Comportement asymptotique de diffusions renforcées sur $\mathbb{R}^d$

Aline Kurtzmann

Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel

22 mai 2007

Plan

1. Généralités

Plan

Plan

Plan

Qu'est-ce qu'une diffusion renforcée ?

- Solution de

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - F(t, X_t, \mu_t)\mathrm{d}t$$

Notre étude :

Qu'est-ce qu'une diffusion renforcée ?

- Solution de
$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - F(t, X_t, \mu_t)\mathrm{d}t$$
- $\mu_t = \frac{1}{r+t}\int_0^t \delta_{X_s}\mathrm{d}s + \frac{r}{r+t}\mu_0$

Notre étude :

Qu'est-ce qu'une diffusion renforcée ?

- Solution de
$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - F(t, X_t, \mu_t)\mathrm{d}t$$
- $\mu_t = \frac{1}{r+t}\int_0^t \delta_{X_s}\mathrm{d}s + \frac{r}{r+t}\mu_0$

Notre étude :

- Famille 1 : $F(t, X_t, \mu_t) := g(t)\nabla W(X_t - \overline{\mu}_t)$

Université de Neuchâtel unine

Qu'est-ce qu'une diffusion renforcée ?

- Solution de
$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - F(t, X_t, \mu_t)\mathrm{d}t$$
- $\mu_t = \frac{1}{r+t} \int_0^t \delta_{X_s} \mathrm{d}s + \frac{r}{r+t} \mu_0$

Notre étude :

- Famille 1 : $F(t, X_t, \mu_t) := g(t) \nabla W(X_t - \overline{\mu}_t)$
- Famille 2 : $F(t, X_t, \mu_t) := \nabla V(X_t) + \int \nabla_x W(X_t, y) \mu_t(\mathrm{d}y)$

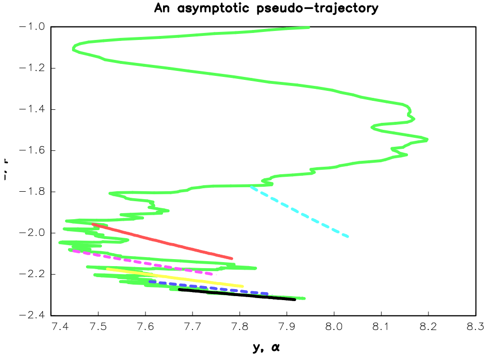
Pseudo-trajectoire asymptotique (PTA) d'un flot

Pseudo-trajectoire asymptotique (PTA) d'un flot

Définition

(E, d) métrique. La fonction $\xi : \mathbb{R} \to E$ est une PTA pour le flot Φ si $\forall T > 0$, on a $\lim_{t\to\infty} \sup_{0\le s\le T} d(\xi_{t+s}, \Phi_s(\xi_t)) = 0$.

Illustration graphique



Plan

1. Généralités
2. Diffusion renforcée par la moyenne de la mesure d'occupation
3. Diffusion renforcée par la mesure d'occupation

Diffusion renforcée par la moyenne $\overline{\mu}_t$

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - g(t)\nabla W(X_t - \overline{\mu}_t)\mathrm{d}t.$$

- W est strictement convexe en dehors d'un compact, avec un nombre fini de points critiques (m_i minimum, M_i autre point critique)

Diffusion renforcée par la moyenne $\overline{\mu}_t$

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - g(t)\nabla W(X_t - \overline{\mu}_t)\mathrm{d}t.$$

- W est strictement convexe en dehors d'un compact, avec un nombre fini de points critiques (m_i minimum, M_i autre point critique)
- $g > 0$ et $g(t) \to \infty$

Université de Neuchâtel unine

Clé

- étude de $Y_t := X_t - \overline{\mu}_t$,

Clé

- étude de $Y_t := X_t - \overline{\mu}_t$,
- Y est un processus markovien inhomogène :

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}B_t - \left(g(t)\nabla W(Y_t) + \frac{Y_t}{r+t}\right)\mathrm{d}t,$$

Clé

- étude de $Y_t := X_t - \overline{\mu}_t$,
- Y est un processus markovien inhomogène :

$$\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}B_t - \left(g(t) \nabla W(Y_t) + \frac{Y_t}{r+t} \right) \mathrm{d}t,$$

- $\dot{\overline{\mu}}_t = \frac{Y_t}{r+t}$ et $X_t = Y_t + \int_0^t Y_s \frac{\mathrm{d}s}{r+s} + \overline{\mu}_0$

Théorème

Presque sûrement, il existe $a_i > 0, b_i \geq 0$ telles que $\nu_t := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{Y_s} \mathrm{d}s \to \sum a_i \delta_{m_i} + \sum b_i \delta_{M_i}$ au sens de la convergence faible des mesures.

Université de Neuchâtel unine

Théorème

Presque sûrement, il existe $a_i > 0, b_i \geq 0$ telles que $\nu_t := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{Y_s}\mathrm{d}s \to \sum a_i\delta_{m_i} + \sum b_i\delta_{M_i}$ au sens de la convergence faible des mesures.

Idée de la preuve :

- $Y_{G^{-1}(t)}$ est une PTA (en probabilité) du flot engendré par $\dot{y} = -\nabla W(y)$

Théorème

Presque sûrement, il existe $a_i > 0, b_i \geq 0$ telles que $\nu_t := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{Y_s}\mathrm{d}s \to \sum a_i\delta_{m_i} + \sum b_i\delta_{M_i}$ au sens de la convergence faible des mesures.

Idée de la preuve :

- $Y_{G^{-1}(t)}$ est une PTA (en probabilité) du flot engendré par $\dot{y} = -\nabla W(y)$
- pour $Y_{G^{-1}(t)}$, les points limites de ν_t forment un sous-ensemble des probabilités invariantes du flot

Théorème

Presque sûrement, il existe $a_i > 0, b_i \geq 0$ telles que $\nu_t := \frac{1}{t}\int_0^t \delta_{Y_s} \mathrm{d}s \to \sum a_i \delta_{m_i} + \sum b_i \delta_{M_i}$ au sens de la convergence faible des mesures.

Idée de la preuve :

- $Y_{G^{-1}(t)}$ est une PTA (en probabilité) du flot engendré par $\dot{y} = -\nabla W(y)$
- pour $Y_{G^{-1}(t)}$, les points limites de ν_t forment un sous-ensemble des probabilités invariantes du flot
- changement de temps pour étudier l'asymptotique de ν_t

Université de Neuchâtel unine

Mesure d'occupation normalisée

Par transformée de Fourier, on montre que

Proposition

μ_t converge si et seulement si $\overline{\mu}_t$ converge.

Théorème

Supposons que $\sqrt{g(t)^{-1}\log G(t)} = o((\log t)^{-1})$*. Alors* Y_t *converge p.s. vers un min. local de* W*, noté* Y_∞*.*

Théorème

Supposons que $\sqrt{g(t)^{-1}\log G(t)} = o((\log t)^{-1})$*. Alors* Y_t *converge p.s. vers un min. local de* W*, noté* Y_∞*.*
Cela implique :

- *Si 0 est l'unique min. local (donc global) de* W*, alors* $X_t \xrightarrow{ps} \overline{\mu}_0 + \int_0^\infty Y_s \frac{\mathrm{d}s}{r+s}$ *;*

Théorème

Supposons que $\sqrt{g(t)^{-1}\log G(t)} = o((\log t)^{-1})$. *Alors* Y_t *converge p.s. vers un min. local de* W, *noté* Y_∞.
Cela implique :

- *Si 0 est l'unique min. local (donc global) de* W, *alors* $X_t \xrightarrow{ps} \overline{\mu}_0 + \int_0^\infty Y_s \frac{\mathrm{d}s}{r+s}$;
- *Si 0 est un min. local parmi d'autres, alors*

$$1 > \mathbb{P}\left(X_t \to \overline{\mu}_0 + \int_0^\infty Y_s \frac{\mathrm{d}s}{r+s}\right) > 0$$

et $\mathbb{P}\left(X_t \to \overline{\mu}_0 + \int_0^\infty Y_s \frac{\mathrm{d}s}{r+s}\right) + \mathbb{P}(X_t \to \infty) = 1$;

Théorème

- *Si 0 n'est pas un min. local de W, alors X_t diverge p.s.*

Théorème

- *Si 0 n'est pas un min. local de W, alors X_t diverge p.s.*

De plus, sur $\{Y_\infty \neq 0\}$, on a

$$X_t \underset{\infty}{\sim} Y_\infty \log t.$$

Plan

1. Généralités
2. Diffusion renforcée par la moyenne de la mesure d'occupation
3. Diffusion renforcée par la mesure d'occupation

Diffusion renforcée par μ_t

- $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t) + \int \nabla_x W(X_t, y)\mu_t(\mathrm{d}y)\right) \mathrm{d}t$

Diffusion renforcée par μ_t

- $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t) + \int \nabla_x W(X_t, y)\mu_t(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}t$
- potentiel de confinement V suffisamment convexe

Diffusion renforcée par μ_t

- $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t) + \int \nabla_x W(X_t, y)\mu_t(\mathrm{d}y)\right) \mathrm{d}t$
- potentiel de confinement V suffisamment convexe
- potentiel d'interaction W, contrôlé par V

Compacité

Compacité

Comportement asymptotique de $\mu_t := \frac{r}{r+t}\mu_0 + \frac{1}{r+t}\int_0^t \delta_{X_s} \mathrm{d}s$?

Le potentiel V étant suffisamment convexe, il a un rôle de confinement de la diffusion.

Compacité

Comportement asymptotique de $\mu_t := \frac{r}{r+t}\mu_0 + \frac{1}{r+t}\int_0^t \delta_{X_s} \mathrm{d}s$?

Le potentiel V étant suffisamment convexe, il a un rôle de confinement de la diffusion.
Cela permet de retrouver de la compacité pour μ_t :

Théorème

Il existe un sous-ensemble faiblement compact de l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}^d$, noté $\mathcal{P}_\beta(\mathbb{R}^d; V)$, tel que p.s. $\mu_t \in \mathcal{P}_\beta(\mathbb{R}^d; V)$ pour tout $t \geq 0$.
En particulier, la famille $(\mu_t, t \geq 0)$ est p.s. tendue.

Cadre markovien : mesure d'occupation constante

Cadre markovien : mesure d'occupation constante

- $\mathrm{d}X_t^\mu = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t^\mu) + \int \nabla_x W(X_t^\mu, y)\mu(\mathrm{d}y)\right) \mathrm{d}t$

Université de Neuchâtel unine

Cadre markovien : mesure d'occupation constante

- $\mathrm{d}X_t^\mu = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t^\mu) + \int \nabla_x W(X_t^\mu, y)\mu(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}t$
- $(X_t^\mu, t \geq 0)$ est une diffusion classique (Markov)

Cadre markovien : mesure d'occupation constante

- $\mathrm{d}X_t^\mu = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t^\mu) + \int \nabla_x W(X_t^\mu, y)\mu(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}t$
- $(X_t^\mu, t \geq 0)$ est une diffusion classique (Markov)
- Probabilité invariante :

$$\Pi(\mu)(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-2(V(x)+\int W(x,y)\mu(\mathrm{d}y))}}{Z(\mu)}\mathrm{d}x$$

Cadre markovien : mesure d'occupation constante

- $\mathrm{d}X_t^\mu = \mathrm{d}B_t - \left(\nabla V(X_t^\mu) + \int \nabla_x W(X_t^\mu, y)\mu(\mathrm{d}y)\right)\mathrm{d}t$
- $(X_t^\mu, t \geq 0)$ est une diffusion classique (Markov)
- Probabilité invariante :

$$\Pi(\mu)(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-2(V(x)+\int W(x,y)\mu(\mathrm{d}y))}}{Z(\mu)}\mathrm{d}x$$

- Théorème limite-quotient : μ_t converge p.s. vers $\Pi(\mu)$ (convergence faible des mesures)

Conséquence

Si μ_t (de la diffusion renforcée) converge, alors par l'étude du cas markovien, la limite satisfait $\Pi(\mu_\infty) = \mu_\infty$.

Conséquence

Si μ_t (de la diffusion renforcée) converge, alors par l'étude du cas markovien, la limite satisfait $\Pi(\mu_\infty) = \mu_\infty$.

$\Longrightarrow$ on introduit le système dynamique $\dot{\mu} = \Pi(\mu) - \mu$.

Système dynamique

Système dynamique

On veut montrer que μ_t est une PTA d'une EDO sur l'espace des mesures.

Système dynamique

On veut montrer que μ_t est une PTA d'une EDO sur l'espace des mesures.

Candidat naturel : $\dot{\mu} = \Pi(\mu) - \mu$.

Système dynamique

On veut montrer que μ_t est une PTA d'une EDO sur l'espace des mesures.

Candidat naturel : $\dot{\mu} = \Pi(\mu) - \mu$.

Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{r(e^t-1)} = \delta_{X_{r(e^t-1)}} - \mu_{r(e^t-1)}$ est homogène.

Système dynamique

On veut montrer que μ_t est une PTA d'une EDO sur l'espace des mesures.

Candidat naturel : $\dot{\mu} = \Pi(\mu) - \mu$.

Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_{r(e^t-1)} = \delta_{X_{r(e^t-1)}} - \mu_{r(e^t-1)}$ est homogène.

Théorème

L'application $t \mapsto \mu_{r(e^t-1)}$ est p.s. une PTA pour le flot engendré par le système $\dot{\mu} = \Pi(\mu) - \mu$.

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

On a un trou spectral $||P_t^\mu f - \Pi(\mu) f||_V \leq K(\mu)||f||_V e^{-c(\mu)t}$.

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

On a un trou spectral $||P_t^\mu f - \Pi(\mu)f||_V \leq K(\mu)||f||_V e^{-c(\mu)t}$.

- On introduit $Q_\mu f := \int_0^\infty (P_t^\mu f - \Pi(\mu)f)\mathrm{d}t$.

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

On a un trou spectral $||P_t^\mu f - \Pi(\mu)f||_V \leq K(\mu)||f||_V e^{-c(\mu)t}$.

- On introduit $Q_\mu f := \int_0^\infty (P_t^\mu f - \Pi(\mu)f)\mathrm{d}t$.
- Itô :
  $Q_\mu f(X_t^\mu) = Q_\mu f(x) + \int_0^t (\nabla Q_\mu f(X_s^\mu), \mathrm{d}B_s) + \int_0^t A_\mu Q_\mu f(X_s^\mu)\mathrm{d}s$

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

On a un trou spectral $||P_t^\mu f - \Pi(\mu) f||_V \leq K(\mu)||f||_V e^{-c(\mu)t}$.

- On introduit $Q_\mu f := \int_0^\infty (P_t^\mu f - \Pi(\mu) f)\mathrm{d}t$.
- Itô :
  $Q_\mu f(X_t^\mu) = Q_\mu f(x) + \int_0^t (\nabla Q_\mu f(X_s^\mu), \mathrm{d}B_s) + \int_0^t A_\mu Q_\mu f(X_s^\mu)\mathrm{d}s$
- $A_\mu Q_\mu f = \Pi(\mu) f - f$

Retour au cas markovien : une preuve du théorème limite-quotient

On a un trou spectral $||P_t^\mu f - \Pi(\mu) f||_V \leq K(\mu)||f||_V e^{-c(\mu)t}$.

- On introduit $Q_\mu f := \int_0^\infty (P_t^\mu f - \Pi(\mu) f) \mathrm{d}t$.
- Itô :
  $Q_\mu f(X_t^\mu) = Q_\mu f(x) + \int_0^t (\nabla Q_\mu f(X_s^\mu), \mathrm{d}B_s) + \int_0^t A_\mu Q_\mu f(X_s^\mu) \mathrm{d}s$
- $A_\mu Q_\mu f = \Pi(\mu) f - f$

“Conclusion" : l'étude de P_t^μ est essentielle ! Dans notre cadre de diffusion renforcée, on aura donc aussi besoin d'estimées fines sur P_t^μ, mais uniformes en μ.

Première estimée : trou spectral uniforme

On suppose que :

- $V(x)$ est asymptotiquement équivalent à $|x|^{2\delta}$, avec $\delta > 1$
- $W = W_1 + W_2$, où $W_1 + V$ est strictement convexe et $W_2, \nabla_x W_2, \nabla^2_{xx} W_2$ sont bornées en x

Première estimée : trou spectral uniforme

On suppose que :

- $V(x)$ est asymptotiquement équivalent à $|x|^{2\delta}$, avec $\delta > 1$
- $W = W_1 + W_2$, où $W_1 + V$ est strictement convexe et $W_2, \nabla_x W_2, \nabla^2_{xx} W_2$ sont bornées en x

Cela implique alors (critère de Bakry-Emery) que la famille (P_t^μ) admet un trou spectral uniforme en μ.

Deuxième estimée : ultracontractivité uniforme

De plus, si on contrôle W par V, soit : il existe $\kappa > 0$ tel que

$$W(x,y) + |\nabla_x W(x,y)| + |\nabla^2_{xx} W(x,y)| \leq \kappa(V(x) + V(y)).$$

Deuxième estimée : ultracontractivité uniforme

De plus, si on contrôle W par V, soit : il existe $\kappa > 0$ tel que

$$W(x,y) + |\nabla_x W(x,y)| + |\nabla^2_{xx} W(x,y)| \leq \kappa(V(x) + V(y)).$$

Alors on déduit du résultat de Röckner et Wang :

Proposition

La famille de semi-groupes $(P_t^\mu, t \geq 0, \mu \in \mathcal{M}_\beta(\mathbb{R}^d; V))$ est uniformément ultracontractive et

$$||P_t^\mu||_{2\to\infty} := \sup_{f \in L^2(\Pi(\mu))\setminus\{0\}} \frac{||P_t^\mu f||_\infty}{||f||_2} \leq \exp\{ct^{-\delta/(\delta-1)}\},$$

où la constante $c > 0$ est uniforme.

PTA et ensemble libre d'attracteur

PTA et ensemble libre d'attracteur

Définition

- *$A \subset E$ est un attracteur pour le flot Φ si $A \neq \emptyset$, compact, invariant et A admet un voisinage $\mathcal{V} \subset E$ tel que $d(\Phi_t(x), A) \to 0$ uniformément en $x \in \mathcal{V}$.*
- *A est libre d'attracteur si le flot restreint à A n'admet que A comme attracteur.*

Résultats obtenus

Résultats obtenus

Théorème

L'ensemble limite $L(\mu_t) := \bigcap_{t\geq 0} \overline{\mu([t,\infty))}$ est p.s. un ensemble libre d'attracteur pour le flot.

Cas W symétrique

Cas W symétrique

Théorème

Si W est symétrique, alors $L(\mu_t)$ est p.s. un sous-ensemble compact connexe des points fixes de Π.

Cas W symétrique

Théorème

Si W est symétrique, alors $L(\mu_t)$ est p.s. un sous-ensemble compact connexe des points fixes de Π.

En particulier, si Π a un nombre fini de points fixes, alors μ_t converge p.s. vers l'un d'eux.

Sur $\mathbb{R}^2$

Théorème

Supposons $V(x) = V(|x|)$ *et* $W(x, y) = (x, Ry)$ *avec* R *matrice de rotation (angle* θ*).*

Sur $\mathbb{R}^2$

Théorème

Supposons $V(x) = V(|x|)$ et $W(x, y) = (x, Ry)$ avec R matrice de rotation (angle θ).
Posons $F := Z^{-1} \int_0^\infty e^{-2V(\rho)} \rho^2 \mathrm{d}\rho$. On a trois comportements possibles :

- *si $F \cos\theta + 1 > 0$, alors p.s. μ_t converge vers $Z^{-1} e^{-2V}$,*

Sur $\mathbb{R}^2$

Théorème

Supposons $V(x) = V(|x|)$ *et* $W(x,y) = (x, Ry)$ *avec* R *matrice de rotation (angle* θ*).*
Posons $F := Z^{-1} \int_0^\infty e^{-2V(\rho)} \rho^2 \mathrm{d}\rho$. *On a trois comportements possibles :*

- *si* $F \cos\theta + 1 > 0$, *alors p.s.* μ_t *converge vers* $Z^{-1} e^{-2V}$,
- *si* $F \cos\theta + 1 \leq 0$, *alors :*

  si $\theta = \pi$, *alors* μ_t *converge vers une mesure aléatoire* $\mu_\infty \neq Z^{-1} e^{-2V}$,

Sur $\mathbb{R}^2$

Théorème

Supposons $V(x) = V(|x|)$ et $W(x, y) = (x, Ry)$ avec R matrice de rotation (angle θ).
Posons $F := Z^{-1} \int_0^\infty e^{-2V(\rho)} \rho^2 \mathrm{d}\rho$. On a trois comportements possibles :

- *si $F \cos\theta + 1 > 0$, alors p.s. μ_t converge vers $Z^{-1} e^{-2V}$,*
- *si $F \cos\theta + 1 \leq 0$, alors :*

  si $\theta = \pi$, alors μ_t converge vers une mesure aléatoire $\mu_\infty \neq Z^{-1} e^{-2V}$,
  si $\theta \neq \pi$, alors μ_t ne converge pas et $L(\mu_t)$ est un cercle de mesures.

Illustration graphique

Premier cas (symétrique) : $W(x, y) = 2(x, y)$ et $V(x) = |x|^4 + |x|^2 + 1$. ($T = 510$)

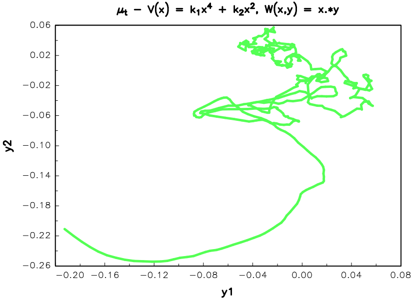


Illustration graphique

Deuxième cas : $W(x, y) = 15(x, Ry)$, avec $\theta = \pi$ et $V(x) = 0.02|x|^4 + 0.2|x|^2 + 1$. ($T = 417$)

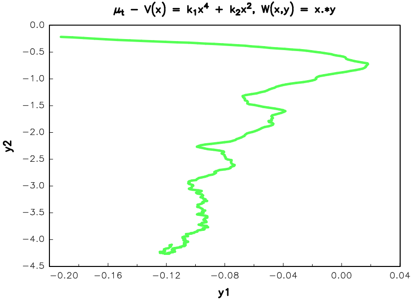
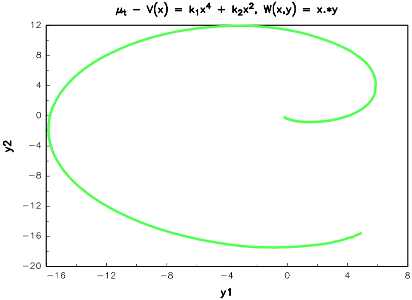


Illustration graphique

Troisième cas : $W(x, y) = 8(x, Ry)$, avec $\theta = 3\pi/4$ et $V(x) = 0.002x^4 + 0.001x^2 + 1$. ($T = 542$)



FIN