



HAL
open science

Estimateurs d'erreur a posteriori pour des problèmes dynamiques

Nadir Soualem

► **To cite this version:**

Nadir Soualem. Estimateurs d'erreur a posteriori pour des problèmes dynamiques. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2007. Français. NNT : . tel-00156845

HAL Id: tel-00156845

<https://theses.hal.science/tel-00156845>

Submitted on 22 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour des problèmes dynamiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 30 mai 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Valenciennes
(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Nadir SOUALEM

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Patrick HILD Marco PICASSO	Université de Franche-Comté École Polytechnique Fédérale de Lausanne
<i>Examineurs :</i>	Emmanuel CREUSÉ Luc PAQUET Christophe TROESTLER	Université de Valenciennes Université de Valenciennes Université de Mons-Hainaut
<i>Directeur de thèse :</i>	Serge NICAISE	Université de Valenciennes

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu Serge NICAISE qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de DEA. Tout au long de ces trois années, il a su orienter mes recherches aux bons moments en me faisant découvrir les équations aux dérivées partielles, au travers de son regard de théoricien pragmatique.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse Patrick HILD professeur de l'Université de Franche-Comté et Marco PICASSO professeur de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne d'avoir accepté cette tâche peu évidente et l'intérêt qu'ils auront porté à mon travail.

Un grand merci à Luc PAQUET et Christophe TROESTLER d'avoir accepté non seulement de faire partie des membres du jury mais aussi d'avoir examiné attentivement le manuscrit.

Je remercie également mon collègue de bureau Karim DJADEL, qui par son expérience m'a permis d'avancer du point de vue numérique.

Pour reprendre un ordre plus chronologique, je voudrais remercier deux amis qui ont joué un rôle fondamental dans ma formation. Tout d'abord Jacques VAUTHIER Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie qui a su éveiller en moi, dès 1997, une véritable passion pour les mathématiques. Grâce à lui, je garderai de mon passage à l'Université de Pierre et Marie Curie, une intuitive mais solide formation aux mathématiques appliquées. Puis Emmanuel CREUSÉ, qui m'a initié au calcul scientifique et à l'analyse numérique. Il m'a sans aucun doute apporté, au travers des centaines d'heures passées ensemble, une vision pratique de l'analyse dans les domaines appliqués au travers de son expérience de numéricien.

Je tiens à remercier Christophe COLLARD, coordinateur scientifique de la coopération avec l'ENSAM et le laboratoire de Metz au sein du projet Simula+, pour m'avoir impliqué dans son projet depuis 2002 me permettant ainsi de réaliser de nombreuses classes C++ appliquées au domaine des éléments finis, notamment dans le cadre de la mise en œuvre de résolutions d'équations aux dérivées partielles dynamiques.

La qualité et la continuité de ce projet sont le fruit d'un travail d'équipe sur le terrain et de nombreuses rencontres très constructives. J'ai pour cela pleinement profité de la présence de Christophe COLLARD, Denis MERCIER et Emmanuel CREUSÉ ainsi que de l'efficacité des stagiaires successifs que nous avons pris en charge.

Le Laboratoire d'analyse numérique Jacques Louis LIONS et la bibliothèque de Chevaleret ont été un cadre privilégié pour effectuer cette thèse. Parmi ceux qui ont contribué à mes réflexions, je remercie tout spécialement Samy qui a partagé son bureau avec moi aux cours des universités d'été.

Je n'oublierai pas les aides permanentes reçues du personnel administratif du Département de Mathématiques : Nabila DAIFI et Corinne AUREGGI.

Merci à Jawed et à Marlène d'avoir relu attentivement une grosse partie de ce manuscrit. Merci du temps qu'ils ont consacré à redonner un peu de rigueur à ma plume qui a tendance quelques fois à déraiper...

Enfin, une pensée émue pour tous les thésards avec qui j'ai partagé une salle, un café, un repas ou une console d'ordinateur pendant ces quelques années et toute la troupe du Laboratoire de Valenciennes.

*Je dédie cette thèse
à mes proches.*

Résumé

Dans une première partie, on introduit des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur dans \mathbf{R}^d , $d = 2,3$ via une méthode d'éléments finis non conformes [DDPV96] en espace et un schéma d'Euler implicite en temps. Pour cette discrétisation, on élabore un indicateur d'erreur résiduel spatial basé sur les sauts des dérivées normales et tangentielles de notre approximation, ainsi qu'un indicateur résiduel temporel [BM00] basé sur le saut du gradient à chaque pas de temps. Les bornes inférieures et supérieures de la norme de l'erreur forment les résultats principaux de cette étude. En outre, on montre que ces estimateurs sont fiables et efficaces. Dans une seconde partie, on traite le problème de Stokes dynamique. L'élaboration des estimateurs *a posteriori* est également basée sur des estimateurs spatiaux et temporels. Une preuve de leur fiabilité et de leur efficacité est donnée. Finalement, les tests numériques et un algorithme adaptatif issu de [Pic98] confirment les prévisions théoriques et le bon comportement de ces estimateurs [NS05, NSa].

Mots-clés: *a posteriori*, éléments finis non conformes, équation de la chaleur, Stokes dynamique.

Abstract

In a first part, we introduce an *a posteriori* estimator for a nonconforming finite element approximation [DDPV96] of the heat equation in \mathbf{R}^d , $d = 2,3$, using Backward Euler's scheme. For this discretization, we derive a residual indicator based on the jumps of the normal and tangential derivatives of the nonconforming approximation and a time residual based on the jump of broken gradients at each time step [BM00]. Lower and upper bounds form the main results. We confirm the efficiency and reliability of these estimators. In a second part, we present an *a posteriori* estimator for the time dependent Stokes problem in \mathbf{R}^d , $d = 2$ or 3 . Our analysis covers nonconforming finite element approximation (Crouzeix-Raviart's element). We derive an indicator which uses a spatial and time residual. Numerical experiments confirm the theoretical predictions [NS05, NSa] and show the usefulness of these estimators on adaptive mesh refinement using [Pic98].

Keywords: *a posteriori*, nonconforming finite element, heat equation, time dependent Stokes problem.

Table des matières

Notations	xi
Table des figures	xiii
Chapitre 1 Introduction	1
1.1 Résolution du problème numérique	3
1.2 Étude du problème <i>a priori</i>	3
1.3 Étude du problème <i>a posteriori</i>	4
1.4 Critère d'optimalité des indicateurs d'erreur	4
1.5 Adaptation de maillage	4
1.6 Raffinement de type h	5
1.7 Techniques adaptatives	5
1.8 Génération de maillage	6
Chapitre 2 Estimations d'erreur <i>a posteriori</i> pour le problème du laplacien	9
2.1 Introduction	10
2.2 Éléments finis de Crouzeix-Raviart	10
2.2.1 Description géométrique	10
2.2.2 Description topologique	10
2.2.3 Définitions et propriétés	11
2.3 Opérateurs d'interpolation de Clément	13
2.3.1 Éléments finis conformes de premier ordre	13
2.3.2 Définition	13
2.3.3 Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément	14
2.4 Outils fonctionnels	14
2.4.1 Formules de Green	14

2.4.2	Inégalités inverses	15
2.5	Problèmes continus et discrétisés	15
2.5.1	Problème continu	15
2.5.2	Problème discret	16
2.6	Outils et propriétés analytiques	16
2.6.1	Décomposition de Helmholtz	16
2.6.2	Relations d'orthogonalité	17
2.7	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation	19
2.7.1	Borne supérieure de l'erreur	20
2.7.2	Borne inférieure de l'erreur	21
2.8	Tests numériques	22
2.9	Conclusion	23

Chapitre 3 Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur 25

3.1	Introduction	25
3.2	Discrétisations du problème	26
3.2.1	Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite	26
3.2.2	Discrétisation totale	27
3.3	Outils et propriétés analytiques	29
3.4	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation en temps	33
3.5	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation spatiale	36
3.5.1	Borne supérieure de l'erreur	36
3.5.2	Borne inférieure de l'erreur	41
3.6	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation totale	43
3.7	Tests numériques	46
3.7.1	Premier test	46
3.7.2	Dépendance de l'erreur	49
3.7.3	Algorithme adaptatif	52
3.8	Conclusion	55

Chapitre 4 Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour le problème de Stokes 59

4.1	Introduction	59
4.2	Les problèmes continu, semi-discret et totalement discret	60

4.2.1	Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite	61
4.2.2	Discrétisation totale	61
4.3	Outils et propriétés analytiques	63
4.4	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation en temps	70
4.5	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation spatiale	72
4.5.1	Borne supérieure de l'erreur	72
4.5.2	Borne inférieure de l'erreur	77
4.6	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation totale	80
4.7	Tests numériques	82
4.7.1	Premier test	82
4.7.2	Algorithme adaptatif	86
4.8	Conclusion	91
Annexes		95
Annexe A Mise en œuvre algorithmique des éléments finis non conformes 2D		95
A.1	Résolution de l'équation de Laplace.	95
A.2	Assemblage de la matrice du problème de Laplace.	96
A.3	Assemblage du second membre.	98
A.3.1	Intégration numérique	98
A.3.2	Technique d'assemblage.	99
A.4	Mise en place du système linéaire issu de la discrétisation	101
A.5	Stockage de la matrice	101
A.5.1	Stockage structuré.	102
A.6	Résolution du système linéaire.	104
Annexe B Mise en œuvre algorithmique du problème de Stokes 2D.		105
B.1	Algorithme d'Uzawa.	105
B.2	Résolution numérique du problème de Stokes	107
B.3	Algorithme d'Uzawa sous forme discrète.	108
B.4	Implémentation de l'algorithme d'Uzawa.	109
B.5	Application numérique.	111
Bibliographie		117

Notations

\mathbb{R}	espace vectoriel des nombres réels
\mathbb{C}	espace vectoriel des nombres complexes
\mathbb{K}	espace vectoriel désignant \mathbb{R} ou \mathbb{C}
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
A^n	espace produit $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	espace vectoriel des matrices d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K}
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	domaine ouvert borné de dimension $d = 2, 3$
$P^k(\Omega)$	espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k
$C^k(\Omega)$	espace des fonctions k fois continuellement dérivables sur Ω
$L^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
$L_0^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré intégrable de moyenne nulle sur Ω
$L^p(\Omega)$	espace des fonctions de puissance p -ième intégrable sur Ω
$L^\infty(\Omega)$	espace des fonctions essentiellement bornées
$H^k(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées k -ièmes appartiennent à $L^2(\Omega)$
$H_0^k(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $H^k(\Omega)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène
$H^{-1}(\Omega)$	dual topologique de $H^1(\Omega)$
(\cdot, \cdot)	produit scalaire de $L^2(\Omega)$
$\frac{\partial u}{\partial x_i}$	dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i
$D_i u$	dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i
$\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}$	dérivée partielle d'ordre k de u par rapport à la variable x_i
$D_i^k u$	dérivée partielle d'ordre k de u par rapport à la variable x_i
$\partial_t u$	dérivée partielle de u par rapport à la variable temps t
∇u	opérateur gradient de u
Δu	opérateur laplacien de u
$\ \cdot\ $	norme $L^2(\Omega)$
$\ \cdot\ _K, \ \cdot\ _E$	norme L^2 sur le domaine K ou sur une face E
$\ \cdot\ _{\mathbb{R}^d}$	norme euclidienne d'un vecteur de \mathbb{R}^d
$\ \cdot\ _{s,D}$	norme de l'espace de Sobolev $H^s(D)$
$ \cdot _{s,D}$	semi-norme de l'espace de Sobolev $H^s(D)$
$\Gamma = \partial\Omega$	bord de Ω
Γ_D, Γ_N	condition au bord de Dirichlet, Neumann

T_h	triangulation de Ω
K	triangle ou tétraèdre de T_h
$ K $	aire ou volume de T
\hat{K}	triangle de référence
\overline{K}	tétraèdre de référence
E_K	arête de K
\mathcal{E}_h	ensemble des arêtes/faces de T_h
\mathcal{E}_h^{int}	ensemble des arêtes/faces intérieures de T_h
F_K	application linéaire affine du triangle \hat{K} sur K
$a \lesssim b$	il existe une constante positive C indépendante de a et de b telle que $a \leq Cb$
$a \sim b$	il existe des constantes positives C_1 et C_2 indépendantes de a et de b telles que $C_1b \leq a \leq C_2b$
$n_E = (n_{E1}, n_{E2})$	normale extérieure d'une arête E
$t_E = (-n_{E2}, n_{E1})$	vecteur tangent à l'arête E
h_E	longueur ou diamètre d'un élément E
h_K	diamètre de la maille K
ω_K	réunion des éléments partageant une arête/face commune avec K
ω_E	réunion des éléments partageant l' arête/face E
ω_x	réunion des éléments partageant le noeud x
$\tilde{\omega}_K$	réunion des éléments partageant un noeud avec K
$\tilde{\omega}_E$	réunion des éléments partageant un noeud avec E
T	nombre réel strictement positif
$\delta_{i,j}$	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j} = 1$, si $i = j$, 0 sinon
$\mathcal{M}_D(u)$	valeur moyenne intégrale d'une fonction u sur le domaine D
$\Re\lambda$	partie réelle de λ
$\Im\lambda$	partie imaginaire de λ

Table des figures

2.1	Élément fini P_1 non conforme 2D	10
2.2	Fonction de base \hat{p}_1	12
2.3	Fonction de base \hat{p}_2	12
2.4	Fonction de base \hat{p}_3	12
2.5	Deux éléments partageant une arête E	13
2.6	T_0 et T_1	22
2.7	T_2 et T_3	23
2.8	Ordre de convergence de $\ \nabla_h e\ $ et η	24
3.1	Maillage uniforme sur le carré unité avec $n = 8$	46
3.2	$\ \nabla_h e^N\ $ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	47
3.3	q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	48
3.4	q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	48
3.5	Maillage non structuré du carré unité avec $h = 0.2$	49
3.6	q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.	50
3.7	q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.	50
3.8	Fonction gaussienne avec $n = 4, t_n = 0.1s, Nv = 442$	54
3.9	Fonction gaussienne avec $n = 20, t_n = 0.5s, Nv = 462$	55
3.10	Fonction gaussienne avec $n = 40, t_n = 1s, Nv = 470$	56
3.11	Solution singulière avec $n = 4, t_n = 0.1s, Nv = 836$	56
3.12	Solution singulière avec $n = 20, t_n = 0.5s, Nv = 872$	57
3.13	Solution singulière avec $n = 40, t_n = 1s, Nv = 874$	57
4.1	Maillage uniforme sur le carré unité avec $n = 8$	83
4.2	$\ \nabla_h e^N\ $ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	84
4.3	$\ p^N - p_h^N\ $ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	84
4.4	q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	85
4.5	q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.	85
4.6	Maillage non structuré du carré unité avec $h = 0.2$	86
4.7	q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.	87
4.8	q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.	87
4.9	Solution exacte au temps $t = 1s$	90
4.10	Curl gaussien avec $n = 4, t_n = 0.1s, Nv = 289$	91
4.11	Curl gaussien avec $n = 20, t_n = 0.5s, Nv = 284$	92
4.12	Curl gaussien avec $n = 40, t_n = 1s, Nv = 264$	92

Table des figures

4.13	Solution singulière avec $n = 4$, $t_n = 0.1s$, $Nv = 621$	93
4.14	Solution singulière avec $n = 20$, $t_n = 0.5s$, $Nv = 677$	93
4.15	Solution singulière avec $n = 40$, $t_n = 1s$, $Nv = 693$	94
A.1	Disposition des points P_{ij}	99
A.2	Profil matriciel dans le cas $n = 2$	102
B.1	Composante u_1 de la solution exacte u	112
B.2	Composante u_2 de la solution exacte u	112
B.3	Représentation graphique de la pression sur le domaine Ω	113
B.4	Représentation graphique de la première composante f_1	113
B.5	Représentation graphique de la seconde composante f_2	114
B.6	Approximation de u_1 pour une triangulation $T_{1/40}$	114
B.7	Approximation de u_2 pour une triangulation $T_{1/40}$	115
B.8	Approximation de p en norme L^2	115
B.9	Approximation de u en norme L^2	116

Chapitre 1

Introduction

Dans le cadre de la résolution de problèmes physiques tels qu'en mécanique des fluides, des solides ou plus généralement de systèmes d'équations aux dérivées partielles, on rencontre bien souvent le problème de l'efficacité des méthodes numériques employées. Quels vont être les temps de calcul ? Le taux de convergence est-il optimal pour la méthode considérée ? Telles sont les problématiques auxquelles le numéricien est confronté. Dans bien des cas, la difficulté rencontrée, dans le cadre d'une résolution via une méthode d'éléments finis, est que le taux de convergence de ces méthodes numériques se trouve détérioré. On trouve à cela plusieurs raisons :

- la géométrie du domaine : présente-t-il des coins ?
- la nature des conditions au bord : la frontière est-elle mixte ?
- le comportement de la solution : présente-t-elle des singularités ? A-t-elle un comportement anisotrope ? Existe-t-il des discontinuités ?

Le raffinement de maillage automatique peut répondre à ce genre de problèmes. Le raffinement de maillage est une technique algorithmique qui permet d'améliorer le taux de convergence des méthodes numériques employées. L'idée de base est de raffiner les régions sensibles du maillage de notre domaine où l'approximation de notre solution serait "mauvaise" tout en abandonnant les régions les moins sensibles à une approximation classique. Cet abandon s'explique évidemment par le coût d'un raffinement uniforme : à quoi bon raffiner des zones où l'approximation est plus que convenable ? La réponse est triviale.

C'est dans ce cadre que l'on fait intervenir la notion d'estimateurs *a posteriori*. Estimateurs, puisqu'il s'agit évidemment d'estimer au mieux les erreurs commises dans la triangulation de notre domaine. Le terme *a posteriori*, quant à lui, par opposition au caractère *a priori*, désigne évidemment le fait que l'on doit déterminer l'ordre d'erreur sans pour autant connaître la solution exacte de notre problème. Alors en pratique comment déterminer un ordre d'erreur sans connaître la solution exacte ? L'idée est de trouver une quantité équivalente à l'erreur commise entre la solution exacte et la solution approchée du problème étudié. C'est l'essence même de la mise en place des estimateurs ou indicateurs d'erreur *a posteriori*.

On s'attache dans cette thèse, à mettre en œuvre des estimateurs *a posteriori* pour des problèmes de type dynamique tels que l'équation de la chaleur ou le problème de Stokes. L'élaboration de ces indicateurs d'erreur repose sur une discrétisation des pro-

blèmes d'équations aux dérivées partielles via des méthodes d'éléments finis non conformes. On a choisi ici les méthodes d'éléments finis de Crouzeix-Raviart. Le chapitre 2 est une introduction aux indicateurs *a posteriori*. On présente la discrétisation du problème de Laplace statique via la méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart. Il est destiné d'une part aux non initiés, mais il constitue en soi un excellent cadre de préparation aux traitements des problèmes dynamiques.

Dans le chapitre 3, on présente des résultats concernant l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 . On met en place une discrétisation de ce problème toujours à l'aide des éléments finis de Crouzeix-Raviart, mais cette fois-ci la donnée temporelle t est introduite. On a choisi ici, tout comme dans [BM00], un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps. Une fois le problème discrétisé, on met en œuvre non seulement un indicateur d'erreur *a posteriori* basé sur le saut normal et sur le saut tangentiel du gradient de notre approximation, mais aussi un indicateur d'erreur en temps basé sur les gradients successifs de l'approximation. L'équivalence entre l'erreur et les indicateurs est prouvée avec des conditions minimales sur le maillage. Des tests numériques basés sur un schéma adaptatif viennent conforter les résultats théoriques démontrés.

Après avoir mis en œuvre les estimateurs d'erreurs pour l'équation de la chaleur, on met en place des indicateurs d'erreurs pour le problème de Stokes dynamique dans le chapitre 4. Cette étude s'inscrit dans la continuité du chapitre précédent dans la mesure où la résolution numérique du problème de Stokes dynamique repose sur la résolution de problèmes successifs de Stokes statique (à chaque pas de temps), qui eux-mêmes reposent sur une résolution de problèmes de Laplace (à chaque étape de l'algorithme de Uzawa ou d'Arrow Hurwitz). Les bornes inférieures et supérieures d'erreur sont démontrées, de même que l'équivalence entre l'erreur et les indicateurs *a posteriori*. Des expériences numériques confirment le bon comportement de la méthode numérique employée.

De nombreux problèmes touchant à la physique ou à l'ingénierie mathématique sont donc régis par des équations aux dérivées partielles. Bien entendu, les solutions explicites de tels problèmes sont rarement connues et de ce fait on s'attache particulièrement à la résolution numérique de ces équations. Évidemment, le rôle du numéricien ou de l'ingénieur calcul est de mettre en place une méthode numérique pour approcher au mieux la solution exacte. On distingue alors plusieurs étapes dans la mise en place de la méthode numérique choisie :

- la détermination du domaine de résolution Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3
- la discrétisation de son système d'équations aux dérivées partielles via une méthode de différences finies, d'éléments finis ou de volumes finis. Dans le cas des problèmes dynamiques, il faut également prendre en compte la discrétisation en temps
- la mise en œuvre algorithmique de cette discrétisation via des langages ou des logiciels (C, C++, Fortran90, matlab, freefem, etc)
- la résolution des systèmes d'équations issues de la discrétisation
- l'étude de la convergence de la méthode numérique et le calcul du taux de convergence.

Une fois la méthode mise en place, on est amené à discuter de la fiabilité et de l'efficacité de la méthode numérique. En général, les preuves théoriques de convergence, en l'occurrence les estimations *a priori*, assurent la fiabilité mais en aucun cas l'efficacité. L'ordre de convergence se trouve parfois détérioré ; on trouve plusieurs raisons à cela : géométrie du

domaine, régularité de la solution exacte, etc. La problématique est donc de trouver une méthode à la fois fiable et efficace. Les estimateurs *a posteriori* vont jouer ce rôle.

1.1 Résolution du problème numérique

Une fois que notre système d'équations aux dérivées partielles est discrétisé on est amené à résoudre par la suite des systèmes d'équations linéaires ou non-linéaires. Dans le cas des systèmes linéaires, on utilise la plupart du temps des méthodes de gradient basées sur les espaces de Krylov ; dans le cas non-linéaire, on privilégie des méthodes de Newton. Le choix des méthodes de résolution des grands systèmes linéaires repose sur le caractère matriciel du problème : ma matrice est-elle inversible ? Est-elle bien conditionnée ? Par ailleurs, les résolutions numériques, et il faut insister sur le mot numérique, ne sont jamais exactes. L'idée fondamentale est de fixer une tolérance ε et un critère de convergence : si la fonction critère dépasse le seuil ε , alors on réitère le procédé de résolution (méthodes itératives). On constate donc que le numéricien doit non seulement prendre en compte la nature de son équation aux dérivées partielles mais aussi prendre en compte la nature de sa discrétisation numérique. Le rôle de la fonction critère est donc essentiel dans ce processus.

1.2 Étude du problème *a priori*

Pour mettre en œuvre une méthode numérique fiable, il est nécessaire de prouver des résultats théoriques préalables. Ce sont les estimations *a priori*. *A priori* car on suppose la connaissance de la solution u ou de ses attributs : sa régularité, l'espace dans lequel vit cette solution.

Pour établir des estimations *a priori*, on utilise les formulations variationnelles continue et discrète du problème. Soit V un espace de Banach. La formulation variationnelle continue se présente en général sous cette forme : trouver la solution u telle que

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.1)$$

où a est une forme bilinéaire continue et f une donnée du problème. Soit $h > 0$. La formulation variationnelle discrète consiste à déterminer une solution u_h vérifiant :

$$a_h(u_h, v_h) = (f_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.2)$$

où V_h est un sous espace de dimension finie de V . Si l'espace V_h n'est pas inclus dans V , on parle d'approximation non conforme. Les applications a_h, f_h sont respectivement les approximations de a et f dans V_h . L'estimation *a priori* se présente comme suit :

$$\|u - u_h\|_V \lesssim B_h(u) + C_h(f). \quad (1.3)$$

où

$$B_h(u) = h^p \|u\|_W$$

où W est un sous espace fonctionnel de V qui dépend exclusivement de la régularité de u et p est un entier représentant l'ordre de convergence entre la solution exacte u et son approximation u_h . Quant à la quantité $C_h(f)$, elle dépend exclusivement de la différence entre la donnée f et son approximation f_h et d'une puissance q de h supérieure à p (termes de degrés supérieurs). La preuve théorique d'une telle inégalité assure bien évidemment la convergence de la méthode numérique employée, à condition évidemment d'avoir des hypothèses de régularité pour avoir l'efficacité de cette méthode.

1.3 Étude du problème *a posteriori*

Pour mettre en œuvre des estimations d'erreur *a posteriori*, on doit prouver l'existence d'une borne d'erreur η qui vérifie le critère suivant :

$$\|u - u_h\|_V \lesssim \eta(h, u_h, f_h) + \xi_h(f). \quad (1.4)$$

où $\xi_h(f)$ est une quantité négligeable devant η (termes d'ordre supérieurs). La quantité η se calcule très facilement à partir des données u_h et f_h , par suite il est facile d'obtenir une borne de l'erreur globale, cette borne est appelée estimateur global. En pratique, l'estimateur global est une somme d'estimateurs locaux η_K où K est une maille de notre triangulation T_h . L'estimateur global s'écrit alors

$$\eta = \sqrt{\sum_{K \in T_h} \eta_K^2} \quad (1.5)$$

1.4 Critère d'optimalité des indicateurs d'erreur

Comme nous venons de le voir, l'estimateur global η est une somme d'estimateurs locaux η_K . Pour prouver l'équivalence entre les estimateurs et l'erreur globale, on doit montrer non seulement l'inégalité globale (1.4), mais aussi l'inégalité locale suivante :

$$\eta_K \lesssim \|u - u_h\|_{\omega_K} + \chi_h(f, K), \quad (1.6)$$

où $\|\cdot\|_{\omega_K}$ est la restriction à ω_K de la norme de V et ω_K est la réunion des éléments partageant une arête/face commune avec K .

Définition 1.4.1. Une famille d'indicateurs locaux $(\eta_K)_{K \in T_h}$ vérifie le critère d'optimalité si elle vérifie l'inégalité globale (1.4) et l'inégalité locale (1.6).

Le critère d'optimalité assure l'équivalence entre l'erreur et les estimateurs *a posteriori*. Ce critère permet donc d'assurer le bon comportement des estimateurs d'erreur.

1.5 Adaptation de maillage

Du point de vue théorique, on voit que les quantités $(\eta_K)_{K \in T_h}$ ne dépendent que des données u_h, f_h et du problème considéré, *a fortiori* ces indicateurs sont faciles à calculer. La

problématique est donc la suivante : en pratique, quelle va être la stratégie employée pour utiliser ces résultats ? Nous allons utiliser pour cela la stratégie d'adaptation de maillages. L'adaptation de maillage consiste à localiser les lieux où l'erreur est importante. En effet, nous bénéficions d'une carte locale d'erreur, nous sommes donc en mesure d'apprécier les lieux où l'erreur est importante. Le but étant, bien entendu, de se concentrer sur les mailles du domaine dont l'estimateur local est le plus élevé. Le procédé de maillage adaptatif s'opère comme suit :

1. construction d'un maillage initial T_0 de Ω . On fixe : $k = 0$
2. calcul de la solution approchée sur T_k à l'aide d'une méthode d'éléments finis
3. calcul des estimateurs $(\eta_K)_{K \in T_k}$. Stop, lorsque l'erreur globale $\eta^2 = \sum_{K \in T_h} \eta_K^2$ est assez petite
4. on raffine tout les éléments $K \in T_k$ qui vérifient le critère $\eta_K \geq \delta$, la tolérance δ étant donnée
5. $k \leftarrow k + 1$ et on retourne à l'étape (2).

Regardons précisément l'étape 4. Comment fixe-t-on la tolérance δ et comment s'opère la procédure de raffinement ? Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au raffinement de type h (h -refinement) décrit dans la section suivante.

1.6 Raffinement de type h

Le raffinement de type h consiste à enrichir l'espace d'éléments finis localement en partitionnant les mailles qui vérifient le critère $\eta_K \geq \delta$. On définit la tolérance comme suit :

$$\delta = \frac{1}{2\sigma} \sum_{K \in T_k} \eta_K \quad (1.7)$$

où σ représente le nombre de mailles de T_k . Les mailles K de T_k dépassant la tolérance sont raffinées comme suit :

$$h_K := \frac{1}{2} h_K$$

autrement dit c'est ici que la définition du raffinement de type h prend tout son sens : on raffine localement sur les données h_K . Il existe évidemment d'autres critères de raffinement.

1.7 Techniques adaptatives

Nous avons évoqué le raffinement de type h , mais il en existe d'autres types :

- le raffinement de type p consiste à augmenter localement le degré de la méthode d'éléments finis
- le raffinement de type hp est une combinaison des méthodes de raffinement de type h et de type p

- le raffinement de type r est une méthode permettant la relocalisation des nœuds, le nombre d'inconnues restant fixe
- le raffinement de type m permet de redéfinir localement un modèle, évidemment cela dépend du comportement local de la solution. Un cas typique est celui du passage d'un état instationnaire à un état stationnaire, ou bien d'une caractéristique non-linéaire à une caractéristique linéaire.

Évidemment l'utilisation de telles techniques suppose que l'on possède au départ un maillage, ce qui nous amène à nous poser la question de la génération de maillage.

1.8 Génération de maillage

Un domaine de résolution Ω étant donné, on doit générer un maillage adéquat pour résoudre numériquement notre équation aux dérivées partielles. Le premier problème auquel nous sommes confrontés est issu de la nature géométrique du bord : comment approcher au mieux un domaine dont les bords sont des courbes, par une triangulation. Le second problème est issu de l'équirépartition des mailles, comment générer un maillage dont les éléments sont équirépartis sur tout le domaine ?

Le mathématicien russe Boris Nikolaevich Delone, dit Delaunay (1890-1980) a mis en place une méthode de création d'une triangulation à partir des nœuds qui définissent la frontière du domaine. L'idée consiste à insérer des nœuds supplémentaires pour créer de nouveaux éléments triangulaires. La génération de maillage de type Delaunay repose sur le principe fondamental du cercle vide : le cercle circonscrit au triangle ne contient aucun nœud de la triangulation autres que les trois sommets définissant ce triangle. La triangulation de Delaunay est parmi toutes les triangulations possibles, celle qui maximise l'angle minimal de la triangulation. À partir de cette propriété il peut être prouvé que la triangulation de Delaunay minimise le rayon du cercle circonscrit, ainsi que le rayon du cercle inscrit. Un problème issu de cette méthode est évidemment la reconstruction de la frontière lorsque le domaine est non convexe. Du point de vue algorithmique, l'idée est la suivante :

- définir un critère h qui correspond à la finesse du maillage
- réaliser une triangulation initiale grossière
- raffiner la frontière du domaine jusqu'à ce que les nœuds de la frontière satisfassent le critère de finesse
- continuer à insérer des nœuds issus du raffinement à l'intérieur des triangles reliant les nœuds de la frontière jusqu'à ce que tous les triangles satisfassent le critère de finesse du maillage
- reconstruction éventuelle de la frontière dans le cas où le domaine est non convexe.

Il existe d'autres méthodes de génération de maillage, on peut notamment citer l'algorithme "advancing front" (voir [Loh96]), dont l'idée est grossièrement de créer des triangles proches de la frontière et ensuite de mailler par couche jusqu'à ce que le domaine soit entièrement recouvert. Il existe également la méthode de pavage, reposant sur les mêmes principes que l'algorithme "advancing front", mais qui génère des quadrilatères.

Bien entendu, la génération de maillage est un domaine très vaste des mathématiques appliquées, ce chapitre est par conséquent une courte introduction aux méthodes exis-

tantes. Pour plus d'informations, on pourra se référer notamment aux ouvrages [Geo91, GB97]. Retenons les points essentiels de ce chapitre : nous avons vu que la démarche du numéricien s'inscrit à travers des étapes constructives (étude du problème, discrétisation, etc). L'étape qui va nous intéresser par la suite et qui sera *a fortiori* le fil conducteur de cette thèse reposera sur l'élaboration d'estimateurs d'erreur. Nous nous sommes particulièrement intéressés au raffinement de type h . Les maillages utilisés seront de type Delaunay et on s'intéressera particulièrement au caractère optimal des indicateurs d'erreur employés.

Chapitre 2

Estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème du laplacien

Sommaire

2.1	Introduction	10
2.2	Éléments finis de Crouzeix-Raviart	10
2.2.1	Description géométrique	10
2.2.2	Description topologique	10
2.2.3	Définitions et propriétés	11
2.3	Opérateurs d'interpolation de Clément	13
2.3.1	Éléments finis conformes de premier ordre	13
2.3.2	Définition	13
2.3.3	Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément	14
2.4	Outils fonctionnels	14
2.4.1	Formules de Green	14
2.4.2	Inégalités inverses	15
2.5	Problèmes continus et discrétisés	15
2.5.1	Problème continu	15
2.5.2	Problème discret	16
2.6	Outils et propriétés analytiques	16
2.6.1	Décomposition de Helmholtz	16
2.6.2	Relations d'orthogonalité	17
2.7	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation	19
2.7.1	Borne supérieure de l'erreur	20
2.7.2	Borne inférieure de l'erreur	21
2.8	Tests numériques	22
2.9	Conclusion	23

2.1 Introduction

Ce chapitre rappelle des estimations d'erreur *a posteriori* pour le problème de Laplace 2D via une discrétisation par éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart. Ces estimateurs sont mis en place de manière standard. En outre, nous avons pris le soin de décrire les différentes étapes de construction de ces indicateurs d'erreur, ce choix étant guidé non seulement par le fait que ce chapitre soit en lui même une introduction aux estimateurs d'erreur *a posteriori*, mais aussi par le fait qu'il s'agisse d'un problème statique et par voie de conséquence il constitue un excellent cadre introductif aux problèmes dynamiques.

2.2 Éléments finis de Crouzeix-Raviart

On propose dans cette partie une brève description des éléments finis de Crouzeix-Raviart. Ces éléments finis sont de type non conforme autrement dit que l'espace des approximations n'est pas inclus au sens ensembliste dans l'espace de vie de la solution.

2.2.1 Description géométrique

Dans le cadre 2D, l'élément fini de référence est représenté par une maille triangulaire dont les degrés de liberté correspondent au milieu de chacune des arêtes comme le montre la figure suivante. Clairement cet élément présente des discontinuités au niveau des inter-

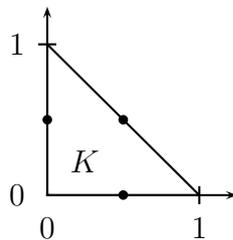


FIG. 2.1 – Élément fini P_1 non conforme 2D

faces des arêtes, le seul point de continuité au niveau des interfaces étant le milieu des arêtes.

Dans le cadre 3D, l'élément fini de référence est représenté par un tétraèdre dont les degrés de liberté correspondent aux barycentres des faces des tétraèdres.

2.2.2 Description topologique

Nous fixons un maillage T_h de Ω qui est régulier au sens de Ciarlet [Cia78, p. 124], autrement dit, il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad \forall K \in T_h, \quad (2.1)$$

où h_K et ρ_K désignent respectivement le diamètre de K et le diamètre de la plus grande boule inscrite dans K . Tous les éléments sont des triangles/tétraèdres notés K . L'ensemble de toutes les arêtes/faces de T_h est symbolisé par \mathcal{E}_h . On définit également l'ensemble \mathcal{E}_h^{int} des arêtes/faces intérieures de T_h et l'ensemble \mathcal{E}_K des arêtes/faces d'un élément K . Enfin pour une arête/face donnée $E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L$, on désigne par h_E , la longueur ou le diamètre d'un élément E .

Il est également nécessaire de définir des patches locaux : pour un élément K , on définit ω_K comme la réunion de tous les éléments qui partagent une arête/face avec K . Pour une arête/face E , ω_E désigne la réunion des triangles/tétraèdres ayant E pour arête/face. Enfin, pour un nœud x , on définit ω_x comme la réunion de tous les triangles/tétraèdres ayant x pour nœud. De la même manière, on définit par $\tilde{\omega}_K$ et $\tilde{\omega}_E$ la réunion de tous les triangles/tétraèdres partageant respectivement un nœud avec K et E . \mathcal{N}_h représente l'ensemble des nœuds de la triangulation T_h et \mathcal{N}_h^{int} l'ensemble des nœuds intérieurs de la triangulation T_h .

On introduit ici l'espace des éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart :

$$\begin{aligned} X_h^0 = \{ & v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h, \\ & \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_h^{int}, K, L \in T_h, \\ & \int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_h \}. \end{aligned}$$

Dans le cadre 2D, l'espace peut-être reformulé comme suit

$$X_h^0 = \{v \in X_h : v = 0 \text{ au milieu des arêtes du bord } \Gamma\}$$

avec

$$\begin{aligned} X_h = \{ & v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h, \\ & v \text{ est continu au milieu des arêtes} \} \end{aligned}$$

Les fonctions de base de cet élément fini sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) = & 1 - 2\hat{y} \\ \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) = & -1 + 2\hat{x} + 2\hat{y} \\ \hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) = & 1 - 2\hat{x} \end{cases}$$

2.2.3 Définitions et propriétés

Étant donnée une arête E , on choisit une direction normale arbitraire n_E et on définit K_{in} et K_{ext} comme étant les deux éléments partageant cette arête/face. On peut supposer, sans aucune restriction, que $n_E = (n_{E1}, n_{E2})$ pointe vers K_{ext} (Figure 2.5). Le vecteur tangent est défini par $t_E = (-n_{E2}, n_{E1})$.

On utilisera également, lors de l'analyse par éléments finis des équations aux dérivées partielles, la propriété suivante :

$$\int_E [[u_h]]_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_h, \forall u_h \in X_h^0, \quad (2.2)$$

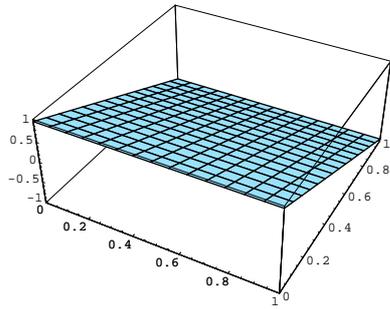


FIG. 2.2 – Fonction de base \hat{p}_1

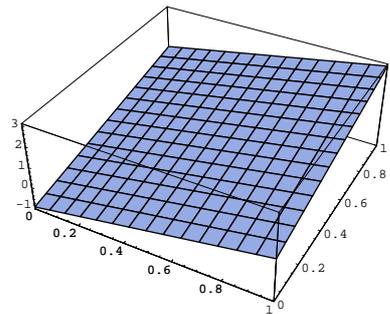


FIG. 2.3 – Fonction de base \hat{p}_2

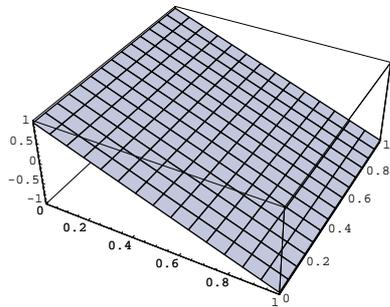
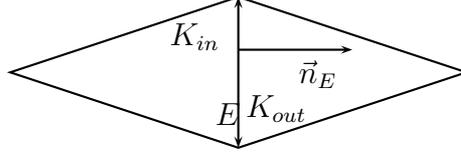


FIG. 2.4 – Fonction de base \hat{p}_3


 FIG. 2.5 – Deux éléments partageant une arête E

où le saut d'une fonction v à travers une arête/face E au point x est défini par

$$[[v(x)]]_E = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} v(x + \alpha n_E) - v(x - \alpha n_E) & \text{si } E \in \mathcal{E}_h^{int}, \\ v(x) & \text{si } E \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^{int}. \end{cases}$$

Notons également que le signe de $[[v(x)]]_E$ dépend de l'orientation de n_E . Néanmoins, des quantités telles que le saut du gradient $[[\nabla v \cdot n_E]]_E$ sont indépendantes de cette orientation. Pour une fonction $v \in X_h^0$, on définit le gradient discontinu $\nabla_h v$ par

$$(\nabla_h v)|_K = \nabla v|_K, \forall K \in T_h.$$

2.3 Opérateurs d'interpolation de Clément

2.3.1 Éléments finis conformes de premier ordre

Nous avons défini précédemment les éléments finis de type non conformes, rappelons à présent la définition de l'élément fini conforme P_1

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h\}$$

avec

$$V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega).$$

2.3.2 Définition

Pour notre analyse *a posteriori*, nous avons besoin de l'interpolé de Clément. On définit

$$\begin{aligned} Y_h &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_h, \\ &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_h^{int}, K, L \in T_h, \}, \\ Y_h^0 &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_h, \\ &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_h^{int}, K, L \in T_h, \\ &\quad \int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_h\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. Notez que $H^1(\Omega) \subset Y_h$ et que $X_h^0 \cap H_0^1(\Omega) \subset Y_h^0$.

On rappelle que l'opérateur d'interpolation de Clément est défini comme suit : on définit de manière standard l'application qui à tout nœud x associe $\lambda_x \in V_h$ et vérifiant

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \forall y \in \mathcal{N}_h.$$

Pour tout élément $v \in Y_h$ et $w \in Y_h^0$, on définit les opérateurs I_C et I_C^0 par

$$I_C v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x, \quad (2.3)$$

$$I_C^0 w = \sum_{x \in \mathcal{N}_h^{int}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} w \right) \lambda_x. \quad (2.4)$$

Remarque 2.3.2. $I_C v$ appartient à V_h , alors que $I_C^0 w$ appartient à V_h^0 .

2.3.3 Propriétés de l'opérateur d'interpolation de Clément

Les opérateurs définis précédemment vérifient les propriétés suivantes.

Lemme 2.3.3. Pour tout $v \in Y_h$ et $w \in Y_h^0$, on a

$$\|v - I_C v\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h, \quad (2.5)$$

$$\|v - I_C v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\omega}_E}, \forall E \in \mathcal{E}_h, \quad (2.6)$$

$$\|w - I_C^0 w\|_K \lesssim h_K \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h, \quad (2.7)$$

$$\|w - I_C^0 w\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_E}, \forall E \in \mathcal{E}_h^{int}, \quad (2.8)$$

$$\|\nabla I_C^0 w\|_K \lesssim \|\nabla_h w\|_{\tilde{\omega}_K}, \forall K \in T_h. \quad (2.9)$$

Démonstration. Toutes ces propriétés sont démontrées dans [Clé75]. On pourra également se référer à [SZ90, Ver99] pour des estimations équivalentes faisant intervenir d'autres opérateurs. ■

2.4 Outils fonctionnels

2.4.1 Formules de Green

La valeur moyenne d'une fonction v sur une arête/face E est définie par

$$\mathcal{M}_E(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v.$$

Nous aurons également besoin des formules de Green suivantes : si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $v, w \in H^1(D)$, alors on a

$$\int_D \nabla v \cdot \mathbf{curl} w = \int_{\partial D} v \mathbf{curl} w \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial D} \nabla v \cdot \mathbf{t} w, \quad (2.10)$$

où t est le vecteur unitaire tangent le long de ∂D et $\mathbf{curl} w$ le vecteur défini comme suit $\mathbf{curl} w = \begin{pmatrix} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{pmatrix}$. En outre, si D est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et $v \in H^1(D)$, $w \in H^1(D)^3$ alors on a

$$\int_D \nabla v \cdot \mathbf{curl} w = \int_{\partial D} v \mathbf{curl} w \cdot n = \int_{\partial D} (\nabla v \times n) \cdot w. \quad (2.11)$$

2.4.2 Inégalités inverses

Soit $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K$ les coordonnées barycentriques de l'élément K . On définit la fonction bulle b_K associée au triangle K comme suit :

$$b_K = \begin{cases} 27\lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K & \text{dans } K \\ 0 & \text{sur } \partial K. \end{cases} \quad (2.12)$$

Étant donnée une arête $E \in \mathcal{E}_h$, avec $\omega_E = K_1 \cup K_2$, on définit la fonction bulle b_E associée à l'arête E :

$$b_E = \begin{cases} 4\lambda_1^{K_i} \lambda_2^{K_i} & \text{dans } K_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \omega_E. \end{cases} \quad (2.13)$$

Lemme 2.4.1. *Soit $E \subset \partial K$ une arête/face de K . Considérons $r_K \in P^0$ et $r_E \in P^1$. Alors les équivalences et les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$\|r_K b_K^{1/2}\|_K \sim \|r_K\|_K, \quad (2.14)$$

$$\|\nabla(r_K b_K)\|_K \lesssim h_K^{-1} \|r_K\|_K, \quad (2.15)$$

$$\|r_E b_E^{1/2}\|_E \sim \|r_E\|_E, \quad (2.16)$$

$$\|F_{ext}(r_E) b_E\|_K \lesssim h_E^{1/2} \|r_E\|_E \quad (2.17)$$

$$\|\nabla(F_{ext}(r_E) b_E)\|_K \lesssim h_E^{-1/2} \|r_E\|_E, \quad (2.18)$$

où F_{ext} est l'opérateur d'extension d'une arête à un triangle.

2.5 Problèmes continus et discrétisés

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec un bord Γ polygonal.

2.5.1 Problème continu

On considère le problème elliptique de second ordre suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.19)$$

La solution du problème (2.19) $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.20)$$

2.5.2 Problème discret

À présent nous allons discrétiser (2.20) de manière assez standard. Nous employons pour cela, la méthode d'éléments finis non conformes précédemment décrite.

La discrétisation totale du problème (2.19) via une méthode d'éléments finis de Crouzeix-Raviart est donnée par : trouver $u_h \in X_h^0$, telle que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad (2.21)$$

pour tout $v_h \in X_h^0$.

2.6 Outils et propriétés analytiques

Contrairement à la méthode d'éléments finis P_1 -conformes, la mise en œuvre d'indicateurs d'erreur *a posteriori* nécessite ici une étude analytique plus poussée. En effet, dans le cas conforme, rien ne nous empêche de prendre pour valeur u_h dans la formulation variationnelle (2.20) puisque u_h s'annule sur le bord Γ . De plus l'erreur $e_h = u - u_h$ en tant que différence de deux fonctions dans $H_0^1(\Omega)$, appartient également à $H_0^1(\Omega)$.

2.6.1 Décomposition de Helmholtz

Le problème évident est que notre interpolé u_h , et à plus forte raison e_h , est seulement dans $H^1(\Omega)$. De ce fait, l'idée consiste à employer une décomposition de l'erreur, plus précisément du gradient de l'erreur.

Lemme 2.6.1 (Décomposition de Helmholtz de l'erreur). *Le gradient de l'erreur se décompose de la manière suivante*

$$\nabla_h e = \nabla w + \mathbf{curl} \varphi, \quad (2.22)$$

avec $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $w \in H_0^1(\Omega)$. En outre, w et φ vérifie les inégalités suivantes

$$|w|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h e\|, \quad (2.23)$$

$$|\varphi|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h e\|. \quad (2.24)$$

Démonstration. L'idée consiste à introduire un problème elliptique auxiliaire. Considérons le problème de Dirichlet suivant, dont le but est de déterminer $w \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \mathbf{div} (\nabla_h e - \nabla w) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.25)$$

La formulation faible du problème (2.25) est :

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.26)$$

Étant donné que le champ de vecteurs $\nabla_h e - \nabla w$ est à divergence nulle sur Ω , i.e.,

$$\mathbf{div} (\nabla_h e - \nabla w) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Par le théorème I.3.1 de [GR86], il existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{curl} \varphi = \nabla_h e - \nabla w.$$

L'inégalité (2.23), en utilisant (2.26) avec $v = w$, est alors démontrée. L'inégalité (2.24) est obtenue comme suit : en utilisant la relation (2.22), on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi|^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi \cdot \mathbf{curl} \varphi \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi \cdot (\nabla_h e - \nabla w). \end{aligned}$$

À l'aide de la formule de Green et de la condition au bord $w = 0$ sur Γ , on obtient

$$\int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi \cdot \nabla_h e. \quad (2.27)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que

$$\|\mathbf{curl} \varphi\| \leq \|\nabla_h e\|.$$

Puisque $|\varphi|_{1,\Omega} = \|\mathbf{curl} \varphi\|$, l'inégalité (2.24) est alors une conséquence directe des estimations précédentes. ■

Remarque 2.6.2. *A fortiori, on constate que pour évaluer l'erreur $\nabla_h e$, nous sommes dans l'obligation d'évaluer les termes ∇w et $\mathbf{curl} \varphi$. L'idée sera par la suite non pas d'évaluer ces quantités mais plutôt d'évaluer les différences $\nabla(w - w_h)$ et $\mathbf{curl}(\varphi - \varphi_h)$, où w_h et φ_h représentent respectivement les interpolés P_1 -conformes de w et φ . C'est justement l'objet des lemmes suivants.*

2.6.2 Relations d'orthogonalité

Nous allons introduire à présent quelques notations relatives aux sauts normal et tangentiel du gradient de u_h . On définit les quantités $J_{E,n}$ et $J_{E,t}$ comme suit :

$$J_{E,n} = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_h^{int}, \\ 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^{int}, \end{cases}$$

et

$$J_{E,t} = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h \cdot t_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_h^{int}, \\ -\nabla u_h \cdot t_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^{int}. \end{cases}$$

Lemme 2.6.3 (Orthogonalité au sens de Galerkin). *L'erreur e satisfait la relation d'orthogonalité suivante*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w_h = 0, \quad \forall w_h \in V_h^0. \quad (2.28)$$

Démonstration. La preuve est immédiate. L'inclusion $V_h^0 \subset X_h^0$ permet de prendre $v = w_h$ dans les relations (2.20) et (2.21), vient ensuite la relation (2.28) en soustrayant (2.20) à (2.21). ■

Lemme 2.6.4 (Orthogonalité de l'erreur). *L'erreur satisfait*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h e \cdot \mathbf{curl} \varphi_h = 0, \quad \forall \varphi_h \in V_h. \quad (2.29)$$

Démonstration. Considérons un élément arbitraire φ_h dans V_h . En utilisant la formule de Green (cf. les identités (2.10) et (2.11)), on obtient en se rappelant que $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h e \cdot \mathbf{curl} \varphi_h &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{curl} \varphi_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla_h u_h \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \\ &= \int_{\Gamma} u \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E \llbracket u_h \rrbracket_E \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E) \int_E \llbracket u_h \rrbracket_E, \end{aligned}$$

comme la fonction $(\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E)|_E$ est constante sur $E \in \mathcal{E}_h$. La propriété des éléments finis de Crouzeix-Raviart (2.2), satisfaite par $u_h \in X_h^0$, nous permet de conclure cette preuve. ■

Lemme 2.6.5. *Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante*

$$\int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \mathbf{curl} \varphi = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,t} \cdot \varphi \quad (2.30)$$

Démonstration. Une intégration par parties dans Ω sur chaque élément K donne (cf. (2.10))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot \mathbf{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{curl} \varphi - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \mathbf{curl} \varphi \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{curl} \varphi \cdot nu - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nabla u_h \cdot t_K \varphi \end{aligned}$$

Comme $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on conclut en utilisant la définition de $J_{E,t}$.

Lemme 2.6.6. *L'erreur e satisfait*

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,n} w,$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Une intégration par parties sur chaque élément et le fait que $\Delta u_h = 0$ pour tout élément de $K \in T_h$ montre que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot \nabla w &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h u_h \cdot \nabla w \\ &= \int_{\Omega} f w - \sum_{K \in T_h} \left(- \int_K \Delta u_h w + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h w \right) \\ &= \int_{\Omega} f w - \sum_{K \in T_h} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E n \cdot \nabla u_h w. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}$ et la continuité de w à travers les arêtes/faces. ■

Corollaire 2.6.7. *Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$ on a*

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla_h e \cdot (\nabla w + \mathbf{curl} \varphi) = \sum_{K \in T_h} \int_K f w + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (J_{E,n} w + J_{E,t} \cdot \varphi). \quad (2.31)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des Lemmes 2.6.5 et 2.6.6. ■

2.7 Analyse a posteriori de la discrétisation

Nous allons à présent définir l'estimateur d'erreur local relatif à la discrétisation (2.21)

Définition 2.7.1. *L'estimateur d'erreur local η_K est défini par*

$$\eta_K = h_K \|f_h\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} (\|J_{E,n}\|_E + \|J_{E,t}\|_E).$$

L'estimateur d'erreur global η est donné par

$$\eta^2 = \sum_{K \in T_h} (\eta_K)^2.$$

où f_h est une approximation de f via des éléments finis P^0 , plus précisément on a : $(f_h)|_K := \frac{1}{|K|} \int_K f$, pour tout $K \in T_h$.

Pour établir l'équivalence entre l'erreur $\|\nabla_h e\|$ et η , nous allons démontrer dans un premier temps que l'erreur $\|\nabla_h e\|$ est majorée à une constante près par η et dans un second temps que l'erreur locale sur le patch d'une maille K , $\|\nabla_h e\|_{\omega_K}$ est minorée à une constante près par η_K .

2.7.1 Borne supérieure de l'erreur

Théorème 2.7.2. [DDPV96] Il existe une constante positive C_1 telle que,

$$\|\nabla u - \nabla_h u_h\| \leq C_1(\eta + \xi) \quad (2.32)$$

Les termes d'approximation local et global étant donnés par

$$\xi_K = h_K \|f - f_h\|_{\omega_K}, \quad \xi^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \xi_K^2.$$

Démonstration. En utilisant la décomposition de l'erreur (2.22), on peut écrire

$$\int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 = \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot (\nabla w + \mathbf{curl} \varphi).$$

Les Lemmes 2.6.3 et 2.6.4 mènent directement à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h e \cdot (\nabla w + \mathbf{curl} \varphi) \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h e [\nabla(w - w_h) + \mathbf{curl}(\varphi - \varphi_h)] \end{aligned}$$

Soit $w_h = I_C^0 w \in V_h^0$ et $\varphi_h = I_C \varphi \in V_h$.

L'utilisation du Lemme 2.6.7 auquel on substitue w par $w - w_h$ et φ par $\varphi - \varphi_h$, donne

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla_h e|^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(w - w_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,n}(w - w_h) + J_{E,t}(\varphi - \varphi_h).$$

On introduit l'interpolé f_h comme suit

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K |\nabla_h e|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h)(w - w_h) \\ &\quad + \int_K f_h(w - w_h) + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E J_{E,n}(w - w_h) + J_{E,t}(\varphi - \varphi_h). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités du Lemme 2.3.3 vérifiées par les interpolés de Clément ainsi que les propriétés (2.23) et (2.24) de la décomposition de l'erreur, on conclut que

$$\int_{\Omega} |\nabla_h e|^2 \leq C_1(\eta + \xi)(|w|_{1,\Omega} + |\varphi|_{1,\Omega}) \leq C_1(\eta + \xi) \|\nabla_h e\|$$

ce qui démontre l'inégalité (2.32). ■

2.7.2 Borne inférieure de l'erreur

Nous allons à présent démontrer que notre erreur est bornée inférieurement.

Théorème 2.7.3. [DDPV96] *Il existe une constante positive C_2 telle que,*

$$\eta_K \leq C_2(\|\nabla_h e\|_{\omega_K} + \xi_K) \quad (2.33)$$

Démonstration. **Élément résiduel** Fixons un élément arbitraire $K \in T_h$ et on définit

$$r_K := f_{h|K}, \quad w_K := b_K r_K,$$

où b_K est la fonction bulle standard associée à l'élément K définie en (2.12). Les inégalités inverses classiques du Lemme 2.4.1 et le Lemme 2.6.7 avec $w = w_K$ et $\varphi = 0$ donnent

$$\begin{aligned} \|r_K\|_K^2 &\sim \int_K r_K w_K = \int_K f_h w_K \\ &= \int_K (\nabla_h e \cdot \nabla w_K - (f - f_h)w_K) \\ &\lesssim (h_K^{-1} \|\nabla_h e\|_K + \|f - f_h\|_K) \|r_K\|_K. \end{aligned}$$

Cela prouve l'inégalité

$$h_K \|f_h\|_K \lesssim \|\nabla_h e\|_K + \xi_K, \quad \forall K \in T_h. \quad (2.34)$$

Saut tangentiel On considère une arête/face intérieure E de T_h et on définit

$$w_E := b_E J_{E,t},$$

où b_E est la fonction bulle standard associée à l'arête/face E définie en (2.13). Le Lemme 2.6.7 avec $v = 0$ et $\varphi = w_E$ et les inégalités inverses donnent

$$\begin{aligned} \|J_{E,t}\|_E^2 &\sim \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \nabla_h e \cdot \mathbf{curl} w_E \\ &\lesssim \|\nabla_h e\|_{\omega_E} \|\nabla w_E\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|J_{E,t}\|_E \|\nabla_h e\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$h_E^{1/2} \|J_{E,t}\|_E \lesssim \|\nabla_h e\|_{\omega_E}. \quad (2.35)$$

Saut normal De la même manière, pour une arête/face intérieure arbitraire E de T_h , on définit

$$w_E := b_E J_{E,n}.$$

En utilisant les inégalités inverses et le Lemme 2.6.7 avec $v = w_E$ et $\varphi = 0$ on obtient

$$\|J_{E,n}\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|\nabla_h e\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|f - f_h\|_{\omega_E}.$$

À l'aide de (2.34), cela donne

$$h_E^{1/2} \|J_{E,n}\|_E \lesssim \|\nabla_h e\|_{\omega_E} + h_E \|f - f_h\|_{\omega_E}. \quad (2.36)$$

Enfin, on conclut à l'aide des estimations (2.34), (2.35) et (2.36). ■

Remarque 2.7.4. L'inégalité locale (2.33) peut s'écrire de manière globale en sommant sur les éléments K comme suit

$$\eta \lesssim (\|\nabla_h e\| + \xi), \quad (2.37)$$

dès lors nous avons bien l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur d'erreur.

2.8 Tests numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques sur les estimateurs d'erreur précédemment établis. Soit Ω le domaine en $L(-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$. On considère le problème de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.38)$$

où g est une fonction telle que la solution en coordonnées polaires soit $g(r, \theta) = r^{2/3} \sin(\frac{2\theta}{3})$. On fixe $\delta = 0.5 \max_{K \in T_h} \eta_K$. On commence avec une triangulation régulière T_0 , et la triangulation T_{k+1} est obtenue en raffinant les éléments K de T_k en utilisant le critère suivant

$$\delta \leq \eta_K.$$

Les maillages, dans les Figures 2.6 et 2.7, représentent trois étapes de raffinement successif.

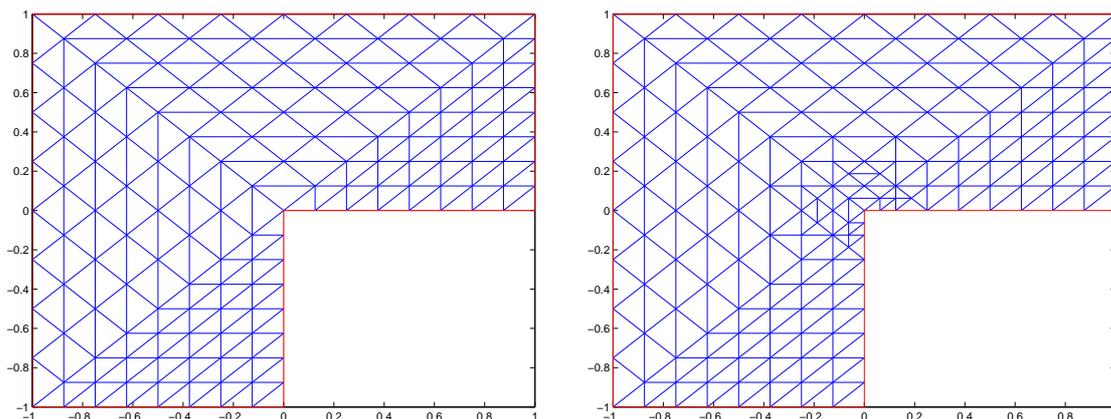
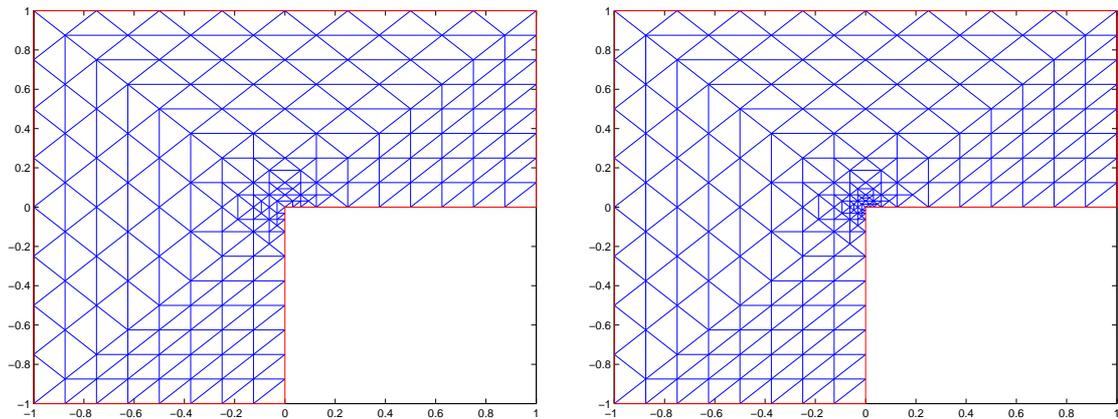


FIG. 2.6 – T_0 et T_1

Le graphique de la Figure 2.8 représente en échelle logarithmique l'erreur $\|\nabla_h e\|$ en fonction du nombre de degrés de liberté N .

FIG. 2.7 – T_2 et T_3

2.9 Conclusion

Les tests numériques représentés dans les Figures 2.6, 2.7 et 2.8 montrent clairement que :

- η et $\|\nabla_h e\|_{0,\Omega}$ ont le même comportement
- l'on obtient un ordre optimal de convergence $\|\nabla_h e\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h)$
- le taux de convergence est le même que dans le cas régulier.

On voit donc que le raffinement de maillage adapté à la solution singulière u permet de récupérer le même ordre de convergence que dans le cas régulier : la méthode numérique employée ici est *fiable* et *efficace*.

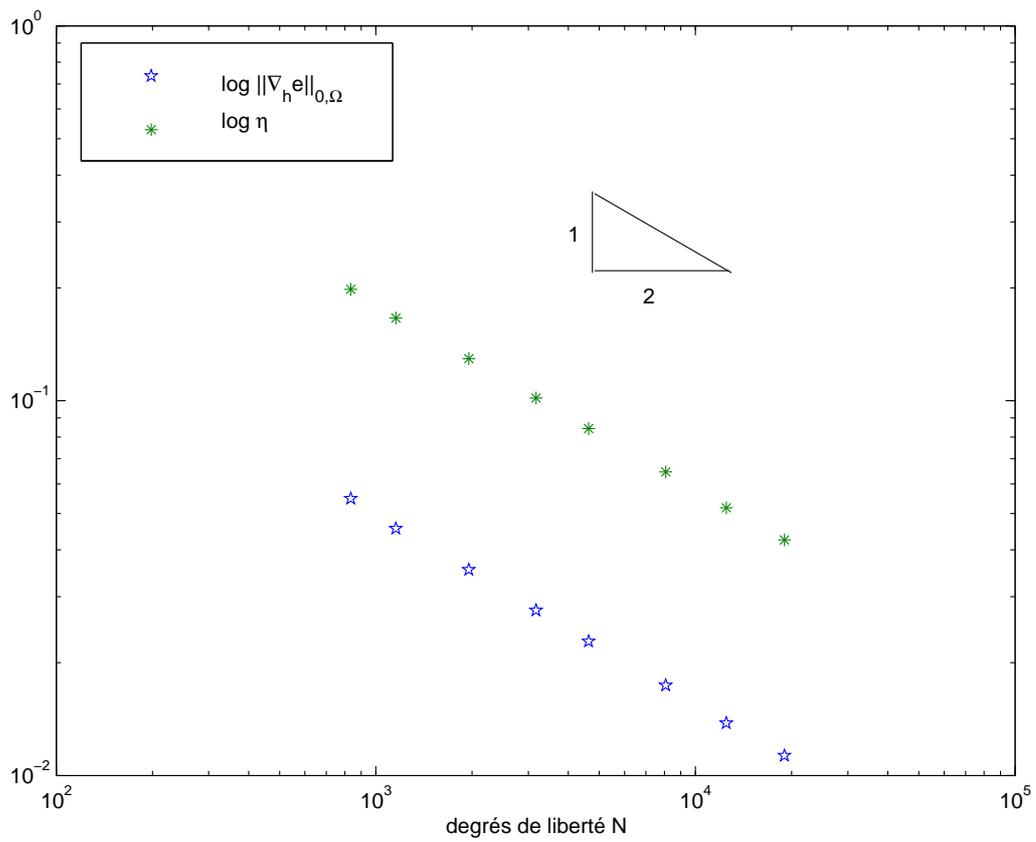


FIG. 2.8 – Ordre de convergence de $\|\nabla_h e\|$ et η .

Chapitre 3

Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur

Sommaire

3.1	Introduction	25
3.2	Discrétisations du problème	26
3.2.1	Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite	26
3.2.2	Discrétisation totale	27
3.3	Outils et propriétés analytiques	29
3.4	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation en temps	33
3.5	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation spatiale	36
3.5.1	Borne supérieure de l'erreur	36
3.5.2	Borne inférieure de l'erreur	41
3.6	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation totale	43
3.7	Tests numériques	46
3.7.1	Premier test	46
3.7.2	Dépendance de l'erreur	49
3.7.3	Algorithme adaptatif	52
3.8	Conclusion	55

3.1 Introduction

Ce premier travail met en évidence l'élaboration d'estimateurs *a posteriori* pour l'équation de la chaleur. Il est basé sur une discrétisation en espace à l'aide d'éléments finis de Crouzeix-Raviart et une discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite. L'utilisation de tels éléments finis non conformes n'est pas anodine. Par exemple, l'approximation du problème de Stokes doit être stable, dans le sens où l'espace discrétisé doit satisfaire la condition inf-sup indépendamment du ratio des éléments. Par ailleurs, les éléments finis standards sont instables lorsqu'on utilise des maillages anisotropes (maillages pour lesquels le ratio des éléments n'est pas borné [ANS01a]) pour des problèmes présentant

des singularités [AD99, AN04]. Néanmoins, l'utilisation d'éléments finis non conformes est recommandée dans l'hypothèse où ils sont inconditionnellement stables [ANS01b].

Dans le cadre d'éléments finis conformes, plusieurs approches ont été introduites pour définir des estimateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur [BBM05b, BM00, BV04, Pic98, Pic03, Ver96, Ver03].

Pour être capable d'étendre ces techniques d'éléments finis non conformes à des problèmes de type spatio-temporel, on a besoin comme dans le cas des problèmes statiques elliptiques [DDPV96] d'estimer un terme de consistance qui apparaît lors d'estimations d'erreurs. Ce terme est contrôlé dans [DDPV96] à l'aide d'une décomposition d'Helmholtz de l'erreur.

L'objectif de ce chapitre est le suivant : la Section 3.2 rappelle le problème continu et sa discrétisation. Dans la Section 3.3, on donne quelques outils analytiques, en particulier quelques propriétés de l'erreur spatiale ainsi que de sa décomposition de Helmholtz. La Section 3.4 est dédiée à l'analyse *a posteriori* de la discrétisation en temps. L'efficacité et la fiabilité des estimateurs d'erreur spatiale sont établies dans la Section 3.5. L'analyse *a posteriori* de la discrétisation totale du problème est considérée dans la Section 3.6, nous montrons en l'occurrence l'efficacité et la fiabilité de la somme des estimateurs spatiaux et temporels. Enfin, la dernière partie est dédiée aux tests numériques, qui à plus forte raison, confirment nos résultats théoriques. On y décrit notamment un algorithme de maillage adaptatif en espace et en temps.

3.2 Discrétisations du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec un bord Γ polygonal ($d = 2$) ou polyédral ($d = 3$). Soit T un nombre positif fixé.

On considère l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^d : soit u une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(\cdot, t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La donnée $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et la valeur initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$. Sous ces conditions, le problème (3.1) ou de manière équivalente

$$(\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (0, T), \quad (3.2)$$

possède une unique solution faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$.

3.2.1 Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite

On suppose maintenant que la donnée $f \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. On introduit également une partition de $[0, T]$ en sous intervalles $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. On dénote par $\tau_p = t_p - t_{p-1}$ la longueur de $[t_{p-1}, t_p]$ et par $\tau = \max_p \tau_p$.

L'approximation semi-discrète du problème continu (3.1) par un schéma d'Euler implicite consiste à déterminer une suite $(u^p)_{0 \leq p \leq N}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} - \Delta u^p = f^p & \text{dans } \Omega \quad 1 \leq p \leq N, \\ u^p = 0 & \text{sur } \Gamma \quad 1 \leq p \leq N, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $f^p = f(\cdot, t_p)$. Ce problème admet une solution faible unique $u^p \in H_0^1(\Omega)$ dont la formulation est

$$\int_{\Omega} u^p v + \tau_p \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \nabla v = \int_{\Omega} u^{p-1} v + \tau_p \int_{\Omega} f^p v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.4)$$

3.2.2 Discrétisation totale

Le problème (3.4) est maintenant discrétisé par une méthode d'éléments finis non conformes. Pour cela, pour tout $p = 0, 1, \dots, N$, on fixe un maillage T_{ph} de Ω qui est régulier au sens de Ciarlet [Cia78, p. 124].

On introduit l'espace d'éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart :

$$\begin{aligned} X_{ph}^0 &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}. \end{aligned}$$

La discrétisation totale du problème (3.1) via un schéma d'Euler implicite et une discrétisation spatiale par éléments finis de Crouzeix-Raviart est donnée par : étant donnée une approximation $u_h^0 \in X_{0h}^0$ de u_0 , trouver $u_h^p \in X_{ph}^0$, $1 \leq p \leq N$, telle que :

$$\int_{\Omega} u_h^p v_h + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} u_h^{p-1} v_h + \tau_p \int_{\Omega} f^p v_h \quad (3.5)$$

pour tout $v_h \in X_{ph}^0$.

Notons que ce type d'éléments finis a été récemment utilisé dans [YAC03] pour la discrétisation des équations de Darcy et que dans ce cas la non conformité de l'approximation rend l'étude *a posteriori* très difficile.

Définition 3.2.1. Soit u^p une solution de (3.4) et u_h^p une solution de (3.5), alors on note l'erreur spatiale par

$$e^p = u^p - u_h^p.$$

On termine cette section en introduisant quelques notations utiles pour la suite. Pour $p = 1, \dots, N$, on définit la suite d'espaces P_1 conforme comme suit

$$\begin{aligned} V_{ph} &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_{ph}\}, \\ V_{ph}^0 &= V_{ph} \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Comme dans la Section 2.3, nous introduisons les interpolés de Clément. On définit

$$\begin{aligned} Y_{ph} &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_{ph}, \\ &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \}, \\ Y_{ph}^0 &= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^1(K), \forall K \in T_{ph}, \\ &\quad \int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \\ &\quad \int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. Notez que $H^1(\Omega) \subset Y_{ph}$ et que $X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega) \subset Y_{ph}^0$.

L'opérateur d'interpolation de Clément est défini comme suit : on définit de manière standard l'application qui à tout nœud x associe $\lambda_x \in V_{ph}$ et vérifiant

$$\lambda_x(y) = \delta_{x,y}, \forall y \in \mathcal{N}_{ph}.$$

Pour tout élément $v \in Y_{ph}$ et $w \in Y_{ph}^0$, on définit les opérateurs $I_C v$ et $I_C^0 w$ par

$$I_C v = \sum_{x \in \mathcal{N}_{ph}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} v \right) \lambda_x, \quad (3.6)$$

$$I_C^0 w = \sum_{x \in \mathcal{N}_{ph}^{int}} |\omega_x|^{-1} \left(\int_{\omega_x} w \right) \lambda_x. \quad (3.7)$$

Remarque 3.2.3. $I_C v$ appartient à V_{ph} , alors que $I_C^0 w$ appartient à V_{ph}^0 .

Pour terminer nous introduisons quelques notations relatives aux sauts normal et tangentiels du gradient de u_h^p . On définit les quantités $J_{E,n}^p$ et $J_{E,t}^p$ comme suit :

$$J_{E,n}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}, \end{cases}$$

Si $d = 2$, alors

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot t_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \cdot t_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}. \end{cases}$$

Si $d = 3$, alors

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \times n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \times n_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}. \end{cases}$$

3.3 Outils et propriétés analytiques

Dans cette section, on établit quelques propriétés satisfaites par l'erreur spatiale e^p . Celles-ci seront particulièrement utiles pour établir des bornes d'erreur.

Lemme 3.3.1 (Orthogonalité au sens de Galerkin). *L'erreur e^p satisfait la relation d'orthogonalité de Galerkin suivante*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} \frac{e^{p-1} - e^p}{\tau_p} v_h, \forall v_h \in V_{ph}^0. \quad (3.8)$$

Démonstration. Il suffit de soustraire (3.4) avec $v = v_h \in V_{ph}^0$ à l'identité (3.5). ■

Lemme 3.3.2. *Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante*

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi \quad (3.9)$$

Démonstration. Supposons que $d = 2$. Une intégration par parties dans Ω sur chaque élément K donne (cf. (2.10))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{curl} \varphi \cdot n u^p - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} \nabla u_h^p \cdot t_K \varphi \end{aligned}$$

Comme $u^p \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on conclut en utilisant la définition de $J_{E,t}^p$. En utilisant la propriété (2.11), la preuve est similaire en 3D. ■

Lemme 3.3.3 (Orthogonalité de l'erreur). *L'erreur satisfait*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h = 0, \forall \varphi_h \in V_{ph} \text{ si } d = 2 \text{ et } \varphi_h \in (V_{ph})^3 \text{ si } d = 3. \quad (3.10)$$

Démonstration. Considérons un élément arbitraire φ_h dans V_{ph} si $d = 2$ ou dans $(V_{ph})^3$ si $d = 3$. Comme précédemment, une intégration par parties (cf. les identités (2.10) et

(2.11)), on obtient (en rappelant que $u^p \in H_0^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \\
 &= \int_{\Gamma} u^p \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\
 &= - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\
 &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E [[u_h^p]]_E \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E \\
 &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} (\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E) \int_E [[u_h^p]]_E,
 \end{aligned}$$

comme la fonction $(\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E)|_E$ est constante sur $E \in \mathcal{E}_{ph}$. La propriété des éléments finis de Crouzeix-Raviart (2.2), satisfaite par $u_h^p \in X_{ph}^0$, nous permet de conclure cette preuve. \blacksquare

Lemme 3.3.4. *L'erreur e^p satisfait*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w = \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p w,$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. Une intégration par parties sur chaque élément et le fait que $\Delta u_h^p = 0$ pour tout élément de $K \in T_{ph}$ montre que

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \nabla w &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \nabla w - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \nabla w \\
 &= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\
 &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \left(- \int_K \Delta u_h^p w + \int_{\partial K} n \cdot \nabla u_h^p w \right) \\
 &= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\
 &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E n \cdot \nabla u_h^p w.
 \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}^p$ et la continuité de w à travers les arêtes/faces. \blacksquare

Corollaire 3.3.5. *Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla w + \mathbf{curl} \varphi) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{w^p - w^{p-1}}{\tau_p} \right) w \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p w + J_{E,t}^p \cdot \varphi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des Lemmes 3.3.2 et 3.3.4. \blacksquare

On rappelle maintenant les résultats suivants (cf Lemme 3.2 de [DDPV96] en 2D et [CKN04] en 3D ou [GR86, Chap. I]) :

Lemme 3.3.6 (Décomposition de Helmholtz de l'erreur). *On a la décomposition de l'erreur suivante*

$$\nabla_h e^p = \nabla w^p + \mathbf{curl} \varphi^p, \quad (3.12)$$

avec $\varphi^p \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in (H^1(\Omega))^3$ si $d = 3$ et $w^p \in H_0^1(\Omega)$. De plus, les estimations suivantes sont vérifiées :

$$|w^p|_{1,\Omega} \leq \|\nabla_h e^p\|, \quad (3.13)$$

$$|\varphi^p|_{1,\Omega} \lesssim \|\nabla_h e^p\|. \quad (3.14)$$

Démonstration. Considérons le problème de Dirichlet suivant : trouver $w^p \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \mathbf{div} (\nabla_h e^p - \nabla w^p) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w^p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.15)$$

La formulation faible du problème (3.15) est :

$$\int_{\Omega} \nabla w^p \cdot \nabla v = \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.16)$$

Comme le champ de vecteurs $\nabla_h e^p - \nabla w^p$ est à divergence nulle sur Ω , i.e.,

$$\mathbf{div} (\nabla_h e^p - \nabla w^p) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Par le théorème I.3.1 de [GR86] si $d = 2$ ou théorème I.3.4 de [GR86] si $d = 3$, il existe $\varphi^p \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in (H^1(\Omega))^3$ si $d = 3$ telle que

$$\mathbf{curl} \varphi^p = \nabla_h e^p - \nabla w^p.$$

L'inégalité (3.13), en utilisant (3.16) avec $v = w^p$, est alors démontrée. L'inégalité (3.14) est obtenue comme suit : en utilisant le développement (3.12), on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot (\nabla_h e^p - \nabla w^p). \end{aligned}$$

À l'aide de la formule de Green et de la condition au bord $w^p = 0$ sur Γ , on obtient

$$\int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{curl} \varphi^p \cdot \nabla_h e^p. \quad (3.17)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de conclure que

$$\|\mathbf{curl} \varphi^p\| \leq \|\nabla_h e^p\|.$$

Si $d = 2$ l'inégalité (3.14) est une conséquence directe des estimations précédentes puisque $|\varphi^p|_{1,\Omega} = \|\mathbf{curl} \varphi^p\|$.

Si $d = 3$, on montre en appliquant le théorème du graphe fermé qu'un champ de vecteurs φ^p satisfait

$$\|\varphi^p\|_{1,\Omega} \lesssim \|\mathbf{curl} \varphi^p\|. \quad (3.18)$$

On considère pour cela l'application linéaire suivante

$$F : H^1(\Omega)^3 / \Sigma \rightarrow \{w \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{div} w = 0\} : \varphi \rightarrow \mathbf{curl} \varphi,$$

où $\Sigma = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{curl} \varphi = 0\}$. Cette application est continue et bijective (Théorème I.3.4 de [GR86]) et par conséquent d'après le théorème du graphe fermé, son application inverse est également continue. \blacksquare

Les lemmes précédents vont nous permettre de prouver les identités suivantes.

Lemme 3.3.7. *L'erreur e^p satisfait les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla w^p &= \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) \\ &- \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) w^p, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p), \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &+ \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = (e^{p-1}, e^p) \\ &+ (e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0(e^p - w^p)) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla I_C^0(e^p - w^p) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Démonstration. L'identité (3.19) est issue de la relation de Galerkin, du Lemme 3.3.1 avec $v_h = I_C^0 w^p \in V_{ph}^0$ et du Lemme 3.3.4. La seconde identité (3.20) est une conséquence du Lemme 3.3.2 et de la relation d'orthogonalité du Lemme 3.3.3 avec $\varphi_h = I_C \varphi^p$.

En utilisant la décomposition de l'erreur (3.12) on peut écrire

$$\tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot (\nabla w^p + \mathbf{curl} \varphi^p).$$

Les identités (3.19), (3.20) mènent directement à

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &= - \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) w^p \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned}$$

On écrit de manière équivalente que

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &+ \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = (e^{p-1}, e^p) \\ &+ (e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0 (e^p - w^p)) \\ &+ (e^p - e^{p-1}, I_C^0 (e^p - w^p)) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned}$$

Cette dernière identité et la relation d'orthogonalité de Galerkin (3.8) conduisent au résultat (3.21). \blacksquare

3.4 Analyse a posteriori de la discrétisation en temps

En s'inspirant de la littérature existante [JNT90, Pic98, BV04], on définit des indicateurs d'erreur en temps :

$$\eta_t^p = \tau_p^{1/2} \|\nabla_h (u_h^p - u_h^{p-1})\|, 1 \leq p \leq N. \quad (3.22)$$

Dans la définition de l'indicateur (3.22), nous avons écrit $\nabla_h (u_h^p - u_h^{p-1})$ alors que u_h^{p-1} et u_h^p n'appartiennent pas à la même triangulation, mais la différence $u_h^p - u_h^{p-1}$ peut être vue comme une fonction P_1 sur la triangulation $T_{ph} \cap T_{p-1,h}$. Le gradient discontinu est alors calculé sur la triangulation $T_{ph} \cap T_{p-1,h}$.

Pour plus de commodité, on introduit les notations suivantes : on dénote par $\pi_{\tau} f$ la fonction étagée constante à $f(t_p)$ sur chaque intervalle (t_{p-1}, t_p) , $1 \leq p \leq N$. Pour une

suite $v^p \in X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega)$, $0 \leq p \leq N$, on dénote par v_τ son interpolé de Lagrange, qui est *a fortiori* affine sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$, et égal à v^p au point t_p , i.e., défini par,

$$v_\tau(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p} v^{p-1} + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} v^p, \forall t \in [t_{p-1}, t_p], 1 \leq p \leq N.$$

Enfin, on note $e_\tau = u - u_\tau$, l'erreur de discrétisation en temps. Étant donné que

$$\partial_t u_\tau = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \text{ sur } (t_{p-1}, t_p),$$

la formulation semi-discrète (3.4) est équivalente à

$$(\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^p, \nabla v) = (f^p, v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (t_{p-1}, t_p). \quad (3.23)$$

En prenant la différence avec (3.2), on en déduit l'équation résiduelle suivante

$$\begin{aligned} (\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) &= ((f - f^p)(t), v) \\ &+ (\nabla(u^p - u_\tau)(t), \nabla v), \forall v \in H_0^1(\Omega), \forall t \in (t_{p-1}, t_p). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Cette équation nous permet de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.4.1 (Borne d'erreur supérieure en temps). *L'erreur en temps e_τ vérifie l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Démonstration. L'équation résiduelle (3.24) donne (voir Proposition 3.1 de [BV04])

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 dt &\leq 2 \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds \\ &+ 2\|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Par définition de u_τ , on a clairement

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2. \quad (3.27)$$

L'inégalité triangulaire nous permet alors d'écrire que

$$\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\| \leq \eta_t^p + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u_h^{p-1} - u^{p-1})\|.$$

De plus les arguments du Lemme 2.3 de [BV04] donnent

$$\tau_p \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \tau_p \|\nabla_h(u_h^{p-1} - u^{p-1})\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \quad (3.28)$$

L'identité précédente, ainsi que ces deux estimations donnent

$$\begin{aligned} \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds &\lesssim (\eta_t^p)^2 \\ &+ \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Cette estimation dans (3.26) permet alors de conclure. \blacksquare

Corollaire 3.4.2 (Seconde borne supérieure de l'erreur). *L'erreur en temps e_τ vérifie l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Démonstration. L'équation résiduelle (3.24) donne directement

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 &\lesssim \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds + \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Le second terme de droite est alors estimé par (3.25), et le troisième terme via (3.29) \blacksquare

La borne supérieure de l'erreur locale en temps est alors facile à démontrer :

Théorème 3.4.3 (Borne inférieure de l'erreur en temps). *Pour tout $p = 1, \dots, N$, on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} \eta_t^p &\lesssim \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1},t_p;L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(t_{p-1},t_p;H^{-1}(\Omega))} \\ &+ \tau_p^{1/2} (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|) \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{p-1},t_p;H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Démonstration. À l'aide de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \eta_t^p &\lesssim \tau_p^{1/2} (\|\nabla(u^p - u^{p-1})\| \\ &+ \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|). \end{aligned}$$

L'estimation du terme $\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|$ est proposée dans la Proposition 3.3 de [BV04], ainsi en utilisant (3.27) (avec $n = p$), en prenant $v = u^p - u_\tau$ dans (3.24) et en intégrant le résultat sur l'intervalle $t \in (t_{p-1}, t_p)$. \blacksquare

3.5 Analyse *a posteriori* de la discrétisation spatiale

3.5.1 Borne supérieure de l'erreur

L'élément résiduel exact est donné par

$$f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}.$$

De manière classique [Ver96], ce terme est remplacé par un élément résiduel approché

$$f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p},$$

où f_h^p est une approximation de f^p via des éléments finis P^0 (plus précisément $(f_h^p)|_K := \frac{1}{|K|} \int_K f^p$, pour tout $K \in T_{ph}$).

Définition 3.5.1. Soit $p \geq 1$. L'estimateur d'erreur local η_K^p est défini par

$$\eta_K^p = h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} (\|J_{E,n}^p\|_E + \|J_{E,t}^p\|_E).$$

L'estimateur d'erreur global η^p est donné par

$$(\eta^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2.$$

Les termes d'approximation local et global sont donnés par

$$\xi_K^p = h_K \|f^p - f_h^p\|_{\omega_K}, \quad (\xi^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2.$$

Théorème 3.5.2 (Borne supérieure de l'erreur). L'inégalité suivante est vérifiée

$$\begin{aligned} \|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 \\ &+ \|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Démonstration. Cette borne supérieure est une conséquence des Lemmes 3.3.6 et 3.3.7. On estime quelques-uns des termes de droite de l'égalité (3.21) du Lemme 3.3.7. En utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'estimation (2.7) et la définition 3.5.1 de l'estimateur local, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} h_K \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K |w^p|_{1, \tilde{\omega}_K} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1, \tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité discrète de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \eta^p |w^p|_{1,\Omega}. \quad (3.33)$$

De la même manière, en utilisant (2.8) et (2.6), on estime les termes avec les sauts tangentiel et normal des gradients :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E \|w^p - I_C^0 w^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E h_E^{1/2} |w^p|_{1,\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K}. \\ \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E \|\varphi^p - I_C \varphi^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E h_E^{1/2} |\varphi^p|_{1,\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |\varphi^p|_{1,\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité discrète de Cauchy-Schwarz donne

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \eta^p |w^p|_{1,\Omega}, \quad (3.34)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) \lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}. \quad (3.35)$$

L'estimation (2.7) nous permet d'évaluer le terme :

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K (f^p - f_h^p) (w^p - I_C^0 w^p) \leq \sum_{K \in T_{ph}} h_K \|f^p - f_h^p\|_K |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K},$$

et par conséquent

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K (f^p - f_h^p) (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \xi^p |w^p|_{1,\Omega}. \quad (3.36)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.7), on obtient

$$|(e^p - e^{p-1}, e^p - w^p - I_C^0(e^p - w^p))| \lesssim h_p \|e^p - e^{p-1}\| \|\nabla_h(e^p - w^p)\|.$$

Les estimations précédentes et l'inégalité (2.9) injectées dans l'identité (3.21) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
 \|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) \\
 &+ Ch_p \|e^p - e^{p-1}\| \|\nabla_h(e^p - w^p)\| \\
 &+ C\tau_p \|\nabla_h e^p\| \|\nabla_h(e^p - w^p)\| \\
 &+ C\tau_p \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega} \\
 &+ C\tau_p (\eta^p + \xi^p) |w^p|_{1,\Omega},
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

Cette inégalité ne donne pas directement l'estimation désirée à cause des facteurs $\|\nabla_h(e^p - w^p)\|$, $|w^p|_{1,\Omega}$ et $|\varphi^p|_{1,\Omega}$. On a donc besoin d'estimer ces facteurs. On débute tout d'abord avec le dernier cité. En utilisant les identités (3.17) et (3.20) on peut écrire

$$\int_{\Omega} |\mathbf{curl} \varphi^p|^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p).$$

En utilisant l'erreur d'approximation (2.6) et la définition de l'estimateur d'erreur *a posteriori*, on obtient

$$\|\mathbf{curl} \varphi^p\|^2 \lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}.$$

À l'aide de (3.18) si : $d = 3$, on conclut que

$$|\varphi^p|_{1,\Omega} \lesssim \eta^p. \tag{3.38}$$

Pour l'estimation de la norme $\nabla_h(e^p - w^p)$, on commence avec

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 = \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - w^p) \cdot \nabla_h(e^p - w^p).$$

En utilisant la décomposition de Helmholtz (3.12), on peut écrire

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 = \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - w^p) \cdot \mathbf{curl} \varphi^p.$$

L'utilisation du Lemme 3.3.7 et de la formule de Green (en rappelant que $w^p = 0$ sur Γ) permet d'obtenir

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p).$$

En utilisant les estimations (3.35) et (3.38), on obtient

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\| \lesssim \eta^p. \tag{3.39}$$

À l'aide de l'inégalité triangulaire

$$\|\nabla w^p\| \leq \|\nabla_h(w^p - e^p)\| + \|\nabla_h e^p\|,$$

et par l'inégalité classique $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, vérifiée pour tous nombres réels a, b , on obtient

$$\|\nabla w^p\|^2 \leq 2\|\nabla_h(w^p - e^p)\|^2 + 2\|\nabla_h e^p\|^2.$$

À l'aide de (3.39) on arrive à

$$\|\nabla w^p\|^2 \leq C(\eta^p)^2 + 2\|\nabla_h e^p\|^2, \quad (3.40)$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

On peut à présent conclure : en utilisant les estimations (3.38), (3.39) et l'inégalité de Young dans (3.37), on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) \\ &+ Ch_p \|e^p - e^{p-1}\| \eta^p \\ &+ C\tau_p \|\nabla_h e^p\| \eta^p \\ &+ C\tau_p ((\eta^p)^2 + \xi^p)^2 \\ &+ \frac{1}{8} \tau_p |w^p|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

En utilisant (3.40) pour estimer le terme $|w^p|_{1,\Omega}^2$ et l'inégalité de Young, on arrive finalement à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) \\ &+ \frac{1}{2} \|e^p - e^{p-1}\|^2 + Ch_p^2 (\eta^p)^2 \\ &+ C\tau_p ((\eta^p)^2 + \xi^p)^2 \\ &+ \frac{\tau_p}{2} \|\nabla_h e^p\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|e^p\|^2 + \frac{1}{2} \|e^{p-1}\|^2 \\ &+ C(\max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \tau_p (\xi^p)^2) \\ &+ \frac{\tau_p}{2} \|\nabla_h e^p\|^2, \end{aligned}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

Cette inégalité est équivalente à

$$\|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 \leq \|e^{p-1}\|^2 + 2C(\max\{h_p^2, \tau_p\} (\eta^p)^2 + \tau_p (\xi^p)^2),$$

et on conclut en sommant sur $p = 1, \dots, n$. ■

Corollaire 3.5.3 (Seconde borne supérieure de l'erreur). *L'estimation suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n \max\{h_p^2, \tau_p\}(\eta^p)^2 \\ &+ \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p(\xi^p)^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)}{\|v\|_{1,\Omega}}.$$

En utilisant la propriété

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in (t_{p-1}, t_p),$$

et l'équation semi-discrète (3.4), pour tout $t \in (t_{p-1}, t_p)$, on peut écrire

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) = R^p(v) - (\nabla_h e^p, \nabla v),$$

où le résidu R^p est défini par

$$R^p(v) = (f^p, v) - \left(\frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v\right) - (\nabla_h u_h^p, \nabla v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme (3.5) implique que

$$R^p(v_h) = 0, \forall v_h \in V_{nh}^0,$$

l'égalité précédente devient

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) = R^p(v - v_h) - (\nabla_h e^p, \nabla v), \forall v_h \in V_{ph}^0, t \in (t_{p-1}, t_p).$$

En prenant $v_h = I_C v$, en appliquant la formule de Green et en utilisant l'estimation(2.8), on a

$$|(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v)| \lesssim (\eta^p + \|\nabla_h e^p\|)\|\nabla v\|, \forall t \in (t_{p-1}, t_p).$$

Cette inégalité et l'inégalité de Poincaré-Friedrich permettent d'écrire

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \eta^p + \|\nabla_h e^p\|, \forall t \in (t_{p-1}, t_p).$$

La conclusion découle alors de (3.32). ■

3.5.2 Borne inférieure de l'erreur

On établit une borne inférieure de l'erreur à l'aide de l'estimateur η_K^p (voir [Ver96, DDPV96]). Par ailleurs, on considère ici un problème non-stationnaire, nous avons donc besoin de l'assertion suivante (voir [BV04, Ver03]) :

Assertion 3.5.4. *Pour tout $1 \leq p \leq N$, il existe une triangulation conforme \tilde{T}_{ph} telle que tout élément K de $T_{p-1,h}$ ou de T_{ph} soit la réunion d'éléments \tilde{K} de \tilde{T}_{ph} telle que $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.*

Dans ce qui va suivre nous avons besoin de reformuler le Corollaire 3.3.5 dans le sens suivant :

Lemme 3.5.5. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ on a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})v + \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) &= \tau_p \int_{\Omega} (f^p - f_h^p)v \\ &+ \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \cdot \varphi). \end{aligned}$$

Théorème 3.5.6 (Borne inférieure de l'erreur locale). *Si les assertions 3.5.4 sont vérifiées, alors pour tout $1 \leq p \leq N$, on a*

$$\eta_K^p \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_K} + \xi_K^p. \quad (3.42)$$

Démonstration. **Élément résiduel** Fixons un élément arbitraire $K \in \tilde{T}_{ph}$ et on définit

$$r_K^p := \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right)|_K, \quad w_K^p := b_K r_K^p,$$

où $b_K = \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$ est la fonction bulle standard associée à l'élément K (voir [Ver96]). Les inégalités inverses classiques (cf. [Ver96]) et le Lemme 3.5.5 avec $v = w_K^p$ et $\varphi = 0$ donnent

$$\begin{aligned} \|r_K^p\|_K^2 &\sim \int_K r_K^p w_K^p = \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) w_K^p \\ &= \int_K \left(\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} w_K^p + \nabla_h e^p \cdot \nabla w_K^p - (f^p - f_h^p) w_K^p \right) \\ &\lesssim \left(\left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + h_K^{-1} |e^p|_{1,K} + \|f^p - f_h^p\|_K \right) \|r_K^p\|_K. \end{aligned}$$

Cela prouve l'inégalité

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + |e^p|_{1,K} + h_K \|f^p - f_h^p\|_K, \quad \forall K \in \tilde{T}_{ph}. \quad (3.43)$$

À présent, pour tout $K \in T_{ph}$, l'assertion 3.5.4 donne

$$h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}: \tilde{K} \subset K} h_{\tilde{K}}^2 \|r_{\tilde{K}}^p\|_{\tilde{K}}^2.$$

En utilisant l'inégalité (3.43) et le fait que $h_{\tilde{K}} \leq h_K$ pour $\tilde{K} \subset K$, nous avons prouvé que

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim h_K \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_K + |e^p|_{1,K} + \xi_K, \forall K \in T_{ph}. \quad (3.44)$$

Saut tangentiel On considère une arête/face intérieure E de T_{ph} et on définit

$$w_E^p := b_E J_{E,t}^p,$$

où b_E est la fonction bulle standard associée à l'arête/face E (voir [Ver96]).

Le Lemme 3.5.5 avec $v = 0$ et $\varphi = w_E^p$ et les inégalités inverses donnent

$$\begin{aligned} \|J_{E,t}^p\|_E^2 &\sim \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} w_E^p \\ &\lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} \|\nabla w_E^p\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$h_E^{1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \quad (3.45)$$

Saut normal De la même manière, pour une arête/face intérieure arbitraire E de T_{ph} , on définit

$$w_E^p := b_E J_{E,n}^p.$$

En utilisant les inégalités inverses et le Lemme 3.5.5 avec $v = w_E^p$ et $\varphi = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \|J_{E,n}^p\|_E &\lesssim h_E^{1/2} \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} \\ &\quad + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

À l'aide de (3.44), cela donne

$$h_E^{1/2} \|J_{E,n}^p\|_E \lesssim h_E \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} + h_E \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E}. \quad (3.46)$$

Enfin, on conclut à l'aide des estimations (3.44), (3.45) et (3.46). ■

Corollaire 3.5.7 (Seconde borne inférieure de l'erreur locale). *Si l'assertion 3.5.4 est vérifiée alors pour tout $1 \leq p \leq N$, on a*

$$(\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2. \quad (3.47)$$

Démonstration. Comme

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in (t_{p-1}, t_p),$$

dans la preuve précédente, on a besoin de remplacer la norme L^2 locale de $\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}$ par sa norme globale $H^{-1}(\Omega)$. Pour cela, dans le Lemme 3.5.5 on prend $\varphi = 0$ et

$$v = \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}} h_{\tilde{K}}^2 r_{\tilde{K}}^p b_{\tilde{K}},$$

ce qui donne à l'aide de l'assertion 3.5.4,

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim (\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\| + \sum_{K \in T_{ph}} \|f^p - f_h^p\|_K \|v\|_K.$$

Les inégalités inverses donnent

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

De la même manière que pour le saut normal du gradient, on utilise le Lemme 3.5.5 avec $\varphi = 0$ et

$$v = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E J_{E,n}^p b_E,$$

pour avoir

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E \|J_{E,n}^p\|_E^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

Ces inégalités et (3.45) nous permettent alors de conclure. ■

3.6 Analyse a posteriori de la discrétisation totale

Pour tout $n = 1, \dots, N$, on note l'erreur totale $E(t_n)$ au temps t_n par

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &= \|u(t_n) - u_h^n\|^2 + \|u^n - u_h^n\|^2 \\ &+ \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u - u_\tau)(\cdot, s)\|^2 ds + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(\cdot, s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant une combinaison des résultats précédents, on a les bornes globales supérieure et inférieure suivantes :

Théorème 3.6.1 (Bornes d'erreur totale). *Pour tout $n = 1, \dots, N$, $E(t_n)$ vérifie la propriété suivante*

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \max\{h_p^2, \tau_p\}(\eta^p)^2) \\ &\quad + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2 \\ &\quad + \|e^0\|^2 + \tau_0 \|\nabla_h e^0\|^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Si de plus, l'assertion 3.5.4 est vérifiée, alors pour tout $n = 1, \dots, N$, $E(t_n)$ vérifie la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p (\eta^p)^2) &\lesssim E(t_n)^2 \\ &\quad + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Démonstration. Commençons par la borne supérieure de l'erreur. Par le Théorème 3.4.1 et le Corollaire 3.4.2, on a

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &\quad + \|(u_\tau - u_{h\tau})(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau}(s))\|^2 ds \\ &\quad + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Comme $(u_\tau - u_{h\tau})(t_n) = u^n - u_h^n = e^n$ et

$$|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)| \leq |\nabla_h e^{p-1}| + |\nabla_h e^p|, \forall s \in [t_{p-1}, t_p],$$

les inégalités précédentes peuvent être écrites comme suit

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &\quad + \|e^n\|^2 + \sum_{p=0}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \\ &\quad + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant le Théorème 3.5.2 et le Corollaire 3.5.3.

On passe maintenant à la borne inférieure. En sommant le carré de (3.31) sur $p = 1, \dots, n$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 &\lesssim \int_0^{t_n} \|\nabla_h e_\tau(s)\|^2 ds + \|\partial_t e_\tau\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ \sum_{p=0}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \|\nabla_h(u_h^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2) \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

À l'aide de (3.28), nous avons d'une part

$$\sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2. \quad (3.50)$$

D'autre part, le Corollaire 3.5.7, nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 &\lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}^2 \\ &+ \sum_{p=1}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + (\xi^p)^2). \end{aligned}$$

Encore une fois à l'aide (3.28), on obtient

$$\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \quad (3.51)$$

L'estimation (3.49) est une conséquence directe de (3.50) et (3.51). ■

Remarque 3.6.2. Si on suppose

$$h_p^2 \lesssim \tau_p, \forall 1 \leq p \leq N, \quad (3.52)$$

alors le Théorème 3.6.1 montre que l'erreur $E(t_n)$ est équivalente à l'estimateur global

$$\left(\sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p (\eta^p)^2) \right)^{1/2},$$

"modulo des termes d'approximation de plus haut degré". Cet estimateur d'erreur global sera utilisé dans le cadre du raffinement de maillage automatique en respectant évidemment la condition (3.52).

3.7 Tests numériques

Les tests suivants ont pour but de confirmer notre analyse théorique. Comme notre principal travail concerne les estimateurs d'erreur spatiaux, on s'attache à tester leur validité numérique. Le premier exemple permet de confirmer l'efficacité et la fiabilité de nos indicateurs spatiaux d'erreur. Le second exemple illustre l'utilisation de notre indicateur spatial en présentant un algorithme de raffinement de maillage automatique pour une solution présentant une singularité.

3.7.1 Premier test

Cet exemple consiste à résoudre l'équation de la chaleur en 2D sur le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On utilise ici les éléments de Crouzeix-Raviart pour un maillage régulier $T_{ph} = T_h$ obtenu en divisant chaque côté en n sous-intervalles et en divisant chaque rectangle obtenu en deux triangles (voir Figure 3.1).

Les tests sont réalisés au temps $T = 1s$ avec la solution exacte u :

$$u(x, y, t) = e^{-t}xy(x-1)(y-1) \text{ dans } \Omega \times]0, 1[,$$

telle que $u_0(x, y) = xy(x-1)(y-1)$ dans Ω et $u(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0$, pour tout $t \in]0, 1[$. On fixe $\tau_p = 0.1s$ et $N = T/\tau_p = 10$. Tous les résultats numériques seront présentés au temps final $T = 1s$ ($N = 10$).

Dans un premier temps, on vérifie que la solution u_h^N converge vers la solution exacte. Pour cela, on a tracé $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction du nombre de degrés de liberté DOF ($DoF = 3n^2 - 4n + 2$ avec $h = 1/n$) dans la Figure 3.2. On retrouve ici l'ordre optimal de convergence en h de la méthode numérique (voir [BCT82]).

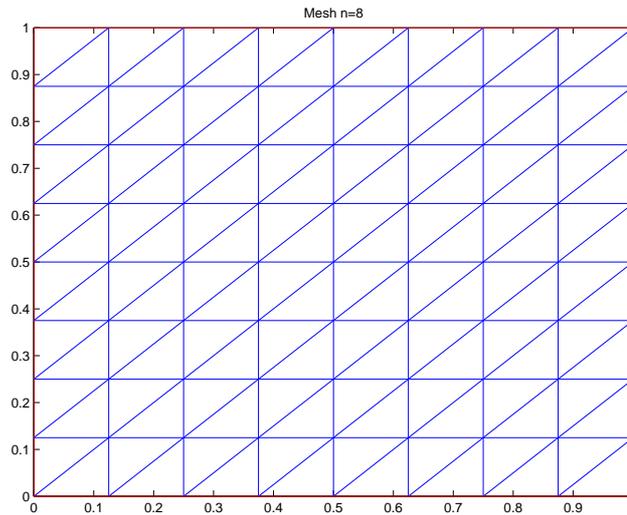


FIG. 3.1 – Maillage uniforme sur le carré unité avec $n = 8$.

À présent on étudie, les résultats théoriques concernant les bornes supérieures et inférieures de l'erreur (3.32) et (3.42).

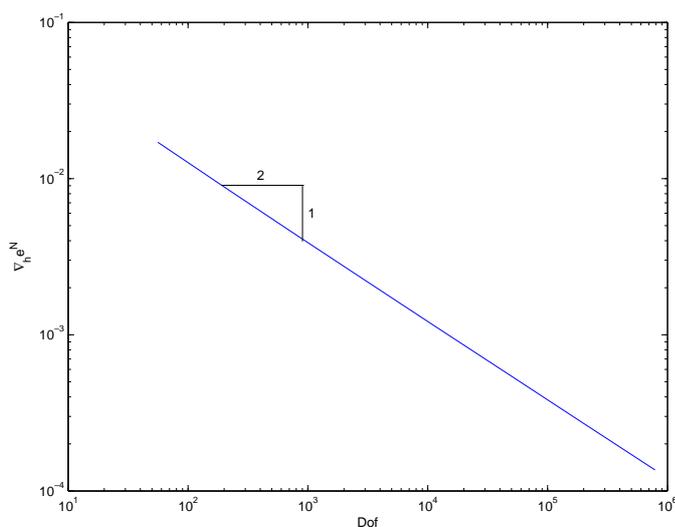


FIG. 3.2 – $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

Fiabilité de l'estimateur spatial

On définit le ratio du membre de gauche et du membre de droite de l'inégalité (3.32) au temps $T = 1s$:

$$q_{up}^N = \frac{\|e^N\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2}{\|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} ((\eta_K^p)^2 + h_K^2 \|f^p - f_h^p\|_K^2)}.$$

q_{up}^N représente l'indice d'efficacité. Il permet de mesurer la *fiabilité* de l'estimateur et il est relié à la borne supérieure globale. D'après ce qui précède, le Théorème 3.5.2, montre que le ratio q_{up}^N est borné. Cela est confirmé par nos tests numériques présentés dans les figures 3.3 et Table 3.1. Par conséquent, l'estimateur spatial est fiable.

Efficacité de l'estimateur spatial

Maintenant, on définit le ratio du membre de gauche et du membre de droite (3.42) au temps final $T = 1s$:

$$q_{low}^N = \max_{K \in T_{ph}} \frac{\eta_K^N}{h_K \left\| \frac{e^N - e^{N-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_K} + \|\nabla_h e^N\|_{\omega_K} + h_K \|f^N - f_h^N\|_{\omega_K}}.$$

q_{low}^N est relié à la borne locale de l'erreur et mesure l'*efficacité* de l'estimateur. D'après la figure 3.4 (voir aussi Table 3.1), q_{low}^N est borné d'après le Théorème 3.5.6. De plus, l'estimateur spatial est également efficace.

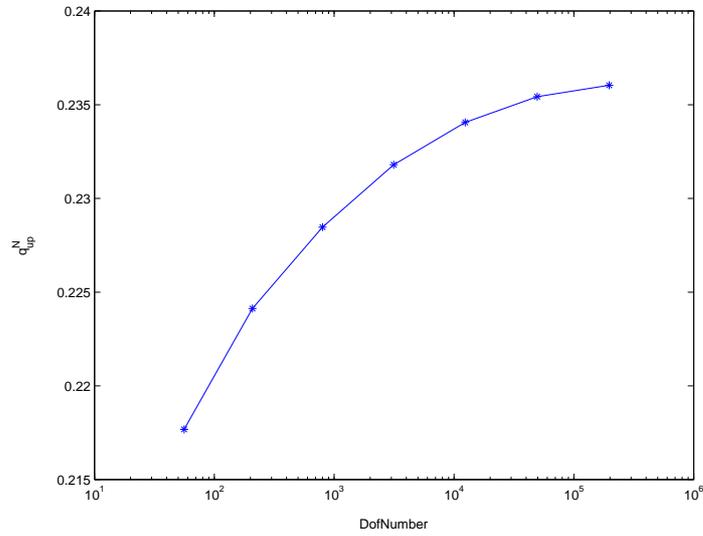


FIG. 3.3 – q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

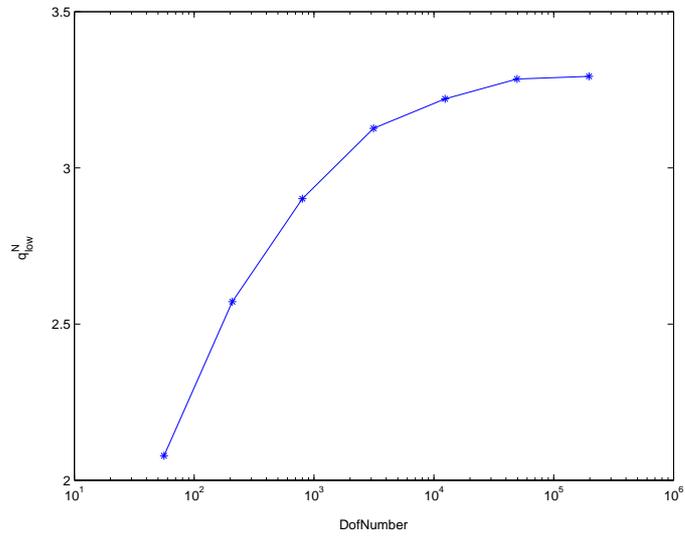


FIG. 3.4 – q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

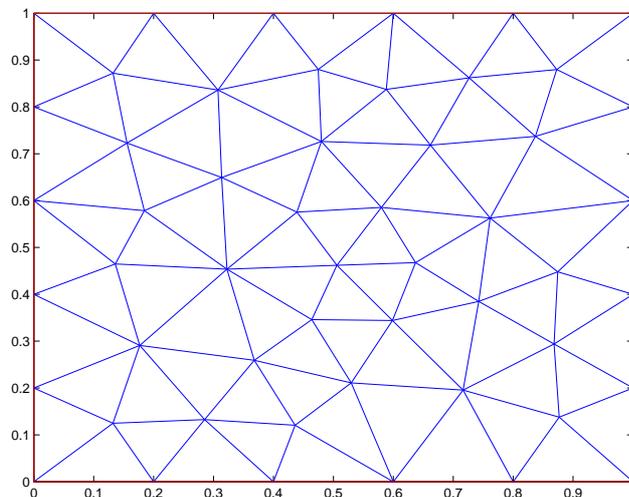
n	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
4	56	0.21768	2.0782
8	208	0.22413	2.5714
16	800	0.22847	2.9010
32	3136	0.23180	3.1265
64	12416	0.23406	3.2208
128	49408	0.23543	3.2843
256	197120	0.23604	3.2930
512	787456	0.23617	3.2975

TAB. 3.1 – q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

Maillages non structurés

Pour valider la fiabilité et l'efficacité de notre estimateur spatial, nous avons également fait une approximation du problème précédent, toujours avec les mêmes éléments, sur un maillage non structuré avec $h = 0.2$ (voir Figure 3.5) et sur des maillages successifs obtenus en divisant chaque triangle en quatre triangles de manière standard [Ver96].

Les Figures 3.6 et 3.7 (voir aussi Table 3.2) montrent respectivement q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des degrés de liberté. On constate comme précédemment que les deux ratios sont bornés, on peut donc conclure que notre estimateur spatial est fiable et efficace.

FIG. 3.5 – Maillage non structuré du carré unité avec $h = 0.2$.

3.7.2 Dépendance de l'erreur

Nous avons vu du point de vue théorique que nous pouvions étudier l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, en la scindant en deux parties : une erreur spatiale et une erreur temporelle. Comme dans [Pic98], nous allons montrer ce phénomène

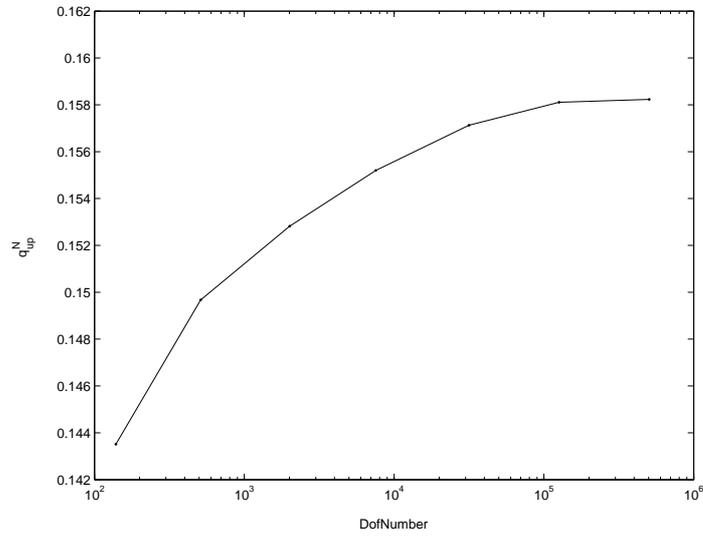


FIG. 3.6 – q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.

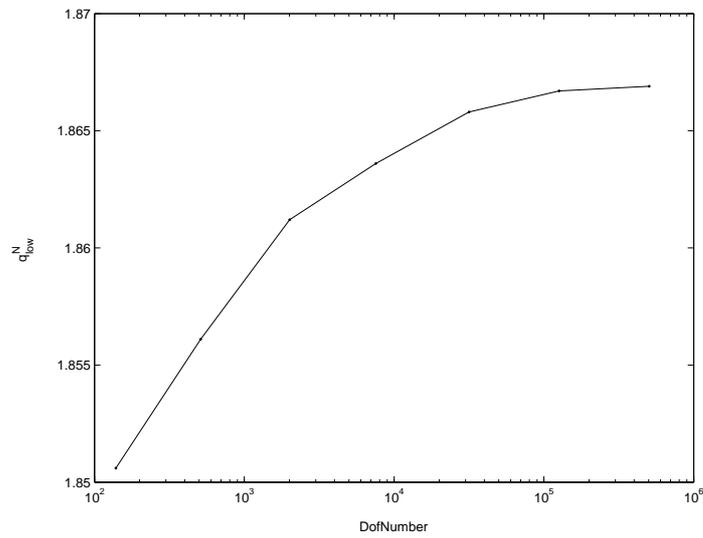


FIG. 3.7 – q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.

h	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
0.2	139	0.14351	1.8506
0.1	512	0.14967	1.8561
0.05	2008	0.15282	1.8612
0.025	7952	0.15520	1.8636
0.0125	31648	0.15713	1.8658
0.00625	126272	0.15811	1.8667
0.003125	504448	0.15823	1.8669

TAB. 3.2 – q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.

$h = 1/n$	dt	η	η_t	$\ e\ $	q_{up}^N	$h = 1/n$	dt	η	η_t	$\ e\ $	q_{up}^N
0.1	0.1	0.096	0.65	0.31	3.6	0.1	0.05	0.062	0.34	0.19	3.3
0.05	0.1	0.051	0.65	0.31	3.6	0.05	0.05	0.031	0.34	0.19	3.3
0.025	0.1	0.025	0.65	0.31	3.6	0.025	0.05	0.016	0.34	0.19	3.3
0.0125	0.1	0.012	0.65	0.30	3.7	0.0125	0.05	0.008	0.34	0.19	3.3
0.1	0.025	0.043	0.18	0.11	3.0	0.1	0.0125	0.041	0.09	0.06	2.7
0.05	0.025	0.022	0.18	0.10	3.1	0.05	0.0125	0.021	0.09	0.06	2.7
0.025	0.025	0.011	0.18	0.10	3.1	0.025	0.0125	0.010	0.09	0.05	2.8
0.0125	0.025	0.005	0.18	0.10	3.1	0.0125	0.0125	0.005	0.09	0.05	2.8

TAB. 3.3 – Résultats de convergence dans le cas de triangulations uniformes avec u_1 .

à l'aide de deux exemples : l'un où l'erreur en temps est plus importante que l'erreur en espace et l'autre inversement. Pour illustrer ce propos, on considère le problème (3.1) avec $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $T = 1s$, et les solutions exactes u_1 et u_2 définies par :

$$u_1(x, y, t) = \sin(10\pi t/2) \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2),$$

et

$$u_2(x, y, t) = \sin(10\pi t/2) \sin(10\pi x/2) \sin(10\pi y/2).$$

Les résultats numériques sont donnés dans les Tables 3.3 et 3.4. On présente les valeurs des indicateurs spatial η et temporel η_t , l'erreur $\|e\| := (\sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2)^{1/2}$ et l'indicateur d'efficacité spatiale q_{up}^N pour différentes triangulations uniformes avec des pas de temps constants. Dans le premier exemple Table 3.3, on peut constater que l'erreur est principalement due à la discrétisation en temps. En effet, pour un pas de temps fixé et des raffinements de maillage successifs, l'erreur $\|e\|$ est constante ; alors que pour un maillage fixe et une décroissance des pas de temps, l'erreur $\|e\|$ décroît.

Dans le second exemple, l'erreur est due à la discrétisation en espace, on voit clairement que pour un pas de temps fixé et des raffinements de maillage successifs, l'erreur $\|e\|$ décroît ; alors que pour un maillage fixe et une décroissance des pas de temps, l'erreur $\|e\|$ reste constante. Par ailleurs on remarque que l'indicateur η_t est indépendant de h et que l'indicateur η est indépendant de τ_p . Cette propriété importante du découplage de

$h = 1/n$	dt	η	η_t	$\ e\ $	q_{up}^N	$h = 1/n$	dt	η	η_t	$\ e\ $	q_{up}^N
0.1	0.1	4.8	7.5	5.2	2.9	0.1	0.05	4.8	3.9	4.9	1.4
0.05	0.1	2.6	7.2	2.9	5.8	0.05	0.05	2.6	3.8	2.5	2.9
0.025	0.1	1.3	7.2	2.1	7.9	0.025	0.05	1.3	3.8	1.4	7.9
0.0125	0.1	0.65	7.1	1.6	8.4	0.0125	0.05	0.65	3.8	0.83	8.1
0.1	0.025	4.8	1.9	5.4	0.7	0.1	0.0125	4.8	1.0	5.4	0.5
0.05	0.025	2.6	1.9	2.7	1.5	0.05	0.0125	2.6	1.0	2.7	0.8
0.025	0.025	1.3	1.9	1.3	2.8	0.025	0.0125	1.3	1.0	1.3	1.3
0.0125	0.025	0.65	1.9	0.69	5.5	0.0125	0.0125	0.65	1.0	0.68	2.8

TAB. 3.4 – Résultats de convergence dans le cas de triangulations uniformes avec u_2 .

l'erreur sera utilisée par la suite dans l'algorithme de maillage adaptatif. Les raffinements en temps et en espace seront basés respectivement sur η_t et η .

3.7.3 Algorithme adaptatif

Les considérations théoriques et l'illustration de la propriété de découplage de l'erreur évoquée dans la section précédente nous amènent donc à mettre en place un algorithme fondé sur les indicateurs spatial et temporel. Pour mettre en œuvre cet algorithme, on définit dans un premier temps l'indicateur global $\bar{\eta}$ comme suit :

$$\bar{\eta} := \left(\sum_{n=1}^N ((\eta_t^n)^2 + \tau_n(\eta^n)^2 + \tau_n(\xi^n)^2) \right)^{1/2}.$$

Ensuite pour une solution approchée $u_{h\tau}$, on définit un estimateur d'erreur relatif **Ind** défini par :

$$\mathbf{Ind}^2 = \frac{\bar{\eta}}{\int_0^T \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt}. \quad (3.53)$$

Soit δ est une tolérance prédéfinie et $0 < \alpha < 1$ un paramètre donné. Le but de notre maillage adaptatif est de générer une suite de sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ ainsi que des triangulations T_{nh} , $n = 1, \dots, N$ telles que **Ind**, défini en (3.53), soit borné comme suit

$$(1 - \alpha)\delta \leq \mathbf{Ind} \leq (1 + \alpha)\delta. \quad (3.54)$$

Pour réaliser cela, on définit pour $n = 1, \dots, N$, deux bornes locales, une borne inférieure **Lb**ⁿ définie par

$$\mathbf{Lb}^n := (1 - \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt \quad (3.55)$$

et une borne supérieure **Rb**ⁿ définie par

$$\mathbf{Rb}^n := (1 + \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt \quad (3.56)$$

<i>Set</i> $T_{0h}, u_h^0, n = 1, t, \tau$	Initialisations
<i>Do while</i> $t \leq T$	
<i>Compute</i> $(\eta^n)^2, (\eta_t^n)^2,$ $(\xi^n)^2, \mathbf{Rb}^n, \mathbf{Lb}^n$	
<i>If</i> $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + \eta_t^n < \mathbf{Lb}^n$	Pas de temps courant trop petit
$\tau := 2\tau$	Itération en temps identique avec un pas plus grand
<i>Else If</i> $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + \eta_t^n \leq \mathbf{Rb}^n$	
<i>If</i> $\tau_n (\eta^n + \frac{\xi^n}{2}) < \mathbf{Lb}^n$	Triangulation trop fine
<i>Derefinement with criteria</i>	
$\eta_K^n \leq 1.5 \min \eta_K^n$	
<i>Else If</i> $\tau_n (\eta^n + \frac{\xi^n}{2}) \leq \mathbf{Rb}^n$	Triangulation correcte
$t := t + \tau$	Incrémentation du pas de temps courant
$n = n + 1$	
<i>Else</i>	Triangulation trop grossière
<i>Continue with criteria</i>	Itération en temps identique avec un maillage plus fin
$\eta_K^n \geq 0.5 \max \eta_K^n$	
<i>Else</i>	Pas de temps trop grand
$\tau := \tau/2$	Itération en temps identique avec un pas temps plus fin
<i>End If</i>	
<i>Make</i> T_{nh}	Génération du nouveau maillage
<i>End Do</i>	

TAB. 3.5 – Algorithme adaptatif de maillage

Si, pour $n = 1, \dots, N$, les conditions

$$\mathbf{Lb}^n \leq (\eta_t^n)^2 + \tau_n (\eta^n)^2 + \tau_n (\xi^n)^2 \leq \mathbf{Rb}^n \quad (3.57)$$

sont satisfaites, alors en sommant de $n = 1$ à $n = N$, on obtient (3.54). Les éléments η^n et ξ^n seront utilisés pour contrôler le pas de temps, tandis que ξ^n et η_t^n seront utilisés pour contrôler le pas spatial. Cet algorithme de maillage adaptatif est exposé dans le tableau (3.5). Il s'agit du même algorithme proposé dans [Pic98].

Afin de tester notre algorithme de maillage adaptatif, nous allons considérer deux exemples appropriés. Le premier concerne la résolution de l'équation de la chaleur (3.1) sur le carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$ avec pour solution exacte (voir [Pic98])

$$u(x, y, t) = \beta(t) * \exp(-50 * r^2(x, y, t)), \quad (3.58)$$

avec $r^2(x, y, t) = (x - 0.4 * t - 0.3)^2 + (y - 0.4 * t - 0.3)^2$, et

$$\begin{cases} \beta(t) = 1 - \exp(-50 * (0.98 * t + 0.01)^2) & \text{si } t < 0.5, \\ \beta(t) = 1 - \exp(-50 * (1 - 0.98 * t + 0.01)^2) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.59)$$

Cela signifie que u est une fonction gaussienne dont le centre se déplace du point (0.3,0.3) au temps $t = 0s$ vers le point (0.7,0.7) au temps $t = 1s$.

Les maillages obtenus aux temps 0.1, 0.5 et 1 sont représentés successivement de la Figure 3.8 à la Figure 3.10 avec une tolérance $\delta = 0.25$ et un paramètre $\alpha = 0.5$.

Tolérance δ	Pas de temps	Ind	q_{up}^N
1.0	10	0.62	1.4
0.5	20	0.33	1.3
0.25	40	0.17	1.2
0.125	80	0.084	1.2
0.0625	160	0.042	1.2

TAB. 3.6 – Résultats numériques pour la gaussienne avec $\alpha = 0.5$.

On constate que les maillages sont raffinés dans la région où la solution présente de forts gradients et qu'ils suivent parfaitement le déplacement du centre de la fonction Gaussienne. La Table 3.6 montre de plus que l'indice d'efficacité tend clairement vers 1.2.

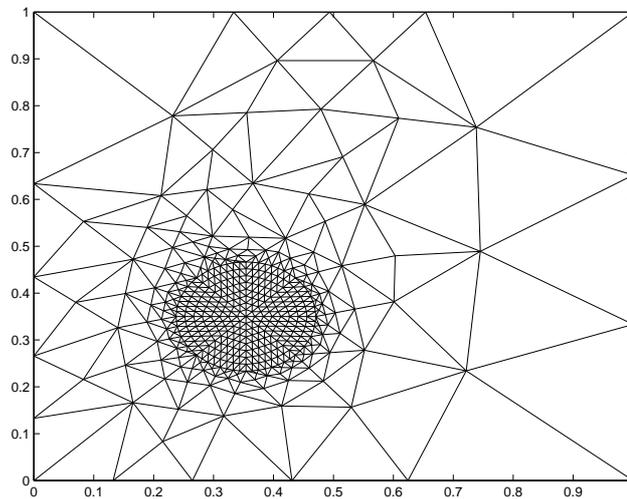


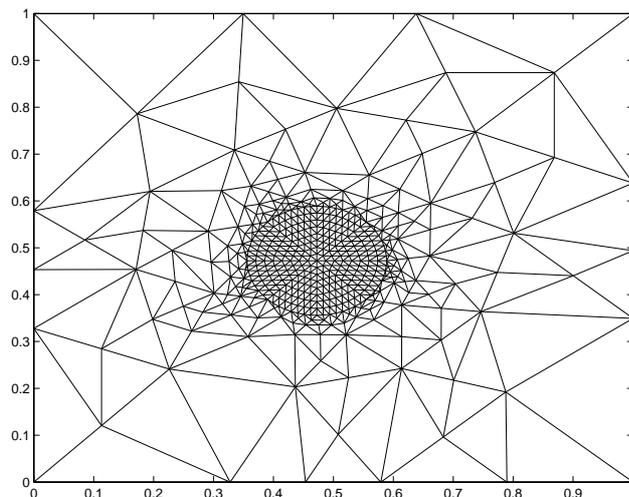
FIG. 3.8 – Fonction gaussienne avec $n = 4$, $t_n = 0.1s$, $Nv = 442$.

Dans le second exemple, on considère le cas où la solution de l'équation de la chaleur (3.1) est définie dans le domaine en forme de L $]-1, 1[\times]0, 1[\times]0, -1[$ par une solution singulière

$$u(r, \theta) = e^{-t} * r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right), \quad (3.60)$$

où (r, θ) représente les coordonnées polaires centrées en $(0, 0)$. Dans ce cas, u a un comportement singulier le long de l'arête $(0, 0) \times]0, T[$.

Les Figures 3.11 à 3.13 représentent les maillages obtenus aux temps 0.1, 0.5 et 1, avec une tolérance $\delta = 0.25$ et un paramètre $\alpha = 0.5$. Les maillages sont raffinés près du point singulier, plus précisément à l'origine. Comme précédemment la Table 3.7 confirme que notre indice d'efficacité tend vers une constante pour différents paramètres δ .

FIG. 3.9 – Fonction gaussienne avec $n = 20$ $t_n = 0.5s$, $Nv = 462$.

<i>Tolérance</i> δ	<i>Pas de temps</i>	<i>Ind</i>	q_{up}^N
1.0	10	0.88	1.8
0.5	20	0.42	1.6
0.25	40	0.23	1.6
0.125	80	0.11	1.6
0.0625	160	0.055	1.5

TAB. 3.7 – Fonction singulière avec $\alpha = 0.5$.

3.8 Conclusion

Nous avons proposé et analysé des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour l'équation de la chaleur. Cette partie recouvre la discrétisation par éléments finis non conformes (Crouzeix-Raviart) dans des domaines 2D et 3D. Nous avons démontré, de manière nullement triviale, l'existence de bornes supérieure et inférieure pour l'erreur. Les tests numériques confirment les principaux résultats théoriques. Plus précisément, on montre que les valeurs q_{up}^N et q_{low}^N sont bornées comme dans le cas d'autres problèmes classiques (cf. [DDPV96, Pic03]). Finalement, nous mettons en œuvre un algorithme de maillage adaptatif basé sur l'indépendance de nos estimateurs spatial et temporel. Nous avons testé cet algorithme pour deux exemples appropriés et les résultats numériques montrent le bon comportement de la méthode numérique employée.

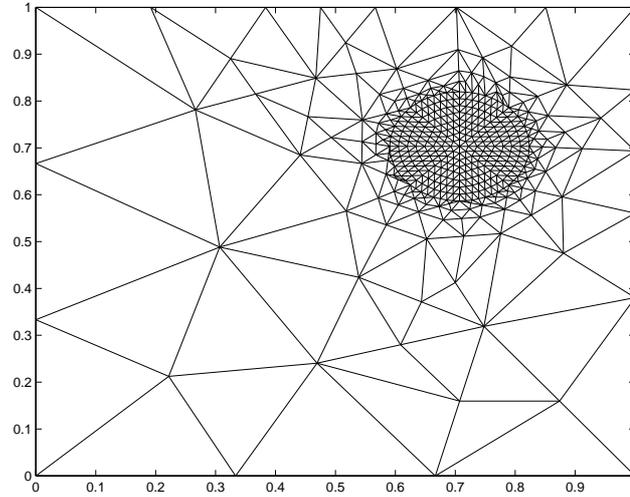


FIG. 3.10 – Fonction gaussienne avec $n = 40$, $t_n = 1s$, $Nv = 470$.

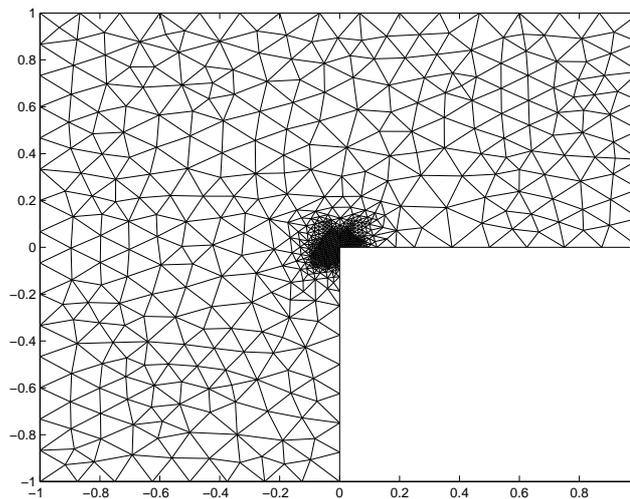
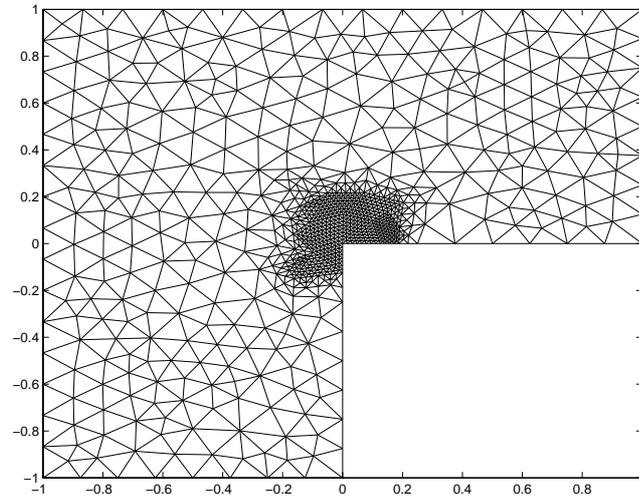
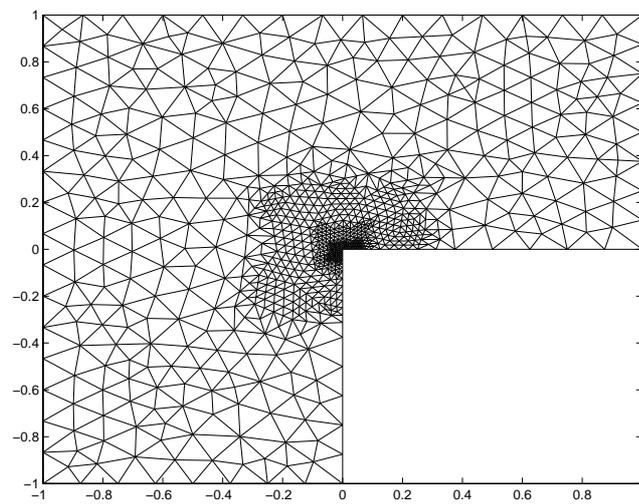


FIG. 3.11 – Solution singulière avec $n = 4$, $t_n = 0.1s$, $Nv = 836$.

FIG. 3.12 – Solution singulière avec $n = 20$ $t_n = 0.5s$, $Nv = 872$.FIG. 3.13 – Solution singulière avec $n = 40$ $t_n = 1s$, $Nv = 874$.

Chapitre 4

Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour le problème de Stokes

Sommaire

4.1	Introduction	59
4.2	Les problèmes continu, semi-discret et totalement discret	60
4.2.1	Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite	61
4.2.2	Discrétisation totale	61
4.3	Outils et propriétés analytiques	63
4.4	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation en temps	70
4.5	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation spatiale	72
4.5.1	Borne supérieure de l'erreur	72
4.5.2	Borne inférieure de l'erreur	77
4.6	Analyse <i>a posteriori</i> de la discrétisation totale	80
4.7	Tests numériques	82
4.7.1	Premier test	82
4.7.2	Algorithme adaptatif	86
4.8	Conclusion	91

4.1 Introduction

Le problème de Stokes dynamique dans des domaines 2D ou 3D modélise l'écoulement d'un fluide incompressible. De nombreux travaux ont été entrepris concernant ces estimations d'erreur *a priori*, comme dans [GR86] par exemple. Une étude *a posteriori* de l'erreur utilisant un schéma d'Euler implicite en temps et une discrétisation via des éléments finis conformes en espace ont été effectuées dans [BV04]. Dans ce chapitre, on propose de faire une étude *a posteriori* de ce problème, mais via des éléments finis non conformes. Pourquoi des éléments non conformes ? Il y a plusieurs raisons, la première étant évidemment la stabilité de la méthode numérique employée : l'espace discret doit satisfaire la condition inf-sup avec une constante indépendamment de l'aspect ratio des éléments. Par ailleurs,

les éléments finis conformes (comme le mini-élément, l'élément de Taylor-Hood, etc...) ne sont pas stables dans le cas de maillages anisotropiques (maillages dont le ratio n'est pas borné [Ape99]), on peut se référer en outre à [AD99, AN04]. L'utilisation des méthodes non conformes est donc recommandée puisqu'ils sont inconditionnellement stables [ANS01b].

Dans le cadre conforme, plusieurs approches ont été entreprises pour définir des estimateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur et le système de Stokes [BBM05a, BBM05b, BM00, BV04, CF04, Pic98, Pic03, Ver96, Ver03]. Pour étendre ces techniques dans le cas d'estimations via des éléments finis non conformes comme dans l'étude de problèmes elliptiques [DDPV96, NS05], on se doit d'estimer un terme de consistance de manière appropriée. Comme dans [DDPV96, NS05], l'estimation de ce terme est basée sur la décomposition de Helmholtz de l'erreur. Cela va nous permettre entre autres d'étendre les résultats de [BV04] à des estimations non conformes.

L'objectif de ce chapitre est donc le suivant : les problèmes continu et discret sont rappelés dans la Section 4.2, des estimations d'erreur d'interpolation sont également présentées. Dans la Section 4.3, on donne quelques outils analytiques, en particulier quelques propriétés satisfaites par l'erreur spatiale et sa décomposition d'Helmholtz. La Section 4.4 est dédiée à l'analyse *a posteriori* de la discrétisation temporelle. L'efficacité et la fiabilité de l'estimateur spatial sont établies dans la Section 4.5. L'analyse *a posteriori* du problème totalement discrétisé est considérée dans la Section 4.6, on montre en outre l'efficacité et la fiabilité de la somme des estimateurs spatial et temporel. Enfin, la Section 4.7 met en évidence des tests numériques qui viennent conforter l'analyse théorique précédemment établie.

4.2 Les problèmes continu, semi-discret et totalement discret

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , avec un bord Γ polygonal ($d = 2$) ou polyhédral ($d = 3$). Soit T un nombre réel positif fixé.

Nous considérons le problème de Stokes dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(., t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \\ u(., 0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ici, les inconnues sont la vitesse u et la pression p ; la donnée f représente une densité de force et u_0 est la vitesse initiale.

Pour exprimer la formulation variationnelle du problème (4.1), nous allons introduire les notations suivantes : dans un souci de clarté, le symbole (\cdot, \cdot) désignera le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega)^d$ et $L^2(\Omega)^{d \times d}$ mais aussi la paire duale entre $H^{-1}(\Omega)^d$ et $H_0^1(\Omega)^d$.

$L_0^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ de moyenne nulle sur Ω . Pour une fonction vectorielle $u = (u_1, \dots, u_d)^\top$, ∇u représente la matrice $d \times d$ définie par $\nabla u = (\partial_j u_i)_{1 \leq i, j \leq d}$. Pour deux matrices $d \times d$ $M = (m_{ij})_{i,j=1}^d$ et $N = (n_{ij})_{i,j=1}^d$, la notation $M \cdot N$ est simplement le produit par élément suivant : $M \cdot N = \sum_{i,j=1}^d m_{ij} n_{ij}$.

Si on suppose que $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^d)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)^d$, alors le problème (4.1) ou de manière équivalente le problème

$$\begin{cases} (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) - (p(t), \mathbf{div} v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \\ (q, \mathbf{div} u) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.2)$$

presque partout pour $t \in (0, T)$, possède une unique solution u dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)^d)$ et $p \in H^{-1}(0, T; L_0^2(\Omega))$ [Tem79].

4.2.1 Discrétisation en temps via un schéma d'Euler implicite

On suppose à présent que $f \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)^d)$. On introduit également une partition de $[0, T]$ en sous intervalles $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. On dénote par $\tau_p = t_p - t_{p-1}$ la longueur de $[t_{p-1}, t_p]$ et par $\tau = \max_p \tau_p$.

L'approximation semi-discrete du problème continu (4.1) par un schéma d'Euler implicite consiste à déterminer deux suites : $(u^p)_{1 \leq p \leq N} \in (H_0^1(\Omega)^d)^N$ et $(p^p)_{1 \leq p \leq N} \in (L_0^2(\Omega)^d)^N$ solution de

$$\begin{cases} \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} - \Delta u^p + \nabla p^p = f^p & \text{dans } \Omega, \\ u^p = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{div} u^p = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

pour tout $1 \leq p \leq N$, avec $f^p = f(\cdot, t_p)$. Ce problème admet une solution faible unique $(u^p, p^p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)^d$, dont la formulation est

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (u^p - u^{p-1}) \cdot v + \tau_p \int_{\Omega} (\nabla u^p \cdot \nabla v - p^p \mathbf{div} v) = \tau_p (f^p, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \\ \int_{\Omega} q \mathbf{div} u^p = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.4)$$

pour tout $p = 1, 2, \dots, N$.

4.2.2 Discrétisation totale

Le problème (4.4) est maintenant discrétisé par une méthode d'éléments finis non conformes.

On introduit les espaces d'éléments finis non conformes de Crouzeix-Raviart :

$$\begin{aligned} X_{ph}^0 &= \{v \in (L^2(\Omega))^d : v|_K \in P_1, \forall K \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}. \end{aligned}$$

et les espaces d'éléments finis relatifs à la pression

$$Q_{ph} = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_K \in P_0, \forall K \in T_{ph}\},$$

où P_0 représente l'espace des fonctions constantes de \mathbb{R}^d .

La discrétisation totale du problème (4.1) via un schéma d'Euler implicite et une discrétisation spatiale par éléments finis de Crouzeix-Raviart est donnée par : étant donnée une approximation $u_h^0 \in X_{0h}^0$ de u_0 , trouver $(u_h^p, p_h^p) \in (X_{ph}^0, Q_{ph})$, $1 \leq p \leq N$, tel que :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \cdot v_h + \sum_{K \in T_{ph}} \int_K (\nabla u_h^p \cdot \nabla v_h - p_h^p \mathbf{div} v_h) = (f^p, v_h) & \forall v_h \in X_{ph}^0, \\ \sum_{K \in T_{ph}} \int_K q \mathbf{div} u_h^p = 0 & \forall q \in Q_{ph}. \end{cases} \quad (4.5)$$

La seconde équation signifie que pour tout $K \in T_{ph}$, $\mathbf{div} (u_h^p|_K) = 0$.

Définition 4.2.1. Soit (u^p, p^p) une solution de (4.4) et (u_h^p, p_h^p) une solution de (4.5). On définit respectivement les erreurs spatiales de vitesse et de pression comme suit

$$e^p = u^p - u_h^p, \varepsilon^p = p^p - p_h^p.$$

On termine cette section en introduisant quelques rappels utiles pour la suite.

Pour $p = 1, \dots, N$, on définit la suite d'espaces P_1 conformes comme suit

$$\begin{aligned} V_{ph} &= \{v \in H^1(\Omega)^d : v|_K \in P_1, \forall K \in T_{ph}\}, \\ V_{ph}^0 &= V_{ph} \cap H_0^1(\Omega)^d. \end{aligned}$$

Comme dans la Section 2.3, nous introduisons les interpolés de Clément. On définit

$$\begin{aligned} Y_{ph} &= \{v \in L^2(\Omega)^d : v|_K \in (H^1(K))^d, \forall K \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}\}, \\ Y_{ph}^0 &= \{v \in L^2(\Omega)^d : v|_K \in (H^1(K))^d, \forall K \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = \int_E v|_L, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \cap \mathcal{E}_{ph}^{int}, K, L \in T_{ph}, \\ &\int_E v|_K = 0, \forall E \in \mathcal{E}_K \cap \Gamma, K \in T_{ph}\}. \end{aligned}$$

Notez que $H^1(\Omega)^d \subset Y_{ph}$ et que $X_{ph}^0 \cap H_0^1(\Omega)^d \subset Y_{ph}^0$.

En $2D$, le **curl** d'une fonction scalaire w est donné par $\mathbf{curl} w = (\partial_2 w, -\partial_1 w)^\top$. Dans le cas d'une fonction vectorielle $w = (w_1, w_2)^\top$, **curl** w est représenté par la matrice suivante

$$\mathbf{curl} w = \begin{pmatrix} \partial_2 w_1 & -\partial_1 w_1 \\ \partial_2 w_2 & -\partial_1 w_2 \end{pmatrix}.$$

En $3D$, le **curl** d'une fonction scalaire w est donné par $\mathbf{curl} w = \nabla \times w$. Pour une fonction vectorielle $w = (w_1, w_2, w_3)^\top$, **curl** w est défini par

$$\mathbf{curl} w = \begin{pmatrix} (\nabla \times w_1)^\top \\ (\nabla \times w_2)^\top \\ (\nabla \times w_3)^\top \end{pmatrix};$$

par ailleurs

$$w \times n_E = \begin{pmatrix} (w_1 \times n_E)^\top \\ (w_2 \times n_E)^\top \\ (w_3 \times n_E)^\top \end{pmatrix}, w \cdot n_E = \begin{pmatrix} (w_1 \cdot n_E)^\top \\ (w_2 \cdot n_E)^\top \\ (w_3 \cdot n_E)^\top \end{pmatrix}.$$

On introduit quelques notations relatives aux sauts normal et tangentiel du gradient de u_h^p . On définit les quantités $J_{E,n}^p$ et $J_{E,t}^p$ comme suit :

$$J_{E,n}^p = \begin{cases} \llbracket (\nabla u_h^p - p_h^p \mathbf{I}) \cdot n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}, \end{cases}$$

où \mathbf{I} est la matrice identité.

Si $d = 2$,

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \cdot t_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \cdot t_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}. \end{cases}$$

Si $d = 3$,

$$J_{E,t}^p = \begin{cases} \llbracket \nabla u_h^p \times n_E \rrbracket_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}, \\ -\nabla u_h^p \times n_E & \text{si } E \in \mathcal{E}_{ph} \setminus \mathcal{E}_{ph}^{int}. \end{cases}$$

4.3 Outils et propriétés analytiques

Dans cette section, on établit quelques propriétés satisfaites par les erreurs spatiales e^p et ε^p . Celles-ci seront particulièrement utiles pour établir des bornes d'erreur.

Lemme 4.3.1 (Orthogonalité au sens de Galerkin). *Le couple d'erreur (e^p, ε^p) satisfait la relation d'orthogonalité suivante*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla v_h - \int_\Omega \varepsilon^p \mathbf{div} v_h = \int_\Omega \frac{e^{p-1} - e^p}{\tau_p} \cdot v_h, \forall v_h \in V_{ph}^0. \quad (4.6)$$

Démonstration. Il suffit de soustraire (4.4) avec $v = v_h \in V_{ph}^0$ à l'identité (4.5). ■

Lemme 4.3.2. Soit $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$. Alors l'erreur satisfait l'identité suivante

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot \varphi. \quad (4.7)$$

Démonstration. Supposons que $d = 2$. Une intégration par parties dans Ω sur chaque élément K donne (cf. (2.10))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{curl} \varphi \cdot n u^p - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} \nabla u_h^p \cdot t_K \varphi \\ &= - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} \nabla u_h^p \cdot t_K \varphi \end{aligned}$$

Comme $u^p \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, on conclut en utilisant la définition de $J_{E,t}^p$.

En utilisant la propriété (2.11), la preuve est similaire en dimension 3. ■

Lemme 4.3.3 (Orthogonalité de l'erreur). L'erreur satisfait

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h = 0, \quad (4.8)$$

pour tout $\varphi_h \in V_{ph}^2$ si $d = 2$ et $\varphi_h \in (V_{ph})^{3 \times 3}$ si $d = 3$.

Démonstration. Considérons un élément arbitraire φ_h dans V_{ph} si $d = 2$ ou dans $(V_{ph})^3$ si $d = 3$. Comme précédemment, une intégration par parties (cf. les identités (2.10) et (2.11)), on obtient (en rappelant que $u^p \in H_0^1(\Omega)^d$)

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \\ &= \int_{\Gamma} u^p \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\ &= - \sum_{K \in T_{ph}} \int_{\partial K} u_h^p \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_K \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E \llbracket u_h^p \rrbracket_E \cdot \mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} (\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E) \cdot \int_E \llbracket u_h^p \rrbracket_E, \end{aligned}$$

comme la fonction $(\mathbf{curl} \varphi_h \cdot n_E)|_E$ est constante sur $E \in \mathcal{E}_{ph}$. La propriété (2.2), satisfaite par $u_h^p \in X_{ph}^0$, nous permet de conclure cette preuve. ■

Lemme 4.3.4. *L'erreur e^p satisfait*

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w = \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \cdot w,$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)^d$ tel que $\mathbf{div} w = 0$.

Démonstration. Une intégration par parties sur chaque élément et le fait que $\Delta u_h^p = 0$ pour tout élément de $K \in T_{ph}$ montre que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w &= \int_{\Omega} \nabla u^p \cdot \nabla w - \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h u_h^p \cdot \nabla w \\ &= \int_{\Omega} \left(\left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w + p^p \mathbf{div} w \right) \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \left(- \int_K \Delta u_h^p \cdot w + \int_{\partial K} (\nabla u_h^p \cdot n) \cdot w \right) \\ &= \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w \\ &\quad - \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E (\nabla u_h^p \cdot n) \cdot w. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la définition de $J_{E,n}^p$, la continuité de w à travers les arêtes/faces et le fait que

$$0 = \int_{\Omega} p_h^p \mathbf{div} w = \sum_{K \in T_{ph}} \sum_{E \in \mathcal{E}_K} \int_E p_h^p n \cdot w,$$

en utilisant une intégration par parties. ■

Lemme 4.3.5. *L'erreur e^p satisfait pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot qI = 0.$$

Démonstration. On a, en utilisant la seconde équation de (4.5) et le fait que $\mathbf{div} u^p = 0$,

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot qI = \sum_{K \in T_{ph}} \int_K q \cdot \mathbf{div} e^p = 0.$$

Corollaire 4.3.6. *Pour tout $w \in H_0^1(\Omega)^d$, $q \in L_0^2(\Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^2$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^{3 \times 3}$ si $d = 3$, on a*

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla w + \mathbf{curl} \varphi - qI) &= \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f^p - \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p \cdot w + J_{E,t}^p \cdot \varphi). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe des Lemmes 4.3.2, 4.3.4 et 4.3.5. \blacksquare

On rappelle maintenant les résultats suivants (cf Lemme 3.2 de [DDPV96] en 2D et Lemme 6.5 de [CKN04] en 3D ou [GR86, Chap. I]) :

Lemme 4.3.7 (Décomposition de Helmholtz de l'erreur). *On a la décomposition de l'erreur suivante*

$$\nabla_h e^p = \nabla w^p - q^p I + \mathbf{curl} \varphi^p, \quad (4.10)$$

avec $\varphi^p \in H^1(\Omega)^2$ si $d = 2$ et $\varphi^p \in H^1(\Omega)^{3 \times 3}$ si $d = 3$ et $(w^p, q^p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$. De plus, les estimations suivantes sont vérifiées :

$$|w^p|_{1,\Omega} + |\varphi^p|_{1,\Omega} + \|q^p\| \leq \|\nabla_h e^p\|. \quad (4.11)$$

On constate que $(w^p, q^p) \in H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ est en fait la solution faible du problème de Stokes dont le second membre est $-\mathbf{div}(\nabla_h e^p)$ au sens faible c'est à dire

$$\int_{\Omega} \nabla w^p \cdot \nabla v - \int_{\Omega} q^p \mathbf{div} v = \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla v, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} q \mathbf{div} w^p = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (4.13)$$

Les Lemmes précédents vont nous permettre de prouver les identités suivantes.

Lemme 4.3.8. *Les identités suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla w^p &= \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p \cdot (w^p - I_C^0 w^p) \\ &- \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \cdot w^p, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} \varphi^p = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &+ \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = (e^{p-1}, e^p) \\ &+ (e^p - e^{p-1}, e^p - w^p) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Démonstration. Commençons par l'identité (4.14) : en utilisant la formulation continue (4.4) et le fait que w^p est à divergence nulle, on a

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot \nabla w^p &= \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w^p \\ &\quad - \tau_p \int_{\Omega} (\nabla_h u_h^p - p_h^p I) \cdot \nabla w^p - \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \cdot w^p. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est à présent transformé en utilisant le schéma discret (4.5) avec $v_h = I_C^0 w^p \in V_{ph}^0$ de manière à obtenir

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot w^p &= \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot (w^p - I_C^0 w^p) \\ &\quad + \tau_p \int_{\Omega} (\nabla_h u_h^p - p_h^p I) \cdot \nabla I_C^0 w^p \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'identité précédente et en l'intégrant par parties sur chaque élément, on obtient (4.14).

La seconde identité (4.15) est une conséquence de la relation d'orthogonalité du Lemme 4.3.3 avec $\varphi_h = I_C \varphi^p$ et du Lemme 4.3.2.

En utilisant la décomposition de l'erreur (4.10), on a

$$\tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = \tau_p \int_{\Omega} \nabla_h e^p \cdot (\nabla w^p + \mathbf{curl} \varphi^p - q^p I).$$

Dès lors, le Lemme 4.3.5 et les identités (4.14), (4.15) mènent directement à

$$\begin{aligned} \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &= - \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1}) \cdot w^p \\ &\quad + \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot (w^p - I_C^0 w^p) \\ &\quad + \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p \cdot (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)). \end{aligned}$$

Cette identité s'écrit de manière équivalente

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 &+ \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 = (e^{p-1}, e^p) \\ &+ (e^p - e^{p-1}, e^p - w^p) \\ &+ \tau_p \int_{\Omega} \left(f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) \cdot (w^p - I_C^0 w^p) \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p \cdot (w^p - I_C^0 w^p) + J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p)), \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que (4.16). ■

Nous allons à présent rappeler quelques propriétés de régularité sur la solution du problème de Stokes stationnaire [BR81, Dau89, MP83]. On introduit la notion d'espace de Sobolev à poids comme dans [Kon67, Dau89, MP83]. Soit \mathcal{S} l'ensemble des sommets de Ω et en 3D, \mathcal{E} désigne l'ensemble des arêtes de Ω .

Définition 4.3.9. Soit $k \geq 0$ un entier et deux vecteurs $\beta = (\beta_S)_{S \in \mathcal{S}}, \delta = (\delta_E)_{E \in \mathcal{E}}$, on définit

$$V_{\beta, \delta}^k(\Omega) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \Pi_{S \in \mathcal{S}} r_S^{\beta_S - k + |\alpha|} \Pi_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^{\delta_E - k + |\alpha|} D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq k\},$$

où $r_S(x)$ est la distance de x au sommet S de Ω ; $\theta_E \equiv 1$ si $d = 2$; si $d = 3$, alors $\rho_E(x)$ est la distance de x à l'arête E de Ω . $r_E(x)$ est la distance de x à la terminaison de l'arête E et $\theta_E(x) = \rho_E(x)/r_E(x)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{k, \beta, \delta, \Omega} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\Pi_{S \in \mathcal{S}} r_S^{\beta_S - k + |\alpha|} \Pi_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^{\delta_E - k + |\alpha|} D^\alpha v|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Décrivons de manière succincte les exposants singuliers du système de Stokes : d'après les résultats de [BR81, Dau89, MP83], la singularité de sommet S du système de Stokes est liée aux pôles de l'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}_S(\lambda)$ correspondant à l'écriture du système en coordonnées sphériques centré en S et appliqué à la transformation de Mellin. Notons Λ_S l'ensemble de ces pôles. En 2D (voir [BR81]), ces coefficients sont les nombres complexes $\lambda \neq 1$, solutions de

$$\sin^2(\lambda \omega_S) = \sin^2 \omega_S \lambda^2, \quad (4.17)$$

où $\omega_S \neq \pi$ est l'ouverture intérieure de Ω autour de S ; en 3D, on se réfère à [Dau89, MP83].

En 3D, nous devons également décrire l'ensemble Λ_E des exposants singuliers associés à l'arête E de Ω . À l'aide des références citées, on sait que $\mu \in \Lambda_E$ est soit une solution $\neq 1$ de (4.17) avec ω_E à la place de ω_S ($\omega_E \neq \pi$ étant l'ouverture intérieure de Ω autour d'un point de E) soit égale à $l\pi/\omega_E$, pour tout $l \in \mathbb{N}, l \neq 0$.

Rappelons les résultats de régularité portant sur le problème de Stokes (voir Théorème II.1 de [BR81] en 2D et Théorème 6.1 de [MP83] en 3D).

Théorème 4.3.10. La solution (v, q) du problème stationnaire de Stokes avec pour donnée $g \in L^2(\Omega)^d$ satisfait

$$v \in (V_{\beta, \delta}^2(\Omega))^d, q \in V_{\beta, \delta}^1(\Omega),$$

pour tout $\beta_S \in [0, 1/2)$ satisfaisant (4.18) ci-dessous et $\delta_E = 0$ en 2D. En 3D, $\delta_E \in [0, 1/2)$ satisfait (4.19) :

$$\beta_S > 2 - \frac{d}{2} - \inf\{\Re \lambda : \forall \lambda \in \Lambda_S \text{ avec } \Re \lambda > 1 - \frac{d}{2}\}, \quad (4.18)$$

$$\delta_E > 1 - \inf\{\Re \mu : \forall \mu \in \Lambda_E \text{ avec } \Re \mu > 0\}. \quad (4.19)$$

De plus, on a l'inégalité suivante

$$\|v\|_{2, \beta, \delta, \Omega} + \|q\|_{1, \beta, \delta, \Omega} \lesssim \|g\|.$$

À partir de maintenant, on fixe un couple (β, δ) satisfaisant les hypothèses du Théorème 4.3.10.

Pour assurer nos futures preuves, nous avons besoin de l'estimation suivante.

Théorème 4.3.11. *Soit $q \in V_{\beta, \delta}^1(\Omega)$. Alors pour tout $K \in T_{ph}$ et pour toute arête E de K , on a*

$$\|q - \mathcal{M}_E q\|_E \lesssim h_K^{1/2} r_K^{-1} \|q\|_{1, \beta, \delta, K}, \quad (4.20)$$

avec en 2D

$$r_K = \begin{cases} h_K^{\beta_S} & \text{si } S \in K, \\ \min_{x \in K} \prod_{S \in \mathcal{S}} r_S(x)^{\beta_S} & \text{si } K \cap \mathcal{S} = \emptyset; \end{cases}$$

et en 3D

$$r_K = \begin{cases} h_K^{\beta_S} & \text{si } S \in K \\ & \text{et } E \cap K \subset F, \text{ avec } F \in \mathcal{E}, \\ h_K^{\delta_E} \min_{x \in K} \prod_{E \in \mathcal{E}} r_E(x)^{-\delta_E} \prod_{S \in \mathcal{S}} r_S(x)^{\beta_S} & \text{si } K \cap \mathcal{S} = \emptyset \\ & \text{et } E \cap K \subset F, \text{ avec } F \in \mathcal{E}, \\ \min_{x \in K} \prod_{S \in \mathcal{S}} r_S(x)^{\beta_S} \prod_{E \in \mathcal{E}} r_E(x)^{\delta_E} & \text{si } K \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ et } K \cap \mathcal{E} = \emptyset. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est basée sur un changement de variable et l'injection compacte de $V_{\beta, \delta}^1(\hat{K})$ dans $L^2(\hat{E})$ (voir Corrolaire 2.7 de [BN97] en 2D et la Section 2 de [LN94] en 3D). Montrons le résultat en 2D.

Supposons que K possède un sommet S de Ω . Alors par changement de variable, on a

$$\|q - \mathcal{M}_E q\|_E \sim h_K^{1/2} \|\hat{q} - \mathcal{M}_{\hat{E}} \hat{q}\|_{\hat{E}}.$$

L'injection compacte de $V_{\beta, \delta}^1(\hat{K})$ (où le poids \hat{r} est la distance de \hat{x} au sommet \hat{S}) dans $L^2(\hat{E})$ montre que

$$\|q - \mathcal{M}_E q\|_E \lesssim h_K^{1/2} |\hat{q}|_{1, \beta_S, \hat{K}},$$

où

$$|\hat{q}|_{1, \beta_S, \hat{K}}^2 := \sum_{|\alpha|=1} \int_{\hat{K}} |\hat{r}^{\beta_S} D^\alpha \hat{q}|^2 d\hat{x}.$$

Par un changement de variable inverse, on a

$$\|q - \mathcal{M}_E q\|_E \lesssim h_K^{1/2 - \alpha_S} \|q\|_{1, \beta, \delta, K},$$

ce qui prouve (4.20) par définition de r_K .

Si K ne contient pas de sommet de Ω , alors les arguments précédents sont valables avec $\beta_S = 0$ et

$$\|q - \mathcal{M}_E q\|_E \lesssim h_K^{1/2} |q|_{1, K}.$$

Cela mène donc à (4.20) en introduisant artificiellement le poids dans le membre de droite dans l'estimation précédente.

La preuve est similaire en 3D. ■

Pour terminer, on introduit le paramètre suivant

$$\lambda_{h\tau} = \max_{1 \leq p \leq N} \frac{1}{\tau_p} \max_{K \in T_{ph}} h_K^2 r_K^{-2}. \quad (4.21)$$

4.4 Analyse *a posteriori* de la discrétisation en temps

En s'inspirant de la section 3.4, on définit des indicateurs d'erreur en temps :

$$\eta_t^p = \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u_h^p - u_h^{p-1})\|, 1 \leq p \leq N. \quad (4.22)$$

On introduit les mêmes notations que dans la Section 3.4 : on dénote par $\pi_\tau f$ la fonction étagée constante à $f(t_p)$ sur chaque intervalle (t_{p-1}, t_p) , $1 \leq p \leq N$. Pour une suite $v^p \in X_{ph}^0 \oplus H_0^1(\Omega)$, $0 \leq p \leq N$, on dénote par v_τ son interpolé de Lagrange, qui est *a fortiori* affine sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$, $1 \leq p \leq N$, et égal à v^p au point t_p , i.e., défini par,

$$v_\tau(t) = \frac{t_p - t}{\tau_p} v^{p-1} + \frac{t - t_{p-1}}{\tau_p} v^p, \forall t \in [t_{p-1}, t_p], 1 \leq p \leq N.$$

Enfin, on note $e_\tau = u - u_\tau$, l'erreur de discrétisation en temps. Comme

$$\partial_t u_\tau = \frac{u^p - u^{p-1}}{\tau_p} \text{ on } (t_{p-1}, t_p),$$

l'équation semi-discrète (4.4) est équivalente à

$$\begin{cases} (\partial_t u_\tau(t), v) + (\nabla u^p, \nabla v) - (p^p, \mathbf{div} v) = (f^p, v), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \\ -(\mathbf{div} u^p, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.23)$$

pour tout $t \in (t_{p-1}, t_p)$.

En prenant la différence avec (4.2), on obtient l'équation résiduelle

$$\begin{aligned} (\partial_t e_\tau(t), v) + (\nabla e_\tau(t), \nabla v) - (\mathbf{div} v, p - \pi_\tau p_\tau) &= ((f - f^p)(t), v) \\ + (\nabla(u^p - u_\tau)(t), \nabla v), \forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \forall \text{ a.e. } t \in (t_{p-1}, t_p). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Cette équation permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 (Borne supérieure de l'erreur en temps). *On a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Démonstration. L'équation résiduelle (4.24) est vérifiée (voir Proposition 3.1 of [BV04])

$$\begin{aligned} \|e_\tau(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(t)\|^2 dt &\leq 2 \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds \\ + 2\|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Par définition de u_τ , on a clairement

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds = \frac{\tau_p}{3} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|^2. \quad (4.27)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on écrit que

$$\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\| \leq \eta_t^p + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \tau_p^{1/2} \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|.$$

De plus le Lemme 2.3 de [BV04] est vérifié

$$\tau_p \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \tau_p \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2 \lesssim \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \quad (4.28)$$

Dès lors on a

$$\int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds \lesssim (\eta_t^p)^2 + \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds. \quad (4.29)$$

Cette inégalité dans (4.26) permet de conclure. \blacksquare

Corollaire 4.4.2 (Seconde borne supérieure de l'erreur en temps). *On a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p_\tau)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)\|^2 ds + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Démonstration. L'équation résiduelle (4.24) mène directement à

$$\begin{aligned} \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p_\tau)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &\lesssim \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla e_\tau(s)\|^2 ds + \sum_{p=1}^n \int_{t_{p-1}}^{t_p} \|\nabla(u^p - u_\tau)(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite est estimé dans (4.25), alors que le troisième terme est estimé via (4.29). \blacksquare

La borne inférieure locale de l'erreur en temps est plus facile à estimer :

Théorème 4.4.3 (Borne inférieure locale de l'erreur en temps). *Pour tout $p = 1, \dots, N$, on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} \eta_t^p &\lesssim \|\nabla_h e_\tau\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; L^2(\Omega))} + \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p_\tau)\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega)^d)} \\ &+ \tau_p^{1/2} (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|) \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{p-1}, t_p; H^{-1}(\Omega)^d)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Démonstration. À l'aide de l'inégalité triangulaire, on a

$$\eta_t^p \lesssim \tau_p^{1/2} (\|\nabla(u^p - u^{p-1})\| + \|\nabla_h(u^p - u_h^p)\| + \|\nabla_h(u^{p-1} - u_h^{p-1})\|).$$

L'estimation du terme $\tau_p^{1/2} \|\nabla(u^p - u^{p-1})\|$ est réalisée dans la Proposition 3.3 de [BV04] en utilisant (4.27) (avec $n = p$) et en prenant $v = u^p - u_\tau$ dans (4.24) et en intégrant le résultat sur $t \in (t_{p-1}, t_p)$. \blacksquare

4.5 Analyse *a posteriori* de la discrétisation spatiale

4.5.1 Borne supérieure de l'erreur

L'élément résiduel exact est donné par

$$f^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}.$$

De manière classique [Ver96], ce terme est remplacé par un élément résiduel approché

$$f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p},$$

où f_h^p est une approximation de f^p via des éléments finis P^0 (plus précisément $(f_h^p)|_K := \frac{1}{|K|} \int_K f^p$, pour tout $K \in T_{ph}$).

Définition 4.5.1. Soit $p \geq 1$. L'estimateur d'erreur local η_K^p est défini par

$$\eta_K^p = h_K \|f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_K} h_E^{1/2} (\|J_{E,n}^p\|_E + \|J_{E,t}^p\|_E).$$

L'estimateur d'erreur global η^p est donné par

$$(\eta^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\eta_K^p)^2.$$

Les termes d'approximation local et global sont donnés par

$$\xi_K^p = h_K \|f^p - f_h^p\|_{\omega_K}, \quad (\xi^p)^2 = \sum_{K \in T_{ph}} (\xi_K^p)^2.$$

Nous allons tout d'abord démontrer quelques propriétés relatives à la décomposition d'Helmholtz de l'erreur.

Lemme 4.5.2. Soit $w^p \in H_0^1(\Omega)^d$ apparaissant dans la décomposition d'Helmholtz de l'erreur (4.10) e^p . Nous avons alors l'inégalité suivante :

$$\|e^p - w^p\|^2 \lesssim \max\{1, \lambda_{h\tau}\} \tau_p \eta^p \|\nabla_h e^p\|. \quad (4.32)$$

Démonstration. Tout d'abord

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 \lesssim \eta^p \|\nabla_h e^p\|. \quad (4.33)$$

En utilisant la décomposition d'Helmholtz de l'erreur (4.10), on a

$$\begin{aligned} \|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 &= \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - w^p) \cdot \nabla_h(e^p - w^p). \\ &= \int_{\Omega} \nabla_h(e^p - w^p) \cdot (\mathbf{curl} \varphi^p - q^p \mathbf{I}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{div} w^p = 0$, en utilisant les Lemmes 4.3.5, 4.3.8 et la formule de Green (en rappelant que $w^p = 0$ sur Γ), on obtient

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.6) (voir propriété (4.39)) on obtient

$$\|\nabla_h(e^p - w^p)\|^2 \lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}.$$

L'inégalité (4.33) est alors vérifiée à l'aide (4.11).

Montrons à présent que l'inégalité (4.32) est vérifiée. Considérons le problème de Stokes suivant : trouver $\psi^p \in (H_0^1(\Omega))^d$ et $q^p \in L_0^2(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta \psi^p + \nabla q^p = e^p - w^p & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{div} \psi^p = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.34)$$

Comme $e^p - w^p$ appartient à $L^2(\Omega)^d$, le Théorème 4.3.10 montre que $(\psi^p, q^p) \in (V_{\beta,\delta}^2(\Omega))^d \times V_{\beta,\delta}^1(\Omega)$ avec l'inégalité suivante

$$\|\psi^p\|_{2,\beta,\delta,\Omega} + \|q^p\|_{1,\beta,\delta,\Omega} \lesssim \|e^p - w^p\|. \quad (4.35)$$

On écrit alors que

$$\|e^p - w^p\|^2 = \int_{\Omega} (e^p - w^p) \cdot (-\Delta \psi^p + \nabla q^p) = \sum_{K \in \mathcal{T}_{ph}} \int_K (e^p - w^p) \cdot (-\Delta \psi^p + \nabla q^p).$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \|e^p - w^p\|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\nabla(e^p - w^p) \cdot \nabla \psi^p - \mathbf{div} (e^p - w^p) q^p) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E ([e^p - w^p]_E \cdot (\nabla \psi^p n_E) + [(e^p - w^p) \cdot n_E]_E q^p). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{div} (e^p - w^p) = 0$ pour tout élément K et que la moyenne de $[e^p - w^p]_E = -[[u_h^p]]_E$ est nulle sur l'arête E (voir 2.2), l'identité précédente est équivalente à

$$\begin{aligned} \|e^p - w^p\|^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla(e^p - w^p) \cdot \nabla \psi^p \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E \left([[e^p - w^p]]_E \cdot (\nabla \psi^p n_E - \mathcal{M}_E \nabla \psi^p n_E) \right. \\ &\quad \left. + [[(e^p - w^p) \cdot n_E]_E (q^p - \mathcal{M}_E q^p) \right). \end{aligned}$$

À présent, en utilisant la formulation variationnelle (4.12) avec $v = \psi^p$ (en rappelant que $\mathbf{div} \psi^p = 0$), on voit que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla(e^p - w^p) \cdot \nabla \psi^p = 0,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|e^p - w^p\|^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E \left(\llbracket e^p - w^p \rrbracket_E \cdot (\nabla \psi^p n_E - \mathcal{M}_E \nabla \psi^p n_E) \right. \\ &\quad \left. + \llbracket (e^p - w^p) \cdot n_E \rrbracket_E (q^p - \mathcal{M}_E q^p) \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\|e^p - w^p\|^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|\llbracket e^p - w^p \rrbracket_E\|_E (\|\nabla \psi^p n_E - \mathcal{M}_E \nabla \psi^p n_E\|_E + \|q^p - \mathcal{M}_E q^p\|_E).$$

Mais le Théorème 4.3.11 assure que

$$\|q^p - \mathcal{M}_E q^p\|_E \lesssim h_K^{1/2} r_K^{-1} \|q^p\|_{1,\beta,\delta,K} \lesssim \lambda_{h\tau}^{1/2} \tau_p^{1/2} h_K^{-1/2} \|q^p\|_{1,\beta,\delta,K},$$

pour tout élément K tel que $E \in E_K$ (la seconde estimation provenant de la définition (4.21) de $\lambda_{h\tau}$). De la même manière que $\int_E \llbracket e^p - w^p \rrbracket_E = 0$, on a

$$\|\llbracket e^p - w^p \rrbracket_E\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla_h(e^p - w^p)\|_{\omega_E}.$$

Les trois estimations précédentes donnent

$$\|e^p - w^p\|^2 \lesssim \max\{1, \lambda_{h\tau}\}^{1/2} \sqrt{\tau_p} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|\nabla_h(e^p - w^p)\|_{\omega_E} \left(\sum_{K \subset \omega_E} \|\nabla \psi^p\|_{1,\beta,\delta,K} + \|q^p\|_{1,\beta,\delta,K} \right).$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'estimation (4.35), on conclut que

$$\|e^p - w^p\| \lesssim \max\{1, \lambda_{h\tau}\}^{1/2} \sqrt{\tau_p} \|\nabla_h(e^p - w^p)\|.$$

L'inégalité requise (4.32) dérive alors de (4.33). ■

Théorème 4.5.3 (Borne supérieure de l'erreur). *On a*

$$\|e^n\|^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \lesssim \sum_{p=1}^n \tau_p \{ \max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^p)^2 + (\xi^p)^2 \} + \|e^0\|^2. \quad (4.36)$$

Démonstration. Cette borne supérieure est une conséquence des Lemmes 4.3.7, 4.3.8 et 4.5.2. Évaluons dans un premier temps quelques termes du membre droit de l'identité (4.16) du Lemme 4.3.8. En utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité (2.7) et la définition 4.5.1 de l'estimateur local, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} h_K \|f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}\|_K |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète donne

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \eta^p |w^p|_{1,\Omega}. \quad (4.37)$$

De la même manière en utilisant (2.8) et (2.6), on évalue les termes avec les sauts normal et tangentiel des dérivées :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E \|w^p - I_C^0 w^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,n}^p\|_E h_E^{1/2} |w^p|_{1,\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E \|\varphi^p - I_C \varphi^p\|_E \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \|J_{E,t}^p\|_E h_E^{1/2} |\varphi^p|_{1,\tilde{\omega}_E} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_{ph}} \eta_K^p |\varphi^p|_{1,\tilde{\omega}_K}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète donne

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,n}^p (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \eta^p |w^p|_{1,\Omega}, \quad (4.38)$$

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E J_{E,t}^p \cdot (\varphi^p - I_C \varphi^p) \lesssim \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega}. \quad (4.39)$$

L'inégalité (2.7) permet d'évaluer le terme :

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K (f^p - f_h^p) (w^p - I_C^0 w^p) \leq \sum_{K \in T_{ph}} h_K \|f^p - f_h^p\|_K |w^p|_{1,\tilde{\omega}_K},$$

et par conséquent

$$\sum_{K \in T_{ph}} \int_K (f^p - f_h^p) (w^p - I_C^0 w^p) \lesssim \xi^p |w^p|_{1,\Omega}. \quad (4.40)$$

Les estimations précédentes, l'identité (4.16) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent

$$\begin{aligned} \|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) \\ &+ \|e^p - e^{p-1}\| \|e^p - w^p\| \\ &+ C\tau_p \eta^p |\varphi^p|_{1,\Omega} \\ &+ C\tau_p (\eta^p + \xi^p) |w^p|_{1,\Omega}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} .

En utilisant les relations (4.11), (4.32) et l'inégalité de Young dans (4.41), on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq (e^{p-1}, e^p) \\ &+ \frac{1}{2} \|e^p - e^{p-1}\|^2 \\ &+ \frac{C \max\{1, \lambda_{h\tau}\} \tau_p}{2} \left(\frac{\epsilon}{2} \|\nabla_h e^p\|^2 + \frac{2}{\epsilon} (\eta^p)^2 \right) \\ &+ \frac{C \tau_p}{2\kappa} ((\eta^p)^2 + \xi^p)^2 + \kappa \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2, \end{aligned}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} et pour tout $\epsilon, \kappa > 0$. En choisissant ϵ, κ assez petits, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |e^p|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 &\leq \frac{1}{2} \|e^p\|^2 + \frac{1}{2} \|e^{p-1}\|^2 \\ &+ C \tau_p (\max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^p)^2 + (\xi^p)^2) \\ &+ \frac{\tau_p}{2} \|\nabla_h e^p\|^2, \end{aligned}$$

avec une constante $C > 0$ dépendant uniquement de l'angle minimal de T_{ph} . Cette inégalité est alors équivalente à

$$\|e^p\|^2 + \tau_p \int_{\Omega} |\nabla_h e^p|^2 \leq \|e^{p-1}\|^2 + 2C \tau_p (\max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^p)^2 + (\xi^p)^2),$$

et on conclut en sommant sur $p = 1, \dots, n$. ■

Corollaire 4.5.4 (Seconde borne supérieure). *Sous les hypothèses du Théorème 4.5.3, on a*

$$\begin{aligned} \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n \tau_p \{ \max\{1, \lambda_{h\tau}\}^2 (\eta^p)^2 + (\xi^p)^2 \} \\ &+ \|e^0\|^2 + \|\nabla_h e^0\|^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}), v) - (\mathbf{div} v, \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau}))}{|v|_{1, \Omega}}.$$

En utilisant la propriété

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in (t_{p-1}, t_p),$$

et l'équation semi-discrète (4.4), pour tout $t \in (t_{p-1}, t_p)$, on écrit

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) - (\mathbf{div} v, \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})) = R^p(v) - (\nabla_h e^p, \nabla v),$$

où R^p est le résidu défini par

$$R^p(v) = (f^p, v) - \left(\frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}, v \right) - (\nabla_h u_h^p, \nabla v) + (\mathbf{div} v, p_h^p), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme la formulation variationnelle (4.5) implique que

$$R^p(v_h) = 0, \forall v_h \in V_{nh}^0,$$

l'identité précédente devient

$$(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) - (\mathbf{div} v, \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})) = R^p(v - v_h) - (\nabla_h e^p, \nabla v), \forall v_h \in V_{ph}^0, t \in (t_{p-1}, t_p).$$

En prenant $v_h = I_C v$, en appliquant la formule de Green, et en utilisant la relation (2.8), on a

$$|(\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t), v) - (\mathbf{div} v, \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau}))| \lesssim (\eta^p + \xi^p + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\|, \forall t \in (t_{p-1}, t_p).$$

C'est à dire

$$\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d} \lesssim \eta^p + \xi^p + \|\nabla_h e^p\|, \forall t \in (t_{p-1}, t_p).$$

On conclut alors à l'aide de l'inégalité (4.36). \blacksquare

4.5.2 Borne inférieure de l'erreur

Nous allons établir la borne inférieure de l'erreur pour l'estimateur η_K^p avec la même démarche que [Ver96, DDPV96]). Étant donné que nous étudions un problème non-stationnaire (voir [BV04, Ver03]), nous avons besoin de la proposition suivante :

Assertion 4.5.5. *Pour tout $1 \leq p \leq N$, il existe une triangulation conforme \tilde{T}_{ph} telle que tout élément K de $T_{p-1,h}$ ou de T_{ph} soit la réunion d'éléments \tilde{K} de \tilde{T}_{ph} avec $h_K \sim h_{\tilde{K}}$.*

Pour faciliter la preuve, nous allons reformuler le Corollaire 4.3.5 comme suit :

Lemme 4.5.6. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$ et $\varphi \in H^1(\Omega)^3$ si $d = 3$ nous avons l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (e^p - e^{p-1})v &+ \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \nabla_h e^p \cdot (\nabla v + \mathbf{curl} \varphi) = \tau_p \int_{\Omega} (f^p - f_h^p)v \\ &+ \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} \int_K \left(f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right) v + \tau_p \int_{\Omega} \varepsilon^p \mathbf{div} v \\ &+ \tau_p \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}} \int_E (J_{E,n}^p v + J_{E,t}^p \cdot \varphi). \end{aligned}$$

Théorème 4.5.7 (Borne inférieure locale de l'erreur). *En considérant l'assertion 4.5.5, pour tout $1 \leq p \leq N$, on a*

$$\eta_K^p \lesssim \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p \right\|_{H^{-1}(\omega_K)} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_K} + \xi_K^p. \quad (4.42)$$

Démonstration. **Élément résiduel** Soit $K \in \tilde{T}_{ph}$ un élément fixé, on définit

$$r_K^p := (f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p})|_K, \quad w_K^p := b_K r_K^p,$$

où $b_K = \lambda_1^K \lambda_2^K \lambda_3^K$ est la fonction bulle standard associée à l'élément K (voir [Ver96]). Les inégalités inverses (cf. [Ver96]) et le Lemme 4.5.6 avec $v = w_K^p$ et $\varphi = 0$ donnent

$$\begin{aligned} \|r_K^p\|_K^2 &\sim \int_K r_K^p w_K^p = \int_K (f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p}) w_K^p \\ &= \int_K (\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p - (f^p - f_h^p)) w_K^p + \int_K \nabla_h e^p \cdot \nabla w_K^p \\ &\lesssim (h_K^{-1} \|\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p\|_{H^{-1}(\omega_K)} + h_K^{-1} |e^p|_{1,K} + \|f^p - f_h^p\|_K) \|r_K^p\|_K. \end{aligned}$$

Cela prouve l'inégalité

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim \|\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p\|_{H^{-1}(\omega_K)} + |e^p|_{1,K} + h_K \|f^p - f_h^p\|_K. \quad (4.43)$$

Pour $K \in T_{ph}$, la Proposition 4.5.5 donne

$$h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}: \tilde{K} \subset K} h_{\tilde{K}}^2 \|r_{\tilde{K}}^p\|_{\tilde{K}}^2.$$

En utilisant la relation (4.43) et le fait que $h_{\tilde{K}} \leq h_K$ pour $\tilde{K} \subset K$, nous avons prouvé que

$$h_K \|r_K^p\|_K \lesssim \|\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p\|_{H^{-1}(\omega_K)} + |e^p|_{1,K} + \xi_K. \quad (4.44)$$

Saut tangentiel On considère à présent une arête/face E de T_{ph} et on définit

$$w_E^p := b_E J_{E,t}^p,$$

où b_E est la fonction bulle standard associée à l'arête E (voir [Ver96]).

Le Lemme 4.5.6 avec $v = 0$ et $\varphi = w_E^p$ et les inégalités inverses donnent

$$\begin{aligned} \|J_{E,t}^p\|_E^2 &\sim \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \nabla_h e^p \cdot \mathbf{curl} w_E^p \\ &\lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} \|\nabla w_E^p\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

Cela prouve que

$$h_E^{1/2} \|J_{E,t}^p\|_E \lesssim \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E}. \quad (4.45)$$

Saut normal De la même manière, pour une arête/face arbitraire E de T_{ph} , on définit

$$w_E^p := b_E J_{E,n}^p.$$

En utilisant les inégalités inverses et le Lemme 4.5.6 avec $v = w_E^p$ et $\varphi = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \|J_{E,n}^p\|_E &\lesssim h_E^{1/2} \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p \right\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} \\ &\quad + h_E^{1/2} \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \left\| f_h^p - \frac{u_h^p - u_h^{p-1}}{\tau_p} \right\|_{\omega_E}. \end{aligned}$$

À l'aide de (4.44), on a

$$h_E^{1/2} \|J_{E,n}^p\|_E \lesssim h_E \left\| \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^p \right\|_{\omega_E} + \|\nabla_h e^p\|_{\omega_E} + h_E \|f^p - f_h^p\|_{\omega_E}. \quad (4.46)$$

On conclut alors à l'aide des relations (4.44), (4.45) et (4.46). \blacksquare

Corollaire 4.5.8 (Borne inférieure globale de l'erreur). *En considérant la proposition 4.5.5, on a pour tout $1 \leq p \leq N$,*

$$(\eta^p)^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2. \quad (4.47)$$

Démonstration. Comme

$$\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})(t) = \frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}, \forall t \in (t_{p-1}, t_p),$$

dans la preuve précédente, on doit remplacer la norme locale H^{-1} de $\frac{e^p - e^{p-1}}{\tau_p}$ par sa norme globale $H^{-1}(\Omega)^d$. Pour cela, on prend dans le Lemme 4.5.6 $\varphi = 0$ et

$$v = \sum_{\tilde{K} \in \tilde{T}_{ph}} h_{\tilde{K}}^2 r_{\tilde{K}}^p b_{\tilde{K}},$$

ce qui donne, à l'aide de la Proposition 4.5.5,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 &\lesssim (\|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\nabla_h e^p\|) \|\nabla v\| + \sum_{K \in T_{ph}} \|f^p - f_h^p\|_K \|v\|_K. \end{aligned}$$

Les inégalités inverses donnent alors

$$\sum_{K \in T_{ph}} h_K^2 \|r_K^p\|_K^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

De façon similaire, pour estimer le saut normal, on utilise le Lemme 4.5.6 avec $\varphi = 0$ et

$$v = \sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E J_{E,n}^p b_E,$$

pour obtenir

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_{ph}^{int}} h_E \|J_{E,n}^p\|_E^2 \lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 + \|\nabla_h e^p\|^2 + (\xi^p)^2.$$

Ces relations et (4.45) permettent alors de conclure. \blacksquare

4.6 Analyse *a posteriori* de la discrétisation totale

Pour tout $n = 1, \dots, N$, on appelle l'erreur totale $E(t_n)$ au temps t_n l'application définie par

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &= \|u(t_n) - u_h^n\|^2 + \|u^n - u_h^n\|^2 \\ &+ \|\partial_t(u - u_\tau) + \nabla(p - \pi_\tau p_\tau)\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \\ &+ \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla\pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \\ &+ \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u - u_\tau)(\cdot, s)\|^2 ds + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(\cdot, s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

En combinant les résultats de la section précédente, on obtient les bornes supérieure et inférieure suivantes.

Théorème 4.6.1 (Bornes d'erreur globale). *Pour tout $n = 1, \dots, N$, on a*

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p \{\max\{1, \lambda_{h\tau}\}(\eta^p)^2 + (\xi^p)^2\}) \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 + \|e^0\|^2 + \tau_0 \|\nabla_h e^0\|^2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

En considérant la proposition 4.5.5, on a pour $n = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p(\eta^p)^2) &\lesssim E(t_n)^2 \\ &+ \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p(\xi^p)^2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Démonstration. Commençons par la borne supérieure de l'erreur. À l'aide du théorème 4.4.1 et du Corollaire 4.4.2, on a

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \\ &+ \|(u_\tau - u_{h\tau})(t_n)\|^2 + \int_0^{t_n} \|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau}(s))\|^2 ds \\ &+ \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla\pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned}$$

Comme $(u_\tau - u_{h\tau})(t_n) = u^n - u_h^n = e^n$ et

$$|\nabla_h(u_\tau - u_{h\tau})(s)| \leq |\nabla_h e^{p-1}| + |\nabla_h e^p|, \forall s \in [t_{p-1}, t_p],$$

l'inégalité précédente peut être réécrite

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 &\lesssim \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 + \|e^n\|^2 + \sum_{p=0}^n \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2 \\ &+ \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla\pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant le Théorème 4.5.3 et le Corollaire 4.5.4.

On passe à présent à la borne inférieure de l'erreur. En sommant (4.31) sur $p = 1, \dots, n$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 &\lesssim \int_0^{t_n} \|\nabla_h e_\tau(s)\|^2 ds + \|\partial_t e_\tau + \nabla(p - \pi_\tau p_\tau)\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \\ &\quad + \sum_{p=0}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + \|\nabla_h(u_h^{p-1} - u_h^{p-1})\|^2) \\ &\quad + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \end{aligned}$$

À l'aide de la relation (4.28), on obtient

$$\sum_{p=1}^n (\eta_t^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega)^d)}^2. \quad (4.50)$$

Par ailleurs, à l'aide du Corollaire 4.5.8, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 &\lesssim \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau}) + \nabla \pi_\tau(p_\tau - p_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega)^d)}^2 \\ &\quad + \sum_{p=1}^n \tau_p (\|\nabla_h(u^p - u_h^p)\|^2 + (\xi^p)^2). \end{aligned}$$

En considérant (4.28), on obtient

$$\sum_{p=1}^n \tau_p (\eta^p)^2 \lesssim E(t_n)^2 + \sum_{p=1}^n \tau_p (\xi^p)^2. \quad (4.51)$$

L'inégalité (4.49) est alors issue de (4.50) et (4.51). \blacksquare

Remarque 4.6.2. En considérant 4.5.5, alors le Théorème 4.6.1 montre que $E(t_n)$ est équivalente à l'estimateur global d'erreur

$$\left(\sum_{p=1}^n ((\eta_t^p)^2 + \tau_p (\eta^p)^2) \right)^{1/2}.$$

Mais ce résultat n'est pas totalement optimal puisque la constante qui apparaît dans la borne supérieure dépend du paramètre $\lambda_{h\tau}$. Néanmoins si Ω est convexe, alors cette constante est bornée si

$$h_K^2 \lesssim \tau_p,$$

ce qui est loin d'être restrictif, puisque si Ω n'est pas convexe, un algorithme adaptatif aura tendance à raffiner les maillages au niveau des coins ou des arêtes ré-entrants de Ω . Par ailleurs, on peut noter qu'un paramètre similaire a été introduit dans le cas d'approximations conformes (voir Section 4 de [BV04]).

Nous allons à présent exploiter cet estimateur d'erreur global dans la section suivante, en considérant évidemment la proposition 4.5.5.

4.7 Tests numériques

Les tests suivants vont confirmer nos résultats théoriques. Le premier exemple est utilisé pour valider l'efficacité et la fiabilité de notre estimateur d'erreur spatial. Les exemples suivants illustrent l'utilisation de l'estimateur global à l'aide d'un algorithme adaptatif pour des solutions présentant des singularités en espace.

4.7.1 Premier test

On résout le problème de Stokes dynamique en 2D sur le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On utilise l'élément de Crouzeix-Raviart sur le maillage uniforme $T_{ph} = T_h$ obtenu en divisant chaque segment par n sous-intervalles et en divisant chaque carré obtenu en deux triangles (voir Figure 4.1).

Les tests sont réalisés au temps $T = 1s$ avec la solution exacte suivante (u, p) :

$$\begin{cases} \phi &= x^2 y^2 (x-1)^2 (y-1)^2 e^{-t} \\ u &= \mathbf{curl} \phi \\ p &= (x - \frac{1}{2}) e^{-t} \end{cases} \quad (4.52)$$

avec $u_0(x, y) = u(x, y, 0)$ dans Ω . Cela permet en particulier d'avoir $\mathbf{div} u = 0$ et $u(\cdot, t)|_{\Gamma} = 0$, pour tout $t \in]0, 1[$. On fixe $\tau_p = 0.1s$, dès lors $N = T/\tau_p = 10$. Tous les résultats numériques seront présentés au temps final $T = 1s$ ($N = 10$).

Le problème discret (4.5) est résolu à l'aide d'un algorithme d'Uzawa. Tout d'abord, on vérifie que la solution numérique (u_h^N, p_h^N) converge vers la solution exacte. Pour illustrer cette convergence, on a tracé $\|\nabla_h e^N\|$ dans la Figure 4.2 et $\|p^N - p_h^N\|$ dans la Figure 4.3 en fonction des degrés de liberté ($DoF = 3n^2 - 4n + 2$ avec $h = 1/n$). Une double échelle logarithmique a été utilisée pour illustrer les taux de convergence.

Comme on peut le voir, les taux de convergence pour la vitesse et la pression sont respectivement d'ordre 1 en $h = \frac{1}{n}$. Les Figures 4.2 et 4.3 mettent en évidence l'ordre optimal de convergence théorique en h .

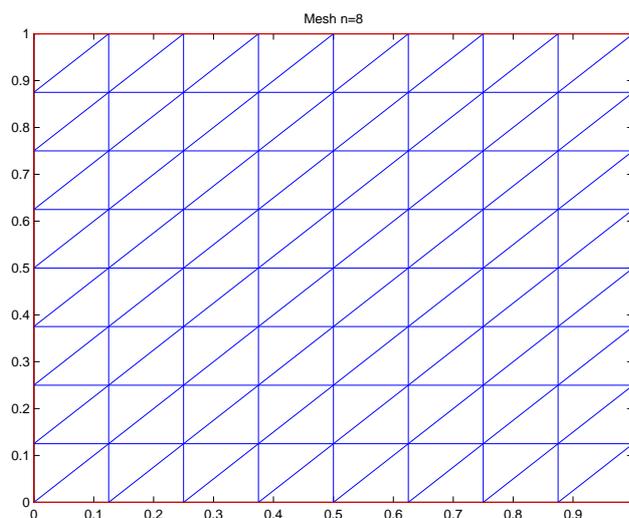
Nous allons étudier à présent les principaux résultats théoriques relatifs aux bornes inférieure et supérieure (4.36) et (4.42).

Fiabilité de l'estimateur spatial

Dans un premier temps, on définit le quotient du membre de gauche sur le membre de droite de l'inéquation (4.36) au temps final $T = 1s$:

$$q_{up}^N = \frac{\|e^N\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \|\nabla_h e^p\|^2}{\|e^0\|^2 + \sum_{p=1}^N \tau_p \sum_{K \in T_{ph}} ((\eta_K^p)^2 + h_K^2 \|f^p - f_h^p\|_K^2)}.$$

À l'aide du Théorème 4.5.3, le quotient q_{up}^N est borné. Cela est clairement confirmé par nos tests numériques présentés dans la Figure 4.4 et dans la Table 4.1. De ce fait, l'estimateur spatial est fiable.

FIG. 4.1 – Maillage uniforme sur le carré unité avec $n = 8$.

Efficacité de l'estimateur spatial

On définit ensuite le quotient du membre de gauche sur le membre de droite de l'inéquation (4.42) au temps final $T = 1s$:

$$q_{low}^N = \max_{K \in T_{ph}} \frac{\eta_K^N}{h_K \left\| \frac{e^N - e^{N-1}}{\tau_p} + \nabla \varepsilon^N \right\|_{\omega_K} + \left\| \nabla_h e^N \right\|_{\omega_K} + h_K \|f^N - f_h^N\|_{\omega_K}}.$$

q_{low}^N est relié à la borne inférieure locale de l'erreur et il mesure l'efficacité de l'estimateur. D'après la Figure 4.5 (voir aussi la Table 4.1), q_{low}^N est borné comme le prévoit le Théorème 4.5.7 : l'estimateur spatial est efficace.

n	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
4	56	0.34221	0.8534
8	208	0.35916	1.5192
16	800	0.36458	1.9133
32	3136	0.36807	2.1971
64	12416	0.37112	2.3275
128	49408	0.37239	2.4103
256	197120	0.37250	2.4120
512	787456	0.37253	2.4127

TAB. 4.1 – q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

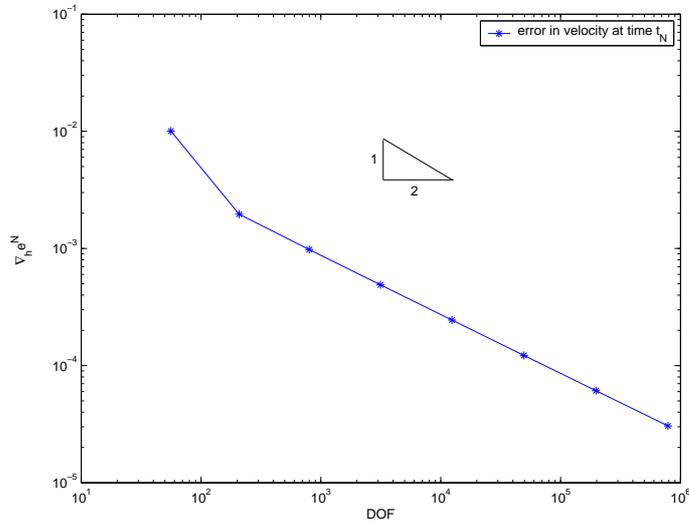


FIG. 4.2 – $\|\nabla_h e^N\|$ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

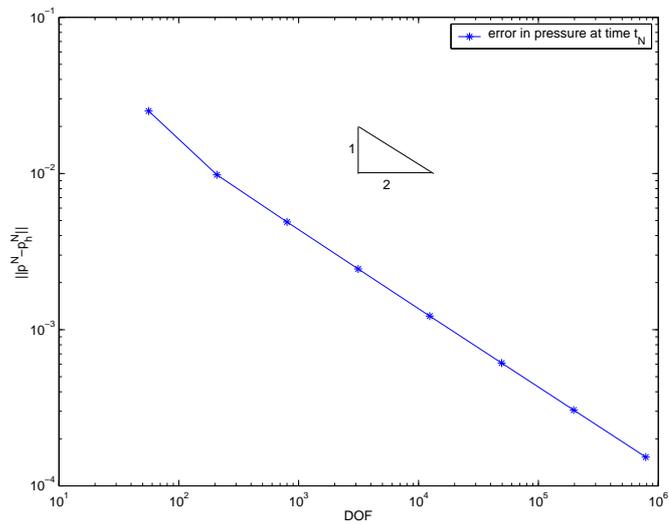
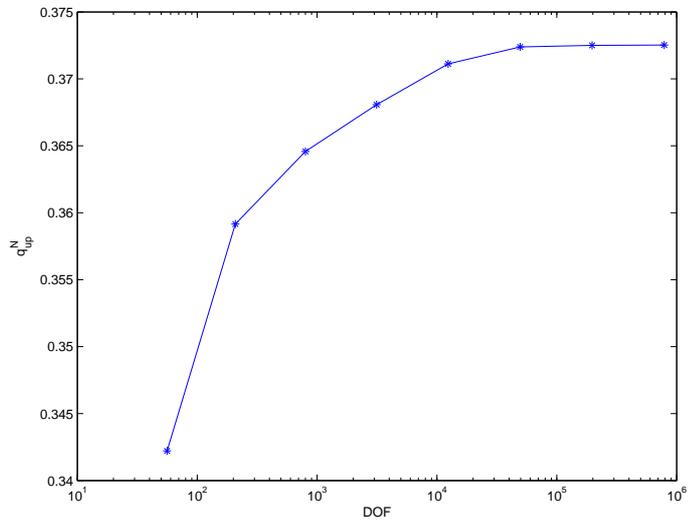
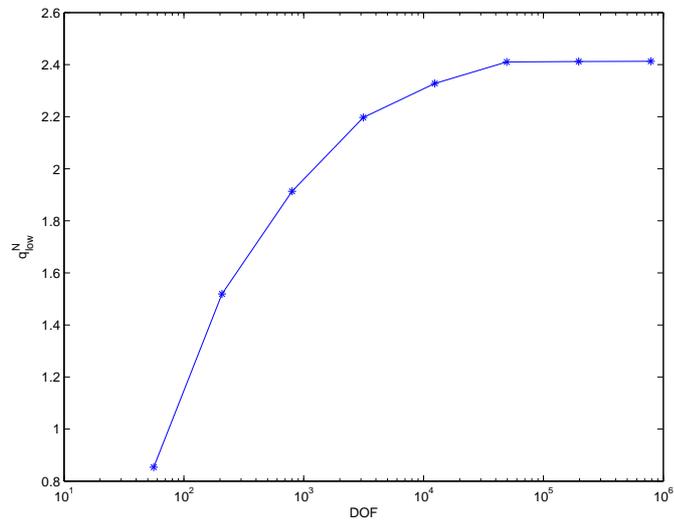


FIG. 4.3 – $\|p^N - p_h^N\|$ en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

FIG. 4.4 – q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.FIG. 4.5 – q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages uniformes.

Maillages non structurés

Pour valider la fiabilité et l'efficacité de notre estimateur d'erreur spatial, nous avons discrétisé le problème précédent avec les mêmes éléments mais avec des maillages non structurés obtenus à partir d'un maillage de taille $h = 0.2$ (voir Figure 4.6) en divisant successivement chaque triangle par 4 triangles via un raffinement standard [Ver96]. Les Figures 4.7 et 4.8 (voir aussi la Table 4.2) montrent respectivement les ratio q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des degrés de liberté. On conclut comme précédemment que les deux ratio sont bornés et que par conséquent notre estimateur d'erreur spatial est fiable et efficace.

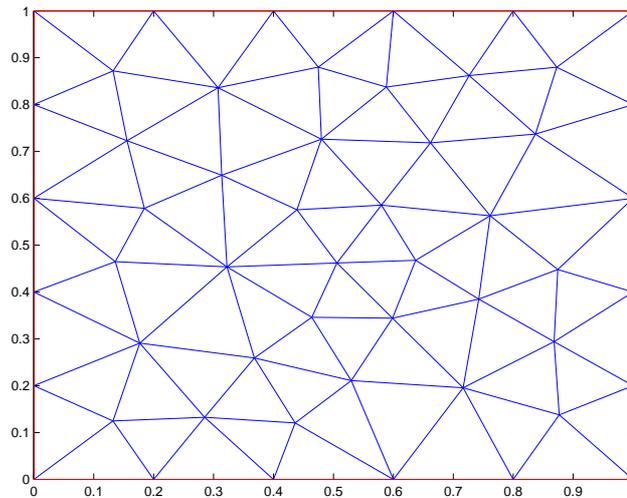


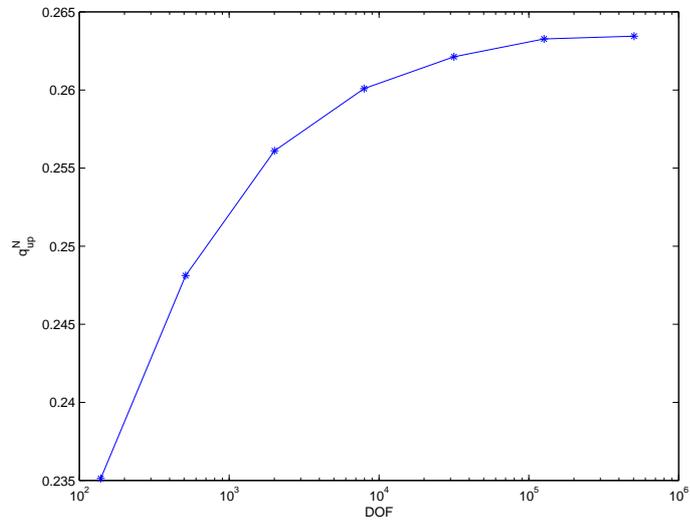
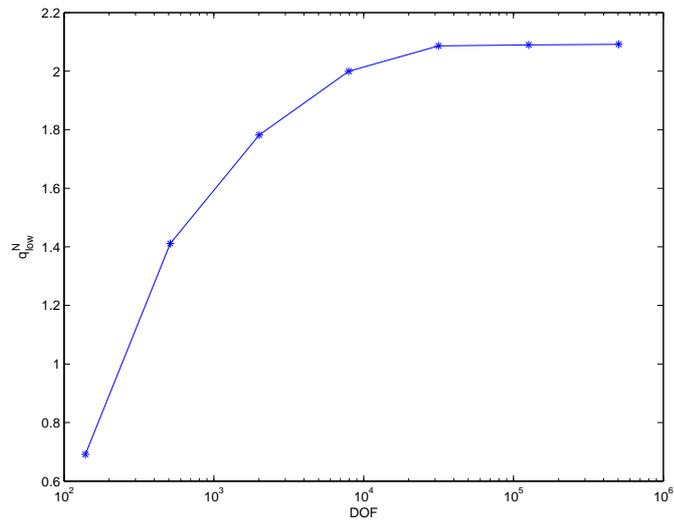
FIG. 4.6 – Maillage non structuré du carré unité avec $h = 0.2$.

h	DoF	q_{up}^N	q_{low}^N
0.2	139	0.23513	0.6916
0.1	512	0.24812	1.4113
0.05	2008	0.26009	1.7820
0.025	7952	0.26213	1.9997
0.0125	31648	0.26327	2.0863
0.00625	126272	0.26340	2.0895
0.003125	504448	0.26345	2.0915

TAB. 4.2 – q_{up}^N et q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.

4.7.2 Algorithme adaptatif

On met en œuvre dans cette section un algorithme adaptatif qui va utiliser de manière appropriée l'indicateur spatial η , l'indicateur temporel η_t et l'approximation d'erreur ξ .

FIG. 4.7 – q_{up}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.FIG. 4.8 – q_{low}^N en fonction des DoF pour des maillages non structurés.

Pour établir cet algorithme, on définit dans un premier temps un indicateur global $\bar{\eta}$ comme suit :

$$\bar{\eta} := \left(\sum_{n=1}^N ((\eta_t^n)^2 + \tau_n(\eta^n)^2 + \tau_n(\xi^n)^2) \right)^{1/2}.$$

Dans un second temps pour notre solution approchée $(u_{h\tau}, p_{h\tau})$, on définit un estimateur d'erreur relative :

$$\mathbf{Ind}^2 = \frac{\bar{\eta}^2}{\int_0^T \|\nabla u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt}. \quad (4.53)$$

Soit δ une tolérance prédéfinie et $0 < \alpha < 1$ un paramètre donné. Le but de notre schéma adaptatif est de générer une suite de sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ et une suite de maillages T_{nh} , $n = 1, \dots, N$ telles que \mathbf{Ind} , défini par (4.53), soit proche de la tolérance prédéfinie δ , dans le sens où

$$(1 - \alpha)\delta \leq \mathbf{Ind} \leq (1 + \alpha)\delta. \quad (4.54)$$

Pour réaliser cela, on définit pour $n = 1, \dots, N$ deux bornes locales : une borne inférieure définie par

$$\mathbf{Lb}^n := (1 - \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla_h u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt \quad (4.55)$$

et une borne supérieure

$$\mathbf{Rb}^n := (1 + \alpha)^2 \delta^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla_h u_{h\tau}(\cdot, t)\|^2 dt \quad (4.56)$$

Si, pour $n = 1, \dots, N$, les conditions

$$\mathbf{Lb}^n \leq (\eta_t^n)^2 + \tau_n(\eta^n)^2 + \tau_n(\xi^n)^2 \leq \mathbf{Rb}^n \quad (4.57)$$

sont satisfaites, alors en sommant de $n = 1$ à $n = N$, on obtient (4.54). De ce fait, notre algorithme consiste à déterminer des pas de temps et des triangulations tels que (4.57) soit vérifié pour tout n . Pour cela, nous allons utiliser η^n et ξ^n pour contrôler le pas spatial à savoir les triangulations. ξ^n et η_t^n seront quant à eux utilisés pour contrôler les pas de temps.

Cet algorithme de maillage adaptatif est présenté dans la Table 4.3. Il s'agit du même algorithme proposé dans [Pic98] (voir aussi [NS05]).

Pour tester notre schéma adaptatif, on considère les deux exemples suivants. On résout, dans le premier exemple, le problème de Stokes dynamique (4.1) dans le carré unité $]0, 1[\times]0, 1[$ avec pour solution exacte, la solution définie par (voir [Pic98])

$$\begin{cases} \phi &= \beta(t) * \exp(-50 * r^2(x, y, t)) \\ u &= \mathbf{curl} \phi \\ p &= (x - \frac{1}{2})e^{-t}, \end{cases} \quad (4.58)$$

avec $r^2(x, y, t) = (x - 0.4 * t - 0.3)^2 + (y - 0.4 * t - 0.3)^2$, et

$$\begin{cases} \beta(t) &= 1 - \exp(-50 * (0.98 * t + 0.01)^2) & \text{si } t < 0.5, \\ \beta(t) &= 1 - \exp(-50 * (1 - 0.98 * t + 0.01)^2) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.59)$$

<i>Set</i> $T_{0h}, u_h^0, n = 1, t, \tau$	Initialisations
<i>Do while</i> $t \leq T$	
<i>Compute</i> $(\eta^n)^2, (\eta_t^n)^2,$ $(\xi^n)^2, \mathbf{Rb}^n, \mathbf{Lb}^n$	
<i>If</i> $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + \eta_t^n < \mathbf{Lb}^n$	Pas de temps courant trop petit
$\tau_n := 2\tau_n$	Itération en temps identique avec un pas plus grand
<i>Else If</i> $\tau_n \frac{\xi^n}{2} + \eta_t^n \leq \mathbf{Rb}^n$	
<i>If</i> $\tau_n (\eta^n + \frac{\xi^n}{2}) < \mathbf{Lb}^n$	Triangulation trop fine
<i>Derefinement with criteria</i>	
$\eta_K^n \leq 1.5 \min \eta_K^n$	
<i>Else If</i> $\tau_n (\eta^n + \frac{\xi^n}{2}) \leq \mathbf{Rb}^n$	Mesh Triangulation is correct
$t := t + \tau$	Incrémentation du pas de temps courant
$n = n + 1$	
<i>Else</i>	Triangulation trop grossière
<i>Refinement with criteria</i>	Itération en temps identique avec un maillage plus fin
$\eta_K^n \geq 0.5 \max \eta_K^n$	
<i>Else</i>	Pas de temps trop grand
$\tau_n := \tau_n / 2$	Itération en temps identique avec un pas temps plus fin
<i>End If</i>	
<i>Make</i> T_{nh}	Génération du nouveau maillage
<i>End Do</i>	

TAB. 4.3 – Algorithme adaptatif de maillage avec $\alpha = 1/2$.

Tolérance δ	Pas de temps	Ind	q_{up}^N
1.0	10	0.73	2.2
0.5	20	0.39	1.8
0.25	40	0.19	1.7
0.125	80	0.095	1.6
0.0625	160	0.047	1.6

TAB. 4.4 – Résultats numériques pour le curl gaussien avec $\alpha = 0.5$.

Cela signifie que u est le curl d'une fonction gaussienne dont le centre se déplace du point $(0.3, 0.3)$ à $t = 0s$ au point $(0.7, 0.7)$ au temps $t = 1s$. La solution exacte au temps $t = 1s$ est présentée dans la Figure 4.9. On constate d'ailleurs une large recirculation autour du point $(0.7, 0.7)$.

Les maillages obtenus par notre algorithme adaptatif aux temps 0.1, 0.5 et 1 sont représentés respectivement dans les Figures 4.10, 4.10 et 4.12 avec une tolérance $\delta = 0.25$ et un paramètre $\alpha = 0.5$.

À partir des ces figures, on constate que les maillages sont raffinés dans la région de recirculation de la solution et qu'ils suivent le centre de la gaussienne. De plus, la Table 4.4 montre que pour plusieurs tolérances, l'indice d'efficacité est borné par une valeur autour de 2.2.

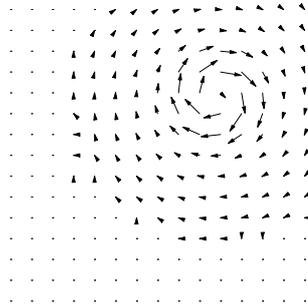


FIG. 4.9 – Solution exacte au temps $t = 1s$.

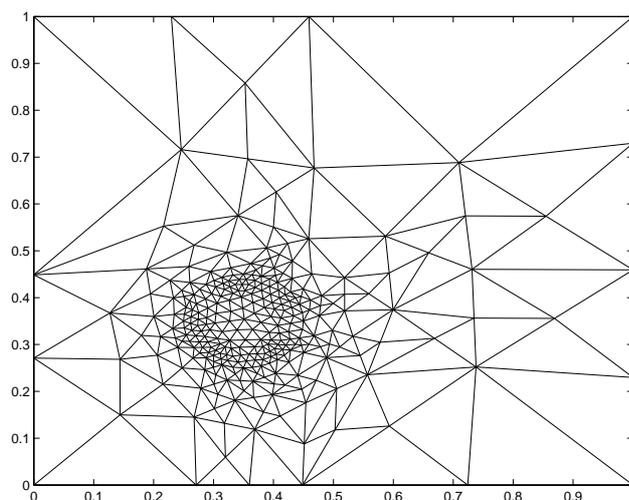
Dans le second exemple, on considère le problème de Stokes dynamique (4.1) dans le domaine en forme de L $] - 1, 1[^2 \setminus]0, 1[\times]0, -1[$ avec pour solution exacte

$$- u(r, \theta, t) = (u_1(r, \theta, t), u_2(r, \theta, t)) = e^{-t}(r^\lambda \phi_1(\theta), r^\lambda \phi_2(\theta))$$

$$- p(r, \theta, t) = e^{-t} r^{\lambda-1} \phi_p$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1(\theta) &= - \sin(\lambda\theta) \cos \omega - \lambda \sin(\theta) \cos(\lambda(\omega - \theta) + \theta) \\ &\quad + \lambda \sin(\omega - \theta) \cos(\theta(1 - \lambda)) + \sin(\lambda(\omega - \theta)), \\ \phi_2(\theta) &= - \sin(\lambda\theta) \sin \omega - \lambda \sin(\theta) \sin(\lambda(\omega - \theta) + \theta) \\ &\quad - \lambda \sin(\omega - \theta) \sin(\theta(1 - \lambda)), \\ \phi_p(\theta) &= 2\lambda(\sin(\theta(\lambda - 1)) + \sin(\theta(\lambda - 1) - \lambda\omega)), \end{aligned}$$

FIG. 4.10 – Curl gaussien avec $n = 4$, $t_n = 0.1s$, $Nv = 289$.

<i>Tolérance</i> δ	<i>Pas de temps</i>	<i>Ind</i>	q_{up}^N
1.0	10	0.987	2.47
0.5	20	0.521	2.01
0.25	40	0.264	1.92
0.125	80	0.131	1.84
0.0625	160	0.065	1.83

TAB. 4.5 – Fonction singulière avec $\alpha = 0.5$.

où (r, θ) sont les coordonnées polaires centrées en $(0, 0)$, $\omega = \frac{3\pi}{2}$ et $\lambda \approx 0.5445$. Dans cette configuration, u possède un comportement singulier le long de l'arête $(0, 0) \times]0, T[$.

Les Figures 4.13, 4.14 et 4.15 présentent respectivement les maillages obtenus au temps 0.1, 0.5 et 1, avec une tolérance $\delta = 0.25$ et le paramètre $\alpha = 0.5$. On voit clairement que les maillages sont raffinés au niveau du point singulier. Comme précédemment, la Table 4.5 confirme un bon indice d'efficacité pour différents paramètres de tolérance.

4.8 Conclusion

Nous avons proposé et analysé un estimateur d'erreur *a posteriori* pour le problème de Stokes dynamique. Nous nous sommes intéressés à une discrétisation via des éléments finis non conformes de type Crouzeix-Raviart dans des domaines 2D ou 3D. Nous avons en outre déterminé des bornes globales d'erreur dans le cadre de l'étude de ces estimateurs. Les principaux résultats que constituent les bornes inférieure et supérieure d'erreur spatial ont été confirmés du point de vue numérique. Plus précisément les ratio, q_{up}^N et q_{low}^N sont bornés (cf. [DDPV96, Pic03]). Enfin, nous avons mis en œuvre un schéma adaptatif en espace temps basé sur notre estimateur. L'algorithme numérique proposé est validé par des exemples pertinents.

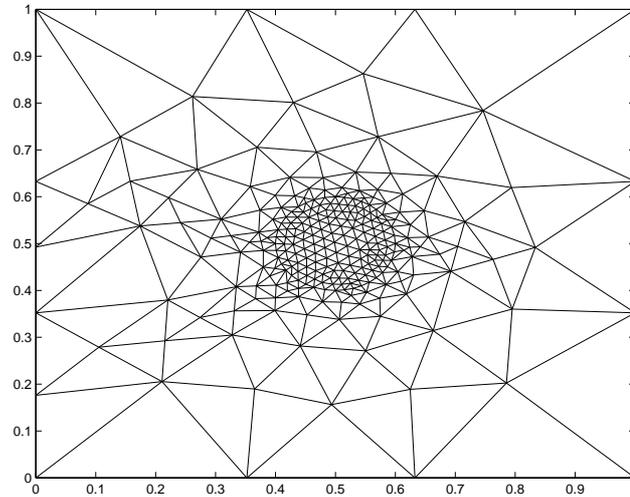


FIG. 4.11 – Curl gaussien avec $n = 20$ $t_n = 0.5s$, $Nv = 284$.

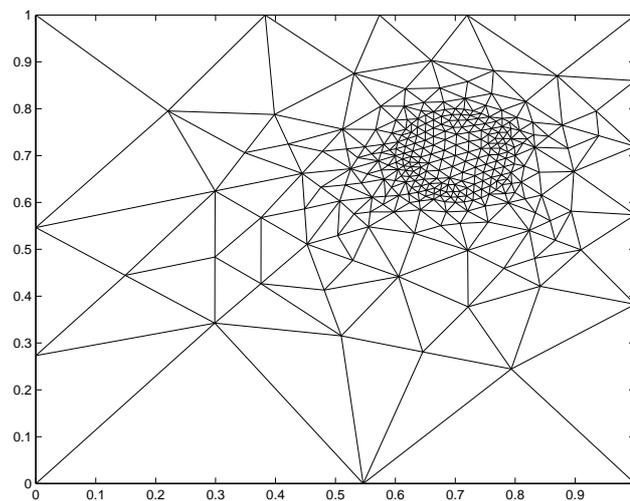
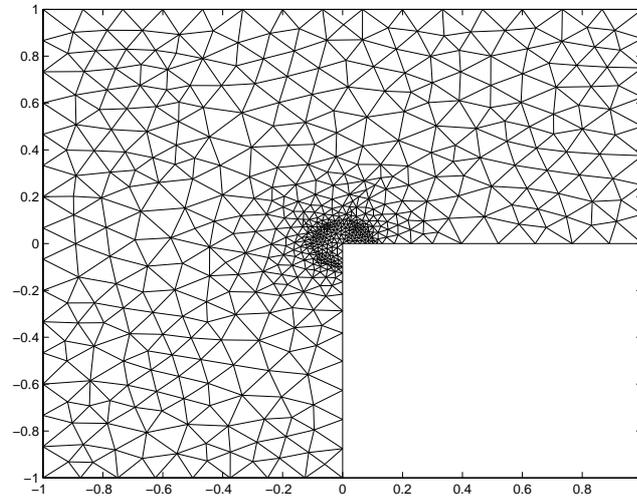
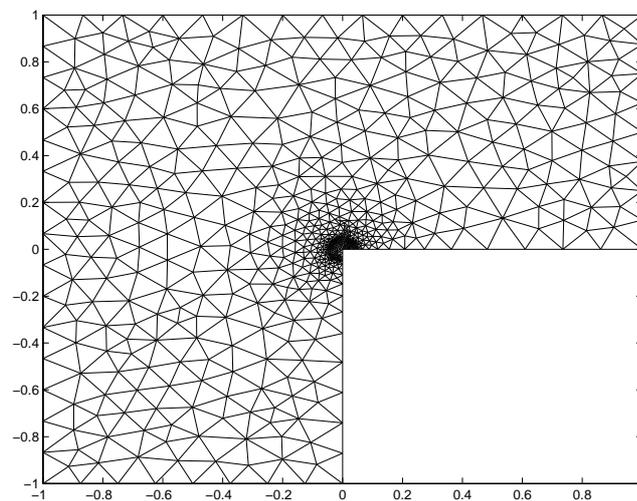


FIG. 4.12 – Curl gaussien avec $n = 40$ $t_n = 1s$, $Nv = 264$.

FIG. 4.13 – Solution singulière avec $n = 4$, $t_n = 0.1s$, $Nv = 621$.FIG. 4.14 – Solution singulière avec $n = 20$, $t_n = 0.5s$, $Nv = 677$.

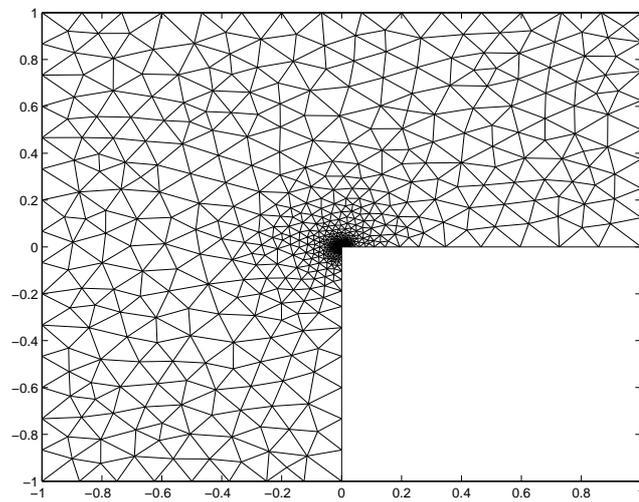


FIG. 4.15 – Solution singulière avec $n = 40$, $t_n = 1s$, $Nv = 693$.

Annexe A

Mise en œuvre algorithmique des éléments finis non conformes 2D

Ce chapitre décrit la mise en œuvre des éléments finis non conformes pour la résolution numérique de problèmes de standard. Le but essentiel de cette partie est avant tout de mettre en évidence les difficultés liées à la mise en œuvre algorithmique de la méthode des éléments finis non seulement dans l'assemblage de la matrice du système étudié, mais aussi dans la résolution du système linéaire qui en découle. La première étape de la programmation consiste à résoudre l'équation de Laplace. Cette étape est un bon préambule pour attaquer des problèmes de type équation de la chaleur ou problème de Stokes tant dynamique que statique.

A.1 Résolution de l'équation de Laplace.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , avec un bord Γ polygonal.

On considère le problème de Laplace étudié dans le chapitre 2 :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Nous avons vu également qu'une discrétisation via une méthode d'éléments finis non conforme était donnée par : trouver $u_h \in X_h^0$, telle que :

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \nabla u_h \nabla v_h = \int_{\Omega} f v_h \quad (\text{A.2})$$

pour tout $v_h \in X_h^0$ avec

$$X_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h, \\ v \text{ est continu au milieu des arêtes}\} \quad (\text{A.3})$$

et

$$X_{h,0} = \{v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Assemblage de la matrice du problème de Laplace.

La dimension de l'espace X_h n'est rien d'autre que le nombre N_h d'arêtes de la triangulation T_h . La dimension $N_{h,0}$ de $X_{h,0}$ est celle de X_h à laquelle on enlève le nombre d'arêtes extérieures de Γ_h , puisque l'on impose à u_h d'être nulle sur le bord $\partial\Omega$.

Introduisons dans un premier temps une numérotation globale de l'ensemble des arêtes de notre triangulation. Soit $\{S_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$ l'ensemble des milieux d'arêtes de la triangulation T_h .

Soit $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq N_h}$ une base de X_h , alors

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega_i \quad (\text{A.5})$$

Dès lors la solution $u_h \in X_{h,0}$ du problème variationnel discret peut être déterminé vectoriellement sous la forme

$$[u_h] := [u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^{N_h}] \quad (\text{A.6})$$

où $u_h^j = 0$ pour tout noeud $j \in \partial\Omega$.

Remarque A.2.1. *Le choix d'une telle représentation de u_h a été non seulement guidé par le fait que u_h s'annule sur le bord de Ω mais aussi par la considération suivante : en incluant les noeuds de bord dans cette représentation, on pourra modifier aisément u_h dans le cas où les conditions au bord ne sont plus homogènes, de plus la taille de la matrice du système linéaire auquel on va aboutir sera conservée.*

Il s'agit maintenant de décrire l'élément fini non conforme de référence $\hat{K} = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \hat{x} + \hat{y} \leq 1\}$. Les fonctions de base de cet élément fini sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{y}) & = & 1 - 2\hat{y} \\ \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{y}) & = & -1 + 2\hat{x} + 2\hat{y} \\ \hat{p}_3(\hat{x}, \hat{y}) & = & 1 - 2\hat{x} \end{cases}$$

Dénotons par $\{\hat{S}_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ les arêtes du triangle de référence \hat{K} , alors les trois fonctions de base précédentes vérifient

$$\hat{p}_i(\hat{S}_j) = \delta_{i,j} \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3 \quad (\text{A.7})$$

Dès lors une fonction de base ω_i restreinte à un triangle K de la triangulation T_h s'écrit

$$\omega_{i|K}(M) = \sum_{j=1}^3 \omega_i(S_j) \hat{p}_j(\hat{M})$$

où $\hat{M} = (\hat{x}, \hat{y})$ est l'image de du point $M = (x, y)$ via la seule et unique transformation affine F_K qui transporte un triangle donné K de la triangulation sur le triangle de référence \hat{K} . En outre cette transformation vérifie $F_K(S_j) = \hat{S}_j$, $1 \leq j \leq 3$ où la famille $\{\hat{S}_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ représente les arêtes du triangle K .

Après avoir introduit ces quelques objets mathématiques, on doit maintenant définir la formulation variationnelle discrète sous forme matricielle. Introduisons la matrice $[Pas_{|K}] \in \mathbb{R}^{3 \times N_h}$ qui à tout élément ω_i de l'espace W_h associe ses trois composantes non nulles sur K suivant $\omega_i|K = [P_{|K}][Pas_{|K}]$, où $[P_{|K}] = [P_{|K}^1, P_{|K}^2, P_{|K}^3]$ représente une base de l'élément K .

Exemple.

Considérons le cinquième triangle de notre domaine noté K_5 . Supposons qu'il soit composé des arêtes 8, 12, 11, alors la matrice $[Pas_{|K_5}]$ s'écrit comme suit :

$$[Pas_{|K_5}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La transformation F_K évoquée précédemment s'écrit de la manière suivante :

$$F_K := M_K \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix}$$

où $M_K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et où le vecteur $[x_K, y_K]^t$ représente les coordonnées du sommet de plus petite abscisse si K appartient au groupement impair, sinon il caractérise celui de plus petite ordonnée.

Toutes ces considérations étant prises en compte, on peut désormais écrire la formulation variationnelle discrète (A.2) sous la forme d'un système linéaire comme suit : trouver $[u_h] \in \mathbb{R}^{N_h,0}$, tel que pour tout élément $[v_h] \in \mathbb{R}^{N_h,0}$:

$$\sum_{K \in T_h} [v_h]^t \cdot [Pas_{|K}]^t \cdot [A_{|K}] \cdot [Pas_{|K}] \cdot [u_h] = \sum_{K \in T_h} [v_h]^t \cdot [Pas_{|K}]^t \cdot [b_{|K}] \quad (\text{A.8})$$

avec

$$[A_{|K}] = \int_K [\vec{\nabla} P_{|K}]^t \cdot [\vec{\nabla} P_{|K}] dx dy \text{ et } [b_{|K}] = \int_K [P_{|K}]^t \cdot f dx dy$$

On a

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} P_{|K}] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial p_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial p_3}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial p_1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial p_2}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial p_3}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} \\ &= M_K^{-t} \cdot [\vec{\nabla} \hat{P}_{|\hat{K}}] \end{aligned}$$

Par suite ,on obtient :

$$[\vec{\nabla} P_{|K}]^t \cdot [\vec{\nabla} P_{|K}] = [\vec{\nabla} \hat{P}_{|\hat{K}}]^t \cdot M_K^{-1} \cdot M_K^{-t} \cdot [\vec{\nabla} \hat{P}_{|\hat{K}}]$$

La connaissance explicite des fonctions de base de l'élément fini de référence \hat{K} permet alors de déterminer $[\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}]$. En l'occurrence :

$$[\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned} [A_{|K}] &= \int_K [\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}]^t \cdot M_K^{-1} \cdot M_K^{-t} \cdot [\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}] dx dy \\ &= \int_{\hat{K}} [\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}]^t \cdot M_K^{-1} \cdot M_K^{-t} \cdot [\vec{\nabla}\hat{P}_{|\hat{K}}] \cdot |\det M_K| \cdot d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned}$$

où $|\det M_K| = 2|K|$.

A.3 Assemblage du second membre.

Il faut à présent tenir compte de l'assemblage du second membre de notre formulation variationnelle discrète. En tenant compte de la triangulation du domaine Ω , on a :

$$\begin{aligned} [b_{|K}] &= \int_K [P_{|K}]^t \cdot f dx dy \\ &= \int_K [P_{1_K}, P_{2_K}, P_{3_K}]^t \cdot f(x, y) dx dy \\ &= |\det M_K| \int_{\hat{K}} [\hat{P}_{1_{\hat{K}}}, \hat{P}_{2_{\hat{K}}}, \hat{P}_{3_{\hat{K}}}]^t \cdot \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x}d\hat{y} \\ &= h^2 \int_{\hat{K}} \begin{bmatrix} 1 - 2\hat{y} \\ -1 + 2\hat{x} + 2\hat{y} \\ 1 - 2\hat{x} \end{bmatrix} \cdot \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned}$$

Un logiciel de calcul formel permettrait de calculer cette intégrale sans trop de problème, mais dans la mesure où nous devons implémenter ce code en machine, il faudra avoir recours à des formules d'intégration numériques sur le triangle de référence \hat{K} .

A.3.1 Intégration numérique

Il faut donc faire des intégrations numériques, car seuls les codes de calcul formel font des intégrations exactes. La grande majorité des codes éléments finis n'utilisent pas le calcul formel. Nous allons voir ici une méthode d'intégration numérique possible dans le cas 2-D. Nous allons nous intéresser au problème suivant : déterminer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dx dy \quad (\text{A.9})$$

Méthode de Newton-Cotes.

Cette méthode utilise des points $P_{ij} = (x_i, y_j)$, répartis régulièrement sur le triangle de

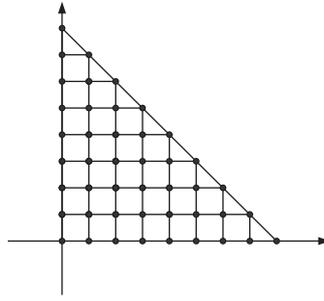


FIG. A.1 – Disposition des points P_{ij} .

référence \hat{K} , avec des poids w_i . Le problème est de déterminer la position et la valeur des poids pour avoir une intégration exacte dans certains cas et donc :

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dx dy = \sum_i w_i f(P_{ij}) \quad (\text{A.10})$$

Dans le cadre de ce mémoire, on a choisi de disposer nos point P_{ij} comme l'indique la figure qui suit et de déterminer les poids w_i pour que l'intégration soit exacte sur l'ensemble des polynômes P_n de degré n à deux variables.

A.3.2 Technique d'assemblage.

Regardons dans le cadre d'un exemple la technique d'assemblage des matrices précédemment calculées. Considérons comme dans l'exemple précédent une triangulation T_h dans lequel le cinquième triangle K_5 aurait pour arêtes, dans l'ordre de numérotation locale, 8, 12, 11. Sa matrice de rigidité s'écrit :

$$[A]_{K_5} = \begin{bmatrix} a_{11}^{K_5} & a_{12}^{K_5} & a_{13}^{K_5} \\ a_{21}^{K_5} & a_{22}^{K_5} & a_{23}^{K_5} \\ a_{31}^{K_5} & a_{32}^{K_5} & a_{33}^{K_5} \end{bmatrix}$$

Sa contribution, dans la matrice globale de la formulation variationnelle discrète, est

Par conséquent, puisque les arêtes du triangle K_5 sont 8, 12, 11, l'élément $b_1^{K_5}$ s'insère à la huitième composante du vecteur $[Pas_{|K_5}]^t \cdot [A_{|K_5}]$, $b_2^{K_5}$ à la douzième composante et enfin $b_3^{K_5}$ à la onzième.

A.4 Mise en place du système linéaire issu de la discrétisation

Notre système linéaire s'écrit donc :

$$A \cdot [u_h] = b \quad (\text{A.11})$$

où A et b sont définis par

$$A = \sum_{K \in T_h} [Pas_{|K}]^t \cdot [A_{|K}] \cdot [Pas_{|K}] \quad (\text{A.12})$$

$$b = \sum_{K \in T_h} [Pas_{|K}]^t \cdot [b_{|K}] \quad (\text{A.13})$$

Dans le cadre de notre problème, nous avons considéré des conditions limites de Dirichlet homogènes. De ce fait, deux solutions sont possibles :

- la première idée consiste à prendre $[u_h] := [u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^{N_h}]$ où $u_h^j = 0$ pour tout arête $j \in \partial\Omega$.
- la seconde idée est de considérer le vecteur $[u_h] := [u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^{N_h}]$ et de modifier en conséquence la matrice A et le second membre b comme suit :
 1. mettre un 1 sur les terme diagonaux de toute ligne correspondant à une arête situé sur le bord $\partial\Omega$ et des 0 ailleurs
 2. mettre sur ces mêmes lignes des 0 dans le second membre afin que u_h^j soit nul pour toute arête j de $\partial\Omega$.
 3. remplacer les termes $(a_{ij})_{i \neq j}$, telle que l'arête i ou l'arête j soit incluse dans le bord, par 0 pour conserver le caractère symétrique de départ.

Dans le cadre de notre étude, nous avons décidé de privilégier la seconde option, elle sera déterminante par la suite, puisque à fortiori on doit résoudre un système linéaire. A ce propos, la première proposition ferait défaut car dans notre méthode de résolution de système linéaire, il faudrait gérer u_h^j nuls provenant des arêtes de bord.

A.5 Stockage de la matrice

Comme nous l'indique le profil matriciel ci-dessous, la matrice A assemblée précédemment possède beaucoup d'éléments nuls. A cet égard, le tableau est tout à fait évocateur du nombre important d'éléments nuls.

n	éléments de la matrice	non nuls	nuls
1	25	5	20
2	256	32	224
3	1089	81	1008
p	$p^2(3p + 2)^2$	$11p^2 - 6p$	$p(9p^3 + 12p^2 - 12p + 6)$

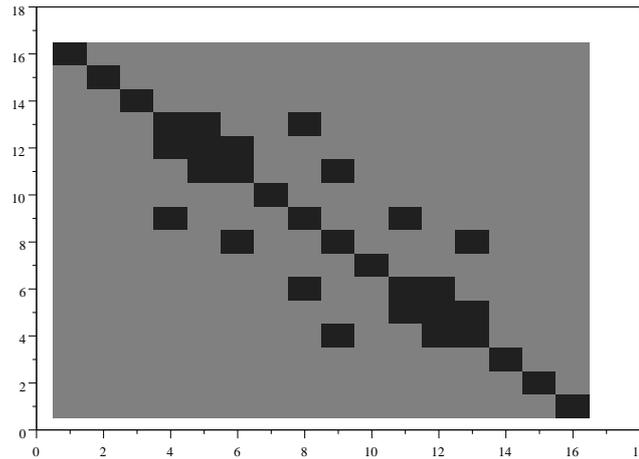


FIG. A.2 – Profil matriciel dans le cas $n = 2$.

A.5.1 Stockage structuré.

Comme nous venons de le voir, la matrice issue de la discrétisation par éléments finis de l'équation de Laplace est creuse. Dès lors on ne peut envisager de la stocker sous la forme d'un tableau bidimensionnel pour deux raisons essentielles :

- sa représentation machine serait trop cher en espace mémoire.
- un temps de calcul beaucoup trop long lors de manipulations vectorielles ou matricielles.

Notre matrice étant symétrique, on va utiliser une technique de stockage *profil*. L'idée est de stocker la matrice A dans un vecteur $sparse(A)$ comme suit :

1. on se place sur une ligne donnée i de la matrice.
2. Soit $\alpha_i = \min_j \{A_{i,j} \neq 0\}$, alors on garde en mémoire dans $sparse(A)$ tout les éléments nuls et non nuls compris entre A_{i,α_i} et $A_{i,i}$.
3. On fait correspondre le vecteur $sparse(A)$ à la matrice A via un pointeur adr , qui pour une ligne i donnée, renvoie l'adresse dans $sparse(A)$ du coefficient $A_{i,i}$.

Reste à déterminer l'adresse δ_i dans $sparse(A)$ de n'importe quel coefficient de la matrice A . Cette adresse est entièrement déterminée par la formule suivante :

$$\delta_i = adr(i) - i + j, \quad \text{pour } \alpha_i \leq j \leq i \quad (\text{A.14})$$

1																			
	2																		
		3																	
			4																
			5	6															
				7	8														
						9													
			10	11	12	13	14												
					15	16	17	18											
									19										
								20	21	22	23								
											24	25							
									26	27	28	29	30						
																	31		
																		32	
																			33

TAB. A.1 – Profil matriciel de $sparse(A)$.

D'autre part, si l'on désire déterminer le nombre d'éléments $nb(i)$ pris en compte sur une ligne i , on calcule alors :

$$nb(i) = adr(i) - adr(i - 1) \tag{A.15}$$

Enfin, l'entier α_i , pour une ligne i donnée se détermine facilement, on a en l'occurrence :

$$\alpha_i = i - nb(i) + 1 \tag{A.16}$$

Exemple.

Le pointeur adr correspondant au profil matriciel du tableau (A.1) est de taille $n(3n+2) = 16$ et s'écrit :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	...	16
adr(i)	1	2	3	4	6	8	9	14	...	33

Si l'on désire à présent déterminer l'adresse δ_i de l'élément $A(8, 4)$, on a :

$$\delta_i = adr(8) - 8 + 4 = 14 - 8 + 4 = 10$$

Autrement dit, l'élément $A(8, 4)$ est le dixième élément du tableau $sparse(A)$. Donc

$$A(8, 4) = sparse(A)[10] = -2$$

Le nombre d'éléments pris en compte sur la ligne 8 est

$$nb(8) = adr(8) - adr(7) = 14 - 9 = 5$$

et la plus petite des colonnes prises en compte sur la ligne 8 est

$$\alpha_8 = 8 - nb(8) + 1 = 4$$

1															
	1														
		1													
			8	-2			-2								
			-2	4	-2										
				-2	8			-2							
						1									
			-2				4			-2					
					-2			4				-2			
									1						
							-2			8	-2				
										-2	4	-2			
								-2			-2	8			
													1		
														1	
															1

TAB. A.2 – Matrice A dans le cas $n = 2$.

Conclusion.

L'opération la plus importante de cette technique de stockage est la détermination explicite du pointeur *adr*. Ce dernier nous permet d'établir une correspondance immédiate entre A et $sparse(A)$.

A.6 Résolution du système linéaire.

Une fois que la matrice est stockée, il faut résoudre le système linéaire

$$A \cdot [u_h] = b \tag{A.17}$$

On privilégiera ici des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires telles que le gradient conjugué et le gradient conjugué préconditionné.

Annexe B

Mise en œuvre algorithmique du problème de Stokes 2D.

Le but de cette annexe est de décrire de manière pédagogique la résolution numérique du problème de Stokes.

B.1 Algorithme d'Uzawa.

Considérons une vitesse u et une pression p , toutes deux régies par le système de Stokes. L'algorithme permet de définir deux suites u_n et p_n qui convergent respectivement vers u et p .

Théorème B.1.1 (Algorithme d'Uzawa). *Considérons une pression p^0 arbitraire, avec p^0 dans $L^2(\Omega)$ et un réel ρ vérifiant $0 < \rho < 2\nu$.*

Lorsque p^n est déterminé, on définit $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ et $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}^$), par :*

$$\nu((u^{n+1}, v)) - (p^n, \mathbf{div} v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.1})$$

$$(p^{n+1} - p^n, q) + \rho(\mathbf{div} u^{n+1}, q) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (\text{B.2})$$

L'existence et l'unicité de la solution u^{n+1} de l'équation (B.1) dans l'algorithme d'Uzawa repose sur le théorème de projection puisque u^{n+1} n'est rien d'autre que la solution du problème de Dirichlet :

$$u^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.3})$$

$$-\nu\Delta u^{n+1} = \mathbf{grad} p^n + f \in H^{-1}(\Omega) \quad (\text{B.4})$$

Ainsi lorsque u^{n+1} est déterminé, l'équation (B.2) permet de connaître explicitement p^{n+1} puisque :

$$p^{n+1} = p^n - \rho \mathbf{div} u^{n+1} \in L^2(\Omega) \quad (\text{B.5})$$

Reste à prouver maintenant la convergence de l'algorithme.

Théorème B.1.2 (Convergence de l'algorithme d'Uzawa). *Si le paramètre réel ρ vérifie $0 < \rho < 2\nu$, alors lorsque n tend vers l'infini, la suite $(u^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $u \in H_0^1(\Omega)$ et $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers p dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$*

Preuve.

Puisque u et p sont régies par le système de Stokes, on a :

$$\nu((u, v)) - (p, \mathbf{div} v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.6})$$

Fixons à présent $v = u^{n+1} - u$ dans (B.1) et dans l'équation précédente. On obtient, via une différence des deux équations l'expression suivante :

$$\nu \|u^{n+1} - u\|^2 = (p^n - p, \mathbf{div} u^{n+1})$$

il vient alors que

$$\nu \|v^{n+1}\|^2 = (q^n, \mathbf{div} v^{n+1}) \quad (\text{B.7})$$

avec

$$v^{n+1} = u^{n+1} - u \quad (\text{B.8})$$

$$q^n = p^n - p \quad (\text{B.9})$$

Prenons maintenant $q = p^{n+1} - p$ dans l'équation (B.2), on a alors :

$$(q^{n+1} - q, q^{n+1}) + \rho(\mathbf{div} v^{n+1}, q^{n+1}) = 0$$

c'est à dire

$$|q^{n+1}|^2 - |q^n|^2 + |q^{n+1} - q^n|^2 = -2\rho(\mathbf{div} v^{n+1}, q^{n+1}). \quad (\text{B.10})$$

Multiplions l'équation (B.7) par 2ρ et additionnons là avec l'équation obtenu précédemment, on obtient

$$|q^{n+1}|^2 - |q^n|^2 + |q^{n+1} - q^n|^2 + 2\rho\nu \|v^{n+1}\|^2 = -2\rho(\mathbf{div} v^{n+1}, q^{n+1} - q^n) \quad (\text{B.11})$$

Or :

$$\begin{aligned} -2\rho(\mathbf{div} v^{n+1}, q^{n+1} - q^n) &\leq -2\rho |\mathbf{div} v^{n+1}| |q^{n+1} - q^n| \\ &\leq 2\rho \|v^{n+1}\| |q^{n+1} - q^n| \end{aligned}$$

L'expression précédente est majorée par la quantité

$$\varepsilon |q^{n+1} - q^n|^2 + \frac{\rho^2}{\varepsilon} \|v^{n+1}\|^2$$

où $0 < \varepsilon < 1$.

Par suite

$$|q^{n+1}|^2 - |q^n|^2 + (1 - \varepsilon) |q^{n+1} - q^n|^2 + \rho(2\nu - \frac{\rho}{\varepsilon}) \|v^{n+1}\|^2 \leq 0 \quad (\text{B.12})$$

En sommant l'inégalité précédente pour $0 \leq n \leq N$, on trouve

$$|q^{N+1}|^2 + (1 - \varepsilon) \sum_{n=0}^N |q^{n+1} - q^n|^2 + \rho(2\nu - \frac{\rho}{\varepsilon}) \sum_{n=0}^N \|v^{n+1}\|^2 \leq |q^0|^2 \quad (\text{B.13})$$

Mais par hypothèse $0 \leq \rho \leq 2\nu$, on peut alors choisir un certain ε tel que

$$0 < \frac{\rho}{2\nu} < \varepsilon < 1$$

et en définitive

$$2\nu - \frac{\rho}{\varepsilon} > 0.$$

Un tel ε étant fixé, l'inéquation (B.13) permet d'obtenir la convergence, lorsque n tend vers l'infini des séries de terme général $(|q^{n+1} - q^n|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\|v^{n+1}\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$, par suite :

$$|q^{n+1} - q^n|^2 = |p^{n+1} - p^n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.14})$$

$$\|v^{n+1}\|^2 = |u^{n+1} - u^n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.15})$$

La convergence de u^n vers u est ainsi prouvée.

l'inéquation (B.13) montre que la suite p^n est borné dans $L^2(\Omega)$. Il s'ensuit que l'on peut extraire de p^n une sous suite p^{n_k} convergente dans $L^2(\Omega)$ vers un certain élément p^* . Par passage à la limite dans l'équation (B.1), on a

$$\nu((u, v)) - (p^*, \mathbf{div} v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.16})$$

de même que dans l'équation (B.2)

$$(p - p^*, \mathbf{div} v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\text{B.17})$$

c'est à dire que

$$\mathbf{grad}(p - p^*) = 0$$

d'où

$$p^* = p + \mathbf{constante} \quad (\text{B.18})$$

Bilan.

De toute suite p^n , on peut extraire une sous-suite p^{n_k} convergeant faiblement vers $p + \mathbf{constante}$ dans $L^2(\Omega)$. On peut conclure alors que la suite p^n converge vers p au sens de la topologie de $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

B.2 Résolution numérique du problème de Stokes

On est amené à présent à étudier la discrétisation du problème de Stokes par éléments finis non conformes. A ce propos, le problème va être considérablement simplifié puisque l'étude du problème de Laplace a déjà été mis en œuvre.

Considérons le problème de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \mathbf{grad} p & = f \\ \mathbf{div} u & = 0 \\ u|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

où $u = (u_1, u_2)$ désigne la vitesse, p la pression et $f = (f_1, f_2)$ le second membre. Dès lors le système précédent peut être découpé comme suit :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, & i = 1, 2 \\ \mathbf{div} u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et T_h une triangulation régulière du domaine Ω . On définit l'espace W_h comme suit :

$$W_h = \{u_h = (u_{h,1}, u_{h,2}) | \forall i \in \{1, 2\} : u_{h,i} \in X_h\} \quad (\text{B.21})$$

où l'ensemble X_h est défini par

$$X_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_1, \forall K \in T_h, \\ v \text{ est continu au milieu des arêtes}\} \quad (\text{B.22})$$

Il nous convient à présent de définir notre espace d'approximation non conforme V_h afin de mettre en place une discrétisation de l'algorithme d'Uzawa. Cet espace contient les éléments de W_h à divergence nulle. Il s'écrit :

$$V_h = \{u_h = (u_{h,1}, u_{h,2}) \in W_h | \mathbf{div} u_h = 0 \text{ dans } K, \forall K \in T_h\} \quad (\text{B.23})$$

Il reste enfin à définir un espace d'approximation adéquate pour la pression. Pour fixer les idées, on décide de prendre l'espace suivant :

$$P_h = \{p_h : \forall K \in T_h, p_h|_K \in P_0\} \quad (\text{B.24})$$

autrement dit la pression p_h est constante pour chaque maille K de notre triangulation T_h . Dès lors, toute pression $p_h \in P_h$ s'écrit de la manière suivante :

$$p_h = \sum_{K \in T_h} \eta_K \omega_K \quad (\text{B.25})$$

où ω_K désigne l'indicatrice du triangle K et $\eta_K = p_h(K)$.

B.3 Algorithme d'Uzawa sous forme discrète.

On débute l'algorithme avec une pression arbitraire $p_h^0 \in P_h$. Lorsque p_h^n est déterminé, on définit $u_h^{n+1} \in W_h$ et p_h^{n+1} par :

$$\begin{cases} \nu((u_h^{n+1}, v_h)) - (p_h^n, \mathbf{div} v_h) = (f, v_h), & \forall v_h \in W_h \\ p_h^{n+1} = p_h^n - \rho \mathbf{div} u_h^{n+1} \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Soit $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de l'espace W_h , alors :

$$u_h^n = \sum_{i=1}^{N_h} \begin{pmatrix} u_{h,1}^{n,i} \\ u_{h,2}^{n,i} \end{pmatrix} \omega_i \quad (\text{B.27})$$

où pour toute arête S_j de notre triangulation $\omega_i(S_j) = \delta_{ij}$.
Par ailleurs la pression p_h^n s'écrit

$$p_h^n = \sum_{K \in T_h} \eta_K^n \omega_K \quad (\text{B.28})$$

Ainsi en découplant le système (B.26), il vient $\forall v_h = (v_{h,1}, v_{h,2}) \in W_h$

$$\begin{cases} \nu((u_{h,1}^{n+1}, v_{h,1})) - (p_h^n, \frac{\partial v_{h,1}}{\partial x_1}) = (f_1, v_{h,1}) \\ \nu((u_{h,2}^{n+1}, v_{h,2})) - (p_h^n, \frac{\partial v_{h,2}}{\partial x_2}) = (f_2, v_{h,2}) \\ p_h^{n+1}(K) = p_h^n(K) - \rho(\mathbf{div} u_h^{n+1})(K), \quad \forall K \in T_h \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

On constate alors que pour une étape n , l'algorithme d'Uzawa consiste à :

- résoudre deux équations du type Laplace, modulo une modification du second membre, pour déterminer u_h^{n+1}
- réactualiser la pression p_h^n à l'aide de u_h^{n+1} .

B.4 Implémentation de l'algorithme d'Uzawa.

Maintenant que le problème a bien été posé, l'objectif va être d'implémenter l'algorithme d'Uzawa. Du point de vue programmation, il va falloir exprimer de manière explicite les termes $(p_h^n, \frac{\partial v_{h,i}}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq 2}$ et $\mathbf{div} u_h^{n+1}$. Une fois cette étape validée, on pourra utiliser tout le travail accompli lors de l'équation de Laplace, puisque la matrice qui va intervenir ici est identique à celle déjà étudiée. Dans un premier temps, nous allons devoir évaluer la contribution du terme $(p_h^n, \frac{\partial v_{h,i}}{\partial x_i})_{1 \leq i \leq 2}$.

Nous avons vu lors du chapitre précédent que :

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} P|_K] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial p_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial p_3}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial p_1}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial p_2}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial p_3}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \end{bmatrix} \\ &= M_K^{-t} \cdot [\vec{\nabla} \hat{P}|_{\hat{K}}] \end{aligned}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad [\vec{\nabla} P|_K]_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}(x, y) & \frac{\partial p_2}{\partial x_i}(x, y) & \frac{\partial p_3}{\partial x_i}(x, y) \end{bmatrix}$$

avec $(x_1, x_2) = (x, y)$.

$$\begin{aligned}
 [c_{|K}^n]_i &= \int_K [\vec{\nabla} P_{|K}]_i^t \cdot p_h^n dx_1 dx_2 \\
 &= \int_K [\vec{\nabla} P_{1_K}, \vec{\nabla} P_{2_K}, \vec{\nabla} P_{3_K}]_i^t \cdot \eta_K^n dx_1 dx_2 \\
 &= |\det M_K| \eta_K^n \int_{\hat{K}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix} d\hat{x} d\hat{y} \\
 &= h^2 \eta_K^n \int_{\hat{K}} \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \\ 2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \\ -2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} \end{bmatrix} d\hat{x} d\hat{y} \\
 &= \frac{h^2}{2} \eta_K^n \begin{bmatrix} -2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \\ 2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \\ -2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_i} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dès lors on procède aux techniques d'assemblage étudiés précédemment, on obtient ainsi :

$$[C^n]_1 = \sum_{K \in T_h} [Pas_{|K}]^t \cdot [c_{|K}^n]_1 \quad (\text{B.30})$$

$$[C^n]_2 = \sum_{K \in T_h} [Pas_{|K}]^t \cdot [c_{|K}^n]_2 \quad (\text{B.31})$$

Exprimons à présent la divergence de u_h^{n+1} . On a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{div} u_h^{n+1}(K) &= \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{div} u_{h|K}^{n+1} dx dy \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} u_{h|K}^{n+1} \cdot \vec{n} ds \\
 &= \frac{1}{|K|} \sum_{e \subset \partial K} \int_e u_{h|K}^{n+1} \cdot \vec{n}_e ds \\
 &= \frac{1}{|K|} \sum_{e \subset \partial K} \int_e (u_h^{n+1,1} n_{e_1} + u_h^{n+1,2} n_{e_2}) ds \\
 &= \frac{1}{|K|} \sum_{e \subset \partial K} |e| (u_h^{n+1,1}(m_e) n_{e_1} + u_h^{n+1,2}(m_e) n_{e_2})
 \end{aligned}$$

où e désigne une arête du triangle K , \vec{n}_e la normale sortante au côté e et m_e le milieu de l'arête e . Cette quantité est alors facile à déterminer puisque m_e coïncide avec les noeuds des éléments finis que nous avons considérés, par suite $u_h^{n+1,i}(m_e)$ n'est rien d'autre qu'une des composantes du vecteur solution déterminé à la première étape de l'algorithme d'Uzawa.

On se doit maintenant à chaque étape de l'algorithme d'Uzawa de résoudre les systèmes linéaires suivant :

$$\nu AU_1^{n+1} = F_1 + [C^n]_1 \quad (\text{B.32})$$

$$\nu AU_2^{n+1} = F_2 + [C^n]_2 \quad (\text{B.33})$$

et de réactualiser la pression de la manière suivante :

$$p_h^{n+1}(K) = p_h^n(K) - \rho(\mathbf{div} u_h^{n+1})(K), \quad \forall K \in T_h \quad (\text{B.34})$$

Avec $\forall i \in \{1, 2\} : U_i^{n+1} := [u_{h,i}^{n+1,1}, \dots, u_{h,i}^{n+1,N_h}]$

B.5 Application numérique.

Considérons l'application

$$\phi(x, y) = x^2 y^2 (x - 1)^2 (y - 1)^2$$

définie sur le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ Son rotationnel est défini par :

$$\mathbf{curl} \phi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(x-1)^2 x^2 (y-1)y(2y-1) \\ 2(y-1)^2 y^2 (x-1)x(2x-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

Posons alors $u = (u_1, u_2)$. Alors u vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{div} u = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{B.37})$$

Fixons $\nu = 1$ et prenons pour pression

$$p(x, y) = x - \frac{1}{2}$$

Cette application est de moyenne nulle sur Ω , de plus :

$$\mathbf{grad} p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dès lors le second membre $f = (f_1, f_2)$ de l'équation vitesse pression est donné par :

$$\begin{aligned} f_1 &= 4(2y-1)(-y+y^2+6xy-6xy^2+3x^2-6x^2y+6x^2y^2-6x^3+3x^4)+1 \\ f_2 &= -4(2x-1)(-x+x^2+6xy-6yx^2+3y^2-6y^2x+6y^2x^2-6y^3+3y^4) \end{aligned}$$

Étant donné la seule donnée de f , on doit dans un premier temps trouver une approximation de la vitesse u et de la pression p , et dans un second temps déterminer l'erreur en norme L^2 .

Nous avons représenté graphiquement l'approximation de chaque composante de u dans les figures (B.6) et (B.7) pour une triangulation $T_{1/40}$. Les résultats sont cohérents, puisque l'on retrouve l'allure des composantes de l'application exacte u .

Comme, on peut le voir à l'aide des tableaux (B.1) et (B.2), la vitesse de convergence est beaucoup plus rapide dans le cas de la vitesse. L'ordre de convergence en norme L^2 est de 2 (comme dans le cadre de l'étude de l'équation de Laplace) pour la vitesse et d'ordre 1 pour la pression.

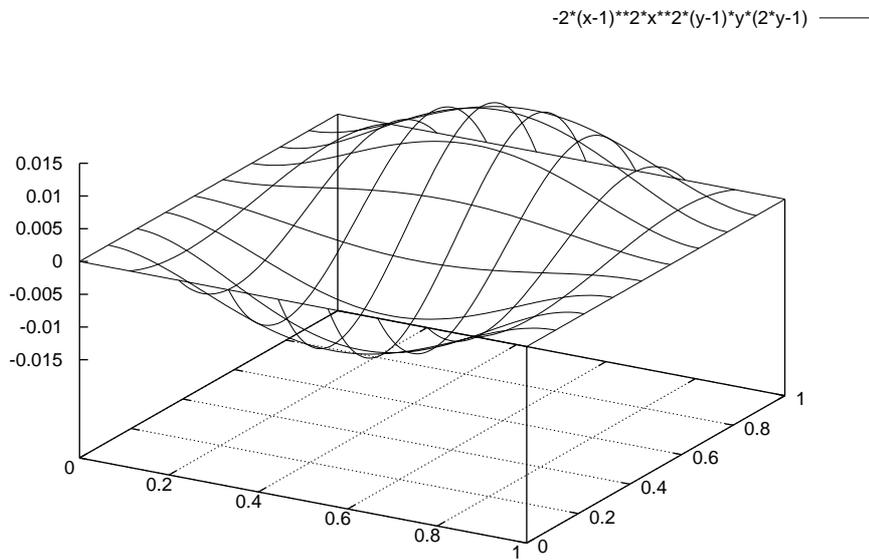


FIG. B.1 – Composante u_1 de la solution exacte u .

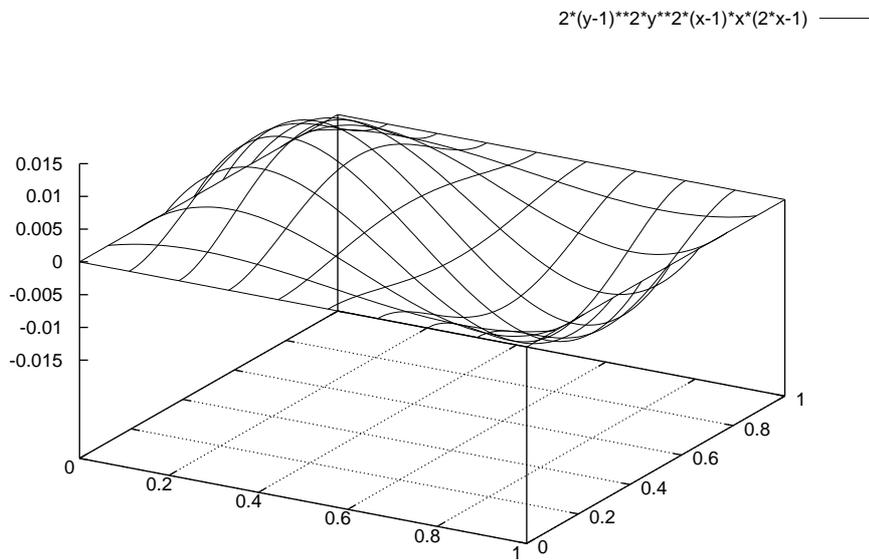


FIG. B.2 – Composante u_2 de la solution exacte u .

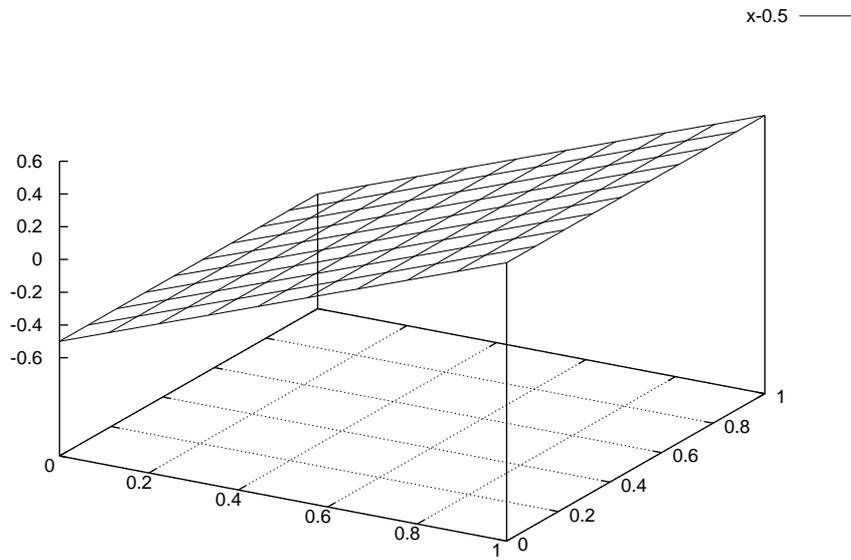


FIG. B.3 – Représentation graphique de la pression sur le domaine Ω .

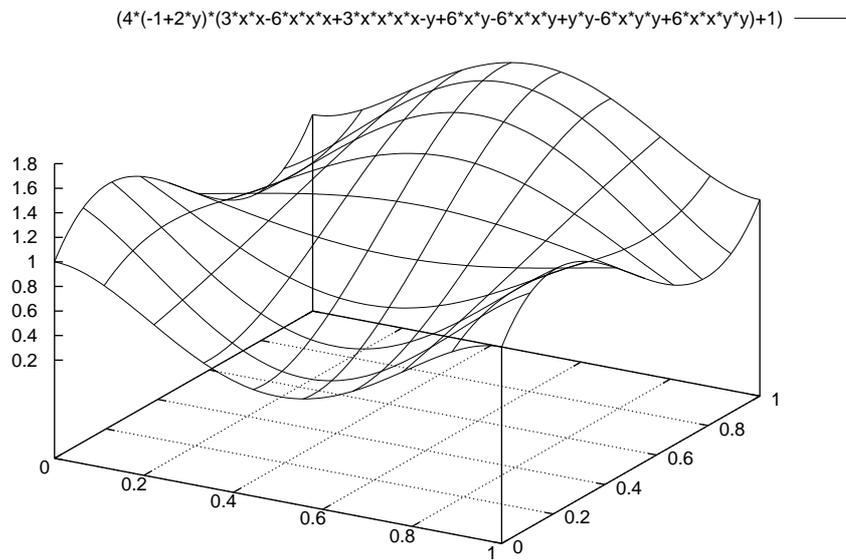


FIG. B.4 – Représentation graphique de la première composante f_1 .

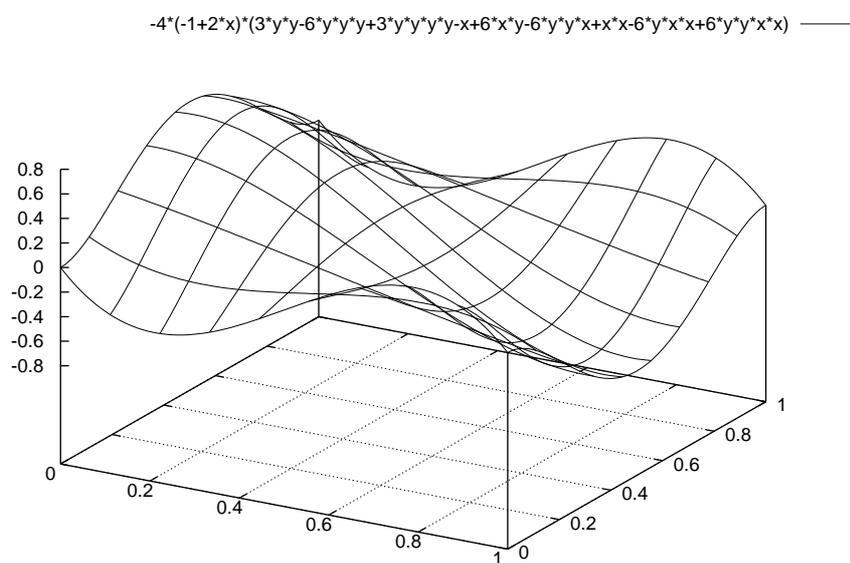


FIG. B.5 – Représentation graphique de la seconde composante f_2 .

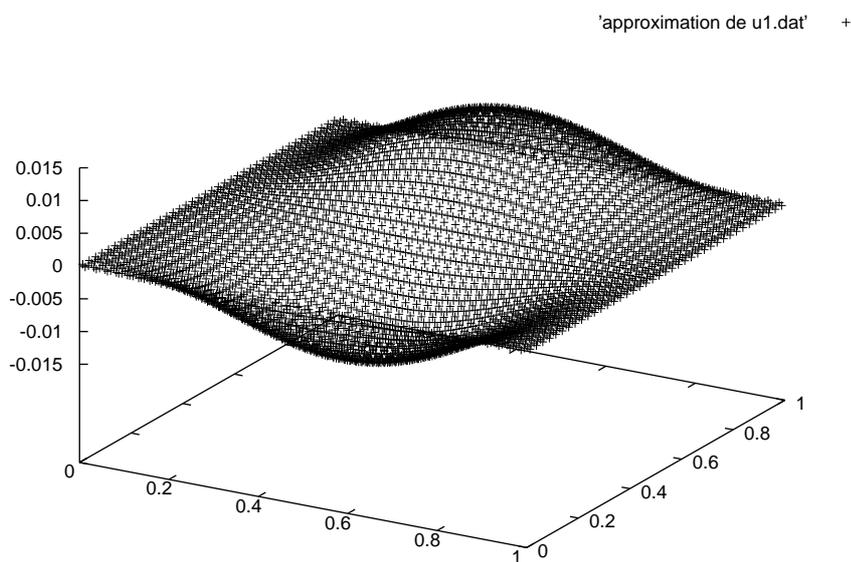


FIG. B.6 – Approximation de u_1 pour une triangulation $T_{1/40}$.

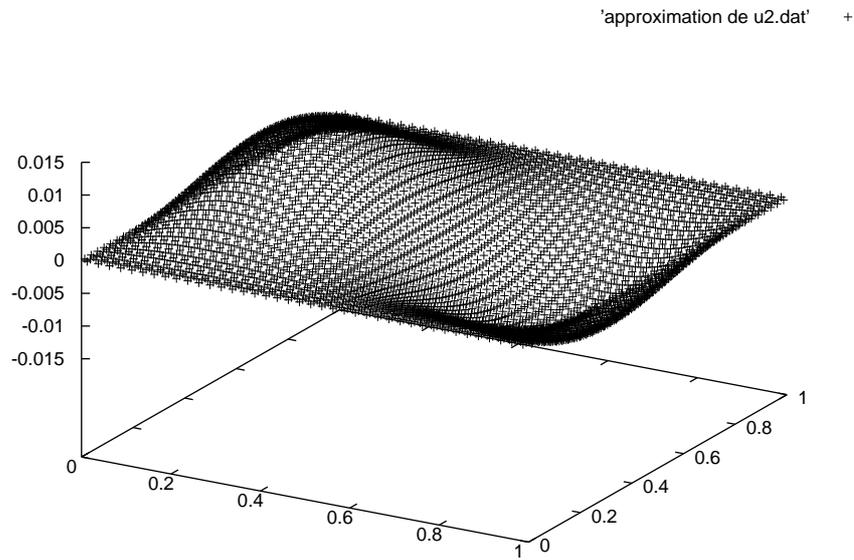


FIG. B.7 – Approximation de u_2 pour une triangulation $T_{1/40}$.

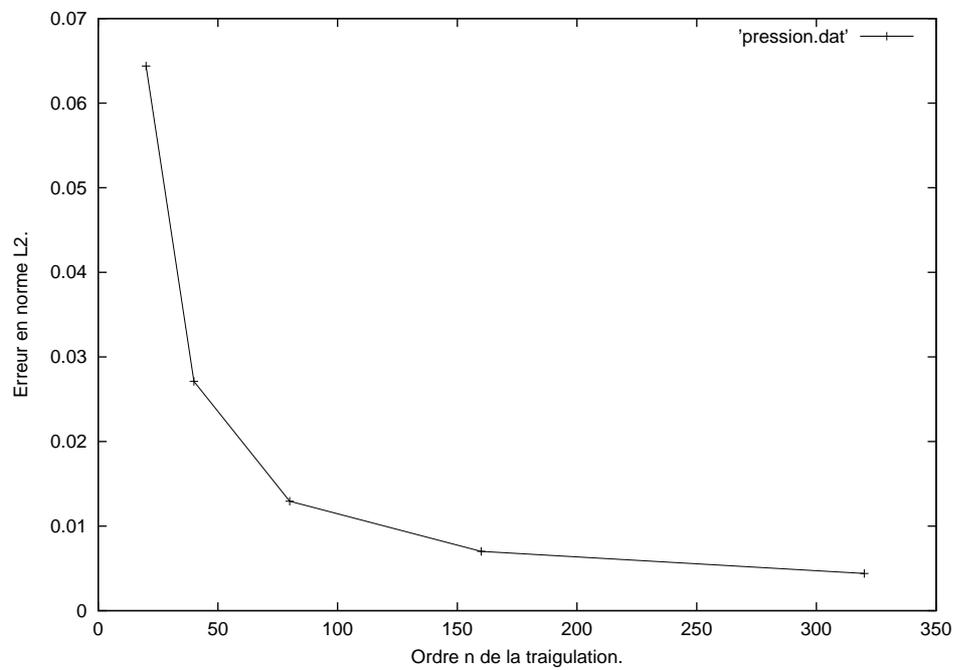


FIG. B.8 – Approximation de p en norme L^2 .

n	$\ u - u_n\ _{0,\Omega}$
20	9.72584e-05
40	2.37472e-05
80	5.98792e-06
160	1.28164e-06
320	2.44395e-07

TAB. B.1 – Estimation de l'erreur $\|u - u_n\|_{0,\Omega}$.

n	$\ p - p_n\ _{0,\Omega}$
20	6.43912e-02
40	2.71125e-02
80	1.29351e-02
160	7.01542e-03
320	4.39570e-03

TAB. B.2 – Estimation de l'erreur $\|p - p^n\|_{0,\Omega}$.

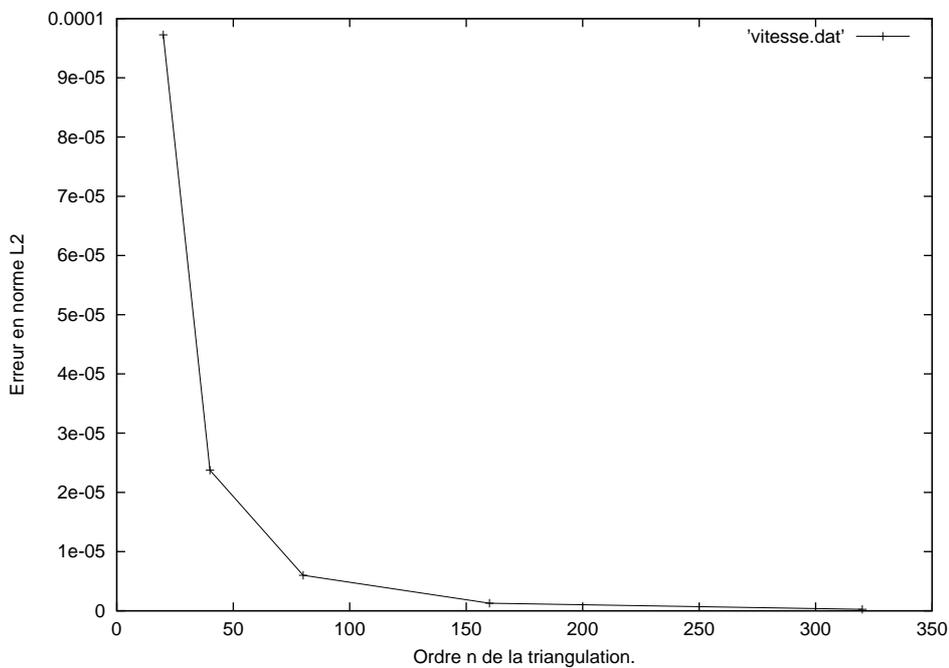


FIG. B.9 – Approximation de u en norme L^2 .

Bibliographie

- [AB85] D. N. Arnold and F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods implementation, postprocessing and error estimates. *RAIRO Anal. Numér.*, 19 :7–32, 1985.
- [AD99] G. Acosta and R. Duràn. The maximum angle condition for mixed and non-conforming elements, application to the Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37 :18–36, 1999.
- [Ada75] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [AN04] T. Apel and S. Nicaise. The inf-sup condition for some low order elements on anisotropic meshes. *Calcolo*, 41 :89–113, 2004.
- [ANS01a] T. Apel, S. Nicaise, and J. Schöberl. Crouzeix-Raviart type finite elements on anisotropic meshes. *Numerische Mathematik*, 89(2) :193–223, aug 2001.
- [ANS01b] T. Apel, S. Nicaise, and J. Schöberl. A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21(4) :843–856, 2001.
- [AO00] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley-Interscience Publication, 2000.
- [Ape99] T. Apel. Anisotropic finite elements : Local estimates and applications. *Adv. Numer. Math.*, 1999.
- [Bar91] J. Baranger. *Analyse numérique*. Hermann, 1991.
- [BBC⁺94] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. Van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [BBM05a] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equations. *Mathematics of Computation*, 2005.
- [BBM05b] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. *Mathematics of Computation*, 74 :1117–1138, 2005.
- [BCT82] P. Brenner, M. Crouzeix, and V. Thomée. Single step methods for inhomogeneous linear differential equations in Banach space. *RAIRO Anal. Numér.*, 16 :5–26, 1982.

- [BDR92] I. Babuska, R. Duràn, and R. Rodriguez. Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29 :947–964, 1992.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, 1991.
- [BG98] C. Bernardi and V. Girault. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(5) :1893–1916, 1998.
- [BM00] C. Bernardi and B. Métivet. Indicateurs d’erreur pour l’équation de la chaleur. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9(4) :423–438, 2000.
- [BN97] H. E. Bouzid and S. Nicaise. Nonconforming finite element methods and singularities in polygonal domains. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 7 :935–962, 1997.
- [BR78a] I. Babuska and W.C. Rheinboldt. Error estimates for adaptative finite element computations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(4) :736–754, 1978.
- [BR78b] I. Babuska and W.C. Rheinboldt. A posteriori error estimates for the finite element method. *International J. Numer. Methods Engineering*, 12 :1597–1615, 1978.
- [BR81] C. Bernardi and G. Raugel. Méthodes d’éléments finis mixtes pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes dans un polygône non convexe. *Calcolo*, 4 :255–291, 1981.
- [BR85] C. Bernardi and G. Raugel. Analysis of some finite elements for the Stokes problem. *Mathematics of Computation*, 44 :71–79, 1985.
- [Bra97] D. Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, 1997.
- [Bre80] C. Brezinski. *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*. Birkhauser, 1980.
- [Bré83] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1983.
- [BS94] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Elements Methods*. Springer, 1994.
- [BS05] C. Bernardi and E. Süli. Time and space adaptivity for the second-order wave equation. *M3AS : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(2) :199–225, 2005.
- [BV00] C. Bernardi and R. Verfürth. Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients. *Numerische Mathematik*, 85(4) :579–608, 2000.
- [BV04] C. Bernardi and R. Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 38 :437–455, 2004.
- [BW85] R. E. Bank and A. Weiser. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. *Mathematics of Computation*, 44 :283–301, 1985.

-
- [Car97] C. Carstensen. A posteriori error estimate for the mixed finite element method. *Mathematics of Computation*, 66(218) :465–476, 1997.
- [CDN99] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 33(3) :627–649, 1999.
- [CF04] Z. Chen and J. Feng. An adaptive finite element algorithm with reliable and efficient error control for linear parabolic problems. *Mathematics of Computation*, 73 :1167–1193, 2004.
- [Cho84] G. Choquet. *Cours de topologie*. Masson, 1984.
- [Cia78] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1978.
- [CKN04] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the Stokes problem : Anisotropic and isotropic discretizations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14 :1297–1341, 2004.
- [Clé75] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numér.*, 9 :77–84, 1975.
- [CN03] E. Creusé and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the heterogeneous Maxwell equations on isotropic and anisotropic meshes. *Calcolo*, 40 :249–271, 2003.
- [CR73] M. Crouzeix and P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 7(3) :33–76, 1973.
- [Dau89] M. Dauge. Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. I. Linearized equations. *j-SIAM-J-MATH-ANA*, 20(1) :74–97, 1989.
- [DDPV95] E. A. Dari, R. Durán, C. Padra, and V. Vampa. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 64(211) :1017–1033, 1995.
- [DDPV96] E. A. Dari, R. Durán, C. Padra, and V. Vampa. A posteriori error estimators for nonconforming finite element methods. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 30(4) :385–400, 1996.
- [Dem97] J. W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.
- [Epp01] J. F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. John Wiley & Sons, 2001.
- [ET96] D. E. Edmunds and H. Triebel. *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators*, volume 120 of *Cambridge tracts in mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [FDFH92] J.D. Foley, A. Van Dam, S.K. Feiner, and J.F. Hughes. *Computer Graphics : Principles and Practice*. Addison-Wesley, 1992.
- [FNP00] M. Farhloul, S. Nicaise, and L. Paquet. A mixed formulation of Boussinesq equations : Analysis of nonsingular solutions. *Mathematics of Computation*, 69(231) :965–986, 2000.

- [FNP01] M. Farhloul, S. Nicaise, and L. Paquet. Some mixed finite element methods on anisotropic meshes. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 35(5) :907–920, 2001.
- [GB97] P. L. George and H. Borouchaki. *Triangulation de Delaunay et maillage application aux éléments finis*. Hermes, 1997.
- [Geo91] P. L. George. *Génération automatique de maillages. Applications aux méthodes d'éléments finis*. Masson, 1991.
- [GL89] G. Golub and C. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [GR86] V. Girault and P. Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations*. Springer, 1986.
- [GT83] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [Hes80] M. R. Hestenes. *Conjugate Direction Methods in Optimization*. Springer, Berlin, Germany, 1980.
- [JNT90] C. Johnson, Y.-Y. Nie, and V. Thomée. An a posteriori error estimate and adaptive timestep control for a backward euler discretization of a parabolic problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 27 :277–291, 1990.
- [Joh82] F. John. *Partial Differential Equations*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Kon67] V. A. Kondrat'ev. Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points. *Moscow Math. Soc.*, 16 :227–313, 1967.
- [KR88] B. W. Kernighan and D. M. Ritchie. *The C programming language*. Prentice Hall, 1988. Second edition.
- [Lad85] O. A. Ladyzhenskaya. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, volume 49 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1985.
- [Lip91] S. B. Lippman. *C++ primer*. Addison Wesley, 1991. Second edition.
- [LN94] J.M.-S. Lubuma and S. Nicaise. Dirichlet problems in polyhedral domains I : Regularity of the solutions. *Math. Nachr.*, 168 :243–261, 1994.
- [Loh96] R. Lohner. *Progress in grid generation via the advancing front technique*. Engineering with computers, 1996.
- [LT86] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée l'art de l'ingénieur*. Masson, 1986.
- [MP83] V. G. Maz'ya and B. A. Plamenevskii. The first boundary value problem for classical equations of mathematical physics in domains with piecewise smooth boundaries. *Zeitschr. Anal. Anw.*, 2 :333–359, 1983.
- [Nic93] S. Nicaise. *Polygonal interface problems*, volume 39 of *Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik*. Peter Lang Verlag, 1993.
- [NSa] S. Nicaise and N. Soualem. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the time-dependent Stokes problem – part I. *Journal of Numerical Analysis*.

-
- [NSb] S. Nicaise and N. Soualem. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the time-dependent Stokes problem – part II. *Journal of Numerical Analysis*.
- [NS05] S. Nicaise and N. Soualem. A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation. *M2AN*, 39(2) :319–348, 2005.
- [O’R98] J. O’Rourke. *Computational geometry in C*. Cambridge University Press, 1998.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [Pic98] M. Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167 :223–237, 1998.
- [Pic03] M. Picasso. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz-Zhu error estimator : application to elliptic and parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24 :1328–1355, 2003.
- [Pic05] M. Picasso. An adaptive algorithm for the Stokes problem using continuous, piecewise linear stabilized finite elements and meshes with high aspect ratio. *Applied Numerical Mathematics*, 54 :470–490, 2005.
- [QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer Verlag, 2000.
- [QV97] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 159. Springer-Verlag, New-York, 1997.
- [Riv84] M. C. Rivara. Mesh refinement processes based on the generalized bisection simplices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21 :604–613, 1984.
- [Riv90] T. Rivlin. *Chebyshev polynomials*. John Wiley & Sons, 1990.
- [SB02] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag, 2002.
- [SS86] Y. Saad and M. Schultz. GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 7 :846–869, 1986.
- [Str86] B. Stroustrup. *The C++ programming language*. Addison-Wesley, 1986.
- [SZ90] R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 54 :483–493, 1990.
- [Tem79] R. Temam. *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*. North-Holland, Amsterdam, 2 edition, 1979.
- [Ver89] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. I. *Numerische Mathematik*, 55 :309–325, 1989.
- [Ver91] R. Verfürth. A posteriori error estimators for the Stokes equations. II. non-conforming discretizations. *Numerische Mathematik*, 60 :235–249, 1991.

- [Ver94] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems. finite element discretizations of elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 62 :445–475, 1994.
- [Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*. Wiley, Teubner, 1996.
- [Ver98] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convection-diffusion equations. *Numerische Mathematik*, 80 :641–663, 1998.
- [Ver99] R. Verfürth. Error estimates for some quasi-interpolation operators. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis, M2AN*, 33 :695–713, 1999.
- [Ver03] R. Verfürth. A posteriori error estimates for finite element discretization of the heat equation. *Calcolo*, 40 :195–212, 2003.
- [YAC03] C. Bernardi Y. Achdou and F. Coquel. A priori and a posteriori error analysis of finite volume discretizations of Darcy equations. *Numerische Mathematik*, 96 :17–42, 2003.
- [Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1980.

Index

- Algorithme
 - adaptatif, 52, 86
 - Uzawa, 105
- Bibliographie, 111
- Crouzeix-Raviart, 10
- Discrétisation
 - Temps, 33, 61
- Elements fini
 - Conformes, 13
 - Non Conformes, 13, 27
- Equation de la chaleur, 26
- Equation de Laplace, 15
- Equation de Stokes, 60
- Erreur
 - Borne inférieure, 20, 40, 77
 - Borne supérieure, 19, 36, 71
- Estimateur
 - spatial, 47, 49, 82, 83
- Fonction
 - Bulle, 15
- Formule de Green, 14
- Helmholtz
 - Décomposition, 16, 31, 66
- Inégalité
 - inverses, 15
 - Young, 39, 76
- Indicateurs
 - optimalité, 4
- Intégration
 - Numérique, 98
- Interpolation
 - Clément, 13
 - Lagrange, 33, 70
- Méthode
 - advancing front, 6
 - de pavage, 6
- Maillage
 - adaptation, 4
 - de Delaunay, 6
 - Génération, 6
- Maillages
 - Non structurés, 49, 86
 - Uniformes, 46, 47, 82, 83
- Matrice
 - Assemblage, 98
 - Creuse, 102
- Newton-Cotes
 - Intégration, 98
- Notations, ix
- Orthogonalité
 - Galerkin, 17, 29, 63
- Raffinement
 - type h , 5
 - type hp , 5
 - type m , 6
 - type r , 6
- Schéma
 - Euler, 26, 61
- Sobolev
 - Espace, 68
 - Espace à poids, 68
- Test Numériques, 22, 45, 81
- Uzawa
 - Algorithme, 105