom}] = \begin{bmatrix} 21.5 & 5.6 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6 & 21.5 & 5.6 & 0 & 0 & 0 \\ 5.6 & 5.6 & 21.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

### 1.5.1.3 Composite tissé

Cet exemple est basé sur l'étude développée dans [25] utilisant la méthode des éléments finis. Le volume élémentaire est décrit 1.31. Il s'agit d'un cube de 2 mm de côté représentant la cellule de base composé de deux plis d'un composite tissé. Il contient des fibres de Bore de diamètre 0.2 mm, dont l'axe décrit une fonction sinus, imprégnées par une matrice d'aluminium. Les interfaces fibre-matrice sont représentées avec une fonction de niveau sur la figure 1.31. Les propriétés des fibres sont :  $E_f = 400$  GPa,  $\nu_f = 0.3$  et celles de la matrice sont :  $E_m = 72$  GPa,  $\nu_m = 1/3$ .

Nous comparons par la suite nos résultats avec ceux issus de [25] dont la géométrie est définie par la figure 1.30 où la cellule de base ne contient qu'un seul pli.

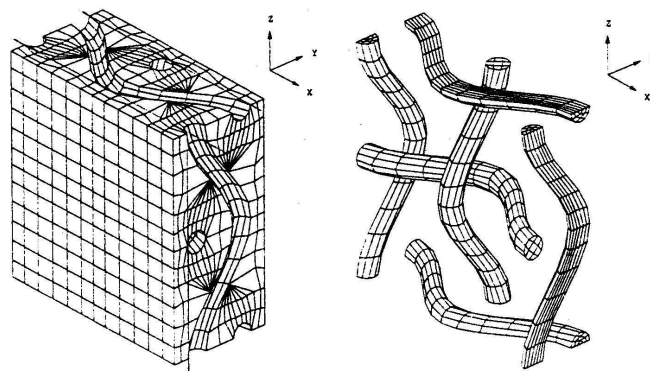


figure 1.30 – Exemple de maillage de composite tissé

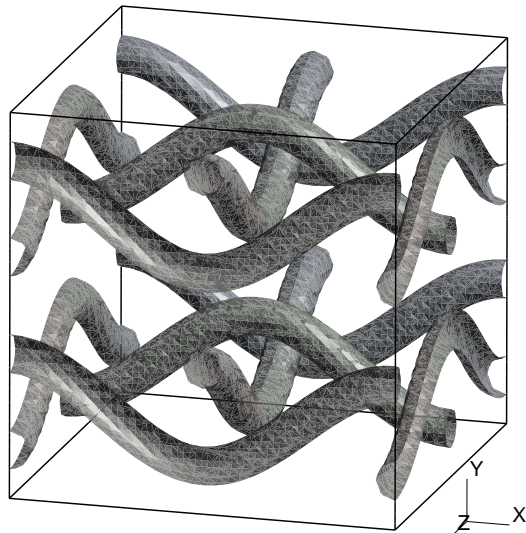


figure 1.31 – Exemple d'interface d'une cellule de composite tissé

La figure 1.32 présente les résultats obtenus au niveau des déplacements microscopiques avec X-FEM pour un mode de déformation macroscopique en glissement. Enfin, les deux

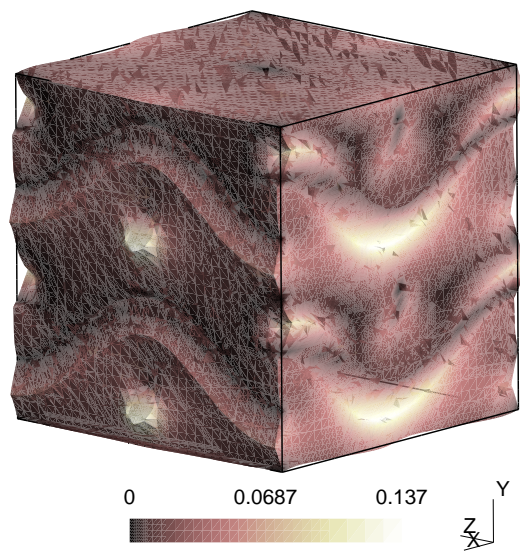


figure 1.32 – Mode de glissement  $xy$  obtenu pour une cellule de composite tissé

relations 1.43 et 1.44 suivantes définissent les matrices homogénéisées obtenues suivant

respectivement FEM et X-FEM.

$$[\mathbf{a}_{tiss}^{hom}] = \begin{bmatrix} 119.2 & 57.8 & 57.0 & 0 & 0 & 0 \\ 57.8 & 116.7 & 57.8 & 0 & 0 & 0 \\ 57.0 & 57.8 & 119.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.3 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$[\mathbf{a}_{tiss}^{hom}] = \begin{bmatrix} 121.2 & 58.2 & 57.4 & 0 & 0 & 0 \\ 58.2 & 117.9 & 58.3 & 0 & 0 & 0 \\ 57.4 & 58.3 & 121.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.6 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

#### 1.5.1.4 Matériau à inclusions sphériques

Le dernier exemple traite de matériaux contenant des inclusions. Cette application provient des travaux effectués dans [40]. Les positions des inclusions sphériques sont aléatoires, l'objectif étant d'obtenir un comportement homogénéisé moyen sur la cellule avec plusieurs définitions géométriques. En effet, dans [40], un certain nombre de tirages définissant le centre des sphères sont exécutés afin d'obtenir ce comportement moyen pour des nombres d'inclusions différents. L'approche X-FEM s'avère dans ce cas des plus avantageuses puisqu'un seul maillage est utilisé quel que soit le nombre de tirages réalisés (une nouvelle définition de la fonction de niveau est effectuée pour chaque cas). Comme nous avons pu voir dans la section 1.4.5.1, les conditions de périodicité sont d'emblée affectées au maillage et ne sont donc pas dépendantes du tirage aléatoire. Les positions des sphères sont définies par un algorithme aléatoire et lorsque une nouvelle sphère est intersectée par une sphère déjà présente, une nouvelle position du centre est définie; enfin, lorsque une sphère est coupée par une face du cube, son image périodique sur l'autre face est réalisée. Nous pouvons ajouter que cet exemple est tout à fait applicable à des cavités sphériques si l'enrichissement choisi est celui défini section 1.3.1.3.

Les figures 1.33 et 1.34 présentent quelques tirages pour des cellules contenant 8 et 32 sphères. Les propriétés des particules sont :  $E_p = 70$  GPa,  $\nu_p = 0.2$  et celles de la matrice ( $_m$ ) sont :  $E_m = 3$  GPa,  $\nu_m = 0.35$ . Le volume des sphères représente 26.78 % du volume total dans les deux cas. La figure 1.35 présente les résultats obtenus au niveau des déplacements microscopiques avec X-FEM pour un mode de déformation macroscopique en glissement pour une cellule à 8 et 32 sphères.

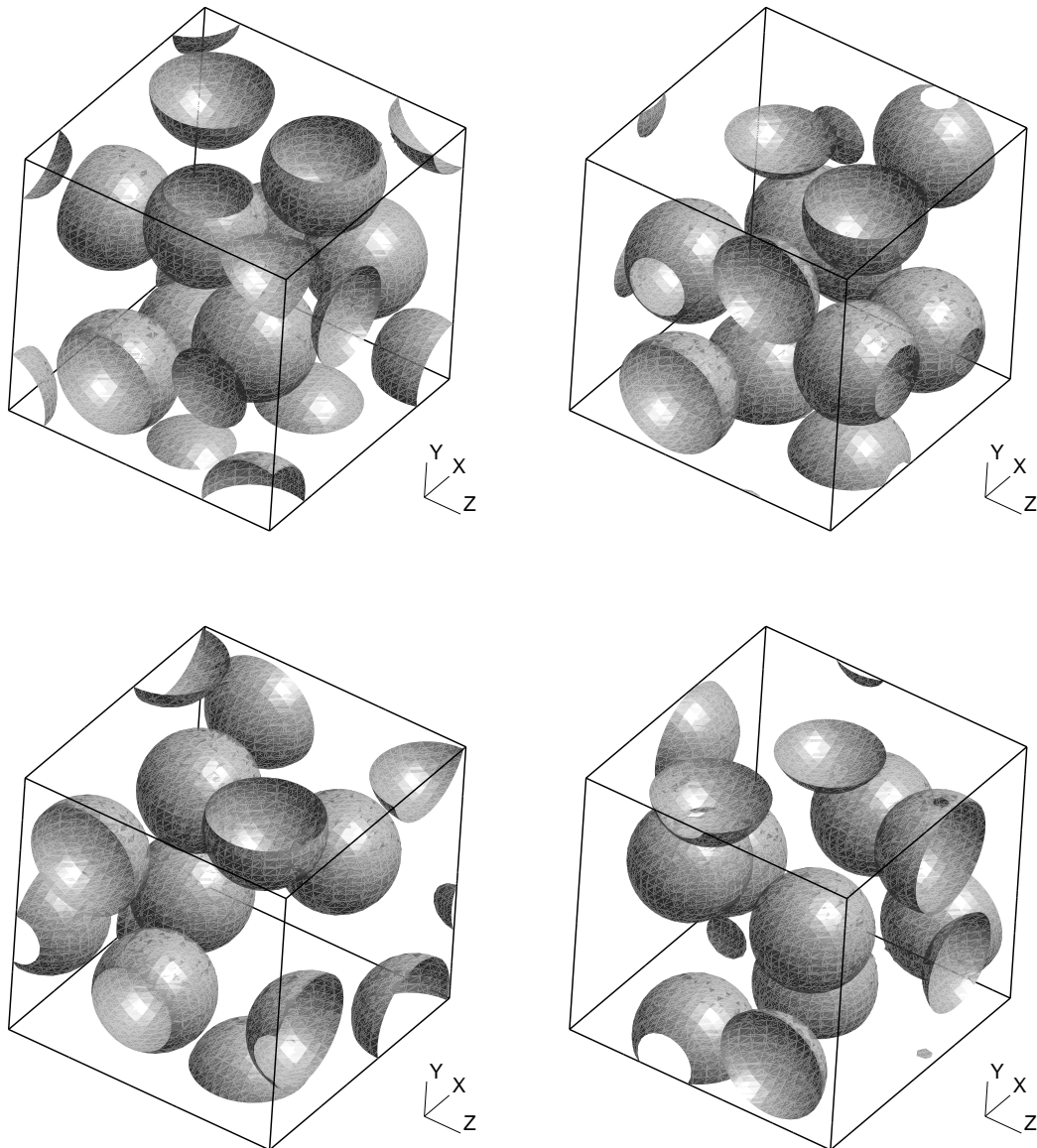


figure 1.33 – Exemples d’interfaces avec 8 particules.

La raideur homogénéisée obtenue suivant l’axe  $x$   $\mathbf{a}_{1111}^{hom}$  est 7.611 pour 8 sphères et 7.711 pour 32 sphères. Ces résultats sont proches de ceux obtenus dans [40] avec un grand nombre de tirages, puisqu’ils obtiennent pour 8 sphères 7.675, pour 64 sphères 7.664 et pour 420 sphères 7.667.

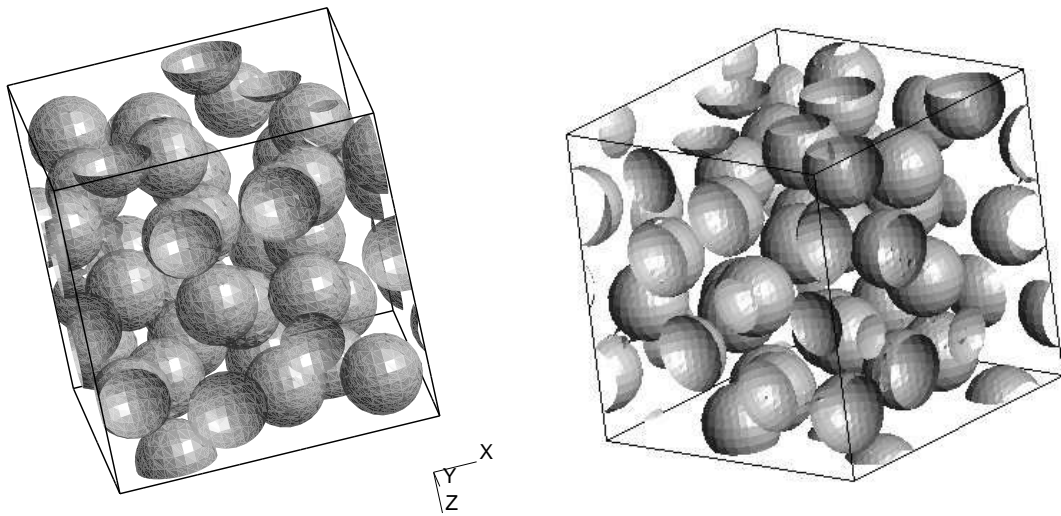
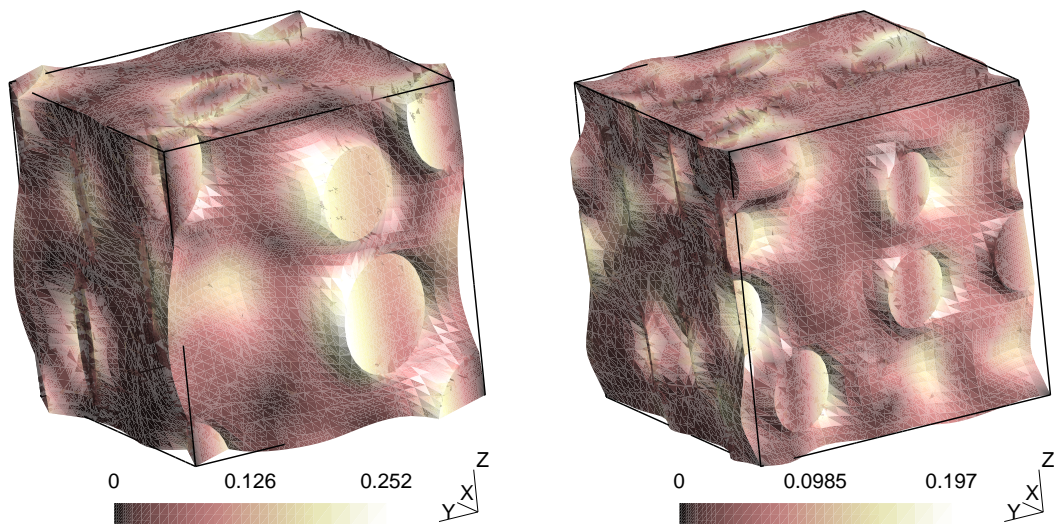


figure 1.34 – Exemples d’interfaces avec 32 particules.



(a) Mode de glissement  $xy$  obtenu pour une cellule à 8 sphères

(b) Mode de glissement  $xy$  obtenu pour une cellule à 32 sphères

figure 1.35 – Mode de glissement  $xy$  obtenu pour deux types cellules contenant des sphères.

## 1.5.2 Représentation de frontières complexes

### 1.5.2.1 Stratégie de raffinement

Nous avons pu voir, dans les sections précédentes, que les level sets servent à la sélection des noeuds lors des divers enrichissements et à la définition des fonctions d’enrichissement, mais par leur rôle de localisation, elles peuvent permettre aussi une description plus fine du maillage près des interfaces. En effet, même si la représentation de la géométrie est

implicite, l'évaluation des fonctions de niveau s'effectue par le biais des fonctions de forme sur le maillage et des erreurs d'approximation sont toujours présentes (comme dans le cas de la méthode des éléments finis) et par conséquent nous pouvons envisager une stratégie de raffinement locale afin de pallier ces difficultés développées dans [42].

Les critères de raffinement utilisés portent sur des considérations de type purement géométrique (erreur de discrétisation). L'objectif est de respecter le plus fidèlement possible la géométrie de l'interface. C'est pourquoi les critères retenus sont la courbure des éléments et la distance à la frontière en considérant que les contraintes sont respectées si les parties les plus courbes de la frontière sont idéalement représentées.

Le principe est de réduire la taille des éléments situés près des parties courbes de l'interface. Pour ce faire, le rayon de courbure de l'interface est comparé à la longueur caractéristique des éléments proches de celle-ci.

Dans un premier temps, nous calculons, au point de Gauss des éléments, le second gradient de l'interpolation de la fonction de niveau définissant le tenseur de courbure affecté à ceux-ci. Nous en déduisons ensuite, pour ces mêmes éléments, une moyenne des rayons de courbure principaux afin d'obtenir un rayon de courbure moyen.

Dans un deuxième temps, nous calculons la longueur caractéristique de ces éléments déduite de la relation 1.45 suivante :

$$l_c = (Vd!)^{1/d} \quad (1.45)$$

où  $V$  est le volume de l'élément et  $d$  la dimension du problème.

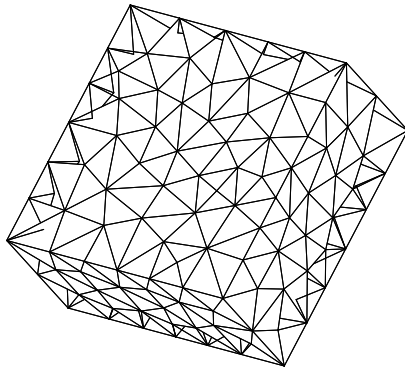
Enfin, nous affectons une valeur de longueur caractéristique ( $l_c$ ) et une valeur de rayon de courbure ( $\rho$ ) en chaque noeud, en effectuant une moyenne de ces valeurs détenues par les éléments formant leur support.

Nous réalisons alors un test, sur chaque noeud, pour savoir si une nouvelle taille d'élément doit lui être affectée. Une nouvelle taille est définie si :

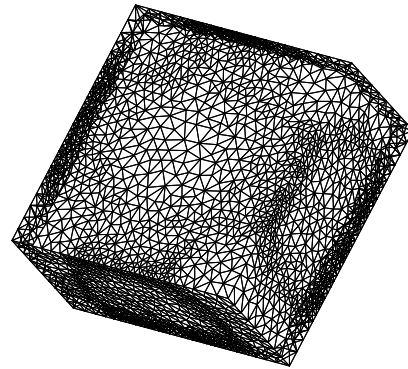
$$\begin{cases} l_c > \alpha\rho \\ |\psi| < \beta l_{tot} \end{cases} \quad (1.46)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres de raffinement,  $l_{tot}$  la longueur la plus grande entre deux noeuds du maillage et  $|\psi|$  la valeur absolue de la fonction de niveau au noeud. A partir de cette nouvelle taille d'élément par noeud, un maillage plus fin dans les zones concernées

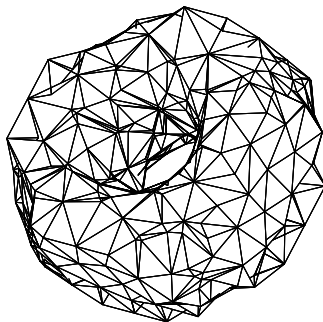
est réalisé.



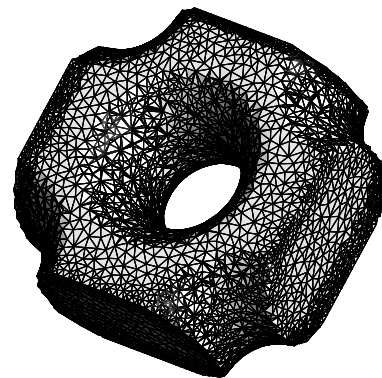
(a) *Maillage initial*



(b) *Maillage raffiné*



(c) *Représentation surfacique du maillage initial*



(d) *Représentation surfacique du maillage raffiné*

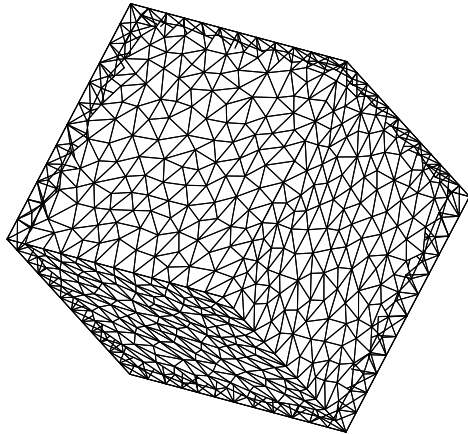
figure 1.36 – Exemple d'une cellule d'une grille d'appontage.

En pratique, le raffinement se déroule en plusieurs étapes. Les termes à comparer sont tout d'abord calculés sur un maillage initial grossier constitué d'éléments linéaires de taille homogène représenté sur la figure 1.36(a) où la géométrie concernée est une cellule de grille d'appontage de porte-avions pour hélicoptère. Pour les noeuds où les conditions de raffinement sont satisfaites, une nouvelle taille d'éléments est affectée. Après avoir effectué le test pour l'ensemble des noeuds, une nouvelle carte de taille est créée. Ensuite le mailleur utilisé, GMSH [53], crée, à partir de cette carte de taille, un nouveau maillage. Cette opération est répétée jusqu'à ce que, pour aucun noeud, les conditions de raffinement ne

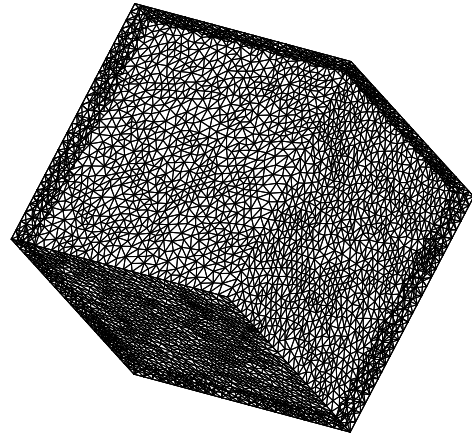


soient satisfaites. Le maillage final, pour cet exemple (figure 1.36(b)), a été obtenu pour  $\alpha = 0.1$  et  $\beta = 0.03$ . Les figures (1.36(c)) et (1.36(d)) décrivent un maillage surfacique représentant l'iso-zéro de la fonction de niveau pour le maillage initial et final.

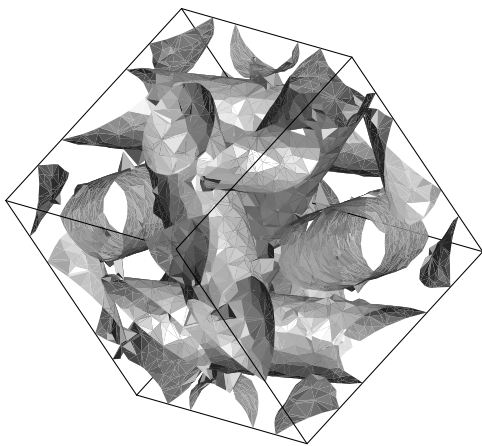
Les figures 1.37 suivantes représentent un autre exemple de raffinement. Il s'agit d'une cellule composite 4D, c'est à dire une cellule dont les fibres sont orientées suivant les 4 plus grandes diagonales d'un cube.



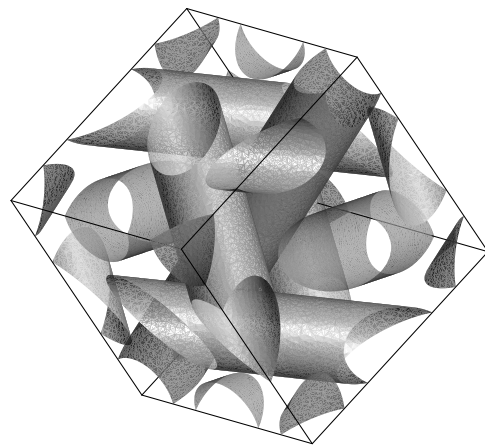
(a) *Maillage initial*



(b) *Maillage raffiné*



(c) *Représentation surfacique du maillage initial*



(d) *Représentation surfacique du maillage raffiné*

figure 1.37 – Exemple d'une cellule composite 4D.

### 1.5.2.2 Traction axiale sur un câble

Sur la figure 1.38, un câble métallique constitué d'une âme centrale cylindrique, entourée de 6 fils hélicoïdaux est décrit ainsi que la représentation de leur contour par une

fonction de niveau sur une période. Contrairement aux géométries usuelles décrites dans les problèmes d'homogénéisation périodique, la répétition spatiale n'a lieu que dans une seule direction. L'âme et les fils hélicoïdaux ont une section circulaire de rayon  $R_c = 2.675$  mm et  $R_w = 2.59$  mm respectivement. L'angle d'enroulement est de  $8.18^\circ$ , ce qui correspond à une longueur de période de 230 mm. Enfin, les caractéristiques sont celles d'un acier de module d'Young de 200 GPa avec un coefficient de Poisson de 0.3. Le maillage utilisé correspond à un parallélépipède dont un côté a la longueur de la période, les deux autres étant égaux, avec la section du câble comprise dans ce carré. Le maillage est réalisé avec des éléments tétraédriques uniformément répartis.

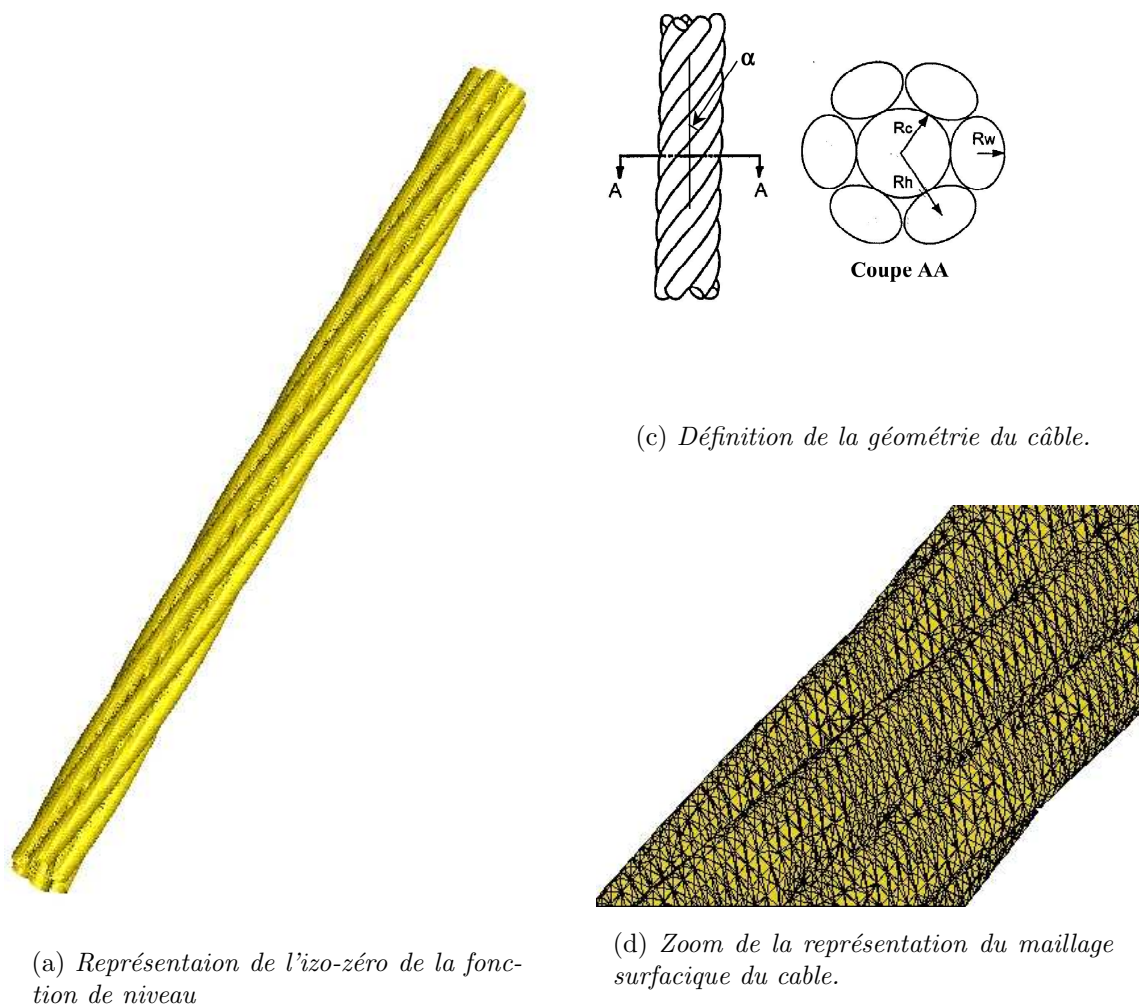


figure 1.38 – Définition de la géométrie et représentation de la surface du câble.

Cet exemple illustre la résolution de problèmes à géométrie complexe ([9]). Il ne s'agit pas ici, réellement, d'homogénéisation périodique, le câble est soumis à un effort axial uniformément réparti sur une des sections extrêmes de sa période tandis que son opposée est encasté. De plus, la rotation axiale est aussi bloquée sur cette dernière section mais le contour latéral est laissé libre. Le but est de connaître le comportement général du câble.

Une étude de sensibilité effectuée par ailleurs dans [47] a montré que les hypothèses sur le contact âme-fils ont une influence négligeable sur le comportement global du câble en chargement axial. C'est pourquoi, par soucis de simplicité, le contact est supposé collant, c'est-à-dire avec un déplacement continu à l'interface âme-fils.

Les isovaleurs du déplacement axial du câble en traction, sur la frontière, sont présentées figure 1.39. D'autre part, la raideur axiale calculée avec la méthode présentée ici,

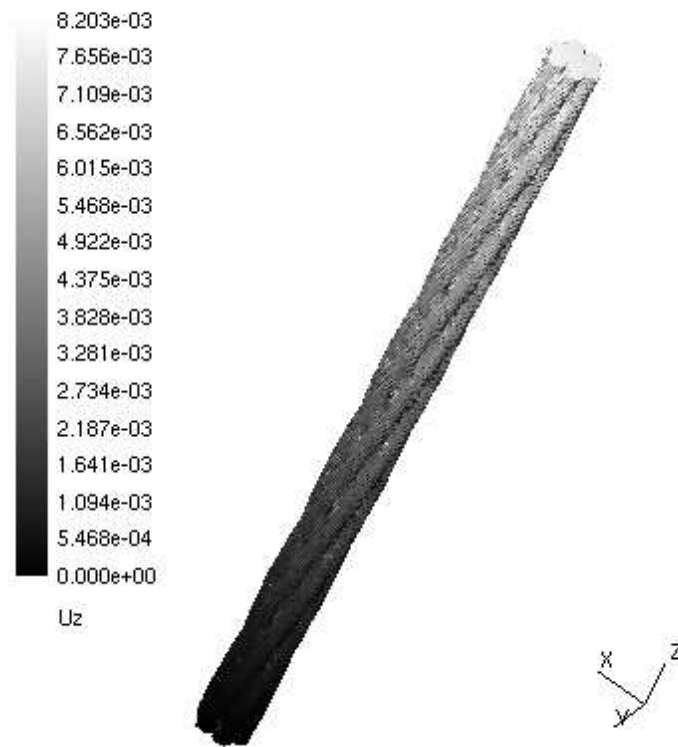


figure 1.39 – Déplacements axiaux du câble.

pour différents maillages, est comparée dans le tableau 1.2 à celle obtenue à l'aide d'une approche éléments finis où l'âme et les fils sont modélisés par des poutres [47]. Les caractéristiques 4x4x58, 8x8x115 et 10x10x230 représentent le nombre d'arêtes obtenues par côté lors du maillage du parallélépipède permettant la représentation du câble. On vérifie la convergence des résultats vers la valeur de référence.

Caractéristiques du calcul	4x4x58	8x8x115	10x10x230	ref[Nawrocki]
Raideur axiale ( $10^8 N$ )	0.200	0.259	0.280	0.292

tableau 1.2 – Raideur axiale du câble

## Conclusion

Ces diverses applications ont permis de mettre en évidence l'efficacité de la méthode X-FEM en ce qui concerne les problèmes d'homogénéisation périodique ou à conditions aux limites infinies pour les domaines contenant des vides. Nous avons vu, dans un premier temps, que l'approche présentée permet une représentation réaliste du saut de déformation au sein d'un élément. La dernière fonction d'enrichissement présentée procure des résultats similaires à ceux obtenus avec la méthode des éléments finis classique en terme de convergence dans le sens où l'erreur en énergie diminue linéairement en fonction de la taille du maillage. Liée à l'utilisation de fonctions de niveau, elle a de plus démontré certains avantages dans le cas de réalisation de géométries complexes des interfaces matériaux par sa simplicité d'usage et dans la possibilité qu'elle puisse être dotée d'une stratégie de raffinement géométrique local. Le fait de ne plus être contraint de faire coïncider les interfaces matériaux avec le maillage, grâce à l'emploi de la partition de l'unité, procure une mise en oeuvre aisée des problèmes d'homogénéisation. Le dernier cas d'homogénéisation périodique aléatoire présenté est l'exemple qui profite le plus de tous ces intérêts. Un seul maillage est utilisé alors que l'emploi de la méthode des éléments finis induit une nouvelle construction du maillage à chaque distribution des particules, qui peut être difficile à réaliser.

Il est à noter cependant, que les fonctions level set sont déterminées analytiquement et qu'une perspective possible dans ce cadre, afin de permettre une prise en compte encore plus aisée des géométries, serait de fournir un moyen de transcrire des fichiers *CAD* en level set automatiquement. Enfin, nous nous sommes intéressés à des problèmes bi-matériau, mais il serait envisageable d'étudier des structures plus complexes en y introduisant plus de deux types de matériaux.



---

# 2

## Analyse multi-échelle d'une structure contenant un détail

<b>2.1</b>	<b>Description de la méthode</b>	<b>58</b>
2.1.1	Contexte	58
2.1.2	Approche à deux échelles	59
<b>2.2</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>62</b>
2.2.1	Problème de référence	62
2.2.2	Problème discret à deux échelles	62
<b>2.3</b>	<b>Mise en oeuvre</b>	<b>67</b>
2.3.1	Motivations	67
2.3.2	Démarche	67
2.3.3	Applications	70
2.3.4	Influence du domaine local	77
	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>

Ce chapitre concerne la résolution de problèmes multi-échelles où nous tentons d'évaluer l'influence de l'introduction d'un détail au sein d'une structure. Il se déroule en trois parties.

En premier lieu, nous définissons le contexte industriel dans lequel nous nous plaçons en décrivant les problèmes usuels rencontrés et présentons brièvement les différents points de la méthode employée. Puis, après avoir défini la nature du problème de référence, nous détaillons l'approche discrète à deux échelles. Enfin, dans une dernière partie, nous introduisons la mise en oeuvre de l'approche X-FEM et de la technique des fonctions de niveau pour la résolution du problème microscopique et illustrons la méthode sur différents types d'exemples.

## 2.1 Description de la méthode

### 2.1.1 Contexte

De plus en plus, les structures dont le comportement est étudié par le biais de méthodes numériques peuvent atteindre des dimensions très importantes alors qu'elles contiennent de nombreux détails. Les problèmes à traiter deviennent alors des plus complexes si l'on désire respecter scrupuleusement la géométrie de ces détails.

Dans une grande majorité des cas, afin de réduire les coûts de calcul, il est d'usage de simplifier le problème. (au niveau de la géométrie ou du matériau par exemple). En effet, si on prend l'exemple d'un navire de croisière de taille conséquente, il ne paraît pas concevable, avec les moyens numériques actuels, de prendre en compte tous ses détails (ouvertures, raidisseurs) car le maillage engendré pour permettre l'étude comporterait alors un nombre d'éléments trop important. Dans certains cas extrêmes, les détails ne peuvent être représentés au sein du maillage de la structure. Par conséquent, on néglige l'effet des détails ou ceux-ci sont pris en compte de façon simplifiée (homogénéisation).

Il peut alors s'avérer, après une première étude simplifiée, que les résultats manquent de précision. Pour remédier à ces problèmes, différentes méthodes peuvent être employées telles que des approches de type globale-locale ou des méthodes de résolution utilisant un maillage global avec une zone raffinée autour du détail par exemple.

Dans certains cas, il peut s'avérer qu'une fissure ou un défaut soient repérés au sein d'une structure de grande taille. Le problème a déjà été traité avec un maillage de précision satisfaisante mais sans tenir compte de ces apparitions. On cherche alors à étudier l'influence de ce détail tout en gardant le même maillage pour la structure.

Comme la s-Méthode et la méthode Arlequin, par exemple, l'approche que nous proposons apporte une correction au problème de la structure, tenant compte de ces détails, pour affiner la solution globale. Elle permet ainsi d'étudier le comportement du détail puis d'en répercuter l'effet local sur la structure. Ce type d'approche fait apparaître deux échelles : microscopique (l'échelle du détail) et macroscopique (l'échelle de la structure). La résolution du problème du détail a pour but d'apporter une information permettant ensuite de perturber le problème global aux alentours du détail.

Le type de détails peut être de nature géométrique ou matériau. C'est-à-dire des structures contenant des défauts (cavités par exemple), des congés de raccordement, des rainures, ...etc ou alors contenant des inclusions. L'étude des problèmes impliquant des fissures peut aussi être envisagée. Ainsi, on cherche à savoir, lors de l'apparition d'une fissure, si la structure est encore capable de supporter les contraintes initiales.

Le domaine d'applications semble, d'emblée, assez vaste et touche des secteurs d'activité tels que l'aéronautique ou l'industrie automobile. A présent, nous décrivons, dans les grandes lignes, l'approche à deux échelles proposée.

### 2.1.2 Approche à deux échelles

Afin d'établir le contexte dans lequel se situe notre approche et les contraintes impliquées par celui-ci, nous pouvons prendre l'exemple d'une étude industrielle menée sur une aile d'avion. Une première équipe est chargée d'étudier le comportement de l'aile sans les détails (des fissures par exemple) en utilisant un maillage à l'échelle de celle-ci. Une deuxième équipe doit alors permettre de corriger la solution obtenue par la première équipe par une étude menée à une échelle plus petite sur un maillage tenant compte des détails sans modifier le maillage défini pour représenter la géométrie de l'aile.

L'objectif de la méthode est donc de résoudre le problème sur la structure sur un maillage grossier, construit indépendamment du détail. L'influence de celui-ci est étudiée sur un sous-maillage plus fin par l'approche X-FEM. La première étape est donc de séparer le problème en deux études se déroulant à des échelles différentes : une pour le détail et une pour la structure. L'objectif de la première étude, le problème du détail, est d'obtenir des solutions élémentaires traduisant une réponse du détail lorsqu'il est soumis à une sollicitation macroscopique c'est à dire provenant du problème de la structure. Ensuite ces solutions sont utilisées afin de perturber la structure pour obtenir une solution globale.

La méthode peut être définie par les phases suivantes :



- Définition du problème structurel ;
- Introduction du détail et définition de la zone locale ;
- Définition du maillage microscopique ;
- Prise en compte des solutions microscopiques dans les éléments macroscopiques de la zone locale ;
- Substitution des matrices homogénéisées ;
- Résolution du problème structurel ;
- Post-traitement.

En premier lieu, le problème de la structure est défini sur un maillage grossier (de taille  $H$ ) avec les conditions aux limites appropriées (cf. figure 2.1(a)). La zone locale à analyser est ensuite définie en fonction de la position du détail décrit par une fonction de niveau (dont l'iso-zéro est repéré sur la figure 2.1(b)). Une fois la zone locale définie par l'utilisateur par un ensemble d'éléments macroscopiques, nous récupérons la zone du maillage macroscopique concernée et un sous-maillage microscopique plus raffiné, imbriqué dans les éléments du premier maillage, est défini (cf. figure 2.1(c)).

Ensuite, la solution microscopique est calculée en appliquant une sollicitation macroscopique au maillage microscopique. Pour ce faire, les degrés de liberté des noeuds macroscopiques prennent successivement une valeur unité alors que les autres restent nuls. Pour chaque nouveau degré de liberté activé, un problème microscopique est résolu pour obtenir le champ de déplacements solution. Cela correspond à définir une réponse du détail à chaque cas de chargement macroscopique induit par l'activation d'un degré de liberté macroscopique, on parlera par la suite de **modes macroscopiques**.

Pour traiter cette analyse du détail, l'approche X-FEM est utilisée. Elle permet d'éviter de mailler des détails de forme géométrique complexe, de prendre en compte plusieurs détails sur le même maillage et de pouvoir faire varier facilement la géométrie du détail (lorsque le détail est une fissure qui se propage par exemple). En effet, avec X-FEM, les surfaces physiques n'ont pas besoin d'être maillées. La géométrie des détails est décrite grâce à l'utilisation des fonctions de niveau (ou Level Set).

Après avoir résolu les différents problèmes microscopiques, les champs solutions permettent de définir les matrices homogénéisées qui vont se substituer aux matrices de raideur des éléments macroscopiques de la zone locale. Le problème global est ensuite résolu grâce aux nouvelles matrices de raideurs homogénéisées.

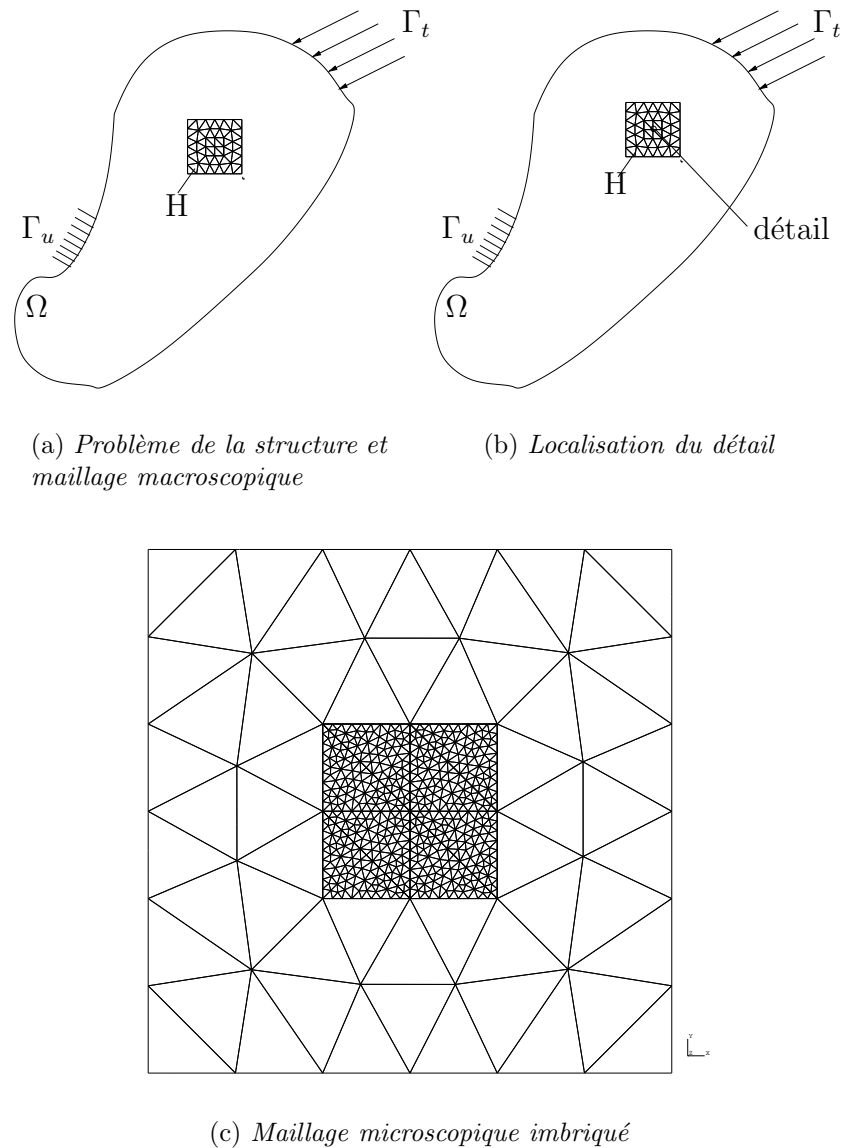


figure 2.1 – Les différentes étapes de la procédure d’analyse à deux échelles.

Enfin, un post-traitement est effectué pour visualiser les champs macroscopiques initiaux sur tout le domaine, les champs microscopiques de la zone locale, et les champs totaux autour du détail.

Notons que l’approche que nous proposons rejoint la *s*-Méthode, tout en traitant la redondance (c.f. section 2.2) et tout en utilisant l’approche X-FEM à l’échelle locale. Par rapport à la méthode Arlequin, elle apporte des simplifications pratiques. En contre-partie, son spectre d’applications est plus réduit que celui d’Arlequin.

Après avoir défini le contexte dans lequel nous nous situons, le type de problèmes visés par notre approche et son principe général, nous décrivons à présent la formulation du problème ainsi que la mise en équations de l’approche à deux échelles.

## 2.2 Formulation du problème

### 2.2.1 Problème de référence

Le problème de base est un problème d'élasticité linéaire dont les caractéristiques sont décrites sur la figure 2.2 où les données cinématiques, statiques et loi de comportement sont définies par les relations 2.1, 2.2 et 2.3 ci-après.

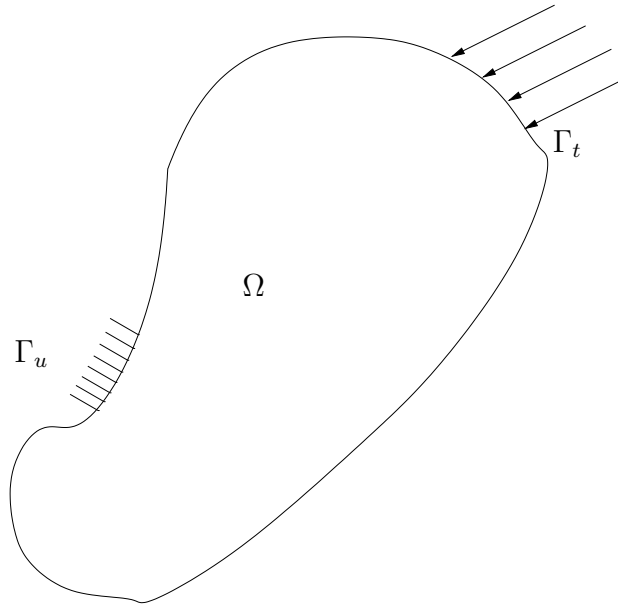


figure 2.2 – Problème de référence

cinématique

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \end{cases} \quad (2.1)$$

statique

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma_t \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{sur } \Omega \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Problème discret à deux échelles

Tout d'abord, nous définissons l'espace éléments finis global  $V^{H,h}(\Omega)$  tel que :

$$V^{H,h}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \text{ tel que } \mathbf{v} \in V^H(\Omega \setminus \omega) \text{ sur } \Omega \setminus \omega \\ \mathbf{v} \text{ tel que } \mathbf{v} \in V^h(\omega) \text{ sur } \omega \\ \text{et } \mathbf{v} \text{ continu au passage de } \partial\omega \end{array} \right\}$$

où  $V^h(\omega)$  sur  $\omega$  (zone d'étude locale du détail définie sur le maillage de taille  $h$ ) est l'espace éléments finis à l'échelle microscopique et  $V^H(\Omega \setminus \omega)$  (domaine défini sur le maillage de taille  $H$ ) l'espace éléments finis à l'échelle macroscopique. Le maillage de taille  $h$  est emboîté dans le maillage de taille  $H$  (cf. figure 2.3). Afin d'assurer la continuité des déplacements globaux définis par la somme du champ microscopique et du champ macroscopique, le champ de déplacements microscopique apportant une correction au problème de la structure, est fixé à zéro sur la frontière entre les deux domaines, c'est à dire sur le bord du maillage microscopique décrivant la zone locale à analyser.

Le problème variationnel s'écrit : chercher  $\mathbf{u}^{H,h} \in V^{H,h}(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{H,h}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in V^{H,h}(\Omega) \quad (2.4)$$

Pour la résolution de ce problème discret, nous considérons un problème à deux échelles. La solution ( $\mathbf{u}^{H,h}$ ), définie sur  $\Omega$ , est recherchée sous la forme d'un champ macroscopique ( $\mathbf{u}^H$ ), défini sur  $\Omega$ , corrigé par un champ micro ( $\mathbf{u}^{h,\perp}$ ) défini sur  $\omega$ . Une autre condition est donc nécessaire à l'intérieur du domaine microscopique. En effet, dans cette zone, les deux champs de déplacements sont présents. Pour éviter une dépendance linéaire entre ces deux champs, nous introduisons des multiplicateurs de lagrange qui vont permettre d'établir une condition d'orthogonalité entre eux.

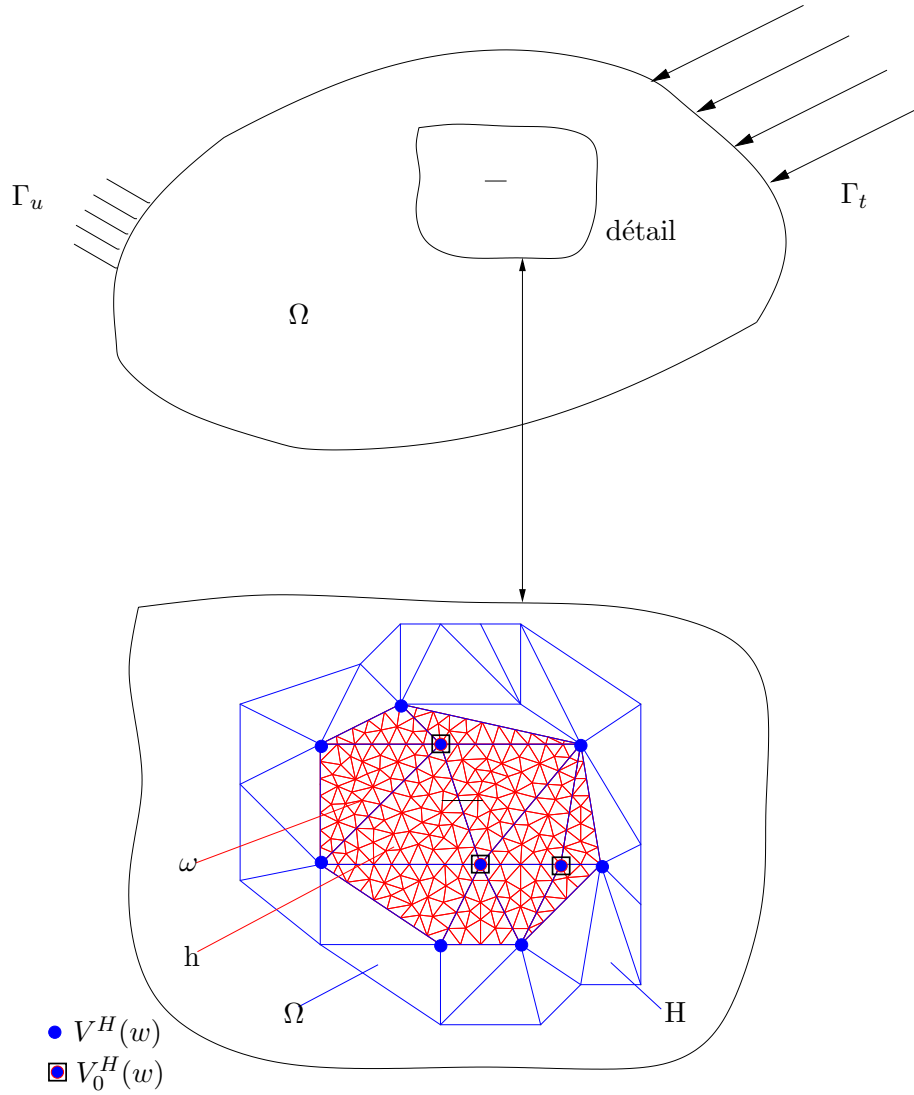
$$\mathbf{u}^{H,h} = \mathbf{u}^H + \mathbf{u}^{h,\perp} \text{ avec } \mathbf{u}^H \in V^H(\Omega), \quad \mathbf{u}^{h,\perp} \in V_0^{h,\perp}(\omega) \quad (2.5)$$

avec :

$$V_0^h(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in V^h(\omega) \\ \text{et } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

$$V_0^{h,\perp}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in V_0^h(\omega) \\ \text{et } \int_{\omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda}^H \, d\omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\lambda}^H \in V_0^H(\omega) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

$$V_0^H(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in V^H(\omega) \\ \text{et } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\omega \end{array} \right\} \quad (2.8)$$



$\omega$  : zone locale                       $h$  : taille du maillage fin  
 $\Omega$  : domaine global                     $H$  : taille du maillage grossier

figure 2.3 – Le problème à deux échelles

De même, on décompose les fonctions tests :  $\mathbf{v}^{H,h} = \mathbf{v}^H + \mathbf{v}^{h,\perp}$  et le problème de référence (2.4) peut se réécrire : chercher  $\mathbf{u}^H \in V^H(\Omega)$  et  $\mathbf{u}^{h,\perp} \in V_0^{h,\perp}(\omega)$  tel que :

$$\begin{cases} a_\Omega(\mathbf{u}^H + \mathbf{u}^{h,\perp}, \mathbf{v}^H + \mathbf{v}^{h,\perp}) = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}^H + \mathbf{v}^{h,\perp}) \, ds \\ \forall \mathbf{v}^H \in V^H(\omega) \text{ et } \forall \mathbf{v}^{h,\perp} \in V_0^{h,\perp}(\omega) \\ a_\Omega(u, v) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

ou en relâchant, a priori, la condition d'orthogonalité : chercher  $\mathbf{u}^H \in V^H(\Omega)$  et  $\mathbf{u}^h \in V_0^h(\omega)$  tel que :

$$\begin{cases} a_\Omega(\mathbf{u}^H + \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^H + \mathbf{v}^h) - \int_\omega \boldsymbol{\lambda}^H \cdot \mathbf{v}^h \, d\omega = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}^H + \mathbf{v}^h) \, ds \\ - \int_\omega \mathbf{u}^h \cdot \boldsymbol{\mu}^H \, d\omega = 0 \\ \forall \mathbf{v}^H \in V^H(\omega), \forall \mathbf{v}^h \in V_0^h(\omega) \text{ et } \forall \boldsymbol{\mu}^H \in V_0^H(\omega) \end{cases} \quad (2.10)$$

Les multiplicateurs utilisés permettent d'imposer une condition d'orthogonalité entre les deux champs afin d'éviter une relation de dépendance linéaire entre eux. En séparant, plus avant, l'échelle fine et grossière, le problème revient à chercher  $\mathbf{u}^H \in V^H(\Omega)$ ,  $\mathbf{u}^h \in V_0^h(\omega)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^H \in V_0^H(\omega)$  tel que :

$$\begin{cases} a_\Omega(\mathbf{u}^H + \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^H) = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^H \, ds \quad \forall \mathbf{v}^H \in V^H(\Omega) \\ a_\Omega(\mathbf{u}^H + \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - \int_\omega \boldsymbol{\lambda}^H \cdot \mathbf{v}^h \, d\omega = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^h = 0 \, ds \quad \forall \mathbf{v}^h \in V_0^h(\omega) \\ - \int_\omega \mathbf{u}^h \cdot \boldsymbol{\mu}^H \, d\omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu}^H \in V_0^H(\omega) \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous considérons, dans les cas suivants étudiés, qu'aucune condition macroscopique en déplacement et qu'aucun chargement macroscopique ne sont imposés au niveau de la zone d'étude locale. D'autre part, la zone d'étude locale n'est pas intersectée par les frontières macroscopiques (correspondant à l'étude de l'influence de congés, rainures). Ce type de problèmes pourra faire l'objet d'études ultérieures. C'est pourquoi,  $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^h = 0$  car on considère qu'aucun effort global n'est imposé dans la zone microscopique. L'étude concerne des cas où la surface  $\Gamma$  est extérieure à la zone d'étude locale.

Le système matriciel qui se déduit de cette formulation équivaut à :

$$\begin{bmatrix} K^{HH} & K^{Hh} & 0 \\ K^{hH} & K^{hh} & -C^{hH} \\ 0 & -C^{Hh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^H \\ u^h \\ \lambda^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

où  $K^{HH}$  représente la matrice de rigidité sur le maillage de taille  $H$  ;  $K^{Hh}$ ,  $K^{hH}$  les matrices de rigidité de couplage entre les degrés de liberté liés aux déplacements microscopiques et macroscopiques et  $C^{Hh}$ ,  $C^{hH}$  les matrices de couplage induites par les multiplicateurs de lagrange entre les deux domaines.

Ce système se résout en deux temps. Nous cherchons d'abord une relation permettant d'exprimer  $u^h$  et  $\lambda^H$  en fonction de  $u^H$ . Pour cela nous nous intéressons plus particulière-

ment aux deux dernières relations de l'équation (2.11) qui sont exprimées par le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} K^{hh} & -C^{hH} \\ -C^{Hh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h \\ \lambda^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^{hH} u^H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Ce système nous permet d'éliminer  $u^h$  et  $\lambda^H$  du problème global en considérant, pour celui-ci, que  $u^H$  est un paramètre. En effet, nous rappelons que l'objectif est d'obtenir des solutions élémentaires lorsqu'on impose un chargement dû au problème de la structure en activant les modes macroscopiques. Le problème total peut être décrit par une décomposition en différents problèmes, comme dans le cas de l'homogénéisation périodique, mis à part le fait que les déformations appliquées au domaine microscopique ne sont pas des états de déformations élémentaires mais des déformations induites par l'activation de modes aux noeuds macroscopiques. L'approche X-FEM est employée pour la résolution de ces problèmes microscopiques.

Nous pouvons prendre l'exemple d'une zone locale à étudier comprenant trois noeuds macroscopiques pour un problème à deux dimensions. Six modes macroscopiques sont alors pris en considération et le champ  $u^H$  se décompose en champs élémentaires :  $U_1 = (1,0,0,0,0,0)$ ,  $U_2 = (0,1,0,0,0,0)$ , ...,  $U_6 = (0,0,0,0,0,1)$ .

La série de systèmes suivante définit le problème à résoudre dans ce cas.

$$\begin{bmatrix} K^{hh} & -C^{hH} \\ -C^{Hh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^{hH} U_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K^{hh} & -C^{hH} \\ -C^{Hh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^{hH} U_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

...

$$\begin{bmatrix} K^{hh} & -C^{hH} \\ -C^{Hh} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K^{hH} U_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution de ces divers systèmes nous permet d'en déduire la relation liant  $u^h$  à  $u^H$  :

$$\begin{bmatrix} u^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{hH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^H \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Enfin, de manière générale, le problème macroscopique (2.11.1) est résolu avec le système suivant :

$$\left[ K^{HH} + K^{Hh} P^{hH} \right] \left[ u^H \right] = \left[ F^H \right] \quad (2.15)$$

## 2.3 Mise en oeuvre

### 2.3.1 Motivations

La mise en équation du problème à deux échelles donne deux problèmes à résoudre. Dans un premier temps, nous cherchons à évaluer l'influence du détail. Pour se faire, nous employons X-FEM couplée à la technique des fonctions de niveaux. L'attrait de cette méthode, dans ce cadre, correspond, tout d'abord, à celui du premier chapitre. Cela nous permet d'appréhender des formes complexes sans que les discontinuités induites ne doivent suivre les éléments du maillage. Un intérêt supplémentaire apparaît cependant. Il s'agit de la possibilité d'introduire des fissures. En effet, le détail à prendre en compte peut prendre la forme de trous, cavités, inclusions mais aussi de fissures. X-FEM rend possible le fait que celles-ci puissent se propager, tout en restant dans la zone locale sélectionnée, sans avoir besoin de remailler.

Il est donc possible de prendre en compte l'effet de ces détails sur une structure sans mailler finement l'ensemble du domaine. Le maillage macroscopique reste inchangé. Seules les raideurs des éléments du maillage macroscopique de la zone locale sont modifiées.

De plus, l'approche X-FEM rend possible l'activation de modes là où l'utilisation de la méthode des éléments finis ne le permet pas (dans le cas de trou par exemple) sans modification du maillage macroscopique. Par conséquent, il n'y a pas de degrés de liberté macroscopiques ajoutés.

### 2.3.2 Démarche

#### 2.3.2.1 Déroulement

Une fois la zone locale déterminée par l'utilisateur et les maillages microscopique et macroscopique créés, trois champs d'interpolations sont déclarés. Deux champs d'inconnues,  $\lambda^H$  et  $u^H$ , sont définis à l'échelle de la structure et un,  $u^h$ , à l'échelle microscopique. Le dernier profite de l'enrichissement apporté par X-FEM. Les conditions aux limites, sur ceux-ci, sont définies sur chaque maillage et les efforts extérieurs sont appliqués sur le maillage macroscopique. Le système à résoudre est ensuite défini par la création et l'assemblage des différentes matrices simples et de couplage, et le passage des données du



chargement dans le second membre. Le système résolu, un post-traitement est effectué.

### 2.3.2.2 Construction des matrices de couplage

Le système global à résoudre contient plusieurs types de matrices. Elles concernent des couples d'inconnues de nature et d'échelles différentes. Il existe, d'une part, les matrices  $K^{hh}$  et  $K^{HH}$  représentant les matrices de rigidité à l'échelle microscopique et macroscopique assemblées de manière classique, et d'autre part les matrices de couplage. Elles concernent des couplages d'échelles. Les premières  $K^{Hh}$  et  $K^{hH}$ , sont des matrices assurant le couplage des différents déplacements et les suivantes  $C^{Hh}$  et  $C^{hH}$ , des matrices reliant les multiplicateurs à une échelle aux déplacements à l'autre échelle définissant la condition d'orthogonalité entre ces deux échelles. Les deux types de matrices représentent des matrices rectangulaires liant les inconnues macroscopiques aux inconnues microscopiques.

Par conséquent, l'intégration liée à ces matrices de couplages induit une stratégie particulière. Nous considérons une stratégie spécifique pour l'intégration qui concernent des éléments finis triangulaires. Les termes de ces matrices proviennent d'une intégration dont le point de départ se situe au niveau des éléments du maillage microscopique. Pour les créer, une boucle est effectuée, au niveau de l'implémentation, sur les éléments de la zone locale. Pour l'intégration, deux coordonnées réelles sont nécessaires : celles des éléments du maillage microscopique et celles du maillage initial de la structure. Préalablement à cette intégration, une information est définie entre les éléments des deux échelles. Grâce aux coordonnées des éléments du maillage de la structure, un algorithme de localisation nous permet de savoir quel est l'élément macroscopique qui contient l'élément du maillage fin sur lequel nous itérons. Le maillage microscopique étant imbriqué dans le maillage macroscopique, les coordonnées du centroïde de l'élément microscopique permet de savoir au sein de quel élément macroscopique il se trouve. Par ce biais, les deux éléments sont liés. Ainsi, chaque élément microscopique de la zone locale connaît l'élément macroscopique qui le contient. Les deux couples de coordonnées nécessaires sont déduites de l'association entre les éléments et permettent le calcul des termes de couplage des matrices.

### 2.3.2.3 Conditions aux limites

Une des problématiques des approches multi-échelles réside dans le choix des conditions aux limites, et en particulier, celles qui sont censées lier les deux échelles. Dans l'approche présentée, nous utilisons des multiplicateurs de Lagrange définissant une condition d'orthogonalité entre les champs de déplacements microscopique et macroscopique afin d'éviter qu'ils ne s'opposent. De plus, pour assurer une continuité du champ de déplace-

ments solution, les déplacements microscopiques à la frontière de la zone locale sont fixés à zéro en considérant le fait qu'au delà de la zone du détail, celui-ci n'a pas d'influence sur la structure. Ceci implique de définir correctement la taille de la zone d'étude locale.

La figure 2.4 montre un exemple de calcul d'une plaque contenant un trou et ses deux maillages où les conditions aux limites particulières sont précisées avec les conditions aux limites usuelles. Le champ  $\mathbf{u}^h$  et celui des multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}^H$  sont fixés nuls sur  $\partial\omega$ . En effet, les multiplicateurs sont déclarés sur toute la zone locale mais, du fait de leur mise à zéro sur le bord, ne sont actifs que sur  $\omega \setminus \partial\omega$ . Cet exemple expose un des intérêts décrits préalablement étant donné qu'un mode macroscopique est effectif même à l'intérieur d'un trou puisque  $\mathbf{u}^H$  est défini pour le noeud du maillage macroscopique se situant au centre du trou. Dans cet exemple, 18 modes sont activés.

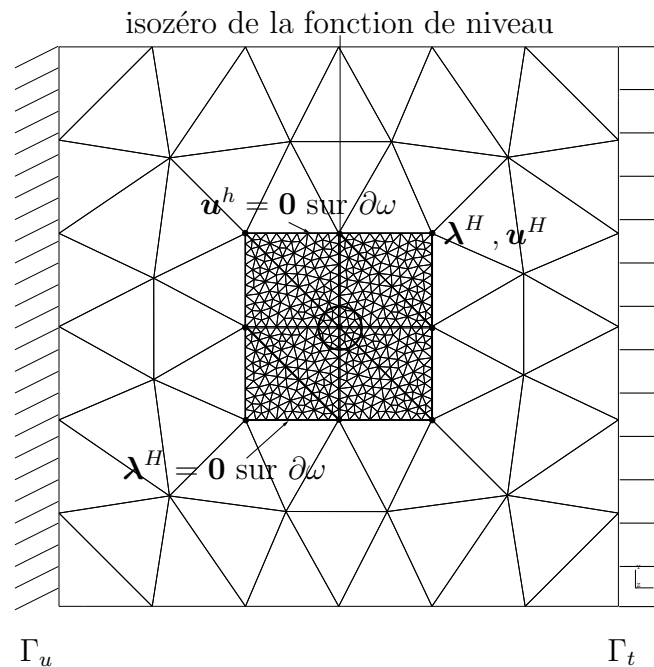


figure 2.4 – Exemple d'une plaque contenant un trou sous tension.

Après avoir détaillé le contexte dans lequel se place l'approche à deux échelles, sa formulation ainsi que les diverses spécificités engendrées, nous présentons dans la partie suivante quelques exemples numériques afin d'évaluer les résultats obtenus avec notre méthode. Les exemples traitent de problèmes à deux dimensions déjà étudiés dans la première partie du mémoire ainsi que le traitement d'une plaque contenant une fissure.

### 2.3.3 Applications

#### 2.3.3.1 Plaque percée sous tension

Nous reprenons dans cet exemple le cas traité d'une plaque percée sous tension dans la section 1.4.1.3.1 du premier chapitre concernant l'homogénéisation périodique avec les propriétés suivantes : rayon  $r = 0.125$  mm, module d'Young  $E = 10$  MPa et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

La figure 2.5 détaille les maillages macroscopique et microscopique utilisés pour cet exemple. Le maillage macroscopique est un carré de côté  $L = 3$  mm et la zone microscopique est inscrite dans un cercle de diamètre  $D = 1$  mm. 18 modes macroscopiques sont activés.

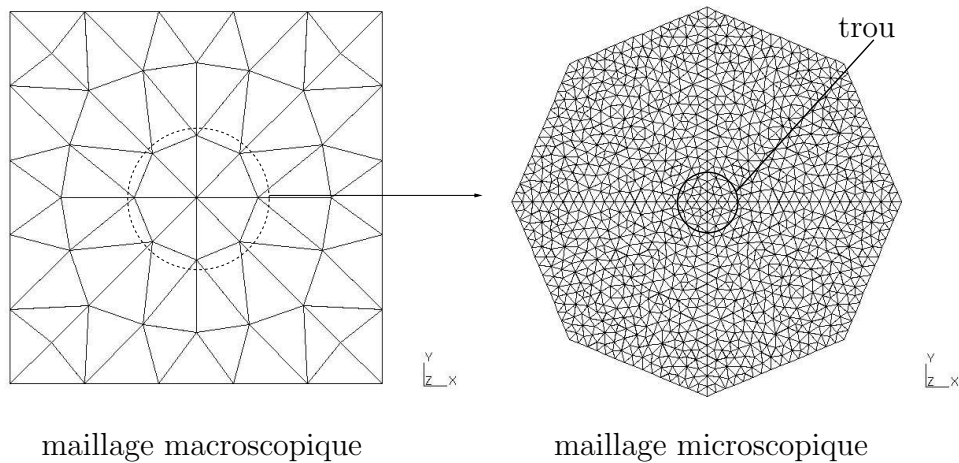


figure 2.5 – Maillages utilisés pour le cas de la plaque percée sous tension.

La figure 2.6 présente la déformée microscopique, apportée par l'analyse locale.

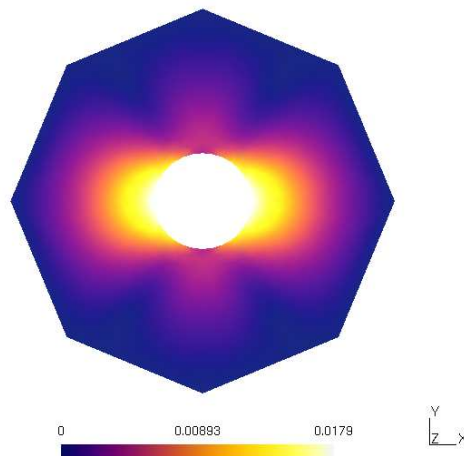
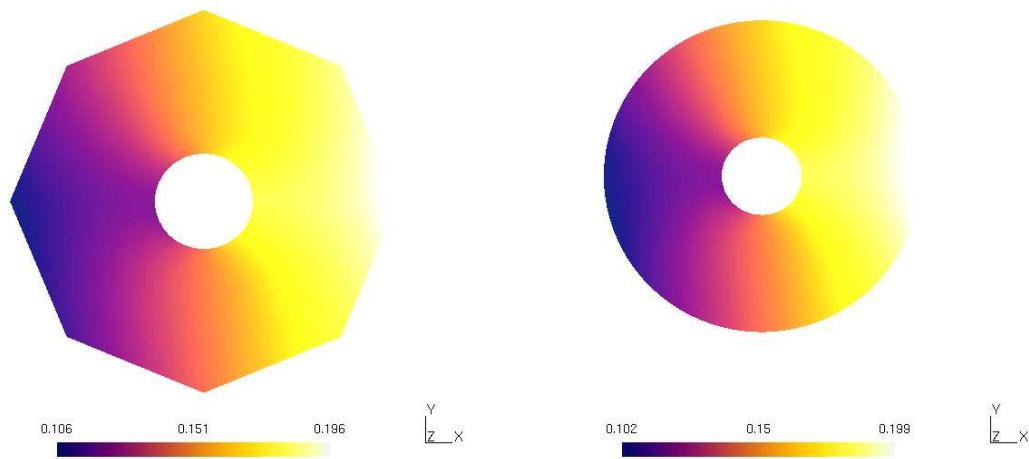


figure 2.6 – Déplacement microscopique

Afin d'évaluer la solution obtenue avec l'approche à deux échelles, nous la comparons à deux solutions différentes. La première est la solution analytique du problème. La seconde est la résolution du cas de calcul sur un maillage fin avec une approche classique à une échelle. La méthode employée est l'approche X-FEM mais utilisée sur un maillage global macroscopique dont la taille des éléments est équivalente à celle du maillage microscopique de l'approche à deux échelles. Pour la suite, nous attribuons le qualificatif *fine* à cette résolution.

Nous représentons, figure 2.7, la déformée totale sur la zone d'analyse locale que nous comparons à la solution *fine* sur cette même zone.



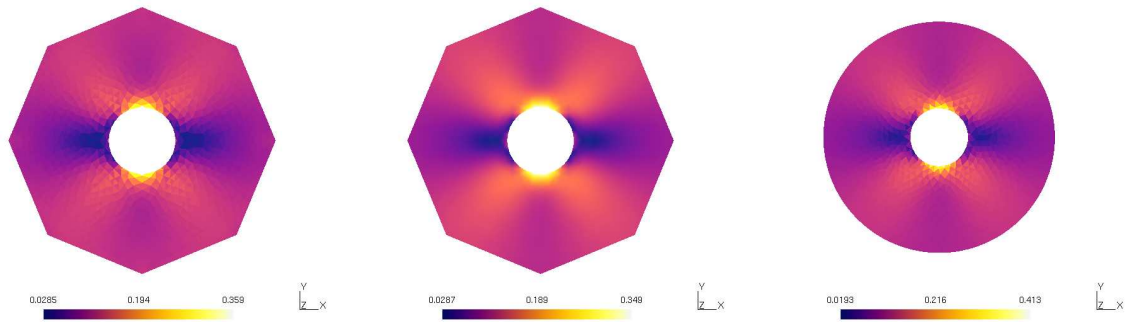
(a) Déformée obtenue avec l'approche à deux échelles.

(b) Déformée obtenue avec un maillage fin.

figure 2.7 – Déplacement total

Nous comparons nos résultats, en terme de déformations au niveau de la zone locale, d'une part, par rapport à la solution analytique et d'autre part par rapport à la solution *fine* (figure 2.8). L'erreur en norme d'énergie, sur ce problème par rapport à la solution analytique sur le maillage présenté précédemment est de 9,61 %.

La figure 2.9 expose enfin la répartition de l'erreur commise par rapport à la solution exacte. Comme dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'erreur semble être concentrée autour du bord du trou.



(a) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) obtenues avec l'approche à deux échelles.

(b) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) exactes.

(c) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) obtenues avec un maillage fin.

figure 2.8 – Comparaison des déformations

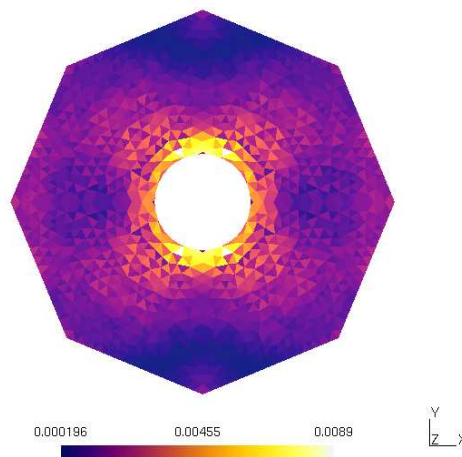


figure 2.9 – Répartition de l'erreur

### 2.3.3.2 Plaque sous tension contenant une inclusion circulaire

Nous reprenons dans cet exemple le cas traité d'une plaque contenant une inclusion sous tension dans la section 1.4.1.3.3 du premier chapitre concernant l'homogénéisation périodique avec un rayon pour l'inclusion de 0.125 mm.

La figure 2.10 détaille les maillages macroscopique et microscopique utilisés pour cet exemple. Le maillage macroscopique est un carré de côté  $L = 15$  mm et la zone microscopique est inscrite dans un cercle de diamètre  $D = 2$  mm. 18 modes macroscopiques sont activés.

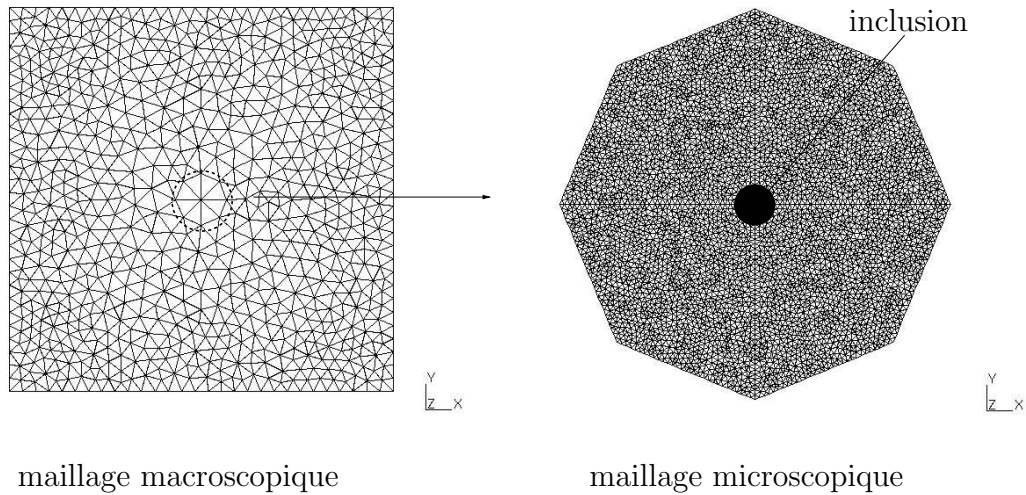


figure 2.10 – Maillages utilisés pour le cas de la plaque sous tension contenant une inclusion.

La figure 2.11 décrit la déformée microscopique, déduite de l'analyse locale, due au déplacement imposé sur le domaine macroscopique.

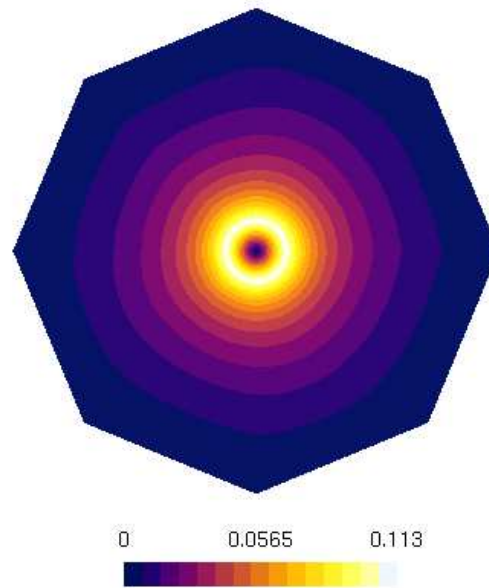
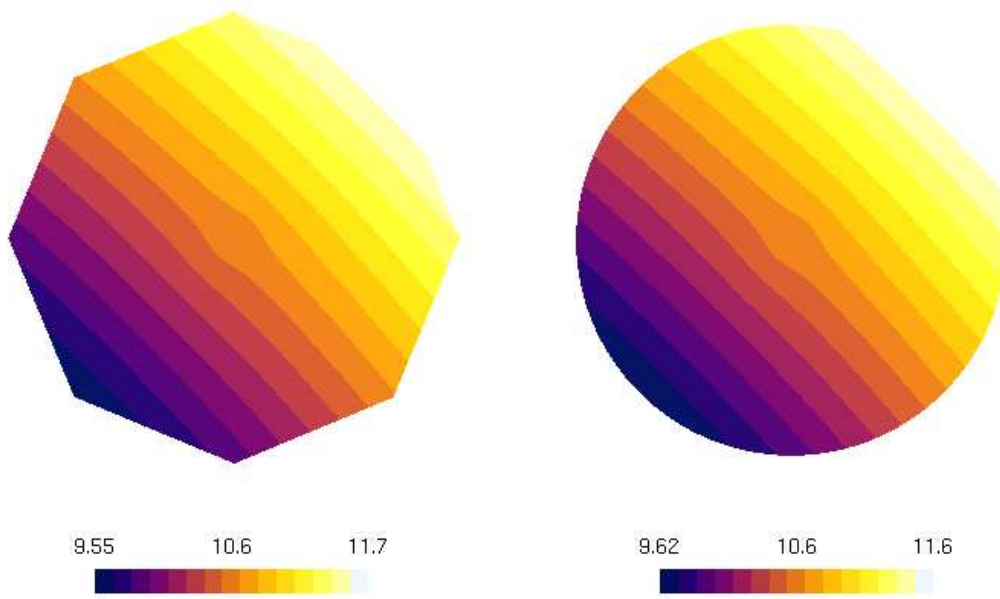


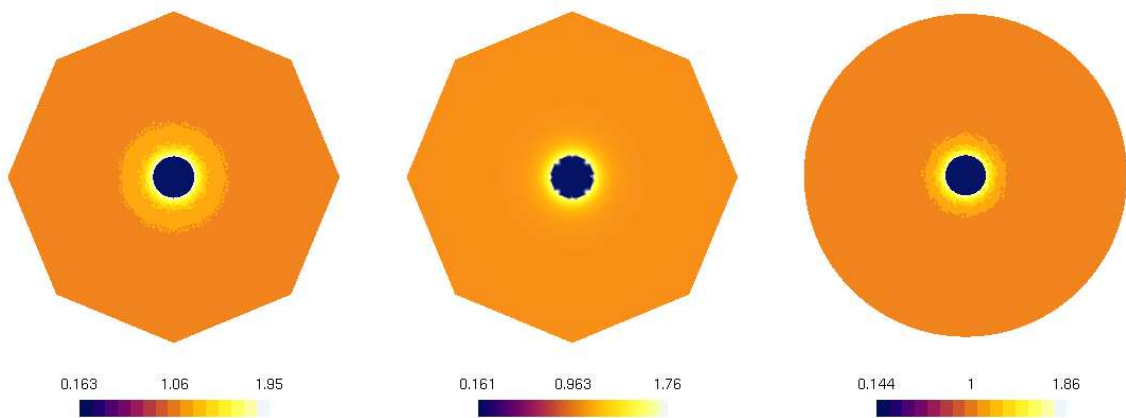
figure 2.11 – Déplacement microscopique

Enfin, concernant les déplacements, nous représentons, figure 2.12, la déformée totale sur la zone d'analyse locale que nous comparons à celle obtenue avec la résolution *fine*. Nous comparons nos résultats, en terme de déformations au niveau de la zone locale, d'une part, par rapport à la solution analytique et d'autre part par rapport à la solution *fine* (figure 2.13). L'erreur en norme d'énergie, sur ce problème par rapport à la solution analytique sur le maillage présenté précédemment est de 9.26 %.



(a) Déformée obtenue avec l'approche à deux échelles. (b) Déformée obtenue avec un maillage fin.

figure 2.12 – Déplacement total



(a) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) obtenues avec l'approche à deux échelles. (b) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) exactes. (c) Déformations ( $\varepsilon^{eq}$ ) obtenues avec un maillage fin.

figure 2.13 – Comparaison des déformations

La figure 2.14 expose enfin la répartition de l'erreur commise par rapport à la solution exacte. L'erreur est plus disparate que dans le cas du trou mais les erreurs les plus grandes se situent près de l'interface matériau.

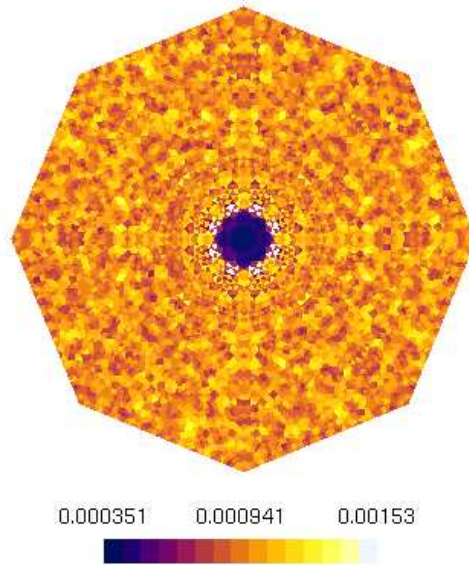


figure 2.14 – Répartition de l'erreur

### 2.3.3.3 Plaque fissurée sous tension

Le problème, que nous considérons à présent, est une plaque de côté  $L$  contenant une fissure de longueur  $0.4$  mm soumise à une traction uniaxiale uniforme. Les caractéristiques du problème sont  $E = 10$  MPa,  $\nu = 0.3$  et  $L = 2$  mm (cf. figure 2.15). Les domaines macroscopique et microscopique sont respectivement notés  $\Omega$  et  $\omega$ .

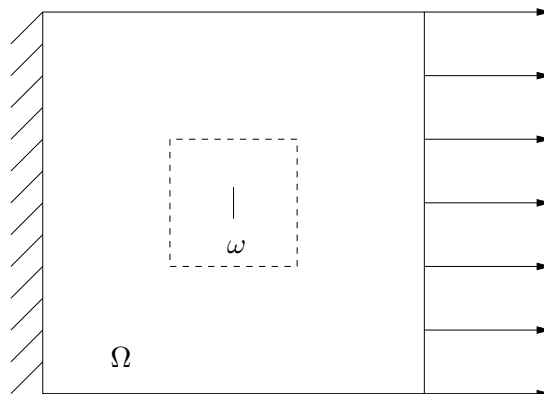


figure 2.15 – Plaque fissurée sous traction uniaxiale

La figure 2.16 présente la déformée microscopique, déduite de l'analyse locale, due à la traction imposée sur le domaine macroscopique.



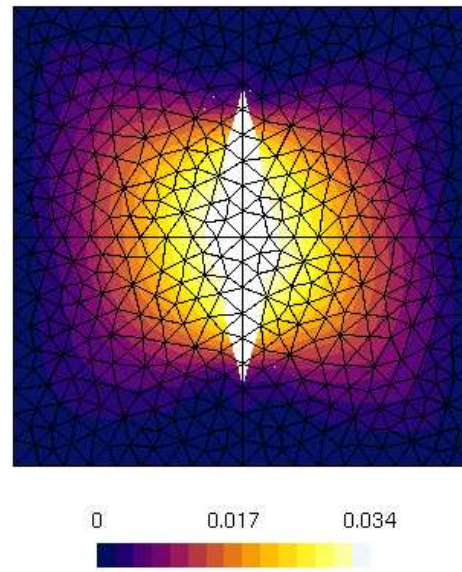


figure 2.16 – Déplacement microscopique

Enfin, concernant les déplacements, nous représentons, figure 2.17, la déformée totale sur la zone d'analyse locale.

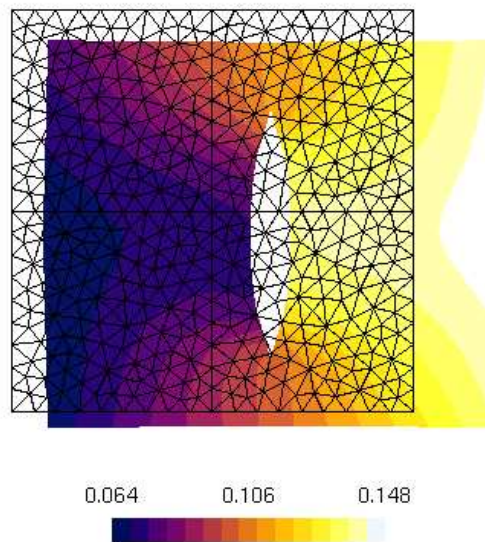
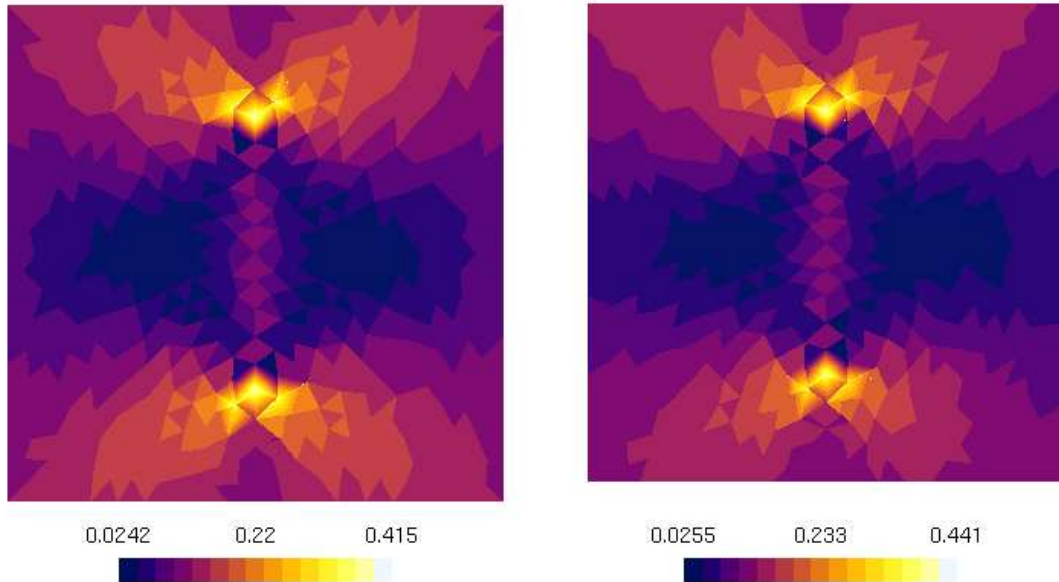


figure 2.17 – Déplacement total

Afin de comparer nos résultats, nous résolvons le problème de cette plaque fissurée de manière classique, c'est à dire n'utilisant qu'une seule échelle d'analyse mais toujours en employant l'approche X-FEM pour traiter la fissure. Pour se faire, nous utilisons un

maillage dont la taille, sur tout le domaine, est similaire à celle du maillage microscopique précédent. Les résultats des deux méthodes, en termes de déformations, sont comparés sur la figure 2.18 au niveau de la zone locale.



(a) Déformations ( $\epsilon^{eq}$ ) obtenues avec l'approche à deux échelles.

(b) Déformations ( $\epsilon^{eq}$ ) obtenues sur un maillage fin.

figure 2.18 – Comparaison des déformations

### 2.3.4 Influence du domaine local

Afin d'étudier la sensibilité de la solution par rapport aux différents paramètres géométriques définissant le problème, nous effectuons une série de calculs d'erreur (par rapport à la solution exacte) sur le problème de la plaque percée sous tension et de la plaque contenant l'inclusion en faisant varier les paramètres  $L$ ,  $r$  et  $D$  où  $r$  représente le rayon du trou,  $D$  le diamètre du cercle dans lequel est inscrit la zone microscopique et  $L$  la longueur du côté du carré définissant le domaine macroscopique (cf figure 2.19). Pour la plaque percée les caractéristiques sont : module d'Young  $E = 10$  MPa et le coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ , et l'erreur est notée  $\epsilon^0$ . Pour la plaque contenant l'inclusion deux modules d'Young différents sont utilisés pour l'inclusion  $E^1 = 25$  MPa et  $E^2 = 50$  MPa avec un coefficient de Poisson commun  $\nu^{inc} = 0.25$  alors que la matrice possède les mêmes caractéristiques que pour le cas de la plaque percée. Les erreurs respectives pour ces deux cas sont notées  $\epsilon^1$  et  $\epsilon^2$

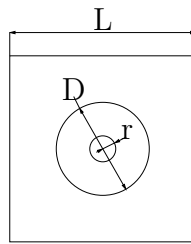


figure 2.19 – Paramètres du problème

Dans un premier temps, nous réalisons une série de calcul où nous calculons l'erreur  $\epsilon$  (en norme de l'énergie) commise par rapport à la solution analytique sur le domaine microscopique lorsque  $D$  et  $r$  sont fixés alors que  $L$  varie pour la plaque percée. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 2.1.

$L$	3	6	9	12	15	18
$\epsilon^0$	0.096	0.093	0.093	0.094	0.092	0.093

tableau 2.1 – Influence de  $L$ 

Les résultats nous montre la stabilité de l'erreur lorsqu'on augmente la taille du domaine macroscopique. Pour cette taille de domaine microscopique et de détail, l'erreur reste constante lorsque le détail est, dans une certaine mesure, assez loin des conditions aux limites imposées à la structure.

Ensuite, nous étudions l'importance de la taille du détail sur la solution. Pour cela, nous calculons l'erreur  $\epsilon$  (en norme de l'énergie) commise par rapport à la solution analytique sur le domaine microscopique quand  $D$  et  $L$  sont fixés et  $r$  varie pour les trois cas (plaque percée, plaque contenant une inclusion de module d'Young  $E^1$  et plaque contenant une inclusion de module d'Young  $E^2$ ). Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 2.2.

$r$	0.200	0.150	0.125	0.100	0.075
$\epsilon^0$	0.186	0.122	0.096	0.079	0.068
$\epsilon^1$	0.140	0.078	0.054	0.034	0.022
$\epsilon^2$	0.485	0.242	0.161	0.099	0.056

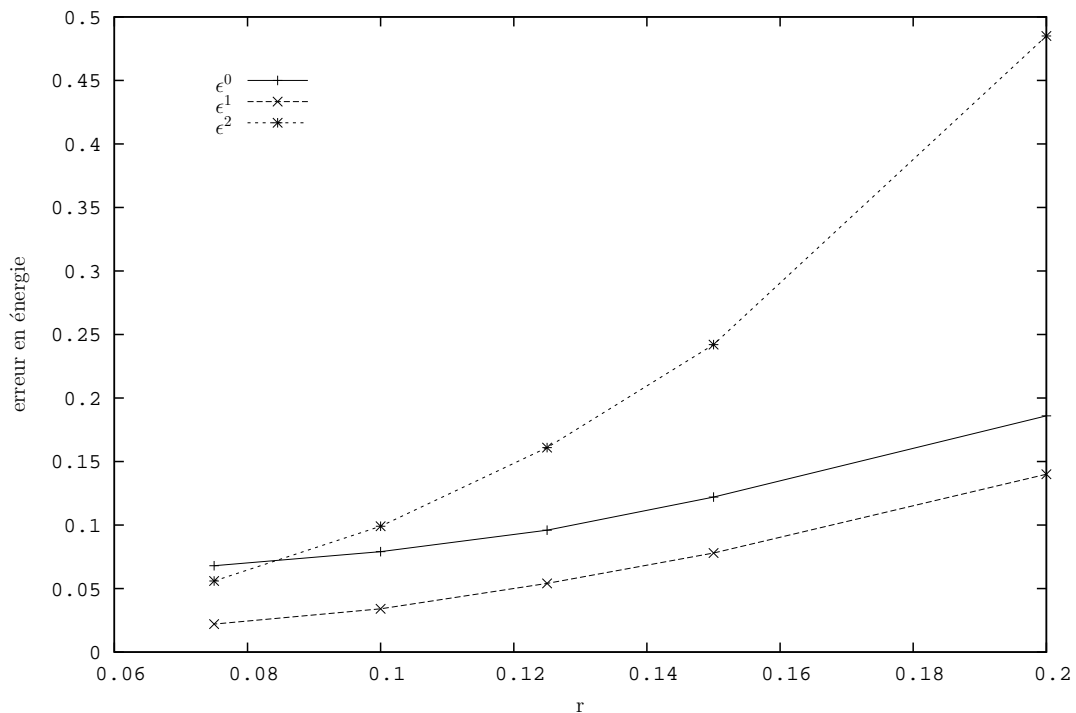
tableau 2.2 – Influence de  $r$ 

Enfin, pour étudier l'importance de la taille de la zone, nous réalisons une dernière série de calcul lorsque  $r$  et  $L$  sont fixés et  $D$  varie pour les trois cas. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 2.3.

$D$	1	1.25	1.5	1.75
$\epsilon^0$	0.092	0.065	0.055	0.044
$\epsilon^1$	0.054	0.034	0.023	0.017
$\epsilon^2$	0.162	0.101	0.168	0.050

tableau 2.3 – Influence de  $D$ 

Les graphiques 2.20 et 2.21 résument les résultats obtenus lors des différentes séries de mesure lorsque  $r$  et  $D$  varient.

figure 2.20 – Évolution des erreurs en fonction de  $r$ 

La deuxième série nous montre, d'une manière générale, l'importance de la taille du détail lorsque l'erreur diminue avec le rayon du trou ou de l'inclusion. Cela peut être dû à deux causes : l'erreur diminue lorsque le détail est loin du bord de la zone microscopique ou elle diminue du fait de la taille du détail qui décroît et qui par conséquent a moins d'influence sur la structure entière.

Il est aussi à noter que lorsque le rapport entre le module d'Young de l'inclusion et de la matrice est peu élevé, l'évolution de l'erreur en fonction de la diminution du rayon de l'inclusion est plus favorable dans le cas de la plaque avec inclusion que la plaque percée. On peut considérer dans ce cas que la plaque se rapproche d'un matériau homogène et que l'effet de l'inclusion reste minime. Lorsque le rapport entre les modules d'Young est plus important, l'effet de la taille du détail est plus important pour les problèmes à inclusion

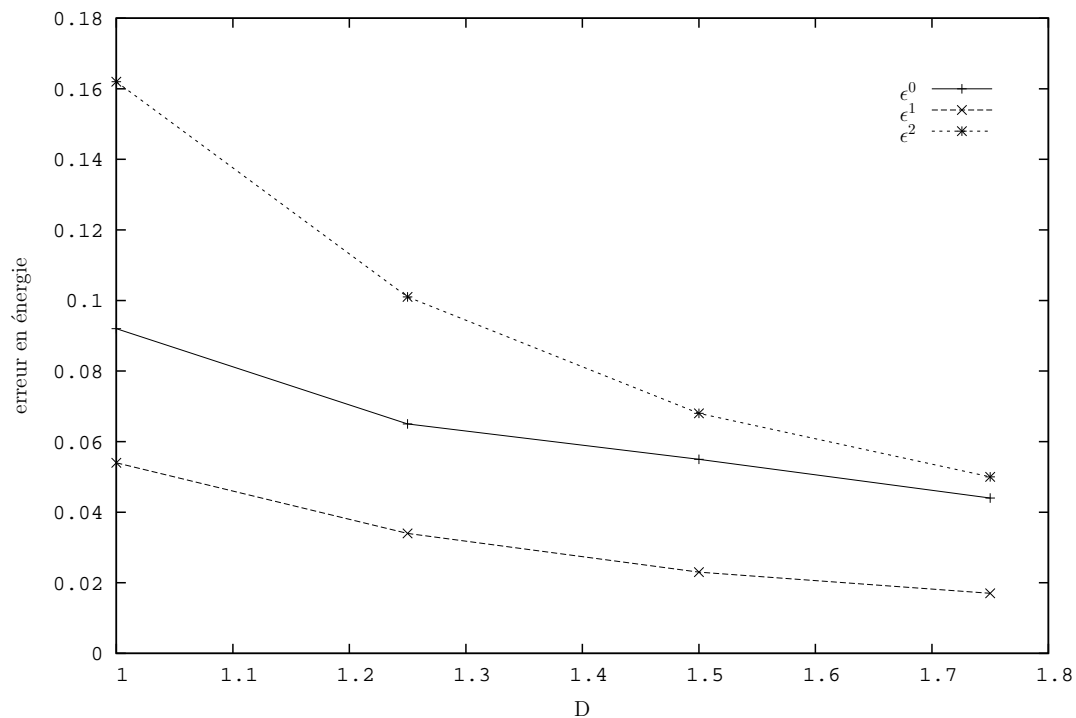


figure 2.21 – Évolution des erreurs en fonction de D

que pour ceux impliquant une plaque percée.

Enfin, les derniers résultats, présentés sur la figure 2.21, tendent à montrer que plus la zone d'étude augmente, plus l'erreur diminue dans les trois cas. Cela semble conforter l'hypothèse émise avec l'analyse des premiers résultats quant à l'importance de la distance du détail à la frontière du domaine microscopique.

En résumé, au-delà d'un certain rapport, la différence de raideur présente au sein d'une plaque est plus difficile à prendre en compte que l'effet d'un trou par l'approche à deux échelles.

La figure 2.22 représente la répartition de l'erreur commise sur la zone microscopique pour  $r = 0.125$ ,  $D = 2$  et  $L = 15$  dans le cas d'une plaque percée. Elle nous montre que lorsque la zone locale atteint une certaine taille la majeure partie des erreurs se situe près de la frontière du trou dépendant de la finesse de représentation du bord du trou.

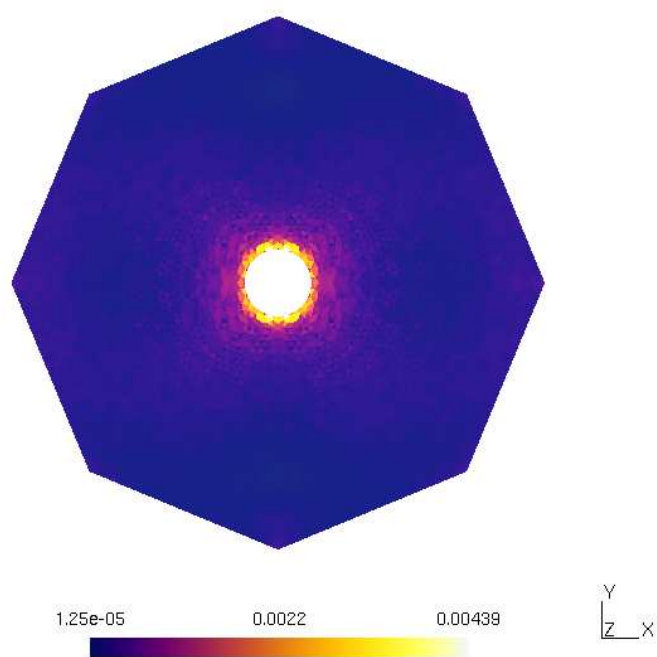


figure 2.22 – Répartition de l'erreur pour  $r = 0.125$ ,  $D = 2$  et  $L = 15$ .

## Conclusion

Ces diverses applications ont permis d'évaluer l'intérêt d'une telle approche. Il est possible de prendre en compte l'effet de détails de type trou, inclusion mais aussi des fissures sur une structure sans mailler finement l'ensemble du domaine.

L'enrichissement assure une représentation des interfaces matériaux au sein des éléments du maillage avec l'utilisation des level sets capable d'introduire des formes géométriques complexes et peut permettre la propagation des fissures sans remailler.

Enfin, nous avons mis en évidence l'importance de la taille du domaine d'influence vis à vis de la taille du détail et de la structure. Ces différents aspects du domaine peuvent être considérés comme des paramètres de l'approximation de la solution par notre approche, la réponse microscopique dépendant directement des modes macroscopiques activés donc de la taille de la zone locale. Une des perspectives directes pourrait être de déduire des critères permettant le choix de la taille du domaine d'influence à partir de ces paramètres. De plus, nous avons étudié l'influence de la taille du domaine mais avec un nombre de modes macroscopiques constant. Il peut être envisagé de poursuivre cette étude en y intégrant ce nouveau paramètre.

En outre, La diversité des problèmes que peut aborder cette approche semble assez vaste. La résolution des problèmes mise en oeuvre dans ce cadre concerne des détails se situant loin des bords de la structure, mais un développement qui peut être envisagé, tout en apportant une nouvelle analyse sur les conditions aux limites, traiterait de détails tels que des congés ou des rainures. En restant dans le cadre des problèmes abordés, il serait aussi possible d'envisager d'autres conditions aux limites au bord de la zone microscopique comme l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

Il est aussi envisagé de développer un outil permettant le maillage automatique de la zone microscopique à partir de la zone macroscopique sélectionnée.

Enfin, cette étude pourrait s'accompagner d'estimateurs d'erreurs capables d'apporter une information complémentaire à la solution obtenue afin de déterminer un intervalle caractérisant une réponse au problème posé et à la taille du domaine local à employer.

---

# Application de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle

<b>3.1</b>	<b>Machines parallèles</b>	<b>84</b>
3.1.1	Situation globale des moyens numériques	84
3.1.2	Fonctionnement d'une machine parallèle	84
3.1.3	Données matérielles et logicielles	85
<b>3.2</b>	<b>X-FEM et calculs parallèles</b>	<b>88</b>
3.2.1	Le parallélisme	88
3.2.2	Les différents aspects d'un calcul parallèle	91
3.2.3	Spécificités de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle	94
<b>3.3</b>	<b>Applications</b>	<b>110</b>
3.3.1	Critères de performance	110
3.3.2	Exemples	111
	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>



Le but de ce travail est de permettre de résoudre des problèmes à nombre de degrés de liberté élevé traités avec l'approche X-FEM dans une version parallèle. Les points abordés dans cette partie traiteront des moyens utilisés (matériels et logiciels), de la logique employée, de sa mise en oeuvre et des résultats obtenus.

## 3.1 Machines parallèles

### 3.1.1 Situation globale des moyens numériques

Dans de nombreux domaines de la simulation numérique, la dimension des problèmes à traiter, en terme de degrés de liberté, ne cesse d'augmenter. De plus, on cherche toujours à diminuer les temps de calcul. La capacité des moyens conventionnels ne suffit plus. C'est pourquoi, pour s'affranchir de ces difficultés et se basant sur l'évolution toujours plus rapide des moyens informatiques mis à disposition, deux approches importantes peuvent être dégagées :

- accroître la capacité de la machine utilisée ;
- augmenter le nombre de machines utilisées.

La première approche privilégie la simplicité d'utilisation et de mise en oeuvre mais est fortement dépendante du niveau technologique actuel et semble plus rigide. La deuxième est plus longue à mettre en place, demande plus d'investissements au niveau de l'implémentation mais est beaucoup plus souple et permet de limiter notre dépendance au matériel disponible sur le marché.

### 3.1.2 Fonctionnement d'une machine parallèle

#### 3.1.2.1 Principe général

#### 3.1.2.2 Mémoire distribuée et mémoire partagée

Les deux approches citées précédemment peuvent être affiliées à deux types de système :

- machine à mémoire partagée ;
- machine à mémoire distribuée.

La figure (3.1) décrit globalement leur système de fonctionnement. Les machines à mémoire partagée se composent d'un certain nombre de processeurs accédant tous au même espace de stockage des données. Au contraire, les machines à mémoire distribuée sont constituées de noeuds de calcul possédant un processeur lié à sa propre mémoire et communiquant entre eux par le biais d'un réseau de communication à haut débit. Elles représentent ainsi une sorte de grappe d'ordinateurs et sont donc souvent appelées cluster.

La première situation implique une certaine autonomie du système dans le sens où l'accès mémoire est géré uniquement par la machine. En d'autres termes, l'utilisateur n'a pas à s'impliquer dans les processus de gestion de son code de calcul pour l'amener à être utilisable dans une version de type calcul parallèle. La seconde approche nécessite une communication entre les différents noeuds de calculs. La gestion de l'accès mémoire est moins automatique, et l'implication de l'utilisateur est d'emblée effective afin d'organiser le flot d'informations.

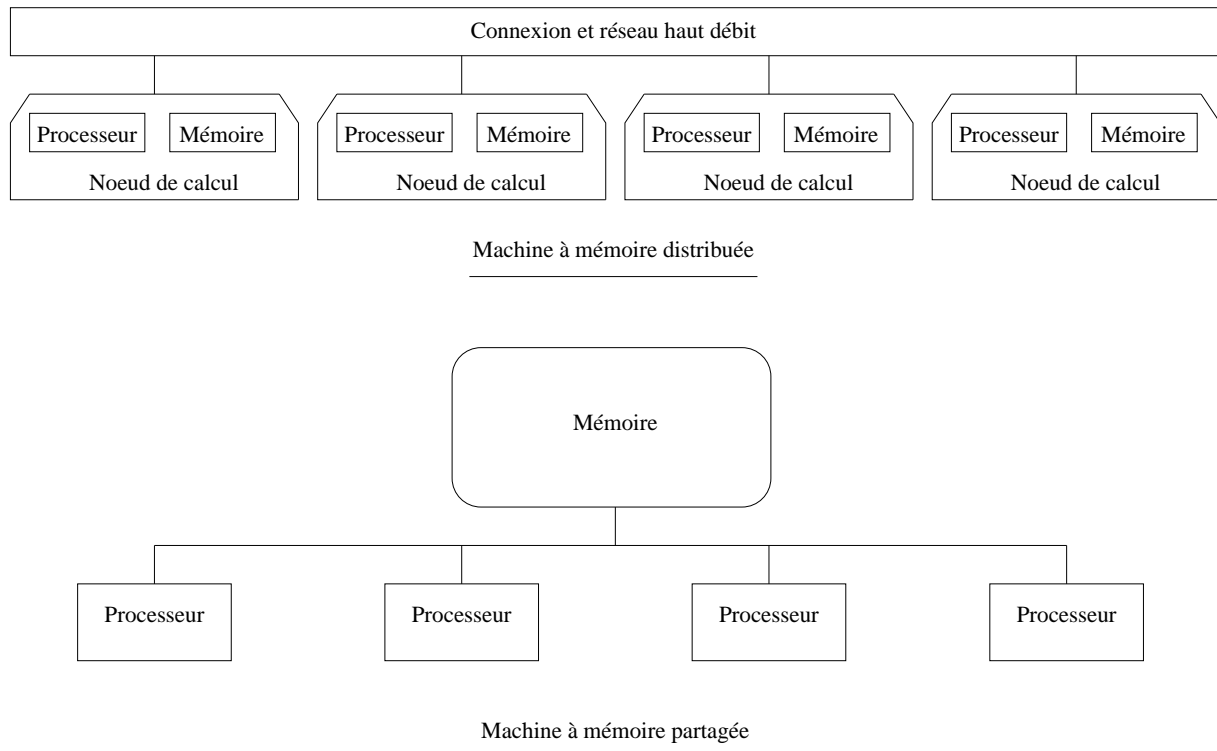


figure 3.1 – Principe de fonctionnement

Si l'approche mémoire partagée est plus aisée à mettre en place et à utiliser, elle semble beaucoup plus rigide. D'un autre côté, les systèmes à mémoire distribuée offrent une flexibilité plus importante ainsi qu'une possibilité d'extension à grande échelle mais induisent une réflexion au niveau de l'implantation du code à exécuter au sein du système et de son implémentation.

### 3.1.3 Données matérielles et logicielles

Dans cette section nous aborderons les moyens mis à notre disposition pour nous permettre de mener à bien cette étude. Dans un premier temps, nous décrirons succinctement les moyens matériels dont nous disposons, puis, nous nous attacherons à définir les utilitaires numériques employés.

### 3.1.3.1 Architecture du réseau et type de connexion

La configuration du moyen de calcul adoptée dérive des deux approches définies auparavant puisqu'il se compose d'une machine dite "frontale" et de 8 noeuds de calculs bi-processeurs. Il s'agit donc d'un système hybride profitant des aspects des deux méthodes. Les processeurs des noeuds sont des ATHLON 2400 qui sont liés à des zones de mémoires vives DDR de capacité 2.0 Go. Sur la figure (3.2), est représentée l'implantation du cluster au sein de la plate-forme de calcul. Chaque noeud est relié au frontal par un réseau Ethernet et les noeuds entre eux par un réseau myrinet avec un débit noeud à noeud possible s'élevant à 248 MBytes/seconde soit 2 Go/seconde.

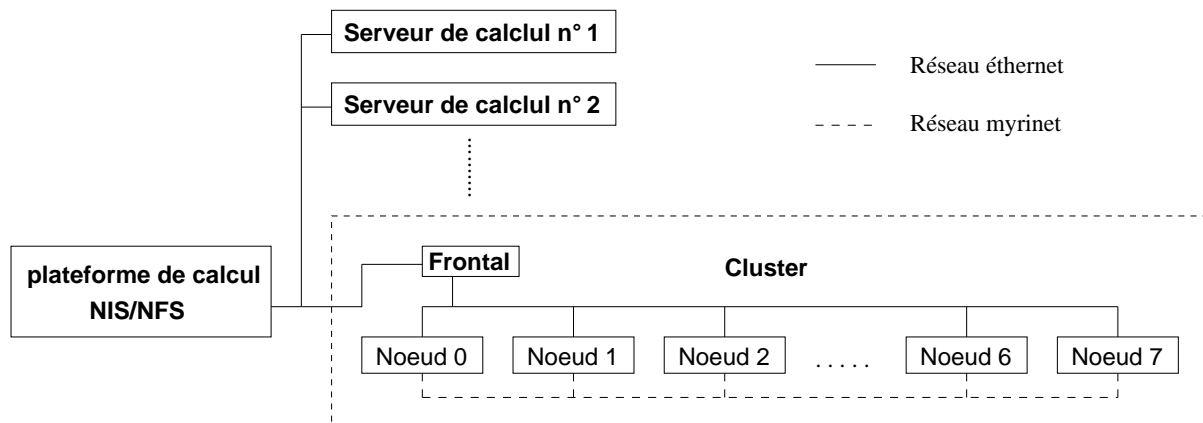


figure 3.2 – Implantation du cluster

Le rôle du frontal est essentiellement administratif. Il doit permettre une certaine distribution des tâches, de gérer la configuration et les diverses fonctionnalités sur les noeuds. Au niveau du calcul, un noeud gère l'envoi de l'exécution du programme sur l'ensemble des noeuds choisis qui communiquent entre eux via myrinet pour résoudre le problème. Il est à noter que les logiques de programmation employées ultérieurement s'adressent spécifiquement aux machines à mémoire distribuée.

### 3.1.3.2 Outils de communication

Cette section concerne les moyens informatiques utilisés pour la communication d'informations entre les noeuds. De nombreuses approches utilisent des bibliothèques de transfert de messages telles que PVM ou MPI ([46]). De plus, celles-ci ont pu être étendues pour donner lieu à de nombreux outils utilisant leurs fonctions de base comme AUTOPACK qui est décrit dans une section suivante.

**MPI, version mpich** The Message Passing Interface (MPI) [46] est une bibliothèque permettant l'envoi et la réception de messages entre deux processeurs sans partage de mémoire. Elle permet une communication bipolaire mais peut aussi gérer des communications en groupe. Elle propose une large palette de fonctions de transferts capables de

synchroniser ceux-ci. La version mpich est une implémentation de la librairie MPI permettant de pouvoir utiliser celle-ci sur toutes sortes de systèmes. Son rôle est de rendre *portable* la librairie MPI. La version utilisée a été développée pour profiter au mieux de la technologie myrinet.

**AUTOPACK** Cette librairie est utilisée pour transporter les informations entre les différents noeuds du cluster lors de l'exécution d'un programme. Elle est basée sur les fonctions définies par MPI (section 3.1.3.2). Elle a pour objet de perfectionner la communication en utilisant les fonctions classiques de MPI. Elle permet les envois et réceptions de messages entre les processeurs. Elle s'attache aussi à gérer la taille en mémoire des messages transférés et est capable d'envoyer des messages différés ou permettant au processeur de pouvoir les anticiper.

En effet, les informations à communiquer sont assemblées automatiquement afin d'envoyer des messages de taille plus conséquente pour des raisons d'efficacité. En effet, la fabrication d'un message induit un coût au niveau du temps. Afin de limiter leur nombre, donc ce coût, il est préférable d'envoyer des paquets plus gros car le temps de transmission est plus rapide que le temps de préparation d'envoi du message. La librairie AUTOPACK peut déterminer les messages en attente, allouer dynamiquement la mémoire destinée aux messages en partance ou les messages reçus. Celle-ci a pour avantage de fournir un moyen de déterminer le nombre de messages à envoyer sans barrière de synchronisation entre les différents processeurs pour permettre une compilation des messages asynchrone.

Lors de l'envoi, on doit définir les informations à transmettre, vers quel processeur, la taille du message à transférer et un numéro représentant la communication elle-même. L'opération est complète quand le message a été traité par MPI. Il est à noter qu'un message incomplet (en taille) peut être envoyé et qu'on a la possibilité de garantir l'envoi d'un message.

Ensuite le message est reçu par le processeur concerné avec une allocation mémoire automatiquement assuré par MPI. Enfin, le message est interprété par la fonction adéquate. Il est aussi possible de s'assurer de l'envoi de messages et de contrôler leur nombre afin de vérifier qu'ils ont bien tous été reçus.

## 3.2 X-FEM et calculs parallèles

### 3.2.1 Le parallélisme

#### 3.2.1.1 Principe global de fonctionnement

Par le passé, les mécaniciens, confrontés à des problèmes impliquant un nombre d'inconnues de plus en plus important, ont développé des méthodes de décomposition afin de résoudre ces problèmes en les scindant en problèmes identiques mais de plus petite taille. Par ce biais, une fois résolu chacun des sous-problèmes, il était possible de définir la solution globale du problème de départ.

D'un autre côté, de nouveaux moyens de calcul, tels que les super-calculateurs et les machines parallèles, capables d'exécuter un nombre d'opérations très élevé ont émergé. Ces méthodes ont su profiter de l'apparition de ces outils pour se développer de plus en plus.

Le principe des méthodes parallèles s'appuie sur l'augmentation de la capacité mémoire des machines via l'utilisation de connexions et de réseaux à hautes performances assurant le transfert de données entre les différentes zones de stockage.

Pour se faire, les approches parallèles profitent des méthodes de décomposition antérieures employant des outils de découpage de maillage couplés à des méthodes de résolution itérative.

Les méthodes de décomposition de domaine peuvent se classer en deux catégories : les décompositions de domaine avec et sans recouvrement. Nous nous plaçons dans le deuxième cas. Dès lors, plusieurs approches ont été développées. Nous pouvons citer deux méthodes largement utilisées : le complément de Schur primal et dual (appelé méthode FETI). Ces approches impliquent des méthodes de résolution itérative diverses dont les plus utilisées sont GMRes et Gradient Conjugué s'accompagnant, pour des raisons d'efficacité, de pré-conditionneurs (ILU, ILUT, ...).

Pour plus de détails nous pouvons nous reporter, entre autres, aux travaux développés dans [24], [12], [55], [37].

Après avoir présenté les différents aspects d'un calcul parallèle impliquant une décomposition de domaine associée à une résolution itérative, nous définissons, à présent, notre approche.

### 3.2.1.2 Présentation de la méthode employée

Tout d'abord, par rapport aux différentes architectures parallèles présentées auparavant, nous nous situons dans le cadre d'un système hybride, c'est-à-dire possédant les deux types de mémoire : partagée et distribuée. En effet, les moyens employés ont trait à un système comprenant des noeuds de calcul bi-processeurs donc utilisant les deux types de mémoire.

L'objectif de la méthode, dans un premier temps, est de résoudre des problèmes dont le nombre de degrés de liberté impliqués ne peut plus être pris en charge par des méthodes conventionnelles. Dans un deuxième temps, il est de diminuer le temps mis à résoudre des problèmes à nombre de degrés de liberté élevé.

Cette méthode propose de séparer le problème initial à résoudre en plusieurs sous-problèmes. La division de celui-ci s'effectue par le biais d'un découpage du maillage en plusieurs sous-domaines. La méthode doit alors permettre de trouver une solution globale en résolvant des problèmes locaux. Pour résoudre les problèmes sur les sous-domaines, une communication est nécessaire.

C'est pourquoi la méthode utilisée dans le cadre de notre étude est basée sur des outils de communication déjà fort employés dans le domaine du calcul parallèle : the Message Passive Interface (MPI) par le biais de la librairie AUTOPACK. Ils sont chargés de permettre la description totale de la géométrie du problème, de transporter les données mathématiques du problème (les différents tenseurs) lors de la résolution ...etc ; en résumé, de permettre la communication de toutes les informations nécessaires à la résolution du problème.

La figure (3.3) décrit le déroulement d'un calcul parallèle. De manière classique, nous commençons par définir les données du problème, c'est-à-dire le type de matériau, le chargement, les conditions aux limites et le maillage initial. L'exécution du programme peut alors débuter. Dans un premier temps, le maillage est découpé en plusieurs sous-parties dont le nombre est au maximum égal à celui des processeurs disponibles afin de rester le plus efficace possible. Chaque processeur se voit affecté la gestion d'une partie du calcul global. Le déroulement du calcul s'effectue donc de la même façon sur tous les processeurs. Chaque étape est réalisée identiquement sur chaque processeur. Le maillage est tout d'abord lu par le processeur concerné. Puis, une table de connexion est créée pour permettre de repérer les interfaces des maillages et de situer les entités sur chaque sous-domaine induisant une première utilisation des outils de communication. Dans le cadre d'X-FEM, la définition de discontinuités géométriques, physiques ou matériaux est

ensuite réalisée entraînant une autre phase de communication qui va permettre de procéder à l'enrichissement. Nous déclarons alors le champ d'inconnues à calculer, affectons les conditions limites et le chargement ; et prenons en compte le type de comportement. L'assemblage est exécuté et la résolution du système matriciel, par le biais d'une dernière étape de transfert d'informations, peut alors s'opérer. Enfin, chaque processeur procède à une opération de post-traitement des résultats.

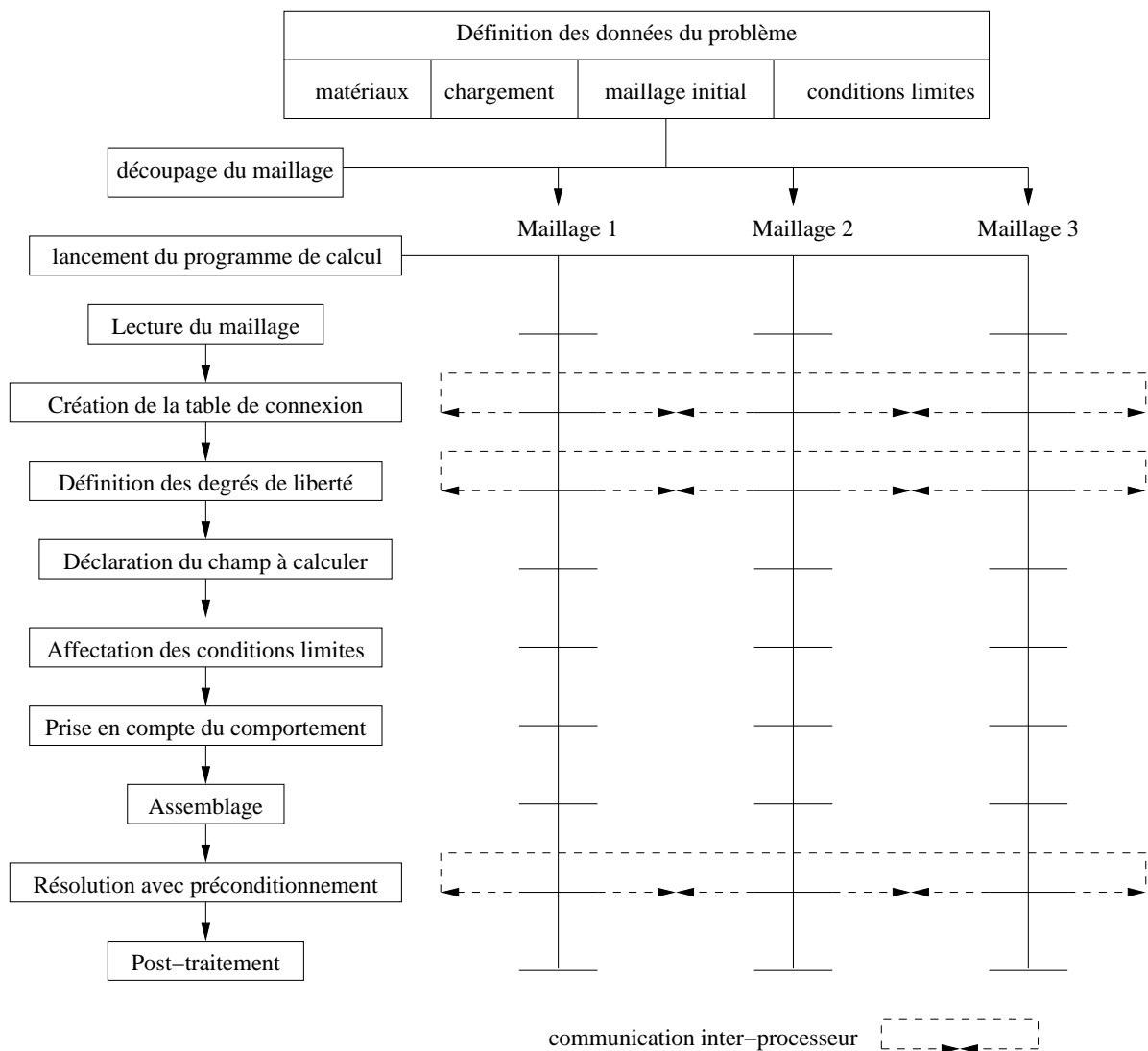


figure 3.3 – Exemple de la méthode employée pour 3 sous-domaines

Après avoir présenté succinctement la méthode utilisée, nous détaillons les points spécifiques de la partie parallèle du calcul.

## 3.2.2 Les différents aspects d'un calcul parallèle

### 3.2.2.1 Partitionnement de maillage

Le partitionnement est réalisé à partir d'un utilitaire nommé split basé sur la librairie AOMD [54] utilisant les fonctions de la librairie METIS [32]. Le découpage est uniquement basé sur des critères topologiques. L'algorithme sur lequel est développée cette librairie a pour objectif de définir, à partir du maillage initial, différentes partitions équilibrées en nombre de noeuds tout en minimisant le nombre de communications ultérieures induites. Pour se faire, le principe de découpage fournit un moyen qui permet de limiter le nombre d'"edge-cut" qui représentent les arêtes partageant un noeud avec plusieurs partitions. Par ce biais, le nombre de noeuds à l'interface s'en trouve réduit. Il s'agit donc ici d'obtenir un compromis entre maillages équilibrés et communication minimale.

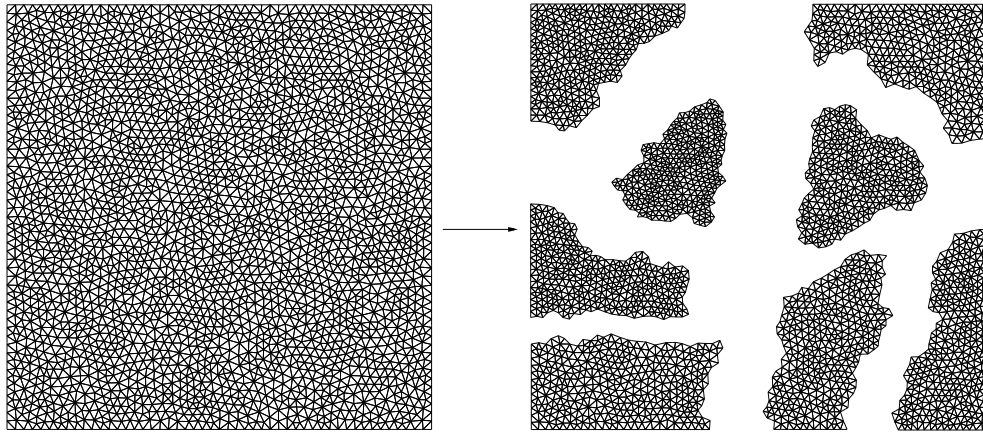


figure 3.4 – Maillage initial et découpé en 8 domaines

De plus, il est à noter que les méthodes de résolution utilisées s'appuient sur une décomposition sans recouvrement. En effet, comme nous pouvons le voir sur la représentation d'un des découpages utilisés (figure 3.4), seules les entités frontières sont connues de part et d'autre des partitions adjacentes contrairement aux méthodes avec recouvrement où l'interface entre deux partitionnements peut contenir une certaine bande d'éléments ([12]). Le domaine initial  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  est découpé en  $I$   $\Omega_i$  sous domaines par les interfaces  $\gamma_{ij}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \bigcup_{i=1}^{i=I} \Omega_i \\ \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \\ \Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \quad \forall i, j = 1, \dots, I, i \neq j \\ \Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$



La figure 3.5 représente ces conditions pour un domaine décomposé en deux.

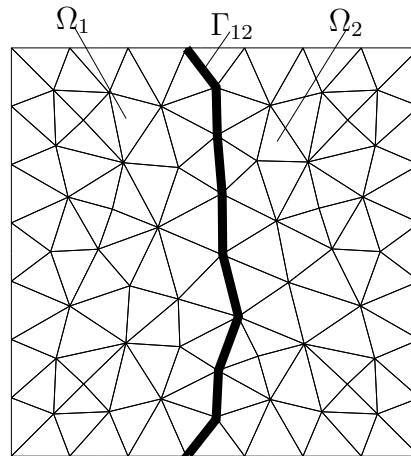


figure 3.5 – Décomposition sans recouvrement en deux domaines

L'aspect résolution de cette décomposition sera développé dans les sections suivantes.

### 3.2.2.2 Lecture partielle du maillage

Le découpage précédemment illustré nous donne ensuite la possibilité d'effectuer une lecture partielle du maillage. En effet, chaque processeur a en charge une partition et effectue les différentes tâches du programme afin de résoudre le problème mécanique. Lors de la réalisation de cette étape, une table de relations inter-entités est créée sur chaque sous-maillage. Ainsi, chaque processeur connaît toutes les interfaces et les entités qu'il détient définissant ces interfaces. En résumé, à un instant  $t$ , chaque processeur a connaissance des liaisons entre ses entités et celles des sous-domaines adjacents.

### 3.2.2.3 Décomposition de domaines

La décomposition en plusieurs domaines nécessite la définition d'une méthode de résolution globale différente ([10]). Dans un premier temps, nous cherchons à isoler les inconnues associées exclusivement à chacun des sous-domaines ainsi que celles des noeuds de l'interface afin de limiter le nombre de communications entre les différents sous-domaines. En effet, le problème de résolution à l'interface est dissocié du problème local aux sous-domaines. Afin de réaliser ce découplage, l'assemblage du système global à résoudre est redéfini afin de séparer les termes propres à chaque partition de ceux de l'interface. La décomposition d'un système  $AX = B$ , pour un domaine  $\Omega$  décrit figure (3.6), amène au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\Gamma_1} + \mathbf{A}_{\Gamma_2} & \mathbf{A}_{\Omega_1 \cup \Gamma} & \mathbf{A}_{\Omega_2 \cup \Gamma} \\ \mathbf{A}_{\Omega_1 \cup \Gamma} & \mathbf{A}_{\Omega_1 \setminus \Gamma} & 0 \\ \mathbf{A}_{\Omega_2 \cup \Gamma} & 0 & \mathbf{A}_{\Omega_2 \setminus \Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Gamma} \\ \mathbf{X}_{\Omega_1 \setminus \Gamma} \\ \mathbf{X}_{\Omega_2 \setminus \Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Gamma_1} + \mathbf{B}_{\Gamma_2} \\ \mathbf{B}_{\Omega_1 \setminus \Gamma} \\ \mathbf{B}_{\Omega_2 \setminus \Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

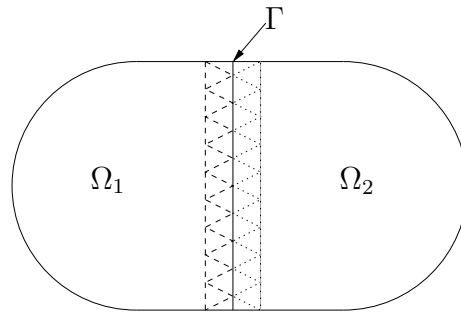


figure 3.6 – Modèle de décomposition en deux domaines

Grâce à cela, il n'est pas nécessaire d'assembler le système complet. On assemble des systèmes locaux, en utilisant des matrices de rigidité locales. Les différents termes du système sont échangés le long de l'interface afin de résoudre le problème en imposant une continuité des déplacements à l'interface.

Après avoir défini la méthode d'assemblage, plusieurs méthodes de résolution sont possibles. Celles-ci impliquent l'utilisation de préconditionneurs qui sont, eux aussi, multiples et jouent un rôle important sur la capacité à résoudre un problème ainsi que sur le temps utilisé pour cette résolution.

La méthode de résolution employée est une méthode itérative appelée GMRes. Afin de permettre une résolution plus rapide, nous utilisons un préconditionneur ILUT ([55]) associé à ce solveur. De plus, une renumérotation de McKee est effectuée sur les matrices de rigidité afin d'en diminuer la largeur de bande.

### 3.2.3 Spécificités de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle

La principale différence entre X-FEM et la méthode des éléments finis réside dans l'enrichissement et l'utilisation de fonctions de niveau (level sets). En effet, pour affecter un enrichissement, par l'ajout de degrés de liberté associés à des fonctions d'enrichissement à une entité du maillage, il est nécessaire d'effectuer un classement préalable de ces entités pour savoir quelles entités doivent être enrichies. Or, ces entités peuvent être distribuées sur plusieurs parties du maillage et une communication est nécessaire afin de réaliser le classement d'un point de vue global.

Il existe aussi certaines spécificités dues à l'utilisation de fonctions de niveau telles que la mise à zéro d'une valeur de ces fonctions à un noeud, sa propagation ou la gestion de sous-maillages qui vont impliquer une communication.

Cette section présente les aspects de la méthode qui nécessitent une nouvelle interprétation afin de permettre des calculs parallèles. Nous décrirons, dans un premier temps, les outils qui traitent de ces aspects et les problèmes qu'ils engendrent. Ensuite, nous aborderons les fonctionnalités qui vont nous permettre de résoudre ces problèmes et, enfin, la démarche employée.

Pour faciliter la lecture, introduisons le glossaire suivant :

- une entité est un composant du maillage (noeud, arête, triangle, tétraèdres ...);
- un élément est l'entité de plus grande dimension du maillage (triangles ou quadrangles en deux dimensions, tétraèdres, hexaèdres ... en trois dimensions);
- le support d'une entité est l'ensemble des éléments connectés à celle-ci.

#### 3.2.3.1 Problématique

##### 3.2.3.1.1 Mise à zéro de valeurs de level set

Cette fonctionnalité est représentée par une classe C++ `xFitToVertices` qui permet d'affecter la valeur 0 à une fonction de niveau pour un noeud lorsque celui-ci est très proche de l'iso-zéro. Elle a pour objet d'éviter un sous-découpage en éléments de taille infime afin de faciliter l'intégration et de systématiser les décisions pour l'enrichissement ([44])

En s'appuyant sur la figure 3.7, les conditions pour qu'un noeud soit "mis à zéro" sont :

- une arête doit être coupée par l'iso-zéro de la level set, autrement dit, le produit des valeurs de la level set des noeuds doit être négatif;
- $\frac{a}{a+b} < \epsilon$ .

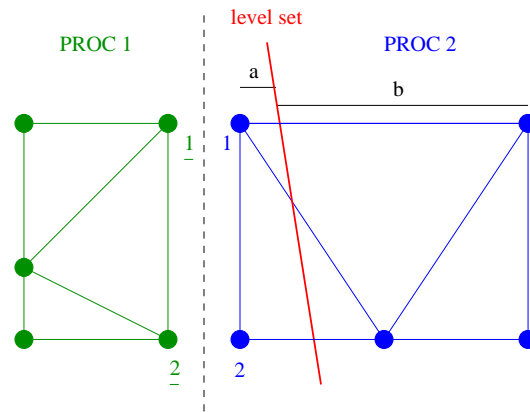


figure 3.7 – xFitTovertices.

On considère l'exemple de la figure 3.7. Du côté du maillage pris en charge par le processeur **2**, les conditions pour que la valeur de la level set au noeud **1** soit mise à zéro, sont remplies. De l'autre côté, aucune arête connectée au noeud **1** n'est coupée par l'iso-zéro de la level set. Par conséquent, sur la partie gauche du maillage la valeur de la level set est laissée telle quelle. Les noeuds **1** et **1** représentent, d'un point de vue global, le même noeud et leurs valeurs de level set doivent donc être identiques. Comment, dans ce cas, communiquer au noeud **1** la valeur de level set (ici 0) du noeud **1** ?

### 3.2.3.1.2 Enrichissement

Qu'il s'agisse de problèmes mécaniques incluant la présence de fissures, d'inclusions ou plus simplement de vides, il est nécessaire d'effectuer un tri des entités du maillage utilisé. Ce tri va permettre de faire la différence entre les entités à enrichir et les entités classiques ou encore d'éliminer celles qui peuvent se trouver dans le vide. Les fonctions de niveau sont à l'origine de ce classement. La section suivante décrit la problématique d'un tel classement lorsqu'on est confronté à un maillage découpé en plusieurs sous-domaines.

**Vide et inclusion** Lorsque des problèmes définis sur une géométrie incluant des trous sont à traiter, le domaine est séparé en deux : vide et matière. Les entités peuvent donc être totalement dans la matière, totalement dans le vide ou coupées par la frontière. De la même façon, pour les problèmes comprenant des inclusions, le domaine est séparé en deux : matériau A et matériau B. Les entités peuvent donc être totalement dans le domaine A, totalement dans le domaine B ou coupées par l'interface. Les entités doivent donc être classées en fonction de leur position afin d'être enrichies ou éliminées.

Nous nous intéressons, tout d'abord, aux problèmes que peuvent engendrer les cas comprenant des trous. Lorsque la géométrie du problème comporte un trou, les noeuds dont le support se trouve entièrement à l'intérieur du trou, sont éliminés. La figure 3.8 illustre le problème lorsque le support d'un noeud est partagé en deux. Le noeud **1**, si on ne tient

compte que de sa situation sur la partie gérée par le processeur **1**, doit être éliminé. A contrario, le noeud **1** sur sa partie n'est pas à éliminer puisqu'un des éléments de son support est coupé par l'iso-zéro de la level set. Par conséquent ce noeud ne doit pas être éliminé.

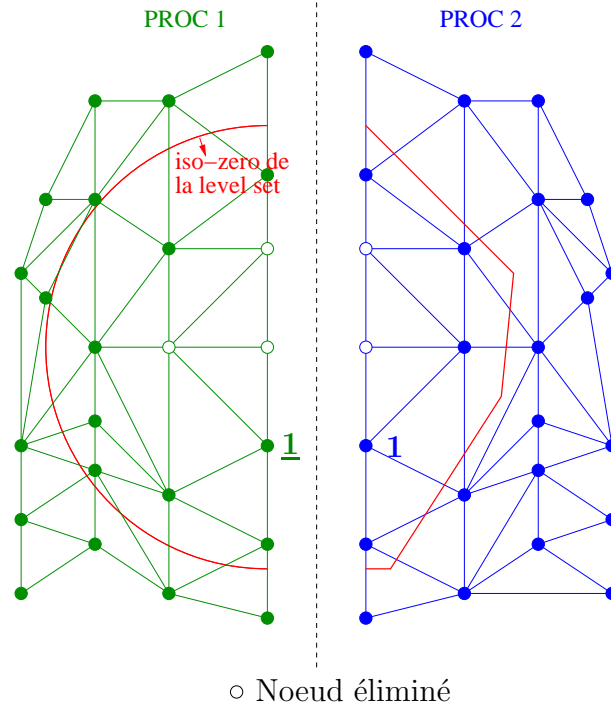


figure 3.8 – Sélection des noeuds à éliminer (notés o) dans le cas d'un trou.

Comment savoir, pour un noeud, si son support se trouve entièrement dans le trou si celui-ci est partagé entre deux parties de maillage différentes ?

Lorsque le problème comporte une interface matériau, les noeuds, dont au moins un élément de son support est coupé par cette interface, sont enrichis. La figure 3.9 illustre le problème lorsque le support d'un noeud est partagé en deux. Le noeud **1**, si on ne tient compte que de sa situation sur la partie gérée par le processeur **1**, doit être enrichi. A contrario, le noeud **1** sur sa partie n'est pas enrichi puisqu'aucun des éléments de son support n'est coupé par l'iso-zéro de la level set. D'un point de vue global, le noeud doit donc être enrichi.

Comment savoir, pour un noeud, si son support est coupé par l'interface si celui-ci est partagé entre deux parties de maillage différentes ?

Pour résumer, en ce qui concerne les cas comprenant des trous ou inclusions, chaque entité doit savoir à quel ensemble elle appartient même si son support est partagé sur différents

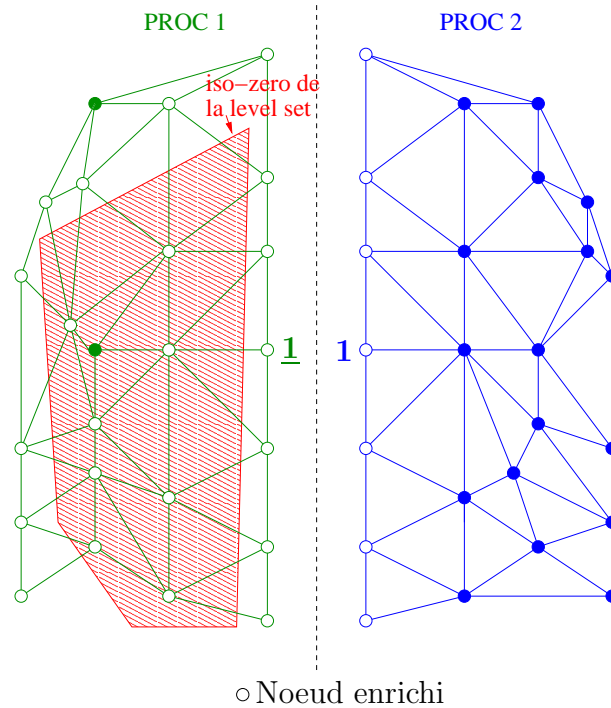


figure 3.9 – Sélection des noeuds à enrichir (notés o) dans le cas d'une interface matériau.

sous-domaines.

**Fissure** De la même manière que pour les trous et les inclusions, un tri des entités est nécessaire afin d'effectuer l'enrichissement pour les fissures. Il existe deux catégories majeures pour l'enrichissement dû à la présence de fissures : un enrichissement de type Heaviside pour les supports coupés par la fissure et un enrichissement pour les supports contenant le front de fissure.

La figure 3.10 illustre le problème lorsque le support d'un noeud est partagée en deux. Le noeud 1, si on ne tient compte que de sa situation sur la partie gérée par le processeur 1, doit être enrichi par la fonction Heaviside puisque son support est totalement traversé par la fissure. A contrario, le noeud 1 sur sa partie est enrichi pour tenir compte du comportement en pointe de fissure puisque son support contient le front de fissure. D'un point de vue global, le support du noeud contient le front de fissure et le noeud 1 doit être enrichi par la même fonction d'enrichissement que le noeud 1 pour tenir compte de la pointe de la fissure.

Comment les noeuds 1 et 2 savent-ils que leur support contient la pointe de fissure, et qu'il n'est donc pas traversé entièrement par la fissure ?

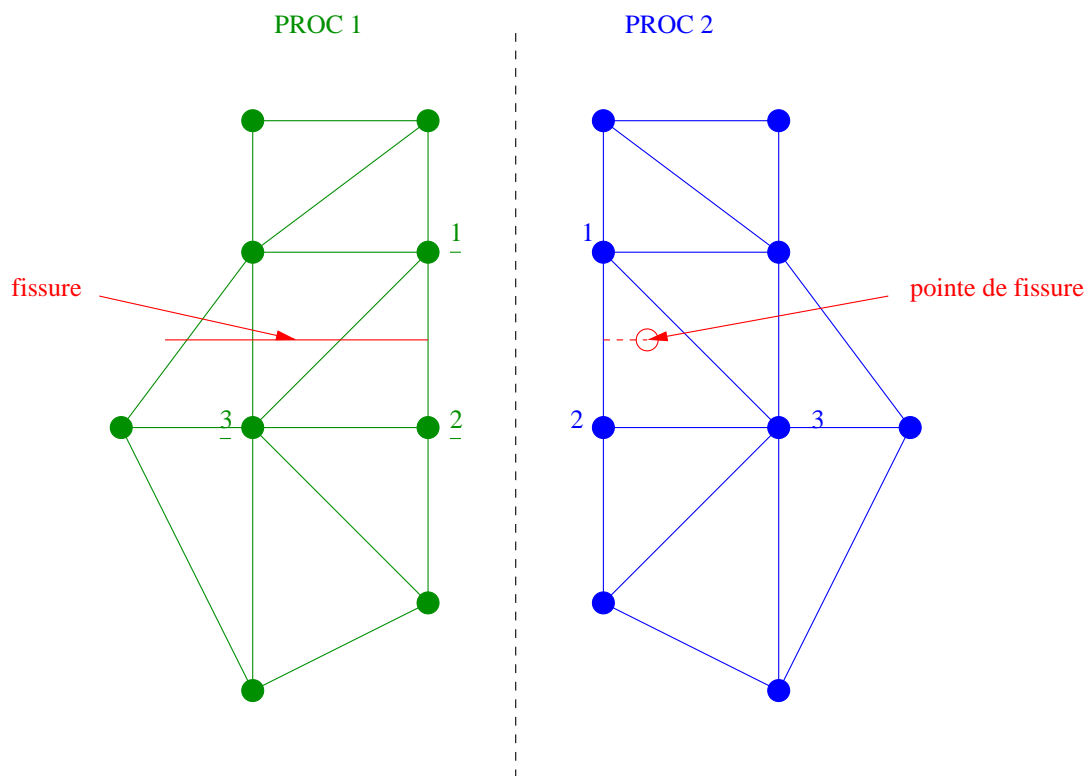


figure 3.10 – Enrichissement pour les fissures.

**Propagation de champ level set et gestion de sous-maillages** Un autre type de problèmes peut être envisagé. Dans certains cas, on a besoin d'interpoler un champ physique sur un sous-maillage. Un sous-maillage peut être créé par l'intersection de l'iso-zéro d'une level set avec un maillage. La figure 3.11 montre un sous-maillage 1D provenant de l'intersection de la level set avec un maillage 2D initial. Les noeuds 1 et **1** sont, d'un point de vue global, identiques mais ne se "connaissent" pas étant donné qu'ils sont issus d'un maillage 2D partagé en deux parties : les deux sous-maillages ont été définis indépendamment l'un de l'autre.

Comment lier ces noeuds 1 et **1** pour qu'ils détiennent la même valeur de champ physique ?

Enfin, un dernier cas de figure peut se présenter, il s'agit de la propagation de level set. Cette dernière peut être décomposée en plusieurs phases. Lors d'une de ces phases, certaines quantités doivent être évaluées sur le support entier. À cet instant, il est donc nécessaire d'échanger des informations entre deux processeurs si deux parties d'un support sont traitées respectivement par ceux-ci.

En résumé, pour ces différents cas, nous avons besoin de savoir où se situe le support d'un noeud par rapport à une discontinuité géométrique, physique, ou matériau en prenant en considération le fait que celui-ci peut être divisé en plusieurs parties.

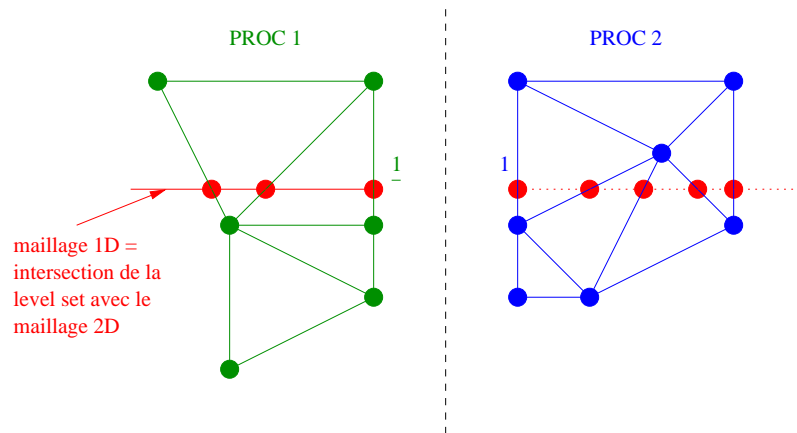


figure 3.11 – gestion des sous-maillages.

Après avoir présenté les différents aspects de l’approche X-FEM relatifs au calcul parallèle, nous allons voir la manière de procéder afin de remédier à ces problèmes et plus précisément ceux en rapport avec la fonction mise à zéro et la gestion de l’enrichissement.

Dans un premier temps, nous évoquerons la gestion de l’enrichissement d’un point de vue global, puis, la méthode développée permettant de tenir compte de la présence de plusieurs domaines, et enfin sa mise en oeuvre.

### 3.2.3.2 Gestion de l’enrichissement sur plusieurs domaines

#### 3.2.3.2.1 Méthode de tri initiale

Cette section concerne la représentation de sous-ensembles d’entités permettant la gestion de l’enrichissement par le biais d’un tri des entités.

**Trous et inclusions** Nous définissons, dans un premier temps, les différentes catégories dans lesquelles sont distribuées les entités, permettant par la suite d’éliminer des entités dans le cas de vides ou d’affecter un enrichissement dans le cas d’inclusions.

Les ensembles utilisés pour ces deux cas sont les suivants :

- **in** traduisant le fait que le support de l’entité a au moins une partie dans la matière (dans le domaine A) ;
- **out** traduisant le fait que le support de l’entité est totalement dans le vide (dans le domaine B) ;



- **boundary** traduisant le fait que le support de l'entité est coupé par la frontière (par l'interface) ;
- **boundary strict** traduisant le fait qu'un des éléments du support de l'entité est coupé par la frontière (par l'interface).

La figure 3.12 illustre ces quatre cas en décrivant l'appartenance d'une entité aux différents groupes. Pour chaque cas, les noeuds et les arêtes définis en gras (et en vert) ainsi que les triangles hachurés (en vert) appartiennent au groupe noté sous les figures concernées.

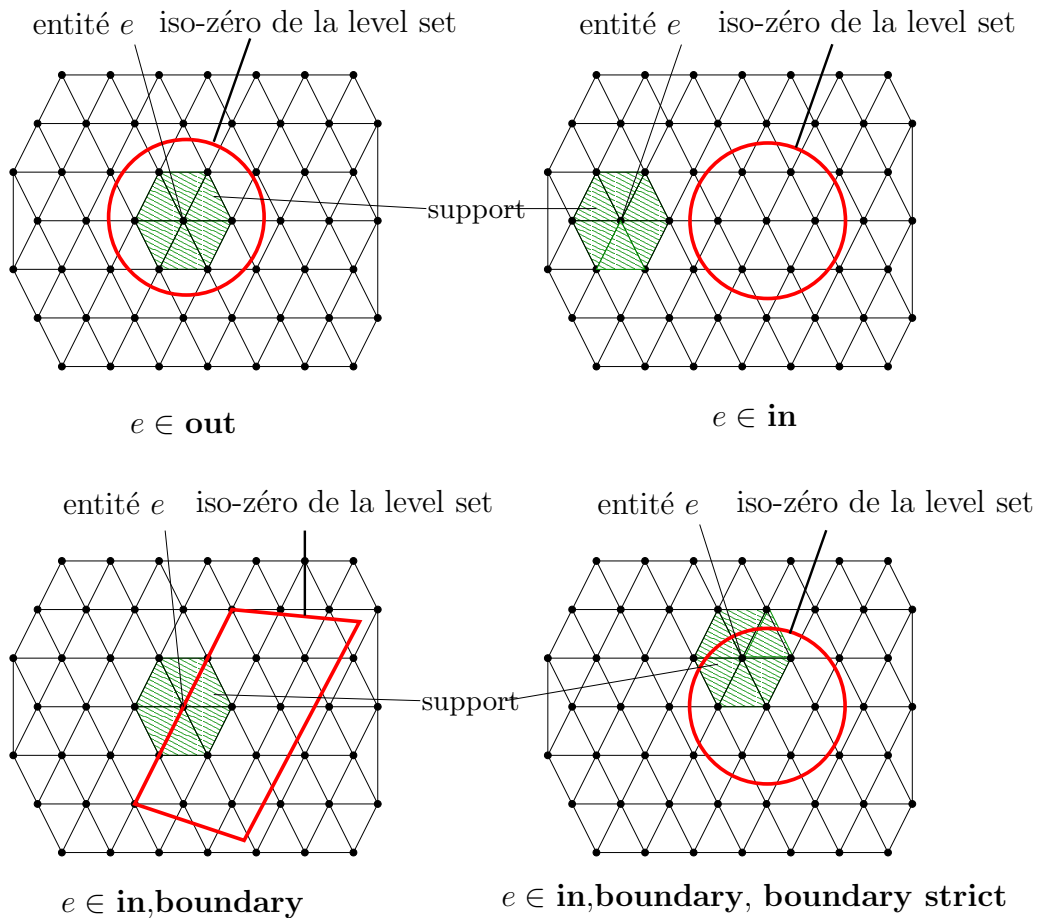


figure 3.12 – Exemples d'appartenance aux différents groupes.

Ces différentes catégories peuvent être représentées sous forme d'ensembles et de sous-ensembles (cf. figure 3.13).

Soit l'entité  $e$  à classifier, appartenant au maillage  $M$ , dont le support  $S_e$  comprenant un certain nombre d'éléments  $E$  connectés entre eux par des noeuds  $n$ ,  $ls(n)$  la valeur de la fonction de niveau en ces noeuds (figure 3.14) et les définitions suivantes :

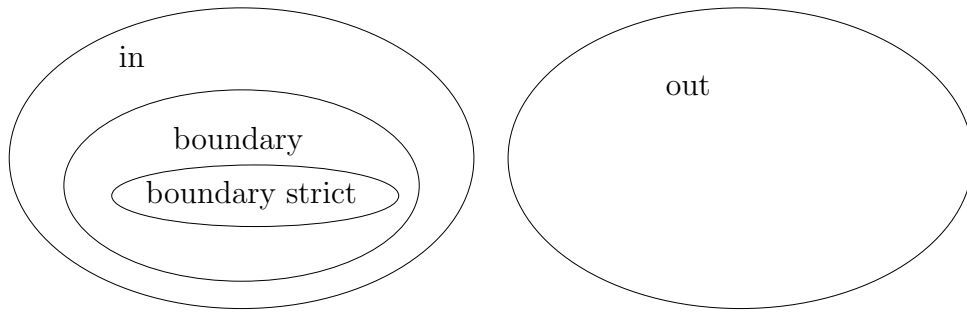


figure 3.13 – Description des ensembles d'entités

$$\begin{cases} mm = \min_{\forall E \in S_e} (\min_{\forall n \in E} (ls(n))) \\ MM = \max_{\forall E \in S_e} (\max_{\forall n \in E} (ls(n))) \\ mM = mm * MM \\ mmM = \min_{\forall E \in S_e} (\min_{\forall n \in E} * \max_{\forall n \in E} (ls(n))) \end{cases} \quad (3.3)$$

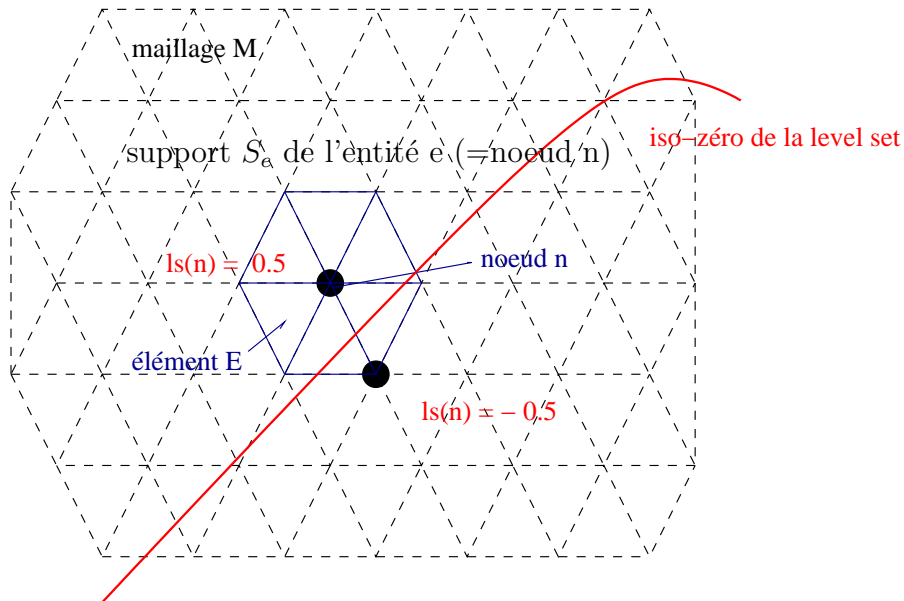


figure 3.14 – Description des termes employés.

Les ensembles sont définis, en terme de level set, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} e \in \mathbf{out} \iff mm \geq 0 \\ e \in \mathbf{in} \iff mm < 0 \\ e \in \mathbf{boundary} \iff mM < 0 \\ e \in \mathbf{boundary\ strict} \iff mmM < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

en se plaçant dans l'hypothèse où  $\forall E$  la condition ( $mm = 0$  et  $MM = 0$ ) n'est jamais

réalisée ; spécifiant le fait qu'un élément ne peut avoir toutes ses valeurs de level set aux noeuds équivalentes à 0 (cf figure 3.15).

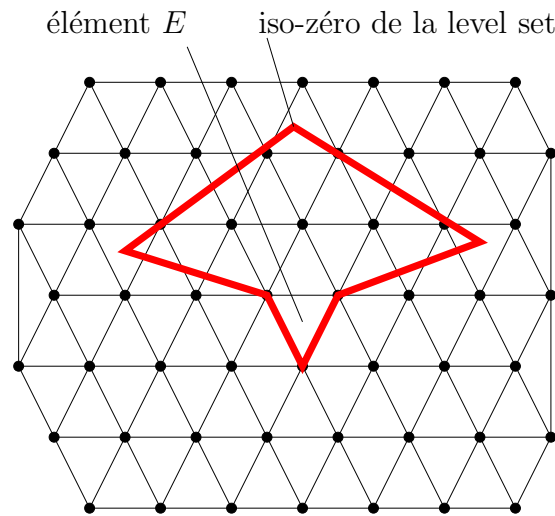


figure 3.15 – Cas interdit pour la définition des ensembles.

L'annexe A définit, en pratique, la façon séquentielle de définir les différents ensembles pour le cas des trous et des inclusions.

Pour les vides, seules les entités appartenant à la catégorie **in** seront conservées. Pour les cas comprenant des interfaces matériaux seules les entités appartenant à l'ensemble **boundary strict** seront enrichies, les autres types pouvant servir à des intégrations diverses ou des post-traitements de résultats.

**Fissures** De la même manière que pour les trous et les inclusions, un tri des entités est nécessaire afin d'effectuer l'enrichissement pour les fissures.

Il existe deux catégories majeures pour l'enrichissement dû à la présence de fissures : un enrichissement de type Heaviside pour les supports coupés par la fissure et un enrichissement basé sur les modes asymptotiques en pointe de fissure pour les supports contenant le front de fissure.

Suivant leur position par rapport à la fissure, les entités vont être classées dans les catégories suivantes :

- **touched by crack** traduisant le fait que le support de l'entité est touché par la fissure ;
- **touched by front** traduisant le fait que le support de l'entité est touché par le front de fissure ;

- **cut by crack** traduisant le fait que le support de l'entité est coupé par la fissure ;
- **cut by crack to delete** comprenant les entités à enlever à **cut by crack** pour obtenir **cut thru by crack** ;
- **cut thru by crack** traduisant le fait que le support de l'entité est coupé entièrement par la fissure ;
- **integrate** représente les entités contenues par **touched by crack** auquel on ajoute les entités des supports connectés à celles-ci.

La figure 3.16 décrit les ensembles présentés précédemment. Pour chaque cas, les noeuds et les arêtes définis en gras (et en vert) ainsi que les triangles hachurés (en vert) appartiennent au groupe noté sous les figures concernées.

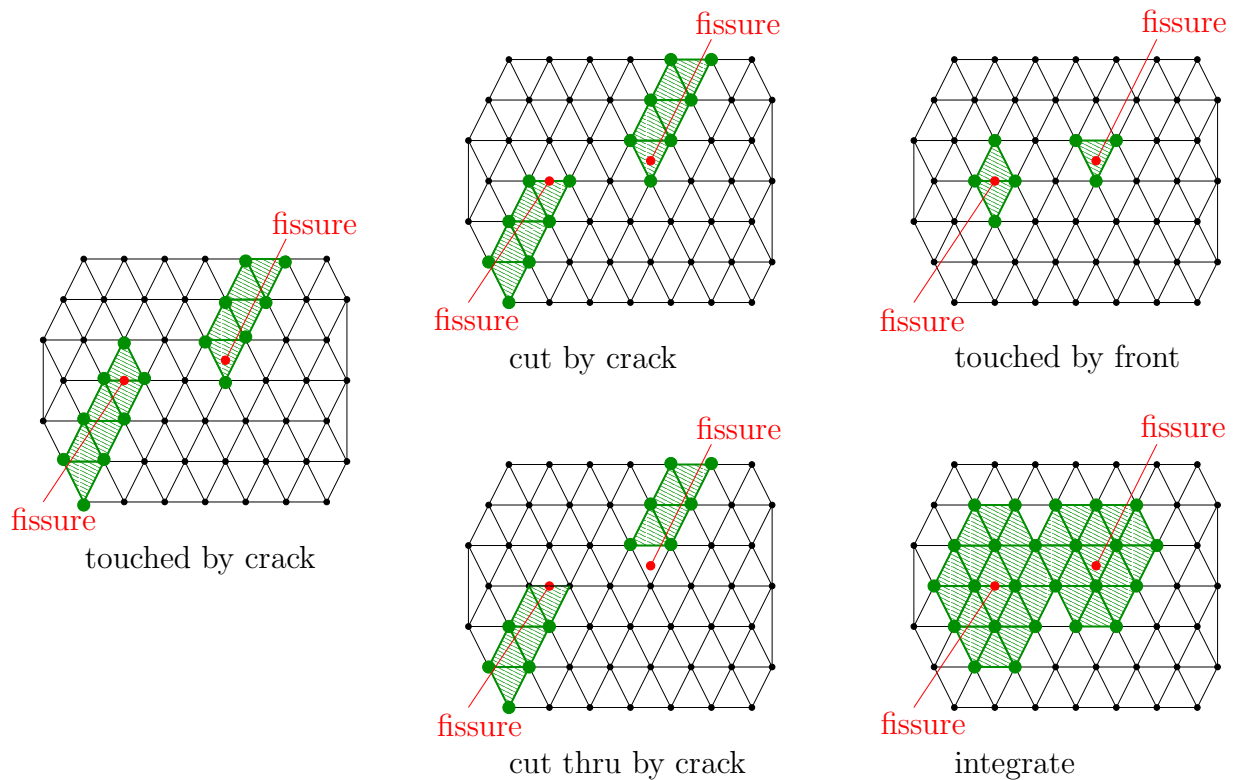


figure 3.16 – Entités à sélectionner pour chaque catégorie

La représentation des fissures s'effectue à l'aide de deux level sets :  $l_{sn}$  représentant la distance normale au plan de fissure et  $l_{st}$  représentant la distance normale au front de fissure. Un maillage de "découpe" (maillage primaire) est tout d'abord défini en fonction de  $l_{sn}$ . Ce maillage résulte de l'intersection de l'iso-zéro de la level set avec le maillage de départ. La deuxième level set est appliquée au maillage de "découpe" afin de définir le front de fissure (maillage secondaire) (cf. figure 3.17). Cette représentation est à l'origine de la construction des ensembles précédents. L'annexe B définit, en pratique la façon séquentielle de définir les différents ensembles.

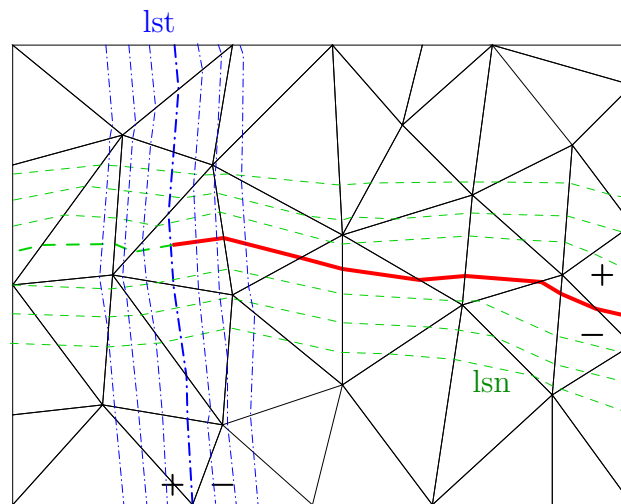


figure 3.17 – Représentation de fissure en deux dimensions

Concernant l'enrichissement, les entités appartenant à la catégorie **supports cut thru by crack** seront enrichies par le biais de la fonction Heaviside et celles appartenant aux catégories **supports touched by front** et **integrate front** seront enrichies pour tenir compte de la pointe de fissure. La différence entre ces deux ensembles réside dans leur taille de domaine. En effet le deuxième concerne un nombre d'entités un peu plus grand autour de la pointe de fissure que le premier. Les autres types peuvent servir à des intégrations diverses, des post-traitements de résultats ou ne sont uniquement construits que pour la définition des ensembles précédents.

### 3.2.3.2.2 Méthode de tri multi-domaine et logique de communication

L'objectif de la méthode est de faire communiquer les différentes parties du maillage afin que les différents ensembles puissent être construits pour permettre l'enrichissement. Plus précisément, les entités qui partagent leur support sur plusieurs parties du maillage doivent avoir les informations nécessaires pour définir leur appartenance à un ou des ensembles.

Pour transférer les informations d'une partie du maillage à une autre pour les entités se trouvant sur l'interface, nous nous appuyons sur une communication basée sur des opérations logiques.

**Mise à zéro de valeurs de level set** Dans un premier temps, nous reprenons le cas de la fonction permettant de mettre à zéro une valeur de level set aux noeuds. Pour permettre la communication de la mise à zéro, les entités se trouvant sur l'interface sont liées à un booléen. Celui-ci prend la valeur *vrai* lorsque sur la partie du maillage où son entité se trouve, les conditions pour la mise à zéro sont remplies. Nous échangeons et

sommons les booléens sur chaque sous-domaine pour que la valeur soit mise à zéro sur l'ensemble du maillage. La relation logique est donc OR. Nous reprenons la figure 3.7 pour illustrer ce cas. Le booléen  $b_2$ , attaché au noeud **1**, prend *vrai* comme valeur alors que  $b_1$ , le booléen attaché au noeud **1**, prend *faux*. De chaque côté de l'interface nous échangeons les booléens et réalisons l'opération  $b_1$  OR  $b_2$ . Le résultat est *vrai* et l'entité 1 possède donc la même valeur de level set sur chaque partition du maillage.

**Trous et inclusions** De la même manière que précédemment, des booléens sont échangés et sur chaque partition, des opérations logiques sont effectuées. Pour ce cas, nous avons quatre informations à échanger. Ces informations correspondent à l'appartenance ou non, aux groupes **in**, **out**, **boundary** et **boundary strict**. Pour chaque groupe, un booléen est créé :  $b_i$ ,  $b_o$ ,  $b_b$  et  $b_{bs}$ . Chaque entité située sur l'interface est associée à ces quatre booléens. Si une entité appartient au groupe **in** alors le booléen  $b_i$  qui lui est associé prend la valeur *vrai*. Nous procédons de la même manière pour les autres groupes. Une fois les quatre valeurs de booléens définies pour chaque entité sur l'interface, celles-ci vont être échangées de part et d'autre de l'interface. Enfin, une ou plusieurs opérations sont effectuées pour déterminer une nouvelle valeur du booléen représentant l'appartenance ou non à un groupe à l'échelle du maillage entier. Le tableau 3.1 définit l'ensemble des opérations à effectuer lors d'un échange entre deux partitions (P1 et P2).

Groupe	Booléen sur P1	Booléen sur P2	Opération
<b>in</b>	$b_i^1$	$b_i^2$	$b_i^1$ OR $b_i^2$
<b>out</b>	$b_o^1$	$b_o^2$	$b_o^1$ AND $b_o^2$
<b>boundary</b>	$b_b^1$	$b_b^2$	$(b_b^1$ OR $b_b^2)$ OR $(b_i^1$ AND $b_o^2)$ OR $(b_o^1$ AND $b_i^2)$
<b>boundary strict</b>	$b_{bs}^1$	$b_{bs}^2$	$b_{bs}^1$ OR $b_{bs}^2$

tableau 3.1 – Opérations effectuées entre deux partitions dans le cas de trous et d'inclusions

Par exemple, en prenant en compte la totalité du maillage, une entité est classée dans le groupe **in** si la valeur de la première opération ( $b_i^1$  OR  $b_i^2$ ) est *vrai*.

**Fissures** Le tri pour les fissures est similaire au précédent. Cinq booléens sont à créer pour les six groupes permettant l'enrichissement pour les fissures. Les cinq premiers groupes sont : **touched by crack**, **touched by front**, **cut by crack**, **cut by crack to delete** et **integrate** et les booléens se rapportant à eux sont :  $b_{tc}$ ,  $b_{tf}$ ,  $b_{cc}$ ,  $b_d$ ,  $b_{it}$ . Le dernier groupe est **cut thru by crack** et est défini en fonction de **cut by crack** et **cut by crack to delete**. Par conséquent il dépend des valeurs de booléens  $b_{cc}$  et  $b_d$ . Le tableau 3.2 définit l'ensemble des opérations à effectuer lors d'un échange entre deux partitions (P1 et P2).

Groupe	Booléen sur P1	Booléen sur P2	Opération
<b>touched by crack</b>	$b_{tc}^1$	$b_{tc}^2$	$b_{tc}^1$ OR $b_{tc}^2$
<b>touched by front</b>	$b_{tf}^1$	$b_{tf}^2$	$b_{tf}^1$ OR $b_{tf}^2$
<b>cut by crack</b>	$b_{cc}^1$	$b_{cc}^2$	$b_{cc}^1$ OR $b_{cc}^2$
<b>cut by crack to delete</b>	$b_d^1$	$b_d^2$	$b_d^1$ OR $b_{td}^2$
<b>integrate</b>	$b_{it}^1$	$b_{it}^2$	$b_{it}^1$ OR $b_{it}^2$
<b>cut thru by crack</b>			$(b_{tc}^1$ OR $b_{tc}^2)$ NOT $(b_d^1$ OR $b_{td}^2)$

tableau 3.2 – Opérations effectuées entre deux partitions dans le cas de fissures

### 3.2.3.2.3 Mise en oeuvre

**Principe de communication** La méthode réside dans le fait que l'échange s'effectue uniquement à l'interface des différentes partitions du maillage. Les données communiquées ne peuvent être échangées que par l'intermédiaire des entités se trouvant sur cette interface. Lors de la lecture des différentes partitions du maillage, en début de programme, une initialisation des données à l'interface est réalisée. Une table de connexion est créée entre les partitions. Cela permet à chaque process de se repérer par rapport au reste du maillage. Dans le même temps, chaque entité se constitue une certaine somme d'informations. A la fin de cette étape, chaque entité connaît celle qui est sensée la représenter sur le(s) autre(s) partie(s) du maillage. Cette communication est réalisée via AUTOPACK (présentée dans la section 3.1.3.2) qui permet d'envoyer un message d'un processeur à un autre, et qui réinterprété, définit l'information liée à une entité.

Il est possible d'échanger toutes sortes de données : vecteurs d'entiers, matrices d'entiers, booléens ... D'un point de vue global, chaque donnée échangée est liée à une entité de l'interface et pour chaque partition. La méthode présente deux aspects : les données à transférer et leur traitement. Le traitement des données peut être, lui aussi, séparé en deux catégories : l'envoi et la réception.

Le tableau (3.3) présente la façon d'opérer un échange. Dans un premier temps une association entre l'entité et les données est accomplie. Ce couple définit les données qui vont être échangées entre deux ou plusieurs partitions du maillage. Ensuite, la préparation du message débute. Tout d'abord, la fonction ENV, dont le rôle est présenté sur la figure 3.18, définit la taille de l'entité et des données se rapportant à celle-ci afin de déterminer la taille totale du message à envoyer. Puis, le numéro du processeur (équivalent au numéro de partition traitée par celui-ci), vers qui le message s'adresse, est récupéré. Une fois ces informations collectées, cette même fonction crée le message et l'envoi. Le message transmis, via le réseau, au processeur concerné est ensuite traité par la fonction REC. Il est décrypté pour se saisir de l'information attachée à l'entité pour permettre son traitement afin d'en tirer le résultat final. Toute cette procédure est inversement développée afin que

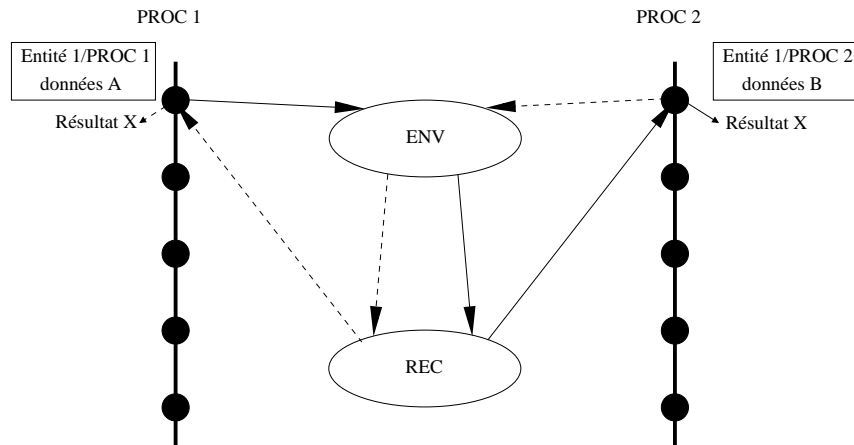


figure 3.18 – Représentation de l'échange à l'interface.

le résultat soit identique pour l'information concernée sur la partition voisine.

Ayant défini le type de communication utilisé, nous pouvons maintenant nous attacher à présenter la méthode qui va nous fournir le moyen de décrire le positionnement de n'importe quelle entité du maillage par rapport à une discontinuité.

**Démarche** Nous avons vu précédemment que la première étape est de définir le stockage des données à échanger, c'est à dire la liaison entité - données. Les données à échanger définies préalablement sont des booléens. La méthode proposée est de créer, préalablement à la communication, différents containers reliant une entité à un booléen.

L'approche générale pour définir les différents ensembles se déroule en trois phases : une étape de pré-échange ou initialisation, l'échange, et une de post-échange ou d'actualisation.

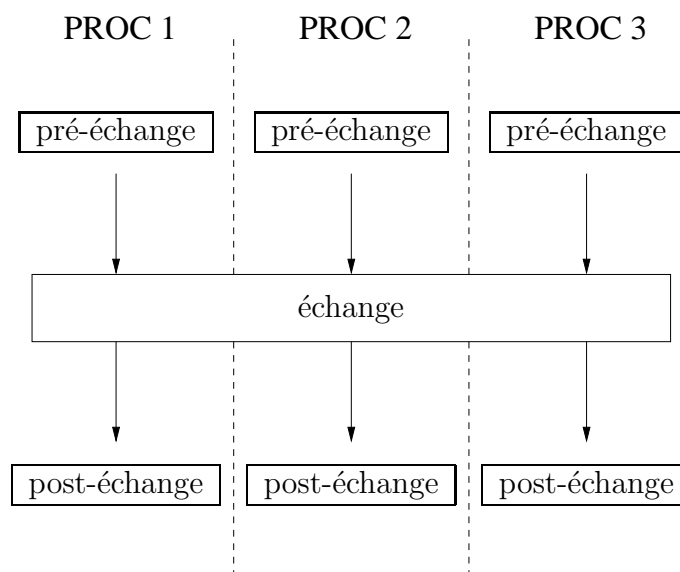


figure 3.19 – Représentation de la méthode de classement avec 3 processeurs.



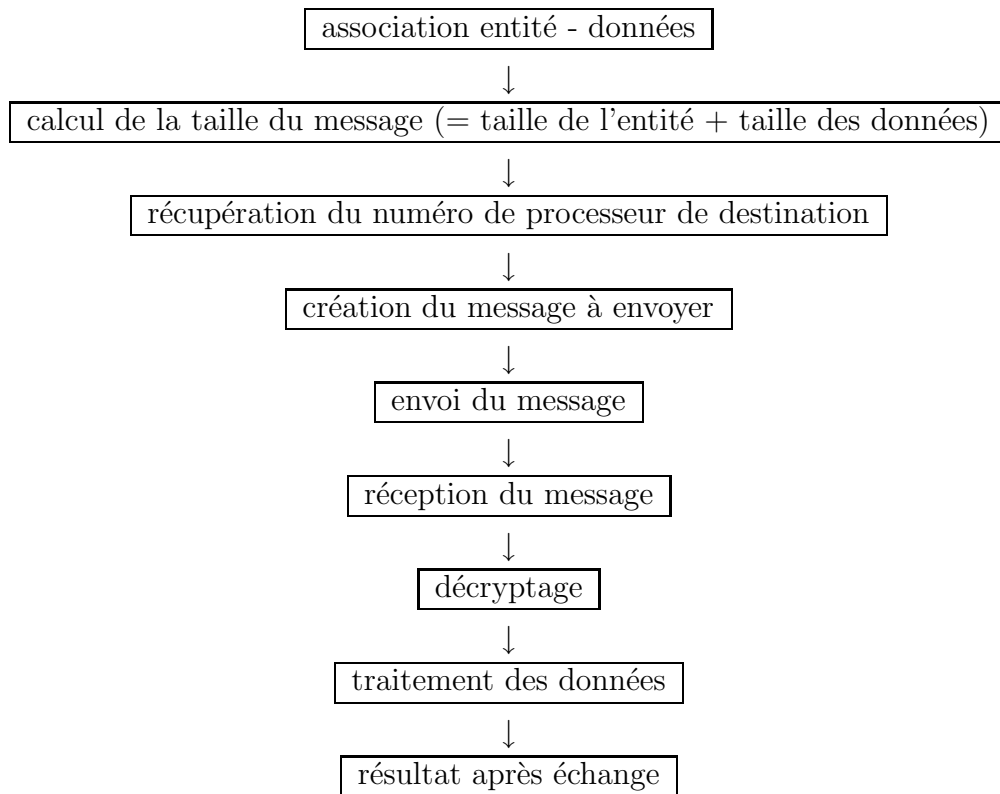


tableau 3.3 – Logique de l'échange.

En pratique, pour des raisons de simplicité au niveau de l'implémentation, seules les opérations *OR* sont effectuées lors de l'échange. Il nous est ensuite possible (après échange) d'effectuer les opérations *AND* ou *NOT* par l'utilisation de tests ou de soustractions d'ensembles. Cela revient à respecter la même logique que précédemment.

Dans un premier temps, chaque ensemble induit la création d'un container, appelé map, qui contient une entité reliée à un booléen qui prend *faux* comme valeur lors de l'initialisation. Ensuite, si le test sur une entité s'avère juste, le booléen affilié à celle-ci est mis à *vrai*. Par exemple, si l'entité répond aux conditions pour appartenir à l'ensemble **boundary**, celle-ci sera associée à *vrai* au sein de la map  $map_{boundary}$ . Une fois ces map entièrement définies, l'échange peut avoir lieu. Comme il est précisé dans la section 3.2.3.2.3, pour toutes les entités de l'interface, un message va être créé par la fonction ENV. Celle-ci récupère le booléen associé à l'entité dans  $map_{boundary}$ , calcule la taille du booléen ainsi que celle de l'entité et se saisit du numéro de la partition de destination. Une fois toutes ces informations collectées, elle prépare le message et l'envoi. La fonction REC prend ensuite le relais en décryptant le message au niveau du processeur concerné. En effet, s'effectue alors une somme entre le booléen reçu et celui existant sur la partition qui reçoit le message pour la même entité. Le résultat de l'opération permet de dire si cette entité appartient bien à l'ensemble boundary. Cette somme définit la manière de traiter l'information. La partie échange ainsi achevée, l'entité située dans  $map_{boundary}$  se retrouve liée à une nouvelle valeur booléenne, il s'agit de l'actualisation. Cette procédure est répétée

pour chaque map. Nous obtenons donc, après ces trois étapes, une nouvelle version des maps qui vont permettre de définir les ensembles finaux d'entités.

L'algorithme en annexe C présente la démarche de l'échange dans le cas des trous et des inclusions.

**Exemple sur le cas des trous** Nous pouvons reprendre le schéma 3.8 représentant la problématique dans le cadre des trous et le redéfinir par le schéma 3.20 suivant. Celui-ci nous présente la réalisation de la communication entre deux processeurs. L'entité  $\underline{1}$  d'après le test sur sa partition se trouve dans le vide. Mais sur la partition voisine, l'entité  $\hat{1}$ , représentant d'une manière générale la même entité que  $\underline{1}$ , se situe dans la matière. Après le transfert du booléen attaché à ces deux entités, représentant l'appartenance ou non à la matière, l'entité  $\underline{1}$  a actualisé l'information lui dictant son appartenance à l'ensemble matière. Une fois la communication établie, l'entité 1 se situe dans la matière et ne sera donc pas éliminée.

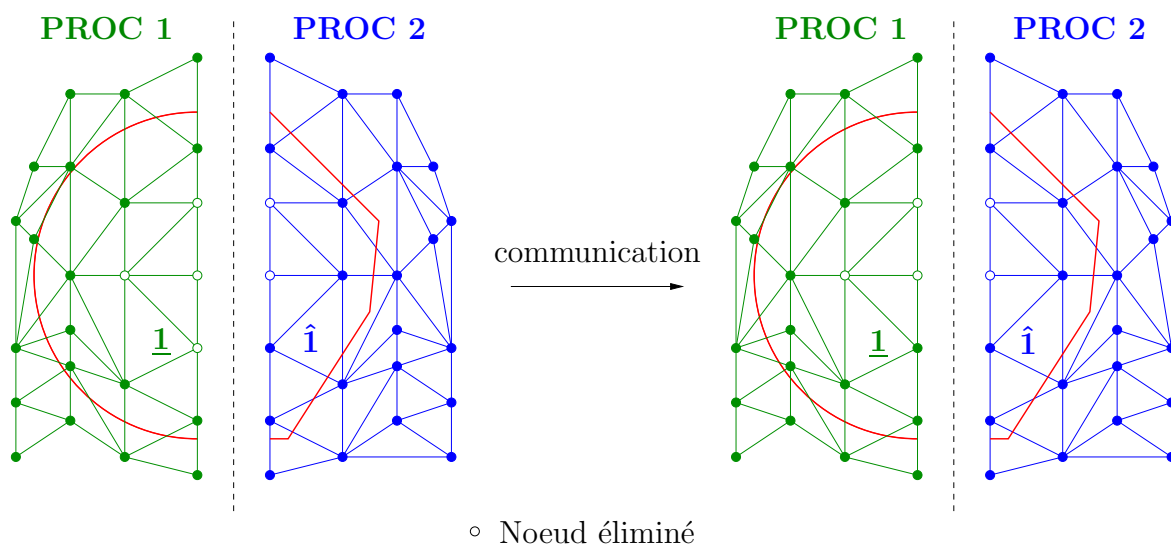


figure 3.20 – Résultat de la communication sur l'élimination de noeuds.

Cette méthode est appliquée de la même façon pour les fissures et la mise à zéro de valeurs de level set.

Après avoir entamé la mise en oeuvre de la méthode X-FEM au calcul parallèle, d'une part par la description du principe général, d'autre part par les spécificités propres d'X-FEM et sa problématique, nous avons pu présenter la mise en oeuvre des méthodes de communication inter-processeurs permettant son application. Nous illustrerons enfin notre étude par des cas tests et aborderons son analyse en terme de capacité et de temps.

### 3.3 Applications

Différentes applications sont testées en version parallèle afin de pouvoir évaluer la capacité à traiter divers types de problèmes et les performances en temps des méthodes employées, pour connaître leur efficacité et permettre de pointer les aspects à améliorer. Les applications sont exécutées sur l'architecture présentée dans la section 3.1.3.1.

#### 3.3.1 Critères de performance

D'emblée, il est indispensable de préciser les paramètres légitimant l'analyse des résultats obtenus. Les variables disponibles pour mener à bien notre étude portent en premier lieu sur le temps. Il s'agit des temps de restitution, effectif de calcul, de communication et d'attente. Ensuite, peuvent être cités le nombre de degrés de liberté, d'éléments, de sous-domaines, d'itérations pour la résolution et l'aspect du découpage. Ces temps sont récupérés par l'intermédiaire d'un programme développé dans [58] qui décrypte les données de mpip [63]. mpip est un outil permettant d'obtenir les temps passés dans l'exécution des différentes fonctions MPI. Il est aussi possible de dissocier le type de résolution de la méthode éléments finis employée ou encore de comparer les différentes catégories de problèmes mécaniques.

Le temps de restitution  $T_{Res}$  c'est à dire la période qui correspond à l'intervalle de temps entre le lancement du calcul et l'obtention des résultats, se décompose comme suit :

$$T_{Res} = T_{CPU} + T_{tsf} + T_{att} \quad (3.5)$$

où  $T_{CPU}$  représente le temps de calcul, et la somme du temps de transfert avec le temps d'attente ( $T_{tsf} + T_{att}$ ) symbolise  $T_{com}$  le temps de communication.

Il est souvent fait usage de l'accélération dans ce genre d'observations. Elle peut être définie par un des deux rapports suivants :

$$\begin{cases} U_{RES} = \frac{T_{Res}^0}{\max_n^i(T_{Res})} \\ U_{CPU} = \frac{T_{CPU}^0}{\max_n^i(T_{CPU})} \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $n$  décrit le nombre de processeurs, donc de partitions, utilisés pour le calcul et  $T^0$  le temps mis pour exécuter le programme par un seul processeur employant la même méthode de résolution. La première définition est d'ordre général. Dans ce cadre, l'utilisateur s'attend à voir le temps diminuer de façon inversement proportionnelle au nombre de processeurs utilisés. La seconde est un peu plus fine car elle ne prend en compte que le temps mis réellement à l'exécution du calcul. Ces accélérations sont tracées en fonction

du nombre de partitions et permettent d'évaluer notre système (partitionnement, méthode de résolution et gestion de l'enrichissement).

Une autre ressource que nous pouvons utiliser est le temps effectif représenté comme la

$$\text{somme des temps CPU : } T_{eff} = \sum_i^n T_{CPU}^i$$

### 3.3.2 Exemples

Les différents exemples suivants traitent de domaines variés. Dans un premier temps, nous présentons un cas de calcul simple en trois dimensions qui sert de référence par rapport aux autres applications puisqu'il utilise la méthode des éléments finis alors que les autres sont destinés à être traités par la méthode des éléments finis étendus. Les différents cas de calculs sont effectués sur des maillages composés d'éléments triangles linéaires pour les problèmes en deux dimensions et d'éléments tétraèdres linéaires pour les cas en trois dimensions.

#### 3.3.2.1 Calcul d'un champ de températures

Le premier de ces exemples permet, en quelque sorte, de définir le cas de calcul de référence pour les cas suivants. Il s'agit d'un cube, dont le coefficient de conduction s'élève à 1 W/mK, soumis à un gradient de température nulle sur une de ses faces et égale à 200° K sur celle qui lui fait face. La figure 3.21 détaille le découpage d'un des maillages réguliers utilisés en quatre parties (où les éléments sont des tétraèdres regroupés, au niveau de la visualisation, en cubes).

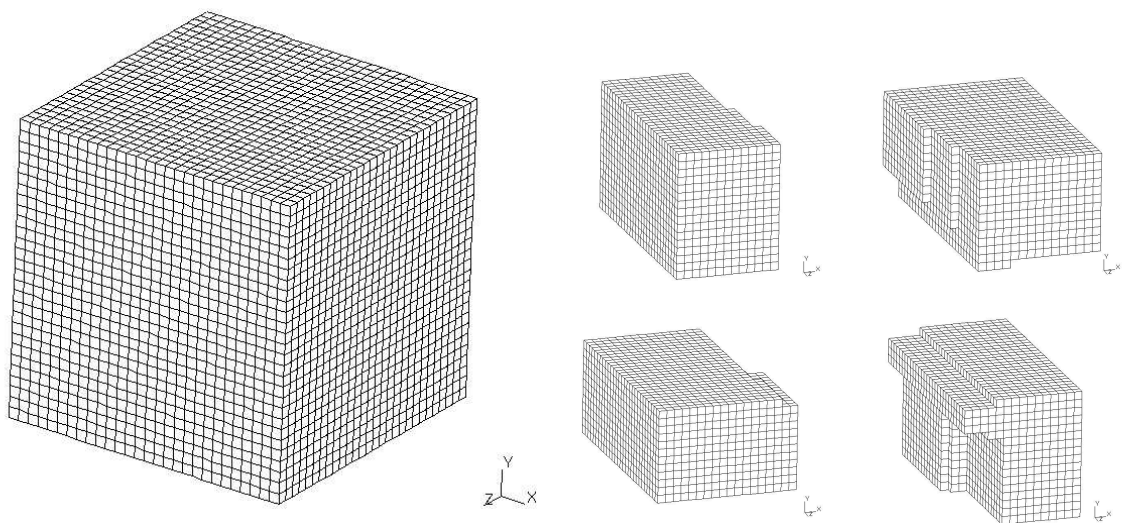


figure 3.21 – Exemple de maillage utilisé et représentation d'un partitionnement en quatre

La figure (3.22) donne un exemple de représentation de résultats sur deux partitions et combinée.

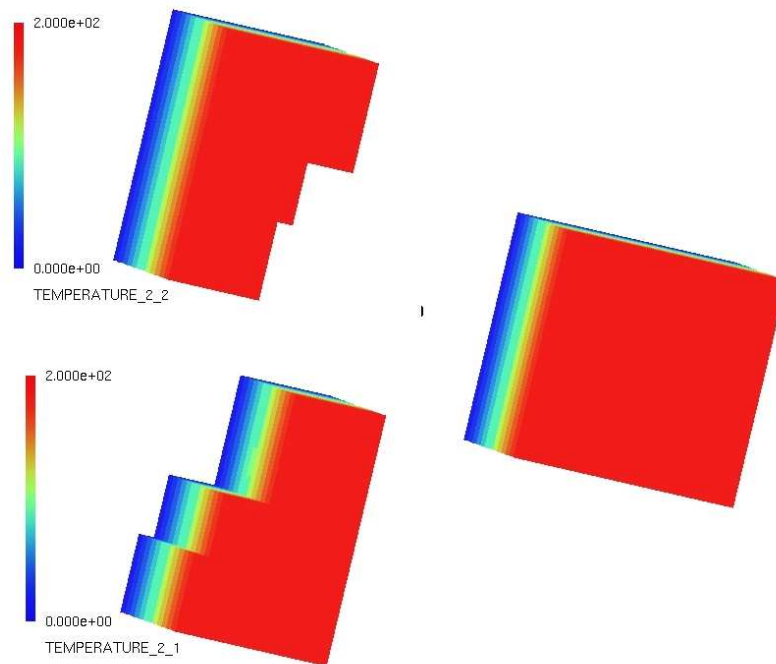


figure 3.22 – Représentation du champ de température (K).

Trois tests ont été réalisés pour ce problème considérant trois nombres de degrés de liberté différents. En premier lieu, nous traçons, figure 3.23 le temps effectif en fonction du nombre de partitions employées. Il nous permet de noter qu'il est sensiblement identique pour chaque cas de partitionnement excepté lors de l'utilisation d'un seul processeur.

Les accélérations, présentées figure (3.24), ont globalement une pente très proche de la pente unitaire, mais au dessus de celle-ci définissant ainsi une sur-accelération en début de tracé.

### 3.3.2.2 Plaque percée d'un trou sous tension

Les résultats présentés dans cette section, ont été dans développés dans [8].

Nous reprenons dans cet exemple le cas traité d'une plaque percée sous tension dans la section 1.4.1.3.1 du premier chapitre concernant l'homogénéisation périodique. Nous utilisons de nouveau cet exemple afin de s'assurer, dans un premier temps, de la validité de la solution globale obtenue. Le maillage utilisé est un carré de 200 éléments par côté maillé de façon régulière. Le problème contient 71293 degrés de liberté.

Les champs de déplacements et de contraintes obtenus sont représentés sur la figure 3.25.

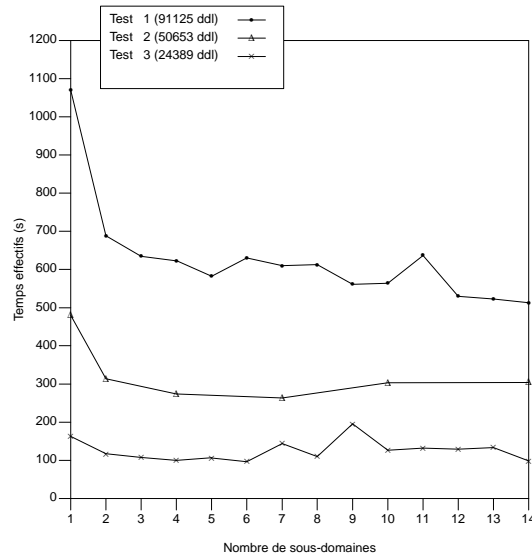
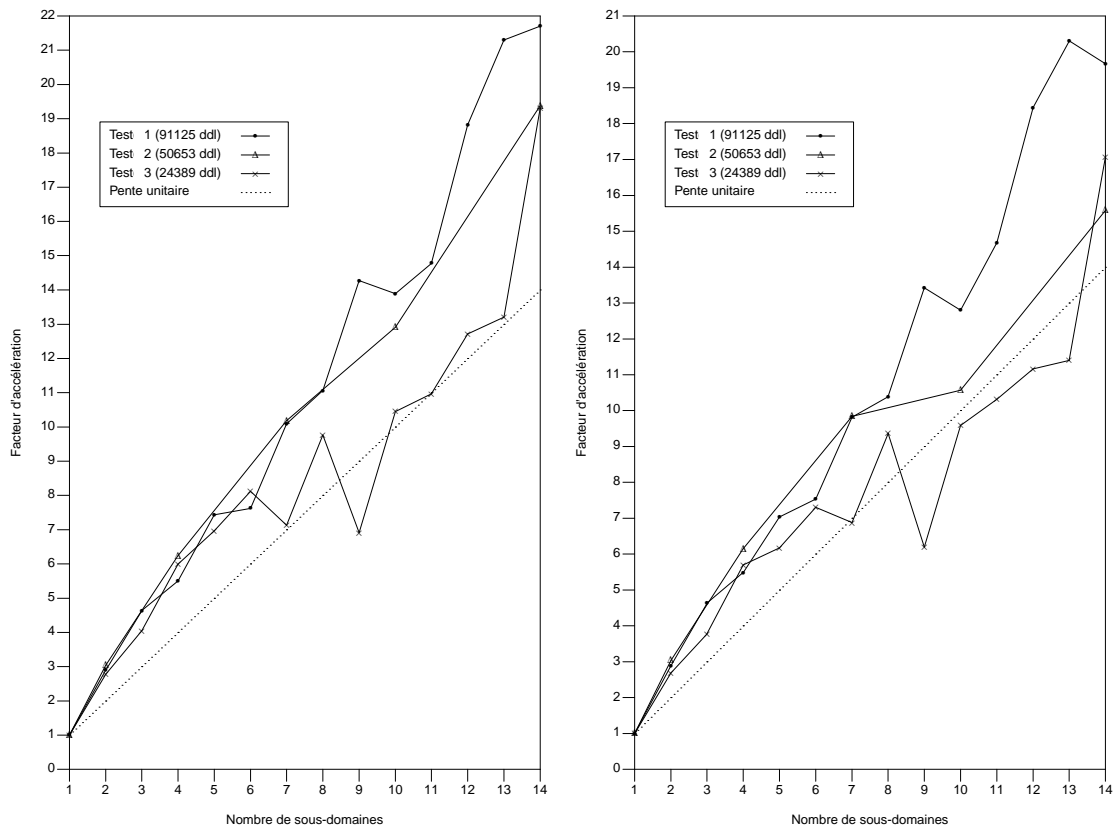


figure 3.23 – Temps effectif en fonction du nombre de partitions.



(a) Facteur d'accélération CPU.

(b) Facteur d'accélération Res.

figure 3.24 – Facteur d'accélération en fonction du nombre de partitions.

La figure 3.26 représente l'évolution des deux types d'accélération. Leur pente est globalement équivalente à l'unité jusqu'à sept sous-domaines, puis, apparaît une légère suraccélération. De plus la différence entre les deux types d'accélération est très faible; ce

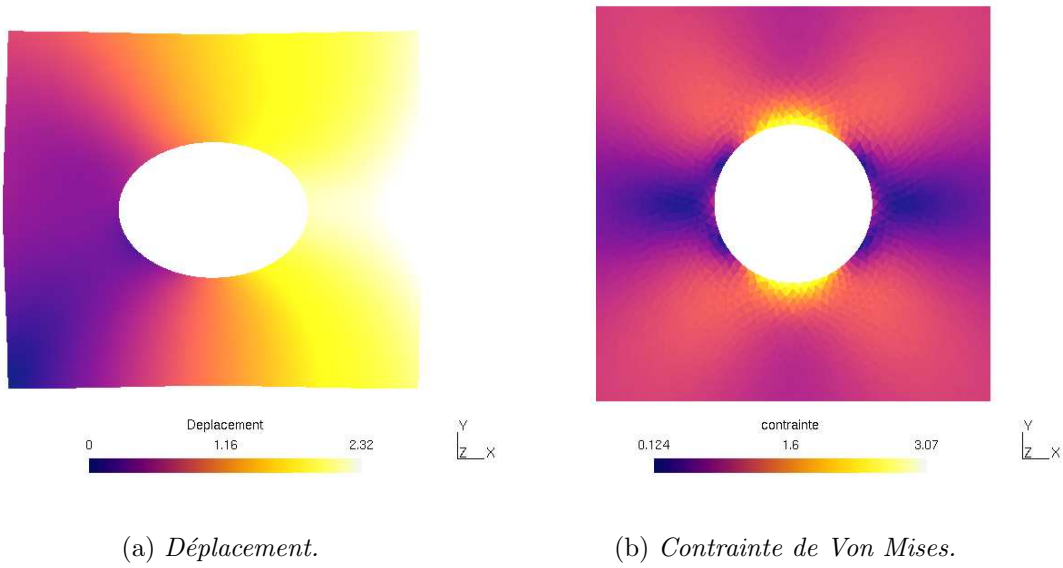


figure 3.25 – Champs de déplacements et de contraintes.

qui permet d'en déduire que la communication n'altère pas l'extensibilité de la méthode dans ce cas.

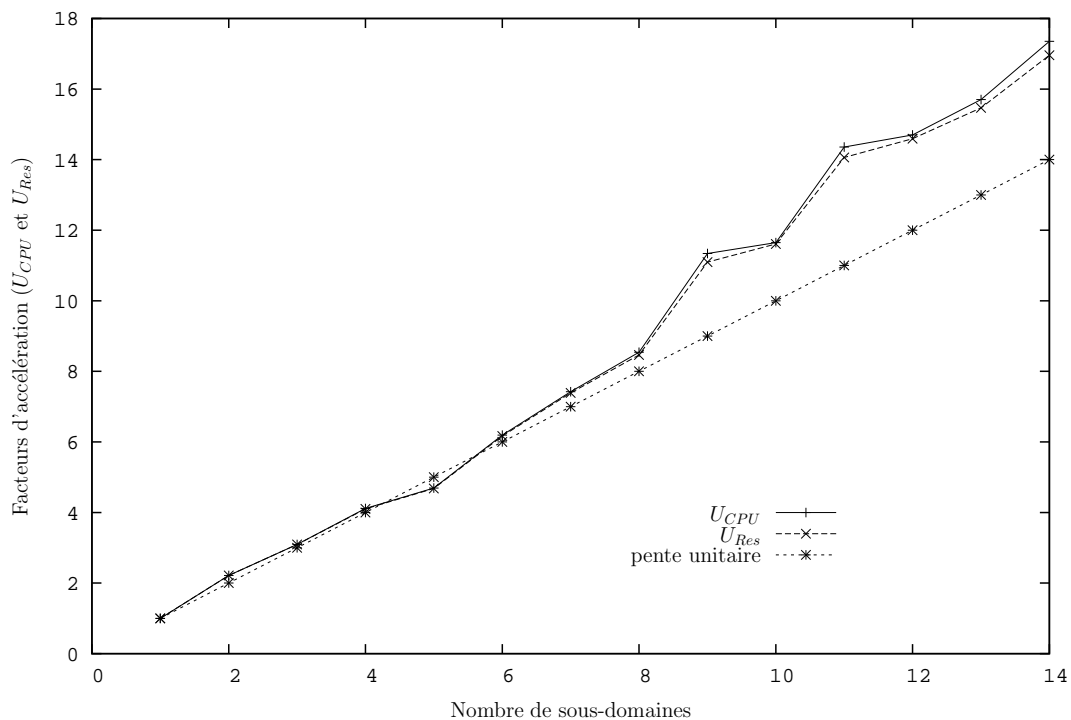


figure 3.26 – Facteurs d'accélération en fonction du nombre de partitions.

La figure 3.27 présente les résultats obtenus pour les temps de calcul et effectif. À partir d'environ dix sous-domaines les deux temps atteignent un palier. Malgré tout, il est important de noter sur la figure 3.28 que le nombre d'itérations pour converger vers la

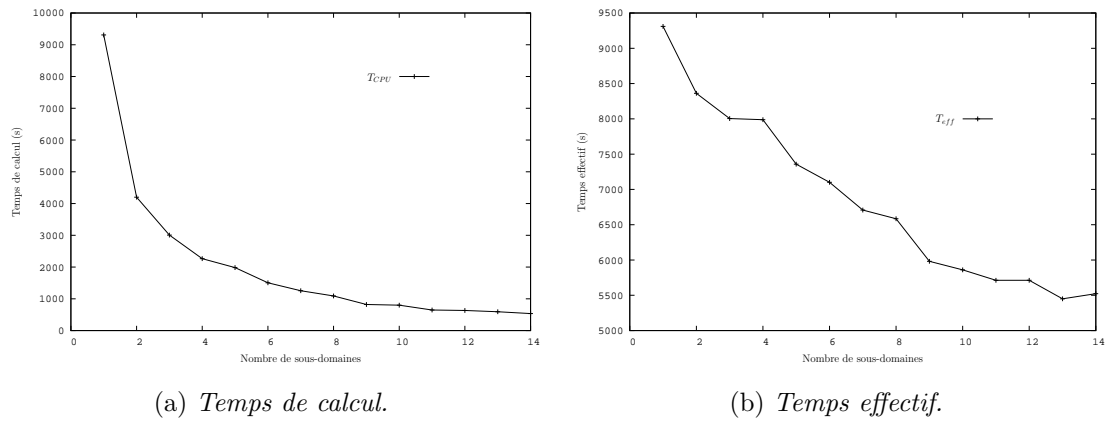


figure 3.27 – Temps de calcul et effectif.

solution augmente avec le nombre de sous-domaines.

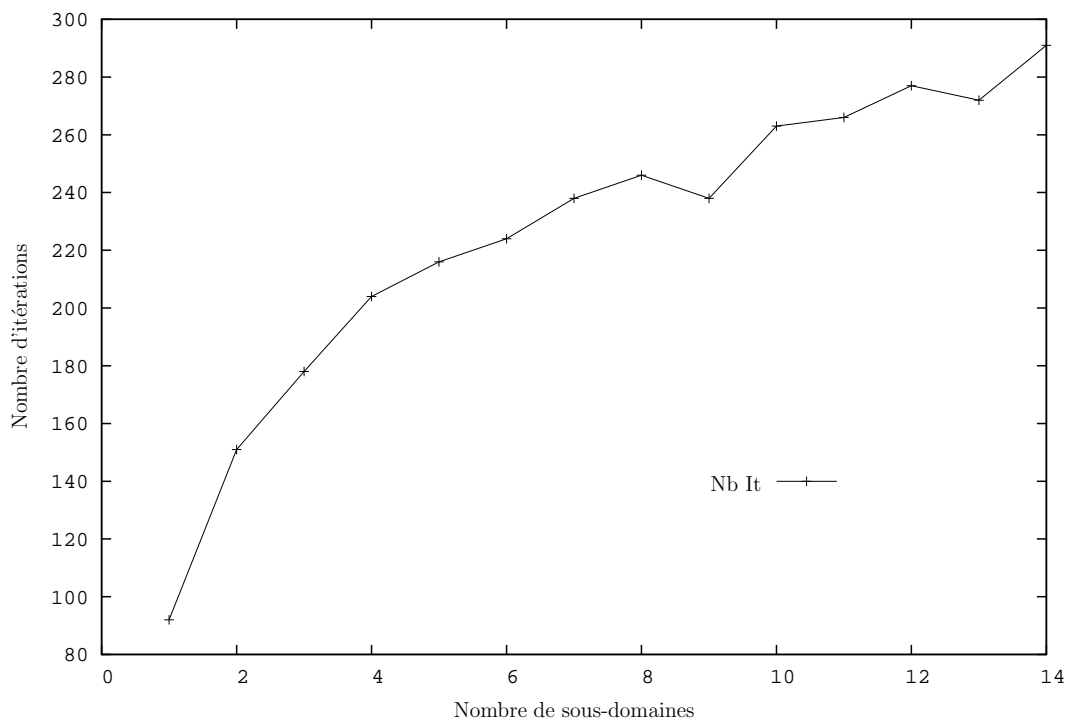


figure 3.28 – Nombre d' itérations en fonction du nombre de sous-domaines.

### 3.3.2.3 Plaque contenant une inclusion circulaire sous tension

Les résultats présentés dans cette section, ont été dans développés dans [8]. Nous reprenons dans cet exemple le cas traité d'une plaque contenant une inclusion sous tension dans la section 1.4.1.3.3 du premier chapitre concernant l'homogénéisation périodique. Nous utilisons de nouveau cet exemple afin de s'assurer, dans un premier temps, de la validité de la solution globale obtenue. Les maillage utilisés sont des carrés de 50 et 200



éléments par côté maillés de façon régulière. Les problèmes contiennent respectivement 5655 et 84781 degrés de liberté pour le problème traité avec l'approche X-FEM.

Les champs de déplacements et de contraintes obtenus avec le second maillage sont représentés sur la figure 3.29.

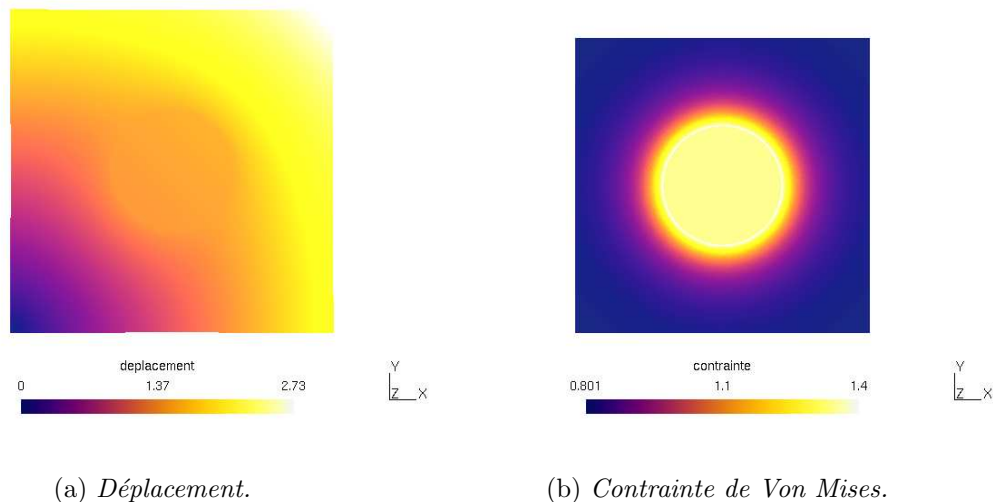


figure 3.29 – Champs de déplacements et de contraintes.

La figure 3.30 représente l'évolution de l'accélération pour différents cas de calcul.

Le premier, noté 200 FEM, représente le problème de l'inclusion traité avec la méthode des éléments finis classique sur un maillage 200 x 200. Le deuxième est résolu, sur le même maillage avec X-FEM et les deux derniers sur des maillage 50 x 50 avec les deux approches. Les nombres de degrés de liberté impliqués avec une résolution par éléments finis sont très proches de ceux définis précédemment.

Ce graphique permet de comparer les résultats obtenus avec les deux méthodes avec des maillages différents. Tout d'abord, on peut noter que les accélérations sont inférieures à celles obtenues pour le cas précédent. Ensuite, l'augmentation du nombre de degrés de liberté amène à une accélération plus importante. Enfin, les accélérations avec FEM et X-FEM sont proches.

Dans un premier temps, il aurait été possible de penser que l'enrichissement apporté dans ce cas, contrairement au précédent où une élimination de noeuds et une sous-intégration sont simplement effectuées, détériore le niveau d'accélération. Cependant, les résultats obtenus avec FEM tendraient à prouver que les conditions aux limites et la présence de

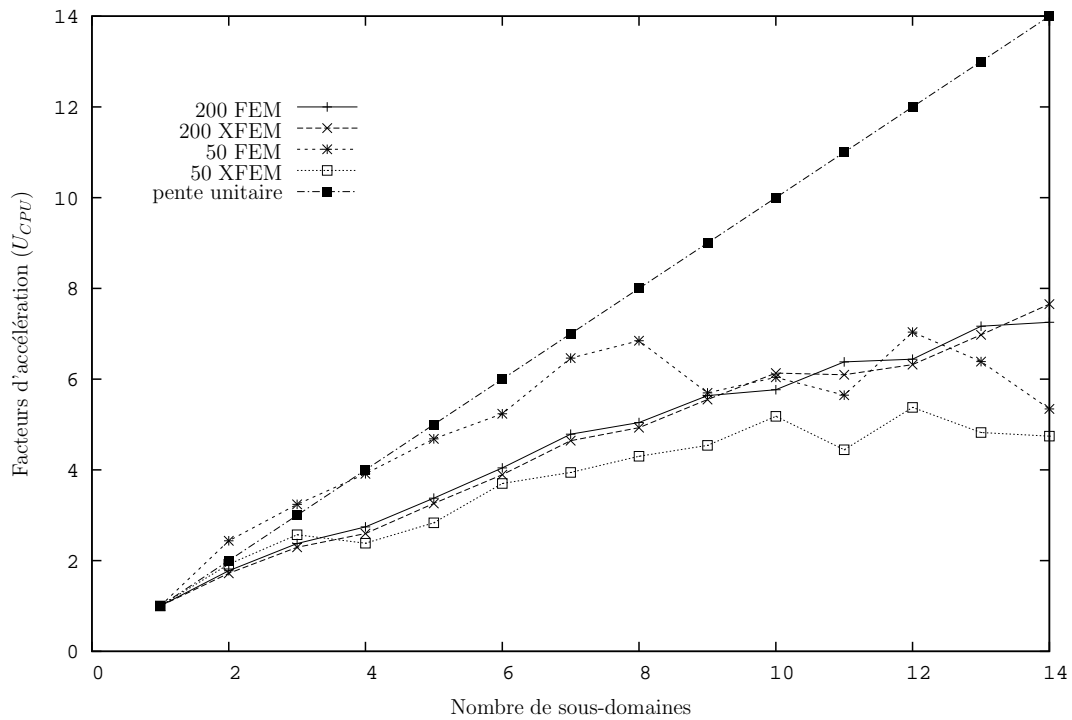


figure 3.30 – Facteurs d'accélération en fonction du nombre de partitions.

deux matériaux seraient à l'origine de cette perte d'accélération.

Les figures 3.31 et 3.32 présentent les résultats obtenus pour les temps de calcul et effectif pour le maillage 200 avec X-FEM.

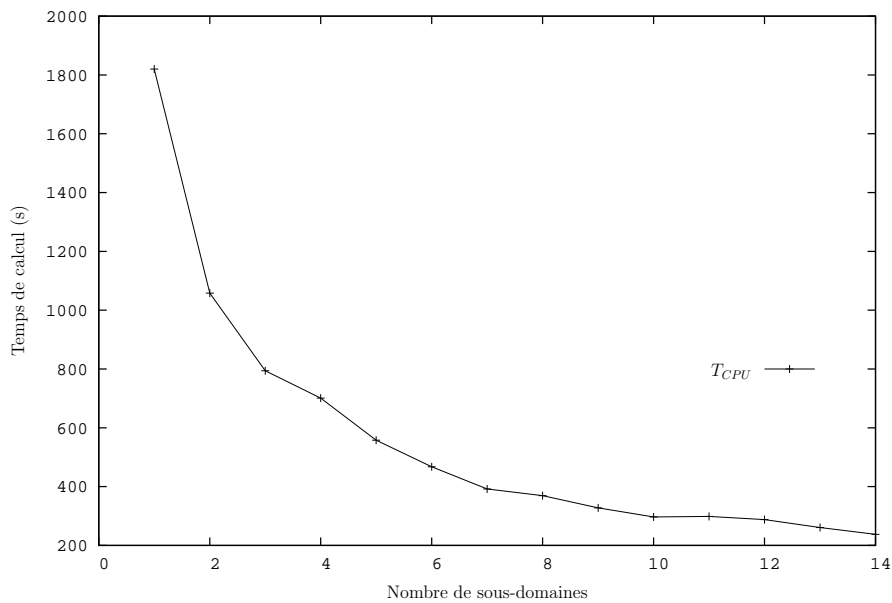


figure 3.31 – Temps de calcul.

Le temps effectif, contrairement au cas précédent, augmente avec le nombre de partitions

employées.

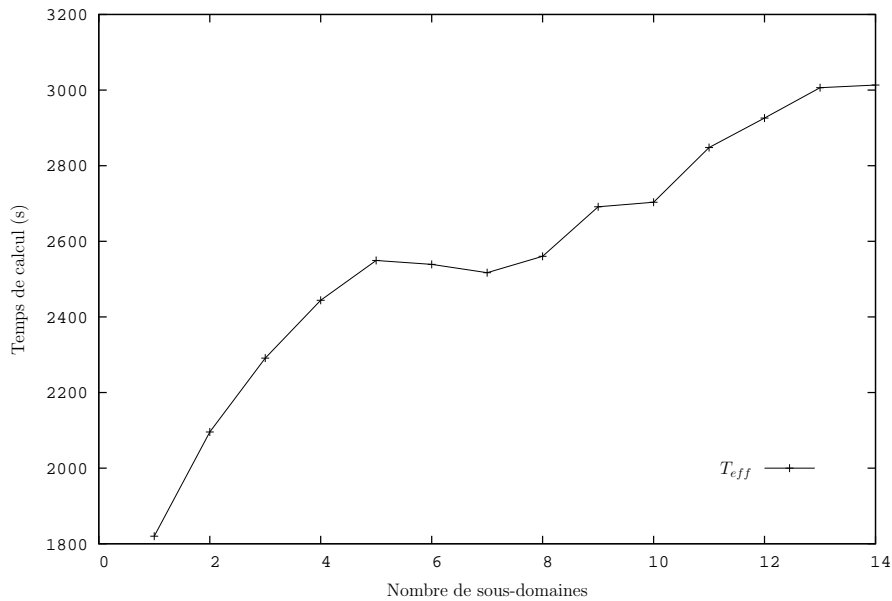


figure 3.32 – Temps effectif.

Identiquement au problème précédent, la figure 3.33 expose l'augmentation du nombre d'itérations pour converger vers la solution en fonction du nombre de sous-domaines pour le maillage 200 avec X-FEM.

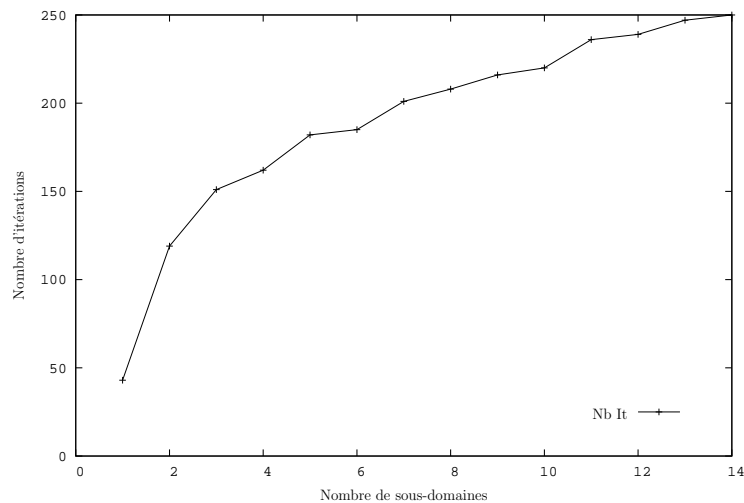
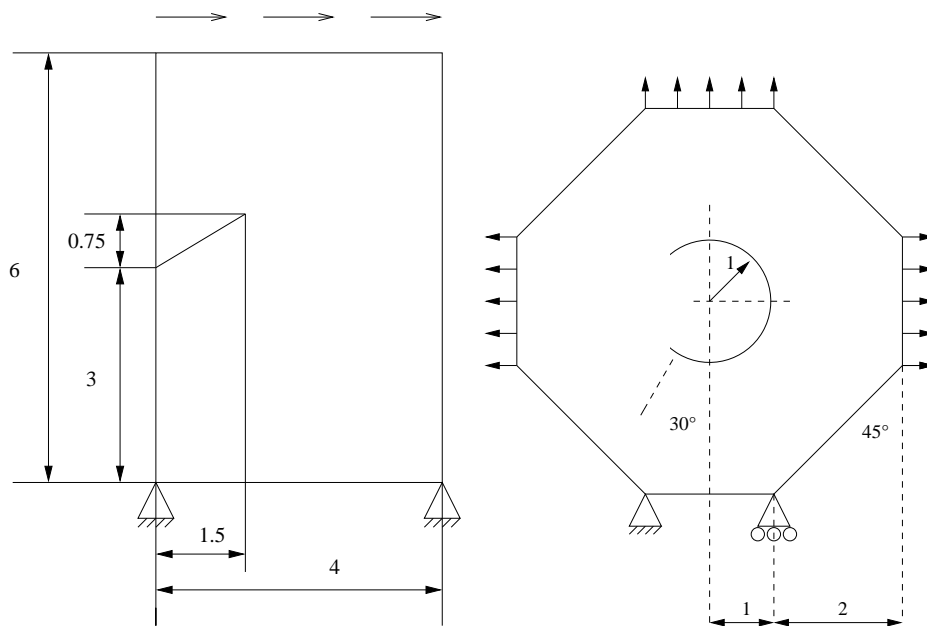


figure 3.33 – Nombre d' itérations en fonction du nombre de sous-domaines.

#### 3.3.2.4 Domaine à deux dimensions contenant une fissure

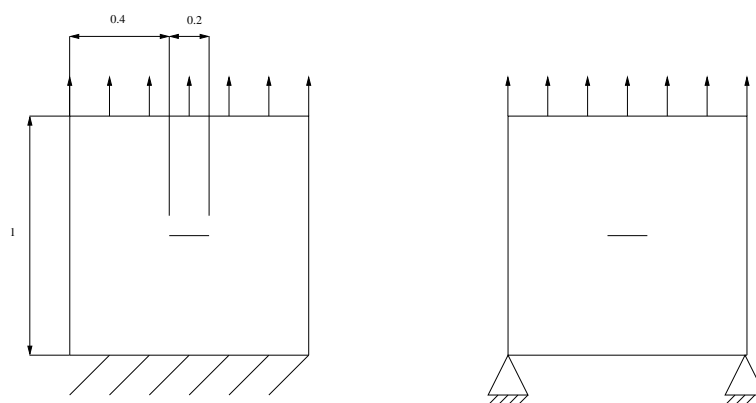
Les résultats présentés dans cette section, proviennent de problèmes contenant différentes sortes de fissures à géométrie et conditions aux limites diverses développés dans [58].

Le premier de ces problèmes traités concerne une plaque de forme octogonale contenant une fissure circulaire et chargée sur trois de ces arêtes. Le maillage comporte 46220 noeuds. Le second décrit un cisaillement imposé sur une plaque rectangulaire contenant une fissure droite. Le maillage comporte 47946 noeuds. Enfin, le dernier expose un carré avec une fissure droite soumis à une traction uniaxiale avec deux conditions aux limites en déplacement différentes. Le maillage raffiné aux alentours de la fissure comporte 40562 noeuds. Tous ces cas sont présentés sur les figures 3.34.



(a) *Plaque rectangulaire sous cisaillement.*

(b) *Octogone contenant une fissure circulaire sous traction.*

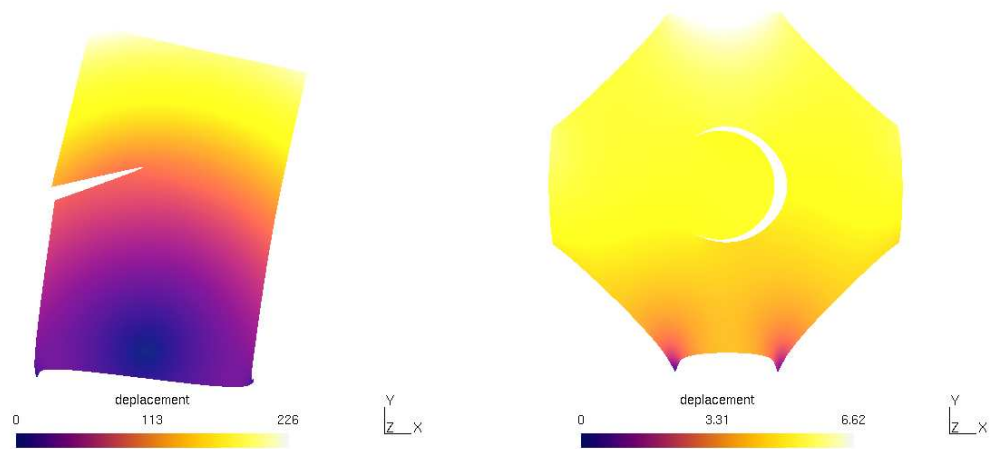


(c) *Carré sous tension.*

figure 3.34 – Description des différents cas.

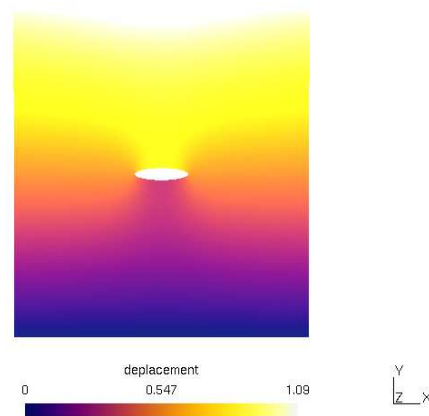
L'ensemble des figures 3.35 présente les champs de déplacements solutions des différents cas testés.

Les figures (3.36 et 3.37) détaillent les accélérations obtenues pour les cas présentés au-



(a) *Plaque rectangulaire sous cisaillement.*

(b) *Octogone contenant une fissure circulaire sous traction.*



(c) *Carré sous tension.*

figure 3.35 – Représentation des déplacements.

paravant. Dans l'ensemble, les facteurs d'accélération tant au niveau du temps CPU que celui de restitution, sont très proches et globalement égaux à une pente  $1/2$ . L'introduction d'une fissure semble abaisser la vitesse d'exécution du calcul mais toujours dans le même ordre de grandeur. L'approche X-FEM, dans sa version parallèle, est extensible dans le cas des fissures mais implique une baisse de performance de la méthode de résolution.

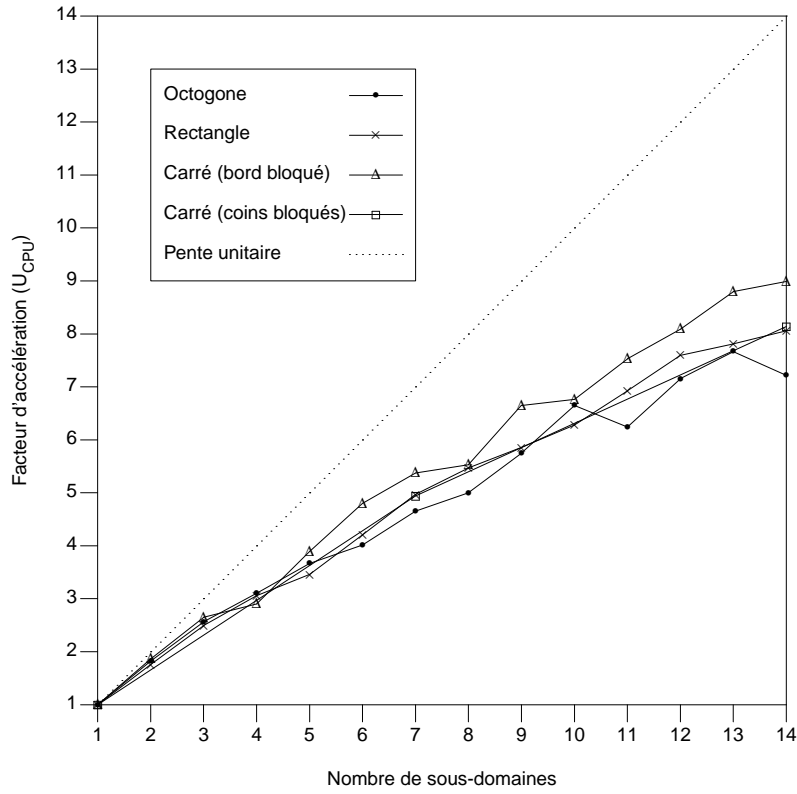


figure 3.36 – Facteur d’accélération CPU en fonction du nombre de partitions.

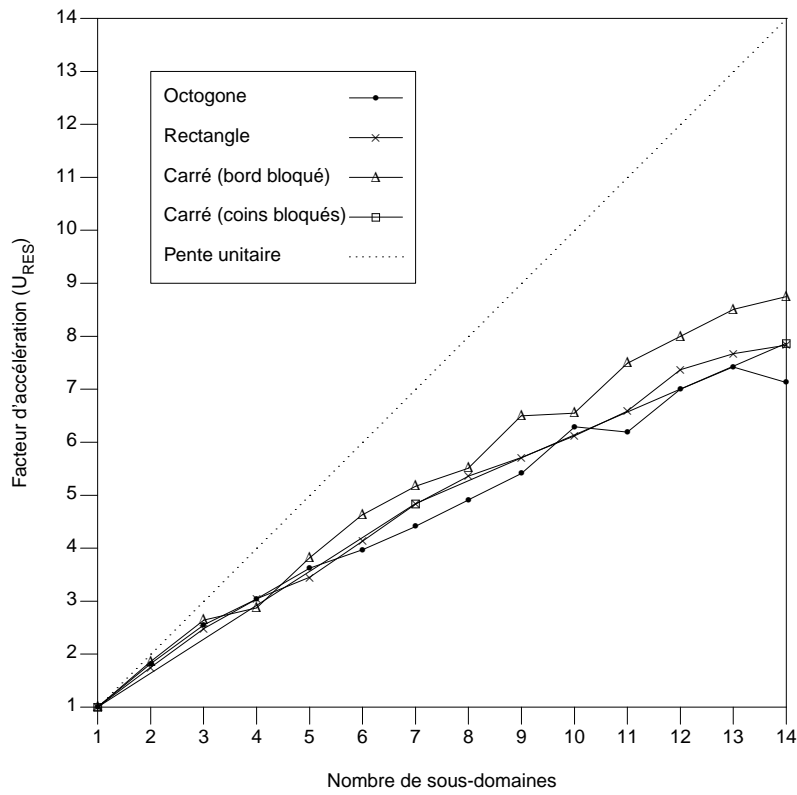


figure 3.37 – Facteur d’accélération Res en fonction du nombre de partitions.

La courbe (3.38) permet d'évaluer plus précisément cette perte d'accélération. En effet, le lecteur notera que le temps effectif augmente régulièrement. Les fissures impliquent donc un temps de calcul supplémentaire sur chaque processeur au fur et à mesure que le nombre de ceux-ci impliqués dans la résolution augmente.

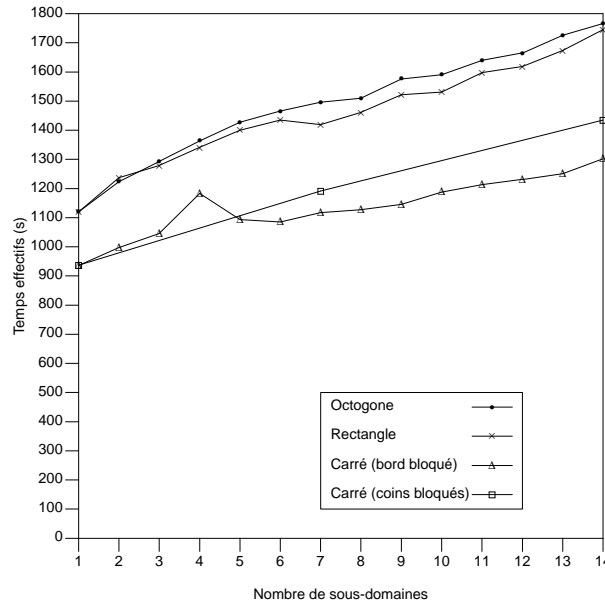


figure 3.38 – Temps effectif en fonction du nombre de partitions.

Figure (3.39), la variation du nombre d'itérations globales, sur l'ensemble du domaine, vient apporter une confirmation sur l'augmentation des temps effectifs.

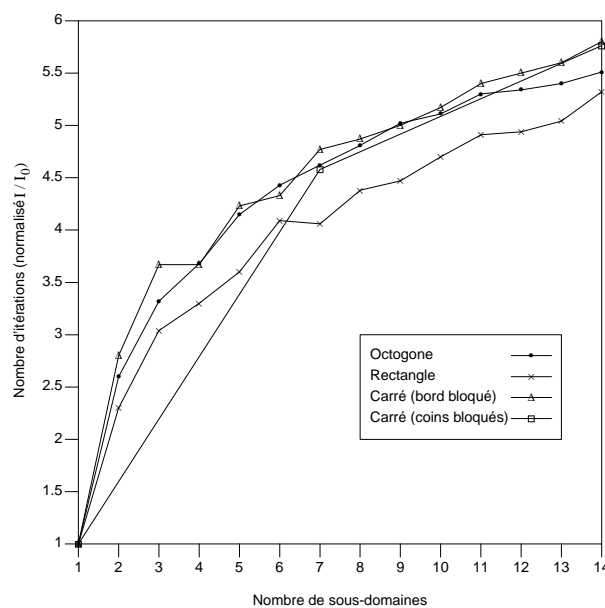


figure 3.39 – Nombre d'itérations en fonction du nombre de partitions.

### 3.3.2.5 Domaine à trois dimensions contenant une fissure

Les résultats présentés dans cette section proviennent de problèmes contenant différentes sortes de fissures à géométrie et conditions aux limites diverses développés dans [58].

Le premier de ces problèmes traités concerne un cube sous tension contenant une fissure elliptique. Le maillage comporte 18240 noeuds. Le second décrit une torsion imposée sur un arbre contenant deux fissures. Le maillage comporte 17102 noeuds. Enfin, le dernier expose une poutre en I contenant, une fissure définissant une portion de sphère, soumise à une flexion. Le maillage comporte 17455 noeuds. Les géométries des deux derniers cas sont présentés en annexe D. Afin d'évaluer l'impact de l'enrichissement, nous effectuons aussi ces mêmes calculs sur des domaines ne contenant pas de fissure.

La figure (3.40) détaille les accélérations obtenues pour les cas présentés auparavant avec et sans fissure. Les cas sans fissure sont traités par la méthode des éléments finis classique puisqu'aucun enrichissement n'est impliqué dans la résolution. Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que les résultats obtenus pour des domaines avec et sans fissure sont proches. Le facteur d'accélération pour le cube est au-dessus de la pente unité.



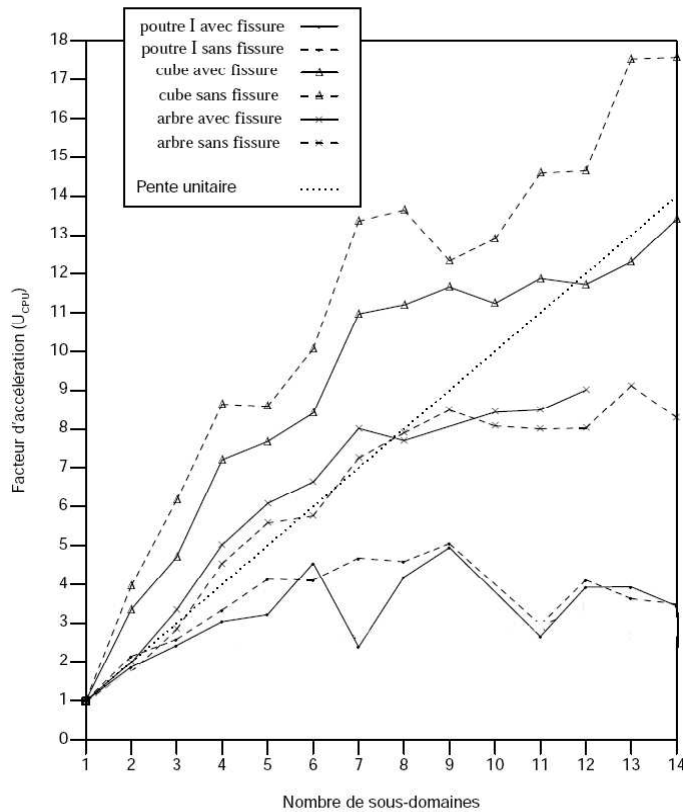


figure 3.40 – Facteur d'accélération CPU en fonction du nombre de partitions.

Concernant l'arbre, les accélérations sont proches de la pente unité jusqu'à 8 sous-domaines, puis atteignent un palier comme nous avons pu le constater pour un des cas de calcul impliquant une inclusion. Enfin, l'exemple de la poutre implique une évolution de l'accélération très faible et représente le cas le plus défavorable. Nous pouvons, cependant, exposer quelques remarques. Étant donnée la faible différence des résultats entre les cas avec et sans fissure, la cause semble porter sur des considérations autres que celles impliquées par l'enrichissement. Nous pouvons émettre l'hypothèse que les conditions de chargement non triviales et la forme du domaine induisant un découpage inégal (les différentes partitions détenant un nombre de degrés de liberté très disparate) sont peu favorables à la méthode de résolution.

Dans l'ensemble, les temps effectifs, figure 3.41, augmentent régulièrement en fonction du nombre de sous-domaines.

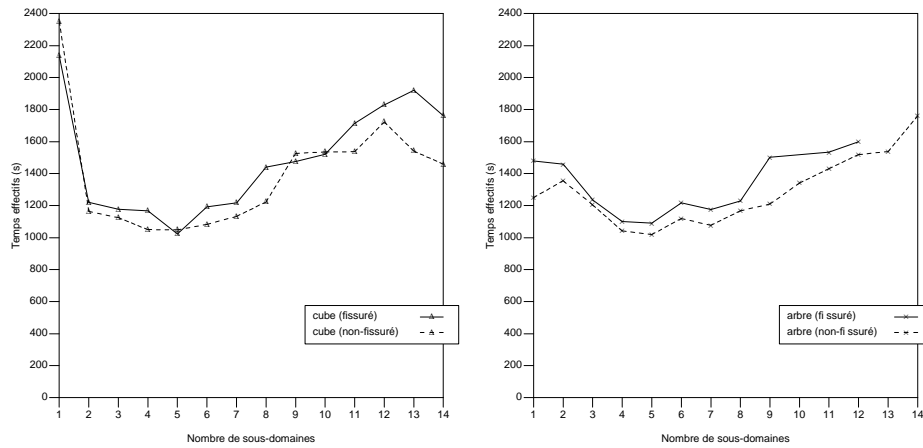
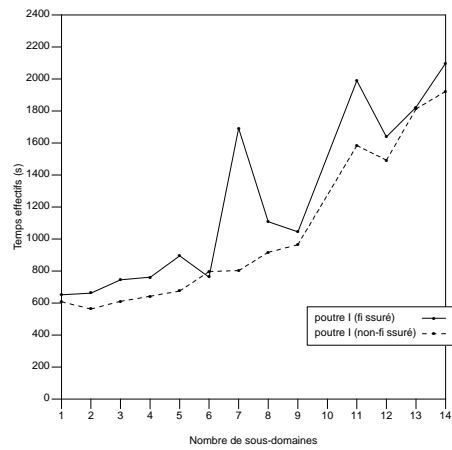
(a) *Cube sous tension.*(b) *Arbre en torsion.*(c) *Poutre en flexion.*

figure 3.41 – Temps effectif pour les trois cas.

Figure (3.42), la variation du nombre d'itérations globales du système à résoudre, sur l'ensemble du domaine, vient apporter une confirmation sur l'augmentation des temps effectifs.

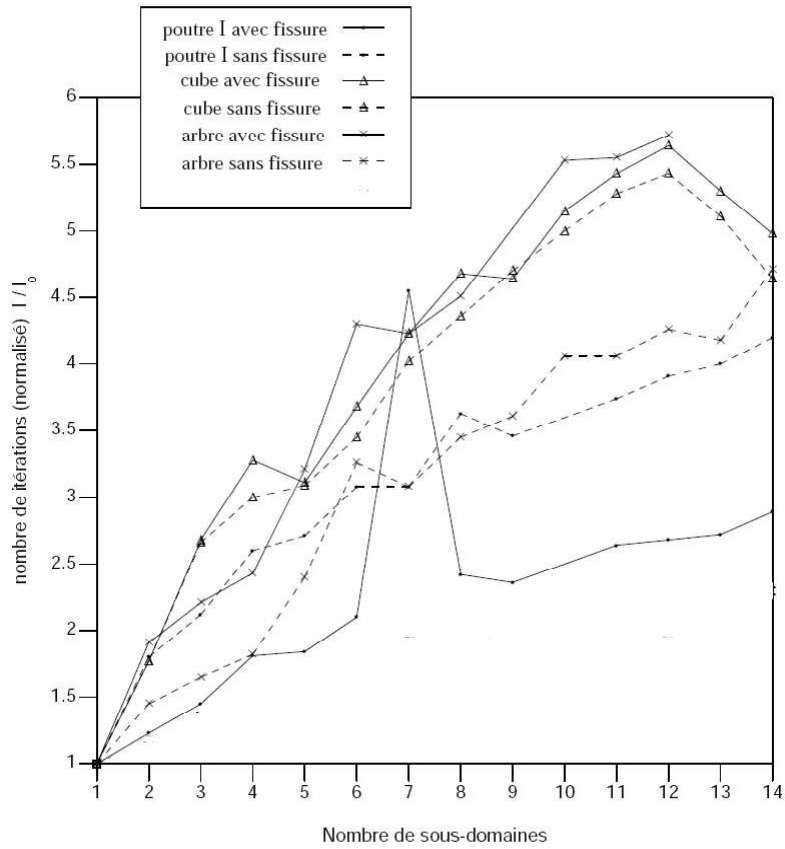


figure 3.42 – Nombre d'itérations en fonction du nombre de partitions.

## Conclusion

Nous avons, par le biais de ces différentes applications, exposé la réalisation de calculs parallèles avec l'approche X-FEM en proposant une stratégie permettant la gestion de l'enrichissement sur plusieurs domaines. Nous avons tenté d'évaluer les possibilités de la méthode en traitant divers domaines (trous, inclusions, fissures). Dans un second temps une analyse en temps a été développée afin d'estimer l'efficacité de l'approche. Pour les problèmes comprenant des vides, la méthode possède une accélération linéaire. Pour les domaines à deux dimensions impliquant inclusion et fissure, elle propose des accélérations de l'ordre de  $1/2$ . Enfin, suivant les cas de chargement et les formes de domaines impliquées, les cas en trois dimensions avec fissure(s) apportent des résultats qui peuvent être très différents. D'emblée, on peut noter que l'enrichissement n'est pas la cause principale de ces variations du niveau d'accélération puisque les cas résolus avec une méthode par éléments finis classique entraînent les mêmes résultats. Ces différences semblent dues aux conditions aux limites en déplacement ou en chargement ainsi qu'au découpage inégal engendré par des formes de domaine complexes.

De plus, il pourrait être intéressant d'utiliser une autre méthode de résolution. Nous avons employé une méthode de résolution généraliste du gradient conjugué. Il peut être envisagé de résoudre ces cas avec des approches de type Schur duale.



# Conclusion

Les travaux présentés ont abordé différents domaines de calcul impliquant plusieurs échelles ou domaines.

Dans un premier temps, nous avons apporté une alternative aux problèmes impliquant des géométries complexes ou aléatoires dans le cadre de l'homogénéisation périodique en s'assurant de l'efficacité, en terme de convergence, de l'approche X-FEM avec la fonction d'enrichissement  $F^2$  employée pour représenter au mieux le saut de déformation au sein des éléments. Les applications traitées nous ont permis de confronter notre approche aux approches utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre ces problèmes micro-mécaniques.

Ensuite, nous avons mis en place une méthode capable de prendre en compte l'influence d'un détail sur une structure de grande envergure grâce à une approche à deux échelles en résolvant le problème microscopique à l'aide de la méthode des éléments finis étendus. Par le biais des exemples exposés, nous avons évalué l'efficacité de la méthode par rapport à une résolution basée sur un maillage fin de la structure ainsi que par rapport à une solution exacte pour les problèmes impliquant une plaque percée ou contenant une inclusion.

De plus, nous avons mis en évidence l'importance des paramètres définissant la zone d'étude du détail ainsi que la prépondérance du contraste matériau au sein de la plaque (vide-matière, matériau A - matériau B) sur les erreurs commises par rapport aux solutions exactes.

Enfin, nous nous sommes attachés à développer une stratégie permettant de gérer l'enrichissement apporté par X-FEM sur un ensemble de sous-maillages dans le but de résoudre des problèmes sur multi-domaines sur une machine parallèle avec cette approche. Nous avons, par le biais d'exemples, exposé la capacité de cette méthode à traiter des problèmes variés tels que l'étude de structures comprenant vides, inclusions et fissures.

Une évaluation des différents paramètres temporels effectuée a permis de caractériser l'efficacité de la méthode globale (type de partitionnement + type de résolution + gestion

de l'enrichissement lié à l'approche X-FEM). Pour certains de ces cas, celle-ci a permis de mettre en évidence les aspects de la méthode à améliorer.

À ce stade, de nombreuses perspectives peuvent être envisagées.

Concernant le premier chapitre, nous avons utilisé des fonctions analytiques permettant de définir les fonctions de niveau. Afin de simplifier leur construction, un outil permettant le transfert de fichiers *CAD* ou d'images de scanner en fonctions de niveau pourrait être développé.

Une première perspective directe dans la mise en oeuvre de l'approche à deux échelles serait de développer un outil permettant le maillage automatique de la zone microscopique à partir de la zone macroscopique sélectionnée.

Ensuite, l'approche a permis d'étudier des détails se situant loin des bords de la structure. Tout en apportant une nouvelle analyse sur les conditions limites, nous pourrions traiter des types de détails différents tels que des congés ou des rainures.

Il serait aussi possible d'envisager d'autres conditions aux limites au bord de la zone microscopique comme l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange permettant une liaison plus souple à l'interface des deux maillages utilisés admettant une variation du champ microscopique au bord de la zone d'étude locale.

À partir de l'étude de la taille du domaine microscopique, il pourrait être envisagé de définir un paramètre capable de définir la taille optimale de ce domaine pour diminuer le nombre d'éléments microscopiques impliqués dans la résolution tout en assurant une taille suffisante induisant une faible erreur sur l'énergie calculée du système. Enfin, cette étude pourrait s'accompagner d'estimateurs d'erreurs capables d'apporter une information complémentaire à la solution obtenue afin de déterminer un intervalle caractérisant une réponse au problème posé (borne inférieure et supérieure de l'erreur).

Ces perspectives pourront faire l'objet de travaux ultérieurs.

Enfin, dans le cadre des calculs parallèles, il serait intéressant d'utiliser des solveurs et préconditionneurs différents afin de voir si le niveau d'accélération peut être augmenté.

Il serait aussi possible d'envisager l'utilisation de la méthode FETI pour les calculs traités dans ce chapitre.

# Références

- [1] Ben Dhia, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 326, 899–904. [6](#)
- [2] Ben Dhia, H. and G. Rateau (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 332, 649–654. [6](#)
- [3] Ben Dhia, H. and G. Rateau (2002). Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis* 11, 291–304. [6](#)
- [4] Ben Dhia, H. and G. Rateau (2005). The Arlequin method as a flexible engineering tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62, 1442–1462. [6](#)
- [5] Bensoussan, A., J.-L. Lions, and G. Papanicolaou (1978). Asymptotic analysis for periodic structures. *North-Holland, Amsterdam*. [2](#), [14](#)
- [6] Bóhm, J. (1998). A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. *Cdl-fmd Report 3-1998, TU Wien, Vienna*. [2](#)
- [7] Bornert, M. (1996). Generalized pattern-based self-consistent scheme. *Computational Materials Science* 5(1-3), 17–31. [2](#)
- [8] Brault, B. (juin 2005). *Calcul parallèle et approche X-FEM*. Rapport de stage de maîtrise, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes. [112](#), [115](#)
- [9] Cartraud, P., M. Cloirec, and N. Moës (2004). Application de la méthode X-FEM à la résolution de problèmes de micromécanique. *Revue Européenne des Éléments Finis* 13, 475–484. [42](#), [53](#)
- [10] CENAERO (mai 2004). Présentation sur le calcul parallèle. [92](#)
- [11] Champaney, L., J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, and P. Ladevèze (1997). Large scale applications on parallel computers of a mixed problem domain decomposition method. *Computational Mechanics* 19, 253–263. [8](#)
- [12] Charão, A.-S. (2001). *Multiprogrammation parallèle générique des méthodes de décomposition de domaine*. Thèse d'Etat, Institut National Polytechnique de Grenoble. [8](#), [88](#), [91](#)



- [13] Chung, P.-W., K.-K. Tamma, and R.-R. Namburu (2001). Asymptotic expansion homogenization for heterogeneous media : computational issues and applications. *Composites : Part A* 32, 1291–1301. 42, 44
- [14] Dumontet, H. (1990). *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse d'Etat, Université Paris 6. 42
- [15] Dureisseix, D. and L. Champaney (2000). Calcul de structures et parallélisme : un bilan et quelques développements récents. *Mécanique et Industries* 1, 43–60. 8
- [16] Farhat, C. and F.-X. Roux (1994). Implicit parallel processing in structural mechanics. *Computational Mechanics Advances* 2, 1–124. 8, 9
- [17] Feyel, F. and J.-L. Chaboche (2000).  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elasto-viscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183, 309–330. 4
- [18] Fish, J. and V. Belsky (1995a). Multigrid method for periodic heterogeneous media part 1 : Convergence studies for one-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 126(1-2), 1–16. 2
- [19] Fish, J. and V. Belsky (1995b). Multigrid method for periodic heterogeneous media part 2 : multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 126(1-2), 17–38. 2
- [20] Fish, J. and S. Markolefas (1993). Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 104 (3), 363–396. 7
- [21] Fish, J. and Z. Yuan (2005). Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62, 1341–1359. 5
- [22] François, D., A. Pineau, and A. Zaoui (1992). *Élasticité et plasticité*. Hermes. 2, 38
- [23] Ghosh, S., K. Lee, and S. Moorthy (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures* 32(1), 27–62. 5
- [24] Gosselet, P. (2003). *Méthodes de décomposition de domaines et méthode d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non linéaire*. Thèse d'Etat, Université Paris VI. 8, 88
- [25] Guedes, J.-M. and N. Kikuchi (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 83, 143–198. 2, 45
- [26] Guidault, P.-A., O. Allix, L. Champaney, and J.-P. Navarro (2005). Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local. *Colloque Giens* 1, 51–56. 8

- 
- [27] Haan, S.-I., P.-G. Charalambides, and M. Suri (2001). A specialized finite element for the study of woven composites. *Computational Mechanics* 27, 445–462. 5
- [28] Hansbo, A. and P.Hansbo (2002). An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191(47-48), 5537–5552. 3, 15
- [29] Hollister, S.-J. and N. Kikuchi (1994). Homogenization theory and digital imaging : a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue. *Bio-technology and Bioengineering* 43, 586–596. 3
- [30] Ibrahimbegovic, A. and D. Markovic (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (28-30), 3089–3107. 7
- [31] Kamiński, M. (1999). Boundary element method homogenization of the periodic linear elastic fiber composites. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 23(10), 815–823. 2
- [32] Karypis, G. and V. Kuma (2005). METIS : graph partitioning and sparse matrix ordering. Disponible à : <http://www-users.cs.umn.edu/karypis/metis>. 91
- [33] Kim, H. J. and C. C. Swan (2003). Algorithms for automated meshing and unit cell analysis of periodic composites with hierarchical tri-quadratic tetrahedral elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58, 1683–1711. 3
- [34] Krause, R. and E. Rank (2003). Multiscale computations with a combination of the h- and p-versions of the finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (35-36), 3959–3983. 6
- [35] Kuhn, J.-L. and P.-G. C. S.-I. Haan (1999). A semi-analytical method for the calculation of the elastic micro-fields in plain weave fabric composites subjected to in-plane loading. *Composite Materials* 33(3), 221–266. 5
- [36] Ladevèze, P. (1999). Nonlinear computational structural mechanics - new approaches and non-incremental methods of calculation. *Springer Verlag*. 8
- [37] Le Tallec, P. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances* 1 (2), 121–220. 88
- [38] Markovic, D. and A. Ibrahimbegovic (2004). On micro-macro interface conditions for micro scale based fem for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (48-51), 5503–5523. 7
- [39] Melenk, J.-M. and I. Babuška (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 39, 289–314. 3, 5, 18

- [40] Michel, J.-C. and P. S. H. Moulinec (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172(1-4), 109–143. 2, 47, 48
- [41] Moës, N. (2000). *Contributions au calcul des structures : une extension de la méthode des éléments finis. Le contrôle des calculs éléments finis non linéaires*. Mémoire d’habilitation à diriger des recherches, Ecole Normale Supérieure de Cachan. 19, 20
- [42] Moës, N., M. Cloirec, P. Cartraud, and J.-F. Remacle (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192, 3163–3177. 42, 50
- [43] Moës, N., J. Dolbow, and T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46, 131–150. 19
- [44] Moës, N., A. Gravouil, and T. Belytschko (2001). Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53, 2549–2568. 94
- [45] Moulinec, H. and P. Suquet (1997). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 157, 69–94. 2
- [46] MPI (2005). The message passing interface. Disponible à : <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi>. 86
- [47] Nawrocki, A. and M. Labrosse (2000). A finite element model for simple straight wire rope. *Computers and Structures* 77, 345–359. 54
- [48] Nicolet, A., J.-F. Remacle, B. Meys, A. Genon, and W. Legros (1994). Transformation methods in computational electromagnetism. *Journal of Applied Physics* 75, 6036–6038. 38
- [49] Oden, J.-T. and T.-I. Zohdi (1997). Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148 (3-4), 367–391. 8
- [50] Okada, H., Y. Fukui, and N. Kumazawa (2001). Homogenization method for heterogeneous material based on boundary element method. *Computers & Structures* 79(20-21), 1987–2007. 2
- [51] Osher, S. and J.-A. Sethian (1988, November). Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79(1), 12–49. 24

- 
- [52] Rateau, G. (2003). *Thèse : Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. Thèse, Ecole Centrale de Paris. 6
- [53] Remacle, J.-F. and C. Geuzaine (1998). Gmsh finite element grid generator. Disponible à : [www.geuz.org/gmsh](http://www.geuz.org/gmsh). 51
- [54] Remacle, J.-F., B. K. Karamete, and M. Shephard (2001). AOMD : Algorithm Oriented Mesh Database. Disponible à : <http://www.scorec.rpi.edu/AOMD>. 91
- [55] Saad, Y. (2000). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia, USA : SIAM. 9, 88, 93
- [56] Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory.*, Volume 127. Berlin : Lecture Notes in Physics, Springer Verlag. 2, 14
- [57] Sethian, J.-A. (1999). *Level Set Methods & Fast Marching Methods :Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge, UK : Cambridge University Press. 15, 24
- [58] Shelswel, R. (mai 2005). *Extensibilité de l'approche X-FEM pour le calcul parallèle*. Rapport de travaux de fin d'études, Univeristy of Bath, Ecole Centrale de Nantes. 110, 118, 123
- [59] Strouboulis, T., I. Babuska, and K. Copps (2000). Design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181(1-3), 43–69. 4, 15
- [60] Strouboulis, T., L. Zhang, and I. Babuska (2003). Generalized Finite Element Method using mesh-based handbooks : Application to problems in domains with many voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192(28-30), 3109–3161. 4, 15
- [61] Sukumar, N., D.-L. Chopp, N. Moës, and T. Belytschko (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the Extended Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 6183–6200. 22, 24, 27
- [62] Suquet, P. (1985). Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. in E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui (eds.), Homogenization techniques for composite media. *Lecture Notes in Physics*. 272, 193–278. 2, 3, 14, 15
- [63] Vetter, J. and C. Chambreau (2005). mpiP : Lightweight, scalable MPI profiling. Disponible à : <http://www.llnl.gov/CASC/mpip>. 110
- [64] Wentorf, R., R.Collar, M.-S. Shepard, and J. Fish (1999). Automated modeling for complex woven microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 172(1-4), 273–291. 3

- [65] Zohdi, T.-I., J.-T. Oden, and G.-J. Rodin (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 138 (1-4), 273–298. 8

---

# A

## Tri séquentiel des entités dans le cas de trous et d'inclusions

En pratique, pour effectuer le tri tout en respectant les conditions citées dans le chapitre 3, la manière de procéder pour le tri (cf. algorithme 1) est la suivante : tous les éléments du maillage sont d'abord classés, puis, en fonction de ce pré-classement, les entités du maillage sont effectivement triées.

```

Pour  $\forall E \in M$  faire
  Si ( $\min_{\forall n \in E}(ls(n)) \geq 0$ ) Alors
    | rien
  Sinon
    Si ( $\max_{\forall n \in E}(ls(n)) \leq 0$ ) Alors
      |  $E \in \text{in}$ 
      Sinon
        |  $E \in \text{in}, E \in \text{boundary}, E \in \text{boundary strict}$ 
      Fin Si
    Fin Si
  Fin Pour

Pour  $\forall e \in M$  faire
  | on récupère son support  $S_e$ 
  Pour  $\forall E \in S_e$  faire
    | Si ( $E \in \text{in}$ ) Alors
      |  $\text{in\_test} = \text{vrai}$ 
    Sinon
      |  $\text{out\_test} = \text{vrai}$ 
    Fin Si
    Si ( $E \in \text{boundary}$ ) Alors
      |  $\text{boundary\_test} = \text{vrai}$ 
    Fin Si
  Fin Pour
  Si ( $\text{in\_test} = \text{vrai}$ ) Alors
    |  $e \in \text{in}$ 
  Sinon
    |  $e \in \text{out}$ 
  Fin Si
  Si ( $\text{boundary\_test} = \text{vrai}$  ou ( $\text{in\_test} = \text{vrai}$  et  $\text{out\_test} = \text{vrai}$ )) Alors
    |  $e \in \text{boundary}$ 
  Fin Si
  Si ( $\text{boundary\_test} = \text{vrai}$ ) Alors
    |  $e \in \text{boundary strict}$ 
  Fin Si
Fin Pour

```

Algorithme 1: Classement séquentiel des entités pour les trous et inclusions

---

# B

## Tri séquentiel des entités dans le cas de fissures

La façon de définir les différents ensembles est plus complexe que pour le cas des trous et des inclusions et peut être qualifiée de "topologique". D'un point de vue général, il existe un certain nombre de fonctions prenant comme donnée le maillage primaire ou secondaire (cf chapitre 3) qui vont permettre de trier la totalité des entités du maillage en définissant les ensembles décrits précédemment. L'algorithme 2 suivant décrit succinctement la procédure.



**Procédure** Classification(maillage primaire, maillage secondaire)

**Procédure** Création de touched by crack(maillage primaire)

        test sur level set ;

**Retourner** touched by crack ;

**Fin**

**Procédure** Création de touched by front(maillage secondaire)

        test sur level set ;

**Retourner** touched by front ;

**Fin**

**Procédure** Création cut by crack(maillage primaire)

        test sur level set ;

**Retourner** touched by crack ;

**Fin**

**Procédure** Création cut by crack to delete(maillage primaire)

        test sur level set ;

**Retourner** cut by crack to delete ;

**Fin**

**Procédure** Création cut thru by crack(cut by crack to delete, cut by crack)

        cut thru by crack = cut by crack - cut by crack to delete ;

**Retourner** cut thru by crack ;

**Fin**

**Procédure** Création integrate(touched by front)

        connected = entités connectées à celles de touched by front ;

        integrate = touched by front + connected ;

**Retourner** integrate ;

**Fin**

**Fin**

Algorithme 2: Classement séquentiel des entités dans le cas de fissure

---

# C

## Tri parallèle des entités dans le cas de trous et d'inclusions

L'algorithme suivant décrit les différentes étapes de l'échange : pré-échange, échange et actualisation.

pré-échange, initialisation des maps :

```

Pour  $\forall E \in M$  faire
  | Si  $(\min_{\forall n \in E}(ls(n)) \geq 0)$  Alors
  | | rien
  | Sinon
  | | Si  $(\max_{\forall n \in E}(ls(n)) \leq 0)$  Alors
  | | |  $E \in \text{in}$ 
  | | | Sinon
  | | | |  $E \in \text{in}, E \in \text{boundary}, E \in \text{boundary strict}$ 
  | | Fin Si
  | Fin Si
Fin Pour

Pour  $\forall \text{map}$  faire
  | Pour  $\forall e$  faire
  | |  $\text{map}[e] = \text{faux}$ 
  | Fin Pour
Fin Pour
Pour  $\forall e \in M$  faire
  | on récupère son support  $S_e$ 
  | Pour  $\forall E \in S_e$  faire
  | | Si  $(E \in \text{in})$  Alors
  | | |  $\text{map}_{\text{in}}[e] = \text{vrai}$ 
  | | | Sinon
  | | | |  $\text{map}_{\text{out}}[e] = \text{vrai}$ 
  | | | Fin Si
  | | | Si  $(E \in \text{boundary})$  Alors
  | | | |  $\text{map}_{\text{boundary}}[e] = \text{vrai}$ 
  | | | Fin Si
  | | Fin Pour
Fin Pour

```

*échange :*

```

Pour  $\forall$  map faire
  | Procédure Echange(map)
  |   | Pour  $\forall$  e  $\in$  l'interface faire
  |   |   | échange de map[e]
  |   |   Fin Pour
  |   Fin
Fin Pour

```

*actualisation :*

```

Pour  $\forall$  map faire
  | Si ( $map_{in}[e] = \text{vrai}$ ) Alors
  |   |  $e \in in$ 
  |   Sinon
  |   |  $e \in out$ 
  |   Fin Si
  |   Si ( $map_{boundary}[e] = \text{vrai}$  ou ( $map_{in}[e] = \text{vrai}$  et  $map_{out}[e] = \text{vrai}$ )) Alors
  |   |  $e \in boundary$ 
  |   Fin Si
  |   Si ( $map_{boundary-strict}[e] = \text{vrai}$ ) Alors
  |   |  $e \in boundary\ strict$ 
  |   Fin Si
Fin Pour

```



---

# D

## **Définitions des cas 3d contenant une fissure**

Cette annexe décrit les géométries utilisées pour la poutre en flexion et l'arbre en torsion.

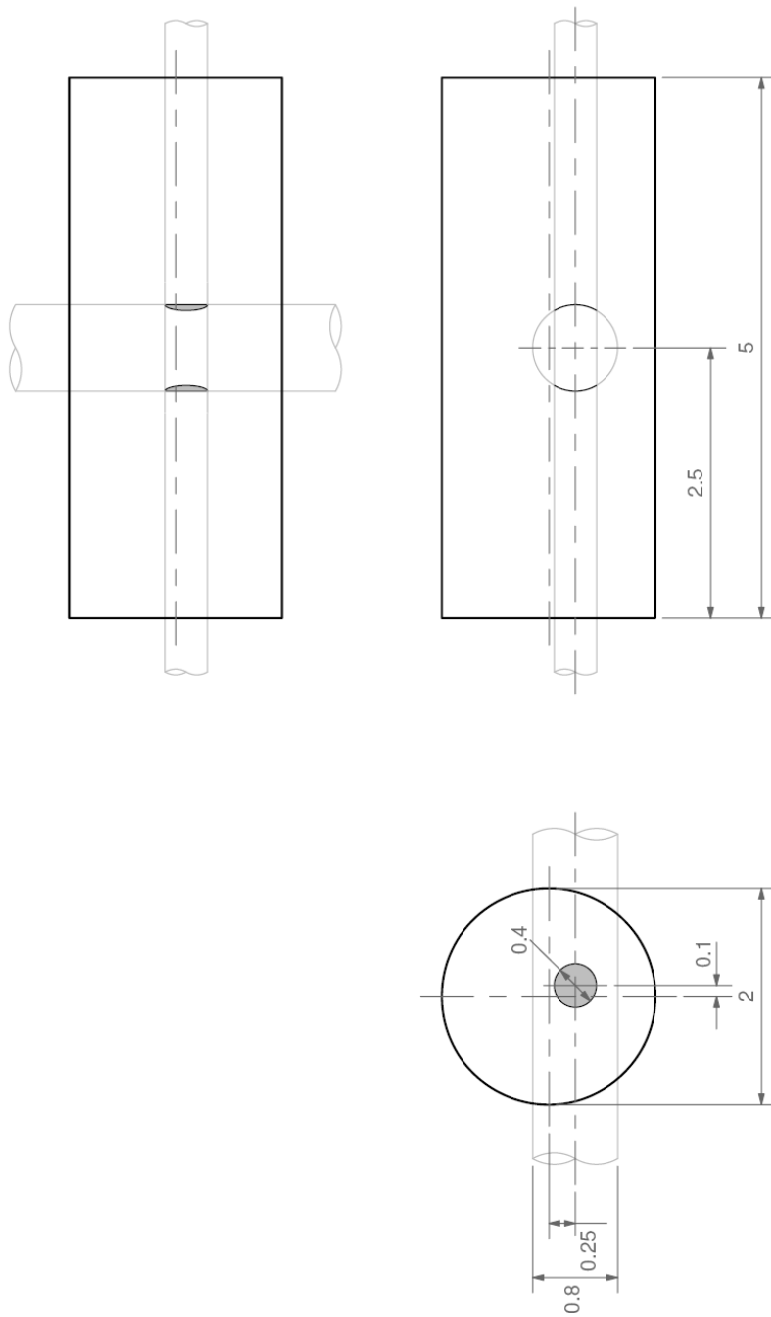


figure D.1 – Définition de la géométrie de l'arbre en torsion contenant deux fissures.

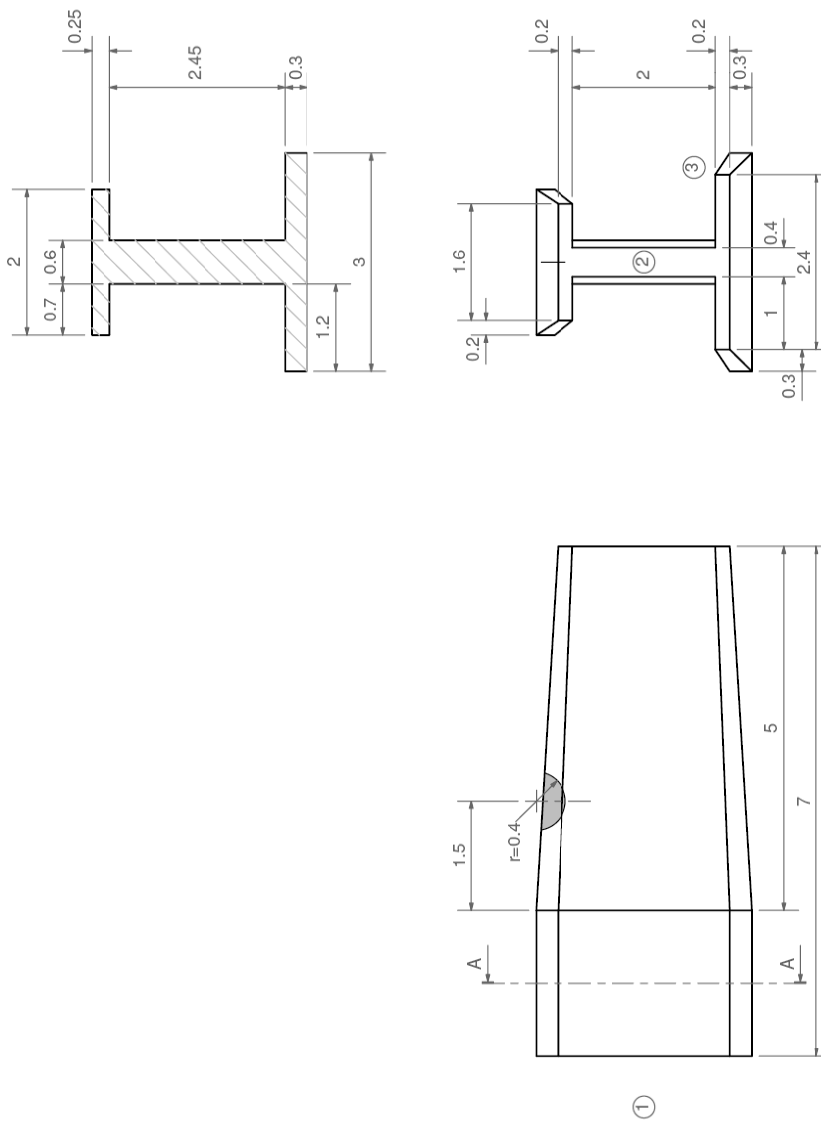


figure D.2 – Définition de la géométrie de la poutre en flexion contenant une fissure.