



HAL
open science

Espaces L_p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde mesuré.

Patricia Perrin Boivin

► **To cite this version:**

Patricia Perrin Boivin. Espaces L_p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde mesuré.. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2007. Français. NNT : . tel-00158083

HAL Id: tel-00158083

<https://theses.hal.science/tel-00158083>

Submitted on 27 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

**THÈSE PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS**

Discipline : Mathématiques

par

PERRIN-BOIVIN Patricia

**Espaces L^p de l'algèbre de von Neumann
d'un groupoïde mesuré.**

Soutenue le : 23 mars 2007

MEMBRES DU JURY

Mme Claire ANANTHARAMAN	Président du jury, Professeur, Université d'Orléans.
M. Jean-Philippe ANKER	Professeur, Université d'Orléans.
M. Moulay-Tahar BENAMEUR	Professeur, Université de Metz.
M. Michel HILSUM	Rapporteur, Directeur de Recherche C.N.R.S.
M. Arlan RAMSAY	Rapporteur, Professeur, University of Colorado, Etats-Unis.
M. Jean RENAULT	Directeur de thèse, Professeur, Université d'Orléans.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Jean Renault, qui, après mon DEA, a bien voulu me proposer ce sujet et m'initier en particulier aux groupoïdes et aux algèbres de von Neumann. Les nombreuses lectures qu'il a pu me proposer, ainsi que les longues discussions que nous avons pu avoir le vendredi après-midi, ont permis l'aboutissement de ce travail.

Je tiens également à remercier Michel Hilsun et Arlan Ramsay d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie aussi Claire Anantharaman, Jean-Philippe Anker et Moulay-Tahar Benameur qui ont bien voulu faire partie de mon jury. Leur présence à tous est pour moi un grand honneur.

Bien que n'ayant pas, pour des raisons professionnelles, pris une grande part à la vie du MAPMO, j'ai eu beaucoup de plaisir à participer aux séminaires du vendredi après-midi et à cotoyer les membres du groupe Algèbres d'opérateurs d'Orléans. La rencontre du GDR aux Houches, à laquelle j'ai pu participer, restera pour moi un très bon souvenir.

C'est en tant qu'enseignante de lycée que je souhaite également témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont fait partager leur passion de l'enseignement et de la recherche depuis de nombreuses années, et m'ont par là même confirmée dans mon envie de transmettre ce goût à mes élèves.

Enfin, un grand merci à mes parents, à ma sœur ainsi qu'à Alexandre, qui m'ont toujours soutenue pendant ces nombreuses années.

Table des matières

Introduction	9
1 Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann	15
1.1 Notion d'algèbre hilbertienne	15
1.1.1 Algèbres hilbertiennes et représentation régulière	15
1.1.2 Algèbre hilbertienne généralisée	16
1.1.3 Opérateurs particuliers	17
1.1.4 Vecteurs bornés	18
1.1.5 Définition des poids canoniques	19
1.1.6 Représentation standard	19
1.1.7 Groupe d'automorphismes modulaires	20
1.1.8 Dérivée de Radon-Nikodym	22
1.2 Cas d'une algèbre de von Neumann munie d'une trace	23
1.2.1 Espaces L^p selon Dixmier	23
1.2.2 Espace L^p selon Nelson	25
1.3 Cas d'une algèbre de von Neumann munie d'un poids	27
1.3.1 Espaces L^p au sens d'Haagerup	27
1.3.2 Espaces L^p au sens de Connes et Hilsaum	32
1.3.3 Espaces L^p selon Kosaki	40
1.4 Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann commutative	41
1.4.1 Identification	42
1.4.2 Identification des $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ et des $L^p(X, \mu)$	43
2 Algèbre de von Neumann d'un groupoïde	49
2.1 Groupoïde	49
2.1.1 Notion de groupoïde	49
2.1.2 Groupoïde topologique	50
2.1.3 Groupoïde mesuré	51
2.1.4 Exemples fondamentaux de groupoïdes mesurés	51
2.1.5 Produit gauche	52
2.1.6 Mesure sur le produit gauche	52
2.2 Construction GNS et algèbre hilbertienne	54
2.2.1 Choix d'une représentation	54

2.2.2	Normes sur $C_c(G)$	55
2.2.3	Construction de l'algèbre de von Neumann	55
2.2.4	Opérateurs fondamentaux	59
2.2.5	Quelques propriétés utiles	60
2.2.6	Définition de poids canoniques	61
2.3	Opérateurs aléatoires	63
2.3.1	Représentations particulières de $C_c(G)$	64
2.3.2	Algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires	66
2.3.3	Opérateurs aléatoires non bornés	67
2.4	Algèbre de von Neumann du produit gauche	68
2.4.1	Algèbre d'opérateurs aléatoires	68
2.4.2	Sous algèbres particulières	69
2.5	Identification du produit croisé et du produit gauche	70
2.5.1	Définition des actions	70
2.5.2	Identification	72
3	Explicitation de la théorie spatiale	75
3.1	Ensemble des vecteurs bornés et théorie spatiale	75
3.2	Explicitation de la théorie générale	76
3.3	Opérateurs homogènes	77
3.4	Égalité d'opérateurs	85
4	Espace L^1 d'une algèbre de von Neumann de groupoïde	87
4.1	Identification du préduel	87
4.1.1	Formes linéaires positives normales et préduel	87
4.1.2	Formes linéaires ultrafaiblement continues	87
4.2	$L^1(\text{VN}(G))$ vu comme espace de fonctions sur G	88
4.2.1	Définition de nouveaux coefficients	88
4.2.2	Identification de L^1 avec un espace de coefficients	90
4.3	Application à des cas particuliers	92
4.3.1	Cas où G est un espace	92
4.3.2	Cas où G est un groupe	92
4.3.3	Cas où $G = X \times X$	92
4.4	Théorie spatiale pour $\text{VN}(G)$	93
4.4.1	Identification en utilisant la théorie spatiale	93
4.4.2	Calcul de l'intégrale d'un opérateur	98
4.5	Opérateurs aléatoires et produit croisé	102
4.5.1	Homogénéité	102
4.5.2	Lien avec la théorie d'Haagerup	103
4.6	Un résultat sur les formes positives	104
4.6.1	Fonctions de type positif sur un groupoïde	104
4.6.2	Lien avec les formes positives	105

5	Espace L^2 d'une algèbre de von Neumann de groupoïde	109
5.1	Identification de $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et $L^2(\mathcal{M}, \tau)$	109
5.2	Étude de $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$	110
6	Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann de groupoïde	119
6.1	Théorème de densité pour $L^p(\mathcal{M}, \tau)$	119
6.2	Inégalité de Hausdorff-Young	120
6.2.1	Étude des $L^{p,p'}(G)$	121
6.2.2	Théorème de densité	125
6.2.3	Inégalité de Hausdorff-Young	126
A	Rappels sur les opérateurs non bornés	133
A.1	Opérateurs non bornés	133
A.1.1	Définitions générales	133
A.1.2	Opérateurs fermés, fermables	134
A.1.3	Adjoint	134
A.1.4	Théorie spectrale	135
A.1.5	Formes quadratiques	137
A.1.6	Décomposition polaire des opérateurs fermés	138
A.1.7	Somme forte, produit fort	138
A.2	Opérateurs affiliés	138
B	Rappels sur les algèbres de von Neumann	141
B.1	Algèbres de von Neumann	141
B.1.1	Topologie ultrafaible	141
B.1.2	W^* -produit croisé	143
B.2	Algèbre de von Neumann décomposable	144
B.2.1	Champs de vecteurs de carré intégrable	145
B.2.2	Champs mesurables d'opérateurs	146
B.2.3	Champs mesurables d'algèbres de von Neumann	146
B.2.4	Champs mesurables de poids	147
B.3	Poids opératoriel	148
B.3.1	Partie positive étendue	149
B.3.2	Poids opératoriel	150

Introduction

L'idée de base de la théorie non-commutative de la mesure est de remplacer un espace mesuré par une algèbre de von Neumann. Plus précisément, on remplace l'algèbre de von Neumann commutative $L^\infty(X, \mu)$, où (X, μ) est un espace mesuré, par une algèbre de von Neumann \mathcal{M} arbitraire. La généralisation la plus facile de la notion de mesure est celle de trace. Cependant, il n'existe pas toujours de trace normale fidèle semi-finie sur une algèbre de von Neumann \mathcal{M} . Les objets fondamentaux de cette théorie non-commutative sont alors les poids normaux, les groupes modulaires, les dérivées de Radon-Nikodym et les espaces L^p non commutatifs. L'objet de notre travail est d'explicitier ces objets dans le cadre des algèbres de von Neumann des groupoïdes mesurés puis d'utiliser la théorie non commutative de l'intégration pour démontrer une inégalité de Hausdorff-Young pour un groupoïde mesuré.

L'exemple des groupoïdes, de par sa richesse, est un bon cadre pour expliciter les différentes théories car les calculs peuvent en général être faits explicitement. Comme il contient les cas classiques des espaces mesurés, on peut le confronter directement à la théorie de la mesure classique. D'autre part, certaines constructions fondamentales de la théorie des algèbres de von Neumann ne nous sortent pas du cadre des groupoïdes mesurés. C'est par exemple le cas de l'ampliation, qui consiste à remplacer \mathcal{M} par l'algèbre $\mathcal{M} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et du produit croisé par le groupe modulaire. La construction d'une algèbre de von Neumann à partir d'un groupoïde peut, nous le verrons, être réalisée de différentes manières et les différentes approches sont complémentaires.

Avant de présenter le plan et les résultats importants de ce travail, commençons par un bref historique des différentes notions étudiées.

Pendant longtemps, la théorie non-commutative de la mesure s'est limitée au cadre des algèbres de von Neumann semi-finies. L'absence de trace semblait poser alors des difficultés insurmontables.

C'est en 1967 que Tomita a introduit la notion d'algèbre hibernienne généralisée dans un article non publié. Cette notion a été reprise et développée dans un article de 1970 ([Ta70]) de M. Takesaki. Elle généralise la notion d'algèbre hilbertienne (voir par exemple [Di69]) qui permettait de construire des algèbres de von Neumann semi-finies.

Les algèbres de von Neumann obtenues grâce aux algèbres hilbertiennes généralisées n'étant en général pas semi-finies, la théorie de Tomita-Takesaki permet d'obtenir explicitement des algèbres de von Neumann de type III sur lesquelles on construit canoniquement un poids normal fidèle et semi-fini. La théorie de Tomita-Takesaki permet également

d'obtenir explicitement un groupe à un paramètre d'automorphismes modulaires, associé à l'opérateur modulaire Δ . L'introduction de cette théorie a donc permis d'étudier les facteurs de type III. Grâce à la théorie modulaire, on peut également introduire la dérivée de Radon-Nikodym d'un poids, analogue non commutatif de la dérivée de Radon-Nikodym introduite en théorie de la mesure. La théorie des algèbres de von Neumann constitue donc un analogue non commutatif de la théorie de la mesure et permet de définir la théorie de l'intégration et les espaces L^p non commutatifs.

L'un des premiers à avoir défini une théorie des espaces L^p dans le cas semi-fini est Segal dans un article de 1953 ([Se53]). Il propose une réalisation concrète des espaces L^p , leurs éléments étant des opérateurs non bornés «mesurables». Parallèlement, J. Dixmier ([Di53]) propose une définition abstraite, en utilisant une complétion. Mais c'est à Nelson, en 1974 ([Ne74]) que l'on doit l'introduction d'une nouvelle «topologie de la mesure» faisant intervenir le concept d'opérateur τ -mesurable, puis la définition générale des espaces L^p d'une algèbre de von Neumann semi-finie comme espace d'opérateurs non bornés affiliés à l'algèbre de von Neumann.

Dans le cas de type III, la théorie des espaces L^p a été développée par A. Connes et M. Hilsum ([Co79], [Co80] et [Hi81]), U. Haagerup ([Haa77]) et H. Kosaki ([Ko84]).

U. Haagerup définit les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann (\mathcal{M}, φ_0) en construisant le produit croisé $\mathcal{M} \rtimes \mathbb{R}$ par le groupe d'automorphismes modulaires associé à φ_0 , se ramenant ainsi au cas semi-fini. Parallèlement, A. Connes introduit la théorie des dérivées spatiales. M. Hilsum fait le lien entre les espaces L^p définis par U. Haagerup et ceux définis par A. Connes dans son article de 1981.

Pour finir, H. Kosaki définit les espaces L^p en utilisant la théorie de l'interpolation.

Certains des premiers exemples d'algèbres de von Neumann construits par Murray et von Neumann proviennent de la construction «groupe-mesure». Une forme actuelle de cette construction est fournie par la théorie des groupoïdes mesurés, introduite par G. Mackey et développée notamment par Arlan Ramsay ([Ra71], [Ra82]) et Peter Hahn ([Ha78-1]). Cette notion recouvre en particulier les notions de groupes, d'action de groupe, de relation d'équivalence, ainsi que les espaces et espaces produits. Elle trouve des exemples concrets en géométrie, notamment dans l'étude des feuilletages où intervient le groupoïde d'holonomie.

Cette théorie a également été développée par Alain Connes, précisément lorsqu'il a développé la théorie non-commutative abstraite de l'intégration ([Co79]), pour l'appliquer à l'étude de l'espace des feuilles d'un feuilletage.

Par ailleurs, en s'appuyant sur cette théorie, R.A. Kunze ([Kun58]) puis M. Terp ([Te80]) ont pu généraliser la notion de transformée de Fourier aux groupes.

L'inégalité de Hausdorff-Young est classique en analyse de Fourier sur \mathbb{R}^n et a été généralisée par R.A. Kunze ([Kun58]) pour des groupes localement compacts unimodulaires puis par M. Terp ([Te80]) pour des groupes localement compacts quelconques.

Une inégalité un peu différente a été démontrée par B. Russo ([Rus77]) pour le groupoïde grossier $X \times X$.

Dans un premier chapitre, nous avons tenu à rappeler les définitions et théorèmes fondamentaux concernant les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann, ainsi que la théorie des algèbres hilbertiennes.

Le second chapitre est consacré à la construction de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde (G, λ, μ) localement compact mesuré. Dans un premier temps, nous rappelons les notions utiles par la suite concernant les groupoïdes mesurés et les groupoïdes topologiques, telles qu'on les trouve dans [Ha78-1] ou [Re80]. Nous avons fait le choix de travailler avec des groupoïdes localement compacts à base dénombrable d'ouverts, et pour lesquels la dérivée de Radon-Nikodym δ est supposée continue. Ceci couvre un bon nombre d'exemples et nous avons ainsi pu utiliser l'algèbre des fonctions continues à support compact sur le groupoïde, $C_c(G)$, pour appliquer la construction GNS puis la théorie de Tomita-Takesaki. Nous explicitons ensuite l'opérateur modulaire, le poids canonique...

Dans un deuxième temps, nous utilisons l'approche d'Alain Connes ([Co94] et [Co80]) pour définir l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde en tant qu'algèbre d'opérateurs aléatoires. Ces différentes constructions nous donnent la même algèbre de von Neumann du groupoïde que nous noterons $W^*(G)$ mais offrent des points de vue différents et complémentaires pour décrire les espaces L^p associés.

En utilisant le produit gauche, nous identifions ensuite le produit croisé utilisé par U. Haagerup pour définir les espaces L^p ([Haa77]) à l'algèbre de von Neumann d'un nouveau groupoïde, $G(\delta)$, produit gauche du groupoïde G par le cocycle δ .

Au chapitre 3, nous avons cherché à expliciter la théorie des dérivées spatiales et des opérateurs homogènes dans le cadre de $W^*(G)$, en nous inspirant du travail réalisé par Marianne Terp ([Te80]) dans le cas d'un groupe. En particulier, nous avons traduit la condition pour un opérateur d'être homogène de degré α en utilisant la terminologie des opérateurs aléatoires.

Le chapitre 4 est alors consacré à différentes descriptions du $L^1(W^*(G))$. La première description utilise l'identification avec le préduel \mathcal{M}_* . Pour cela, nous commençons par définir un espace de coefficients, $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$, qui joue un rôle analogue à l'algèbre de Fourier $A(G)$ d'un groupe. Deux éléments ξ, η de $L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$ définissent un coefficient, noté (ξ, η) . Par ailleurs, en notant $\omega_{\xi, \eta}$ l'élément de \mathcal{M}_* défini par $\omega_{\xi, \eta}(T) = (T\xi|\eta)$, nous démontrons un résultat qui généralise le résultat bien connu dans le cadre de groupe :

Théorème 4.2.1

Il existe un isomorphisme isométrique ω entre $(\mathcal{L}^1(\widehat{G}), \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{M}_, \|\cdot\|)$, défini par*

$$\left| \begin{array}{ll} \mathcal{L}^1(\widehat{G}) & \longrightarrow \mathcal{M}_* \\ (\xi, \eta) & \longmapsto \omega_{\xi, \eta} \end{array} \right.$$

Une seconde description, utilisant la théorie de dérivées spatiales, nous permet d'identifier les opérateurs de $L^1(W^*(G))$ en utilisant les coefficients précédents.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\widehat{G}) & \overset{\text{---}}{\text{---}} & L^1(\mathcal{M}, \psi_0) \\ & \searrow \omega & \swarrow \\ & \mathcal{M}_\star & \end{array}$$

Théorème 4.4.1

i) Il existe un isomorphisme linéaire isométrique et positif $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ sur $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$. rendant le diagramme commutatif.

ii) Pour $F = (e, e)$ avec $e \in C_c(G)$, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$ est la fermeture de l'opérateur symétrique positif $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ défini sur le domaine $C_c(G)$.

iii) Cet isomorphisme $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ est complètement déterminé par la condition précédente.

En utilisant la théorie des opérateurs aléatoires, nous obtenons ensuite une formule permettant de calculer la trace d'un élément de $L^1(W^\star(G), \psi_0)$. L'utilisation des hypothèses mentionnées précédemment sur le groupoïde nous permet ici d'utiliser une unité approchée :

Proposition 4.4.2

Soit (ξ_i) une unité approchée dans $C_c(G)_+$.

Soit $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$. Alors $\|T\|_1 = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int F \xi_i \star \xi_i^\star \delta^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}$, où $F = \widetilde{\mathcal{F}}_\infty^{-1}(T)$.

Enfin, nous explicitons la construction de U. Haagerup en utilisant le produit gauche $G(\delta)$ et l'algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires associée à ce groupoïde. C'est une algèbre de von Neumann semi-finie, comme nous le démontrons au chapitre 2 et la trace construite par U. Haagerup sur le produit croisé correspond en fait à la trace canonique construite grâce à la théorie des algèbres hilbertiennes. Nous démontrons en particulier le théorème suivant :

Théorème 4.5.1

Soit $(\underline{T}_{x,a})$ un opérateur aléatoire affilié à $\underline{\mathcal{M}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un opérateur aléatoire (T_x) affilié à \mathcal{M} tel que $\underline{T}_{x,a} = a^\alpha (p_{x,a})_\star T_x (p_{x,a})^\star$ et quel que soit $\gamma \in G$,

$$R(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset \delta(\gamma)^{-\alpha} T_{r(\gamma)} R(\gamma)$$

2. Quel que soit $(\gamma, a) \in \underline{G}$,

$$\underline{R}(\gamma, a)\underline{T}_{s(\gamma,a)} \subset \underline{T}_{r(\gamma,a)}\underline{R}(\gamma, a) \quad \text{et} \quad \theta_a(\underline{T}) = a^\alpha \underline{T}$$

Le cinquième chapitre est consacré à l'espace $L^2(W^*(G))$ et à son identification avec $L^2(G)$.

Enfin, au sixième chapitre, nous établissons une inégalité de Hausdorff-Young pour les groupoïdes mesurés unimodulaires, en nous appuyant sur les espaces $L^{p,p'}(G, \mu \circ \lambda)$. La généralisation proposée est la suivante :

Théorème 6.2.4

Soit $1 \leq p \leq 2$ et p' tel que $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

L'application $L : (C_c(G), \|\cdot\|_{p,p'}) \longrightarrow L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$ se prolonge en une application, encore notée L , de $(L^{p,p'}(G), \|\cdot\|_{p,p'})$ dans $L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$.

Pour $f \in L^{p,p'}(G)$, on a de plus

$$\|L(f)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$$

Chapitre 1

Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann

Nous allons commencer par quelques rappels concernant les algèbres hilbertiennes (et les algèbres hilbertiennes généralisées), ainsi que la théorie de Tomita.

Ces notions seront en effet utilisées dans les définitions générales des espaces L^p d'une algèbre de von Neumann, ainsi que dans les chapitres suivants.

Afin de définir la notion d'espace L^p d'une algèbre de von Neumann, nous commencerons par le cas d'une algèbre de von Neumann munie d'une trace, puis nous nous intéresserons au cas d'une algèbre de von Neumann munie d'un poids.

1.1 Notion d'algèbre hilbertienne

1.1.1 Algèbres hilbertiennes et représentation régulière

Nous donnons ici les définitions et propriétés exposées et démontrées dans [Di69] (chapitre I, §5). Elles seront ensuite généralisées en utilisant les définitions de [Ta03].

Soit \mathfrak{A} une algèbre associative sur le corps \mathbb{C} , munie d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ qui en fait un espace préhilbertien séparé. Soit \mathcal{H} l'espace hilbertien complété de \mathfrak{A} .

On suppose donné un antihomomorphisme involutif $x \mapsto x^*$ de \mathfrak{A} .

Définition 1.1.1

On dit que \mathfrak{A} est une algèbre hilbertienne si les quatre axiomes suivants sont vérifiés :

- i) Pour tous $x, y \in \mathfrak{A}$, $(x|y) = (y^*|x^*)$.
- ii) Pour tous $x, y, z \in \mathfrak{A}$, $(xy|z) = (y|x^*z)$.
- iii) Pour tout $x \in \mathfrak{A}$, l'application $y \mapsto xy$ est continue.
- iv) L'ensemble des éléments xy avec $x, y \in \mathfrak{A}$ est total dans \mathfrak{A} .

Si \mathfrak{A} est une algèbre hilbertienne, on peut prolonger $x \mapsto x^*$ en une involution J de \mathcal{H} . De même, les applications $y \mapsto xy$ et $y \mapsto yx$ se prolongent de manière unique en éléments U_x et V_x de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Pour tous $x, y \in \mathfrak{A}$, U_x et V_y commutent. Les U_x (resp. V_x) constituent une algèbre involutive d'opérateurs dans \mathcal{H} . L'adhérence faible de cette algèbre est une algèbre de von Neumann notée $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{A})$), appelée représentation régulière à gauche (resp. à droite) de \mathfrak{A} .

On définit alors la notion d'élément borné :

Définition 1.1.2

Un élément $a \in \mathcal{H}$ est dit borné à gauche (resp. à droite) s'il existe un opérateur continu U_a (resp. V_a) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que, pour tout $x \in \mathfrak{A}$, $U_a x = V_x a$ (resp. $V_a x = U_x a$)

Proposition 1.1.1

Un élément $a \in \mathcal{H}$ est borné à gauche si et seulement s'il est borné à droite.

Un tel élément est dit borné relativement à \mathfrak{A} .

Notons $\mathcal{U}_b(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathcal{V}_b(\mathfrak{A})$) l'ensemble des U_a (resp. V_a), a borné. Alors $\mathcal{U}_b(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathcal{V}_b(\mathfrak{A})$) est un idéal bilatère de $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ (resp. $\mathcal{V}(\mathfrak{A})$).

Enfin, donnons la définition d'une algèbre hilbertienne achevée :

Définition 1.1.3

On dit que \mathfrak{A} est achevée si tout élément borné de \mathcal{H} appartient à \mathfrak{A} .

Donnons maintenant une construction usuelle d'une trace sur une représentation régulière :

Théorème 1.1.1

On suppose que \mathfrak{A} est une algèbre hilbertienne. Pour $S \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})^+$, on pose :

$\varphi(S) = (a|a)$ s'il existe un $a \in \mathcal{H}$ borné tel que $S^{\frac{1}{2}} = U_a$.

$\varphi(S) = +\infty$ sinon.

Alors φ est une trace fidèle, semi-finie et normale sur $\mathcal{U}(\mathfrak{A})^+$.

Notons $\mathfrak{n}_\varphi = \{T \in \mathcal{U}(\mathfrak{A}) : \varphi(T^*T) < +\infty\}$. On a $\mathfrak{n}_\varphi = \mathcal{U}_b(\mathfrak{A})$.

1.1.2 Algèbre hilbertienne généralisée

Dans [Ta70], M. Takesaki définit les notions d'algèbre hilbertienne modulaire (appelée algèbre de Tomita dans [Ta03]) et d'algèbre hilbertienne généralisée (appelée simplement algèbre hilbertienne dans [Ta03]). Nous suivrons dorénavant la terminologie adoptée dans [Ta03].

Ainsi :

Définition 1.1.4 (([Ta03], VI §1, définition 1.1))

Une algèbre hilbertienne à gauche est une algèbre involutive \mathfrak{A} sur \mathbb{C} munie d'une in-

volution $\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A} \\ \xi \longmapsto \xi^\# \end{array} \right.$ et admettant un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ satisfaisant les propriétés

suivantes :

a) Pour tout $\xi \in \mathfrak{A}$, on peut définir un opérateur borné $L(\xi) : \begin{cases} \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \\ \eta & \longmapsto & \xi\eta \end{cases}$ de multiplication à gauche.

b) Pour tous $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{A}$, $(\xi\eta|\zeta) = (\eta|\xi^\# \zeta)$

c) $S_0 : \xi \longmapsto \xi^\#$ est préfermée

d) La sous-algèbre, notée \mathfrak{A}^2 , engendrée par tous les produits $\xi\eta$, $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$, est dense dans \mathfrak{A} par rapport au produit scalaire.

Considérons donc une algèbre hilbertienne \mathfrak{A} et notons \mathcal{H} l'espace hilbertien obtenu par complétion de \mathfrak{A} . La définition suivante est donnée par [Ta03] au début de VI § 1.

Définition 1.1.5

$\begin{cases} \mathfrak{A} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \xi & \longmapsto & L(\xi) \end{cases}$ est une \star -représentation de \mathfrak{A} .

Le C^* -algèbre $L(\mathfrak{A})$ est non dégénérée et l'algèbre de von Neumann engendrée par $L(\mathfrak{A})$ est appelée l'algèbre de von Neumann à gauche de \mathfrak{A} , notée $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$.

On a $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A})''$.

1.1.3 Opérateurs particuliers

Il faut maintenant rappeler la définition et les propriétés élémentaires de certains opérateurs de la théorie de Tomita. Pour cela, nous utilisons encore les définitions de [Ta03] (VI. § 1).

L'opérateur S_0 est fermable d'après le c) de la définition et on appelle S sa fermeture ; on note alors \mathcal{D}^\sharp son domaine. On définit ensuite l'opérateur modulaire Δ et l'opérateur de conjugaison modulaire J à partir du lemme suivant :

Lemme 1

i) Il existe un opérateur antilinéaire fermé densément défini F , de domaine \mathcal{D}^\flat tel que

- a) $\mathcal{D}^\flat = \{\eta \in \mathcal{H} : \xi \in \mathcal{D}^\sharp \longmapsto (\eta|S\xi) \text{ est borné}\}$
b) $\forall \xi \in \mathcal{D}^\sharp, \forall \eta \in \mathcal{D}^\flat, \quad (S\xi|\eta) = (F\eta|\xi)$

De plus, $F = F^{-1}$

ii) $\Delta = FS$ est un opérateur positif non singulier autoadjoint tel que $\text{Dom}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}^\sharp$

iii) Il existe une isométrie antilinéaire J de \mathcal{H} sur \mathcal{H} . Elle vérifie les propriétés suivantes :

- a) $\forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, \quad (J\xi|J\eta) = (\eta|\xi)$
b) $J = J^{-1}$ ou, de manière équivalente, $J^2 = I$.
c) $J\Delta J = \Delta^{-1} ; F = J\Delta^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}}J$
d) $S = J\Delta^{\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}J$

Les opérateurs J et Δ sont uniquement déterminés par la propriété iii) d) et le fait que $\text{Dom}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}^\sharp$.

1.1.4 Vecteurs bornés

Une notion importante concernant les algèbres hilbertiennes est la notion de vecteur borné. Nous rappelons ici les principales définitions et les résultats importants de [Ta03], VI, §1.

Vecteurs bornés à droite

Définition 1.1.6

Un vecteur $\eta \in \mathcal{H}$ est dit borné à droite si $\sup\{\|L(\xi)\eta\| : \xi \in \mathfrak{A}, \|\xi\| \leq 1\} = c < \infty$. L'ensemble des vecteurs bornés à droite est noté \mathcal{B}_r .

Proposition 1.1.2

$\eta \in \mathcal{B}_r \iff \exists T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \forall \xi \in \mathfrak{A}, \quad T\xi = L(\xi)\eta$.

Comme T est déterminé de façon unique par η , on note $T = R(\eta)$.

\mathcal{B}_r est un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} et $R(\lambda\eta + \mu\zeta) = \lambda R(\eta) + \mu R(\zeta)$, pour $\zeta, \eta \in \mathcal{B}_r$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.3

- i) \mathcal{B}_r est invariant sous $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'$
- ii) $R(\mathcal{B}_r)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'$ et $R(T\eta) = TR(\eta)$ pour tous $T \in \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'$ et $\eta \in \mathcal{B}_r$.

On peut alors prolonger la multiplication en posant :

Définition 1.1.7

$\xi\eta \stackrel{\text{déf}}{=} L(\xi)\eta$ pour $\xi \in \mathfrak{A}, \eta \in \mathcal{H}$.

$\xi\eta \stackrel{\text{déf}}{=} R(\eta)\xi$ pour $\xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{B}_r$.

On définit alors \mathcal{A}_r par :

$$\mathcal{A}_r = \mathcal{B}_r \cap \mathcal{D}^b$$

On a : $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})' = \mathcal{R}_r(\mathcal{A}_r)$.

Vecteurs bornés à gauche

Définition 1.1.8

$\xi \in \mathcal{H}$ est dit borné à gauche si $\sup\{\|R(\eta)\xi\| : \eta \in \mathcal{A}_r, \|\eta\| \leq 1\} = c < \infty$.

L'ensemble des vecteurs bornés à gauche est noté \mathcal{B}

Proposition 1.1.4

$\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}$. À chaque $\xi \in \mathcal{B}$ correspond un opérateur borné $L(\xi)$ sur \mathcal{H} déterminé par $L(\xi)\eta = R(\eta)\xi$, $\xi \in \mathcal{B}, \eta \in \mathcal{A}_r$. On a alors :

- i) \mathcal{B} est invariant par $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$.
- ii) $L(\mathcal{B})$ est un idéal à gauche de $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ et

$$L(T\xi) = TL(\xi), \text{ si } T \in \mathcal{R}_l(\mathfrak{A}), \xi \in \mathcal{B}$$

iii) $\xi\eta \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} L(\xi)\eta$, $\xi \in \mathcal{B}$, $\eta \in \mathcal{H}$.

iv) On pose $\mathcal{A}_l = \mathcal{B} \cap \mathcal{D}^l$. Alors \mathcal{A}_l est une alg\u00e8bre hilbertienne \u00e0 gauche et $\mathfrak{A} \subset \mathcal{A}_l$ donc $\mathcal{R}_l(\mathcal{A}_l) = \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$.

On peut alors d\u00e9montrer le th\u00e9or\u00e8me fondamental suivant :

Th\u00e9or\u00e8me 1.1.2 (VI, \u00a7 1, theorem 1.19)

Soit \mathfrak{A} une alg\u00e8bre hilbertienne \u00e0 gauche, Δ et J les op\u00e9rateurs pr\u00e9c\u00e9demment d\u00e9finis.

Alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} i) \quad J\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})J &= \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})' & \Delta^{it}\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})\Delta^{-it} &= \mathcal{R}_l(\mathfrak{A}) \\ J\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'J &= \mathcal{R}_l(\mathfrak{A}) & \Delta^{it}\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'\Delta^{-it} &= \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})' \end{aligned}$$

Plus pr\u00e9cis\u00e9ment, pour $\xi \in \mathcal{A}_l$, $JL(\xi)J = R(J\xi)$ et, pour $\eta \in \mathcal{A}_r$, $JR(\eta)J = L(J\eta)$.

ii) Le groupe d'unitaires \u00e0 un param\u00e8tre $\{\Delta^{it}, t \in \mathbb{R}\}$ agit sur \mathcal{A}_r et \mathcal{A}_l comme automorphisme, et J envoie \mathcal{A}_l (resp. \mathcal{A}_r) sur \mathcal{A}_r (resp. \mathcal{A}_l) de fa\u00e7on anti-isomorphe au sens o\u00f9

$$J(\xi\eta) = (J\eta)(J\xi), \quad \xi, \eta \in \mathcal{A}_l$$

1.1.5 D\u00e9finition des poids canoniques

En suivant [Co73] (\u00a7 I.1.1) et [Ta03] (\u00a7 VII.2), on d\u00e9finit sur $\mathcal{M} = \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ un poids canonique gr\u00e2ce \u00e0 la d\u00e9finition suivante :

D\u00e9finition 1.1.9

On d\u00e9finit un poids φ_0 sur \mathcal{M}_+ par :

Soit $T \in \mathcal{M}^+$.

- S'il existe $f \in \mathcal{A}_l$ telle que $T = L(f)^*L(f)$, alors $\varphi_0(T) = (f|f)$.
- Sinon, $\varphi_0(T) = +\infty$.

On obtient alors un poids sur \mathcal{M} , avec, en particulier :

$$\text{pour } f, g \in \mathcal{B}, \varphi_0(L(f)^*L(g)) = (g|f).$$

Ce poids est fid\u00e8le, semi-fini et normal.

Pour $S \in (\mathcal{M}')_+$, on pose $\psi_0(S) = \varphi_0(JSJ)$. On d\u00e9finit ainsi un poids canonique sur \mathcal{M}' .

1.1.6 Repr\u00e9sentation standard

Soit \mathcal{M} une alg\u00e8bre de von Neumann et soit φ un poids normal fid\u00e8le semi-fini sur \mathcal{M} ; on peut alors consid\u00e9rer $\mathfrak{n}_\varphi = \{T \in \mathcal{M} : \varphi(T^*T) < +\infty\}$ et $N_\varphi = \{T \in \mathcal{M} : \varphi(T^*T) = 0\}$.

On note η_φ l'application canonique de \mathfrak{n}_φ dans $\mathfrak{n}_\varphi/N_\varphi$. En compl\u00e9tant $\mathfrak{n}_\varphi/N_\varphi$ pour le produit scalaire d\u00e9fini par $(\eta_\varphi(T)|\eta_\varphi(S)) = \varphi(S^*T)$, on d\u00e9finit un espace de Hilbert \mathcal{H}_φ ;

on d\u00e9finit \u00e9galement une alg\u00e8bre hilbertienne \mathcal{A}_φ en posant $\mathcal{A}_\varphi = \eta_\varphi(\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*)$

Enfin, l'action de \mathcal{M} sur $\mathfrak{n}_\varphi/N_\varphi$ se prolonge \u00e0 \mathcal{H}_φ en une repr\u00e9sentation π_φ .

On a alors, d'apr\u00e8s [Ta03] (VII – theorem 2.6), $\pi_\varphi(\mathcal{M}) = \mathcal{R}_l(\mathcal{A}_\varphi)$.

Ceci prouve que toute alg\u00e8bre de von Neumann munie d'un poids normal fid\u00e8le semi-fini admet une repr\u00e9sentation standard.

Nous pouvons maintenant définir le groupe d'automorphismes modulaires associé à $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ ainsi que la dérivée de Radon-Nikodym, équivalent non commutatif de la dérivée de Radon-Nikodym de la théorie de la mesure usuelle.

1.1.7 Groupe d'automorphismes modulaires

Une algèbre hilbertienne à gauche étant donnée, on peut définir la notion de groupe d'automorphismes modulaires comme dans [Ta03]

Groupe d'unitaires à un paramètre

Théorème 1.1.3

$\{\Delta^{it}, t \in \mathbb{R}\}$ forme un groupe d'automorphismes à un paramètre de \mathfrak{A} et on a

$$L(\Delta^{it}\xi) = \Delta^{it}L(\xi)\Delta^{-it}, \quad \text{pour } \xi \in \mathfrak{A}.$$

Ce groupe d'automorphismes induit donc un groupe d' \star -automorphismes à un paramètre sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$.

Groupe d'automorphismes modulaire d'une algèbre de von Neumann à gauche

Définition 1.1.10 ([Ta03] VIII. 1)

Soit \mathfrak{A} une algèbre de hilbertienne et $\mathcal{M} = \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$. Pour $T \in \mathcal{M}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma_t(T) = \Delta^{it}T\Delta^{-it}$. Alors $\{\sigma_t, t \in \mathbb{R}\}$ est appelé le groupe d'automorphismes modulaires de \mathcal{M} associé à l'algèbre \mathfrak{A} .

Théorème 1.1.4

Le groupe $\{\sigma_t\}$ de $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ est intérieur (i.e. il existe un groupe d'unitaires à un paramètre $\Gamma(t)$ dans $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ qui implémente le groupe σ_t) si et seulement si $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ est semi-fini.

Ici, cela signifie qu'il existe $\Gamma(t) \in \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$, on ait

$$\sigma_t(T) = \Gamma(t)T\Gamma(t)^{-1}.$$

Corollaire 1.1.5

Si $\{\sigma_t\}$ est intérieur, alors le groupe à un paramètre $\{\Delta^{it}\}$ est représenté par

$$\Delta^{it} = \Gamma(t)\Gamma'(t), \quad J\Gamma(t)J = \Gamma'(-t)$$

où $\Gamma(t)$ (resp $\Gamma'(t)$) est un groupe d'unitaires à un paramètre dans $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})$ (resp. dans $\mathcal{R}_l(\mathfrak{A})'$).

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann et φ un poids normal semi-fini fidèle sur \mathcal{M} . Nous pouvons définir la notion de centralisateur de φ , noté \mathcal{M}_φ , par

$$\mathcal{M}_\varphi = \{T \in \mathcal{M} : \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_t^\varphi(T) = T\}$$

On peut ensuite définir de nouveaux poids sur \mathcal{M} à partir d'opérateurs H positifs autoadjoints affiliés à $(\mathcal{M}_\varphi)_+$ grâce à la proposition suivante ([Ta03] VIII. 2, lemme 2.7 et lemme 2.8) :

Proposition 1.1.6

1) Soit $H \in (\mathcal{M}_\varphi)_+$. Si on pose

$$\varphi(HT) = \varphi(H^{\frac{1}{2}}TH^{\frac{1}{2}}), \quad T \in \mathcal{M}_+$$

alors $\varphi(H\cdot)$ est un poids sur \mathcal{M} .

2) Soit H un opérateur positif autoadjoint affilié à \mathcal{M}_φ .

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $H_\varepsilon = H(1 + \varepsilon H)^{-1}$.

a) L'opérateur H_ε est borné et autoadjoint.

b) Si $T \in \mathcal{M}_+$, alors $\varphi(H_\varepsilon^{\frac{1}{2}}TH_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ converge dans $[0; +\infty]$ quand ε tend en décroissant vers 0 et l'égalité

$$\varphi(HT) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi(H_\varepsilon^{\frac{1}{2}}TH_\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

définit un poids $\varphi(H\cdot)$ normal semi-fini sur \mathcal{M} .

Remarque 1.1.1

Si φ est une trace, le centralisateur \mathcal{M}_φ est égal à \mathcal{M} et on peut définir un poids $\varphi(H\cdot)$ à partir de la formule précédente pour tout H positif autoadjoint affilié à \mathcal{M} . On retrouve alors la définition de [Pe79] (5.3.10)

La notion de groupe d'automorphismes modulaires est fortement liée à la condition de Kubo-Martin-Schwinger qui caractérise des états d'équilibre.

Condition de Kubo-Martin-Schwinger (K-M-S)

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann possédant un groupe d' \star -automorphismes $\{\sigma_t, t \in \mathbb{R}\}$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{M}$, $t \mapsto \sigma_t(T)$ est fortement continue.

Définition 1.1.11

Si une forme linéaire normale fidèle positive φ_0 de \mathcal{M} satisfait les conditions suivantes, alors on dit qu'elle satisfait la condition KMS :

i) φ_0 est invariante sous σ_t i.e. $\varphi_0 = \varphi_0 \circ \sigma_t$.

ii) Il existe $\beta > 0$ et pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}^2$, il existe une fonction F holomorphe dans $0 < \text{Im}(z) < \beta$ et continue bornée sur la fermeture avec

$$F(t) = \varphi_0(\sigma_t(A)B) \text{ et } F(t + i\beta) = \varphi_0(B\sigma_t(A))$$

En considérant $\{\sigma_{t/\beta}, t \in \mathbb{R}\}$, on peut se ramener à supposer que $\beta = 1$.

Si φ_0 est une trace sur \mathcal{M} , alors σ_t est le groupe d'automorphismes trivial.

Théorème 1.1.5

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann. Soit φ_0 une forme linéaire normale fidèle positive sur \mathcal{M} . Alors il existe un groupe d'automorphismes à un paramètre σ_t de \mathcal{M} tel que φ_0 satisfasse la condition KMS pour $\beta = 1$.

Il y a en fait unicité du groupe d'automorphisme de \mathcal{M} : σ_t est donc appelé le groupe d'automorphismes modulaire de \mathcal{M} associé à φ_0 .

1.1.8 Dérivée de Radon-Nikodym**Théorème de représentation**

En utilisant les résultats précédents, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1.6 ([Ta03] VIII – theorem 3.2)

Soit φ un poids normal semi-fini fidèle sur \mathcal{M} . Pour tout poids ψ semi-fini normal, il existe une application linéaire η de \mathfrak{n}_ψ dans \mathcal{H}_φ et une isométrie U de \mathcal{H}_ψ sur $[\eta(\mathfrak{n}_\psi)]$ telles que :

$$\begin{aligned} \pi_\varphi(A)\eta(T) &= \eta(AT) & A \in \mathcal{M}, T \in \mathfrak{n}_\psi \\ U\mathfrak{n}_\psi(T) &= \eta(T) & T \in \mathfrak{n}_\psi \\ \pi_\varphi(A)U &= T\pi_\psi(A) & A \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Si ψ est fidèle, alors on peut choisir η tel que $[\eta(\mathfrak{n}_\psi)] = \mathcal{H}_\varphi$ et donc π_φ et π_ψ sont unitairement équivalents.

En particulier, tout $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ est représenté par un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ tel que

$$\omega(T) = (\pi_\varphi(T)\xi|\xi), T \in \mathcal{M}.$$

La théorie de Tomita permet enfin de définir la dérivée de Radon-Nikodym.

La dérivée de Radon-Nikodym**Théorème 1.1.7**

Soit φ et ψ des poids fidèles, semi-finis et normaux sur une algèbre de von Neumann \mathcal{M} . Alors il existe une famille σ -fortement continue à un paramètre $\{u_t\}$ d'unitaires de \mathcal{M} vérifiant :

- a) $\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad u_{s+t} = u_s \sigma_s^\psi(u_t)$
- b) $\forall s \in \mathbb{R}, \quad u_s \sigma_s^\psi(\mathfrak{n}_\varphi^* \cap \mathfrak{n}_\psi) = \mathfrak{n}_\varphi^* \cap \mathfrak{n}_\psi$
- c) Pour tout $T_1 \in \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\psi^*$ et tout $T_2 \in \mathfrak{n}_\varphi^* \cap \mathfrak{n}_\psi$, il existe une fonction F analytique dans $0 < \text{Im}(z) < 1$ telle que

$$F(t) = \varphi(u_t \sigma_t^\psi(T_2)T_1) \quad F(t+i) = \psi(T_1 u_t \sigma_t^\psi(T_2))$$

- d) $\forall T \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \sigma_t^\varphi(T) = u_t \sigma_t^\psi(T) u_t^*$

de plus, la famille $\{u_t\}$ est déterminée de façon unique par ces conditions.

On peut donc poser la définition suivante :

Définition 1.1.12

La famille $\{u_t\}$ du théorème est appelée la dérivée de Radon-Nikodym de φ par rapport à ψ et notée

$$(D\varphi : D\psi)_t = u_t, \quad 0 < \text{Im}(t) < 1$$

Notons par ailleurs les propriétés suivantes :

Corollaire 1.1.7

Soit φ et ψ des poids normaux semi-finis fidèles sur \mathcal{M} . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi = \psi \circ \sigma_t^\varphi$
- b) il existe un opérateur positif autoadjoint non singulier H affilié à \mathcal{M}_φ tel que $\psi = \varphi(H \cdot)$
- c) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi \circ \sigma_t^\psi$

Théorème 1.1.8

Si φ, ψ et ρ sont des poids normaux semi-finis fidèles sur \mathcal{M} , alors

$$(D\psi : D\varphi)_t = (D\psi : D\rho)_t (D\rho : D\varphi)_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

La réciproque du premier théorème est vrai sous la forme suivante :

Théorème 1.1.9

Soit φ un poids normal fidèle semi-fini sur une algèbre de von Neumann \mathcal{M} .

Si $\{u_t : t \in \mathbb{R}\}$ est une famille d'unitaires de \mathcal{M} σ -fortement continue satisfaisant l'identité $u_{s+t} = u_s \sigma_s^\varphi(u_t)$, alors il existe un poids normal fidèle semi-fini ψ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $(D\psi : D\varphi)_t$.

1.2 Cas d'une algèbre de von Neumann munie d'une trace

Commençons ici par rappeler le point de vue de J. Dixmier ([Di53] et [Di69]), qui donne une définition abstraite des espaces L^p dans le cas d'une algèbre de von Neumann semi-finie.

1.2.1 Espaces L^p selon Dixmier

Nous commençons ici par rappeler la définition du L^1 défini par une trace, comme on la trouve dans [Di69] (chapitre I, §6.10) ou dans [Di53] (§2).

Définition du L^1

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann, τ une trace définie sur l'idéal bilatère \mathcal{I} de \mathcal{M} . Afin de définir l'espace L^1 , J. Dixmier commence par prouver qu'une trace normale fidèle semi-finie permet de définir une norme sur \mathcal{I} .

Théorème 1.2.1

Soit $S \in \mathcal{M}$ et $T \in \mathcal{I}$. Alors
 $|\tau(ST)| \leq \tau(|ST|) \leq \|S\| \tau(|T|)$

Corollaire 1.2.1

Soit $T \in \mathcal{I}$. Le nombre $\tau(|T|)$ est la borne supérieure des nombres $|\tau(ST)|$ quand S parcourt l'ensemble des opérateurs \mathcal{M} tels que $\|S\| \leq 1$. Cette borne supérieure est atteinte.

Corollaire 1.2.2

La fonction $T \mapsto \tau(|T|)$, définie sur \mathcal{I} , est une semi-norme.

On suppose désormais que τ est normale, fidèle et semi-finie. L'espace \mathcal{I} , muni de la norme $T \mapsto \|T\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \tau(|T|)$ est alors un espace vectoriel normé complexe, dont le complété est un espace de Banach, noté $L^1(\mathcal{M}, \tau)$.

\mathcal{I} peut alors être identifié à un sous-espace vectoriel de $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ partout dense.

L'un des points importants concernant $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ est qu'il s'identifie avec le prédual \mathcal{M}_* .

Identification avec le prédual

Notons \mathcal{M}_* le prédual de \mathcal{M} .

Théorème 1.2.2 ([Di69], chapitre I, §6.10)

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann, τ une trace normale fidèle semi-finie définie sur l'idéal bilatère \mathcal{I} de \mathcal{M} . Les espaces normés \mathcal{M} (muni de $\|\cdot\|$) et \mathcal{I} (munie de $\|\cdot\|_1$) étant mis en dualité par la forme bilinéaire $(S, T) \mapsto \tau(ST)$, \mathcal{M} est le dual de \mathcal{I} .

En particulier, il existe un isomorphisme de l'espace de Banach $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ sur l'espace de Banach \mathcal{M}_* .

Définition des espaces L^p

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann munie d'une trace τ normale, fidèle et semi-finie.

On commence par définir $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ à partir de [Di69] (chapitre I, §6.2)

Rappelons tout d'abord que, si \mathcal{I} est un idéal bilatère d'une algèbre de von Neumann \mathcal{M} , alors l'ensemble des $S \in \mathcal{M}$ tels que $SS^* \in \mathcal{I}$ est un idéal bilatère \mathfrak{n} de \mathcal{M} tel que $\mathfrak{n}^2 = \mathcal{I}$. On note $\mathfrak{n} = \mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$.

Soit \mathcal{I} l'idéal de \mathcal{M} sur lequel τ est finie. Nous pouvons alors définir $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ à partir du théorème suivant, qui reprend une partie du théorème 2 de [Di69] I.§6.2.

Théorème 1.2.3

Muni du produit scalaire défini par $(S|T) = \tau(T^*S)$, $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{n}_\tau$ est une algèbre hilbertienne achevée.

On note $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ l'espace hilbertien complété de $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$ et $\|\cdot\|_2$ la norme issue du produit scalaire.

De même, J. Dixmier définit, pour $p \in [1; +\infty[$, $\mathfrak{n}_p = \mathcal{I}^{\frac{1}{p}}$ et, pour $A \in \mathfrak{n}_p$, pose

$$\|A\|_p = \tau(|A|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Il démontre alors que, si τ est normale fidèle, alors $A \mapsto \|A\|_p$ est norme sur \mathfrak{n}_p ([Di53] §3, corollaire 2) et il note $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ l'espace de Banach complexe obtenu en complétant \mathfrak{n}_p , muni de la norme $\|\cdot\|_p$.

Il démontre également les principales propriétés usuelles des espaces L^p à savoir : inégalités de Hölder, Minkowski, dualité. . . .

1.2.2 Espace L^p selon Nelson

Les définitions présentées ci-dessous ont été proposées par E. Nelson dans [Ne74]. On les trouve également développées dans [Ta03] (IX.2).

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert H . On suppose que \mathcal{M} admet une trace τ fidèle, normale et semi-finie.

Opérateurs τ -mesurables.

La théorie des espaces L^p développée par E. Nelson repose sur la notion de τ -mesurabilité. Cette notion a été introduite afin de définir un équivalent de topologie de la mesure dans le cas non commutatif, et de travailler dans une algèbre qui contiendrait tous les espaces L^p . Nous rappelons ici les résultats essentiels de cette théorie sans en donner de démonstrations, ces dernières étant détaillées dans [Ta03] par exemple (IX §2). E. Nelson définit une topologie de la mesure sur \mathcal{M} , qui est définie à partir du système de voisinages fondamentaux de 0 donné par :

$V(\varepsilon, \delta) = \{T \in \mathcal{M} \text{ tel qu'il existe une projection } E \text{ de } \mathcal{M} \text{ telle que } \|TE\| \leq \varepsilon \text{ et } \tau(1 - E) \leq \delta\}$, où ε et δ sont des nombres strictement positifs.

On note alors $\overline{\mathcal{M}}$ la complétion de \mathcal{M} pour cette topologie.

Si on suppose maintenant que $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ avec \mathcal{H} espace de Hilbert, on définit de même $\overline{\mathcal{H}}$ comme étant la complétion de \mathcal{H} pour la topologie définie par le système de voisinages de 0 :

$$O(\varepsilon, \delta) = \{\eta \in \mathcal{H} : \exists E \in \text{Proj}(\mathcal{M}), \|E\eta\| < \varepsilon \text{ et } \tau(1 - E) < \delta\}$$

où $\text{Proj}(\mathcal{M})$ est l'ensemble des projecteurs de \mathcal{M} .

Théorème 1.2.4 ([Ta03] IX. 2 – theorem 2.2)

Les applications

$$T \mapsto T^* \text{ de } \mathcal{M} \text{ dans } \mathcal{M}$$

$(T, S) \mapsto T + S$ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dans \mathcal{M}

$(T, S) \mapsto TS$ de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ dans \mathcal{M}

$(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans \mathcal{H}

$(T, \xi) \mapsto T\xi$ de $\mathcal{M} \times \mathcal{H}$ dans \mathcal{H}

se prolongent respectivement de façon unique en des applications continues de $\overline{\mathcal{M}}$ dans $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{M}}$ dans $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{H}}$ dans $\overline{\mathcal{H}}$ et $\overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{H}}$ dans $\overline{\mathcal{H}}$.

Pour tout $T \in \overline{\mathcal{M}}$, on définit un opérateur non borné $M(T)$ comme suit : on pose $\mathcal{D}(M(T)) = \{\xi \in \mathcal{H} : T\xi \in \mathcal{H}\}$ et $M(T)\xi = T\xi$ pour $\xi \in \mathcal{D}(M(T))$. Il s'agit d'un opérateur fermé densément défini affilié à \mathcal{M} ([Ta03] IX.2 theorem 2.5); de plus, l'application $T \mapsto M(T)$ définie sur $\overline{\mathcal{M}}$ est injective, ce qui permet d'identifier $\overline{\mathcal{M}}$ à un sous-ensemble des opérateurs densément définis fermés affiliés à \mathcal{M} .

Définition 1.2.1

Soit T un opérateur fermé densément défini affilié à \mathcal{M} .

T est dit τ -mesurable si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une projection E dans \mathcal{M} telle que $\text{Im}(E) \subset \mathcal{D}(T)$ et $\tau(1 - E) \leq \varepsilon$.

Comme $T \in \overline{\mathcal{M}}$ si et seulement si T est τ -mesurable, $\overline{\mathcal{M}}$ est en fait l'ensemble des opérateurs τ -mesurables.

Soit T, S des opérateurs τ -mesurables. Alors $T + S$ (somme forte), TS (produit fort) et T^* sont densément définis et préfermés. De plus, leurs fermetures $\overline{T + S}$, \overline{TS} et $\overline{T^*}$ sont encore densément définies et $\overline{\mathcal{M}}$ est une \star -algèbre pour les deux opérations fortes et l'opération \star ci-avant.

Par ailleurs, le théorème ci-dessous se déduit de ce qui précède.

Théorème 1.2.5 ([Ta03] IX.2. – corollaire 2.9)

Soit T un opérateur fermé densément défini affilié à \mathcal{M} . Notons $T = U|T|$ sa décomposition polaire et $|T| = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale.

Alors T est τ -mesurable si et seulement si $\tau(1 - E_\lambda) < \infty$ pour λ suffisamment grand, ou, de façon équivalente, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tau(1 - E_\lambda) = 0$ grâce à la normalité de τ .

On sait que $\overline{\mathcal{M}}$ est une \star -algèbre topologiquement complète. De plus, \mathcal{M} est dense dans $\overline{\mathcal{M}}$.

En fait, si $T = U|T| \in \overline{\mathcal{M}}$ et $T = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, alors la suite $\left(U \int_0^n \lambda dE_\lambda \right)_{n=1,2,\dots}$ de \mathcal{M} tend vers T quand $n \rightarrow \infty$ dans la topologie de la mesure.

On prolonge enfin la trace de \mathcal{M}_+ à $\overline{\mathcal{M}_+}$ en posant, pour $H \in \overline{\mathcal{M}_+}$,

$$\tau(H) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(H(1 + \varepsilon H)^{-1})$$

Espaces L^p

La définition donnée pour les espaces L^p est alors la même que celle de Segal ([Se53])

Définition 1.2.2

Soit $p \in]0; +\infty[$. On définit $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ comme étant l'ensemble de tous les opérateurs T fermés densément définis affiliés à \mathcal{M} tels que $\|T\|_p = \tau(|T|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
On pose $L^\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme usuelle d'opérateurs.

Théorème 1.2.6 ([Ta03] IX.2 theorem 2.13)

$L^p(\mathcal{M}, \tau)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), dans lequel le sous-espace $\mathcal{M} \cap L^p(\mathcal{M}, \tau)$ est dense.

D'autre part, l'espace $(L^2(\mathcal{M}, \tau), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.

1.3 Cas d'une algèbre de von Neumann munie d'un poids

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann munie d'un poids φ_0 . Plusieurs définitions de $L^p(\mathcal{M})$ ont été proposées et nous rappelons ici les trois grands points de vue, ceux de U. Haagerup ([Haa77]), A. Connes ([Co79] et [Co80]) et M. Hilsun ([Hi81]), et Kosaki ([Ko84]).

1.3.1 Espaces L^p au sens d'Haagerup

U. Haagerup [Haa77] construit $L^p(\mathcal{M})$ à partir d'opérateurs non pas affiliés à \mathcal{M} mais au produit-croisé $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$ de \mathcal{M} par un groupe d'automorphismes modulaires. La plupart des résultats sont repris et détaillés dans [Te].

Notations adoptées

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann et soit φ_0 un poids normal fidèle semi-fini sur \mathcal{M} . On suppose que \mathcal{M} est représentée dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , i.e. $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

La construction d'un tel produit croisé est rappelée en annexe (B.1.2). Ici, nous posons

$$A = \mathbb{R} \text{ et nous identifions } \widehat{A} \text{ avec } \mathbb{R} \text{ grâce à l'application } \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{A} \\ t \longmapsto \chi_t \end{array} \right. \text{ où } \chi_t(s) = e^{-ist}$$

pour $s \in \mathbb{R}$.

Nous noterons alors θ_t au lieu de θ_{χ_t} .

Notons que ι est une représentation normale fidèle de \mathcal{M} et l'on peut donc identifier \mathcal{M} avec son image $\iota(\mathcal{M})$ dans $\underline{\mathcal{M}}$. Par ailleurs, d'après [Te], les θ_s , $s \in \mathbb{R}$, se prolongent en des automorphismes, encore notés θ_s , de la partie positive étendue (voir B.3.1) de $\underline{\mathcal{M}}$, notée $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$.

Poids opératoirel

Nous rappelons en annexe (B.3.2) la définition générale d'un poids opératoirel telle qu'elle a été donnée par U.Haagerup dans [Haa79].

Définition 1.3.1

On note E le poids opératoirel, $E : \underline{\mathcal{M}} \mapsto \mathcal{M}$, défini sur $\underline{\mathcal{M}}_+$ par

$$E(T) = \int_{\mathbb{R}} \theta_s(T) ds, \text{ pour } T \in \underline{\mathcal{M}}_+$$

E est un poids opératoirel fidèle normal semi-fini au sens où, pour tout $T \in \underline{\mathcal{M}}_+$, $E(T)$ est l'élément de $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$ caractérisé par

$$\langle E(T), \chi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \theta_s(T), \chi \rangle ds$$

pour tout $\chi \in \underline{\mathcal{M}}_{*+}$.

Par ailleurs, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\theta_s \circ E = E$, donc les valeurs de E sont bien dans $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$.

Définition 1.3.2 (Poids dual)

Pour tout poids φ sur \mathcal{M} , on définit $\widehat{\varphi}$ comme étant le prolongement de φ en un poids normal sur $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$.

On pose alors $\underline{\varphi} = \widehat{\varphi} \circ E$.

$\underline{\varphi}$ est un poids normal sur $\underline{\mathcal{M}}$, appelé le poids dual de φ . U. Haagerup ([Haa77]) indique que $\underline{\varphi}_0$ est égal à 2π fois le poids dual de φ_0 obtenu classiquement à partir du produit croisé.

Si φ et ψ sont des poids semi-finis, normaux, fidèles, alors $\underline{\varphi}$ et $\underline{\psi}$ le sont aussi. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathcal{M} : \sigma_t^{\underline{\varphi}}(T) = \sigma_t^{\varphi}(T)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, (D\underline{\varphi} : D\underline{\psi})_t = (D\varphi : D\psi)_t$$

U. Haagerup démontre alors que

Proposition 1.3.1

$\varphi \mapsto \underline{\varphi}$ est une bijection de l'ensemble des poids normaux semi-finis sur \mathcal{M} , sur l'ensemble des poids semi-finis normaux ψ sur $\underline{\mathcal{M}}$ satisfaisant :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \psi \circ \theta_s = \psi$$

puis il construit alors une trace sur $\underline{\mathcal{M}}$.

Trace

Il existe une trace τ normale fidèle semi-finie sur $\underline{\mathcal{M}}$ caractérisée par

$$\forall t \in \mathbb{R} : (D\underline{\varphi}_0 : D\tau)_t = V_t$$

τ satisfait : $\forall s \in \mathbb{R}, \tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$.

On peut alors démontrer que $H \mapsto \tau(H \cdot)$ est une bijection de $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$ sur l'ensemble des poids normaux sur $\underline{\mathcal{M}}$. En particulier, c'est une bijection des opérateurs positifs autoadjoints affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$ sur les poids normaux semi-finis sur $\underline{\mathcal{M}}$.

Ceci permet alors de poser la définition suivante ([Haa77] et [Te])

Définition 1.3.3

Soit φ un poids normal sur \mathcal{M} . On définit H_φ comme étant l'unique élément de $\widehat{\underline{\mathcal{M}}}_+$ donné par $\underline{\varphi} = \tau(H_\varphi \cdot)$

H_φ est en fait la dérivée de Radon-Nikodym de $\underline{\varphi}$ par rapport à la trace τ sur $\underline{\mathcal{M}}$

Proposition 1.3.2

1) $\varphi \mapsto H_\varphi$ est une bijection de l'ensemble des poids semi-finis normaux sur \mathcal{M} sur l'ensemble des opérateurs positifs autoadjoints H affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$ qui satisfont

$$\forall s \in \mathbb{R} : \theta_s H = e^{-s} H$$

2) Pour tous poids normaux φ et ψ sur \mathcal{M} , pour tout $T \in \mathcal{M}$, on a :

- a) $H_{\varphi+\psi} = H_\varphi + H_\psi$
- b) $H_{T \cdot \varphi \cdot T^*} = T \cdot H_\varphi \cdot T^*$
- c) $\text{Supp}(H_\varphi) = \text{Supp}(\varphi)$

Opérateurs τ -mesurables

Comme $\underline{\mathcal{M}}$ est semi-finie, nous pouvons alors faire le lien avec la théorie de Nelson et identifier les opérateurs τ -mesurable.

Corollaire 1.3.3

Soit φ un poids normal semi-fini sur \mathcal{M} .

H_φ est τ -mesurable si et seulement si φ est borné. [Haa77]

ou encore :

H_φ est τ -mesurable si et seulement si $\varphi \in \mathcal{M}_*$. [Te]

On note $\overline{\underline{\mathcal{M}}}_+$ l'ensemble des éléments de $\overline{\underline{\mathcal{M}}}$ positifs autoadjoints.

θ_s , $s \in \mathbb{R}$, se prolonge en un \star -automorphisme continu, encore noté θ_s , sur $\overline{\underline{\mathcal{M}}}$ ($\overline{\underline{\mathcal{M}}}$ désignant comme précédemment les opérateurs τ -mesurables affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$).

Théorème 1.3.1

- 1) L'application $\varphi \mapsto H_\varphi$ se prolonge en une bijection linéaire, encore notée $\varphi \mapsto H_\varphi$, de \mathcal{M}_* sur le sous espace $\{H \in \overline{\mathcal{M}} : \forall s \in \mathbb{R}, \theta_s H = e^{-s} H\}$ de $\overline{\mathcal{M}}$.
- 2) Pour $\varphi \in \mathcal{M}_*$ et $T, S \in \mathcal{M}$, on a :

$$\begin{cases} h_{T \cdot H \cdot S^*} = TH_\varphi \cdot S^* \\ H_{\varphi^*} = H_\varphi^* \end{cases}$$

- 3) Si $\varphi = U|\varphi|$ est la décomposition polaire de φ , alors $H = UH_{|\varphi|}$ est la décomposition polaire de H_φ . En particulier, $|H_\varphi| = H_{|\varphi|}$.

Espaces L^p

Ce qui précède permet de définir les espaces L^p comme dans [Haa77]

Définition 1.3.4

- 1) On définit, pour $p \in [1; +\infty[$, $L^p(\mathcal{M})$ comme étant l'ensemble des opérateurs A de $\overline{\mathcal{M}}$ (i.e. les opérateurs τ -mesurables affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$) tels que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\theta_s A = e^{-\frac{s}{p}} A$.
- 2) On définit $L^\infty(\mathcal{M})$ comme étant l'ensemble des opérateurs A τ -mesurables affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$ tels que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on ait $\theta_s A = A$.

Remarque 1.3.1

Les $L^p(\mathcal{M})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\overline{\mathcal{M}}$.

Ils sont engendrés par leur partie positive $L^p(\mathcal{M})_+ = L^p(\mathcal{M}) \cap \overline{\mathcal{M}}_+$

Définition 1.3.5

On définit sur $L^1(\mathcal{M})$ une forme linéaire Tr par $\text{Tr}(H_\varphi) = \varphi(1)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_*$. On pose $\|T\|_1 = \text{Tr}(|T|)$ pour $T \in L^1(\mathcal{M})$. Il s'agit d'une norme sur $L^1(\mathcal{M})$.

Identifications

Indiquons ici quelques propriétés intéressantes de ces espaces, ainsi que des spécificités qui les distinguent des espaces L^p classiques. En particulier, la première proposition sera très utile pour expliciter l'espace L^1 d'une algèbre de von Neumann d'un groupoïde.

Proposition 1.3.4

D'après le théorème 1.3.1, $L^1(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}_*$.

Plus précisément, $\varphi \mapsto H_\varphi$ est une isométrie de \mathcal{M}_* sur $L^1(\mathcal{M})$.

Remarque 1.3.2

a) Si $p \neq q$, $L^p(\mathcal{M}) \cap L^q(\mathcal{M}) = \{0\}$.

b) Si $p < \infty$, alors tout opérateur non nul de L^p est non borné.

Proposition 1.3.5

$L^\infty(\mathcal{M})$ ne contient que des opérateurs bornés. Donc

$$L^\infty(\mathcal{M}) = \{T \in \underline{\mathcal{M}} : \theta_s T = T, s \in \mathbb{R}\} = \mathcal{M}.$$

Normes

On définit alors une norme sur les espaces $L^p(\mathcal{M})$. Pour ce faire, commençons par une caractérisation des L^p :

Proposition 1.3.6

Soit $p \in [1; +\infty[$. Soit A un opérateur fermé, densément-défini affilié à $\underline{\mathcal{M}}$, de décomposition polaire $A = U|A|$.

$$A \in L^p(\mathcal{M}) \iff U \in \mathcal{M} \text{ et } |A|^p \in L^1(\mathcal{M})$$

La définition suivante a donc bien un sens :

Définition 1.3.6

1) Soit $p \in [1; +\infty[$. On définit alors $\|\cdot\|_p$ sur $L^p(\mathcal{M})$ par $\|A\|_p = \text{Tr}(|A|^p)^{\frac{1}{p}}$, pour $A \in L^p(\mathcal{M})$.

2) Pour $A \in L^\infty(\mathcal{M})$, on pose $\|A\|_\infty = \|A\|$. C'est une norme.

Il n'est pas évident à ce stade de l'étude que $\|\cdot\|_p$ est une norme si $p \in]1; +\infty[$.

Proposition 1.3.7

Soit $p, q \in [1; +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $A \in L^p(\mathcal{M})$ et $B \in L^q(\mathcal{M})$. Alors AB et BA appartiennent à $L^1(\mathcal{M})$ et $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Corollaire 1.3.8 ([Haa77])

1) Pour tout $T \in L^1(\mathcal{M})$ et tout unitaire $U \in \mathcal{M}$, on a $\text{Tr}(UTU^*) = \text{Tr}(T)$.

2) Pour tout $T \in L^2(\mathcal{M})$, $\text{Tr}(T^*T) = \text{Tr}(TT^*)$

Ces propriétés été établies, on peut démontrer les inégalités classiques des espaces L^p commutatifs, notamment les inégalités de Hölder, Minkowski, Clarkson... Les espaces $L^p(\mathcal{M})$ munis de $\|\cdot\|_p$ sont des espaces de Banach et $L^2(\mathcal{M})$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire donné par $(A|B) = \tau(B^*A)$.

Indépendance du choix de φ_0

Les espaces $L^p(\mathcal{M})$ sont canoniquement associés à \mathcal{M} , car indépendants, à isomorphisme près, du choix de φ_0 .

En effet, si on prend deux poids φ_0 et φ_1 et que l'on définit les produits croisés $\underline{\mathcal{M}}_0$ et $\underline{\mathcal{M}}_1$, alors $\underline{\mathcal{M}}_0$ est engendré par $\iota_0(T), V_s$ et $\underline{\mathcal{M}}_1$ par $\iota_1(T), V_s$.

$s \mapsto \theta_s$ est l'action duale de \mathbb{R} dans $\underline{\mathcal{M}}_0$ et $\underline{\mathcal{M}}_1$. On a

$$\theta_s(T) = \mu_s T \mu_s^{-1}, \text{ où } \mu_s \text{ est un unitaire sur } L^2(\mathcal{M}, \mathcal{H})$$

donné par $(\mu_s \xi)(t) = e^{-ist} \xi(t)$, $\xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $t \in \mathbb{R}$.

On a les traces τ_0 et τ_1 .

Théorème 1.3.2

Il existe $\kappa : \underline{\mathcal{M}}_0 \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_1$ isomorphisme tel que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \kappa \circ \theta_s \kappa^{-1} = \theta_s \text{ et } \tau_1 = \tau_0 \circ \kappa^{-1}$$

Corollaire 1.3.9

L'application $\kappa : \underline{\mathcal{M}}_0 \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_1$ se prolonge en un \star -isomorphisme topologique $\tilde{\kappa} : \overline{\underline{\mathcal{M}}_0} \longrightarrow \overline{\underline{\mathcal{M}}_1}$

Pour terminer, on peut s'intéresser au cas semi-fini.

Cas semi-fini

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann semi-finie. Alors il existe une trace normale, fidèle, semi-finie τ_0 sur \mathcal{M} . On applique donc la construction de $L^p(\mathcal{M})$ avec $\varphi_0 = \tau_0$.

En identifiant $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ et $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$, on a ([Haa77])

$$\mathcal{M} \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R} = \mathcal{M} \otimes U(\mathbb{R})$$

où $U(\mathbb{R})$ est l'algèbre de von Neumann associée à la représentation régulière gauche du groupe \mathbb{R} .

Notons \mathcal{F} l'opérateur de Fourier-Plancherel $L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\widehat{\mathbb{R}})$ défini par

$$(\mathcal{F}f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t) dt$$

Alors $U(\mathbb{R}) = \mathcal{F}F^*L^\infty(\widehat{\mathbb{R}})\mathcal{F}F$, où $L^\infty(\widehat{\mathbb{R}})$ agit en tant qu'opérateur de multiplication sur $L^2(\widehat{\mathbb{R}})$.

On a donc $\mathcal{M} \rtimes_{\sigma^{\tau_0}} \mathbb{R} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{F}^*L^\infty(\widehat{\mathbb{R}})\mathcal{F}$.

Soit f une fonction borélienne sur $\widehat{\mathbb{R}}$. On note $M(f)$ l'opérateur de multiplication fermé densément défini $g \longmapsto fg$ sur $L^2(\widehat{\mathbb{R}})$.

Théorème 1.3.3

Soit $p \in [1; +\infty[$. Si $A \in L^p(\mathcal{M}, \tau_0)$ alors $A \otimes \mathcal{F}^*M(\exp\frac{s}{p})\mathcal{F} \in L^p(\mathcal{M})$ et l'application $A \longmapsto A \otimes \mathcal{F}^*M(\exp\frac{s}{p})\mathcal{F}$ est une isométrie de $L^p(\mathcal{M}, \tau_0)$ sur $L^p(\mathcal{M})$.

(Ici, $L^p(\mathcal{M}, \tau_0)$ désigne l'espace L^p relatif à la trace τ_0 au sens usuel.)

1.3.2 Espaces L^p au sens de Connes et Hilsun

Nous donnons ici la définition des espaces L^p non commutatifs donnée par A. Connes dans [Co80]. Elle s'appuie sur la théorie des dérivées spatiales, développée dans l'article [Co80]. À partir de cette définition, M. Hilsun [Hi81] a démontré les principales propriétés des espaces L^p . Cette théorie a été reprise par M. Terp [Te] qui a donné quelques définitions différentes de certaines notions, mais malgré tout cohérentes.

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .

Soit Ψ un poids normal fidèle semi-fini sur le commutant \mathcal{M}' de \mathcal{M} . \mathcal{H} est un \mathcal{M}' -module, c'est-à-dire qu'il existe une représentation normale non dégénérée de \mathcal{M}' sur \mathcal{H} . On définit $n_\Psi \stackrel{\text{déf}}{=} \{T \in \mathcal{M}' : \Psi(T^*T) < \infty\}$ et \mathcal{H}_Ψ l'espace de Hilbert complété de n_Ψ pour le produit scalaire $(T, S) \mapsto \Psi(S^*T)$.

On définit enfin η_ψ , l'injection canonique de n_Ψ sur \mathcal{H}_Ψ et π_Ψ la représentation canonique de \mathcal{M}' sur \mathcal{H}_Ψ .

Définition d'opérateurs particuliers

Pour commencer, donnons les définitions de [Co80] dans le paragraphe *Preliminaries on N -modules*.

Définition 1.3.7 ([Co80])

Un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est dit Ψ -borné s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall T \in n_\Psi, \quad \|T\xi\| \leq C \|\eta_\psi(T)\|$$

On note $D(\mathcal{H}, \Psi) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\xi \in \mathcal{H} \mid \xi \text{ } \Psi\text{-borné}\}$.

Pour $\xi \in D(\mathcal{H}, \Psi)$, il existe un unique opérateur borné $R^\Psi(\xi)$ de \mathcal{H}_Ψ dans \mathcal{H} tel que

$$\forall T \in n_\Psi, \quad R^\Psi(\xi)\eta_\Psi(T) = T\xi$$

Par construction, $R^\Psi(\xi)$ est un opérateur de multiplication à droite, \mathcal{M}' -linéaire ainsi que son adjoint. De plus, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, $((R^\Psi(\xi))^*\alpha|_{\eta_\psi(T)}) = (\alpha|T\xi)$.

Dans [Te], M. Terp définit $R^\Psi(\xi)$ comme un opérateur non borné, pour $\xi \in \mathcal{H}$. Ainsi

Définition 1.3.8 ([Te])

Soit $\xi \in \mathcal{H}$. On note $R^\Psi(\xi)$ l'opérateur (densément défini) de \mathcal{H}_Ψ dans \mathcal{H} défini par

$$\forall T \in n_\Psi, \quad R^\Psi(\xi)\eta_\Psi(T) = T\xi$$

Avec ces mêmes définitions, [Hi81] définit l'ensemble des vecteurs fermables comme suit :

Définition 1.3.9

On dit que $\xi \in \mathcal{H}$ est ψ -fermable si l'opérateur $R^\psi(\xi)$ de la définition 1.3.8 est fermable.

On note $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \psi)$ l'ensemble des vecteurs ψ -fermables.

Si $\xi \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \psi)$, $R^\psi(\xi)$ est la fermeture de cet opérateur.

Cet opérateur a les propriétés suivantes

Proposition 1.3.10

Soit $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{M}$ et $S \in \mathcal{M}'$. On a :

$$\begin{array}{l|l} i) R^\Psi(\xi_1 + \xi_2) = R^\Psi(\xi_1) + R^\Psi(\xi_2) & iv) R^\Psi(\xi_1)^* + R^\Psi(\xi_2)^* \subseteq R^\Psi(\xi_1 + \xi_2)^* \\ ii) R^\Psi(T\xi) = TR^\Psi(\xi) & v) R^\Psi(T\xi)^* = R^\Psi(\xi)^*T^* \\ iii) SR^\Psi(\xi) \subseteq R^\Psi(\xi)n_\Psi(S) & vi) \pi_\Psi(S)R^\Psi(\xi)^* \subseteq R^\Psi(\xi)^*S \end{array}$$

$D(\mathcal{H}, \Psi)$ correspond donc aux vecteurs ξ tels que $R^\Psi(\xi)$ soit un opérateur borné, prolongeable à \mathcal{H}_Ψ et encore noté R^Ψ .

Proposition 1.3.11 ([Co80] et [Te])

$D(\mathcal{H}, \Psi)$ est un sous-espace dense, \mathcal{M} -invariant, de \mathcal{H} .

A. Connes définit alors des opérateurs Θ^Ψ qui engendrent un idéal bilatère \mathcal{J}_Ψ faiblement dense de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}'}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}''$ par

$$\Theta^\Psi(\xi, \eta) \stackrel{\text{déf}}{=} R^\Psi(\xi)(R^\Psi(\eta))^*, \quad \forall \xi, \eta \in D(\mathcal{H}, \Psi)$$

Par ailleurs, on a les propriétés suivantes

Proposition 1.3.12 ([Co80] proposition 3)

1) Tout élément positif de \mathcal{J}_Ψ est une somme finie

$$T = \sum_{i=1}^n \Theta^\Psi(\xi_i, \xi_i), \quad \xi_i \in D(\mathcal{H}, \Psi)$$

2) Il existe une famille $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ de vecteurs Ψ -bornés telle que $\sum \Theta^\Psi(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = 1$

Formes quadratiques fermables

Avant de définir les dérivées spatiales, quelques rappels concernant les formes quadratiques positives sont nécessaires ([Co80], *Preliminaries on closable forms*). \mathcal{H} désigne ici un espace de Hilbert.

Définition 1.3.10

Soit D un sous-espace dense de \mathcal{H} . Une forme quadratique positive (ou simplement forme positive) sur D est une application q de D dans $[0; +\infty]$ telle que

- 1) $\forall \xi \in D, \forall \lambda \in \mathbb{C}, q(\lambda\xi) = |\lambda|^2 q(\xi)$
- 2) $\forall \xi, \eta \in D, q(\xi + \eta) + q(\xi - \eta) = 2q(\xi) + 2q(\eta)$

On appelle domaine de q , noté $\mathcal{Q}(q)$, l'ensemble des $\xi \in D$ tels que $q(\xi) < +\infty$.

Définition 1.3.11

Une forme positive q est dite

i) semi-continue inférieurement (s.c.i.) si

$$q(\xi_n) \leq \alpha, \quad \xi_n \rightarrow \xi \implies q(\xi) \leq \alpha$$

ii) densément définie si son domaine $\mathcal{Q}(q) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\xi \in \mathcal{H} : q(\xi) < \infty\}$ est dense dans \mathcal{H}

La semi-continuité d'une forme positive peut être caractérisée par le lemme suivant :

Lemme 2 ([Co80])

1) Soit q une forme positive de domaine dense, sur D . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une forme quadratique positive fermée (voir A.1.5) p sur \mathcal{H} , telle que $\mathcal{Q}(p) \cap D = \mathcal{Q}(q)$ et $q(\xi) = p(\xi, \xi)$ pour tout $\xi \in \mathcal{Q}(q)$.

b) L'application $\xi \mapsto q(\xi)$ est semi-continue inférieurement.

2) Sous les conditions ci-dessus, l'opérateur positif T associé à la fermeture de $q|_{\mathcal{Q}(q)}$ est le plus grand opérateur positif autoadjoint tel que $\|T^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 = q(\xi)$, $\forall \xi \in \mathcal{Q}(q)$.

On note, par abus de langage, lorsque T est un opérateur autoadjoint positif :

$$(T\xi|\xi) = \left\|T^{\frac{1}{2}}\xi\right\|^2 \quad \text{si } \xi \in \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad (T\xi|\xi) = +\infty \quad \text{sinon.}$$

Dérivée spatiale

Soit φ un poids normal semi-fini sur \mathcal{M} . La définition de la dérivée spatiale $\frac{d\varphi}{d\psi}$ se fait grâce à une forme positive (quadratique) particulière. A. Connes pose $q(\xi) = \varphi(\Theta^\Psi(\xi, \xi))$ pour $\xi \in D(\mathcal{H}, \Psi)$ et démontre que l'on définit ainsi une forme positive semi-continue inférieurement sur $D(\mathcal{H}, \Psi)$, de domaine dense. On a alors

Définition 1.3.12

La dérivée spatiale $\frac{d\varphi}{d\Psi}$ est l'opérateur positif autoadjoint associé à q comme dans le lemme 2. Ainsi, $\frac{d\varphi}{d\Psi}$ est le plus grand opérateur positif autoadjoint T tel que

$$(T\xi|\xi) = \varphi(\Theta^\Psi(\xi, \xi)), \quad \forall \xi \in D(\mathcal{H}, \Psi)$$

On peut alors énoncer quelques propriétés des dérivées spatiales, démontrées dans [Co80] (proposition 8)

Proposition 1.3.13

1) Si $\varphi(1) < +\infty$, alors $D(\mathcal{H}, \Psi) \subset \mathcal{D}\left(\frac{d\varphi}{d\Psi}\right)^{\frac{1}{2}}$ et $D(\mathcal{H}, \Psi)$ est un domaine essentiel pour cet opérateur.

Par ailleurs, si $\varphi_1(1) < +\infty$ et $\varphi_2(1) < +\infty$, alors

$$\frac{d\varphi_1 + \varphi_2}{d\Psi} = \frac{d\varphi_1}{d\Psi} + \frac{d\varphi_2}{d\Psi}$$

2) $\varphi_1 \leq \varphi_2 \iff \frac{d\varphi_1}{d\Psi} \leq \frac{d\varphi_2}{d\Psi}$

3) Si $A \in \mathcal{M}$ est inversible, alors $\frac{d(A\varphi A^*)}{d\Psi} = A \left(\frac{d\varphi}{d\Psi}\right) A^*$

Dans le cas où les poids sont fidèles sur \mathcal{M} , on peut s'intéresser au lien avec la théorie modulaire.

Propriétés modulaires des dérivées spatiales

Théorème 1.3.4

Soit φ_1 et φ_2 des poids normaux, fidèles, semi-finis sur \mathcal{M} .
Soit Ψ un poids normal, fidèle semi-fini sur \mathcal{M}' . Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, (D\varphi_1 : D\varphi_2)_t = \left(\frac{d\varphi_1}{d\psi} \right)^{it} \left(\frac{d\varphi_2}{d\psi} \right)^{-it}$$

(l'injectivité des dérivées spatiales est assurée car les φ_i sont fidèles)

Théorème 1.3.5

Soit φ, ψ des poids fidèles normaux semi-finis sur \mathcal{M} et \mathcal{M}' . Alors :

- i) $\forall T \in \mathcal{M}, \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_t^\varphi(T) = \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^{it} T \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^{-it}$
- ii) $\forall S \in \mathcal{M}', \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_t^\psi(S) = \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^{-it} S \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^{it}$
- iii) $\left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^{-1} = \frac{d\psi}{d\varphi}$

Citons alors trois corollaires, les deux premiers étant de [Co80] et le troisième de [Te]

Corollaire 1.3.14

Soit ξ un vecteur Ψ -borné et η un vecteur φ -borné. Alors

$$|(\xi|\eta)|^2 \leq \varphi(\Theta^\Psi(\xi, \xi))\Psi(\Theta^\varphi(\eta, \eta))$$

Corollaire 1.3.15

Soit φ un poids sur \mathcal{M} . Alors $\text{Supp} \left(\frac{d\varphi}{d\Psi} \right) = \text{Supp}(\varphi)$.

Corollaire 1.3.16

Soit φ, ψ des poids normaux semi-finis fidèles sur \mathcal{M} et \mathcal{M}' . Alors

- i) $\frac{d\varphi}{d\psi}$ est affilié à \mathcal{M}' si et seulement si φ est une trace.
- ii) $\frac{d\varphi}{d\psi}$ est affilié à \mathcal{M} si et seulement si ψ est une trace.
- iii) $\frac{d\varphi}{d\psi}$ est affilié à $Z(\mathcal{M})$ si et seulement si φ et ψ sont des traces.

On peut maintenant caractériser les opérateurs de la forme $\frac{d\varphi}{d\psi}$ et définir le poids associé à un opérateur.

Poids associé à un opérateur homogène

Théorème 1.3.6 ([Co80], theorem 13)

Soit Ψ un poids semi-fini normal fidèle sur \mathcal{M}' et soit T un opérateur positif autoadjoint sur \mathcal{H} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un poids φ (nécessairement unique) normal semi-fini sur \mathcal{M} tel que $T = \frac{d\varphi}{d\psi}$.

ii) $\forall S \in \mathcal{M}', \forall t \in \mathbb{R}, T^{it}\sigma_t^\Psi(S) = ST^{it}$.

iii) $D(\mathcal{H}, \Psi) \cap \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}})$ est un domaine essentiel pour $T^{\frac{1}{2}}$ et le nombre $\sum_{i=1}^n (T\xi_i | \xi_i)$ ne dépend

que de $\sum_{i=1}^n \Theta^\Psi(\xi_i, \xi_i)$ pour $\xi_i \in D(\mathcal{H}, \Psi)$

La condition ii) peut encore s'écrire $\sigma_{-t}^\Psi(S)T^{it} = T^{it}S$ en remplaçant t par $-t$.

Un opérateur positif vérifiant cette propriété est dit homogène de degré -1 [Co80] (ou -1 -homogène [Te]). Les opérateurs positifs autoadjoints -1 -homogènes sont donc les $\frac{d\varphi}{d\Psi}$, où φ est un poids normal semi-fini sur \mathcal{M} .

Remarque 1.3.3

$\varphi \mapsto \frac{d\varphi}{d\psi}$ est injective.

Un premier corollaire du théorème est le suivant

Corollaire 1.3.17 ([Co80])

Soit (φ_n) une suite croissante de poids normaux fidèles sur \mathcal{M} . Si $\varphi = \sup \varphi_n$ est semi-fini, alors $\frac{d\varphi_n}{d\Psi}$ croît vers $\frac{d\varphi}{d\Psi}$ et, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_t^{\varphi_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma_t^\varphi$ dans $\text{Aut}(\mathcal{M})$, la convergence étant considérée pour la topologie normique ponctuelle dans le préduel.

Corollaire 1.3.18 ([Te])

Si \mathcal{M} est semi-finie et τ et τ' sont des traces normales fidèles semi-finies respectivement sur \mathcal{M} et \mathcal{M}' , alors :

Pour tout poids normal semi-fini φ sur \mathcal{M} , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left(\frac{d\varphi}{d\tau'} \right)^{it} = (D\varphi : D\tau)_t$$

Autrement dit : pour tout opérateur autoadjoint positif H affilié à \mathcal{M} , on a $\frac{d\tau(H \cdot)}{d\tau'} = H$

Pour aller plus loin, définissons la notion d'opérateur homogène.

Homogénéité

Définition 1.3.13

Soit φ un poids normal, fidèle semi-fini sur \mathcal{M}' , et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Un opérateur fermé densément défini T sur \mathcal{H} , de décomposition polaire $T = u|T|$, est dit α -homogène ou homogène de degré α par rapport à ψ si

$$u \in \mathcal{M} \text{ et } \forall S \in \mathcal{M}', \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_{\alpha t}^{\psi}(S) |T|^{it} = |T|^{it} S$$

Dans [Te], M. Terp démontre que cette condition est équivalente à

$$ST \subseteq T\sigma_{i\alpha}^{\psi}(S) : \forall S \in \mathcal{M}' \text{ analytique par rapport à } \sigma^{\psi}$$

Nous avons précédemment dit que les opérateurs -1 -homogènes positifs autoadjoints sont les $\frac{d\varphi}{d\psi}$. Ajoutons que les opérateurs 0 -homogènes sont les opérateurs affiliés à \mathcal{M} .

Le corollaire suivant permet de préparer la définition des espaces L^p non commutatifs.

Corollaire 1.3.19

Soit T un opérateur positif autoadjoint sur \mathcal{H} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists \varphi \in (\mathcal{M}_{\star})_{+}$ tel que $T = \frac{d\varphi}{d\Psi}$
2. T est -1 -homogène et, pour une certaine famille $(\xi_{\alpha})_{\alpha}$ vérifiant $\xi_{\alpha} \in D(\mathcal{H}, \Psi)$ et $\sum \Theta^{\Psi}(\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}) = 1$, on a $\sum (T\xi_{\alpha}|\xi_{\alpha}) < +\infty$
3. $D(\mathcal{H}, \Psi) \subset \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}})$ est un domaine essentiel pour $T^{\frac{1}{2}}$ et il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\left| \sum_{i=1}^n (T\xi_i|\eta_i) \right| \leq C \left\| \sum \Theta^{\Psi}(\xi_i, \eta_i) \right\|, \quad \forall \xi_i, \eta_i \in D(\mathcal{H}, \Psi)$$

En particulier, $\varphi(1) = \sum (T\xi_{\alpha}|\xi_{\alpha})$ pour toute famille (ξ_{α}) avec $\sum \Theta^{\Psi}(\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}) = 1$. Ceci justifie la notation $\int Td\Psi$ pour T opérateur positif autoadjoint -1 -homogène

$$\int Td\Psi = \sum (T\xi_{\alpha}|\xi_{\alpha}) \quad \text{indépendamment de } (\xi_{\alpha}) \text{ telle que } \sum \Theta^{\Psi}(\xi_{\alpha}, \xi_{\alpha}) = 1$$

Définition 1.3.14

On dit que T est intégrable s'il satisfait l'une des conditions équivalentes du corollaire 1.3.19.

De même, on peut définir les espaces L^p comme suit : $L^p(\mathcal{M}, \Psi)$ est l'ensemble des opérateurs T sur \mathcal{H} qui sont $\left(-\frac{1}{p}\right)$ -homogènes et tels que $|T|^p$ est intégrable.

Citons pour compléter ce point de vue le corollaire suivant

Corollaire 1.3.20 ([Te])

Soit ψ un poids normal fidèle semifini sur \mathcal{M}' .

Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit A un opérateur fermé densément défini sur \mathcal{H} , de décomposition polaire $A = U|A|$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $U \in \mathcal{M}$ et $|A|^p = \frac{d\varphi}{d\psi}$ pour un certain poids normal semi-fini φ sur \mathcal{M} .

ii) A est $\left(-\frac{1}{p}\right)$ -homogène.

M. Hilsum [Hi81] donne par ailleurs les définitions suivantes : pour $\varphi \in \mathcal{M}$, on pose $\frac{d\varphi}{d\psi} = U \frac{d|\varphi|}{d\psi}$, si $\varphi = U|\varphi|$.

On définit alors $\int \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi = \varphi(1)$.

Définition 1.3.15

Si $T \in L^p(\mathcal{M}, \psi)$, $p > 0$, on pose $\|T\|_p = \left(\int \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi\right)^{\frac{1}{p}}$, avec $|T|^p = \frac{d\varphi}{d\psi}$.

Lien avec la définition d'Haagerup et propriétés des espaces L^p

M. Hilsum [Hi81] a fait le lien entre les espaces L^p au sens d'A. Connes et les espaces L^p au sens d'U. Haagerup. Il définit pour cela l'algèbre de von Neumann $W(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}))$ engendrée par les opérateurs

$$\begin{cases} T \otimes 1 & \text{pour } T \in \mathcal{M} \\ \frac{d\varphi}{d\psi_0} \otimes V & \text{pour } \varphi \text{ poids normal semi-fini sur } \mathcal{M} \end{cases}$$

où, pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $V^{it}f(s) = f(s-t)$

Il définit ensuite un isomorphisme U de $H \otimes L^2(\mathbb{R})$ en posant

$$(U\xi)(s) = \left(\frac{d\varphi_0}{d\psi_0}\right)^{is} \xi(s) \quad \text{pour } \xi \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \simeq \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$$

Le produit croisé $\underline{\mathcal{M}}$ défini précédemment est alors tel que $U^*\underline{\mathcal{M}}U = W(\mathcal{M})$ et l'identification de $\underline{\mathcal{M}}$ et $W(\mathcal{M})$ grâce à cet isomorphisme permet de démontrer

Théorème 1.3.7

Soit T un opérateur fermé sur \mathcal{H} . Alors $T \in L^p(\mathcal{M}, \psi_0)$ si et seulement si $T \otimes V^{\frac{1}{p}} \in L^p(\mathcal{M})$.

M. Hilsum démontre alors

Proposition 1.3.21

$L^2(\mathcal{M}, \psi)$ est un espace préhilbertien avec le produit scalaire $(S, T)_2 = \int S^*T d\psi$.

Puis il s'intéresse directement aux espaces L^p définis avec la théorie spatiale.

Proposition 1.3.22

Soit $p, q > 2$ avec $p^{-1} + q^{-1} = \frac{1}{2}$. Soit $S \in L^p$ et $T \in L^q$. Alors $S(D(\mathcal{H}, \psi)) \subset \mathcal{D}(T)$; autrement dit, pour $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi)$, on a $(TS)\xi = T(S\xi)$.

Proposition 1.3.23

Soit $p, q > 1$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Soit $S \in L^p(\mathcal{M}, \psi)$ et $T \in L^q(\mathcal{M}, \psi)$.

1) Soit $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi) \cap \mathcal{D}(T)$ et $\eta \in D(\mathcal{H}, \psi) \cap \mathcal{D}(S^*)$. Alors

$$\langle ST, \Theta^\psi(\xi, \eta) \rangle_{L^1, L^\infty} = \langle T\xi, S^*\eta \rangle$$

2) $D(\mathcal{H}, \psi) \cap \mathcal{D}(T) \cap T^{-1}(\mathcal{D}(S))$ est un domaine essentiel pour ST i.e. l'ensemble des $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi)$ tels que $(ST)\xi = S(T\xi)$ est un domaine essentiel pour ST .

Corollaire 1.3.24

Soit $A \in L^1(\mathcal{M}, \psi)_+$, $A = \frac{d\varphi}{d\psi}$. Soit $T, S \in \mathcal{M}$.

Soit F la fonction KMS sur $\mathcal{B} = \{\operatorname{Re}(z) \in [0; 1]\}$ telle que

$$F(it) = \varphi(\sigma_t^\varphi(S)T) \text{ et } F(1+it) = \varphi(T\sigma_t^\varphi(S))$$

Alors, sur \mathcal{B} , on a $F(z) = \int TA^{1-z}SA^z d\psi$. En particulier, si on a $T = \Theta^\psi(\xi, \eta)$, avec $\xi, \eta \in D(\mathcal{H}, \psi) \cap \mathcal{D}(A)$, alors $F(z) = \langle SA^z\xi, TA^{1-\bar{z}}\eta \rangle$

M. Hilsuim obtient alors, en utilisant le lien avec les espaces L^p définis par Haagerup, les inégalités valables dans les L^p classiques.

1.3.3 Espaces L^p selon Kosaki

H. Kosaki, dans son article de 1984 [Ko84], définit les espaces L^p non commutatifs par interpolation complexe. Nous résumons ici cette construction mais nous ne l'utiliserons pas dans la suite de ce travail.

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann et φ_0 un état normal fidèle normal fidèle.

Méthode d'interpolation complexe

La méthode d'interpolation complexe a été définie par Calderon et s'applique à un couple $X = (X_0; X_1)$ d'espaces de Banach compatibles, pour lequel il existe en particulier un espace \tilde{X} dont X_0 et X_1 peuvent être considérés comme des sous-espaces. On définit la somme algébrique $\Sigma = X_0 + X_1$ des deux espaces, qui est un espace de Banach pour la norme $\|x\|_\Sigma = \inf\{\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1; x = x_0 + x_1; x_j \in X_j\}$

On définit alors un espace de fonctions à valeurs dans Σ

Définition 1.3.16

F est l'ensemble des fonctions f définies sur $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ et à valeurs dans Σ qui vérifient

1. f est bornée et continue; de plus, f est analytique dans l'intérieur pour $\|\cdot\|_\Sigma$.

2. pour $k = 0$ ou $k = 1$, $f(k + it) \in X_k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. pour $k = 0$ ou $k = 1$, l'application $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & X_k \\ t & \longmapsto & f(k + it) \end{cases}$ est $\|\cdot\|_k$ continue et $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|f(k + it)\|_k = 0$

F est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_F = \max(\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_0; \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_1)$$

On peut alors définir les espaces d'interpolation complexe

Définition 1.3.17

Soit $0 < \theta < 1$. L'espace $C_\theta(X_0, X_1)$ est l'ensemble des $f(\theta)$, $f \in F$, muni de la norme d'interpolation complexe

$$\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_F; f \in F, f(\theta) = x\}$$

$C_\theta(X)$ est alors un espace de Banach

Définition des espaces L^p

Pour commencer, il faut envoyer \mathcal{M} dans \mathcal{M}_* grâce à $x \mapsto x\varphi_0$, ce qui permet de considérer \mathcal{M} comme un sous espace de \mathcal{M}_* .

Un élément $x \in \mathcal{M}$ a alors deux normes :

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty & \text{ la norme sur } \mathcal{M} \\ \|x\|_1 = \|x\varphi_0\|_1 & \text{ la norme du préduel} \end{aligned}$$

Définition 1.3.18

- $L^1(\mathcal{M}, \varphi_0) = \mathcal{M}_*$ et $L^\infty(\mathcal{M}, \varphi_0) = \mathcal{M}$.
- Soit $1 < p < +\infty$. On note $L^p(\mathcal{M}, \varphi_0)$ l'espace d'interpolation complexe $C_{\theta=1/p}(\mathcal{M}; \mathcal{M}_*)$. Quel que soit $a \in L^p(\varphi_0)$, la norme d'interpolation $\|a\|_{\theta=1/p}$ est notée $\|a\|_p$.

1.4 Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann commutative

Nous allons maintenant voir ce que donne la définition de [Ne74] dans le cas d'une algèbre de von Neumann abélienne.

1.4.1 Identification

Soit \mathfrak{M} une algèbre de von Neumann commutative et τ une trace normale fidèle semi-finie sur \mathfrak{M} .

Commençons par énoncer le théorème suivant ([Di69], chapitre I, §7.3, théorème 1) :

Théorème 1.4.1

Il existe un espace localement compact X , une tribu complète \mathcal{B} sur X , une classe de mesure m sur X et un isomorphisme isométrique de l'algèbre involutive normée \mathfrak{M} sur l'algèbre involutive normée $L^\infty(X, \mathcal{B}, m)$.

Considérons μ dans la classe de m . Notons ϕ l'isomorphisme entre \mathfrak{M} et $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. Il existe alors τ' de $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ dans $[0; +\infty[$ tel que $\tau' \circ \phi = \tau$

Comme τ est une trace et ϕ un isomorphisme, τ' est nécessairement une trace sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Proposition 1.4.1

Les traces sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ sont les mesures μ' équivalentes à μ .

Démonstration. 1) Soit τ' une trace normale sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Définissons μ' de \mathcal{B} dans $[0; +\infty[$ par $\mu'(A) = \tau'(\mathbf{1}_A)$. Alors μ' est une mesure. En effet,

- $\mu'(\emptyset) = \tau'(0) = 0$ car τ' est une trace.
- Si $A, B \in \mathcal{B}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu'(A + B) = \mu'(A) + \mu'(B)$ par linéarité de la trace.
- Soit (A_n) une suite d'éléments de \mathcal{B} deux à deux disjoints. Alors

$$\mu'(\cup A_n) = \tau'(\mathbf{1}_{\cup A_n}) = \tau'(\sum_n \mathbf{1}_{A_n}).$$

Posons $g_k = \sum_{n=1}^k \mathbf{1}_{A_n}$. La suite (g_k) tend en croissant vers $g = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Comme τ' est normale, $\tau'(g_k)$ tend en croissant vers $\tau'(g)$, ce qui prouve que $\mu'(\cup A_n) = \sum \mu'(A_n)$.

D'autre part, μ' est dans la classe de m . En effet, si $m(A) = 0$, alors $\mathbf{1}_A = 0$ dans $L^\infty(X, \mathcal{B}, m)$ et donc $\tau'(\mathbf{1}_A) = 0$, i.e. $\mu'(A) = 0$.

Réciproquement, si $\mu'(A) = 0$, alors $\tau'(\mathbf{1}_A) = 0$. Comme τ' est fidèle, on en déduit que $\mathbf{1}_A = 0$ et donc $m(A) = 0$.

Ainsi, $m(A) = 0 \iff \mu'(A) = 0$, ce qui prouve l'affirmation.

2) Soit μ' une mesure équivalente à μ . On peut alors définir une trace sur $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ par l'égalité $\mu'(A) = \tau(\mathbf{1}_A)$. Cette trace est normale et fidèle par construction. \square

Considérons donc $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec μ telle que $\tau'(\mathbf{1}_A) = \mu(A)$. Pour $f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)_+$, on a alors $\tau(\phi^{-1}(f)) = \tau'(f) = \int f d\mu$. La formule $\tau'(f) = \int f d\mu$ est valable pour une classe de fonctions f . Cependant, si f_1 et f_2 sont deux représentants de f , on a $\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$ donc nous travaillerons par la suite avec des fonctions (et non des classes de fonctions.)

Afin de pouvoir identifier les espaces $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ et les $L^p(X, \mu)$, nous aurons besoin d'un théorème plus fort que celui-ci, qui est également démontré dans [Di69] (chapitre II, §6.2, théorème 2).

Théorème 1.4.2

Soit \mathcal{H} un espace hilbertien complexe à base dénombrable, \mathfrak{M} une algèbre de von Neumann abélienne dans \mathcal{H} . Alors il existe un espace compact métrisable X , une mesure μ sur X , un fibré hilbertien $H = (H_x)_{x \in X}$ et un isomorphisme isométrique de \mathcal{H} sur $L^2(X, H)$ qui transforme \mathfrak{M} en l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

Plus précisément, soit $f \in L^\infty(X, \mu)$; on peut définir $M_H(f)g = fg$ pour $g \in L^2(X, H, \mu)$. L'ensemble des $M_H(f)$ est alors une sous-algèbre involutive, notée $\mathcal{M} = M_H(L^\infty(X, \mu))$, de $\mathcal{L}(L^2(X, H, \mu))$.

\mathcal{M} est une algèbre de von Neumann.

Notons alors U l'isométrie précédente. Le théorème signifie que

$$U\mathfrak{M}U^* = M_H(L^\infty(X, \mu))$$

De plus, H est réduit aux scalaires si et seulement si \mathfrak{M} est maximale abélienne.

Soit $f \in L^\infty(X, \mu)_+$. L'isométrie nous permet d'affirmer que

$$U^*M_H(f)U \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \tau(U^*M_H(f)U) = \int f d\mu.$$

L'étude des espaces $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ se ramène donc à celle des $L^p(M_H(L^\infty(X, \mu)), \tau)$.

1.4.2 Identification des $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ et des $L^p(X, \mu)$

Afin de mener cette étude, nous allons commencer par identifier le commutant \mathcal{M}' de \mathcal{M} . Nous rappelons ici le corollaire du théorème II.2.1 de [Di69]

Proposition 1.4.2

Le commutant de \mathcal{M} est l'ensemble des opérateurs décomposables de \mathcal{H} , c'est-à-dire définis par un champ mesurable $x \mapsto T_x$ essentiellement borné.

Nous pouvons alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.4.3

Soit f une fonction mesurable sur X , à valeurs dans \mathbb{C} . Alors l'opérateur non borné $M_H(f)$ défini sur $\mathcal{D}(M_H(f)) = \{g \in L^2(X, H, \mu) : fg \in L^2(X, H, \mu)\}$ par $M_H(f)g = fg$ est fermé et densément défini. Il est affilié à \mathcal{M} .

Démonstration. • Nous commençons par prouver que $M_H(f)$ est densément défini.

Il s'agit de savoir à quelle condition sur f on a $\mathcal{D}(M_H(f))$ dense dans $L^2(X, H, \mu)$.

Or $\mathcal{D}(M_H(f)) = \{g \in L^2(X, H, \mu) : \int \|f(x)g(x)\|_{H_x}^2 d\mu(x) < +\infty\}$

Prouvons que $\mathcal{D}(M_H(f))$ est dense dans $L^2(X, H, \mu)$. Soit $n > 0$ et $g \in L^2(X, H, \mu)$. On pose $g_n = \frac{n}{n + |f|}g$.

Tout d'abord, on remarque que $g_n \in \mathcal{D}(M_H(f))$ car

$$\int \left\| f(x) \frac{n}{n + |f(x)|} g(x) \right\|_{H_x}^2 d\mu(x) \leq \int \|g(x)\|_{H_x}^2 d\mu(x) = \|g\|_{L^2(X, H)}^2.$$

D'autre part, la suite (g_n) converge presque partout vers g et on a :

$$\|g_n(x) - g(x)\|_{H_x} = \frac{|f(x)|}{|f(x)| + n} \|g(x)\|_{H_x}$$

donc $\|g_n(x) - g(x)\|_{H_x}^2 \leq \|g(x)\|_{H_x}^2$.

Par application du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que (g_n) converge vers g dans $L^2(X, H, \mu)$ et donc $\mathcal{D}(M_H(f))$ est dense dans $L^2(X, H, \mu)$.

• Nous prouvons ensuite que $M_H(f)$ est fermé.

Prouver que $M_H(f)$ est fermé revient à démontrer que son graphe $\Gamma(M_H(f))$ est fermé. Soit $(g_n, M_H(f)g_n)$ une suite de $\Gamma(M_H(f))$ qui converge vers (g, h) , c'est-à-dire que g_n tend vers g dans $L^2(X, H, \mu)$ et $M_H(f)g_n$ tend vers h dans $L^2(X, H, \mu)$.

On peut donc extraire une sous-suite $(g_{\varphi(n)})$ de (g_n) qui converge vers g μ -presque partout. La suite $(M_H(f)g_{\varphi(n)})$ converge encore vers h dans $L^2(X, H, \mu)$, donc on peut en extraire une sous-suite, $(M_H(f)g_{n_k})$ qui converge vers h μ -presque partout. Résumons : μ -presque partout, nous avons $g_{n_k} \rightarrow g$ donc $f g_{n_k} \rightarrow fg$ et $f g_{n_k} \rightarrow h$. Par conséquent, $fg = h$ μ -presque partout, ce qui prouve que la limite de la suite $(g_n, M_H(f)g_n)$ appartient encore au graphe de $M_H(f)$. L'opérateur $M_H(f)$ est donc fermé.

• Enfin, nous justifions que $M_H(f)$ est affilié à \mathcal{M} .

Il s'agit de montrer que, quel que soit $S \in \mathcal{M}'$, on a $SM_H(f) \subset M_H(f)S$.

Soit $S = (S_x)_x \in \mathcal{M}'$, soit $\xi \in D(SM_H(f))$. On a $(SM_H(f)_x)\xi_x = S_x f(x)\xi_x$ quel que soit $x \in X$. Mais $f(x) \in \mathbb{C}$ donc $(SM_H(f)_x)\xi_x = f(x)S_x \xi_x$ ce qui prouve que $S\xi \in D(M_H(f))$ et $SM_H(f)\xi = M_H(f)S\xi$. Ainsi, $M_H(f)$ est affilié à \mathcal{M} . \square

Identifions maintenant l'adjoint d'un opérateur.

Proposition 1.4.4

Soit f une fonction mesurable. Alors $M_H(f)^* = M_H(\overline{f})$

Démonstration. On considère $\xi \in \mathcal{D}(M_H(f))$ et $\eta \in \mathcal{D}(M_H(\overline{f}))$ et on remarque tout d'abord que $(f\xi|\eta) = \int_X (f(x)\xi_x|\eta_x)_{H_x} d\mu = (\xi|\overline{f}\eta)$, ce qui prouve que $M_H(\overline{f}) \subset M_H(f)^*$.

Soit maintenant $\eta \in \mathcal{D}(M_H(f)^*)$ et définissons une suite (χ_n) par $\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La suite $(\chi_n M_H(f)^* \eta)$ converge ponctuellement vers $M_H(f)^* \eta$ quand $n \rightarrow +\infty$. En effet, soit $\xi \in L^2(X, H, \mu)$. On a $\chi_n M_H(f)^* \eta \in L^2(X, H, \mu)$ et $(\xi|\chi_n M_H(f)^* \eta) = (\chi_n \xi|M_H(f)^* \eta)$ car χ_n est à valeurs réelles.

Mais $\int \|\chi_n(x)\xi_x f(x)\|_H^2 d\mu(x) \leq n \|\xi\|_{L^2(X,H)}^2 < +\infty$ donc $\chi_n \xi \in \mathcal{D}(M_H(f))$ et donc $(\xi|\chi_n M_H(f)^* \eta) = (M_H(f)\chi_n \xi|\eta)$ ce qui est encore égal à $(\xi|\chi_n \bar{f}\eta)$.

Ainsi, pour μ -presque tout $x \in X$, $(\chi_n M_H(f)^* \eta)(x) = \chi_n(x) \overline{f(x)} \eta_x$ qui tend vers $\bar{f}(x) \eta_x$ quand $n \rightarrow +\infty$. Mais $M_H(\bar{f}) \subset M_H(f)^*$, d'où le résultat annoncé.

Par ailleurs, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a $\|\chi_n(x) M_H(f)^* \eta_x\|_{H_x}^2 \leq \|M_H(f)^* \eta_x\|_{H_x}^2$ et, η étant dans $\mathcal{D}(M_H(f)^*)$, le membre de droite est intégrable. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \|M_H(f)^* \eta\|_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n M_H(f)^* \eta\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in L^2(X,H,\mu): \|\xi\|_2 \leq 1} |(\xi|\chi_n M_H(f)^* \eta)| \end{aligned}$$

puis, en utilisant les mêmes arguments que ci-avant

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in L^2(X,H,\mu): \|\xi\|_2 \leq 1} |(M_H(f)\chi_n \xi|\eta)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in L^2(X,H,\mu): \|\xi\|_2 \leq 1} |(\xi|\chi_n \bar{f}\eta)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\chi_n \bar{f}\eta\|_2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\bar{f}\eta \in L^2(X, \mu)$ et donc $\eta \in \mathcal{D}(M_H(\bar{f}))$.

Finalement, on a bien $M_H(\bar{f}) = M_H(f)^*$ □

Définissons alors les espaces $L^p(\mathcal{M}, \tau)$. Commençons pour cela par démontrer la proposition suivante

Proposition 1.4.5

L'ensemble des opérateurs densément définis fermés affiliés à \mathcal{M} est l'ensemble des opérateurs de la forme $M_H(h)$ avec h fonction mesurable de X dans \mathbb{C} .

Démonstration. L'inclusion des $M_H(h)$ dans l'ensemble des opérateurs densément définis fermés affiliés à \mathcal{M} est claire d'après ce qui précède. Prouvons l'autre inclusion.

Soit T un opérateur densément défini fermé affilié à \mathcal{M} . Considérons la décomposition polaire de T : $T = U|T|$. On sait que $U \in \mathcal{M}$ et $|T|$ est autoadjoint, positif, fermé et $\mathcal{D}(|T|) = D(T)$. On peut donc se restreindre au cas où T est positif autoadjoint et appliquer le calcul fonctionnel ; si f est une fonction bornée sur \mathbb{R} , $f(T)$ est un opérateur positif borné. On a alors, quel que soit $S = (S_x)_x$ décomposable, $Sf(T) = f(T)S$. Mais tout opérateur borné de $\mathcal{L}(H)$ qui commute aux opérateurs décomposables est décomposable donc $f(T)$ est décomposable et s'écrit donc $f(T) = (f(T)_x)_x$ avec $f(T)_x \in \mathcal{L}(H_x)$. On a par ailleurs, quel que soit $S \in \mathcal{M}'$, pour presque tout $x \in X$, $S_x f(T)_x = f(T)_x S_x$.

On en déduit que $f(T)_x$ commute aux opérateurs de $\mathcal{L}(H_x)$ pour presque tout x , et donc $f(T)_x$ est scalaire pour presque tout x . De plus, $f(T)_x$ est positif autoadjoint donc $f(T)_x \in \mathbb{R}_+$.

• Appliquons ce résultat à une suite f_n de fonctions bornées définies par $f_n(x) = x$ si $x \in [-n; n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Cette suite est croissante et tend simplement vers $f : x \mapsto x$.

Par ailleurs, d'après ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction h_n de X dans \mathbb{R}_+ telle que $h_n(x) = f_n(T)_x$ pour presque tout $x \in X$.

D'autre part, on sait que $(f_n(T)_x)_x$ est essentiellement bornée donc $h_n \in L^\infty(X, \mu)_+$.

Nous aurons donc $f_n(T) = M(h_n)$ et donc, pour $\xi \in L^2(X, \mu)$, $f_n(T)\xi = h_n\xi$. Par ailleurs, on aura nécessairement $h_n \geq 0$ presque-partout. En effet, notons (K_p) une suite croissante d'ensembles de mesure finie qui tend vers X et posons $A_p = \{x \in X : h_n < 0\} \cap K_p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Clairement, $\mathbf{1}_{A_p} I_H \in L^2(X, \mu)$ et, $f_n(T)$ étant positif (puisque T est positif autoadjoint), on a, pour $\xi \in H$, $0 \leq (h_n \mathbf{1}_{A_p} \xi | \mathbf{1}_{A_p} \xi) = \int_{A_p} h_n(x) \|\xi_x\|_H^2 d\mu(x)$, ce qui implique que $\mu(A_p) = 0$ quel que soit p .

On pose alors $h = \limsup h_n$. Comme les h_n sont mesurables, il en est de même pour h . Soit (h_{n_k}) une sous-suite de (h_n) qui converge vers h . On a, pour $\xi \in \mathcal{D}(T)$, et $k \in \mathbb{N}$

$$h_{n_k} \xi = f_{n_k}(T)\xi$$

D'après le théorème A.1.5, on a, quel que soit $\xi \in \mathcal{D}(T)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(T)\xi = T\xi$.

Par ailleurs, $h_{n_k} \xi$ converge vers $h\xi$. On en déduit que $h\xi = T\xi$ quel que soit $\xi \in \mathcal{D}(T)$, ce qui prouve que $T = M_H(h)$ avec h mesurable. □

On peut alors prouver le corollaire suivant

Corollaire 1.4.6

Soit $p \in]0; +\infty[$. Alors $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ est l'ensemble des $M_H(f)$ avec $f \in L^p(X, \mu)$.

Démonstration. Nous savons déjà que $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ est contenu dans l'ensemble des $M_H(f)$ avec f mesurable.

Soit tout d'abord f mesurable. On a alors $|M_H(f)| = M_H(|f|)$ d'après le calcul fonctionnel donc $\tau(|M_H(f)|) < +\infty$ si et seulement si $f \in L^1(X, \mu)$.

Pour $p \in]0; +\infty[$, on a de même $|M_H(f)|^p = M_H(|f|^p)$ ce qui prouve également que $\tau(|M_H(f)|^p) < +\infty$ si et seulement si $f \in L^p(X, \mu)$.

De plus, dans tous les cas, $\|M_H(f)\|_p = \|f\|_p$.

Reste le cas de $L^\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$. La conclusion est alors évidente. □

Explicitons maintenant la τ -mesurabilité dans notre cas particulier. L'algèbre des opérateurs τ -mesurable contient tous les espaces $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ et nous généralisons ici la caractérisation suivante de [FK86] :

Proposition 1.4.7 ([FK86] §1.2)

Soit f une fonction mesurable de X dans \mathbb{C} .

$M_H(f)$ est τ -mesurable si et seulement si f est essentiellement bornée sauf sur un sous-ensemble de mesure finie.

Démonstration. Tout d'abord, comme il existe une partition mesurable de X , nous pouvons nous ramener au cas où la dimension de H_x est constante.

Soit alors f une fonction mesurable de X dans \mathbb{C} . La condition de τ -mesurabilité peut se traduire par : $M_H(f)$ est τ -mesurable si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble E mesurable de X tel que

$$\mu(X \setminus E) < +\infty \quad \text{et} \quad M_H(\mathbf{1}_E)L^2(X, H) \subset \mathcal{D}(M_H(f)).$$

La deuxième condition signifie que, quel que soit $\xi \in L^2(X, H, \mu)$, $f\mathbf{1}_E\xi \in L^2(X, H, \mu)$ i.e. $\int_E \|f(x)\xi_x\|_{H_x}^2 d\mu(x) < \infty$. Cela revient à dire que $M_E(f)$ définie pour $\xi \in L^2(E, H, \mu)$ par $M_E(f)\xi = f\xi$ est un opérateur borné de $L^2(E, H, \mu)$.

Mais nous savons déjà que $M_E(f)$ est fermée. D'après le théorème du graphe fermé, on en déduit que $M_E(f)$ est un opérateur borné. Posons alors $C = \|M_E(f)\|$. On a : quel que soit $\xi \in L^2(E, H, \mu)$,

$$\int_E |f(x)|^2 \|\xi_x\|_{H_x}^2 d\mu(x) \leq C^2 \int_E \|\xi_x\|_H^2 d\mu \quad [1]$$

Pour $a > C$, considérons $E_a = \{x \in E : |f(x)| \geq a\}$. Considérons alors un sous-ensemble F de E_a , mesurable, tel que $\mu(F) < +\infty$. Nous allons construire un vecteur ξ de $L^2(E, H, \mu)$ comme suit : $\xi_x = 0$ si $x \notin F$ et ξ_x est égal à un vecteur de H_x de norme 1 si $x \in F$.

Un tel vecteur existe car, d'après [Di69] (II.1.4. prop 1) on peut trouver une suite $(e_i)_i$ de champs mesurables de vecteurs telle que, pour tout $x \in X$, $(e_i(x))_i$ soit une base orthonormale de H_x . On pose alors $\xi_x = 0$ si $x \notin F$ et $\xi_x = e_1(x)$ si $x \in F$. Comme $x \mapsto \|e_1(x)\|_{H_x}$ est mesurable, $(\xi_x)_x$ est mesurable. De plus, $\int \|\xi_x\|_{H_x}^2 d\mu(x) = \int_F \|e_1(x)\|_{H_x}^2 d\mu(x)$ et donc $\int \|\xi_x\|_{H_x}^2 d\mu(x) < \mu(F) < +\infty$, ce qui prouve que $(\xi_x)_x \in L^2(X, H, \mu)$.

On obtient en utilisant la définition de E_a et [1]

$$a^2\mu(F) \leq \int_F |f|^2 d\mu \leq C^2\mu(F)$$

Cette inégalité ne peut être vraie que si $\mu(F) = 0$, c'est-à-dire f essentiellement bornée sur E et $\|f\|_{E, \infty} \leq \|M_E(f)\|$.

Ceci prouve bien la proposition précédente. □

Nous pouvons donc identifier les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann abélienne aux espaces L^p classiques :

Corollaire 1.4.8

$$L^p(\mathfrak{M}, \tau) = U^{-1}M_H(L^p(X, \mu))U$$

Démonstration. Soit T un opérateur densément défini, fermé et affilié à \mathfrak{M} . UTU^{-1} est bien défini sur $U(\mathcal{D}(T))$ et, U étant une isométrie, UTU^{-1} est densément défini, fermé et affilié à $M_H(L^\infty(X, \mu))$.

D'après l'étude précédente, il existe donc f mesurable telle que $UTU^{-1} = M_H(f)$.

Si T est autoadjoint positif, on peut de plus affirmer que f est positive.

Enfin, $\tau(T) = \tau(U^{-1}M_H(f)U) = \tau(M_H(f)) = \int f d\mu$.

Réciproquement, si f est mesurable positive de X dans \mathbb{C} , alors $U^{-1}M_H(f)U$ est un opérateur densément défini, fermé et affilié à \mathfrak{M} .

Intéressons nous alors à $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$.

D'après ce qui précède, $T \in L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ si et seulement s'il existe f mesurable sur X telle que $M_H(f) = UTU^{-1}$ et $\tau(|M_H(f)|^p) < +\infty$, ou encore $\int |f|^p d\mu < +\infty$.

Ainsi, $T \in L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ si et seulement s'il existe $f \in L^p(X, \mu)$ telle que $M_H(f) = UTU^{-1}$. L'isométrie U permet donc d'identifier $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ et $L^p(X, \mu)$. \square

Chapitre 2

Algèbre de von Neumann d'un groupoïde

Nous allons ici présenter différentes définitions possibles de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde. Dans un premier temps, nous donnerons donc les principales définitions et notations utilisées concernant les groupoïdes, puis nous définirons de différentes manières l'algèbre de von Neumann $W^*(G)$ d'un groupoïde G .

Dans un second temps, nous nous intéresserons au produit croisé $W^*(G) \rtimes \mathbb{R}$ et identifierons ce produit croisé à l'algèbre de von Neumann d'un produit gauche. Ceci permettra dans un chapitre suivant d'expliciter la théorie des espaces L^p développée par Haagerup dans le cas d'un groupoïde.

2.1 Groupoïde

2.1.1 Notion de groupoïde

Rappelons tout d'abord la définition d'un groupoïde telle qu'on la trouve dans [Re80], [Ha78-1].

Définition 2.1.1 ([Re80] §I.1 ou [Ha78-1] §1)

Un groupoïde est un ensemble G pour lequel on se donne un sous-ensemble $G^{(2)}$ de $G \times G$,

une application produit $\left. \begin{array}{l} G^{(2)} \longrightarrow G \\ (\gamma, \gamma') \longmapsto \gamma\gamma' \end{array} \right\}$ et une application inverse $\left. \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ \gamma \longmapsto \gamma^{-1} \end{array} \right\}$ tels que

- $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$
- Si $(\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$ et $(\gamma', \gamma'') \in G^{(2)}$ alors $(\gamma\gamma', \gamma'') \in G^{(2)}$, $(\gamma, \gamma'\gamma'') \in G^{(2)}$ et on a $(\gamma\gamma')\gamma'' = \gamma(\gamma'\gamma'')$
- $(\gamma^{-1}, \gamma) \in G^{(2)}$ et si $(\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$, alors $\gamma^{-1}(\gamma\gamma') = \gamma'$

- $(\gamma, \gamma^{-1}) \in G^{(2)}$ et si $(\gamma', \gamma) \in G^{(2)}$, alors $(\gamma'\gamma)\gamma^{-1} = \gamma'$.

On définit alors l'image ou le but de γ par $r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ et la source de γ par $s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma$. On peut donc écrire que $G^{(2)} = \{(\gamma, \gamma') \in G \times G : s(\gamma) = r(\gamma')\}$.

$G^{(0)} \stackrel{\text{déf}}{=} s(G) = r(G)$ est l'espace des unités de G .

Par ailleurs, on pose $G^x = r^{-1}(G)$ et $G_x = s^{-1}(G)$.

En général, on notera γ les éléments de G et, par abus de langage, x, y, \dots les éléments de $G^{(0)}$.

Voici quelques exemples de groupoïdes :

Exemples 1

- *Groupoïde grossier*

Soit X un espace ; on pose $G = X \times X$ et on le munit de la structure de groupoïde suivante : (x, y) et (z, t) sont composables si $y = z$ et on a $(x, y)(z, t) = (x, t)$; $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

On définit r et s par $r(x, y) = (x, x)$ et $s(x, y) = (y, y)$. L'espace des unités est donc la diagonale de $X \times X$ et on l'identifie à X . Ainsi, $G^{(0)} = X$

- *Action de groupe sur un ensemble (ou simplement relation d'équivalence) :*

Soit E un ensemble et Γ un groupe. On note ρ une action de Γ sur E et on considère l'ensemble des classes d'équivalence sous cette action.

On note \mathcal{R} le graphe de la relation d'équivalence et on lui donne une structure de groupoïde comme suit :

(x, y) et (z, t) sont dites composables si $y = z$ et on a alors $(x, y)(z, t) = (x, t)$ et l'inverse est donné par $(x, y)^{-1} = (y, x)$.

On définit également les applications r et s par $r(x, y) = (x, x)$ et $s(x, y) = (y, y)$.

On peut alors identifier l'espace des unités à l'ensemble E .

2.1.2 Groupoïde topologique

Dans tout ce qui suit, nous considérerons un groupoïde topologique G séparé à base dénombrable d'ouverts et localement compact. Commençons tout d'abord par préciser ce vocabulaire, en utilisant par exemple les définitions de [Re80] (§I.2).

Définition 2.1.2

Un groupoïde topologique est un groupoïde G muni d'une topologie compatible avec la structure de groupoïde i.e.

i) l'application de G dans G définie par $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ est continue.

ii) En supposant $G^{(2)}$ muni de la topologie induite par $G \times G$, l'application de $G^{(2)}$ dans G définie par $(\gamma, \gamma') \mapsto \gamma\gamma'$ est continue.

Parmi les conséquences d'une telle définition, on peut noter les faits suivants :

- $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ est un homéomorphisme.
- r et s sont continues.
- Si G est séparé, $G^{(0)}$ est fermé dans G .

- Si $G^{(0)}$ est séparé, $G^{(2)}$ est fermé dans $G \times G$.

Introduisons maintenant la notion de groupoïde mesuré, en utilisant toujours les définitions de [Re80], [Ha78-1] ou [Ra82].

2.1.3 Groupoïde mesuré

Système de Haar

Définition 2.1.3 ([Re80] §I.2)

Soit G un groupoïde localement compact.

Un système de Haar à gauche pour G est un ensemble de mesures $\{\lambda^x, x \in G^{(0)}\}$ sur G tel que :

- i) Le support $\text{supp } \lambda^x$ de λ^x est G^x .
- ii) (continuité) Pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$, $x \mapsto \lambda(f)(x) = \int f d\lambda^x$ est continue.
- iii) (invariance à gauche) Pour tout $\gamma \in G$, pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$,

$$\int f(\gamma\gamma') d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') = \int f(\gamma') d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$$

Mesure quasi-invariante

Soit G un groupoïde localement compact avec un système de Haar à gauche $\{\lambda^x\}$.

On note $\lambda_x = (\lambda^x)^{-1}$ l'image de λ^x par $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$. Alors $\{\lambda_x\}$ est un système de Haar à droite.

Définition 2.1.4

Soit μ une mesure sur $G^{(0)}$. La mesure sur G induite par μ est $\nu = \int \lambda^x d\mu(x)$. La mesure sur $G^{(2)}$ induite par μ est $\nu^2 = \int \lambda_x \times \lambda^x d\mu(x)$.

L'image de ν par $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ est $\nu^{-1} = \int \lambda_x d\mu(x)$.

Définition 2.1.5

Une mesure μ sur $G^{(0)}$ est dite quasi-invariante si la mesure induite ν est équivalente à son inverse ν^{-1} . Une mesure appartenant à la classe de μ est aussi quasi-invariante.

En munissant G d'un système de Haar et d'une mesure quasi-invariante, on définit un groupoïde mesuré ([Ha78-1]). Par ailleurs, lorsque la mesure est quasi-invariante, on pose

$\delta = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$. On obtient ainsi un homomorphisme de G dans \mathbb{R}_+^* , appelé homomorphisme modulaire.

Dans le cas où $\delta = 1$, le groupoïde est dit unimodulaire.

2.1.4 Exemples fondamentaux de groupoïdes mesurés

1) (X, μ) espace mesuré ; $G = X$ et $G^{(0)} = X$.

$G^x = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et on munit G^x de la mesure de Dirac en x .

2) (X, μ) espace mesuré ; $G = X \times X$ et $G^{(0)} = X$.

Pour tout $x \in X$, on a $G^x = \{(x, y) : y \in X\}$. On pose alors $\lambda^x = \epsilon_x \times \mu$, où ϵ_x désigne la mesure de Dirac en x .

Vérifions la condition d'invariance :

$$\int f((x, y)(y, z)) d\lambda^{s(x, y)}(y, z) = \int f(x, z) \epsilon_y(t) d\mu(z) = \int f(x, z) d\mu(z)$$

$$\text{et } \int f(y, z) d\lambda^{r(x, y)}(y, z) = \int f(y, z) \epsilon_x(y) d\mu(z) = \int f(x, z) d\mu(z)$$

donc la mesure est bien invariante à gauche.

Afin de construire l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde mesuré, P. Hahn ([Ha78-2]) introduit des sous-espaces de $L^1(G, \nu)$. Comme nous nous plaçons ici dans un cadre topologique, nous pourrions nous contenter d'utiliser $C_c(G)$, l'espace des fonctions continues à support compact sur G . Cependant, commençons par faire le lien entre $C_c(G)$ et les espaces définis par P. Hahn.

2.1.5 Produit gauche

Nous allons commencer par définir la notion de produit gauche d'un groupoïde par un cocycle en utilisant les définitions de [Re80] et [Bon80].

Définition 2.1.6

Soit G un groupoïde, $(A, +)$ un groupe et $c : G \rightarrow A$ un cocycle, i.e. un homomorphisme de groupoïde.

On définit un groupoïde $G(c) = G \times A$ en définissant :

- $G(c)^{(0)} = G^{(0)} \times A$.
- des applications \underline{r} et \underline{s} définies par $\underline{r}(\gamma, a) = (r(\gamma), a)$ et $\underline{s}(\gamma, a) = (s(\gamma), a + c(\gamma))$
- $G(c)^{(2)} = \{((\gamma, a), (\gamma', b)) : \underline{r}(\gamma, a) = \underline{s}(\gamma', b)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $((\gamma, a), (\gamma', a + c(\gamma)))$ tels que $r(\gamma) = s(\gamma')$.
- une multiplication de $G(c)^{(2)}$ dans $G(c)$ donnée par $(\gamma, a)(\gamma', a + c(\gamma)) = (\gamma\gamma', a)$
- l'inverse par $(\gamma, a)^{-1} = (\gamma^{-1}, a + c(\gamma))$.

Nous noterons par ailleurs $\underline{G}_{x, a}$ l'ensemble des $(\gamma, a - c(\gamma))$, où $\gamma \in G_x$ et $a \in A$ et $\underline{G}^{x, a}$ l'ensemble des (γ, a) , où $\gamma \in G$ vérifie $r(\gamma) = x$ et $a \in A$

Par la suite, nous utiliserons cette définition dans le cas particulier d'un groupoïde mesuré (G, λ, μ) où λ est un système de Haar et μ une mesure quasi-invariante. Le module $\delta : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un cocycle et on peut donc définir $\underline{G} = G(\delta)$ comme ci-dessus.

2.1.6 Mesure sur le produit gauche

Considérons maintenant un groupoïde mesuré (G, λ, μ) , où λ est une mesure de Haar.

Commençons par définir, pour $x \in G$ et $a \in A$, un homéomorphisme $p^{x, a} : G^x \rightarrow G^{x, a}$ en posant $p^{x, a}(\gamma) = (\gamma, a)$. Cela nous permet de définir une mesure $\underline{\lambda}^{x, a}$ sur $G^{x, a}$ par $\underline{\lambda}^{x, a} = (p^{x, a})^* \lambda^x$.

Ceci donne

$$\begin{aligned}\int f(\gamma, b) d\underline{\lambda}^{x,a}(\gamma, b) &= \int f \circ p^{x,a}(\gamma) d\lambda^x(\gamma) \\ \int f(\gamma, b) d\underline{\lambda}^{x,a}(\gamma, b) &= \int f(\gamma, a) d\lambda^x(\gamma) \\ \int f(\gamma, b) d\underline{\lambda}^{x,a}(\gamma, b) &= \int f(\gamma, b) d\lambda^x(\gamma) d\epsilon_a(b)\end{aligned}$$

où ϵ_a est la mesure de Dirac en a .

Ainsi, la mesure $\lambda^{x,a}$ est définie par $\lambda^x \times \epsilon_a$.

Nous obtenons ainsi une isométrie de $L^2(\underline{G}^{x,a}, \underline{\lambda}^{x,a})$ sur $L^2(G^x, \lambda^x)$.

Par ailleurs, sur A , nous pouvons considérer la classe de Haar, notée m . Nous obtiendrons alors le groupoïde mesuré $(G(c), \underline{\lambda} \times \epsilon, \mu \otimes m)$.

Dans le cas où $c = \delta$, la mesure de Lebesgue est dans la classe de Haar et nous considérons en particulier le groupoïde mesuré $(\underline{G}, \underline{\lambda}, \mu \otimes da)$ où da désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^* . On peut alors démontrer le résultat suivant

Théorème 2.1.1

Le groupoïde mesuré $(\underline{G}, \underline{\lambda}, \mu \otimes da)$ est unimodulaire.

Démonstration. Faisons le calcul :

$$\begin{aligned}\int f((\gamma, a)^{-1}) d(\lambda \times \varepsilon)^{(x,a)}(\gamma, t) d\mu(x) da &= \int f((\gamma, a)^{-1}) d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) da \\ &= \int f(\gamma^{-1}, \delta(\gamma)a) d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) da \\ &= \int f(\gamma, \delta(\gamma^{-1})a) d\lambda_x(\gamma) d\mu(x) da \\ &= \int f(\gamma, a) \delta(\gamma) d\lambda_x(\gamma) d\mu(x) da \\ &= \int f(\gamma, a) d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) da \\ &= \int f(\gamma, a) d(\lambda \times \varepsilon)^{(x,a)}(\gamma, a) d\mu(x) da\end{aligned}$$

ce qui prouve que la mesure est invariante $(\mu \otimes da) \circ \underline{\lambda}$ est invariante. \square

Dans la suite, nous noterons $\underline{\mu}$ la mesure sur $G(\delta)^{(0)}$.

De même, nous allons plonger G_x dans $\underline{G}_{x,a}$. Pour cela, définissons l'homéomorphisme $p_{x,a} : G \rightarrow \underline{G}_{x,a}$ par $p_{x,a}(\gamma) = (\gamma, a - c(\gamma))$ pour $\gamma \in G$ tel que $s(\gamma) = x$.

On peut alors définir une mesure de Haar sur $\underline{G}_{x,a}$ comme étant la mesure image de λ_x par $p_{x,a}$, i.e. en posant $\underline{\lambda}_{x,a} = (p_{x,a})^* \lambda_x$. Cela donne, pour $(x, a) \in G \times \mathbb{R}^+$,

$$\int f d\underline{\lambda}_{x,a} = \int f \circ p_{x,a} d\lambda_x$$

Cela donne

$$\begin{aligned}\int f(\gamma, b) d\lambda_{x,a}(\gamma, b) &= \int f \circ p_{x,a}(\gamma) d\lambda_x(\gamma) \\ \int f(\gamma, b) d\lambda_{x,a}(\gamma, b) &= \int f(\gamma, a - c(\gamma)) d\lambda_x(\gamma)\end{aligned}$$

On obtient ainsi une isométrie de $\underline{\mathcal{H}}_{x,a} = L^2(\underline{G}_{x,a}, \underline{\lambda}_{x,a})$ sur $\mathcal{H}_x = L^2(G_x, \lambda_x)$.

Une première façon de définir l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde consiste à utiliser la théorie des algèbres hilbertiennes. Dans tout ce qui suit, nous considérerons un groupoïde mesuré (G, λ, μ) à base dénombrable d'ouverts, localement compact séparé. Par ailleurs, si nous notons δ la fonction modulaire, nous ferons l'hypothèse que δ est continue.

2.2 Construction GNS et algèbre hilbertienne

2.2.1 Choix d'une représentation

Grâce aux hypothèses préalablement énoncées, nous pouvons considérer l'algèbre $\mathfrak{A} = C_c(G)$. Il s'agit d'une algèbre involutive avec les opérations suivantes :

- Produit : $fg = f \star g$ défini par :

$$\forall \gamma \in G, f \star g(\gamma) = \int f(\gamma') g(\gamma'^{-1} \gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$$

ce qui donne aussi

$$\forall \gamma \in G, f \star g(\gamma) = \int f(\gamma \gamma') g(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$$

- Involution $S_0 : f \mapsto f^*$ définie

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$$

On définit également \tilde{f} par $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$

Enfin, sur $C_c(G)$, nous définissons un poids en posant $\tau(f) = \int f|_{G^{(0)}} d\mu$.

Afin d'appliquer la construction GNS à \mathfrak{A} , nous définissons sur \mathfrak{A} un produit scalaire en posant $(f|g) = \tau(g^* \star f)$.

Or $g^* \star f(x) = \int g^*(\gamma') f(\gamma'^{-1}) d\lambda^x(\gamma')$ ce qui donne $g^* \star f(x) = \int \overline{g(\gamma'^{-1})} f(\gamma'^{-1}) d\lambda^x(\gamma')$ ou encore $g^* \star f(x) = \int f(\gamma) \overline{g(\gamma)} d\lambda_x(\gamma)$.

On obtient alors $(f|g) = \int f(\gamma) \overline{g(\gamma)} d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$.

Pour plus de commodité, nous noterons $\nu = \mu \circ \lambda$.

La construction GNS nous permet de définir un espace hilbertien H_τ et une représentation L_τ . D'après ce qui précède, $H_\tau = L^2(G, \nu^{-1})$ et L_τ est définie par $L_\tau(f)\xi = f \star \xi$ pour $f \in \mathfrak{A}$ et $\xi \in H_\tau$.

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{H} = L^2(G, \nu^{-1})$ et $L = L_\tau$.

2.2.2 Normes sur $C_c(G)$

Commençons par rappeler, en les adaptant à notre cas particulier, les définitions de [Ha78-2] (§1).

On note, pour plus de commodité, $\nu = \mu \circ \lambda$ et $\nu_0 = \delta^{-\frac{1}{2}}\nu = \delta^{\frac{1}{2}}\nu^{-1}$.

Pour $f \in L^1(G, \nu_0)$ et $j, k \in L^2(G^{(0)}, \mu)$, $I(f, j, k) = \int |f(\gamma)| |j(s(\gamma))| |k(r(\gamma))| d\nu_0(\gamma)$ dépend seulement des classes de fonctions de f , j et k . On peut donc poser

$$\|f\|_{II} = \sup \left\{ \int |f(\gamma)j(s(\gamma))k(r(\gamma))| d\nu_0(\gamma) : \int |j|^2 d\mu = \int |k|^2 d\mu = 1 \right\}$$

et définir $\text{II}(G, \lambda, \mu) = \{f \in L^1(G, \nu_0) : \|f\|_{II} < +\infty\}$.

Par ailleurs, on définit $\|f\|_I = \max\{\|x \mapsto \int |f| d\lambda^x\|_\infty, \|x \mapsto \int |f| d\lambda_x\|_\infty\}$ et

$$I(G, \lambda, \mu) = \{f \in L^1(G, \nu_0) : \|f\|_I < +\infty\}.$$

On a les égalités et inégalités suivantes :

$$\|f\|_I = \|f^*\|_I, \quad \|f\|_{II} = \|f^*\|_{II} \text{ et } \|f\|_1 \leq \|f\|_{II} \leq \|f\|_I.$$

Les deux premières égalités se démontrent en écrivant simplement les définitions. L'inégalité $\|f\|_1 \leq \|f\|_{II}$ se déduit de l'inégalité donnée par P. Hahn ([Ha78-2] lemme 1.1.) et l'inégalité $\|f\|_{II} \leq \|f\|_I$ se démontre par la même méthode que celle utilisée par P. Hahn dans ce même lemme.

Dans le cas d'un groupoïde localement compact muni d'une mesure σ -finie et telle que δ est bornée sur les compacts (ce qui est le cas si δ est continue), on peut utiliser la proposition suivante, en partie démontrée dans [Re80] (Chapitre II, proposition 1.4).

Proposition 2.2.1

- $C_c(G) \subset \text{II}(G)$ et $C_c(G) \subset \text{I}(G)$
- $\|\cdot\|_I$ est une norme de \star -algèbre sur $C_c(G)$

Preuve. Soit $f \in C_c(G)$. Comme μ est σ -finie et f à support compact, $f \in L^1(G, \nu)$.

• On considère $F : x \mapsto \int |f| d\lambda^x$. Comme $f \in C_c(G)$, d'après les hypothèses sur G , cette application est continue sur $G^{(0)}$. Par ailleurs, r étant continue, $L = r(\text{Supp}(f))$ est un compact de $G^{(0)}$ et donc F est à support compact. On en déduit que F est bornée et atteint ses bornes.

Comme $\|x \mapsto \int |f| d\lambda^x\|_\infty$ et $\|x \mapsto \int |f| d\lambda_x\|_\infty$ sont finies, f appartient bien à $\text{I}(G)$.

- Comme $\|f\|_{II} \leq \|f\|_I$ on a bien $f \in \text{II}(G)$. \square

2.2.3 Construction de l'algèbre de von Neumann

L'application $\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \xi \longmapsto L(\xi) \end{array} \right\}$ est une \star -représentation de \mathfrak{A} . Partant de \mathfrak{A} représentée

dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, nous pouvons par ailleurs appliquer la théorie de Tomita rappelée au paragraphe 1.1.2. En effet :

Proposition 2.2.2

$(\mathfrak{A}, (\cdot | \cdot))$ est une algèbre hilbertienne.

Démonstration. • Soit $f \in \mathfrak{A}$. Par construction, $L(f)$ est un opérateur borné de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A} . En effet, on sait déjà que, si $f, g \in C_c(G)$, alors $f \star g \in C_c(G)$. D'autre part, $L(f)$ est clairement linéaire et nous prouvons ci-après que $L(f) \in \mathcal{L}(L^2(G, \nu^{-1}))$ en explicitant un majorant pour sa norme :

Soit $g, k \in L^2(G, \nu^{-1})$. On a alors :

$$\begin{aligned} |(L(f)g|k)| &= \left| \int \int f(\gamma') g(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \overline{k(\gamma)} d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \right| \\ &\leq \int \int |f(\gamma')| |g(\gamma'^{-1}\gamma)| d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') |k(\gamma)| d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ &\leq \int \int |f(\gamma')| |g(\gamma'^{-1}\gamma)| d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') |k(\gamma)| \delta(\gamma^{-1}) d\mu \circ \lambda(\gamma) \end{aligned}$$

d'après le théorème de Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned} &\leq \int_{G^{(0)}} \int_{G^x} |f(\gamma')| \left(\int_{G^x} |g(\gamma'^{-1}\gamma) \delta(\gamma)^{-1} k(\gamma)| d\lambda^x(\gamma) \right) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int_{G^{(0)}} \int_{G^x} |f(\gamma')| \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\int_{G^x} |g(\gamma'^{-1}\gamma) \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} k(\gamma)| d\lambda^x(\gamma) \right) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \end{aligned}$$

Comme $g \in L^2(G, \nu^{-1})$, on sait que, pour presque tout $x \in G$,

$$g_x : \begin{cases} G^x & \longrightarrow [0; +\infty] \\ \gamma & \longmapsto g(\gamma) \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \in L^2(G^x, \lambda^x).$$

Ainsi, pour γ' fixé, $\gamma \longmapsto g(\gamma'^{-1}\gamma) \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{-\frac{1}{2}}$ appartient à $L^2(G, \lambda^{r(\gamma')})$ car

$$\int |g(\gamma'^{-1}\gamma)|^2 \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{-1} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) = \int |g(\gamma'')|^2 \delta(\gamma'')^{-1} d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma'') < +\infty$$

De même, $k_x \in L^2(G^x, \lambda^x)$.

On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(G^x, \lambda^x)$, ce qui donne, en

posant $I_x = \int_{G^x} |g(\gamma'^{-1}\gamma) \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{-\frac{1}{2}} \delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}} k(\gamma)| d\lambda^x(\gamma)$:

$$I_{r(\gamma')} \leq \left(\int_{G^{r(\gamma')}} |g(\gamma'^{-1}\gamma)|^2 \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{-1} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G^{r(\gamma')}} |k(\gamma)|^2 \delta(\gamma)^{-1} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$$

soit

$$I_{r(\gamma')} \leq \left(\int_{G^{s(\gamma')}} |g(\gamma'')|^2 \delta(\gamma'')^{-1} d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G^{r(\gamma')}} |k(\gamma)|^2 \delta(\gamma)^{-1} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$$

En revenant au calcul de départ, on obtient :

$$|(L(f)g|k)| \leq \int_G |f(\gamma')| \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} G(s(\gamma')) K(r(\gamma')) d\mu \circ \lambda(\gamma')$$

avec G et K définies respectivement par :

$$G(x) = \left(\int_{G^x} |g(\gamma)|^2 \delta(\gamma)^{-1} d\lambda^x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad K(x) = \left(\int_{G^x} |k(\gamma)|^2 \delta(\gamma)^{-1} d\lambda^x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Comme g et k appartiennent à $L^2(G, \nu^{-1})$, G et K appartiennent à $L^2(G^{(0)}, \mu)$ et on a $\|G\|_2 = \|g\|_2$, $\|K\|_2 = \|k\|_2$.

Posons alors $\tilde{G} = \frac{G}{\|g\|_2}$ si $\|g\|_2 \neq 0$ et $\tilde{K} = \frac{K}{\|k\|_2}$ si $\|k\|_2 \neq 0$.

Dans le cas où $\|g\|_2 = 0$, on a de toutes façons $G = 0$ (de même pour K), donc on obtient, en prenant $\tilde{G} = 0$ (resp. $\tilde{K} = 0$) si $\|g\|_2 = 0$ (resp. si $\|k\|_2 = 0$) :

$$\tilde{G} \times \|g\|_2 = G \quad \text{et} \quad \tilde{K} \times \|k\|_2 = K$$

De plus, \tilde{G} et \tilde{K} appartiennent à $L^2(G, \mu)$ et on a $\|\tilde{G}\|_2 \leq 1$ et $\|\tilde{K}\|_2 \leq 1$

Finalement :

$$|(L(f)g|k)| \leq \int_{G^{(0)}} \int_G |f(\gamma')| \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} \tilde{G}(s(\gamma')) \tilde{K}(r(\gamma')) d\mu \circ \lambda(\gamma') \times \|g\|_2 \|h\|_2$$

$$|(L(f)g|k)| \leq \int_{G^{(0)}} \int_G |f(\gamma')| \tilde{G}(s(\gamma')) \tilde{K}(r(\gamma')) d\nu_0(\gamma') \times \|g\|_2 \|h\|_2$$

Puis, comme $f \in II(G)$ donc

$$|(L(f)g|k)| \leq \|f\|_{II} \|g\|_2 \|k\|_2$$

On en déduit que $L(f)$ est borné et que $\|L(f)\| \leq \|f\|_{II}$. Nous démontrerons plus tard que $\|L(f)\| \leq \|f\|_I$

• Prouvons ensuite que pour tous $f, g, h \in \mathfrak{A}$, $(f \star g|h) = (g|f^* \star h)$

On a $(f \star g|h) = \tau(h^* \star (f \star g)) = \tau((h^* \star f) \star g)$ et donc $(f \star g|h) = \tau((f^* \star h)^* \star g)$ ce qui prouve l'égalité.

• Nous devons ensuite montrer que S_0 est préfermée, ce qui revient à prouver que l'adhérence du graphe de S_0 est égale au graphe d'un certain opérateur S fermé. Pour cela, il suffit de prouver que si (f_n, f_n^*) est une suite de $\Gamma(S_0)$ qui converge vers $(0; g)$, alors $g = 0$.

On sait que $f_n \in L^2(G, \nu^{-1})$ et $f_n^* \in L^2(G, \nu^{-1})$. D'autre part, (f_n) converge vers 0 dans $L^2(G, \nu^{-1})$ donc il existe une sous-suite de (f_n) qui converge vers 0 ν^{-1} -presque partout. Mais $\int |f_n(\gamma) - \overline{g(\gamma^{-1})}| d\nu(\gamma) = \int |f_n^*(\gamma) - g(\gamma)|^2 d\nu^{-1}(\gamma)$ et (f_n^*) converge vers g dans $L^2(G, \nu^{-1})$, donc $(f_n - g^*)$ converge vers 0 dans $L^2(G, \nu)$ quand n tend vers $+\infty$.

On peut donc extraire une sous-suite de la sous-suite précédente telle que (f_{n_k}) converge ν -presque partout vers g^* .

Comme les mesures ν et ν^{-1} sont équivalentes, elles possèdent les mêmes ensembles négligeables donc (f_{n_k}) converge ν^{-1} -presque partout vers g^* .

En résumé, (f_{n_k}) converge ν^{-1} -presque partout vers 0 et (f_{n_k}) converge ν^{-1} presque partout vers g^* . On en déduit que $g^* = 0$ ν^{-1} -presque partout, i.e. $g = 0$ ν^{-1} -presque partout. S_0 est donc bien préfermé et admet une fermeture S , qui est linéaire.

☞ Notons $\mathcal{D}^\#$ le domaine de la clôture S de S_0 .

On a $\mathcal{D}^\# = \{f \in L^2(G, \nu^{-1}) : f\delta^{\frac{1}{2}} \in L^2(G, \nu^{-1})\}$.

- Le fait que \mathfrak{A}^2 est dense dans \mathfrak{A} est démontré dans le cas général dans [Ha78-1].

Dans le cas présent, nous pouvons le justifier en utilisant une unité approchée dans $C_c(G)$.

En effet, d'après [Re80] (II.1 – proposition 1.9), l'algèbre $\mathcal{C}_c(G)$ admet une unité approchée à gauche (ou à droite). Plus précisément, si V est un voisinage ouvert de $G^{(0)}$ dans G , il existe une suite (K_α) de compacts de $G^{(0)}$ qui tend en croissant vers $G^{(0)}$ et $U = \cup U_\alpha$ un voisinage ouvert de $G^{(0)}$ tel que $K_\alpha \subset U_\alpha \subset V \cap s^{-1}(K_\alpha)$. On construit alors une unité approchée à gauche, (φ_α) , telle que $\varphi_\alpha \in C_c^+(G)$, $\text{Supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ et, pour $x \in K_\alpha$, $\int \varphi_\alpha d\lambda^x = 1$.

Soit alors $f \in C_c(G)$ et donnons nous $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue et on peut donc trouver $\alpha_0 > 0$ tel que, pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, pour tout $\gamma, \gamma' \in G$ avec $r(\gamma') = r(\gamma)$ tels que $\gamma' \in U_\alpha$, on ait $|f(\gamma'^{-1}\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon$ [1].

Quel que soit α , $\varphi_\alpha \star f - f$ est continue à support compact.

Lemme 3

Le support de $d_\alpha = \varphi_\alpha \star f - f$ est contenu dans un compact L indépendant de α

On s'intéresse alors à

$$\|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty = \sup_{\gamma \in G} |\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)|$$

D'après le lemme, on a en fait

$$\|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty = \sup_{\gamma \in L} |\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)|$$

Mais L étant compact et (K_α) étant une suite qui tend vers $G^{(0)}$ en croissant, il existe α_1 tel que $r(L) \subset K_{\alpha_1}$. Par conséquent, pour $\gamma \in L$, on a $\int \varphi_\alpha(\gamma') d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') = 1$ dès que $\alpha \geq \alpha_1$.

On obtient donc, pour $\alpha \geq \max(\alpha_0, \alpha_1)$ et $\gamma \in L$:

$$\begin{aligned} |\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)| &\leq \int |\varphi_\alpha(\gamma')| |f(\gamma'^{-1}\gamma) - f(\gamma)| d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \\ &\leq \int_{U_\alpha \cap G^{r(\gamma)}} \varphi_\alpha(\gamma') |f(\gamma'^{-1}\gamma) - f(\gamma)| d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \\ &\leq \varepsilon \int_{U_\alpha \cap G^{r(\gamma)}} \varphi_\alpha(\gamma') d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') && \text{d'après [1]} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty \leq \varepsilon$

On s'intéresse alors à $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_2^2 = \int |\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)|^2 d\nu^{-1}(\gamma)$.

On a $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_2^2 = \int_L |\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)|^2 d\nu^{-1}(\gamma)$.

Majorons alors $|\varphi_\alpha \star f(\gamma) - f(\gamma)|$ par $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty$. Il vient :

$$\|\varphi_\alpha \star f - f\|_2^2 \leq \int_L \|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty^2 d\nu^{-1}(\gamma)$$

L étant compact, $\int_K d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma) = M < \infty$ et on obtient finalement, pour tout $\alpha \geq \max(\alpha_0, \alpha_1)$:

$$\|\varphi_\alpha \star f - f\|_2 \leq \varepsilon \sqrt{M}$$

Ce qui prouve que $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_2$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

En conclusion, toute fonction f de $\mathcal{C}_c(G)$ est limite d'une suite $(\varphi_\alpha \star f)_\alpha$, ce qui prouve que l'ensemble des $f \star g$ avec $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$ est total dans $\mathcal{C}_c(G)$ \square

La théorie des algèbres hilbertiennes permet de définir l'algèbre de von Neumann associée au groupoïde (G, λ, μ) comme étant la fermeture faible de $L(\mathfrak{A})$ dans $\mathcal{L}(L^2(G, \nu^{-1}))$. Dans la suite, nous noterons $\text{VN}(G)$ ou $W^*(G)$ l'algèbre de von Neumann ainsi obtenue.

2.2.4 Opérateurs fondamentaux

Nous allons maintenant pouvoir expliciter la théorie de Tomita dans notre cas particulier.

- L'opérateur F de la théorie de Tomita est la fermeture de l'application $g \mapsto \Delta g^*$ où $\Delta g^*(\gamma) = \overline{g(\gamma^{-1})} \delta(\gamma)$. Son domaine, noté \mathcal{D}^\natural , est l'ensemble des $g \in L^2(G, \nu)$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{D}^\natural$, il existe C tel que $|(S_0 f | g)| \leq C \|f\|_2$ (voir proposition A.1.3).

- $\Delta = FS$ est l'opérateur de multiplication par δ .

Son domaine, $\mathcal{D}(\Delta)$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{D}^\natural$ tels que $Sf \in \mathcal{D}^\natural$.

Pour $f \in \mathcal{D}(\Delta)$ et $\gamma \in G$, on a $\Delta f(\gamma) = \delta(\gamma) f(\gamma)$.

En fait, on peut préciser le domaine : c'est l'ensemble des $f \in L^2(G, \nu^{-1})$ tels que $\Delta f \in L^2(G, \nu^{-1})$ i.e. $\int \delta(\gamma)^2 |f(\gamma)|^2 d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) < \infty$.

Il est donc clair que $\mathfrak{A} \subset \mathcal{D}(\Delta)$.

Par ailleurs, la théorie générale nous dit que Δ est positif autoadjoint et on vérifie que $\mathcal{D}(\Delta^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}^\sharp$.

• L'opérateur J est défini par $J\Delta^{\frac{1}{2}} = S$.

Par calcul, on obtient que $Jf(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \overline{f(\gamma^{-1})}$.

Son domaine est l'ensemble des $f \in L^2(G, \nu^{-1})$ tels que $\int \delta(\gamma) |f(\gamma^{-1})|^2 d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) < \infty$

i.e. tels que $\int |f(\gamma)|^2 d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) < \infty$. C'est donc $L^2(G, \nu^{-1})$.

Par ailleurs, $J^2 f(\gamma) = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \overline{Jf(\gamma^{-1})} = \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \delta(\gamma^{-1})^{\frac{1}{2}} f(\gamma)$ donc $J^2 = I$.

2.2.5 Quelques propriétés utiles

Proposition 2.2.3

Si f et g sont bornées à gauche dans \mathcal{H} , alors $L(g)L(f) = L(g \star f)$.

Si, de plus, $f \in \mathcal{D}^\sharp$ (c'est-à-dire si $f \in \mathcal{A}_l$), alors $L(f^\star) = L(f)^\star$.

Preuve. • Soit h un élément de \mathcal{H} et $\gamma \in G$. Alors

$$L(g)L(f)h(\gamma) = \int g(\gamma') \left(\int f(\gamma'') h(\gamma''^{-1} \gamma'^{-1} \gamma) d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma'') \right) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$$

On fait le changement de variable $\gamma_1 = \gamma' \gamma''$

$$\begin{aligned} L(g)L(f)h(\gamma) &= \int g(\gamma') \left(\int f(\gamma'^{-1} \gamma_1) h(\gamma_1^{-1} \gamma) d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma_1) \right) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \\ &= \int \left(\int g(\gamma') f(\gamma'^{-1} \gamma_1) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right) h(\gamma_1^{-1} \gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma_1) \\ &= L(g \star f)h(\gamma) \end{aligned}$$

• Soit g et h bornés dans \mathcal{H} , $f \in \mathcal{A}_l$.

On sait que $(f \star g|h) = (g|f^\star \star h)$, i.e. $(L(f)g|h) = (g|L(f^\star)h)$.

On en déduit que $L(f)^\star = L(f^\star)$.

□

Proposition 2.2.4

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $(\Delta^\alpha)^\star = \Delta^{\bar{\alpha}}$

Proposition 2.2.5

i) Si $f \in \mathcal{B}$, alors $Jf \in \mathcal{B}_r$ et $JL(f)J = R(Jf)$

De même, si $f \in \mathcal{B}_r$, $f \in \mathcal{B}$.

ii) Si $f \in \mathcal{A}_l$, alors $R(Jf)^\star = R(\Delta^{\frac{1}{2}} f)$

Preuve. *i)* Soit $f \in \mathcal{B}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\eta \in \mathcal{A}_r$, $\|R(\eta)f\| \leq C \|\eta\|$. Soit alors $\xi \in C_c(G) \subset \mathcal{A}_l$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|L(\xi)Jf\|^2 &= (L(\xi)Jf | L(\xi)Jf) \\ &= (f | JL(\xi)^*L(\xi)Jf) \\ &= (f | (L(\xi)J)^*L(\xi)Jf) \end{aligned}$$

Or $\xi \in \mathcal{A}_l$ donc $L(\xi)J = JR(J\xi)$ ce qui donne $(L(\xi)J)^*L(\xi)J = (JR(J\xi))^*JR(J\xi)$, soit $(L(\xi)J)^*L(\xi)J = R(J\xi)^*R(J\xi)$ car $J^2 = I$.

Nous obtenons donc

$$\|L(\xi)Jf\|^2 = \|R(J\xi)f\|^2$$

Mais, si $\xi \in \mathcal{A}_l$, alors $J\xi \in \mathcal{A}_r$ donc l'hypothèse de départ nous permet d'affirmer que $\|L(\xi)Jf\| \leq C \|J\xi\| = C \|\xi\|$ car J est isométrique. Ainsi, $Jf \in \mathcal{B}_r$.

Soit alors $\xi \in L^2(G)$ et $\gamma \in G$. On a

$$\begin{aligned} JL(f)J\xi(\gamma) &= \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \int \overline{f(\gamma')\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}\gamma^{-1})\xi(\gamma\gamma')} d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ &= \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \int \overline{f(\gamma')}\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}\gamma^{-1})\xi(\gamma\gamma') d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ &= \int \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1})f^*(\gamma'^{-1})\xi(\gamma\gamma') d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ &= \xi \star \Delta^{\frac{1}{2}}f^*(\gamma) \\ &= R(\Delta^{\frac{1}{2}}f^*)\xi = R(Jf)\xi \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} R(Jf)^* &= JL(f)^*J && \text{d'après } i) \text{ car } f \in \mathcal{B} \\ &= JL(f^*)J && \text{car } f \in \mathcal{A}_l \\ &= JL(J\Delta^{\frac{1}{2}}f)J && \text{car } S = J\Delta^{\frac{1}{2}} \\ &= R(J(J\Delta^{\frac{1}{2}}f)) \\ &= R(\Delta^{\frac{1}{2}}f) \end{aligned}$$

□

2.2.6 Définition de poids canoniques

Sur $\text{VN}(G)$

L'application de la théorie des algèbres hilbertiennes nous permet de définir le poids canonique sur $\text{VN}(G)$ en posant, pour $T \in \text{VN}(G)_+$,

$$\begin{cases} \varphi_0(T) = (f|f) & \text{si il existe } f \in \mathcal{A}_l \text{ telle que } T^{\frac{1}{2}} = L(f) \\ \varphi_0(T) = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $f, g \in \mathcal{B}$, $\varphi_0(L(f)^*L(g)) = (g|f)$.

Ce poids est fidèle, semi-fini et normal.

Si la mesure μ est invariante, i.e. $\delta = 1$, alors le groupe d'automorphismes modulaires est donné par $\sigma_t = \text{Id}$. On retrouve que $\text{VN}(G)$ est semi-finie et que φ_0 définit une trace sur $\text{VN}(G)$.

Pour finir, remarquons que $\varphi_0(L(f)L(g)^*) = (\Delta f|g)$ pour $f, g \in \mathcal{A}_l$.

En effet, $\varphi_0(L(f)L(g)^*) = \varphi_0(L(f^*)^*L(g^*)) = (g^*|f^*)$.

En appliquant les propriétés des algèbres hilbertiennes généralisées, nous obtenons

$$(g^*|f^*) = (Sg|Sf) = (FSf|g) = (\Delta f|g),$$

soit le résultat annoncé.

Remarquons par ailleurs que, si l'algèbre est unimodulaire, cela nous donne simplement $\varphi_0(L(f)L(g)^*) = (f|g)$.

Sur $\text{VN}(G)'$

Pour $S \in (\text{VN}(G)')_+$, on définit le poids canonique ψ_0 par $\psi_0(S) = \varphi_0(JSJ)$.

En pratique, pour $h, k \in \mathcal{A}_r$, nous avons

$$\psi_0(R(Jh)^*R(Jk)) = (k|h)$$

et, en particulier, $\psi_0(R(Jh)^*R(Jh)) = \|h\|_2^2$.

Démonstration. $\psi_0(R(Jh)^*R(Jk)) = \varphi_0(JR(Jh)^*R(Jk)J)$.

Nous allons utiliser la proposition 2.2.5 i)

$$\begin{aligned} R(Jh)^*R(Jk) &= R(Jh)^*JL(k)J \\ &= (JR(Jh))^*L(k)J \\ &= (L(h)J)^*L(k)J \\ &= JL(h)^*L(k)J \end{aligned}$$

et donc $\psi_0(R(Jh)^*R(Jk)) = \varphi_0(L(h)^*L(k))$ car $J^2 = I$; d'où le résultat. \square

Par ailleurs, si on prend maintenant $f, g \in \mathcal{B}_r$, on a alors $Jf \in \mathcal{B}$ et $Jg \in \mathcal{B}$ donc

$$\psi_0(R(f)^*R(g)) = (Jg|Jf) = (f|g)$$

L'algèbre de von Neumann d'un groupoïde peut également être définie grâce à la théorie des opérateurs aléatoires développée par A. Connes ([Co79], [Co86] et [Co94]). Cette théorie s'appuie sur la théorie des algèbres de von Neumann décomposables rappelée en annexe (B.2). Nous allons préciser ici cette construction et vérifier que nous obtenons la même algèbre de von Neumann que précédemment.

2.3 Opérateurs aléatoires

Soit (G, λ, μ) un groupoïde mesuré séparé localement compact et à base dénombrable d'ouverts. On suppose par ailleurs que δ est continue.

On considère les espaces de Hilbert aléatoires à droite définis par $x \mapsto \mathcal{H}_x = L^2(G_x, \lambda_x)$. La structure de mesurabilité pour le champ $x \mapsto \mathcal{H}_x$ est donnée par une famille \mathcal{F} de sections mesurables.

Si (G, λ) est un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar continu, on peut prendre $\mathcal{F} = \mathcal{C}_c(G)$. Sinon, on peut utiliser l'algèbre $I(G)$ définie par P. Hahn.

Tout $\xi \in \mathcal{C}_c(G)$ (resp. $I(G)$) définit la section $x \mapsto \xi_x \in \mathcal{H}_x$ telle que $\xi_x(\gamma) = \xi(\gamma)$ pour $\gamma \in G_x$.

On définit la représentation régulière droite de G par : quel que soit $\gamma \in G$, $\tilde{R}(\gamma)$ est l'isométrie de $\mathcal{H}_{s(\gamma)}$ dans $\mathcal{H}_{r(\gamma)}$ définie par

$$(\tilde{R}(\gamma)\xi)(\gamma') = \xi(\gamma'\gamma) \quad \text{pour } \xi \in \mathcal{H}_{s(\gamma)} \text{ et } \gamma' \in G_{r(\gamma)}.$$

Cette représentation régulière est mesurable au sens où, pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{F}$, l'application $\gamma \mapsto (\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma) | \eta \circ r(\gamma))$ est mesurable. Reprenons alors dans notre contexte la définition d'opérateur aléatoire donnée par A. Connes (§ V, définition 1 et § IV)

Définition 2.3.1

Un opérateur aléatoire borné est un champ $x \mapsto T_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ défini pour μ presque tout $x \in G^{(0)}$ qui est :

- i) mesurable : pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{F}$, $x \mapsto (T_x \xi_x | \eta_x)$ est mesurable ;
- ii) invariant : pour presque tout $\gamma \in G$, $T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) = \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)}$;
- iii) borné : l'application $x \mapsto \|T_x\|$ est essentiellement bornée.

On note \mathcal{M} l'ensemble des opérateurs aléatoires bornés.

L'ensemble \mathcal{M} a une structure naturelle de C^* -algèbre :

- addition : $(T + S)_x = T_x + S_x$.
- multiplication : $(TS)_x = T_x S_x$.
- involution : $(T_x)^* = (T^*)_x$

Si T est le champ d'opérateurs $x \mapsto T_x$ et si ξ est le champ de vecteurs $x \mapsto \xi_x \in \mathcal{H}_x$, on note $T\xi$ le champ défini par $(T\xi)_x = T_x \xi_x$. On pose alors

$$\|T\xi\|^2 = \int \|T_x \xi_x\|_{\mathcal{H}_x}^2 d\mu(x) = \int \int |T_x \xi_x(\gamma)|^2 d\lambda_x(\gamma) d\mu(x)$$

Si $x \mapsto T_x$ est borné et si on note C la borne essentielle, on a :

$$\begin{aligned}
\|T\xi\|^2 &= \int \|T_x\xi_x\|_{\mathcal{H}_x}^2 d\mu(x) \\
&\leq \int \|T_x\|^2 \|\xi_x\|_{\mathcal{H}_x}^2 d\mu(x) \\
&\leq C^2 \int \int |\xi(\gamma)|^2 d\lambda_x(\gamma) d\mu(x) \\
&= C^2 \int |\xi(\gamma)|^2 d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) = C^2 \|\xi\|_2^2
\end{aligned}$$

Si on pose $\mathcal{H} = L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, on peut l'identifier avec $\int^\oplus L^2(G_x, \lambda_x) d\mu(x)$, grâce à ce qui précède ; l'opérateur aléatoire $x \mapsto T_x$ définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par

$$(T\eta|\xi) = \int (T_x\eta_x|\xi_x) d\mu(x), \text{ pour } \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

En définissant, pour $T \in \mathcal{M}$, $\pi(T)$ par $(\pi(T)\xi)_x = T_x\xi_x$ pour $\xi \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, on obtient une représentation de \mathcal{M} sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} .

Avant de démontrer que \mathcal{M} est une algèbre de von Neumann, nous allons expliciter les opérateurs $\tilde{R}(f)$ et $L(f)$ pour $f \in C_c(G)$.

2.3.1 Représentations particulières de $C_c(G)$

Soit $f \in C_c(G)$, $h, g \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$. On peut définir $\tilde{R}(f)$ par la formule

$$(\tilde{R}(f)g|h) = \int (\tilde{R}(\gamma)g \circ s(\gamma) | h \circ r(\gamma))_{H_{r(\gamma)}} f(\gamma) d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}(f)g|h) &= \int \left(\int g(\gamma'\gamma) \overline{h(\gamma')} d\lambda_{r(\gamma)}(\gamma') \right) \delta(\gamma^{-1}) f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\
&= \int \int g(\gamma'\gamma) f(\gamma) \delta(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma) \overline{h(\gamma')} d\lambda_x(\gamma') d\mu(x)
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on peut poser $\tilde{R}(f)_x g(\gamma) = \int g(\gamma\gamma') \delta(\gamma'^{-1}) f(\gamma') d\lambda^x(\gamma')$ pour $\gamma \in G_x$ et ce champ définit un opérateur $\tilde{R}(f)$ sur \mathcal{H} par

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(f)g(\gamma) &= \int g(\gamma\gamma') f(\gamma') \delta(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\
\tilde{R}(f)g(\gamma) &= \int g(\gamma\gamma') \Delta \tilde{f}(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\tilde{R}(f)g = g \star \Delta \tilde{f}$.

Étant donnée $f \in C_c(G)$, on peut aussi définir, pour $x \in G^{(0)}$, $L_x(f)$ par

$$L_x(f)\xi(\gamma) = \int f(\gamma\gamma')\xi(\gamma'^{-1})d\lambda^x(\gamma')$$

pour $\xi \in L^2(G_x, \lambda_x)$ et $\gamma \in G_x$.

- Justifions que $(L_x(f))_x$ est un opérateur aléatoire pour $f \in C_c(G)$.
Tout d'abord, pour tout $x \in G^{(0)}$, $L_x(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$. En effet, soit $\xi, \eta \in \mathcal{H}_x$.

$$|(L_x(f)\xi|\eta)| \leq \int \int |f(\gamma\gamma')| |\xi(\gamma'^{-1})| |\eta(\gamma)| d\lambda^x(\gamma') d\lambda_x(\gamma)$$

L'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathcal{H}^x, \lambda^x)$ donne

$$\leq \int \left(\int |f(\gamma\gamma')| |\xi(\gamma'^{-1})|^2 d\lambda^x(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(\gamma\gamma')| |\eta(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda_x(\gamma)$$

puis l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(G_x, \lambda_x)$ permet d'obtenir

$$\leq \left(\int |f(\gamma\gamma')| |\xi(\gamma'^{-1})|^2 d\lambda^x(\gamma') d\lambda_x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f(\gamma\gamma')| |\eta(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma') d\lambda_x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Notons I_ξ la première intégrale et I_η la seconde. On a :

$$\begin{aligned} I_\xi &= \int |\xi(\gamma'^{-1})|^2 \left(\int |f(\gamma\gamma')| d\lambda_{r(\gamma')}(\gamma) \right) d\lambda^x(\gamma') \\ &= \int |\xi(\gamma'^{-1})|^2 \left(\int |f(\gamma)| d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right) d\lambda^x(\gamma') && \text{par invariance à droite de } \lambda_x \\ &\leq \int |\xi(\gamma'^{-1})| \|f\|_I d\lambda^x(\gamma) && \text{car } f \in I(G) \\ &\leq \|f\|_I \|\xi\|_{\mathcal{H}_x}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\eta &= \int |\eta(\gamma)|^2 \left(\int |f(\gamma\gamma')| d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) d\lambda_x(\gamma) \\ &= \int |\eta(\gamma)|^2 \left(\int |f(\gamma')| d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right) d\lambda_x(\gamma) && \text{par invariance à gauche de } \lambda^x \\ &\leq \|f\|_I \|\eta\|_{\mathcal{H}_x}^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|(L_x(f)\xi|\eta)| \leq \|f\|_I \|\xi\|_{\mathcal{H}_x} \|\eta\|_{\mathcal{H}_x}$$

On en déduit que $L_x(f)$ est bornée et $\|L_x(f)\| \leq \|f\|_I$.

D'autre part, pour $\xi, \eta \in C_c(G)$, $x \mapsto \int \int f(\gamma\gamma')\xi(\gamma'^{-1})\overline{\eta(\gamma)}d\lambda^x(\gamma'')d\lambda^x(\gamma)$ est mesurable.

Soit $\gamma \in G$ et $\gamma' \in G_{r(\gamma)}$. On a

$$\begin{aligned} L(f)_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi(\gamma') &= \int f(\gamma'\gamma_1)(\tilde{R}(\gamma)\xi)(\gamma_1^{-1})d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma_1) \\ &= \int f(\gamma'\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma)d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\gamma)L_{s(\gamma)}\xi &= L(f)_{s(\gamma)}\xi(\gamma'\gamma) \\ &= \int f(\gamma'\gamma\gamma_2)\xi(\gamma_2^{-1})d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma_2) \end{aligned}$$

En posant $\gamma_1 = \gamma\gamma_2$, on obtient :

$$\int f(\gamma'\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma)d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma_1)$$

Donc $(L_x(f))_x$ est invariant.

Enfin, $\text{ess sup } \|L_x(f)\| \leq \|f\|_I$ donc $(L_x(f))_x$ est borné et $\|(L_x(f))_x\| \leq \|f\|_I$. Il en résulte que $(L_x(f))_x$ est bien un opérateur aléatoire.

Par ailleurs

$$\int (L_x(f)\xi_x|\eta_x)d\mu(x) = \int \int f(\gamma\gamma')\xi(\gamma'^{-1})d\lambda^x(\gamma')\overline{\eta(\gamma)}d\lambda_x(\gamma)d\mu(x)$$

ce qui prouve que

$$(L(f)\xi|\eta) = \int (L_x(f)\xi_x|\eta_x)d\mu(x),$$

où L est la représentation régulière gauche de l'algèbre de Tomita $C_c(G)$ munie du produit scalaire de $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. On a en particulier $\pi(L(f))_x = L_x(f)$, où π est la représentation définie avant le paragraphe 2.3.1.

2.3.2 Algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires

Dans [Co79] (§ V, théorème 2), A. Connes démontre que \mathcal{M} est une algèbre de von Neumann. Nous allons retrouver ici ce résultat et identifier \mathcal{M} comme étant un commutant. On peut en effet caractériser $\pi(\mathcal{M})$ (défini avant 2.3.1) par une condition de commutation :

Soit $T \in \mathcal{M}$ et $f \in C_c(G)$. On a, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \left(\tilde{R}(f)\pi(T)\xi | \eta \right) &= \int \left(\tilde{R}(\gamma)(T_{s(\gamma)}\xi_{s(\gamma)} | \eta_{r(\gamma)}) f(\gamma) d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \right) \\ &= \int \left(T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi_{s(\gamma)} | \eta_{r(\gamma)} \right) f(\gamma) d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ &= \int \left(\tilde{R}(\gamma)\xi_{s(\gamma)} | (T^*)_{r(\gamma)}\eta_{r(\gamma)} \right) f(\gamma) d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ &= \left(\tilde{R}(f)\xi | \pi(T^*)\eta \right) \\ &= \left(\pi(T)\tilde{R}(f)\xi | \eta \right) \end{aligned}$$

Donc $\pi(\mathcal{M}) \subset \tilde{R}(C_c(G))' = \tilde{R}(C^*(G))'$.

Par ailleurs, nous savons que $\tilde{R}(C_c(G))' = L(C_c(G))''$. Or, d'après ce qui précède, si $f \in C_c(G)$, alors $L(f) \in \pi(\mathcal{M})$, donc $L(C_c(G)) \subset \pi(\mathcal{M})$ et par conséquent, nous avons $L(C_c(G))'' \subset \pi(\mathcal{M})'' \subset \tilde{R}(C_c(G))'$ car le bicommutant de $\tilde{R}(C_c(G))'$ est lui-même. On en déduit que $\pi(\mathcal{M})'' = \tilde{R}(C_c(G))'$.

Il reste à démontrer la réciproque, à savoir que $\tilde{R}(C^*(G))' \subset \pi(\mathcal{M})$. Ce résultat est un cas particulier du résultat démontré par [AR00] au chapitre 6 (§ 6.2). Ainsi, $\pi(\mathcal{M})$ est une algèbre de von Neumann représentée sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Dans la suite, nous identifierons la W^* -algèbre \mathcal{M} et l'algèbre représentée $\pi(\mathcal{M})$.

Par définition, \mathcal{M} est le commutant de la représentation régulière droite \tilde{R} et s'identifie, d'après ce qui précède, à l'algèbre $VN(G)$ construite à l'aide de la théorie des algèbres hilbertiennes.

2.3.3 Opérateurs aléatoires non bornés

Pour $x \in G^{(0)}$, si T_x est un opérateur autoadjoint positif sur \mathcal{H}_x , on peut lui associer une unique forme positive q_x sur \mathcal{H} au sens de la définition 1.3.10 telle que $q_x(\xi_x) = \left\| T_x^{\frac{1}{2}}\xi_x \right\|^2$

pour tout $\xi_x \in D(T_x^{\frac{1}{2}})$.

On peut maintenant définir la notion d'opérateur aléatoire non borné positif comme étant un champ $x \mapsto T_x$ d'opérateurs densément définis positifs autoadjoints sur \mathcal{H}_x définis pour μ -presque tout x et

i) mesurables : pour tout $\xi \in \mathcal{F}$, $x \mapsto q_x(\xi_x)$ est mesurable ;

ii) invariants : pour presque tout $\gamma \in G$, $\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$

L'opérateur $\pi(T)$ défini par un tel champ est un opérateur affilié à l'algèbre de von Neumann \mathcal{M} car, pour tout $f \in C_c(G)$, $\tilde{R}(f)\pi(T) \subset \pi(T)\tilde{R}(f)$ et les $\tilde{R}(f)$ engendrent \mathcal{M} .

Pour terminer, nous allons nous intéresser au lien entre produit croisé et produit gauche

2.4 Algèbre de von Neumann du produit gauche

Dans cette partie, c désigne un cocycle de G dans un groupe abélien A . Nous pouvons maintenant définir l'algèbre de von Neumann de $G(c)$ en utilisant les méthodes explicitées dans les parties précédentes. En particulier, nous allons expliciter les représentations de $\text{VN}(G(\delta))$ et identifier $\text{VN}(G(\delta))$ en tant qu'algèbre d'opérateurs aléatoires.

Nous démontrerons au paragraphe suivant que $W^*(G(\delta))$ s'identifie au produit croisé $\text{VN}(G) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$.

En reprenant les notations introduites aux paragraphes précédents, nous noterons \mathcal{M} l'algèbre de von Neumann $\text{VN}(G)$.

2.4.1 Algèbre d'opérateurs aléatoires

Nous notons ici $\mathcal{H} = L^2(G(c), (\mu \otimes m) \circ \underline{\lambda})$ et nous cherchons à définir l'algèbre des opérateurs aléatoires. D'après la théorie générale, $\underline{\mathcal{M}} = \text{VN}(G(c))$ est l'ensemble des $(T_{x,a}) \in \mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}})$ tels que $T_{r(\gamma,a)} \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) = \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) T_{s(\gamma,a)}$ pour presque tout $(\gamma, a) \in G(c)$.

Pour définir la représentation $\tilde{\underline{R}}$, nous allons utiliser \tilde{R} .

Nous pouvons tout d'abord définir $R(\gamma) : G_{r(\gamma)} \longrightarrow G_{s(\gamma)}$ en posant $R(\gamma)(\gamma') = \gamma'\gamma$ pour $\gamma \in G$ et $\gamma' \in G_{r(\gamma)}$.

Comme $\tilde{R}(\gamma)\xi(\gamma') = \xi(\gamma'\gamma)$, nous avons $\tilde{R}(\gamma)\xi = \xi \circ R(\gamma)$.

Par ailleurs, au niveau des groupoïdes, nous devons définir \underline{R} afin que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G_{s(\gamma)} & \xrightarrow{\tilde{R}(\gamma^{-1})} & G_{r(\gamma)} \\
 \downarrow p_{s(\gamma), c(\gamma)+a} & & \downarrow p_{r(\gamma), a} \\
 \underline{G}_{s(\gamma), c(\gamma)+a} & \xrightarrow{\tilde{\underline{R}}((\gamma, a)^{-1})} & \underline{G}_{r(\gamma), a}
 \end{array}$$

En notant F_{\star} l'application de $L^2(X, \mu)$ dans $L^2(Y, \mu)$ définie par $F_{\star}g = g \circ F^{-1}$ et $F^{\star} = (F_{\star})^{-1}$, nous obtenons au niveau des espaces de Hilbert :

$$\begin{array}{ccc}
L^2(G_{s(\gamma)}, \lambda_{s(\gamma)}) & \xrightarrow{\tilde{R}^*(\gamma^{-1}) = \tilde{R}(\gamma)} & L^2(G_{r(\gamma)}, \lambda_{r(\gamma)}) \\
\downarrow (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})_\star & & \downarrow (p_{r(\gamma), a})_\star \\
L^2(\underline{G}_{s(\gamma), c(\gamma)+a}, \underline{\lambda}_{s(\gamma), c(\gamma)+a}) & \xrightarrow{\underline{\tilde{R}}^*((\gamma, a)^{-1}) = \underline{\tilde{R}}(\gamma, a)} & L^2(\underline{G}_{r(\gamma), a}, \underline{\lambda}_{r(\gamma), a})
\end{array}$$

Explicitons alors \tilde{R} . Nous avons, pour $\xi \in L^2(G_{s(\gamma), c(\gamma)+a}, \lambda_{s(\gamma), c(\gamma)+a})$ et $\gamma' \in G_{r(\gamma)}$,

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{R}}(\gamma, a)\xi(\gamma', a - c(\gamma')) &= (p_{r(\gamma), a})_\star \tilde{R}(\gamma) (p_{s(\gamma), a+c(\gamma)})^\star \xi(\gamma', a - c(\gamma')) \\
&= \tilde{R}(\gamma) (p_{s(\gamma), a+c(\gamma)})_\star \xi(\gamma') \\
&= \xi(\gamma'\gamma, a - c(\gamma'\gamma) + c(\gamma))
\end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{\tilde{R}}(\gamma, a)\xi(\gamma', a - c(\gamma')) = \xi((\gamma', a - c(\gamma'))(\gamma, a))$

2.4.2 Sous algèbres particulières

Soit alors $(T_x) \in \mathcal{M}$. Pour $x, a \in G^{(0)} \times A$, considérons $T_{x,a} = (p_{x,a})_\star T_x (p_{x,a})^\star$. Nous noterons $\Phi : (T_x) \mapsto (T_{x,a})$.

Théorème 2.4.1

L'application Φ est une isométrie de \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}$.

Démonstration. Nous allons vérifier que $(T_{x,a}) \in \underline{\mathcal{M}}$.

Tout d'abord, par définition, $T_{x,a} \in \mathcal{L}(L^2(\underline{G}_{x,a}, \underline{\lambda}_{x,a}))$.

Comme $(p_{x,a})_\star$ est une isométrie, nous avons $\|T_{x,a}\| = \|T_x\|$ donc $\sup_{(x,a)} \|T_{x,a}\| = \sup_x \|T_x\|$.

Ainsi, Φ est une isométrie.

Enfin,

$$\begin{aligned}
T_{r(\gamma), a} \underline{\tilde{R}}(\gamma, a) &= (p_{r(\gamma), a})_\star T_{r(\gamma)} (p_{r(\gamma), a})^\star \tilde{R}(\gamma, a) \\
&= (p_{r(\gamma), a})_\star T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})^\star
\end{aligned}$$

Comme $T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) = \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
T_{r(\gamma), a} \underline{\tilde{R}}(\gamma, a) &= (p_{r(\gamma), a})_\star \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})^\star \\
&= (p_{r(\gamma), a})_\star \tilde{R}(\gamma) (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})^\star (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})_\star T_{s(\gamma)} (p_{s(\gamma), c(\gamma)+a})^\star \\
&= \underline{\tilde{R}}(\gamma, a) T_{s(\gamma), c(\gamma)+a}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(T_{x,a})$ vérifie la relation de commutation souhaitée.

Finalement, nous pouvons dire que Φ est une isométrie de \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}$. \square

Nous allons également identifier \widehat{A} comme un sous-ensemble de $\underline{\mathcal{M}}$.

Proposition 2.4.1

Soit $\chi \in \widehat{A}$. On définit $U(\chi) = (U(\chi)_{x,a})_{x,a}$ par

$$U(\chi)_{x,a} \xi(\gamma, a - c(\gamma)) = \chi(a - c(\gamma)) \xi(\gamma, a - c(\gamma))$$

pour $\xi \in L^2(G_{x,a}, \underline{\lambda}_{x,a})$ et $(\gamma, a - c(\gamma)) \in G_{x,a}$.

L'application $\chi \mapsto U(\chi)$ est une isométrie de \widehat{A} dans $\underline{\mathcal{M}}$.

Démonstration. Par définition, $U(\chi)_{x,a} \in \mathcal{L}(L^2(G_{x,a}))$. Par ailleurs, il s'agit d'une isométrie car χ est un caractère dans à valeurs dans \mathbb{T} .

Reste à vérifier la condition de commutation :

$$\begin{aligned} U_{r(\gamma),a} \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) \xi(\gamma', a - c(\gamma')) &= \chi(a - c(\gamma')) \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) \xi(\gamma', a - c(\gamma')) \\ &= \chi(a - c(\gamma')) \xi(\gamma' \gamma, a - c(\gamma')) \\ \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) U_{s(\gamma),a+c(\gamma)} \xi(\gamma', a - c(\gamma')) &= U_{s(\gamma),a+c(\gamma)} \xi(\gamma' \gamma, a - c(\gamma')) \\ &= \chi(a - c(\gamma')) \xi(\gamma' \gamma, a - c(\gamma')) \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'on a bien $U_{r(\gamma),a} \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) = \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) U_{s(\gamma),a+c(\gamma)}$ □

2.5 Identification du produit croisé et du produit gauche

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le produit croisé $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ s'identifie à l'algèbre de von Neumann $\underline{\mathcal{M}}$ définie au paragraphe 2.4. T. Masuda ([Ma84]) a un résultat plus général pour des homomorphismes $c : G \rightarrow A$ où A n'est pas nécessairement commutatif. Notre démonstration, proche de celle d'A. Connes ([Co86]) permettra d'explicitier les actions et de définir les opérateurs homogènes. Afin d'utiliser le théorème de Landstad (B.1.4), nous allons montrer que $\underline{\mathcal{M}}$ est un \mathbb{R} -produit.

2.5.1 Définition des actions

Action α

Commençons tout d'abord par définir le W^* -système dynamique pour notre cas particulier.

Nous allons définir une action de \mathbb{R} sur $C_c(G)$ par

$$\alpha_s(f)(\gamma) = \delta(\gamma)^{-is} f(\gamma).$$

Nous pouvons alors poser $\alpha_s(L(f)) = L(\alpha_s \circ f)$ ce qui donne

$$\alpha_s(L(f)) \xi(\gamma) = \int \delta(\gamma \gamma')^{-is} f(\gamma \gamma') \xi(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$$

$$\text{soit } \alpha_s(L(f)) = L(\Delta^{-is} f)$$

Clairement, $\alpha_s(L(f)) \in \mathcal{M}$ et $\alpha_s(L(f))$ admet un inverse. Il s'agit maintenant de prolonger α_s à \mathcal{M} . Mais \mathcal{M} est la fermeture faible de $L(C_c(G))$: nous souhaitons donc poser $\alpha_s(T) = \text{f-lim}_{n \rightarrow +\infty} \alpha_s(L(f_n))$ pour $T = \text{f-lim}_{n \rightarrow +\infty} L(f_n)$.

Pour vérifier que cette définition a bien un sens, considérons (f_n) et (g_n) deux suites de $C_c(G)$ telles que $L(f_n)$ et $L(g_n)$ convergent faiblement vers T .

Nous avons $\alpha_s(L(f_n) - L(g_n)) = L(\Delta^{-is}(f_n - g_n))$ donc, pour $\xi, \eta \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$, en notant $I(n, s) = (\alpha_s(L(f_n) - L(g_n))\xi|\eta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I(n, s) &= \int \left(\delta^{-is}(\gamma\gamma')(f_n(\gamma\gamma') - g_n(\gamma\gamma'))\xi(\gamma'^{-1})d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) \overline{\eta(\gamma)}d\mu \circ \lambda(\gamma) \\ &= \int \left(\delta^{-is}(\gamma) \int (f_n(\gamma\gamma') - g_n(\gamma\gamma'))\delta^{is}(\gamma'^{-1})\xi(\gamma'^{-1})d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) \overline{\eta(\gamma)}d\mu \circ \lambda(\gamma) \\ &= ((L(f_n) - L(g_n))\Delta^{is}\xi|\Delta^{is}\eta) \end{aligned}$$

Comme $L(f_n) - L(g_n)$ converge vers 0 faiblement, nous en déduisons que $\alpha_s(L(f_n) - L(g_n))$ converge vers 0 faiblement et donc la définition ci-avant a bien un sens.

Par ailleurs, avec ces définitions, nous obtenons bien $\alpha_s \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ et α continue.

Action θ

On définit tout d'abord une action sur le groupoïde en posant, pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in G$, $\theta_a(\gamma, b) = (\gamma, a^{-1}b)$. On a alors $f \circ \theta_a(\gamma, b) = f(\gamma, a^{-1}b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in C_c(\underline{G})$, $\gamma \in G$. Nous définissons alors $\theta_a(L(f))$ comme étant égal à $L(f \circ \theta_a)$.

Comme précédemment, $\theta_a : C_c(\underline{G}) \mapsto C_c(\underline{G})$ est inversible.

Considérons deux suites (f_n) et (g_n) d'éléments de $C_c(\underline{G})$ convergeant faiblement vers le même opérateur T et intéressons nous à $\theta_a(L(f_n) - L(g_n))$: pour $\xi, \eta \in L^2(\underline{G})$, en posant $I(a, n) = (\theta_a(L(f_n) - L(g_n))\xi|\eta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I(a, n) &= \int \left(\int (f_n(\gamma\gamma', a^{-1}b) - g_n(\gamma\gamma', a^{-1}b))\xi(\gamma'^{-1}, b\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) \eta(\gamma, b)d\mu \circ \lambda(\gamma)db \\ I(a, n) &= \int \left(\int (f_n(\gamma\gamma', a^{-1}b) - g_n(\gamma\gamma', a^{-1}b))\xi_a(\gamma'^{-1}, a^{-1}b\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) \\ &\quad \cdot \eta_a(\gamma, a^{-1}b)d\mu \circ \lambda(\gamma)db \end{aligned}$$

en posant, pour $g \in L^2(\underline{G})$, $g_a(\gamma_1, a^{-1}c) = g(\gamma_1, c)$.

Il est alors clair que $g_a \in L^2(\underline{G})$ car

$$\begin{aligned} \int |g_a(\gamma_1, b)|^2 d\lambda^x(\gamma_1)d\mu(x)db &= \int |g(\gamma_1, ab)|^2 d\lambda^x(\gamma_1)d\mu(x)db \\ &= a^{-1} \int |g(\gamma_1, c)|^2 d\lambda^x(\gamma_1)d\mu(x)dc \\ &= a^{-1} \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$I(a, n) = a \int \left(\int (f_n(\gamma\gamma', c) - g_n(\gamma\gamma', c)) \xi_a(\gamma'^{-1}, c\delta(\gamma\gamma')) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right) \eta_a(\gamma, c) d\mu \circ \lambda(\gamma) dc$$

$$I(a, n) = a ((L(f_n) - L(g_n)) \xi_a | \eta_a)$$

ce qui prouve que $\theta_a(L(f_n) - L(g_n))$ tend faiblement vers 0. Si $T = \text{f-lim}_{n \rightarrow +\infty} L(f_n)$ avec $f_n \in C_c(\underline{G})$, nous pouvons donc poser $\theta_a(T) = \text{f-lim}_{n \rightarrow +\infty} \theta_a(L(f_n))$.

On obtient ainsi $\theta_a \in \text{Aut}(\underline{\mathcal{M}})$. De plus, θ est bien continue.

En termes d'opérateurs aléatoires, nous avons $\theta_a(T) = S$ avec $S_{x,b} = T_{x,a^{-1}b}$.

2.5.2 Identification

Nous allons donc maintenant démontrer

Théorème 2.5.1

Soit $\mathcal{M} = W^*(G, \lambda, \mu)$, α l'action définie ci-avant et $\underline{\mathcal{M}} = W^*(\underline{G}, \underline{\lambda}, \underline{\mu})$. Alors

$$\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R} \simeq \underline{\mathcal{M}}$$

L'action duale est donnée par θ défini ci-avant.

Démonstration. Afin de démontrer ce théorème, nous allons considérer $A = \mathbb{R}_+^*$ et identifier \widehat{A} à \mathbb{R} grâce à l'application $(s, a) \mapsto a^{is}$.

L'action α de $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$ sur $C^*(G)$ donnée classiquement par $\alpha_{\chi}(f)(\gamma) = (\delta(\gamma), \chi)f(\gamma)$ correspond bien au α défini au paragraphe précédent par $\alpha_s(f)(\gamma) = \delta(\gamma)^{is} f(\gamma)$.

Posons par ailleurs $\iota(L(f)) = \underline{L}(f)$.

- Commençons par nous intéresser à l'action duale $(\theta_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$.

Nous savons que $\underline{\mathcal{M}}$ est engendrée par les $\underline{L}(f)$, $f \in C_c(\underline{G})$; or $\theta_a(\underline{L}(f)) = \underline{L}(f \circ \theta_a)$.

Nous voulons identifier $\underline{\mathcal{M}}^{\theta}$. Pour cela, il suffit de chercher les $\underline{L}(f)$ laissés invariants par θ .

Nous commençons par définir j sur $C_c(G)$ par $j(f)(\gamma, a) = f(\gamma)$. L'élément $j(f)$ ainsi défini n'appartient pas à $C_c(\underline{G})$ mais est un multiplicateur de $C_c(\underline{G})$, i.e. on peut définir $j(f) \star g$ et $g \star j(f)$ pour tout $g \in C_c(\underline{G})$.

On remarque également que, pour $f \in C_c(G)$:

$$\int |j(f)(\gamma, b)| d\lambda^{x,a}(\gamma, b) = \int |f| d\lambda^x \text{ et, de même,}$$

$$\int |j(f)(\gamma, b)| d\lambda_{x,a}(\gamma, b) = \int f(\gamma) d\lambda_x(\gamma)$$

Nous pouvons donc dire que $j(f) \in I(\underline{G})$ et donc j définit une inclusion de $W^*(G)$ dans $W^*(\underline{G})$

$$\begin{aligned}\theta_a(\underline{L}(f))\xi(\gamma, b) &= \int f \circ \theta_a(\gamma\gamma', b)\xi(\gamma'^{-1}, b\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ &= \int f(\gamma\gamma', a^{-1}b)\xi(\gamma'^{-1}, b\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ \underline{L}(f)\xi(\gamma, b) &= \int f(\gamma\gamma', b)\xi(\gamma'^{-1}, b\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')\end{aligned}$$

Nous voulons avoir $\theta_a(\underline{L}(f)) = \underline{L}(f)$ ce qui donne

$$\forall \xi \in C_c(\underline{G}), \quad \int (f(\gamma\gamma', a^{-1}b) - f(\gamma\gamma', b))\xi(\gamma'^{-1}, a\delta(\gamma\gamma'))d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') = 0$$

Ceci est vrai si et seulement si, on a $f(\gamma, a^{-1}b) = f(\gamma, b)$ pour presque-tout γ et pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, i.e. $f(\gamma, a) = f(\gamma, 1)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, étant donné $f \in C_c(\underline{G})$, pour que $\underline{L}(f)$ soit invariant, il faut et il suffit que f soit indépendante de a .

Si $\underline{L}(f)$ est invariant, on peut alors définir $\tilde{f} \in C_c(G)$ en posant $\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma, 1)$ et on a $f = j(\tilde{f})$.

Réciproquement, si $f \in C_c(G)$, alors $j(f) \in I(\underline{G})$ et $\underline{L}(f)$ est invariant par θ_a . Par définition de $\underline{\mathcal{M}}$ et \mathcal{M} , on en déduit que $\underline{\mathcal{M}}^\theta = \mathcal{M}$.

D'autre part, θ est bien continue d'après le paragraphe précédent donc $(\underline{\mathcal{M}}, \mathbb{R}, \theta)$ est bien un W^* -système dynamique.

- Définissons alors une représentation V de \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}})$. On définit tout d'abord V_t sur $C_c(\underline{G})$ par $V_t f(\gamma, b) = b^{-it} f(\gamma, b)$ pour $f \in C_c(\underline{G})$, puis on obtient $V_t : \mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}}) \rightarrow \mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}})$ en posant $V_t(\underline{L}(f)) = \underline{L}(V_t f)$.

En effet, nous voulons avoir $V_t \underline{L}(f)\xi(\gamma, b) = V_t f \star \xi(\gamma, b) = b^{-it} f \star \xi(\gamma, b)$ soit

$$V_t \underline{L}(f)\xi(\gamma, b) = b^{-it} \int f(\gamma\gamma', b)\xi(\gamma'^{-1}, \delta(\gamma')b)d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$$

ce qui donne bien la formule annoncée.

V_s est bien un unitaire de $\mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}})$:

$$\begin{aligned}(V_s \xi | V_s \eta) &= \int b^{-is} \xi(\gamma, b) \overline{b^{-is} \eta(\gamma, b)} d\mu \circ \lambda(\gamma, b) \\ (V_s \xi | V_s \eta) &= (\xi | \eta)\end{aligned}$$

et on a $V_s^* = V_{-s}$.

Enfin, pour $f \in C_c(\underline{G})$, calculons $V_s \underline{L}(f) V_{-s} \xi$:

$$\begin{aligned}
V_s \underline{L}(f) V_{-s} \xi(\gamma, b) &= b^{-is} \int f(\gamma\gamma', b) V_{-s} \xi(\gamma'^{-1}, \delta(\gamma\gamma')b) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\
&= b^{-is} \int f(\gamma\gamma', b) (\delta(\gamma\gamma')b)^{is} \xi(\gamma'^{-1}, \delta(\gamma\gamma')b) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\
&= \int \delta(\gamma\gamma')^{is} f(\gamma\gamma', b) \xi(\gamma'^{-1}, \delta(\gamma\gamma')b) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\
&= \underline{L}(\alpha_s(f)) \xi(\gamma, b)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $V_s \underline{L}(f) V_{-s} \xi = L(\alpha_s(f)) \xi$

En termes d'opérateurs aléatoires, pour $\xi \in \underline{\mathcal{H}}_{x,a}$ et $(\gamma, a\delta(\gamma)^{-1}) \in \underline{G}_{x,a}$, nous avons $(V_s)_{x,a} \xi(\gamma, a\delta(\gamma)^{-1}) = a^{-is} \delta(\gamma)^{is} \xi(\gamma, a\delta(\gamma)^{-1})$ donc, pour $\xi \in \underline{\mathcal{H}}_x$, nous obtenons

$$(V_s)_{x,a} \xi(\gamma) = a^{-is} \delta(\gamma)^{is} \xi(\gamma).$$

De plus, soit alors $T \in W^*(G)$.

$$\begin{aligned}
(V_s T (V_s)^*)_{x,a} \xi(\gamma) &= a^{-is} \delta(\gamma)^{is} T_x (V_{-s})_{x,a} \xi(\gamma) \\
&= a^{-is} \delta(\gamma)^{is} a^{is} T_x \Delta^{-is} \xi(\gamma)
\end{aligned}$$

Donc $V_s T (V_s)^* = \Delta^{is} T \Delta^{-is}$

Enfin, $V_s \in \underline{\mathcal{M}}$. En effet, soit $\gamma, a \in \underline{G}$ et $(\gamma', a\delta(\gamma')^{-1}) \in G_{r(\gamma),a}$.

$$\begin{aligned}
(V_s)_{r(\gamma),a} \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) \xi(\gamma', a\delta(\gamma')^{-1}) &= a^{is} \delta(\gamma')^{-is} \tilde{\underline{R}}(\gamma, a) \xi(\gamma', a\delta(\gamma')^{-1}) \\
&= a^{is} \delta(\gamma')^{-is} \xi(\gamma'\gamma, a\delta(\gamma')^{-1}) \\
\tilde{\underline{R}}(\gamma, a) (V_s)_{s(\gamma),a\delta(\gamma)} \xi(\gamma', a\delta(\gamma')^{-1}) &= (V_s)_{s(\gamma),a\delta(\gamma)} \xi(\gamma'\gamma, a\delta(\gamma')^{-1}) \\
&= (a\delta(\gamma))^{is} \delta(\gamma'\gamma)^{-is} \xi(\gamma'\gamma, a\delta(\gamma')^{-1}) \\
&= a^{is} \delta(\gamma')^{-is} \xi(\gamma'\gamma, a\delta(\gamma')^{-1})
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que (V_s) vérifie la relation de commutation souhaitée.

Nous avons ainsi bien construit une représentation $V : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\underline{\mathcal{H}})$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $V_s \in \underline{\mathcal{M}}$ et V_s est unitaire.

• Par ailleurs, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in G$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, nous obtenons $\theta_a((V_s)_{x,b}) = (V_s)_{x,ba^{-1}}$ donc $\theta_a((V_s)_{x,b}) \xi(\gamma, a^{-1}b\delta(\gamma)) = a^{is} V_s \xi(\gamma, a^{-1}b\delta(\gamma)^{-1})$. Nous obtenons donc

$$\theta_a(V_t) = a^{it} V_t \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

Ainsi, les conditions nécessaires sont bien vérifiées et nous avons donc, d'après le théorème de Landstadt, $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$. \square

Chapitre 3

Explicitation de la théorie spatiale

Afin d'étudier les espaces L^p de $W^*(G)$, nous allons expliciter les notations de la théorie spatiale dans le cadre de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde, en particulier les opérateurs R^{ψ_0} et Θ^{ψ_0} définis par A. Connes dans [Co80]; nous donnerons ensuite une caractérisation des opérateurs α -homogènes en termes d'opérateurs aléatoires.

Dans tout ce chapitre, nous considérons un groupoïde mesuré (G, λ, μ) séparé localement compact à base dénombrable d'ouverts et nous supposons que δ est continue. Nous notons \mathcal{M} l'algèbre de von Neumann de G représentée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$. Le poids canoniques définis sur \mathcal{M} et \mathcal{M}' sont respectivement notés φ_0 et ψ_0 .

3.1 Ensemble des vecteurs bornés et théorie spatiale

Nous souhaitons maintenant faire le lien entre les notations « usuelles » de la théorie des algèbres hilbertiennes et celles de la théorie spatiale ([Co80]). Au paragraphe 1.1.4, nous avons noté \mathcal{B} l'ensemble des vecteurs bornés à gauche. Nous conserverons cette notation dans la suite de ce travail et ajouterons éventuellement l'algèbre de von Neumann en indice lorsqu'une confusion sera possible. Par ailleurs, A. Connes a introduit la notion d'opérateur ψ_0 -borné (rappelée dans la définition 1.3.7). Nous faisons ici le lien entre ces deux ensembles.

Lemme 4

On a $D(\mathcal{H}, \psi_0) = \mathcal{B}$, les notations étant celles utilisées précédemment.

Démonstration. Par définition, $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$ s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $S \in \mathcal{M}'$ tel que $\psi_0(S^*S) < +\infty$, on ait $\|S\xi\| \leq C \|\eta_{\psi_0}(S)\|_{\mathcal{H}_{\psi_0}}$.

Or on sait que, pour $T \in \mathcal{M}'_+$, $\psi_0(T) = \varphi_0(JSJ)$ et donc $\psi_0(T) < +\infty$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{A}_l$ tel que $JTJ = L(f)^*L(f)$. Notons $[E]$ cette égalité.

Comme $J^2 = I$, $[E]$ équivaut à $T = JLL(f)^*JLL(f)J$, ce qui donne $T = R(Jf^*)R(Jf)$.

Mais $R(Jf^*) = R(\Delta^{\frac{1}{2}}f) = R(Jf)^*$. Ainsi, $\psi_0(T) < +\infty$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{A}_l$ telle que $T = R(Jf)^*R(Jf)$. Or J est un anti-isomorphisme de \mathcal{A}_l dans \mathcal{A}_r et de \mathcal{A}_r

dans \mathcal{A}_l ; On en déduit que $\psi_0(T) < +\infty$ si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{A}_r$ tel que $T = R(g)^*R(g)$

Revenons alors au début : comme $R(\eta)$ est dense dans \mathcal{M}' , on peut dire que $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$ si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\|R(\eta)\xi\| \leq C \| \eta_{\psi_0}(R(\eta)) \|_{\mathcal{H}_{\psi_0}}$ pour tout $\eta \in \mathcal{A}_r$.

Mais $\| \eta_{\psi_0}(R(\eta)) \|_{\mathcal{H}_{\psi_0}} = \Psi_0(R(\eta)^*R(\eta))^{\frac{1}{2}} = \|\eta\|$

Ainsi, la condition devient $\|R(\eta)\xi\| \leq C \|\eta\|$ pour $\eta \in \mathcal{A}_r$ ce qui prouve le lemme. \square

Rappelons qu'un opérateur T positif autoadjoint sur \mathcal{H} est dans $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ s'il vérifie l'une des conditions équivalentes du corollaire 1.3.19. Nous pouvons, d'après ce qui précède, réécrire ce corollaire en remplaçant $D(\mathcal{H}, \psi_0)$ par \mathcal{B} .

Cela nous donne :

Remarque 3.1.1

Si un opérateur T positif autoadjoint sur \mathcal{H} est dans $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}})$. Comme $C_c(G) \subset \mathcal{B}$, on a $C_c(G) \subset \mathcal{D}(T^{\frac{1}{2}})$.

3.2 Explicitation de la théorie générale

Proposition 3.2.1

L'anti-homomorphisme $f \mapsto Jf$ se prolonge en une isométrie de \mathcal{H} dans \mathcal{H}^{ψ_0} .

Soit $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$,

i) pour tout $f \in \mathcal{B}$, $R^{\psi_0}(\xi)R(Jf) = \xi \star Jf$.

*ii) si $\xi \in A_l$, alors $R^{\psi_0}(\xi)^*g = R(\xi^* \star g)$*

iii) $\Theta^{\psi_0}(\xi, \xi) = L(\xi)L(\xi)^$*

iv) $\frac{d\varphi_0}{d\psi_0} = \Delta$

Démonstration. • D'après 2.2.6, on a, pour $f \in \mathcal{B}$, $\psi_0(R(Jf)^*R(Jg)) = (g|f)$. Or le produit scalaire sur \mathcal{H}_{ψ_0} est défini par $(S, T) \mapsto \psi_0(T^*S)$. On en déduit que $f \mapsto Jf$ est une isométrie antilinéaire de $C_c(G)$ sur \mathcal{H}_{ψ_0} et se prolonge en une isométrie de \mathcal{H} dans \mathcal{H}_{ψ_0} .

i) Grâce à cette identification, on a, pour $f \in \mathcal{B}$,

$$R^{\psi_0}(\xi)\Lambda(R(Jf)) = R(Jf)\xi = \xi \star Jf$$

Par définition, $R^{\psi_0}(\xi)$ va de \mathcal{H}_{ψ_0} dans \mathcal{H} .

ii) Soit $\xi \in \mathcal{A}_l$ et soit $g \in \mathcal{H}$. On doit avoir

$$\begin{aligned}
(R^{\psi_0}(\xi)^*g|\Lambda(R(Jf)))_{\mathcal{H}_{\psi_0}} &= \overline{(g|R^{\psi_0}(\xi)\Lambda(R(Jf)))_{\mathcal{H}}} \\
&= \overline{(g|L(\xi)Jf)} \\
&= \overline{(g|JR(J\xi)f)} \quad \text{d'après la proposition 2.2.5 } i) \\
&= \overline{(R(J\xi)^*Jg|f)} \\
&= \overline{(R(\Delta^{\frac{1}{2}}\xi)Jg|f)} \quad \text{d'après la proposition 2.2.5 } ii) \\
&= \psi_0\left(R(Jf)^*R(J((Jg) \star (\Delta^{\frac{1}{2}}\xi)))\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(R^{\psi_0}(\xi)^*g|\Lambda(R(Jf)))_{\mathcal{H}_{\psi_0}} = \psi_0(R(Jf)^*R^{\psi_0}(\xi)^*g)$$

Donc l'égalité souhaitée est vraie en posant $R^{\psi_0}(\xi)^*g = R(J((Jg) \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi)))$

Mais $J(\xi \star \eta) = (J\xi) \star (J\eta)$ donc $R^{\psi_0}(\xi)^*g = R((J\Delta^{\frac{1}{2}}\xi) \star g) = R(\xi^* \star g)$

iii) On a alors

$$\begin{aligned}
R^{\psi_0}(\xi)R^{\psi_0}(\xi)^*g &= R^{\psi_0}(\xi)R(J((Jg) \star (\Delta^{\frac{1}{2}}\xi))) \\
&= \xi \star J((Jg) \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi)) \\
&= \xi \star ((J\Delta^{\frac{1}{2}}\xi) \star g) \\
&= \xi \star (\xi^* \star g) \\
&= L(\xi)L(\xi)^*g
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que $\Theta^{\psi_0}(\xi, \xi) = R^{\psi_0}(\xi)R^{\psi_0}(\xi)^* = L(\xi)L(\xi)^*$

iv) Nous savons que (Δ^{it}) est l'unique groupe à un paramètre d'unitaires de \mathcal{H} vérifiant les conditions de ([Co80], lemme 10 a) et que l'on a donc $\Delta^{it} = \left(\frac{d\varphi_0}{d\psi_0}\right)^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'où le résultat. \square

3.3 Opérateurs homogènes

Nous allons maintenant définir la notion d'opérateurs α -homogènes en utilisant le formalisme des opérateurs aléatoires. Nous parlerons indifféremment d'opérateurs ou d'opérateurs aléatoires :

Définition 3.3.1

Soit α un nombre réel.

Soit $T = (T_x)$ un opérateur aléatoire sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

On dit que T est α -homogène si,

$$\forall \gamma \in G, \tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset \delta^{-\alpha}(\gamma)T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$$

Remarque 3.3.1

1) Les opérateurs 0-homogènes sont les opérateurs affiliés à \mathcal{M} . En effet, les opérateurs $\tilde{R}(f)$, $f \in C_c(G)$ engendrent \mathcal{M}' et on a, pour tout $\gamma \in G$, $\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$.

2) Si T est α -homogène, alors on a : pour tout $\gamma \in G$, $\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)} = \delta^{-\alpha}(\gamma)T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$. Pour le voir, on écrit l'inclusion avec γ^{-1} .

3) Si T et S sont α -homogènes, alors $T + S$ est α -homogène.

Si T est α -homogène et S est β -homogène, alors TS est $(\alpha + \beta)$ -homogène.

Si T est α -homogène, alors T^* est aussi α -homogène.

Si T est positif autoadjoint, α -homogène, et si $\beta \in \mathbb{R}$, alors T^β est $\alpha\beta$ -homogène.

4) Si T est α -homogène, alors la projection sur $\text{Ker}(T)^\perp$ appartient à \mathcal{M} .

Pour le prouver, il suffit de démontrer que $\text{Ker}(T)$ est invariant par \mathcal{M}' , ce qui revient à prouver que $\text{Ker}(T)$ est invariant sous $\tilde{R}(g)$, $g \in C_c(G)$.

Soit $\xi \in \text{Ker}(T)$. Pour tout $\gamma \in G$, on veut prouver que $\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma) \in \text{Ker}(T_{r(\gamma)})$.

Or $T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma)(\gamma') = \delta^\alpha(\gamma)\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)(\gamma')$ par α -homogénéité de T .

Comme $T_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma) = 0$, on obtient bien $T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma) = 0$, ce qui signifie bien que $\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma) \in \text{Ker}(T_{r(\gamma)})$. Ceci prouve l'assertion.

5) Si un opérateur préfermé T est α -homogène, alors sa cloture $[T]$ l'est aussi.

6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\Delta^{-\alpha}$ est α -homogène.

On peut maintenant justifier que cette définition est équivalente à la définition d'opérateur homogène de degré α donnée dans le cadre abstrait (1.3.13). Pour cela, on commence par le lemme suivant.

Lemme 5

Soit T un opérateur fermé densément défini sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, de décomposition polaire $T = U|T|$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

T est α -homogène si et seulement si $U \in \mathcal{M}$ et $|T|$ est α -homogène.

Démonstration.

• Supposons que T est α -homogène.

D'après la remarque, T^* est aussi α -homogène, et donc T^*T est 2α -homogène.

On en déduit que $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2} \times 2\alpha$ -homogène, i.e. α -homogène.

Reste à prouver que $U \in \mathcal{M}$.

On a d'une part $T = U|T|$; d'autre part, on peut écrire $T = \int^\oplus T_x d\mu(x)$, $|T| =$

$\int^\oplus |T|_x d\mu(x)$ et $U = \int^\oplus U_x d\mu(x)$; on a alors, pour tout $x \in G^{(0)}$, $T_x = U_x|T|_x$. Avec

ces notations, nous avons :

Pour tout $\gamma \in G$, $f \in \mathcal{D}(|T|_{s(\gamma)})$,

$$\tilde{R}(\gamma)U_{s(\gamma)}|T|_{s(\gamma)}f = \delta^{-\alpha}(\gamma)U_{r(\gamma)}|T|_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)f$$

et donc

$$\tilde{R}(\gamma)U_{s(\gamma)}|T|_{s(\gamma)}f = U_{r(\gamma)}\delta^{-\alpha}(\gamma)|T|_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)f$$

Mais $|T|$ est α -homogène donc

$$\tilde{R}(\gamma)U_{s(\gamma)}|T|_{s(\gamma)}f = U_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)|T|_{s(\gamma)}f$$

On en déduit que, sur $\text{Im}(|T|_{s(\gamma)})$, $\tilde{R}(\gamma)U_{s(\gamma)} \subset U_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$, ou encore :

$$\tilde{R}(\gamma)U_{s(\gamma)}P_{\text{Ker}(|T|_{s(\gamma)})^\perp} \subset U_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)P_{\text{Ker}(|T|_{s(\gamma)})^\perp}$$

Or $\text{Im}(U_x)$ est le support de T_x , donc ceci prouve que U commute avec les $\tilde{R}(g)$. On en déduit que $U \in \mathcal{M}$.

• Supposons maintenant que $U \in \mathcal{M}$ et $|T|$ est α -homogène.

Comme $U \in \mathcal{M}$, U est en particulier affilié à \mathcal{M} , donc 0-homogène. Les propriétés du produit donnent donc que $T = U|T|$ est α -homogène. \square

Lemme 6

Soit T un opérateur fermé densément défini sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si, $\forall \gamma \in G$, $\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset \delta^{-\alpha}(\gamma)T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$ alors : $\forall f \in C_c(G)$, $R(f)T \subset TR(\Delta^\alpha f)$.

Démonstration. Soit $f \in C_c(G)$, $\xi \in \mathcal{D}(T)$ et $\eta \in \mathcal{D}(T^*)$.

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(f)T\xi|\eta) &= \int (\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)|\eta \circ r(\gamma))f(\gamma)d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ &= \int f(\gamma)\delta^{-\alpha}(\gamma)(T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma)|\eta \circ r(\gamma))d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ &= \int f(\gamma)\delta^{-\alpha}(\gamma)(\tilde{R}(\gamma)\xi \circ s(\gamma)|(T_{r(\gamma)})^*\eta \circ r(\gamma))d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \end{aligned}$$

Or $(T_x)^* = (T^*)_x$ donc

$$(\tilde{R}(f)T\xi|\eta) = (\tilde{R}(f\Delta^{-\alpha})\xi|T^*\eta)$$

Donc $\tilde{R}(f\Delta^{-\alpha})\xi \in \mathcal{D}(T^{**}) = \mathcal{D}(T)$ et, pour tout $\xi \in \mathcal{D}(T)$,

$$T\tilde{R}(f\Delta^{-\alpha})\xi = \tilde{R}(f)T\xi$$

Mais $R(f)T = \tilde{R}(\Delta\tilde{f})T = T\tilde{R}(\Delta\tilde{f}\Delta^{-\alpha}) = TR(f\Delta^\alpha)$.

d'où le résultat. \square

Par la suite, nous aurons besoin du résultat suivant

Proposition 3.3.1

Si T est un opérateur autoadjoint positif de $L^2(G_x, \lambda_x)$ tel que

$$\forall \gamma \in G_x, \quad \tilde{R}(\gamma)T\tilde{R}(\gamma^{-1}) = \Delta^{-\alpha}T,$$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \gamma \in G_x$, $\tilde{R}(\gamma)T^{it}\tilde{R}(\gamma^{-1}) = \Delta^{-iat}T^{it}$

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit f définie par $f(z) = z^{it} = e^{it \log(z)}$. Cette fonction est analytique sur $]0; +\infty[$.

On sait que T est autoadjoint positif et Δ également donc $\Delta^{-\alpha}T$ est autoadjoint positif. Ainsi, on peut calculer $f(\Delta^{-\alpha}T)$ et on a $f(\Delta^{-\alpha}T) = \Delta^{-i\alpha t}T^{it}$.

Posons $S = \tilde{R}(\gamma)$ et calculons alors $f(STS^{-1})$. On a $f(STS^{-1}) = \int f(\lambda) dP_\lambda^{STS^{-1}}$ où $P_\lambda^{STS^{-1}}$ est la projection spectrale associée à la valeur spectrale λ pour l'opérateur STS^{-1} . Mais $STS^{-1} - \lambda I = S(T - \lambda I)S^{-1}$ donc $STS^{-1} - \lambda I$ est inversible si et seulement si $T - \lambda I$ l'est. Ainsi, la résolvante de STS^{-1} est la même que celle de T , et il en est de même pour le spectre $\sigma(T)$.

Soit donc $\lambda \in \sigma(T)$. On a $\text{Im}(STS^{-1} - \lambda I) = S \text{Im}(T - \lambda I)S^{-1}$ donc $P_\lambda^{STS^{-1}} = SP_\lambda^T S^{-1}$. Ainsi, on obtient $f(STS^{-1}) = \int f(\lambda) dSP_\lambda^T S^{-1} = S \int f(\lambda) dP_\lambda^T S^{-1} = Sf(T)S^{-1}$ d'où le résultat annoncé dans la proposition. \square

Lemme 7

Soit T un opérateur fermé densément défini sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, α -homogène pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\xi \in \mathcal{B}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|T|^{it} \xi \in \mathcal{B}$ et

$$\left\| L(|T|^{it} \xi) \right\| \leq \|L(\xi)\|$$

Preuve. D'après le lemme 5, $|T|$ est α -homogène donc on a

$$\forall \gamma \in G, \tilde{R}(\gamma) |T|_{s(\gamma)} = \delta^{-\alpha}(\gamma) |T|_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma)$$

et donc

$$\forall \gamma \in G, \tilde{R}(\gamma) |T|_{s(\gamma)} \tilde{R}(\gamma^{-1}) = \delta^{-\alpha}(\gamma) |T|_{r(\gamma)}$$

On en déduit que, pour tout $\gamma \in G$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a (3.3.1)

$$\tilde{R}(\gamma) |T|_{s(\gamma)}^{it} \tilde{R}(\gamma^{-1}) = \delta^{-i\alpha t} |T|_{r(\gamma)}^{it}$$

On peut donc appliquer le lemme précédent à $|T|^{it}$. Pour $\eta \in C_c(G)$, on obtient

$$(|T|^{it} \xi) \star \eta = R(\eta) |T|^{it} \xi = |T|^{it} R(\delta^{i\alpha t} \eta) \xi = |T|^{it} L(\xi) \delta^{i\alpha t} \eta$$

et donc $|T|^{it} \xi \star \eta \in L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et

$$\begin{aligned} \left\| |T|^{it} \xi \star \eta \right\|_2 &\leq \left\| |T|^{it} \right\| \|L(\xi)\| \|\delta^{i\alpha t} \eta\|_2 \\ &\leq \|L(\xi)\| \|\eta\|_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $|T|^{it} \xi$ est borné à gauche et

$$\left\| L(|T|^{it} \xi) \right\| \leq \|L(\xi)\|$$

\square

Le dernier lemme permet finalement de prouver que la définition donnée est équivalente à celle de [Te80].

Lemme 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et T un opérateur fermé densément défini sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ de décomposition polaire $T = U |T|$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) T est α -homogène.

ii) $U \in \mathcal{M}$ et $\forall S \in \mathcal{M}', \forall t \in \mathbb{R}, \sigma_{\alpha t}^{\psi_0}(S) |T|^{it} = |T|^{it} S$

Démonstration. Grâce au lemme 5, on peut se restreindre au cas où T est positif auto-adjoint.

Notons P la projection sur $\text{Ker}(T)^\perp$.

Tout d'abord, rappelons que, si i) est vrai, alors $P \in \mathcal{M}$.

De même, si ii) est vrai, $P \in \mathcal{M}$.

• On suppose donc que $P \in \mathcal{M}$, et prouver le lemme revient alors à prouver l'équivalence de :

$$\forall \gamma \in G : \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} \tilde{R}(\gamma^{-1}) P = \delta^{-\alpha}(\gamma) T_{r(\gamma)} P \quad (1)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall S \in \mathcal{M}', \sigma_{\alpha t}^{\psi_0}(S) P = T^{it} S T^{-it} P \quad (2)$$

Soit $\gamma \in G$. On sait que $\{\tilde{R}(g), g \in C_c(G)\}$ engendrent \mathcal{M}' . On s'intéresse donc à $\sigma_{\alpha t}^{\psi_0}(\tilde{R}(g))$.

• Prouvons que $\sigma_{\alpha t}^{\psi_0}(\tilde{R}(g)) = \tilde{R}(\Delta^{+i\alpha t} g)$ pour $g \in C_c(G)$.

On a

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha t}^{\psi_0}(\tilde{R}(g)) f(\gamma') &= (\Delta^{-i\alpha t} \tilde{R}(g) \Delta^{i\alpha t}) f(\gamma') \\ &= \delta^{-i\alpha t}(\gamma') \int \delta^{i\alpha t}(\gamma'') f(\gamma'') \delta(\gamma''^{-1} \gamma') \tilde{g}(\gamma''^{-1} \gamma') d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma'') \\ &= \int f(\gamma'') \delta(\gamma''^{-1} \gamma') \delta^{-i\alpha t}(\gamma''^{-1} \gamma') \tilde{g}(\gamma''^{-1} \gamma') d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma'') \\ &= f \star (\Delta \widetilde{\Delta^{i\alpha t} g})(\gamma') \\ &= \tilde{R}(\Delta^{i\alpha t} g) f \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion.

Ainsi, ii) est équivalent à :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in C_c(G), \tilde{R}(\Delta^{i\alpha t} g) P = T^{it} \tilde{R}(g) T^{-it} P$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in C_c(G), \tilde{R}(\Delta^{-i\alpha t} g) P = T^{-it} \tilde{R}(g) T^{it} P$$

Mais, pour $g \in C_c(G)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a

$$(\tilde{R}(g) \xi | \eta) = \int (\tilde{R}(\gamma) \xi \circ s(\gamma) | \eta \circ r(\gamma)) g(\gamma) d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

donc

$$\begin{aligned} (T^{-it}\tilde{R}(g)T^{it}P\xi|\eta) &= (\tilde{R}(g)T^{it}P\xi|T^{it}\eta) \quad \text{car } T \text{ est autoadjoint} \\ &= \int (\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}^{it}P_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)|T_{r(\gamma)}^{it}\eta \circ r(\gamma))g(\gamma)d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \end{aligned}$$

et

$$(\tilde{R}(\delta^{-iat}g)P\xi|\eta) = \int (\tilde{R}(\gamma)P_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)|\eta \circ r(\gamma))\delta^{-iat}(\gamma)g(\gamma)d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

ii) est donc équivalente à : pour presque tout $\gamma \in G$,

$$(\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}^{it}P_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)|T_{r(\gamma)}^{it}\eta \circ r(\gamma)) = (\tilde{R}(\gamma)P_{s(\gamma)}\xi \circ s(\gamma)|\eta \circ r(\gamma))\delta^{-iat}(\gamma)$$

i.e., sur $\mathcal{H}_{s(\gamma)}$, $T_{s(\gamma)}^{-it}\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}^{it}P_{s(\gamma)} = \delta^{-iat}(\gamma)\tilde{R}(\gamma)P_{s(\gamma)}$.

En utilisant que $P \in \mathcal{M}$ et $\tilde{R}(\gamma') \in \mathcal{M}'$ pour tout $\gamma' \in G$, on obtient

$$\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}^{it}P_{s(\gamma)} = T_{s(\gamma)}^{it}\delta^{-iat}(\gamma)P_{s(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)$$

et finalement,

$$\tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}^{it}\tilde{R}(\gamma^{-1})P_{s(\gamma)} = T_{s(\gamma)}^{it}\delta^{-iat}(\gamma)P_{s(\gamma)}$$

Ce qui équivaut à

$$\forall \gamma \in G, \tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}\tilde{R}(\gamma^{-1})P_{s(\gamma)} = T_{s(\gamma)}\delta^{-\alpha}(\gamma)P_{s(\gamma)}$$

On obtient bien que *ii)* est équivalente à *i)* □

Le lemme suivant, adapté du lemme 2.5 de [Te80], se démontre de la même façon que dans [Te80].

Lemme 9

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit T un opérateur positif autoadjoint sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, α -homogène. Soit $\xi \in \mathcal{B}$. Alors il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in \mathcal{B} \cap \cap_{\beta \in \mathbb{R}^+} D(T^\beta)$ et telle que :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|L(\xi_n)\| \leq 2\|L(\xi)\|$

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$

iii) Si, de plus, pour $\beta \in \mathbb{R}^+$, on a $\xi \in D(T^\beta)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} T^\beta \xi_n = T^\beta \xi$. Par ailleurs,

$\mathcal{B} \cap \cap_{\beta \in \mathbb{R}^+} D(T^\beta)$ est un domaine essentiel pour T^β , quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x^{\frac{it}{\sqrt{n}}} dt & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On remarque que, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$; par conséquent, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $|f_n(x)| \leq 1$. On en déduit que $f_n(T)$ est un opérateur borné sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, i.e. $f_n(T) \in \mathcal{L}(L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1}))$.

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = f_n(T)\xi$.

• Prouvons tout d'abord que la suite (ξ_n) est bien dans $D(T^\beta)$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$.

On a, pour $x > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + \frac{it}{\sqrt{n}} \ln(x)} dt$

donc $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\ln(x)^2}{4n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t + \frac{i}{2\sqrt{n}}\right)^2} dt$ et finalement, $f_n(x) = e^{-\frac{\ln(x)^2}{4n}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+$, considérons alors $g_{n,\beta}$ définie de \mathbb{R}_+^* dans lui-même par l'égalité $g_{n,\beta}(x) = x^\beta f_n(x)$. Cette fonction est continue sur \mathbb{R}_+^* et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{n,\beta} = 0$, elle est bornée.

On en déduit que $g_{n,\beta}(T) = T^\beta f_n(T)$ est un opérateur borné et donc $f_n(T)\xi \in D(T^\beta)$.

• Il faut ensuite justifier que ξ_n appartient bien à $\mathcal{B} \cap \bigcap_{\beta \in \mathbb{R}_+} D(T^\beta)$ et démontrer l'inégalité du *i*)

Notons P la projection sur $\text{Ker}(T)^\perp$. Soit $\eta \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} (f_n(T)P\xi) \star \eta &= R(\eta)f_n(T)P\xi \\ &= R(\eta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} dt P\xi \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} R(\eta) T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} P\xi dt \\ \text{Or } T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} P\xi &= T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \xi \text{ donc} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} R(\eta) T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \xi dt \end{aligned}$$

Comme T est α -homogène, on a :

$$\forall \gamma \in G, \tilde{R}(\gamma) T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \subset \delta^{-\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}}(\gamma) T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \tilde{R}(\gamma)$$

De plus, T est fermé et densément défini.

L'application du lemme 6 à $T^{\frac{it}{\sqrt{n}}}$ donne alors

$$\begin{aligned} f_n(T)P\xi \star \eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} R \left(\Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right) \xi dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \xi \star \left(\Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right) dt \end{aligned}$$

Calculons alors $(f_n(T)P\xi \star \eta | f_n(T)P\xi \star \eta) = A$:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-t^2} \left(T^{\frac{is}{\sqrt{n}}} (\xi \star \Delta^{\frac{i\alpha s}{\sqrt{n}}} \eta) | T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} (\xi \star \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta) \right) ds dt \quad (3.1)$$

$$A \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2-t^2} \left\| T^{\frac{is}{\sqrt{n}}} (\xi \star \Delta^{\frac{i\alpha s}{\sqrt{n}}} \eta) \right\|_2 \left\| T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} (\xi \star \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta) \right\|_2 ds dt \quad (3.2)$$

l'inégalité découlant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Or,

$$\begin{aligned} \left\| T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} (\xi \star \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta) \right\|_2 &= \left\| T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} (L(\xi) \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta) \right\|_2 \\ &= \left\| L(T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \xi) \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 \\ &\leq \left\| L(T^{\frac{it}{\sqrt{n}}} \xi) \right\| \left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 \\ &\leq \|L(\xi)\| \left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 \quad \text{par le lemme 7} \end{aligned}$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2-t^2} \|L(\xi)\|^2 \left\| \Delta^{\frac{i\alpha s}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 \left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 ds dt \\ A &\leq \|L(\xi)\|^2 \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \left\| \Delta^{\frac{i\alpha s}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 ds \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 dt \right) \\ A &\leq \|L(\xi)\|^2 \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \left\| \Delta^{\frac{i\alpha s}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 ds \right)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(T)P\xi \star \eta$ appartient à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ et

$$\|f_n(T)P\xi \star \eta\|_2 \leq \frac{\|L(\xi)\|}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 dt$$

Mais, par ailleurs, $\left\| \Delta^{\frac{i\alpha t}{\sqrt{n}}} \eta \right\|_2 \leq \|\eta\|_2$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ donc

$$\|f_n(T)P\xi \star \eta\|_2 \leq \|\pi(\xi)\| \|\eta\|_2$$

D'autre part, $P \in \mathcal{M}$, donc $1 - P \in \mathcal{M}$ et donc

$$\|(1 - P)\xi \star \eta\|_2 = \|L((1 - P)\xi)\eta\|_2 \leq \|L((1 - P)\xi)\| \|\eta\|_2$$

Comme $\|L((1 - P)\xi)\| \leq \|L(\xi)\|$, on obtient finalement

$$\|(1 - P)\xi \star \eta\|_2 \leq \|L(\xi)\| \|\eta\|_2$$

Revenons alors à $f_n(T)\xi = f_n(T)P\xi + f_n(T)(1 - P)\xi$.

Comme $(1 - P)\xi \in \text{Ker}(T)$ et $f_n(T)|_{\text{Ker}(T)} = I_{\text{Ker}(T)}$, on a $f_n(T)\xi = f_n(T)P\xi + (1 - P)\xi$. Comme les deux termes de la somme appartiennent à \mathcal{B} , $f_n(T)\xi \in \mathcal{B}$. De plus, d'après les inégalités ci-avant, $\|L(f_n(T)\xi)\eta\| \leq 2\|L(\xi)\|\|\eta\|_2$. D'où on déduit que $L(f_n(T)\xi)$ est borné et $\|L(f_n(T)\xi)\| \leq 2\|L(\xi)\|$.

- Reste à prouver *ii*) et *iii*).

On sait que f_n est bornée. De plus, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f_n(x)$ tend vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$.

Par conséquent, pour tout ζ , on a $f_n(T)\zeta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n = f_n(T)\xi$ donc on obtient bien la convergence de ξ_n vers ξ .

Par ailleurs, si $\xi \in D(T^\beta)$, $T^\beta\xi_n = T^\beta f_n(T)\xi = f_n(T)T^\beta\xi$ car T et $f_n(T)$ commutent.

On en déduit alors la convergence vers $T^\beta\xi$.

- La fin du lemme est une conséquence immédiate de la proposition 2 de [Hi81] □

3.4 Égalité d'opérateurs

Indiquons maintenant un lemme que l'on peut démontrer en utilisant la même méthode que pour la démonstration de [Hi81] partie 1, théorème 4.

Lemme 10

Soit $p \in [1; +\infty]$. Soit $T_1 \in L^p(\mathcal{M}, \psi_0)$ et T_2 un opérateur fermé, densément défini et $-\frac{1}{p}$ -homogène sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. Si $T_2 \subset T_1$ ou $T_2 \supset T_1$, alors $T_1 = T_2$.

La proposition suivante se démontre alors exactement de la même manière que dans [Te80] (proposition 2.4).

Proposition 3.4.1

Soit $p \in [1; +\infty]$.

1) Soit T et S deux opérateurs fermés densément définis et $-\frac{1}{p}$ -homogène sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

On suppose de plus que $C_c(G) \subset D(T)$ et $C_c(G) \subset D(S)$.

Si $\forall \xi \in C_c(G), T\xi = S\xi$ et si $T \in L^p(\mathcal{M}, \psi_0)$, alors $T = S$.

2) Si $T \in L^p(\mathcal{M}, \psi_0)$ et si $C_c(G) \subset D(T)$, alors $T = [T|_{C_c(G)}]$.

Chapitre 4

Espace L^1 d'une algèbre de von Neumann de groupoïde

Si \mathcal{M} est une algèbre de von Neumann, nous savons qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Banach permettant d'identifier $L^1(\mathcal{M})$ et le prédual \mathcal{M}_* . Afin d'étudier $L^1(\mathcal{M})$, nous allons donc commencer par une étude du prédual.

4.1 Identification du prédual

4.1.1 Formes linéaires positives normales et prédual

On peut maintenant rappeler un résultat démontré dans [Di69] (III.1.4, théorème 4 et corollaire) dans le cas d'une algèbre semi-finie et dans [Ta03] (1.1.6) dans le cas de type III. Ce résultat pourra ensuite être appliqué à l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde.

Théorème 4.1.1

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann dans une représentation standard dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Soit φ une forme linéaire positive normale sur \mathcal{M} . Alors il existe x dans \mathcal{H} tel que $\varphi = \omega_x$.

De plus, $\|\varphi\| = \|x\|^2$.

Démonstration. Nous ne rappelons pas la démonstration mais précisons le calcul de la norme.

On a $\varphi = \omega_x$, pour $x \in \mathcal{H}$.

Par conséquent, pour tout $T \in \mathcal{M}$, $|\varphi(T)| = |(Tx|x)| \leq \|T\| \|x\|^2$.

Ceci prouve que $\|\varphi\| \leq \|x\|^2$.

Or $I \in \mathcal{M}$ et $|\varphi(I)| = \|x\|^2$, ce qui prouve que la norme est atteinte. Finalement, on a $\|\varphi\| = \|x\|^2$, pour tout $x \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi = \omega_x$, ce qui prouve la formule annoncée. \square

4.1.2 Formes linéaires ultrafaiblement continues

Nous pouvons maintenant démontrer un théorème permettant d'identifier le prédual.

Théorème 4.1.2

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann dans une représentation standard dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Soit φ une forme linéaire ultrafaiblement continue sur \mathcal{M} . Alors il existe deux éléments x, y de \mathcal{H} tels que $\varphi = \omega_{x,y}$. De plus, $\|\varphi\| = \inf\{\|x\| \|y\| ; x, y \in \mathcal{H} : \varphi = \omega_{x,y}\}$ et cette norme est atteinte.

Démonstration.

1) D'après le théorème de décomposition polaire de [Di69] (I.4.7, théorème 4), on peut écrire $\varphi = f \cdot U$ avec

✎ $f = |\varphi|$ forme linéaire normale positive sur \mathcal{M} et $\|\varphi\| = \|f\|$

✎ U isométrie partielle de \mathcal{M} , de projecteur final égal au support de f .

Appliquant le théorème précédent à f , on peut trouver un z dans \mathcal{H} tel que, pour tout $T \in \mathcal{M}$, $f(T) = (Tz|z)$.

Par conséquent, pour tout $T \in \mathcal{M}$, $\varphi(T) = (f \cdot U)(T) = f(UT) = (UTz|z)$.

On en déduit que $\varphi(T) = (Tz|U^*z)$, ou encore que $\varphi = \omega_{z,y}$ avec $y = U^*z$.

2) Reste à démontrer l'égalité des normes.

Tout d'abord, notons E l'ensemble des $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tels que $\varphi = \omega_{x,y}$.

Nous savons que $\|\varphi\| = \|f\| = \|z\|^2$ en posant $f = \omega_z$.

Par ailleurs, $\varphi = \omega_{z,U^*z}$ et $\|z\|^2 = \|z\| \|U^*z\|$ en utilisant que U^* est une isométrie partielle donc $\|\varphi\| = \|z\|^2 = \|z\| \|U^*z\|$.

Or $(z, U^*z) \in E$ donc $\inf\{\|x\| \|y\| : \varphi = \omega_{x,y}\} \leq \|\varphi\|$.

Mais, par ailleurs, par définition, $\|\varphi\| \leq \inf\{\|x\| \|y\| : \varphi = \omega_{x,y}\}$, d'où l'égalité annoncée. \square

Enfin, terminons avec la proposition suivante :

Proposition 4.1.1

L'ensemble F des $\omega_{x,y}$ avec $x, y \in \mathcal{H}$ est un espace vectoriel.

Preuve. Il suffit de vérifier que F est stable par combinaison linéaire.

Soit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Définissons $\phi = \omega_{x_1,y_1} + \alpha\omega_{x_2,y_2}$. On a alors, par définition de $\omega_{x,y}$, $\phi = \omega_{x_1,y_1} + \omega_{\alpha x_2,y_2}$.

Mais nous savons qu'une telle somme définit une forme linéaire ultrafaiblement sur \mathcal{M} . D'après le théorème précédent, il existe donc $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $\phi = \omega_{x,y}$. Ainsi, $\phi \in F$ et donc F est bien un espace vectoriel. \square

Nous considérerons dans tout la suite un groupoïde mesuré (G, λ, μ) localement compact, à base dénombrable d'ouverts et tel que la dérivée de Radon-Nikodym δ est continue.

4.2 $L^1(\text{VN}(G))$ vu comme espace de fonctions sur G **4.2.1 Définition de nouveaux coefficients**

Nous allons ici expliciter les coefficients de la représentation L (définie au chapitre précédent) de $C_c(G)$ dans $\mathcal{H} = L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$.

Tout d'abord, on obtient une isométrie Φ de $\mathcal{H} = L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$ sur $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ en posant $\Phi(\xi) = \Delta^{-\frac{1}{2}}\xi$.

Soit $f \in C_c(G)$ et soit $\xi \in \mathcal{H}$ et $\eta \in \mathcal{H}$. Posons $\xi' = \Phi(\xi)$ et $\eta' = \Phi(\eta)$ et calculons $(L(f)\xi|\eta)$:

Nous avons, par définition,

$$(L(f)\xi|\eta) = \int \left(\int f(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \right) \overline{\eta(\gamma)}d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$$

Des calculs similaires à ceux déjà conduits permettent de justifier que

$$\int \int |f(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\overline{\eta(\gamma)}|d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma')d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$$

est finie et que l'on peut utiliser le théorème de Fubini. On obtient alors

$$\begin{aligned} (L(f)\xi|\eta) &= \int \int f(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\overline{\eta(\gamma)}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma')\delta(\gamma)^{-1}d\lambda^x(\gamma)d\mu(x) \\ (L(f)\xi|\eta) &= \int \int f(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\overline{\eta(\gamma)}d\lambda^x(\gamma')\delta(\gamma)^{-1}d\lambda^x(\gamma)d\mu(x) \\ (L(f)\xi|\eta) &= \int \int f(\gamma')\delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{-\frac{1}{2}}\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\overline{\eta(\gamma)}\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^x(\gamma)d\lambda^x(\gamma')d\mu(x) \\ (L(f)\xi|\eta) &= \int f(\gamma') \left(\int \xi'(\gamma'^{-1}\gamma)\overline{\eta'(\gamma)}d\lambda^x(\gamma) \right) \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^x(\gamma')d\mu(x) \\ (L(f)\xi|\eta) &= \int f(\gamma') (L(\gamma')\xi' \circ s(\gamma')|\eta' \circ r(\gamma'))_{\mathcal{H}^{r(\gamma')}} \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^x(\gamma')d\mu(x) \end{aligned}$$

où $L(\gamma) : L^2(G^{s(\gamma)}, \lambda^{s(\gamma)}) \longrightarrow L^2(G^{r(\gamma)}, \lambda^{r(\gamma)})$ est défini par $L(\gamma)\xi'(\gamma') = \xi'(\gamma^{-1}\gamma')$.

En notant (ξ', η') le coefficient donné par $(\xi', \eta')(\gamma) = (L(\gamma)\xi' \circ s(\gamma)|\eta' \circ r(\gamma))$, et en posant $\nu_0 = \delta^{-\frac{1}{2}}\nu$, on obtient

$$(L(f)\xi|\eta) = \int f(\xi', \eta')d\nu_0$$

Par la suite, nous définirons donc le coefficient (ξ, η) comme étant égal à $(\Phi(\xi), \Phi(\eta))$, ou encore

$$(\xi, \eta)(\gamma) = (L(\gamma)\Phi(\xi) \circ s(\gamma)|\Phi(\eta) \circ r(\gamma))_{\mathcal{H}^{r(\gamma)}}$$

Dans ce qui suit, une écriture comme produit de convolution pourra être utile. Le calcul donne, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} (\xi, \eta)(\gamma) &= \int \delta(\gamma^{-1}\gamma')^{-\frac{1}{2}}\xi(\gamma^{-1}\gamma')\overline{\eta(\gamma')}\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \\ (\xi, \eta)(\gamma) &= \int \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{\frac{1}{2}}\overline{\xi^*(\gamma'^{-1}\gamma)}\overline{\eta(\gamma')}\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \\ (\xi, \eta)(\gamma) &= \overline{(\Delta^{-\frac{1}{2}}\eta) \star (\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi)^*}(\gamma) \end{aligned}$$

Définition 4.2.1

On note $\mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$ l'ensemble des coefficients (ξ, η) définis ci-avant, où $\xi \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$.

On note $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$.

Remarque 4.2.1

$\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ est l'ensemble des coefficients (ξ, η) définis ci-avant, où $\xi, \eta \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$,

4.2.2 Identification de L^1 avec un espace de coefficients

Commençons par poser

Définition 4.2.2

Soit $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$. On définit $\|F\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{G})}$ en posant

$$\|F\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{G})} = \inf\{\|\xi\|_2 \|\eta\|_2 : \xi, \eta \in \mathcal{H}, F = (\xi, \eta)\}$$

Cette définition a bien un sens. Nous allons maintenant démontrer que $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ s'identifie au préduel de \mathcal{M} .

Théorème 4.2.1

Il existe un isomorphisme isométrique ω entre $(\mathcal{L}^1(\widehat{G}), \|\cdot\|)$ et $(\mathcal{M}_*, \|\cdot\|)$, défini par

$$\begin{cases} \mathcal{L}^1(\widehat{G}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_* \\ F = (\xi, \eta) & \longmapsto & \omega_{\xi, \eta} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{M}_*$. D'après ce qui précède, il existe $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ tels que $\phi = \omega_{\xi, \eta}$.

Pour $f \in C_c(G)$, on obtient $\phi(L(f)) = (L(f)\xi|\eta)$ donc

$$\phi(L(f)) = \int \int f(\gamma') \xi(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \overline{\eta(\gamma)} d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

Il faut justifier que l'on peut intervertir en utilisant le théorème de Fubini.

Posons $A = \int \int |f(\gamma')| |\xi(\gamma'^{-1}\gamma)| |\eta(\gamma)| d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$. On a démontré (voir démonstration de la proposition 2.2.2) que $A \leq \|f\|_1 \|\xi\|_2 \|\eta\|_2$. Ainsi, on peut utiliser le théorème de Fubini pour transformer $\phi(L(f))$:

$$\phi(L(f)) = \int \int f(\gamma') \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \overline{\eta(\gamma)} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

$$\phi(L(f)) = \int f(\gamma') \int \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \overline{\eta(\gamma)} \delta(\gamma^{-1}) \delta(\gamma') d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \delta(\gamma')^{-1} d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

$$\phi(L(f)) = \int f(\gamma') \left(\int \delta(\gamma')^{\frac{1}{2}} \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \overline{\eta(\gamma)} \delta(\gamma^{-1}) d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right) \delta(\gamma')^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma')$$

$$\phi(L(f)) = \int f(\gamma') (L(\gamma')\xi \circ s(\gamma') | \eta \circ r(\gamma')) \delta(\gamma')^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma')$$

On souhaite donc poser, si $\phi = \omega_{\xi, \eta}$ avec $\eta, \xi \in \mathcal{H}$,

$$\omega(\phi) = (L(\gamma')\xi \circ s(\gamma')|\eta \circ r(\gamma')) = \overline{(\Delta^{-\frac{1}{2}}\eta) \star (\Delta^{-\frac{1}{2}}\xi)^*}.$$

Il faut vérifier qu'une telle définition a bien un sens.

1) Si $\phi = \omega_{\xi_1, \eta_1} = \omega_{\xi_2, \eta_2}$ alors pour tout $f \in C_c(G)$, on aura

$$\int f(\gamma')(\xi_1, \eta_1)(\gamma')\delta(\gamma')^{\frac{1}{2}}d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma') = \int f(\gamma')(\xi_2, \eta_2)(\gamma')\delta(\gamma')^{\frac{1}{2}}d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma')$$

d'où $(\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$ $\mu \circ \lambda^{-1}$ -presque partout.

La définition a donc bien un sens.

2) À tout $\phi \in \mathcal{M}_*$, on associe un élément de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$, noté $\omega(\phi)$, défini comme ci-avant.

Nous allons démontrer que l'application ω est bijective :

Soit $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$. Il faut montrer qu'on peut lui associer un unique $\phi \in \mathcal{M}_*$ tel que $\omega(\phi) = F$.

Tout d'abord, supposons que l'on ait $F = (\xi, \eta) = (\xi_2, \eta_2)$. Alors, pour tout $g \in C_c(G)$,

$$\int g(\gamma)(\xi, \eta)(\gamma)\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma)d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma) = \int g(\gamma)(\xi_2, \eta_2)(\gamma)\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma)d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$$

(et les intégrales sont finies d'après ce qui précède).

On peut donc définir ϕ sur $L(C_c(G))$ par

$$\phi(L(g)) = \int g(\gamma)(\xi, \eta)\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$$

On a $\phi(L(g)) = \int L(g)\xi(\gamma)\overline{\eta(\gamma)}d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$

Mais $L(C_c(G))$ est faiblement dense dans \mathcal{M} . Soit donc $S \in \mathcal{M}$. Il existe une suite (g_n) d'éléments de $C_c(G)$ telle que $(L(g_n))$ converge faiblement vers S . Quand $n \rightarrow +\infty$, on a donc $(L(g_n)k|f) \rightarrow (Sk|f)$ pour tout $f, k \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

Ainsi, si on pose $\phi(S) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (L(g_n)\xi|\eta) = (S\xi, \eta)$, on définit une forme linéaire ϕ sur \mathcal{M} .

Elle est bien dans \mathcal{M}_* puisque $\phi(S) = \omega_{\xi, \eta}$.

On a donc démontré que ω est une application linéaire bijective de \mathcal{M}_* sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

3) Enfin, la définition de $\|F\|$ pour $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ permet d'affirmer que les $F \mapsto \|F\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ et que l'application ω définie ci-avant est une isométrie de $(L^1(\mathcal{M}, \psi_0), \|\cdot\|_1)$ sur $(\mathcal{L}^1(\widehat{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{G})})$. □

Précisons également une formule importante que nous avons obtenue au cours de la démonstration :

$$\forall g \in C_c(G), \forall \xi, \eta \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1}), \quad \omega_{\xi, \eta}(L(g)) = \int g(\gamma)(\xi, \eta)(\gamma)\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$$

4.3 Application à des cas particuliers

4.3.1 Cas où G est un espace

Dans le cas où (G, λ, μ) est un espace mesuré séparable (X, μ) , nous avons vu (1.4) que L était en fait la représentation M .

Si $\xi, \eta \in L^2(X, \mu)$, nous obtenons $(\xi, \eta) = \xi\bar{\eta}$ et le théorème nous dit que $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ s'identifie à l'ensemble des $\xi\bar{\eta}$ avec $\xi, \eta \in L^2(X)$. Comme, par ailleurs, $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ s'identifie à $L^1(X, \mu)$, nous obtenons que $L^1(X, \mu)$ est l'ensemble des fonctions f mesurables qui peuvent s'écrire sous la forme $\xi\bar{\eta}$ avec $\xi, \eta \in L^2(X, \mu)$, c'est-à-dire qu'une fonction mesurable est dans $L^1(X, \mu)$ si et seulement si elle est produit de deux fonctions de $L^2(X, \mu)$.

4.3.2 Cas où G est un groupe

Dans le cas où G est un groupe localement compact abélien, on définit classiquement l'algèbre de Fourier du groupe $A(G)$. Pour un groupe G localement compact quelconque muni d'une mesure de Haar à gauche λ , P. Eymard ([Ey64]) définit également une algèbre de Fourier $A(G)$ puis démontre qu'il s'agit de l'ensemble des coefficients de la représentation régulière gauche de G sur $L^2(G, \lambda)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f \star g^*$ avec f et g dans $L^2(G, \lambda)$.

Considérons donc un groupe G localement compact muni d'une mesure de Haar. D'après ce qui précède, $\text{VN}(G, \lambda^{-1})_*$ s'identifie à $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ et l'identification est donnée par

$$\omega_{\xi, \eta} \longmapsto \overline{(\delta^{-\frac{1}{2}}\eta) \star (\delta^{-\frac{1}{2}}\xi)^*}$$

pour $\xi, \eta \in L^2(G, \lambda^{-1})$.

P. Eymard considère quant à lui $\text{VN}(G, \lambda)$ représentée dans $L^2(G, \lambda)$ avec l'involution donnée par $S_1 f(x) = \delta^{-1} \overline{f(x^{-1})}$ pour $f \in C_c(G)$ et $x \in G$. Or $\Phi : L^2(G, \lambda) \longrightarrow L^2(G, \lambda^{-1})$ définie par $\Phi(f) = \delta^{\frac{1}{2}} f$ est une isométrie qui permet d'identifier S_1 et S_0 définie par $S_0 \Phi(f)(x) = \overline{\Phi(f)(x^{-1})}$. Grâce à Φ , on peut identifier $\text{VN}(G, \lambda)$ et $\text{VN}(G, \lambda^{-1})$, ainsi que $A(G)$ et $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$. On constate alors que le résultat obtenu ici est équivalent à celui obtenu par P. Eymard ([Ey64] théorème 3.10).

4.3.3 Cas où $G = X \times X$

Soit (X, μ) un espace mesuré séparable. Si $G = X \times X$, l'algèbre de von Neumann \mathcal{M} est $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(X, \mu)$ et $L^1(\mathcal{M}, \tau) = L^1(\mathcal{H})$. C'est donc l'ensemble des opérateurs à trace sur \mathcal{H} .

Le résultat précédent nous dit que $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ s'identifie aux $\xi \star \eta^*$ où $\xi, \eta \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Or $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ s'identifie aux opérateurs de Hilbert-Schmidt ([Si79] theorem 2.11) : à $\xi \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, on associe l'opérateur à noyau $T_\xi \in L^2(\mathcal{H})$ défini par

$$T_\xi f(x) = \int \xi(x, y) f(y) d\mu(y) \quad \text{pour } f \in L^2(X, \mu) \text{ et } x \in X.$$

Nous obtenons ainsi une identification entre $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ et l'ensemble des $T_\xi T_{\eta^*}$, i.e. l'ensemble des produits de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Ceci est cohérent avec le fait qu'un opérateur est à trace si et seulement si il peut s'écrire comme produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

4.4 Théorie spatiale pour $VN(G)$

4.4.1 Identification en utilisant la théorie spatiale

Nous reprenons ici les notations utilisées au chapitre 3. On considère $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$. On note φ_0 le poids canonique sur \mathcal{M} et ψ_0 le poids canonique sur \mathcal{M}' .

D'après les parties précédentes, nous avons le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(\widehat{G}) & \overset{\text{-----}}{\dashrightarrow} & L^1(\mathcal{M}, \psi_0) \\ & \searrow \omega & \nearrow \\ & \mathcal{M}_* & \end{array}$$

L'objectif de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.4.1

- i) Il existe un isomorphisme linéaire isométrique et positif $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ sur $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$. rendant le diagramme commutatif.*
- ii) Pour $F = (e, e)$ avec $e \in C_c(G)$, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$ est la fermeture de l'opérateur symétrique positif $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\widetilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ défini sur le domaine $C_c(G)$.*
- iii) Cet isomorphisme $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ est complètement déterminé par la condition précédente.*

Démonstration. Tout d'abord, *i)* découle des résultats précédemment exposés. En effet, l'isomorphisme entre $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ et \mathcal{M}_* est assuré par la théorie générale; nous avons par ailleurs explicité un isomorphisme ω entre $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ et \mathcal{M}_* ; ainsi, nous obtenons un isomorphisme linéaire isométrique et positif \mathcal{G} de $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$. Sa réciproque, notée $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$, est aussi un isomorphisme linéaire isométrique et positif de $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$ sur $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

D'autre part, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ est complètement déterminée par sa restriction à la partie positive $\mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$ de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ et, $C_c(G)$ étant dense dans $L^2(G, \nu^{-1})$, il suffit d'expliciter $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ sur les F de la forme (e, e) avec $e \in C_c(G)$. Ainsi, *iii)* est prouvé et il nous reste maintenant à démontrer *ii)*. Pour ce faire, nous allons commencer par démontrer plusieurs lemmes.

Lemme 11

Soit $\eta, \xi \in C_c(G)$ et $(f, e) \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ avec $f, e \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$. Alors

$$\int \left| \xi \star \eta^*(\gamma)(f, e)(\gamma) \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \right| d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma) < +\infty$$

Démonstration. Soit $I = \int \left| \xi \star \eta^*(\gamma)(f, e)(\gamma) \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \right| d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$.

$$\begin{aligned} I &\leq \int |\eta(\gamma_1)| \int |\xi(\gamma'_1)| \delta^{-1}(\gamma) |e(\gamma'\gamma)| |f(\gamma)| d\lambda^x(\gamma) d\lambda_x(\gamma') d\lambda^x(\gamma_1) d\mu(x) \\ &\leq \int |\eta(\gamma_1)| \int |\xi^* \star e(\gamma_1^{-1}\gamma)| \delta^{-1}(\gamma) |f(\gamma)| d\lambda^x(\gamma) d\lambda^x(\gamma_1) d\mu(x) \end{aligned}$$

Comme $\xi \in C_c(G)$ et $e, f \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$, les fonctions $\gamma \mapsto |\xi^* \star e(\gamma_1^{-1}\gamma)| \delta^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $\gamma \mapsto \delta^{-\frac{1}{2}}(\gamma) |f(\gamma)|$ appartiennent à $L^2(G, \mu \circ \lambda)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} &\leq \int |\eta(\gamma_1)| \left(\int |\xi^* \star e(\gamma'')|^2 \delta(\gamma_1 \gamma'')^{-1} d\lambda^{s(\gamma_1)}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int \delta(\gamma^{-1}) |f(\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma_1)}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda(\gamma_1) \\ &\leq \int |\eta(\gamma_1)| \delta(\gamma_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\int |\xi^* \star e(\gamma'')|^2 \delta(\gamma'')^{-1} d\lambda^{s(\gamma_1)}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int \delta(\gamma^{-1}) |f(\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma_1)}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda(\gamma_1) \\ &\leq \|\eta\|_{II} \|\xi^* \star e\|_2 \|e\|_2 \end{aligned}$$

les calculs précédents étant valables car $\xi \in C_c(G)$ donc $\xi^* \star e \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$

□

Lemme 12

Soit $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$. Alors, pour tout $\xi \in C_c(G)$,

$$(T\xi|\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)} \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \widetilde{F} \star (\Delta^{\frac{1}{2}}\xi)(\gamma) d\lambda_x(\gamma) d\mu(x),$$

où $F = \mathcal{G}(T)$.

De plus, $\int F(x) d\mu(x) < +\infty$ et $\|T\|_1 = \int F(x) d\mu(x)$

Démonstration. Soit $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$. D'après le corollaire 1.3.19, il existe $\phi_T \in \mathcal{M}_*^+$ telle que $T = \frac{d\phi_T}{d\psi_0}$. Cela se traduit par

$$\forall \xi \in D(\mathcal{H}, \psi_0), \phi_T(\Theta^{\psi_0}(\xi, \xi)) = (T\xi|\xi)$$

Utilisant alors le théorème 4.1.1, on peut dire qu'il existe $e \in \mathcal{H}$ tel que $\phi_T = \omega_e$ et, de plus, d'après le diagramme précédent, $\mathcal{G}(T) = (e, e)$.

L'égalité ci-dessus donne donc : $(T\xi|\xi) = \Phi_T(L(\xi)L(\xi^*)) = (L(\xi)L(\xi)^*e|e)$.

En utilisant la partie précédente, nous savons que, pour $\xi \in C_c(G)$,

$$\Phi_T(L(\xi)L(\xi^*)) = \int (\xi \star \xi^*)(\gamma')(e, e)(\gamma')\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^x(\gamma')d\mu(x)$$

Ainsi, nous devons avoir

$$(T\xi|\xi) = \int (e, e)(\gamma') \left(\int \xi(\gamma'\gamma)\xi^*(\gamma^{-1})d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma) \right) \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}\delta(\gamma')d\lambda_x(\gamma')d\mu(x)$$

$$(T\xi|\xi) = \int (e, e)(\gamma') \left(\int \xi(\gamma'\gamma)\xi^*(\gamma^{-1})d\lambda^x(\gamma) \right) \delta(\gamma')^{\frac{1}{2}}d\lambda_x(\gamma')d\mu(x).$$

Nous pouvons alors intervertir les intégrales en utilisant le théorème de Fubini

$$(T\xi|\xi) = \int \int (e, e)(\gamma')\xi(\gamma'\gamma)\overline{\xi(\gamma)}\delta(\gamma')^{\frac{1}{2}}d\lambda_x(\gamma')d\lambda^x(\gamma)d\mu(x)$$

Faisons le changement de variable $\gamma' \mapsto \gamma'^{-1}$

$$(T\xi|\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)} \left(\int (e, e)(\gamma'^{-1})\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \right) d\lambda^x(\gamma)d\mu(x)$$

$$(T\xi|\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)} \left(\int \widetilde{(e, e)}(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \right) \delta(\gamma)d\lambda_x(\gamma)d\mu(x)$$

$$(T\xi|\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)} \left(\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \int \widetilde{(e, e)}(\gamma')\xi(\gamma'^{-1}\gamma)\delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{\frac{1}{2}}d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \right) d\lambda_x(\gamma)d\mu(x)$$

$$(T\xi|\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)}\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}\widetilde{(e, e)} \star (\Delta^{\frac{1}{2}}\xi)(\gamma)d\lambda_x(\gamma)d\mu(x)$$

Par ailleurs, on sait que $\|T\|_1 = \|\phi_T\| = \|e\|_2^2$.

D'autre part, $F(\gamma)$ est bien définie pour tout $\gamma \in G$, donc on peut calculer $F(x)$:

$$F(x) = (e, e)(x)$$

$$F(x) = \overline{\int_{G^x} \delta^{-\frac{1}{2}}(\gamma')e(\gamma')\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma')\overline{e}(\gamma')d\lambda^x(\gamma')}$$

$$F(x) = \int_{G^x} e(\gamma')\overline{e}(\gamma')d\lambda^x(\gamma')$$

Mais $(e|e) = \int \int_{G^x} e(\gamma')\overline{e}(\gamma')d\lambda^x(\gamma')d\mu(x)$ donc $\|e\|_2 < +\infty$. On en déduit que $F(x) < +\infty$

pour μ -presque tout x et $\|e\|_2^2 = \int F(x)d\mu(x)$.

Il en résulte que $\|T\|_1 = \int F(x)d\mu(x)$. □

Lemme 13

Soit $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$ et $F = \mathcal{G}(T)$. Alors la restriction de la forme quadratique q_T associée à T à $C_c(G)$ est q_F , où q_F est définie pour $\xi \in C_c(G)$ par

$$q_F(\xi) = \int \overline{\xi(\gamma)} \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \tilde{F} \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi)(\gamma) d\lambda_x(\gamma) d\mu(x)$$

Démonstration. D'après des calculs déjà effectués, on a si, $F = (e, e)$ avec $e \in L^2(G, \nu^{-1})$, $q_F(\xi) = \omega_e(L(\xi \star \xi^*))$.

D'après le lemme 6 ([Co80]), on en déduit que q_F est une forme quadratique densément définie et semi-continue inférieurement.

D'après la théorie générale, elle est donc fermable et on peut lui associer un unique opérateur positif autoadjoint que nous noterons T_F .

Par ailleurs, $F = \mathcal{G}(T)$. La forme quadratique associée par la théorie générale, q_T , vérifie, pour tout $\xi \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$, l'égalité $q_T(\xi) = (T\xi|\xi) = \omega_e(L(\xi)L(\xi^*))$ d'après l'étude réalisée précédemment.

Ainsi, nous avons, pour tout $\xi \in C_c(G)$, $q_T(\xi) = q_F(\xi)$. □

Lemme 14

Soit $e \in C_c(G)$. Posons $F = (e, e)$.

- i) Pour tout $\xi \in L^2(G, \nu^{-1})$, $\delta^{\frac{1}{2}}\tilde{F} \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi)$ est une fonction définie presque partout.
- ii) L'opérateur non borné $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ défini sur le domaine $C_c(G)$ est symétrique positif.

Démonstration. • Nous savons que $\xi \in L^2(G, \nu^{-1})$ donc, pour μ presque-tout x , $\int |\xi(\gamma)|^2 d\lambda_x(\gamma) < +\infty$. Notons X l'ensemble de ces x . Soit alors $\gamma \in G$ tel que $s(\gamma) \in X$. Intéressons nous à :

$$I = \int \left| \tilde{F}(\gamma') \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}\gamma) \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \right| d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$$

Comme $F \in C_c(G)$, $\tilde{F}\delta^{-\frac{1}{2}} \in L^2(G^{r(\gamma)}, \lambda^{r(\gamma)})$; d'autre part, $g : \gamma' \mapsto \xi(\gamma'^{-1}\gamma)$ appartient à $L^2(G^{r(\gamma)}, \lambda^{r(\gamma)})$ car $\int |g(\gamma')|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') = \int |\xi(\gamma'')|^2 d\lambda_{s(\gamma)}(\gamma'')$. Nous pouvons donc utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui donne

$$I \leq \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left| \tilde{F}(\gamma') \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} \right|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left| \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \right|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}}$$

doit

$$I \leq \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left| \tilde{F}(\gamma') \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} \right|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\xi(\gamma'')|^2 d\lambda_{s(\gamma)}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après les considérations précédentes, les intégrales sont finies.

Par conséquent, $\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \int \tilde{F}(\gamma') \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}\gamma) \xi(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma')$ existe pour tout ν^{-1} presque tout γ .

- Soit maintenant $\xi \in C_c(G)$. On a alors $\delta^{\frac{1}{2}}\xi \in C_c(G)$ et $\tilde{F} \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi) \in C_c(G)$ donc $\delta^{\frac{1}{2}}\tilde{F} \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi) \in C_c(G)$.

On peut donc définir l'opérateur $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ sur le domaine $C_c(G)$; il s'agit d'un opérateur non borné densément défini.

• Soit $\xi \in C_c(G)$ et $\eta \in C_c(G)$. D'après ce qui précède, nous avons

$$\begin{aligned} \left(\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\xi|\eta\right) &= \left(L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\xi|\Delta^{\frac{1}{2}}\eta\right) && \text{puisque } \delta^{\frac{1}{2}}\eta \in C_c(G) \\ &= \left(\Delta^{\frac{1}{2}}\xi|L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\eta\right) && \text{car } F \in C_c(G) \text{ et } F^* = F \\ &= \left(\xi|\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\eta\right) \end{aligned}$$

On en déduit que $C_c(G) \subset D((\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}})^*)$ et que $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}} \subset (\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}})^*$. \square

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration de *ii*). Soit $F = (e, e)$ avec $e \in C_c(G)$ et T l'opérateur de $L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$ associé par $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$. Il s'agit de prouver que T est la fermeture de l'opérateur $S = \Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ défini sur le domaine $D(S) = C_c(G)$.

Soit $q_T(\xi, \eta)$ la forme sesquilinéaire associée à q_T . Nous savons que, pour tout $\xi \in C_c(G)$ et pour tout $\eta \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$, $q_T(\xi, \eta) = \omega_{e,e}(L(\xi)L(\eta)^*)$. Mais $\eta \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$ donc, d'après la théorie des algèbres hilbertiennes, $L(\eta)^* = L(\eta^*)$.

Nous avons donc $q_T(\xi, \eta) = (L(\xi \star \eta^*)e|e)$ et, en reprenant les calculs du lemme 12, nous obtenons $q_T(\xi, \eta) = \int \overline{\eta(\gamma)}\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}}\tilde{F} \star (\delta^{\frac{1}{2}}\xi)(\gamma)d\nu^{-1}(\gamma)$

et donc $q_T(\xi, \eta) = \left(\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\xi|\eta\right)$.

Ainsi, nous obtenons, pour $\xi \in C_c(G)$ et $\eta \in D(\mathcal{H}, \psi_0)$,

$$q_T(\xi, \eta) = (S\xi|\eta)$$

Nous pouvons donc appliquer le résultat de T. Kato suivant ([Ka76], corollaire 2.4, section 2.1) :

Soit q une forme quadratique positive fermée de domaine dense D . Soit T l'opérateur auto-adjoint associé. Soit S un opérateur tel que $D(S) \subset D$ et $(S\xi|\eta) = q_T(\xi, \eta)$ pour tout $\xi \in D(S)$ et tout η dans un domaine essentiel de q . Alors $S \subset T$.

Ici, nous obtenons alors $S \subset T$ et, en particulier, nous pouvons dire que $C_c(G) \subset D(T)$.

En appliquant le 2) de la proposition 3.4.1, on obtient que $[T|_{C_c(G)}] = T$, ce qui prouve le résultat annoncé. \square

Par la suite, nous commettrons l'abus de notation consistant à écrire $\tilde{\mathcal{F}}_\infty(F) = \Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}$ pour $F \in \mathcal{L}^1(\hat{G})$.

L'égalité $\omega_{e,e}(L(\xi \star \xi^*)) = \left(\Delta^{\frac{1}{2}}L(\tilde{F})\Delta^{\frac{1}{2}}\xi|\xi\right)$ nous permet par ailleurs de dire que la dérivée de Radon-Nikodym $\frac{d\omega_{e,e}}{d\psi_0}$ est égale à $\Delta^{\frac{1}{2}}L(\widetilde{(e, e)})\Delta^{\frac{1}{2}}$ que que soit $e \in C_c(G)$.

4.4.2 Calcul de l'intégrale d'un opérateur

Nous proposons ci-dessous une caractérisation de l'espace $L^1(\mathcal{M})$ qui reprend la proposition 2.1 de [Te80]. En combinant ce résultat avec les résultats précédents, nous obtiendrons une formule de calcul pour l'intégrale d'un opérateur.

Proposition 4.4.1

Soit T un opérateur fermé densément défini et (-1) -homogène sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$

ii) Il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathcal{B} \cap D(T), \forall \eta \in \mathcal{B} : |(T\xi|\eta)| \leq C \|L(\xi)\| \|L(\eta)\|$$

iii) Il existe $C' \geq 0$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathcal{B} \cap D(|T|^{\frac{1}{2}}) : \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 \leq C' \|L(\xi)\|^2$$

iv) Il existe une unité approchée $(\xi_i)_{i \in I}$ dans $C_c(G)_+$ telle que, pour tout $i \in I$,

$$\xi_i \in D(|T|^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad \liminf \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\| < +\infty$$

Si $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$, alors $\mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}})$ et, pour toute unité approchée (ξ_i) de $C_c(G)_+$, on a

$$\|T\|_1 = \lim \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\|^2$$

De plus, $\|T\|_1$ est le plus petit C' satisfaisant iii) et le double du plus petit C satisfaisant ii).

Démonstration. Considérons la décomposition polaire de T , $T = U|T|$.

• Preuve de i) \Rightarrow ii).

Supposons que $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$. Alors $|T| \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$ et il existe donc une forme linéaire positive φ sur \mathcal{M} telle que $|T| = \frac{d\varphi}{d\psi_0}$ (et $\varphi(1) < +\infty$). De plus, $U \in \mathcal{M}$.

Tout d'abord, $\mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}})$ par définition d'après la remarque 3.1.1

Pour tout $\xi \in \mathcal{B} \cap D(|T|)$ et tout $\eta \in \mathcal{B}$, on a

$$\begin{aligned} |(T\xi|\eta)| &= |(U|T|\xi|\eta)| \\ &= \left| (|T|^{\frac{1}{2}} \xi | |T|^{\frac{1}{2}} U^* \eta) \right| && \text{car } \xi \in \mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}}) \\ &= \left| \left(\left(\frac{d\varphi}{d\psi_0} \right)^{\frac{1}{2}} \xi \mid \left(\frac{d\varphi}{d\psi_0} \right)^{\frac{1}{2}} U^* \eta \right) \right| \\ &= |\varphi(L(\xi)L(U^*\eta)^*)| \\ &\leq \|\varphi\| \|L(\xi)\| \|L(U^*\eta)^*\| \end{aligned}$$

Or $U \in \mathcal{M}$ donc $U^* \in \mathcal{M}$ et, par conséquent, $L(U^*\eta) = U^*L(\eta)$.

On en déduit que $L(U^*\eta)^* = L(\eta)^*U$.

Il vient donc $\|L(U^*\eta)^*\| = \|L(\eta)^*\| = \|L(\eta)\|$, U et $S : A \mapsto A^*$ étant des isométries.

Or, $\|\varphi\| = \varphi(1) = \|T\|_1$ donc

$$|(T\xi|\eta)| \leq \|T\|_1 \|L(\xi)\| \|L(\eta)\|$$

D'où *ii*)

• Preuve de *ii*) \Rightarrow *iii*).

Soit $\xi \in \mathcal{B} \cap D(|T|)$. On a $\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 = (|T| \xi | \xi)$; mais $T = U |T|$ et, U étant une isométrie sur $D(T)$, on obtient

$$\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 = (U |T| \xi | U \xi) = (T \xi | U \xi)$$

On applique alors *ii*) avec $\eta = U\xi$ et on obtient

$$\begin{aligned} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 &\leq C \|L(\xi)\| \|L(U\xi)\| \\ &\leq C \|L(\xi)\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'inégalité souhaitée pour $\xi \in \mathcal{B} \cap D(|T|)$.

Soit maintenant $\xi \in \mathcal{B} \cap D(|T|^{\frac{1}{2}})$. Comme $|T|$ est un opérateur positif, autoadjoint et α -homogène sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, d'après le lemme 9, il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B} \cap \bigcap_{\beta \in \mathbb{R}_+} D(|T|^\beta)$ tels que, quand n tend vers $+\infty$, $\xi_n \rightarrow \xi$, $|T|^{\frac{1}{2}} \xi_n \rightarrow |T|^{\frac{1}{2}} \xi$; et, de plus, $\|L(\xi_n)\| \leq 2 \|L(\xi)\|$.

Mais, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_n \right\|^2 \leq C \|L(\xi_n)\|^2$.

On en déduit que $\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_n \right\|^2 \leq 2C \|L(\xi)\|^2$.

D'où, par passage à la limite

$$\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 \leq C' \|L(\xi)\|^2$$

avec $C' = 2C$.

• Preuve de *iii*) $\Rightarrow \mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}})$

Soit $\xi \in \mathcal{B}$. Alors, d'après le lemme 9, il existe une suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B} \cap \left(\bigcap_{\beta \in \mathbb{R}_+} D(|T|^\beta) \right)$ telle que $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \xi$, $\|L(\xi_n)\| \leq 2 \|L(\xi)\|$.

Comme en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi_n \in \mathcal{B} \cap D(|T|^{\frac{1}{2}})$, on obtient, par *iii*), que :

$$\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_n \right\|^2 \leq C' \|L(\xi_n)\|^2 \leq 2C \|L(\xi)\|^2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\eta \in D(|T|^{\frac{1}{2}})$. On a

$$\begin{aligned} \left| (|T|^{\frac{1}{2}} \xi_n | \eta) \right| &\leq \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_n \right\|_2 \|\eta\|_2 && \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{2C'} \|L(\xi)\| \|\eta\|_2 \end{aligned}$$

$|T|^{\frac{1}{2}}$ étant autoadjoint, on en déduit que, pour tout $\eta \in D(|T|^{\frac{1}{2}})$ et pour tout n ,

$$\left| (\xi_n | |T|^{\frac{1}{2}} \eta) \right| \leq \sqrt{2C'} \|L(\xi)\| \|\eta\|_2$$

Mais ξ_n tend vers ξ quand $n \rightarrow +\infty$, d'où

$$\left| (\xi | |T|^{\frac{1}{2}} \eta) \right| \leq \sqrt{2C'} \|L(\xi)\| \|\eta\|_2$$

Ce qui prouve que $\xi \in D((|T|^{\frac{1}{2}})^*) = D(|T|^{\frac{1}{2}})$, i.e. $\mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}})$.

• Preuve de *iii*) \Rightarrow *iv*).

Soit (ξ_i) une unité approchée bilatère dans $C_c(G)_+$. Comme $C_c(G) \subset \mathcal{B}$, on déduit que, pour tout $i \in I$, $\xi_i \in \mathcal{B} \subset D(|T|^{\frac{1}{2}})$.

Par conséquent, $\xi_i \in \mathcal{B} \cap D(|T|^{\frac{1}{2}})$ et donc, par *iii*), $\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\|^2 \leq C' \|L(\xi_i)\|^2$

Majorons alors la norme de $L(\xi_i)$. Nous avons

$$\|L(\xi_i)\| = \sup\{|(L(\xi_i)g|h)| : \|h\|_2 \leq 1, \|g\|_2 \leq 1\}$$

Or, pour g et h dans $L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$, nous avons $(L(\xi_i)g|h) = (\xi_i \star g|h)$. Comme (ξ_i) est une unité approchée, $(\xi_i \star g|h)$ tend vers $(g|h)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $i_0 > 0$ tel que, pour $i \geq i_0$,

$$|(\xi_i \star g|h) - (g|h)| \leq \varepsilon$$

et donc $|(\xi_i \star g|h)| \leq |(g|h)| + \varepsilon$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient $|(\xi_i \star g|h)| \leq 1 + \varepsilon$ soit $\|L(\xi_i)\| \leq 1 + \varepsilon$.

On en déduit que, pour $i \geq i_0$,

$$\left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\|^2 \leq C'(1 + \varepsilon)$$

et, par conséquent, $\liminf \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\| \leq \sqrt{C'} < \infty$

• Preuve de *iv*) \Rightarrow *i*)

Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une unité approchée de $C_c(G)_+$ qui vérifie les conditions de *iv*).

Alors pour $f \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, on a $\xi_i \star \xi_i^* \star f \rightarrow f$, et donc $L(\xi_i \star \xi_i^*)$ converge faiblement vers 1 dans \mathcal{M} .

D'autre part, si on se donne un $\varepsilon > 0$, il existe i_0 tel que $\|L(\xi_i)L(\xi_i)^*\| \leq 1 + \varepsilon$ si $i \geq i_0$; donc la convergence est aussi σ -faible. Mais φ est σ -faiblement continue inférieurement donc

$$\begin{aligned} \varphi(1) &\leq \liminf \varphi(L(\xi_i)L(\xi_i)^*) \\ &\leq \liminf (|T|^{\frac{1}{2}} \xi_i |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i) && \text{par définition de } \varphi \\ &\leq C' \liminf \|L(\xi_i)\|^2 \\ &\leq C' \end{aligned}$$

On en déduit que $\int |T| d\psi_0 = \varphi(1) < +\infty$ et donc $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)$.

• Finalement, on a bien prouvé l'équivalence des propositions ainsi que l'inclusion de \mathcal{B} dans $D(|T|^{\frac{1}{2}})$.

De plus, comme $\varphi \in \mathcal{M}_*$, on a

$$\varphi(1) = \lim \varphi(L(\xi_i)L(\xi_i)^*) = \lim (|T|^{\frac{1}{2}} \xi_i |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i)$$

Par ailleurs, on a vu que l'on pouvait prendre $C' = 2\|T\|_1$ dans *iii*) et que $\|T\|_1 \leq C'$. Donc $\|T\|_1$ est le plus petit C' satisfaisant *iii*). C'est donc le double du plus petit C satisfaisant *ii*) \square

Proposition 4.4.2

Soit (ξ_i) une unité approchée dans $C_c(G)_+$.

1) Soit $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$. Alors $\|T\|_1 = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int F\xi_i \star \xi_i^* \delta^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}$, où $F = \tilde{\mathcal{F}}_\infty^{-1}(T)$.

2) Soit $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$. Alors $\int F\xi_i \star \xi_i^* \delta^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}$ converge vers $\int F^{(0)} d\mu$, où $F^{(0)} = F|_{G^{(0)}}$

Démonstration. 1) Comme $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$, pour toute unité approchée (ξ_i) dans $C_c(G)_+$, nous avons $\|T\|_1 = \lim \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\|^2$ d'après le théorème précédent.

D'après la partie précédente, il existe $F \in \mathcal{L}_1(\widehat{G})_+$ tel que $|T|\xi_i = \tilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$ quel que soit i . Par ailleurs, si on note φ_T l'unique forme linéaire telle que $|T| = \frac{d\varphi_T}{d\psi_0}$, nous avons $\varphi_T(\xi_i) = (|T|\xi_i|\xi_i)$ et $\varphi_T(\xi_i) = \int \xi_i \star \xi_i^* F(\gamma) \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$ d'après 4.4.1. Donc, finalement,

$$\|T\|_1 = \lim \int F(\gamma) \xi_i \star \xi_i^*(\gamma) \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma)$$

2) À $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$, associons l'unique opérateur $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$ comme dans la partie précédente. Nous savons que $\|F\| = \|T\|_1 = \varphi_T(1)$.

Par ailleurs, $\|F\| = \int F(x) d\mu(x)$. En utilisant le théorème précédent, nous pouvons alors affirmer que $\int F(x) d\mu(x) = \lim \int F\xi_i \star \xi_i^* \delta^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda^{-1}$ \square

Remarquons que cette proposition nous donne un équivalent des formules de moyennes de C. Brislawn ([Bri91]), les moyennes sur des « boules » étant remplacées par des unités approchées.

En particulier, lorsque F est de type positif, nous pouvons écrire

$$\int F(x) d\mu(x) = \int_{G^{(0)}} \left(\lim_i \int \xi_i \star \xi_i^* F \delta^{\frac{1}{2}} d\lambda_x \right) d\mu(x)$$

Les moyennes $A_n f(x, y)$ sont donc remplacées par les $A_i F(x) = \int \xi_i \star \xi_i^*(\gamma) F(\gamma) \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) d\lambda_x(\gamma)$

4.5 Opérateurs aléatoires et produit croisé

Nous avons vu que le produit croisé $VN(G) \rtimes_{\sigma} \mathbb{R}$ s'identifiait à l'algèbre de von Neumann des opérateurs aléatoires $\underline{\mathcal{M}}$. Nous avons également identifié \mathcal{M} comme sous-algèbre de $\underline{\mathcal{M}}$. Par ailleurs, nous avons vu que $\underline{\mathcal{M}}$ est semi-finie : nous noterons $\underline{\tau}$ (respectivement $\underline{\tau}'$) la trace canonique sur $\underline{\mathcal{M}}$ (respectivement $\underline{\mathcal{M}}'$).

Nous allons maintenant nous intéresser à la notion d'opérateur α -homogène, puis faire le lien sur ce cas particulier entre différentes théories des espaces L^p .

4.5.1 Homogénéité

Soit (T_x) un opérateur aléatoire α -homogène comme défini au § 3.3. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, définissons l'opérateur $\underline{T} = (\underline{T}_{x,a})$ par $\underline{T}_{x,a} = a^{\alpha} (p_{x,a})_{\star} T_x (p_{x,a})^{\star}$ sur $\underline{\mathcal{H}}_{x,a}$.

Comme $\underline{\mu} \circ \underline{\lambda}$ est unimodulaire, un opérateur $(\underline{T}_{x,a})$ α -homogène sur $\underline{\mathcal{H}}$ est simplement un opérateur affilié à $\underline{\mathcal{M}}$, i.e. tel que $\tilde{R}(\gamma, a) \underline{T}_{s(\gamma), \delta(\gamma)a} \subset \underline{T}_{r(\gamma), a} \tilde{R}(\gamma, a)$ pour tout $\gamma \in G$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Afin de vérifier la relation l'opérateur défini ci-avant, posons $I_{\gamma, a} = \underline{T}_{r(\gamma), a} \tilde{R}(\gamma, a)$

$$\begin{aligned} I_{\gamma, a} &= a^{\alpha} (p_{r(\gamma), a})_{\star} T_{r(\gamma)} (p_{r(\gamma), a})^{\star} \tilde{R}(\gamma, a) \\ (p_{r(\gamma), a})^{\star} I_{\gamma, a} (p_{s(\gamma), a\delta(\gamma)})_{\star} &= a^{\alpha} T_{r(\gamma)} (p_{r(\gamma), a})^{\star} \tilde{R}(\gamma, a) (p_{s(\gamma), a\delta(\gamma)})_{\star} \\ &= a^{\alpha} T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) \end{aligned}$$

Comme (T_x) est α -homogène, nous savons que $\tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} \subset \delta(\gamma)^{-\alpha} T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma)$ donc, en remplaçant,

$$\tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} \subset \delta(\gamma)^{-\alpha} a^{-\alpha} (p_{r(\gamma), a})^{\star} I_{\gamma, a} (p_{s(\gamma), a\delta(\gamma)})_{\star}$$

On en déduit

$$\delta(\gamma)^{\alpha} a^{\alpha} (p_{r(\gamma), a})_{\star} \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} (p_{s(\gamma), a\delta(\gamma)})^{\star} \subset I_{\gamma, a}$$

Mais, $\underline{T}_{s(\gamma), a\delta(\gamma)} = a^{\alpha} \delta(\gamma)^{\alpha} (p_{s(\gamma), \delta(\gamma)a})_{\star} T_{s(\gamma)} (p_{s(\gamma), \delta(\gamma)a})^{\star}$, ce qui donne

$$(p_{r(\gamma), a})_{\star} \tilde{R}(\gamma) (p_{s(\gamma), a\delta(\gamma)})^{\star} \underline{T}_{s(\gamma), \delta(\gamma)a} \subset I_{\gamma, a}$$

On obtient bien finalement,

$$\tilde{R}(\gamma, a)\underline{T}_{s(\gamma), \delta(\gamma)a} \subset \underline{T}_{r(\gamma), a}\tilde{R}(\gamma, a)$$

ce qui signifie bien que $(\underline{T}_{x,a})$ est affilié à $\underline{\mathcal{M}}$.

4.5.2 Lien avec la théorie d'Haagerup

Nous avons vu (théorème 2.5.1) que $\underline{\mathcal{M}}$ s'identifiait à $\mathcal{M} \rtimes \mathbb{R}$.

Or, Haagerup définit l'espace $L^p(\mathcal{M})$ à partir de ce produit croisé.

Il nous faut vérifier que les $(\underline{T}_{x,a})$ définis ci-avant pour $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifient les conditions de la définition 1.3.4. Ils sont affiliés à $\underline{\mathcal{M}}$ par construction.

Calculons $\theta_a(\underline{T}_{x,b}) = \underline{T}_{x,ba^{-1}}$ pour $\xi \in L^2(\underline{G})$:

$$\begin{aligned} \theta_a(\underline{T}_{x,b})\xi(\gamma, \delta(\gamma)^{-1}a^{-1}b) &= (a^{-1}b)^\alpha (p_{x,a^{-1}b})_\star T_x(p_{x,a^{-1}b})^\star \xi(\gamma, \delta(\gamma)^{-1}a^{-1}b) \\ &= a^{-\alpha} b^\alpha T_x(p_{x,a^{-1}b})^\star \xi(\gamma) \end{aligned}$$

Or $p_{x,a^{-1}b}^\star \xi = p_{x,b}^\star \xi$ donc

$$\begin{aligned} \theta_a(\underline{T}_{x,b})\xi(\gamma, \delta(\gamma)^{-1}a^{-1}b) &= a^{-\alpha} b^\alpha T_x(p_{x,b})^\star \xi(\gamma) \\ &= a^{-\alpha} \underline{T}_{x,b} \xi(\gamma, b\delta(\gamma)^{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta_a \underline{T} = a^{-\alpha} \underline{T}$ et, en particulier, si $T \in L^p(\mathcal{M})$, alors $\theta_a \underline{T} = a^{\frac{1}{p}} \underline{T}$, ce qui correspond bien à la condition de la définition 1.3.4 en utilisant la correspondance $a = e^{-t}$. Nous allons en fait démontrer le résultat suivant

Théorème 4.5.1

Soit $(\underline{T}_{x,a})$ un opérateur aléatoire affilié à $\underline{\mathcal{M}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe un opérateur aléatoire (T_x) affilié à \mathcal{M} tel que $\underline{T}_{x,a} = a^\alpha (p_{x,a})_\star T_x(p_{x,a})^\star$ et quel que soit $\gamma \in G$,

$$R(\gamma)T_{s(\gamma)} \subset \delta(\gamma)^{-\alpha} T_{r(\gamma)} R(\gamma)$$

b) Quel que soit $(\gamma, a) \in \underline{G}$,

$$\underline{R}(\gamma, a)\underline{T}_{s(\gamma,a)} \subset \underline{T}_{r(\gamma,a)}\underline{R}(\gamma, a) \quad \text{et} \quad \theta_a(\underline{T}) = a^{-\alpha} \underline{T}$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré $a) \implies b)$ précédemment. Il reste à démontrer la réciproque :

$\theta_a(\underline{T}) = a^{-\alpha} \underline{T}$ signifie que $\underline{T}_{x,ba^{-1}} = a^{-\alpha} \underline{T}_{x,b}$ quel que soit $b \in \mathbb{R}_+^\star$. Ainsi, pour tous a et b dans \mathbb{R}_+^\star , nous avons $\underline{T}_{x,ab} = a^\alpha \underline{T}_{x,b}$. Posons alors $T(a)_x = a^{-\alpha} (p_{x,a})^\star \underline{T}_{x,a} (p_{x,a})_\star$. On obtient $T(ab)_x = (ab)^{-\alpha} (p_{x,ab})^\star \underline{T}_{x,ab} (p_{x,ab})_\star$

Or $\underline{T}_{x,ab} = a^\alpha \underline{T}_{x,b}$ donc $(p_{x,ab})^\star \underline{T}_{x,ab} (p_{x,ab})_\star = a^\alpha (p_{x,b})^\star \underline{T}_{x,b} (p_{x,b})_\star$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} T(ab)_x &= (ab)^{-\alpha} a^\alpha (p_{x,b})^\star \underline{T}_{x,b} (p_{x,b})_\star \\ T(ab)_x &= b^{-\alpha} (p_{x,b})^\star \underline{T}_{x,b} (p_{x,b})_\star \\ T(ab)_x &= T_b(x) \end{aligned}$$

Ceci prouve que T est en fait indépendant de a . On peut donc poser, pour $x \in G^{(0)}$, $T_x = T(1)_x$ et on a $\underline{T}_{x,a} = a^\alpha (p_{x,a})^\star T_x (p_{x,a})_\star$ pour tout $x \in G^{(0)}$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$.

D'autre part, la condition $\underline{R}(\gamma, a) \underline{T}_{s(\gamma,a)} \subset \underline{T}_{r(\gamma,a)} \underline{R}(\gamma, a)$ donne alors

$$\begin{aligned} \underline{R}(\gamma, a) a^\alpha \delta(\gamma)^\alpha (p_{s(\gamma),\delta(\gamma)a})^\star T_{s(\gamma)} (p_{s(\gamma),\delta(\gamma)a})_\star &\subset a^\alpha (p_{r(\gamma),a})^\star T_{r(\gamma)} (p_{r(\gamma),a})_\star \underline{R}(\gamma, a) \\ (p_{r(\gamma),a})^\star \underline{R}(\gamma, a) (p_{s(\gamma),\delta(\gamma)a})^\star a^\alpha \delta(\gamma)^\alpha T_{s(\gamma)} &\subset a^\alpha T_{r(\gamma)} (p_{r(\gamma),a})_\star \underline{R}(\gamma, a) (p_{s(\gamma),\delta(\gamma)a})_\star \\ \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} &\subset \delta(\gamma)^{-\alpha} T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) \end{aligned}$$

ce qui est bien la condition annoncée au a . □

4.6 Un résultat sur les formes positives

Commençons tout d'abord par rappeler la définition d'une fonction de type positif et quelques résultats connus à ce sujet.

4.6.1 Fonctions de type positif sur un groupoïde

Nous commençons d'abord par rappeler la définition d'une fonction de type positif sur un groupoïde G , telle qu'on la trouve par exemple dans [RW97] ou [Re97].

Définition 4.6.1 ([RW97] définition 3.1)

Une fonction borélienne bornée p sur G est dite de type positif si, quel que soit $x \in G^{(0)}$ et quel que soit $f \in C_c(G)$, on a

$$\int \int f(\gamma_1) \bar{f}(\gamma_1) p(\gamma_2^{-1} \gamma_1) d\lambda^x(\gamma_1) d\lambda^x(\gamma_2) \geq 0$$

Remarquons qu'une telle définition a encore un sens si l'on considère des fonctions p continues.

On note $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des fonctions définies ci-dessus.

A. Ramsay et M.E. Walter [RW97] donnent un lien entre les fonctions de type positif et les coefficients diagonaux de représentations unitaires. Ils prouvent tout d'abord que toute représentation unitaire de G permet de définir une fonction de type positif :

Lemme 15 ([RW97] lemme 3.3)

Soit π une représentation unitaire de G sur un champs hilbertien \mathcal{H} . Soit ξ une section borélienne bornée de \mathcal{H} . On peut définir $p(\gamma) = (\pi(\gamma)\xi \circ s(\gamma) | \xi \circ r(\gamma))$ pour $\gamma \in G$ et on a $p \in \mathcal{P}(G)$

Puis, ils démontrent que toute fonction bornée de type positif p peut être obtenue à partir d'une représentation unitaire de G . Pour cela, il introduisent un champ hilbertien associé à p et une représentation comme suit

Lemme 16

Soit $p \in \mathcal{P}(G)$. La formule

$$(f|g)_x = \int \int f(\gamma_1) \overline{g(\gamma_2)} p(\gamma_2^{-1}\gamma_1) d\lambda^x(\gamma_1) d\lambda^x(\gamma_2)$$

définit une forme sesquilinéaire positive sur $L^1(\lambda^x)$. Par complétion, on obtient un espace de Hilbert $\mathcal{H}(x)$. $\mathcal{H} = (\mathcal{H}(x))_x$ est alors un champ hilbertien sur $G^{(0)}$ et on définit une représentation unitaire π sur \mathcal{H} en posant $\pi(\gamma)f(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ pour $f \in L^1(\lambda^{s(\gamma)})$ et $\gamma' \in G^{s(\gamma)}$.

L'application $\pi(\gamma)$ est donc définie de $L^1(\lambda^{s(\gamma)})$ dans $L^1(\lambda^{r(\gamma)})$

Ils prouvent alors

Théorème 4.6.1 ([RW97] theorem 3.5)

Soit $p \in \mathcal{P}(G)$. On peut lui associer une représentation de G , (\mathcal{H}_p, π_p) , où \mathcal{H}_p est un champ hilbertien sur $G^{(0)}$ et π_p une représentation unitaire.

Il existe alors une section bornée ξ_p de \mathcal{H}_p telle que $p(\gamma) = (\pi_p(\gamma)\xi_p(s(\gamma))|\xi_p(r(\gamma)))$ pour $\mu \circ \lambda$ -presque tout γ

De plus, si p est continue, alors ξ_p peut être choisie continue et l'égalité précédente est vraie pour tout $\gamma \in G$.

4.6.2 Lien avec les formes positives

Nous démontrons ici un résultat analogue à celui démontré, dans le cas des groupes, par M. Terp ([Te80] theorem 5.4). En particulier, nous démontrons que, sous certaines conditions, une fonction de type positif peut être écrite comme un coefficient de $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$ et pas seulement comme un coefficient de la représentation π_p définie au théorème 4.6.1. Dans un premier temps, nous nous limitons au cas où G un groupoïde unimodulaire.

Théorème 4.6.2

Soit p une fonction continue de type positif sur G . On peut définir

$$q(\xi) = \int p(\gamma)\xi \star \xi^*(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

pour $\xi \in C_c(G)$.

Alors $p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ si et seulement si q est semi-continue inférieurement.

Démonstration. • Tout d'abord, p est continue et $\xi \star \xi^* \in C_c(G)$ donc le produit est intégrable.

• Supposons que q est s.c.i. Alors il existe un opérateur T autoadjoint positif associé à la fermeture de q . Il vérifie les conditions suivantes :

- Si b_q est la forme quadratique fermée associée à q , on a $(T\xi|\eta) = b_q(\xi, \eta)$ pour $\xi, \eta \in \text{Dom}(T)$.
- T est le plus grand opérateur tel que $q(\xi) = \left\| T^{\frac{1}{2}}\xi \right\|^2$ si $\xi \in \mathcal{Q}(q)$

On peut en déduire en particulier que T est la fermeture de $T|_{C_c(G)}$. D'autre part, pour $\xi \in C_c(G)$, on a $q(\xi) = (\xi|T\xi)$ car T est autoadjoint positif.

Par ailleurs, pour $\xi \in C_c(G)$, $\bar{p} \star \xi$ est bien défini et

$$\begin{aligned}
 (\xi|L(\bar{p})\xi) &= \int \xi(\gamma) \int p(\gamma') \overline{\xi(\gamma'^{-1}\gamma)} d\lambda^x(\gamma') d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\
 &= \int p(\gamma') \int \xi(\gamma) \xi^*(\gamma^{-1}\gamma') d\lambda^x(\gamma) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) && \text{par Fubini} \\
 &= \int p(\gamma') \xi \star \xi^*(\gamma') d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\
 &= q(\xi)
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\xi \in C_c(G)$, on a $q(\xi) = (\xi|T\xi)$ et $q(\xi) = (\xi|L(\bar{p})\xi)$, donc $(\xi|T\xi) = (\xi|L(\bar{p})\xi)$. En passant à la forme quadratique b_q associée, nous pouvons en déduire que

$$\forall \xi, \eta \in C_c(G), \quad (\xi|T\xi) = (\xi|L(\bar{p})\xi).$$

et donc $T|_{C_c(G)} = L(\bar{p})$.

- T est -1 -homogène.

On va montrer que $T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) \xi_{s(\gamma)} = \tilde{R}(\gamma) T_{s(\gamma)} \xi_{s(\gamma)}$ pour $\xi \in \mathcal{Q}(q)$.

Or $T_{r(\gamma)} \tilde{R}(\gamma) \xi_{s(\gamma)} = \delta(\gamma)(L(\bar{p})\xi)(\gamma'\gamma)$ ce qui est égal au membre de droite. Ainsi, T est -1 -homogène, donc il appartient à $L^1(\mathcal{M}, \psi)$.

• Comme $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi)_+$, il existe une unique $F = (e, e) \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$ avec $e \in L^2(G, \mu \circ \lambda)$ telle que $\|F\|_{\mathcal{L}^1(\widehat{G})} = \|T\|_1$. Il reste à justifier que $F = \bar{p}$.

On a $(T\xi|\xi) = (L(\xi)L(\xi^*)e|e)$ pour tout $\xi \in C_c(G) \subset \mathcal{Q}(q)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 (T\xi|\xi) &= \int \int \xi \star \xi^*(\gamma') e(\gamma'^{-1}\gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \overline{e(\gamma)} d\mu \circ \lambda(\gamma) \\
 &= \int \xi \star \xi^*(\gamma') \overline{e \star e^*(\gamma')} d\mu \circ \lambda(\gamma') \\
 &= \int \overline{F(\gamma')} \xi \star \xi^*(\gamma') d\mu \circ \lambda(\gamma')
 \end{aligned}$$

Mais par ailleurs, $(T\xi|\xi) = q(\xi)$ donc : quel que soit $\xi \in C_c(G)$, on a

$$\int p(\gamma) \xi \star \xi^* d\mu \circ \lambda(\gamma) = \int \overline{F(\gamma')} \xi \star \xi^*(\gamma') d\mu \circ \lambda(\gamma')$$

Par densité de $C_c(G) \star C_c(G)$ dans $L^2(G, \mu \circ \lambda)$, on en déduit que $p = \overline{F}$ et donc $p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

• Réciproquement, supposons que $p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$; par conséquent, donc $\overline{p} \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$. Alors on peut lui associer $\varphi_{\overline{p}} \in \mathcal{M}_*$ comme démontré au théorème 4.2.1 et on a

$$\varphi_{\overline{p}}(L(f)) = \int f(\gamma)p(\gamma)d\mu \circ \lambda(\gamma) \quad \text{pour } f \in C_c(G).$$

Pour $\xi \in C_c(G)$, il vient donc $\varphi_{\overline{p}}(L(\xi \star \xi^*)) = q(\xi)$. Ceci permet de prouver que

$$\forall \xi \in C_c(G), (L(\overline{p})\xi|\xi) = \phi(\Theta^\psi(\xi, \xi))$$

et donc $q(\xi) = \phi(\Theta^\psi(\xi, \xi))$, ce qui prouve que q est s.c.i. d'après la théorie générale. \square

Nous allons maintenant démontrer un théorème similaire dans le cas d'un groupoïde non-unimodulaire.

Théorème 4.6.3

Soit p une fonction continue de type positif sur G . On peut définir

$$q(\xi) = \int p(\gamma)\xi \star \xi^*(\gamma)d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

pour $\xi \in C_c(G)$.

Alors $\Delta^{\frac{1}{2}}p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ si et seulement si q est semi-continue inférieurement.

Démonstration.

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \int p(\gamma) \int \xi(\gamma') \overline{\xi(\gamma^{-1}\gamma')} d\lambda^x(\gamma') d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\ q(\xi) &= \int \xi(\gamma') \left(\int p(\gamma) \overline{\xi(\gamma^{-1}\gamma')} d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right) d\mu \circ \lambda(\gamma') \\ q(\xi) &= \int (\Delta\xi)(\gamma') p \star \overline{\xi}(\gamma') d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma') \\ q(\xi) &= (\Delta\xi | L(\overline{p})\xi) \\ q(\xi) &= (\xi | \Delta L(\overline{p})\xi) \end{aligned}$$

• Supposons maintenant que q est s.c.i. et reprenons les notations de la démonstration précédente.

Le calcul précédent nous donne $T|_{C_c(G)} = \Delta L(\overline{p})$.

Tout d'abord, T est -1 -homogène car, pour $\xi \in C_c(G)$, $\gamma \in G$ et $\gamma' \in G_{r(\gamma)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\gamma)T_{s(\gamma)}\xi(\gamma') &= (\Delta L(\overline{p}))\xi(\gamma'\gamma) \\ &= \delta(\gamma'\gamma)\overline{p} \star \xi(\gamma'\gamma) \\ \delta(\gamma)T_{r(\gamma)}\tilde{R}(\gamma)\xi(\gamma') &= \delta(\gamma)\delta(\gamma')L(\overline{p})\tilde{R}(\gamma)\xi(\gamma') \\ &= \delta(\gamma'\gamma)L(\overline{p})\xi(\gamma'\gamma) \end{aligned}$$

T est également densément défini car $C_c(G)$ est dense dans \mathcal{H} , et T est fermé par construction.

Nous en déduisons que $T \in L^1(\mathcal{M}, \psi_0)_+$ et donc, d'après le théorème 4.2.1 il existe un unique $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})_+$ associé à T . Ce F s'écrit $F = (e, e)$ avec $e \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ et on a $q(\xi) = (T\xi|\xi) = \omega_e(L(\xi)L(\xi)^*)$.

Les calculs déjà effectués nous donnent alors

$$\forall \xi \in C_c(G), (T\xi|\xi) = \int F(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}\xi \star \xi^*(\gamma)d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

et, $C_c(G) \star C_c(G)$ étant dense dans \mathcal{H} , nous pouvons conclure que $p = F\Delta^{-\frac{1}{2}}$ et donc $\Delta^{\frac{1}{2}}p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

• Si on suppose maintenant que $\Delta^{\frac{1}{2}}p \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$, nous pouvons, d'après le théorème 4.2.1, lui associer un unique élément de φ_p de \mathcal{M}_* tel que, pour tout $\xi \in C_c(G)$,

$$\varphi_p(L(\xi)L(\xi)^*) = \int \xi \star \xi^*(\gamma)(\Delta^{\frac{1}{2}}p)(\gamma)\delta(\gamma)^{-\frac{1}{2}}d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

et donc $q(\xi) = \varphi_p(L(\xi)L(\xi)^*)$.

Mais nous savons que $\xi \mapsto \varphi_p(L(\xi)L(\xi)^*)$ est s.c.i. donc q est bien s.c.i. □

Chapitre 5

Espace L^2 d'une algèbre de von Neumann de groupoïde

5.1 Identification de $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et $L^2(\mathcal{M}, \tau)$

On considère ici un groupoïde mesuré unimodulaire (G, μ, λ) séparé, localement compact et à base dénombrable d'ouverts..

On note \mathcal{M} l'algèbre de von Neumann de G définie au § 2.2.3, $\mathcal{H} = L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et τ la trace sur \mathcal{I} , où \mathcal{I} est l'idéal de définition de la trace (1.2.1).

On veut identifier $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

- Notons \mathcal{B} l'ensemble des éléments bornés à gauche de \mathcal{H} . Il coïncide avec \mathcal{A}_l car $\mathcal{D}^\sharp = \mathcal{H}$ et contient $\mathcal{C}_c(G)$, qui est dense dans $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ pour la norme hilbertienne.

- On sait que $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$ est dense dans $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ pour $\|\cdot\|_2$.

On a de plus $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}} = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_c(G)) : \exists g \in \mathcal{B}; T = L(g)\}$.

Notons $L(\mathcal{C}_c(G))$ l'ensemble des $L(f)$ avec $f \in \mathcal{C}_c(G)$. Par définition, \mathcal{M} est la fermeture faible de $L(\mathcal{C}_c(G))$.

Prouvons que $L(\mathcal{C}_c(G))$ est dense dans $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

Soit $T \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$ est dense dans $L^2(\mathcal{M}, \tau)$, il existe S dans $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$ tel que $\|S - T\|_2 < \varepsilon$.

Par définition de $\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}$, ce S peut s'écrire sous la forme $L(g)$ avec $g \in \mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B} \subset L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et $\mathcal{C}_c(G)$ est dense dans $L^2(G, \mu \circ \lambda)$, il existe f dans $\mathcal{C}_c(G)$ tel que $\int |f - g|^2(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma) < \varepsilon^2$.

Or $\|L(f) - S\|_2^2 = \|L(f) - L(g)\|_2^2 = \|L(f - g)\|_2^2$.

Mais $\|L(h)\|_2^2 = \tau(L(h)^*L(h)) = (h|h)$

donc $\|L(f) - S\|_2^2 = \tau(L(f - g)^*L(f - g)) = (f - g|f - g) = \int |(f - g)(\gamma)|^2 d\mu \circ \lambda(\gamma)$.

On en déduit que $\|L(f) - S\|_2 \leq \varepsilon$.

Finalement, $\|L(f) - T\|_2 \leq \|L(f) - S\|_2 + \|S - T\|_2 \leq 2\varepsilon$.

On a donc bien prouvé que $L(\mathcal{C}_c(G))$ est dense dans $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

Ceci permet d'identifier $L^2(G, \mu \circ \lambda)$ et $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

5.2 Étude de $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$

Définition 5.2.1

Soit $f \in C_c(G)$.

On pose $\mathcal{F}_2(f)\xi = \Delta^{\frac{1}{4}}L(f)\Delta^{\frac{1}{4}}\xi$ pour $\xi \in D(\mathcal{F}_2(f))$, où

$$D(\mathcal{F}_2(f)) = \{\xi \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1}) : \delta^{\frac{1}{4}}(f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi) \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})\}$$

Cette définition a bien un sens et on a

Proposition 5.2.1

$\mathcal{F}_2(f)$ est préfermé, $-\frac{1}{2}$ -homogène et $C_c(G) \subset D(\mathcal{F}_2(f))$.

Démonstration. 1) $\mathcal{F}_2(f)$ est bien défini :

Si $f \in C_c(G)$ et $\xi \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$, alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} \int |f(\gamma\gamma')| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}) \left| \xi(\gamma'^{-1}) \right| d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') &\leq \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} \left(\int |f(\gamma\gamma')|^2 \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int \left| \xi(\gamma'^{-1}) \right|^2 d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Or f est continue à support compact et δ est continue donc la première intégrale est finie.

Par ailleurs, $\int \left| \xi(\gamma'^{-1}) \right|^2 d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') = \int |\xi(\gamma')|^2 d\lambda_{s(\gamma)}(\gamma')$ et $\xi \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$ donc cette intégrale est finie pour ν^{-1} -presque tout γ . En conclusion, $\delta^{\frac{1}{4}}(f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi)$ est bien défini.

Par ailleurs, si $f \in C_c(G)$, et si $\xi \in C_c(G)$, alors, pour tout $h \in L^2(G, \mu \circ \lambda^{-1})$, si on note $I = \int \left| \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi(\gamma) \right| |h(\gamma)| d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma)$, on a

$$\begin{aligned} I &\leq \int \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} \left(\int |f(\gamma')| \delta(\gamma'^{-1}\gamma)^{\frac{1}{4}} \left| \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \right| d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right) |h(\gamma)| \delta(\gamma)^{-1} d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\ I &\leq \int |f(\gamma')| \left(\int \left| \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \right|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \delta(\gamma)^{-1} |h(\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \delta(\gamma'^{-1})^{\frac{1}{4}} d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \end{aligned}$$

Or

$$\int \left| \xi(\gamma'^{-1}\gamma) \right|^2 d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma) = \int |\xi(\gamma)|^2 d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} G(s(\gamma'))$$

et

$$\int \int |\xi(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) = \int \int |\xi(\gamma)|^2 \delta(\gamma) d\lambda_x(\gamma) d\mu(x)$$

Comme $\xi \in C_c(G)$, nous en déduisons que $G \in L^2(G^{(0)}, \mu)$ et $\|G\|_2 \leq a^{\frac{1}{2}} \|\xi\|_2$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On a alors

$$I \leq \int |f(\gamma')| G(s(\gamma')) H(r(\gamma')) \delta(\gamma')^{\frac{1}{4}} \delta(\gamma')^{-\frac{1}{2}} d\nu$$

Finalement, f étant continue à support compact et δ étant continue, nous obtenons

$$\int \left| \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} f \star \delta^{\frac{1}{4}} \xi(\gamma) \right| |h(\gamma)| d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \leq \|f\|_{II} C_{f,\xi} \|\xi\|_2 \|h\|_2$$

où $C_{f,\xi}$ est une constante dépendant de f et de ξ .

Donc $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi$ appartient à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. Ainsi, $D(\mathcal{F}_2)$ n'est pas vide et contient $C_c(G)$.

• Supposons maintenant que $f \in L^2(G, \nu_0)$. Pour $\xi \in C_c(G)$, on pose

$$A = \int \int \left| \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} f(\gamma\gamma') \right| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}) \left| \xi(\gamma'^{-1}) h(\gamma) \right| d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') d\lambda_x(\gamma) d\mu(x)$$

On a alors, par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} A &\leq \int \int \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} |f(\gamma\gamma')| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}) \left| \xi(\gamma'^{-1}) h(\gamma) \right| d\lambda_{r(\gamma')}(\gamma) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int \int \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} |f(\gamma\gamma'^{-1})| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma') |\xi(\gamma') h(\gamma)| d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \delta(\gamma'^{-1}) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int |\xi(\gamma')| \delta^{\frac{3}{4}}(\gamma'^{-1}) \left(\int |f(\gamma\gamma'^{-1})| \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} |h(\gamma)| d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int |\xi(\gamma')| \delta^{\frac{3}{4}}(\gamma'^{-1}) \left(\int |f(\gamma\gamma'^{-1})|^2 \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int |\xi(\gamma')| \delta^{\frac{3}{4}}(\gamma'^{-1}) \left(\int |f(\gamma'')|^2 \delta(\gamma')^{\frac{1}{2}} \delta(\gamma'')^{\frac{1}{2}} d\lambda_{r(\gamma')}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \int |\xi(\gamma')| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) \left(\int |f(\gamma'')|^2 \delta(\gamma'')^{\frac{1}{2}} d\lambda_{r(\gamma')}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda_{s(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \end{aligned}$$

Pour $x \in G^{(0)}$, on pose $j(x) = \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda_x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$ et $k(x) = \left(\int \delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} |f(\gamma)|^2 d\lambda_x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$

Comme h appartient à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ et f appartient à $L^2(G, \nu_0)$, j et k sont finis presque partout et appartiennent à $L^2(G^{(0)}, \mu)$. On a par ailleurs $\|j\|_2 = \|h\|_2$ et $\|k\|_2 = \|f\|_{L^2(G, \nu_0)}$.

Finalement,

$$\begin{aligned} A &\leq \int |\xi(\gamma')| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) j(s(\gamma')) k(r(\gamma')) d\lambda^x(\gamma') d\mu(x) \\ &\leq \|\xi\|_{II} \|f\|_{L^2(G, \nu_0)} \|h\|_2 \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\xi \in C_c(G)$ et $f \in L^2(G, \nu_0)$, $\delta^{\frac{1}{4}}(f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi)$ est fini presque partout et appartient à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. De plus, $\left\| \delta^{\frac{1}{4}}(f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi) \right\|_2 \leq \|\xi\|_{II} \|f\|_{L^2(G, \nu_0)}$.

2) $\mathcal{F}_2(f)$ est $-\frac{1}{2}$ -homogène.

Soit $\gamma \in G$.

Soit $\xi \in C_c(G)$ et soit $\gamma' \in G_{r(\gamma)}$.

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\gamma)\mathcal{F}_2(f)_{s(\gamma)}\xi(\gamma') &= \mathcal{F}_2(f)\xi(\gamma'\gamma) \\ &= \delta(\gamma'\gamma)^{\frac{1}{4}} \int f(\gamma'')\delta(\gamma''^{-1}\gamma'\gamma)^{\frac{1}{4}}\xi(\gamma''^{-1}\gamma'\gamma)d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma'') \\ &= \delta(\gamma')^{\frac{1}{4}}\delta(\gamma)^{\frac{1}{2}} \int f(\gamma'')\delta(\gamma''^{-1}\gamma')^{\frac{1}{4}}\xi(\gamma''^{-1}\gamma'\gamma)d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma'') \\ &= \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma)\delta(\gamma')^{\frac{1}{4}} \int f(\gamma'')\delta(\gamma''^{-1}\gamma')^{\frac{1}{4}}(\tilde{R}(\gamma)\xi)(\gamma''^{-1}\gamma')d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma'') \\ &= \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma)(\mathcal{F}_2(f)\tilde{R}(\gamma)\xi)(\gamma') \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{F}_2(f)$ est $-\frac{1}{2}$ -homogène.

3) $\mathcal{F}_2(f)$ est préfermée. Pour cela, on démontre que

$$\overline{\Gamma(\mathcal{F}_2(f))} \cap \{(0; g) \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1}) \times L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})\} = \{(0; 0)\}$$

Soit donc $(0; g)$ dans l'intersection ci-dessus. Par définition, il existe une suite $((\xi_n, \mathcal{F}_2(f)\xi_n))_n$ d'éléments de $\Gamma(\mathcal{F}_2(f))$ qui converge vers $(0; g)$ au sens où :

$$\|\xi_n\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}_2(f)\xi_n - g\|_2 \rightarrow 0$$

On veut prouver que $g = 0$. Soit donc $h \in C_c(G)$. On pose $a_h = \sup\{\delta(\gamma) : \gamma \in \text{Supp}(h)\}$.

D'autre part, $f \in C_c(G)$ donc on peut définir $a_f = \sup\{\delta(\gamma^{-1}) : \gamma \in \text{Supp}(h)\}$.

Or $|(g|h)| \leq \|g - \mathcal{F}_2(f)\xi_n\|_2 \|h\|_2 + |(\mathcal{F}_2(f)\xi_n|h)|$.

Majorons le deuxième terme, noté I_n :

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int \left| \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} f \star \delta^{\frac{1}{4}}\xi_n(\gamma) \right| |h(\gamma)| d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ I_n &\leq \int \left(\int \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} |f(\gamma')| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}\gamma) \left| \xi_n(\gamma'^{-1}\gamma) \right| d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') \right) |h(\gamma)| d(\mu \circ \lambda)^{-1}(\gamma) \\ I_n &\leq \int \int |f(\gamma')| \delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}\gamma) \delta(\gamma)^{\frac{1}{4}} \delta(\gamma)^{-1} \left| \xi_n(\gamma'^{-1}\gamma) \right| d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma') |h(\gamma)| d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \end{aligned}$$

On utilise alors que $\delta^{\frac{1}{4}}(\gamma'^{-1}\gamma)\delta(\gamma)^{\frac{1}{4}}\delta(\gamma)^{-1} = \delta^{-\frac{3}{4}}(\gamma')\delta^{-\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}\gamma)$ donc

$$I_n \leq \int |f(\gamma')| \delta(\gamma'^{-\frac{3}{4}}) \left(\int \delta^{-1}(\gamma'^{-1}\gamma) |\xi_n(\gamma'^{-1}\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda(\gamma')$$

$$I_n \leq \int |f(\gamma')| \delta(\gamma')^{-\frac{3}{4}} \left(\int \delta^{-1}(\gamma'') |\xi_n(\gamma'')|^2 d\lambda^{s(\gamma')}(\gamma'') \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda^{r(\gamma')}(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \circ \lambda(\gamma')$$

Posons $j_n(x) = \left(\int \delta^{-1}(\gamma) |\xi_n(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$ et $k(x) = \left(\int |h(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme $\xi_n \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, $j_n \in L^2(G^{(0)}, \mu)$ et $\|j_n\|_2 = \|\xi_n\|_2$.

Par ailleurs, $h \in C_c(G)$ donc $\int |h(\gamma)|^2 d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) = \int |h(\gamma)|^2 \delta(\gamma) d\mu \circ \lambda^{-1}(\gamma) \leq a_h \|h\|_2^2$

On en déduit que $k \in L^2(G^{(0)}, \mu)$ et $\|k\|_2 \leq \sqrt{a_h} \|h\|_2$.

Finalement, on obtient l'inégalité :

$$|(\mathcal{F}_2(f)\xi_n|h)| \leq \sqrt{a_h a_f^{\frac{1}{4}}} \|f\|_{II} \|\xi_n\|_2 \|h\|_2$$

donc

$$|(g|h)| \leq (\|g - \mathcal{F}_2(f)\xi_n\|_2 + \sqrt{a_h a_f^{\frac{1}{4}}} \|f\|_{II} \|\xi_n\|_2) \|h\|_2$$

Comme le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut conclure que $(g|h) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $h \in C_c(G)$ et $C_c(G)$ étant dense dans $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, il en résulte que $g = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}_2(f)$ est préfermé. \square

La fermeture $[\mathcal{F}_2(f)]$ est encore $-\frac{1}{2}$ -homogène. Nous noterons désormais $\mathcal{F}_2(f)$ la fermeture de l'opérateur.

Considérons alors l'application \mathcal{F}_2 définie sur $C_c(G)$ par $f \mapsto \mathcal{F}_2(f)$.

Théorème 5.2.1 (Identification de $L^2(G, \nu_0)$ et $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$)

L'application \mathcal{F}_2 se prolonge en une isométrie de $(L^2(G, \nu_0), \|\cdot\|_{L^2(G, \nu_0)})$ dans $(L^2(\mathcal{M}, \psi_0), \|\cdot\|_2)$.

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui est un corollaire de la proposition 4.4.1 appliquée à l'opérateur (-1) -homogène T^2 :

Proposition 5.2.2

Soit T un opérateur fermé densément défini et $-\frac{1}{2}$ -homogène sur $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $T \in L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$

ii) Il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathcal{B} \cap D(T) : \|T\xi\|_2 \leq C \|L(\xi)\|$$

iii) Il existe une unité approchée $(\xi_i)_{i \in I}$ dans \mathcal{A}_+ telle que, pour tout $i \in I$,

$$\xi_i \in D(|T|) \quad \text{et} \quad \liminf \| |T| \xi_i \| < +\infty$$

Si $T \in L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$, alors $\mathcal{B} \in D(|T|)$ et, pour toute unité approchée (ξ_i) de \mathcal{A}_+ , on a

$$\|T\|_2 = \lim \| |T| \xi_i \|$$

Nous aurons également besoin du résultat calculatoire suivant :

Proposition 5.2.3 (Quelques égalités utiles)

Soit T un opérateur $-\frac{1}{2}$ -homogène.

1) Soit $\xi, \zeta, \eta \in C_c(G)$. Alors $(\eta|T(\xi) \star \delta^{\frac{1}{2}}\zeta) = (\eta|T(\xi \star \zeta))$.

Preuve. 1) On sait que $\tilde{R}(f)g = g \star \Delta \tilde{f}$. Donc $(T\xi) \star \delta^{\frac{1}{2}}\zeta = \tilde{R}(\widetilde{\Delta^{-\frac{1}{2}}\zeta})T\xi$.
On obtient donc :

$$(\eta|(T\xi) \star \delta^{\frac{1}{2}}\zeta) = \int (\eta \circ r(\gamma) |\tilde{R}(\gamma)(T\xi) \circ s(\gamma)| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \tilde{\zeta}(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma))$$

Par $-\frac{1}{2}$ homogénéité de T , il vient

$$\begin{aligned} (\eta|(T\xi) \star \delta^{\frac{1}{2}}\zeta) &= \int (\eta \circ r(\gamma) |\delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) T \tilde{R}(\gamma) \xi \circ s(\gamma)| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma) \tilde{\zeta}(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma)) \\ (\eta|(T\xi) \star \delta^{\frac{1}{2}}\zeta) &= \int (\eta \circ r(\gamma) |T \tilde{R}(\gamma) \xi \circ s(\gamma)| \delta(\gamma) \tilde{\zeta}(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma)) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $(\eta|T(\xi \star \zeta)) = (T^* \eta | \tilde{R}(\widetilde{\Delta^{-1}\zeta}) \xi)$ donc

$$(\eta|T(\xi \star \zeta)) = \int (T^* \eta \circ r(\gamma) |\tilde{R}(\gamma) \xi \circ s(\gamma)| \delta(\gamma) \tilde{\zeta}(\gamma) d\mu \circ \lambda(\gamma))$$

Ainsi, les deux expressions sont bien égales. □

Donnons maintenant la démonstration du théorème énoncé :

Démonstration. 1) Soit $f, g \in C_c(G)$. Alors $\mathcal{F}_2(f)$ est bien défini.

Par ailleurs, $\mathcal{F}_2(f) = L(\Delta^{\frac{1}{4}} f) \Delta^{\frac{1}{2}}$.

Soit (ξ_i, K_i, U_i) une unité approchée bilatère dans $(C_c(G))_+$ ([MRW87]).

Nous allons commencer par prouver le lemme suivant :

Lemme 17

Sous les conditions précédentes, $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i$ converge vers f dans $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

Preuve du lemme. • Si $\delta = 1$, c'est évident.

• Soit $\varepsilon > 0$. Majorons $D_i(\gamma) = \left| f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i(\gamma) - f(\gamma) \right|$ pour $\gamma \in G$.

Tout d'abord, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geq p$ et pour tout $x \in K_i$, on ait $1 = \int \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^x(\gamma') + k_i(x)$ avec $|k_i(x)| \leq \varepsilon$. Considérons maintenant $i \geq p$:

$$\begin{aligned} D_i(\gamma) &= \left| \int f(\gamma\gamma') \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') - \int f(\gamma\gamma') \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \right. \\ &\quad \left. + \int f(\gamma\gamma') \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') - \int f(\gamma) \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') - f(\gamma) k_i(s(\gamma')) \right| \\ &\leq \int |f(\gamma\gamma')| \left| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) - 1 \right| \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') + \int |f(\gamma\gamma') - f(\gamma)| \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') \\ &\quad + \varepsilon |f(\gamma)| \end{aligned}$$

Or ξ_i est à support dans U_i donc ces intégrales sont prises sur U_i^{-1} .

Plus précisément, on doit avoir $\gamma'^{-1} \in \text{Supp}(\xi_i) \subset U_i$ et $s(\gamma') \in s(\text{Supp}(f))$ ce qui revient à $r(\gamma'^{-1}) \in s(\text{Supp}(f))$. Par ailleurs, f est à support compact donc $s(\text{Supp}(f))$ est un compact.

Posons $V_i = U_i \cap r^{-1}(s(\text{Supp}(f)))$.

Comme U_i est r -relativement compact, V_i est relativement compact et donc $\overline{V_i}$ est compact dans G .

Comme $\delta^{\frac{1}{2}}$ est continue sur G , elle est uniformément continue sur V_i quel que soit i .

On en déduit qu'il existe $i_0 \geq p$ tel que, pour tout $i \geq i_0$ et tout $\gamma'^{-1} \in V_i$, on ait

$$\left| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) - \delta^{\frac{1}{2}}(s(\gamma'^{-1})) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{i.e.} \quad \left| \delta^{\frac{1}{2}}(\gamma'^{-1}) - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, le premier terme $I_1(i)$ se majore par $\int_{V_i^{-1}} |f(\gamma\gamma')| \xi_i(\gamma'^{-1}) \varepsilon d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$ pour $i \geq i_0$.

Finalement, pour $i \geq i_0$, on a $I_1(i) \leq \|f\|_\infty \varepsilon \int_{U_i} \xi_i(\gamma'^{-1}) d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma')$.

Puis, si $s(\gamma) \in K_i$, on trouve $I_1(i) \leq \|f\|_\infty \varepsilon$.

Pour le deuxième terme : par continuité uniforme de f , il existe i'_0 tel que pour tout $i \geq i'_0$ et tout $\gamma' \in U_i^{-1}$, on ait $|f(\gamma\gamma') - f(\gamma)| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour $I = \max(i_0, i'_0)$, on a $I_2 \leq \varepsilon$.

En conclusion, pour $i \geq I$ et $s(\gamma) \in K_i$, on obtient :

$$D_i(\gamma) \leq \varepsilon(2\|f\|_\infty + 1)$$

On sait de plus qu'il existe un compact K tel que, pour tout i , $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i - f$ est à support dans K . La suite (K_i) tendant en croissant vers $G^{(0)}$ et $s(K)$ étant compact,

$$\exists j_0 : \forall i \geq j_0, s(K) \subset K_i$$

Pour $i \geq \max(I, j_0)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int \left| f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i - f \right| d\mu \circ \lambda &= \int_K \left| f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i - f \right| d(\mu \circ \lambda)^{-1} \\ &\leq \varepsilon (2 \|f\|_\infty + 1) C_K \end{aligned}$$

où $C_K = (\mu \circ \lambda)^{-1}(K) < +\infty$ car K est un compact.

On déduit de ce qui précède que $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i - f$ appartient à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ et que $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i$ tend vers f dans $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. \square

Comme $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi_i \rightarrow f$ dans $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, on a $\left\| L(f) \Delta^{\frac{1}{2}} \xi_i \right\|_2 \rightarrow \|f\|_2$ et donc, en remplaçant f par $\delta^{\frac{1}{4}} f$, on obtient $\|\mathcal{F}_2(f)\|_2 \rightarrow \left\| \delta^{\frac{1}{4}} f \right\|_2$; d'après la proposition 5.2.2, on en déduit que $\mathcal{F}_2(f) \in L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$ et on a $\|\mathcal{F}_2(f)\|_2 = \lim \|\mathcal{F}_2(f) \xi_i\|$; d'où il résulte que $\|\mathcal{F}_2(f)\|_2 = \left\| \delta^{\frac{1}{4}} f \right\|_2 = \|f\|_{L^2(G, \nu_0)}$.

\mathcal{F}_2 est donc une isométrie du sous-espace dense $C_c(G)$ de $L^2(G, \nu_0)$ dans $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$.

Remarque 5.2.1

Si $f \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ et $\xi \in C_c(G)$, on peut encore définir $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi$ et on obtient un élément de $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$.

2) Soit maintenant $f \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$. Par densité, il existe une suite (f_n) d'éléments de $C_c(G)$ qui converge vers f pour $\|\cdot\|_2$.

Pour tout n , $\mathcal{F}_2(f_n)$ existe, appartient à $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$ et on a $\|\mathcal{F}_2(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$.

On en déduit que la suite $(\mathcal{F}_2(f_n))$ est de Cauchy dans $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$, et par complétude, que cette suite converge dans $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$ vers un élément T .

Comme \mathcal{F}_2 est une isométrie, cette limite est indépendante de la suite (f_n) choisie; on peut donc poser $\mathcal{F}_2(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_2(f_n)$. On a ainsi bien prolongé \mathcal{F}_2 en une isométrie de $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ dans $L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$.

3) Surjectivité.

Soit $T \in L^2(\mathcal{M}, \psi_0)$. Soit (ξ_i) une unité approchée de $(C_c(G))_+$.

Remarquons tout d'abord que, si $\eta, \zeta \in C_c(G)$, alors

$$\begin{aligned} (\eta \star \delta^{\frac{1}{2}} \zeta \star |T \xi_i) &= (\eta | (T \xi_i) \star \delta^{\frac{1}{2}} \zeta) \\ &= (\eta | T(\xi_i \star \zeta)) \\ &= (T^* \eta | \xi_i \star \zeta) \end{aligned}$$

Mais (ξ_i) est une unité approchée donc $(\eta \star \delta^{\frac{1}{2}} \zeta \star |T \xi_i)$ tend vers $(T^* \eta | \zeta) = (\eta | T \zeta)$ c'est-à-dire

$$(\eta | T \zeta) = \lim_i (\eta \star \delta^{\frac{1}{2}} \zeta \star |T \xi_i) \quad (5.1)$$

Définissons alors $F : \begin{cases} C_c(G) \star C_c(G) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto \lim_i (\xi | T \xi_i) \end{cases}$

- F est une forme linéaire bornée : en effet,

$$\begin{aligned} |(\xi|T\xi_i)| &\leq \|\xi\|_2 \|T\xi_i\|_2 \\ &\leq \|\xi\|_2 C \|L(\xi_i)\|_2 && \text{d'après la proposition 5.2.2} \\ &\leq \|\xi\|_2 C \end{aligned}$$

- Comme $C_c(G) \star C_c(G)$ est dense dans $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$, on peut donc prolonger F à $L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ en une forme linéaire bornée de même norme, encore notée F . D'après le théorème de Riesz, il existe alors $f \in L^2(G, (\mu \circ \lambda)^{-1})$ tel que,

$$\forall \xi \in C_c(G) \star C_c(G) : F(\xi) = (\xi|f)$$

- Soit alors $\xi, \eta \in C_c(G)$, on a

$$\begin{aligned} (\eta|T\xi) &= \lim_i (\eta \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi^* | T\xi_i) && \text{d'après (5.1)} \\ &= (\eta \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi^* | f) && \text{d'après ce qui précède} \\ &= (\eta|f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi) \end{aligned}$$

Mais, comme $f \in L^2(G, \nu^{-1})$, $\delta^{-\frac{1}{4}} f \in L^2(G, \nu_0)$ et $f \star \delta^{\frac{1}{2}} \xi = \mathcal{F}_2(\delta^{-\frac{1}{4}} f) \xi$ donc, pour tout $\xi \in C_c(G)$, $T\xi = \mathcal{F}_2(\delta^{-\frac{1}{4}} f) \xi$.

D'après la proposition 3.4.1, on obtient que $T = \mathcal{F}_2(\delta^{-\frac{1}{4}} f)$. Ainsi, \mathcal{F}_2 est surjective. \square

Chapitre 6

Espaces L^p d'une algèbre de von Neumann de groupoïde

Dans cette partie, nous considérons un groupoïde mesuré (G, λ, μ) unimodulaire, localement compact, séparé et à base dénombrable d'ouverts. On note \mathcal{M} l'algèbre de von Neumann du groupoïde et τ la trace canonique sur \mathcal{M} .

6.1 Théorème de densité pour $L^p(\mathcal{M}, \tau)$

Proposition 6.1.1

Soit $1 \leq p \leq 2$. Alors $L(C_c(G) \star C_c(G)) \cap L^p(\mathcal{M}, \tau) \subset L^p(\mathcal{M}, \tau)$ et $L(C_c(G) \star C_c(G))$ est dense dans $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ pour $\|\cdot\|_p$.

Démonstration. Nous allons ici utiliser l'interpolation complexe.

Posons $\mathcal{A} = C_c(G) \star C_c(G)$, $A_0 = L^1(\mathcal{M}, \tau)$ et $A_1 = L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

☞ Prouvons que $L(\mathcal{A})$ est dense dans A_0 .

D'après le théorème 4.4.1, si $T \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$, alors il existe $F \in \mathcal{L}^1(\widehat{G})$ tel que $T = \widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F)$. Mais $C_c(G)$ est dense dans $L^2(G)$ et $\widetilde{F} = \eta \star \xi^*$ avec $\eta, \xi \in L^2(G)$ donc il existe deux suites (η_n) et (ξ_n) d'éléments de $C_c(G)$ telles que $\eta_n \star \xi_n^*$ converge vers \widetilde{F} dans $\mathcal{L}^1(\widehat{G})$.

Comme l'application
$$\begin{cases} \mathcal{L}^1(\widehat{G}) & \longrightarrow & L^1(\mathcal{M}, \tau) \\ F & \longmapsto & \widetilde{\mathcal{F}}_\infty(F) \end{cases}$$
 est une isométrie, $[L(\eta_n \star \xi_n^*)]$ converge

dans $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ vers T et donc $L(\mathcal{A})$ est dense dans $L^1(\mathcal{M}, \tau)$.

☞ Prouvons que $L(\mathcal{A})$ est dense dans A_1 .

Nous savons déjà que $L^2(\mathcal{M}, \tau)$ et $L^2(G)$ s'identifient isométriquement. Or, d'après la démonstration de la proposition 2.2.2, $C_c(G) \star C_c(G)$ est dense dans $L^2(G)$ donc $L(\mathcal{A})$ est dense dans $L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

☞ Il nous faut maintenant justifier que $L(\mathcal{A})$ est dense dans $A_1 \cap A_0$ muni de la norme du max.

Soit $T \in L^1(\mathcal{M}) \cap L^2(\mathcal{M})$. Il existe $f, g \in L^2(G)$ tels que $T = L(f \star g)$ et $f \star g \in L^2(G)$.

Quitte à écrire $f \star g$ comme combinaison linéaire, on peut supposer que f et g sont positives. Il existe alors deux suites (f_n) et (g_n) croissantes de fonctions continues à support compact et positives telles que $\|f_n - f\|_2$ et $\|g_n - g\|_2$ tendent vers 0.

On peut alors dire que $\|L(f_n \star g_n) - L(f \star g)\|_1 \rightarrow 0$.

Pour prouver que $\|L(f_n \star g_n) - L(f \star g)\|_2 \rightarrow 0$, il suffit de prouver que $\|f_n \star g_n - f \star g\|_2$ tend vers 0.

Comme (f_n) et (g_n) sont positives croissantes, pour γ fixé, $f_n(\gamma\gamma')g_n(\gamma'^{-1})$ tend en croissant vers $f(\gamma\gamma')g(\gamma')$ pour presque tout γ' dans $G^{s(\gamma)}$. Le théorème de convergence monotone nous permet alors d'affirmer que, pour presque tout x et λ_x presque tout $\gamma \in G_x$, $\int f_n(\gamma\gamma')g_n(\gamma'^{-1})d\lambda^x(\gamma')$ tend en croissant vers $\int f(\gamma\gamma')g(\gamma'^{-1})d\lambda^x(\gamma')$ i.e. $(f_n \star g_n(\gamma))$ tend en croissant vers $f \star g(\gamma)$.

On en déduit que $(|f \star g(\gamma) - f_n \star g_n(\gamma)|^2)$ tend en décroissant vers 0 pour presque tout γ .

De plus, $|f \star g(\gamma) - f_n \star g_n(\gamma)|^2 \leq |f \star g(\gamma)|^2$; comme $f \star g \in L^2(G)$, le théorème de convergence dominée nous permet d'affirmer que $\int |f \star g(\gamma) - f_n \star g_n(\gamma)|^2 d\mu \circ \lambda(\gamma)$ tend vers 0, i.e. $(f_n \star g_n)$ converge vers $f \star g$ dans $L^2(G)$.

☞ Par interpolation, quel que soit $\theta \in [0; 1]$, $L(\mathcal{A})$ est dense dans $(A_\theta, \|\cdot\|_\theta)$,

où $A_\theta = L^p(\mathcal{M}, \tau)$ avec $\frac{1}{p} = 1 - \theta + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$. □

Lemme 18

Soit $1 \leq p \leq 2$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit $T \in L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$. Alors

$$\|T\|_{p'} = \sup_{\|L(g)\|_p \leq 1, g \in C_c(G) \star C_c(G)} \|TL(g)\|_1.$$

Démonstration. D'après [Hi81] proposition 8, $\|T\|_{p'} = \sup_{R \in L^p(\mathcal{M}, \tau), \|R\|_p \leq 1} \|TR\|_1$.

Comme $L(C_c(G) \star C_c(G))$ est dense dans $L^p(\mathcal{M}, \tau)$, on obtient bien l'égalité annoncée. □

Lemme 19

Soit $p > 1$. Soit $T \in L^p(\mathcal{M}, \tau) \cap L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$. Alors, quel que soit $q > p$, $T \in L^q(\mathcal{M}, \tau)$.

Démonstration. T est affilié à \mathcal{M} , densément défini et fermé. Il suffit de vérifier que $\tau(|T|^q) < +\infty$. Or, $\tau(|T|^q) = \tau(|T|^{\frac{q}{2}} |T|^{q-p} |T|^{\frac{q}{2}})$.

De plus, dans une C^* -algèbre A , pour tous a et b de A , on sait que $aba^* \leq \|b\| aa^*$.

Ici, comme $T \in L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$, cela nous donne $|T|^{\frac{q}{2}} |T|^{q-p} |T|^{\frac{q}{2}} \leq \|T\|^{q-p} |T|^p$ et donc $\tau(|T|^q) \leq \tau(|T|^p \|T\|^{q-p}) = \|T\|^{q-p} \tau(|T|^p)$. Or $T \in L^p(\mathcal{M}, \tau)$ donc cette quantité est finie, ce qui prouve que $T \in L^q(\mathcal{M}, \tau)$. □

6.2 Inégalité de Hausdorff-Young

Soit (G, λ, μ) un groupoïde mesuré unimodulaire, séparé, à base dénombrable d'ouverts.

6.2.1 Étude des $L^{p,p'}(G)$

Espace normé

Soit p, p' des réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nous allons définir les espaces $L^{p,p'}(G)$ en adaptant la définition de [BP61] donnée notamment dans le cadre du groupoïde grossier $X \times X$.

Ainsi, pour $p \neq \infty$ et $p' \neq \infty$, on définit $L^{p,p'}(G)$ comme étant l'ensemble des fonctions mesurables de G dans \mathbb{C} telles que

$$\int \left(\int |f|^p d\lambda^x \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) < +\infty.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel et, on pose, pour $f \in L^{p,p'}(G)$

$$\|f\|_{p,p'} = \left(\int \left(\int |f|^p d\lambda^x \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour $p = 1$ et $p' = \infty$, $L^{p,p'}(G)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de G dans \mathbb{C} telles que $\text{ess sup}_{x \in G^{(0)}} \left(\int |f| d\lambda^x \right) < +\infty$ et on pose

$$\|f\|_{p,p'} = \text{ess sup}_{x \in G^{(0)}} \left(\int |f| d\lambda^x \right).$$

Enfin, pour $p = \infty$ et $p' = 1$, $L^{p,p'}(G)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de G dans \mathbb{C} telles que $\int \text{ess sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| d\mu(x) < +\infty$ et

$$\|f\|_{p,p'} = \int \text{ess sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| d\mu(x).$$

Remarquons que $I(G) \subset L^{1,\infty}(G)$ et $\|f\|_{1,\infty} \leq \|f\|_I$ pour $f \in L^{1,\infty}(G)$.

Proposition 6.2.1

$\|\cdot\|_{p,p'}$ est une norme sur $L^{p,p'}(G)$.

Démonstration. Les seuls points non évidents sont le fait que $\|f\|_{p,p'} = 0$ si et seulement si $f = 0$ ainsi que l'inégalité de Minkowski.

☞ Cas où $p \neq \infty$ et $p' \neq \infty$.

Soit $f \in L^{p,p'}(G)$. Alors $x \mapsto \left(\int |f|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}} \in L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$.

De plus, si on définit f^x sur G^x par $f^x(\gamma) = f(\gamma)$, $f^x \in L^p(G^x, \lambda^x)$ pour μ -presque tout $x \in G^{(0)}$.

• $\|f\|_{p,p'} = 0 \iff \int |f^x|^p d\lambda^x = 0$ pour μ -presque tout x car $\|\cdot\|_{p'}$ est une norme sur $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$.

Mais $g \mapsto \left(\int |g|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(G^x, \lambda^x)$ donc

$$\|f\|_{p,p'} = 0 \iff f^x(\gamma) = 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \text{ et } \lambda^x\text{-presque tout } \gamma \text{ de } G^x.$$

Ainsi, $\|f\|_{p,p'} = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

• Nous allons maintenant démontrer l'inégalité de Minkowski.

Soit $f, g \in L^{p,p'}(G)$. On s'intéresse à

$$I = \left(\int \left(\int |f^x + g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pour μ presque tout x , $f^x \in L^p(G^x, \lambda^x)$ et $g^x \in L^p(G^x, \lambda^x)$ donc $f^x + g^x \in L^p(G^x, \lambda^x)$ et

$$\left(\int |f^x + g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons $S(x)$ le membre de gauche, et $F(x), G(x)$ les deux intégrales du membre de droite. Nous savons que F et G appartiennent à $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$ donc S appartient à $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$ et

$$\left(\int S(x)^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int (F(x) + G(x))^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}}$$

En utilisant que $\|\cdot\|_{p'}$ est une norme sur $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$,

$$\left(\int S(x)^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int F(x)^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int G(x)^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ce qui donne exactement

$$\|f + g\|_{p,p'} \leq \|f\|_{p,p'} + \|g\|_{p,p'}$$

☞ Cas où $p = 1$ et $p' = \infty$.

Soit $f \in L^{1,\infty}(G)$. Alors, pour μ -presque tout x , $f^x \in L^1(G^x, \lambda^x)$.

$$\|f\|_{1,\infty} = 0 \iff \int |f^x| d\lambda^x = 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in G^{(0)}.$$

Donc $\|f\|_{1,\infty} = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

L'inégalité de Minkowski découle du fait que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1(G^x, \lambda^x)$ pour tout $x \in G^{(0)}$ et des propriétés de la borne supérieure.

☞ Cas où $p' = 1$ et $p = \infty$.

• Soit $f \in L^{\infty,1}(G)$. Alors $x \mapsto \operatorname{esssup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| \in L^1(G^{(0)}, \mu)$.

$$\|f\|_{\infty,1} = 0 \iff \int \operatorname{esssup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| d\mu(x) = 0.$$

$$\|f\|_{\infty,1} = 0 \iff \operatorname{esssup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| = 0 \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in G^{(0)}.$$

Donc $\|f\|_{\infty,1} = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque-partout.

- Soit $f, g \in L^{\infty,1}(G)$. Nous avons alors

$$\operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma) + g(\gamma)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| + \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |g(\gamma)|.$$

Puis, par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma) + g(\gamma)| \, d\mu(x) \leq \int \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |f(\gamma)| \, d\mu(x) + \int \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} |g(\gamma)| \, d\mu(x)$$

c'est-à-dire l'inégalité de Minkowski. \square

Avant de démontrer que $(L^{p,p'}, \|\cdot\|_{p,p'})$ est un espace de Banach, nous allons démontrer deux théorèmes de convergence.

Théorèmes de convergence

Théorème 6.2.1 (Convergence monotone)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que f_n tend vers f $\mu \circ \lambda$ -presque partout. Alors $\|f_n\|_{p,p'}$ tend vers $\|f\|_{p,p'}$.

Démonstration. • Cas où $p \neq \infty$.

D'après les hypothèses, pour μ -presque tout $x \in G^{(0)}$, f_n^x est mesurable. De plus, (f_n^x) est une suite croissante de fonctions mesurables et f_n^x tend simplement vers f^x . On en déduit, grâce au théorème de convergence monotone sur (G^x, λ^x) , que $F_n(x) = \int |f_n^x|^p \, d\lambda^x$ tend en croissant vers $F(x) = \int |f^x|^p \, d\lambda^x$.

Mais la suite (F_n) est à nouveau une suite croissante de fonctions mesurables positives qui tend simplement vers F , donc, si $p' \neq \infty$ le théorème de convergence monotone sur $G^{(0)}$ nous donne $\int F_n^{p'} \, d\mu \rightarrow \int F^{p'} \, d\mu$, c'est-à-dire le résultat annoncé.

Dans le cas où $p' = \infty$, nous avons également $\operatorname{ess\,sup}_{x \in G^{(0)}} F_n(x) \rightarrow \operatorname{ess\,sup}_{x \in G^{(0)}} F(x)$.

- Cas où $p = \infty$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} f_n(\gamma)$ et $F(x) = \operatorname{ess\,sup}_{\gamma \in G^x} f(\gamma)$. Comme (f_n) tend en croissant vers f , (F_n) est une suite croissante de fonctions mesurables et $F_n(x)$ tend vers $F(x)$ pour tout x .

L'utilisation du théorème de convergence monotone sur $G^{(0)}$ nous permet alors de conclure que $\int F_n(x) \, d\mu(x)$ tend vers $\int F(x) \, d\mu(x)$. \square

Théorème 6.2.2 (Convergence dominée)

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur G et f une fonction mesurable sur G telles que

- $f_n(\gamma)$ tend simplement vers $f(\gamma)$ pour $\mu \circ \lambda$ -presque tout γ .

- il existe $g \in L^{p,p'}(G)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $\mu \circ \lambda$ -presque tout γ , $|f_n(\gamma)| \leq |g(\gamma)|$

Alors

- pour tout n , $f_n \in L^{p,p'}(G)$ et $f \in L^{p,p'}(G)$.
- $\|f_n - f\|_{p,p'} \rightarrow 0$ et $\|f_n\|_{p,p'} \rightarrow \|f\|_{p,p'}$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après les hypothèses, pour μ -presque tout $x \in G^{(0)}$, nous avons :

- $f_n^x(\gamma)$ tend vers $f^x(\gamma)$ pour λ^x presque tout γ .
- $|f_n^x(\gamma)| \leq |g^x(\gamma)|$ pour λ^x presque tout γ et $g \in L^{p,p'}(G)$ donc $g^x \in L^p(G^x, \lambda^x)$.

D'après le théorème de convergence dominée usuel sur $L^p(G^x, \lambda^x)$, nous savons alors que

f_n et f appartiennent à $L^p(G^x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \left(\int |f_n^x - f^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$ et

$$F_n(x) = \left(\int |f_n^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow F(x) = \left(\int |f^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mais $|F_n(x)| \leq |G(x)|$ avec $G(x) = \left(\int |g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}$ et donc $G \in L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$.

Une nouvelle application du théorème de convergence dominée nous donne que F_n et

F appartiennent à $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$ et $\int |F_n|^{p'} d\mu \rightarrow \int |F|^{p'} d\mu$ ce qui signifie que f et f_n

appartiennent à $L^{p,p'}(G)$ et $\|f_n\|_{p,p'} \rightarrow \|f\|_{p,p'}$.

D'autre part,

$$|D_n(x)| \leq \left(\int 2^p |g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|D_n(x)| \leq 2 \left(\int |g^x|^p d\lambda^x \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$|D_n(x)| \leq 2G(x)$$

donc le même raisonnement permet de déduire que les F_n et F appartiennent à $L^{p'}(G^{(0)}, \mu)$

et $\int |D_n|^{p'} d\mu \rightarrow 0$ i.e. $\|f_n - f\|_{p,p'} \rightarrow 0$. □

Proposition 6.2.2

$(L^{p,p'}, \|\cdot\|_{p,p'})$ est un espace de Banach.

Ceci est une conséquence de résultats généraux : soit X et Y deux espaces localement compacts, π une surjection ouverte continue de Y sur X . On suppose que (X, μ) est un espace mesuré et que l'on a une mesure α^x sur les fibre $Y^x = \pi^{-1}(x)$ avec $x \in X$. $E = L^{p'}(Y, \alpha)$ est alors un champ continu d'espaces de Banach et $L^p(X, \mu, E)$ est un espace de Banach.

6.2.2 Théorème de densité

De façon usuelle, on sait que $C_c(G)$ est dense dans $L^p(G)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Nous allons démontrer un théorème analogue pour $L^{p,p'}(G)$.

Théorème 6.2.3

Soit $1 < p < +\infty$. Alors $C_c(G)$ est dense dans $L^{p,p'}(G)$.

Démonstration. Soit $f \in L^{p,p'}(G)$. En écrivant f comme combinaison linéaire de fonctions, on se ramène à démontrer le théorème pour f positive. Mais toute fonction positive est limite d'une suite croissante (h_n) de fonctions étagées mesurables positives. Comme $0 \leq h_n \leq f$, les h_n appartiennent à $L^{p,p'}(G)$. De plus, grâce au théorème de convergence monotone, $\|f - h_n\|_{p,p'}$ tend vers 0, donc f est limite dans $L^{p,p'}(G)$ de (h_n) .

Il suffit donc de prouver le théorème pour $f = \mathbf{1}_A$, où A est un ensemble mesurable. Mais G est réunion croissante d'ouverts U_n . Posons alors $A_n = A \cap U_n$. La suite $(\mathbf{1}_{A_n})$ est positive et converge simplement en croissant vers $\mathbf{1}_A$ donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\mathbf{1}_{A_n}$ tend vers $\mathbf{1}_A$ dans $L^{p,p'}(G)$.

Mais, étant donné A_n , on peut trouver un ouvert V_n tel que $A_n \subset V_n$ et $\|\mathbf{1}_{V_n \setminus A_n}\|_{p,p'}$ tend vers 0.

Il suffit donc de prouver que, pour A ouvert tel que $\mathbf{1}_A \in L^{p,p'}(G)$, il existe une suite (f_n) de fonctions continues à support compact telle que $\|f_n - \mathbf{1}_A\|_{p,p'}$ tend vers 0.

Comme G est réunion croissante d'ouverts U_n , la suite $(\mathbf{1}_{A \setminus A_n})$ où $A_n = A \cap U_n$ est une suite décroissante de fonctions positives, qui tend vers 0 et est majorée par $\mathbf{1}_A \in L^{p,p'}(G)$. Le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que $\|\mathbf{1}_{A \setminus A_n}\|_{p,p'} \rightarrow 0$ i.e.

$\int \lambda^x(A^x \setminus A_n^x) \frac{p'}{p} d\mu(x)$ tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme A est ouvert, il est σ -compact, donc il existe un compact F tel que $F \subset A$ et $\|\mathbf{1}_{A \setminus F}\|_{p,p'} \leq \varepsilon$. Il existe alors W ouvert tel que \overline{W} soit compact et $F \subset W \subset \overline{W} \subset A$.

Soit $\varphi \in C_c(G)$ telle que $\varphi(\gamma) = 1$ pour $\gamma \in F$ et $\text{Supp}(\varphi) = \overline{W}$. On a alors

$$\begin{aligned} \|\varphi - \mathbf{1}_A\|_{p,p'} &= \left(\int \left(\int_{A^x} |\varphi(\gamma) - 1|^{p'} d\lambda^x(\gamma) \right)^{\frac{p}{p'}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int \sup_{\gamma \in A^x \setminus F^x} |\varphi(\gamma) - 1|^{p'} \lambda^x(A^x \setminus F^x) \frac{p'}{p} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\gamma \in A \setminus F} |\varphi(\gamma) - 1| \|\mathbf{1}_{A \setminus F}\|_{p,p'} \\ &\leq M\varepsilon, \quad \text{où } M = \sup_{\gamma \in A \setminus F} |\varphi(\gamma) - 1| \end{aligned}$$

On construit ainsi une suite (f_n) de fonctions à support compact qui tend vers $\mathbf{1}_A$ dans $L^{p,p'}(G)$. \square

Corollaire 6.2.3

$C_c(G) \star C_c(G)$ est dense dans $(L^{p,p'}(G), \|\cdot\|_{p,p'})$.

Démonstration. Comme $C_c(G)$ est dense dans $L^{p,p'}(G)$, il suffit de prouver que toute fonction f continue à support compact est limite d'une suite de $C_c(G) \star C_c(G)$.

Soit (φ_α) une unité approchée à gauche dans $C_c(G)_+$. Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations de la démonstration de la proposition 2.2.2, nous savons que le support de $d_\alpha = \varphi_\alpha \star f - f$ est contenu dans un compact L indépendant de α et qu'il existe α_2 tel que, pour $\alpha \geq \alpha_2$, on ait $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \int \left(\int |\varphi_\alpha \star f - f|^p d\lambda^x \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) &\leq \int_{G^{(0)}} \left(\sup_{\gamma \in G^x \cap L} |f \star \varphi_\alpha - f|^p \int_{G^x \cap L} d\lambda^x \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) \\ &\leq \|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty^{p'} \int_{G^{(0)}} \lambda^x(G^x \cap L)^{\frac{p'}{p}} d\mu(x) \\ &\leq \|\varphi_\alpha \star f - f\|_\infty^{p'} \|\mathbf{1}_L\|_{p,p'}^{p'} \end{aligned}$$

donc $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_{p,p'} \leq \varepsilon \|\mathbf{1}_L\|_{p,p'}$ ce qui prouve que $\|\varphi_\alpha \star f - f\|_{p,p'}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car L est compact donc $\|\mathbf{1}_L\|_{p,p'}$ est fini. \square

6.2.3 Inégalité de Hausdorff-Young

Nous proposons ici une inégalité de Hausdorff-Young dont la démonstration est inspirée de celle de [Rus77].

Soit $p \in [1; 2]$ et p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

NOTATION. Si z est un nombre complexe non nul, on peut l'écrire $re^{i\theta}$ avec $r = |z|$. Dans la suite, nous noterons $\text{signe}(z)$ le nombre $e^{i\theta}$.

Lemme 20

Soit $f \in C_c(G)$. Alors

$$\|L(f)\|_{p'} \leq 2 \max(\|f\|_{p,p'}, \|f^*\|_{p,p'})$$

Démonstration. On peut se restreindre au cas où $\|f\|_{p,p'} \leq 1$ et $\|f^*\|_{p,p'} \leq 1$. Par ailleurs, pour $f \in C_c(G)$, $L(f) \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$ et $L(f) \in L^\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$ donc, par interpolation entre 2 et ∞ , comme $p' \in [2; +\infty]$, on a $L(f) \in L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$.

On pose tout d'abord, pour $x, y \in G^{(0)}$, $M(x, y) = \max(\|f^x\|_p, \|f_y\|_p)$ où f^x est définie sur G^x par $f^x(\gamma) = f(\gamma)$ et f_y définie sur G_y par $f_y(\gamma) = f(\gamma)$.

Comme f est continue, $(x, y) \mapsto \|f^x\|_p$ et $(x, y) \mapsto \|f_y\|_p$ sont continues et donc M est continue.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose alors $M_\varepsilon(x, y) = \max(M(x, y), \varepsilon)$. D'après ce qui précède, on définit ainsi une fonction continue sur $G^{(0)} \times G^{(0)}$.

Considérons maintenant $z \in \mathbb{C}$ et définissons f_z sur G par

$$\begin{cases} f_z(\gamma) = |f(\gamma)|^{\frac{(2-z)p}{2}} \operatorname{signe} f(\gamma) M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{-p+z\frac{p'+p}{2}} & \text{si } f(\gamma) \neq 0 \\ f_z(\gamma) = 0 & \text{si } f(\gamma) = 0 \end{cases}$$

Par construction, f_z est continue à support compact : en effet, elle est continue sur l'ensemble Z des γ tels que $f(\gamma) \neq 0$ car f et M_ε sont continues. De plus, si γ_n tend vers γ tel que $f(\gamma) = 0$, par continuité de f , $f(\gamma_n)$ tend vers $f(\gamma) = 0$. Or

$$|f_z(\gamma_n)| = |f(\gamma_n)|^{\frac{(2-\operatorname{Re}(z))p}{2}} M_\varepsilon(r(\gamma_n), s(\gamma_n))^{-p+\operatorname{Re}(z)\frac{p'+p}{2}}$$

donc $f_z(\gamma_n)$ tend vers 0 quand γ_n tend vers γ par continuité de M_ε .

D'autre part, comme f est à support compact, il en est de même pour f_z .

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_z \in C_c(G) \subset L^2(G)$.

Notons Ω l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ et considérons $z = a + ib \in \overline{\Omega}$.

$$\int |f_z(\gamma)|^2 d\mu \circ \lambda(\gamma) = \int |f(\gamma)|^{(2-a)p} M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{-2p+a(p+p')} d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

Pour tout $\gamma \in G$, la fonction $a \mapsto |f(\gamma)|^{(2-a)p} M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{-2p+a(p+p')}$ est continue, donc bornée par un certain M sur $[0; 1]$. De plus, $\operatorname{Supp}(f_z) \subset \operatorname{Supp}(f)$ pour tout z donc

$$\int |f_z(\gamma)|^2 d\mu \circ \lambda(\gamma) \leq M \int_{\operatorname{Supp}(f)} d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

ce qui prouve que $z \mapsto \|f_z\|_2$ est bornée sur $\overline{\Omega}$.

Soit maintenant $g \in C_c(G) \star C_c(G)$ tel que $\|L(g)\|_p \leq 1$. D'après la proposition 6.1.1, $L(C_c(G) \star C_c(G))$ est dense dans $L^p(\mathcal{M}, \tau)$.

Posons $B = L(g)$ et écrivons sa décomposition polaire $B = V|B|$. Définissons

$$B_z = V|B|^{\frac{(2-z)p}{2}} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}$$

Pour tout $z = a + ib \in \overline{\Omega}$, on peut dire que $|B_z|^2$ est unitairement équivalent à $|B|^{(2-a)p}$. Comme $B \in L^p(\mathcal{M}, \tau) \cap L^\infty(\mathcal{M}, \tau)$, on en déduit, grâce au lemme 19 que $B \in L^{(2-a)p}(\mathcal{M}, \tau)$ car $p \leq (2-a)p \leq 2p$, et donc $B_z \in L^2(\mathcal{M}, \tau)$.

De plus, $z \mapsto B_z$ est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. En effet, $z \in \overline{\Omega}$ donc $0 \leq a \leq 1$ et donc $1 \leq 2-a \leq 2$. On en déduit que $\frac{p}{2} \leq \frac{(2-a)p}{2} \leq p$. Or, sur $\left[\frac{p}{2}; p\right]$, $x \mapsto |B|^x$ et $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ sont continues, d'où la continuité de $z \mapsto B_z$ sur $\overline{\Omega}$.

Mais $\left[\frac{p}{2}; p\right]$ est un compact de \mathbb{R} , donc $z \mapsto B_z$ est aussi bornée sur $\overline{\Omega}$.

Comme $L(f_z)$ et B_z sont appartenent à $L^2(\mathcal{M}, \tau)$, on peut poser $F(z) = \operatorname{Tr}(L(f_z)B_z)$. De plus, l'inégalité de Hölder nous donne alors

$$|F(z)| \leq \|L(f_z)\|_2 \|B_z\|_2 < +\infty \quad \text{pour tout } z \in \overline{\Omega}.$$

Mais $\|L(f_z)\|_2$ et $\|B_z\|_2$ sont bornées sur $\overline{\Omega}$ donc F est bornée sur $\overline{\Omega}$.

- F est continue sur $\overline{\Omega}$
- F est holomorphe sur Ω .

Afin d'appliquer le théorème des 3 lignes, il nous faut nous intéresser à $F(ib)$ et $F(1+ib)$.

☞

$$\begin{aligned} |f_{ib}(\gamma)| &= |f(\gamma)|^p M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{-p} \quad \text{si } f(\gamma) \neq 0 \\ &\leq |f(\gamma)|^p \|f^{r(\gamma)}\|_p^{-p} \quad \text{si } f(\gamma) \neq 0 \end{aligned}$$

car $M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma)) \geq \|f^{r(\gamma)}\|_p$ pour tout $\gamma \in G$.

Posons $T = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) > \varepsilon, \|f^{r(\gamma)}\|_p = 0\}$,

$S = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) > \varepsilon, \|f^{r(\gamma)}\|_p > \varepsilon\}$,

et $R = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) = \varepsilon\}$.

Nous avons alors, pour $x \in G^{(0)}$,

$$\begin{aligned} \int |f_{ib}| d\lambda^x &\leq \int_S |f(\gamma)|^p \|f^x\|_p^{-p} d\lambda^x(\gamma) + \int_T |f(\gamma)|^p \varepsilon^{-p} d\lambda^x(\gamma) + \int_R |f(\gamma)|^p \varepsilon^{-p} d\lambda^x(\gamma) \\ &\leq \|f^x\|_p^p \|f^x\|_p^{-p} + 0 + \varepsilon^p \varepsilon^{-p} = 2 \end{aligned}$$

De même, on obtient $\int |f_{ib}^*| d\lambda^x \leq 2$.

Mais $|F(ib)| = \text{Tr}(L(f_{ib})B_{ib}) \leq \|L(f_{ib})\|_\infty \|B_{ib}\|_1$.

Or $\|B_{ib}\|_1 = \|B\|_p^p \leq 1$ et $\|L(f_{ib})\|_\infty = \|L(f_{ib})\| \leq \|f_{ib}\|_I$ donc, d'après les calculs précédents :

$$\|L(f_{ib})\|_\infty \leq 2$$

Finalement, $|F(ib)| \leq 2$.

☞ $|F(1+ib)| \leq \|L(f_{1+ib})\|_2 \|B_{1+ib}\|_2$.

Mais $\|B_{1+ib}\|_2 = \|B\|_p^p \leq 1$ et

$$\|L(f_z)\|_2^2 = \|f_z\|_2^2 = \int |f(\gamma)|^p M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{p'-p} d\mu \circ \lambda(\gamma)$$

Pour majorer cette intégrale, nous allons à nouveau travailler avec une partition de G : on définit

Posons $T = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) > \varepsilon, \|f^{r(\gamma)}\|_p = M(r(\gamma), s(\gamma))\}$,

$S = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) > \varepsilon, \|f_{s(\gamma)}\|_p = M(r(\gamma), s(\gamma))\}$,

et $R = \{\gamma \in G : M(r(\gamma), s(\gamma)) = \varepsilon\}$.

$$\begin{aligned}
\int_R |f(\gamma)|^p M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{p'-p} d\mu \circ \lambda(\gamma) &\leq \varepsilon^{p-p'} \|f\|_p^p \\
\int_T |f(\gamma)|^p M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{p'-p} d\mu \circ \lambda(\gamma) &= \int_T |f(\gamma)|^p \|f^x\|_p^{p'-p} d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\
&= \int_T \|f^x\|_p^{p'} d\lambda^x(\gamma) d\mu(x) \\
&= \|f\|_{p,p'}^p \leq 1 \\
\int_S |f(\gamma)|^p M_\varepsilon(r(\gamma), s(\gamma))^{p'-p} d\mu \circ \lambda(\gamma) &= \int_S |f(\gamma)|^p \|f_x\|_p^{p'-p} d\lambda_x(\gamma) d\mu(x) \\
&= \int_T \|f_x\|_p^{p'} d\lambda_x(\gamma) d\mu(x) \\
&= \|f^*\|_{p,p'}^p \leq 1
\end{aligned}$$

donc, finalement,

$$\|L(f_z)\|_2 \leq 2 + \|f\|_p^p \varepsilon^{p-p'}$$

Choisissons maintenant ε tel que $\|f\|_p^p \varepsilon^{p-p'} \leq 1$.

En appliquant le théorème des trois lignes, on obtient, pour $z = \frac{2}{p'}$,

$$\left| F\left(\frac{2}{p'}\right) \right| \leq 2^{1-\frac{2}{p'}} \times \sqrt{3}^{\frac{2}{p'}}$$

Mais $\sqrt{3} \leq 2$ donc

$$\left| F\left(\frac{2}{p'}\right) \right| \leq 2$$

Le calcul de $F\left(\frac{2}{p'}\right)$ donne

$$F\left(\frac{2}{p'}\right) = \text{Tr}\left(L(f_{\frac{2}{p'}})B_{\frac{2}{p'}}\right)$$

Or, pour γ tel que $f(\gamma) \neq 0$, $f_{\frac{2}{p'}}(\gamma) = |f(\gamma)| \text{signe } f(\gamma) = f(\gamma)$ et l'égalité est vraie pour tout $\gamma \in G$.

D'autre part, $B_{\frac{2}{p'}} = V|B| = B$ donc

$$F\left(\frac{2}{p'}\right) = \text{Tr}(L(f)L(g))$$

Comme, d'après le lemme 18,

$$\|L(f)\|_{p'} = \sup_{\|L(g)\|_p \leq 1, g \in C_c(G) \star C_c(G)} \text{Tr}(L(f)L(g))$$

on obtient $\|L(f)\|_{p'} \leq 2$, ce qui prouve le lemme. \square

Soit (G_1, λ_1, μ_1) et (G_2, λ_2, μ_2) deux groupoïdes mesurés. On définit alors le groupoïde $(G_1 \times G_2, \lambda_1 \otimes \lambda_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. À partir de deux fonctions f_i définies sur G_i , on définit $f_1 \otimes f_2$ par $f_1 \otimes f_2(\gamma_1, \gamma_2) = f_1(\gamma_1)f_2(\gamma_2)$. En particulier, $L^2(G_1 \times G_2, (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ (\lambda_1 \otimes \lambda_2)) = L^2(G_1, \mu_1 \circ \lambda_1) \otimes L^2(G_2, \mu_2 \circ \lambda_2)$. On note L, L_1 et L_2 les représentations opérateurs de convolution sur respectivement $C_c(G_1 \otimes G_2), C_c(G_1)$ et $C_c(G_2)$.

Lemme 21

Soit $f_1 \in C_c(G_1)$ et $f_2 \in C_c(G_2)$. Alors, pour $1 \leq p' \leq 2$, $\|L(f_1 \otimes f_2)\|_{p'} = \|L_1(f_1)\|_{p'} \|L_2(f_2)\|_{p'}$ et $\|f_1 \otimes f_2\|_{p,p'} \leq \|f_1\|_{p,p'} \|f_2\|_{p,p'}$

Démonstration. $L(f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2) = (f_1 \star g_1) \otimes (f_2 \star g_2)$ donc $L(f_1 \otimes f_2) = L_1(f_1) \otimes L_2(f_2)$; d'où la première égalité.

Posons $I = \int \left(\int \int |f_1(\gamma_1)|^p |f_2(\gamma_2)|^p d\lambda_1^{x_1}(\gamma_1) d\lambda_2^{x_2}(\gamma_2) \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2)$

Les calculs donnent

$$I = \int \left(\int |f_1(\gamma_1)|^p d\lambda_1^{x_1}(\gamma_1) \right)^{\frac{p'}{p}} \left(\int |f_2(\gamma_2)|^p d\lambda_2^{x_2}(\gamma_2) \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2)$$

$$I = \int \left(\int |f_1(\gamma_1)|^p d\lambda_1^{x_1}(\gamma_1) \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu_1(x_1) \int \left(\int |f_2(\gamma_2)|^p d\lambda_2^{x_2}(\gamma_2) \right)^{\frac{p'}{p}} d\mu_2(x_2)$$

d'où l'égalité annoncée. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.2.4 (Hausdorff-Young)

Soit $1 \leq p \leq 2$ et p' tel que $p^{-1} + p'^{-1} = 1$; soit $f \in C_c(G)$. Alors

$$\|L(f)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$$

Démonstration. D'après le lemme 21, $\underbrace{f^* \otimes f \otimes \dots \otimes f^* \otimes f}_{n \text{ fois}} \in L^{p,p'}(\otimes_n G)$ et

$$\|f^* \otimes f \otimes \dots \otimes f^* \otimes f\|_{p,p'} = \|f^*\|_{p,p'}^n \|f\|_{p,p'}^n$$

D'autre part, $(f^* \otimes f \otimes \dots \otimes f^* \otimes f)^* = f \otimes f^* \otimes \dots \otimes f \otimes f^*$ et

$$\|f \otimes f^* \otimes \dots \otimes f \otimes f^*\|_{p,p'} = \|f^*\|_{p,p'}^n \|f\|_{p,p'}^n$$

donc le maximum de ces deux normes est égal à $\|f^*\|_{p,p'}^n \|f\|_{p,p'}^n$.

Comme $f^* \otimes f \otimes \cdots \otimes f^* \otimes f \in C_c(\otimes_n G \times G)$, on peut appliquer le lemme 20 qui nous donne

$$\|L(f^* \otimes f \otimes \cdots \otimes f^* \otimes f)\|_{p'} \leq 2 \|f\|_{p,p'}^n \|f^*\|_{p,p'}^n$$

Par ailleurs, $\|L(f^* \otimes f \otimes \cdots \otimes f^* \otimes f)\|_{p'} = \|L(f)\|_{p'}^{2n}$ car $\|L(f)\|_{p'} = \|L(f^*)\|_{p'}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|L(f)\|_{p'}^{2n} &\leq 2 \|f\|_{p,p'}^n \|f^*\|_{p,p'}^n && \text{et donc} \\ \|L(f)\|_{p'} &\leq 2^{\frac{1}{2n}} \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}} \end{aligned}$$

Faisons alors tendre n vers $+\infty$. $2^{\frac{1}{2n}}$ tend alors vers 1 et on obtient

$$\|L(f)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$$

□

Corollaire 6.2.4 (Hausdorff-Young)

Soit $1 \leq p \leq 2$ et p' tel que $p^{-1} + p'^{-1} = 1$.

L'application $L : (C_c(G), \|\cdot\|_{p,p'}) \rightarrow L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$ se prolonge en une application, encore notée L , de $(L^{p,p'}(G), \|\cdot\|_{p,p'})$ dans $L^{p'}(\mathcal{M}, \tau)$.

Pour $f \in L^{p,p'}(G)$, on a de plus

$$\|L(f)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$$

Démonstration. Soit $f \in L^{p,p'}(G)$. Comme $C_c(G)$ est dense dans $L^{p,p'}(G)$, il existe une suite (f_n) d'éléments de $C_c(G)$ qui converge vers f dans $L^{p,p'}(G)$. On a alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\|L(f_n)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f_n\|_{p,p'} \|f_n^*\|_{p,p'}}$$

Le second membre tend vers $\sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$. Par ailleurs, la suite $(L(f_n))_n$ est de Cauchy. En effet, d'après l'inégalité démontrée précédemment, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|L(f_n) - L(f_m)\|_{p'} = \|L(f_n - f_m)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f_n - f_m\|_{p,p'} \|(f_n - f_m)^*\|_{p,p'}}$$

et les suites (f_n) et (f_n^*) sont convergentes donc de Cauchy. Mais $L^{p'}(\mathcal{M})$ est un espace de Banach, donc la suite $(L(f_n))_n$ converge dans $L^{p'}(\mathcal{M})$.

Posons alors $L(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(f_n)$. On peut démontrer que cette limite ne dépend pas de la suite (f_n) choisie et nous avons, par passage à la limite,

$$\|L(f)\|_{p'} \leq \sqrt{\|f\|_{p,p'} \|f^*\|_{p,p'}}$$

□

Annexe A

Rappels sur les opérateurs non bornés

A.1 Opérateurs non bornés

Rappelons ici quelques éléments de la théorie des opérateurs non bornés. On pourra, pour plus de détails, se reporter à [RS80] ou [Ka76]. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert.

A.1.1 Définitions générales

Commençons tout d'abord par rappeler la définition d'un opérateur non borné et de son domaine.

Définition A.1.1

Un opérateur (non borné) T sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application linéaire d'un sous-espace de \mathcal{H} noté $\mathcal{D}(T)$ dans \mathcal{H} . Le sous-espace $\mathcal{D}(T)$ est appelé le domaine de l'opérateur T et on dit que l'opérateur est densément défini si $\mathcal{D}(T)$ est dense dans \mathcal{H} .

Une notion importante dans l'étude des opérateurs non bornés est alors celle de graphe. On munit l'espace $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ du produit scalaire $((x_1, y_1)|(x_2, y_2)) \stackrel{\text{déf}}{=} (x_1|x_2) + (y_1|y_2)$

Définition A.1.2

Le graphe d'un opérateur T est le sous-espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, noté $\Gamma(T)$, et défini comme suit :

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx); x \in \mathcal{D}(T)\}$$

Le graphe d'un opérateur permet de définir la notion d'extension d'un opérateur T comme étant un opérateur T_1 tel que $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$. On écrit alors $T \subset T_1$.

Soit T et S deux opérateurs sur \mathcal{H} . On peut définir $T + S$ et TS comme des opérateurs sur \mathcal{H} avec pour domaines respectifs :

$$D(T + S) = D(T) \cap D(S)$$
$$D(TS) = \{\xi \in D(S) : S\xi \in D(T)\}$$

Ces opérations sont associatives, donc $T + S + R$ et TSR sont des opérateurs bien définis. On a,

$$\forall R, S, T : (S + T)R = SR + TR \text{ et } R(S + T) \supseteq RS + RT$$

Dans le deuxième cas, l'égalité est vraie si $D(R) = \mathcal{H}$.

A.1.2 Opérateurs fermés, fermables...

Définition A.1.3

Un opérateur T sur \mathcal{H} est fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $H \oplus H$.

Un opérateur T sur \mathcal{H} est préfermé ou fermable s'il admet une extension fermée.

Remarquons que tout opérateur préfermé admet une plus petite extension fermée, appelée sa fermeture, et notée $[T]$ ou \overline{T} . Par ailleurs, une bonne caractérisation des opérateurs préfermés est donnée par la proposition suivante

Proposition A.1.1

$\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si $\overline{\Gamma(T)} \cap \{(0; z) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\} = \{(0; 0)\}$.

Remarquons également qu'un opérateur T est fermé si et seulement si $\mathcal{D}(T)$ est complet pour la norme $\|x\|_T = \|Tx\| + \|x\|$.

Proposition A.1.2

Si T est fermable, alors $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$

On peut également définir, comme dans le cas borné, la notion d'opérateur adjoint.

A.1.3 Adjoint

Définition A.1.4

Soit T un opérateur densément défini sur \mathcal{H} . On pose

$$\mathcal{D}(T^*) = \{x \in \mathcal{H} : \exists z \in \mathcal{D}(T), \forall y \in \mathcal{D}(T), (Ty|x) = (y|z)\}$$

Pour chaque $x \in \mathcal{D}(T^*)$, on pose $T^*x = z$; T^* est alors appelé l'adjoint de T et $\mathcal{D}(T^*)$ est son domaine.

En utilisant le lemme de Riesz, on obtient alors une caractérisation du domaine de l'adjoint :

Proposition A.1.3

$x \in \mathcal{D}(T^*)$ si et seulement si $|(Ty|x)| \leq C \|y\|$ pour tout $y \in \mathcal{D}(T)$

Remarquons

- que si $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$
- que le domaine de T^* peut ne pas être dense et peut même être $\{0\}$.

Il existe un lien très fort entre la notion d'adjoint et le caractère préfermé d'un opérateur, comme cela apparaît dans le théorème suivant

Théorème A.1.1

Soit T un opérateur densément défini sur \mathcal{H} . Alors

- a) T^* est fermé.
- b) T est préfermé si et seulement si $\mathcal{D}(T^*)$ est dense, auquel cas $\overline{T} = T^{**}$
- c) Si T est préfermé, alors $(\overline{T})^* = T^*$

D'autre part, si T , S et TS sont densément définis, alors $(TS)^* \supseteq S^*T^*$, l'égalité ayant lieu si T est fermé et défini partout.

Par ailleurs, on peut également définir la notion d'opérateur symétrique et d'opérateur auto-adjoint comme suit

Définition A.1.5

Un opérateur T densément défini sur \mathcal{H} est dit symétrique si $T \subset T^*$.

Il est dit auto-adjoint si $T = T^*$, i.e. si T est symétrique et $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

Si T est un opérateur fermé autoadjoint, un sous-ensemble \mathcal{D} de $\mathcal{D}(T)$ est appelé domaine essentiel (ou parfois cœur) pour T si la fermeture de $T|_{\mathcal{D}}$ est égale à T .

On peut énoncer un critère pour qu'un opérateur soit auto-adjoint

Théorème A.1.2

Soit T un opérateur symétrique sur \mathcal{H} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) T est auto-adjoint
- b) T est fermé et $\text{Ker}(T^* + i) = \text{Ker}(T^* - i) = \{0\}$
- c) $\text{Im}(T + i) = \text{Im}(T - i) = \mathcal{H}$

Ainsi, en particulier, un opérateur autoadjoint est fermé.

A.1.4 Théorie spectrale

Comme dans la cas borné, on définit la notion de résolvante

Définition A.1.6

Soit T un opérateur fermé sur \mathcal{H} . Un nombre complexe λ est dans l'ensemble de la résolvante, $\rho(T)$, si $\lambda I - T$ est une bijection de $\mathcal{D}(T)$ sur \mathcal{H} , d'inverse borné. Si $\lambda \in \rho(T)$, $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T en λ .

Théorème A.1.3

Soit T un opérateur fermé densément défini. Alors $\rho(T)$ est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C} , sur lequel $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ est analytique. De plus, $\{R_\lambda(T), \lambda \in \rho(T)\}$ est une famille d'opérateurs bornés qui commutent et satisfont

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\mu(T)R_\lambda(T)$$

Nous allons maintenant énoncer les différentes formes du théorème spectral pour les opérateurs non bornés, valables lorsque \mathcal{H} est séparable.

Théorème A.1.4

Soit A un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} . Alors il existe un espace mesuré (X, μ) avec μ une mesure finie, un opérateur unitaire $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(X, \mu)$ et une fonction f à valeurs réelles sur X , finie presque-partout, tels que

- a) $x \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si $\xi \mapsto f(\xi)(Ux)(\xi)$ est dans $L^2(X, \mu)$
- b) Si $\varphi \in U(\mathcal{D}(A))$, alors $(UAU^{-1}\varphi)(\xi) = f(\xi)\varphi(\xi)$

Pour A comme précédemment et g mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, on définit $g(A)$ par $g(A) = U^{-1}M(g \circ f)U$.

Théorème A.1.5

Soit A un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} . Alors il existe une unique application $\widehat{\phi}$ de l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

- a) $\widehat{\phi}$ est un \star -homomorphisme algébrique
- b) $\widehat{\phi}$ est normiquement continue, avec $\left\| \widehat{\phi}(h) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|h\|_\infty$
- c) Soit (h_n) une suite de fonctions boréliennes bornées telles que

- $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ quel que soit x
- $|h_n(x)| \leq |x|$ pour tous n et x .

Alors, pour tout $y \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{\phi}(h_n)y = Ay$

- d) Si $h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h(x)$ ponctuellement et si la suite $(\|h_n\|_\infty)$ est bornée, alors $\widehat{\phi}(h_n)$ tend vers $\widehat{\phi}(h)$ fortement

De plus,

- e) Si $Ay = \lambda y$, alors $\widehat{\phi}(h)y = h(\lambda)y$
- f) Si $h \geq 0$, alors $\widehat{\phi}(h) \geq 0$

Pour la dernière version du théorème, nous avons tout d'abord besoin de définir des projections particulières :

Définition A.1.7

On pose $P_\Omega = \xi_\Omega(A)$, où ξ_Ω est la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}$. Alors

- a) P_Ω est une projection orthogonale.
- b) $P_\emptyset = 0$ et $P_{]-\infty; +\infty[} = I$.

- c) Si $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ avec $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ si $n \neq m$, alors P_Ω est égal à la limite forte de $\sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}$ quand $N \rightarrow +\infty$

- d) $P_{\Omega_1}P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$

Une telle famille est appelée une mesure projectorielle

Pour $x \in \mathcal{H}$, $(x, P_\Omega x)$ est une mesure de Borel bien définie sur \mathbb{R} , que l'on note $d(x, P_\lambda x)$ comme dans l'annexe 1.

En suivant les notations, on notera symboliquement $g(A) = \int g(\lambda) dP_\lambda$ l'opérateur $g(A)$ défini sur $D_g = \{x : \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d(x, P_\lambda x) < +\infty\}$ par

$$(x, g(A)x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d(x, P_\lambda x)$$

On a alors

Théorème A.1.6

Il existe une correspondance bijective entre les opérateurs A auto-adjoints et les mesures projectorielles $\{P_\Omega\}$ sur \mathcal{H} , la correspondance étant donnée par

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda$$

Si g est une fonction de Borel à valeurs réelles sur \mathbb{R} , alors $g(A) = \int g(\lambda) dP_\lambda$ défini sur D_g est auto-adjoint. Si g est borné, alors $g(A)$ coïncide avec le $\widehat{\phi}(G)$ du théorème précédent.

Pour démontrer le théorème de décomposition polaire, on peut utiliser la notion de forme quadratique. On sait que, dans le cas borné, il existe une bijection entre les formes quadratiques bornées et les opérateurs bornés, i.e. toute application sesquilinéaire $q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $|q(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$ est de la forme $q(x, y) = (Ax|y)$ pour un certain opérateur A borné. Intéressons nous alors au cas non borné.

A.1.5 Formes quadratiques

Définition A.1.8

- 1) Une forme quadratique est une application $q : \mathcal{Q}(q) \times \mathcal{Q}(q) \rightarrow \mathbb{C}$, où $\mathcal{Q}(q)$ est un sous-espace vectoriel dense de \mathcal{H} appelé le domaine de q , et telle que pour $x, y \in \mathcal{Q}(q)$, $x \mapsto q(x, y)$ est linéaire et $y \mapsto q(x, y)$ est antilinéaire.
- 2) Si $q(x, y) = \overline{q(y, x)}$, on dit que q est symétrique.
- 3) Si $q(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{Q}(q)$, q est dite positive.
- 4) S'il existe M tel que $q(x, x) \geq -M \|x\|^2$, on dit que q est semi-bornée.

Par analogie avec les opérateurs fermés, on définit les formes quadratiques fermées comme suit

Définition A.1.9

Soit q une forme quadratique semi-bornée avec $q(x, x) \geq -M \|x\|^2$. On dit que q est fermée si $\mathcal{Q}(q)$ est complet pour la norme

$$\|x\|_{+1} = \sqrt{q(x, x) + (M + 1) \|x\|^2}$$

Si q est fermée et $D \subset \mathcal{Q}(q)$ est dense dans $\mathcal{Q}(q)$ pour $\|\cdot\|_{+1}$, alors D est appelé un domaine essentiel (ou un cœur) pour q .

Théorème A.1.7

Si q est une forme quadratique semi-bornée fermée, alors q est associée à un unique opérateur autoadjoint A par

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(A), (Ax|y) = q(x, y)$$

Il faut bien distinguer les formes quadratiques semi-bornées et les opérateurs symétriques semi-bornés.

A.1.6 Décomposition polaire des opérateurs fermés

De la même façon que dans le cas des opérateurs bornés, on peut parler de décomposition polaire d'un opérateur non borné. Le théorème est le suivant

Théorème A.1.8

Soit T un opérateur densément défini fermé sur \mathcal{H} . Alors T admet une décomposition polaire $T = U|T|$ où $|T|$ est un opérateur autodjoint positif tel que $\mathcal{D}(|T|) = \mathcal{D}(T)$ et U une isométrie partielle avec espace (ou projecteur) initial $\text{Supp}(T) = (\text{Ker}T)^\perp$ et espace (ou projecteur) final $\overline{\text{Im}T}$.

Cette décomposition est unique si on suppose en plus que $\text{Ker}(|T|) = \text{Ker}(T)$.

A.1.7 Somme forte, produit fort**Définition A.1.10**

Soit S et T deux opérateurs fermés densément définis. Si $T + S$ (resp. TS) est préfermé et densément défini, alors la fermeture $[T + S]$ (resp. $[ST]$) est appelée la somme forte de S et T (resp. le produit fort de S et T).

Définition A.1.11

On peut définir la norme d'un opérateur T défini partout sur \mathcal{H} , borné ou non, par

$$\|T\| = \sup\{\|T\xi\| \mid \|\xi\| \leq 1\}$$

On a alors $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ et $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$

A.2 Opérateurs affiliés

Dans l'article de [Te] on trouve :

Définition A.2.1

Un opérateur T sur \mathcal{H} est dit affilié à \mathcal{M} si

$$\forall S \in \mathcal{M}' : ST \subset TS$$

On note $T \eta \mathcal{M}$ au lieu d'écrire T est affilié à \mathcal{M} .

Remarque A.2.1

- 1) Si $T\eta\mathcal{M}$ et $S\eta\mathcal{M}$, alors $(T + S)\eta\mathcal{M}$ et $TS\eta\mathcal{M}$.
- 2) Si T est préfermé (resp. densément défini) et si $T\eta\mathcal{M}$, alors $[T]\eta\mathcal{M}$ (resp. $T^*\eta\mathcal{M}$).
- 3) Si T est un opérateur fermé densément défini de décomposition polaire $T = U|T|$, alors $T\eta\mathcal{M}$ ssi $U \in \mathcal{M}$ et $|T|\eta\mathcal{M}$.

On note $\overline{\mathcal{M}}$ l'ensemble des opérateurs densément définis, fermés et affiliés à \mathcal{M} .

Théorème A.2.1 (calcul fonctionnel continu)

Soit A un opérateur borné autoadjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors il existe une unique application ϕ_A de $C(\sigma(A))$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

a) ϕ_A est un \star -homomorphisme algébrique i.e.

$$\phi_A(fg) = \phi(f)\phi(g) \quad \phi_A(\lambda f) = \lambda\phi(f)$$

$$\phi_A(1) = I \quad \phi_A(\overline{f}) = \phi_A(f)^*$$

- b) ϕ_A est continue i.e. $\|\phi_A(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C \|f\|_\infty$
- c) Notons $i_{\sigma(A)}$ la fonction égale à l'identité sur $\sigma(A)$. Alors $\phi_A(i_{\sigma(A)}) = A$.
De plus, ϕ_A a les propriétés suivantes :
- d) Si $A\xi = \lambda\xi$, alors $\phi_A(f)\xi = f(\lambda)\xi$
- e) $\sigma(\phi_A(f)) = f(\sigma(A))$
- f) Si $f \geq 0$, alors $\phi(f) \geq 0$
- g) $\|\phi_A(f)\| = \|f\|_\infty$

On note alors $f(A) = \phi_A(f)$.

Annexe B

Rappels sur les algèbres de von Neumann

B.1 Algèbres de von Neumann

Nous commençons par rappeler la définition du prédual d'un algèbre de von Neumann et quelques caractérisations.

B.1.1 Topologie ultrafaible

Une définition

Outre les topologies normiques, fortes et faibles, on peut définir, sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, une topologie dite ultrafaible (ou σ -faible). La définition rappelée ici est celle que l'on trouve par exemple dans [Di69].

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'éléments de \mathcal{H} telles que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < +\infty.$$

Alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} (Tx_i|y)$ est absolument convergente et la fonction $T \mapsto \left| \sum_{i=1}^{\infty} (Tx_i|y_i) \right|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Définition B.1.1

L'ensemble des semi-normes ci-dessus définit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ une topologie localement convexe séparée, appelée topologie ultrafaible.

Il est important de noter que cette topologie n'est pas compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Par contre, les applications $S \mapsto ST$, $T \mapsto TS$ et $T \mapsto T^*$ sont ultrafaiblement continues.

Prédual

Tout d'abord, étant donnés $x, y \in \mathcal{H}$, on note $\omega_{x,y}$ la forme linéaire définie par :

Pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\omega_{x,y}(T) = (Tx|y)$.

On la note ω_x si $x = y$.

L'ensemble des formes linéaires faiblement continues sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, noté $\mathcal{L}(\mathcal{H})_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$, dont l'adhérence dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ au sens de la norme est notée $\mathcal{L}(\mathcal{H})_\star$.

On peut démontrer ([Di69]) que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est le dual de l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(\mathcal{H})_\star$ pour la forme bilinéaire induite sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})_f \times \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par la forme bilinéaire canonique sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})^* \times \mathcal{L}(\mathcal{H})$; c'est pourquoi $\mathcal{L}(\mathcal{H})_\star$ est appelé prédual de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

On peut également prouver que les formes linéaires de $\mathcal{L}(\mathcal{H})_\star$ sont ultrafaiblement continues.

Plus généralement, on a le théorème suivant :

Théorème B.1.1 ([Di69])

Soit \mathcal{F} un sous-espace vectoriel ultrafaiblement fermé de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, \mathcal{F}^* son dual et φ une forme linéaire sur \mathcal{F} .

1) φ est ultrafaiblement continue si et seulement si $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{x_i, y_i}$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < +\infty$$

2) Si on note \mathcal{F}_f (resp. \mathcal{F}_\star) l'ensemble des formes linéaires faiblement (resp. ultrafaiblement) continues sur \mathcal{F} , alors \mathcal{F} est le dual de l'espace vectoriel normé \mathcal{F}_\star pour la forme bilinéaire induite sur $\mathcal{F}_f \times \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par la forme bilinéaire canonique sur $\mathcal{F}^* \times \mathcal{F}$.

On dit que \mathcal{F}_\star est le prédual de \mathcal{F} .

Signalons alors une première description de $\mathcal{M}_{\star+}$: soit φ une forme linéaire positive sur \mathcal{M} .

Définition B.1.2

φ est dite normale si, pour tout ensemble filtrant croissant $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_+$ de borne supérieure $T \in \mathcal{M}_+$, $\varphi(T)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathcal{F})$.

G. K. Pedersen donne quant à lui la définition suivante pour une forme linéaire bornée :

Définition B.1.3 ([Pe79] 3.6)

Une forme linéaire bornée φ sur \mathcal{M} est normale si, pour toute suite bornée croissante (T_i) d'éléments autoadjoints de \mathcal{M} avec $T = \lim_{i \rightarrow +\infty} T_i$, la suite $(\varphi(T_i))$ converge vers $\varphi(T)$.

Ceci est équivalent à dire que, pour toute suite (T_i) bornée décroissante de limite 0 dans \mathcal{M}_+ , $(\varphi(T_i))$ converge vers 0.

Il est intéressant de faire le lien entre les formes ultrafaiblement continues et les formes normales, ce qui est fait avec les théorèmes suivants

Théorème B.1.2 ([Di69] I.4.2, théorème 1)

Soit φ une forme linéaire positive sur \mathcal{M} .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) φ est normale.

ii) φ est ultrafaiblement continue.

iii) $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{x_i}$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$.

Toute forme linéaire ultrafaiblement continue sur \mathcal{M} est combinaison linéaire de formes linéaires positives normales.

et

Théorème B.1.3 ([Pe79] theorem 3.6.4)

Soit φ une forme linéaire bornée sur \mathcal{M} . Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) φ est normale.

ii) φ est faiblement continue sur la boule unité de \mathcal{M} .

iii) φ est ultrafaiblement continue.

B.1.2 W^* -produit croisé

Soit (\mathcal{M}, A, α) un W^* -système dynamique, c'est-à-dire la donnée d'une algèbre de von Neumann \mathcal{M} , d'un groupe commutatif A et d'une action $\alpha : A \mapsto \text{Aut}(\mathcal{M})$ continue pour la topologie de la convergence ponctuelle faible i.e. pour tout $T \in \mathcal{M}$, $\alpha(T) : A \mapsto \mathcal{M}$ est σ -faiblement continue.

Rappelons tout d'abord la définition ([Pe79] 7.10) d'un W^* -produit croisé.

Définition B.1.4

Supposons que \mathcal{M} est représentée sur un espace hilbertien \mathcal{H} séparable. Il existe alors un unique C^* -système dynamique (\mathcal{A}, A, α) séparable et une représentation π \mathcal{A} -invariante de \mathcal{A} telle que $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})''$.

Posons par ailleurs $(\tilde{\pi}(x)\xi)(t) = \pi(\alpha_{t^{-1}}(x))\xi(t)$ pour $x \in \mathcal{A}$, $t \in A$ et $\xi \in \mathcal{H}$.

On définit alors le produit croisé $\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} A$ comme étant le bicommutant de $(\tilde{\pi} \times V)(\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} A)$ dans $\mathcal{L}(L^2(A, \mathcal{H}))$.

Le W^* -produit croisé ci-avant est en fait l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs de la forme $\iota(T)$, $T \in \mathcal{M}$ et V_t , $t \in A$, où

$$(\iota(T)\xi)(s) = \alpha_{s^{-1}}(T)\xi(s), \quad (V_t\xi)(s) = \xi(t^{-1}s)$$

Rappelons alors la définition d'un A -produit :

Définition B.1.5

Une algèbre de von Neumann \mathcal{N} est un A -produit si

1. Il existe une représentation unitaire $V : t \mapsto V_t$ de A telle que $V(A) \subset \mathcal{N}$

2. Il existe un homomorphisme $\chi \mapsto \theta_\chi$ de \widehat{A} dans $\text{Aut}(\mathcal{N})$ tel que $(\mathcal{N}, \widehat{A}, \theta)$ soit un W^* -système dynamique vérifiant $\theta_\chi(V_s) = (t, \chi)V_t$ pour tous $t \in G$ et $\chi \in \widehat{A}$

Le théorème de Landstadt ([Pe79], Theorem 7.10.4.) sera utile pour identifier le produit croisé d'une algèbre de von Neumann de groupoïde par un groupe abélien.

Théorème B.1.4 (théorème de Landstadt)

Une algèbre de von Neumann \mathcal{N} est un A -produit pour un groupe abélien A si et seulement s'il existe un W^* -système dynamique (\mathcal{M}, A, α) tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_\alpha A$. Le triplet (\mathcal{M}, A, α) est unique à isomorphisme covariant près et $\iota(\mathcal{M})$ est l'algèbre des point-fixes pour \widehat{A} dans \mathcal{N} , lorsque ι vérifie $\iota \circ \alpha_t = V_t \iota(\cdot) V_{-t}$, $t \in A$.

Les conditions du théorème étant remplies, l'action θ associée au A -produit \mathcal{N} est appelée l'action duale de \widehat{A} dans $\mathcal{M} \rtimes_\alpha A$.

B.2 Algèbre de von Neumann décomposable

Nous allons ici nous intéresser au cas d'une algèbre de von Neumann décomposable.

Nous considérerons un espace X borélien localement compact à base dénombrable (donc un espace standard au sens de [Di69] (II.1.1)) muni d'une mesure μ σ -finie. Afin de définir les champs d'algèbres de von Neumann, commençons par rappeler la notion de champ de vecteurs mesurable et de champ mesurable d'espaces hilbertiens ([Di69] (II.1)) On commence tout d'abord par définition la notion de champ de vecteurs et de champ d'espaces hilbertiens.

Définition B.2.1

On appelle champ d'espaces hilbertiens complexes sur X une application $x \mapsto \mathcal{H}_x$, définie sur X , telle que \mathcal{H}_x soit, pour tout $x \in X$, un espace hilbertien complexe.

Alors $\mathcal{F} = \prod_{x \in X} \mathcal{H}_x$ est un espace vectoriel complexe.

Un élément de \mathcal{F} est une application $x \mapsto \xi(x)$ définie sur X telle que $\xi(x) \in \mathcal{H}_x$ pour tout $x \in X$.

Une telle application est appelée un champ de vecteur sur X .

Si $Y \subset X$, un élément de $\prod_{x \in Y} \mathcal{H}_x$ est un champ de vecteur sur Y .

Ajoutons maintenant la condition de mesurabilité : Soit $x \mapsto \mathcal{H}_x$ un champ d'espaces hilbertiens sur X et \mathcal{F} l'espace vectoriel des champs de vecteurs.

Définition B.2.2

On dit que les \mathcal{H}_x forment un champ μ -mesurable d'espaces hilbertiens complexes si l'on s'est donné un sous-espace vectoriel \mathfrak{S} de \mathcal{F} possédant les propriétés suivantes :

- i) Pour tout $\xi \in \mathfrak{S}$, la fonction $x \mapsto \|\xi_x\|$ est μ -mesurable.
- ii) Si $\eta \in \mathcal{F}$ est tel que, pour tout $\xi \in \mathfrak{S}$, la fonction numérique complexe $x \mapsto (\xi_x | \eta_x)$ soit μ -mesurable, alors $\eta \in \mathfrak{S}$.

iii) Il existe une suite $(\xi(n))$ d'éléments de \mathfrak{S} telle que, pour tout $x \in X$, les $\xi(n)_x$ forment une suite totale dans \mathcal{H}_x .

Les champs de vecteurs appartenant à \mathfrak{S} sont appelés champs μ -mesurables de vecteurs. Une suite $(\xi(n))$ de \mathfrak{S} possédant la propriété (iii) est appelée une suite fondamentale de champs μ -mesurables de vecteurs.

Il nous faut maintenant rappeler la définition de l'intégrale hilbertienne d'espaces de Hilbert.

B.2.1 Champs de vecteurs de carré intégrable

Intégrale hilbertienne

Soit $x \mapsto \mathcal{H}_x$ un champ μ -mesurable d'espaces hilbertiens sur X .

Définition B.2.3

Un champ de vecteurs ξ sur X est dit de carré intégrable s'il est mesurable et si

$$\int \|\xi_x\|^2 d\mu(x) < +\infty.$$

L'ensemble des champs de carré intégrable est un espace vectoriel complexe \mathfrak{R} .

Pour $\xi, \eta \in \mathfrak{R}$, $(\xi_x|\eta_x)$ est une fonction intégrable de x . La définition :

$$(\xi|\eta) = \int (\xi_x|\eta_x) d\mu(x)$$

a donc bien un sens et confère à \mathfrak{R} une structure d'espace préhilbertien complexe.

Pour $\xi \in \mathfrak{R}$, on a $\|\xi\|^2 = \int \|\xi_x\|^2 d\mu(x)$.

Les $\xi \in \mathfrak{R}$ tels que $\|\xi\| = 0$ sont exactement les ξ qui sont nuls presque partout.

On peut alors identifier deux éléments de \mathfrak{R} égaux presque partout et considérer l'espace préhilbertien séparé \mathcal{H} associé à \mathfrak{R}

Dans la suite, les éléments de \mathcal{H} seront traités comme des champs de vecteurs, toutes les fois qu'il n'en résultera pas de confusion. Pour $\xi \in \mathcal{H}$, on parlera des valeurs $\xi_x \in \mathcal{H}_x$ de ξ .

Notons que les ξ_x sont déterminés seulement «aux ensembles négligeables près».

Le résultat fondamental est le suivant

Proposition B.2.1

i) L'espace \mathcal{H} est hilbertien.

ii) Si une suite (ξ_n) d'éléments de \mathcal{H} converge vers un élément ξ de \mathcal{H} au sens de la métrique de \mathcal{H} , il existe une suite extraite de (ξ_n) qui converge vers ξ presque partout.

L'espace \mathcal{H} s'appelle l'intégrale hilbertienne des \mathcal{H}_x et se note $\int^\oplus \mathcal{H}_x d\mu(x)$.

Si ξ est un champ de vecteur de carré intégrable, on notera aussi parfois $\int^\oplus \xi_x d\mu(x)$ l'élément correspondant de \mathcal{H} .

B.2.2 Champs mesurables d'opérateurs

Avant de définir les champs d'algèbres de von Neumann, il nous faut rappeler la notion de champs d'opérateurs.

Nous supposons donné un champ mesurable d'espaces Hilbertiens $(\mathcal{H}_x)_{x \in X}$

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_x d\mu(x)$$

Définition B.2.4

Un champ mesurable $x \mapsto T_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ est dit essentiellement borné si la borne supérieure essentielle C de la fonction $x \mapsto \|T_x\|$ est finie.

Pour T définie ci-dessus, on a $\|T\| = C$.

Corollaire B.2.2

Si deux champs mesurables essentiellement bornés d'opérateurs définissent le même élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, ils sont égaux presque partout.

Définition B.2.5

On dit qu'une application $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est décomposable si elle est définie par un champ mesurable $x \mapsto T_x$ essentiellement borné. On écrit alors

$$T = \int^{\oplus} T_x d\mu(x)$$

B.2.3 Champs mesurables d'algèbres de von Neumann

Définition B.2.6

Pour tout $x \in X$, soit \mathcal{M}_x une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H}_x . L'application $x \mapsto \mathcal{M}_x$ est appelée un champ d'algèbres de von Neumann sur X .

Définition B.2.7

Un champ d'algèbres de von Neumann $x \mapsto \mathcal{M}_x$ sur X est dit mesurable s'il existe une suite $(x \mapsto T(i)_x)_i$ de champs mesurables d'opérateurs tels que, presque partout, \mathcal{M}_x soit l'algèbre de von Neumann engendrée par les $T(i)_x$.

Définition B.2.8

Une algèbre de von Neumann \mathcal{M} dans \mathcal{H} est dite décomposable si elle est définie par un champ mesurable $x \mapsto \mathcal{M}_x$ d'algèbres de von Neumann.

On écrit alors

$$\mathcal{M} = \int^{\oplus} \mathcal{M}_x d\mu(x).$$

On définit de façon analogue la notion d'algèbre hilbertienne décomposable ([Di69], II.4.2)

B.2.4 Champs mesurables de poids

Nous supposons donné un champ mesurable d'espaces Hilbertiens $(\mathcal{H}_x)_{x \in X}$ et une algèbre de von Neumann décomposable,

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_x d\mu(x), \quad \mathcal{M} = \int^{\oplus} \mathcal{M}_x d\mu(x)$$

avec $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ pour tout $x \in X$.

Soit $x \in X$. On considère une trace τ_x sur $(\mathcal{M}_x)_+$.

J. Dixmier définit alors la notion de champ de trace mesurable ([Di69], II.5.1) comme suit

Définition B.2.9

On dit que le champ de traces $(\tau_x)_x$ est mesurable si, quel que soit le champ d'opérateurs $(T_x)_{x \in X}$ tel que $T_x \in (\mathcal{M}_x)_+$ pour tout $x \in X$, la fonction $x \mapsto \tau_x(T_x)$ est mesurable.

Si on se donne un champ de traces mesurable et que l'on suppose $x \mapsto T_x$ essentiellement borné, nous pouvons alors dire que $T = \int^{\oplus} T_x d\mu(x) \in \mathcal{M}_+$ et le nombre $\int \tau_x(T_x) d\mu(x)$ ne dépend que de T . On peut alors poser $\tau(T) = \int \tau_x(T_x) d\mu(x)$.

Nous pouvons alors citer la proposition suivante ([Di69], II.5.1 – proposition 1)

Proposition B.2.3

τ est une trace sur \mathcal{M}_+ , notée $\tau = \int^{\oplus} \tau_x d\mu(x)$. De plus,

i) τ est finie si et seulement si $\int \tau_x(I) d\mu(x) < +\infty$

ii) Si les τ_x sont normales presque partout, alors τ est normale.

Si, de plus, τ est semi-finie, alors les τ_x sont semi-finies presque partout.

iii) Si les τ_x sont fidèles presque partout, alors τ est fidèle.

Pour terminer, citons le théorème suivant ([Di69], II.5.2. – théorème 2) qui nous donne une réciproque partielle de ce qui précède.

Théorème B.2.1

Si on suppose que \mathcal{M} est semi-finie et si, de plus, τ est une trace normale fidèle semi-finie sur \mathcal{M}_+ , alors il existe un champ mesurable $(\tau_x)_x$ de traces normales fidèles et semi-finies

sur les $(\mathcal{M}_x)_+$ tel que $\tau = \int^{\oplus} \tau_x d\mu(x)$

Intéressons nous maintenant au préduel et définissons les champs de poids sur une algèbre de von Neumann. Rappelons tout d'abord une notation usuelle : si φ est un poids sur une algèbre de von Neumann \mathcal{M} , on pose :

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{T \in \mathcal{M} : \varphi(T^*T) < +\infty\}$$

Les définitions et propriétés énoncées ci-dessous sont détaillées dans [Ta03] (VIII, §4).

Définition B.2.10

Un champ $(\varphi_x)_{x \in X}$ de poids fidèles normaux semi-finis sur (\mathcal{M}_x) est dit mesurable s'il existe un ensemble dénombrable de champs mesurables d'opérateurs $\{(T(j)_x)_{x \in X}\}_{j \in \mathbb{N}}$ avec $T(j)_x \in \mathcal{M}_x$ pour tout $x \in X$ et tout $j \in \mathbb{N}$ tel que :

1. pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in X$, $T(j)_x \in \mathfrak{n}_{\varphi_x} \cap \mathfrak{n}_{\varphi_x}^*$
2. les fonction $x \mapsto \varphi_x(T(j)_x^* T(k)_x)$ et $x \mapsto \varphi_x(T(j)_x T(k)_x^*)$ sont mesurables pour tous $j, k \in \mathbb{N}$
3. pour tout $x \in X$, $\{T(j)_x : j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathfrak{n}_{\varphi_x} \cap \mathfrak{n}_{\varphi_x}^*$ pour la norme

$$\|T\|_{\varphi_x}^{\sharp} = \varphi_x(T^*T + TT^*)^{\frac{1}{2}}, \quad T \in \mathfrak{n}_{\varphi_x} \cap \mathfrak{n}_{\varphi_x}^*$$

On peut alors définir le poids associé sur \mathcal{M} comme suit

Définition B.2.11

On se donne un champ mesurable (φ_x) de poids normaux semi-finis fidèles sur (\mathcal{M}_x) et on considère $\mathcal{M} = \int^{\oplus} \mathcal{M}_x d\mu(x)$ et $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}_x d\mu(x)$. On note alors φ le poids sur \mathcal{M} donné par l'intégrale directe des φ_x sur \mathcal{A} et on écrit

$$\varphi = \int^{\oplus} \varphi_x d\mu(x)$$

Enfin, citons le théorème suivant, qui nous donne le calcul du poids de certains éléments de \mathcal{M} .

Théorème B.2.2

Soit (φ_x) un champ mesurable de poids normaux fidèles semi-finis sur (\mathcal{M}_x) .

Si (T_x) est un champ mesurable d'opérateurs de $(\mathcal{M}_x)_+$, alors la fonction $x \mapsto \varphi_x(T_x)$ est mesurable.

D'autre part, si $T = (T_x) \in \mathcal{M}_+$, alors $\varphi_x(T) = \int^{\oplus} \varphi_x(T_x) d\mu(x)$

B.3 Poids opératoriel

Dans son article [Haa79], U. Haagerup définit la notion de poids opératoriel comme une généralisation de la notion d'espérance conditionnelle. Pour cela, il commence par introduire l'équivalent non commutatif de l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions μ -mesurables sur un espace X à valeurs dans $[0; +\infty]$, qu'il nomme partie positive étendue d'une algèbre de von Neumann.

B.3.1 Partie positive étendue

Définition B.3.1

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann, \mathcal{M}_* son prédual. Un opérateur généralisé positif affilié à \mathcal{M} est une application $m : \mathcal{M}_*^+ \mapsto [0; +\infty]$ telle que

- 1) $m(\lambda\varphi) = \lambda m(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, $\lambda \geq 0$
- 2) $m(\varphi + \psi) = m(\varphi) + m(\psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$
- 3) m est semi-continue inférieurement

L'ensemble de ces applications est appelé la partie étendue positive $\widehat{\mathcal{M}}_+$ de l'algèbre de von Neumann \mathcal{M}

On peut voir \mathcal{M}_+ comme un sous-ensemble de $\widehat{\mathcal{M}}_+$. En effet, chaque $x \in \mathcal{M}_+$ définit un élément de $\widehat{\mathcal{M}}_+$ par $\varphi \mapsto \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$.

Exemple : Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et soit A un opérateur autoadjoint positif (non nécessairement borné) affilié à \mathcal{M} . Soit $A = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ la résolution spectrale de A . Posons

$$m_A(\varphi) = \int_0^\infty \lambda d(\varphi(e_\lambda)), \quad \varphi \in \mathcal{M}_*^+$$

Alors m_A est un opérateur positif généralisé.

Définition B.3.2

Soit $m, n \in \widehat{\mathcal{M}}_+$, $a \in \mathcal{M}$, $\lambda \geq 0$. On définit λm , $m + n$ et a^*ma par, si $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$,

$$\begin{aligned} (\lambda m)(\varphi) &= \lambda m(\varphi) \\ (m + n)(\varphi) &= m(\varphi) + n(\varphi) \\ (a^*ma)(\varphi) &= m(a\varphi a^*) \end{aligned}$$

où $a\varphi a^* = \varphi(a^* \cdot a)$.

Ce sont des opérations internes, qui coïncident avec les opérations usuelles sur \mathcal{M} si m et n sont bornés.

Ainsi, $\widehat{\mathcal{M}}_+$ est fermé pour l'addition, mais aussi sous les limites croissantes.

Si \mathcal{M} est abélien, alors $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \mu)$. Dans ce cas, $\widehat{\mathcal{M}}_+$ correspond à l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions μ -mesurables sur Ω à valeurs dans $[0; +\infty]$

Lemme 22

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann sur \mathcal{H} et soit $m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$. Il existe un sous-espace fermé $K \subset \mathcal{H}$ et un opérateur positif autoadjoint (non nécessairement borné) A sur K tel que

$$m(\omega_\xi) = \begin{cases} \|A^{\frac{1}{2}}\xi\|^2 & \text{si } \xi \in D(A^{\frac{1}{2}}) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le couple (K, A) est unique; K et A sont affiliés à \mathcal{M} .

Théorème B.3.1

Soit \mathcal{M} une algèbre de von Neumann. Chaque $m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ admet une unique résolution spectrale de la forme $m(\varphi) = \int_0^\infty \lambda d\varphi(e_\lambda) + \infty\varphi(p)$, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, où $(e_\lambda)_{\lambda \in [0; +\infty[}$ est une famille croissante de projections dans \mathcal{M} telle que $\lambda \mapsto e_\lambda$ est fortement continue à droite, et $p = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e_\lambda$. De plus,

$$e_0 = 0 \text{ si et seulement si } \forall \varphi \in \mathcal{M}_*^+ \setminus \{0\}, m(\varphi) > 0$$

$$\text{et } p = 0 \text{ si et seulement si } \{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ | m(\varphi) < +\infty\} \text{ est dense dans } \mathcal{M}_*^+.$$

Corollaire B.3.1

Tout $m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ est la limite ponctuelle d'une suite croissante d'opérateurs bornés de \mathcal{M}_+

Définition B.3.3

Soit $m \in \widehat{\mathcal{B}(\mathcal{H})}_+$. On dit que m est affilié à \mathcal{M} si $u^*mu = m$ pour tout unitaire de \mathcal{M}' .

Proposition B.3.2

Il y a une 1-1 correspondance entre $\widehat{\mathcal{M}}_+$ et l'ensemble des $m \in \widehat{\mathcal{B}(\mathcal{H})}_+$ affiliés à \mathcal{M} .

Proposition B.3.3

Tout poids normal φ sur \mathcal{M} admet une unique extension (encore notée φ) à $\widehat{\mathcal{M}}_+$, telle que

- 1) Pour $m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ et $\lambda \geq 0$, on a $\varphi(\lambda m) = \lambda\varphi(m)$
- 2) Pour $m, n \in \widehat{\mathcal{M}}_+$, $\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n)$
- 3) Pour $m_i, m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$, $m_i \nearrow m \implies \varphi(m_i) \nearrow \varphi(m)$
où $m_i \nearrow m$ signifie que $\omega(m_i) \nearrow \omega(m), \forall \omega \in \mathcal{M}_*^+$.

Ces définitions étant posées, U. Haagerup définit le poids opératoriel entre deux algèbres de von Neumann.

B.3.2 Poids opératoriel

La notion de poids opératoriel généralise la notion d'espérance conditionnelle. En voici une définition.

Définition B.3.4

Soit \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux algèbres de von Neumann, $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$. Un poids opératoriel de \mathcal{M}_1 dans \mathcal{M}_2 est une application $T : \mathcal{M}_{1+} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{2+}$ qui satisfait :

- 1) Pour $\lambda \geq 0$ et $x \in \mathcal{M}_{1+}$, on a $T(\lambda x) = \lambda T(x)$,
- 2) Pour $x, y \in \mathcal{M}_{1+}$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- 3) Pour $a \in \mathcal{M}_{1+}$ et $a \in \mathcal{M}_2$, $T(a^*xa) = a^*T(x)a$.

De plus, T est dit normal si

- 4) Pour $x_i, x \in \mathcal{M}_{1+}$, $x_i \nearrow x \implies T(x_i) \nearrow T(x)$,

De même que pour les poids, on pose

$$\mathfrak{n}_T = \{x \in \mathcal{M}_1 : \|T(x^*x)\| < +\infty\}$$

$$\text{et } \mathfrak{m}_T = \mathfrak{n}_T^* \mathfrak{n}_T = \text{span} \{x^*y : x, y \in \mathfrak{n}_T\}$$

On peut vérifier que :

- i) $\mathfrak{m}_T = \text{span} \{x \in \mathcal{M}_{1+} : \|T(x)\| < +\infty\}$
- ii) \mathfrak{m}_T et \mathfrak{n}_T sont des modules bilatères sur \mathcal{M}_2 .
- iii) T admet un unique prolongement $\tilde{T} : \mathfrak{m}_T \longrightarrow \mathcal{M}_2$ satisfaisant

$$\tilde{T}(axb) = a\tilde{T}b, \quad x \in \mathfrak{m}_T, a, b \in \mathcal{M}_2$$

Proposition B.3.4

Soit T un poids opératoire normal de \mathcal{M}_1 dans \mathcal{M}_2 . Si φ est un poids normal sur \mathcal{M}_2 , alors $\varphi \circ T$ est un poids normal sur \mathcal{M}_1 . (où φ est étendue à $\widehat{\mathcal{M}_{2+}}$ par la proposition B.3.3).

Si φ est un poids normal fidèle semi-fini sur \mathcal{M}_2 et T est un poids normal fidèle semi-fini de \mathcal{M}_1 dans \mathcal{M}_2 , alors $\varphi \circ T$ est normal fidèle semi-fini.

Bibliographie

- [AR00] C. Anantharaman-Delaroche et J. Renault, *Amenable groupoids*, Monographie de l'Enseignement Mathématique (Genève), **36**, 2000.
- [BP61] A. Benadek et R. Panzone, *The spaces L^p with mixed norm*, Duke Math. J., **28** (1961), 301-324
- [Bon80] J.-L. Bon, *Les groupoïdes amenables*, Thèse, Université d'Orléans, 1980
- [Bri88] C. Brislawn, *Kernels of trace class operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **104** (1988), n°4, 1181-1190
- [Bri91] C. Brislawn, *Traceable Integral Kernels On Countably generated measure spaces*, Pacific J. Math., **150** (1991), n°2, 229-240
- [BGR77] L. G. Brown, P. Green et M. A. Rieffel, *Stable Isomorphism and Strong Morita Equivalence of C^* -Algebras*, Pacific J. Math., **71** (1977), n°2, 349-363
- [CZ83] F. Combes and H. Zettl, *Order Structures, Traces and Weights on Morita Equivalent C^* -Algebras*, Math. Ann. **265** (1983), Springer-Verlag, 67-81
- [Co73] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **6** (1973), n°2, 133-252
- [Co79] A. Connes, *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Lecture Notes in Math., **725** (1979), Springer-Verlag, 19-143
- [Co80] A. Connes, *On the spatial theory of von Neumann algebras*, J. Func. Anal., **35** (1980), 153-164
- [Co86] A. Connes, *Cours au collège de France*, 1985-86
- [Co94] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994
- [Di53] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France, **81** (1953), 9-39
- [Di64] J. Dixmier, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Cahiers scientifiques, fascicule XXIX, Gauthier-Villars, 1964

- [Di69] J. Dixmier, *Les espaces d'opérateurs dans l'espace Hilbertiens (Algèbres de von Neumann)*, Cahiers scientifiques, fascicule XXV, Gauthier-Villars, 1969
- [Dieu65] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, cahiers scientifiques, fascicule XXVIII, Gauthier-Villars Paris, 1965
- [Dieu68] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse 2*, Gauthier Villars Paris, 1968
- [Ey64] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), fasc. 2, 181-236
- [FM77] J. Feldman et C.C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, an von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **234**, n°2 (1977), 289-324 et 325-359
- [FK86] T. Fack et H. Kosaki, *Generalized s -numbers of τ -measurable operators*, Pacific J. Math., **123** (1986), 269-300
- [Ha78-1] P. Hahn, *Haar measure for measure groupoids*, Trans. Amer. Math. Soc., **242** (1978)
- [Ha78-2] P. Hahn, *Regular Representations of measure groupoids*, Trans. Amer. Math. Soc., **242** (1978)
- [Haa77] U. Haagerup, *L^p -spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, Algèbres d'opérateurs et leurs applications en physique mathématique (Proc. Colloq., Marseille, 1977), Colloq. Internat. CNRS, **274** (1979), 175-184
- [Haa79] U. Haagerup, *Operator Valued Weights in von Neumann Algebras I*, J. Funct. Anal. **32** (1979) 175-206 ; II, **33** (1979), 339-361
- [Hi81] M. Hilsun, *Les espaces L^p d'une algèbre de von Neumann définies par la dérivée spatiale*, J. Funct. Anal., **40** (1981), 151-169
- [HR70] E. Hewitt et K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschafte, T1 et 2, 1970
- [Ka76] T. Kato, *Perturbation Theory for linear Operators*, Classics in mathematics. Springer-Verlag : New York, Berlin, Heidelberg, 1976
- [Ko84] H. Kosaki, *Applications of the Complex Interpolation Method to a von Neumann Algebra : Non-commutative L^p -Spaces*, J. of Funct. Anal., **56** (1984), 29-78
- [Kun58] R. A. Kunze, *L_p Fourier Transforms on locally compact unimodular groups*, Trans. Amer. Math. Soc, **89** (1958), 519-540
- [Kur58] C. Kuratowski, *Topologie*, vol. 1, 4th ed., Warsaw, Poland, 1958

- [Lan95] E. Christopher Lance, *Hilbert C^* -modules. A toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society, Lecture Note Series **210** (1995), Cambridge University Press
- [Loo53] L.H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, The university series... in Higher Mathematics, Van Nostrand, 1953
- [Ma84] T. Masuda, *Groupoid Dynamical Systems and Crossed Product I. The Case of W^* -systems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), n°5, 929-957
- [MRW87] P. S. Muhly, J. N. Renault and D. P. Williams, *Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*, J. Operator Theory, **17** (1987), 3-22
- [Ne74] E. Nelson, *Notes on non-commutative integration*, J. Funct. Anal. **15** (1974), 103-116
- [Pe79] G. K. Pedersen, *C^* -Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press Inc., 1979
- [Ra71] A. Ramsay, *Virtual Groups and Group Actions*, Adv. Math. **6** (1971), 253-322
- [Ra82] A. Ramsay, *Topologies on measured groupoids*, J. Funct. Anal. **47** (1982), 314-343
- [Re80] J. Renault, *A groupoid approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Math., **793**, Springer, 1980
- [Re97] J. Renault, *The Fourier Algebra of a Measured Groupoid and Its Multipliers*, J. of Funct. Anal., **145**, n°2 (1997), 455-490
- [Rie74] M. A. Rieffel, *Induced Representations of C^* -Algebras*, Advances in Math., **13** (1974), 176-257
- [Rie82] M. A. Rieffel, *Morita Equivalence for Operator Algebras*, Proc. Sympos. Pure Math., **38** (1982), Part 1
- [RN55] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Frederick Ungar Publishing Co., 1955
- [RS80] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Analysis, Tome I et III*, Academic Press, 1980
- [Rud62] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York, Interscience Publishers, 1962
- [Rus77] B. Russo, *On the Hausdorff-Young theorem for integral operators*, Pacific J. Math., **68** (1977), 241-253
- [RW97] A. Ramsay and M. E. Walter, *Fourier-Stieljes Algebras of Locally Compact Groupoids*, J. of Funct. Anal. **148** (1997), 314-367

- [Se53] I. E. Segal, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. of Math., **57** (1953), n°3
- [Si79] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series **35**, Cambridge University Press, 1979
- [Ta70] M. Takesaki, *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, Lecture Notes in Math., **128**, Springer, 1970
- [Ta03] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras T3*, E.M.S **125**, Springer, 2003
- [Te80] M. Terp, *L^p Fourier Transformation on non-unimodular locally compact groups* Kobenhavns Universitet Matematisk Institut, Preprint, 1980
- [Te] M. Terp, *L^p spaces associated with von Neumann algebras*, Notes, Thèse
- [Te82] M. Terp, *Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual*, J. Operator Theory, **8** (1982), 327-360
- [Tri85] F.G. Tricomi, *Integral equations*, Dover Publications, New York, 1985
- [Va70] V. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, vol. II, Van Nostrand, Princeton, 1970
- [Wa77] D. Wagner, *Survey of measurable selection theorems*, Siam J. Control and Optimisation, **15** (1977), n°5, 859-903

TITRE en français :

Espaces L^p de l'algèbre de von Neumann d'un groupoïde mesuré.

RÉSUMÉ en français :

L'inégalité de Hausdorff-Young a été généralisée aux groupes localement compacts par R. Kunze dans le cas unimodulaire puis par M. Terp dans le cas général. Une version de cette inégalité a été donnée par B. Russo pour les opérateurs intégraux. Dans cette thèse, on établit une inégalité de Hausdorff-Young pour les groupoïdes mesurés qui recouvre ces résultats. Comme dans les cas des groupes non commutatifs, on utilise la théorie non commutative de l'intégration. La majeure partie de ce travail est l'identification des espaces L^p de l'algèbre de von Neumann du groupoïde dans les cas $p = 1, 2$ comme espaces de fonctions et aussi comme espaces d'opérateurs aléatoires.

MOTS-CLÉS : groupoïdes mesurés ; algèbres de von Neumann ; espaces L^p non-commutatifs ; inégalité de Hausdorff-Young

TITRE en anglais :

L^p spaces of the von Neumann algebra of a measured groupoid.

RÉSUMÉ en anglais :

The Hausdorff-Young inequality was generalized to locally compact groups by R. Kunze in the unimodular case, and then by M. Terp in the general case. A version of this inequality was given by B. Russo for integral operators. In this thesis, we prove a Hausdorff-Young inequality for measured groupoids, that contains these results. As in the case of non abelian groups, we use the non-commutative theory of integration. The main part of this work is to identify the L^p spaces of the von Neumann algebra of the groupoid when $p = 1, 2$ with functions spaces and also as random operators spaces.

MOTS-CLÉS : mesured groupoids ; von Neumann algebras ; non-commutative L^p spaces ; Hausdorff-Young inequality

DISCIPLINE - SPÉCIALITÉ DOCTORALE : Mathématiques.

INTITULÉ ET ADRESSE DE L'U.F.R. OU DU LABORATOIRE :

Université d'Orléans – MAPMO
B.P. 6759 – 45067 Orléans Cedex 2.