



**HAL**  
open science

# Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : Analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration.

Pierre-Alain Guidault

► **To cite this version:**

Pierre-Alain Guidault. Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : Analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration.. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT: . tel-00160509

**HAL Id: tel-00160509**

**<https://theses.hal.science/tel-00160509>**

Submitted on 6 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC-2005 n°66



**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par  
**PIERRE-ALAIN GUIDAULT**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Sujet de la thèse :  
**Une stratégie de calcul pour les structures fissurées :  
analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 1<sup>er</sup> décembre 2005  
devant le Jury composé de :

|                     |   |                    |
|---------------------|---|--------------------|
| PIERRE ALART        | Professeur, Université de Montpellier 2 | Président          |
| RENÉ DE BORST       | Professeur, Université de Delft         | Rapporteur         |
| NICOLAS MOËS        | Professeur, Ecole Centrale de Nantes    | Rapporteur         |
| OLIVIER ALLIX       | Professeur, ENS de Cachan               | Directeur de thèse |
| LAURENT CHAMPANEY   | Professeur, ENS de Cachan               | Examineur          |
| CHRISTIAN CORNUAULT | Dassault Aviation                       | Examineur          |
| ANDRÉ SALLAT        | DGA/SPAé                                | Examineur          |

---

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan / CNRS-UMR8535 / Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)

---

Au moment même où j'écris ces quelques lignes, je suis bien loin de Cachan, outre-Atlantique. Et pourtant, le souvenir des personnes que j'y ai côtoyées pendant ces trois années de thèse et même avant, reste bien ancré dans ma mémoire. J'aimerais pouvoir trouver les mots justes pour les remercier tous en l'espace d'une page pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter, chacun ayant contribué de près ou de loin à faire de ce temps passé au LMT-Cachan une expérience inoubliable. Je sens déjà que je vais oublier des noms mais peut-il en être autrement, la liste étant si longue.

Mes remerciements vont tout d'abord à Olivier Allix pour m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je le remercie de m'avoir fait confiance et laissé la liberté dont j'avais besoin pour mener à bien nos réflexions. Merci également à Laurent Champaney pour sa disponibilité sans faille, son aide précieuse et avec qui cela a été un réel plaisir de travailler et ce depuis le DEA. Je les remercie tous les deux pour leur soutien de tous les jours.

Je tiens à remercier Nicolas Moës et René De Borst pour avoir accepté le rôle de rapporteur ainsi que Pierre Alart, président du jury, Christian Cornuault et André Sallat. Je les remercie de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury et de m'avoir consacré un peu de leur temps précieux. Je remercie aussi Dassault Aviation et la DGA/SPAé pour l'intérêt et le soutien apportés à ce travail.

Travailler au LMT-Cachan a été une vraie chance. À ce sujet, j'exprime mes plus vifs remerciements à Pierre Ladevèze qui sait instaurer un climat de travail très stimulant pour nous, jeunes chercheurs, au sein du secteur structure. De l'aventure « multiéchelle », merci à David, interlocuteur de premier choix, Anthony pour ses précieux conseils, DD pour m'avoir initié, PAB, multi-tout et libero de choc. À Manu, mon co-bureau, et Gilles pour notre expérience Matlab. À tout ceux qui ont pu m'aider à préparer ma soutenance : Manu (encore), David V. Laurent B., Pierre G et Mathilde C.

Dans un registre moins professionnel, plus affectif mais essentiel, mille mercis à Mathilde, Manu, David M. pour leur indéfectible amitié qui dure depuis notre toute première année à Cachan. Je ne peux décidément pas oublier de remercier (sans ordre de préférence évidemment) Olive, Sandra, Guigui, Floflo, Cloups, Béa, David N., Geappy, Jay, Pierre F., Delphine B, Seb et Laeti, Lydia. Aux rockers du LMT : Jay (il peut chanter plus haut que R. Plant), Rouchy, Frisou (batteur de choc et catalyseur de bonne humeur). Merci aussi à vous, Didou, Delphine C., Ludo, Juju et tous ceux que j'ai dû oublier mais qui comptent tout autant pour moi.

À mes parents, à ma famille ... ce travail est pour vous.

Evanston, août 2006



---

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières</b>   | <b>i</b>  |
| <b>Table des figures</b>  | <b>v</b>  |
| <b>Liste des tableaux</b>   | <b>xi</b> |
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Notations</b>  | <b>7</b>  |
| <b>1 Vers une approche multiéchelle du suivi de fissure</b>         | <b>9</b>  |
| 1 Stratégies de calcul multiéchelles . . . . .                      | 10        |
| 1.1 Stratégies basées sur la théorie de l'homogénéisation . . . . . | 11        |
| 1.1.1 Homogénéisation des milieux périodiques . . . . .             | 12        |
| 1.1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation . . . . .       | 14        |
| 1.2 Méthodes de superposition et adaptatives . . . . .              | 18        |
| 1.2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique . . . . .     | 19        |
| 1.2.2 Méthode variationnelle multiéchelle . . . . .                 | 21        |
| 1.2.3 Méthode Arlequin . . . . .                                    | 22        |
| 1.3 Méthodes multigrilles . . . . .                                 | 24        |
| 1.4 Méthodes de décomposition de domaine . . . . .                  | 26        |
| 1.4.1 Condensation statique et ré-analyse locale . . . . .          | 26        |
| 1.4.2 Méthodes de décomposition de domaines . . . . .               | 29        |
| 2 Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration . . . . .    | 32        |
| 2.1 Éléments finis hybrides . . . . .                               | 33        |
| 2.2 Méthodes basées sur la partition de l'unité . . . . .           | 36        |
| 2.2.1 Méthode de la partition de l'unité . . . . .                  | 36        |
| 2.2.2 X-FEM et G-FEM . . . . .                                      | 38        |
| 2.2.3 Modélisation d'une fissure selon la X-FEM . . . . .           | 40        |
| 2.2.4 Les difficultés liées à la PUM . . . . .                      | 42        |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.3 | Approche des fortes discontinuités . . . . . | 43 |
| 2.4 | Comparaison SDA et X-FEM . . . . .           | 47 |
| 3   | Bilan . . . . .                              | 49 |

## **Partie I**    **Analyse locale-globale couplée**    **53**

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>2</b> | <b>Méthode itérative pour le couplage : l'approche micro-macro</b>       | <b>57</b> |
| 1        | Problème de référence sous-structuré . . . . .                           | 59        |
| 1.1      | Description du problème . . . . .  | 60        |
| 1.2      | Partitionnement en sous-structures et interfaces . . . . .               | 60        |
| 1.3      | Choix des espaces d'approximation . . . . .                              | 62        |
| 1.3.1    | Sur une sous-structure . . . . .   | 62        |
| 1.3.2    | Sur une interface . . . . .  | 62        |
| 1.4      | Formulation du problème de référence sous-structuré . . . . .            | 64        |
| 1.4.1    | Quelques définitions et notations . . . . .                              | 64        |
| 1.4.2    | Problème de référence sous-structuré . . . . .                           | 65        |
| 1.5      | Exemples de comportement d'interface . . . . .                           | 65        |
| 2        | Aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces . . . . .         | 66        |
| 2.1      | Définition des quantités macro . . . . .                                 | 66        |
| 2.2      | Choix des espaces macro . . . . .  | 68        |
| 2.3      | Admissibilités des quantités macro . . . . .                             | 70        |
| 3        | Stratégie itérative de résolution . . . . .                              | 72        |
| 3.1      | Principe . . . . .   | 72        |
| 3.2      | Étape locale à l'itération $n$ . . . . .                                 | 73        |
| 3.3      | Étape linéaire à l'itération $n$ . . . . .                               | 73        |
| 3.3.1    | Problème micro sur une sous-structure $\Omega_E$ . . . . .               | 75        |
| 3.3.2    | Problème macro . . . . .   | 77        |
| 3.4      | Contrôle et convergence de la stratégie . . . . .                        | 78        |
| 3.5      | Bilan : algorithme de résolution . . . . .                               | 79        |
| 4        | Implantation dans un code orienté objet . . . . .                        | 82        |
| 4.1      | Démarche de développement . . . . .                                      | 82        |
| 4.2      | Structure du code EF . . . . .   | 82        |
| 4.3      | Sous-structuration : nouvelles classes d'objets . . . . .                | 83        |
| 4.4      | Implantation de l'approche micro-macro . . . . .                         | 84        |
| <b>3</b> | <b>Choix du raccord entre zone locale et zone globale</b>                | <b>89</b> |
| 1        | Traitement des maillages incompatibles : un bref état de l'art . . . . . | 91        |
| 1.1      | Méthodes générales . . . . .   | 91        |
| 1.2      | Méthodes de décomposition de domaine . . . . .                           | 92        |
| 2        | Nouveaux « comportements » d'interface . . . . .                         | 94        |

|   |  |            |
|---|--|------------|
| 3   | Illustration du principe de Saint-Venant . . . . .                 | 96         |
| 4   | Estimateur d'erreur en raccord <i>a posteriori</i> . . . . .       | 100        |
| 5   | Bilan . . . . .  | 100        |
| <b>Partie II Approche micro-macro pour la fissuration</b> |  | <b>103</b> |
| <b>Problème de référence en fissuration de fatigue</b>    |  | <b>107</b> |
| <b>4</b>  | <b>Choix de la base macroscopique</b>                              | <b>113</b> |
| 1   | Introduction de la discontinuité à l'échelle micro . . . . .       | 114        |
| 2   | Introduction de la discontinuité aux deux échelles . . . . .       | 116        |
| 2.1   | Définition d'une base macro discontinue . . . . .                  | 116        |
| 2.2   | Illustration de la séparation des échelles . . . . .               | 118        |
| 3   | Influence de la base macro sur la convergence . . . . .            | 121        |
| 4   | Bilan . . . . .  | 129        |
| <b>5</b>  | <b>Traitement de la microstructure par la X-FEM</b>                | <b>131</b> |
| 1   | Modélisation d'une fissure selon la X-FEM . . . . .                | 133        |
| 2   | Les difficultés techniques de mise en œuvre . . . . .              | 135        |
| 2.1   | Description de la fissure . . . . .                                | 135        |
| 2.2   | Intégration numérique . . . . .                                    | 135        |
| 3   | Utilisation des <i>Level Sets</i> . . . . .                        | 137        |
| 3.1   | Description d'une frontière par <i>Level Sets</i> . . . . .        | 138        |
| 3.2   | Description d'une fissure . . . . .                                | 139        |
| 4   | Implantation dans un code orienté objet . . . . .                  | 141        |
| 4.1   | Gestion des degrés de liberté . . . . .                            | 142        |
| 4.2   | Intégration numérique . . . . .                                    | 142        |
| 4.3   | Calcul de la déformation . . . . .                                 | 143        |
| 5   | Validation de l'implantation . . . . .                             | 146        |
| 5.1   | X-FEM et modélisation par doubles nœuds . . . . .                  | 146        |
| 5.2   | Calcul des facteurs d'intensité de contraintes . . . . .           | 148        |
| 5.3   | Apports des fonctions $F_j$ d'enrichissement . . . . .             | 154        |
| 6   | Bilan . . . . .  | 162        |
| <b>6</b>  | <b>Approche micro-macro pour la fissuration : méthode MS-X-FEM</b> | <b>163</b> |
| 1   | Implantation de la X-FEM à l'échelle micro . . . . .               | 164        |
| 1.1   | Espace d'approximation sur une sous-structure fissurée . . . . .   | 164        |
| 1.2   | Espace d'approximation sur une interface fissurée . . . . .        | 165        |
| 1.3   | Plaque fissurée en flexion trois points . . . . .                  | 165        |
| 2   | Propagation de fissure en fatigue . . . . .                        | 166        |
| 2.1   | Méthode MS-X-FEM . . . . .   | 168        |



|  |  |            |
|--|--|------------|
| 2.1.1  | Algorithme . . . . .   | 168        |
| 2.1.2  | Sélection des interfaces à base macro discontinue . . . . .              | 168        |
| 2.2  | Fissuration de fatigue dans une plaque trouée . . . . .                  | 171        |
| 2.2.1  | Présentation du problème . . . . .                                       | 171        |
| 2.2.2  | Influence du choix de la base macro . . . . .                            | 172        |
| 3  | Bilan . . . . .  | 184        |
| <b>Conclusion</b>  |  | <b>189</b> |
| <b>Bibliographie</b>   |  | <b>193</b> |
| <b>Annexes</b>   |  | <b>208</b> |
| <b>A Propriétés des opérateurs homogénéisés</b>                      |  | <b>209</b> |
| 1  | Rappels . . . . .  | 209        |
| 2  | Propriétés des opérateurs homogénéisés . . . . .                         | 210        |
| 3  | Opérateur homogénéisé $L_E^F$ pour une sous-structure fissurée . . . . . | 211        |
| <b>B Extraction des facteurs d'intensité de contrainte</b>           |  | <b>215</b> |
| 1  | Calcul des FIC - un bref état de l'art . . . . .                         | 215        |
| 2  | Extraction des FIC par intégrales d'interaction . . . . .                | 216        |
| <b>C Évolution d'une fissure - mise à jour des <i>Level Sets</i></b> |  | <b>219</b> |
| 1  | Mise à jour des <i>Level Sets</i> . . . . .                              | 219        |
| 2  | Évaluation des fonctions d'enrichissement . . . . .                      | 222        |
| 3  | Bilan et remarques . . . . .   | 224        |

---

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1    | La méthode du zoom structural . . . . .  | 2  |
| 2    | Structure fissurée : problème macro et problème micro . . . . .  | 4  |
| 1.1  | Schématisation du problème de référence . . . . .  | 11 |
| 1.2  | Définition des échelles et du problème microscopique sur la maille .   | 13 |
| 1.3  | Structure composite $[0, 90]_s$ idéalisée, encastrée à une extrémité et sollicitée à un déplacement horizontal à l'autre extrémité . . . . . | 15 |
| 1.4  | Carte de l'indicateur $\xi_E$ et profil dans l'épaisseur pour une solution microscopique périodique . . . . .                                | 16 |
| 1.5  | Maillage macroscopique : partitionnement sans recouvrement de $\Omega$ .   | 19 |
| 1.6  | Maillage élément finis « macro » de $\Omega$ – Choix de fonctions bulles pour l'espace $\mathcal{U}_{ad,0}^m$ . . . . .                      | 22 |
| 1.7  | Définition du domaine d'intérêt $\Omega^m \subset \Omega$ . . . . .  | 23 |
| 1.8  | Représentation schématique d'un cycle en « V » pour une superposition de deux grilles . . . . .  | 25 |
| 1.9  | Ré-analyse locale et condensation statique . . . . .   | 27 |
| 1.10 | Plaque trouée en traction : ré-analyse locale à partir de deux maillages grossiers différents . . . . .                                      | 28 |
| 1.11 | Un élément HCE polygonal à 9 nœuds ( $n = 9$ ) utilisé en pointe de fissure . . . . .  | 34 |
| 1.12 | Choix d'une partition de l'unité basée sur une triangulation de $\Omega$ . .   | 37 |
| 1.13 | Méthode G-FEM : définitions de <i>handbooks</i> . . . . .  | 40 |
| 1.14 | Fissure placée sur un maillage uniforme. Définition des nœuds enrichis selon la X-FEM. . . . .   | 41 |
| 1.15 | Milieu séparé en deux parties par une surface de discontinuité . . .   | 44 |
| 1.16 | Approximation discontinue en 1D pour la X-FEM et la SDA . . . . .  | 45 |
| 1.17 | Interpolation des déformations pour la SDA sur l'élément 2 traversé par la discontinuité . . . . .   | 46 |
| 1.18 | Essai de traction simple sur un matériau élasto-endommageable : trajet des lignes de discontinuité déterminé par la SDA . . . . .            | 47 |

---

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 1.19 | Intégration numérique pour la X-FEM sur un élément triangulaire traversé par la discontinuité $\Gamma$ . . . . .   | 48  |
| 2.1  | Décomposition du milieu : sous-structures et interfaces . . . . .  | 61  |
| 2.2  | Échange sous-structures / interfaces . . . . .   | 61  |
| 2.3  | Modification des approximations classiques des interefforts et du déplacement bord des sous-structures pour une méthode éléments finis : « h- et p- versions » . . . . .                         | 63  |
| 2.4  | Raffinement du maillage des sous-structures près des bords . . . . .   | 64  |
| 2.5  | Interface linéique en deux dimensions. . . . .   | 69  |
| 2.6  | Base macro linéaire sur une interface . . . . .  | 70  |
| 2.7  | Schéma d'une itération de la méthode LATIN . . . . .   | 72  |
| 2.8  | Diagramme UML partiel du code éléments finis . . . . .   | 86  |
| 2.9  | Diagramme UML partiel de la classe <i>SOUS_DOMAINE</i> . . . . .   | 87  |
| 2.10 | Diagramme UML partiel de la classe <i>INTERFACE</i> . . . . .  | 87  |
| 2.11 | Objet <i>INTERFACE</i> contenant les maillages bords de ses sous-domaines voisins . . . . .  | 88  |
| 3.1  | Analyse locale-globale et sous-structuration . . . . .   | 90  |
| 3.2  | Méthode des mutliplicateurs de Lagrange pour un problème sous-structuré . . . . .  | 92  |
| 3.3  | Partition de l'unité éléments finis uniforme pour le recollement de maillages incompatibles . . . . .  | 94  |
| 3.4  | Plaque trouée soumise à une sollicitation de traction . . . . .  | 96  |
| 3.5  | Déplacement d'interface pour les deux raccords . . . . .   | 97  |
| 3.6  | Éffort d'interface pour les deux raccords. . . . .   | 97  |
| 3.7  | Carte d'erreur relative en énergie par rapport à la référence . . . . .  | 98  |
| 3.8  | Illustration de la procédure de raffinement . . . . .  | 101 |
| 3.9  | Schématisation du problème de fissuration de référence . . . . .   | 108 |
| 3.10 | Paramétrage en pointe de fissure . . . . .   | 109 |
| 3.11 | Chargement de fatigue . . . . .  | 111 |
| 4.1  | Structure comportant une fissure traversant une interface . . . . .  | 115 |
| 4.2  | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour une base macro continue . . . . .   | 115 |
| 4.3  | Base macro linéaire par morceau sur une interface . . . . .  | 117 |
| 4.4  | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour une base macro discontinue . . . . .  | 117 |
| 4.5  | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour les bases macro continues et la base macro dicontinue avec raccord à effort micro nul sur l'interface traversée par la fissure. . . . . | 119 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 4.6  | Carte d'erreur en énergie pour les bases macro continues et la base macro dicontinue avec raccord à effort micro nul sur l'interface traversée par la fissure . . . . .                                | 120 |
| 4.7  | Poutre fissurée en flexion trois points : maillage micro conforme à la géométrie de la fissure et maillage macro d'interface. . . . .  | 122 |
| 4.8  | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour la base macro linéaire . . . . .  | 123 |
| 4.9  | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour la base macro cubique . . . . .   | 124 |
| 4.10 | Déformée totale et déplacements macro à l'interface pour la base macro discontinue . . . . .   | 125 |
| 4.11 | Erreur LATIN, $\eta$ , en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues et la base macro dicontinue . . . . .   | 126 |
| 4.12 | Valeur des facteurs d'intensité de contrainte $K_I$ et $K_{II}$ en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro dicontinue . . . . .          | 127 |
| 4.13 | Erreur relative des facteurs d'intensité de contrainte $K_I$ et $K_{II}$ en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro dicontinue . . . . . | 128 |
| 5.1  | Vecteur normal et tangent à la fissure . . . . .   | 134 |
| 5.2  | Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM  | 136 |
| 5.3  | Critère permettant de sélectionner les nœuds à enrichir par la fonction $H$ . . . . .  | 137 |
| 5.4  | Représentation interpolée de la fonction de niveau permettant de décrire un congé . . . . .  | 138 |
| 5.5  | Vitesse normale de déplacement de la frontière $\Gamma(t)$ . . . . .   | 139 |
| 5.6  | Représentation d'une fissure par deux fonctions de niveau . . . . .  | 140 |
| 5.7  | Représentation d'une fissure non débouchante par trois fonctions de niveau . . . . .   | 141 |
| 5.8  | Diagramme UML partiel de la classe <i>POINT_X</i> . . . . .  | 142 |
| 5.9  | Diagramme UML partiel des classes <i>ELEMENT</i> , <i>ELEM_GRAD_X</i> et <i>INTEGRATION</i> et de leurs descendants . . . . .  | 144 |
| 5.10 | Intégration sur un élément quadrangulaire coupé par la fissure . . . . .   | 145 |
| 5.11 | Structure fissurée sollicitée en mode I . . . . .  | 147 |
| 5.12 | Nœuds enrichis pour la X-FEM avec enrichissement $H$ uniquement, dans le cas où le maillage est conforme à la fissure . . . . .  | 147 |
| 5.13 | Définition des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure pour un maillage de 24 x 48 QUA4 conforme à la fissure . . . . .   | 148 |
| 5.14 | Contrainte $\sigma_{yy}$ en <i>MPa</i> le long des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure  | 149 |
| 5.15 | Structure fissurée sollicitée en mode mixte . . . . .  | 150 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.16 | Domaines d'intégration pour le calcul des FIC . . . . .   | 151 |
| 5.17 | Maillages non-conforme et conforme à la fissure pour le cas d'un maillage de 7 x 15 éléments QUA4 . . . . .   | 152 |
| 5.18 | Nœuds enrichis pour la X-FEM avec enrichissement $H$ et $F_j$ dans le cas où le maillage est conforme à la fissure . . . . .  | 155 |
| 5.19 | Contrainte $\sigma_{yy}$ en $MPa$ le long des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure pour un maillage de 24 x 48 QUA4 conforme à la fissure . . . . .   | 156 |
| 5.20 | Nœuds enrichis pour la X-FEM avec enrichissement $H$ et $F_j$ dans le cas où le maillage est conforme à la fissure . . . . .  | 159 |
| 5.21 | Maillages X-FEM, FEM1, FEM4, FEM10 et FEM12 . . . . .   | 160 |
| 6.1  | Plaque fissurée en flexion trois points sur appuis courts . . . . .   | 166 |
| 6.2  | Déformée micro dans les sous-structures raffinées et déplacements macro à l'interface avec utilisation d'une base macro discontinue pour les interfaces traversées par la fissure. La X-FEM est utilisée au niveau micro. . . . . | 167 |
| 6.3  | Poutre fissurée en flexion trois points : contrainte $\sigma_{xx}$ . . . . .  | 168 |
| 6.4  | Critère de sélection du type de projecteur macro pour une interface traversée par la fissure . . . . .  | 170 |
| 6.5  | Plaque fissurée soumise à de la flexion trois points et comportant trois trous. Deux configurations de pré-fissure sont étudiées. . . . .   | 171 |
| 6.6  | Plaque fissurée comportant trois trous en flexion trois points : maillage micro dans la zone d'intérêt et maillage macro d'interface pour les deux configurations. . . . .  | 173 |
| 6.7  | Plaque fissurée comportant trois trous en flexion trois points : maillages utilisés par le calcul direct X-FEM pour les deux configurations . . . . .   | 174 |
| 6.8  | Trajets de fissure obtenus avec la stratégie MS-X-FEM et le calcul direct X-FEM pour la configuration 1 . . . . .   | 175 |
| 6.9  | Trajets de fissure obtenus avec la stratégie MS-X-FEM et le calcul direct X-FEM pour la configuration 2 . . . . .   | 176 |
| 6.10 | Déformées obtenues par le calcul direct X-FEM pour les deux configurations . . . . .  | 177 |
| 6.11 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro lineaire au dernier pas de propagation de la configuration 1 . . . . .   | 178 |
| 6.12 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro lineaire au dernier pas de propagation de la configuration 2 . . . . .   | 179 |
| 6.13 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro cubique locale au dernier pas de propagation de la configuration 1 . . . . .   | 180 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.14 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro cubique locale au dernier pas de propagation de la configuration 2 . . . . .              | 181 |
| 6.15 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro discontinue locale au dernier pas de propagation de la configuration 1 . . . . .          | 182 |
| 6.16 | Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro à l'interface pour la base macro discontinue locale au dernier pas de propagation de la configuration 2 . . . . .          | 183 |
| 6.17 | Valeur et erreur relative de $K_I$ en fonction de la longueur de fissure obtenues avec la MS-X-FEM et la X-FEM pour la configuration 1 . . . . .                                 | 185 |
| 6.18 | Valeur et erreur relative de $K_I$ en fonction de la longueur de fissure obtenues avec la MS-X-FEM et la X-FEM pour la configuration 2 . . . . .                                 | 186 |
| 6.19 | Nombre d'itérations en fonction du pas pour atteindre une erreur de convergence LATIN $\eta$ de $10^{-4}$ avec les trois bases macro dans le cas de la configuration 1 . . . . . | 187 |
| 6.20 | Nombre d'itérations en fonction du pas pour atteindre une erreur de convergence LATIN $\eta$ de $10^{-4}$ avec les trois bases macro dans le cas de la configuration 2 . . . . . | 187 |
| A.1  | Sous-structure $\Omega_E$ séparée en deux parties $\Omega_{E_1}$ et $\Omega_{E_2}$ et entourée de quatre interfaces . . . . .  | 211 |
| A.2  | Noyau de l'opérateur $L_E^F$ pour une base macro continue . . . . .  | 213 |
| A.3  | Noyau de l'opérateur $L_E^F$ pour une base macro discontinue . . . . .   | 213 |
| B.1  | Fissure libre d'effort. Le domaine $S$ est délimité par $\Gamma$ , $\Gamma_0$ , $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$ . . . . .   | 216 |
| B.2  | Les éléments sélectionnés pour l'extraction des facteurs d'intensité de contrainte et la valeur de la fonction $q$ définie sur ces éléments. . . . .                             | 218 |
| C.1  | Mise à jour des fonctions de niveau pour les nœuds dont le support est intercepté par le cercle de rayon $r$ . . . . .   | 219 |
| C.2  | Calcul initial des fonctions de niveau . . . . .   | 220 |
| C.3  | Mise à jour des fonctions de niveau . . . . .  | 220 |
| C.4  | Calcul de $r$ et de $\theta$ en fonction des <i>Level Sets</i> $\varphi$ et $\psi_i$ . . . . .   | 223 |
| C.5  | Problème d'enrichissement sur les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure . . . . .  | 223 |
| C.6  | Fissure coupant le bord d'un élément triangulaire . . . . .  | 225 |



---

# Liste des tableaux

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 1.1  | Valeurs maximales de $\sigma_{xx}$ et de la contrainte de Von Mises pour une ré-analyse locale en effort ou en déplacement . . . . .   | 28  |
| 2.1  | Projecteurs macroscopiques et fonctions de bases associées en 2D . . . . .   | 71  |
| 5.1  | Valeurs de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .   | 151 |
| 5.2  | Valeurs de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 152 |
| 5.3  | Valeurs normalisées de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .   | 153 |
| 5.4  | Valeurs normalisées de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 153 |
| 5.5  | Comparaison avec la littérature : valeurs normalisées de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .   | 154 |
| 5.6  | Comparaison avec la littérature : valeurs normalisées de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 155 |
| 5.7  | Valeurs de $K_I$ et valeurs normalisées de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC. L'utilisation des enrichissements $F_j$ améliore les valeurs de FIC calculées. . . . . | 157 |
| 5.8  | Intérêt d'incorporer les $F_j$ : valeurs de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 157 |
| 5.9  | Intérêt d'incorporer les $F_j$ : valeurs de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .   | 158 |
| 5.10 | Intérêt d'incorporer les $F_j$ : valeurs normalisées de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 158 |
| 5.11 | Intérêt d'incorporer les $F_j$ : valeurs normalisées de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .   | 158 |
| 5.12 | X-FEM et FEM : valeurs de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .  | 159 |



|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.13 | X-FEM et FEM : valeurs de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .             | 160 |
| 5.14 | X-FEM et FEM : valeurs normalisées de $K_I$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . .    | 161 |
| 5.15 | X-FEM et FEM : valeurs normalisées de $K_{II}$ en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC . . . . . | 161 |

---

# Liste des algorithmes

|   |   |     |
|---|---|-----|
| 1 | Stratégie de calcul multiéchelle . . . . .                  | 80  |
| 2 | Stratégie de calcul monoéchelle . . . . .                   | 81  |
| 3 | Stratégie MS-X-FEM pour la fissuration de fatigue . . . . . | 169 |
| 4 | Mise à jour des <i>Level Sets</i> en 2D . . . . .           | 221 |



---

# Introduction

La justification de la tenue et le suivi en service de structures aéronautiques sont aujourd'hui d'un intérêt capital pour les avionneurs. Un des aspects étudiés pour cette certification est la tolérance aux dommages en fatigue des matériaux métalliques qui, par l'estimation des vitesses de propagation des fissures existantes, conduit à une évaluation de la tenue résiduelle de la structure et à la définition des intervalles d'inspection et de réparations éventuelles. La propagation d'une fissure peut avoir des conséquences catastrophiques sur la réponse globale de la structure modifiant ainsi considérablement les chemins d'effort. Une analyse complète ne pouvant être menée sur un modèle éléments finis, dit « boulon par boulon » qui serait de l'ordre de plusieurs millions d'inconnues, des analyses détaillées sont réalisées dans les zones fissurées et incluses dans un modèle général grossier de l'avion. En fait, en fonction des besoins, une suite de modèles et de « calculs gigognes » (Figure 1) sont ainsi fabriqués de façon récurrente sur plusieurs échelles d'analyse jusqu'à obtenir celle adéquate pour l'analyse des champs de contraintes cherchés [Cornuault 1998]. Raffiner ces modèles va alors de paire avec les changements d'échelles des structures et des phénomènes mécaniques eux-mêmes. Chez Dassault Aviation, une méthodologie de « zoom structural » est ainsi employée. Dans le cas où les maillages des deux modèles sont compatibles sur la zone de raccord, il est alors possible de condenser la rigidité du modèle fin sur sa frontière et de construire ainsi un super-élément incorporé au modèle général. En pratique, des problèmes d'inhomogénéité de rigidités relatives des maillages apparaissent. Dans le cas plus général où les maillages des deux modèles ne sont pas compatibles, une analyse locale-globale est menée. Les conditions limites de chargement ou de déformations pour les différents cas de chargements forfaitaires à traiter sont prélevées sur le contour de la zone correspondante du modèle général et reportées sur le modèle plus fin. Cette démarche d'analyse descendante nécessite de mettre en place une étape supplémentaire permettant de rendre compte de l'impact du modèle fin sur le modèle grossier. Cette technique de zoom structural n'incorpore pas complètement l'aspect multiéchelle induit par la localisation des déformations dans la zone fissurée. Enfin, malgré les améliorations apportées aux maillages auto-

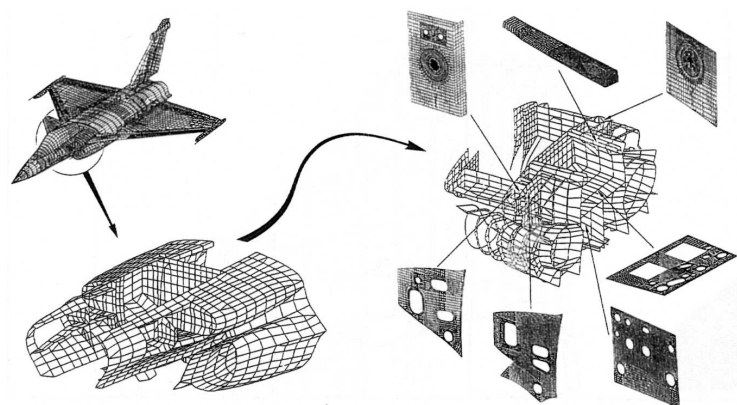


Figure 1: La méthode du zoom structural : en fonction des besoins, il est possible de « zoomer » de façon récurrente sur plusieurs échelles d'analyse jusqu'à obtenir celle adéquate pour l'analyse des champs de contraintes cherchés. On fabrique ainsi une suite de modèles et de calculs gigognes (Doc. Dassault Aviation).

matiques, les processus de maillage et de remaillage restent des tâches fastidieuses pour l'ingénieur confronté à la situation de propagation de fissure.

L'objectif de ce travail de thèse est de proposer une stratégie de calcul multi-échelle répondant à la problématique d'analyse locale-globale pour le suivi de fissure et permettant de lever les difficultés de maillage.

Les méthodologies de calcul globales-locales mise en place dans le milieu industriel s'articulent autour d'un calcul global associé au modèle grossier qui, par post-traitement, permet de résoudre des problèmes de localisation sur les zones de la structure où l'on cherche à déterminer une solution à une échelle inférieure, ou à un niveau de précision supérieure. La difficulté réside dans l'utilisation des conditions issues de la résolution du problème global (modèle grossier) pour résoudre le problème local (modèle fin). L'approche en déplacement qui consiste à recoller les modèles en imposant les déplacements du maillage grossier sur le bord du maillage fin a, en général, tendance à sous-estimer les niveaux de déformations dans la zone raffinée. L'approche en effort, bien que fournissant des résultats meilleurs, a tendance à les surestimer. Dans ces deux approches directes, aucune information tirée du modèle fin n'affecte la réponse du modèle grossier. La nécessité de recoupler les deux problèmes, le grossier et le fin, est en général indispensable. Sur cette question, les travaux de Hirai *et al.* [Hirai *et al.* 1984 - 1985] qui utilisent de manière conjuguée des techniques de condensation statique et de ré-analyse locale, les travaux de Mao et Sun [Mao et Sun 1991] qui proposent une démarche en trois temps (analyse globale, analyse locale, analyse globale raffinée) ainsi que ceux de

Whitcomb [Whitcomb 1991] qui proposent une démarche totalement itérative sont des approches mettant en place un certain dialogue local-global. Néanmoins des problèmes de conditionnement dû au traitement des phénomènes multiéchelles sans séparation particulière apparaissent.

D'un autre côté, le calcul des structures avec fissuration est aujourd'hui revivité que ce soit par la méthode des discontinuités fortes (SDA) introduite par Simo, Oliver et Armero [Oliver 2000, Oliver *et al.* 2002 - 2003] ou par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) basée sur le concept de Partition de l'Unité [Belytschko et Black 1999, Moës *et al.* 1999 - 2002a, Daux *et al.* 2000]. En enrichissant la cinématique du milieu continu, ces techniques permettent d'introduire des discontinuités dans le champ de déplacement en utilisant un nombre relativement faible de degrés de liberté. Le principal avantage, dans ce cas, est que le maillage n'a pas besoin d'être conforme à la géométrie de la fissure. Ces techniques simplifient grandement les processus de maillage et de remaillage au cours de la propagation de fissure. Cependant, ces techniques n'incorporent pas complètement l'aspect multiéchelle induit par la localisation des déformations dans la zone fissurée. Généralement, ces méthodes nécessitent un remaillage en pointe de fissure qui change la structure du problème à résoudre. Ainsi, les problèmes de conditionnement persistent.

Pour pallier les difficultés de conditionnement et de maillage, la stratégie développée en collaboration avec Dassault Aviation est basée sur une approche à deux échelles dans laquelle l'enrichissement est introduit à l'échelle micro. La démarche envisagée met en synergie deux techniques [Guidault *et al.* 2004c -b -a]. Une approche multiéchelle basée sur une méthode de décomposition de domaine est ainsi utilisée pour traiter de façon efficace la localisation des déformations dans la zone fissurée. Un problème macroscopique est associé à la réponse globale de la structure et un problème résolu à l'échelle microscopique est défini dans la zone d'intérêt fissurée (Figure 2). Le rôle de la stratégie multiéchelle consiste à coupler de façon efficace ces deux problèmes. L'approche multiéchelle retenue pour réaliser cette analyse locale-globale couplée est issue de travaux menés au LMT-Cachan où ont été élaborées des stratégies de calcul à fort contenu mécanique et par la même très performantes. Cette stratégie micro-macro [Ladevèze et Dureisseix 1999, Loiseau 2001, Nouy 2003] bâtie sur une *technique d'homogénéisation automatique*, a permis de simuler la réponse de structures fortement hétérogènes. Cette approche traite indifféremment les zones intérieures et les zones de bord où des gradients de déformations « macroscopiques » surviennent. Un des enjeux de notre travail est de développer l'approche dans le cadre de la fissuration pour laquelle surviennent également des gradients à l'échelle macroscopique dans la zone fissurée.

La deuxième technique permet de répondre aux difficultés de maillage et de

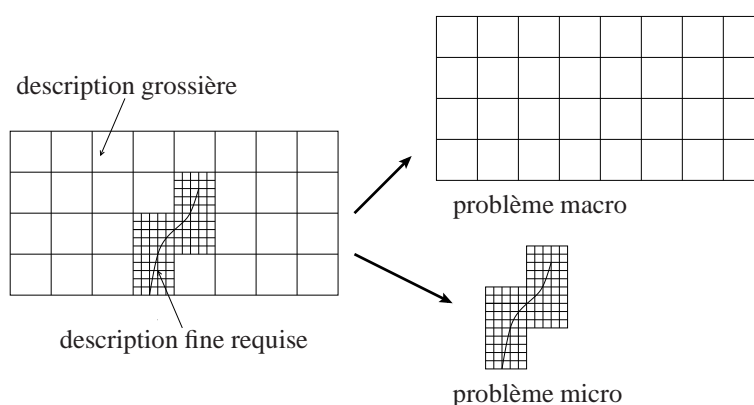


Figure 2: Structure fissurée : problème macro et problème micro

remaillage. À cet effet, la X-FEM est utilisée pour décrire, à l'échelle de la micro-structure, la discontinuité et la solution en pointe de fissure. Couplée à des outils appropriés tels que la technique des *Level Sets* [Osher et Sethian 1988, Sethian 1999], cette méthode permet également de gérer facilement la propagation de fissure. Avec cette séparation des échelles, la structure de donnée informatique tant au niveau macroscopique qu'au niveau microscopique reste inchangée tout au long du calcul de propagation de fissure tandis que tout l'effort numérique est concentré au niveau microscopique où une description adaptée de la fissure est obtenue au moyen de la X-FEM [Guidault *et al.* 2003 - 2005b].

La rédaction de ce document est organisée de la façon suivante.

- Le chapitre 1 présente une étude bibliographique concernant d'une part les stratégies de calcul multiéchelles et de l'autre les méthodes d'enrichissement permettant de traiter la fissuration. Les points forts et les limitations de chacune des approches pour le cadre de notre étude sont présentées.

La suite du document est alors divisée en deux parties.

- Dans la première partie, nous nous intéressons à la mise en place d'une méthode d'analyse locale-globale couplée permettant d'utiliser une description fine dans la zone d'intérêt tout en conservant une description grossière dans le reste de la structure.
  - Le chapitre 2 décrit l'approche itérative micro-macro utilisée pour coupler les échelles macroscopiques et microscopiques. Des aspects concernant son implantation dans un code éléments finis en programmation orientée objet sont présentés.
  - Le chapitre 3 présente le raccord mis en place dans le cadre de la stratégie pour coupler une description fine (microscopique) et une description grossière (macroscopique).

- Dans la seconde partie, l’approche micro-macro pour la fissuration est exposée. Une fissure ayant une influence aussi bien à l’échelle globale qu’à l’échelle locale, la question de la description de la cinématique et des efforts aux échelles microscopique et macroscopique se pose. Cette partie donne lieu à trois chapitres :
  - Le chapitre 4 définit des échelles macroscopiques et microscopiques adaptées au suivi de fissure et en étudie les performances.
  - Le chapitre 5 présente le traitement de la microstructure par la X-FEM. Les choix d’implantation et la validation de la méthode au sein du code de calcul sont exposés et discutés.
  - Enfin, le chapitre 6 s’intéresse aux performances de la stratégie dans sa globalité. L’utilisation combinée de l’approche micro-macro et de la X-FEM est ainsi illustrée au travers d’exemples de propagation de fissure en fatigue qui intéressent Dassault Aviation.





---

# Notations

## Calcul tensoriel et différentiel

*Tenseurs d'ordre 1 soulignés* : champs de déplacements  $\underline{u}$ , vecteur position  $\underline{x}$ , ...

*Tenseurs d'ordre 2 et 3 en lettres capitales doublées* : tenseur des déformations  $\varepsilon$ , ...  
... tenseur des contraintes  $\sigma$

*Tenseurs d'ordre 4 en gras* : tenseur de Hooke  $\mathbf{K}$ , ...

- $\wedge$  : produit vectoriel
- $\otimes$  : produit tensoriel extérieur
- $\cdot$  : produit simplement contracté
- $:$  : produit doublement contracté
- $\nabla$  ou  $\frac{\partial}{\partial \underline{x}}$  : gradient
- $\text{div}$  : divergence
- $\varepsilon(\underline{u})$  : partie symétrique du gradient de  $\underline{u}$
- $\dot{\underline{u}}$  ou  $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$  : dérivée de  $\underline{u}$  par rapport au temps  $t$

## Notations algébriques

*Matrices en lettres capitales ou entre crochets* :  $A$  ou  $[A]$

- $\mathbb{R}^{n \times m}$  : espace des matrices à coefficients réels de dimension  $n \times m$
- $A^T$  : transposée de  $A$
- $A^{-1}$  : inverse de  $A$
- $\text{Ker}(A)$  : noyau de  $A$
- $\text{Tr}(A)$  : trace de  $A$

## Notations topologiques

- $\overline{A}$  : adhérence de  $A$
- $\partial A$  : frontière de  $A$
- $A \setminus B$  : complémentaire de  $B$  dans  $A$
- $\text{mes}(A)$  : mesure d'un domaine  $A$  de  $\mathbb{R}^n$

**Notations sur les ensembles**

- $\{x \in X | P\}$  : sous ensemble des  $x \in X$  vérifiant la propriété P  
 $X \times Y$  : produit cartésien des ensembles  $X$  et  $Y$   
 $\prod_{i \in \mathbf{I}} X_i$  : produit cartésien des ensembles  $\{X_i\}_{i \in \mathbf{I}}$

**Espaces vectoriels**

- $X + Y$  : somme de deux espaces vectoriels  $X$  et  $Y$   
 $X \oplus Y$  : somme directe de deux espaces vectoriels  $X$  et  $Y$   
 $X^\perp$  : orthogonal de  $X$

**Notations sur les applications**

- $f : \begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ x \mapsto f(x) \end{array}$  : application qui à  $x \in X$  fait correspondre  $f(x) \in Y$   
 $f|_A$  : restriction de  $f : X \rightarrow Y$  à  $A \subset X$   
 $\frac{\partial f}{\partial x}(y)$  ou  $f'_y$  : gradient de  $f : x \mapsto f(x)$  en  $y$

**Espaces fonctionnels**

Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $X$  un espace de Banach.

- $\|\cdot\|_X$  : norme naturelle sur l'espace  $X$   
 $(\cdot, \cdot)_X$  : produit scalaire naturel sur l'espace de Hilbert  $X$   
 $L^2(O; X)$  :  $\{u : O \rightarrow X ; u \text{ mesurable sur } O \text{ et } \int_O \|u(x)\|_X^2 dx < \infty\}$   
 $L^2(O)$  :  $L^2(O; \mathbb{R})$   
 $H^1(O)$  : espace de Sobolev d'ordre 1  
 $\mathcal{C}^k(O)$  : fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $O$

---

# Vers une approche multiéchelle du suivi de fissure

*Dans ce chapitre, une étude bibliographique concernant d'une part les stratégies de calcul multiéchelles et de l'autre les méthodes d'enrichissement permettant de traiter la fissuration est présentée. Les points forts et les limitations de chacune des approches sont exposés compte tenu du cadre de notre étude.*

## Sommaire

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Stratégies de calcul multiéchelles . . . . .</b>                   | <b>10</b> |
| 1.1      | Stratégies basées sur la théorie de l'homogénéisation . . . . .       | 11        |
| 1.2      | Méthodes de superposition et adaptatives . . . . .                    | 18        |
| 1.3      | Méthodes multigrilles . . . . .                                       | 24        |
| 1.4      | Méthodes de décomposition de domaine . . . . .                        | 26        |
| <b>2</b> | <b>Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration . . . . .</b> | <b>32</b> |
| 2.1      | Eléments finis hybrides . . . . .                                     | 33        |
| 2.2      | Méthodes basées sur la partition de l'unité . . . . .                 | 36        |
| 2.3      | Approche des fortes discontinuités . . . . .                          | 43        |
| 2.4      | Comparaison SDA et X-FEM . . . . .                                    | 47        |
| <b>3</b> | <b>Bilan . . . . .</b>  | <b>49</b> |

---

L'objectif de ce chapitre est de faire le point sur deux familles de stratégies de calcul. La première concerne les stratégies de calcul multiéchelles. De façon générale, une démarche multiéchelle met en place : un problème global, macroscopique, « homogénéisé » associé à une solution grossière et un problème microscopique, « hétérogène » associé aux détails ou zones d'intérêt. Toute la difficulté réside dans la manière de définir ou de séparer les échelles ainsi que dans celle de les coupler. Nous tenterons de décrire les réponses apportées à cette difficulté par différentes stratégies multiéchelles que nous avons regroupées en trois catégories : les méthodes dérivant de la théorie de l'homogénéisation classique, les méthodes de superposition et adaptatives et les méthodes basées sur des approches de décomposition de domaine.

La deuxième famille dont nous parlerons, concerne les méthodes d'enrichissement permettant de traiter les problèmes de fissuration. Ces démarches rendent possible l'introduction d'une discontinuité en déplacement dans les champs d'approximation de la solution simplifiant ainsi les processus de maillage et de remaillage. Cet enrichissement du comportement de la microstructure peut se faire de différentes manières. Nous avons classé ces approches en trois catégories : les approches basées sur la construction d'éléments finis hybrides dédiés au traitement des fissures, les approches permettant de prendre en compte au niveau de l'élément un saut de déplacement qui joue alors le rôle d'une variable interne et les approches permettant d'introduire une discontinuité via la méthode de la partition de l'unité.

## 1 Stratégies de calcul multiéchelles

Dans cette partie, les différentes stratégies seront présentées dans le cadre non limitatif d'un problème de mécanique classique. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude des petites perturbations d'une structure  $\Omega$  soumise à des déplacements imposés  $\underline{u}_d$  sur  $\partial_1\Omega$ , à des efforts surfaciques  $\underline{F}_d$  sur la partie complémentaire  $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$  et à des efforts volumiques  $\underline{f}_d$  (Figure 1.1). On s'intéresse à la réponse quasi-statique et isotherme de la structure. Sauf mention contraire, on se placera dans le cas de l'élasticité linéaire et  $\mathbf{K}$  désignera le tenseur d'élasticité de Hooke. On notera  $\underline{u}$  le champ de déplacement,  $\sigma$  le champ de contrainte et  $\varepsilon$  le champ de déformation. Le problème de référence s'écrit alors :

**Problème 1** Trouver  $(\underline{u}, \sigma) \in \mathcal{U} \times \mathcal{S}$  qui vérifie :

– l'admissibilité cinématique :

$$\underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur } \partial_1\Omega$$

– l'admissibilité statique (équation d'équilibre) :

$$\operatorname{div}(\sigma) + \underline{f}_d = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et } \sigma \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega$$

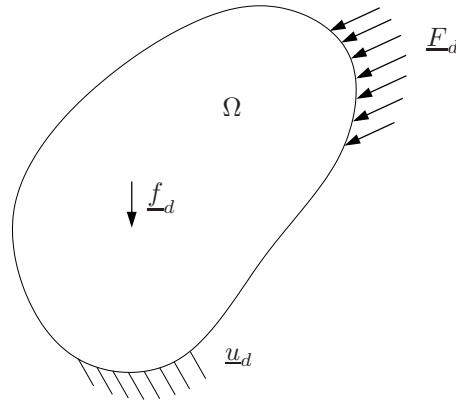


Figure 1.1: Schématisation du problème de référence

– la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon \quad \text{sur } \Omega \quad \text{avec } \varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{S}$  représentent les espaces de champs à énergie finie classiquement utilisés en mécanique des milieux continus respectivement pour les déplacements et les contraintes. Classiquement, en dimension  $d$ ,  $\mathcal{U} = [H^1(\Omega)]^d$  et  $\mathcal{S} = [L^2(\Omega)]^p$  où  $p = 6$  en dimension 3 et  $p = 3$  en dimension 2.

Enfin, on introduit, l'espace  $\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{\underline{u} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega\}$  des champs de déplacement admissibles ainsi que l'espace vectoriel associé :  $\mathcal{U}_{\text{ad},0} = \{\underline{u} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega\}$ .

## 1.1 Stratégies basées sur la théorie de l'homogénéisation

La plupart des approches multiéchelles reposent sur le principe d'homogénéisation. Les premiers travaux ont consisté à mettre en place des méthodes d'homogénéisation spatiales basées sur des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique aboutissant ainsi à l'identification d'un comportement macroscopique entre des quantités moyennes « effectives » [Eshelby 1957, Hashin 1962, Hill 1965, Mori et Tanaka 1973]. Cependant, ces dernières ne permettent pas de remonter aux propriétés locales. La prise en compte de mécanismes de plus en plus complexes au niveau microscopique ont donné lieu à des méthodes appelées « Unit Cell Methods » [Christman *et al.* 1989, Tvergaard 1990, Sluis *et al.* 1999]. Elles permettent d'identifier un modèle macroscopique par des « essais numériques » sur un volume élémentaire représentatif (VER) de la structure et d'obtenir des informations locales sur la solution. Malheureusement, la définition *a priori* d'un modèle macroscopique reste pénalisante lorsqu'il s'agit de traiter des

problèmes où des grands gradients de déformations surviennent (près des bords, des trous, des fissures) et plus généralement lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes non-linéaires. Par ailleurs, ces approches « phénoménologiques » ne sont pas véritablement des approches multiéchelles.

La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques [Sanchez-Palencia 1974, Duvaut 1976, Bensoussan *et al.* 1978, Sanchez-Palencia 1980], basée sur l'analyse asymptotique, propose une véritable approche multiéchelle mettant en jeu un problème « macro » et un problème « micro » permettant de remonter aux propriétés locales. Dans cette partie, nous décrivons les points clefs de cette théorie et présentons quelques stratégies de calcul qui en découlent.

### 1.1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques en élasticité

Cette technique est utilisable dans le cas où la structure résulte de la répétition périodique d'une cellule de base appelée maille élémentaire ou volume élémentaire représentatif (VER) comme sur la figure 1.2. Un domaine d'application par excellence est celui des matériaux composites. Dans ce cas de figure, la solution à l'échelle de la microstructure est quasi-périodique (superposition d'une valeur moyenne quasi-constante par maille et d'une solution microscopique dont la forme se reproduit d'une maille à l'autre) au moins loin des bords de la structure, et d'autant mieux que la structure est grande par rapport à la maille élémentaire ( $l \ll L$ ). On peut alors tenir compte de cette propriété pour découpler les effets aux différentes échelles.

L'idée consiste alors à introduire deux variables (une par échelle) pour décrire la solution : une variable de position macroscopique  $\underline{X}$  à l'échelle de la structure ( $L$ ), et une variable de position  $\underline{y}$  à l'intérieur de la maille dont l'amplitude varie dans un intervalle de largeur  $l$  (Figure 1.2). En notant le rapport d'échelles  $\epsilon = \frac{l}{L}$ , on peut définir une variable  $\underline{Y} = \frac{\underline{y}}{\epsilon}$  (*zoom*) pour qu'elle soit comparable en amplitude à  $\underline{X}$ . La solution en déplacement du problème s'écrit alors  $\underline{u}(\underline{M}) = \underline{u}(\underline{X}, \underline{y})$  et l'opérateur de Hooke est  $\mathbf{K}(\underline{M}) = \mathbf{K}(\underline{y})$  puisqu'il est périodique d'une maille à l'autre. L'idée consiste alors à développer la solution sous la forme d'un développement asymptotique en  $\epsilon$ . Ainsi :

$$\underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) = \underline{u}_0(\underline{X}, \underline{y}) + \epsilon \underline{u}_1(\underline{X}, \underline{y}) + \epsilon^2 \underline{u}_2(\underline{X}, \underline{y}) + \dots$$

Ce développement est d'autant plus judicieux que  $\epsilon$  est petit. La deuxième étape consiste à développer les équations d'équilibre ( $\text{div}(\sigma) + \underline{f}_d = 0$ , où  $\underline{f}_d$  est une force volumique et  $\sigma = \mathbf{K}\epsilon$ ), puis à les écrire séparément pour les différentes puissances du paramètre  $\epsilon$  qui apparaissent. Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre tronquent le développement à l'ordre 1 et permettent ainsi de déterminer

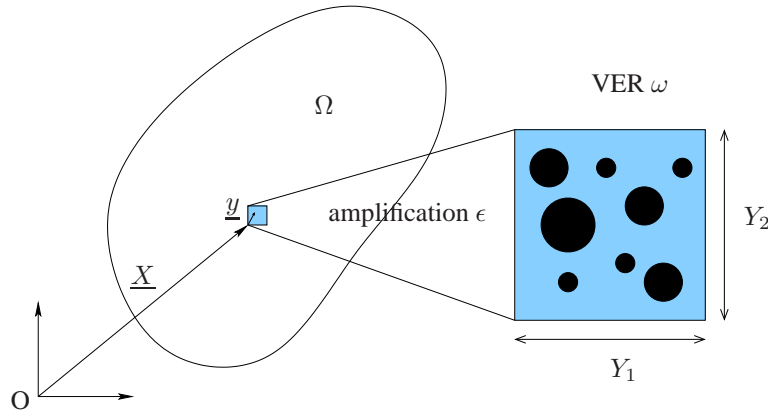


Figure 1.2: Définition des échelles et du problème microscopique sur la maille

le champ macroscopique  $\underline{u}_0$  et le champ microscopique  $\underline{u}_1$ . On peut alors écrire une succession de problèmes aux différents ordres en  $\epsilon$  :

**Problème en  $\underline{u}_0$  ( $\epsilon^{-2}$ ) :**  $\text{div}_Y(\mathbf{K}\epsilon_Y(\underline{u}_0)) = 0$  permet de montrer que  $\underline{u}_0$  est indépendant de  $\underline{y}$  :  $\underline{u}_0(\underline{M}) = \underline{u}_0(\underline{X})$ . On notera  $\epsilon_0 = \epsilon_x(\underline{u}_0)$ ,

**Problème en  $\underline{u}_1$  ( $\epsilon^{-1}$ ) :**  $\text{div}_Y(\mathbf{K}\epsilon_Y(\underline{u}_1)) = -\text{div}_Y(\mathbf{K}\epsilon_0)$ . Ce problème s'écrit sur une maille  $\omega$  ( $\underline{X}$  étant fixé, la variable courante étant  $\underline{Y}$  dans la maille et  $\epsilon_0$  étant considéré comme connu et uniforme sur  $\omega$ ) : trouver  $\underline{u}_1 \in \mathcal{U}_{Y\text{-per}}$  tel que :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{Y\text{-per}}, \quad \int_{\omega} \text{Tr}(\epsilon_Y(\underline{u}_1) \mathbf{K} \epsilon_Y(\underline{u}^*)) d\omega = - \int_{\omega} \text{Tr}(\epsilon_0 \mathbf{K} \epsilon_Y(\underline{u}^*)) d\omega \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{U}_{Y\text{-per}}$  est l'espace des champs vérifiant les conditions de périodicité sur  $\partial\omega$ . On montre que ce problème admet une unique solution en déformation. Par linéarité, il existe un champ de tenseur  $\mathbf{H}(\underline{y})$  d'ordre 4, défini sur  $\omega$ , vérifiant les conditions de périodicité sur  $\partial\omega$ , tel que la solution vérifie :

$$\epsilon_Y(\underline{u}_1) = \mathbf{H}\epsilon_0$$

D'où, en notant  $\epsilon^m = \epsilon_0 + \epsilon_Y(\underline{u}_1)$ , la valeur principale de la déformation locale (déformation à l'ordre 0) :

$$\begin{aligned} \epsilon^m &= \epsilon_0 + \mathbf{H}\epsilon_0 \\ \sigma^m &= (\mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{H})\epsilon_0 \end{aligned}$$

Cet opérateur de localisation des déformations,  $\mathbf{H}(\underline{y})$ , est déterminé par résolution du problème 1.1 pour une série de déformations macroscopiques  $\epsilon_0$ .



**Problème en  $\underline{u}_2$  ( $\epsilon^0$ ) :** La condition d'existence du problème en  $\underline{u}_2$  conduit à écrire :

$$\int_{\omega} \operatorname{div}_X(\sigma^m) + \underline{f}_d \, d\omega = 0$$

En notant,  $\langle \cdot \rangle_{\omega} = \int_{\omega} \cdot \, d\omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X \sigma^M + \langle \underline{f}_d \rangle_{\omega} &= 0 \\ \sigma^M = \langle \sigma^m \rangle_{\omega} &= \langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\omega} \langle \varepsilon_0 \rangle_{\omega} \\ \text{avec } \langle \varepsilon_0 \rangle_{\omega} &= \varepsilon_0 = \varepsilon^M \end{aligned}$$

ce qui donne le problème macroscopique portant sur les quantités moyennes  $\sigma^M$ ,  $\varepsilon^M$  et le déplacement macroscopique  $\underline{u}^M = \underline{u}_0$ . Le comportement homogénéisé, macroscopique s'écrit :  $\mathbf{K}^M = \langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\omega}$ .

### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Cette approche constitue une véritable stratégie de calcul à deux échelles. Elle met en place un problème à l'échelle macroscopique et permet de remonter aux propriétés locales de la solution. En effet, connaissant le déplacement macroscopique  $\underline{u}^M$ , il est possible de déterminer le champ de contraintes locales  $\sigma^m$  par l'opérateur de localisation ( $\mathbf{K} + \mathbf{KH}$ ). Cependant, l'approche repose sur deux hypothèses fortes : la périodicité et un rapport d'échelle très grand ( $\epsilon$  petit). L'hypothèse de périodicité ne permet pas d'homogénéiser le matériau près des bords ou des zones à forts gradients où cette hypothèse n'est plus vérifiée. Pour illustrer ce point, considérons l'exemple de la figure 1.3 représentant une structure composite  $[0, 90]_s$  idéalisée et étudiée dans les travaux de [Loiseau 2001]. La figure 1.4 représente la valeur d'un indicateur d'erreur  $\xi_E$  rendant compte pour chaque maille  $E$  de la non vérification des conditions de transmission en effort et en déplacement entre cette maille  $E$  et ses voisines, l'hypothèse de périodicité de la solution microscopique ayant été faite. La carte de cet indicateur montre des valeurs élevées près des bords et dans les zones de transition entre les différentes couches de composites. Des traitements spécifiques des effets de bord ont été proposés dans [Auriel *et al.* 1982, Dumontet 1986, Lecuyer *et al.* 1987].

### 1.1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire

Encouragées par l'accroissement des puissances de calcul, des extensions de la théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques ont été proposées

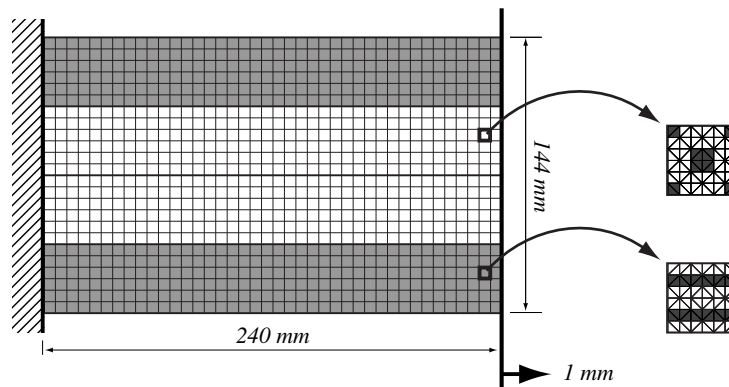


Figure 1.3: Structure composite  $[0, 90]_s$  idéalisée, encastrée à une extrémité et sollicitée à un déplacement horizontal à l'autre extrémité

dans le cadre du non-linéaire. Ces approches reposent sur l'idée suivante : au lieu de chercher à identifier un modèle de comportement non-linéaire macroscopique, défini *a priori*, au moyen de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, le comportement macroscopique de la structure est dicté par un calcul mené sur la microstructure. Ces calculs microscopiques, généralement réalisés sur une cellule élémentaire de manière concurrente au calcul macroscopique mené sur la structure, ont pour entrée le champ de déformation macroscopique et pour sortie le champ de contrainte macroscopique. La résolution du problème macroscopique est généralement réalisée par une méthode éléments finis classiques. Les problèmes microscopiques peuvent être résolus par une technique éléments finis également [Smit *et al.* 1998, Feyel et Chaboche 2000] ou par des techniques comme la « Voronoï Cell Finite Element Method » [Ghosh *et al.* 1995]. Dans ce paragraphe, deux extensions représentatives sont présentées.

#### ■ Méthode éléments finis à deux niveaux : $FE^2$

Les premiers travaux précurseurs de cette approche sont dus à Renard [Renard 1990]. Ils portent sur la modélisation des dégradations dans les matériaux composites. La décroissance des différents modules d'élasticité du comportement macroscopique de la structure est pilotée par la modélisation microscopique d'une cellule. L'état d'endommagement en un point d'intégration du maillage macroscopique dépend de l'endommagement microscopique, dû à la décohésion fibre-matrice par exemple, au sein de chaque cellule. Les travaux de Chaboche et Feyel [Feyel et Chaboche 2000] présentent une vision étendue de cette méthode.

La méthode  $FE^2$  propose une discrétisation éléments finis de la structure sur laquelle se base le problème macroscopique. A chaque point d'intégration de ce maillage grossier est alors associé le comportement d'une cellule de base du maté-

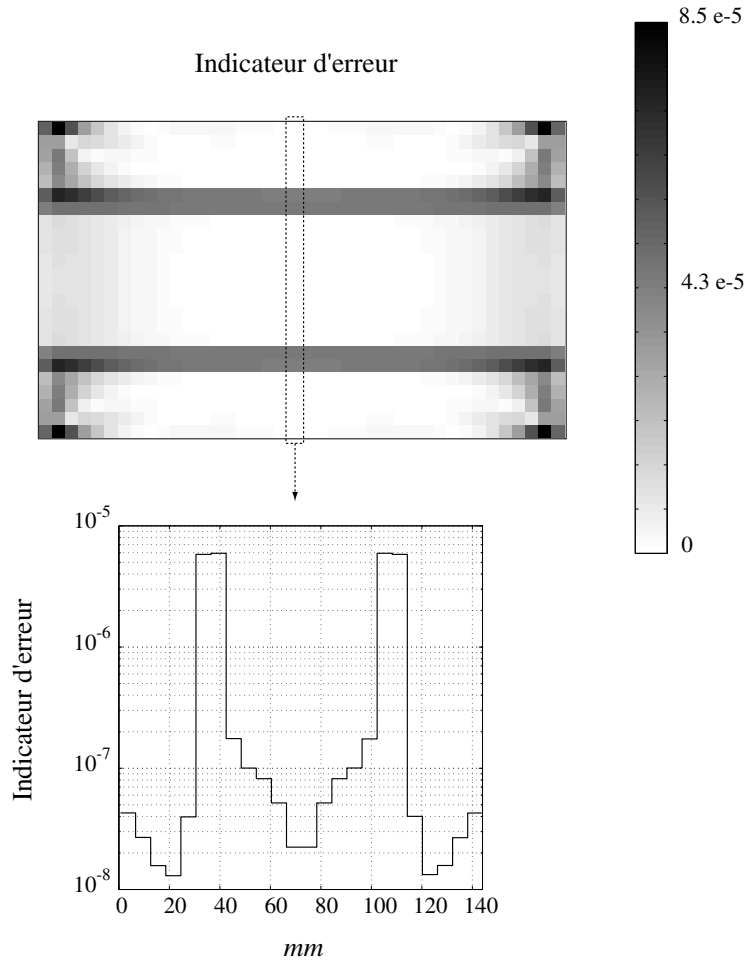


Figure 1.4: Carte de l'indicateur  $\xi_E$  et profil dans l'épaisseur pour une solution microscopique périodique. Les valeurs élevées de l'indicateur désignent les zones où l'hypothèse d'une solution à partie microscopique périodique est remise en cause.

riau représentatif de la microstructure. L'idée consiste à rechercher la solution sur chaque cellule  $\omega$  comme la somme d'une partie macroscopique, indiquée  $M$ , et d'une partie microscopique, indiquée  $m$ , à qui on impose des conditions de périodicité sur  $\partial\omega$ . Ainsi, sur une cellule  $\omega$  :

$$\sigma(\underline{x}) = \sigma^M + \sigma^m(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \sigma^M = \langle \sigma \rangle_\omega \quad (1.2)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \varepsilon^M \underline{x} + \underline{u}^m(\underline{x}) = \underline{u}^M + \underline{u}^m(\underline{x}) \quad (1.3)$$

$$\varepsilon(\underline{x}) = \varepsilon^M + \varepsilon^m(\underline{x}) \quad \text{avec} \quad \varepsilon^M = \langle \varepsilon \rangle_\omega \quad (1.4)$$

Les quantités macroscopiques  $\sigma^M$  et  $\varepsilon^M$  en un point d'intégration donné du maillage macroscopique sont supposées constantes sur la cellule microscopique associée à

ce point. La méthode de résolution peut être décrite par deux niveaux nécessaires à l'intégration du comportement non-linéaire du problème macroscopique au sein d'un algorithme itératif de type Newton-Raphson par exemple :

- **Étape globale (niveau « macro ») :** étape linéaire de la méthode de Newton-Raphson du problème macro qui donne l'incrément de déformation macroscopique  $\Delta \varepsilon^M$  en chaque point d'intégration,
- **Étape locale (niveau « micro ») :** en chaque point d'intégration (chaque cellule) :
  - **Détermination des conditions limites à partir de  $\Delta \varepsilon^M$  :** prise en compte des conditions de périodicité et utilisation de la relation (1.3) pour déterminer les conditions limites à appliquer sur chaque cellule associée à chaque point d'intégration,
  - **Méthode de Newton-Raphson sur chaque cellule :** alternance des étapes de vérification de l'équilibre (étape globale sur la cellule) puis de vérification du comportement (locale pour chaque point d'intégration de la cellule). Détermination à convergence du comportement tangent de la cellule par une méthode de perturbation,
  - **Détermination du comportement macroscopique tangent :** calcul de la contrainte « macro »  $\sigma^M = \langle \sigma \rangle_\omega$  et du comportement tangent homogénéisé  $\mathbf{K}^M$  par résolution d'une série de problèmes microscopiques résolus sur la cellule.

Notons que les calculs microscopiques menés sur chaque cellule étant complètement indépendants, ils peuvent être aisément parallélisables. Il est possible, sur le principe, d'ajouter un niveau supplémentaire et de répéter le processus pour chaque point d'intégration de chaque cellule « micro » donnant lieu ainsi à une méthode  $FE^3$ . Cette technique, certes performante, présente les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique : elle reste pertinente uniquement lorsque les échelles sont bien séparées.

### ■ Milieux continus généralisés au niveau macroscopique

Dans le cas, où les échelles ne peuvent plus être séparées, une amélioration consiste à utiliser des milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient [Cosserat et Cosserat 1909, Zhu *et al.* 1997, Forest et Sab 1998, Sluis *et al.* 1998, Kouznetsova *et al.* 2002, Feyel 2003] au niveau macroscopique. Cette cinématique macroscopique enrichie, pour laquelle un champ de rotation vient s'ajouter au champ de déplacement classique, permet alors de mieux prendre en compte au niveau macroscopique de forts gradients tels que les bandes de cisaillement ou les singularités.

Généralement difficile à construire, le comportement du milieu continu généralisé est, dans la stratégie proposée dans [Kouznetsova *et al.* 2002], déterminé de

façon automatique. Un milieu du second gradient est considéré au niveau macroscopique. La même séparation que précédemment en partie « micro » et « macro » de la solution est opérée et la même condition de périodicité est faite pour les quantités « micro » :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(\underline{x}) &= \underline{\sigma}^M(\underline{x}) + \underline{\sigma}^m(\underline{x}) = \underline{\Sigma}^M + \underline{\mathbb{Q}}^M \cdot \underline{x} + \underline{\sigma}^m(\underline{x}) \\ \underline{u}(\underline{x}) &= \underline{\varepsilon}^M \underline{x} + \underline{u}^m(\underline{x}) = \underline{\mathbb{E}}^M \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{\mathbb{G}}^M : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x})\end{aligned}$$

où  $\underline{\Sigma}^M$  et  $\underline{\mathbb{E}}^M$  sont des tenseurs d'ordre 2 constants sur la cellule.  $\underline{\mathbb{Q}}^M$  et  $\underline{\mathbb{G}}^M$  sont des tenseurs d'ordre 3 constants sur la cellule et présentant des propriétés de symétrie *ad hoc*. Les stratégies de résolution du premier ordre peuvent être utilisées de la même manière pour résoudre. Seules les définitions de  $\underline{\sigma}^M$  et  $\underline{\varepsilon}^M$  ont changé. Ici, elles ne sont plus constantes sur la cellule et peuvent prendre en compte des gradients au niveau macroscopique.

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Ces stratégies ne fournissent donc pas une forme « close » de la loi de comportement macroscopique mais déduisent une relation entre les quantités duales macroscopiques en chaque point d'intérêt de la structure en résolvant des problèmes à l'échelle microscopique. Elles ne nécessitent donc pas d'hypothèse *a priori* sur le modèle macroscopique qui est déterminé de façon automatique. L'enrichissement de la cinématique macroscopique peut permettre de prendre en compte des gradients de déformation et traiter ainsi plus aisément des problèmes où la séparation des échelles « macro » et « micro » n'est plus aussi évidente que dans le cas des structures périodiques. Néanmoins, cette question de la séparation des échelles persiste dans le cas où l'on souhaite prendre en considération des gradients encore plus importants tels que ceux provoqués par la présence d'une fissure. Notons aussi que, bien que permettant de traiter des comportements matériau complexes, ces stratégies de calculs basées sur la résolution de problèmes d'homogénéisation spatiale ne sont pas véritablement adaptées aux problèmes non-linéaires d'évolution.

## 1.2 Méthodes de superposition et adaptatives

Les approches décrites précédemment et basées sur des techniques d'homogénéisation permettent d'opérer un passage de l'échelle « micro » à l'échelle « macro » en définissant un problème macroscopique issu d'analyse à l'échelle microscopique. Les approches étudiées dans cette partie adoptent un point de vue différent

et cherchent plutôt à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans les zones d'intérêt. Nous développons ici quelques-unes de ces méthodes.

### 1.2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

Introduite par Oden et Zohdi [Zohdi *et al.* 1996, Oden et Zohdi 1997, Oden *et al.* 1999], la méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique (HDPM) consiste à résoudre un problème homogénéisé, macroscopique sur un maillage régulier dont un élément correspond à une cellule représentative du matériau considéré. Un estimateur de sensibilité permet de localiser les zones du maillage macroscopique nécessitant une ré-analyse. Une correction est alors déterminée dans ces zones en résolvant sur les cellules concernées des problèmes locaux prenant en compte la microstructure pour des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet. Un estimateur d'erreur *a posteriori* permet alors de déterminer la qualité de la solution corrigée. Plus précisément, les principales étapes de cette stratégie sont les suivantes :

**Étape 1 :** Partitionnement sans recouvrement de  $\Omega$ ,  $\mathcal{T} = \{\Omega_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  (Figure 1.5).

Un opérateur de comportement homogénéisé  $\mathbf{K}^M$  est déterminé par une technique d'homogénéisation quelconque, la théorie de l'homogénéisation périodique dans le cas de matériaux périodiques par exemple.

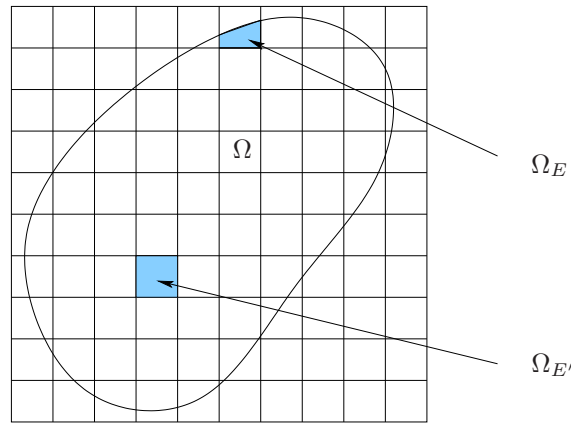


Figure 1.5: Maillage macroscopique : partitionnement sans recouvrement de  $\Omega$

**Étape 2 :** Résolution du problème macroscopique : trouver  $\underline{u}^M \in \mathcal{U}_{\text{ad}} = \{\underline{u} \in [H^1(\Omega)]^d \mid \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1 \Omega\}$  tel que :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{\text{ad},0}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} (\varepsilon(\underline{u}^M) \mathbf{K}^M \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

**Étape 3 :** Détermination des cellules  $\mathbf{E}_{corr} \in \mathbf{E}$  qui nécessitent une correction microscopique à l'aide d'un estimateur de sensibilité bâti sur la solution macroscopique  $\underline{u}^M$ .

**Étape 4 :** Résolution du problème microscopique, pour tout  $E \in \mathbf{E}_{corr}$  : trouver  $\underline{u}_E^m \in \mathcal{U}_{E,ad,0} = \{\underline{u} \in [H^1(\Omega_E)]^d \mid \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_E \setminus \partial_2\Omega\}$  tel que :

$$\forall \underline{u}_E^* \in \mathcal{U}_{E,ad,0}, \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} \left( \varepsilon(\underline{u}_E^m + \underline{u}_E^M) \mathbf{K}^M \varepsilon(\underline{u}_E^*) \right) d\Omega_E = \dots$$

$$\int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega_E + \int_{\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Gamma$$

où  $\underline{u}_E^M = \underline{u}|_{\Omega_E}^M$ . Dans ce problème microscopique, on constate que la solution macroscopique  $\underline{u}_E^M$  est utilisée comme condition limite de type Dirichlet, d'où la dénomination Dirichlet dans HDPM. On remarquera que, étant indépendants, ces problèmes microscopiques peuvent être résolus en parallèle. La solution totale corrigée peut alors s'écrire par prolongement de chaque solution locale :

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \sum_{E \in \mathbf{E}_{corr}} \varepsilon_E(\underline{u}_E^m) = \underline{u}^M + \underline{u}^m$$

où  $\varepsilon_E$  est un opérateur de prolongement permettant de prolonger un champ microscopique  $\underline{u}_E^m$  défini sur  $\Omega_E$  à la structure complète  $\Omega$  et tel que  $\varepsilon_E(\underline{u}_E^m) = 0$  sur  $\Omega \setminus \Omega_E$ .

**Étape 5 :** Détermination de l'erreur de la solution améliorée par un estimateur d'erreur *a posteriori*. Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, l'opérateur  $\mathbf{K}^M$  est amélioré et l'on reprend les étapes 2 à 5. Si le critère d'erreur n'est toujours pas satisfait après cette nouvelle boucle, une nouvelle partition  $\mathcal{T}'$  plus grossière est proposée et le processus est répété.

**■ Bilan et limitations pour notre étude**

Le lien de parenté de cette approche avec les méthodes adaptatives est évident : un premier calcul macroscopique étant proposé, un estimateur de qualité *a posteriori* construit à partir de la solution macroscopique permet de détecter les zones les plus erronées. Si, dans les démarches adaptatives, diminuer l'erreur consiste à raffiner le maillage dans ces zones, dans l'approche proposée par Zohdi et Oden, cela consiste à adapter non pas la taille de maille mais plutôt l'échelle de modélisation du matériau : ce qui constitue toute la force de l'approche. Cependant, la théorie de l'homogénéisation étant classiquement utilisée pour définir l'opérateur macroscopique  $\mathbf{K}^M$ , on est confronté à la même difficulté de séparation des échelles.

### 1.2.2 Méthode variationnelle multiéchelle

Cette méthode, initialement proposée par Hughes [Hughes 1995], part du principe que toutes les échelles présentes dans un problème ne sont pas « solubles » numériquement parlant, pour reprendre le terme de Hughes. Les effets microscopiques, « insolubles », sont ainsi impossibles à représenter par un maillage éléments finis de taille supérieure aux dimensions de la microstructure. Il propose un principe de superposition permettant de prendre en compte au niveau macroscopique les effets des petites échelles. En résolvant, souvent de manière analytique, des problèmes « locaux », l'effet des petites échelles est condensé au niveau macroscopique, ce qui conduit à la définition d'un problème macroscopique « quasi-exact ».

La solution du problème  $\underline{u}$  est décomposée en une partie macroscopique  $\underline{u}^M$  et une partie microscopique  $\underline{u}^m$  telles que :

$$\underline{u} = \underline{u}^M + \underline{u}^m \quad (1.5)$$

$\underline{u}^M$  appartient à un espace de dimension finie  $\mathcal{U}_{\text{ad}}^M$  et  $\underline{u}^m$  appartient à un espace *a priori* de dimension infinie  $\mathcal{U}_{\text{ad},0}^m$  tel que  $\underline{u}^m = 0$  sur le contour  $\Gamma^{Mm}$  où cette analyse à deux champs est requise (Figure 1.6). Ces deux espaces sont tels que  $\underline{u} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} = \mathcal{U}_{\text{ad}}^M \oplus \mathcal{U}_{\text{ad},0}^m$ .

Un point crucial de l'approche repose alors dans le choix d'une bonne approximation de  $\underline{u}^m$ . Dans le cas où une méthode spectrale ou de Fourier est utilisée pour l'approximation du problème macroscopique, un bon choix consiste à déterminer  $\underline{u}^m$  en fonction d'une fonction de Green. Choisir  $\mathcal{U}_{\text{ad},0}^m$  revient alors à choisir une fonction de Green. Cette démarche devient cependant difficile lorsqu'il s'agit de l'appliquer au cadre des éléments finis classiques pour lesquels l'espace d'approximation engendré n'est pas suffisamment régulier. Pour adapter l'approche à ce cadre, certains auteurs ont proposé d'utiliser pour l'espace microscopique des enrichissements locaux propres à chaque élément fini (choix de fonctions bulles qui s'annulent sur le bord de chaque élément (Figure 1.6) où une ré-analyse microscopique est requise) ou à plusieurs éléments finis. Dans ce dernier cas, on utilise des fonctions éléments finis d'ordre  $p$  complémentaires aux fonctions éléments finis utilisées pour le problème macroscopique et dont le support s'étend sur plusieurs éléments. En augmentant le degré de raffinement  $p$ , on augmente la qualité de la solution macroscopique.



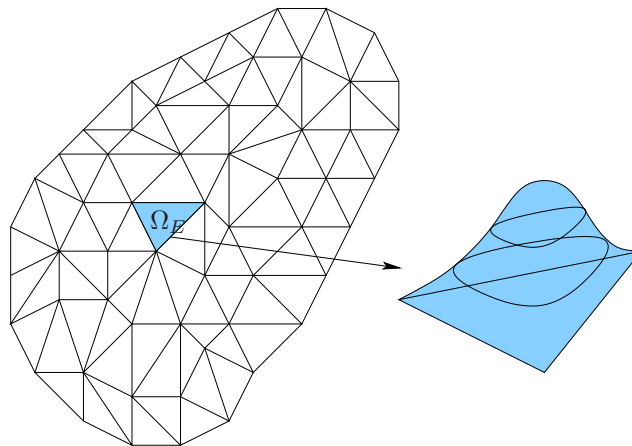


Figure 1.6: Maillage élément finis « macro » de  $\Omega$  – Choix de fonctions bulles pour l'espace  $\mathcal{U}_{ad,0}^m$

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Les méthodes variationnelles multiéchelles permettent de prendre en compte des effets microscopiques au sein d'une approximation éléments finis relativement grossière par une sorte de procédé de régularisation. Cependant, les fonctions d'enrichissement définissant la partie microscopique restent localisées à un ou plusieurs éléments finis et constituent donc un enrichissement relativement pauvre. En d'autre terme, la condition  $\underline{u}^m = 0$  sur le contour  $\Gamma^{Mm}$  de la zone enrichie peut s'avérer être une hypothèse trop contraignante.

### 1.2.3 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par Ben Dhia [Ben Dhia 1998, Ben Dhia et Rateau 2001] permet de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans des régions d'intérêt. Cette approche permet alors de faire dialoguer des modèles différents tant au niveau de la discrétisation que de la nature des équations qui les régissent. Le raccord des deux problèmes s'écrit de manière faible dans le volume des zones de jonction et non pas sur des interfaces comme c'est le cas pour la plupart des approches. Ainsi, dans ces zones, la concurrence des modèles est gérée par l'introduction de fonctions de pondération dans le principe des puissances virtuelles utilisé pour l'écriture de la formulation globale.

Considérons la situation où les deux modèles à superposer sont régis par les équations de l'élastostaticité classique. Le premier modèle est le modèle grossier et est associé au domaine  $\Omega^M$ . Le deuxième modèle est le modèle fin et est associé

au domaine d'intérêt  $\Omega^m$  (Figure 1.7). La méthode consiste à chercher un couple

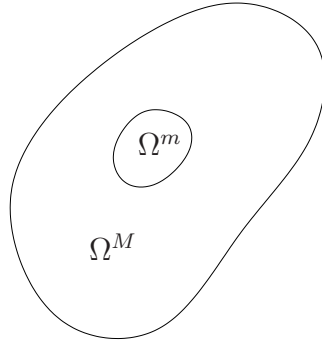


Figure 1.7: Définition du domaine d'intérêt  $\Omega^m \subset \Omega$ . Ici, on a  $\Omega = \Omega^M$  et la zone de jonction  $\Omega^{Mm} = \Omega^m$ .

solution  $\underline{u} = (\underline{u}^M, \underline{u}^m) \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{W}_{\text{ad}}$  où la solution grossière  $\underline{u}^M$  est définie sur tout le domaine  $\Omega = \Omega^M$  et où la solution fine  $\underline{u}^m$  est définie uniquement sur le domaine  $\Omega^m$ . On précise que  $\mathcal{U}^m = [H^1(\Omega^m)]^d$  et que les conditions limites ne sont appliquées que sur  $\Omega^M$  pour simplifier. Le problème s'énonce alors comme suit : trouver  $(\underline{u}, \underline{\lambda}^m) \in \mathcal{W}_{\text{ad}} \times \mathcal{U}^m$  tel que  $\forall (\underline{u}^*, \underline{\lambda}^{m*}) \in \mathcal{W}_{\text{ad},0} \times \mathcal{U}^m$  :

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) + b(\underline{\lambda}^m, \underline{u}^*) &= l_\alpha(\underline{u}^*) \\ b(\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} a_\alpha(\underline{u}, \underline{u}^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha \operatorname{Tr} (\varepsilon(\underline{u}^M) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^{M*})) d\Omega + \dots \\ &\quad \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \operatorname{Tr} (\varepsilon(\underline{u}^m) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}^{m*})) d\Omega \\ b(\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}) &= (\underline{\lambda}^{m*}, \underline{u}^M - \underline{u}^m)_{H^1(\Omega^m)} \\ l_\alpha(\underline{u}^*) &= \int_{\Omega=\Omega^M} \alpha \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{M*} d\Omega + \int_{\Omega^m} (1 - \alpha) \underline{f}_d \cdot \underline{u}^{m*} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^{M*} d\Gamma \end{aligned}$$

Le paramètre scalaire de pondération  $\alpha$  est un champ scalaire tel que  $\alpha \in [0, 1]$  dans  $\Omega$  et  $\alpha = 1$  dans  $\Omega \setminus \Omega^m$ .  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega^m)}$  représente le produit scalaire classique sur  $H^1(\Omega^m)$ . Cette formulation est donc mixte et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda^m$  permet de garantir l'égalité des champs  $\underline{u}^M$  et  $\underline{u}^m$  au sens faible sur la zone de jonction  $\Omega^{Mm} = \Omega^m$ . La solution est alors définie comme suit :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}^M & \text{sur } \Omega \setminus \Omega^m \\ \alpha \underline{u}^M + (1 - \alpha) \underline{u}^m & \text{sur } \Omega^m \end{cases}$$

La qualité du raccord dans la zone de jonction dépend du choix de l'espace du multiplicateur de Lagrange  $\lambda^m$  appelé espace « médiateur ». Le choix classique qui a été fait ici consiste à prendre  $H^1(\Omega^{Mm} = \Omega^m)$ , mais prendre le dual de  $H^1(\Omega^m)$  peut paraître plus judicieux. Cependant, si ce choix ne pose pas de problème en continu, il est plus difficile à réaliser en discret. En fait, la définition de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange dans la zone de jonction reste délicate et fait encore l'objet de travaux. Notons aussi que le raccord réalisé ici dans le volume permet en général de faire dialoguer correctement les deux modèles, permettant ainsi « d'échanger beaucoup plus d'information » qu'un raccord surfacique. Cependant, tout ceci a un prix à payer qui est celui de l'intégration numérique dans le volume du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega^m)}$  lorsque les discrétisations de  $\underline{u}^M$  et de  $\underline{u}^m$  ne sont pas compatibles dans la zone de jonction.

**■ Bilan et limitations pour notre étude**

La méthode Arlequin propose une approche originale permettant de superposer dans une même zone des états mécaniques issus de modélisations pouvant être très différentes. Néanmoins une difficulté persiste dans le choix de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange permettant de recoller en volume les deux modèles dans leur zone de jonction.

### 1.3 Méthodes multigrilles

La résolution de systèmes linéaires de grande taille issus de problèmes de mécanique conduit à l'utilisation de méthodes numériques itératives (gradient conjugué, Gauss-Seidel, Jacobi, relaxation, ... [Saad 2000]) plus avantageuses que les méthodes directes. Les méthodes itératives classiques sont cependant plus efficaces pour réduire les résidus à faible longueur de variation au cours des itérations, que ceux à grandes longueurs de variation. Cela se traduit par une rapide décroissance de l'erreur lors des premières itérations puis par une stagnation de celle-ci ou du moins une diminution du taux de convergence. L'idée des méthodes multigrilles initiées par [Southwell 1935] et [Fedorenko 1964] est d'associer à la résolution itérative du système linéaire, une résolution globale de manière à diminuer rapidement l'erreur commise sur les modes aux valeurs propres les plus basses.

La méthode 2-grilles pour résoudre un système  $\mathbf{K}_m \mathbf{q}_m = \mathbf{f}_m$ , issu d'une discrétisation éléments finis par exemple, met en place une démarche de calcul dit cycle en « V » entre une grille grossière et une grille fine « emboîtée » (Figure 1.8). Le

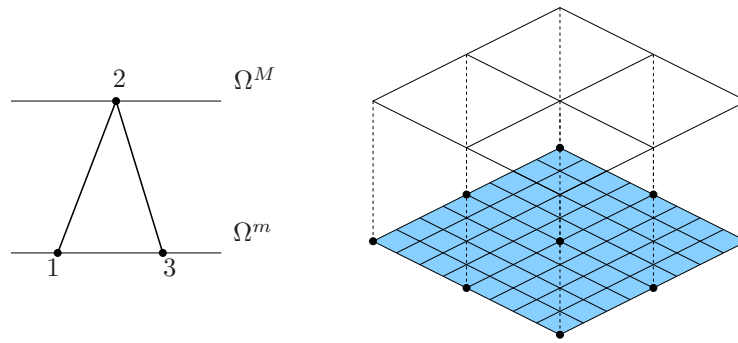


Figure 1.8: Représentation schématique d'un cycle en « V » pour une superposition de deux grilles : une grossière  $\Omega^M$  et une fine  $\Omega^m$

maillage grossier permet de capturer l'erreur résiduelle à grande longueur de variation. La réalisation d'un cycle en « V » sur deux échelles comporte les trois étapes suivantes :

1. On réalise plusieurs itérations sur la grille fine avec la méthode itérative choisie. Cette étape a pour but de faire diminuer les hautes fréquences de l'erreur. C'est l'étape de lissage.
2. Le résidu  $r_m^{(i)} = f_m - q_m^{(i)}$  obtenu est alors restreint à la grille grossière par un opérateur de restriction  $\mathbf{R}$  :  $r_M^{(i)} = \mathbf{R}r_m^{(i)}$ . Puis, on résout le problème de résidu  $\mathbf{K}_M e_M^{(i)} = r_M^{(i)}$  associé au maillage grossier où  $\mathbf{K}_M$  est l'opérateur  $\mathbf{K}_m$  restreint à la grille grossière.
3. La solution obtenue est prolongée sur la grille fine et permet de corriger  $q_m^{(i)}$  comme suit :  $\tilde{q}_m^{(i)} = \mathbf{P}e_M^{(i)} + q_m^{(i)}$  où  $\mathbf{P}$  est l'opérateur de prolongement. Des opérations de lissage supplémentaires peuvent ensuite être effectuées afin de gommer les perturbations induites par l'opération de prolongement.

*Remarque* : Il existe un lien étroit entre les méthodes multigrilles et la méthode des éléments finis hiérarchiques dont le principe a été donné dans [Zienkiewicz et al. 1983]. Elles peuvent être réécrites sous la même forme avec une définition particulière des opérateurs de restriction et de prolongement.

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Les approches multigrilles permettent d'accélérer la convergence des méthodes itératives classiques. Le passage par une grille grossière permet d'obtenir une approximation du résultat sur une grille plus fine et ainsi de diminuer rapidement l'erreur commise sur les modes aux valeurs propres les plus basses. Par un couplage avec l'échelle grossière, le résultat de l'échelle fine est alors corrigé. Il est cependant difficile de donner un sens au problème grossier associé à la grille grossière. Aussi, il est difficile par cette démarche purement numérique de tenir compte de la spécificité du problème mécanique traité.

### 1.4 Stratégies basées sur des méthodes de décomposition de domaine

Dans le cas d'une analyse à l'échelle de la microstructure du problème, deux situations sont à envisager. La première est la situation où une analyse fine est requise uniquement dans une zone d'intérêt. C'est la problématique d'une analyse locale-globale. Un partitionnement naturel est alors réalisé entre zone « fine » et zone « grossière ». L'interface entre les deux zones permet, par une technique de condensation statique ou de recollement, de prendre en compte une description fine dans une description grossière de la solution.

L'autre situation est celle du calcul de structures fortement hétérogènes où une analyse à l'échelle « micro » est réalisée sur tout le domaine. Trop coûteux pour une résolution directe, ces calculs ont conduit à la mise en place de méthodes de décomposition de domaine. La structure est ainsi décomposée en sous-structures. La condensation sur les interfaces de chaque problème posé par sous-structure conduit à un problème d'interfaces (posé sur le « squelette » constitué de l'ensemble des interfaces) de petite taille.

#### 1.4.1 Techniques de condensation statique et de ré-analyse locale

Prendre en compte les effets d'un détail structural tel qu'un trou dans la réponse globale d'une structure, est un problème courant dans le milieu industriel durant une phase de conception ou de re-conception. Deux techniques principales sont utilisées (Figure 1.9). Dans le cas où le maillage raffiné de la zone d'intérêt est compatible avec le maillage grossier, une simple méthode de condensation statique (utilisation de « super-éléments ») peut être utilisée. Si le maillage fin de la zone d'intérêt n'est

pas compatible, ce qui est le plus fréquent, une méthode d'analyse locale-globale doit être mise en œuvre.

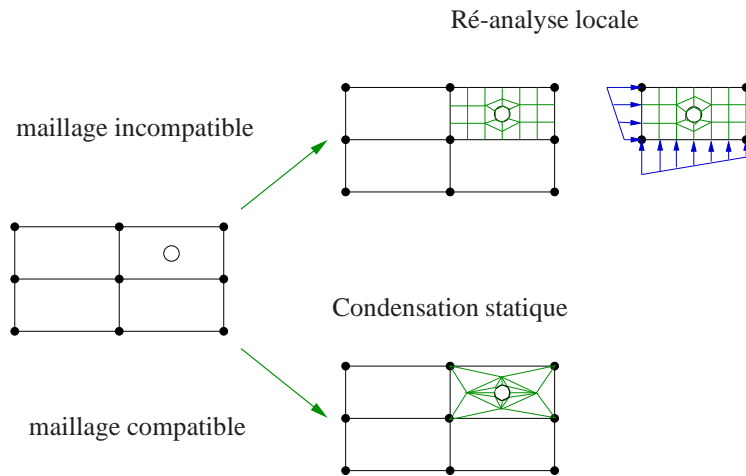


Figure 1.9: Ré-analyse locale et condensation statique

Les méthodologies de calcul globales-locales s'articulent autour d'un calcul global associé au modèle grossier qui, par post-traitement, permet de résoudre des problèmes de localisation sur les zones de la structure où l'on cherche à déterminer une solution à une échelle inférieure, ou à un niveau de précision supérieure. La difficulté réside dans l'utilisation des conditions issues de la résolution du problème global (modèle grossier) pour résoudre le problème local (modèle fin). L'approche en déplacement qui consiste à recoller les modèles en imposant les déplacements du maillage grossier sur le bord du maillage fin a, en général, tendance à sous-estimer les niveaux de déformations dans la zone raffinée. L'approche en effort, bien que fournissant des résultats meilleurs, a tendance à les sur-estimer. Ce point est illustré sur l'exemple de la plaque trouée en traction (Figure 1.10). Par symétrie, un quart du problème seulement est étudié. Deux maillages grossiers sont considérés : le premier ne modélise pas du tout le trou (Figure 1.10(c)) et le second le modélise grossièrement (Figure 1.10(d)). Le maillage fin du détail est représenté sur la figure 1.10(a). Pour chacun des maillages grossiers, une ré-analyse locale est réalisée en utilisant soit un recollement en déplacement, soit un recollement en effort. Le tableau 1.1 donne les valeurs maximales de la contrainte  $\sigma_{xx}$  et de la contrainte de Von Mises pour les différents maillages grossiers et recollements. L'axe  $x$  correspond à la direction du chargement de traction. Comme attendu, pour chacun des maillages, les deux recollements aboutissent à un encadrement des quantités d'intérêt calculées avec le maillage compatible de la figure 1.10(b). Enfin, on constate qu'une information même grossière sur la microstructure (présence du trou) au sein du problème

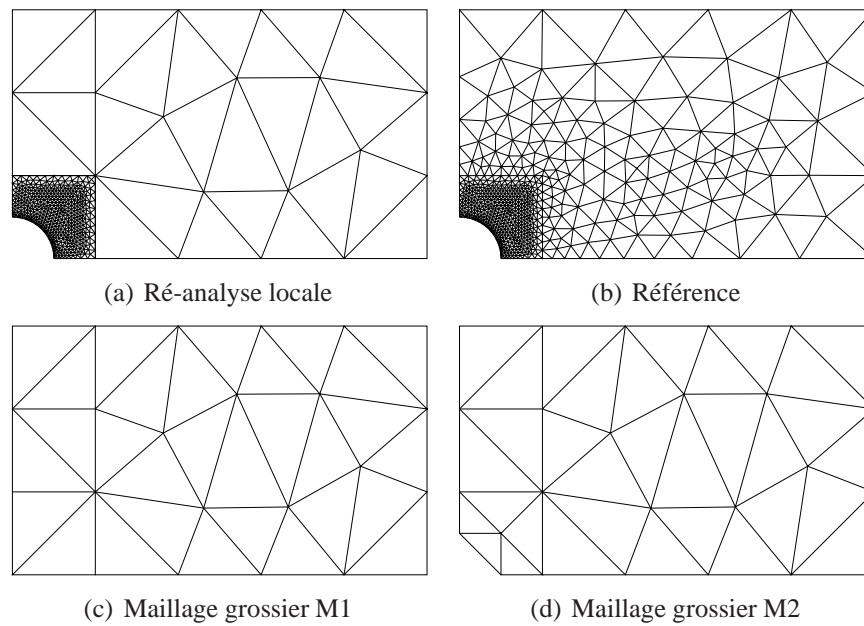


Figure 1.10: Plaque trouée en traction : ré-analyse locale à partir de deux maillages grossiers différents

grossier permet une amélioration des résultats. Le maillage M2 conduit ainsi à un encadrement plus serré des valeurs de référence.

Dans ces deux approches directes, aucune information tirée du modèle fin n'affecte la réponse du modèle grossier. C'est une analyse descendante qui est menée du « macro » vers le « micro ». La nécessité de recoupler le problème grossier et le problème fin est indispensable. Une analyse ascendante est ainsi réalisée dans un second temps. En pratique, les déplacements ou efforts, suivant l'approche, sont récupérés *a posteriori* sur la zone ré-analysée et imposés sur le maillage grossier. C'est de cette façon que le détail est pris en compte au sein du maillage grossier.

|                            | déplacement |        | effort |        | Référence |
|----------------------------|-------------|--------|--------|--------|-----------|
|                            | M1          | M2     | M1     | M2     |           |
| $\sigma_{xx_{max}}$        | 200.51      | 240.00 | 636.99 | 491.26 | 312.02    |
| $\sigma_{VMise_{s_{max}}}$ | 175.06      | 209.52 | 556.67 | 429.30 | 274.22    |

Tableau 1.1: Valeurs maximales de  $\sigma_{xx}$  et de la contrainte de Von Mises pour une ré-analyse locale en effort ou en déplacement menée sur deux maillages grossiers différents

Répéter plusieurs fois une analyse descendante puis ascendante permet d'améliorer les résultats obtenus dans la zone d'intérêt. Les travaux de Hirai [Hirai *et al.* 1984 - 1985] qui utilisent de manière conjuguée des techniques de condensation statique et de ré-analyse locale, les travaux de Mao et Sun [Mao et Sun 1991] qui proposent une démarche en trois temps (analyse globale, analyse locale, analyse globale raffinée) ainsi que ceux de Whitcomb [Whitcomb 1991] qui proposent une démarche totalement itérative sont des approches qui permettent de traiter ce problème d'analyse locale-globale et de converger en peu d'itérations vers la solution.

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Les techniques de condensation statique et de ré-analyse locale ne traitent pas de façon efficace les phénomènes multiéchelles survenant dans la zone d'intérêt. Aucune séparation des échelles n'est effectuée. Pour les techniques de condensation statique, cela se traduit par des problèmes de conditionnement dus à des inhomogénéités relatives des raideurs des éléments grossiers et des « super-éléments ». Pour les méthodes de ré-analyse locale classiques, cela se traduit par la nécessité d'alterner plusieurs fois analyses descendante et ascendante pour obtenir des résultats satisfaisants et mettre en place un certain dialogue local-global. Si le processus fonctionne relativement bien pour des détails structuraux à effets très localisés, rien ne permet de conclure quant à la qualité des résultats lorsque ces détails ont un effet à la fois au niveau local et au niveau global comme c'est le cas pour la fissuration.

### 1.4.2 Méthodes de décomposition de domaines

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement peuvent être classées en trois familles : les approches primales (*Balancing Domain Decomposition Method* [Mandel 1993], les approches duales (*Finite Element Tearing and Interconnecting* (FETI) [Farhat et Roux 1991]) et les approches mixtes (méthodes basées sur un algorithme de type Lagrangien augmenté [Glowinski et Le Tallec 1990] ou LATIN [Ladevèze 1999]). La méthode de résolution est, en général, basée sur un algorithme itératif. Afin d'obtenir des méthodes numériquement extensibles, la question de savoir comment propager une information globale s'est posée. Ceci conduit à la mise en place d'un problème grossier issu de la vérification partielle des conditions de transmission entre les sous-structures. Pour les approches duales une vérification partielle des conditions de continuité en effort est imposée. Pour les approches duales cette vérification partielle concerne les déplacements. Pour les approches mixtes, cette vérification partielle concerne à la fois la continuité des ef-



forts et la continuité des déplacements. Ces stratégies deviennent alors de véritables stratégies de calcul multiéchelles.

### ■ Une approche duale : la méthode FETI

La méthode FETI recherche de façon itérative un champ d'effort *a priori* continu aux interfaces afin de garantir, à convergence, la continuité des déplacements. Pour que les problèmes locaux par sous-domaine soient bien posés, le champ d'effort doit vérifier la contrainte d'équilibre des sous-domaines vis-à-vis des chargements extérieurs. Une technique itérative de résolution est alors utilisée. Il s'agit d'une méthode itérative de type gradient conjugué projeté où la projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines. Cette phase de projection peut alors être considérée comme un problème macroscopique grossier garantissant à chaque itération la continuité des modes rigides des sous-domaines au niveau des interfaces. Ce problème global fait de la méthode FETI une stratégie de calcul à deux échelles. Cependant, le problème macroscopique est relativement pauvre puisqu'il est simplement associé aux modes rigides qui sont des modes à énergie nulle. Ainsi, il peut paraître plus juste de considérer que l'approche FETI, dans sa version originale, est une approche à deux échelles en déplacement mais monoéchelle en effort. Pour pallier ce problème, la méthode FETI2 [Farhat *et al.* 1996] apporte une amélioration consistant à vérifier des contraintes supplémentaires sur le déplacement, telles que la continuité en moyenne sur les interfaces. La phase de projection du gradient devient alors un problème macroscopique enrichi. Ces premiers travaux ont ainsi donné lieu à une version plus aboutie appelée FETI-DP (*Dual-primal FETI method*) [Farhat *et al.* 2001].

La méthode FETI permet d'atteindre des performances remarquables moyennant le choix d'un préconditionneur adéquat pour l'algorithme itératif de résolution. Ce choix dépend essentiellement de la nature du problème traité ce qui enlève un peu à la méthode son côté généraliste. Un choix classique consiste à prendre les préconditionneurs « lumped » ou Dirichlet. Pour le traitement des structures hétérogènes, on pourra se référer aux travaux de Rixen et Farhat [Rixen et Farhat 1999]. Enfin, la construction de problèmes grossiers définis sur les espaces de Krylov des opérateurs d'interface [Gosselet et Rey 2002] apporte un moyen très intéressant de propager une information pertinente dans le cadre de la multirésolution. Pour plus de détails, on pourra se référer à [Gosselet 2003].

### ■ Une approche mixte : l'approche micro-macro

L'approche micro-macro [Ladevèze et Dureisseix 1999, Ladevèze et Dureisseix 2000, Ladevèze *et al.* 2001] s'articule autour de trois points fondamentaux :

- **Un partitionnement de la structure en sous-structures et interfaces**

Une sous-structure  $\Omega_E$  est soumise à l'action de son environnement (les interfaces voisines) qui se traduit par une distribution d'effort  $\underline{F}_E$  et une distri-

bution de déplacement  $\underline{W}_E$ . Ce partitionnement confère le caractère mixte à cette méthode de décomposition de domaine.

– **Un aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces**

Contrairement à la plupart des approches multiéchelles, la séparation entre les échelles ne se fait qu’au niveau des interfaces. Les quantités d’interface s’écrivent ainsi comme la somme d’une partie macro et d’une partie micro. Ainsi,  $\underline{F}_E = \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m$  et  $\underline{W}_E = \underline{W}_E^M + \underline{W}_E^m$ . Les définitions des quantités macro et micro sur une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  sont telles qu’elles vérifient la relation de découplage des travaux micro et macro d’interface qui s’écrit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m d\Gamma \quad (1.6)$$

Un projecteur  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$  vérifiant cette relation de découplage (1.6) peut ainsi être défini sur l’interface. On a alors :  $\underline{F}^M = \Pi_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F})$  et  $\underline{F}^m = (\text{id} - \Pi_{\Gamma_{EE'}})(\underline{F})$ . Il en est de même pour  $\underline{W}$ . Un choix classique est de prendre un projecteur qui extrait la partie linéaire de la quantité d’interface.

– **Une vérification partielle des conditions de transmission**

Les efforts macro d’interface doivent systématiquement vérifier les conditions de transmission *a priori*. L’espace associé est noté  $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$ .

L’algorithme itératif LATIN [Ladevèze 1999] est alors utilisé pour résoudre. Deux groupes d’équations  $\mathbf{A}_d$  et  $\Gamma$  permettant de séparer les difficultés sont ainsi constitués :

$$\begin{array}{l} \mathbf{A}_d \quad \left\| \begin{array}{l} - \text{l'admissibilité statique de } (\sigma_E, \underline{F}_E), \forall \underline{M} \in \Omega_E \\ - \text{l'admissibilité cinématique de } (\varepsilon_E, \underline{W}_E), \forall \underline{M} \in \Omega_E \\ - \text{l'admissibilité de } \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{ \underline{F}_E^M \} \in \mathcal{F}_{\text{ad}}^M \end{array} \right. \\ \\ \Gamma \quad \left\| \begin{array}{l} - \text{la relation de comportement de chaque sous-structure } \Omega_E \\ - \text{la relation de comportement décrivant le comportement des interfaces} \end{array} \right. \end{array}$$

$\Gamma$  regroupe les équations locales éventuellement non-linéaires et  $\mathbf{A}_d$ , les équations linéaires éventuellement globales. La stratégie consiste à chercher une solution qui vérifie alternativement les équations de  $\mathbf{A}_d$  puis celles de  $\Gamma$  par le biais de deux directions de recherche rendant le problème bien posé. La résolution d’une succession de problème micro par sous-structure pour des sollicitations macros (ne générant qu’un travail macro d’après la relation de découplage (1.6)) permet de construire un opérateur homogénéisé sur chaque sous-structure qui relie les quantités interface d’effort macro et de déplacement macro. L’admissibilité de  $\bigcup_{E \in \mathbf{E}} \{ \underline{F}_E^M \} \in \mathcal{F}_{\text{ad}}^M$  et la définition des opérateurs homogénéisés par sous-structure permet de définir un problème macro portant sur les inconnues d’efforts macro  $\underline{F}^M$ . Le caractère

mixte de la stratégie et la définition de quantités macro par interface permet de construire automatiquement des opérateurs homogénéisés capable de représenter une cinématique relativement riche au niveau macro. L'approche s'est ainsi avérée très efficace pour le traitement de structures fortement hétérogènes [Ladevèze *et al.* 2001, Loiseau 2001]. Dans le domaine du non-linéaire, on peut citer les travaux de [Ladevèze *et al.* 2002] pour la prise en compte de non-linéarités au niveau des interfaces dans les problèmes de contact. Les travaux de [Nineb *et al.* 2005] sur les systèmes de tenségrité constituent une application de l'approche dans la situation où les non-linéarités sont localisées dans les sous-structures. Cette approche micro-macro est détaillée dans le chapitre 2.

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Ces stratégies de calcul itératives basées sur une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement mettent en place un problème grossier issu de la vérification partielle des conditions de transmission entre les sous-structures. Le choix de ces conditions de transmission est primordial pour obtenir une approche numériquement extensible et performante en terme de taux de convergence. Une vérification partielle mais mixte de conditions de transmission à la fois en effort et en déplacement fait de l'approche micro-macro et de la méthode FETI-DP des stratégies multiéchelles efficaces y compris dans le cas où des gradients de sollicitations au niveau macroscopique, tels que ceux rencontrés dans les structures hétérogènes, surviennent. Cependant, la prise en compte de gradients plus importants à l'échelle macroscopique, tels que ceux induits par une fissure, nécessite la mise en place d'un comportement homogénéisé des sous-structures plus riche.

## 2 Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration

Le traitement de la fissuration a fait l'objet de plusieurs travaux spécifiques permettant de répondre aux deux difficultés posées par la propagation de fissure. La première, d'ordre technique, concerne les difficultés dues aux processus de maillage et de remaillage au cours de la propagation. Cette difficulté est induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis qui reste aujourd'hui la méthode de simulation la plus répandue dans le milieu industriel. Elle provient du fait qu'une fissure ne peut se propager que le long des bords des éléments. En d'autres termes, le maillage doit être conforme à la géométrie de la fissure. La deuxième difficulté concerne la description correcte des champs singuliers en pointe de fissure. Cette singularité est

en effet difficile à représenter avec des éléments finis classiques. Néanmoins, les lois de propagation de fissure s'alimentent de données locales en pointe de fissure telles que les contraintes et les déformations pour prédire la direction de propagation. Dans cette partie, conscient de l'intérêt très marqué des industriels pour la méthode des éléments finis, nous présenterons essentiellement des approches qui en sont issues. Mais d'autres approches permettent de répondre à la question telle que la méthode des équations intégrales appliquée à la fissuration [Hocine 1998].

Trois approches de philosophie différente sont présentées dans cette partie. La première approche est celle de Tong et Pian [Tong *et al.* 1973]. Afin de mieux décrire la solution en pointe de fissure, ils proposent un élément fini hybride spécifique pour les problèmes plans de mécanique élastique linéaire de la rupture. Les deux autres approches sont basées sur un enrichissement de la cinématique du milieu continu qui permet d'introduire une discontinuité dans le champ de déplacement. Ainsi, la méthode de la *partition de l'unité* (PUM) introduite par Melenk et Babuška [Melenk et Babuška 1996] propose une façon d'augmenter l'espace d'approximations de la solution et a donné lieu à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) [Belytschko et Black 1999, Moës *et al.* 1999] et à celle des éléments finis généralisés (G-FEM) [Strouboulis *et al.* 2000 - 2001]. Enfin, l'approche des fortes discontinuités (SDA) [Oliver 2000, Oliver *et al.* 2002 - 2003] prend en compte un saut de déplacement au sein de chaque élément suivant le concept d'*enhanced assumed strain* [Simo et Rifai 1990].

## 2.1 Éléments finis hybrides

Les éléments finis classiques permettent difficilement de représenter la singularité survenant en pointe de fissure. Les fonctions de formes éléments finis polynomiales classiques ne présentant pas la régularité nécessaire, raffiner le maillage en pointe de fissure permet difficilement d'approximer la solution. La convergence de l'erreur en énergie en fonction de la taille des éléments est toujours pilotée par la nature de la singularité. Tong et Pian [Tong *et al.* 1973] ont ainsi proposé un élément fini hybride spécifique permettant de décrire les champs asymptotiques en pointe de fissure.

La formulation de cet élément HCE (*Hybrid Crack Element*) s'appuie sur une formulation hybride de l'élément en contraintes et déplacements, inspirée des travaux de Pian [Pian 1964]. Le nombre de nœuds sur le bord de l'élément peut être arbitraire. La figure 1.11 représente un élément HCE à  $n$  nœuds utilisé en pointe de fissure. Les déplacements ne sont interpolés que sur les faces de l'élément HCE, linéairement, de façon à pouvoir « connecter » cet élément à des éléments finis classiques linéaires. La contrainte est interpolée à l'intérieur de manière polynomiale, par exemple, par des fonctions de contrainte (vérifiant  $\text{div}(\sigma) = 0$ ). Ainsi,

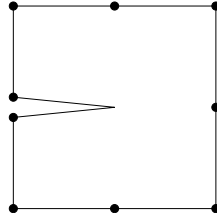


Figure 1.11: Un élément HCE polygonal à 9 nœuds ( $n = 9$ ) utilisé en pointe de fissure

sur l'élément  $E$ , déplacement  $\underline{u}_E$  et contrainte  $\sigma_E$  sont interpolés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} [\underline{u}_E(\underline{M})] &= [N_E(\underline{M})][q_E] \\ [\sigma_E(\underline{M})] &= [P_E(\underline{M})][\beta_E] \end{aligned}$$

La minimisation de l'énergie complémentaire sur l'élément  $E$  par rapport à la contrainte et les interpolations précédentes donnent :

$$E_{c|\Omega_E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma_E) d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \sigma_E \underline{n}_E \cdot \underline{u}_E d\Gamma = \frac{1}{2} [\beta_E]^T [\mathbf{H}_E] [\beta_E] - [\beta_E]^T [\mathbf{G}_E] [q_E]$$

d'où  $[\mathbf{H}_E][\beta_E] = [\mathbf{G}_E][q_E]$  et  $[\beta_E] = [\mathbf{H}_E]^{-1}[\mathbf{G}_E][q_E]$ . En substituant, les déplacements aux contraintes dans l'expression de l'énergie de déformation exprimée en terme de contrainte, on en déduit la matrice de rigidité de l'élément :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma_E) d\Omega = \frac{1}{2} [\beta_E]^T [\mathbf{H}_E] [\beta_E] = \frac{1}{2} [\underline{u}_E]^T [\mathbf{K}_E] [\underline{u}_E]$$

et ainsi :  $[\mathbf{K}_E] = [\mathbf{G}_E]^T [\mathbf{H}_E]^{-1} [\mathbf{G}_E]$ . De manière à ce que la matrice  $[\mathbf{K}_E]$  soit régulière, aux modes rigides près, la condition suivante doit être respectée pour la matrice  $[\mathbf{H}_E]$  :

$$\text{rang}([\mathbf{H}_E]) \geq \text{rang}([\mathbf{K}_E]) = n_e - n_r$$

où  $n_e$  est le nombre de degrés de liberté en déplacement de l'élément et  $n_r$  est le nombre de modes rigides de l'élément ( $n_r = 3$  en 2D). Ainsi, une condition apparaît sur la dimension de l'espace d'approximation des contraintes compte tenu du nombre  $n$  de nœuds. Pour un élément à sept nœuds, un espace d'approximation de dimension 12 est nécessaire, conduisant à une interpolation quadratique des contraintes. Pour prendre en compte une pointe de fissure, des fonctions polynomiales pour l'interpolation des contraintes ne sont pas adaptées. La base des fonctions de forme pour les contraintes est déduite du développement asymptotique de

la solution en pointe de fissure tronqué à l'ordre  $N$ . Ainsi, pour un mode  $I$  d'ouverture, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^N \begin{bmatrix} f_{1p}(r, \theta) \\ f_{2p}(r, \theta) \\ f_{3p}(r, \theta) \end{bmatrix} a_p = [P_E][\beta_E]$$

où :

$$f_{1p}(r, \theta) = \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \left[ \left( 2 + \frac{p}{2} + (-1)^p \right) \cos \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \theta \right] - \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \cos \left[ \left( \frac{p}{2} - 3 \right) \theta \right] \right]$$

$$f_{2p}(r, \theta) = \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \left[ \left( 2 - \frac{p}{2} - (-1)^p \right) \cos \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \theta \right] + \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \cos \left[ \left( \frac{p}{2} - 3 \right) \theta \right] \right]$$

$$f_{3p}(r, \theta) = \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \sin \left[ \left( \frac{p}{2} - 3 \right) \theta \right] - \left( \frac{p}{2} + (-1)^p \right) \sin \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \theta \right] \right]$$

Les coefficients  $[\beta_E]$  sont alors les coefficients  $a_n$ . Pour un nombre de nœuds donné de l'élément, il convient alors de choisir correctement l'ordre  $N$  du développement asymptotique [Karihaloo et Xiao 2001, Xiao et Karihaloo 2003]. L'approche fournit un excellent moyen de déterminer directement et précisément les facteurs d'intensité de contraintes, ceux-ci correspondant à un coefficient multiplicatif  $1/\sqrt{2\pi}$  près, aux coefficients  $[\beta_E]$ .

*Remarque : La formulation de cet élément hybride peut aussi être obtenue par les formulations variationnelles de Hu-Washizu et de Hellinger-Reissner sur l'élément. Les conditions de continuité des vecteurs contraintes et du déplacement du bord de l'élément avec les champs intérieurs correspondants sont alors vérifiées au sens faible.*

**■ Bilan et limitations pour notre étude**

Par la formulation d'un élément hybride, cette approche permet de prendre en compte de façon exacte les solutions asymptotiques en pointe de fissure. L'introduction de la forme de la solution permet alors d'estimer avec précision les facteurs d'intensité de contrainte pour une taille de l'élément hybride relativement faible. Bien que simplifiant considérablement le maillage en pointe de fissure, les difficultés de maillage persistent. Elles sont dues à la nécessité d'avoir un maillage conforme à la géométrie des lèvres de la fissure. Par ailleurs, le traitement spécifique de l'élément HCE en pointe de fissure peut s'avérer difficile à gérer dans un contexte de propagation de fissure ; l'élément étant « attaché » à la pointe de fissure. On retrouve les difficultés techniques rencontrées par les méthodes éléments finis classiques traitant de la fissuration pour lesquelles un maillage fixe, appelé communément « boîte à fissure », est attaché à la pointe de fissure pour faciliter le calcul des facteurs d'intensité de contrainte.

## 2.2 Méthodes basées sur la partition de l'unité

### 2.2.1 Méthode de la partition de l'unité

Un espace d'approximation composé de fonctions polynomiales comme l'espace engendré par une base éléments finis, peut s'avérer être inadapté pour approcher certaines solutions non régulières. Pour ce type d'espace d'approximation, le raffinement de la taille de maille  $h$  ( $h$ -version) ou l'augmentation du degré des polynômes  $p$  ( $p$ -version) permet difficilement d'approcher la solution, la singularité de celle-ci pouvant difficilement être représentée. Une connaissance analytique ou numérique sur la nature de la solution, comme par exemple l'ensemble des polynômes harmoniques, solution de l'équation de Laplace, ou les solutions asymptotiques en pointe de fissure doit permettre en effet de construire des espaces d'approximation plus pertinents et/ou de régularité désirée. La prise en compte de cette connaissance dans un espace d'approximation peut se faire via la PUM (*Partition of Unity Method* [Melenk et Babuška 1996]).

Considérons  $\mathcal{T} = \{\Omega_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ , un ensemble d'ouverts réalisant un recouvrement du domaine d'étude  $\Omega$ . Chaque  $\Omega_i$  peut recouvrir une partie de ses voisins. De nouvelles fonctions  $v_i$  sont définies sur chaque *patch*  $\Omega_i$  avec  $i \in \mathbf{I}$ . Ces fonctions représentent soit une partie de la solution (solution asymptotique en pointe de fissure par exemple) soit une base de fonctions mieux adaptée que celle des éléments finis classiques et sont telles que  $\forall i \in \mathbf{I}, v_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ . Par ailleurs, définissons

également un ensemble de fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  sur les  $\Omega_i$  de manière à ce qu'elles forment sur  $\Omega$  une partition de l'unité associée à la partition  $\mathcal{T}$ . Plus précisément, ces fonctions doivent vérifier :

$$\begin{aligned} \text{support}(\varphi_i) &\subset \bar{\Omega}_i, \quad \forall i \in \mathbf{I} \\ \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i &= 1 \quad \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

Remarquons que les fonctions « chapeau » éléments finis classiques forment une partition de l'unité (Figure 1.12). Dans ce cas, une fonction  $\varphi_i$ ,  $i \in \mathbf{I}$ , est associée à un nœud et le *patch*  $\Omega_i \cap \Omega$  comprend l'ensemble des éléments contenant ce nœud. On définit alors l'espace d'approximation PUM sur le domaine  $\Omega$  de la façon

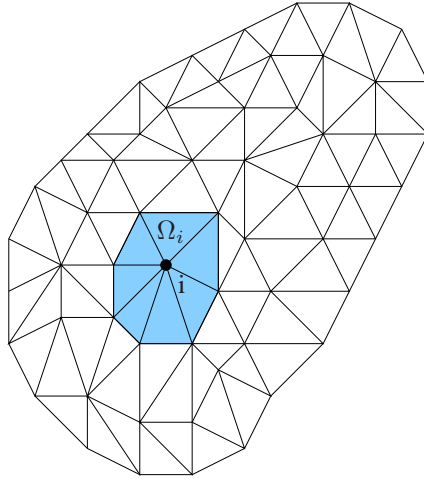


Figure 1.12: Choix d'une partition de l'unité basée sur une triangulation de  $\Omega$  : définition du *patch*  $\Omega_i$  associé au nœud  $i$

suivante :

$$\mathcal{V}_{PUM} = \left\{ u(x) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(x) v_i(x) \mid v_i \in \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega) \right\} \subset H^1(\Omega)$$

Si sur chaque *patch*  $\Omega_i \cap \Omega$ , la fonction  $u$  peut être approximée par une fonction  $v_i \in \mathcal{V}_i$ , telle que :

$$\begin{aligned} \|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} &\leq \epsilon_1(i) \\ \|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} &\leq \epsilon_2(i) \end{aligned}$$



alors la fonction  $u_h = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i v_i \in \mathcal{V}_{PUM}$  vérifie [Melenk et Babuška 1996] :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \sqrt{\sum_i \epsilon_1(i)^2} \\ \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_2 \sqrt{\sum_i \epsilon_1(i)^2 + \epsilon_2(i)^2} \end{aligned}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes dépendant uniquement de caractéristiques de la partition  $\mathcal{T}$  (taille des  $\Omega_i$ , nombre maximale de *patch* se recouvrant en un même point) et de l'ensemble de fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ . En d'autres termes, la PUM permet de fournir une bonne approximation de  $u$  sur  $\Omega$  dès lors qu'une bonne approximation de  $u$  sur chaque  $\Omega_i$  est fournie et ceci quelle que soit la partition de l'unité formée par les  $\varphi_i$ . Si une base éléments finis classique est choisie comme partition de l'unité, ce résultat est donc valable quels que soient  $h$  ou  $p$ . Notons que l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_{PUM}$ , hérite des propriétés des espaces locaux  $\mathcal{V}_i$ , c'est-à-dire que la fonction  $u$  peut être approximée sur  $\Omega$  par les fonctions engendrant l'espace  $\mathcal{V}_{PUM}$  si les restrictions de  $u$  à chaque  $\Omega_i$  peuvent être approximées par les espaces locaux  $\mathcal{V}_i$  correspondants. Par ailleurs, l'espace  $\mathcal{V}_{PUM}$  hérite de la régularité de la partition de l'unité formée par les  $\varphi_i$ . En particulier, la régularité de la partition de l'unité assure, par définition, la conformité (continuité entre chaque élément fini dans un espace d'approximation éléments finis) de l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_{PUM}$ .

## 2.2.2 X-FEM et G-FEM

Le paragraphe 2.2.1 a montré que l'on pouvait approcher la solution  $u$  sur un domaine  $\Omega$  par la PUM sous la forme :

$$u_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)}(\underline{x}) \right)$$

où  $v_j^{(i)}$  est une fonction particulière de l'ensemble de fonctions  $\{v_j^{(i)}\}_{j \in \mathbf{J}_i}$  définies sur chaque  $\Omega_i$  et définissant une bonne approximation de la solution sur  $\Omega_i$ . Les fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  forment quant à elle une partition de l'unité sur  $\Omega$  et permettent d'assurer une continuité de la solution entre chaque  $\Omega_i$ . Les  $a_j^{(i)}$  sont des coefficients constants, des degrés de liberté PUM. Un choix classique pour les fonctions  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  consiste à prendre les fonctions de forme éléments finis standards. Un domaine  $\Omega_i$  correspond alors au support des fonctions « chapeau » définies au nœud  $i$ , c'est le domaine d'influence du nœud  $i$  (Figure 1.12). Ce choix conduit à ce que Babuška et Melenk appellent la PUFEM, *Partition of Unity Finite Element Method* [Melenk et Babuška 1996].

Dans la G-FEM, *Generalized Finite Element Method* [Strouboulis *et al.* 2000 - 2001], comme dans la X-FEM, *eXtended Finite Element Method* [Belytschko et Black 1999, Dolbow *et al.* 2000a, Stolarska *et al.* 2001, Moës *et al.* 2002a], on inclut dans la liste des fonctions  $\{v_j^{(i)}\}_{j \in \mathbf{J}_i}$  définies sur chaque  $\Omega_i$ , la fonction constante  $v_j^{(i)} = 1, \forall i \in \mathbf{I}$ . Ainsi, si la liste  $\{v_j^{(i)}\}_{j \in \mathbf{J}_i}$  ne contient que cette fonction constante, la PUFEM est rigoureusement équivalente à une approche éléments finis classique FEM dont les fonctions de forme sont définies par la partition de l'unité formée par les  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ . Ceci explique les qualificatifs *Generalized* et *eXtended* de la G-FEM et de la X-FEM. Cette version de la PUFEM inclut donc l'espace éléments finis classique. Rien n'empêche d'inclure dans cette espace, des fonctions de forme éléments finis de degré plus élevé que l'on notera  $\{\hat{\varphi}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ . Ainsi, l'approximation correspondant à ces deux nouvelles versions de la PUFEM peut s'écrire sous la forme :

$$u_{G-X-FEM}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n_{FEM}} \hat{\varphi}_i(\underline{x}) u_i + \sum_{i=1}^{n_e} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^{n_i} a_j^{(i)} v_j^{(i)}(\underline{x}) \right) \quad (1.7)$$

où  $n_e$  correspond au nombre de nœuds dont le support  $\Omega_i$  est enrichi par des fonctions particulières  $\{v_j^{(i)}\}_{j \in \mathbf{J}_i}$ ,  $n_i$  est le nombre de fonctions particulières associées au domaine enrichi  $\Omega_i$  et  $n_{FEM}$  est le nombre total de nœuds du maillage. Le nombre de degrés de liberté  $n$ , pour le cas où  $u_{G-X-FEM}$  est un champ scalaire, est donc :

$$n = n_{FEM} + \sum_{i=1}^{n_e} n_i$$

La G-FEM et la X-FEM ne sont donc pas des méthodes fondamentalement différentes. La différence réside essentiellement dans leurs motivations. Celles-ci ont donné lieu à des travaux qui ont mis l'accent sur des aspects différents. La G-FEM met l'accent sur la qualité de l'espace engendré par les fonctions d'enrichissement afin d'obtenir une convergence optimale en énergie de la solution (h-version et p-version). Signalons aussi que la G-FEM étudie le cas où les fonctions d'enrichissement peuvent être des solutions numériques à des problèmes élémentaires appelés *handbooks* correspondant à des problèmes en milieux infinis ou semi-finis. Cette technique permet de traiter des problèmes de structures contenant plusieurs centaines de trous. Dans ce cas, une série de *handbooks* sont associés à un élément du maillage grossier. Les trous situés dans cet éléments sont alors isolés. Une série de problèmes posés sur un domaine contenant uniquement ces trous sont alors résolus pour des chargements simples de type Dirichlet ou Neumann (Figure 1.13). La G-FEM s'inscrit complètement dans la lignée des travaux de Babuška.

La X-FEM a exploité essentiellement la flexibilité offerte par la PUM dans la génération des maillages ; les maillages n'ayant plus à se conformer à des surfaces

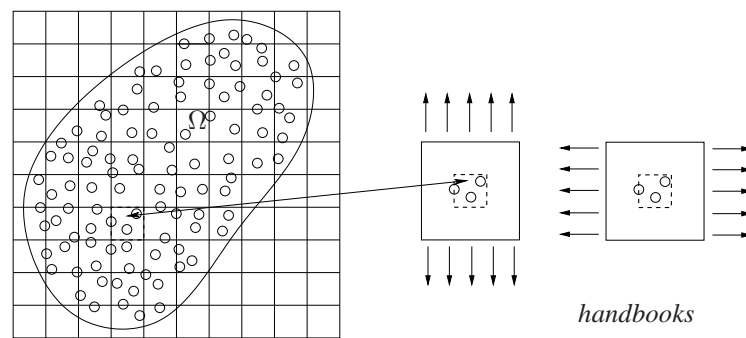


Figure 1.13: Méthode G-FEM : définitions de *handbooks* résolus sur un élément du maillage grossier contenant trois trous

comme celles décrivant une fissure par exemple. Les travaux concernant la X-FEM ont œuvré de façon à permettre son introduction dans le milieu industriel. Les choix d'outils appropriés comme la technique des *Level Sets* [Osher et Sethian 1988, Sethian 1999] permet de faciliter son implantation en 2D comme en 3D dans un code industriel. Cet outil *Level Sets* permet en effet de décrire avec une grande souplesse la géométrie d'une fissure par exemple, de définir les fonctions d'enrichissement associées (modélisation de la discontinuité et de la solution en pointe de fissure) et de faire évoluer, propager, cette fissure. La X-FEM commence donc à susciter l'intérêt de nombreux industriels et chercheurs. À titre d'exemple, nous pouvons citer à ce jour le développement de la X-FEM dans SAMCEF de Samtech et dans le code ASTER ainsi que des projets de développement dans RADIOSS et Cast3M. Il faut noter la rapidité avec laquelle la X-FEM est passée du monde scientifique (début des travaux en 1999) au monde industriel, aujourd'hui en 2005 : moins de 10 ans ! De nombreux scientifiques s'y intéressent également, ce qui a permis de réaliser des études comparatives avec d'autres stratégies comme la comparaison entre l'approche des fortes discontinuités (SDA) et la X-FEM faite par Dumstorff et Meschke [Dumstorff *et al.* 2003] ou celle réalisée par Jirásek et Belytschko [Jirásek et Belytschko 2002]. Actuellement, les développements récents concernant la X-FEM visent à rendre la méthode plus robuste [Béchet *et al.* 2004] afin d'atteindre les taux de convergence optimaux attendus [Laborde *et al.* 2004].

### 2.2.3 Modélisation d'une fissure selon la X-FEM

La méthode X-FEM utilise un choix de fonctions spéciales pour traiter des problèmes où la solution présente des discontinuités en s'affranchissant des difficultés de maillage. Ces discontinuités peuvent apparaître dans le champ de déplacement [Moës *et al.* 1999] ou dans sa dérivée normale sur une surface entre des matériaux de nature différentes [Sukumar *et al.* 2001]. Pour le cas de la fissuration qui nous intéresse, une discontinuité en déplacement est prise en compte en introdui-

sant la fonction de Heavyside  $H$  comme enrichissement. Pour représenter au mieux la solution en pointe de fissure, une base de quatre fonctions  $\{F_j\}_{j=1\dots 4}$  décrivant les solutions asymptotiques dans cette zone est également introduite. Cette base de fonctions a été initialement utilisée dans la méthode EFG (*Element Free Galerkin*) par Fleming et Belytschko [Fleming *et al.* 1997]. Le champ de déplacement  $\underline{u}$  est alors cherché sous la forme :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \hat{\varphi}_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in N_d} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in N_p} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^4 F_j(\underline{x}) \underline{b}_i^j \right) \quad (1.8)$$

où :

- $N$  est l'ensemble des nœuds du maillage ;
- $\underline{u}_i$  est le degré de liberté (vectoriel) classique au nœud  $i$  ;
- $\varphi_i$  est choisie, en pratique, identique à  $\hat{\varphi}_i$  et est la fonction « chapeau » éléments finis classique associée au nœud  $i$  ;
- $N_d \subset N$  est l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité et les coefficients  $\underline{a}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un nœud appartient à  $N_d$  si son support est coupé par la fissure mais ne contient aucune de ses pointes. Ces nœuds sont entourés d'un carré sur la figure 1.14 ;
- $N_p \subset N$  est l'ensemble des nœuds à enrichir pour modéliser le fond de fissure et les coefficients  $\underline{b}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un nœud appartient à  $N_p$  si son support contient la pointe de fissure. Ces nœuds sont entourés d'un cercle sur la figure 1.14.

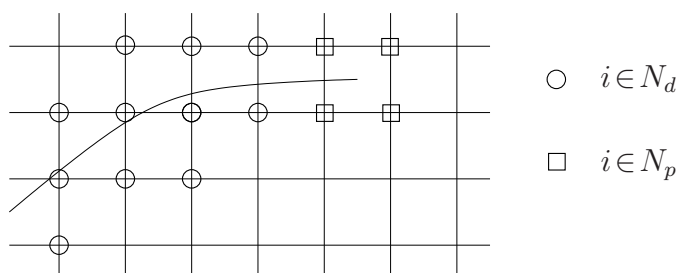


Figure 1.14: Fissure placée sur un maillage uniforme. Les nœuds entourés d'un cercle sont enrichis par la discontinuité et les nœuds entourés d'un carré sont enrichis par la bases de fonctions asymptotiques en pointe de fissure.

On remarquera que cet enrichissement opéré suivant la méthode de la partition de l'unité est très local et ne concerne qu'un petit nombre de nœuds et un petit nombre de *patches*. Aussi si l'on souhaite que l'enrichissement soit efficace, la taille de cette zone enrichie doit être pertinente. Le chapitre 5 détaille l'implantation de la X-FEM.

#### 2.2.4 Les difficultés liées à la PUM

L'utilisation d'une méthode d'enrichissement qui se base sur la PUM fait apparaître plusieurs difficultés. La première est liée au mauvais conditionnement de la matrice de raideur à laquelle la PUM conduit, celle-ci pouvant même être singulière. En effet, si l'espace d'approximation (voir l'équation (1.7)) est engendré par les fonctions  $\{\varphi_i v_j^{(i)}\}$  cela ne signifie pas que les  $\{\varphi_i v_j^{(i)}\}$  forme une base de cet espace. Aussi, une attention particulière [Strouboulis *et al.* 2000, Béchet *et al.* 2004] doit être portée sur le choix des fonctions d'enrichissement  $\{v_j^{(i)}\}$  de façon à ce que l'ensemble de fonctions  $\{\varphi_i v_j^{(i)}\}$  ne présente pas de dépendances linéaires avec les fonctions éléments finis classiques [Melenk et Babuška 1996]. Si d'un point de vue continu, il est facile de faire un bon choix pour cette base, cela n'est plus aussi simple dès lors qu'il s'agit d'intégrer numériquement la formulation faible qui en découle. Néanmoins, comme dans le cas d'une méthode éléments finis classique, il existe une solution unique (à une « constante » près) bien que la solution du système linéaire d'équations qui donne lieu à la matrice de raideur et au vecteur des efforts généralisés, ne soit pas unique. Si, pour une méthode éléments finis, il est facile d'identifier les mouvements de corps rigide définissant le noyau de la matrice de raideur, l'identification du noyau de la matrice de raideur PUM n'est pas aussi simple.

Une autre difficulté réside dans l'intégration de ces nouvelles fonctions  $\{\varphi_i v_j^{(i)}\}$  pouvant être très complexes. Des « maillages d'intégration » pour intégrer correctement les quantités de part et d'autres d'une frontière modélisée par la PUM sont à mettre en place [Sukumar *et al.* 2001, Strouboulis *et al.* 2001]. Néanmoins, ce problème reste relativement bien identifié et cerné.

Enfin, d'un point de vue programmation, la base de données de ce type de méthode peut s'avérer être difficile à mettre en place dans un code industriel compte tenu de la diversité du nombre et de la nature des degrés de liberté à gérer. On pourra se référer aux travaux de Strouboulis [Strouboulis *et al.* 2000 - 2001] et de Moës concernant l'architecture de leur code de développement [Moës 1999]. Certaines de ces difficultés seront discutées dans le chapitre 5.

### ■ Bilan et limitations pour notre étude

Les approches basées sur la partition de l'unité permettent d'obtenir une amélioration conséquente de la qualité de la solution par rapport aux approches éléments finis standard tout en s'affranchissant des problèmes de maillage. Néanmoins, des difficultés persistent concernant l'intégration numérique des fonctions de forme enrichies qui peuvent être complexes. Des problèmes de conditionnement liés à une dépendance linéaire, d'un point de vue numérique, de ces nouvelles fonctions de forme avec les fonctions de formes éléments finis standard peuvent survenir. Par conséquent, sans séparation particulière des échelles, ce problème de conditionnement devient d'autant plus gênant si on souhaite traiter des phénomènes de localisation tels que ceux engendrés par la présence d'une fissure.

## 2.3 Approche des fortes discontinuités

Comme la X-FEM, la SDA (*Strong Discontinuity Approach*) est basée sur un enrichissement de la cinématique du milieu continu permettant l'apparition de discontinuité dans le champ de déplacement. Considérons le domaine  $\Omega$  (Figure 1.15) séparé en deux parties  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  par la surface de discontinuité  $\Gamma$ . On note  $\underline{n}$  la normale unitaire à  $\Gamma$  dirigée de  $\Omega^-$  vers  $\Omega^+$ . Le champ de déplacement  $\underline{u}$  est décomposé en une partie continue  $\bar{\underline{u}}$  et une partie discontinue  $\hat{\underline{u}}$  :

$$\underline{u}(\underline{M}) = \bar{\underline{u}}(\underline{M}) + \hat{\underline{u}}(\underline{M}) \quad \forall \underline{M} \in \Omega \quad (1.9)$$

La différence essentielle entre la SDA et la XFEM réside dans le choix du champ discontinu  $\hat{\underline{u}}$ . Dans la SDA,  $\hat{\underline{u}}(\underline{M}) = (H_\Gamma(\underline{M}) - \psi(\underline{M})) \llbracket \underline{u} \rrbracket$  où  $\psi$  est une fonction suffisamment régulière permettant d'imposer les conditions limites sur  $\underline{u}$  uniquement en terme de  $\bar{\underline{u}}$  et non à la fois en terme de  $\bar{\underline{u}}$  et de  $\hat{\underline{u}}$ .  $\psi$  est donc choisie de façon à localiser le support de  $\hat{\underline{u}}$  aux éléments traversés par la discontinuité. Le saut de déplacement  $\llbracket \underline{u} \rrbracket$  est en général choisi constant par élément. Ainsi le terme  $\varepsilon(\llbracket \underline{u} \rrbracket)$  n'apparaît pas dans l'expression du champ de déformation qui s'écrit alors :

$$\varepsilon_{SDA}(\underline{u}) = \underbrace{\varepsilon(\bar{\underline{u}}) - (\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \nabla \psi)_{sym}}_{\text{régulier}} + \underbrace{(\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})_{sym}}_{\text{singulier}} \delta_\Gamma \quad (1.10)$$

où  $(\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})_{sym}$  représente la partie symétrique de  $(\llbracket \underline{u} \rrbracket \otimes \underline{n})$ . Pour l'approximation éléments finis de  $\underline{u}$ , la fonction  $\psi$  est définie de manière à ce que  $\hat{\underline{u}}$  satisfasse les conditions de Dirichlet. En particulier, en chaque nœud  $\underline{x}_i$  du maillage :

$$\hat{\underline{u}}(\underline{x}_i) = 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, \dots, n \rrbracket$$

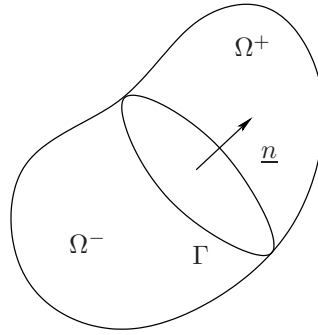


Figure 1.15: Milieu  $\Omega$  séparé en deux parties  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  par la surface de discontinuité  $\Gamma$  de normale  $\underline{n}$

Une façon simple de choisir  $\psi$  est alors de prendre :

$$\psi(\underline{\chi}) = \sum_{i=1}^{n_{el}^+} N_i(\underline{\chi})$$

où les  $n_{el}^+$  sont les noeuds de l'élément qui se trouve dans  $\Omega^+$  et les  $N_i$  sont les fonctions de forme éléments finis.  $\underline{\chi}$  représente le vecteur position dans l'élément fini de référence. Le support de la fonction  $G_\Gamma(\underline{M}) = H_\Gamma(\underline{M}) - \psi(\underline{M})$  est alors restreint aux éléments traversés par la discontinuité  $\Gamma$ . Et l'approximation éléments finis de  $\underline{u}$  s'écrit sur l'élément de référence :

$$\underline{u}_h(\underline{\chi}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} N_i(\underline{\chi}) \bar{u}_i + G_\Gamma(\underline{\chi}) \llbracket \underline{u} \rrbracket_{el} \quad (1.11)$$

où  $\llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}$  représente le saut de déplacement constant dans l'élément traversé par la discontinuité. La figure 1.16(b) illustre, en dimension une, la fonction d'enrichissement  $G_\Gamma$  associée au saut de déplacement  $\llbracket u \rrbracket$  constant dans l'élément 2. On notera que le support de  $G_\Gamma$  est restreint à l'élément 2.

L'équation (1.11) montre clairement que les degrés de liberté  $\llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}$  sont similaires à des variables internes à l'élément. D'après l'équation (1.10), l'interpolation des déformations écrites sous forme vectorielle s'écrit :

$$\underline{\varepsilon}_{SDA,h}(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \underbrace{B_i \bar{u}_i + G_r \llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}}_{\text{régulier}} + \underbrace{\delta_\Gamma \llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}}_{\text{singulier}} = B \underline{d} + G \llbracket \underline{u} \rrbracket_{el} \quad (1.12)$$

où  $B$  est l'opérateur matriciel associé à la déformation des fonctions de forme éléments finis classiques  $N_i$ , et  $G$  celui associé à la fonction de forme discontinue  $G_\Gamma$ .  $G$  est donc composée d'une partie régulière et d'une partie singulière.

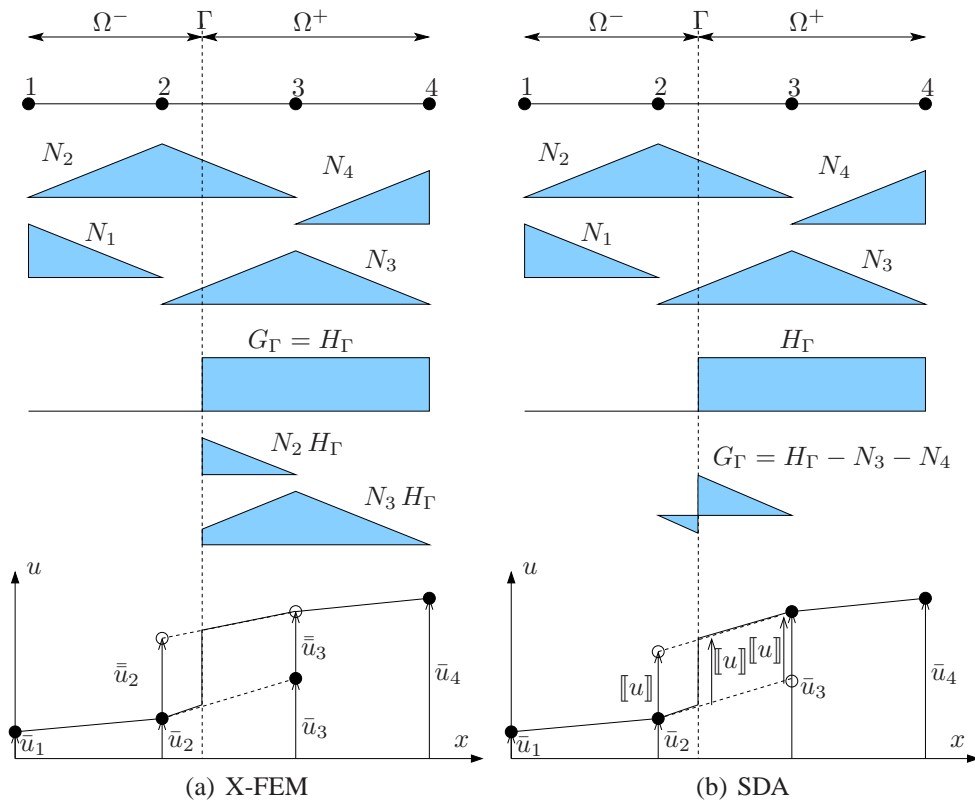


Figure 1.16: Approximation discontinue en dimension une pour la X-FEM et la SDA



$G \llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}$  peut être considéré alors comme une déformation ajoutée ne dépendant que de variables internes propres à l'élément :  $\llbracket \underline{u} \rrbracket_{el}$  (Figure 1.17). Les champs de

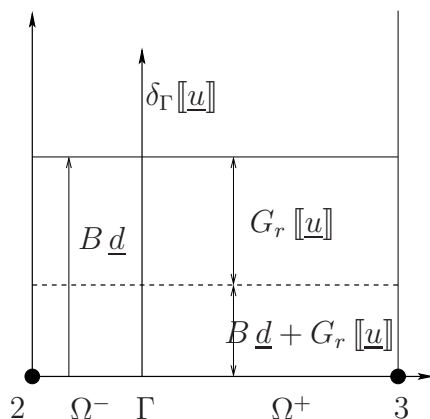


Figure 1.17: Interpolation des déformations pour la SDA sur l'élément 2 traversé par la discontinuité

déplacement et de déformation discrétisés ne vérifient pas l'équation de compatibilité qui est alors vérifiée au sens faible. La façon de traiter cette incompatibilité des déformations ne sera pas explicitée ici. La SDA s'articule autour de cet enrichissement de la déformation à partir d'un champ de déplacement discontinu. C'est le concept de *enhanced assumed strain* [Simo et Rifai 1990].

#### ■ Bilan et limitations pour notre étude

En introduisant au niveau élémentaire un saut de déplacement qui joue alors le rôle d'une variable interne, la SDA permet de rendre compte de l'effet d'une fissure à l'échelle de la structure. La discontinuité n'intervenant qu'au niveau des éléments fissurés, l'implantation de l'approche dans un code éléments finis standard est particulièrement aisée. Néanmoins, la description du trajet de fissuration et de la solution à l'échelle microscopique reste particulièrement pauvre : le trajet est discontinu et la solution en pointe de fissure est très mal décrite. Aussi, l'application de la SDA au contexte de la propagation de fissure semble mal adaptée ; la détermination des caractéristiques des champs locaux en pointe de fissure étant primordiale pour déterminer la loi d'évolution d'une fissure.

## 2.4 Comparaison SDA et X-FEM

L'idée de base des deux méthodes est d'enrichir l'approximation du déplacement par des fonctions de forme discontinues (Figure 1.16). La différence essentielle entre les deux approches est que la X-FEM se base sur un enrichissement du déplacement alors que la SDA se base plutôt, au final, sur un enrichissement de la déformation (introduction d'un terme singulier de déformation).

Pour la SDA, le trajet de fissuration est discontinu (Figure 1.18) puisque la discontinuité au niveau élémentaire n'est pas attachée aux noeuds du maillage mais à la variable interne « saut » propre à l'élément. La déformation est enrichie et

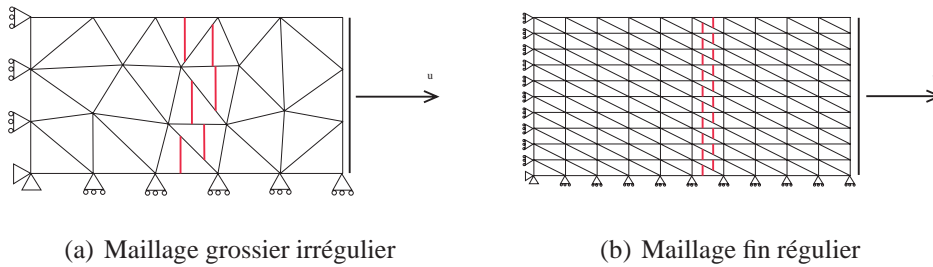


Figure 1.18: Essai de traction simple sur un matériau élasto-endommageable : trajet des lignes de discontinuité déterminé par la SDA pour deux maillages différents (d'après [Brancherie 2003])

est constituée d'une partie régulière et d'une partie singulière. La compatibilité des modes de déformation n'est alors assurée qu'au sens faible. Par ailleurs, les déformations sur un élément coupé par la discontinuité obtenues de part et d'autre de la fissure ne sont pas indépendantes. En effet, l'hypothèse « saut de déplacement  $[[\underline{u}]]$  constant par élément » entraîne que  $\varepsilon ([[ \underline{u} ]]) = 0$  et que par conséquent :

$$\lim_{\underline{M}^+ \rightarrow \underline{M}_0} \varepsilon(\underline{M}^+) = \lim_{\underline{M}^- \rightarrow \underline{M}_0} \varepsilon(\underline{M}^-) \quad \forall \underline{M}_0 \in \Gamma \quad (1.13)$$

Pour la X-FEM, les fonctions d'enrichissement sont restreintes non pas à l'élément mais au support des nœuds à enrichir. Ainsi, le trajet de fissuration interpolé est continu à la traversée des éléments. L'approximation du déplacement est parfaitement compatible. Contrairement à la SDA, aucune hypothèse n'est faite quant au saut de déplacement  $[[\underline{u}]] = \bar{\underline{u}}$  sur  $\Gamma$ .  $\hat{\underline{u}}(\underline{M}) = H_\Gamma(\underline{M}) \bar{\underline{u}}(\underline{M})$  (voir équation (1.9)) où  $H_\Gamma$  est la fonction de Heaviside centrée sur la surface de discontinuité  $\Gamma$  (Figure 1.16(a)). Un terme de saut  $(\bar{\underline{u}} \otimes \underline{n})_{sym}$  est alors inclus dans le champ de déformation :

$$\varepsilon_{X-FEM}(\underline{u}) = \underbrace{\varepsilon(\bar{\underline{u}}) + H_\Gamma \varepsilon(\bar{\underline{u}})}_{\text{régulier}} + \underbrace{(\bar{\underline{u}} \otimes \underline{n})_{sym} \delta_\Gamma}_{\text{singulier}}$$

Il convient d'intégrer correctement l'expression du principe des puissances virtuelles de part et d'autre de la discontinuité. Un effort d'intégration numérique sur les éléments enrichis est alors à faire et nécessite l'ajout de points d'intégration (maillage d'intégration) sur ces éléments (Figure 1.19) [Moës *et al.* 1999, Dolbow *et al.* 2000a]. On remarquera bien que cet effort numérique reste localisé unique-

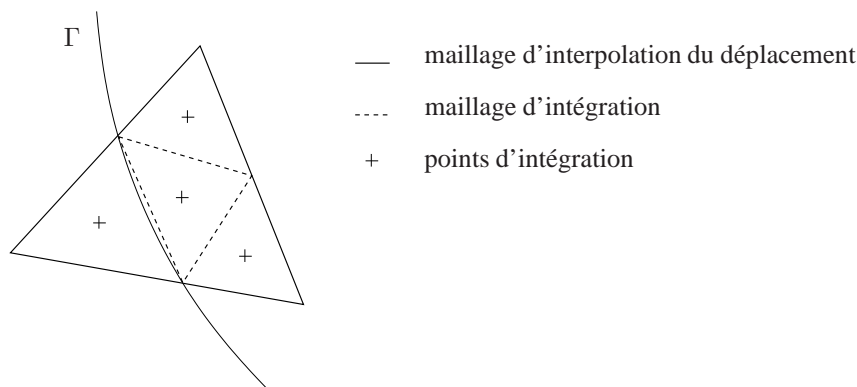


Figure 1.19: Intégration numérique pour la X-FEM sur un élément triangulaire traversé par la discontinuité  $\Gamma$

ment au niveau des éléments enrichis dont le nombre est en général négligeable devant le nombre total d'éléments.

Enfin, notons que les fonctions de forme éléments finis classiques  $N_i$  complétées par l'ajout de fonctions d'enrichissement  $N_i H_\Gamma$  correspondent aux fonctions de formes de deux éléments obtenus par découpage en deux de l'élément traversé par la discontinuité. Les déformations de chaque côté de la fissure sont par conséquent indépendantes (contrairement à la SDA, voir équation (1.13)) et représentatives de la « séparation » de cet élément en deux morceaux.

Concernant l'effort d'implémentation, on constate que la X-FEM nécessite la gestion de l'ajout de degrés de liberté supplémentaires, les  $\bar{u}_i$ . Dans le cas de la propagation de fissure, le nombre de degrés de liberté augmentant à chaque pas du calcul, on est conduit à assembler et à inverser la matrice de rigidité de façon systématique à chaque avancée de la fissure. La SDA, comme il a été montré, n'introduit pas véritablement de degrés de liberté supplémentaires et le saut  $[[u]] = \bar{u}$  affecté à chaque élément enrichi peut être vu comme une variable interne au même titre qu'une déformation plastique localisée traduisant le comportement de l'élément et plus précisément de « l'interface » qui le traverse. Le code de calcul ne voit donc qu'un problème global portant sur les inconnues éléments finis classiques  $\bar{u}_i$  dont le nombre ne change pas au cours du calcul. Le traitement de ces variables

internes de saut est réalisé alors par une forme étendue de l'algorithme de retour radial.

### 3 Bilan

L'utilisation d'une stratégie de calcul multiéchelle pour traiter la fissuration pose plusieurs difficultés. Une fissure ayant une influence à la fois à l'échelle de la structure et à l'échelle de la microstructure, la question de la description de la cinématique et des efforts aux échelles « macro » et « micro » se pose. La définition d'un comportement « homogénéisé » d'une structure fissurée n'est pas évident à exhiber.

Les techniques basées sur la théorie de l'homogénéisation consistent à définir un comportement « macro » entre des quantités « effectives » qui puissent permettre une séparation pertinente des échelles. Les opérateurs homogénéisés (définis *a priori*) de la théorie de l'homogénéisation périodique constitue un exemple mais ils restent valides et performants lorsque les échelles sont bien séparées. Lorsque les échelles ne sont pas bien séparées, c'est le cas où des forts gradients de déformation surviennent (bords, trous, fissure, ...), la construction *a priori* d'une telle loi de comportement macro n'est plus aussi facile et il s'avère qu'une analyse pertinente à l'échelle micro nécessite un couplage fort entre les différentes échelles. Une détermination automatique et itérative du comportement homogénéisé sans hypothèse contraignante (périodicité des quantités micro, grand rapport d'échelle ... ) concernant sa forme semble nécessaire. De plus, la prise en compte de gradients au niveau macroscopique nécessite de pouvoir enrichir la cinématique macroscopique (milieu de Cosserat ou second gradient).

Une autre difficulté concerne la possibilité de pouvoir mener une étude à l'échelle de la microstructure uniquement où cela est nécessaire : dans la zone fissurée (Figure 2). Une technique de « zoom » ou une analyse locale-globale est alors requise. Le couplage d'une description « fine » et « grossière » de la solution dans la zone de raccord doit alors se faire sur des quantités « effectives ».

Pour traiter ce problème d'analyse locale-globale, l'utilisation d'une stratégie multiéchelle basée sur une méthode de décomposition de domaine semble judicieuse. Dans l'approche FETI et l'approche micro-macro présentées au paragraphe 1.4.2, un problème grossier est construit à l'échelle de la structure et est associé à des quantités mécaniques effectives : mouvements de corps rigides des sous-domaines pour la méthode FETI ou déplacements moyens sur une interface pour la méthode FETI-DP, efforts et déplacements moyens d'interface pour l'approche mixte micro-macro. Cette définition mécanique des échelles semble plus à même

de prendre en compte des particularités propres au problème traité de façon à propager une information globale efficace entre les sous-domaines. L'enrichissement du problème macro se fait ainsi sur des considérations davantage mécaniques que numériques. On notera que, dans l'approche mixte micro-macro, enrichir le problème macro revient simplement à augmenter l'espace dans lequel sont cherchées les quantités macro d'interface. On définit ainsi un nouveau projecteur macroscopique. Par ailleurs, le dialogue entre sous-domaines se faisant uniquement par les interfaces, le raccordement de descriptions différentes de la solution se traduit, en général dans ces approches, par un problème local sur chaque interface « incompatible » facile à résoudre.

Si le traitement multiéchelle de la fissuration pose des difficultés concernant la définition et la séparation des échelles, la difficulté de décrire correctement la solution en terme de déplacement et de contrainte en pointe de fissure n'en est pas pour autant résolue. La X-FEM ou l'utilisation d'un élément hybride HCE permettent de répondre à cette question. Par ailleurs, l'enrichissement de la cinématique par des fonctions discontinues selon la X-FEM ou la SDA, pallient aux difficultés de maillage, celui-ci n'ayant plus besoin d'être conforme aux lèvres de la fissure. Avoir recours à la X-FEM pour décrire la fissure à l'échelle de la microstructure semble donc judicieux.

Dans la suite du document, nous présentons nos travaux suivant deux axes donnant lieu à deux parties distinctes. Dans la première partie, nous nous intéressons à l'approche multiéchelle utilisée pour séparer les échelles et mener à bien une analyse locale-globale couplée. Cette partie n'est pas dédiée spécifiquement à l'étude de la fissuration. Elle s'intéresse au cadre plus large où l'on souhaite mettre en place une description fine dans la zone d'intérêt tout en conservant une description grossière dans le reste de la structure. À cet effet, l'approche micro-macro est utilisée. Deux chapitres sont consacrés à cette partie :

- Le chapitre 2 décrit l'approche itérative micro-macro utilisée pour coupler les échelles macroscopiques et microscopiques. Des aspects concernant son implantation dans un code éléments finis en programmation orientée objet sont présentés.
- Le chapitre 3 présente le raccord mis en place dans le cadre de la stratégie pour coupler une description fine (microscopique) et une description grossière (macroscopique).

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'analyse multiéchelle pour la fissuration proprement dite. La présence de la fissure soulève alors de nouvelles questions concernant la séparation des échelles macro et micro ainsi que leur définition. Cette partie donne lieu à trois chapitres :

- Le chapitre 4 définit des échelles macroscopiques et microscopiques adaptées au suivi de fissure et en étudie les performances.
- Le chapitre 5 présente le traitement de la microstructure par la X-FEM. Les choix d'implantation et la validation de la méthode au sein du code de calcul sont exposés et discutés.
- Enfin, le chapitre 6 s'intéresse aux performances de la stratégie dans sa globalité. L'utilisation combinée de l'approche micro-macro et de la X-FEM est ainsi illustrée au travers d'exemples de propagation de fissure en fatigue qui intéressent Dassault Aviation.



**Première partie**

**Analyse locale-globale couplée**





---

*Dans cette première partie, nous nous intéressons à l'approche multiéchelle utilisée pour séparer les échelles et mener à bien une analyse locale-globale couplée. Cette partie n'est pas dédiée spécifiquement à l'étude de la fissuration. Elle s'intéresse au cadre plus large où l'on souhaite mettre en place une description fine dans la zone d'intérêt tout en conservant une description grossière dans le reste de la structure. À cet effet, l'approche micro-macro est utilisée. Deux chapitres sont consacrés à cette partie :*

- *Le chapitre 2 décrit l'approche itérative micro-macro utilisée pour coupler les échelles macroscopiques et microscopiques. Des aspects concernant son implantation dans un code éléments finis en programmation orientée objet sont présentés.*
- *Le chapitre 3 présente le raccord mis en place dans le cadre de la stratégie pour coupler une description fine (microscopique) et une description grossière (macroscopique).*



---

# Méthode itérative pour le couplage : l'approche micro-macro

*Ce chapitre décrit l'approche itérative micro-macro utilisée pour coupler les échelles macroscopiques et microscopiques. Des aspects concernant son implantation dans un code éléments finis en programmation orientée objet sont présentés.*

## Sommaire

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Problème de référence sous-structuré . . . . .</b>                   | <b>59</b> |
| 1.1      | Description du problème . . . . .                                       | 60        |
| 1.2      | Partitionnement en sous-structures et interfaces . . . . .              | 60        |
| 1.3      | Choix des espaces d'approximation . . . . .                             | 62        |
| 1.4      | Formulation du problème de référence sous-structuré . . . . .           | 64        |
| 1.5      | Exemples de comportement d'interface . . . . .                          | 65        |
| <b>2</b> | <b>Aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces . . . . .</b> | <b>66</b> |
| 2.1      | Définition des quantités macro . . . . .                                | 66        |
| 2.2      | Choix des espaces macro . . . . .                                       | 68        |
| 2.3      | Admissibilités des quantités macro . . . . .                            | 70        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Stratégie itérative de résolution . . . . .</b>        | <b>72</b> |
| 3.1      | Principe . . . . .  | 72        |
| 3.2      | Étape locale à l'itération $n$ . . . . .                  | 73        |
| 3.3      | Étape linéaire à l'itération $n$ . . . . .                | 73        |
| 3.4      | Contrôle et convergence de la stratégie . . . . .         | 78        |
| 3.5      | Bilan : algorithme de résolution . . . . .                | 79        |
| <b>4</b> | <b>Implantation dans un code orienté objet . . . . .</b>  | <b>82</b> |
| 4.1      | Démarche de développement . . . . .                       | 82        |
| 4.2      | Structure du code EF . . . . .                            | 82        |
| 4.3      | Sous-structuration : nouvelles classes d'objets . . . . . | 83        |
| 4.4      | Implantation de l'approche micro-macro . . . . .          | 84        |

---

Dans ce chapitre, nous présentons la stratégie de calcul multiéchelle qui inclut une procédure d'homogénéisation automatique en espace [Ladevèze et Dureisseix 1999, Loiseau 2001]. Cette stratégie ne formule pas d'hypothèse *a priori* sur la forme de la solution et ne possède donc pas les limitations des techniques d'homogénéisation standard évoquées dans le chapitre 1.

Le premier point de cette stratégie consiste à partitionner le domaine d'espace en un ensemble de sous-structures et interfaces, chacune des entités possédant ses propres variables et ses propres équations. Elle constitue à ce titre une méthode de décomposition de domaine mixte. Le deuxième point concerne l'introduction de l'aspect multiéchelle dans l'approche. La séparation des échelles n'est en effet opérée qu'au niveau des interfaces ce qui est en rupture avec la plupart des approches multiéchelles. Les quantités d'interface d'effort et de déplacement sont alors décomposées en parties « macro » et « micro ». Les quantités macro sont définies par projection sur une base permettant d'extraire des moyennes en espace des quantités d'interface. Le troisième point est l'utilisation de la méthode LATIN [Ladevèze 1999] qui est une méthode de résolution itérative non incrémentale en temps qui construit des approximations successives de la solution sur l'espace-temps tout entier. À chaque itération, on résout un problème « macro » défini sur la structure entière et tout l'intervalle de temps d'étude, ainsi qu'un ensemble de problème « micro » indépendants par sous-structures. Le problème macro correspond à la résolution d'un problème non classique sur une structure homogénéisée en espace.

Nous nous intéressons, ici, au cadre de la mécanique élastique linéaire sous l'hypothèse des petites perturbations. Le temps n'intervient pas. Par conséquent, la capacité de la méthode LATIN à traiter des problèmes non-linéaires d'évolution n'est pas pleinement exploitée dans notre étude. Néanmoins, nous nous plaçons dans le cadre très général de la LATIN pour expliquer notre approche. Une présentation de la stratégie multiéchelle dans un cadre plus large qui inclut une procédure d'homogénéisation à la fois en espace et en temps est présentée dans [Ladevèze et Nouy 2002 - 2003]. Les points clés de l'approche micro-macro sont ici présentés ainsi que l'algorithme de résolution basé sur la méthode LATIN. Enfin, nous détaillons quelques points techniques concernant l'implantation de l'approche dans le code orienté objet développé au LMT-Cachan.

## 1 Problème de référence sous-structuré

Dans ce paragraphe, nous introduisons le problème de référence, décrit à l'échelle microscopique, ainsi que les hypothèses de l'étude.

## 1.1 Description du problème

On considère l'équilibre statique d'une structure occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d = 2$  ou  $3$ ), sous les hypothèses des petites perturbations et en régime isotherme. Cette structure est soumise à des forces volumiques  $\underline{f}_d$  et à des forces surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ , le déplacement  $\underline{u}_d$  est imposé (Figure 1.1). Enfin, on suppose que la structure a un comportement élastique. Le problème de référence s'écrit alors :

**Problème 2** Trouver  $\underline{u}(\underline{M})$  et  $\sigma(\underline{M})$  définis sur  $\Omega$  qui vérifient :

– les équation de liaisons :  $\underline{u} \in \mathcal{U}$

$$\underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_1\Omega$$

– les équations d'équilibre :  $\sigma \in \mathcal{S}$

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

– la relation de comportement :

$$\forall \underline{M} \in \Omega, \quad \sigma = \mathbf{K}\varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{S}$  représentent les espaces où sont cherchés les déplacements et les contraintes.  $\mathcal{U}_0$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}$ .

## 1.2 Partitionnement en sous-structures et interfaces

Le premier point de la méthode consiste à **décomposer la structure en sous-structures et interfaces**. Chacun de ces constituants est une entité mécanique à part entière avec ses propres variables et son propre comportement (Figure 2.1). Pour le problème d'analyse locale-globale, un partitionnement naturel peut-être fait entre zone d'intérêt et le reste de la structure. Le domaine matériel occupé par l'une des sous-structures est noté  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ . Elle est soumise à l'action de son environnement, les interfaces voisines, définie par une distribution d'efforts  $\underline{F}_E$  et de déplacements  $\underline{W}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  génère une relation de comportement entre  $(\underline{F}_E, \underline{F}_{E'})$  et  $(\underline{W}_E, \underline{W}_{E'})$  (Figure 2.2). L'introduction des distributions de déplacements et d'efforts d'interfaces confère à la stratégie son caractère mixte. Les interfaces correspondant aux conditions limites seront traitées de manière équivalente. Enfin, les déplacements, contraintes et déformations sur une sous-structure  $\Omega_E$  seront notés respectivement  $\sigma_E$ ,  $\underline{u}_E$  et  $\varepsilon_E$ .

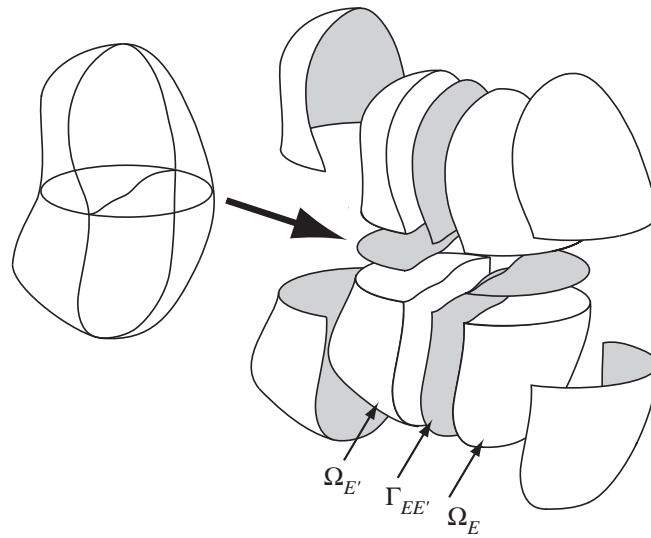


Figure 2.1: Décomposition du milieu : sous-structures et interfaces

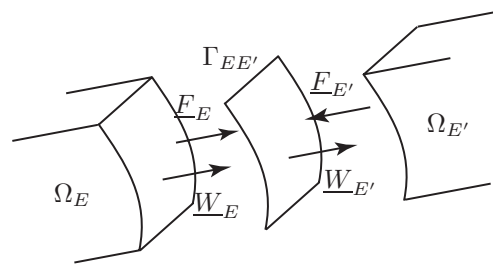


Figure 2.2: Échange sous-structures / interfaces



### 1.3 Choix des espaces d'approximation

Les sous-structures et interfaces sont classiquement discrétisées par une technique éléments finis standard. Dans le cadre d'une méthode de décomposition mixte, un intérêt particulier doit être porté sur la discrétisation des quantités d'interface [Ladevèze *et al.* 2002, Nouy 2003].

#### 1.3.1 Sur une sous-structure

Le déplacement  $\underline{u}_E$  et la contrainte  $\sigma_E$  sur une sous-structure  $\Omega_E$  appartiennent respectivement aux espaces d'approximation  $\mathcal{U}_{E,h}$  et  $\mathcal{S}_{E,h}$ . L'indice «  $h$  » désigne un espace d'approximation. Les déformations appartiennent à l'espace  $\mathcal{E}_{E,h}$ . Pour ces espaces d'approximation, on adoptera dans cette partie une discrétisation éléments finis classique. Dans le chapitre 6, nous utiliserons la X-FEM comme méthode d'approximation.

#### 1.3.2 Sur une interface

Les déplacements  $\underline{W}$  et les efforts  $\underline{F}$  sur une interface  $\Gamma_{EE'}$  appartiennent respectivement aux espaces  $\mathcal{W}_{EE',h}$  et  $\mathcal{F}_{EE',h}$ . Ces espaces sont pris de façon à être compatibles avec la forme bilinéaire travail :

$$(\underline{F}, \underline{W}) \mapsto \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} dS \quad (2.1)$$

et la proposition (1) :

**Proposition 1** *Les espaces  $\mathcal{W}_{EE',h}$  et  $\mathcal{F}_{EE',h}$  sont tels que la forme bilinéaire travail soit non dégénérée, c'est-à-dire :*

$$\left\{ \underline{F} \in \mathcal{F}_{EE',h}, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_{EE',h} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W} \in \mathcal{W}_{EE',h}, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{F} \in \mathcal{F}_{EE',h} \right\} = \{0\}$$

Le choix des espaces d'approximations  $\mathcal{W}_{EE',h}$  et  $\mathcal{F}_{EE',h}$  doit être fait avec soin. En effet, un distribution d'effort  $\underline{F}$  appartient *a priori* à l'espace  $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$  et, par conséquent, n'est pas nécessairement continue. Un choix naturel est de prendre pour  $\mathcal{F}_{EE',h}$  un espace de fonctions continues par morceaux. Cependant une telle discrétisation génère des modes d'oscillations parasites qui conduisent à des instabilités numériques. Ce problème est dû à une mauvaise estimation des énergies

associées à des distributions oscillantes d'efforts qui ne respectent pas la proposition (1). Pour plus de détails, on pourra se référer à [Ladevèze *et al.* 2002] et [Nouy 2003]. Indiquons simplement que les solutions apportées à ce problème consistent à raffiner localement près des bords le maillage de chaque sous-structure (« h-version ») ou d'utiliser un degré  $p$  d'approximation plus élevé pour l'approximation du déplacement  $\underline{u}_{E,h}$  près des bords (« p-version ») comme illustré sur la figure 2.3. La figure 2.4 illustre la « h-version » sur un exemple qui sera étudié dans le paragraphe 1 du chapitre 4.

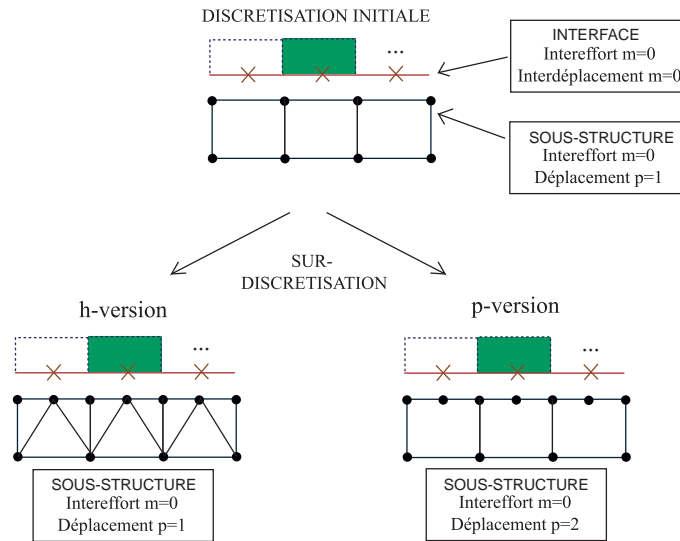


Figure 2.3: Modification des approximations classiques des interefforts (approximation par des fonctions EF de degré  $m$ ) et du déplacement bord (approximation par des fonctions EF de degré  $p$ ) des sous-structures pour une méthode éléments finis : « h- et p- versions »

Pour les différents exemples qui seront présentés dans la suite, nous avons choisi d'utiliser la « h-version ». En effet, la « p-version » a l'inconvénient de nécessiter l'implantation d'un élément spécifique avec une interpolation du déplacement différente pour les nœuds situés sur le bord. Par ailleurs, nous choisirons le même espace d'approximation pour les quantités d'interface. Ainsi :  $\mathcal{W}_{EE',h} = \mathcal{F}_{EE',h}$ . La méthode éléments finis utilisée pour les sous-structures étant basée sur des éléments P1 (TRI3) ou Q1 (QUA4), l'utilisation de la « h-version » conduit à des espaces  $\mathcal{W}_{EE',h}$  et  $\mathcal{F}_{EE',h}$  correspondant à l'ensemble des fonctions constantes (de degré P0) continues par morceaux sur  $\Gamma_{EE'}$ .

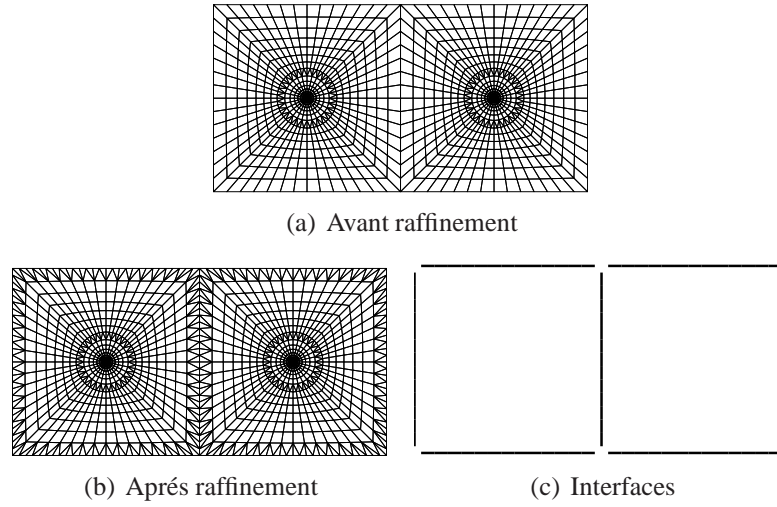


Figure 2.4: Raffinement (sur-discrétisation) du maillage des sous-structures près des bords (« h-version »)

## 1.4 Formulation du problème de référence sous-structuré

### 1.4.1 Quelques définitions et notations

On étend la définition des espaces d'interface à l'ensemble des interfaces d'une sous-structure  $\Omega_E$ . On note ainsi :

$$\mathcal{F}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_E = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{W}_{EE'} \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{V}_E$  représente la liste des sous-structures voisines de  $\Omega_E$ . Pour une sous-structure  $E \in \mathbf{E}$ , on donne les définitions suivantes :

**Définition 1** Un couple  $(\varepsilon_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_E = \mathcal{E}_E \times \mathcal{W}_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est dit *cinématiquement admissible* s'il existe un champ  $\underline{u}_E \in \mathcal{U}_E$  tel que  $\varepsilon_E = \varepsilon(\underline{u}_E)$  et  $\underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E$  au sens faible, c'est-à-dire :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_E, \quad \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot (\underline{u}_E - \underline{W}_E) d\Gamma = 0$$

On notera  $\mathbf{E}_{E,ad}$  l'espace vectoriel correspondant.

**Définition 2** Un couple  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_E = \mathcal{S}_E \times \mathcal{F}_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est dit *statiquement admissible* s'il vérifie les équations d'équilibre, soit :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_E, \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\sigma_E \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

On notera  $\mathbf{F}_{E,ad}$  l'espace correspondant et  $\mathbf{F}_{E,ad,0}$  l'espace vectoriel associé pour des données homogènes ( $\underline{f}_d = 0$ ).

**Proposition 2** Un couple  $(\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est dit cinématiquement admissible si et seulement si :

$$\forall (\sigma^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\sigma^* \underline{\varepsilon}_E) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot \underline{W}_E d\Gamma$$

On définit alors la E-admissibilité de la façon, suivante :

**Définition 3**  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E$  est dit E-admissible s'il vérifie :

- l'admissibilité cinématique :  $(\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{E,ad}$
- l'admissibilité statique :  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{E,ad}$
- la relation de comportement :  $\sigma_E = \mathbf{K}\underline{\varepsilon}_E$

L'espace correspondant est noté  $\mathbf{S}_{E,ad}$ . L'espace  $\mathbf{S}_{E,ad,0}$  est l'espace vectoriel associé pour des données homogènes.

## 1.4.2 Problème de référence sous-structuré

Le problème de référence 2 sous-structuré peut être énoncé de la façon suivante :

**Problème 3** Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E$  qui vérifie :

- $\mathbf{s}_E$  est E-admissible,  $\forall E \in \mathbf{E}$ ,
- le comportement des interfaces, les conditions aux limites étant des cas particuliers

## 1.5 Exemples de comportement d'interface

Le comportement d'une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structure  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  dépend de la liaison que l'interface doit modéliser. Ce comportement peut être écrit comme une relation de comportement mixte entre les interdéplacements et les interefforts agissant sur l'interface. Très formellement, cette relation s'écrit localement en chaque point de l'interface  $\Gamma_{EE'}$  :

$$\forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}, \quad R(\underline{W}_E, \underline{F}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E'}) = 0$$

Voici quelques exemples de comportement d'interface :

### ■ Interface parfaite

Les déplacements sont continus à travers l'interface et les efforts sont en équilibre. La relation de comportement se traduit alors par les deux équations :

$$\begin{aligned}\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} &= 0 \\ \underline{W}_E - \underline{W}_{E'} &= 0\end{aligned}$$

### ■ Interface de type condition limite

Pour une interface définissant un lien avec l'extérieur, c'est-à-dire une condition limite. La relation s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{F}_E &= \underline{F}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega \quad (\text{condition limite en effort}) \\ \underline{W}_E &= \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial_1\Omega \quad (\text{condition limite en déplacement})\end{aligned}$$

### ■ Interface de contact unilatéral avec frottement

On note  $f$  le coefficient de frottement de Coulomb.  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal à  $\Gamma_{EE'}$  au point courant et sortant par rapport à  $\Omega_E$ .  $\mathbf{P}_t$  désigne le projecteur orthogonal associé. La relation de comportement se traduit alors par :

- équilibre des efforts :  $\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0$ ,
  - non-pénétration :  $\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \geq 0$  et  $\underline{n} \cdot \underline{F}_E \leq 0$ ,
  - complémentarité :  $(\underline{n} \cdot (\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E))(\underline{n} \cdot \underline{F}_E) = 0$ ,
  - lois de Coulomb :
    - si  $\|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| < f|\underline{n} \cdot \underline{F}_E|$ , alors  $\mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) = 0$  (adhérence)
    - si  $\|\mathbf{P}_t \underline{F}_E\| = f|\underline{n} \cdot \underline{F}_E|$ , alors
- $$\mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \wedge \mathbf{P}_t \underline{F}_E = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'} - \underline{W}_E) \cdot \mathbf{P}_t \underline{F}_E \geq 0 \quad (\text{glissement})$$

## 2 Aspect multiéchelle introduit au niveau des interfaces

Le problème 3 correspond en quelque sorte au problème microscopique, mono-échelle. On désire introduire une vision à deux échelles du problème. Cela demande de définir des quantités macro ainsi qu'un moyen de passage entre l'échelle micro et l'échelle macro. Une fois ce choix effectué, le fait d'imposer aux quantités macro de vérifier des contraintes d'admissibilité conduira à la mise en place d'un problème macroscopique.

### 2.1 Définition des quantités macro

En rupture avec la plupart des approches multiéchelles, les interfaces jouent un rôle majeur dans la séparation des échelles. En effet, la définition des champs

microscopiques et macroscopiques porte sur les quantités d'interface du problème sous-structuré et est proposée avant même toute discrétisation. **La distinction des échelles micro et macro n'est donc effectuée qu'au niveau des interfaces.** L'échelle macro est définie par une dimension caractéristique des interfaces qui est *a priori* beaucoup plus grande que l'échelle de discrétisation de la microstructure. Considérons une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ . On choisit de chercher les déplacements macro et les efforts macro dans les espaces de dimension finie respectifs  $\mathcal{F}_{EE'}^M$  et  $\mathcal{W}_{EE'}^M$ . Ce choix doit être fait de façon à ce que ces espaces soient compatibles avec la forme bilinéaire travail (2.1) et la proposition suivante :

**Proposition 3**

$$\left\{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}_{EE'}^M, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W}^M \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^{M*} \cdot \underline{W}^M d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{EE'}^M \right\} = \{0\}$$

Cette proposition impose que les espaces  $\mathcal{F}_{EE'}^M$  et  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  aient la même dimension. Dans l'approche micro-macro, la définition des quantités macro est faite de façon à avoir un sens physique : ce sont des moyennes en espaces des déplacements et des efforts d'interface. Plus précisément, elles sont définies comme les meilleures approximations au sens de la forme bilinéaire travail (2.1) sur l'interface. La propriété (3) permet alors de les définir par les expressions encadrées suivantes :

**Définition 4** Les parties macro  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{EE'}^M \times \mathcal{F}_{EE'}^M$  de  $(\underline{W}, \underline{F}) \in \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'}$  sont définies par :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^{M*} \cdot (\underline{W}^M - \underline{W}) d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{EE'}^M$$

$$\int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{F}^M - \underline{F}) \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M$$

**Définition 5** Les efforts et déplacements micro sont définis simplement par :

$$\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M \quad \text{et} \quad \underline{W}^m = \underline{W} - \underline{W}^M$$

Les définitions des quantités macro (définition (4)) et micro (définition (5)) conduisent alors à la relation de découplage des travaux micro et macro d'interface qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m d\Gamma \quad (2.3)$$

On adoptera les mêmes notations pour les espaces macro et les espaces micro que celles définies par (2.2). Ainsi :  $\mathcal{F}_E^M = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}^M$ . On étendra également ces définitions à l'ensemble des sous-structures. Ainsi, on définira l'espace  $\mathcal{F}^M$ .

*Remarque 1 : Cette relation de découplage (2.3) est indépendante de la procédure d'homogénéisation qui sera détaillée plus loin.*

*Remarque 2 : Une autre façon d'interpréter la définition (4) est de dire que  $\underline{F}^M$  (resp.  $\underline{W}^M$ ) est la projection de  $\underline{F}$  (resp.  $\underline{W}$ ) sur  $\mathcal{F}_{EE'}^M$  (resp.  $\mathcal{W}_{EE'}^M$ ) parallèlement à l'orthogonal  $[\mathcal{W}_{EE'}^M]^\perp$  (resp.  $[\mathcal{F}_{EE'}^M]^\perp$ ) au sens de la forme bilinéaire travail (2.1) sur l'interface. Compte tenu de la définition (4), la définition (5) entraîne que  $\mathcal{F}_{EE'}^m = [\mathcal{W}_{EE'}^M]^\perp$  et que  $\mathcal{W}_{EE'}^m = [\mathcal{F}_{EE'}^M]^\perp$ .*

## 2.2 Choix des espaces macro

La seule contrainte sur le choix des espaces  $\mathcal{W}_E^M$  et  $\mathcal{F}_E^M$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est que  $\mathcal{W}_E^M$  contiennent les modes rigides de la frontière  $\partial\Omega_E$  et que  $\mathcal{F}_E^M$  contienne les résultantes et moments sur  $\partial\Omega_E$ . Cette contrainte permet de garantir l'extensibilité numérique de l'approche de décomposition de domaine.

Afin d'explicitier l'opérateur de projection  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$  permettant d'extraire la partie macro d'une quantité d'interface de  $\Gamma_{EE'}$ , on note  $\mathbf{e}_{EE'}^M = (\underline{e}_1^M, \dots, \underline{e}_{n_M}^M)$ , une base du sous-espace de dimension finie  $\mathcal{F}_{EE'}^M$  des interefforts macroscopiques ou du sous-espace  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  qui est identique. On a alors :

$$\begin{aligned} \underline{F}^M &= \Pi_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F}) = \sum_{i=1}^{n_M} (\underline{F}, \underline{e}_i^M) \underline{e}_i^M = \sum_{i=1}^{n_M} [F^M]_i \underline{e}_i^M \\ \underline{W}^M &= \Pi_{\Gamma_{EE'}}(\underline{W}) = \sum_{i=1}^{n_M} (\underline{W}, \underline{e}_i^M) \underline{e}_i^M = \sum_{i=1}^{n_M} [W^M]_i \underline{e}_i^M \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $[F^M]_i$  et  $[W^M]_i$  représentent les composantes respectives de  $\underline{F}^M$  et de  $\underline{W}^M$  dans la base macroscopique  $\mathbf{e}_{EE'}^M$ .

Le projecteur macro en moment et résultante s'interprète, en termes de déplacements, comme un extracteur de la partie mouvements de corps rigide de l'interface

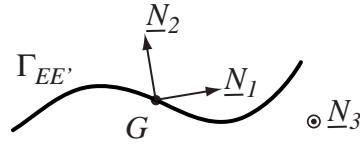


Figure 2.5: Interface linéique en deux dimensions.

$\Gamma_{EE'}$ . Au final, les déplacements macroscopiques représentent la cinématique de corps rigides des interfaces, et les efforts, la résultante et le moment duaux d'une telle cinématique. L'enrichissement de cette base revient, du point de vue de la cinématique macroscopique, à considérer l'interface comme un milieu déformable, au lieu d'un simple corps rigide. Ici, nous ne détaillons cet enrichissement que pour le cas bidimensionnel (où une interface est un milieu linéique), où on ajoute à la base de départ des fonctions polynomiales de la variable associée à une direction principale de l'interface. Le cas tridimensionnel ne pose pas de difficultés particulières.

Considérons une interface linéique, contenue dans le plan de normale  $\underline{N}_3$ , de centre de gravité  $G$ , telle que celle représentée en figure 2.5 :  $(\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$  désigne la base principale d'inertie de  $\Gamma_{EE'}$ , et ces vecteurs sont ordonnés de telle manière que les moments d'inertie  $I_{i(O, \Gamma_{EE'})}$  par rapport à chacune de ces directions vérifient :

$$I_{3(G, \Gamma_{EE'})} = I_{2(G, \Gamma_{EE'})} + I_{1(G, \Gamma_{EE'})} \geq I_{2(G, \Gamma_{EE'})} \geq I_{1(G, \Gamma_{EE'})} \geq 0 \quad (2.5)$$

Les trois fonctions de base définies par la projection en résultante et moment sont définies ci-dessous :

$$\underline{e}_1^M = \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} \underline{N}_1 \quad (2.6)$$

$$\underline{e}_2^M = \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma_{EE'})}} \underline{N}_2 \quad (2.7)$$

$$\underline{e}_3^M = \frac{1}{\sqrt{I_{3(G, \Gamma_{EE'})}}} (\underline{N}_3 \wedge \underline{GM}) \quad (2.8)$$

Un choix classique consiste à utiliser un projecteur dit d'extraction de la « partie linéaire » des champs. Il nécessite l'introduction de la fonction de base supplémentaire suivante :

$$\tilde{\underline{e}}_4^M = (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM}) \underline{N}_1 \quad (2.9)$$

Cette fonction représente l'allongement de l'interface suivant la direction  $\underline{N}_1$ . Cette fonction de base n'est pas celle qui est ajoutée à la base, car elle n'est ni orthogonale aux autres fonctions de la base (au sens de la forme bilinéaire travail  $(\cdot, \cdot)$ ), ni



normée. La fonction ajoutée à la base est déduite de celle-ci par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. La figure 2.6 illustre cette base de fonctions affines. Par suite, les fonctions de degré plus élevé sont des polynômes de la même variable

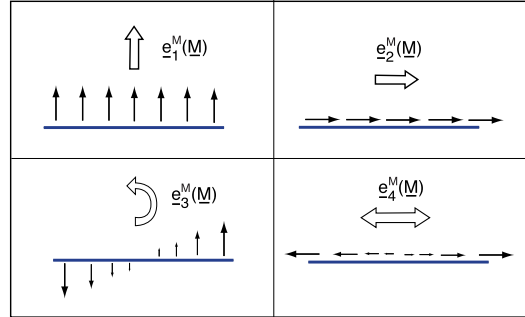


Figure 2.6: Base macro linéaire  $\{e_i^M\}_{i=1..4}$ , ( $n_M = 4$ ), sur une interface  $\Gamma_{EE'}$

suivant les deux directions de l'espace [Loiseau 2001], on note leur définition pour tout  $p \geq 2$  :

$$\tilde{e}_{2p+1}^M = (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})^p \underline{N}_2 \quad (2.10)$$

$$\tilde{e}_{2p+2}^M = (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})^p \underline{N}_1 \quad (2.11)$$

De la même manière que pour  $\tilde{e}_4^M$ , la constitution d'une nouvelle base par ajout de fonctions de degrés plus élevés est complétée par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. On obtient alors plusieurs bases macroscopiques définissant des projecteurs aptes à filtrer la partie polynomiale de degré donné des champs d'interface. Les projecteurs obtenus sont résumés dans le tableau 2.1, où  $e_k^M$  désigne la fonction déduite de  $\tilde{e}_k^M$  par le procédé d'orthogonalisation. Dans la suite nous utiliserons principalement une base macro qui extrait la partie linéaire, mais nous utiliserons aussi une base macro cubique.

*Remarque :* On remarquera que la définition des composantes macro  $[F^M]_{i=1..n_M}$  et  $[W^M]_{i=1..n_M}$  est faite avant même toute discrétisation.

### 2.3 Admissibilités des quantités macro

**Le dernier point important de l'approche micro-macro consiste à définir des conditions d'admissibilité sur les quantités macro. Ainsi, on leur impose de vérifier partiellement les conditions de transmission aux interfaces.** Dans notre approche, seuls les efforts sont contraints à vérifier les conditions d'équilibre aux

| Type de projecteur             | fonctions de base en 2D  |
|--------------------------------|--|
| Résultante et moment           | $(\underline{e}_1^M, \underline{e}_2^M, \underline{e}_3^M)$                    |
| Partie linéaire ( $p = 1$ )    | $(\underline{e}_1^M, \underline{e}_2^M, \underline{e}_3^M, \underline{e}_4^M)$ |
| Partie quadratique ( $p = 2$ ) | $(\underline{e}_1^M, \dots, \underline{e}_6^M)$                                |
| Partie cubique ( $p = 3$ )     | $(\underline{e}_1^M, \dots, \underline{e}_8^M)$                                |

Tableau 2.1: Projecteurs macroscopiques et fonctions de bases associées en 2D

interfaces ainsi que les conditions limites au sens macro. L'espace correspondant est noté  $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$  et est défini par :

$$\mathcal{F}_{\text{ad}}^M = \{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \}$$

De façon similaire, il est possible de définir un espace  $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$  des déplacements macro vérifiant les conditions de transmission aux interfaces, incluant les conditions aux limites :

$$\mathcal{W}_{\text{ad}}^M = \{ \underline{W}^M \in \mathcal{W}^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \}$$

Il faut néanmoins noter que, à part pour des interfaces de type parfait, la solution du problème ne vérifie pas, en général, les conditions de transmission décrites par  $\mathcal{W}_{\text{ad}}^M$ . C'est le cas pour des interfaces de contact. En revanche, pour n'importe quel type d'interface, l'équilibre des interfaces doit toujours être vérifié. C'est la raison pour laquelle la version de l'approche micro-macro qui utilise les conditions d'admissibilité décrites par  $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$  est classiquement retenue.

### 3 Stratégie itérative de résolution

#### 3.1 Principe

La vérification partielle *a priori* des conditions de transmission aux interfaces conduit à réécrire le problème 3 de la façon suivante :

**Problème 4** Trouver  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$  avec  $\mathbf{s}_E = (\varepsilon_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E$  qui vérifie :

$$\mathbf{A}_d \quad \left\| \begin{array}{l} - \text{ la } E\text{-admissibilité de } \mathbf{s}_E, E \in \mathbf{E} : \mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{E,ad} \\ - \text{ l'admissibilité de } \underline{F}^M : \underline{F}^M \in \mathcal{F}_{ad}^M \end{array} \right.$$

$$\Gamma \quad \left\| \begin{array}{l} - \text{ Le comportement des interfaces} \end{array} \right.$$

$\Gamma$  représente un ensemble d'équations éventuellement non-linéaires mais locales en variable d'espace.  $\mathbf{A}_d$  est un ensemble d'équations linéaires éventuellement globales. Avec ce partitionnement des équations du problème, il est possible d'appliquer la méthode LATIN [Ladevèze 1999] qui est une méthode de résolution itérative de problèmes non-linéaires d'évolution qui agit globalement sur le domaine espace-temps. Cette méthode permet de construire des approximations successives de la solution dans  $\Gamma$  puis dans  $\mathbf{A}_d$  en se donnant des directions de recherche  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$ . Ce sont ces directions de recherche qui rendent le problème 4 bien posé. La figure 2.7 représente le schéma d'une itération de la méthode qui comporte une étape locale et une étape linéaire.

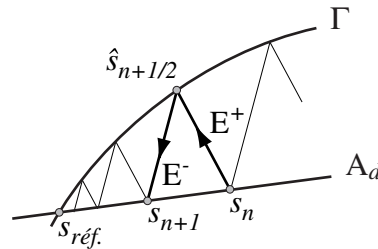


Figure 2.7: Schéma d'une itération de la méthode LATIN

*Remarque* : L'admissibilité des efforts macro étant systématiquement vérifiée, une information globale est donc propagée à l'ensemble de la structure lors de l'étape linéaire. Le fait d'avoir inclus dans l'espace macro les résultantes et moments des efforts appliqués sur les interfaces de chaque sous-structure procure à la stratégie la propriété d'extensibilité numérique attendue de toute méthode de décomposition de domaine.

### 3.2 Étape locale à l'itération $n$

L'étape locale consiste à construire une solution  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$  connaissant  $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ .  $(\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n)$  doit suivre la direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ . Compte tenu de la définition du groupe d'équation  $\Gamma$ , l'étape locale ne met en jeu que des quantités d'interface. Ainsi, pour chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ , avec  $E \in \mathbf{E}$  et  $E' \in \mathbf{E}$  mais  $E \neq E'$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} \left( \widehat{\underline{F}}_E - \underline{F}_E \right) - k^+ \left( \widehat{\underline{W}}_E - \underline{W}_E \right) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \\ \left( \widehat{\underline{F}}_{E'} - \underline{F}_{E'} \right) - k^+ \left( \widehat{\underline{W}}_{E'} - \underline{W}_{E'} \right) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \end{aligned}$$

où  $k^+$  est un paramètre scalaire positif de l'approche qui peut être interprété comme une rigidité micro de l'interface [Nouy 2003]. Les indices  $n + 1/2$  et  $n$  ont été omis pour alléger les notations. On remarquera que cette étape locale ne pose aucune difficulté. **Les problèmes à résoudre sont locaux en variable d'espace** et conduisent donc à un degré de parallélisme optimale.

Dans le cas d'une interface parfaite, la vérification du comportement traduisant l'appartenance de  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}$  à  $\Gamma$ , permet d'exprimer directement  $\widehat{\underline{W}}_E, \widehat{\underline{W}}_{E'}, \widehat{\underline{F}}_E$  et  $\widehat{\underline{F}}_{E'}$  en fonction de  $\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}, \underline{F}_E$  et  $\underline{F}_{E'}$  fournis par l'étape linéaire. Ainsi :

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{W}}_E &= \widehat{\underline{W}}_{E'} = \frac{1}{2}(\underline{W}_E + \underline{W}_{E'}) - \frac{1}{2k}(\underline{F}_E + \underline{F}_{E'}) \\ \widehat{\underline{F}}_E &= -\widehat{\underline{F}}_{E'} = \frac{1}{2}(\underline{F}_E - \underline{F}_{E'}) - \frac{1}{2}k(\underline{W}_E - \underline{W}_{E'}) \end{aligned}$$

### 3.3 Étape linéaire à l'itération $n$

L'étape linéaire consiste à construire une solution  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ .  $(\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2})$  doit suivre la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ . Ainsi, pour chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ , avec  $E \in \mathbf{E}$  et  $E' \in \mathbf{E}$  mais  $E \neq E'$ ,  $\mathbf{s}_{n+1}$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} \left( \underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E \right) + k^- \left( \underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E \right) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \\ \left( \underline{F}_{E'} - \widehat{\underline{F}}_{E'} \right) + k^- \left( \underline{W}_{E'} - \widehat{\underline{W}}_{E'} \right) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $k^-$  est un paramètre scalaire positif de l'approche que l'on prend en général tel que  $k^- = k^+ = k$ . La prise en compte de l'admissibilité de  $\underline{F}^M$  ( $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{\text{ad}}^M$ ) couple les équations (2.12). On reformule donc sous forme faible la direction de descente  $\mathbf{E}^-$  définie par les équations (2.12). On en déduit que pour l'ensemble des sous-structures  $\Omega_E, E \in \mathbf{E}$  :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}^m \cup \mathcal{F}_{\text{ad}}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \left\{ k^{-1} \left( \underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E \right) + \left( \underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E \right) \right\} \cdot \underline{F}_E^* \, d\Gamma = 0$$

Les indices  $n + 1/2$  et  $n + 1$  ont été omis pour alléger les notations. Ce problème sous contrainte ( $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$ ), peut être réécrit en introduisant le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}^M \in \mathcal{W}_{ad,0}^M$  où  $\mathcal{W}_{ad,0}^M$  est l'espace des déplacements macro continus aux interfaces et nuls sur  $\partial_1\Omega$  [Nouy 2003].

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{k^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + (\underline{W}_E - \widehat{W}_E)\} \cdot \underline{F}_E^* d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{W}_E^M \cdot \underline{F}_E^* d\Gamma \quad (2.13)$$

$$\forall \widetilde{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (2.14)$$

Cette expression exprime l'admissibilité des efforts macro au sens faible.

*Remarque 1 :* La prise en compte de l'admissibilité de  $\underline{F}^M$  ( $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$ ) modifie la direction de descente  $\mathbf{E}^-$  (équations (2.12)) associée à chaque interface. L'introduction du multiplicateur  $\widetilde{W}^M$  permet de lever la contrainte d'admissibilité des efforts macro. Ainsi, l'équation (2.13) permet de déduire, pour une interface  $\Gamma_{EE'}$ , la nouvelle direction de descente sous forme locale suivante :

$$\begin{aligned} (\underline{F}_E - \widehat{F}_E) + k^- (\underline{W}_E - \widehat{W}_E - \widetilde{W}_E^M) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \\ (\underline{F}_{E'} - \widehat{F}_{E'}) + k^- (\underline{W}_{E'} - \widehat{W}_{E'} - \widetilde{W}_{E'}^M) &= 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $\widetilde{W}_E^M = \widetilde{W}_{E'}^M$  pour toute interface ne modélisant pas une condition limite en déplacement, c'est-à-dire n'appartenant pas à  $\partial_1\Omega$ . Pour les interfaces appartenant à  $\partial_1\Omega$ , les équations locales sont les mêmes que les équations (2.12), le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}^M$  étant nul sur  $\partial_1\Omega$ . Enfin, on remarquera que, à convergence, le multiplicateur  $\widetilde{W}^M$  est nul, les quantités d'interface de l'étape linéaire étant égales aux quantités d'interface « chapeau » correspondantes issues de l'étape locale.

*Remarque 2 :* Concernant le choix des paramètres  $k^+$  et  $k^-$ , on pourra se référer aux travaux de [Violeau 2003] sur l'interprétation et l'optimisation des directions de recherche dans le cadre de l'élastostatique.

### 3.3.1 Problème micro sur une sous-structure $\Omega_E$

On définit le problème micro associé à la sous-structure  $\Omega_E$  comme suit :

**Problème 5** Trouver  $\mathbf{s}_E = (\underline{\varepsilon}_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E$  qui vérifie :

- $\mathbf{s}_E$  est  $E$ -admissible,
- la direction de recherche (2.13).

Ce problème est linéaire. La direction de recherche (2.13) étant locale à la frontière  $\partial\Omega_E$ , chaque problème micro est indépendant d'une sous-structure à l'autre.

#### ■ Formulation variationnelle du problème micro sur $\Omega_E$ :

L'admissibilité cinématique exprimée au sens faible (voir Proposition 2) et la relation de comportement de la sous-structure (qui est ici linéaire), donnent la relation :

$$\forall (\sigma^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma^*) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot \underline{W}_E d\Gamma$$

En introduisant la direction de recherche (2.13) dans cette dernière équation, cela conduit à la formulation variationnelle en contrainte du problème micro suivante :

**Problème 6** Trouver  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{E,ad}$  qui vérifient :

$$\begin{aligned} \forall (\sigma^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} h^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* d\Gamma = \\ \int_{\partial\Omega_E} (h^- \widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{W}}_E + \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{F}^* d\Gamma \end{aligned}$$

où  $h^- = 1/k^-$ .

La solution du problème micro associé à la sous-structure  $\Omega_E$  dépend uniquement de quantités connues  $\underline{f}_{d|\Omega_E}$ ,  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  et de  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ .  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$  sera considéré comme une donnée pour le problème micro. Nous verrons dans la suite comment le déterminer.  $\mathbf{K}$  et  $h^-$  étant définis positifs, le problème micro 6 admet une et une seule solution. **Les problèmes micro, définis sur  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , sont indépendants et sont donc parallélisables.** Pour la résolution par une méthode éléments finis standard, le problème micro 6 est dualisé en terme de déplacement. Ainsi la formulation variationnelle en déplacement du problème micro défini sur  $\Omega_E$ , s'écrit :

**Problème 7** Trouver  $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathbf{E}_{E,ad}$  qui vérifient :

$$\forall (\underline{u}^*, \underline{W}^*) \in \mathbf{E}_{E,ad}, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\mathbf{K}\varepsilon(\underline{u}_E)\varepsilon(\underline{u}^*))d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}^* d\Gamma = \int_{\Omega_E} \underline{f}_{d|\Omega_E} \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E + k^- \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{W}^* d\Gamma$$

■ **Définition d'opérateurs homogénéisés sur  $\Omega_E$  :**

$\mathbf{K}$  et  $h^-$  étant définis positifs, le problème micro 6 admet une et une seule solution. Par linéarité du problème micro, on en déduit que la solution unique est telle que :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\underline{F}}_{E,d}^M \quad (2.16)$$

$$\underline{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\underline{W}}_{E,d}^M \quad (2.17)$$

où  $\widetilde{\underline{W}}_E^M \in \mathcal{W}_{E,h}^M$ ,  $\widehat{\underline{F}}_{E,d}^M$  et  $\widehat{\underline{W}}_{E,d}^M$  ne dépendent que de  $\underline{f}_{d|\Omega_E}$  et de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ .

$\mathbf{L}_E^F$  (resp.  $\mathbf{L}_E^W$ ) est un opérateur linéaire de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathcal{F}_E^M$  (resp. de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathcal{W}_E^M$ ). Ces opérateurs peuvent être considérés comme des opérateurs homogénéisés sur la sous-structure  $\Omega_E$ . Ils représentent l'effet de couplage entre les différentes échelles. Ils sont déterminés en résolvant une série de problèmes micro sur  $\Omega_E$  où l'on prend successivement pour  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$  les fonctions de base de  $\mathcal{W}_E^M$ , toutes les autres données ( $\underline{f}_{d|\Omega_E}$  et  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ ) étant prises nulles. **Le coût de calcul est relativement faible puisque  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$  ne dépend que d'un nombre réduit de paramètres.** Si  $n_M$  est la dimension de l'espace  $\mathcal{W}_{EE'}^M$  pour une interface  $\Gamma_{EE'}$  et que  $\Omega_E$  est entourée de  $n_i$  interfaces, alors  $n_M \times n_i$  calculs micro sont nécessaires pour déterminer ces opérateurs. Les propriétés de ces opérateurs précisées dans [Nouy 2003] sont rappelées en annexe A.

Connaissant le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$ , il est possible de résoudre le problème micro sur  $\Omega_E$  et de déterminer  $\mathbf{s}_E$  connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ . Il existe ainsi un opérateur de localisation  $\mathbf{L}_E^s$  de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathbf{S}_E$ , tel que :

$$\mathbf{s}_E = \mathbf{L}_E^s(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\mathbf{s}}_{E,d}$$

où  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,d}$  dépend de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  et de  $\underline{f}_{d|\Omega_E}$

*Remarque :* Une relation entre les efforts macro et les déplacements macro, qui définit un opérateur homogénéisé plus classique, peut être déduite très simplement à partir des définitions des relations (2.16) et (2.17). Ainsi :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F \mathbf{L}_E^{W^{-1}} (\underline{W}_E^M) + \widehat{F}_{E,d}^M - \mathbf{L}_E^F \mathbf{L}_E^{W^{-1}} (\widehat{W}_{E,d}^M) \quad (2.18)$$

### 3.3.2 Problème macro

Le problème macro est écrit à partir des relations (2.14) et (2.16). Il peut s'énoncer de la manière suivante :

**Problème 8** Trouver  $(\widetilde{W}^M, \underline{F}^M)$  qui vérifie :

- l'admissibilité cinématique :  $\widetilde{W}^M \in \mathcal{W}_{ad,0}^M$ ,
- l'admissibilité statique :  $\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$ ,
- la relation de comportement homogénéisée :

$$\forall E \in \mathbf{E}, \quad \underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F (\widetilde{W}_E^M) + \widehat{F}_{E,d}^M$$

L'écriture sous forme faible de l'admissibilité statique (2.14) et la relation de comportement (2.16) conduisent à la formulation variationnelle en déplacement (en multiplicateur  $\widetilde{W}^M$ ) suivante :

**Problème 9** Trouver  $\underline{W}^M = \{\widetilde{W}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall \widetilde{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial \Omega_E} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \left( \mathbf{L}_E^F (\widetilde{W}_E^M) + \widehat{F}_{E,d}^M \right) d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial \Omega_E \cap \partial_2 \Omega} \widetilde{W}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \end{aligned}$$

Ce problème admet une et une seule solution si  $mes(\partial_1 \Omega) \neq 0$  [Nouy 2003].

*Remarque 1 :* Le problème macro 9 est résolu de façon exacte. Par conséquent, à chaque itération, l'admissibilité des efforts macro et du multiplicateur de Lagrange est vérifiée. Dans le cas où le problème macro est de grande taille, il est possible de le résoudre de façon approchée par approximation du multiplicateur sur un espace plus petit. Ce nouvel espace d'approximation des quantités macro définit, en quelque sorte, une troisième échelle : l'échelle « super-macro » [Loiseau 2001, Nouy 2003].

*Remarque 2 :* Une formulation variationnelle du problème macro en effort a été proposée dans [Nouy 2003]. Précisons que cette formulation introduit alors des



*inconnues supplémentaires : la trace des mouvements de corps rigides de chaque sous-structure sur chaque interface.*

*Remarque 3 : Les quantités macro sont définies uniquement au niveau des interfaces. Le couplage entre les différentes interfaces est réalisé via l'opérateur de comportement homogénéisé qui est non local. Le problème macro n'est pas un problème mécanique standard dans la mesure où il ne fait pas apparaître un milieu continu classique. Les inconnues cinématiques  $\{\widetilde{W}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}}$  correspondent à des translations, des rotations et des allongements par interface pour un projecteur macro linéaire. Une telle cinématique peut s'apparenter à celle définie par un milieu de Cosserat Généralisé [Cosserat et Cosserat 1909] ou micropolaire [Eringen 1966].*

### 3.4 Contrôle et convergence de la stratégie

Pour le cas où le comportement du matériau est monotone et si les interfaces représentent des liaisons parfaites, des conditions aux limites ou des interfaces de contact unilatéral sans frottement, alors la stratégie de calcul multiéchelle vérifie les hypothèses usuelles de la méthode LATIN [Ladevèze 1999]. Si les directions de recherche sont telles que  $k^+ = k^- = k > 0$  alors la convergence de l'algorithme est assurée.

Pour les stratégies de calcul monoéchelles et multiéchelles qui se basent sur la LATIN, un indicateur d'erreur servant à contrôler la convergence et à arrêter les itérations est utilisé. Cet indicateur est basé sur la conjugaison des directions de recherche. Pour une itération de la méthode LATIN, les solutions consécutives vérifient les directions de recherche comme suit :

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n) &\in \mathbf{E}^+ \\ (\mathbf{s}_{n+1} - \widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2}) &\in \mathbf{E}^- \end{aligned}$$

La vérification croisée de ces deux directions de recherche indique que la différence  $\mathbf{s} - \widehat{\mathbf{s}}$  est nulle dans les deux cas et que l'on est à convergence. Il est donc possible d'utiliser les résidus de non-vérification croisée des directions de recherche afin d'évaluer la qualité de la solution itérée, au moyen d'une norme en énergie sur les interfaces. On définit alors l'indicateur de convergence de la façon suivante :

$$\eta^2 = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E - \widehat{W}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E - \widehat{F}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]}{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\widehat{W}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} + \|\widehat{F}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]} \quad (2.19)$$

$$\text{où } \|\underline{W}\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} = \int_{\partial\Omega_E} k \underline{W} \cdot \underline{W} d\Gamma \text{ et } \|\underline{F}\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F} \cdot k^{-1} \underline{F} d\Gamma.$$

Pour assurer la convergence de la stratégie pour une large classe de comportements, on modifie l'étape linéaire en incluant une phase de relaxation [Ladevèze 1999]. En renommant  $\tilde{\mathbf{s}}_{n+1}$  la quantité précédente  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ , on définit alors  $\mathbf{s}_{n+1}$  par la relation :

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mu \tilde{\mathbf{s}}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n$$

où le paramètre de relaxation  $\mu$  est choisi en pratique égal à 0.8.

### 3.5 Bilan : algorithme de résolution

L'algorithme 1 décrit les principales étapes de la stratégie de résolution multi-échelle présentée dans ce chapitre. La résolution du problème micro 5 est réalisée par une méthode éléments finis en déplacement (Problème 7). La discrétisation du problème aboutit à la résolution du système linéaire suivant :

$$([K_E] + [k_E])[\underline{\mathbf{u}}_E] = [\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}] + [k \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_E^M]$$

où  $[\cdot]$  représente la discrétisation éléments finis de la quantité considérée.  $[K_E]$  est la matrice de rigidité éléments finis classique.  $[k_E]$  est la matrice de rigidité d'interface associée au terme  $\int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{\mathbf{W}}_E \cdot \underline{\mathbf{W}}^* d\Gamma$ .  $[\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}]$  est le chargement associé à  $\underline{f}_{d|\Omega_E}$  et à  $\hat{\mathbf{s}}_E$ . De la même manière, la résolution du problème macro aboutit à la résolution d'un système linéaire qui s'écrit :

$$[\mathbf{L}^F]_{\mathbf{e}^M} [\widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_E^M]_{\mathbf{e}^M} = [\hat{\underline{\mathbf{F}}}_d^M]_{\mathbf{e}^M} + [\underline{\mathbf{F}}_d^M]_{\mathbf{e}^M}$$

où  $[\cdot]_{\mathbf{e}^M}$  représente les composantes de la projection de la quantité considérée dans la base macro. Le problème macro 9 est un système carré de dimension  $\sum_{i=1..n_\Gamma} n_M^{(i)}$  où  $n_M^{(i)}$  est le nombre d'inconnues macro (translations, rotations, allongements) pour l'interface  $i$  et  $n_\Gamma$  le nombre d'interfaces. Le vecteur  $[\hat{\underline{\mathbf{F}}}_d^M]_{\mathbf{e}^M}$  est associé au terme  $\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_E^{M*} \cdot \hat{\underline{\mathbf{F}}}_{E,d}^M d\Gamma$  et  $[\underline{\mathbf{F}}_d^M]_{\mathbf{e}^M}$  est associé au terme  $\sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial_2\Omega} \widetilde{\underline{\mathbf{W}}}_E^{M*} \cdot \underline{\mathbf{F}}_d d\Gamma$ .

L'initialisation de l'algorithme consiste à construire une solution  $\mathbf{s}_0$  appartenant à  $\mathbf{A}_d$ . Une façon simple de procéder est de trouver une solution  $\hat{\mathbf{s}}_{-\frac{1}{2}}$  qui a les propriétés voulues pour faire partie de  $\Gamma$ . On prend donc  $\hat{\mathbf{s}}_{-\frac{1}{2}} \equiv 0$  et on affecte les conditions limites aux quantités d'interfaces « chapeau » correspondantes. Avec la direction de recherche  $\mathbf{E}^-$ , on redescend sur  $\mathbf{A}_d$  pour déterminer  $\mathbf{s}_0$ .

*Remarque 1 : La version monoéchelle de la stratégie décrite dans [Blanzé et al. 1996, Champany et al. 1999] peut aisément être déduite à partir de l'algorithme 1.*

---

**Algorithme 1** Stratégie de calcul multiéchelle ( $\square$  : phase parallélisable)

---

**Déterminer** :  $k$  et projecteur macro définis pour chaque interface

→  $k = \alpha E/L$  où  $E$  est le module d'Young,  $L$  une dimension caractéristique de l'interface et  $\alpha = 10$  en pratique.

**Calculs préliminaires** :

– Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :

- $\square$  Création des rigidités élémentaires  $[K_E]$  et  $[k_E]$ ,
- $\square$  Assemblage, factorisation de  $[K_E] + [k_E]$ ,
- $\square$  Détermination de l'opérateur homogénéisé  $[\mathbf{L}_E^F]$ .

– Sur l'ensemble des sous-structures

- Assemblage, factorisation de la rigidité  $[\mathbf{L}^F]_{e^M}$  du problème macro,

**Initialisation** :  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$

**boucle pour**  $n = 0$  à  $n_{max}$  **faire**

1. **Étape locale** : Calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$

- $\square$  Résolution de problèmes locaux sur les interfaces  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$

→ calcul de  $(\widehat{\underline{F}}_{E,n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E,n+1/2})$  et  $(\widehat{\underline{F}}_{E',n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E',n+1/2})$

2. **Étape linéaire** : Calcul de  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$

- $\square$  Résolution du problème micro pour les données  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$  et  $\underline{f}_d$  sur chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :  $([K_E] + [k_E])[\widehat{\underline{u}}_E] = [\widehat{\underline{F}}_{E,d}]$ .

→ calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,d,n+1} \Rightarrow \widehat{\underline{F}}_{E,d,n+1}^M$

- Résolution du problème macro défini sur l'ensemble des sous-structures,

→ calcul de  $\widetilde{\underline{W}}_{n+1}^M$

- $\square$  Résolution du problème micro pour le chargement  $\widetilde{\underline{W}}_{E,n+1}^M$  sur chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :  $([K_E] + [k_E])[\widetilde{\underline{u}}_E] = [k \widetilde{\underline{W}}_E^M]$ .

→ calcul de  $\underline{u}_E = \widehat{\underline{u}}_E + \widetilde{\underline{u}}_E \Rightarrow \mathbf{s}_{E,n+1}$

- $\square$  Relaxation

→  $\mathbf{s}_{n+1} \rightarrow \widetilde{\mathbf{s}}_{n+1}$ ,

→  $\mathbf{s}_{n+1} = \mu \widetilde{\mathbf{s}}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n$  où  $\mu = 0.8$  en pratique.

3. Critère d'arrêt  $\eta$

**fin boucle**

---

Le problème macro n'est plus résolu et un seul problème micro est résolu. Le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{W}^M$  n'a bien sûr plus lieu d'être. On obtient l'algorithme de la stratégie monoéchelle (Algorithme 2).

---

**Algorithme 2** Stratégie de calcul monoéchelle ( $\square$  : phase parallélisable)
 

---

**Déterminer** :  $k$  défini pour chaque interface

→  $k = E/L$  où  $E$  est le module d'Young,  $L$  une dimension caractéristique de la structure.

**Calculs préliminaires** :

– Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :

- $\square$  Création des rigidités élémentaires  $[K_E]$  et  $[k_E]$ ,
- $\square$  Assemblage, factorisation de  $[K_E] + [k_E]$ ,

**Initialisation** :  $\mathbf{s}_0 \in \mathbf{A}_d$

**boucle** pour  $n = 0$  à  $n_{max}$  **faire**

1. **Étape locale** : Calcul de  $\widehat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$

- $\square$  Résolution de problèmes locaux sur les interfaces  $\Gamma_{EE'}$ ,  $E \in \mathbf{E}$ ,  $E' \in \mathbf{V}_E$   
→ calcul de  $(\widehat{\underline{F}}_{E,n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E,n+1/2})$  et  $(\widehat{\underline{F}}_{E',n+1/2}, \widehat{\underline{W}}_{E',n+1/2})$

2. **Étape linéaire** : Calcul de  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$

- $\square$  Résolution du problème micro pour les données  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,n+1/2}$  et  $\underline{f}_d$  sur chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :  $([K_E] + [k_E])[\underline{u}_E] = \widehat{\underline{F}}_{E,d}$ .  
→ calcul de  $\mathbf{s}_{E,n+1}$
- $\square$  Relaxation  
→  $\mathbf{s}_{n+1} \rightarrow \widetilde{\mathbf{s}}_{n+1}$ ,  
→  $\mathbf{s}_{n+1} = \mu \widetilde{\mathbf{s}}_{n+1} + (1 - \mu) \mathbf{s}_n$  où  $\mu = 0.8$  en pratique.

3. Critère d'arrêt  $\eta$

**fin boucle**

---

*Remarque 2* : Dans le cas particulier d'interface parfaite, l'algorithme 2 se confond avec d'autres algorithmes proposés à partir de démarches différentes [Durreisseix 1997]. La technique de décomposition de domaine basée sur une méthode alternée de Schwartz lorsque le recouvrement des sous-domaines tend vers 0 et utilisant une formulation à partir de lagrangiens augmentés [Glowinski et Le Tallec 1990] en est un exemple. Plus précisément, l'algorithme résultant correspond à une variante d'un algorithme UZAWA appelé ALG3 pour résoudre le problème de point selle qui en découle.

## 4 Implantation dans un code orienté objet

### 4.1 Démarche de développement

La mise en œuvre de l'approche micro-macro a fait l'objet du développement d'un code prototype orienté objet sous Matlab. Face à la difficulté d'avoir à tester différentes idées et concepts, le besoin de maîtriser complètement l'architecture du code de calcul s'est fait ressentir. Ainsi, nous étions amené à gérer des difficultés d'ordre géométrique induites par l'utilisation de maillages incompatibles dans un contexte de fissuration, à implanter une formulation éléments finis non standard telle que la X-FEM (voir chapitre 4) et à mettre en œuvre une stratégie multiéchelle basée sur une méthode de décomposition de domaine. De nombreuses bibliothèques libres de calcul éléments finis sont disponibles sur Internet, malheureusement l'aide fournie avec ces bibliothèques reste souvent très limitée. De plus, le code source est en général très difficile à manipuler pour celui qui n'en a pas suivi le développement. Deux autres chercheurs du LMT-Cachan, Emmanuel Baranger et Gilles Lubineau, ayant aussi besoin d'une telle plateforme, un développement collaboratif a été entrepris.

Afin d'avoir un code flexible et évolutif, la programmation orientée objet (POO) s'est avérée très intéressante [Mackie 2001, Bersini 2002, Mackerle 2004]. Cette méthode de programmation met l'accent sur le dialogue entre les différents objets et non pas sur les données qu'ils contiennent [Besson et Foerch 1997, Archer 1996]. Enfin, le langage associé au logiciel Matlab a été choisi. Ce langage étant interprété, il permet un débogage simple. Par ailleurs, le calcul matriciel y est très efficace car basé sur des bibliothèques standard performantes (LINPACK, EISPACK) ou permet d'y accéder (MPI). Cependant, les manipulations de données sont ralenties par un typage dynamique. Cet inconvénient peut être en partie pallié par l'inclusion de code compilé (C, C++ ou Fortran) au sein des fonctions de Matlab. Cette technique est malgré tout assez limitée dans le cas de la POO et est donc réservé aux fonctions de bas niveau. Enfin, un argument majeur dans le choix de cette démarche repose sur l'idée qu'une programmation propre dans un langage maîtrisé vaut mieux qu'une programmation maladroite dans un langage plus puissant mais non maîtrisé.

### 4.2 Structure du code EF

Dans ce paragraphe, nous présentons et justifions brièvement l'architecture du code EF orienté objet développé. Notons que cette architecture n'est évidemment pas attachée au langage Matlab. Des diagrammes UML partiels sont représentés afin de détailler certaines classes d'objets [Bersini 2002]. Le formalisme usuel pour représenter les notions d'héritages, d'agrégation, de composition ... est utilisé. Le nom des classes d'objet sont écrits en caractères majuscules italiques.

Deux grandes architectures d'un code éléments finis existent en POO. La première consiste à considérer des opérations sur des champs comme dans CAST3M par exemple. La seconde, utilisée ici, repose sur une description plus morcelée des éléments finis [Zimmermann *et al.* 1992, Dubois-Pèlerin et Zimmermann 1992 - 1993]. Ainsi, plus le découpage est fin et plus le code est flexible, mais plus le temps passé à « manipuler » les données est conséquent. Une attention particulière doit donc être portée sur ce point crucial lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes de grande taille.

L'architecture du code objet est représentée sur la figure 2.8. Pour avoir une vision d'ensemble, seuls les noms des classes d'objets et de leurs liens y figurent. La structure complète (objet *STRUCTURE*) est découpée en sous-structures (*SOUS-STRUCTURE*). Une sous-structure contient un ensemble de points (*POINT*), d'éléments (*ELEMENT*) et est définie de façon à avoir un comportement matériau (*MATERIAU*) unique. À chaque élément est associé une technique d'intégration (*INTEGRATION*) qui lui est propre. Concernant la définition du problème, un objet de type *MODE\_CALC* permet de spécifier le type de problème étudié (contrainte plane, déformation plane, thermique, Fourier, ...), la dimension du problème, les champs inconnus et les directions de dérivation attachés au modèle mécanique continu utilisé (3D, poutre, plaque, coque, ...) et d'autres paramètres tels que les notations de Voigt utilisées.

### 4.3 Sous-structuration : nouvelles classes d'objets

Pour l'implantation d'une méthode de décomposition de domaine telle que l'approche micro-macro deux objets « mécaniques » supplémentaires doivent être définis : les sous-domaines (*SOUS\_DOMAINE*) et les interfaces (*INTERFACE*). Un sous-domaine pouvant représenter une partie de la structure avec des comportements matériau différents (un VER par exemple), la classe *SOUS\_DOMAINE* devient une sous-classe de la classe *STRUCTURE* (Figure 2.9) et en hérite toutes les méthodes. L'interface quant à elle doit permettre de faire dialoguer deux objets *SOUS\_DOMAINE* entre eux c'est-à-dire, plus généralement, deux objets *STRUCTURE* entre eux. Plus précisément, il s'agit de faire dialoguer les deux bords en vis-à-vis de deux sous-structures. L'objet *INTERFACE* contient donc deux objets *STRUCTURE* associées au bord des sous-domaines voisins (Figure 2.10). Le fait qu'une interface puisse avoir sa propre discrétisation (voir paragraphe 1.3.2), dans une méthode de décomposition de domaine mixte, conduit à calculer un certain nombre de matrices permettant le « dialogue » entre les sous-domaines via les interfaces. En particulier, l'admissibilité cinématique du champ  $\underline{u}_E$  sur le bord d'une

sous-structure  $\Omega_E$  et du déplacement  $\underline{W}_E$  de l'interface  $\Gamma_{EE'}$  (Figure 2.2) :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_{EE',h}, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^* \cdot (\underline{u}_E - \underline{W}_E) d\Gamma = 0 \quad (2.20)$$

doit être traduite. Si les quantités d'interface sont discrétisées sous la forme  $\underline{F}(\underline{x}) = \sum_{i \in N_\Gamma} \psi_i(\underline{x}) \underline{f}_i$  et le champ de déplacement d'une sous-structure  $\Omega_E$  sous la forme  $\underline{u}_E(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\underline{x}) \underline{u}_E(\underline{x}_i)$ , l'équation (6.2) conduit, après discrétisation, au système :

$$[N_{EE'}][B_{EE'}][\underline{u}_E] = [M_{EE'}][\underline{W}_E] \quad (2.21)$$

où  $[B_{EE'}]$  est la matrice de restriction booléenne des inconnues nodales  $[\underline{u}_E]$  de la sous-structure  $\Omega_E$  au bord  $\Gamma_{EE'}$ ,  $[N_{EE'}]_{ij} = (\psi_i, \varphi_j|_{\Gamma_{EE'}})_{\Gamma_{EE'}}$  est la matrice de projection et  $[M_{EE'}]_{ij} = (\psi_i, \psi_j|_{\Gamma_{EE'}})_{\Gamma_{EE'}}$  la matrice de masse de l'interface.  $[\underline{W}_E]$  est le vecteur des inconnues nodales en déplacement de  $\Gamma_{EE'}$ . De la même manière, l'admissibilité cinématique du champ  $\underline{u}_{E'}$  de la sous-structure  $\Omega_{E'}$  en vis-à-vis et du déplacement bord  $\underline{W}_{E'}$  de l'interface  $\Gamma_{EE'}$  doit être écrite. Ainsi, pour chaque interface, une matrice de restriction booléenne et une matrice de projection doivent être calculées de chaque côté de l'interface. Pour déterminer ces différentes matrices, les maillages bord des deux sous-domaines sont stockés au niveau de l'objet interface correspondant (Figure 2.11).

#### 4.4 Implantation de l'approche micro-macro

Dans l'approche micro-macro, des méthodes propres à l'approche sont à implanter au niveau des objets *SOUS\_DOMAINE* et *INTERFACE*. En particulier, pour un objet *INTERFACE* (Figure 2.10), une méthode permet de créer le type de projecteur désiré : linéaire, quadratique, cubique, ... Pour ce faire, un certain nombre de données géométriques telles que le centre de gravité et la base principale d'inertie de l'interface sont utilisées. Une autre méthode permet de résoudre l'étape locale sur l'interface de façon à vérifier le comportement (parfait, contact avec ou sans frottement, condition limite, ...) qu'elle doit modéliser.

Pour un objet *SOUS\_DOMAINE* associé à  $\Omega_E$ , il est nécessaire de déterminer la matrice de raideur  $[K_E]$ , les matrices de restriction booléenne  $[B_{EE'}]$  pour chacune de ses interfaces voisines et la matrice de rigidité d'interface  $[k_E]$  faisant intervenir le paramètre  $k$  de direction de recherche. Enfin, il convient de calculer l'opérateur homogénéisé  $[\mathbf{L}_E^F]$ . Toutes ces quantités peuvent être calculées dans une phase de calcul préliminaire, y compris  $[K_E]$  puisque nous nous intéressons ici à des problèmes d'élasticité linéaire.

Enfin concernant l'implantation de la stratégie de résolution proprement dite, une nouvelle méthode associée au solveur LATIN est introduite au niveau de la

classe *STRUCTURE* qui contient l'ensemble des sous-domaines partitionnant le problème. Une méthode permet également de définir une valeur optimisée [Violeau 2003] ou approchée ( $k = \alpha E/L$  où  $E$  est le module d'Young,  $L$  une dimension caractéristique de l'interface et  $\alpha = 10$  en pratique [Loiseau 2001]) du paramètre de direction de recherche pour chaque interface.



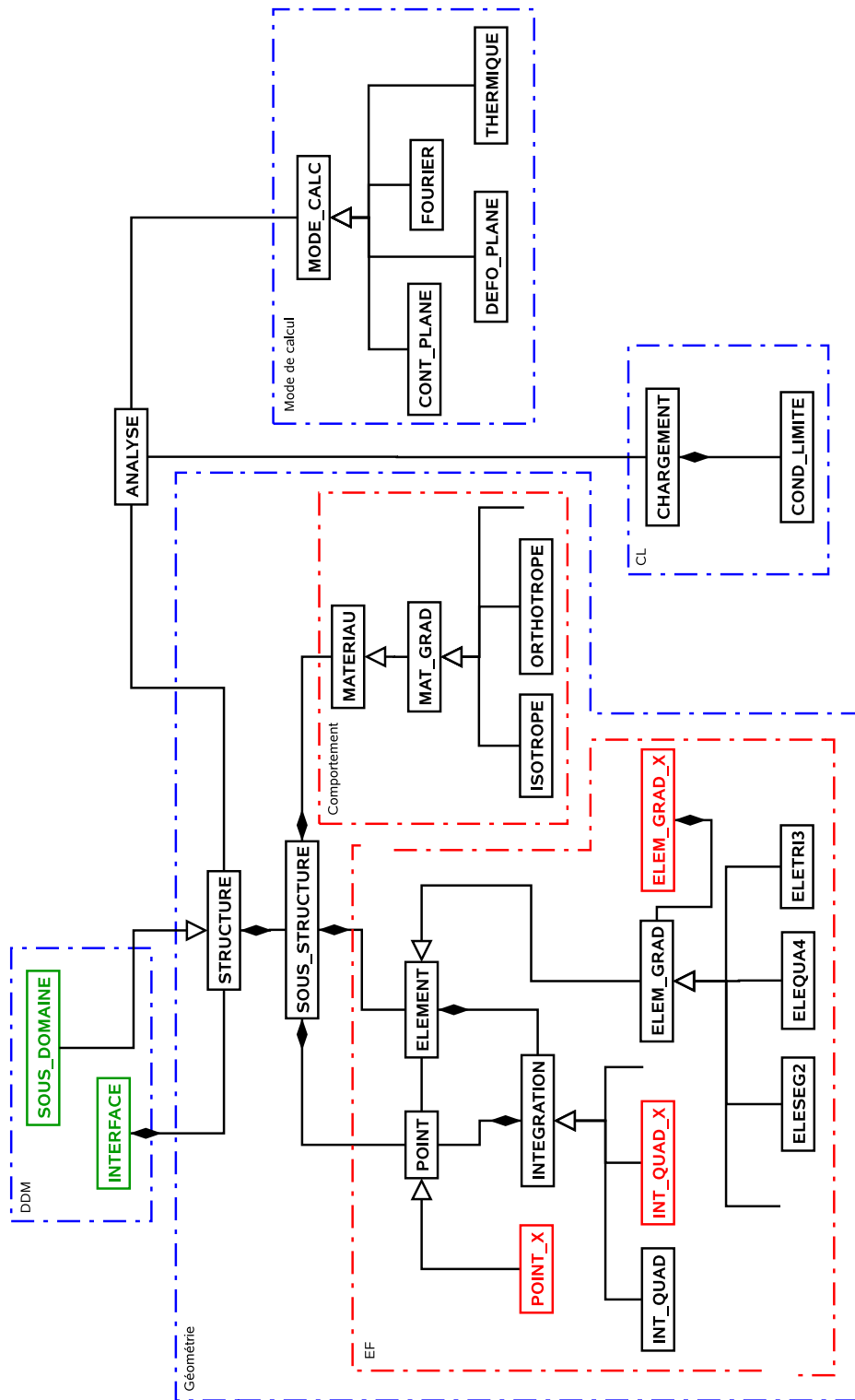


Figure 2.8: Diagramme UML partiel du code éléments finis

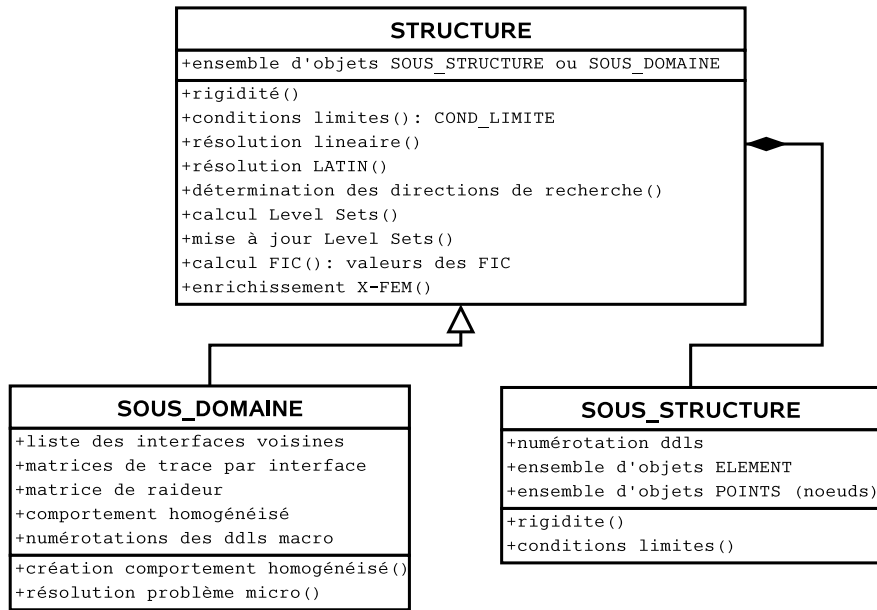


Figure 2.9: Diagramme UML partiel de la classe *STRUCTURE* et de son descendant *SOUS\_DOMAINE*

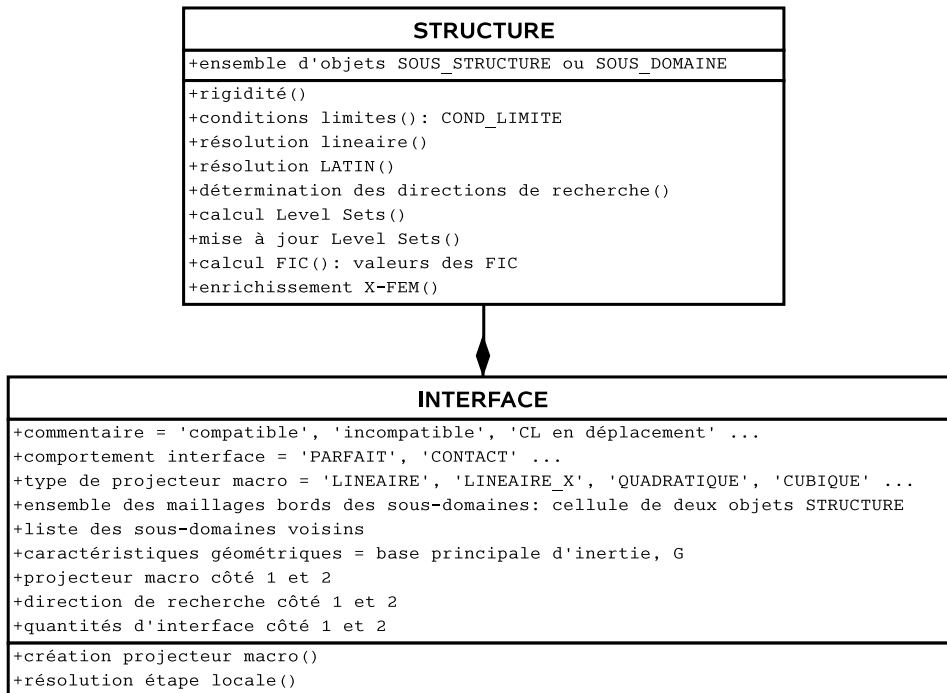


Figure 2.10: Diagramme UML partiel de la classe *STRUCTURE* et de la classe *INTERFACE*

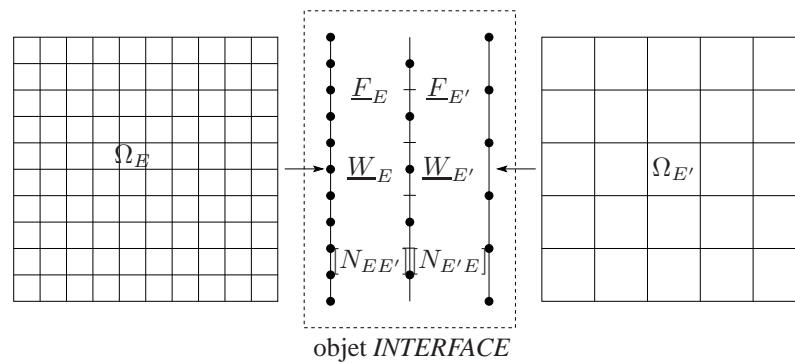


Figure 2.11: Chaque objet *INTERFACE* contient les maillages bords de ses sous-domaines voisins. Une interface  $\Gamma_{EE'}$  contient alors toute l'information nécessaire pour calculer les matrices de projection  $[N_{EE'}]$  de part et d'autre de l'interface.

---

## Choix du raccord entre zone locale et zone globale

*Dans ce chapitre, on s'intéresse à la question du raccord à effectuer pour coupler une description fine (microscopique) et une description grossière (macroscopique). Deux types de raccord sont proposés et illustrés. Une façon simple de les prendre en compte au sein de l'approche micro est détaillée. Le chapitre conclut sur la mise en place d'un estimateur d'erreur a posteriori permettant d'évaluer la qualité du raccord et de guider le choix de la taille de la zone d'intérêt à raffiner.*

### Sommaire

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Traitement des maillages incompatibles : un bref état de l'art . . .</b> | <b>91</b>  |
| 1.1      | Méthodes générales . . . . .  | 91         |
| 1.2      | Méthodes de décomposition de domaine . . . . .                              | 92         |
| <b>2</b> | <b>Nouveaux « comportements » d'interface . . . . .</b>                     | <b>94</b>  |
| <b>3</b> | <b>Illustration du principe de Saint-Venant . . . . .</b>                   | <b>96</b>  |
| <b>4</b> | <b>Estimateur d'erreur en raccord a posteriori . . . . .</b>                | <b>100</b> |
| <b>5</b> | <b>Bilan . . . . .</b>  | <b>100</b> |

---

L'enjeu d'une analyse locale-globale est double. Elle doit permettre non seulement d'accéder à une bonne approximation de la solution dans la zone d'intérêt où surviennent des phénomènes localisés autour de détails structuraux, mais aussi de voir l'impact de ces détails sur la réponse globale de la structure. Une stratégie locale-globale permettant un dialogue micro-macro est donc nécessaire. L'aspect multiéchelle de la question est traité dans cette partie avec l'approche micro-macro décrite dans le chapitre 2.

Partitionner la structure en sous-structures et interfaces est une façon naturelle de faire la distinction entre la zone de la structure où une analyse fine est requise et les zones où une description grossière est « suffisante » (Figure 3.1). À l'échelle

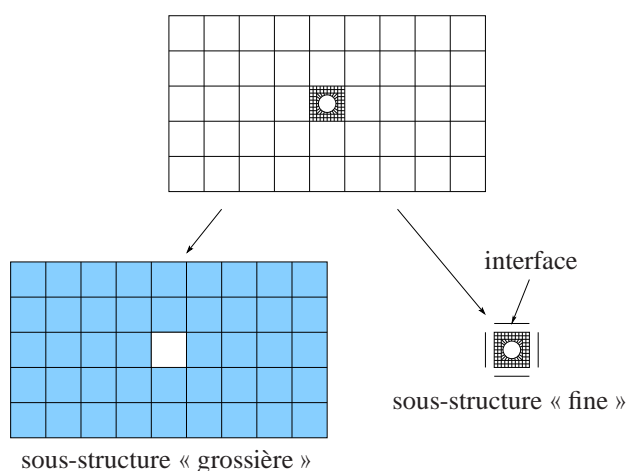


Figure 3.1: Analyse locale-globale et sous-structuration

de la microstructure, le problème du raccord de deux descriptions différentes de la solution entre zone fine et zone grossière se pose alors. L'interface et la façon d'introduire l'aspect multiéchelle dans l'approche micro-macro permettent de répondre efficacement à ce problème. Du point de vue technique, une approximation par éléments finis de la solution conduit alors à la problématique du raccord de maillages incompatibles.

Après un bref rappel de quelques techniques permettant la connexion de maillages incompatibles, nous proposons une méthode de raccord à fort contenu mécanique basée sur le principe de Saint-Venant qui peut-être facilement pris en compte par un nouveau comportement d'interface dans l'approche micro-macro. Des exemples illustrent la pertinence d'un tel raccord. Enfin, une analyse locale-globale nécessitant la définition arbitraire d'une zone fine et d'une zone grossière, il peut être intéressant de mettre en place un estimateur d'erreur *a posteriori* permettant de juger de la qualité de la solution.

# 1 Traitement des maillages incompatibles : un bref état de l'art

## 1.1 Méthodes générales

Dans le cadre de la méthode des éléments finis en déplacement sans décomposition de domaine, le principe général de connexion de maillages incompatibles [Quiroz 1993] est d'écrire une relation linéaire entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface de raccord puis d'imposer cette relation dans les équations d'équilibre du problème. Cette relation peut être imposée de diverses manières :

- Méthode d'élimination directe : une partie des degrés de liberté connectés sont écrits en fonction des autres à l'aide des relations à imposer puis éliminés dans les équations d'équilibre,
- Méthode de pénalisation : Les relations sont imposées à l'aide d'un paramètre de pénalisation de telle sorte que plus sa valeur est élevée plus les relations sont vérifiées. Cette méthode entraîne des problèmes numériques lorsque le paramètre de pénalisation est élevé,
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange : des inconnues supplémentaires, homogènes à des efforts, sont ajoutées sur l'interface de façon à forcer les relations à imposer,
- Méthode du Lagrangien Augmenté : cette méthode est une combinaison des deux précédentes pour laquelle il n'est pas nécessaire que le paramètre de pénalisation soit très élevé pour que les relations soient imposées correctement [Sassi 1993].

De même, il existe diverses méthodes pour écrire les relations de connexion entre les degrés de liberté de part et d'autre de l'interface :

- Collage homogène : une relation linéaire directe est écrite entre un degré de liberté d'un nœud d'un maillage et ceux de l'élément de l'autre maillage en face duquel il est placé. Cette méthode nécessite une bonne compatibilité géométrique entre les deux surfaces et peut conduire à des problèmes de blocage,
- Utilisation d'une discrétisation intermédiaire sur l'interface elle-même. Dans ce cas, une interpolation des déplacements sur l'interface est choisie et deux approches peuvent être utilisées pour la connexion :
  - liaisons discrètes : réalisation d'un collage homogène de chaque maillage bord de l'interface, puis élimination des degrés de liberté de l'interface,
  - liaisons continues : les écarts entre les champs de déplacement sur les maillages bords et celui sur l'interface sont minimisés (par un méthode des moindres carrés, par exemple). Cette approche a l'avantage d'assouplir les conditions de connexion et donc d'éviter les éventuels blocages. On

pourra citer la méthode des éléments d'interface (*Interface Element Method* (IEM)) [Kim 2002] où le recollement est assuré par la méthode des moindres carrés mouvants (MLS).

## 1.2 Méthodes de décomposition de domaine

Dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine, les problèmes par sous-structures sont indépendants. Les conditions de recollement en effort ou en déplacement ne concernent que le « squelette » des interfaces sur lequel le problème est condensé. Plus précisément, le problème de recollement est un problème local sur les interfaces. L'idée consiste alors à vérifier au mieux les conditions de transmission en effort ou en déplacement suivant la méthode, que les discrétisations bord des sous-structures soient compatibles ou non.

Une façon classique d'imposer un recollement en déplacement est d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange sur l'interface [Park et Felippa 2000]. Considérons le cas du recollement de deux sous-structures par multiplicateur de Lagrange (Figure 3.2). On suppose que les champs de déplacements et de multiplicateurs de

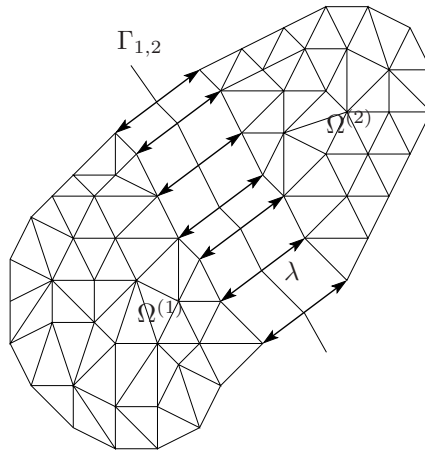


Figure 3.2: Méthode des multiplicateurs de Lagrange pour un problème sous-structuré

Lagrange sont discrétisés sur une base de fonctions de forme éléments finis appropriées comme suit :

$$\underline{u}^{(s)}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_u^{(s)}} \varphi_i(\underline{x}) \underline{u}_i^{(s)} \quad \text{et} \quad \lambda(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \psi_i(\underline{x}) \lambda_i$$

où  $N_u^{(s)}$  représente le nombre de nœuds de la discrétisation bord de la sous-structure  $s$  et  $N_\lambda$  représente le nombre de nœuds de la discrétisation des multiplicateurs de

Lagrange. En pratique, une seule discrétisation pour les multiplicateurs est choisie sur l'interface. Le problème discrétisé à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} [K^{(s)}][\underline{u}^{(s)}] &= [\underline{F}^{(s)}] - [B^{(s)}]^T[\underline{\lambda}] \\ \sum_{s=1}^{N_s} [B^{(s)}][\underline{u}^{(s)}] &= 0 \end{aligned}$$

où  $[K^{(s)}]$ ,  $[\underline{u}^{(s)}]$  et  $[\underline{F}^{(s)}]$  sont respectivement la matrice de raideur, le vecteur déplacement et le vecteur des efforts généralisés associés à la sous-structure  $\Omega^{(s)}$ . La matrice  $[B^{(s)}]$  assure la continuité des déplacements au sens faible. Un terme de cette matrice s'écrit :

$$[B^{(s)}]_{ij} = \text{sign}(\underline{n}^{(s)}) \int_{\partial\Omega^{(s)}} \psi_i(\underline{x}) \varphi_j(\underline{x}) d\Gamma$$

où  $\underline{n}^{(s)}$  est la normale sortante sur le bord de  $\Omega^{(s)}$ .  $[\underline{\lambda}]$  représente le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et représente les forces nécessaires pour recoller les sous-structures entre elles.

Le choix de l'espace d'approximation des multiplicateurs de Lagrange est primordial. En pratique, sur une interface entre deux sous-domaines, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être approximatés en utilisant :

- des fonctions linéaires ou constantes par morceaux. Ce choix conduit à la méthode mortar [Bernardi *et al.* 1990] qui repose sur des bases mathématiques solides permettant d'en assurer la convergence,
- des fonctions polynomiales ou des fonctions polynomiales par morceaux sur l'interface [Farhat et Gérardin 1992, Rixen *et al.* 1998] :

$$\lambda_i^j = \sum_{i=1}^p \lambda_i^j \xi^i$$

où  $\xi$  est l'abscisse curviligne sur le morceau  $j$  de l'interface. Le choix du degré  $p$  des polynômes ainsi que du découpage de l'interface est alors basé sur la régularité supposée de la solution sur l'interface de recollement. Il est alors possible de recoller deux sous-structures sans problèmes de blocage avec relativement peu de multiplicateurs de Lagrange si la solution est relativement régulière, c'est-à-dire si le raccord a lieu suffisamment loin des détails structuraux.

Cette idée de recoller des maillages incompatibles sur des espaces polynomiaux est également exploitée par Duarte [Duarte *et al.* 2005] via la méthode de la partition



de l'unité. Une partition de l'unité particulière qui conduit à des degrés de liberté globaux à l'interface de raccord est proposée. L'auteur qualifie cette partition de l'unité de *Clustered Finite Element Partition of Unity* (Figure 3.3). Des fonctions d'enrichissement polynomiales sont alors choisies.

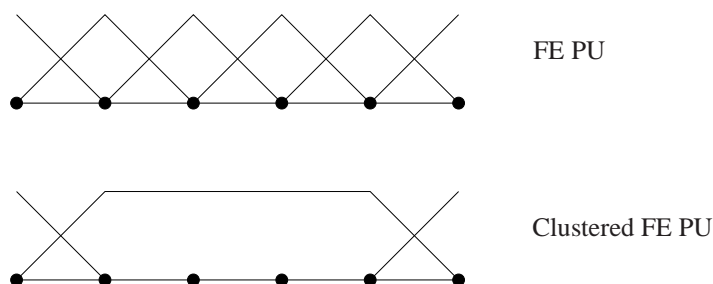


Figure 3.3: Partition de l'unité éléments finis uniforme – *Clustered Finite Element Partition of Unity* – pour le recollement de maillages incompatibles

#### ■ Bilan

Dans le cadre des méthodes de décomposition de domaine, le problème du raccord de maillages incompatibles semble traité de façon efficace par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange approximatés par une base de fonctions polynomiales par morceaux. Le recollement sur un espace intermédiaire de faible dimension permet non seulement de faire intervenir un nombre réduit de multiplicateurs mais aussi de ne pas générer de blocage. En revanche, le choix du degré des polynômes doit être guidé par des considérations mécaniques et mathématiques liées à la régularité de la solution dans la zone de raccord.

## 2 Nouveaux « comportements » d'interface

Le paragraphe 1 a montré que le raccord de deux descriptions éléments finis différentes doit être fait sur des espaces permettant de transmettre l'« essentiel » de l'information sans générer de problèmes de blocages ou de sur-contraintes. Autrement dit, la qualité de la solution dépend fortement de ce raccord qui doit alors se faire sur des quantités mécaniques pertinentes, des quantités « effectives ». Afin de répondre à ce problème, nous proposons de raccorder deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  présentant une incompatibilité de maillage, sur les quantités macro d'interface.

Considérons la base macroscopique linéaire de la figure 2.6 permettant d'extraire les efforts macroscopiques  $\underline{F}^M$  sur une interface à partir de la distribution

d'effort  $\underline{F}$ . Les vecteurs de base  $\underline{e}_1^M$ ,  $\underline{e}_2^M$  et  $\underline{e}_3^M$  extraient les efforts généralisés (résultante et moment) au sens de la théorie exacte des poutres [Ladevèze et Simmonds 1998]. Notons que cette extraction est possible quelles que soient les discrétisations de part et d'autre de l'interface. Aussi, pour raccorder les efforts et déplacement d'interface de part et d'autre de celle-ci, nous proposons le nouveau « comportement » d'interface suivant :

#### ■ Interface de raccord à effort micro nul

Les déplacements sont continus à travers l'interface et les efforts sont en équilibre au sens macro du terme. La relation de comportement se traduit par les équations :

$$\begin{cases} \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \\ \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{F}_{-E}^m = 0 \\ \underline{F}_{-E'}^m = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}$$

Par dualité, nous proposons aussi le raccord suivant :

#### ■ Interface de raccord à déplacement micro nul

Les déplacements sont continus à travers l'interface et les efforts sont en équilibre au sens macro du terme. La relation de comportement se traduit par les équations :

$$\begin{cases} \underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M = 0 \\ \underline{W}_E^M - \underline{W}_{E'}^M = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{W}_E^m = 0 \\ \underline{W}_{E'}^m = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}$$

On remarquera que le raccord à effort micro nul correspond à un raccord en « moyenne » de déplacement alors que le raccord à déplacement micro nul correspond à un raccord en « moyenne » d'effort. La définition de moyenne étant ici liée à la définition de la base macroscopique sur laquelle on raccorde les quantités. Dans le cas d'une base macro linéaire, il faut entendre par « moyenne » d'une quantité, sa partie linéaire ; ce qui est une définition classique de la moyenne. Dans le cas d'un projecteur cubique, il faut entendre par « moyenne » d'une quantité, sa partie cubique. Notons que, par construction (voir paragraphe 2.2 du chapitre 2), cette base cubique contient les vecteurs de base de la base macro linéaire.

Ces relations de comportement sont utilisées pour décrire le comportement d'interfaces incompatibles. Elles sont facilement prises en compte au niveau de l'étape locale de la stratégie décrite dans la partie 3 du chapitre 2. On remarquera que du point de vue de l'implantation, raccorder les quantités macro revient tout simplement à raccorder les composantes des quantités d'interface dans la base macro. Ainsi pour raccorder les déplacements macro, on raccorde les composantes de translations, rotations, allongement, ... En d'autres termes, le raccord des quantités macro d'interface peut être vu comme un raccord sur des degrés de liberté macro qui sont globaux à l'interface.

*Remarque : On notera que, pour ces deux raccords, les conditions de convergence de la LATIN sont respectées. Ainsi, à convergence, les relations de comportement d'interface incompatibles précédentes sont vérifiées.*

### 3 Illustration du principe de Saint-Venant

Afin de confronter les deux raccords proposés dans le paragraphe 2 précédent et d'en illustrer les performances, considérons l'exemple d'une plaque comportant un trou libre d'effort soumise à une sollicitation de traction (Figure 3.4). Le choix

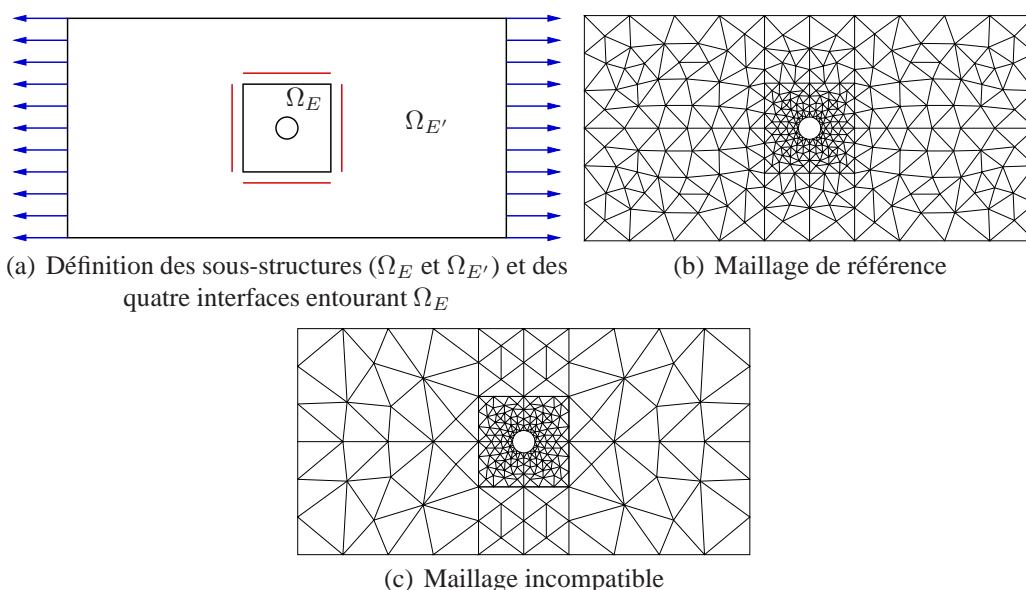


Figure 3.4: Plaque comportant un trou libre d'effort soumise à une sollicitation de traction

des sous-structures est décrit sur la figure 3.4(a) : la sous-structure  $\Omega_E$  correspond à la zone d'intérêt et est entourée de quatre interfaces. Le maillage incompatible utilisé pour le calcul est illustré sur la figure 3.4(c) et le maillage de référence est représenté sur la figure 3.4(b). Notons que la définition d'une référence pour la problématique du raccord de discrétisations différentes n'est pas évidente. Les problèmes discrétisés correspondant aux maillages conforme et non-conforme étant différents, les solutions approchées ne sont pas les mêmes. Aussi, à l'erreur due au raccord utilisé pour le maillage incompatible, une erreur de pollution vient se rajouter. Pour limiter ce problème deux précautions ont été prises. La première consiste à utiliser la même discrétisation éléments finis dans la zone d'intérêt pour les deux maillages. La seconde consiste à faire le raccord suffisamment loin du trou afin

d'obtenir une solution suffisamment régulière au niveau du raccord pour être décrite par le maillage grossier de  $\Omega_E$  et ainsi limiter l'erreur de pollution. Nous verrons que malgré cette dernière précaution qui peut sembler très restrictive pour comparer nos deux types de raccord, les résultats sont très significatifs.

Pour les quatre interfaces incompatibles entourant la sous-structure  $\Omega_E$ , nous utilisons successivement le raccord à effort micro nul et le raccord à déplacement micro nul. Pour chacune de ces interfaces, un projecteur macro qui extrait la partie linéaire est mis en œuvre. Les figures 3.5 et 3.6 représentent respectivement les distributions de déplacements  $\underline{W}_E$  et d'efforts  $\underline{F}_E$  sur les interfaces entourant  $\Omega_E$ . Les

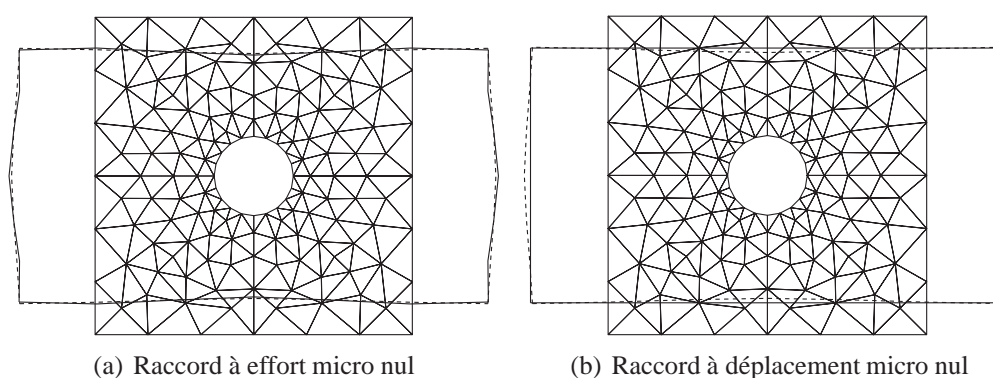


Figure 3.5: Déplacement  $\underline{W}_E$  d'interface pour les deux raccords. La référence est en pointillés.

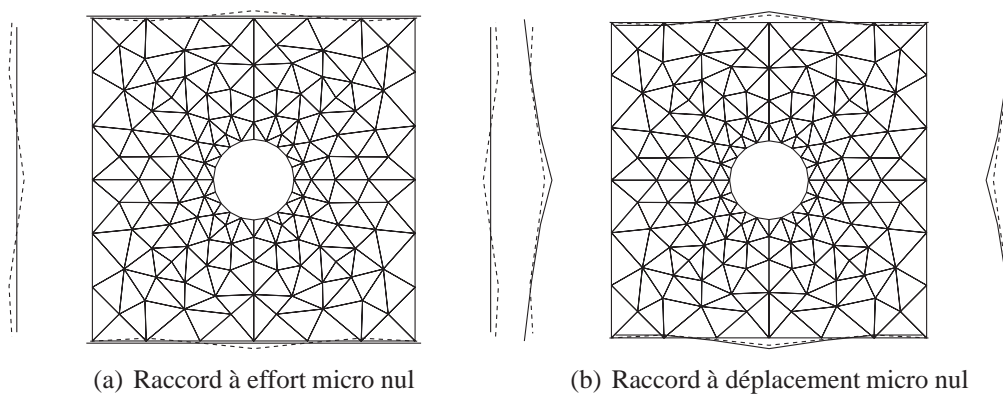


Figure 3.6: Effort  $\underline{F}_E$  d'interface pour les deux raccords. La référence est en pointillés.

traits pointillés représentent la solution obtenue par le calcul mené sur le maillage de référence qui utilise un raccord parfait sur ces interfaces. La figure 3.5(b) montre bien que le déplacement d'interface  $\underline{W}_E$ , à convergence, est linéaire sur chaque interface et que, par conséquent, le déplacement micro  $\underline{W}_E^m$  est nul. De même, la figure 3.6(a) illustre parfaitement le raccord à effort micro : l'effort d'interface  $\underline{F}_E$ , à convergence, est linéaire sur chaque interface.

Considérons la carte d'erreur en énergie par rapport à la référence pour la sous-structure  $\Omega_E$  (Figure 3.7). On constate que, pour le raccord à effort micro nul, les

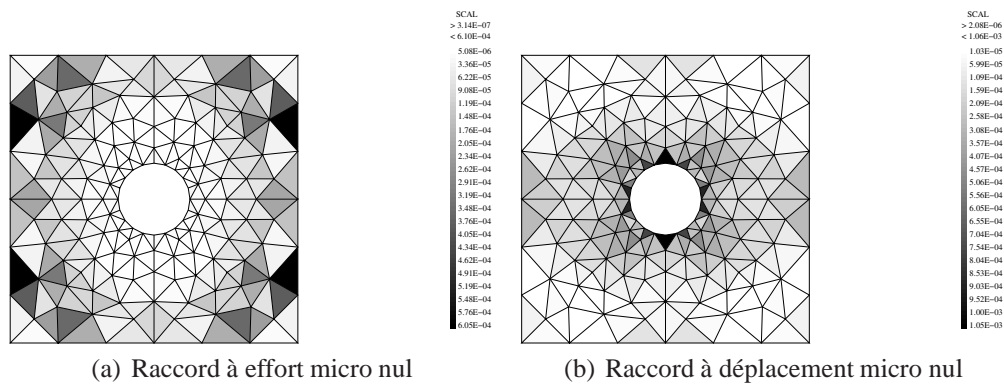


Figure 3.7: Carte d'erreur relative en énergie par rapport à la référence. Le raccord à effort micro nul conduit à une erreur nulle dans la zone d'intérêt (autour du trou) et à une localisation des erreurs au niveau du raccord. Le raccord à déplacement micro nul localise l'erreur dans la zone d'intérêt.

erreurs sont localisées près du bord (Figure 3.7(a)) et non près du trou comme c'est le cas du raccord à déplacement micro (Figure 3.7(b)). En d'autre terme, le raccord à effort micro conduit à la solution intérieure de Saint-Venant qui est correcte loin du raccord. Cet exemple montre que le raccord à effort micro nul donne une équivalence en terme de torseurs d'effort (résultantes et moments) sur la zone d'intérêt avec le chargement obtenu dans le problème de référence. On remarquera que, bien que le raccord à déplacement micro nul semble mieux approcher les quantités d'efforts d'interface de référence (Figure 3.6(b)), la partie linéaire correspondante ne conduit pas au même torseur équivalent que celui de référence. En effet, rappelons que, pour un déplacement d'interface, la base macro extrait uniquement les mouvements de corps rigides de l'interface (translations et rotations) ainsi que son allongement ; ce qui ne correspond pas aux déplacements généralisés tels qu'ils sont définis dans la théorie exacte des poutres [Ladevèze et Simmonds 1998] et qui conduiraient à la localisation des contraintes et des déformations autour du trou. Dans la suite, nous considérerons systématiquement le raccord à effort micro nul,

c'est-à-dire le raccord en résultante et moment, pour raccorder des descriptions fine et grossière de la solution.

*Remarque 1 : La définition de la base macro qui repose sur le principe de Saint-Venant illustré ici, explique non seulement l'extensibilité numérique de la stratégie mais aussi les performances de l'approche. En effet, la base macro est telle qu'elle extrait systématiquement les moments et résultantes d'effort sur chaque interface. Elle contient toujours les vecteurs de base  $\underline{e}_1^M$ ,  $\underline{e}_2^M$  and  $\underline{e}_3^M$ . Par conséquent, les effets des efforts micro « résiduels » (à torseur d'effort nul par définition) d'interface,  $\underline{F}_E^m$ , restent localisés dans les sous-domaines voisins de l'interface considérée. Précisons néanmoins, que cette dernière affirmation est valable sous la condition que la microstructure de chaque sous-domaine n'ait pas d'effet à grande longueur de variation et n'affecte que localement la solution.*

*Remarque 2 : L'hypothèse faite sur les parties micro pour les deux raccords (effort micro nul ou déplacement micro nul) sépare le traitement des échelles de la même façon que la condition de périodicité du déplacement micro pour la théorie de l'homogénéisation périodique. Ainsi, pour le raccord à effort micro nul par exemple, la relation de découplage (2.3) conduit à un problème microscopique sur la sous-structure  $\Omega_E$  qui n'est alors soumise qu'à un chargement macro :*

**Problème 10** Trouver  $\underline{u}_E \in \mathcal{U}_{E,ad}$  qui vérifient :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K}_\varepsilon(\underline{u}_E)\varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d|_{\Omega_E} \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{u}^*|_{\partial\Omega_E} d\Gamma$$

La résolution de ce problème pour une série de sollicitations d'effort macro donnés,  $\underline{F}_E^M$ , permet de déterminer un nouveau comportement homogénéisé de la sous-structure associé à l'hypothèse effort micro nul. Un nouveau problème macro peut ainsi être défini. Par localisation, on peut alors reconstruire la solution microscopique  $\underline{u}_E$  dans la sous-structure. La procédure de résolution est donc similaire à celle utilisée dans la théorie de l'homogénéisation périodique décrite au paragraphe 1.1.1 du chapitre 1. Une formulation du problème peut être réécrite dans laquelle la condition  $\underline{F}_E^m = 0$  est imposée à l'étape linéaire (cette relation fait alors partie du groupe d'équation  $\mathbf{A}_d$  de la méthode LATIN) et non plus à l'étape locale pour les interfaces incompatibles.

*Remarque 3 : Le raccord à effort micro nul correspondant à un raccord en moyenne de déplacement, restitué à la zone d'intérêt une souplesse sur ses bords « réaliste ». Un constat similaire a également été remarqué dans les travaux de Cornuault [Cornuault 1987] sur le postflambage de mailles « galbées » de fuselage. Dans cette étude, le problème est posé comme un problème d'homogénéisation en*

*non-linéaire géométrique où l'on exprime d'une part les conditions de répétitivité, et d'autre part des conditions de déformations moyennes, issues d'un calcul global, auxquelles est soumise la maille. Ce type de conditions mixtes, à rapprocher du raccord à effort micro nul, conduit à une bonne estimation de la charge critique de flambage contrairement à un calcul avec conditions aux limites rigides (déplacements imposés).*

## 4 Estimateur d'erreur en raccord *a posteriori*

Dans l'exemple de la plaque trouée traité dans le paragraphe précédent, la solution autour du trou correspond à la somme de la solution à grande longueur d'onde (solution de Saint-Venant) et de la solution localisée due au trou à condition que les effets de bords dus au raccord restent localisés près des bords et ne soient pas trop pénétrants. En d'autres termes, le raccord doit être suffisamment loin du trou et la zone où une description fine est requise doit être suffisamment large. Dans la méthode de projection de Dirichlet hiérarchique détaillée dans le paragraphe 1.2.1 du chapitre 1, la mise en place d'un estimateur de qualité *a posteriori* permet de définir la taille de cette zone.

Dans l'approche micro-macro, on propose un estimateur d'erreur bâti sur le non respect de la continuité en déplacement micro par interface pour les interfaces incompatibles délimitant la zone d'intérêt et pour lesquels un raccord à effort micro nul est utilisé. Afin de savoir dans quelle direction étendre la zone décrite finement (Figure 3.8), un estimateur d'erreur par interface est proposé et peut s'écrire de la façon suivante :

$$\xi_{\Gamma_{EE'}} = \frac{\|W_{EE'}^m - W_{E'E}^m\|_{\Gamma_{EE'}}}{\|W_{EE'}\|_{\Gamma_{EE'}} + \|W_{E'E}\|_{\Gamma_{EE'}}} \quad \text{où} \quad \|W\|_{\Gamma_{EE'}} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{W} \cdot \underline{W} d\Gamma$$

La valeur du critère associé à cet estimateur reste cependant à déterminer. La vérification du critère traduit le fait que la solution du problème au niveau du raccord présente la même régularité que celle décrite par la base macroscopique. En d'autres termes, la base macro permet de bien représenter la solution au niveau du raccord et l'erreur de pollution peut être supposée suffisamment faible.

## 5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux raccords permettant de « connecter » une description fine et une description grossière quelle que soit la discrétisation des

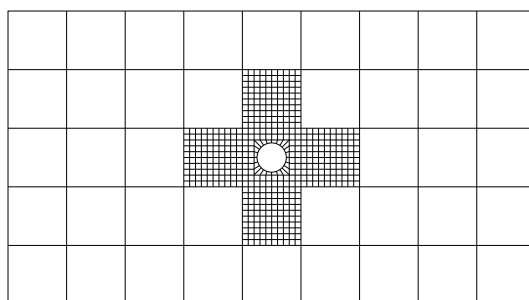


Figure 3.8: Illustration de la procédure de raffinement de la description pour l'indicateur d'erreur  $\xi_{\Gamma_{EE'}}$  par interface basé sur le non respect de la continuité des déplacements micro d'interface. Ici, le critère étant atteint sur les quatre interfaces entourant la sous-structure contenant le trou, les quatre sous-structure grossières adjacentes sont raffinées.

deux zones à recoller. Ces deux raccords sont basés sur la vérification des conditions de transmission en effort et déplacement au sens macroscopique du terme. Cette connexion de maillage est ainsi effectuée sur des quantités effectives que sont les torseurs d'effort, pour le raccord à effort micro nul, ou les mouvements de corps rigide sur les interfaces, pour le raccord à déplacement micro nul. Basé sur le principe de Saint-Venant, le raccord à effort micro nul permet de retrouver la solution intérieure dans la zone d'intérêt contrairement au raccord à déplacement micro nul. Il a été montré que la prise en compte de ces raccords dans l'approche micro-macro au niveau de l'étape locale de la stratégie sous la forme d'un nouveau comportement d'interface ne pose pas de difficulté particulière. Dans la suite, nous considérerons systématiquement le raccord à effort micro nul, c'est-à-dire le raccord en résultante et moment, pour raccorder des descriptions fine et grossière de la solution.

Enfin, un estimateur d'erreur *a posteriori*, basé sur le non respect de la continuité en déplacement micro par interface pour les interfaces incompatibles, a été proposé afin d'évaluer la qualité du raccord. Il constitue un indicateur intéressant permettant de définir la taille de la zone à raffiner et contrôler la localisation des effets du détail (trou, fissure ...) que l'on souhaite étudier.





**Deuxième partie**

**Approche micro-macro pour la  
fissuration**



---

*Dans cette deuxième partie, nous nous intéressons à l'analyse multiéchelle pour la fissuration proprement dite. La présence de la fissure soulève alors de nouvelles questions concernant la séparation des échelles macro et micro ainsi que de leur définition. Le problème de référence en fissuration de fatigue est d'abord présenté ainsi que la loi de propagation utilisée par Dassault Aviation. Cette présentation du cadre de l'étude est suivie de trois chapitres :*

- *Le chapitre 4 définit des échelles macroscopiques et microscopiques adaptées au suivi de fissure et en étudie les performances.*
- *Le chapitre 5 présente le traitement de la microstructure par la X-FEM. Les choix d'implantation et la validation de la méthode au sein du code de calcul sont exposés et discutés.*
- *Enfin, le chapitre 6 s'intéresse aux performances de la stratégie dans sa globalité. L'utilisation combinée de l'approche micro-macro et de la X-FEM est ainsi illustrée au travers d'exemples de propagation de fissure en fatigue qui intéressent Dassault Aviation.*



---

# Problème de référence en fissuration de fatigue

*Cette partie d'introduction formule le problème de référence en fissuration de fatigue. La loi de propagation utilisée par Dassault Aviation est spécifiée. Il est montré que le problème à résoudre revient à la résolution d'une succession de problèmes d'élasto-statique ; ce qui nous place dans le cadre mécanique utilisé pour présenter l'approche micro-macro (voir chapitre 2).*

On considère l'équilibre quasi-statique d'une structure fissurée qui occupe un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  sous les hypothèses des petites perturbations en régime isotherme. Cette structure est soumise à tout instant  $t$  appartenant à l'intervalle d'étude  $[0, T]$  à des forces volumiques  $\underline{f}_d$  et à des forces surfaciques  $\underline{F}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_2\Omega$ . Sur la partie complémentaire  $\partial_1\Omega$ , le déplacement  $\underline{u}_d$  est imposé (Figure 3.9). La fissure décrite par ses lèvres  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  est supposée libre d'effort. Les quantités indicées «  $d$  » sont des données. Les déplacements et vitesses vérifient de plus des conditions initiales en  $t = 0$ . Enfin, on supposera que la structure a un comportement élastique.

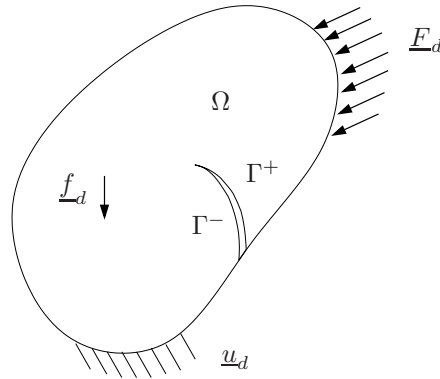


Figure 3.9: Schématisation du problème de fissuration de référence

## Problème de référence

L'écriture du problème quasi-statique de fissuration s'énonce alors de la façon suivante :

**Problème 11** Trouver  $\underline{u}(\underline{M}, t)$  et  $\sigma(\underline{M}, t)$  définis sur  $\Omega \times [0, t]$  et les paramètres d'évolution de la fissure  $\{a_i(t)\}_{i=1..n} \in \mathcal{A}^{[0,t]}$  qui vérifient :

- les équation de liaisons et les conditions limites :  $\underline{u} \in \mathcal{U}^{[0,t]}$

$$\forall t \in [0, t], \quad \underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega$$

$$\forall \underline{M} \in \Omega(t), \quad \underline{u}|_{t=0} = \underline{u}_0 \quad \text{et} \quad \dot{\underline{u}}|_{t=0} = \underline{v}_0$$

- les équations d'équilibre :  $\sigma \in \mathcal{S}^{[0,t]}$

$$\forall t \in [0, t], \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0^{[0,t]}, \quad \int_{\Omega(t)} \text{Tr}(\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega(t)} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

- la relation de comportement :

$$\forall t \in [0, t], \quad \forall \underline{M} \in \Omega(t), \quad \sigma = \mathbf{K} \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

- la loi d'évolution de la fissure :

$$\forall t \in [0, t], \quad (\{a_i\}_{i=1..n}) = f(G(t), \{a_i\}_{i=1..n}, G_c) \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{U}^{[0,t]}$  et  $\mathcal{S}^{[0,t]}$  représentent les espaces où sont cherchés les déplacements et les contraintes.  $\mathcal{U}_0^{[0,t]}$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}^{[0,t]}$ .  $\mathbf{K}$  est le tenseur de Hooke. La loi d'évolution de la fissure est écrite ici d'une façon très formelle comme une relation  $f$  entre des paramètres caractérisant la géométrie de l'avancée quasi-statique de la fissure  $\{a_i\}_{i=1..n}$  et les taux de restitution courant et critique  $G$  et  $G_c$ .

## Loi de propagation de fissures

### ■ Quelques critères de propagation

Dans le reste de l'étude, nous nous intéressons à la propagation d'une fissure sous chargement quasi-statique dans un milieu en état de contrainte plane ou de déformation plane, de comportement élastique homogène et isotrope et sous l'hypothèse des petites perturbations (Figure 3.10). Cette propagation est caractérisée à chaque instant par une direction et une « vitesse ». Comme le chargement est quasi-statique, il faut comprendre par vitesse la relation entre l'avancée de la fissure et l'évolution du chargement.

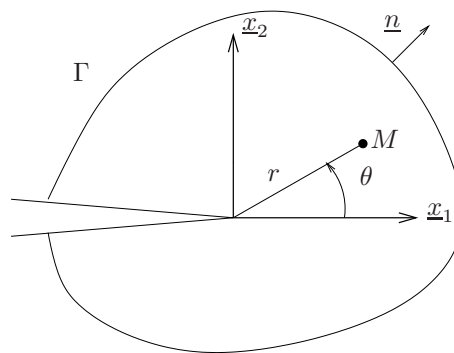


Figure 3.10: Paramétrage en pointe de fissure

Concernant la direction de propagation, différentes théories existent. Le critère de la contrainte circonférentielle maximale, *maximum hoop stress criterion* [Erdogan et Sih 1963], prédit une propagation de la fissure selon le plan sur lequel la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale. Sur ce plan, le cisaillement est nul. Le critère de l'énergie de déformation minimale, *strain energy density criterion* [Sih 1973], prédit une propagation de la fissure dans la direction où l'énergie de déformation est minimale. L'utilisation de l'un de ces deux critères ne nécessite que la connaissance des facteurs d'intensité de contrainte courant en fond de fissure.

Le critère de symétrie locale, *principle of local symmetry* [Goldstein et Salganik 1974], et le critère de restitution maximale d'énergie, *maximum energy release*, nécessitent quant à eux la connaissance des facteurs d'intensité de contrainte juste après branchement. Les facteurs d'intensité de contrainte avant et après branchement sont en effet différents. Le critère de symétrie locale prédit que la fissure se propage de manière à annuler le second facteur d'intensité de contrainte juste après branchement ( $K_{II}^* = 0$ ). Quant au principe de restitution d'énergie maximale, il



impose que la propagation quasi-statique d'une fissure s'exécute dans la direction qui maximise le taux de restitution d'énergie  $G$  :

$$G = \frac{K_I^{*2}}{E^*} + \frac{K_{II}^{*2}}{E^*}$$

où  $E^*$  est défini en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  par  $E^* = E$  en contrainte plane et  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  en déformation plane.  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$  sont les facteurs d'intensités de contrainte juste après branchement. Ce principe découle de l'hypothèse de base de la théorie de Griffith (existence d'une énergie de rupture caractéristique du matériau et proportionnelle à la surface fissurée).

Les travaux de Leblond et de Amestoy [Leblond 1989, Amestoy et Leblond 1992] ont montré que les facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure juste après branchement ( $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ) dépendent uniquement des facteurs d'intensité de contrainte juste avant branchement ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ) et de l'angle  $\theta$  caractérisant le changement de la direction et ce par une relation universelle de la forme :

$$\begin{aligned} K_I^* &= F_{11}(\theta)K_I + F_{12}(\theta)K_{II} \\ K_{II}^* &= F_{21}(\theta)K_I + F_{22}(\theta)K_{II} \end{aligned}$$

où les quatre fonctions  $F_{ij}$  sont des fonctions universelles. Ce résultat leur a permis de comparer le critère de symétrie locale et le principe de restitution d'énergie maximale et de conclure qu'ils sont proches mais différents [Amestoy et Leblond 1985 - 1992].

### ■ Croissance de fissure par fatigue

Concernant l'avancée de fissure et pour la rupture en fatigue d'un matériau soumis à une force périodique (Figure 3.11), on utilise classiquement la loi de Paris :

$$\frac{da}{dN} = C \left( (1 - R) K_{IM} \right)^m \quad \text{où} \quad R = \frac{F_m}{F_M} = \frac{K_{Im}}{K_{IM}} \quad (3.2)$$

et où  $a$  représente l'avancée de fissure,  $N$  est le nombre de cycles et  $C$  et  $m$  dépendent du matériau. C'est cette loi de propagation qui est utilisée dans les calculs de rupture en fatigue par Dassault Aviation. La direction de propagation est quant à elle déterminée par le critère de la contrainte circonférentielle maximale qui se traduit par la relation suivante :

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right]$$

où  $\theta_c$  représente l'angle de bifurcation recherché. Remarquons que cette loi ne faisant intervenir que les facteurs d'intensité de contrainte courants est complètement

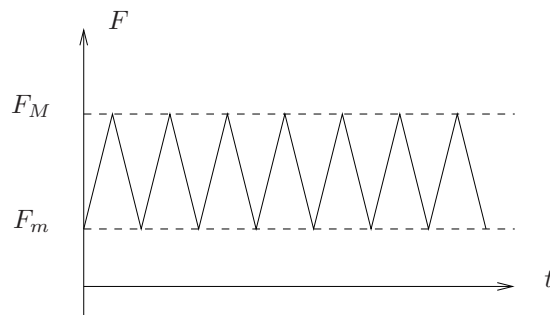


Figure 3.11: Chargement de fatigue

explicite. On remarque aussi que l'évolution du chargement n'intervient plus. Le pilotage se fait en nombre de cycles ou en avancée de fissure. Seule la géométrie change et le calcul peut se faire pas à pas sur de nouvelles configurations du domaine. Dans cette étude, nous piloterons en avancée de fissure. Nous supposons aussi que cette avancée est décrite par deux paramètres géométriques : une avancée  $a$  et un angle  $\theta_c$ . Le trajet de fissure en 2D est ainsi décrit par une succession de segments de droite. La loi d'évolution de la fissure (voir équation (3.1)) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 a &= a_d \\
 \theta_c &= \theta_c(K_I, K_{II})
 \end{aligned}$$

On trouvera en annexe B une présentation de la technique utilisée dans notre étude pour extraire les facteurs d'intensité de contrainte à partir d'intégrales d'interaction [Shih et Asaro 1988].

*Remarque :* Chez Dassault Aviation, comme chez tous les avionneurs, pour les calculs de fatigue, des cas de chargements beaucoup plus complexes que le chargement périodique illustré sur la figure 3.11 sont considérés. En fait, des « spectres » de charges, qui équivalent à une suite de manoeuvres en vol (spectre de mission), sont étudiés.

## Réécriture du problème de référence

Le problème 11 de fissuration en fatigue revient alors à la résolution d'une succession de problèmes de statique. Ainsi, à chaque pas de propagation, la géométrie étant connue, le problème à résoudre s'écrit :

**Problème 12** Trouver  $\underline{u}(\underline{M})$  et  $\sigma(\underline{M})$  définis sur  $\Omega$  et le paramètre d'évolution de la fissure  $\theta_c \in \mathbb{R}$  qui vérifient :

– les équation de liaisons :  $\underline{u} \in \mathcal{U}$

$$\underline{u} = \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega$$

– les équations d'équilibre :  $\sigma \in \mathcal{S}$

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* d\Gamma$$

– la relation de comportement :

$$\forall \underline{M} \in \Omega, \quad \sigma = \mathbf{K} \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

– la loi d'évolution de la fissure :

$$\begin{aligned} a &= a_d \\ \theta_c &= 2 \arctan \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{S}$  représentent les espaces où sont cherchés les déplacements et les contraintes.  $\mathcal{U}_0$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}$ .

Le nombre de cycles  $N^{(i)}$  correspondant à une avancée de fissure  $a_d$ , au pas  $i$  de propagation, est déterminé par la loi de Paris (3.2). Ainsi :

$$N^{(i)} = \frac{a_d}{C \left( (1-R) K_I^{(i)} \right)^m} \quad \text{où} \quad R \underline{F}_M = \underline{F}_m \quad \text{et} \quad \underline{F}_d = \underline{F}_M$$

---

## Choix de la base macroscopique

*Une fissure ayant un effet à la fois au niveau local et au niveau global, la question de la description de la cinématique et des efforts aux échelles micro et macro se pose. L'approche micro-macro est utilisée pour effectuer cette séparation des échelles et la possibilité de choisir facilement différents projecteurs macroscopiques dans la stratégie est pleinement exploitée. Dans ce chapitre, différentes échelles macroscopiques et microscopiques adaptées au suivi de fissure sont ainsi proposées et leurs performances sont étudiées.*

### Sommaire

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Introduction de la discontinuité à l'échelle micro</b> . . . . . | <b>114</b> |
| <b>2</b> | <b>Introduction de la discontinuité aux deux échelles</b> . . . . . | <b>116</b> |
| 2.1      | Définition d'une base macro discontinue . . . . .                   | 116        |
| 2.2      | Illustration de la séparation des échelles . . . . .                | 118        |
| <b>3</b> | <b>Influence de la base macro sur la convergence</b> . . . . .      | <b>121</b> |
| <b>4</b> | <b>Bilan</b> . . . . .  | <b>129</b> |

---

Dans l'approche micro-macro, le fait qu'une fissure ait une influence aussi bien au niveau local qu'au niveau global soulève la question de la description de la cinématique et des efforts aux deux échelles : micro et macro. Nous proposons dans cette partie deux alternatives pour effectuer la séparation des échelles dans ce contexte de fissuration. Afin que le problème macro conserve la même structure, une première possibilité consiste à n'introduire la discontinuité qu'au niveau micro. Les quantités macro sont alors continues et les quantités micro discontinues. Un enrichissement de la cinématique macroscopique est alors proposé pour mieux rendre compte de l'effet de la fissure au niveau global. L'autre alternative consiste à introduire la discontinuité aux deux échelles. Les quantités micro et macro sont alors discontinues.

Dans ce chapitre, nous proposons ainsi deux façons d'introduire la discontinuité : soit au niveau micro uniquement soit aux deux niveaux micro et macro. Les différents enrichissements de la base macro, continue dans un cas et discontinue dans l'autre, sont illustrés. Les performances induites par ces différentes séparations d'échelles sont discutées. En particulier, il est montré l'influence de ces enrichissements sur le taux de convergence de la stratégie itérative micro-macro exposée au chapitre 2. L'aspect propagation n'est pas abordé ici. Aussi, nous nous intéressons essentiellement à la prise en compte et au traitement multiéchelle d'une fissure donnée.

## 1 Introduction de la discontinuité à l'échelle micro

Afin que le problème macro global conserve la même structure au cours de la propagation, un premier choix consiste à n'introduire la discontinuité qu'au niveau micro. Par conséquent, sur une interface  $\Gamma_{EE'}$  traversée par une fissure, les quantités macro  $\underline{F}^M$  et  $\underline{W}^M$  sont continues, tandis que les quantités micro  $\underline{F}^m$  et  $\underline{W}^m$  sont discontinues.

Pour illustrer ce point, considérons l'exemple académique d'une structure comportant une fissure libre d'effort qui traverse une interface (Figure 4.1(a)). Le maillage macro d'interface est montré en Figure 4.1(c) et le maillage micro sur chacune des sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  est décrit en Figure 4.1(b). La déformée totale micro et les déplacements macro  $\underline{W}_E^M$  obtenus avec une base macro linéaire (Figure 4.2(a)) montre que  $\underline{W}_E^M$ , contrairement à sa partie complémentaire  $\underline{W}_{E'}^m$ , est continu. Afin de mieux décrire la solution grossière, le même calcul est réalisé avec une base macro cubique qui extrait les résultantes, les moments et les parties linéaire, quadratique et cubique à la fois (voir paragraphe 2.2 du chapitre 2). Les résultats à convergence en terme de déformée de la microstructure (Figure 4.2(b)), sont bien entendu les mêmes qu'avec la base macro linéaire. Notons que compte tenu de la

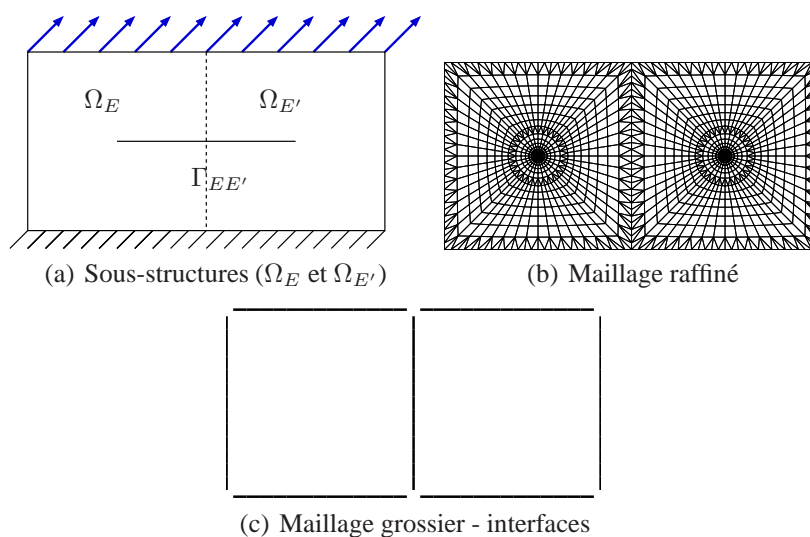


Figure 4.1: Structure comportant une fissure libre d'effort qui traverse une interface

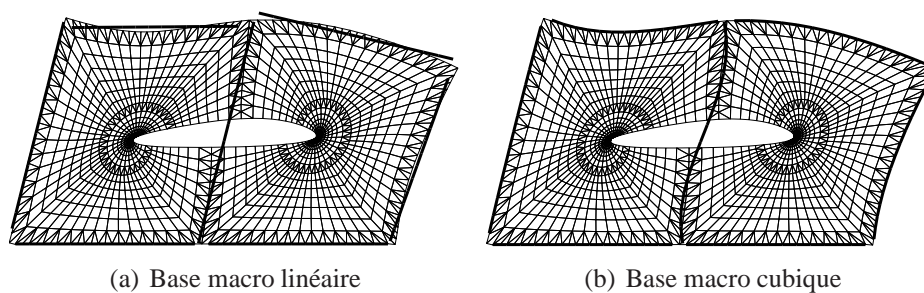


Figure 4.2: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour une base macro continue : la discontinuité est introduite uniquement au niveau micro.

définition de la base macro sur une interface, l'opérateur homogénéisé résultant obtenu pour chaque sous-structure peut représenter une solution grossière tenant compte de la présence de la fissure. Ainsi, ces opérateurs homogénéisés permettent de représenter non seulement des états de contraintes homogènes mais aussi des états de sollicitations à forts gradients tels que ceux induits par la présence d'une fissure. Ce constat est d'autant plus vrai qu'on enrichit la base macro.

## 2 Introduction de la discontinuité aux deux échelles

Dans le paragraphe précédent, la discontinuité en déplacement due à la fissure n'est introduite qu'au niveau microscopique. Construit à partir de quantités d'interfaces linéaires ou cubiques, le comportement homogénéisé des sous-structures qui en découle est capable de prendre en compte des gradients importants à l'échelle macro, tels que ceux induits par la fissure. Néanmoins, un enrichissement plus efficace de la cinématique macro consiste à introduire la discontinuité au niveau macroscopique également. Il convient alors de définir une nouvelle base macro apte à prendre en compte une discontinuité.

### 2.1 Définition d'une base macro discontinue

Considérons une interface coupée par une fissure en un point donné. Une façon simple de construire une base macro linéaire discontinue consiste à associer à chacun des deux morceaux de l'interface une base macro linéaire similaire à celle proposée dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2 (Figure 4.3). Pour engendrer la cinématique d'un des morceaux, on utilise des vecteurs de base similaires à ceux de la base macro linéaire mais valant zéro sur l'autre morceau. Les vecteurs  $\underline{e}_1^M(\underline{M})$ ,  $\underline{e}_2^M(\underline{M})$ ,  $\underline{e}_3^M(\underline{M})$  et  $\underline{e}_4^M(\underline{M})$  sont ainsi automatiquement orthogonaux aux quatre autres vecteurs  $\underline{e}_5^M(\underline{M})$ ,  $\underline{e}_6^M(\underline{M})$ ,  $\underline{e}_7^M(\underline{M})$  et  $\underline{e}_8^M(\underline{M})$  de l'autre morceau au sens de la forme bilinéaire travail. L'orthogonalité des huit fonctions de base macro est ainsi assurée. En revanche, il convient de normer convenablement chacun des vecteurs par rapport aux caractéristiques de l'interface. Ainsi, pour une interface  $\Gamma$  séparée en deux morceaux  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $\underline{e}_1^M(\underline{M})$  est défini de la façon suivante :

$$\underline{e}_1^M = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Gamma)}} \underline{N}_1 & \text{pour } \underline{M} \in \Gamma_1 \\ \underline{0} & \text{pour } \underline{M} \in \Gamma_2 \end{cases}$$

La figure 4.4 représente, pour l'exemple traité précédemment, la déformée totale et les déplacements macro d'interface obtenus avec une base macro linéaire discontinue utilisée pour l'interface traversée par la fissure. Les déplacements macro  $\underline{W}_E^M$  et sa partie micro complémentaire  $\underline{W}_E^m$  sont bien discontinus.

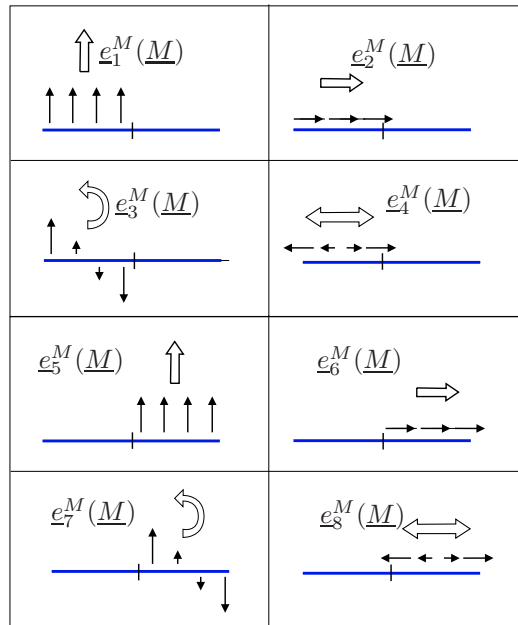


Figure 4.3: Base macro linéaire par morceau  $\{e_i^M\}_{i=1..8}$ , ( $n_M = 8$ ), sur une interface  $\Gamma_{EE'}$  traversée en son milieu par une fissure

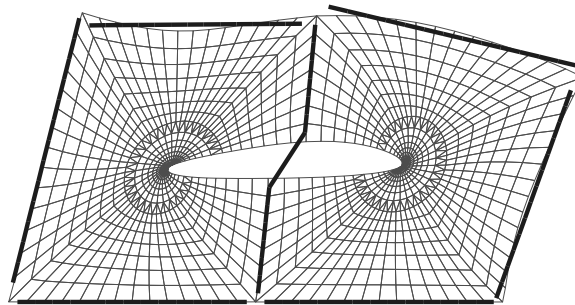


Figure 4.4: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour une base macro discontinue : la discontinuité est introduite au niveau micro et au niveau macro.



*Remarque 1 : Concernant la discrétisation des quantités d'interface, on notera que le choix d'une approximation par des fonctions constantes (de degré  $P_0$ ) continues par morceaux (voir paragraphe 1.3.2 du chapitre 2) autorise naturellement l'apparition d'une discontinuité entre deux éléments de l'interface.*

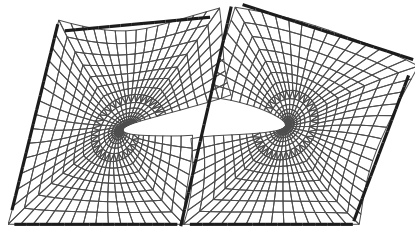
*Remarque 2 : La définition de cette base macro discontinue nécessite de préciser le point de coupure par la fissure sur l'interface. Ceci peut s'avérer ardu dans le cas de la propagation de fissure. Nous verrons au chapitre 5 que l'utilisation d'une fonction distance (Level Sets), dont l'isovaleur zéro définit le point de coupure, permet de faciliter cette opération.*

## 2.2 Illustration de la séparation des échelles

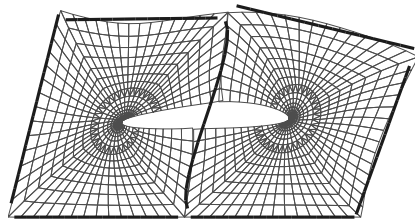
L'enrichissement de la base macro par une partie cubique (base macro cubique) ou une discontinuité (base macro discontinue) permet de construire des opérateurs homogénéisés capable de prendre en compte des grands gradients de déformations à l'échelle macroscopique. Dans ce paragraphe, on montre dans quelle mesure il est possible de séparer le traitement des échelles micro et macro pour chacun des opérateurs homogénéisés associés aux différentes base macro étudiées.

On considère l'exemple du paragraphe 1. Pour l'interface traversée par la fissure, on utilise successivement une base macro linéaire, une base macro cubique et une base macro discontinue. Pour les autres interfaces (de type condition limite en effort ou en déplacement), une base macro linéaire est utilisée. Afin d'illustrer la séparation des échelles, on utilise le raccord à effort micro nul présenté au paragraphe 2 du chapitre 3. Ce raccord permet d'assurer les conditions de transmission d'effort et de déplacement au sens macroscopique du terme. Ainsi, pour la base macro linéaire, on « raccorde » les parties linéaires. Pour la base macro cubique, ce sont les parties cubiques. Enfin, dans le cas de la base macro discontinue, les parties linéaires par morceaux sont connectées. La figure 4.5 représente la déformée micro totale et le déplacement macro d'interface pour les trois bases. En terme de déformée, les cas utilisant une base macro cubique ou discontinue semble donner d'excellent résultats contrairement à celui de la base macro linéaire. Dans ce dernier cas, rappelons que le raccord à effort micro nul correspond à un raccord en moyenne du déplacement. La figure 4.5(a) montre clairement l'insuffisance de ce raccord pour représenter le mode d'ouverture de la fissure.

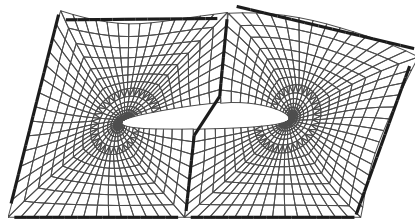
Considérons à présent la carte d'erreur en énergie pour la sous-structure  $\Omega_{E'}$  (Figure 4.6), la référence étant le calcul obtenu pour un comportement parfait de l'interface fissurée. Ce calcul de référence correspond donc à celui présenté aux paragraphes 1 et 2.1. On constate que les opérateurs homogénéisés décrits par l'utilisation de la base macro discontinue ou de la base cubique permettent d'obtenir la



(a) Base macro linéaire



(b) Base macro cubique



(c) Base macro discontinue

Figure 4.5: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro discontinue avec raccord à effort micro nul sur l'interface traversée par la fissure.

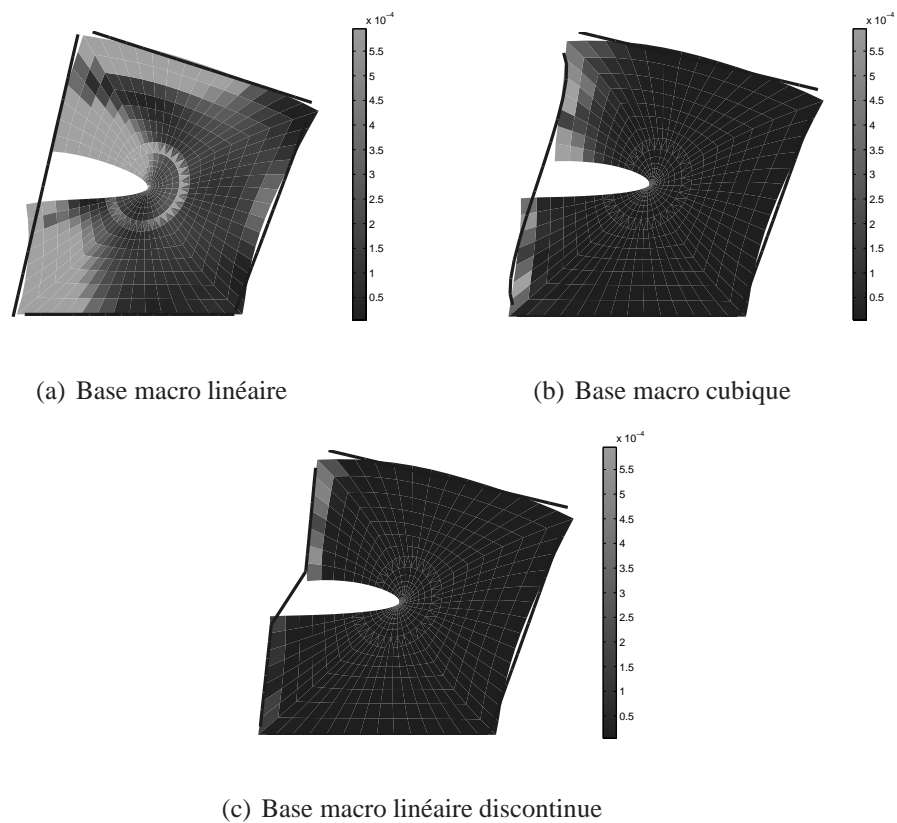


Figure 4.6: Carte d'erreur en énergie pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro discontinue avec raccord à effort micro nul sur l'interface traversée par la fissure : un enrichissement de l'échelle macro découple les échelles et permet de retrouver la solution intérieure uniquement avec le comportement homogénéisé macro.

solution intérieure de Saint-Venant qui est correcte loin du raccord. Ceci est d'autant mieux vérifié dans le cas de la base macro discontinue étant donné que, compte tenu de sa définition (voir paragraphe 2.1 précédent), on raccorde les torseurs d'effort (résultantes et moments) sur les deux morceaux de l'interface fissurée.

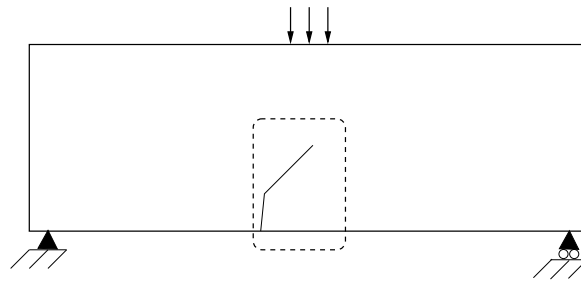
### 3 Influence de la base macro sur la convergence

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer l'influence de la base macro et de ses enrichissements (cubique et discontinu) sur la convergence de la stratégie. Pour ce faire, on étudie le cas de la poutre fissurée en flexion trois points représentée en figure 4.7(a). Le maillage micro est défini sur la figure 4.7(b) et présente un raffinement dans le voisinage de la fissure. Le maillage macro associé aux interfaces et au partitionnement en sous-structure est donné en figure 4.7(c). Concernant le choix de la base macro sur les interfaces, on prend une base macro linéaire partout excepté pour les quatre interfaces situées dans la zone d'intérêt pour lesquelles on utilise successivement une base macro linéaire, une base macro cubique et une base macro discontinue.

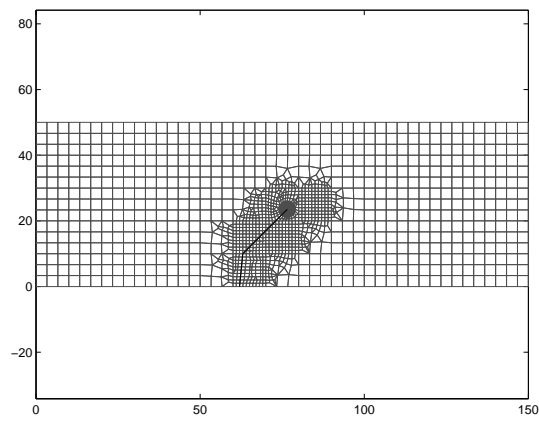
Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 représentent les déformées micro totales et les déplacements macro d'interface obtenus pour chacune des trois bases macro utilisées dans la zone d'intérêt. Les solutions à convergence du problème (solution totale) sont, bien entendu, les mêmes. On notera qu'un comportement macro enrichi (cubique ou discontinu) permet de mieux approcher la solution dans la zone d'intérêt y compris pour les sous-structures entièrement traversées par la fissure. L'annexe A précise les propriétés de l'opérateur homogénéisé associé à une sous-structure séparée en deux.

Si l'on observe la convergence de l'erreur LATIN,  $\eta$ , définie au paragraphe 3.4 du chapitre 2, au cours des itérations (Figure 4.11), on s'aperçoit que le taux de convergence est amélioré avec l'utilisation d'une base macro cubique ou d'une base macro discontinue. Pour la courbe de convergence associée à la base macro discontinue, on observe deux « régimes » de convergence. Dans la première phase, le taux de convergence est essentiellement piloté par la convergence des quantités d'effort et de déplacement macro d'interface associées à la résolution du problème macro. Dans la deuxième phase, la convergence est pilotée par les quantités micro. L'apport du problème macro dans ce cas est alors remarquable.

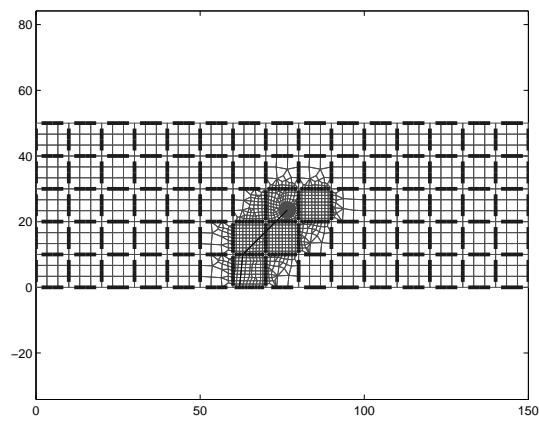
La définition de l'erreur LATIN,  $\eta$ , étant une erreur globale sur l'ensemble des interfaces, elle ne donne pas nécessairement une information suffisamment pertinente concernant la convergence de quantités locales. En particulier, dans le cas traité ici, l'erreur peut se localiser justement dans la zone d'intérêt où la séparation



(a) Poutre fissurée en flexion 3 points

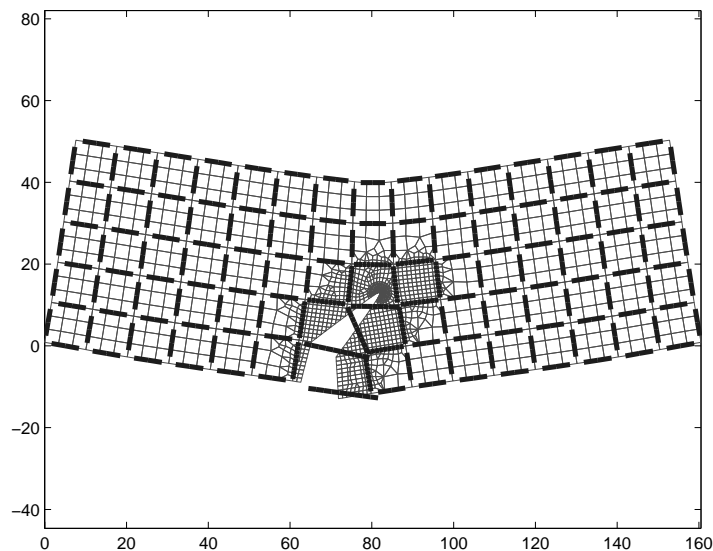


(b) Maillage micro

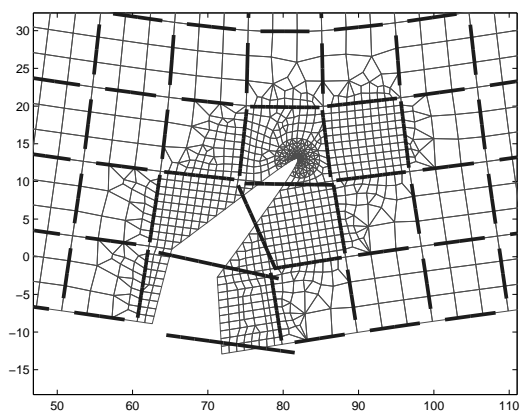


(c) Maillages macro et micro

Figure 4.7: Poutre fissurée en flexion trois points : maillage micro conforme à la géométrie de la fissure et maillage macro d'interface.

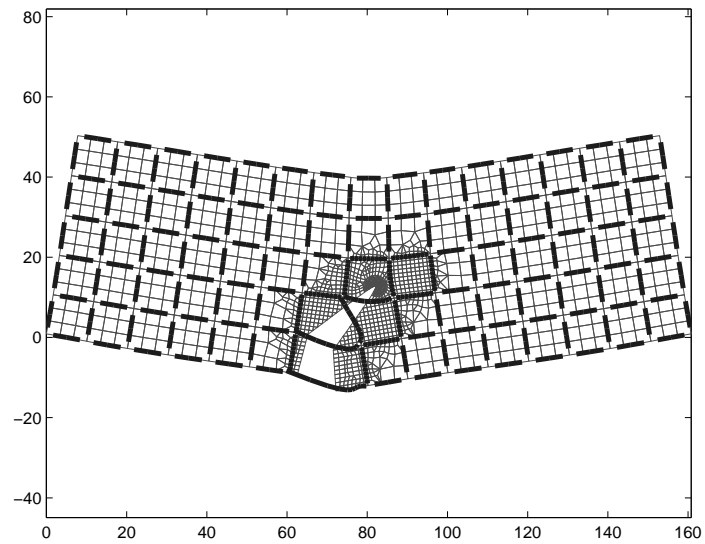


(a) Déformée et déplacement macro

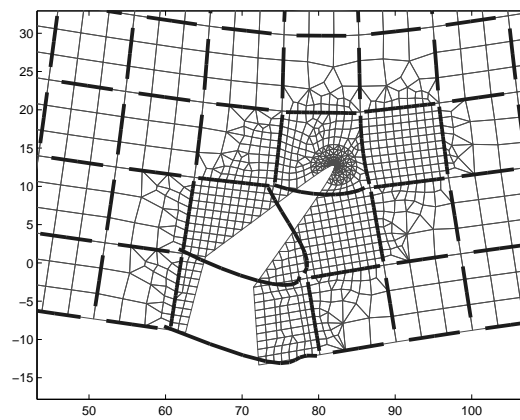


(b) Zoom

Figure 4.8: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro linéaire

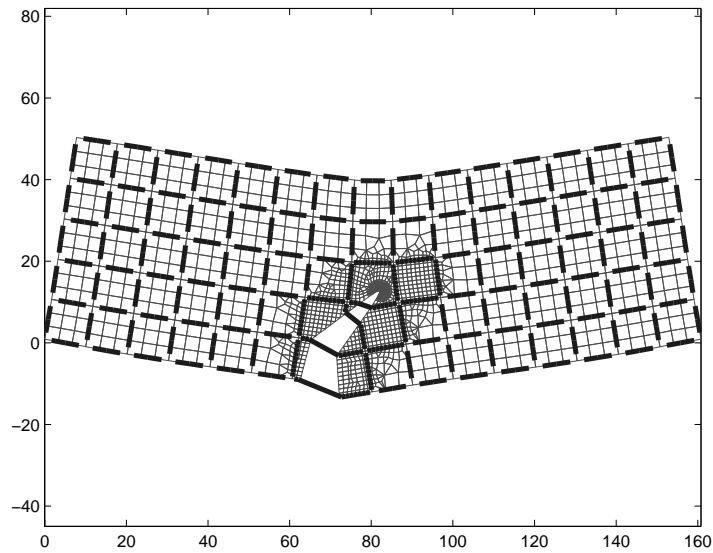


(a) Déformée et déplacement macro

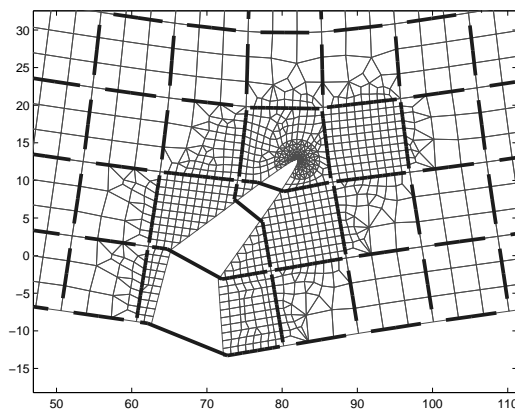


(b) Zoom

Figure 4.9: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro cubique



(a) Déformée et déplacement macro



(b) Zoom

Figure 4.10: Déformée totale et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro discontinue



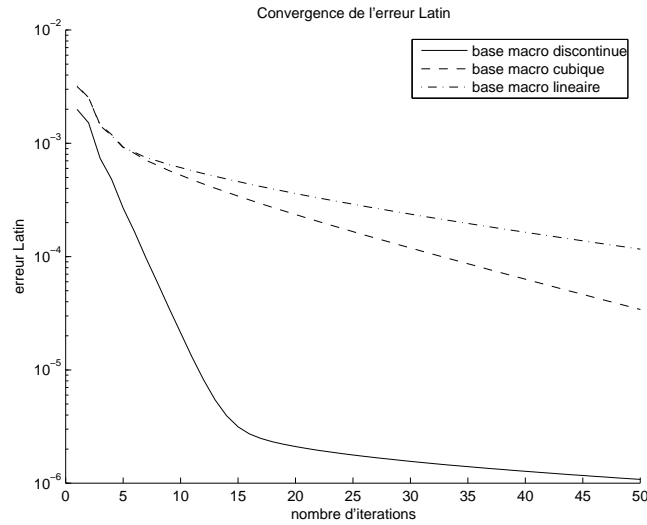


Figure 4.11: Erreur LATIN,  $\eta$ , en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro discontinue : un enrichissement de la base macro améliore le taux de convergence.

des échelles micro et macro permet de traiter plus ou moins efficacement la localisation des déformations due à la fissure. Les figures 4.12 et 4.13 représentent la convergence de la valeur des facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que de leur erreur relative en fonction du nombre d'itérations. Pour le calcul d'erreur, les valeurs de référence sont déterminées à partir du calcul à convergence (pour un grand nombre d'itérations). Là encore, l'amélioration du taux de convergence des facteurs d'intensité de contrainte est significative. Pour la base macro cubique, on note qu'une erreur inférieure à 1% sur  $K_I$  (Figure 4.13(a)) et  $K_{II}$  (Figure 4.13(b)) est atteinte en moins de 10 itérations. Si l'on se réfère à la courbe de convergence LATIN (Figure 4.11), on constate qu'en 10 itérations, l'indicateur d'erreur  $\eta$  a atteint un niveau situé entre  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  pour l'utilisation d'une base macro discontinue. Même si le critère est discutable, pour les raisons évoquées précédemment, on pourra retenir qu'un niveau d'erreur LATIN heuristique de  $10^{-4}$  permet d'obtenir une estimation raisonnable des facteurs d'intensité de contrainte à environ 1% avec l'utilisation d'une base macro discontinue dans la zone fissurée.

*Remarque* : On remarquera que cette amélioration des performances de la stratégie en terme de vitesse de convergence obtenu par enrichissement de la base macro, a un coût à payer qui se traduit par l'ajout de degrés de liberté macro (associés aux nouvelles fonctions de base macro ajoutées). Cet enrichissement local spécifique à la zone d'intérêt fissurée conduit donc, a priori, à une modification de

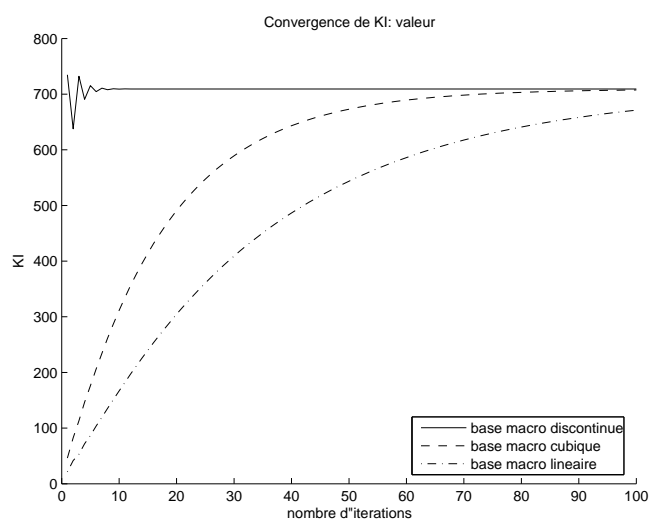
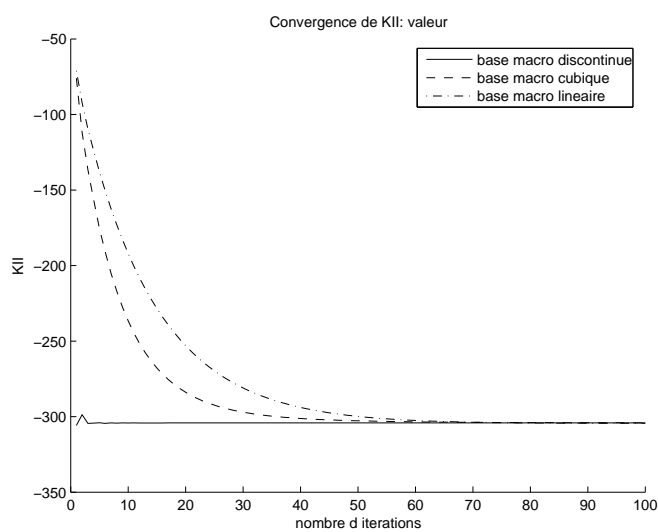
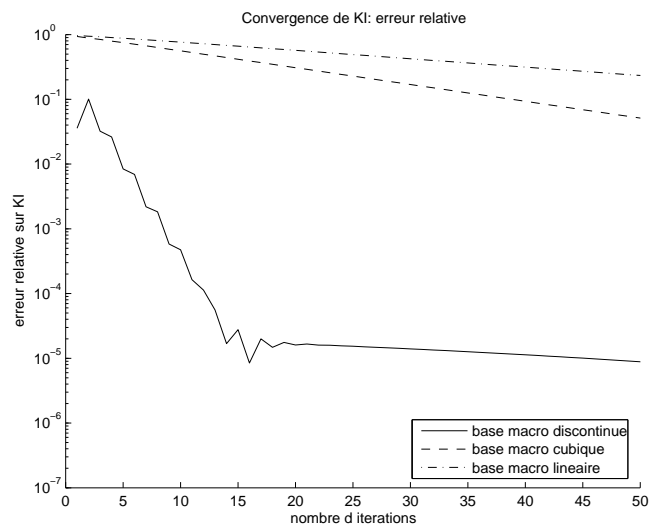
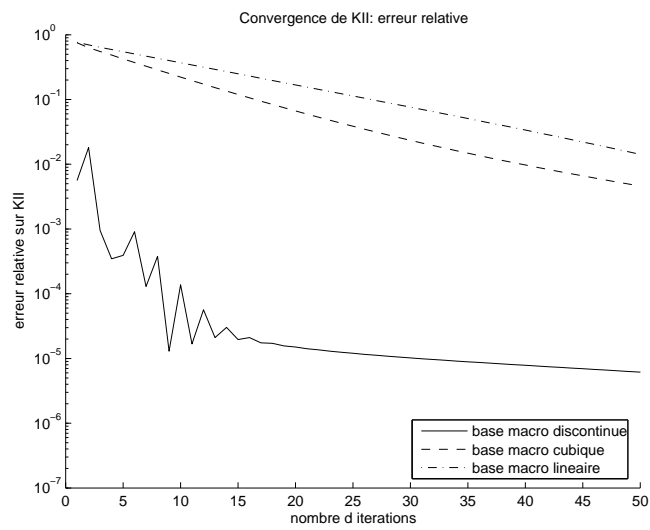
(a) valeur de  $K_I$ (b) valeur de  $K_{II}$ 

Figure 4.12: Valeur des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro discontinue



(a) erreur relative sur  $K_I$



(b) erreur relative sur  $K_{II}$

Figure 4.13: Erreur relative des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction du nombre d'itérations pour les bases macro continues (linéaire et cubique) et la base macro discontinue

*la taille du problème macroscopique au cours de la propagation de la fissure. Un compromis est donc à faire entre la non modification de la taille du problème macro au cours de la propagation et l'amélioration du taux de convergence de la stratégie.*

## **4 Bilan**

Dans cette partie, nous avons proposé différentes séparations d'échelles permettant un traitement multiéchelle de l'effet d'une fissure sur la réponse à la fois globale et locale d'une structure. Dans le cadre de l'approche micro-macro, cela s'est traduit par la proposition de différentes bases macroscopiques. Deux façons de prendre en compte la discontinuité en déplacement ont ainsi été proposées. La première introduit la discontinuité uniquement au niveau micro. Les quantités macro obtenues sont alors continues et les quantités micro discontinues. Afin de mieux prendre en compte l'effet de la fissure au niveau macro, un enrichissement de la base macro linéaire permettant d'extraire la partie cubique d'une quantité d'interface a été étudié. L'autre façon d'introduire une discontinuité a consisté à prendre en compte celle-ci à la fois au niveau micro et au niveau macro. Une base macro linéaire discontinue a ainsi été envisagée pour les interfaces traversées par une fissure. Ces enrichissements successifs de la base macro et donc du problème macro permettent d'améliorer le taux de convergence de la stratégie itérative micro-macro en particulier dans le cas de l'introduction de la discontinuité aux deux échelles.



---

# Traitement de la microstructure par la X-FEM

*Dans ce chapitre, nous présentons le traitement de la microstructure par la X-FEM. Par une technique d'enrichissement adaptée du champ de déplacement, la méthode permet de représenter correctement la solution singulière en pointe de fissure et simplifie grandement les processus de maillage et de remaillage lors de la propagation. Les choix d'implantation et la validation de la méthode au sein du code de calcul sont exposés et discutés.*

## Sommaire

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Modélisation d'une fissure selon la X-FEM</b> . . . . .   | <b>133</b> |
| <b>2</b> | <b>Les difficultés techniques de mise en œuvre</b> . . . . . | <b>135</b> |
| 2.1      | Description de la fissure . . . . .                          | 135        |
| 2.2      | Intégration numérique . . . . .                              | 135        |
| <b>3</b> | <b>Utilisation des <i>Level Sets</i></b> . . . . .           | <b>137</b> |
| 3.1      | Description d'une frontière par <i>Level Sets</i> . . . . .  | 138        |
| 3.2      | Description d'une fissure . . . . .                          | 139        |
| <b>4</b> | <b>Implantation dans un code orienté objet</b> . . . . .     | <b>141</b> |
| 4.1      | Gestion des degrés de liberté . . . . .                      | 142        |
| 4.2      | Intégration numérique . . . . .                              | 142        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.3      | Calcul de la déformation . . . . .                       | 143        |
| <b>5</b> | <b>Validation de l'implantation . . . . .</b>            | <b>146</b> |
| 5.1      | X-FEM et modélisation par doubles nœuds . . . . .        | 146        |
| 5.2      | Calcul des facteurs d'intensité de contraintes . . . . . | 148        |
| 5.3      | Apports des fonctions $F_j$ d'enrichissement . . . . .   | 154        |
| <b>6</b> | <b>Bilan . . . . .</b>                                   | <b>162</b> |

---

Afin de s'affranchir des difficultés de maillage et de remaillage posées par la propagation de fissure, on se propose d'utiliser la méthode X-FEM [Belytschko et Black 1999] comme technique d'enrichissement local pour décrire la fissure à une échelle fine. La méthode permet de décrire correctement la solution singulière en pointe de fissure. L'introduction d'une fonction d'enrichissement discontinue autorise au maillage de ne plus être conforme à la géométrie de la fissure.

Ce chapitre ne présente pas de résultats nouveaux concernant la méthode. Il a pour but de valider et d'exposer son implantation au sein du code éléments finis orienté objet développé au LMT-Cachan. Son utilisation dans le cadre multiéchelle exposé précédemment n'est pas abordée ici. Il sera traité au chapitre 6. Nous décrivons, tout d'abord, la méthode X-FEM ainsi que les difficultés techniques sous-jacentes. La gestion de la propagation de fissure à l'aide de fonctions de niveau, *Level Sets*, [Osher et Sethian 1988] est également rappelée. Les choix d'implantation de la méthode dans le code de calcul sont ensuite présentés et discutés. Enfin, le chapitre se termine sur une série d'études permettant de valider l'intégration de la X-FEM. Les résultats sont comparés à ceux de la littérature et permettent d'illustrer certaines caractéristiques de la méthode ainsi que certaines difficultés qui font aujourd'hui l'objet de travaux de recherche.

## 1 Modélisation d'une fissure selon la X-FEM

Pour représenter une fissure, deux types de fonctions d'enrichissement (voir paragraphe 2.2.3 du chapitre 1) sont utilisés pour modéliser d'une part la discontinuité du déplacement le long de la fissure et, d'autre part, la solution en pointe de fissure. Le champ de déplacement  $\underline{u}$  est alors cherché sous la forme :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \hat{\varphi}_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in N_d} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in N_p} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^4 F_j(\underline{x}) \underline{b}_i^j \right) \quad (5.1)$$

où :

- $N$  est l'ensemble des nœuds du maillage ;
- $\underline{u}_i$  est le degré de liberté (vectoriel) classique au nœud  $i$  ;
- $\varphi_i$  est choisie en pratique identique à  $\hat{\varphi}_i$  et est la fonction « chapeau » éléments finis classique associée au nœud  $i$  ;
- $N_d \subset N$  est l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité et les coefficients  $\underline{a}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un nœud appartient à  $N_d$  si son support est coupé par la fissure mais ne contient aucune de ses pointes. Ces nœuds sont entourés d'un carré sur la figure 1.14 ;
- $N_p \subset N$  est l'ensemble des nœuds à enrichir pour modéliser le fond de fissure et les coefficients  $\underline{b}_i$  sont les degrés de liberté (vectoriels) correspondants. Un



nœud appartient à  $N_p$  si son support contient la pointe de fissure. Ces nœuds sont entourés d'un cercle sur la figure 1.14 ;

Les fonctions  $F_j$  permettent de représenter les solutions asymptotiques en pointe de fissure. Elles valent en élasticité :

$$\{F_j(\underline{x})\} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (5.2)$$

où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans les axes locaux en fond de fissure (Figure 3.10). On remarquera que, parmi ces fonctions  $F_j$ , seule la fonction  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  est discontinue. La fonction  $H(\underline{x})$  est discontinue sur la fissure et de valeur constante de part et d'autre de celle-ci :  $+1$  d'un côté et  $-1$  de l'autre. Avec les notations de la figure 5.1, on peut ainsi écrire :  $H(\underline{x}) = \text{sign}((\underline{x} - \underline{x}^*)^T \cdot \underline{n}_s)$ . Pour plus de détails, on pourra se référer à [Moës *et al.* 1999].

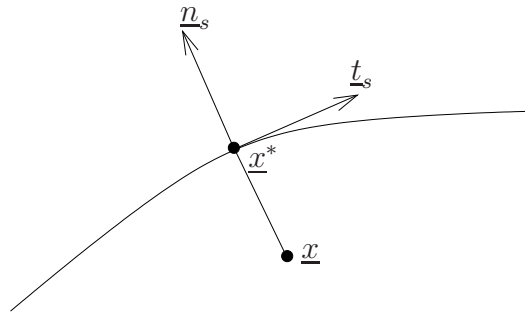


Figure 5.1: Vecteur normal et tangent à la fissure. Le point  $\underline{x}^*$  est le point le plus proche de  $\underline{x}$  sur la fissure. La valeur de la fonction  $H$  au point  $\underline{x}$  vaut  $-1$  pour la situation représentée sur la figure.

*Remarque 1* : Dans le cas où la discontinuité en déplacement se confond avec le bord des éléments (maillage conforme à la fissure), la X-FEM revient à une modélisation de la discontinuité par double nœuds. Dans ce cas, les degrés de liberté enrichis associés à  $H(\underline{x})$ , les  $\underline{a}_i$ , correspondent aux sauts de déplacement nodaux [Moës *et al.* 1999].

*Remarque 2* : On remarquera que seuls les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure sont enrichis par les  $F_j$  et ceci quelque soit la taille  $h$  des éléments. Le taille du support des fonctions  $F_j$  tend donc vers 0 lorsque  $h$  diminue. Cette manière de faire ne permet pas d'obtenir le taux de convergence optimal de l'erreur en énergie lorsque  $h$  diminue. En fait, c'est toujours la singularité qui pilote la convergence, si bien que l'on retrouve le taux de convergence en  $\sqrt{h}$  obtenu classiquement avec la FEM. Concernant ce problème, on se réfèrera aux travaux

de Laborde [Laborde et al. 2004]. Notons simplement, qu'une solution apportée à cette question consiste à enrichir par les  $F_j$  tous les nœuds situés dans un domaine de rayon fixé et ceci quel que soit  $h$ . On parle d'enrichissement « topologique » en pointe de fissure.

## 2 Les difficultés techniques de mise en œuvre

Comme il a été précisé au paragraphe 2.2.4 du chapitre 1, les méthodes d'enrichissement basées sur la PUM donnent lieu à plusieurs difficultés en ce qui concerne leur implémentation. La grande flexibilité offerte par la X-FEM (le maillage n'a pas besoin de respecter la position de la fissure) a un prix qui se paie dans sa mise en œuvre.

### 2.1 Description de la fissure

Dans une approche éléments finis classique, la position des fissures est décrite par un ensemble de faces d'éléments. Dans l'approche X-FEM, elle est indépendante de la topologie du maillage et doit donc être fournie à part. En 2D, une fissure peut être représentée par une succession de segments de droite [Belytschko et Black 1999, Moës et al. 1999, Dolbow et al. 2000a]. Il faut noter que la seule opération où la représentation de la fissure intervient dans la X-FEM est l'évaluation des fonctions d'enrichissement  $\{F_j(\underline{x})\}$  et  $H(\underline{x})$ . En un point d'intégration, il faut savoir si l'on se trouve d'un côté ou de l'autre de la fissure et connaître les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de ce point dans les axes locaux en pointe de fissure. Ces évaluations peuvent se révéler ardues à implémenter et lentes si la géométrie de la fissure est complexe. Une alternative est alors la représentation de la fissure par la méthode des *Level Sets* [Stolarska et al. 2001, Moës et al. 2002a] qui sera présentée au paragraphe 3.

### 2.2 Intégration numérique

Sur les éléments finis coupés par une fissure, des fonctions discontinues doivent être intégrées. Afin de permettre l'intégration de part et d'autre de la fissure, on peut proposer un découpage de ces éléments en sous-éléments (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). La figure 5.2 montre un exemple d'une telle décomposition en 2D. Sur les sous-triangles, en 2D, 3 points de Gauss sont utilisés. Insistons sur le fait que ces sous-éléments créés n'apportent aucun nouveau degré de liberté. Leur seule raison d'être est l'intégration.

Sur les éléments qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques  $F_j$  en fond de fissure

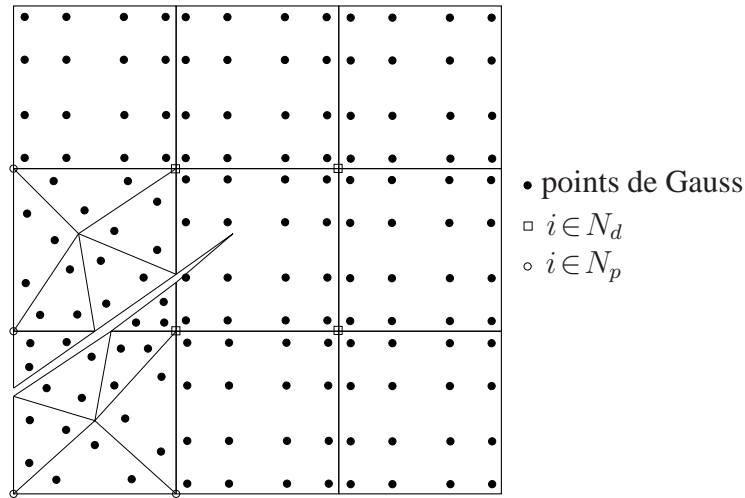


Figure 5.2: Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM. Les éléments coupés par la fissure sont décomposés en sous-triangles sur lesquels une intégration à 3 points de Gauss est utilisée. Pour les éléments quadrangulaires qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques ( $i \in N_p$ ), une intégration à 16 points est effectuée.

présentant la singularité en  $\sqrt{r}$ , un nombre élevé de points de Gauss est utilisé : 12 pour les triangles, 16 pour les quadrilatères.

Enfin, sur les éléments non coupés par la fissure et pour lesquels tous les degrés de liberté sont classiques, le nombre de points de Gauss utilisé est standard : pour des éléments du premier degré, on prend 1 point pour les triangles, 4 pour les quadrilatères.

*Remarque 1 : Il est bien évidemment possible d'intégrer les éléments en pointe de fissure avec la même technique de découpage en sous-éléments que celle utilisée pour les éléments complètement traversés par la fissure. Ce sous-découpage peut cependant s'avérer difficile à implémenter, en particulier en 3D [Sukumar et al. 2000].*

*Remarque 2 : Une technique d'intégration récursive (maillages quadtree ou octree) de l'élément en sous-éléments basée sur une estimation a posteriori de l'erreur d'intégration peut être utilisée [Strouboulis et al. 2000].*

*Remarque 3 : Un nœud dont le support est traversé par la fissure est enrichi par la fonction  $H(\underline{x})$  dont la valeur est +1 d'un côté et -1 de l'autre côté.*

L'implémentation de cette idée nécessite une tolérance. En effet si l'aire du support d'un côté de la fissure,  $A^+$ , est négligeable par rapport à l'aire de l'autre côté,  $A^-$ , les fonctions de formes classiques  $\varphi_i$  et celles enrichies par  $H(\underline{x})$  ne se distinguent que sur une aire très petite. En pratique, un nœud est enrichi si :

$$\frac{\min(A^+, A^-)}{(A^+ + A^-)} > \rho_{tol} \quad (5.3)$$

où une valeur de  $\rho_{tol} = 10^{-4}$  est utilisée en pratique (Figure 5.3). Dans le cas où

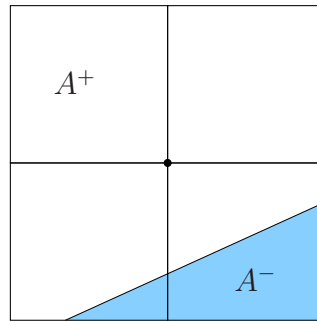


Figure 5.3: Support d'un nœud traversé par une fissure. Définition des aires  $A^+$  et  $A^-$  intervenant dans le critère permettant la sélection des nœuds à enrichir par la fonction  $H(\underline{x})$ .

le maillage se conforme à la fissure, ce critère conduit à n'enrichir que les nœuds situés sur le trajet de la fissure. On retrouve ainsi la modélisation éléments finis classique par double nœuds.

### 3 Utilisation des *Level Sets*

Dans l'approche X-FEM, la position des fissures et des trous est indépendante de la topologie du maillage et doit donc être fournie à part. Dans le paragraphe 2.1, deux descriptions ont été mentionnées : celle qui se base sur une description de la frontières (fissure, trou, ...) par des entités géométriques élémentaires (succession de segments de droite en 2D) et qui peut s'avérer ardue à implémenter et celle qui se base sur l'utilisation de *Level Sets*. Un champ de valeur appelé *level set function* (fonction de niveau) est défini dans le voisinage de la frontière. La fonction de niveau associée à une frontière donne en chaque point la distance de ce point à la frontière. Le signe placé devant la distance indique si le point se trouve d'un côté ou de l'autre de la frontière. Par exemple, pour un trou, la fonction de niveau est, disons, négative à l'intérieur du trou et positive à l'extérieur du trou avec une

valeur donnant la plus courte distance à la frontière. L'iso-zéro de la fonction de niveau donne la position du bord du trou. En pratique, la fonction de niveau est calculée aux nœuds et interpolée entre les nœuds par les fonctions de base éléments finis classiques  $\varphi_i$ . Une fois cette fonction de niveau créée, elle permet de gérer les opérations géométriques nécessaires à la modélisation selon la X-FEM d'un trou par exemple, à savoir : trouver les éléments coupés par le bord du trou, éliminer les nœuds dont le support est totalement à l'intérieur du trou et modifier les fonctions de forme dont le support est coupé par le bord du trou. La figure 5.4 représente la fonction de niveau qui permet de représenter un congé.

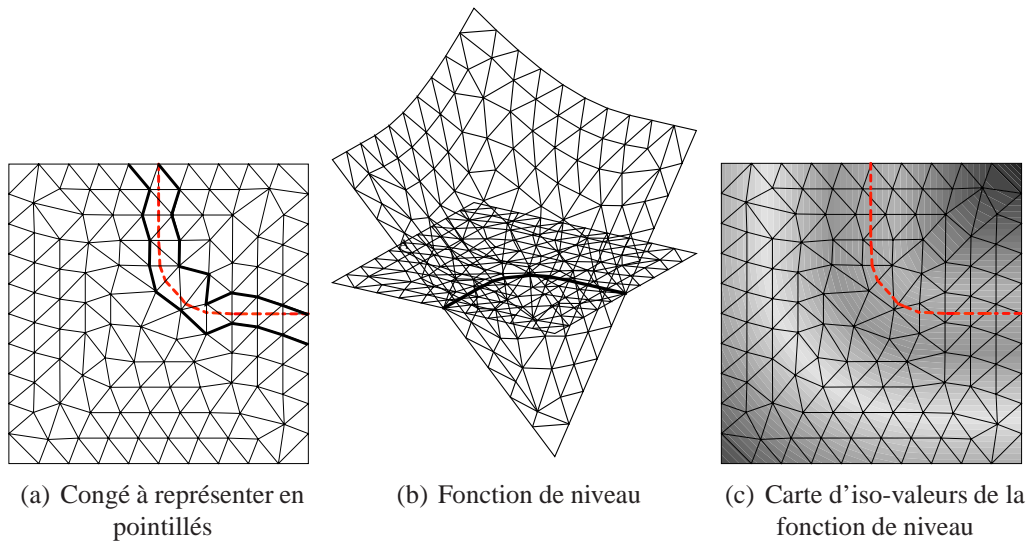


Figure 5.4: Représentation interpolée de la fonction de niveau (Figure 5.4(b)), *level set function*, permettant de décrire un congé (Figure 5.4(a)) sur un maillage éléments finis de TRI3.

### 3.1 Description d'une frontière par *Level Sets*

La méthode des *Level Sets* est une technique permettant de représenter une frontière qui peut être en mouvement. Elle est basée sur la représentation de la matière par des courbes de niveau d'une fonction  $\varphi(\underline{x}, t)$  où  $t$  est un paramètre décrivant l'évolution spatiale de la frontière. Une frontière  $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$  en mouvement peut être représentée par la fonction de niveau  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  où :

$$\Gamma(t) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\underline{x}, t) = 0\}$$

On peut prendre par exemple pour fonction  $\varphi$  la fonction distance signée :

$$\varphi(\underline{x}, t) = \pm \min_{\underline{x}_\Gamma \in \Gamma(t)} \|\underline{x} - \underline{x}_\Gamma\|$$

où le signe est positif (négatif) si  $\underline{x}$  est à l'intérieur (extérieur) du contour défini par  $\Gamma(t)$ , ce qui permet de définir un intérieur et un extérieur.

L'évolution de la frontière est alors décrite par l'équation d'évolution de  $\varphi$ , donnée par Osher et Sethian dans [Osher et Sethian 1988] :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \|\nabla \varphi\| = 0 \quad \text{avec } \varphi(\underline{x}, 0) \text{ donné.} \quad (5.4)$$

où  $F(\underline{x}, t)$  est la vitesse de déplacement de la frontière en  $\underline{x} \in \Gamma(t)$  dans la direction de la normale extérieure (Figure 5.5). L'avantage majeur de cette méthode

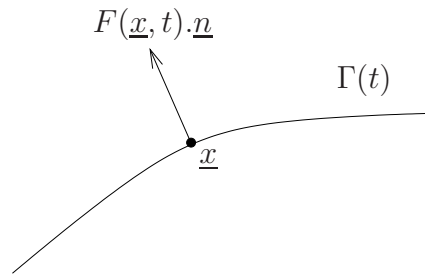


Figure 5.5: Vitesse normale de déplacement  $F(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}$  de la frontière  $\Gamma(t)$

est que les calculs sont réalisés sur un maillage fixé et qu'elle tient compte naturellement des changements topologiques de l'interface. Notons également que l'équation d'évolution précédente (5.4) a toujours la même forme quelle que soit la dimension de la frontière (courbe en 2D ou surface en 3D). De plus, la fonction  $\varphi$  permet de déterminer facilement la normale  $\underline{n}$  à la frontière par la relation :

$$\underline{n} = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|}$$

### 3.2 Description d'une fissure

Une seule fonction de niveau  $\varphi$  permet de représenter une courbe fermée ou une courbe fermée par une frontière donnée (Paragraphe 3.1). En revanche, pour modéliser une fissure, plusieurs fonctions de niveau sont nécessaires : une pour représenter la surface fissurée,  $\varphi$ , et une pour représenter le front de fissure,  $\psi$  (Figure 5.6).

Pour représenter, les deux extrémités d'une fissure non débouchante en 2D, trois fonctions de niveau sont donc nécessaires comme cela est décrit en figure 5.7. Les

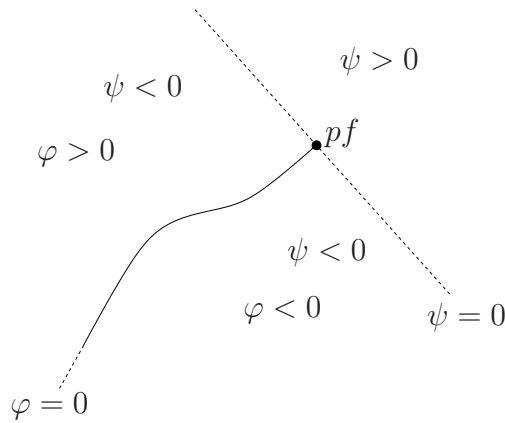


Figure 5.6: Représentation d'une fissure par deux fonctions de niveau :  $\varphi$  pour modéliser la surface fracturée et  $\psi$  pour repérer le front de fissure  $pf$ .

fonctions de niveaux  $\varphi$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  se calculent alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{x}, t) &= \pm \min_{\underline{x}_\Gamma \in \Gamma(t)} \|\underline{x} - \underline{x}_\Gamma\| \\ \psi_i(\underline{x}, t) &= (\underline{x} - \underline{x}_{pf_i}) \cdot \underline{t}_i\end{aligned}$$

On peut remarquer qu'une seule fonction de niveau  $\psi$  permet de définir la position des deux pointes de fissure. Elle s'écrit :

$$\psi = \max_i \psi_i \quad (5.5)$$

La fissure  $\Gamma(t)$  est alors définie par :

$$\Gamma(t) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(\underline{x}, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\underline{x}, t) \leq 0\}$$

La propagation d'une fissure consiste alors à mettre à jour les fonctions de niveau, *Level Sets*, à chaque pas de propagation en vérifiant les équations d'évolution (5.4) correspondantes. La façon de faire cette mise à jour est détaillée en annexe C.

*Remarque 1 : En pratique, une fonction de niveau est calculée aux nœuds et interpolée entre les nœuds par les fonctions de base éléments finis classiques. Pour la description d'une fissure par une succession de segments de droite, on montre que la taille de ces segments doit être de la taille des éléments finis utilisés pour l'interpolation du champ de déplacement. Ainsi, les erreurs géométriques ne prennent pas le pas sur les erreurs numériques. Ceci justifie le choix de prendre, en pratique, des fonctions de base éléments finis identiques pour l'interpolation des fonctions de niveau décrivant la géométrie et pour l'interpolation du déplacement. La*

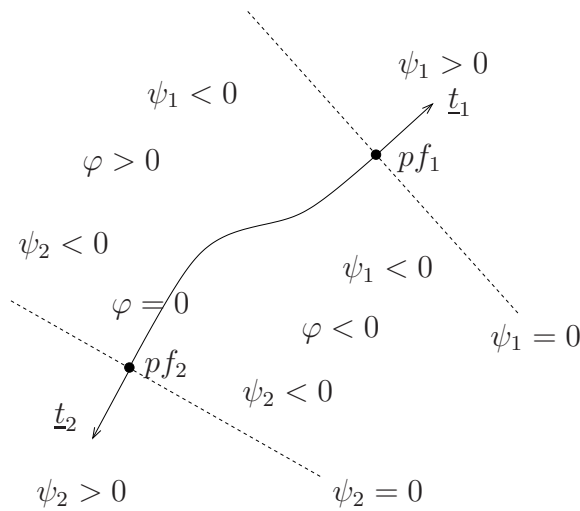


Figure 5.7: Représentation d'une fissure non débouchante par trois fonctions de niveau :  $\varphi$  pour modéliser la surface fracturée et  $\psi_1$ , resp.  $\psi_2$ , pour repérer le front de fissure  $pf_1$ , resp.  $pf_2$ .

représentation de cette géométrie se raffine alors lorsque le maillage se raffine. Bien que le maillage n'ait pas besoin d'être conforme à la géométrie, une description fine des surfaces physiques à modéliser par les Level Sets peut être nécessaire. Des procédures de raffinement adaptatives du maillage, au niveau de ces frontières, peuvent être mise en place de façon à atteindre une description géométrique suffisante [Moës et al. 2003].

*Remarque 2* : Les fonctions de niveau  $\varphi(\underline{x}, t)$  et  $\psi(\underline{x}, t)$  sont choisies de façon à ce que leurs gradients, définissant la base locale en pointe de fissure, soient orthogonaux. C'est-à-dire que :

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0 \quad \forall t \quad (5.6)$$

ainsi le front de fissure est toujours défini.

## 4 Implantation dans un code orienté objet

L'implantation de la X-FEM au sein d'un code de calcul soulève plusieurs difficultés évoquées au paragraphe 2. Rappelons que le code doit pouvoir gérer une diversité dans la nature et le nombre de degrés de liberté par nœud. Il doit aussi permettre d'avoir une technique d'intégration propre à chaque élément fini (Figure 5.2) afin d'intégrer correctement les fonctions d'enrichissement. Dans cette partie, nous apportons quelques précisions concernant les choix d'implantation qui ont été faits



dans le code éléments finis orienté objet développé sous Matlab au LMT-Cachan (Figure 2.8).

## 4.1 Gestion des degrés de liberté

En chaque point du maillage ou d'une zone du maillage, les valeurs des *Level Sets* sont stockées au niveau des objets *POINT* (Figure 5.8). Ces valeurs sont stockées dans un arbre suivant différentes clés : le pas du calcul et le numéro du détail modélisé. La sélection des nœuds à enrichir à l'aide des *Level Sets* est détaillée en annexe C. Un nœud enrichi est converti en un objet *POINT\_X* qui hérite des pro-

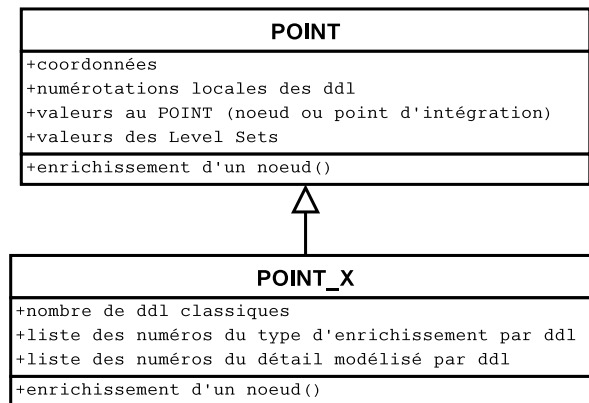


Figure 5.8: Diagramme UML partiel de la classe *POINT* et de son descendant *POINT\_X*

priétés de la classe *POINT*. Il contient l'information nécessaire pour régénérer la numérotation locale des degrés de liberté. Pour chaque degré de liberté (ddl), une clé permet de définir le numéro du détail modélisé (première fissure, deuxième fissure, premier trou, ...). Cette liste de détails est générée lors de la définition du problème. Une clé permet aussi de déterminer le type de fonction d'enrichissement associé à chaque degré de liberté (0 pour un ddl classique, 1 pour un ddl enrichi par  $H$ , 2 pour un ddl enrichi par la fonction  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ , ...). La liste des fonctions d'enrichissement et leur numérotation est définie, à part, dans un fichier de donnée.

## 4.2 Intégration numérique

Dans la X-FEM, le maillage n'a plus besoin d'être conforme à la fissure. La fissure est modélisée par les fonctions d'enrichissement de discontinuité et de pointe de fissure. Il convient d'intégrer correctement la formulation faible associée à l'approximation enrichie X-FEM décrite par l'équation (5.1). Pour les fonctions en pointe de fissure une technique de sur-intégration (utilisation d'un nombre élevé

de points d'intégration) est utilisée (voir paragraphe 2.2). Pour les éléments traversés par la fissure, il faut intégrer correctement de part et d'autre de la fissure, c'est-à-dire positionner correctement, sur ces éléments, les points d'intégration de chaque côté de la discontinuité. Les difficultés de maillage des méthodes éléments finis standard se traduisent ici par une difficulté dans la définition géométrique d'un « maillage d'intégration ». Typiquement, sur un élément quadrangulaire traversé par une fissure, tous les cas d'intersection de cette discontinuité avec l'élément sont à envisager : la fissure passe par un coin de l'élément, par deux coins, ... Nous ne détaillerons pas ici la façon de dénombrer tous ces cas de figures d'intersection, ni la façon de déterminer si le support de l'élément est suffisamment coupé par la fissure (voir remarque 3 du paragraphe 2.2). Ce problème de géométrie est relativement bien cerné et des outils existent pour y répondre. Nous retiendrons simplement qu'il est manifestement nécessaire d'avoir une technique d'intégration propre à chaque élément.

Pour répondre à ce problème, à chaque objet *ELEMENT* est associé un objet *INTEGRATION* par agrégation (Figure 5.9). Pour les éléments appartenant au support des fonctions de forme des nœuds enrichis, on associe un nouveau type d'intégration spécifique (*INT\_QUAD\_X* pour un élément quadrangulaire) défini à partir de la valeur des *Level Sets* qui permettent de décrire la fissure. Pour un élément coupé par la fissure (enrichi par la fonction  $H$ ), la procédure est la suivante (Figure 5.10) : l'interpolation des *Level Sets* permet de définir le partitionnement de l'élément en deux (détermination des points de coupure) dans l'élément de référence. Un maillage d'intégration (création de sous-éléments triangulaire *ELETRI3*) permet de positionner les points d'intégration (intégration *INT\_TRI* à trois points de Gauss associée à chaque sous-élément triangulaire) dans l'élément de référence. Ce maillage d'intégration ne rajoute pas de degrés de liberté supplémentaires. Il permet simplement de définir la position des points d'intégration pour un élément enrichi.

### 4.3 Calcul de la déformation

Concernant la prise en compte des fonctions d'enrichissement  $H(\underline{x})$  et  $F_j(\underline{x})$ , il suffit de considérer les nouvelles fonctions de forme  $\tilde{\varphi}_i$  associées aux degrés de libertés des nœuds enrichis :  $\tilde{\varphi}_i(\underline{x}) = H(\underline{x}) \varphi_i(\underline{x})$  pour les degrés de libertés  $\underline{a}_i$  des nœuds enrichis par la discontinuité et  $\tilde{\varphi}_i^j(\underline{x}) = F_j(\underline{x}) \varphi_i(\underline{x})$  pour les degrés de libertés  $\underline{b}_i^j$  enrichis par les solutions asymptotiques en pointe de fissure [Sukumar *et al.* 2000]. Ce formalisme permet d'utiliser sans difficulté les méthodes (fonctions) opérant au niveau de la structure : assemblage des matrices élémentaire, calcul des matrices des rigidité, calcul des matrices de masse ... Toute la difficulté est reportée au niveau local. En particulier, il convient de calculer la déformation associée à ces nouvelles fonctions de forme pour les éléments dont au moins un des nœuds est

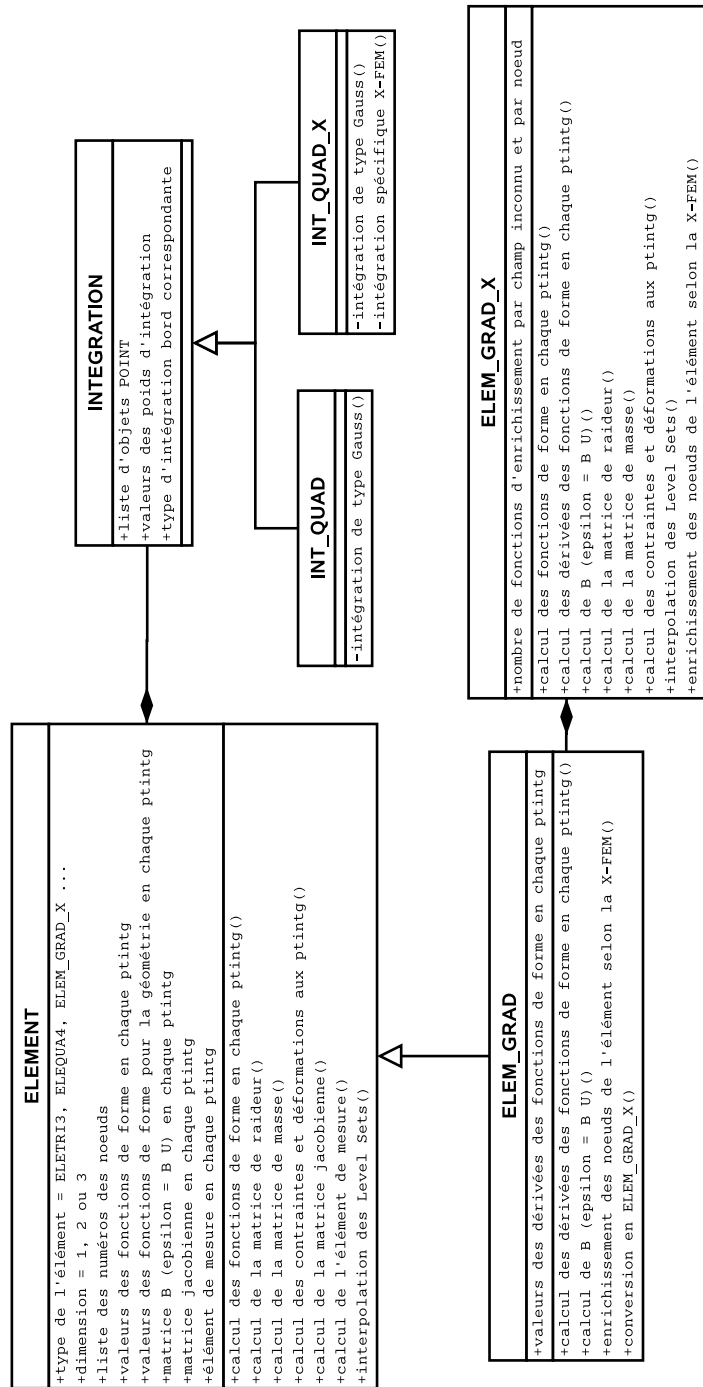


Figure 5.9: Diagramme UML partiel des classes *ELEMENT*, *ELEM\_GRAD\_X* et *INTEGRATION* et de leurs descendants

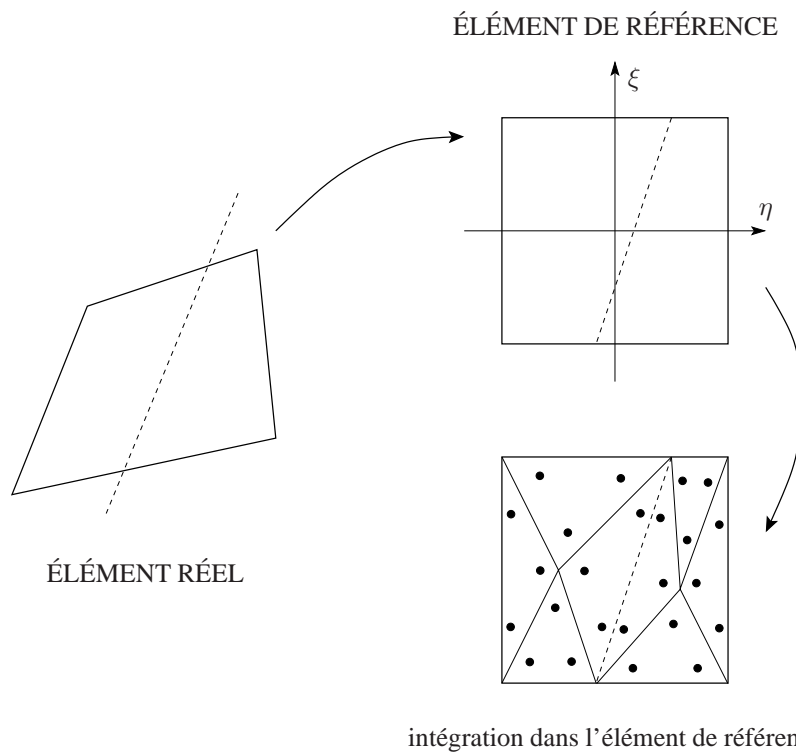


Figure 5.10: Intégration sur un élément quadrangulaire coupé par la fissure. Un maillage permet de positionner les points d'intégration dans l'élément de référence.

enrichi.

Afin de ne pas trop modifier l'écriture du code existant, une nouvelle classe d'objet *ELEM\_GRAD\_X* est créée pour ces éléments. Un objet de cette classe contient (encapsule) un objet de type *ELEM\_GRAD* qui correspond à une formulation des éléments de type premier gradient. La détermination de la valeur des fonctions de forme enrichie aux points d'intégration (ptintg) ne pose pas de difficulté dès lors que les *Level Sets* sont connus. En revanche, le calcul des dérivées de ces fonctions de forme enrichies est plus difficile. La première difficulté réside dans le fait qu'il faut dériver un produit de fonction. La deuxième, plus contraignante, provient du fait que le support des fonctions d'enrichissement  $H$  et  $F_j$  concerne plusieurs éléments (un patch). Aussi ces fonctions sont en général connues dans un système de paramétrage attaché à la géométrie réelle des éléments et non pas dans un système de coordonnées de référence dans lequel sont données, en général, les fonctions de forme éléments finis classiques. Ainsi, pour une fonction enrichie  $F_j \varphi_i$ ,  $F_j$  est paramétrée dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  attachée à la pointe de fissure et  $\varphi_i$  est donnée dans le système de coordonnées de référence  $\underline{\chi} = (\xi, \eta)$  de l'élément.  $F_j$  est donc dérivée dans l'élément réel (RE) et

$\varphi_i$  dans l'élément de référence (RF). Ainsi, pour  $\tilde{\varphi}_i^j = F_j \varphi_i$  :

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_i^j(\underline{x})}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{\partial F_j(\underline{x})}{\partial x_k}}_{\text{dans RE}} \varphi_i + F_j(\underline{x}) \underbrace{\frac{\partial \varphi_i(\underline{\chi})}{\partial \chi_l}}_{\text{dans RF}} \underbrace{\frac{\partial \chi_l}{\partial x_k}}_{\text{jacobien}^{-1}}$$

Cela conduit à créer une nouvelle méthode pour les éléments enrichis de type (*ELEM\_GRAD\_X*) permettant de calculer la matrice de déformation  $B$  qui relie le vecteur des inconnues nodales à la déformation écrite sous forme vectorielle.

## 5 Validation de l'implantation

L'objectif principal de cette partie est de présenter quelques résultats connus concernant la modélisation d'une fissure par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) en vue de valider son implantation dans le code éléments finis développé [Guidault *et al.* 2005a]. Ainsi l'équivalence d'une modélisation par doubles nœuds et d'une modélisation selon la X-FEM n'utilisant que les fonctions d'enrichissement « saut » est illustrée en partie 5.1. En partie 5.2, Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour un calcul X-FEM est également étudié et comparé à des résultats de la littérature. L'apport des fonctions d'enrichissement en pointe de fissure est exposé en partie 5.3. Cette partie ne présente pas de résultats nouveaux concernant la méthode X-FEM. Elle peut donc être simplement parcourue par une personne connaissant bien le domaine.

### 5.1 X-FEM et modélisation par doubles nœuds

Dans le cas où la discontinuité en déplacement se confond avec le bord des éléments (maillage conforme à la fissure), la X-FEM revient à une modélisation de la discontinuité par doubles nœuds. Dans ce cas, les degrés de libertés enrichis associés à  $H(\underline{x})$ , les  $\underline{a}_i$ , correspondent aux sauts de déplacement nodaux [Moës *et al.* 1999]. Notons que, dans cette situation, seuls les nœuds situés sur le trajet de la fissure sont enrichis par la fonction  $H$ .

Considérons le cas d'une structure fissurée soumise à une sollicitation de traction comme illustré sur la figure 5.11(a). Un maillage de 24 x 48 éléments est étudié (Figure 5.11(b)). Ce maillage est tel qu'il soit conforme à la fissure. Une modélisation de la fissure par doubles nœuds et une modélisation de la fissure par la X-FEM avec uniquement l'enrichissement en  $H$ , sont proposées. Notons que, comme illustré sur la figure 5.12, seuls les nœuds situés sur le trajet de la fissure sont enrichis par la fonction  $H$  dans la X-FEM. Pour comparer les deux modélisations, observons une quantité locale comme la contrainte  $\sigma_{yy}$  (Figure 5.14) le long des

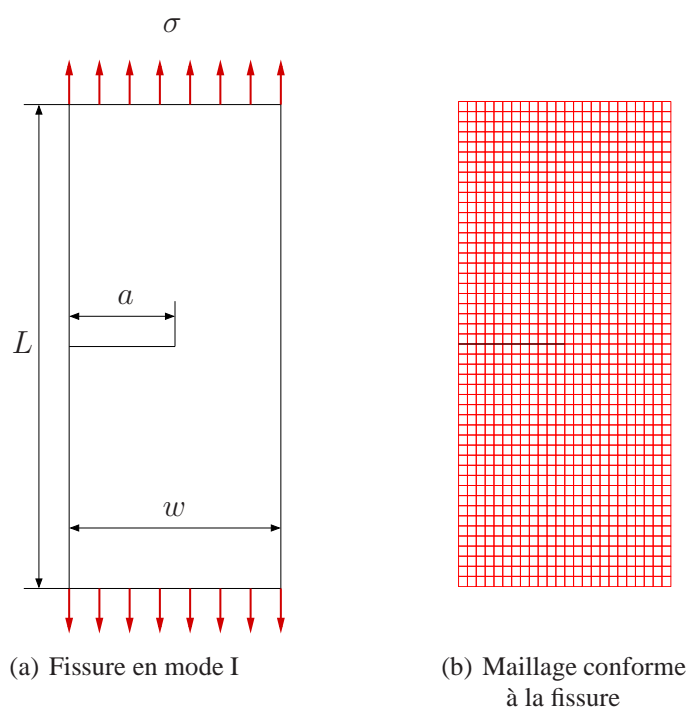


Figure 5.11: Structure fissurée sollicitée en mode I. Maillage de 24 x 48 QUA4.  
 $a/w = 1/2$ ,  $L/w = 16/7$ ,  $w = 7$  et  $\sigma = 1 MPa$

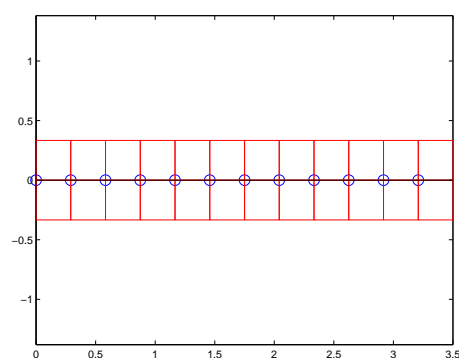


Figure 5.12: Nœuds enrichis (cercles  $\circ$ ) pour la X-FEM avec enrichissement  $H$  uniquement, dans le cas où le maillage est conforme à la fissure

quatre lignes de points de Gauss parallèles à la fissure (Figure 5.13). Les résultats sont rigoureusement identiques, c'est pourquoi nous n'avons présenté qu'un seul jeu de courbes pour les deux modélisations. On notera, cependant, la présence d'oscillations lorsqu'on se rapproche de la pointe. Ces oscillations sont caractéristiques du fait que l'on cherche à approximer un champ singulier avec des fonctions régulières [Fleming *et al.* 1997].

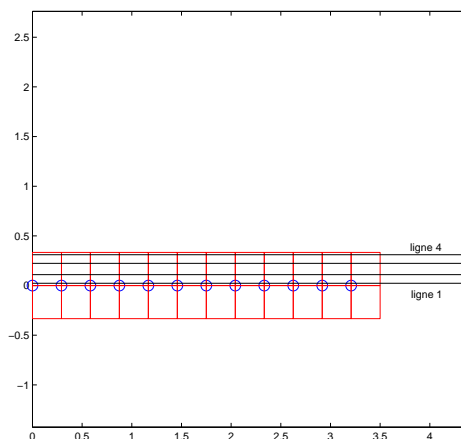


Figure 5.13: Définition des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure pour un maillage de 24 x 48 QUA4 conforme à la fissure

## 5.2 Calcul des facteurs d'intensité de contraintes

La technique d'extraction des facteurs d'intensité de contrainte que nous utilisons, fait intervenir des intégrales dites d'interaction [Shih et Asaro 1988] ou plus précisément leur forme volumique. Cette technique est décrite dans l'annexe B et s'applique parfaitement dans le cadre de la X-FEM.

Considérons le cas d'une structure fissurée encastrée à sa base et soumise à une sollicitation de cisaillement sur son bord supérieur comme illustré sur la figure 5.15. Afin d'étudier la précision de la méthode d'extraction, nous considérons différentes taille du domaine d'intégration et ceci pour différentes discrétisations. L'invariance du calcul des FIC en fonction de la taille du domaine est une indication de la qualité numérique de la solution. Pour chacune des discrétisations, la taille du domaine est paramétrée par le rapport  $r_d/h_{local}$  ou  $r_d$  est le rayon du domaine et  $h_{local}$  est égale à la racine carrée de l'aire de l'élément contenant la pointe de fissure.

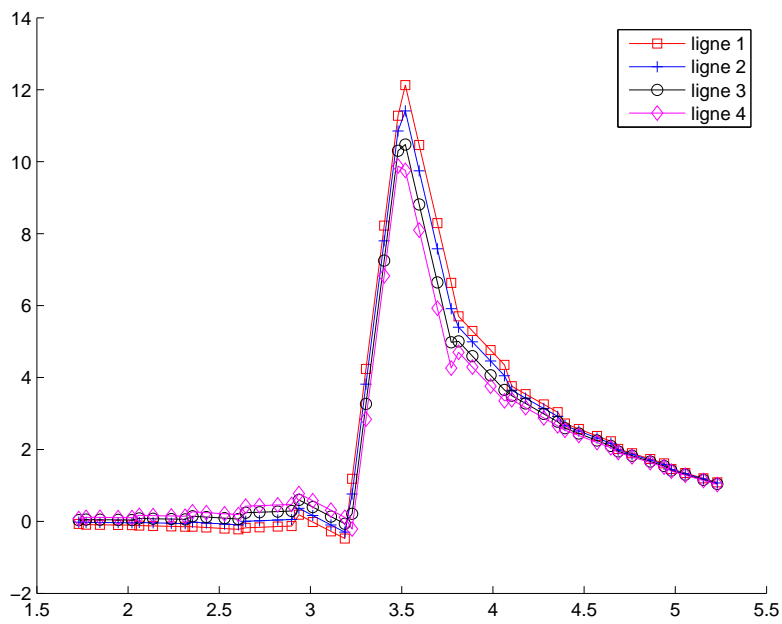


Figure 5.14: Contrainte  $\sigma_{yy}$  en  $MPa$  le long des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure. Une modélisation par doubles nœuds ou la modélisation par X-FEM donnent les mêmes résultats (un seul des deux jeux de courbes est représenté).



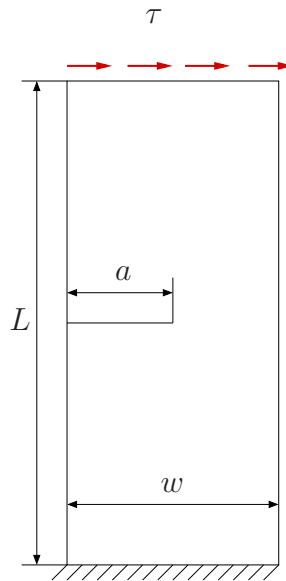


Figure 5.15: Structure fissurée sollicitée en mode mixte.  $a/w = 1/2$ ,  $L/w = 16/7$ ,  $w = 7$  et  $\tau = 1 \text{ MPa}$

Trois discrétisations uniformes de la structure sont proposées : 7 x 15 éléments, 13 x 25 éléments et 25 x 49 éléments. Pour ces trois maillages, le maillage n'est pas conforme à la fissure. Afin de montrer l'aptitude de la X-FEM à représenter une fissure que le maillage soit conforme à la fissure ou non, trois maillages conformes à la géométrie de la fissure sont aussi proposés. Les maillages conforme et non conforme pour le cas de 7 x 15 éléments sont représentés respectivement sur les figures 5.17(a) et 5.17(b). Les figures 5.17(c) et 5.17(d) représentent les nœuds enrichis associés. La figure 5.16 représente aussi les domaines d'intégration utilisés pour des rapports  $r_d/h_{local}$  valant 1.5, 2 et 2.5. On notera que, quelle que soit la taille des éléments et compte tenu de la normalisation de  $r_d$  par  $h_{local}$ , les domaines utilisés sont homothétiquement similaires. Ainsi, le nombre d'éléments inclus dans un domaine pour le maillage 7 x 15 et 13 x 25 sont identiques pour un rapport  $r_d/h_{local}$  donné.

Les tableaux 5.1 et 5.2 donnent respectivement les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  pour les différents maillages et différents rapports  $r_d/h_{local}$ . Les valeurs de référence pour  $K_I$  et  $K_{II}$  sont données par Yau, Wang et Corten [Yau *et al.* 1980] et valent  $K_{I\text{théorique}} = 34.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  et  $K_{II\text{théorique}} = 4.55 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ . Quant aux tableaux 5.3 et 5.4, ils donnent les valeurs normalisées correspondantes. On constate que la X-FEM permet de représenter, avec une qualité comparable, la singularité en pointe de fissure que le maillage soit conforme à la fissure ou non.

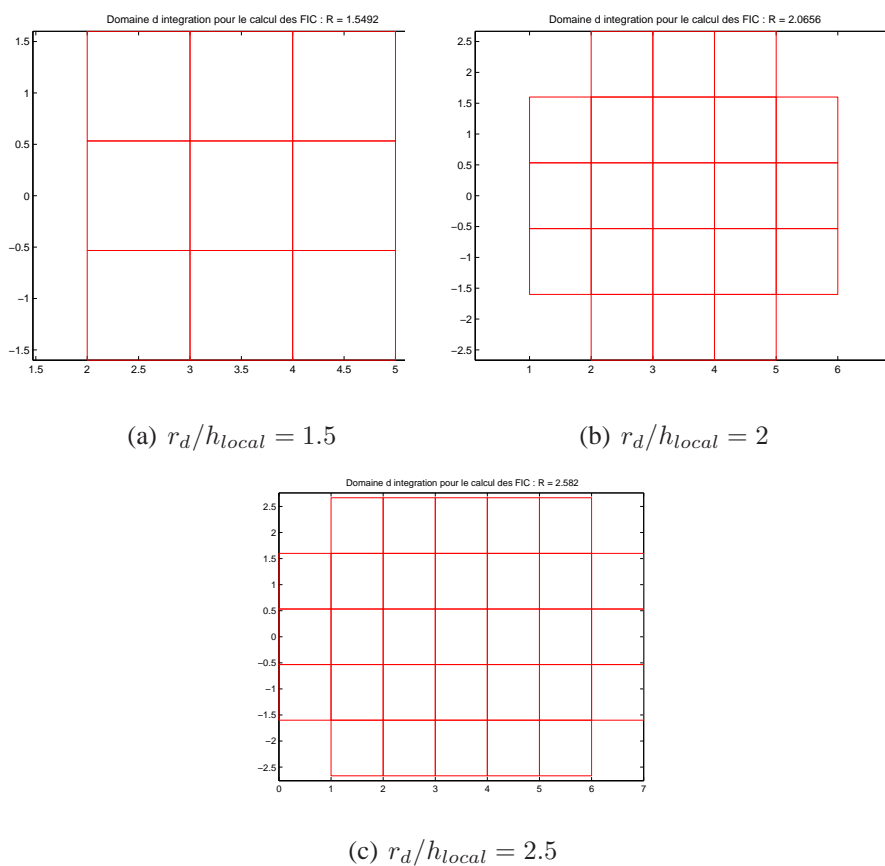


Figure 5.16: Domaines d'intégration pour le calcul des FIC pour différents rapports  $r_d/h_{local}$  pour le cas d'un maillage de 7 x 15 éléments QUA4.

| Type de maillage | non conforme |         |         | conforme |         |         |
|------------------|--------------|---------|---------|----------|---------|---------|
| $r_d/h_{local}$  | 7 x 15       | 13 x 25 | 25 x 49 | 7 x 15   | 13 x 25 | 25 x 49 |
| 1.5              | 32.3803      | 33.1235 | 33.9342 | 31.8953  | 32.8994 | 33.6247 |
| 2                | 31.2829      | 32.7302 | 33.5374 | 31.4715  | 32.8130 | 33.5512 |
| 2.5              | 31.1423      | 32.5822 | 33.4114 | 31.3402  | 32.6770 | 33.4359 |
| 3.5              | X            | 32.5993 | 33.4308 | X        | 32.6981 | 33.4608 |

Tableau 5.1: Valeurs de  $K_I$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_I$  théorique =  $34.0 MPa\sqrt{mm}$ ).

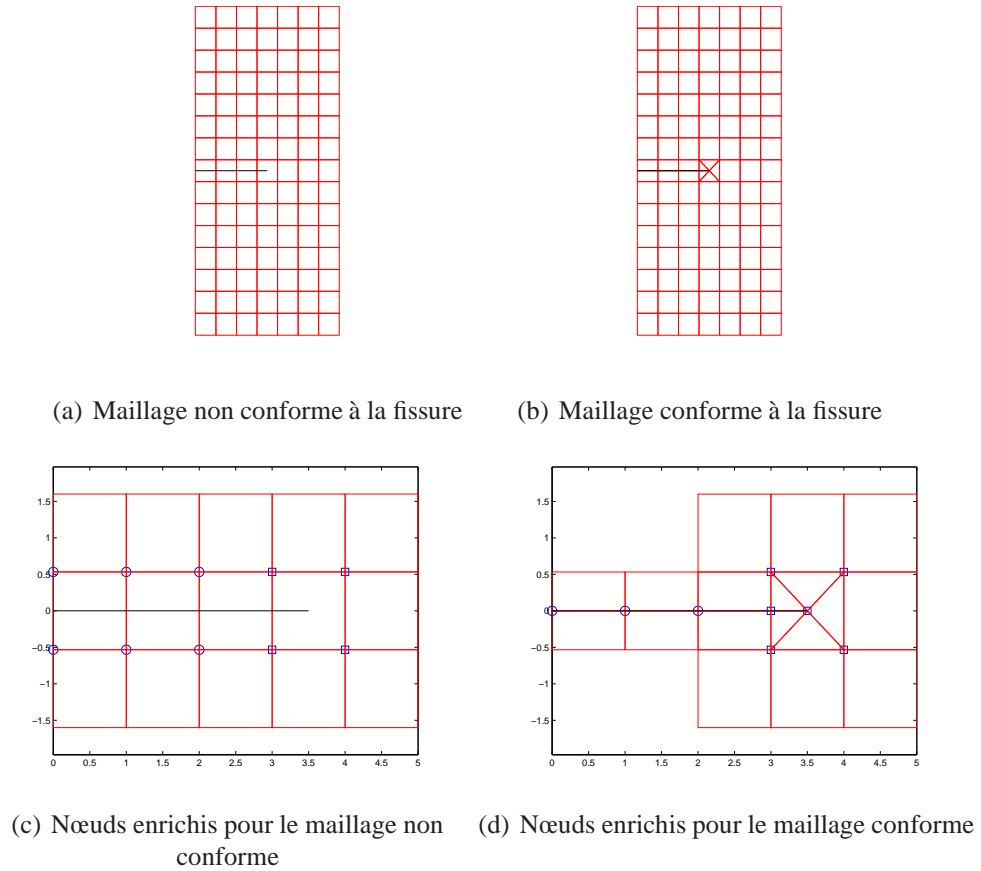


Figure 5.17: Maillages non-conforme et conforme à la fissure pour le cas d'un maillage de 7 x 15 éléments QUA4. Nœuds enrichis par la fonction  $H$  (cercles  $\circ$ ) et les fonctions  $F_j$  (carrés  $\square$ ) pour les deux maillages.

| Type de maillage | non conforme  |                |                | conforme      |                |                |
|------------------|---------------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|
|                  | $7 \times 15$ | $13 \times 25$ | $25 \times 49$ | $7 \times 15$ | $13 \times 25$ | $25 \times 49$ |
| $r_d/h_{local}$  |               |                |                |               |                |                |
| 1.5              | 4.6308        | 4.5713         | 4.5872         | 4.4568        | 4.5299         | 4.5717         |
| 2                | 4.4676        | 4.4988         | 4.5139         | 4.4453        | 4.4868         | 4.5285         |
| 2.5              | 4.4719        | 4.5071         | 4.5238         | 4.4472        | 4.4946         | 4.5341         |
| 3.5              | X             | 4.5102         | 4.5255         | X             | 4.4940         | 4.5340         |

Tableau 5.2: Valeurs de  $K_{II}$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{II} \text{ théorique} = 4.55 MPa\sqrt{mm}$ )

| Type de maillage | non conforme |         |         | conforme |         |         |
|------------------|--------------|---------|---------|----------|---------|---------|
| $r_d/h_{local}$  | 7 x 15       | 13 x 25 | 25 x 49 | 7 x 15   | 13 x 25 | 25 x 49 |
| 1.5              | 0.9524       | 0.9742  | 0.9981  | 0.9381   | 0.9676  | 0.9890  |
| 2                | 0.9201       | 0.9627  | 0.9864  | 0.9256   | 0.9651  | 0.9868  |
| 2.5              | 0.9159       | 0.9583  | 0.9827  | 0.9218   | 0.9611  | 0.9834  |
| 3.5              | X            | 0.9588  | 0.9833  | X        | 0.9617  | 0.9841  |

Tableau 5.3: Valeurs normalisées de  $K_I$  ( $K_I/K_{I\text{théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

| Type de maillage | non conforme |         |         | conforme |         |         |
|------------------|--------------|---------|---------|----------|---------|---------|
| $r_d/h_{local}$  | 7 x 15       | 13 x 25 | 25 x 49 | 7 x 15   | 13 x 25 | 25 x 49 |
| 1.5              | 1.0178       | 1.0047  | 1.0082  | 0.9795   | 0.9956  | 1.0048  |
| 2                | 0.9819       | 0.9888  | 0.9921  | 0.9770   | 0.9861  | 0.9953  |
| 2.5              | 0.9828       | 0.9906  | 0.9942  | 0.9774   | 0.9878  | 0.9965  |
| 3.5              | X            | 0.9913  | 0.9946  | X        | 0.9877  | 0.9965  |

Tableau 5.4: Valeurs normalisées de  $K_{II}$  ( $K_{II}/K_{II\text{théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

| $r_d/h_{local}$ | X-FEM<br>(LMT) |         | X-FEM<br>(littérature) |         |
|-----------------|----------------|---------|------------------------|---------|
|                 | 12 x 24        | 24 x 48 | 12 x 24                | 24 x 48 |
| 1.5             | 0.980          | 0.997   | 0.995                  | 1.004   |
| 2.5             | 0.971          | 0.989   | 0.986                  | 0.996   |
| 3.5             | 0.970          | 0.988   | 0.986                  | 0.996   |

Tableau 5.5: Comparaison avec la littérature : valeurs normalisées de  $K_I$  ( $K_I/K_{I\text{théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

L'invariance du calcul des FIC en fonction de la taille du domaine est également relativement bien respectée avec tout de même des résultats en général plus précis mais plus variables pour des rapports  $r_d/h_{local}$  valant 1.5 et 2. Rappelons que, compte tenu de la définition de la fonction  $q$  utilisée dans la technique d'extraction des FIC (Annexe B), seuls les éléments situés à la périphérie du domaine d'intégration contribuent à l'évaluation des FIC. Pour des petits rapports de  $r_d/h_{local}$ , les éléments en question contiennent des nœuds enrichis par les  $F_j$ . Ceci semble améliorer le calcul des FIC. D'ailleurs, le rapport  $r_d/h_{local} = 2$  est systématiquement utilisé par Moës, Dolbow et Belytschko [Moës *et al.* 1999]. Concernant la fluctuation des résultats, nous reviendrons sur ce point en partie 5.3.

On note qu'un raffinement du maillage conduit à de meilleurs résultats. Mais compte tenu du fait que l'on enrichit uniquement par les  $F_j$  l'élément en pointe de fissure, cette amélioration apportée par l'enrichissement devrait être moins conséquente, le support de l'enrichissement tendant vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0. Nous reviendrons sur ce point et sur l'importance d'inclure les  $F_j$  dans la partie 5.3.

Enfin, à titre de comparaison, les tableaux 5.5 et 5.6 donnent les valeurs normalisées de  $K_I$  et  $K_{II}$  pour l'approche X-FEM développée au LMT Cachan et l'approche exposée dans [Moës *et al.* 1999]. Les résultats sont en excellente corrélation. Notons que les différences peuvent s'expliquer par l'utilisation de techniques d'intégration différentes à celle utilisée ici, notamment concernant l'intégration sur les éléments en pointe de fissure. Ici, l'intégration numérique de ces éléments utilise 16 points de Gauss (Figure 5.2).

### 5.3 Apports des fonctions $F_j$ d'enrichissement

Dans cette partie, nous cherchons à montrer l'importance d'inclure, parmi les fonctions d'enrichissements, les fonctions  $F_j$  associées aux solutions asymptotiques

|                 | X-FEM<br>(LMT) |         | X-FEM<br>(littérature) |         |
|-----------------|----------------|---------|------------------------|---------|
|                 | 12 x 24        | 24 x 48 | 12 x 24                | 24 x 48 |
| $r_d/h_{local}$ | 1.001          | 1.006   | 1.016                  | 1.015   |
| 1.5             | 0.988          | 0.993   | 1.001                  | 1.000   |
| 2.5             | 0.989          | 0.994   | 1.001                  | 0.9998  |

Tableau 5.6: Comparaison avec la littérature : valeurs normalisées de  $K_{II}$  ( $K_{II}/K_{II}^{théorique}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

en mode I et II. D'autre part, afin d'étudier la précision de la méthode d'extraction, nous considérons différentes tailles du domaine d'intégration et ceci pour différentes discrétisations. Pour chacune des discrétisations, la taille du domaine est paramétrée, comme au paragraphe 5.2, par le rapport  $r_d/h_{local}$  ou  $r_d$  est le rayon du domaine et  $h_{local}$  est égale à la racine carrée de l'aire de l'élément contenant la pointe de fissure. Pour se faire, reprenons l'exemple traité dans la partie 5.1. Utilisons le même maillage mais ajoutons en plus les fonctions  $F_j$ . Dans ce cas, les nœuds enrichis sont définis en figure 5.18. La figure 5.19 représente la contrainte

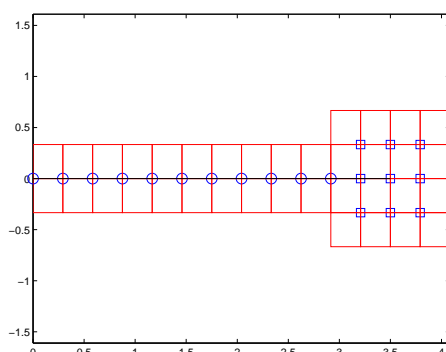


Figure 5.18: Nœuds enrichis pour la X-FEM avec enrichissement  $H$  (cercles  $\circ$ ) et  $F_j$  (carrés  $\square$ ) dans le cas où le maillage est conforme à la fissure

$\sigma_{yy}$  le long des quatre lignes de points de Gauss parallèles à la fissure (Figure 5.13). En comparant aux résultats de la figure 5.14, on constate que l'utilisation des enrichissements  $F_j$  améliore la description locale du champ de contrainte. On notera toujours la présence d'oscillations malgré l'introduction des champs singuliers. Ces oscillations surviennent en fait dans les éléments de transition dont les nœuds

sont partiellement enrichis. Sur ces éléments appartenant à la fois aux supports des nœuds enrichis par les  $F_j$  et aux supports des nœuds enrichis par la fonction  $H$ , la base des fonctions  $F_j$  ne « s'exprime » pas totalement dans cette zone de transition. Concernant ce problème on se reportera aux travaux de Chessa et Belytschko [Chessa *et al.* 2003]. Ce sont ces oscillations qui expliquent la fluctuation des résultats du calcul des facteurs d'intensité de contrainte lorsque le domaine d'intégration fait intervenir ces éléments de transition dans l'extraction des facteurs d'intensité de contrainte.

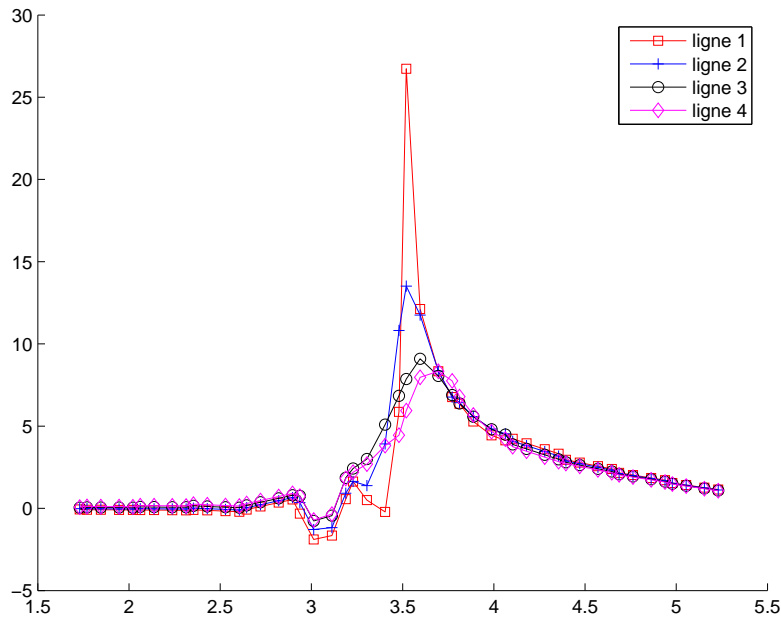


Figure 5.19: Contrainte  $\sigma_{yy}$  en  $MPa$  le long des lignes 1 à 4 parallèles à la fissure pour un maillage de  $24 \times 48$  QUA4 conforme à la fissure. L'utilisation des enrichissements  $F_j$  améliore la description locale du champ de contrainte malgré la présence d'oscillations.

On notera la nette amélioration apportée par la prise en compte des fonctions  $F_j$  concernant le calcul des FIC (Tableau 5.7). La valeur exacte de  $K_I$  est donnée par Ewalds et Wanhill [Ewalds et Wanhill 1989] :

$$K_I = C\sigma\sqrt{a\pi} \quad (5.7)$$

où  $C$  est un facteur de correction géométrique (plaque de dimension finie) :

$$C = 1.12 - 0.231 \left(\frac{a}{w}\right) + 10.55 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39 \left(\frac{a}{w}\right)^4; \quad (5.8)$$

| Type d'enrichissement | $H$ et $F_j$    |        | $H$               |        |                   |
|-----------------------|-----------------|--------|-------------------|--------|-------------------|
|                       | $r_d/h_{local}$ | valeur | valeur normalisée | valeur | valeur normalisée |
|                       | 1.5             | 9.3359 | 0.9961            | 8.8697 | 0.9464            |
|                       | 2               | 9.2708 | 0.9892            | 8.8488 | 0.9442            |
|                       | 2.5             | 9.2565 | 0.9877            | 8.8978 | 0.9494            |
|                       | 3.5             | 9.2554 | 0.9875            | 8.8884 | 9.9484            |

Tableau 5.7: Valeurs de  $K_I$  en  $MPa\sqrt{mm}$  et valeurs normalisées de  $K_I$  ( $K_I/K_{I\text{théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{I\text{théorique}} = 9.3721 MPa\sqrt{mm}$ ). L'utilisation des enrichissements  $F_j$  améliore les valeurs de FIC calculées.

| Type d'enrichissement | $H$ et $F_j$    |         | $H$     |         |         |
|-----------------------|-----------------|---------|---------|---------|---------|
|                       | $r_d/h_{local}$ | 12 x 24 | 24 x 48 | 12 x 24 | 24 x 48 |
|                       | 1.5             | 33.3330 | 33.9095 | 30.5586 | 32.2296 |
|                       | 2               | 33.0605 | 33.6554 | 30.4738 | 32.1620 |
|                       | 2.5             | 33.0031 | 33.6081 | 30.6229 | 32.3172 |
|                       | 3.5             | 32.9835 | 33.5969 | 30.5756 | 32.2762 |

Tableau 5.8: Intérêt d'incorporer les  $F_j$  : valeurs de  $K_I$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{I\text{théorique}} = 34.0 MPa\sqrt{mm}$ )

La même étude est menée sur l'exemple de la fissure en mode mixte traité dans la partie 5.2. Les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que leurs valeurs normalisées sont données dans les tableaux 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11. Les conclusions sont similaires au cas de la fissure en mode I. Ces deux tableaux permettent d'illustrer également le point signalé à la fin du paragraphe 5.2. On constate, en effet, que l'apport des fonctions  $F_j$  est moins significatif lorsque la taille de maille  $h$  tend vers 0. Ainsi, si l'on regarde le gain obtenu pour un maillage 12 x 24 sur l'erreur relative de  $K_I$  (Tableau 5.10), il est de 8% contre 4% pour un maillage 24 x 48. Rappelons que seuls les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure sont enrichis. Lorsque  $h$  tend vers 0, l'enrichissement par les fonctions  $F_j$  devient donc inutile.



| Type d'enrichissement | $H$ et $F_j$    |         | $H$     |         |
|-----------------------|-----------------|---------|---------|---------|
|                       | $r_d/h_{local}$ |         |         |         |
|                       | 12 x 24         | 24 x 48 | 12 x 24 | 24 x 48 |
| 1.5                   | 4.5540          | 4.5784  | 4.3423  | 4.4363  |
| 2                     | 4.5282          | 4.5483  | 4.3157  | 4.4162  |
| 2.5                   | 4.4946          | 4.5195  | 4.3604  | 4.4529  |
| 3.5                   | 4.5013          | 4.5231  | 4.3574  | 4.4492  |

Tableau 5.9: Intérêt d'incorporer les  $F_j$  : valeurs de  $K_{II}$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{II}^{théorique} = 4.55 MPa\sqrt{mm}$ )

| Type d'enrichissement | $H$ et $F_j$    |         | $H$     |         |
|-----------------------|-----------------|---------|---------|---------|
|                       | $r_d/h_{local}$ |         |         |         |
|                       | 12 x 24         | 24 x 48 | 12 x 24 | 24 x 48 |
| 1.5                   | 0.9804          | 0.9973  | 0.8988  | 0.9479  |
| 2                     | 0.9724          | 0.9899  | 0.8963  | 0.9459  |
| 2.5                   | 0.9707          | 0.9885  | 0.9007  | 0.9505  |
| 3.5                   | 0.9701          | 0.9881  | 0.8993  | 0.9493  |

Tableau 5.10: Intérêt d'incorporer les  $F_j$  : valeurs normalisées de  $K_I$  ( $K_I/K_I^{théorique}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

| Type d'enrichissement | $H$ et $F_j$    |         | $H$     |         |
|-----------------------|-----------------|---------|---------|---------|
|                       | $r_d/h_{local}$ |         |         |         |
|                       | 12 x 24         | 24 x 48 | 12 x 24 | 24 x 48 |
| 1.5                   | 1.0009          | 1.0062  | 0.9543  | 0.9750  |
| 2                     | 0.9952          | 0.9996  | 0.9485  | 0.9706  |
| 2.5                   | 0.9878          | 0.9933  | 0.9583  | 0.9787  |
| 3.5                   | 0.9893          | 0.9941  | 0.9577  | 0.9779  |

Tableau 5.11: Intérêt d'incorporer les  $F_j$  : valeurs normalisées de  $K_{II}$  ( $K_{II}/K_{II}^{théorique}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

|                 | X-FEM   | FEM     |         |         |         |
|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $r_d/h_{local}$ | X-FEM   | FEM1    | FEM4    | FEM10   | FEM12   |
| 1.5             | 33.8044 | 31.8779 | 32.5277 | 33.0137 | 33.0957 |
| 2               | 33.5463 | 31.8329 | 32.4817 | 32.9686 | 33.0502 |
| 2.5             | 33.4979 | 31.9730 | 32.5696 | 33.0579 | 33.1379 |
| 3.5             | 33.4848 | 31.9305 | 32.5399 | 33.0272 | 33.1071 |

Tableau 5.12: X-FEM et FEM : valeurs de  $K_I$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{I\text{théorique}} = 34.0 MPa\sqrt{mm}$ )

Pour terminer, nous montrons, à titre indicatif, quelle qualité du maillage en pointe de fissure est nécessaire pour qu'une méthode éléments finis classiques (FEM) permettent d'obtenir la même qualité sur le calcul des FIC qu'une modélisation selon la X-FEM. Pour ce faire, considérons un maillage de 20 x 40 QUA4 (Figure 5.21(a)) de la structure fissurée sollicitée en mode I de la partie 5.2. Les nœuds enrichis pour la X-FEM sont représentés sur la figure 5.20. Nous proposons trois maillages pour lesquels la taille des éléments a été raffinée pour les quatre éléments en pointe de fissure appartenant aux supports des nœuds enrichis par les fonctions  $F_j$ . Ces maillages sont notés FEM4 (Figure 5.21(b)), FEM10 (Figure 5.21(c)) et FEM12 (Figure 5.21(d)). Les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  ainsi que leurs valeurs norma-

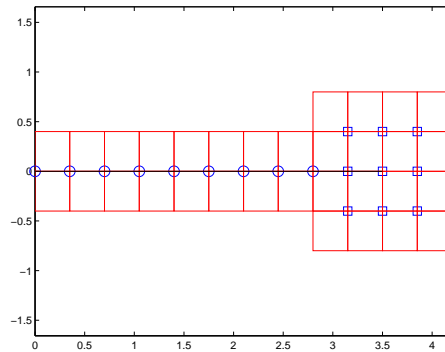


Figure 5.20: Nœuds enrichis pour la X-FEM avec enrichissement  $H$  (cercles  $\circ$ ) et  $F_j$  (carrés  $\square$ ) dans le cas où le maillage est conforme à la fissure

lisées sont données dans les tableaux 5.12, 5.13, 5.14 et 5.15 pour les différents maillages : X-FEM, FEM1, FEM4, FEM10 et FEM12.

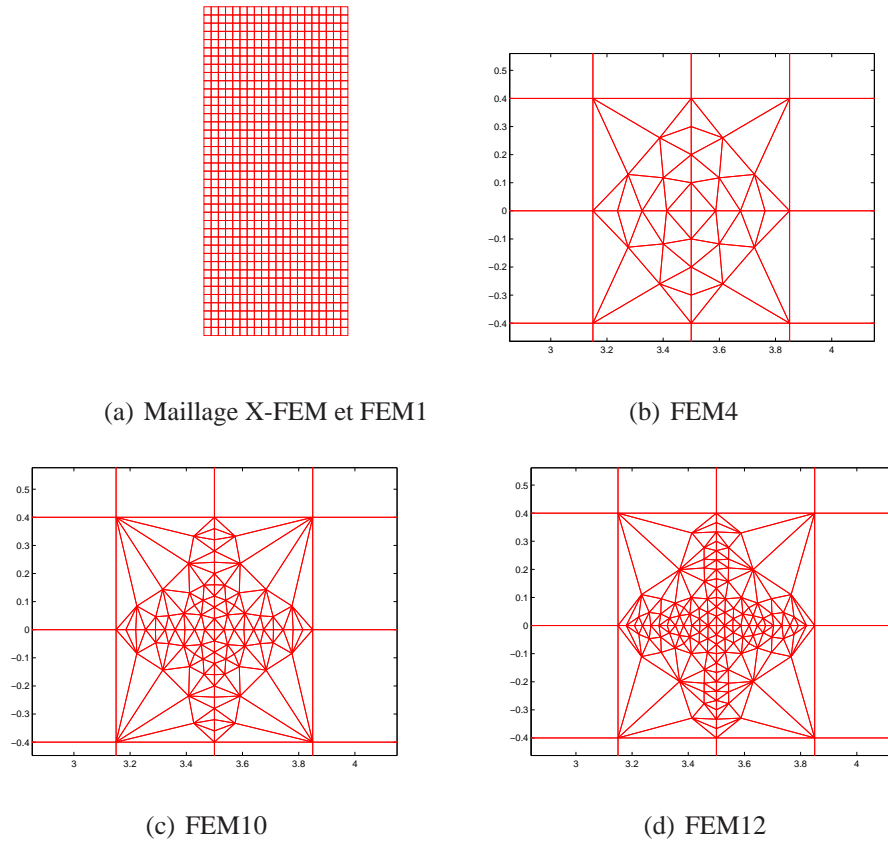


Figure 5.21: Maillages X-FEM et FEM1 (modélisation par double nœuds). Maillages FEM4, FEM10 et FEM12 pour lesquels le maillage a été raffiné au niveau des quatre éléments appartenant aux supports des nœuds enrichis par les fonctions  $F_j$  pour le maillage X-FEM.

|                 | X-FEM  | FEM    |        |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r_d/h_{local}$ | X-FEM  | FEM1   | FEM4   | FEM10  | FEM12  |
| 1.5             | 4.5740 | 4.4393 | 4.4871 | 4.5091 | 4.5136 |
| 2               | 4.5448 | 4.4076 | 4.4519 | 4.4733 | 4.4775 |
| 2.5             | 4.5150 | 4.4371 | 4.4736 | 4.4965 | 4.5008 |
| 3.5             | 4.5191 | 4.4314 | 4.4704 | 4.4933 | 4.4977 |

Tableau 5.13: X-FEM et FEM : valeurs de  $K_{II}$  en  $MPa\sqrt{mm}$  en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC ( $K_{II}^{théorique} = 4.55 MPa\sqrt{mm}$ )

|                 | X-FEM  | FEM    |        |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r_d/h_{local}$ | X-FEM  | FEM1   | FEM4   | FEM10  | FEM12  |
| 1.5             | 0.9942 | 0.9376 | 0.9567 | 0.9710 | 0.9734 |
| 2               | 0.9867 | 0.9363 | 0.9553 | 0.9697 | 0.9721 |
| 2.5             | 0.9852 | 0.9404 | 0.9579 | 0.9723 | 0.9746 |
| 3.5             | 0.9848 | 0.9391 | 0.9571 | 0.9714 | 0.9737 |

Tableau 5.14: X-FEM et FEM : valeurs normalisées de  $K_I$  ( $K_I/K_{I\text{ théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

|                 | X-FEM  | FEM    |        |        |        |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r_d/h_{local}$ | X-FEM  | FEM1   | FEM4   | FEM10  | FEM12  |
| 1.5             | 1.0053 | 0.9757 | 0.9862 | 0.9910 | 0.9920 |
| 2               | 0.9989 | 0.9687 | 0.9784 | 0.9831 | 0.9841 |
| 2.5             | 0.9923 | 0.9752 | 0.9832 | 0.9882 | 0.9892 |
| 3.5             | 0.9932 | 0.9739 | 0.9825 | 0.9875 | 0.9825 |

Tableau 5.15: X-FEM et FEM : valeurs normalisées de  $K_{II}$  ( $K_{II}/K_{II\text{ théorique}}$ ) en fonction de la taille du domaine utilisé pour l'extraction des FIC

On constate que, par rapport à la X-FEM, une modélisation classique par doubles nœuds en FEM ne permet d'approcher que difficilement les caractéristiques locales de la solution en pointe de fissure, c'est-à-dire les FIC. On notera donc l'importance d'incorporer les champs singuliers en pointe de fissure dans la X-FEM.

## 6 Bilan

Dans ce chapitre nous avons exposé la méthode X-FEM ainsi que les aspects techniques qui lui sont liés. Son implantation au sein du code de calcul orienté objet a été présentée et discutée. À travers différents exemples, certains résultats de la littérature ont pu être retrouvés, notamment concernant l'apport des fonctions d'enrichissement en pointe de fissure vis-à-vis de la détermination des facteurs d'intensité des contraintes. Bien que ce chapitre n'ait pas apporté de résultats nouveaux concernant la X-FEM, il a permis de valider son utilisation au sein du code de calcul. Cette étape de validation s'est avérée nécessaire avant de pouvoir envisager son utilisation combinée avec l'approche micro-macro.

---

# Approche micro-macro pour la fissuration : méthode MS-X-FEM

*Dans ce chapitre, on s'intéresse aux performances de la stratégie dans sa globalité. L'utilisation combinée de l'approche micro-macro et de la X-FEM, appelée MS-X-FEM (MultiScale-X-FEM), est ainsi illustrée au travers d'exemples de propagation de fissure en fatigue qui intéressent Dassault Aviation.*

## Sommaire

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Implantation de la X-FEM à l'échelle micro . . . . .</b>      | <b>164</b> |
| 1.1      | Espace d'approximation sur une sous-structure fissurée . . . . . | 164        |
| 1.2      | Espace d'approximation sur une interface fissurée . . . . .      | 165        |
| 1.3      | Plaque fissurée en flexion trois points . . . . .                | 165        |
| <b>2</b> | <b>Propagation de fissure en fatigue . . . . .</b>               | <b>166</b> |
| 2.1      | Méthode MS-X-FEM . . . . .                                       | 168        |
| 2.2      | Fissuration de fatigue dans une plaque trouée . . . . .          | 171        |
| <b>3</b> | <b>Bilan . . . . .</b>   | <b>184</b> |

---

Dans ce chapitre, nous présentons l'approche micro-macro pour la fissuration. Plus précisément, on se propose de combiner la stratégie multiéchelle, présentée au chapitre 2, et la technique d'enrichissement local X-FEM, décrite au chapitre 5.

Dans la première partie de ce document, nous nous sommes intéressés à l'approche micro-macro utilisée pour séparer les échelles et mener à bien une analyse locale-globale couplée. Pas spécifiquement dédiée à l'étude de la fissuration, cette partie s'est intéressée au cadre plus large où l'on souhaitait mettre en place une description fine dans la zone d'intérêt tout en conservant une description grossière dans le reste de la structure. Tout l'effort numérique est alors concentré dans la zone d'intérêt autour du détail (trou, fissure ...). La deuxième partie a permis de mettre en place une séparation des échelles macro et micro efficace pour prendre en compte les effets d'une fissure à la fois au niveau global et au niveau local (voir chapitre 4). Des enrichissements de la description de la cinématique et des efforts à l'échelle macro ont ainsi été proposés. Ils permettent au maillage macro, grossier, de rester inchangé quelle que soit la topologie de la fissure, ce qui apporte une réponse aux difficultés de maillage au niveau global. Pour répondre, à ces mêmes difficultés à l'échelle micro, nous nous proposons d'utiliser la X-FEM comme outil de description de la fissure dans la zone d'intérêt.

Dans un premier temps, ce chapitre présente la façon d'intégrer la X-FEM au sein de l'approche micro-macro. Les choix des espaces d'approximation sur les sous-structures et les interfaces sont précisés. Dans un second temps, on s'intéresse à la simulation de la propagation de fissure par l'utilisation combinée de l'approche micro-macro et de la X-FEM, appelée MS-X-FEM (MultiScale-X-FEM). La démarche de calcul associée est exposée. Enfin, les performances de la stratégie sont illustrées au travers d'exemples de propagation de fissure en fatigue.

## 1 Implantation de la X-FEM à l'échelle micro

### 1.1 Espace d'approximation sur une sous-structure fissurée

Afin de s'affranchir des difficultés de maillage au niveau micro, la X-FEM est utilisée pour représenter la fissure. L'aspect multiéchelle n'étant introduit qu'au niveau des interfaces (voir paragraphe 2.1 du chapitre 2), le problème micro 5 sur une sous-structure  $\Omega_E$  est un problème standard, portant sur les champs de déplacement  $\underline{u}_E$  et de contrainte  $\sigma_E$ , avec condition de Robin. Pour une résolution éléments finis en déplacement de ce problème, rien n'empêche d'enrichir l'approximation du champ de déplacement sur une sous-structure selon la X-FEM [Guidault *et al.* 2005b]. Ainsi,  $\underline{u}_E$  est approché sous la forme exposée au paragraphe 1 du cha-

pitre 5 :

$$\underline{u}_{E_h}(\underline{x}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(\underline{x}) \underline{u}_i + \sum_{i \in N_d} \varphi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_i + \sum_{i \in N_p} \varphi_i(\underline{x}) \left( \sum_{j=1}^4 F_j(\underline{x}) \underline{b}_i^j \right) \quad (6.1)$$

où les mêmes notations ont été adoptées.

## 1.2 Espace d'approximation sur une interface fissurée

Sur une interface  $\Gamma_{EE'}$  traversée par une fissure, le projecteur macro  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$  est défini avant même toute discrétisation (voir paragraphe 2.2 du chapitre 2). La définition des quantités macro et micro restent donc inchangée. Toute la difficulté réside alors dans l'admissibilité cinématique du champ  $\underline{u}_E$  sur le bord d'une sous-structure  $\Omega_E$  et du déplacement  $\underline{W}_E$  de l'interface  $\Gamma_{EE'}$  :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_{EE',h}, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^* \cdot (\underline{u}_E - \underline{W}_E) d\Gamma = 0 \quad (6.2)$$

Un premier choix consiste à enrichir également par  $H$  l'espace d'approximation des quantités d'interface sous la forme :

$$\underline{F} = \sum_{i \in N_\Gamma} \psi_i(\underline{x}) \underline{f}_i + \sum_{i \in N_{\Gamma_d}} \psi_i(\underline{x}) H(\underline{x}) \underline{a}_{\Gamma_i} \quad (6.3)$$

où  $N_\Gamma$  correspond aux nœuds de l'interface et  $N_{\Gamma_d}$  désigne les noeuds dont le support des fonctions de forme  $\psi_i$  est traversé par la fissure. Un autre choix, qui s'avère plus simple, est de considérer pour  $\mathcal{F}_{EE',h}$  un espace de fonctions continues par morceaux (voir paragraphe 1.3.2 du chapitre 2). Cet espace d'approximation peut alors représenter naturellement une discontinuité et ne nécessite pas l'introduction de la fonction  $H$  discontinue. Ainsi :

$$\underline{F} = \sum_{i \in N_\Gamma} \psi_i(\underline{x}) \underline{f}_i \quad (6.4)$$

Nous prendrons ici comme fonction  $\psi_i$  des fonctions constantes P0 par morceaux (par éléments d'interface). On conserve donc la même discrétisation que dans les études précédentes.

## 1.3 Plaque fissurée en flexion trois points

Pour valider l'utilisation combinée de la X-FEM et de l'approche micro-macro, on se propose de s'intéresser à la plaque fissurée en flexion trois points sur appuis courts illustrée en figure 6.1. L'aspect propagation n'est pas étudié ici. On



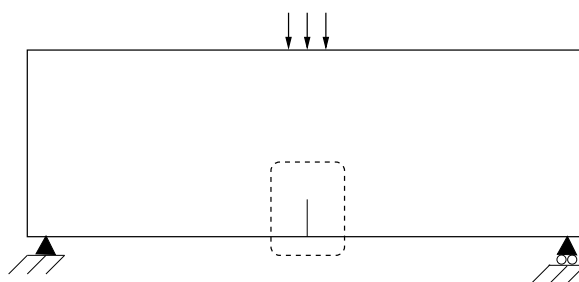
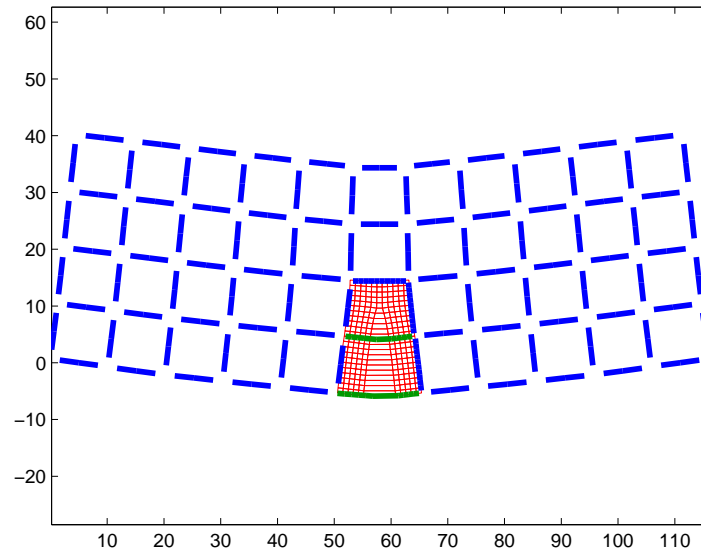


Figure 6.1: Plaque fissurée en flexion trois points sur appuis courts

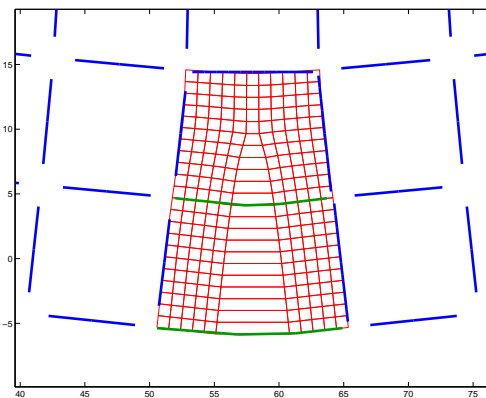
traite le problème d'analyse locale-globale avec le raccord à effort micro présenté au chapitre 3. Ainsi, seules deux sous-structures sont raffinées. Pour toutes les interfaces, on réalise un raccord en résultantes et moments excepté pour les deux interfaces situées dans la zone d'intérêt pour lesquelles un raccord exact est utilisé. Par ailleurs, afin de mieux décrire l'effet de la fissure au niveau macro, une base macro discontinue est employée pour les deux interfaces traversées par la fissure. La figure 6.2 représente la déformée totale, micro dans la zone d'intérêt et macro ailleurs, ainsi que le déplacement macro  $\underline{W}^M$  d'interface. La contrainte  $\sigma_{xx}$  est illustrée sur la figure 6.3. Comme attendu, on constate que l'utilisation de la X-FEM permet de décrire la singularité en pointe de fissure même avec un maillage relativement grossier. La valeur de  $K_I$  calculée est ainsi très proche de la valeur théorique déterminée par [Gettu *et al.* 1990] :  $K_{I \text{ théorique}} = 664,69 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ . On trouve :  $K_I = 665.23 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$  et une erreur relative d'environ 0.08%.

## 2 Propagation de fissure en fatigue

Dans cette dernière partie, nous présentons deux cas de fissuration traités par l'approche MS-X-FEM (MultiScale-X-FEM) qui combine l'approche micro-macro et la X-FEM. Il s'agit ici de valider l'approche dans sa globalité. L'approche répond à la problématique d'une analyse locale-globale adaptée à la fissuration. La démarche de calcul employée pour la fissuration en fatigue est présentée et est suivie de différents exemples d'application. L'influence du choix de la séparation des échelles est ainsi illustrée et permet, en particulier, de montrer l'intérêt d'introduire la discontinuité due à la fissure à la fois au niveau micro et au niveau macro.



(a) Déformée et déplacement macro



(b) Zoom

Figure 6.2: Déformée micro dans les sous-structures raffinées et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface avec utilisation d'une base macro discontinue pour les interfaces traversées par la fissure. La X-FEM est utilisée au niveau micro.

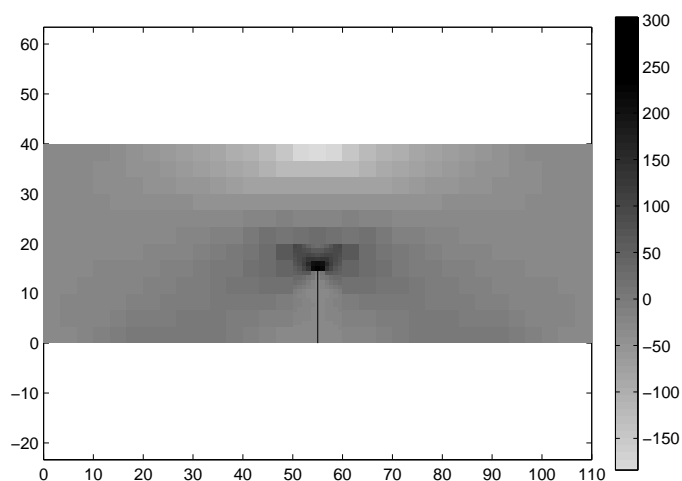


Figure 6.3: Poutre fissurée en flexion trois points : contrainte  $\sigma_{xx}$ , l'axe  $x$  étant horizontal

## 2.1 Méthode MS-X-FEM

### 2.1.1 Algorithme

Le problème de fissuration de fatigue 12 (voir au début de la partie II), traitée par une loi de propagation explicite, revient à la résolution d'un problème de statique à chaque pas de propagation. À chaque avancée de fissure, le problème est résolu par la stratégie micro-macro avec une description de la géométrie courante de la fissure selon la X-FEM. La démarche est décrite par l'algorithme 3. L'avancée de fissure est pilotée par la loi de Paris et la direction de propagation est définie par le critère explicite de contrainte circonférentielle maximale. On remarquera que la mise à jour des opérateurs homogénéisés au cours de la propagation n'est effectuée que pour les sous-structures raffinées. Rappelons que le raccord à effort micro nul, qui est utilisé sur les interfaces entre sous-structures raffinées et sous-structures « grossières », connecte uniquement les composantes macro d'efforts et de déplacements dans la base macro  $e^{M(p)}$  et ceci quelles que soient les discrétisations. Cette procédure de raffinement n'affecte donc pas les opérateurs définis sur les sous-structures grossières.

### 2.1.2 Sélection des interfaces à base macro discontinue

Le choix d'une base macro discontinue pour une interface traversée par la fissure nécessite une tolérance. En effet, si la définition de la base macro est indépendante

---

**Algorithme 3** Stratégie MS-X-FEM pour la fissuration de fatigue ( $\square$  : phase parallélisable)

---

**Données :**

- géométrie de la préfissure,
- avancée de fissure  $a_d$  (pilotage en avancée de fissure),
- liste des sous-structures raffinées  $\mathbf{E}_f^{(0)}$  au pas (0).

**Calculs préliminaires au pas (0) :**

- Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}_f^{(0)}$  :
  - $\square$  Calcul des valeurs initiales des *Level Sets*,  $\varphi^{(0)}$  et  $\psi^{(0)}$ ,
  - $\square$  Enrichissement X-FEM des nœuds.
  - $\square$  Enrichissement de la base macro des interfaces fissurées.
- Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}$  :
  - $\square$  Création des rigidités élémentaires  $[K_E]$  et  $[k_E]$ ,
  - $\square$  Assemblage, factorisation de  $[K_E] + [k_E]$ ,
  - $\square$  Détermination de l'opérateur homogénéisé  $[\mathbf{L}_E^F]$ .
- Sur l'ensemble des sous-structures
  - Assemblage, factorisation de la rigidité  $[H]_{e^M}^{(0)}$  du problème macro,

**boucle** pour  $p = 1$  à  $n_{pas}$  (pas de propagation) **faire**

**Initialisation :**  $\mathbf{s}_0^{(p)} \in \mathbf{A}_d$

**boucle** pour  $n_{iter} = 0$  à  $n_{max}$  (itération LATIN) **faire**

1. Étape locale
2. Étape linéaire
3. Test critère d'arrêt  $\eta < 10^{-4}$

**fin boucle**

**Calcul des FIC**, détermination de  $\theta_c^{(p)}$ , avancée de fissure

**Mise à jour au pas (p) :**

1. Mise à jour de  $\mathbf{E}_f^{(p)}$  (critère de sélection à définir)
2. Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}_f^{(p)}$  :
  - $\square$  Mise à jour des *Level Sets*,  $\varphi^{(p)}$  et  $\psi^{(p)}$ ,
  - $\square$  Enrichissement X-FEM des nœuds.
  - $\square$  Enrichissement de la base macro des interfaces fissurées.
3. Pour chaque sous-structure  $E \in \mathbf{E}_f^{(p)}$  :
  - $\square$  Création des rigidités élémentaires  $[K_E]$  et  $[k_E]$ ,
  - $\square$  Assemblage, factorisation de  $[K_E] + [k_E]$ ,
  - $\square$  Détermination de l'opérateur homogénéisé  $[\mathbf{L}_E^F]$ .
4. Sur l'ensemble des sous-structures
  - Assemblage, factorisation de la rigidité  $[H]_{e^M}^{(p)}$  du problème macro.

**fin boucle**

---

de la discrétisation, il faut néanmoins que la discrétisation de l'interface soit telle qu'elle puisse permettre de la décrire. Par exemple, pour une base macro linéaire, deux noeuds d'interface sont nécessaires pour définir le projecteur macro discrétisé correspondant. Ainsi pour une interface traversée par la fissure, la définition d'une base macro linéaire par morceau est utilisée uniquement si chaque morceau d'interface comporte un nombre minimal de deux noeuds. Dans le cas contraire, l'interface est trop peu coupée et une base macro linéaire est utilisée sur toute l'interface. La figure 6.4 illustre ces deux situations pour une quantité de déplacement bord  $\underline{u}$  discontinue et linéaire par morceau. Sur cet exemple particulier et dans le cas

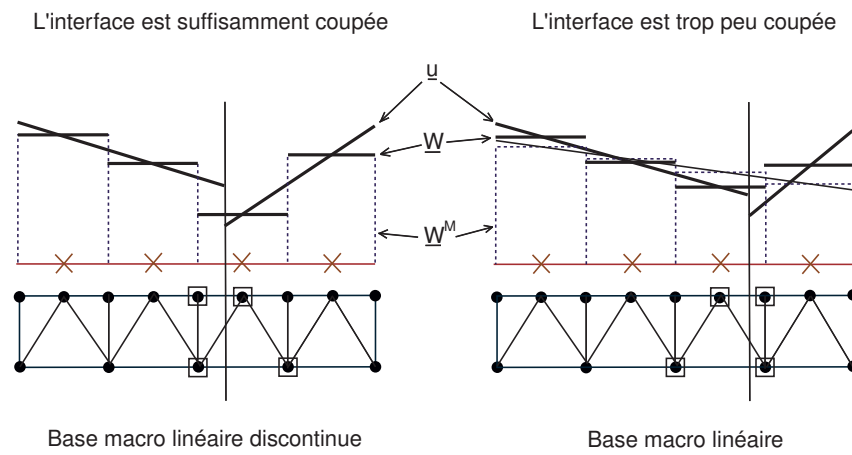


Figure 6.4: Critère de sélection du type de projecteur macro pour une interface traversée par la fissure et discrétisée par des fonctions P0 par élément. Une base macro linéaire discontinue est choisie si l'interface est suffisamment coupée.

où la base macro discontinue est validée (figure de gauche), le déplacement macro  $\underline{W}^M$  donne exactement le déplacement  $\underline{u}$  aux noeuds d'interface et le déplacement micro complémentaire  $\underline{W}^m$  est nul. Dans l'autre situation (figure de droite), le déplacement macro  $\underline{W}^M$  ne fournit qu'une moyenne (trait fin continu sur la figure de droite) du déplacement  $\underline{u}$ . Le déplacement micro complémentaire  $\underline{W}^m$  complète la solution.

La procédure permettant de définir la position de la coupure et de choisir la base macro est basée sur la valeur des *Level Sets*. Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont interpolées aux noeuds des interfaces. L'isovaleur 0 de  $\varphi$  permet de trouver le point de coupure sur l'interface et le signe de  $\psi$  permet de savoir si la fissure l'a bien traversée.

## 2.2 Fissuration de fatigue dans une plaque trouée

### 2.2.1 Présentation du problème

Afin d'illustrer l'utilisation de la méthode MS-X-FEM pour la fissuration de fatigue, nous proposons de traiter le cas de propagation d'une fissure dans une plaque d'acier ( $E = 200000 \text{ MPa}$  et  $\nu = 0.3$ ), comportant trois trous, en flexion trois points (Figure 6.5). Cet exemple présenté dans [Bittencourt *et al.* 1996] a été traité par [Hocine 1998] à l'aide de la méthode des équations intégrales duales. Deux configurations de fissure sont étudiées. Le trajet de propagation dépend alors fortement de la taille et de la position relative de l'entaille par rapport à l'axe vertical des trous. L'intérêt de la présence des trous est que ceux-ci modifient considérablement le champ de contrainte et donnent lieu à des trajectoires de fissuration « particulières ».

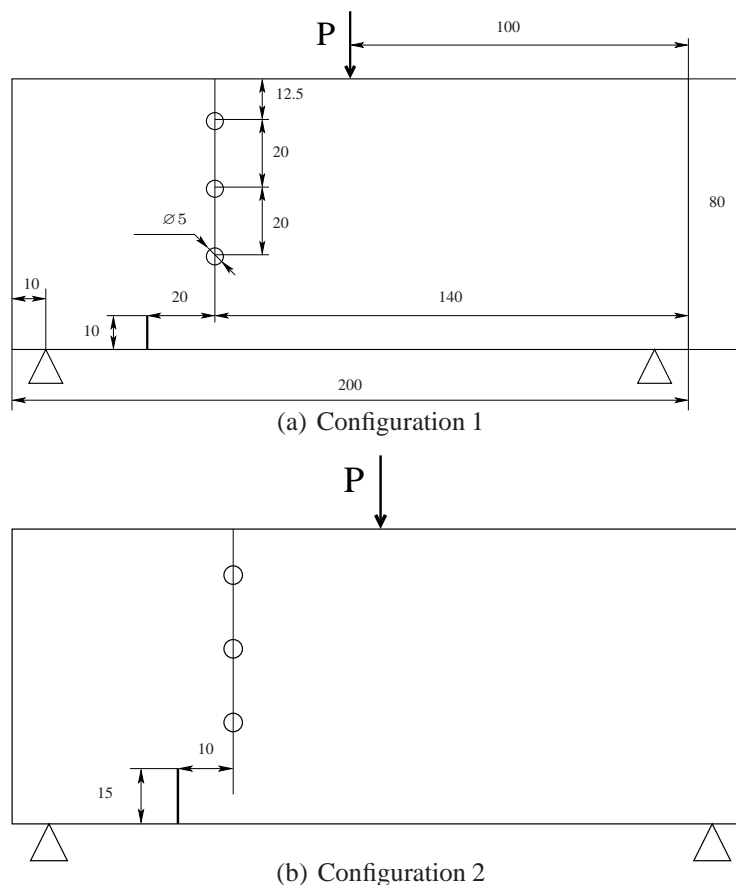


Figure 6.5: Plaque fissurée soumise à de la flexion trois points et comportant trois trous. Deux configurations de pré-fissure sont étudiées.

L'évolution de la fissure est régie par la loi de Paris et la direction de propagation est définie par le critère de contrainte circonférentielle maximale. Notons que l'utilisation de ce critère est discutable lorsque la fissure arrive dans le voisinage d'un trou ou d'un bord. Le pilotage du calcul est effectué en avancée de fissure et l'incrément de propagation est  $a_d = 0.1 \text{ mm}$ . Les maillages macro et micro utilisés dans la méthode MS-X-FEM sont représentés en figure 6.6. Dans cet exemple, la procédure de raffinement des sous-structures n'est pas mise en œuvre. La sélection des sous-structures raffinées est arbitraire et faite au début du calcul de façon à ce qu'au moins une sous-structure raffinée se trouve de part et d'autre du trajet de fissuration obtenu en fin de propagation. Les bases macro linéaire, cubique et discontinue sont utilisées successivement pour les interfaces situées dans la zone d'intérêt.

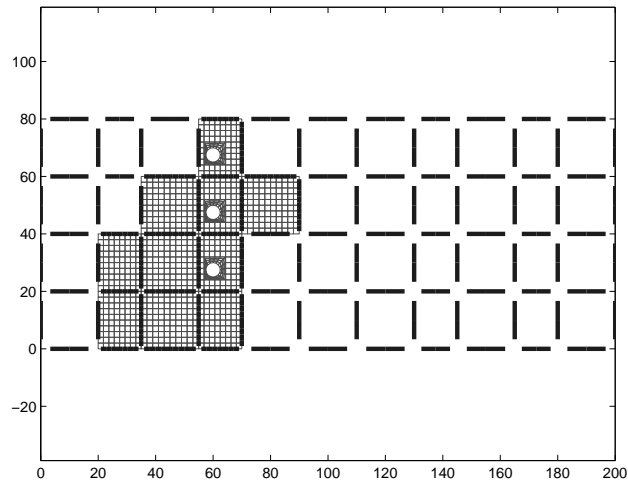
Enfin, nous prendrons comme référence le calcul direct X-FEM mené sur les maillages décrits en figure 6.7. Les maillages sont identiques aux maillages de la figure 6.6 dans la zone correspondant à celle des sous-structures raffinées.

### 2.2.2 Influence du choix de la base macro

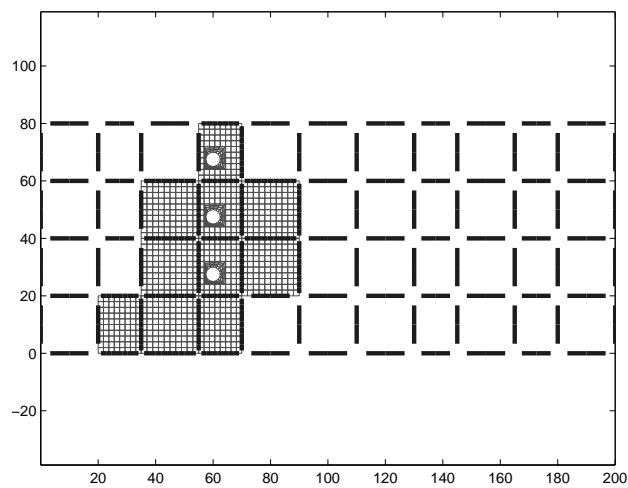
Les figures 6.8 et 6.9 représentent les trajets obtenus avec la méthode MS-X-FEM pour les différentes bases macro et ceux déterminés par la méthode directe X-FEM. Les résultats sont en bonne corrélation. Le trajet obtenu avec une base macro discontinue est même très proche de celui de référence. Des déviations sont cependant obtenues (Figure 6.8(b) et Figure 6.9(b)). Rappelons que les itérations de la méthode LATIN sont stoppées pour un critère d'erreur heuristique  $\eta$  donné de  $10^{-4}$  qui permet d'obtenir une précision sur le calcul des FIC de 1% en utilisant une cinématique macro discontinue (voir paragraphe 3 du chapitre 4). Cette précision n'est pas atteinte pour les bases macro linéaire et cubique (Figure 4.13). Le cumul de ces erreurs et l'utilisation d'un critère de propagation explicite explique en partie ces différences de parcours. Nous reviendrons sur la validité du critère d'erreur ( $\eta = 10^{-4}$ ) plus loin.

Les déformées dans la zone d'intérêt et les déplacements macro pour l'utilisation, dans la zone d'intérêt, d'une base macro linéaire (Figure 6.11 et 6.12), d'une base macro cubique (Figure 6.13 et 6.14) et d'une base macro discontinue (Figure 6.15 et 6.16) sont en bon accord avec les déformées obtenues par le calcul direct X-FEM (Figure 6.10(a) et 6.10(b)).

Les figures 6.17(a) et 6.18(a) représentent la valeur de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure obtenue avec l'approche multiéchelle et la méthode directe X-FEM pour les deux configurations. Les résultats obtenus avec la base macro discontinue sont très proches de ceux du calcul direct X-FEM. On vérifie qu'une erreur relative d'environ 1% sur  $K_I$  est obtenue avec le critère d'erreur LATIN  $\eta = 10^{-4}$



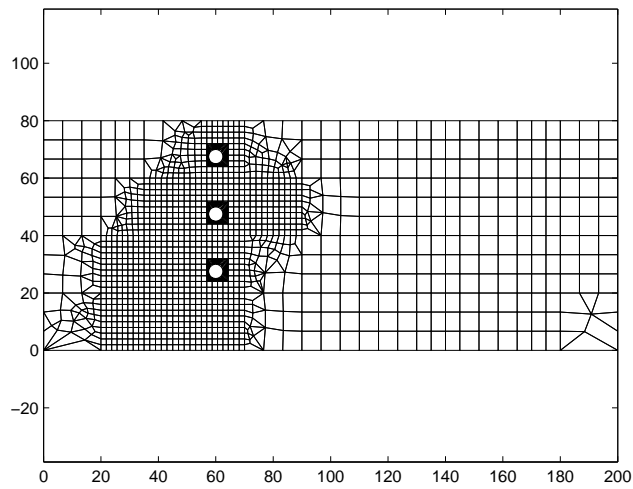
(a) Configuration 1



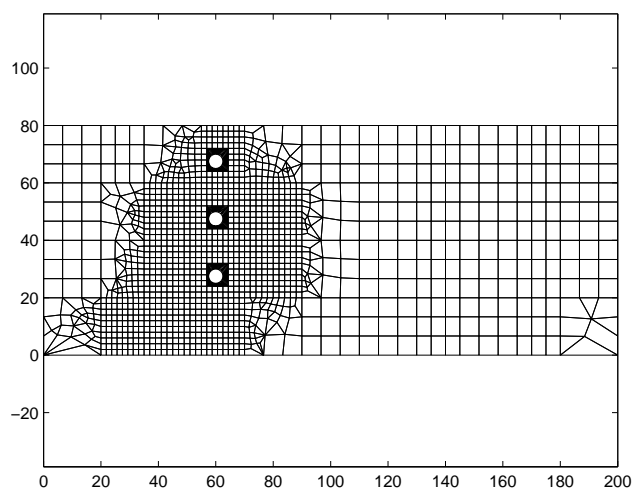
(b) Configuration 2

Figure 6.6: Plaque fissurée comportant trois trous en flexion trois points : maillage micro dans la zone d'intérêt et maillage macro d'interface pour les deux configurations.



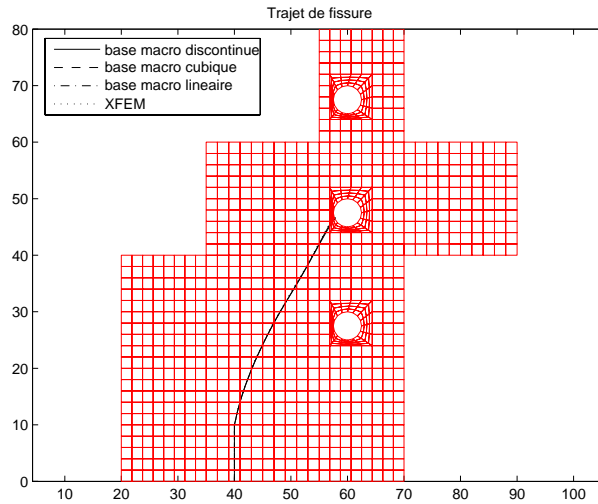


(a) Configuration 1

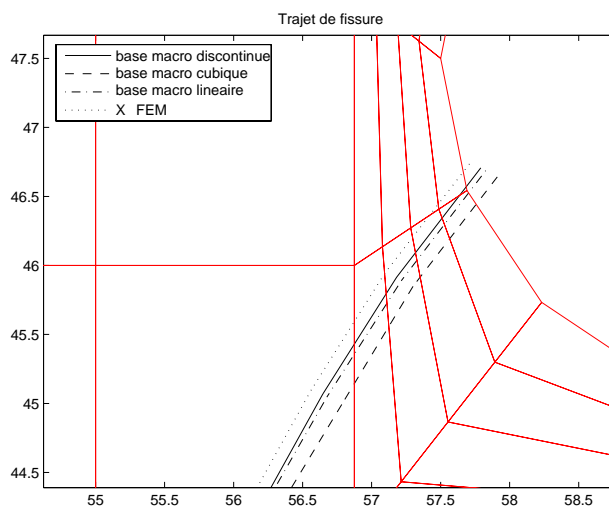


(b) Configuration 2

Figure 6.7: Plaque fissurée comportant trois trous en flexion trois points : maillages utilisés par le calcul direct X-FEM pour les deux configurations. Les maillages autour de la fissure sont identiques à ceux utilisés par l'approche MS-X-FEM.

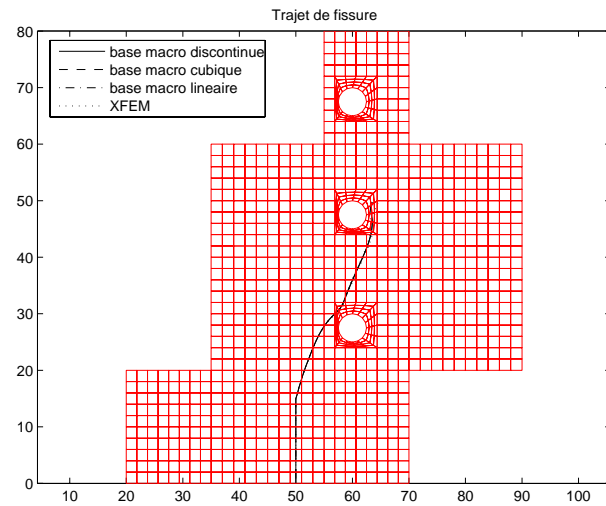


(a) Trajets de fissure

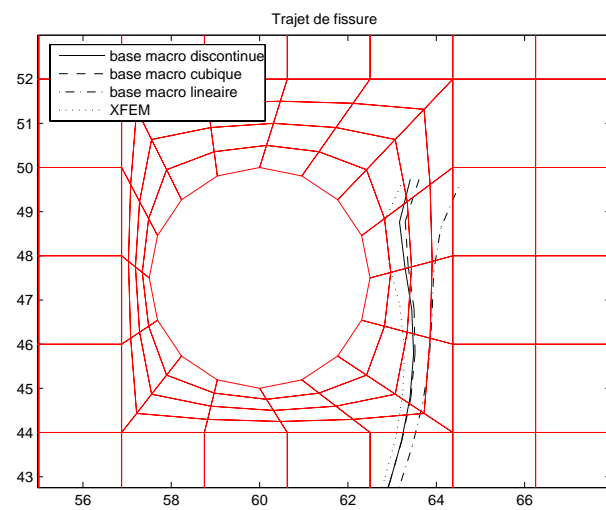


(b) Zoom au voisinage du deuxième trou

Figure 6.8: Trajets de fissure obtenus avec la stratégie MS-X-FEM et le calcul direct X-FEM pour la configuration 1

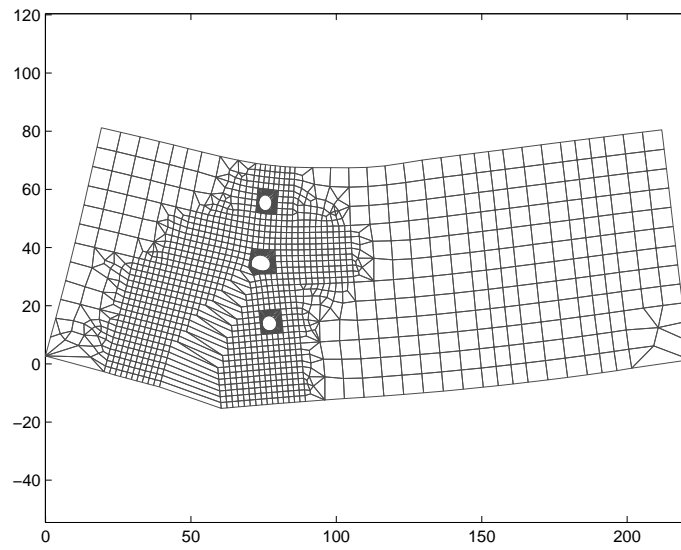


(a) Trajets de fissure

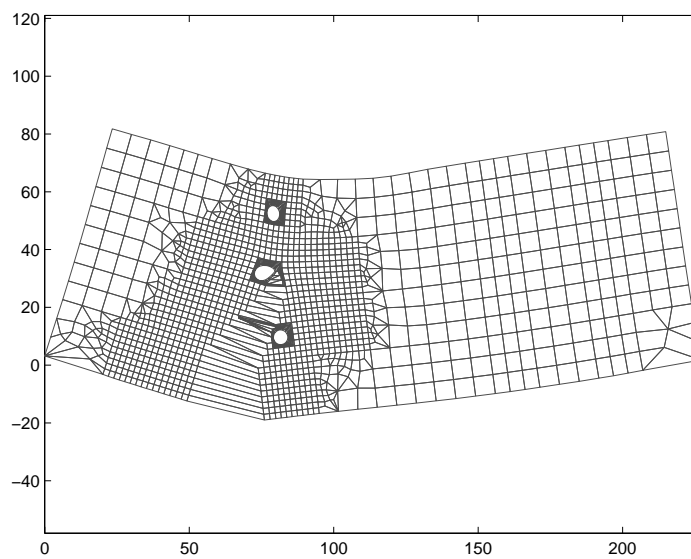


(b) Zoom au voisinage du deuxième trou

Figure 6.9: Trajets de fissure obtenus avec la stratégie MS-X-FEM et le calcul direct X-FEM pour la configuration 2

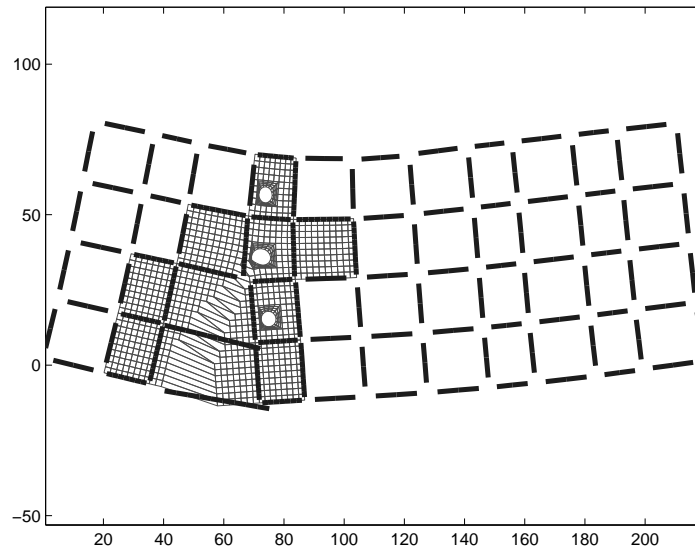


(a) Configuration 1

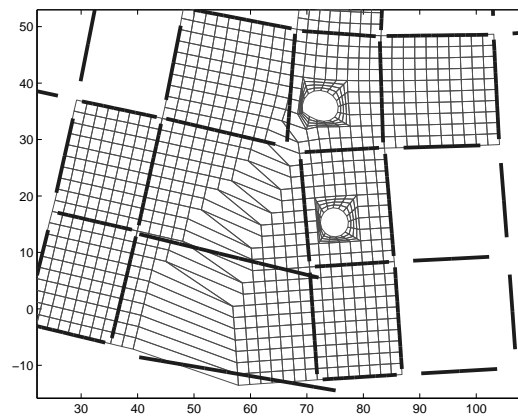


(b) Configuration 2

Figure 6.10: Déformées obtenues par le calcul direct X-FEM pour les deux configurations. Les maillages autour de la fissure sont identiques à ceux utilisés par l'approche MS-X-FEM.

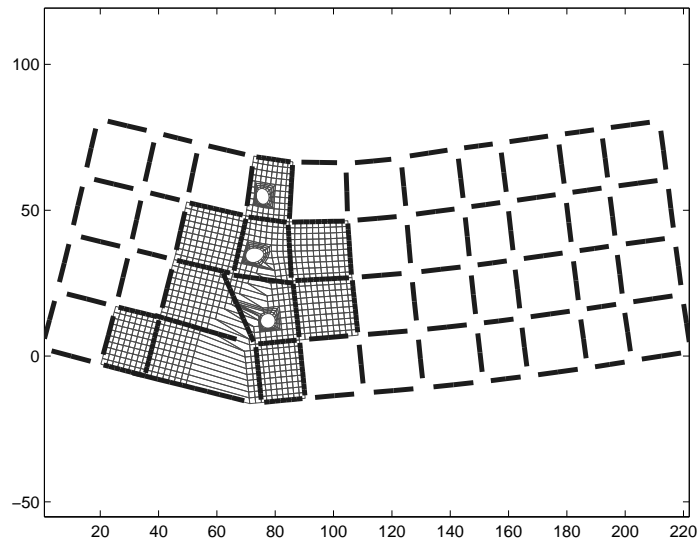
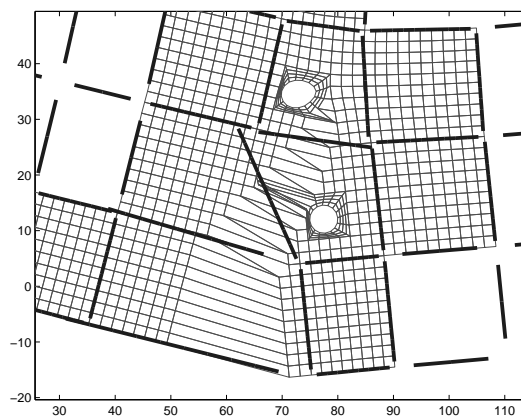


(a) Déformée et  $\underline{W}^M$



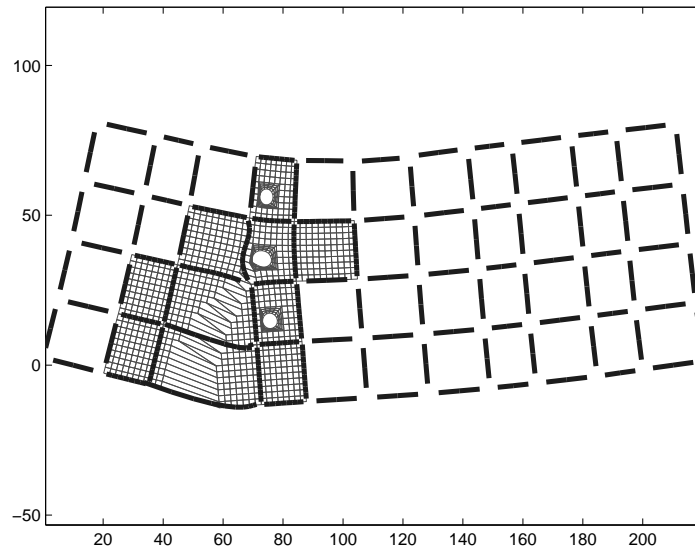
(b) Zoom

Figure 6.11: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro lineaire au dernier pas de propagation de la configuration 1

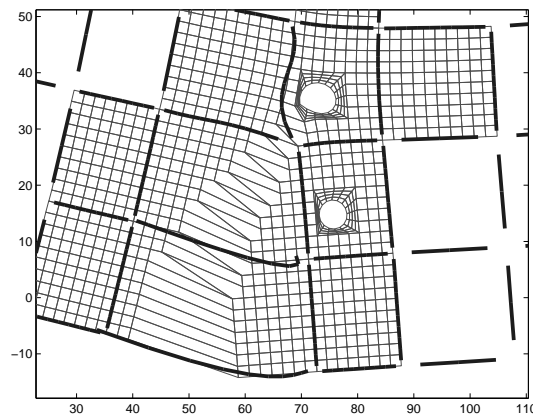
(a) Déformée et  $\underline{W}^M$ 

(b) Zoom

Figure 6.12: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro lineaire au dernier pas de propagation de la configuration 2

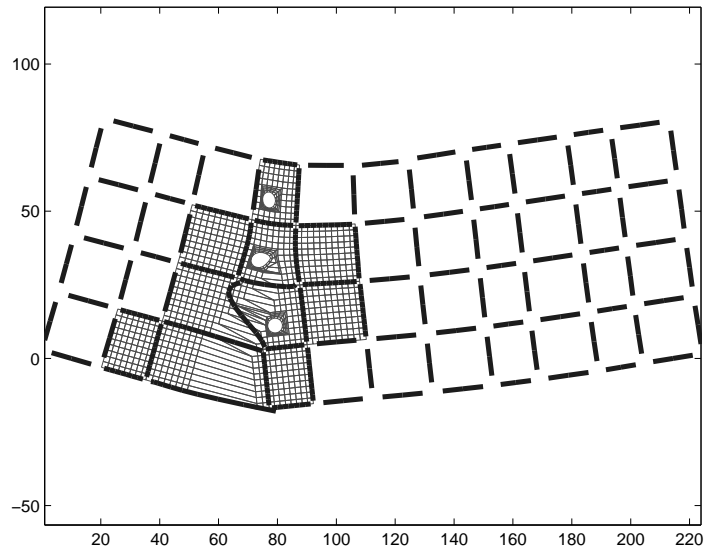
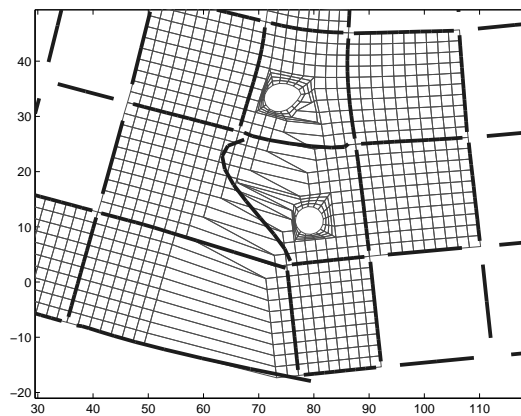


(a) Déformée et  $\underline{W}^M$



(b) Zoom

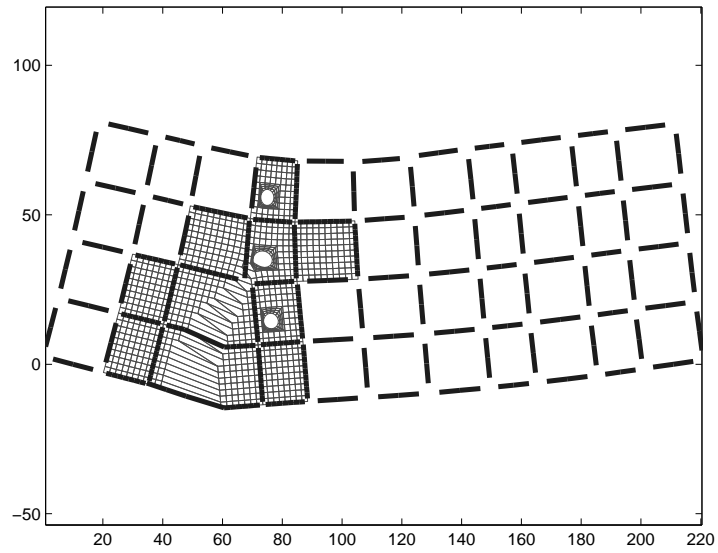
Figure 6.13: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro cubique locale au dernier pas de propagation de la configuration 1

(a) Déformée et  $\underline{W}^M$ 

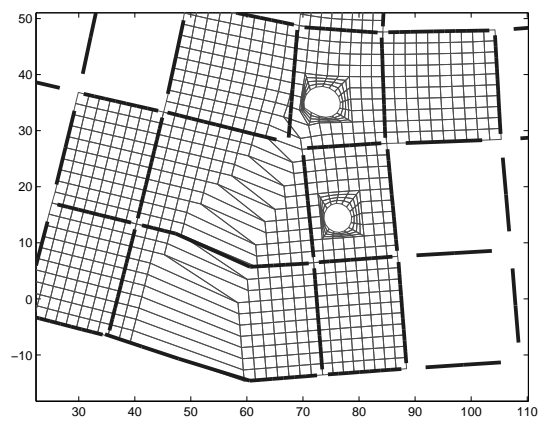
(b) Zoom

Figure 6.14: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro cubique locale au dernier pas de propagation de la configuration 2



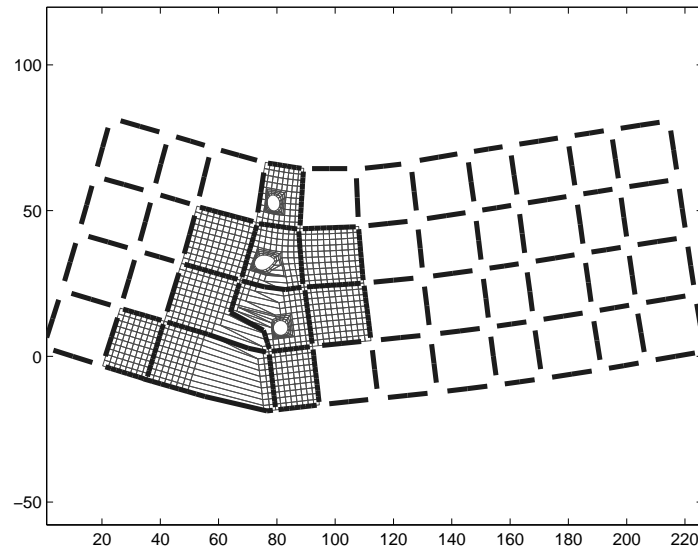
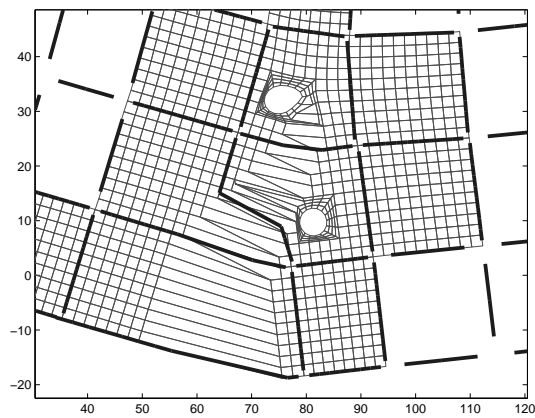


(a) Déformée et  $\underline{W}^M$



(b) Zoom

Figure 6.15: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro discontinue locale au dernier pas de propagation de la configuration 1

(a) Déformée et  $\underline{W}^M$ 

(b) Zoom

Figure 6.16: Déformée dans la zone d'intérêt et déplacements macro (traits forts continus) à l'interface pour la base macro discontinue locale au dernier pas de propagation de la configuration 2

(Figure 6.17(b) et 6.18(b)). Des différences sont à noter pour la deuxième configuration. En effet, la pointe de fissure passant trop près du deuxième trou (dans l'élément du bord) pour le calcul X-FEM, la fonction  $q$  de la technique d'extraction (Annexe B) ne vaut pas 1 en pointe de fissure. Le calcul de  $K_I$  est donc erroné.

Enfin, les figures 6.19 et 6.20 donnent le nombre d'itérations, en fonction du pas de propagation, nécessaires pour atteindre une erreur de convergence LATIN  $\eta$  de  $10^{-4}$  avec les trois bases macro. L'utilisation de la base macro discontinue conduit à un nombre quasi-constant de 10 itérations pour atteindre ce niveau d'erreur. Le problème macro est suffisamment riche pour rendre compte de l'effet macro de la fissure et séparer efficacement les échelles. En revanche, pour les bases macro linéaires et cubiques, un nombre d'itérations croissant en fonction de l'avancée de fissure est obtenu. Le problème macro n'étant pas suffisant pour décrire l'effet global de la fissure, en particulier lorsque la fissure devient grande, ce sont les quantités micro qui doivent le « capturer ». Les quantités micro ayant à converger dans un espace plus grand, le nombre d'itérations est d'autant plus important. Un compromis doit donc être fait entre l'enrichissement de la base macro (ajout de degrés de libertés macro) et l'obtention d'un taux de convergence intéressant.

### 3 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'approche multiéchelle MS-X-FEM pour la fissuration. Cette stratégie est une combinaison de l'approche micro-macro, qui permet un traitement multiéchelle efficace des effets d'une fissure, et de la méthode X-FEM. L'implantation de la X-FEM au sein de l'approche micro-macro a été exposée. En particulier, les choix des discrétisations des sous-structures et des interfaces ont été revisités. La stratégie utilisée pour traiter la fissuration de fatigue a été détaillée et des exemples permettant de valider l'approche ont été présentés. Il a été montré, en particulier, l'intérêt d'incorporer la discontinuité due à la fissure à la fois à l'échelle macro et à l'échelle micro. Un certain nombre de difficultés de mise en œuvre restent cependant à résoudre. En particulier, une mise à jour adaptative de la zone à décrire finement ainsi que la sélection automatique des enrichissement micro et macro doivent être mises en place. Une analyse plus fine de la ré-actualisation des différents opérateurs et de la base de données informatique reste à faire pour améliorer les performances de la stratégie en termes de coût de calcul.

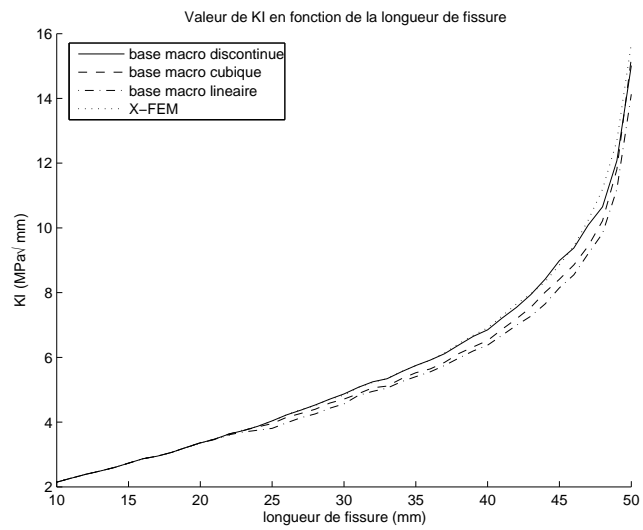
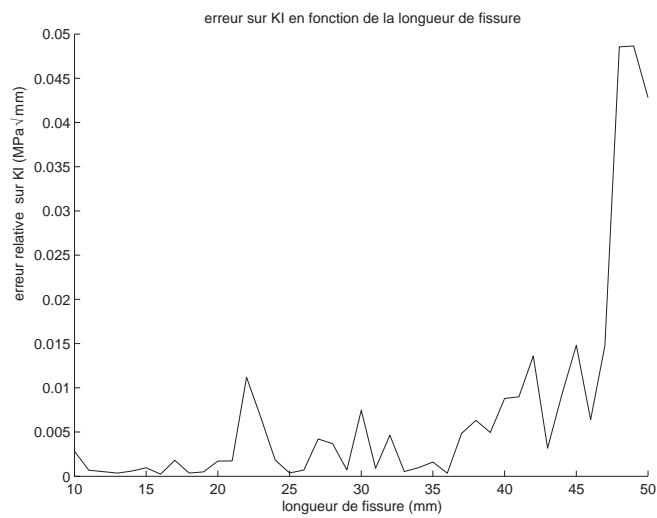
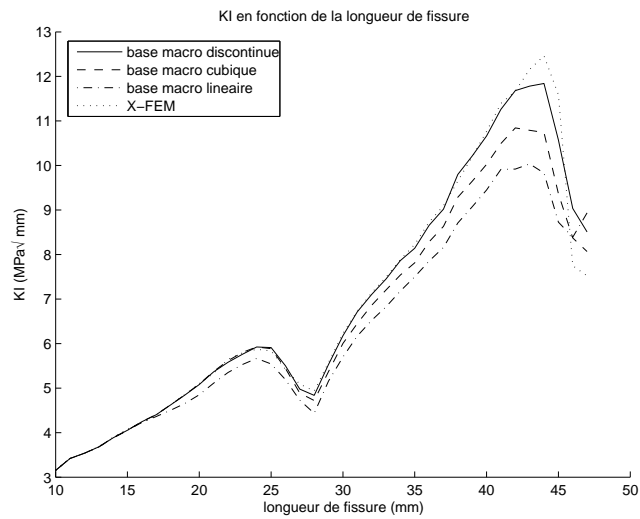
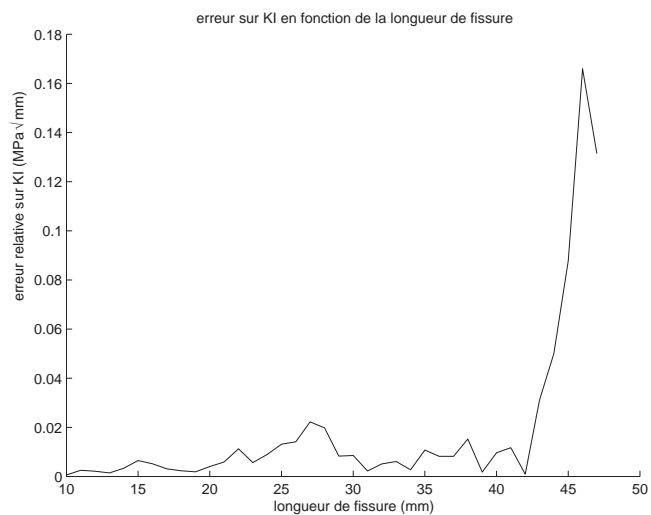
(a) Évolution de  $K_I$ (b) Erreur sur  $K_I$  pour la base macro discontinue

Figure 6.17: Valeur et erreur relative de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure obtenues avec la stratégie micro-macro MS-X-FEM et la méthode directe X-FEM pour la configuration 1



(a) Évolution de  $K_I$



(b) Erreur sur  $K_I$  pour la base macro discontinue

Figure 6.18: Valeur et erreur relative de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure obtenues avec la stratégie micro-macro MS-X-FEM et la méthode directe X-FEM pour la configuration 2

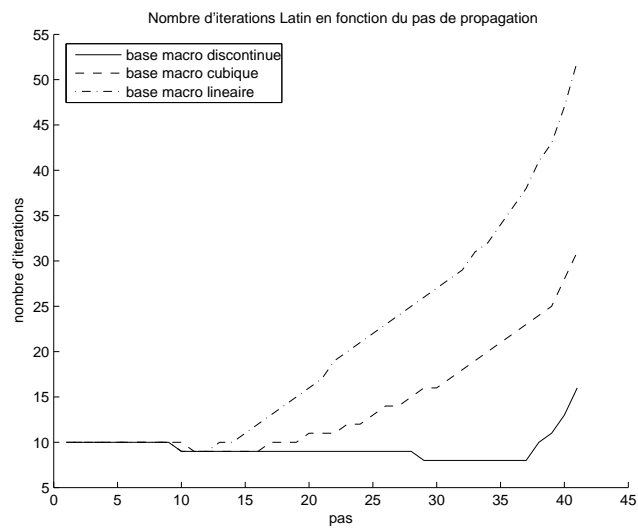


Figure 6.19: Nombre d'itérations en fonction du pas pour atteindre une erreur de convergence LATIN  $\eta$  de  $10^{-4}$  avec les trois bases macro dans le cas de la configuration 1

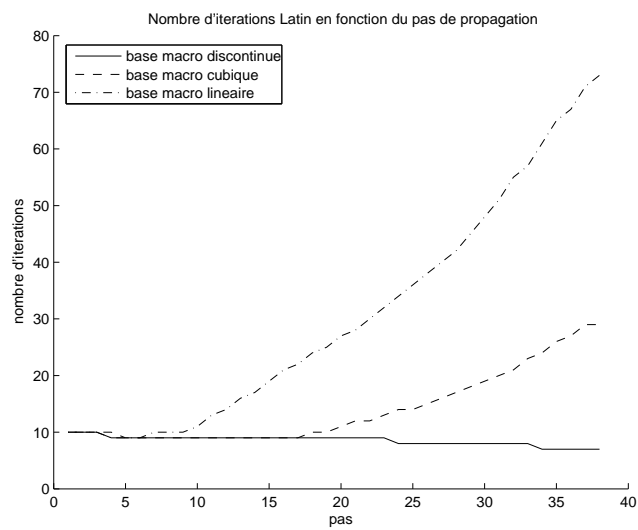


Figure 6.20: Nombre d'itérations en fonction du pas pour atteindre une erreur de convergence LATIN  $\eta$  de  $10^{-4}$  avec les trois bases macro dans le cas de la configuration 2



---

# Conclusion

Dans ce travail, une stratégie de calcul multiéchelle, MS-X-FEM, répondant à la problématique d'une analyse locale-globale pour le suivi de fissure et permettant de lever les difficultés de maillage a été présentée. Cette approche met en synergie deux techniques. L'approche micro-macro [Ladevèze et Dureisseix 1999, Ladevèze *et al.* 2001] est utilisée pour effectuer une séparation d'échelles adaptée à la fissuration. Elle est basée sur une méthode de décomposition de domaine mixte et une technique d'homogénéisation automatique non classique en ce sens où les variables macro et micro ne sont pas associées aux sous-domaines mais aux interfaces. La deuxième technique est la méthode d'enrichissement locale X-FEM [Belytschko et Black 1999] qui permet de gérer efficacement la propagation de fissure en simplifiant considérablement les difficultés de maillage.

Dans le cadre de cette thèse, deux aspects principaux ont été étudiés pour simuler la propagation de fissures en fatigue dans le cadre de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Nous nous sommes tout d'abord intéressés à la mise en place d'une analyse locale-globale couplée permettant de définir une description fine de la solution dans une zone d'intérêt tout en se contentant d'une description grossière dans le reste de la structure. L'utilisation de l'approche micro-macro et de l'entité mécanique interface a semblé bien adaptée à ce problème. La flexibilité des interfaces a été mise à profit pour effectuer un raccord des quantités macroscopiques au niveau des interfaces qui correspond à un raccord en résultantes et moments (à efforts micro nuls). L'idée sous-jacente est celle du principe de Saint-Venant, celui-ci assurant une solution non entachée d'erreur dans la zone d'intérêt.

Le deuxième aspect concerne la simulation de la fissuration proprement dite. Le premier objectif de notre étude a consisté à mettre en place une stratégie qui évite toute procédure de remaillage au cours du calcul. Pour ce faire l'approche micro-macro a été utilisée pour assurer le couplage d'un problème macro basé sur un maillage grossier fixe et d'un problème micro décrit selon la X-FEM. L'aspect multiéchelle permet d'utiliser dans la zone potentielle de fissuration des maillages locaux de la finesse requise pour avoir une solution de qualité lorsque la fissure,



modélisée par la X-FEM, interagit avec les éléments grossier du maillage macro. Le deuxième objectif a été d'améliorer les performances de la stratégie de résolution itérative basée sur la méthode LATIN [Ladevèze 1999] dans le cadre de la fissuration. L'idée a consisté à rechercher une séparation des échelles judicieuse et efficace dans le cas de la fissuration. La souplesse offerte par l'approche micro-macro pour enrichir le comportement macro d'un sous-domaine fissuré, a permis d'envisager différentes façons de rendre compte, aux deux échelles, de la discontinuité en déplacement due à la fissure. Deux versions ont ainsi été étudiées : la première introduit la discontinuité uniquement au niveau micro et la deuxième l'introduit à la fois au niveau micro et au niveau macro. Cette dernière version a présenté les meilleures performances.

Enfin, l'aspect implantation de la stratégie au sein d'un code de calcul éléments finis programmé orienté objet a été présenté. La structure de données ainsi que les concepts de programmation associés au développement combiné de l'approche micro-macro (méthode de décomposition de domaine mixte) et de la X-FEM (formulation éléments finis en déplacement particulière) ont été discutés. Cette approche de programmation permet d'envisager d'une façon plus objective le transfert de la stratégie dans un code industriel.

Suite à ces travaux qui ont montré la faisabilité d'une approche multiéchelle du suivi de fissure, les perspectives sont nombreuses. D'un point de vue ingénieur, il conviendrait tout d'abord d'intégrer la stratégie dans un code éléments finis standard en tant qu'outil de traitement spécifique de la zone fissurée. D'autre part, une automatisation de la sélection des zones à décrire finement ainsi que la sélection automatique des enrichissements micro et macro doivent être mises en place. Pour ce faire, des indicateurs de raffinement fiables associés à des estimateurs d'erreurs restent à définir. Dans ce travail, la propagation de fissure en fatigue revient à résoudre à chaque pas un problème de statique qui n'exploite pas d'information du pas précédent. Aussi, une analyse plus fine de la ré-actualisation des différents opérateurs et de l'initialisation de l'algorithme itératif de résolution reste à faire pour améliorer les performances de la stratégie en termes de coût de calcul. Enfin, bon nombre de simulations dans le milieu industriel font appel à l'utilisation de modèles plaque ou coque. L'extension de l'approche à ces types de modèle devrait être considérée. Concernant la X-FEM, cette extension a fait l'objet de travaux exposés dans [Dolbow *et al.* 2000b].

D'un point de vue mécanique, un enjeu important est la prise en compte de modèles de matériau plus fins dans le cadre de la rupture ductile et de l'endommagement. L'approche micro-macro ayant donné de bons résultats pour modéliser des comportements d'interface de type contact [Ladevèze *et al.* 2002], la simulation de la refermeture de fissure et la prise en compte de modèles à zone cohésive

peuvent être naturellement envisagées. Notons que, concernant la X-FEM, la propagation de fissure en compression avec frottement [Dolbow *et al.* 2001] et de fissure cohésive [Moës et Belytschko 2002, Remmers *et al.* 2003, De Borst *et al.* 2004] a été étudiée. Par ailleurs, la stratégie de résolution basée sur la LATIN peut s'avérer intéressante pour traiter les problèmes non-linéaires d'évolution. Plus précisément, le traitement de la fissuration dans les matériaux dont le comportement met en jeu de la plasticité et de l'endommagement diffus est envisagé.



---

# Bibliographie

**[Amestoy et Leblond 1985]**

M. Amestoy et J. Leblond. Sur le critère donnant la direction de propagation des fissures dans la théorie de Griffith. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 301 : 969–972, 1985.

**[Amestoy et Leblond 1992]**

M. Amestoy et J. Leblond. Crack paths in plane situation - ii. detail form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 29(4) : 465–501, 1992.

**[Archer 1996]**

G.C. Archer. *Object-Oriented Finite Element Analysis*. Thèse de doctorat, University of California at Berkeley, 1996.

**[Auriel et al. 1982]**

G. Auriel, G. Boubal et P. Ladevèze. Sur une méthode de calcul des effets locaux. *Comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur le Composites, JNC3*, pages 279–288, 1982.

**[Belytschko et Black 1999]**

T. Belytschko et T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5) : 601–620, 1999.

**[Ben Dhia 1998]**

H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 326 : 899–904, 1998.

**[Ben Dhia et Rateau 2001]**

H. Ben Dhia et G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 332 : 649–654, 2001.

**[Benssoussan *et al.* 1978]**

A. Benssoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Pub., 1978.

**[Bernardi *et al.* 1990]**

C. Bernardi, Y. Maday et T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method. Dans *Non linear partial differential equations and their applications*, pages 13–51. Collège de France seminar, Pitman : London, 1990.

**[Bersini 2002]**

H. Bersini. *L'orienté objet*. Eyrolles, 2002.

**[Besson et Foerch 1997]**

J. Besson et R. Foerch. Large scale object oriented finite element code design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2) : 165–187, 1997.

**[Bittencourt *et al.* 1996]**

T.N. Bittencourt, P.A. Wawrzynek et A.R. Ingraffea. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(2) : 321–334, 1996.

**[Blanzé *et al.* 1996]**

C. Blanzé, L. Champaney, J.Y. Cognard et P. Ladevèze. A modular approach to structure assembly computations : Application to contact problems. *Engineering Computations*, 13(1) : 15–32, 1996.

**[Brancherie 2003]**

D. Brancherie. *Modèles continus et discrets pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2003.

**[Béchet *et al.* 2004]**

E. Béchet, H. Minnebo, N. Moës et B. Burgardt. Improved implementation and robustness study of the X-FEM method for stress analysis around cracks. (soumis pour publication dans *International Journal for Numerical Methods in Engineering*), 2004.

**[Champaney *et al.* 1999]**

L. Champaney, J.Y. Cognard et P. Ladevèze. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computer and Structures*, 73 : 249–266, 1999.

**[Chessa et al. 2003]**

J. Chessa, H.W. Wang et T. Belytschko. On construction of blending elements for locally partition unity enriched finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(7) : 1015–1038, 2003.

**[Christman et al. 1989]**

T. Christman, A. Needleman et S. Suresh. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 37(11) : 3029–3050, 1989.

**[Cornuault 1987]**

C. Cornuault. Développements pour l'analyse de la tenue des structures travaillant en post-flambage. *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, 1 : 115–130, 1987.

**[Cornuault 1998]**

C. Cornuault. Modélisation mécanique et optimisation des structures d'avion. *Nouvelle revue d'aéronautique et d'astronautique*, 1 : 35–53, 1998.

**[Cosserat et Cosserat 1909]**

E. Cosserat et F. Cosserat. *Théorie des milieux déformables*. Hermann et fils (Paris), 1909.

**[Daux et al. 2000]**

C. Daux, N. Moës, J. Dolbow, N. Sukumar et T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 : 1741–1760, 2000.

**[De Borst et al. 2004]**

R. De Borst, M.A. Gutiérrez, G.N. Wells, J.J.C. Remmers et H. Askes. Cohesive-zone models, higher-order continuum theories and reliability methods for computational failure analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 : 289–315, 2004.

**[Destuynder et al. 1983]**

P. Destuynder, M. Djaoua et S. Lescure. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 2 : 113–135, 1983.

**[Dolbow et al. 2000a]**

J. Dolbow, N. Moës et T. Belytschko. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite elements in analysis and design*, 36 : 235–260, 2000.

**[Dolbow *et al.* 2000b]**

J. Dolbow, N. Moës et T. Belytschko. Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the eXtended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37 : 7161–7183, 2000.

**[Dolbow *et al.* 2001]**

J. Dolbow, N. Moës et T. Belytschko. An eXtended finite element method modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 6825–6846, 2001.

**[Duarte *et al.* 2005]**

C.A. Duarte, T.J. Liszka et W.W. Tworzydło. A generalized finite element method for non-matching meshes in two and three dimensions. Dans *Proceedings of the Eighth US National Congress on Computational Mechanics*. Austin, Texas, 2005.

**[Dubois-Pèlerin et Zimmermann 1992]**

Y. Dubois-Pèlerin et T. Zimmermann. Object-oriented finite element programming : A prototype program in smalltalk. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(3) : 361–397, 1992.

**[Dubois-Pèlerin et Zimmermann 1993]**

Y. Dubois-Pèlerin et T. Zimmermann. Object-oriented finite element programming : iii. An efficient implementation in C++. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108(1-2) : 165–183, 1993.

**[Dumontet 1986]**

H. Dumontet. Study of a boundary layer problem in elastic composite. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20 : 265–286, 1986.

**[Dumstorff *et al.* 2003]**

P. Dumstorff, J. Mosler et G. Meschke. Advanced discretization methods for cracked structures : the strong discontinuity approach vs. the extended finite element method. Dans *VII International Conference on Computational Plasticity*. Barcelona, 2003.

**[Dureisseix 1997]**

D. Dureisseix. *Une approche multi-échelles pour des calculs de structures sur ordinateurs à architecture parallèle*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 1997.

**[Duvaut 1976]**

G. Duvaut. Matériaux élastiques composites à structure périodique, homogénéisation. Dans *Proceedings of the IUTAM Congress, Delft*, 1976.

**[Erdogan et Sih 1963]**

G. Erdogan et G. Sih. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *ASME, Journal of Basic Engineering*, 85 : 519–527, 1963.

**[Eringen 1966]**

A.C. Eringen. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16(6) : 909–923, 1966.

**[Eshelby 1957]**

J.D. Eshelby. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Dans *Proceedings of the Royal Society of London*, volume 241 de A, pages 376–396, 1957.

**[Ewalds et Wanhill 1989]**

H. Ewalds et R. Wanhill. *Fracture Mechanics*. New York : Edward Arnold, 1989.

**[Farhat et Gérardin 1992]**

C. Farhat et M. Gérardin. Using a reduced number of lagrange multipliers for assembling parallel incomplete field finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97 : 333–354, 1992.

**[Farhat et al. 2001]**

C. Farhat, M. Lesoinne, P. Le Tallec, K. Pierson et D. Rixen. FETI-DP : A dual-primal unified FETI method - part i : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 : 1523–1544, 2001.

**[Farhat et al. 1996]**

C. Farhat, K. Pierson et M. Lesoinne. A simple and unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with lagrange multipliers : Applications to the design of new feti coarse problems. Technical Report CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, CU, 1996.

**[Farhat et Roux 1991]**

C. Farhat et F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 : 1205–1227, 1991.

**[Fedorenko 1964]**

R.P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4 : 227–235, 1964.

**[Feyel 2003]**

F. Feyel. A multilevel finite element method ( $FE^2$ ) to describe the response of



highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3233–3244, 2003.

**[Feyel et Chaboche 2000]**

F. Feyel et J.-L. Chaboche.  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 : 309–330, 2000.

**[Fleming et al. 1997]**

M. Fleming, Y.A. Chu, B. Moran et T. Belytschko. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 : 1483–1504, 1997.

**[Forest et Sab 1998]**

S. Forest et K. Sab. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25(4) : 449–454, 1998.

**[Gettu et al. 1990]**

R. Gettu, Z.P. Bažant et M.E. Karr. Fracture properties and brittleness of high-strength concrete. *ACI Materials Journal*, 87(6) : 608–618, 1990.

**[Ghosh et al. 1995]**

S. Ghosh, K. Lee et S. Moorthy. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and voronoï cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1) : 27–62, 1995.

**[Glowinski et Le Tallec 1990]**

R. Glowinski et P. Le Tallec. Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method. Dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 224–231. Philadelphia, SIAM, 1990.

**[Goldstein et Salganik 1974]**

R. Goldstein et R. Salganik. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, 10 : 507–523, 1974.

**[Gosselet 2003]**

P. Gosselet. *Méthodes de décomposition de domaine et méthodes d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.

**[Gosselet et Rey 2002]**

P. Gosselet et C. Rey. On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. Dans *Domain decomposition methods in science and engineering*, pages 419–426, 2002.

**[Guidault et al. 2003]**

P.-A. Guidault, O. Allix et L. Champaney. Analyse locale-globale multiéchelle des structures : une approche micro-macro pour le suivi de fissures avec enrichissement local. Rapports d'avancement T0+6 et T0+12, Dassault Aviation, juin et décembre 2003.

**[Guidault et al. 2005a]**

P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et C. Cornuault. Tâche 2 : Méthodes émergentes - utilisation de la méthode des éléments finis étendus (xfem) permettant la prise en compte des accidents structuraux locaux sans maillage fin. Rapport d'avancement T0+30, Dassault Aviation, juin 2005.

**[Guidault et al. 2004a]**

P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et J.-P. Navarro. A micro-macro approach for crack propagation. (soumis pour publication dans *Computers and Structures*), 2004.

**[Guidault et al. 2004b]**

P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et J.-P. Navarro. A micro-macro approach for crack propagation with local enrichment. Dans *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology*. Lisbon, Portugal, 2004.

**[Guidault et al. 2004c]**

P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et J.-P. Navarro. Tâche 2 : Méthodes émergentes - utilisation de la méthode des éléments finis étendus (xfem) permettant la prise en compte des accidents structuraux locaux sans maillage fin. Rapports d'avancement T0+18 et T0+24, Dassault Aviation, juin et décembre 2004.

**[Guidault et al. 2005b]**

P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney et J.-P. Navarro. Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local. Dans Lavoisier, éditeur, *Actes du Septième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, volume 1, pages 51–56. Hermès Science, 2005.

**[Hashin 1962]**

Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME Journal for Applied Mechanics*, 29 : 143–150, 1962.

**[Hill 1965]**

R. Hill. A self-consistent mechanics of composites materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 : 213–222, 1965.

**[Hirai et al. 1985]**

I. Hirai, Y. Uchiyama, Y. Mizuta et W.D. Pilkey. An exact zooming method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1 : 61–69, 1985.

**[Hirai et al. 1984]**

I. Hirai, B.P. Wang et W.D. Pilkey. An efficient zooming method for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 : 1671–1683, 1984.

**[Hocine 1998]**

K. Hocine. *Approche déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structure aéronautique à l'aide de la méthode des équations intégrales duales*. Thèse de doctorat, UTC, 1998.

**[Hughes 1995]**

T.J.R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 : 387–401, 1995.

**[Jirásek et Belytschko 2002]**

M. Jirásek et T. Belytschko. Computational resolution of strong discontinuities. Dans *WCCM V Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna, 2002.

**[Karihaloo et Xiao 2001]**

B.L. Karihaloo et Q.Z. Xiao. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 68 : 1609–1630, 2001.

**[Kim 2002]**

H.-G. Kim. Interface element method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 3165–3194, 2002.

**[Kouznetsova et al. 2002]**

V. Kouznetsova, M.G.D. Geers et W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 : 1235–1260, 2002.

**[Laborde et al. 2004]**

P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard et M. Salaün. High order extended finite ele-

ment method for cracked domains. (soumis pour publication dans *International Journal for Numerical Methods in Engineering*), 2004.

**[Ladevèze et Dureisseix 2000]**

P. Ladevèze et D. Dureisseix. A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1 : 18–28, 2000.

**[Ladevèze et al. 2001]**

P. Ladevèze, O. Loiseau et D. Dureisseix. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2) : 121–138, 2001.

**[Ladevèze et Nouy 2002]**

P. Ladevèze et A. Nouy. A multiscale computational method with time and space homogenization. *C. R. Mécanique*, 330 : 1–7, 2002.

**[Ladevèze et Nouy 2003]**

P. Ladevèze et A. Nouy. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3061–3087, 2003.

**[Ladevèze et al. 2002]**

P. Ladevèze, A. Nouy et O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 : 4869–4891, 2002.

**[Ladevèze et Simmonds 1998]**

P. Ladevèze et J. Simmonds. New concepts for linear beam theory with arbitrary geometry and loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(3) : 377–402, 1998.

**[Ladevèze 1999]**

P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.

**[Ladevèze et Dureisseix 1999]**

P. Ladevèze et D. Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327 : 1327–1244, 1999.

**[Leblond 1989]**

J. Leblond. Crack paths in plane situation - i. general form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, 25 : 1311–1325, 1989.

**[Lecuyer et al. 1987]**

F. Lecuyer, D. Engrand et H. Dumontet. Comparaison de méthodes de couche limite pour l'analyse des effets de bords dans les matériaux composites. *Annales des Composites*, 1 : 51–64, 1987.

**[Loiseau 2001]**

O. Loiseau. *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2001.

**[Mackerle 2004]**

J. Mackerle. Object-oriented programming in FEM and BEM : a bibliography (1990-2003). *Advances in Engineering Software*, 35 : 325–336, 2004.

**[Mackie 2001]**

R.I. Mackie. *Object oriented methods and finite element analysis*. Saxe-Coburg, Edinburgh, UK, 2001.

**[Mandel 1993]**

J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9 : 233–241, 1993.

**[Mao et Sun 1991]**

K.M. Mao et C.T. Sun. A refined global-local finite element analysis method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 : 29–43, 1991.

**[Melenk et Babuška 1996]**

J.M. Melenk et I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 : 289–314, 1996.

**[Moës 1999]**

N. Moës. *The xFem code : a C++ tool for research in finite elements*. Northwestern University, 1999. Technical Report.

**[Moës et Belytschko 2002]**

N. Moës et T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 : 813–833, 2002.

**[Moës et al. 2003]**

N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud et J.-F. Remacle. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 : 3163–3177, 2003.

**[Moës et al. 1999]**

N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 : 131–150, 1999.

**[Moës et al. 2002a]**

N. Moës, A. Gravouil et T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - part i : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 : 2549–2568, 2002.

**[Moës et al. 2002b]**

N. Moës, A. Gravouil et T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - part ii : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 : 2569–2586, 2002.

**[Mori et Tanaka 1973]**

T. Mori et K. Tanaka. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 : 571–574, 1973.

**[Nineb et al. 2005]**

S. Nineb, P. Alart et D. Dureisseix. Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité. Dans Lavoisier, éditeur, *Actes du Septième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, volume 1, pages 81–86. Hermès Science, 2005.

**[Nouy 2003]**

A. Nouy. *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en temps et en espace pour le calcul de structures fortement hétérogènes*. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2003.

**[Oden et al. 1999]**

J.T. Oden, K. Vemaganti et N. Moës. Hierarchical modelling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 : 2–25, 1999.

**[Oden et Zohdi 1997]**

J.T. Oden et T.I. Zohdi. Analysis and adaptative modelling of highly heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 : 367–392, 1997.

**[Oliver 2000]**

J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37 : 7207–7229, 2000.

**[Oliver *et al.* 2002]**

J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido et E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 : 113–136, 2002.

**[Oliver *et al.* 2003]**

J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido et E. Samaniego. On the strong discontinuity approach in finite deformation settings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 : 1051–1082, 2003.

**[Osher et Sethian 1988]**

S. Osher et J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1) : 12–49, 1988.

**[Park et Felippa 2000]**

K.C. Park et C.A. Felippa. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 : 395–418, 2000.

**[Petit 1994]**

C. Petit. Généralisation et application des lois de mécanique de la rupture à l'étude de structures et matériaux fissurés. 1994. Habilitation à diriger des recherches soutenue à l'Université de Limoges.

**[Pian 1964]**

T.H.H. Pian. Derivation of elements stiffness matrices by assumed stress distribution. *American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Journal*, 2 : 1333–1336, 1964.

**[Quiroz 1993]**

L. Quiroz. *Connexion des maillages hétérogènes dans la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 1993.

**[Remmers *et al.* 2003]**

J.J.C. Remmers, R. De Borst et A. Needleman. A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 31 : 69–77, 2003.

**[Renard 1990]**

J. Renard. Modélisation de la dégradation d'une pièce composite par une simulation numérique à deux échelles. *La Recherche Aérospatiale*, 1 : 57–66, 1990.

**[Rixen et Farhat 1999]**

D. Rixen et C. Farhat. A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 : 489–516, 1999.

**[Rixen et al. 1998]**

D. Rixen, C. Farhat et M. Géradin. A two-step hybrid method for the static and dynamic analysis of substructure problems with conforming and non-conforming interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154 : 229–264, 1998.

**[Saad 2000]**

Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS, 2000.

**[Sanchez-Palencia 1974]**

E. Sanchez-Palencia. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12 : 231–251, 1974.

**[Sanchez-Palencia 1980]**

E. Sanchez-Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. Dans *Lecture Note in Physics*, volume 127. Springer Verlag, 1980.

**[Sassi 1993]**

T. Sassi. *Méthodes de décomposition de domaine pour la résolution de problème d'élasticité non-linéaire avec maillages incompatibles*. Thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 1993.

**[Sethian 1999]**

J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

**[Shih et Asaro 1988]**

C.F. Shih et R.J. Asaro. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces : Part i - small scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, 55 : 299–316, 1988.

**[Sih 1973]**

G. Sih. Energy-density concept in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 5 : 1037–1040, 1973.

**[Simo et Rifai 1990]**

J. Simo et M. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 : 1595–1638, 1990.



**[Sluis et al. 1999]**

O. Van Der Sluis, P.J.G. Schreurs et H.E.H. Meijer. Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. *Mechanics of Materials*, 31 : 743–759, 1999.

**[Sluis et al. 1998]**

O. Van Der Sluis, P.H.J. Vosbeek, P.J.G. Schreurs et H.E.H. Meijer. Homogenization of heterogeneous polymers. *International Journal of Solids and Structures*, 36 : 3193–3214, 1998.

**[Smit et al. 1998]**

R.J.M. Smit, W.A.M. Brekelmans et H.E.H. Meijer. Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155 : 181–192, 1998.

**[Southwell 1935]**

R.V. Southwell. Stress calculation in frameworks by the method of systematic relaxation of constraints. Dans *Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section A*, volume 151, pages 56–95. Philadelphia, SIAM, 1935.

**[Stern et al. 1976]**

M. Stern, E.B. Becker et R.S. Dunham. A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, 12(3) : 359–368, 1976.

**[Stolarska et al. 2001]**

M. Stolarska, D.L. Chopp, N. Moës et T. Belytschko. Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(8) : 943–960, 2001.

**[Strouboulis et al. 2000]**

T. Strouboulis, I. Babuška et K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181 : 43–69, 2000.

**[Strouboulis et al. 2001]**

T. Strouboulis, K. Copps et I. Babuška. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 4081–4193, 2001.

**[Sukumar et al. 2001]**

N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës et T. Belytschko. Modeling holes and inclu-

sions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 : 6183–6200, 2001.

**[Sukumar et al. 2000]**

N. Sukumar, N. Moës, B. Moran et T. Belytschko. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11) : 1549–1570, 2000.

**[Tong et al. 1973]**

P. Tong, T.H.H. Pian et S.L. Lasry. A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7 : 297–308, 1973.

**[Tvergaard 1990]**

V. Tvergaard. Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica*, 38(2) : 185–194, 1990.

**[Violeau 2003]**

D. Violeau. Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation. Mémoire du DEA TACS, LMT-Cachan, juin 2003.

**[Whitcomb 1991]**

J.D. Whitcomb. Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40 : 1027–1031, 1991.

**[Xiao et Karihaloo 2003]**

Q.Z. Xiao et B.L. Karihaloo. Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 26 : 719–729, 2003.

**[Yau et al. 1980]**

J. Yau, S. Wang et H. Corten. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47 : 335–341, 1980.

**[Zhu et al. 1997]**

H.T. Zhu, H.M. Zhib et E.C. Aifantis. Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mechanica*, 121 : 165–176, 1997.

**[Zienkiewicz et al. 1983]**

O.C. Zienkiewicz, S.R. De, J.P. Cago et D.W. Kelly. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers and Structures*, 16(1–4) : 53–65, 1983.

**[Zimmermann *et al.* 1992]**

T. Zimmermann, Y. Dubois-Pèlerin et P. Bomme. Object-oriented finite element programming : i. Governing principles. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(2) : 291–303, 1992.

**[Zohdi *et al.* 1996]**

T.I. Zohdi, J.T. Oden et G.J. Rodin. Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138 : 273–298, 1996.

## A

# Propriétés des opérateurs homogénéisés

## 1 Rappels

Le problème micro sur une sous-structure  $\Omega_E$  s'énonce de la façon suivante :

**Problème 13** Trouver  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{E,ad}$  qui vérifient :

$$\forall (\sigma^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} h^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega_E} (h^- \widehat{\underline{F}}_E + \widehat{\underline{W}}_E + \widetilde{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{F}^* d\Gamma$$

où  $h^- = 1/k^-$ .

Les opérateurs homogénéisés suivants ont été définis :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\underline{F}}_{E,d}^M \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\underline{W}}_{E,d}^M \quad (\text{A.2})$$

où  $\widetilde{\underline{W}}_E^M \in \mathcal{W}_{E,h}^M$ ,  $\widehat{\underline{F}}_{E,d}^M$  et  $\widehat{\underline{W}}_{E,d}^M$  ne dépendent que de  $\underline{f}_{-d|\Omega_E}$  et de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ . On rappelle également que, connaissant le multiplicateur de Lagrange  $\widetilde{\underline{W}}_E^M$ , il est alors possible de résoudre le problème micro sur  $\Omega_E$  et de déterminer  $\mathbf{s}_E = (\varepsilon_E, \underline{W}_E, \sigma_E, \underline{F}_E)$  connaissant  $\widehat{\mathbf{s}}_E$ . Il existe ainsi un opérateur de localisation  $\mathbf{L}_E^s$  de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathbf{S}_E$ , tel que :

$$\mathbf{s}_E = \mathbf{L}_E^s(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \widehat{\mathbf{s}}_{E,d}$$

où  $\widehat{\mathbf{s}}_{E,d}$  dépend de  $\widehat{\mathbf{s}}_E$  et de  $\underline{f}_{-d|\Omega_E}$

## 2 Propriétés des opérateurs homogénéisés

À l'étape linéaire, la distribution  $\underline{F}_E^M$  sur la frontière  $\partial\Omega_E$  est en équilibre avec le chargement  $\underline{f}_{d|\Omega_E}$ . Elle appartient à l'espace :

$$\overline{\mathcal{F}}_{E,ad}^M = \left\{ \underline{F}_E^M \in \mathcal{F}_E^M \mid \forall \underline{\alpha}_E \in \mathcal{R}_E, \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{\alpha}_E d\Gamma = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{\alpha}_E d\Omega \right\}$$

où  $\mathcal{R}_E = \{ \underline{\alpha}_E \in \mathcal{U}_E \mid \varepsilon(\underline{\alpha}_E) = 0 \}$  représente l'espace des modes rigides infinitésimaux de  $\Omega_E$ . On désignera par  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$  l'espace correspondant pour des conditions homogènes.

□ **Preuve** : La solution du problème micro vérifie nécessairement :

$$\forall \underline{\alpha}_E \in \mathcal{R}_E, \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{\alpha}_E d\Gamma = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{\alpha}_E d\Omega$$

D'après la définition des espaces macro, on a  $\mathcal{R}_E^W \subset \mathcal{W}_E^M$ . La relation de découplage des travaux micro et macro (2.3) permet d'écrire :

$$\forall \underline{\alpha}_E \in \mathcal{R}_E, \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{\alpha}_E d\Gamma = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{\alpha}_E d\Gamma$$

Ce qui termine la preuve. □

**Proposition 4** . L'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  :

- a son image dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ ,
- n'est pas défini et son noyau est  $\mathcal{R}_E^W$ , l'espace des traces des déplacements de  $\mathcal{R}_E$  sur le bord  $\partial\Omega_E$ ,
- réalise une bijection de l'espace quotient  $\overline{\mathcal{W}}_E^M = \mathcal{W}_E^M / \mathcal{R}_E^W$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ ,
- est positif vis à vis de la forme bilinéaire travail sur la frontière  $\partial\Omega_E$ .

□ **Preuve** : Soit  $\mathbf{s}_E = \mathbf{L}_E^s(\widetilde{\mathcal{W}}_E^M)$ . On a donc  $\mathbf{s}_E \in \mathbf{S}_{E,ad,0}$  qui vérifie la direction de recherche :

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_E, \int_{\partial\Omega_E} (h^- \underline{F}_E + \underline{W}_E - \widetilde{\mathcal{W}}_E^M) \cdot \underline{F}^* d\Gamma = 0 \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{s}_E$  est solution de la formulation variationnelle suivante : trouver  $(\sigma_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{F}_{E,h,ad}$  qui vérifient :

$$\forall (\sigma^*, \underline{F}^*) \in \mathbf{F}_{E,ad,0}, \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\sigma_E \mathbf{K}^{-1} \sigma^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} h^- \underline{F}_E \cdot \underline{F}^* d\Gamma = \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\mathcal{W}}_E^M \cdot \underline{F}^* d\Gamma$$

En injectant  $\mathbf{s}_E$  comme champ virtuel de cette formulation et compte tenu de la relation de découplage (2.3), on a :

$$\int_{\partial\Omega_E} \left( \widetilde{W}_E^M \right) \cdot \underline{F}_E d\Gamma = \int_{\partial\Omega_E} \left( \widetilde{W}_E^M \right) \cdot \mathbf{L}_E^F \left( \widetilde{W}_E^M \right) d\Gamma$$

Les opérateurs  $\mathbf{K}$  et  $h^-$  étant définis positifs, on en déduit que  $\mathbf{L}_E^F$  est positif. De plus, si  $\mathbf{L}_E^F \left( \widetilde{W}_E^M \right) = 0$ , alors  $\sigma_E = \underline{F}_E = 0$ . En utilisant la relation de comportement  $\sigma_E = \mathbf{K}\varepsilon_E$  on obtient  $\varepsilon_E = 0$ , ce qui implique que  $\underline{W}_E \in \mathcal{R}_E^W$ . La direction de recherche (A.3) donne  $\underline{W}_E = \widetilde{W}_E^M$  et par conséquent  $\widetilde{W}_E^M \in \mathcal{R}_E^W$ . On a alors  $\text{Ker}(\mathbf{L}_E^F) = \mathcal{R}_E^W$ .  $\mathbf{L}_E^F$  définissant une injection de  $\overline{\mathcal{W}}_E^M$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ , espaces de même dimension finie, il réalise donc une bijection de  $\overline{\mathcal{W}}_E^M$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ .  $\square$

**Proposition 5** *L'opérateur  $\mathbf{L}_E^W$  réalise une bijection de  $\mathcal{W}_E^M$  dans  $\mathcal{W}_E^M$ . Sa restriction à  $\mathcal{R}_E^W$  est l'opérateur identité sur  $\mathcal{R}_E^W$ .*

$\square$  **Preuve** : La démonstration est similaire à celle de la proposition 6 mais en prenant la formulation variationnelle en déplacement du problème micro (voir le problème 7).  $\square$

### 3 Opérateur homogénéisé $\mathbf{L}_E^F$ pour une sous-structure fissurée

Dans le cas d'une sous-structure  $\Omega_E$  séparée en deux parties  $\Omega_{E_1}$  et  $\Omega_{E_2}$  (Figure A.1) par une fissure libre d'effort, les propriétés de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  sont similaires à quelques détails près. On précise simplement quelques notations :

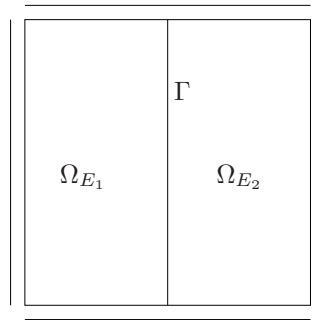


Figure A.1: Sous-structure  $\Omega_E$  séparée en deux parties  $\Omega_{E_1}$  et  $\Omega_{E_2}$  et entourée de quatre interfaces

$$\mathcal{R}_E = \{(\underline{\alpha}_{E_1}, \underline{\alpha}_{E_2}) \in \mathcal{U}_{E_1} \times \mathcal{U}_{E_2} \mid \varepsilon(\underline{\alpha}_{E_1}) = 0, \varepsilon(\underline{\alpha}_{E_2}) = 0, \underline{\alpha}_{E_1} = \underline{\alpha}_{E_2} \text{ sur } \Gamma\}$$

Cet espace correspond au même que celui présenté dans le paragraphe précédent. C'est l'espace des mouvements de corps rigides infinitésimaux de  $\Omega_{E_1}$  et  $\Omega_{E_2}$  continus sur  $\Gamma$ . On note aussi :

$$\tilde{\mathcal{R}}_E = \{(\underline{\alpha}_{E_1}, \underline{\alpha}_{E_2}) \in \mathcal{U}_{E_1} \times \mathcal{U}_{E_2} \mid \varepsilon(\underline{\alpha}_{E_1}) = 0, \varepsilon(\underline{\alpha}_{E_2}) = 0\}$$

l'espace des mouvements de corps rigides infinitésimaux de  $\Omega_{E_1}$  et  $\Omega_{E_2}$ .  $\mathcal{R}_E^W$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W$  désignent respectivement les espaces des traces des fonctions de  $\mathcal{R}_E$  et de  $\tilde{\mathcal{R}}_E$  sur  $\partial\Omega_E$ . Les définitions de  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad}^M$  et de  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$  tiennent toujours moyennant la nouvelle définition de  $\mathcal{R}_E$ . La proposition 6 devient :

**Proposition 6** . *Pour une sous-structure  $\Omega_E$  séparée en deux, l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  :*

- a son image dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ ,
- n'est pas défini et son noyau est  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W \cap \mathcal{W}_E^M$ ,
- réalise une bijection de l'espace quotient  $\overline{\mathcal{W}}_E^M = \mathcal{W}_E^M / \tilde{\mathcal{R}}_E^W \cap \mathcal{W}_E^M$  dans  $\overline{\mathcal{F}}_{E,ad,0}^M$ ,
- est positif vis à vis de la forme bilinéaire travail sur la frontière  $\partial\Omega_E$ .

□ **Preuve** : La démonstration est similaire à celle de la proposition 6 mais le noyau est réduit, cette fois-ci, à  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W \cap \mathcal{W}_E^M$ . □

Dans le cas, où une base macro linéaire ou cubique est choisie pour les quatre interfaces, le noyau de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W \cap \mathcal{W}_E^M$ , est réduit à  $\mathcal{R}_E^W$ . La figure A.2 illustre, en 2D, les trois modes de corps rigides correspondants. Dans le cas, où une base macro discontinue est choisie pour les deux interfaces traversées par la fissure, le noyau de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W \cap \mathcal{W}_E^M$ , est réduit à  $\tilde{\mathcal{R}}_E^W$  ( $\tilde{\mathcal{R}}_E^W \subset \mathcal{W}_E^M$ ). La figure A.3 illustre, en 2D, les six modes de corps rigides correspondants.

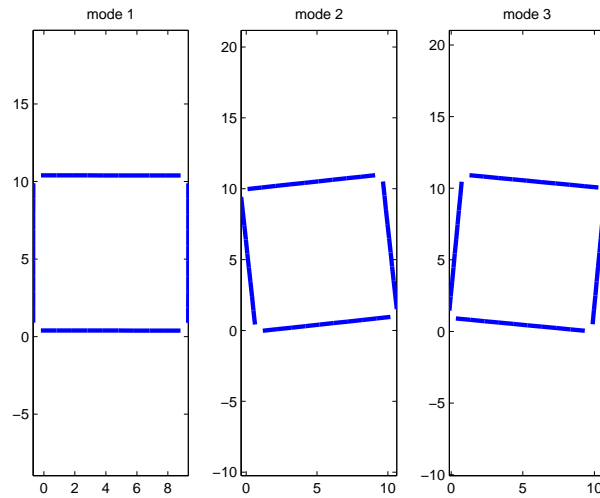


Figure A.2: Pour une base macro continue (linéaire ou cubique par interface), le noyau de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  est réduit aux mouvements de corps rigide (3 modes en 2D) de la sous-structure non fissurée équivalente.

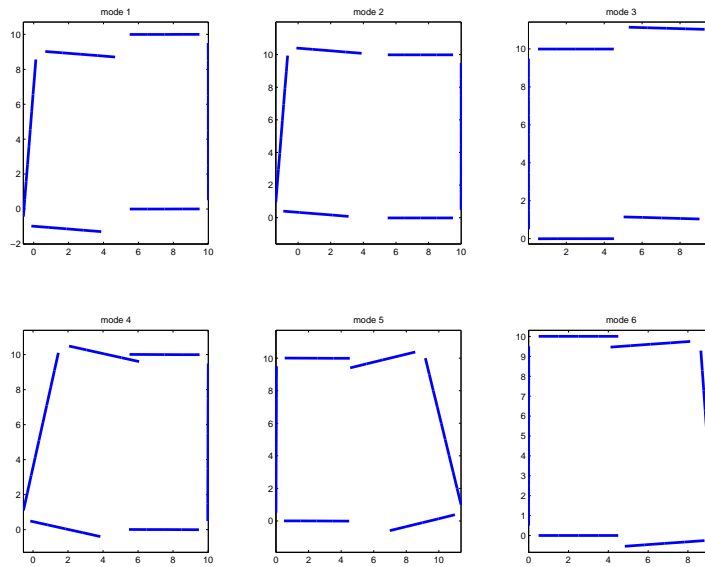


Figure A.3: Pour une base macro discontinue, le noyau de l'opérateur  $\mathbf{L}_E^F$  est réduit aux mouvements de corps rigide (6 modes en 2D) des deux « morceaux »  $\Omega_{E_1}$  et  $\Omega_{E_2}$  de la sous-structure  $\Omega_E$ .





---

## Extraction des facteurs d'intensité de contrainte

### 1 Calcul des FIC - un bref état de l'art

La détermination de la direction de propagation conduit en général à déterminer les facteurs d'intensité de contrainte (voir le problème de référence en fissuration de fatigue décrit au début de la partie II). Pour ce faire, on distingue les approches locales, des approches globales. Les approches locales se basent sur l'exploitation de la forme des champs de contraintes (approche statique) ou de déplacement (approche cinématique) en pointe de fissure. La qualité des résultats dépend énormément de la qualité du maillage en pointe de fissure. Ces méthodes conduisent souvent à des maillages très fins et/ou à l'utilisation d'éléments finis spéciaux à nœuds au quart pour approximer le mieux possible la partie singulière de la solution en pointe de fissure.

Les approches globales ou énergétiques passent en général par le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$ . Celui-ci peut être déterminé par des méthodes de perturbation de maillage, ce qui nécessite plusieurs calculs : le calcul au pas courant et le calcul simulant une avancée de fissure. Une autre méthode consiste à calculer  $G$  par l'intermédiaire de l'intégrale de Rice  $J$ . En effet dans le cas d'une fissure libre d'effort (Figure B.1), on a :

$$G = J = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \varepsilon) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - \sigma \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl \quad (\text{B.1})$$

L'utilisation de la formule d'Irwin pour un problème plan de fissuration s'écrit :

$$G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*}$$

où  $E^*$  est défini en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  par  $E^* = E$  en contrainte plane et  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  en déformation plane.  $K_I, K_{II}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte courants. Une méthode utilisant des champs auxiliaires ou virtuels, qui sont souvent les solutions asymptotiques en mode I et mode II, permet alors d'extraire les facteurs d'intensité de contrainte. Pour plus de détails sur ces approches, on pourra se référer à [Petit 1994].

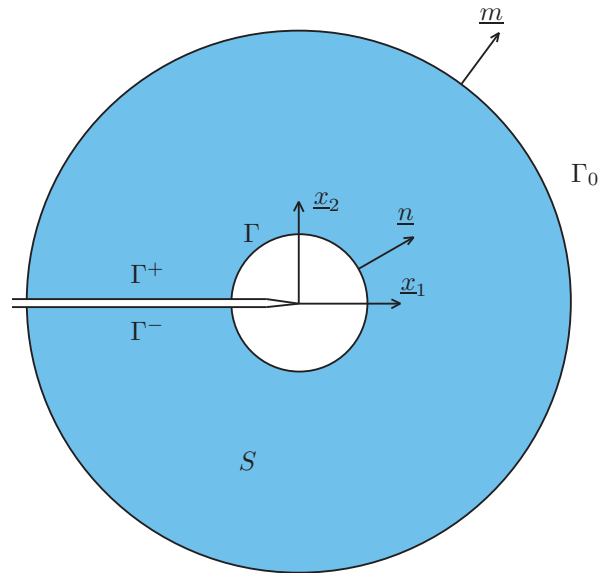


Figure B.1: Fissure libre d'effort. Le domaine  $S$  est délimité par  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ . La normale unitaire extérieure à  $S$ ,  $\underline{m}$ , est telle que  $\underline{m} = \underline{n}$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et  $\underline{m} = -\underline{n}$  sur  $\Gamma$

## 2 Extraction des FIC par intégrales d'interaction

La technique d'extraction des facteurs d'intensité de contrainte que nous utilisons, fait intervenir des intégrales dites d'interaction [Shih et Asaro 1988] ou plus précisément leur forme volumique.

Considérons deux états en fond de fissure : l'état réel noté (1) et l'état auxiliaire noté (2) correspondant aux champs asymptotiques en fond de fissure pour le mode pur I ou II. Pour la somme des états (1) et (2) :

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \text{Tr} \left( (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) \right) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - (\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}) \frac{\partial (\underline{u}^{(1)} + \underline{u}^{(2)})}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl$$

ou encore :  $J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)}$

$$\text{avec : } I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left( \text{Tr}(\sigma^{(1)} \varepsilon^{(2)}) \underline{n} \cdot \underline{x}_1 - \sigma^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} \cdot \underline{n} - \sigma^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} \cdot \underline{n} \right) dl \quad (\text{B.2})$$

L'intégrale  $I^{(1,2)}$  est appelée intégrale d'interaction entre les états (1) et (2). L'écriture de  $J$  pour la somme des états (1) et (2) en déformation plane s'écrit :

$$J^{(1+2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E^*} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E^*} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)})$$

Si l'on choisit successivement pour l'état (2), le mode I pur ( $K_I^{(2)} = 1$  et  $K_{II}^{(2)} = 0$ ) puis le mode II pur ( $K_I^{(2)} = 0$  et  $K_{II}^{(2)} = 1$ ), les facteurs d'intensité de contrainte recherchés  $K_I^{(1)}$  et  $K_{II}^{(1)}$  sont alors obtenus par les relations suivantes :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode I})} \quad \text{et} \quad K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1, \text{mode II})}$$

L'intégrale de contour (B.2),  $I^{(1,2)}$ , est réécrite sous la forme d'une intégrale de domaine plus appropriée pour les calculs éléments finis. L'intégrand de (B.2) est multiplié par une fonction régulière  $q(\underline{M})$  de valeur unitaire sur le domaine  $S$  (Figure B.1) et de valeur nulle sur et en dehors du contour  $\Gamma_0$ . Dans le cas où la fissure est libre d'effort ( $\sigma \underline{m} = 0$  sur  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ ), l'intégrale d'interaction s'écrit :

$$I^{(1,2)} = \int_{\partial S} \left( \sigma^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} - \text{Tr}(\sigma^{(1)} \varepsilon^{(2)}) \underline{x}_1 \right) \cdot q \underline{m} dS \quad (\text{B.3})$$

où  $\partial S = \Gamma \cup \Gamma_0 \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  et  $\underline{m}$  est la normale unitaire extérieure à  $S$ . En utilisant, le théorème de flux-divergence pour le contour  $\partial S$  et en passant à la limite pour  $\Gamma$  se réduisant à la pointe de fissure, l'équation (B.3) devient :

$$I^{(1,2)} = \int_S \left( \sigma^{(1)} \frac{\partial \underline{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma^{(2)} \frac{\partial \underline{u}^{(1)}}{\partial x_1} - \text{Tr}(\sigma^{(1)} \varepsilon^{(2)}) \underline{x}_1 \right) \cdot \frac{\partial q}{\partial \underline{x}} dS \quad (\text{B.4})$$

Pour le calcul de cette intégrale, le domaine  $S$  est constitué de l'ensemble des éléments finis situés dans un rayon  $r_d$  autour de la pointe de fissure. En pratique,  $r_d$  est choisi comme le double de la racine carrée de l'aire de l'élément touché par la pointe de fissure. La figure B.2 illustre un domaine  $S$  composé d'éléments finis et la fonction  $q$  associée. Cette fonction vaut 1 pour les nœuds intérieurs à  $S$  et 0 pour les nœuds situés sur la frontière de  $S$ . Cette fonction  $q$  est interpolée sur les fonctions de forme éléments finis utilisées pour l'interpolation de la géométrie. On remarquera que cette définition de  $q$  a pour conséquence que seuls les éléments du bord de  $S$ , pour lesquels le gradient de  $q$  n'est pas nul, apportent une contribution

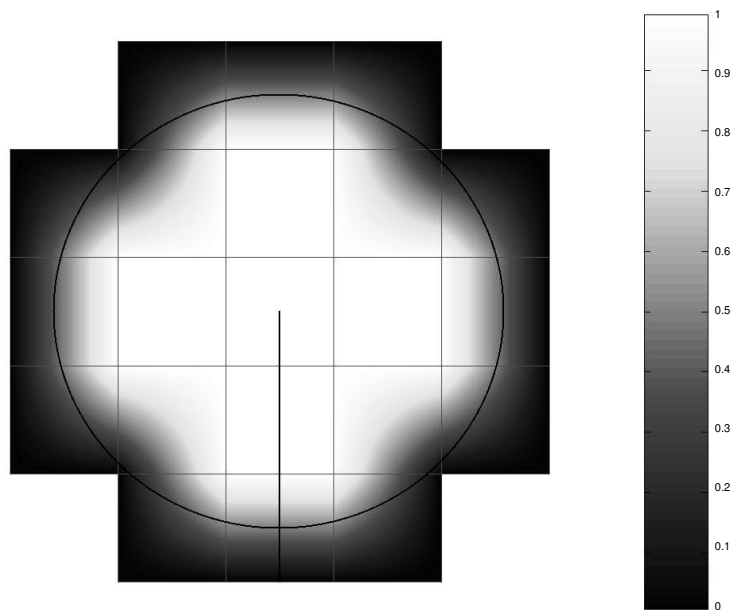


Figure B.2: Les éléments sélectionnés pour l'extraction des facteurs d'intensité de contrainte et la valeur de la fonction  $q$  définie sur ces éléments. La fissure modélisée par la X-FEM n'est ici pas conforme au maillage.

au calcul de l'intégrale d'interaction  $I^{(1,2)}$ . C'est cette méthode d'extraction qui est utilisée pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans la méthode X-FEM et ce depuis les travaux de Belytschko et Black [Belytschko et Black 1999].

Concernant les techniques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte par des intégrales de contour ou de domaine, on pourra aussi se référer aux travaux de Destuynder [Destuynder *et al.* 1983] pour la méthode  $G_\theta$  ainsi qu'à ceux de Stern [Stern *et al.* 1976].

---

# Évolution d'une fissure - mise à jour des *Level Sets*

## 1 Mise à jour des *Level Sets*

Les fonctions de niveau sont calculées et stockées aux nœuds et interpolées entre les nœuds par les fonctions de base éléments finis classiques. Une mise à jour de ces fonctions de niveau est effectuée à chaque pas de propagation de la fissure. Évidemment, ces mises à jour ne sont faites que pour une bande d'éléments contenant la fissure. Le stockage des fonctions de niveau se fait uniquement pour cette bande. En fait, à chaque pas de propagation, la mise à jour des fonctions de niveau ne concerne que les éléments avoisinant la pointe de fissure dans un domaine (un cercle en 2D) défini par l'avancée de fissure  $a$  (Figure C.1).

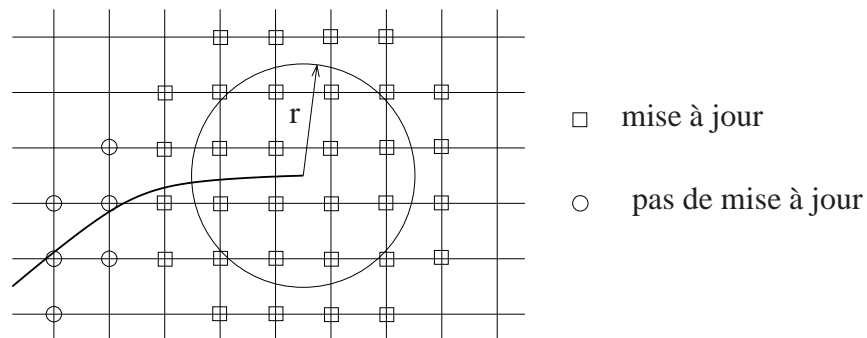


Figure C.1: Mise à jour des fonctions de niveau. Seuls les nœuds dont le support est intercepté par le cercle de rayon  $r$  ( $r \geq a$ ) bénéficient d'une mise à jour pour le pas de propagation représenté (nœuds entourés d'un carré).

Au pas initial, on étend « artificiellement » la fissure à travers tout le domaine

pour calculer les valeurs initiales de  $\varphi$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  (Figure C.2). Ce calcul initial des fonctions de niveau peut se faire sur tous les nœuds du maillage ou sur une zone restreinte prédéfinie incluant la fissure initiale.

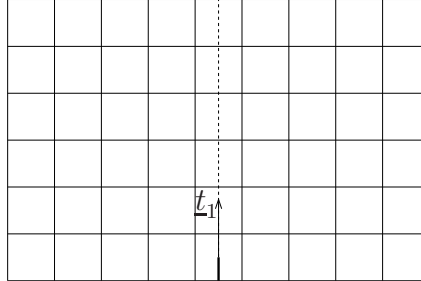


Figure C.2: Calcul initial des fonctions de niveau. La fissure est étendue « artificiellement » à travers tout le domaine suivant la direction définie par le vecteur tangent en pointe de fissure  $\underline{t}_1$ .

La propagation de fissure passe par la mise à jour des fonctions de niveau, (*Level Sets*),  $\varphi$  et  $\psi_i$  et la reconstruction de  $\psi$  (voir équation (5.5)). Les évolutions de  $\varphi$  et  $\psi_i$  sont déterminées par l'angle de branchement de la fissure  $\theta_c$  et par la vitesse de propagation  $\underline{F} = (F_x, F_y)$ . La norme  $\|\underline{F}\|$  dépend de la loi de propagation. Pour l'algorithme 4, décrivant la mise à jour des fonctions de niveau pour une propagation d'une fissure en 2D, on suppose que  $\theta_c$  et  $\underline{F}$  sont connus au pas  $j$ . Cet algorithme a été décrit dans [Stolarska *et al.* 2001]. Pour la mise à jour des fonctions de niveau en 3D, on pourra se référer à [Moës *et al.* 2002b].

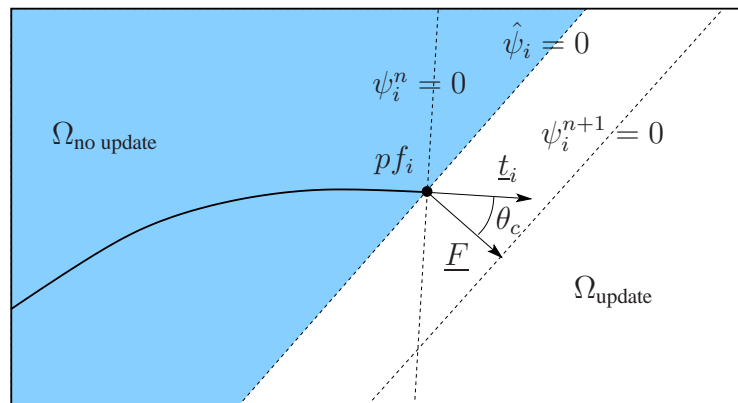


Figure C.3: Mise à jour des fonctions de niveau.  $\Omega_{no\ update}$  correspond à la zone grisée.

**Algorithme 4** Mise à jour des *Level Sets* en 2D (Figure C.3)**Données au pas courant :**  $\theta_c$ ,  $\underline{F}$  et  $\Delta t$  connus**boucle**  $j = 1$  to  $n$  **faire**

1. Rotation de  $\psi_i^{(j)}$  pour que  $\hat{\psi}_i$  soit orthogonal à  $\underline{F} = \|\underline{F}\|(\cos \theta_c \underline{x} + \sin \theta_c \underline{y})$

$$\hat{\psi}_i = (x - x_{pfi}) \cdot \frac{F_x}{\|\underline{F}\|} + (y - y_{pfi}) \cdot \frac{F_y}{\|\underline{F}\|} \quad (\text{C.1})$$

$\hat{\psi}_i$  doit être calculé exactement avec cette relation et non par rotation géométrique de  $\psi_i^{(j)}$ .

2. Mise à jour de  $\varphi$  uniquement là où  $\hat{\psi}_i > 0$  qui définit  $\Omega_{\text{update}}$ .  $\hat{\psi}_i \leq 0$  définit  $\Omega_{\text{no update}}$ .

$$\begin{aligned} \varphi^{(j+1)} &= \varphi^{(j)} \quad \text{sur} \quad \Omega_{\text{no update}} \\ \varphi^{(j+1)} &= \pm \left| (\underline{x} - \underline{x}_{pfi}) \wedge \frac{\underline{F}}{\|\underline{F}\|} \right| \quad \text{d'après (5.6)} \\ \varphi^{(j+1)} &= \pm \left| (x - x_{pfi}) \cdot \frac{F_y}{\|\underline{F}\|} - (y - y_{pfi}) \cdot \frac{F_x}{\|\underline{F}\|} \right| \quad \text{sur} \quad \Omega_{\text{update}} \end{aligned}$$

Le signe de  $\varphi^{(j+1)}$  est défini de manière à être consistant avec le signe de  $\varphi^{(j)}$  dans  $\Omega_{\text{no update}}$ .

3. Calcul de  $\psi_i^{(j+1)}$ . D'après (5.4) écrite pour  $\psi$  :

$$\psi_i^{(j+1)} = \hat{\psi}_i - \Delta t \|\underline{F}\|$$

puisque par construction (voir (C.1)),  $\|\nabla \psi\| = 1$ .

4. Calcul de  $\psi^{(j+1)} = \max_i \psi_i^{(j+1)}$
5. Stockage de  $\varphi^{(j+1)}$ ,  $\psi_i^{(j+1)}$  et  $\psi^{(j+1)}$  au niveau des nœuds.

**fin boucle**



## 2 Évaluation des fonctions d'enrichissement

La connaissance de  $\varphi$ ,  $\psi_i$  et  $\psi$  permet alors de déterminer facilement la valeur des fonctions d'enrichissement  $H(\underline{x})$  et  $\{F_j(\underline{x})\}$ . On a alors :

$$H(\underline{x}, t) = H^*(\varphi(\underline{x}, t)) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \varphi(\underline{x}, t) > 0, \\ -1 & \text{pour } \varphi(\underline{x}, t) < 0. \end{cases}$$

$$\{F_j(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}$$

avec pour la pointe de fissure  $pf_i$  :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\varphi^2(\underline{x}, t) + \psi_i^2(\underline{x}, t)} \\ \theta &= \arctan \frac{\varphi(\underline{x}, t)}{\psi_i(\underline{x}, t)} \end{aligned}$$

Notons que, comme le montre la figure C.4, les calculs de  $r$  et de  $\theta$  en fonction de  $\varphi$  et  $\psi_i$  ne sont pas rigoureusement exacts pour les points tels que  $\psi(\underline{x}, t) < 0$ . Les fonctions d'enrichissement  $\{F_j(r, \theta)\}$  ne contiennent donc pas exactement la base de fonctions définissant la solution asymptotique en pointe de fissure. D'après [Moës *et al.* 2002a], il semblerait, néanmoins, qu'il soit plus important que la discontinuité soit correctement placée que d'inclure exactement la solution asymptotique en pointe de fissure. De plus, pour un trajet de fissure relativement régulier, on est moins sensible à ce problème.

La sélection des nœuds à enrichir ainsi que leur enrichissement peut alors se faire sur des tests très simples portant sur les valeurs de  $\varphi$  et  $\psi$  en ces nœuds. Pour chaque élément situé dans la zone de mise à jour, on effectue les tests suivants :

- Si  $\psi < 0$  et  $\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0$  alors enrichissement  $H$  des nœuds,
- Si  $\psi_{max}\psi_{min} \leq 0$  et  $\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0$  alors enrichissement  $\{F_j(r, \theta)\}$  des nœuds.

où  $\varphi_{max}$  et  $\psi_{max}$  (resp.  $\varphi_{min}$  et  $\psi_{min}$ ) représentent les valeurs nodales maximales (resp. minimales) de  $\varphi$  et  $\psi$  sur l'élément. Puisque l'on boucle sur les éléments pour faire ces tests, il faut remarquer que cela conduit à enrichir certains nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure à la fois par la fonction  $H$  et par les fonctions  $\{F_j(r, \theta)\}$  (Figure C.5). Il faut donc veiller à ce problème qui peut être très facilement corrigé en exécutant le test sur l'enrichissement  $H$  puis celui sur l'enrichissement en  $\{F_j(r, \theta)\}$  de manière à « écraser » l'éventuel enrichissement précédent d'un nœud par la fonction  $H$ .

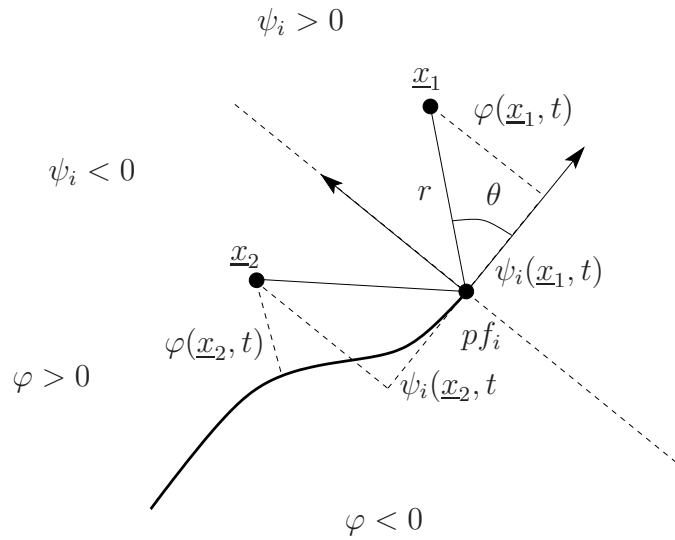


Figure C.4: Calcul de  $r$  et de  $\theta$  en fonction des *Level Sets*  $\varphi$  et  $\psi_i$ . Pour le point  $\underline{x}_2$  où  $\psi(\underline{x}_1, t) < 0$ , le calcul de  $r$  et de  $\theta$  n'est qu'approximatif.

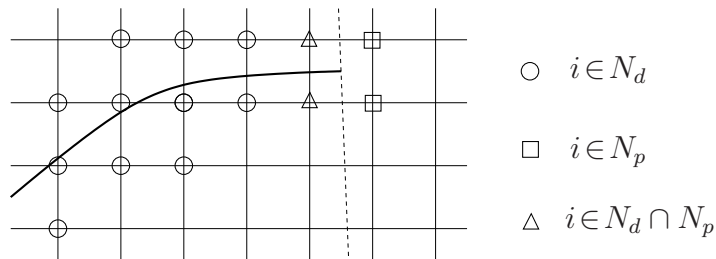


Figure C.5: Problème d'enrichissement sur les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure. Les nœuds entourés d'un triangle sont enrichis à la fois par la fonction  $H$  et par les fonctions  $\{F_j(r, \theta)\}$ .

### 3 Bilan et remarques

Au bilan, l'utilisation de la X-FEM avec la technique des *Level Sets* peut se résumer de la manière suivante :

1. Mise à jour de  $\varphi$  et  $\psi_i$  et reconstruction de  $\psi$  au voisinage de la pointe de fissure,
2. Sélection des nœuds à enrichir au voisinage de la pointe de fissure. Pour chaque élément de cette zone, on exécute les tests suivants :
  - Si  $\psi < 0$  et  $\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0$  alors enrichissement  $H$  des nœuds,
  - Si  $\psi_{max}\psi_{min} \leq 0$  et  $\varphi_{max}\varphi_{min} \leq 0$  alors enrichissement  $\{F_j(r, \theta)\}$  des nœuds,
3. Calcul des fonctions d'enrichissement  $H$  et  $\{F_j(r, \theta)\}$ ,
4. Calcul X-FEM,
5. Post-traitement. Détermination de la direction de propagation et de l'avancée de fissure.

*Remarque 1* : Les fonctions de niveau étant interpolées sur les fonctions de forme éléments finis du maillage, la géométrie de la fissure est nécessairement régulière dans l'élément. Par exemple, en 2D pour des éléments P1 ou Q1, la fissure ne peut être que linéaire dans l'élément. On ne peut donc pas représenter de brisure de la fissure dans l'élément. Ceci est cependant possible si l'on choisit une représentation de la fissure par une succession de segments de droite [Belytschko et Black 1999, Dolbow et al. 2000a].

*Remarque 2* : L'utilisation des *Level Sets* permet de simplifier le critère de sélection (5.3) des nœuds à enrichir par la fonction  $H$ . En effet, si le signe de  $\varphi$  change sur le bord d'un élément, alors on recherche, à partir des valeurs nodales de  $\varphi$ , le point  $\underline{x}_c$  où la fissure coupe ce bord. Ainsi sur le bord d'un élément (Figure C.6), une interpolation linéaire de la géométrie donne :

$$\underline{x}_c = (1 - r_c)\underline{x}_a + r_c\underline{x}_b \quad \text{avec} \quad r_c \in [0, 1]$$

Le point  $\underline{x}_c$  est tel que :

$$r_c = \frac{\varphi(\underline{x}_a)}{\varphi(\underline{x}_a) - \varphi(\underline{x}_b)}$$

pour une interpolation linéaire de la fonction de niveau  $\varphi$ . Si  $r_c < r_{tol}$  alors on change la valeur de  $\varphi(\underline{x}_a)$  en  $\varphi(\underline{x}_a) = 0$ . Si  $1 - r_c < r_{tol}$  alors on change la valeur de  $\varphi(\underline{x}_b)$  en  $\varphi(\underline{x}_b) = 0$ . En pratique, on prend  $r_{tol} = 10^{-2}$ . On remarquera que la valeur du critère surfacique (5.3) est telle que  $\rho_{tol} = r_{tol}^2$ .

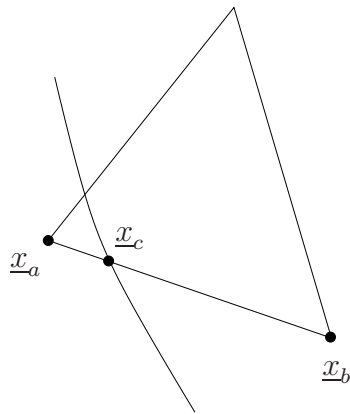


Figure C.6: Fissure coupant le bord d'un élément triangulaire en  $\underline{x}_c$