



**HAL**  
open science

# Etude des structures longitudinales dans la couche limite laminaire et de leur lien avec la transition

Damien Biau

► **To cite this version:**

Damien Biau. Etude des structures longitudinales dans la couche limite laminaire et de leur lien avec la transition. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, 2006. Français. NNT : . tel-00160727

**HAL Id: tel-00160727**

**<https://theses.hal.science/tel-00160727>**

Submitted on 6 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée en vue de l'obtention du titre de docteur de  
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

école doctorale :  
TRANSFERTS, DYNAMIQUE DES FLUIDES, ENERGÉTIQUE ET PROCÉDÉS

spécialité :  
DYNAMIQUE DES FLUIDES

par

Damien BIAU

Etude des structures longitudinales dans la couche limite  
laminaire et de leur lien avec la transition

Soutenue le 27 octobre 2006, devant le jury :

MM.	T.	ALZIARY DE ROQUEFORT	Président
	D.	ARNAL	Directeur de thèse
	A.	BERGEON	Invité
	A.	BOTTARO	Directeur de thèse
	U.	EHRENSTEIN	Rapporteur
	J-M.	GUIMBARD	
	P.	LUCHINI	Rapporteur



*à mes parents.*



# Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à quelques personnes sans lesquelles le travail qui suit n'aurait sans doute pas été possible.

Je voudrais en premier lieu adresser mes remerciements à Alessandro Bottaro et Daniel Arnal pour l'efficacité de leur encadrement : leur soutien sans faille tant au plan scientifique que humain m'a aidé à progresser durant ces trois années. Je les remercie de la confiance qu'ils m'ont témoignée en me proposant ce sujet qui m'a permis de partager leurs connaissances et leur passion.

Je remercie les rapporteurs Paolo Luchini et Uwe Ehrenstein pour leur lecture approfondie de ce manuscrit ainsi que les membres du Jury : Thierry Alziary De Roquefort, Jean-Marie Guimbard et Alain Bergeon d'avoir accepté de participer à la finalisation de ce travail.

Je remercie également toutes les personnes avec lesquelles j'ai partagé ces trois années à l'ONERA.

Merci à Jean Cousteix pour son accueil au sein du département. Je lui suis très reconnaissant de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail, ainsi que de m'avoir confié une mission d'enseignement, ce qui fut pour moi une expérience très enrichissante.

Merci à mon voisin de bureau, Jean-Pierre Archambaud pour son éternelle bonne humeur, à Alain Serraudie pour sa disponibilité et sa gentillesse. Je souhaite vivement remercier toutes les personnes qui m'ont rendu de nombreux services au secrétariat du DMAE, mais aussi toute l'équipe informatique, Pierre Malecki en tête, pour leur accueil toujours chaleureux.

Je remercie les anciens doctorants pour leur amitié. Enfin tous mes voeux de réussite aux futurs docteurs.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1	Historique . . . . .	9
1.2	La transition bypass . . . . .	10
1.3	Bibliographie . . . . .	13
1.4	Objectifs de la thèse . . . . .	23
<b>I</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation et méthodes numériques</b>	<b>27</b>
2.1	Description du problème et mise en équations . . . . .	27
2.2	Le problème de la condition initiale . . . . .	29
2.3	Quelques éléments d'analyse des résultats . . . . .	30
2.4	Algorithme de résolution . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Méthodes spectrales</b>	<b>37</b>
3.1	Principes des méthodes spectrales . . . . .	37
3.2	Fourier . . . . .	41
3.3	Chebyshev . . . . .	43
3.4	Hermite . . . . .	46
<b>II</b>	<b>Du laminaire...</b>	<b>49</b>
<b>4</b>	<b>Description (multi-)modale des perturbations</b>	<b>51</b>
4.1	Théorie des petites perturbations . . . . .	52
4.2	Echelles caractéristiques . . . . .	53
4.3	Analyse asymptotique : ondes de Tollmien-Schlichting . . . . .	56
4.4	Analyse multi-modale : stries longitudinales . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Méthode des perturbations optimales</b>	<b>65</b>
5.1	Problème d'optimisation . . . . .	65
5.2	Application à la couche limite de Blasius . . . . .	68
5.3	Influence des stries sur les quantités intégrales . . . . .	74
5.4	Comparaison avec l'expérience . . . . .	77

<b>6 Réceptivité à un tourbillon longitudinal</b>	<b>83</b>
6.1 Présentation de l'expérience de Boiko . . . . .	84
6.2 Présentation des calculs . . . . .	85
6.3 Comparaison des résultats . . . . .	85
<b>III ...vers le turbulent</b>	<b>91</b>
<b>7 Réceptivité à une turbulence bidimensionnelle</b>	<b>93</b>
7.1 La turbulence bidimensionnelle . . . . .	93
7.2 Influence sur la couche limite . . . . .	97
<b>8 Sur la stabilité d'une strie</b>	<b>101</b>
8.1 Écoulement de base . . . . .	101
8.2 Perturbations linéaires . . . . .	103
8.3 Simulation numérique directe . . . . .	108
<b>9 Critère de transition</b>	<b>113</b>
9.1 Critères empiriques de transition : bibliographie . . . . .	113
9.2 Equation du modèle et critère de transition . . . . .	115
9.3 Influence des stries sur l'écoulement moyen . . . . .	118
9.4 Résultats . . . . .	119
<b>10 Conclusion</b>	<b>125</b>
10.1 Synthèse . . . . .	125
10.2 Perspectives . . . . .	126
<b>A Calcul des perturbations optimales</b>	<b>133</b>
<b>B Autres résultats du critère de transition</b>	<b>137</b>
<b>C Résolution des équations de Navier-Stokes : du 2D au 3D</b>	<b>145</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Historique

Il y a plus de cinq siècles, Léonard de Vinci s'est intéressé aux mouvements des fluides. Il a observé la formation de tourbillons dans un fluide qui s'écoule autour d'un obstacle, phénomène auquel il donna son nom actuel de "turbulence" (*turbolenza*). Fidèle à son habitude, il réalisa d'excellentes descriptions et des dessins d'une grande finesse dont celui d'une cascade s'écoulant dans un bassin (figure de droite).



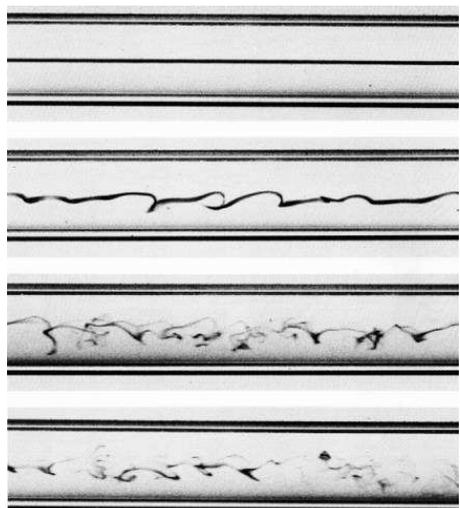
En 1755 Euler décrit avec rigueur l'écoulement d'un fluide parfait. Les équations visqueuses de Navier-Stokes apparaissent pour la première fois dans le cours d'hydrodynamique de Navier en 1822. Cette date marque le début de plus d'un siècle de foisonnement scientifique autour de ces équations.

La fondation Clay a annoncé qu'elle offrirait un million de dollars à celui qui démontrerait l'existence et l'unicité des solutions de ces équations. Actuellement on peut seulement espérer calculer des solutions numériques approchées. C'était un des objectifs de J. Von Neumann lors de la construction d'un des premiers ordinateurs à l'Institut des Etudes Avancées (IAS) de Princeton. Même discrétisé, le problème reste le nombre de degrés de liberté d'un écoulement turbulent qui peuvent être assimilés aux différentes échelles mises en jeu, réparties continûment entre l'échelle géométrique et l'échelle de dissipation visqueuse. En ce sens, on est proche du défi posé par la mécanique statistique à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Mais ces concepts efficaces pour des systèmes proches de l'équilibre, des phénomènes quasi-reversibles, ne sont plus applicables aux systèmes de la dynamique des fluides maintenus hors équilibre.

Dans sa thèse de 1933, Leray s'est intéressé aux équations de Navier-Stokes d'un point de vue mathématique. Il était lui aussi intrigué par la multiplicité des solutions. Il interpréta la turbulence comme la perte de la stabilité et de l'unicité de la solution laminaire des équations de Navier-Stokes à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds, valeur au-delà de laquelle apparaissent plusieurs solutions turbulentes dont le comportement n'est plus descriptible que statistiquement.

En 1883 l'ingénieur irlandais Osborne Reynolds donne une description moderne du phénomène de transition vers la turbulence. A partir d'expériences sur les écoulements

dans des tubes et en observant la structure d'un filet de colorant dans l'écoulement, il a identifié plusieurs régimes illustrés sur la figure suivante.



Pour de faibles vitesses le filet reste rectiligne sans dispersion visible : l'écoulement est laminaire (toutes les parties du fluide se déplacent dans la même direction, comme des lames qui glissent). En augmentant la vitesse, ce filet oscille puis le colorant envahit tout le tube : l'écoulement est devenu turbulent (avec des tourbillons dans lesquels la direction du mouvement change sans cesse). Reynolds a reproduit cette expérience en faisant varier le diamètre du tube ( $d$ ), la vitesse ( $U$ ) ainsi que la viscosité du fluide ( $\nu$ ), propriété du fluide, définie par Newton (1687), qui mesure sa résistance au mouvement. Il a ainsi mis en évidence le nombre caractéristique pour ce type d'écoulement sous la forme d'un paramètre sans dimension qui devint par la suite le nombre de Reynolds

( $Re = Ud/\nu$ ). On peut ainsi reprendre l'analyse précédente sur la transition : si le nombre de Reynolds est petit, l'écoulement sera laminaire, si ce nombre est grand, il sera turbulent. Le problème c'est que l'expérience a montré que la valeur critique du Reynolds n'était pas universelle, la transition est également liée à la nature et à l'intensité des perturbations.

Des recherches captivantes car, au-delà de son profond intérêt fondamental, la turbulence joue un rôle capital dans d'innombrables domaines. Ses effets peuvent être négatifs comme dans le cas de la traînée en aérodynamique, ou bénéfiques au long drive grâce aux alvéoles sur les balles de golf. Si l'on perce un jour le mystère de la turbulence, on pourra améliorer sans commune mesure l'aérodynamisme de toutes sortes de véhicules, prévoir plus tôt certains phénomènes météorologiques, mieux comprendre le fonctionnement des étoiles, modéliser avec plus de précision la circulation du sang, et mille autres choses encore. Pourtant, malgré ces avancées successives, cinq cents ans après les observations de De Vinci, la turbulence résiste toujours à l'analyse des scientifiques. Comme l'a remarqué Richard P. Feynman : "Dans le cas de la turbulence, le problème n'est pas que la théorie explique seulement quelques cas simples : elle n'en explique simplement aucun. Nous n'avons pas de bonne théorie fondamentale du tout pour la turbulence". Le problème de la turbulence, c'est qu'on n'arrive pas à identifier quelle est la bonne question à poser pour comprendre son émergence et son évolution.

## 1.2 La transition bypass

En ce qui concerne le problème de la transition vers la turbulence, une première approche consiste à aborder la stabilité des écoulements. Puisque la solution laminaire est une solution exacte des équations de Navier-Stokes, pourquoi une bifurcation ? Dans la plupart des cas, le comportement initial de ces bifurcations est linéaire (hypothèse des petites perturbations) suivi d'interactions non-linéaires.

Cependant, comme dans le cas de l'expérience de Reynolds, la transition est fortement liée à la nature et à l'intensité des perturbations extérieures. Ce qu'on entend par perturbations extérieures peut être défini de façon vague comme l'ensemble des termes négligés

dans le calcul de la solution laminaire, par exemple les rugosités de parois, les fluctuations de vitesse ou acoustiques etc... La première étape du processus de transition est donc la réceptivité, qui décrit la naissance de l'instabilité. C'est une phase très difficile à modéliser parce qu'elle nécessite la connaissance précise du bruit ambiant et de l'état de surface. Cette instabilité peut croître ou décroître selon les caractéristiques de l'écoulement (le nombre de Reynolds par exemple).

Depuis Reynolds, d'autres expériences classiques sur la transition ont été réalisées. On peut citer entre autres la convection entre deux plaques différentiellement chauffées de Rayleigh-Bénard, le sillage derrière un cylindre, ou encore l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres tournants. Pour la suite on se concentrera sur le cas de la couche limite, c'est-à-dire l'écoulement sur une surface, dans un domaine semi-infini. Ce type d'écoulement pariétal, largement documenté, est fréquemment rencontré dans l'industrie, en aéronautique par exemple.

On distingue deux chemins vers la turbulence selon le niveau des perturbations de l'écoulement, comme on peut le voir sur les photos (1.1).

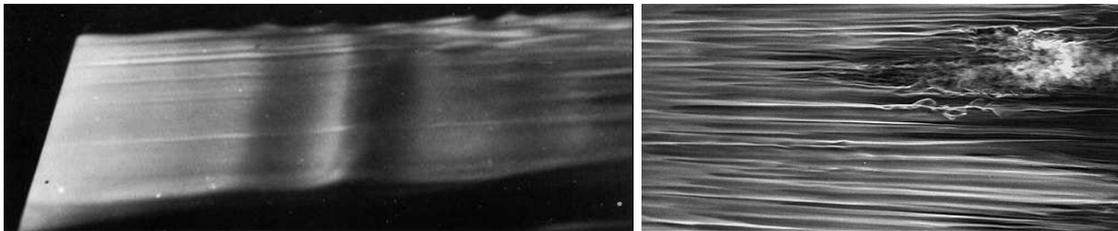


FIG. 1.1 – A gauche : transition classique par instabilité TS pour un taux de turbulence extérieure quasi-négligeable (Werlé, ONERA). A droite : transition bypass pour un taux de turbulence extérieure de 6% (Matsubara et Alfredsson, KTH).

Ces photos représentent des visualisations en coupe horizontale d'une couche limite sur plaque plane, l'écoulement étant de la gauche vers la droite. On s'intéresse ici au début du processus de transition, c'est-à-dire à la zone où des structures commencent à apparaître. Sur la figure de gauche, où les perturbations extérieures sont minimisées, on observe une instabilité qui se développe sous forme d'une onde se propageant selon l'écoulement principal et invariante dans la direction de l'envergure. Sur la figure de droite, où les perturbations extérieures sont imposées par une turbulence de grille en amont, la topologie est complètement différente. On observe des stries de vitesse, quasi-stationnaires et invariantes dans la direction de l'écoulement mais alternées dans la direction de l'envergure. Le premier processus de transition est dit 'classique' alors que le second, par opposition, est dit 'bypass' (Morkovin 1969 [86]).

La transition classique s'explique très bien par la théorie de stabilité linéaire. Cette théorie appliquée aux écoulements parallèles remonte aux travaux de Orr (1907) et Sommerfeld (1908). Les premières solutions pour la couche limite furent calculées par Tollmien (1929) et Schlichting (1933) et leur existence vérifiée expérimentalement par Schubauer et Skramstadt (1947). Ces travaux montrent que la stabilité est déterminée par le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de couche limite et la vitesse extérieure ( $U_e$ ). Quand cette instabilité, ou onde de Tollmien Schlichting (TS), est amplifiée jusqu'à une amplitude de l'ordre de 1% de la vitesse extérieure, l'hypothèse de petites perturbations n'est plus valide et on observe le développement d'une instabilité secondaire. Cette déstabilisation des

ondes TS a été observée pour la première fois dans les expériences de Klebanoff, Tidstrom et Sargent (1962) [72]. Ces auteurs ont remarqué l'apparition de structures, caractérisées par une alternance de 'peaks' et de 'valleys' dans la direction de l'envergure avec le même nombre d'onde que l'onde TS. Ce scénario, appelé de type K (comme Klebanoff), est donc associé à un mode fondamental. Par la suite Kachanov, Kozlov et Levchenko ont observé une instabilité secondaire avec un mode sub-harmonique, de type H d'après Herbert (1983) qui a réalisé l'étude théorique de stabilité secondaire, ou C d'après Craik (1971) [39] pour sa théorie de la triade de modes. Dans les deux cas, les effets non linéaires ne saturent pas l'instabilité comme c'est le cas par exemple pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard où les effets (rouleaux de convection) atténuent la cause (gradient de température vertical). Dans une couche limite bidimensionnelle, au contraire, on a une boucle de rétro-action : les ondes TS génèrent de nouvelles instabilités accélérant ainsi une transition vers un état turbulent comme on commence à le voir sur le haut de la photo de gauche (1.1). Des spots turbulents sont ainsi formés jusqu'à atteindre un écoulement turbulent développé.

Ce premier chemin vers la turbulence initié par une onde exponentiellement croissante est observable uniquement pour de faibles perturbations extérieures (*i.e.* pour des taux de turbulence extérieure  $Tu$  inférieurs à 1%). Pour de plus grandes valeurs, la transition emprunte un chemin différent. Sur la photo de droite (1.1) issue des expériences de Matsubara et Alfredsson [82], on observe l'émergence de structures différentes des ondes TS. De nombreuses expériences sur l'influence de la turbulence extérieure ont été réalisées, une revue est donnée par Kendall [69] (1998). Les premières observations sont attribuées à Taylor (1939), Dryden (1937) et Klebanoff [71] (1971). Ils ont observé des structures tridimensionnelles, allongées dans la direction de l'écoulement, appelées parfois modes<sup>1</sup> de Klebanoff (Kendall 1988). Les premières mesures détaillées ont été réalisées par Arnal et Juillen (1978) [6]. Landahl en 1975 [75] proposa une explication physique appelé effet 'lift up' : les fluctuations de vitesse normale, apportées par la turbulence extérieure, interagissent avec le cisaillement de la couche limite pour donner des fluctuations croissantes de vitesse longitudinale. Ce sont les stries observées sur la photo de droite (1.1). Lorsque ces stries atteignent des amplitudes importantes, de l'ordre de 10% de la vitesse extérieure, elles déclenchent de nouvelles instabilités qui dégénèrent en spots turbulents dans la région d'intermittence. Ces spots diffèrent de ceux décrits par Emmons, leur tête de flèche ne pointe pas vers l'aval. Ils proviennent du haut de la couche limite et sont générés par interaction avec la turbulence extérieure alors que les spots de Emmons sont générés près de la paroi. Une fois formés ces spots diffusent latéralement et croissent longitudinalement. Ils entretiennent ainsi le front de la turbulence développée.

On peut synthétiser ces deux scénarios par un schéma (voir 1.2).

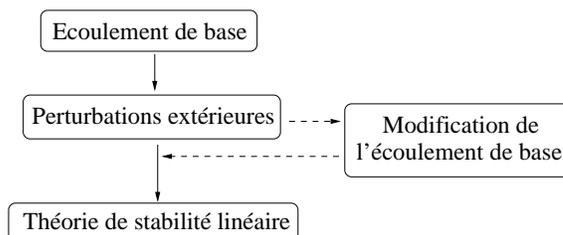


FIG. 1.2 – Schéma de principe de la transition bypass.

<sup>1</sup>Même si ce ne sont pas exactement des modes au sens mathématique.

Si les perturbations extérieures sont faibles la transition est déterminée par l'étude de stabilité linéaire. Sinon ces perturbations génèrent, dans la couche limite, une déviation de l'écoulement de base, sous forme de stries, qui modifie le processus de transition.

## 1.3 Bibliographie

D'autres expériences nous montrent que, pour la plupart des écoulements sur paroi, on observe des nombres de Reynolds de transition bien inférieurs à ceux prédits par une étude de stabilité linéaire classique. Par exemple dans le cas de l'expérience de Reynolds, mentionnée précédemment, la théorie linéaire prévoit que l'écoulement est inconditionnellement stable.

La transition bypass est traitée parfois comme un problème de turbulence, parfois comme un problème de transition. C'est un processus stochastique par nature et il se trouve ainsi dans le domaine de la dynamique des fluides statistique. D'un autre point de vue il fait apparaître une amplification rapide de perturbations, ainsi il peut être abordé du point de vue des instabilités hydrodynamiques. Enfin ce phénomène est provoqué par des perturbations extérieures au système, ce qui en fait un problème de réceptivité.

L'étude bibliographique qui suit concerne des approches théoriques, expérimentales et numériques (DNS) de la transition bypass.

### Approche théorique

Les expériences montrent que les caractéristiques de stabilité d'un écoulement dépendent fortement des conditions initiales et du forçage continu par des perturbations ambiantes. La solution a été cherchée par des approches non-linéaires, le scénario classique étant largement validé pour des cas faiblement bruités comme ceux rencontrés sur les voilures d'avions.

Cependant l'équation pour l'énergie des perturbations montre que ces termes non-linéaires redistribuent l'énergie entre les modes, ce qui implique qu'initialement, il existe certainement un mécanisme linéaire de croissance des perturbations. A ce sujet on pourra lire la discussion entre Waleffe [112] et Henningson [58]. Ce constat amène à l'étude des phénomènes transitoires dans la théorie de stabilité linéaire.

En 1975, Ellingsen et Palm [43] ont montré, avec un modèle non visqueux, qu'une perturbation peut croître linéairement au cours du temps. Landhal en 1975 proposa une explication à partir de l'effet 'lift up' : un tourbillon longitudinal interagit avec le gradient de l'écoulement de base pour donner des stries de hautes et basses vitesses.

En prenant en compte la viscosité Hultgren et Gustavsson ont montré en 1981 que cette croissance algébrique est transitoire puisque suivie d'une décroissance visqueuse. Cependant si les amplitudes atteintes sont trop importantes, les effets non-linéaires peuvent provoquer une transition bypass. On est alors amené à rechercher la perturbation initiale qui maximise le facteur d'amplification de l'énergie des perturbations. Les premières études de perturbations optimales ont été réalisées par Farrell [46] avec une approche modale : les perturbations sont projetées sur la base des fonctions propres des équations de stabilité linéaire. Le comportement asymptotique, amplifié ou amorti, est donné par l'étude modale. Cette limitation au comportement asymptotique pour définir un critère de stabilité est pleinement justifiée pour des opérateurs normaux, c'est-à-dire dont les fonctions propres sont orthogonales, comme c'est le cas pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Cependant, en général, les opérateurs en hydrodynamique ne sont pas normaux (exemple :

Orr-Sommerfeld). Dans ce cas l'énergie totale des perturbations n'est pas égale à la somme des énergies de chaque mode. On a une interférence constructive ou destructive de plusieurs modes. De ce point de vue, les stries peuvent s'interpréter comme le résultat d'un couplage fort entre les modes Orr-Sommerfeld amortis et les modes de Squire (Hultgren et Gustavsson [61]). C'est ainsi qu'on peut observer une étape de croissance algébrique de l'énergie des perturbations. Butler et Farrell [28] ont ajouté que les plus fortes croissances transitoires correspondent à des perturbations tridimensionnelles.

En 1993, Trefethen *et al.* ont publié dans la revue Science [107] un article de synthèse sur les conséquences de la non-normalité d'un opérateur sur les critères de stabilité. En plus de la croissance algébrique, ils ont démontré la forte sensibilité de ces opérateurs décrivant la dynamique des perturbations. Ils ont défini un pseudospectre comme étant la réunion des spectres de l'opérateur soumis à une perturbation de norme inférieure à un certain  $\epsilon$ . Dans le cas d'un opérateur normal, le pseudo-spectre est l'ensemble de tous les points situés à une distance inférieure à  $\epsilon$  du spectre, mais dans le cas d'un opérateur non-normal cet ensemble est beaucoup plus grand. L'étude spatiale de perturbations optimales pour l'écoulement de Blasius parallèle a été réalisée par Tumin et Reshotko [110] en 2001, avec une méthode multi-modale.

La prise en compte du non-parallélisme de la couche limite a nécessité de nouvelles méthodes numériques puisque les équations de stabilité deviennent des équations aux dérivées partielles, dépendant de la coordonnée longitudinale, ce qui pose des problèmes techniques pour le calcul des modes propres. Luchini [78] ou Andersson *et al.* [2] ont alors utilisé une technique d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Les valeurs relativement importantes des nombres de Reynolds de transition, ainsi que la forme quasi-stationnaire des perturbations mises en jeu dans une étude de croissance transitoire ont amené Luchini [77] [78] à modéliser l'évolution des perturbations dans la limite des approximations de Prandtl. L'instabilité se développe donc indépendamment du nombre de Reynolds, en net contraste avec les prévisions classiques sur les modes TS qui font apparaître une valeur critique. Ce type d'adimensionnalisation s'est avéré efficace pour modéliser les phénomènes de croissance transitoire. Goldstein et Wundrow [52] obtiennent des résultats similaires sur l'interaction entre des tourbillons longitudinaux extérieurs et la couche limite par une méthode de développement asymptotiques. Récemment les calculs de perturbations optimales ont été étendus aux régimes non linéaires, toujours dans le cadre des approximations de Prandtl, par Zuccher *et al.* [117] .

Ces travaux décrivent la première étape de la transition du laminaire vers le turbulent. On peut analyser le chemin inverse : comment un écoulement turbulent se laminarise. Cette nouvelle approche consiste à étudier la formation, l'évolution et les interactions de structures cohérentes métastables.

Ces structures sont des solutions non-triviales des équations de Navier-Stokes. Elles peuvent être calculées par une méthode de déformation continue par exemple. Nagata en 1990 suit la branche de solution des tourbillons de Taylor-Couette, en se plaçant dans la limite de courbure infinie des cylindres, pour atteindre un écoulement de Couette plan. Il obtient un état stationnaire d'amplitude finie tridimensionnel, qui apparaît à  $Re = 125$  par une bifurcation sous-critique. Dans le même esprit Clever et Busse ont étudié l'écoulement en canal superposé à une instabilité de Rayleigh-Bénard. Par un passage à la limite, en faisant tendre le nombre de Rayleigh vers zéro, ils obtiennent un état 3D stationnaire pour  $Re \leq 145$ . Une analyse de stabilité linéaire de ces solutions (1997) montre qu'une bifurcation sous-critique de ces solutions conduit à de nouvelles solutions 3D sous la forme de rouleaux oscillants.

Cherhabili et Ehrenstein (1995) [32] sont partis de solutions 2D de l'écoulement de Poiseuille à  $Re = 2200$  et étudient la déstabilisation secondaire. Ils obtiennent des solutions 2D sous forme d'ondes progressives d'amplitudes finies. Lors du passage à la limite de l'écoulement de Couette plan, ces solutions deviennent des ondes stationnaires. L'étude de stabilité de ces solutions faites par les mêmes auteurs en 1997 [33] montre que les perturbations les plus instables sont 3D, périodiques en envergure et localisées dans la direction de l'écoulement, cet état pouvant être assimilé à un point fixe instable d'amplitude finie.

Hamilton, Kim et Waleffe (1995) [57] étudient par DNS l'écoulement de Couette plan dans une boîte de taille minimale pour que la turbulence puisse être soutenue. En réduisant la taille du système, ils observent un processus quasi-cyclique et spatialement organisé de régénération de structures. Ils en déduisent un nombre de Reynolds critique basé sur l'espacement transversal minimum pour le processus d'auto-sustentation des structures (SSP). Waleffe par la suite propose un modèle conceptuel de ce processus en trois phases : formation des stries par des tourbillons longitudinaux, déstabilisation des stries, régénération des tourbillons longitudinaux. C'est le cycle de paroi d'un écoulement turbulent pariétal. Il reste cependant assez vague sur le processus de fermeture du cycle, c'est-à-dire sur la régénération des tourbillons.

La comparaison expérience/théorie de ces structures cohérentes pour l'écoulement dans un tube à été publiée par Hof *et al.* dans la revue Science [60].

### Approche expérimentale

Récemment plusieurs expériences sur l'influence de la turbulence extérieure ont été réalisées, une revue est donnée par Kendall [69] (1998). Les premiers résultats sont attribués à Taylor (1939), Dryden (1937) et Klebanoff [71] (1971) qui ont observé des structures tridimensionnelles allongées dans la direction de l'écoulement.

Arnal et Juillen en 1978 [6], ont réalisé les premières mesures détaillées concernant le développement d'une couche limite laminaire soumise à une turbulence extérieure. Pour le cas sans grille, on observe une transition naturelle, le signal fréquentiel montre des fluctuations sinusoïdales (mode TS) à  $500Hz$  dont le maximum d'amplitude se situe aux environ du quart de la couche limite. Pour les cas avec grille, on observe des fluctuations de vitesse longitudinale  $u_{rms}$  pouvant atteindre plusieurs pour-cent de la vitesse extérieure avant le début de la transition. Ces fortes amplitudes des valeurs  $rms$  contrastent avec les valeurs obtenues dans un cas sans grille puisque des ondes TS avec des amplitudes de l'ordre de 1% déclenchent la transition. Dans les cas avec grille, pour des niveaux de turbulence extérieure importants ( $Tu = 0.1 - 1\%$ ), les fluctuations dominantes dans la couche limite ne sont plus des ondes TS. L'énergie des perturbations dominantes est concentrée dans les basses fréquences et le maximum de fluctuation est situé vers le milieu de la couche limite. Ces expériences ont également montré que le spectre d'énergie dans la couche limite est dominé par de basses fréquences contrairement à l'extérieur où le spectre est caractéristique d'une turbulence de grille. Ce phénomène est le résultat d'une combinaison entre un filtrage des perturbations extérieures ou 'shear sheltering' [63], et l'amplification de stries quasi-stationnaires. Plus la couche limite s'épaissit et plus le filtrage est opérant. Ainsi près du bord d'attaque, une large partie du spectre de la turbulence extérieure se retrouve dans la couche limite, alors que les structures cohérentes émergent plus en aval. De plus les fluctuations de vitesse longitudinales à l'intérieur de la couche limite sont décorrélées de l'extérieur. Le mécanisme de production des stries est donc intrinsèque à la couche

limite indépendamment de la fluctuation de vitesse longitudinale extérieure ( $u'$ ). Les études théoriques indiquent qu'il dépend de la fluctuation normale ( $v'$ ).

Le facteur de forme  $H$  de la couche limite décroît légèrement en présence de stries. On peut en déduire qu'une couche limite perturbée est plus stable vis-à-vis des ondes TS. En effet Arnal et Juillen ont constaté que les ondes TS sont d'autant moins visibles que les stries sont développées. Il est cependant difficile de mesurer des ondes TS de faibles amplitudes dans un écoulement perturbé. En imposant des oscillations par ruban vibrant, Boiko *et al.* [20] ont pu étudier des ondes d'amplitude finie en utilisant une technique de filtrage sur la sélection de phase. Ils ont démontré que les ondes TS peuvent exister et se développer. De plus les effets non linéaires régénèrent des ondes sur toute la gamme de fréquences instables. Il en résulte une augmentation significative du nombre de spots turbulents, ce qui favorise la transition. Cependant en l'absence de forçage harmonique, il semblerait que le rôle des ondes TS dans le processus de transition en présence de stries n'est pas important. De plus en présence de perturbations extérieures la transition peut se produire dans des régions où les ondes TS sont stables, dans le cas d'écoulements accélérés par exemple. C'est pourquoi ce genre de transition a été qualifié de 'bypass' par Morkovin [86].

Bakchinov *et al.* [9] (1995), ont abordé la stabilité d'une couche limite perturbée par des tourbillons longitudinaux. Les tourbillons sont créés directement dans la couche limite par des rugosités arrangées régulièrement en envergure. La transition n'est pas la conséquence directe des structures de sillage, mais par la croissance d'ondes instables situées au dessus des tourbillons stationnaires. Cette situation est analogue à celle rencontrée dans le cas d'instabilités de Görtler ou cross-flow. Les ondes instables croissent linéairement jusqu'à ce que les effets non-linéaires fassent apparaître des harmoniques pour mener à la turbulence selon un scénario modal classique. Même si cette instabilité est observable au travers un processus de réceptivité naturelle, Bakchinov *et al.* [9] ont également étudié les caractéristiques de cette instabilité soumise à un forçage (ruban vibrant). L'instabilité semble être liée au cisaillement transversal. L'amplitude maximale est située à la distance de la paroi où la vitesse moyenne est égale à la vitesse de phase, c'est-à-dire au niveau de la couche critique. Les fréquences observées sont bien au-dessus des fréquences caractéristiques des ondes TS. Cependant le forçage des ondes TS montre que celles-ci s'amplifient plus rapidement en présence de tourbillons par des effets d'interactions non-linéaires. Ils ont ajouté en perspectives qu'il restait à comparer ces analyses au cas d'une couche limite perturbée par une turbulence de grille.

Les stries sont également présentes en excitant localement, de manière impulsionnelle, un écoulement cisailé. Ces structures finissent alors par s'amortir et sont parfois appelées 'puffs'. Westin *et al.* [115] (1998) ont à ce sujet étudié la réponse d'une couche limite à un jet impulsionnel situé en amont du bord d'attaque et au-dessous de la ligne de séparation. Le jet (négatif) génère deux tourbillons contra-rotatifs, leur vitesse inter-tourbillons étant dirigé vers la plaque. Au fur et à mesure que la couche limite s'épaissit, une strie de haute vitesse flanquée de deux stries de basse vitesse se développent et finissent par décroître. La nature impulsionnelle de cette expérience permet de comparer les différentes vitesses de propagation du front et de l'arrière du 'puff'. Les mesures montrent que le front se déplace légèrement plus vite que l'arrière ce qui donne un étirement longitudinal.

Des mesures plus récentes, confirmant les résultats de base évoqués précédemment, ont été réalisées par Matsubara *et al.* (2001) [82]. Ils ont effectué des mesures dans une couche limite soumise à une turbulence de grille pour des taux variant de 1 à 6%. Leur étude très complète est basée sur différentes vitesses et différentes grilles. Leurs moyens de mesures

sont le fil chaud et les visualisations par injection de fumée. Ils retrouvent les caractéristiques classiques des stries mentionnées précédemment. La fumée est un bon traceur pour les stries car elle se comporte comme la quantité de mouvement. Les fluctuations de vitesse normale dirigées vers le haut entraînent la fumée vers le haut, et réciproquement une fluctuation vers le bas amène un air sans fumée près de la paroi. En éclairant par une nappe de lumière, on distingue ainsi des zones claires (stries négatives), et des zones sombres (stries positives). A partir de ces visualisations, ils obtiennent des corrélations inter-stries. La valeur du premier minimum de corrélation, qui peut s'interpréter comme la distance caractéristique entre deux stries, converge en aval vers la valeur  $3\delta_1$ , où  $\delta_1$  désigne l'épaisseur de déplacement. Cette valeur correspond approximativement à l'épaisseur de la couche limite. Avant d'atteindre cette valeur asymptotique, la distance inter-stries dépend de la grille utilisée. Ce résultat est confirmé par des mesures au fil chaud. Il faut ajouter qu'à l'extérieur de la couche limite, la corrélation est strictement décroissante, en accord avec les caractéristiques d'une turbulence de grille. Ainsi les corrélations mesurées dans la couche limite sont bien le résultat d'un mécanisme intrinsèque. Matsubara *et al.* ont également réalisé une analyse spectrale. En convertissant le signal temporel du fil chaud, par la transformée de Taylor ( $t U_\infty \rightarrow x$ ), ils obtiennent que le spectre adimensionné, selon la direction longitudinale,  $E^*(\alpha^*) = E(\alpha)/U_\infty^2 Re_x$ , est constant quel que soit  $x$ . En d'autres termes ils observent des oscillations longitudinales avec un nombre d'onde proportionnel à l'épaisseur de couche limite, malgré le filtrage.

Jonás *et al.* [68] ont évalué expérimentalement l'effet des échelles spatiales de la turbulence extérieure sur la transition bypass. Une turbulence à petite échelle fait transitionner plus tard qu'une turbulence de même intensité avec une échelle plus grande.

Les caractéristiques générales des stries qui se dégagent des expériences sont les suivantes :

- très basses fréquences comparées à celles des ondes TS
- sélection d'échelles transversales
- croissance de l'amplitude des stries en  $\sqrt{x}$
- grandes amplitudes  $\mathcal{O}(10\%U_e)$

Il existe un parallèle avec les instabilités centrifuges (Görtler ou Dean). Ces écoulements font naturellement apparaître des tourbillons et des stries qui correspondent ici à une instabilité modale. Cependant pour les écoulements plans, en l'absence de courbure, l'écoulement n'est plus linéairement instable et devient non-linéairement instable (instabilité d'amplitude finie). Pour plus de détails, se référer Swearingen et Blackwelder [104] sur l'instabilité de Görtler. On peut distinguer les différentes instabilités qui se superposent aux stries selon leurs symétries :

- mode variqueux :  $u, v$  symétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  antisymétrique. Ce mode, situé sur le haut des stries, correspond à des stries très espacées, de grandes longueurs d'onde.
- mode sinueux :  $u, v$  antisymétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  symétrique. Ce mode, situé sur les flancs des stries, correspond à des stries très rapprochées, de faibles longueurs d'onde.

Le mode variqueux est le résultat d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz sur une inflexion du profil dans la direction normale à la paroi. La transition est caractérisée par des structures  $\Lambda$  ou en 'fer à cheval'. La transition par mode sinueux est liée au cisaillement transversal, ce sont des tourbillons quasi-longitudinaux sur les flancs des stries de basse vitesse. Dans une étude de stabilité linéaire de stries induites par une turbulence extérieure, l'instabilité est pilotée par les stries (vitesse longitudinale) et il n'est pas nécessaire

d'inclure les autres composantes de vitesse (vitesses normale et transversale) dans l'état de base.

## Approche numérique

### *Fasel*

Fasel [47] a étudié l'interaction entre les stries et les ondes TS par DNS. Pour modéliser la turbulence extérieure il a utilisé une force de volume concentrée près du bord d'attaque, qui génère des tourbillons longitudinaux de basses fréquences à l'extérieur de la couche limite. Le forçage est choisi comme une somme de modes de Fourier en  $z$  et  $t$ , avec des amplitudes gaussiennes en  $x$  et  $y$ . Les instabilités TS sont générées par soufflage/aspiration à la paroi. L'interaction génère un paquet d'ondes TS tridimensionnel d'amplitude croissante. Pour une certaine amplitude, des instabilités secondaires, par résonance fondamentale, causent la rupture vers un spot turbulent. Cependant l'amplitude des stries croît comme  $x^{0.75}$  en linéaire et  $x^{0.6}$  en non linéaire. Pour Fasel la route vers la turbulence est le résultat d'une résonance fondamentale avec une instabilité décrite par la théorie de Floquet. La transition bypass ne serait d'après lui qu'une transition classique déformée par les variations transverses de l'écoulement de base.

### *KTH*

Andersson *et al.* [3] ont étudié numériquement la déstabilisation des stries dans une couche limite. Les stries sont générées en injectant, en entrée, les tourbillons issus de la théorie linéaire des perturbations optimales. Ces tourbillons sont sinusoïdaux dans la direction transversale. Ensuite Andersson *et al.* ont calculé l'évolution non-linéaire des stries et leurs instabilités par une simulation numérique directe (DNS). En parallèle ils ont étudié la stabilité linéaire basée sur la théorie de Floquet avec une approche temporelle et non visqueuse. Le mode sinueux est excité pour une amplitude de strie de 26% de  $U_e$  alors que le mode variqueux, plus stable dans ce cas, est amplifié à partir de 37% de  $U_e$ . Dans chaque cas le mode le plus amplifié est un mode fondamental, c'est-à-dire qu'il présente la même périodicité que l'écoulement de base.

Andersson *et al.* ont généré les instabilités secondaires dans leurs DNS par un forçage localisé en  $(x, y)$  et oscillant en  $(z, t)$ . Le maximum de l'instabilité se situe sur la ligne critique  $U = 80\%$  de  $U_e$ . Leur premier constat est que les caractéristiques de stabilité de l'écoulement modifié dépendent fortement de la non-linéarité des simulations pour le calcul des stries. Par exemple un profil de strie obtenu par calcul linéaire surestimera l'amplification variqueuse. De plus la déformation non-linéaire modifie la ligne critique et ainsi modifie également l'allure des instabilités. Andersson *et al.* proposent en perspective d'aborder des stries irrégulières dans la direction transversale avec des points de transition localisés. Mais pour aborder rigoureusement ce problème, on en revient toujours à l'étape de réceptivité.

Après l'étude de stabilité linéaire des stries optimales, Brandt et Henningson [26] ont abordé en 2002 l'étude complète de la transition. L'étape de réceptivité n'est pas modélisée, les stries sont imposées comme condition d'entrée et les instabilités sont introduites par une force de volume. Leur coefficient de frottement laminaire est surestimé à cause des stries de grande amplitude. Pour vérifier la convergence numérique de leur écoulement turbulent, ils utilisent une mesure de l'apériodicité temporelle. Sur la fin de la transition les modes bidimensionnel ( $\beta = 0$ , avec  $\beta$  le nombre d'onde transverse) et fondamental ( $\beta_0$ ) décroissent pendant que l'harmonique ( $2\beta_0$ ) émerge. Les auteurs ont cherché à identifier les mécanismes de formation de la vorticité longitudinale ( $\omega_x$ ) qui ferme le cycle de paroi, signature d'une

turbulence auto-entretenu. L'amplitude des stries atteint 19% de  $U_e$  au moment de la transition, soit environ le double de la valeur (moyennée) observée expérimentalement. Les profils de vitesse moyenne présentent un point d'inflexion au niveau de la frontière de la couche limite. Selon Brandt et Henningson, la moyenne temporelle des expériences peut masquer ces pics d'amplitudes. Après la transition les profils moyen et  $rms$  sont en accord avec ceux d'une couche limite turbulente développée. Les structures principales observées ont la forme de tourbillons quasi-longitudinaux situés sur les flancs des stries de basse vitesse. D'après leurs calculs il n'y a pas de continuité entre les stries laminaires et les stries turbulentes. Dans cet article Brandt et Henningson ont utilisé une approche simplifiée en imposant des stries stationnaires symétriques, sans modéliser la réceptivité, ce qui limite les conclusions possibles sur la stabilité des stries.

Dans le dernier article sur la DNS du groupe de KTH, Brandt, Schlatter et Henningson (2004) [27] ont réalisé des simulations en modélisant la turbulence extérieure comme Jacobs et Durbin [64] (nous y reviendrons dans le paragraphe suivant). Ils sont partis du constat que de nombreux paramètres affectent la transition, pas seulement le taux de turbulence, mais aussi ses échelles spatiales, son spectre, et son degré d'isotropie et d'homogénéité. Ils ont étudié les effets de l'échelle de longueur intégrale de la turbulence extérieure ( $l$ ). Quand  $l$  augmente, le taux de turbulence extérieur décroît moins vite et la transition se produit plus tôt. Ceci est en accord avec les expériences de Jonás *et al.* [68]. La turbulence à petite échelle pénètre plus facilement dans la couche limite, en contrepartie elle décroît plus vite à l'extérieur. En d'autres termes les courtes échelles sont efficaces pour un forçage près du bord d'attaque alors que les grandes échelles sont efficaces pour un forçage continu vers l'aval. L'évolution du minimum de corrélation des stries dans la couche limite dépend faiblement des caractéristiques de la turbulence. Les valeurs obtenues sont en accord avec celles de Matsubara et Alfredsson [82] et sont inférieures à celles obtenues par la théorie des perturbations optimales.

Les mécanismes de réceptivité des stries vis-à-vis de perturbations extérieures sont de deux types :

- linéaire : des fluctuations de vitesse normale de basse fréquence diffusent, ou pénètrent, dans la couche limite probablement depuis le bord d'attaque, les stries sont générées selon le scénario 'lift-up' classique.
- non-linéaire : si les perturbations sont situées au-dessus de la couche limite, alors les tourbillons longitudinaux sont créés dans la couche limite via des interactions quadratiques [27]. C'est le scénario de transition oblique : une paire d'ondes obliques génère un tourbillon longitudinal qui donne finalement des stries.

D'après Brandt *et al* [27], le mécanisme linéaire domine nettement quand des perturbations de basse fréquence peuvent impacter directement la couche limite. C'est ce mécanisme qui est observé dans les cas expérimentaux. Comme dans leurs article précédents, ils trouvent à la naissance des spots des instabilités sinueuses ou variqueuses évoluant sous la forme de paquet d'ondes.

Dans leur DNS, Brandt *et al* [27] observent également des oscillations des stries qui peuvent être liées soit à une onde instable, soit induites par des fluctuations extérieures. Ils n'ont pas observé d'ondes TS, mais en l'absence de forçage elles ne peuvent probablement pas se développer assez vite.

Brandt *et al.* [25] se sont intéressés à la possibilité d'instabilité absolue et aux liens possibles entre un mécanisme d'instabilité auto-entretenu et la naissance de spots turbulents. En regardant la réponse impulsionnelle des stries, l'instabilité est sans ambiguïté convective, la vitesse arrière du paquet d'ondes est de 0.7 de  $U_e$ , soit le double d'un paquet

d'ondes TS. La réponse impulsionnelle des stries consiste en un mode instable sinueux et présente des analogies avec les écoulements de type sillages. La nature convective de l'instabilité des stries implique que, dans une transition bypass, les stries se comportent comme un amplificateur de bruit.

#### *Stanford*

Jacobs et Durbin [64] ont également réalisé des DNS. Ils n'ont pas obtenu d'instabilité sinueuse préliminaire sur les stries. Selon leur scénario, les stries de basse vitesse modifient les propriétés de réceptivité aux hautes fréquences. Ainsi la transition serait initiée sur des stries isolées, l'alternance transversale des stries n'est donc pas essentielle dans ce processus.

La première difficulté dans la simulation numérique d'une transition bypass, c'est la génération du bruit ambiant, ici la turbulence extérieure générée par une grille. Jacobs et Durbin ont appliqué une méthode proposée par Grosh et Salven (1978) [53] et utilisée par Jacobs et Durbin [63] pour l'interaction entre des perturbations extérieures et la couche limite. Cette méthode a également été utilisée par Rogallo [95]. La turbulence extérieure se développant au-dessus d'une couche limite est décomposée sur une somme de modes de Fourier en temps et envergure que multiplie le mode de Orr-Sommerfeld correspondant. Seule la partie continue du spectre, correspondant à l'extérieur de la couche limite, est sélectionnée. Loin de la couche limite, un mode continu se comporte comme un mode de Fourier (sinusoïdal). Jacobs et Durbin ont ainsi été les premiers à utiliser le spectre continu pour créer une turbulence extérieure synthétique. Cette approche permet de simuler des écoulements en aval du bord d'attaque pour un gain de calcul évident. L'écoulement est supposé de type plaque plane idéale (Blasius). Les auteurs ont rejeté les modes discrets, arguant qu'ils n'interviennent pas dans la transition, ce n'est vrai que dans le cas de nombres de Reynolds sous-critiques. La dépendance longitudinale est remplacée par une dépendance temporelle selon l'hypothèse de Taylor. Ils ont ainsi forcé en continu la condition d'entrée de leur simulation. La difficulté est maintenant de déterminer le poids de chaque mode. Jacobs et Durbin se sont basés sur des arguments statistiques : en fixant le taux de turbulence extérieure d'une part, en vérifiant son évolution le long de la plaque et enfin, en vérifiant que l'échelle intégrale correspond bien aux mesures.

Jacobs et Durbin [64] présentent leurs résultats en trois axes : moyenné au sens de Reynolds, instantané et spectral en espace-temps, les deux derniers étant inaccessibles par l'expérience. Les paramètres intégraux correspondent bien, excepté le facteur de forme ( $H$ ) qui est sous-estimé. Le début et la fin de la transition sont bien capturés. D'autre part les profils  $rms$  sont très proches de l'expérience, notamment dans la phase non-linéaire. Un point important de leurs simulations est de montrer que, dans la zone laminaire, les mesures par fils chauds croisés donnent un pic de  $v_{rms}$  absent de leurs simulations. Le pic mesuré correspond en fait à une erreur sur l'utilisation de fils chauds croisés (voir Inasawa *et al.* [62]).

Le terme de production, intégré verticalement dans la couche limite, augmente dans la zone laminaire et pré-transitionnelle pour décroître et se stabiliser dans la zone pleinement turbulente. Le rapport production/dissipation est supérieur à un dans la zone transitionnelle et se stabilise autour de un dans la zone turbulente.

Jacobs et Durbin [64] prônent une approche instantanée du processus de transition dont ne peuvent pas rendre compte les profils moyennés mesurés. C'est une des difficultés nombreuses générées par la turbulence extérieure : les fortes variations temporelles. Leur première analyse des champs instantanés concerne la présence de stries de hautes et basses vitesses qui persistent dans la zone intermittente jusqu'au point où la couche limite est turbulente sur toute l'envergure. La corrélation transversale de  $u'$  à mi-hauteur de la

couche limite donne une corrélation à grande échelle où  $R_{uu}$  oscille autour de zéro comme la signature de stries de signes alternés. À noter qu'à l'extérieur de la couche limite l'auto-corrélation décroît de façon monotone. Dans leurs simulations, la transition est originaire de la partie supérieure de la couche limite. Ils ont étudié la répartition transversale des échelles à travers le spectre spatial transverse. Le spectre d'entrée est large, sans sélection particulière, vers l'aval le spectre se concentre rapidement vers les petits nombres d'ondes. Un pic est observé près de  $\beta\delta \approx 1.4$  et  $Re_\theta = 360$ . Ce mode dominant est consistant, en ordre de grandeur, avec le résultat des perturbations optimales. Les simulations semblent indiquer que ce mode est le résultat d'une sélection de la couche limite et n'est pas sensible aux détails du spectre extérieur, pourvu que celui-ci soit suffisamment large bande. Jacobs et Durbin insistent sur le fait que cette distance inter-stries moyenne ne joue pas de rôle dans la transition. Selon eux la transition se produit localement sur un jet arrière isolé et instantané. Les stries proches de la paroi restent stables, du moins dans la zone laminaire. Cependant près de la frontière de la couche limite, les stries deviennent un site réceptif aux courtes échelles de la turbulence extérieure, ce qui initie une instabilité de cisaillement. Cette instabilité croît rapidement, remplissant la couche limite pour donner un spot qui se développe et se fond dans la région de turbulence développée.

À propos du lien qui pourrait exister entre les stries laminares et turbulentes, il semblerait que les premières disparaissent après la transition, elles ne se prolongeraient pas vers les secondes.

Zaki et Jacobs [116] ont fait une analyse simplifiée du processus de transition proposé. Comme pour l'article précédent [64] ils ont utilisé le spectre continu de Orr-Sommerfeld. Partant de l'idée que la formation des stries pouvait s'interpréter comme le résultat d'un couplage fort entre un mode d'Orr-Sommerfeld amorti et un mode de Squire, ces auteurs ont montré qu'en superposant une paire de modes basse fréquence (fortement couplés) et une paire de modes haute fréquence (faiblement couplés), le processus complet de transition est qualitativement simulé. Des modes tridimensionnels de Orr-Sommerfeld forcent l'équation de Squire par résonance (Hultgren et Gustavsson 1981 [61]). Ce forçage peut être caractérisé par un coefficient de couplage, défini comme le produit scalaire entre l'adjoint du mode de Squire et le terme de forçage. Ce coefficient peut s'interpréter comme la mesure de la propension du spectre continu à générer des stries. Pour prendre en compte les effets visqueux dissipatifs, le coefficient est normalisé par le taux de décroissance modale. En injectant deux modes dans des simulations numériques directes, Zaki et Jacobs ont montré qu'il faut combiner un mode fortement couplé avec un mode faiblement couplé pour déclencher la transition. Ce résultat est en faveur de leur scénario sur la transition bypass. Il faut ajouter que c'est une reproduction qualitative du processus de transition. L'amplitude des stries de basse vitesse (backward jets) est très importante, de l'ordre de 40% de  $U_e$ , suffisamment importante pour créer un point d'inflexion sur la frontière de la couche limite. Ainsi le mode haute fréquence faiblement couplé initie une instabilité à courte longueur d'onde de type Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité s'intensifie vers l'aval et dégénère en spot.

### La transition oblique

La transition oblique résulte d'une interaction non-linéaire entre deux ondes obliques, avec un même angle mais de signes opposés. Dans l'espace de Fourier, avec  $\alpha$  le nombre d'onde dirigé selon l'écoulement et  $\beta$  le nombre d'onde transversal, ces ondes sont notées :  $(\alpha, \pm\beta)$ . Les interactions non-linéaires redistribuent l'énergie vers les harmoniques mais

surtout vers un mode stationnaire  $(0, 2\beta)$  qui correspond à une distorsion de l'écoulement de base. Ce mode, par un mécanisme de croissance transitoire, génère des stries de grande amplitude susceptibles de déclencher une transition bypass.

La première étude de transition oblique a été réalisée par Schmid et Henningson pour un écoulement canal de Poiseuille [97]. Ils ont initié une simulation numérique temporelle avec une paire d'ondes obliques d'amplitude finie. Le résultat est une croissance rapide de l'énergie des perturbation suivie d'une transition. La génération de stries par ondes obliques est plus rapide que dans le cas de perturbations optimales stationnaires. Ce fait est lié au forçage important des tourbillons alors qu'ils sont simplement amortis dans le cas des perturbations optimales classiques.

Ce scénario a été appliqué à la couche limite de Blasius en utilisant des équations de stabilité parabolisées (PSE) ou des simulations numériques directes (voir références dans l'article de Berlin *et al.* [12]). La transition oblique se décompose en trois étapes : génération non-linéaire des tourbillons longitudinaux, génération de stries par effet 'lift-up' et déstabilisation de ces stries.

Ce mécanisme a été confirmé par l'expérience dans le cas du canal (Elofsson et Alfredsson) et de la couche limite (Berlin *et al.* [12]). Les ondes obliques sont générées par ruban vibrant ou soufflage/aspiration. Berlin *et al.* [12] ont également présenté des similitudes entre les ondes obliques et la triade de Craik qui modélise l'instabilité secondaire des ondes TS (type H ou K). Avant la turbulence on observe des structures  $\Lambda$  consistant en une paire de tourbillons contra-rotatifs. Berlin *et al.* [12] ajoutent que ces tourbillons ne sont pas liés aux ondes TS mais qu'ils résultent d'une interaction constructive entre la vitesse normale des tourbillons et des ondes obliques.

L'importance des ondes obliques est encore plus flagrante dans le cas des écoulements compressibles. En effet, à partir d'un certain nombre de Mach modéré, le mode le plus instable de la couche limite est oblique (voir références dans Berlin *et al.* [12]).

## Lien avec les écoulements turbulents

Les stries longitudinales sont également un ingrédient essentiel du cycle de proche paroi qui entretient les écoulements turbulents pariétaux. Comme dans le cas laminaire, leur mécanisme de formation est linéaire [70].

On distingue trois zones dans la turbulence pariétale. La plus proche de la paroi ( $y^+ \approx 100$ ) est une fine couche dans laquelle la production turbulente est supérieure à la dissipation et qui exporte une partie de son énergie vers l'intérieur de l'écoulement. Loin de la paroi on a une région où la production est inférieure à la dissipation et la turbulence est partiellement maintenue par l'apport des couches inférieures. Entre les deux on a une région intermédiaire où, par simplification, on dira que la production est égale à la dissipation. Elle agit comme une zone de raccord entre les deux précédentes, en ce sens elle est analogue à la zone inertielle dans la cascade énergétique de Kolmogoroff. Dans cette zone, la vitesse moyenne vérifie la loi logarithmique.

L'analyse des processus intervenant dans la première couche est nécessaire du point de vue de la compréhension de la turbulence et du point de vue pratique puisqu'elle concentre la production turbulente et pilote les transferts pariétaux.

La question qui se pose est de comprendre comment la turbulence de proche paroi est auto-entretenu : comment s'opère le cycle de paroi qui fait intervenir des stries quasi-longitudinales ( $x^+ \approx 1000, z^+, y^+ \approx 100$ ) ?

L'objectif de Jimenez et Pinelli [66] est de comprendre comment les tourbillons longitudinaux sont produits et quel est le rôle de la paroi dans ce processus.

Pour générer des tourbillons ils ont distingué deux mécanismes. Premier mécanisme, les tourbillons sont le résultat d'une instabilité des stries turbulentes. Deuxième mécanisme, c'est l'interaction d'un tourbillon avec la paroi qui génère une couche de vorticité, de signe opposé, qui peut s'enrouler pour former un nouveau tourbillon. Ce nouveau tourbillon peut être éjecté par induction du tourbillon parent, il peut aussi être étiré, amplifié par l'action du cisaillement moyen.

La stratégie de Jimenez et Pirelli [66] est de manipuler les équations, ou la dynamique de l'écoulement, pour isoler les phénomènes et identifier ceux qui sont responsables du cycle de paroi.

Leur conclusion est que le cycle est localisé ( $20 < y^+ < 60$ ) et il est maintenu indépendamment de l'écoulement extérieur. La fermeture du cycle se fait par des instabilités greffées sur les stries. L'autre mécanisme d'interaction tourbillon/paroi, s'il est actif, n'est pas dominant. Si on supprime le mécanisme de formation des stries, l'écoulement est relaminaris .

Schoppa et Hussain [99] ont examiné l'évolution temporelle de petites perturbations superposées à des stries par simulations DNS. Leur principal résultat est que des stries peuvent déclencher la transition alors qu'elles sont asymptotiquement stables. Ils ont relevé que seulement 20% des stries dépassent le seuil pour déclencher des instabilités modales. Dans les autres cas la transition se fait au travers de structures sinueuses algébriquement instables et qui ont la même structure que les instabilités modales. Pour des perturbations algébriques, sinueuses ou variqueuses, le terme moteur dans l'équation de l'énergie est  $-uvU_y - wwU_z$ . La perturbation initiale est localisée sur les régions de fort cisaillement, elle est inclinée vers l'amont à partir de la paroi. La réponse ressemble à l'instabilité modale obtenue pour des stries de plus forte amplitude, elle est également localisée dans les zones cisailées mais elle est inclinée vers l'aval. Ceci va dans le sens d'un scénario de croissances algébriques en cascade proposé par Grossmann (2000) [54]. C'est le pendant du scénario de Hopf-Landau pour les instabilités modales.

Ces analyses se retrouvent certainement dans une classe plus générale d'écoulements cisailés, couche limite, tourbillons etc...

## 1.4 Objectifs de la thèse

### La thèse dans ce cadre général

Actuellement les objectifs du développement des systèmes de propulsion des avions sont axés sur la réduction des côtés (fabrication et exploitation) ainsi que sur la réduction des émissions polluantes et sonores. L'amélioration du rendement des turbomachines est donc un enjeu majeur, c'est pourquoi il est nécessaire de progresser dans la compréhension du phénomène de transition du régime laminaire au régime turbulent pour les écoulements soumis à de fortes perturbations extérieures.

### Plan

Ce mémoire propose une modélisation des stries dans une couche limite laminaire ainsi que leur influence sur la transition. Les équations du modèle sont établies au chapitre 2. La discrétisation spatiale est présentée au chapitre 3. Tous les calculs ont été réalisés avec des

codes développés par l'auteur. Dans le chapitre 4 on s'intéresse aux liens entre la théorie de stabilité linéaire et les stries. Le chapitre 5 présente des calculs de perturbations optimales basés sur les travaux de Luchini [78] et Andersson *et al.* [2]. Au chapitre 6 le modèle est appliqué au cas de l'interaction tourbillon isolé/couche limite. Ensuite au chapitre 7 on impose, comme condition d'entrée, un champ turbulent bidimensionnel artificiel pour analyser la réponse de la couche limite à une excitation complexe. Le chapitre 8 est consacré à l'étude de stabilité linéaire d'une strie isolée. La transition vers la turbulence  $\gamma$  est abordée via une simulation numérique directe. Enfin dans le chapitre 9, on présente un critère semi-empirique adapté à la transition bypass.

Sur l'ensemble, on a cherché à comparer les résultats à différents travaux expérimentaux existants.

Première partie  
Méthodologie



## Chapitre 2

# Modélisation et méthodes numériques

Dans ce chapitre nous revenons sur les hypothèses de couche limite. Ensuite le problème de la condition d'entrée sera explicité.

### 2.1 Description du problème et mise en équations

On considère un écoulement incompressible et uniforme ( $U_\infty$ ) sur une plaque plane sans incidence. Les directions longitudinale, normale et transversale sont notées respectivement  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ; les vitesses correspondantes sont  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Pour de grands nombres de Reynolds, les termes de viscosité dans les équations de quantité de mouvement ne sont pas négligeables dans une zone de faible épaisseur près de la paroi (couche limite) où la vitesse tend rapidement de  $U_\infty$  vers 0. Cette zone de cisaillement s'épaissit par diffusion visqueuse et, suffisamment loin du bord d'attaque, on a la relation suivante liant une épaisseur caractéristique de la couche limite ( $\delta$ ) à la distance au bord d'attaque ( $x$ ) :  $\delta(x) = \sqrt{\nu x / U_e}$ .  $U_e$  étant la vitesse longitudinale à la frontière de la couche limite. Pour le cas de Blasius on a  $U_e = cste = U_\infty$  mais ce n'est pas vrai en général. En faisant intervenir le nombre de Reynolds  $Re_x = U_e x / \nu$ , on a la relation  $\delta = x / \sqrt{Re_x} \Rightarrow \delta \ll x$ . L'intuition géniale de Prandtl en 1904 a été d'utiliser ces deux échelles pour rendre sans dimension les équations de mouvement dans la couche limite. L'équation de continuité impose alors une relation entre la vitesse longitudinale ( $U$ ) et les autres ( $V$ ,  $W$ ) :  $V, W = \mathcal{O}(U_e / \sqrt{Re_x})$ . Enfin on obtient une grandeur caractéristique pour la pression en utilisant le théorème de Bernoulli :  $P = \mathcal{O}(\frac{1}{2} \rho U_e^2 / Re_x)$ .

En appliquant les approximations de Prandtl aux équations de Navier-Stokes, on obtient des équations paraboliques (PNS) dans la direction de l'écoulement. Physiquement deux hypothèses sont introduites dans ce modèle :

- la diffusion longitudinale ( $\partial_{xx}$ ) est négligée devant la diffusion transversale ( $\partial_{yy}$  et  $\partial_{zz}$ ).
- le gradient de pression longitudinal est nul ( $P_x = 0$ ). (Remarque : dans le cas général on a un terme  $P_x^0 = U_e dU_e/dx$ , avec  $P^0 = \mathcal{O}(\frac{1}{2} \rho U_e^2)$  mais ici on se limitera à un écoulement extérieur constant.)

Les différentes échelles sont récapitulées sous forme de tableau 2.1, à titre d'indication on y rappelle les échelles utilisées pour l'étude du mode TS.

Pour les ondes TS, en accord avec l'hypothèse d'écoulement parallèle, on utilise un nombre de Reynolds local  $Re_\delta$  qui joue le rôle d'un paramètre de contrôle. Pour les stries

TAB. 2.1 – Echelles caractéristiques pour la modélisation des ondes TS et des stries.

	$x$	$y, z$	$u$	$v, w$	$p$	$t$
mode TS	$\delta$	$\delta$	$U_e$	$U_e$	$\rho U_e^2$	$\delta/U_e$
stries	$L$	$\delta$	$U_e$	$U_e/\sqrt{Re_L}$	$\rho U_e^2/\sqrt{Re_L}$	$L/U_e$

on utilise un nombre de Reynolds global  $Re_L$  qui n'apparaît plus explicitement dans les équations puisqu'il est contenu dans les échelles. On pourrait argumenter que les équations dépendent implicitement du nombre de Reynolds qui intervient au travers des bornes du domaine de calcul. Alors que l'abscisse  $x$ , sous forme adimensionnée est toujours comprise dans le domaine  $[0, 1]$ , les bornes  $y/\delta$  et  $z/\delta$ , dépendent a priori du nombre de Reynolds, mais comme ces bornes sont rejetées à l'infini, il suffit donc de s'assurer que ces limites sont suffisamment grandes. Ce ne serait pas le cas dans le cas d'un écoulement dans un canal par exemple (*cf* Biau et Bottaro [16]), où l'abscisse adimensionnée  $x$  dépend explicitement du nombre de Reynolds, basé sur la hauteur du canal.

En conséquence de ces hypothèses, les équations de Navier-Stokes paraboliques (PNS) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
U_x + V_y + W_z &= 0 \\
U_t + UU_x + VU_y + WU_z &= U_{yy} + U_{zz} \\
V_t + UV_x + VV_y + WV_z &= -P_y + V_{yy} + V_{zz} \\
W_t + UW_x + VW_y + WW_z &= -P_z + W_{yy} + W_{zz}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ces équations aux dérivées partielles sont associées à des conditions limites sur la vitesse. Pour simplifier le traitement de ces conditions aux limites, on a utilisé une forme perturbative des équations en décomposant l'écoulement sous la forme  $Q_{Blasius} + q$ . On a alors :

- sur la paroi  $y = 0$ ,  $u = v = w = 0$
- à l'infini,  $y \rightarrow \infty$ ,  $u = p = w = 0$
- dans la direction transversale on impose soit des conditions aux limites périodiques soit, pour des perturbations localisées,  $z \rightarrow \pm\infty$ ,  $U = V = W = 0$ .

Il reste à déterminer la condition d'entrée ( $x = x_0$ ), c'est l'objet du paragraphe suivant.

En utilisant les approximations de Prandtl, on obtient un problème aux dérivées partielles parabolique dans la direction longitudinale ( $x$ ). A ce titre ce système d'équations présente quelques similitudes avec les équations de stabilité parabolisées (PSE) introduites par Bertolotti *et al.* (1992) et Herbert (1997) pour prendre en compte les effets non parallèles dans le calcul du mode TS. Les grandeurs supposées indépendantes de  $x$  dans l'hypothèse d'un écoulement parallèle, deviennent faiblement dépendantes de cette variable dans l'approche PSE :

$$q = \tilde{q}(x, y) e^{i \int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi + i\beta z - i\omega t},$$

où  $q$  désigne une des composantes des perturbations :  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ou  $p$ . Le nombre d'onde complexe  $\alpha$  capture la variation rapide du mode, il dépend faiblement de  $x$  dans le sens où sa valeur reste proche de celle calculée avec l'hypothèse parallèle. L'amplitude  $\tilde{q}$  ne contient que la faible variation liée au non parallélisme de l'écoulement. Le problème de la double dépendance en  $x$  est résolu par une condition de normalisation sur les amplitudes. En incluant cette forme dans les équations de Navier-Stokes et en négligeant les termes de l'ordre de  $\mathcal{O}(1/Re_\delta^3)$  et plus, on obtient un système PSE. On peut ajouter que ce système

n'est pas exactement parabolique. Pour obtenir un système parabolique on doit négliger la diffusion longitudinale pour l'amplitude de la vitesse ( $\tilde{u}_{xx} = \tilde{v}_{xx} = \tilde{w}_{xx} = 0$ ) et surtout négliger la dérivée longitudinale pour l'amplitude de la pression ( $\tilde{p}_x = 0$ ) (c.f. discussion entre les équations de Orr-Sommerfeld-Squire paraboliques et elliptiques dans le chapitre 4). Dans ce cas, les schémas d'intégration en  $(x)$  ne sont plus sujets à des instabilités numériques.

On complète ce chapitre sur les grandeurs adimensionnées en donnant l'expression de l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2} \left( u^2 + \frac{1}{Re} (v^2 + w^2) \right)$$

## 2.2 Le problème de la condition initiale

Le modèle obtenu (2.1) est un problème aux conditions initiales dans la direction de l'écoulement, plus exactement seulement deux composantes de vitesse (par exemple  $U$  et  $V$ ) sont nécessaires pour déterminer la condition d'entrée.

Si on impose une condition en aval du bord d'attaque, il n'y a pas de difficulté. Pour obtenir la condition d'entrée à partir d'une perturbation située dans l'écoulement libre, on doit donc décrire les conditions de saut au bord d'attaque de la plaque. La solution a été apportée par Luchini et Bottaro [79] dans leur étude de la réceptivité de l'instabilité de Görtler aux perturbations extérieures. On reprend ici leur développement.

On se place dans le cas d'une couche limite sur une plaque supposée infiniment mince, *i.e.* une couche limite idéale de Blasius. En utilisant les approximations de Prandtl on introduit une singularité au bord d'attaque, où la vitesse normale tend vers l'infini. Les approximations de Prandtl ne sont plus valables sur une petite distance en amont et en aval du bord d'attaque. Dans cette zone le gradient de pression longitudinal n'est plus négligeable. L'idée est de considérer que la couche limite a une épaisseur très faible, ainsi le saut des perturbations peut être décrit par les équations d'Euler linéarisées. Ces équations sont ensuite intégrées sur un volume fluide délimité par deux lignes de courant et deux lignes normales à la paroi, voir figure 2.1.

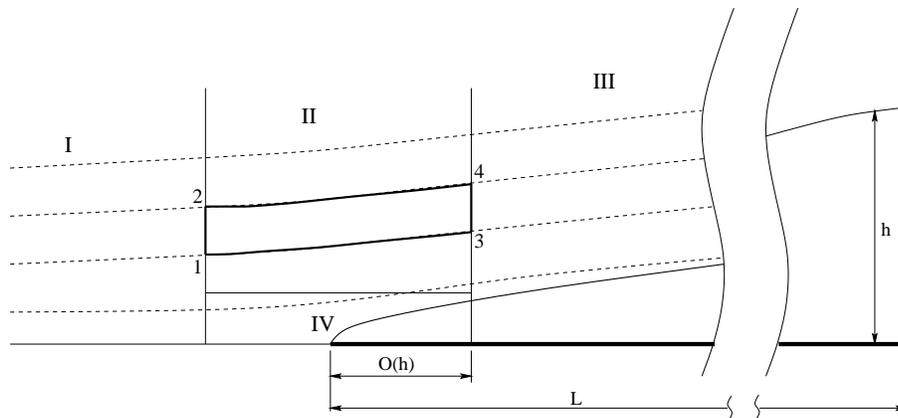


FIG. 2.1 – Structure de la couche limite à proximité du bord d'attaque.

Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} u \, dy &= \int_{y_3}^{y_4} u \, dy, \\ \int_{y_1}^{y_2} 2Uu \, dy + \int_{1234} p_x \, dx dy &= \int_{y_3}^{y_4} 2Uu \, dy, \\ \int_{y_1}^{y_2} Vu + Uv \, dy + \int_{1234} p_y \, dx dy &= \int_{y_3}^{y_4} Vu + Uv \, dy, \\ \int_{y_1}^{y_2} Uw \, dy + \int_{1234} p_z \, dx dy &= \int_{y_3}^{y_4} Uw \, dy. \end{aligned}$$

On distinguera les quantités situées en amont et en aval du bord d'attaque par les indices  $e$  et  $i$  respectivement. On a  $U_e = 1, V_e = 0$ , et  $u_i = 0$  ce qui nous donne, en éliminant la pression, une condition de saut sur la fluctuation de vitesse normale :

$$U\Delta v_i + U_y v_{i,y} = \Delta v_e, \quad (2.2)$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur laplacien, la composante de vitesse transversale est obtenue à l'aide de l'équation de continuité.

Les calculs numériques nous montrent que, si les perturbations extérieure sont nulles au niveau de la paroi ( $y = 0$ ), il n'y a pas de discontinuité pour les perturbations, le terme  $U_y v_{i,y}$  étant négligeable. Cette propriété a permis à Andersson *et al.* [2] de retrouver les résultats de Luchini [78] alors qu'ils n'ont pas traité ce problème de réceptivité. On peut ajouter qu'on s'est placé dans le cas très particulier d'une couche limite sur une plaque plane infiniment mince. Pour tout autre cas plus réaliste le problème de réceptivité est certainement crucial. En effet pour un bord d'attaque épais, sur un profil d'aile par exemple, la courbure des lignes de courant implique un basculement et une amplification de la vorticit   ext  rieure d  crit par Suter [102], Goldstein [51] ou Ustinov [111], [73]. Cependant dans ce cas plus complexe, la m  thode utilis  e par Luchini et Bottaro [79] n'est pas directement transposable.

Pour conclure ce chapitre sur la r  ceptivit  , on notera que les stries peuvent   galement   tre créées    partir de rugosit  s pari  tales [48].

Apr  s avoir d  crit les conditions de saut des perturbations, il reste    mod  liser la perturbation ext  rieure  $v_e$ . Dans le chapitre 5, on traite la condition d'entr  e comme une inconnue d'un probl  me sous contrainte. On cherche la condition initiale qui maximise l'  nergie des stries, par une m  thode de perturbation optimale bas  e sur les travaux de Luchini [78] et Andersson *et al.* [2]. Dans le chapitre 6, la perturbation est impos  e en aval du bord d'attaque sous la forme d'un tourbillon de Batchelor. Enfin au chapitre 7, on s'int  ressera    la r  ceptivit   de la couche limite vis-  -vis d'une turbulence artificielle bidimensionnelle.

## 2.3 Quelques   l  ments d'analyse des r  sultats

### D  finition des quantit  s moyenn  es

Pour le calcul on a utilis   la d  composition  $Q_{Blasius} + q$ , dans le but de simplifier le traitement des conditions aux limites. Exp  rimentalement les donn  es sont d  compos  es sous la forme d'une vitesse moyenne not  e  $\bar{Q}$  et l'  cart type par rapport    cette moyenne  $q_{rms}$ . Il appar  it donc n  cessaire de d  finir une moyenne :

– moyenne temporelle

$$\bar{Q} = \frac{1}{T} \int_T Q(t) dt \quad (2.3)$$

– moyenne spatiale

$$\bar{Q} = \frac{1}{\Delta z} \int_{\Delta z} Q(z) dz \quad (2.4)$$

A chacune de ces définitions, on peut associer l'écart type (ou valeur *rms*) :

$$q_{rms} = \sqrt{(Q - \bar{Q})^2} \quad (2.5)$$

La moyenne temporelle est la plus employée dans les expériences puisque les mesures sont faites à partir de fils chauds qui donnent l'évolution temporelle de la vitesse en un point de l'espace. Dans cette thèse le modèle utilisé pour les stries est stationnaire. Cette propriété est basée sur les résultats expérimentaux qui montrent que les stries sont quasi-stationnaires. Pour exploiter nos résultats on utilise une moyenne spatiale en envergure, *i.e.* dans la direction transversale.

La comparaison des moyennes temporelle et spatiale n'est pas banale et en général ces deux moyennes sont différentes. Le seul résultat théorique dont on dispose fait appel au théorème d'ergodicité développé par George David Birkhoff. Pour la suite, en laissant cette question ouverte, nous admettons que ces deux moyennes sont qualitativement équivalentes.

### Transformée de Fourier

La transformée de Fourier a été développée au *XIX*<sup>e</sup> siècle par le mathématicien français Jean-Baptiste Fourier à propos de ses travaux sur l'équation de propagation de la chaleur. Sa définition sous forme discrète est donnée par :

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N x_j e^{-i \frac{2\pi jk}{N}}; \quad k = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

La fréquence est donnée par  $f = k\Delta f = k/T_{max}$ . Cependant à cause de la propriété de redondance :  $\hat{f}_k = \hat{f}_{N-k}$ , le spectre utile s'étend de 0 à la fréquence de Niquist  $1/(2\Delta t)$ .

On appelle harmonique d'une fréquence  $f$  ses multiples entiers ( $2f, 3f\dots$ ). L'apparition d'harmoniques dans un spectre au cours de son évolution est significative de non-linéarités. Par exemple le produit de deux fonctions circulaires de fréquence  $f_1$  et  $f_2$  fait apparaître les fréquences  $|f_1 + f_2|$  et  $|f_1 - f_2|$ . Ce qui peut s'interpréter comme une redistribution d'énergie des modes 1 et 2 vers les modes  $|f_1 + f_2|$  et  $|f_1 - f_2|$  et leurs harmoniques.

Une fonction est dite périodique si elle est constituée de sa fréquence propre  $f$  et ses harmoniques. Elle est quasi-périodique si elle comporte un nombre fini de fréquences propres plus leurs harmoniques. Enfin une fonction est apériodique (signature d'un écoulement turbulent) si son spectre est continu (nombre infini de fréquences  $f$ ). Pour les processus aléatoires la transformée de Fourier ne donne pas d'indications sinon que le processus est aléatoire...

Enfin il faut préciser qu'en pratique on utilise la transformée de Fourier rapide (FFT). Cet algorithme, mis au point en 1963 par Tukey, Garwin et Sande puis publié en 1965 par Cooley et Tukey, permet de traiter un signal avec un nombre réduit d'opérations pour des nombres de modes en puissance de deux.

## Quantités intégrales

On a défini la longueur caractéristique dans la direction normale  $\delta$  à partir de sa nature diffusive, on peut également utiliser<sup>1</sup> :  
la longueur où la vitesse longitudinale est égale à  $0.99 U_e$  :

$$\delta_{99} = 4.95 \delta$$

ou l'épaisseur de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = 1.7208 \delta,$$

ou l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = 0.6641 \delta.$$

Le rapport  $H = \delta_1/\theta = 2.591$ , est appelé facteur de forme, il est constant pour une couche limite sans gradient de pression et pour les solutions de similitude de Falkner-Skan de façon générale. Il est fortement influencé par la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement, sa baisse brutale indiquant le point de transition. De plus ce facteur diminue pour des écoulements accélérés et réciproquement, ce facteur augmente pour des écoulements décélérés.

On peut définir différents nombres de Reynolds à partir de ces échelles de longueurs :

$$Re_x = \frac{U_e x}{\nu} = Re_\delta^2 = (Re_{\delta_1}/1.7208)^2 = (Re_\theta/0.6641)^2$$

## 2.4 Algorithme de résolution

L'étape de discrétisation consiste à remplacer un problème continu par la résolution d'un système linéaire discret. L'équation différentielle est ainsi remplacée par une expression discrète appelée schéma numérique. L'analyse numérique porte sur l'étude de la consistance, c'est-à-dire la convergence vers la solution exacte (continue) et la stabilité d'un schéma.

Par son caractère parabolique, ce système (2.1) présente des similitudes avec les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. Si on note  $\nabla_{CF} = [0 \ \partial_y \ \partial_z]^T$  l'opérateur nabla limité aux directions transversales (cross-flow) à l'écoulement principal et  $\mathbf{u} = [U, V, W]^T$ , on peut réécrire le système 2.1 comme :

$$U_x + \nabla_{CF} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.7}$$

$$\mathbf{u}_t + U \cdot \mathbf{u}_x + \mathbf{u} \cdot \nabla_{CF} \mathbf{u} = -\nabla_{CF} p + \nabla_{CF}^2 \mathbf{u} \tag{2.8}$$

On va exploiter cette analogie pour la résolution numérique : on doit résoudre un problème de Burgers en  $(x, t)$  et un problème de Navier-Stokes bidimensionnel en  $(y, z)$ .

---

<sup>1</sup>les valeurs numériques correspondent à la couche limite idéale de Blasius

## Equation de Burgers

Pour intégrer le terme d'advection en  $(x, t)$  un schéma à l'ordre un retardé présente les avantages de simplicité et de stabilité.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n}{\Delta t} + U_{j+1}^n \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) \quad (2.9)$$

On intègre d'abord en temps puis on saute à l'abscisse suivante. Ceci est cohérent avec le principe des équations de Navier-Stokes parabolisées. On initialise le calcul avec une certaine condition d'entrée, les calculs se font ensuite vers l'aval. Cette approche est différente de celles habituellement utilisées pour la résolution des équations de Burgers où on se donne une condition initiale et les calculs se font suivant le temps.

## Navier-Stokes bidimensionnel

La principale difficulté pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles, c'est le couplage de la vitesse et de la pression par la contrainte d'incompressibilité. L'idée d'utiliser des méthodes de projection date des années 60 avec Chorin et Temam. L'intérêt de ces méthodes est de permettre une résolution séquentielle découplée pour la vitesse et la pression. Cependant l'analyse numérique de ces schémas est difficile, et la recherche des schémas de projection optimaux reste une préoccupation importante. Pour une vue d'ensemble des différentes méthodes de projection on pourra lire l'article de Guermond *et al.* [55].

On cherche à résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible 2D :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \nabla u = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 u \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T] \\ u|_{\Gamma} = 0 \quad \text{sur } [0, T] \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

Pour la suite, pour simplifier les notations, les différents schémas sont présentés à l'ordre 1 en temps.

Les schémas de projection, avec correction de la pression, sont composés de deux sous-itérations :

- calcul du champ de vitesse, en omettant les termes de pression et l'équation de la divergence.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} + u^n \nabla u^n = \nu \nabla^2 \tilde{u} \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

- calcul de la pression et du champ de vitesse à divergence nulle (projection).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = -\rho^{-1} \nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot u^{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

La première étape contient le terme de dissipation visqueuse (et donc les conditions aux limites), la deuxième contient la condition d'incompressibilité. Si le pas de temps est suffisamment petit, ces deux solutions sont très proches. On pourrait se demander laquelle des deux est la 'vraie' solution, certainement les deux et aucune, on n'a aucune raison objective de privilégier l'une ou l'autre.

La seconde étape est appelée projection si on considère qu'on projette  $\tilde{u}$  sur un espace qui vérifie  $\nabla \cdot u^{k+1}$ . D'un point de vue géométrique on peut dire que la condition d'incompressibilité contraint la solution  $u$  sur une surface, dans le champ vectoriel de  $u$ , définie par  $\nabla \cdot u = 0$ . Le rôle de la pression est de maintenir  $u$  sur cette surface, ainsi à chaque pas de temps, on projette la solution estimée  $\tilde{u}$  sur cette surface par l'intermédiaire de  $p$ .

Une autre façon d'interpréter cet algorithme est de considérer la pression comme un multiplicateur de Lagrange. L'étape de prédiction nous donne un champ de vitesse  $\tilde{u}$  qui vérifie les équations de conservation de la quantité de mouvement ainsi que les conditions aux limites. On souhaite maintenant calculer le champ  $u^{n+1}$  à partir de  $\tilde{u}$  qui vérifie l'équation de conservation de la masse. En d'autres termes on cherche  $u^{n+1}$  a divergence nulle, le plus proche de  $\tilde{u}$ . On définit la fonction Lagrangienne  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\Delta t}(u^{n+1} - \tilde{u})^2 - \langle \phi, \nabla \cdot u^{n+1} \rangle$$

On obtient la relation :

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} = -\nabla \phi$$

$p = \rho\phi$  apparaît alors comme un multiplicateur de Lagrange qui permet à la vitesse de vérifier la condition d'incompressibilité.

Une amélioration sensible du schéma de Chorin-Temam consiste à intégrer dans l'étape de prédiction un terme de pression explicite. Cet ajout permet d'obtenir un schéma du même ordre en temps pour la vitesse et pour la pression. L'algorithme de prédiction (2.10), projection (2.11) prend la forme finale :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}-u^n}{\Delta t} + u^n \nabla u^n = -\rho^{-1} \nabla p^n + \nu \nabla^2 \tilde{u} \\ \tilde{u}|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \rho/\Delta t \nabla \cdot \tilde{u} + \Delta p^n \\ u^{n+1} = \tilde{u} - \rho^{-1} \Delta t \nabla (p^{n+1} - p^n) \end{cases} \quad (2.11)$$

Il existe d'autres schémas comme, par exemple, la correction de vitesse (KIO pour Karniadakis, Israeli et Orzag 1991), qui consiste à inverser les deux étapes précédemment décrites. On peut citer aussi les méthodes de jauge où la pression est remplacée par une variable de jauge  $\xi$ , et on résout les équations pour une variables auxiliaires  $\phi = u + \nabla \xi$ . Enfin il existe des schémas de factorisation inexacte, les équations sont résolues ensembles mais le système algébrique est modifié pour le rendre inversible. L'idée est d'utiliser une factorisation  $LU$  incomplète. On peut citer pour finir Johnston *et al.* [67] qui ont utilisé une méthode de prédiction/projection avec des conditions aux limites de type Neumann pour la pression. Ils ont montré que leur algorithme est stable sous la condition CFL. Leur schéma est d'ordre deux en temps, implicite pour le terme de diffusion et explicite pour les termes non-linéaires et la pression.

Le schéma de Chorin Temam, à l'ordre un, peut être généralisé aux ordres supérieurs. Sous une forme générale la dérivée temporelle discrétisée s'écrit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{a_1 f^{n+1} + a_2 f^n + a_3 f^{n-1} + \dots}{\Delta t}$$

De même une approximation du terme  $f^{n+1}$  à partir des termes précédents se met sous la forme :

$$f^{n+1} = b_1 f^n + b_2 f^{n-1} + \dots$$

Ce développement est utile pour approximer les termes non linéaires avec une erreur de troncature du même ordre que celle sur la dérivée temporelle. Pour évaluer l'erreur de troncature, on fait un développement de Taylor des quantités  $f^{n+1}$  et  $f^{n-1}$  autour du point  $t^{n+1}$ . On injecte ces développements dans les expressions précédentes. Pour une discrétisation de la dérivée à l'ordre 2, on obtient un système de trois équations :

$$\begin{cases} a_2 + 2a_3 = -2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

et pour l'extrapolation au même ordre on a :

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi, pour un schéma à l'ordre 2, les coefficients :  $a_1 = 3/2$ ,  $a_2 = -2$ ,  $a_3 = 1/2$ ;  $b_1 = 2$  et  $b_2 = -1$ .

L'utilisation de schémas explicites en temps pour la pression, dans l'étape de prédiction, permet de découpler complètement le calcul de la vitesse et de la pression. Pour les termes non linéaires on se contente par simplicité d'un traitement explicite. En ce qui concerne le terme de diffusion, les critères de stabilité imposent souvent une discrétisation implicite. Ceci est lié au rayon spectral de la matrice de dérivation seconde qui croît rapidement avec le nombre de points. On a alors une contrainte sur le pas de temps liée à la stabilité visqueuse :

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^d$$

où  $d$  est la dimension du problème et  $\Delta l$  le pas d'espace minimum. On a également une contrainte de stabilité convective (condition CFL) :

$$\|u\|_\infty \frac{\Delta t}{\Delta l} \leq 1$$

Ainsi le terme de diffusion implicite stabilise le schéma pour de faibles nombres de Reynolds. Pour de grands nombres de Reynolds, si la condition CFL est vérifiée, on peut utiliser un schéma explicite, du type Runge-Kutta.

Pour conclure cette discussion sur l'utilisation explicite/implicites des termes, signalons que la discrétisation des équations de Navier-Stokes donne un système 'stiff', c'est à dire caractérisé par la présence de modes avec des échelles très disparates. Par exemple des phénomènes transitoires mettent en jeu plusieurs temps caractéristiques. Cette pathologie mène à des problèmes de stabilité. Ainsi un traitement explicite des équations, plus simple car il évite l'inversion du système, pose problème. Le développement d'algorithmes pour la résolution de problèmes 'stiff' est un sujet de recherche actif, où de nouvelles méthodes apparaissent régulièrement. Dans le cas des discrétisations spectrales d'équations aux dérivées partielles (PDE) non-linéaires, les schémas standards sont basés sur les méthodes semi-implicites, ou linéairement implicites. Dans les méthodes récentes on peut citer l'exponential time differencing' appliquée par exemple par Cox et Matthews [38] (2002).

## Résolution du système algébrique

De façon générale un schéma, avec un terme de diffusion implicite, se ramène à un problème elliptique linéaire de Helmholtz :

$$\lambda u^{n+1} - \nabla^2 u^{n+1} = f(u^n, u^{n-1}, \dots) \quad (2.12)$$

Il reste maintenant à inverser ce système.

La méthode d'élimination de Gauss (ou pivot) est une méthode d'inversion exacte, basée sur la triangulation de la matrice et résolution du système par la méthode de remontée. Cette méthode est très coûteuse pour des domaines de dimension  $d \geq 2$  puisqu'elle nécessite le stockage de matrices de taille  $N^{2d}$  et un nombre d'opérations très élevé. En pratique on se tourne plutôt vers des méthodes itératives (exemple gradient conjugué), le système n'est pas résolu de manière exacte mais par minimisation de l'erreur au cours des itérations.

Dans cette thèse on a utilisé une troisième méthode, classique elle aussi, qui ne nécessite de stocker que des matrices de taille  $N^2$ . Cette méthode, dite de diagonalisations successives, s'applique au système (2.12) réécrit sous la forme discrète :

$$\lambda X - D_{yy}X - XD_{zz}^T = f$$

Les matrices de dérivation d'ordre deux  $D_{yy}$  et  $D_{zz}$ , associées aux conditions limites, sont diagonalisables. On va donc projeter le système (2.12) sur la base des fonctions propres dans les directions  $y$  et  $z$  où il sera sous forme diagonale, immédiatement inversible :

$$D_{yy} = Q_y \Lambda_y Q_y^{-1}; \quad D_{zz} = Q_z \Lambda_z Q_z^{-1}$$

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{F}}{\lambda - \Lambda_{ii} - \Lambda_{jj}}$$

avec  $\tilde{F} = Q_y^{-1} F (Q_z^T)^{-1}$ , et  $X = Q_y \tilde{X} Q_z^T$ .

La technique de diagonalisation successive reste applicable pour  $\lambda$  constant, c'est le cas si on intègre le système en temps. Dans le cas d'une intégration dans le sens de l'écoulement  $x$ , cette méthode est inapplicable puisque  $\lambda$  ferait intervenir la vitesse longitudinale qui n'est pas constante.

## Synthèse de l'algorithme de résolution des équations PNS

On synthétise les résultats précédents pour résoudre les équations de Navier-Stokes parabolisées PNS (2.1). On note  $U$  la vitesse longitudinale et  $\mathbf{u} = [U, V, W]^T$  le vecteur vitesse. On rappelle que  $\nabla_{CF} = [0 \quad \partial_y \quad \partial_z]^T$  désigne l'opérateur nabla dans les directions normales à l'écoulement.

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{j+1}^n}{\Delta t} + U_{j+1}^n \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n}{\Delta x} + \mathbf{u}_{j+1}^n \nabla_{CF} \mathbf{u}_{j+1}^n = -\nabla_{CF} p_{j+1}^n + \nabla_{CF}^2 \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.13)$$

$$\nabla_{CF}^2 p_{j+1}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} + \nabla_{CF} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) + \nabla_{CF}^2 p_{j+1}^n \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u}_{j+1}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla_{CF} (p_{j+1}^{n+1} - p_{j+1}^n) \quad (2.15)$$

Cet algorithme est d'ordre 1 en temps. Les calculs dans cette thèse sont limités à des cas stationnaires (*cf* chapitres 5, 6 et 7). Pour ces cas un schéma d'ordre 2, plus coûteux en espace mémoire, ne montre pas de différences significatives. Il s'agit en fait de calculs pseudo instationnaires, les itérations en temps sont stoppées quand la valeur  $\|(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)/\Delta t\|_\infty$  est inférieure à  $10^{-3}$ .

Néanmoins, pour les calculs instationnaires du chapitre 8, l'ordre 2 est nécessaire.

Après avoir présenté les équations et leur algorithme de résolution, on aborde dans le prochain chapitre la discrétisation spatiale des opérateurs.

# Chapitre 3

## Méthodes spectrales

Considérons le problème discret obtenu par une discrétisation dans le temps et dans la direction longitudinale, de type différences finies. Dans les directions transversales on utilise des méthodes spectrales de collocation.

Les programmes ont été réalisés par l'auteur en utilisant le logiciel MatLab, créé par Cleve Moler en 1977. A titre de comparaison, les débuts de Fortran datent de 1954 avec John Backus. MatLab (Matrix Laboratory) est basé sur la manipulation de matrices. Il est tout à fait indiqué pour l'utilisation des méthodes spectrales. Ce rapprochement MatLab/méthodes spectrales se retrouve dans deux livres excellents et très didactiques, le premier écrit par Trefethen [108], le second par Weideman and Reddy [113]. Pour les questions générales concernant les méthodes spectrales, on pourra consulter les livres de Canuto *et al.* [29], et Boyd [24].

### 3.1 Principes des méthodes spectrales

L'application des méthodes spectrales pour la résolution numériques d'équations aux dérivées partielles date de 1977 avec le livre de Gottlieb et Orszag. Le principe est de rechercher la solution  $u$  sous la forme d'un développement en série de fonctions  $\phi_n$  qui sont, généralement, des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  formant une base orthogonale.

On distingue deux grandes classes de résolution par méthode spectrale : soit on se donne comme inconnues les coefficients spectraux,

$$P_N u(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{u} \phi_n(x), \quad P_N u \text{ est la projection de } u,$$

soit on se donne comme inconnues les valeurs de cette fonction aux points de collocation,

$$I_N u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u} \phi_n(x), \quad I_N u \text{ est l'interpolation de } u \text{ sur } x_i.$$

La différence entre  $\tilde{u}$  et  $\hat{u}$  s'appelle l'erreur d'aliasing, c'est la contamination de  $\hat{u}$  par les hautes fréquences de  $\tilde{u}$ .

On approche  $u$  par un développement fini, l'erreur commise alors est une erreur de troncature ou d'interpolation. Cette erreur, pour une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  décroît plus vite que toute puissance de  $1/N$ . Dans la pratique on observe une décroissance exponentielle ou convergence spectrale. Un tel comportement est une propriété importante des méthodes

spectrales; elle est parfois appelée erreur évanescence. Pour les méthodes aux différences finies d'ordre  $k$ , l'erreur décroît algébriquement comme  $1/N^k$ .

## Spectral/collocation

On a donc deux grandes classes de méthodes spectrales, avec des variantes pour chaque classe : spectral Galerkin/spectral tau ou collocation forte/collocation faible. L'ensemble de ces méthodes appartient à la classe des méthodes des résidus pondérés, consistant à définir le résidu correspondant à la solution approchée et à annuler ce résidu en un certain sens. Pour présenter ces différentes approches on se propose de résoudre un problème différentiel général de la forme :  $\mathcal{L}u = f$  muni de conditions aux limites. Une solution numérique de ce problème est une fonction  $\bar{u}$  qui vérifie les conditions aux limites et telle que le résidu  $\mathcal{R} = |\mathcal{L}u - f|$  soit petit. Par exemple  $\bar{u} = \sum^{\infty} \tilde{u}_n \phi_n$ . Pour les méthodes spectrales,  $\phi_n$  est une famille complète (base) de fonctions régulières globales. On définit les fonctions tests comme une famille  $(\chi_n)$  qui définissent la taille du résidu par le biais du produit scalaire  $(\chi_n, \mathcal{R}) = 0$ . On peut alors classer les différentes méthodes spectrales suivant ces fonctions tests.

- Galerkin  $\chi_n = \phi_n$  et chaque  $\phi_n$  vérifie les conditions aux limites. Les coefficients spectraux sont alors calculés en posant que le résidu soit orthogonal à la famille des  $\phi_n$  :

$$(\phi_n, \mathcal{R}) = 0 \Leftrightarrow \sum_k L_{nk} \tilde{u}_k = (\phi_n, f), \quad L_{nk} = (\phi_n, \mathcal{L}\phi_k)$$

Cette approche est intéressante si les  $\phi_n$  forment une famille orthogonale. Remarque : les coefficients  $\tilde{u}$  peuvent être calculés à l'aide d'une FFT pour un coût de  $N \ln(N)$  au lieu de  $N^2$  du produit matriciel.

- tau  $\chi_n$  est formé de presque toutes les fonctions du développement mais  $\phi_n$  ne vérifie pas les conditions aux limites, celles-ci sont imposées par un système d'équations supplémentaires. Cette méthode, introduite par Lanczos, peut poser des problèmes de conditionnement de matrice, notamment lorsque  $N$  devient grand.
- collocation  $\chi_n = \delta(x - x_n)$ , où  $x_n$  sont les points de collocation et  $\delta$  la fonction de Dirac

$$(\chi_n, \mathcal{R}) = 0 \Leftrightarrow \sum_k \mathcal{L}\phi_k(x_n) \tilde{u}_k = f(x_n)$$

Les inconnues sont les valeurs de la fonction aux points de collocation. On travaille, non pas dans l'espace spectral comme précédemment, mais dans l'espace physique. La solution est recherchée sous la forme de son polynôme interpolant appartenant à  $P_N : I_N u = \sum_0^N u_i L_i(x)$  où  $L_i$  est le polynôme caractéristique de degré  $N$  associé au point  $x_i$ . Il est possible d'obtenir une matrice de dérivée seconde mieux conditionnée en utilisant une formulation dite faible, cette approche ne sera pas abordée dans cette thèse.

Le plus couramment on utilise soit des développements à base de séries de Fourier pour des problèmes périodiques, ou de polynômes orthogonaux sinon.

Une opération de de-aliasing est généralement nécessaire avec les méthodes de Fourier. Dans le cas de polynômes, il est plus simple d'augmenter la résolution.

### Dérivation-intégration

Pour discrétiser les opérateurs on utilise une méthode spectrale de collocation : les inconnues sont représentées aux points de collocation. Les fonctions sont projetées sur une base :

$$u = \sum_n \tilde{u}_n \phi_n(x)$$

ainsi la dérivée de la fonction au point  $x_i$  s'exprime sous la forme :

$$u'(x_i) = \sum_j \phi_j'(x_i) = \sum_j \mathbb{D}_{ij} u(x_j)$$

Contrairement aux différences finies où la solution est recherchée sous la forme de recouvrement d'approximations locales, dans le cas des méthodes spectrales la solution est une combinaison linéaire de fonctions globales, *i.e.* étendues sur tout le domaine. L'avantage est une plus grande précision, l'inconvénient est que les opérateurs de dérivation discrétisés sont denses, ils sont donc plus difficiles à inverser.

Concernant l'implémentation de conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on constate que la première et la dernière colonne des matrices de dérivation sont multipliées par la fonction sur les bords qui vaut zéro, on peut donc les enlever. De plus la première et la dernière ligne servent à calculer la fonction sur les bords où elle est connue, on peut donc les enlever aussi. Au final le problème est résolu sur les points intérieurs au domaine. Pour une description plus détaillée de cette méthode se référer Trefethen [108].

Dans le cas de problèmes bidimensionnels, la solution est recherchée sous la forme de son polynôme d'interpolation appartenant à l'espace  $P_N \otimes P_M$ ,

$$I_{NM}u = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M u_{ij} L_i(x) L_j(y).$$

En pratique la solution  $u(y, z)$  est représentée par une matrice  $\mathbb{U}$  de taille  $(M+1) \times (N+1)$ . Les opérations de dérivation se font par des produits tensoriels droit et gauche. Par exemple, si on note respectivement  $\mathbb{D}_y$  (de taille  $(M+1)^2$ ) et  $\mathbb{D}_z$  (de taille  $(N+1)^2$ ), les matrices de dérivation selon  $y$  et  $z$ , alors on a :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \mathbb{D}_y \times \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \approx \mathbb{U} \times \mathbb{D}_z^T$$

où l'exposant  $T$  désigne la transposée de la matrice.

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction continue est remplacée par une somme finie.

$$\int f dx \approx \sum w_i f_i$$

où  $w_i$  sont les poids d'intégration. On peut distinguer deux catégories, les méthodes composées et les méthodes de Gauss. Pour les premières la fonction est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire, par exemple la méthode des trapèzes s'écrit avec  $w_i = x_{i+1} - x_i$ . Archimède est certainement le premier à avoir utilisé ce type de méthode pour calculer une intégrale, c'était pour obtenir une approximation du fameux nombre  $\pi$ . La généralisation sur les poids  $w_i$  est à l'origine de la seconde catégorie où on utilise une interpolation globale sur un maillage imposé.

Les méthodes de Gauss utilisent une subdivision particulière où les points sont les racines des polynômes orthogonaux de Legendre qui ne sont pas équi-espacés. Ce sont les méthodes les plus précises car l'intégration est exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à  $2N + 1$ , au lieu de  $N$  ou  $N + 1$  pour les méthodes composées. Cependant, Trefethen [106] a montré que la méthode d'intégration de Clenshaw-Curtis, moins connue que la méthode de Gauss classique, est une alternative intéressante et peut rivaliser en précision. Cette méthode présente l'intérêt de pouvoir calculer les intégrales à partir des points de collocation. C'est la méthode utilisée dans cette thèse.

L'intégration pour la méthode de Fourier se ramène à la règle des trapèzes périodiques :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \approx 2\pi \sum_{i=1}^N f(\theta_i)$$

### Le problème de la pression

Pour les schémas de projection décrits précédemment, et dans les cas d'approximations polynômiales, on ne peut choisir indépendamment les espaces polynômiaux de vitesse et la pression. En effet, approximer les vitesses et la pression par des polynômes de même degré entraîne que le système discret est singulier. La solution numérique de la pression est polluée par les éléments du noyau de la matrice du problème discret, appelés modes parasites de pression.

Une manière de résoudre cette difficulté est d'utiliser des espaces polynômiaux compatibles avec la méthode  $P_N - P_{N-2}$ , dont l'analyse numérique et la mise en oeuvre ont été réalisées, pour Chebyshev, par Azaïez [8] et Botella [21] entre autres. La condition de compatibilité est donc vérifiée en prenant pour la pression des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse. Les avantages de cette méthode sont : une seule grille de collocation, pas de conditions aux limites sur la pression, pas de modes parasites (sauf le mode constant), et des approximations sur la vitesse ainsi que sur la pression d'ordre élevé en temps.

Cependant les vitesses et la pression ne sont pas des éléments du même espace, leurs opérateurs de dérivation seront donc différents. De façon classique, l'équation de Poisson pour la pression est obtenue en prenant la divergence de l'équation de quantité de mouvement. On forme ainsi un opérateur d'Uzawa pour la pression, qui possède une unique valeur propre nulle, qui correspond au mode de pression constant, traduisant le fait que la pression est définie à une fonction du temps près. Notons  $A_N$  l'opérateur unidimensionnel d'Uzawa pour la pression. C'est un opérateur différentiel du second ordre, qui diffère des opérateurs de pression usuels de type Laplace munis de conditions de Neumann. L'opérateur  $A_N$  est formé du produit d'un opérateur de dérivation dans  $P_N$ , muni des conditions aux limites sur la vitesse, avec un opérateur de dérivation première dans  $P_{N-2}$ .

Dans les paragraphes suivants on teste ce schéma de résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelle pour trois types de discrétisation spatiale : Fourier, Chebyshev et Hermite. Dans chaque cas, en utilisant des solutions exactes, on vérifiera que la précision spatiale est spectrale et que la précision temporelle est consistante avec l'ordre du schéma choisi. Les erreurs sur la vitesse, sur la pression et sur la divergence sont définies comme :

$$E_u = \max_{v,w} (\|v_N - v_e\|_\infty, \|w_N - w_e\|_\infty), \quad E_p = \|p_N - p_e\|_\infty, \quad \text{div} = \left\| \frac{\partial v_N}{\partial y} + \frac{\partial w_N}{\partial z} \right\|_\infty,$$

l'indice  $e$  désigne la solution exacte.

## 3.2 Fourier

L'intervalle de discrétisation est  $[0, 2\pi]$ , la grille de collocation est donnée par l'ensemble de points equi-espacés :

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \quad j = 0, \dots, N-1$$

Les matrices de dérivation d'ordre 1 et 2, s'écrivent (voir Weideman et Reddy [113] ou Trefethen [108]) :

$$\mathbb{D}_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{k-j} \cot \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j \\ 0, & k = j \end{cases}$$

$$\mathbb{D}_{kj}^{(2)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(-1)^{k-j} \csc^2 \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j \\ -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6}, & k = j \end{cases}$$

avec  $h = 2\pi/N$ , *csc* est la fonction cosécante (ou l'inverse du sinus). Ces formules sont valables pour des nombres de points de collocation pairs. Contrairement aux approximations polynômiales, il n'est pas nécessaire ici de construire des opérateurs de dérivation particuliers pour la pression. La pression est supposée avoir la même périodicité que la vitesse.

### Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes

On considère la solution exacte périodique des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} v &= -\cos(y) \sin(z) e^{-2\nu t} \\ w &= \sin(y) \cos(z) e^{-2\nu t} \\ p &= -1/4(\cos(2y) + \cos(2z)) e^{-4\nu t} \end{aligned}$$

Il s'agit de la solution de Taylor pour un champ de tourbillons périodiques.

Des calculs préliminaires montrent des erreurs d'aliasing, ou repliement spectral qui déstabilise le schéma. Ce phénomène est lié à l'apparition, par des effets non-linéaires, de modes harmoniques qui ne sont pas discrétisés.

Les calculs montrent que l'erreur d'aliasing déstabilise le schéma pour de très faibles pas de temps. En faisant une étude paramétrique, on a relevé une condition nécessaire sur le pas de temps :  $\Delta t_c \geq 0.25 \nu^{-1} N^{-1.4}$ .

Dans cette thèse, on remédie à ce problème en sur-échantillonnant la fonction de moitié, c'est la fameuse règle 3/2 de Orzag. Sur un spectre  $|k| < 3/2K$ , seuls les modes  $|k| \leq K$  seront conservés, les autres étant arbitrairement mis à zéro. Cette solution induit une erreur par suppression systématique des grands nombres d'ondes. Néanmoins le repliement spectral est contrôlé ce qui permet d'éviter l'accumulation d'énergie aux plus petites échelles. En pratique on espère que les modes dans la queue du spectre sont de très faible énergie comme on peut l'observer sur la cascade de Kolmogoroff. Cette solution implique un grand gaspillage en temps de calcul, en monodimensionnel seuls 67% des modes sont conservés et 35% en bidimensionnel.

Sur la figure 3.1, on trace la courbe d'erreur, au temps  $T = 1$ , en fonction du pas de temps. La discrétisation spatiale est choisie avec  $N = 32$ , ainsi l'erreur est dominée par la discrétisation temporelle. Le nombre de Reynolds vaut  $Re = 1$ . On impose la solution exacte comme condition initiale pour les deux premiers pas de temps.

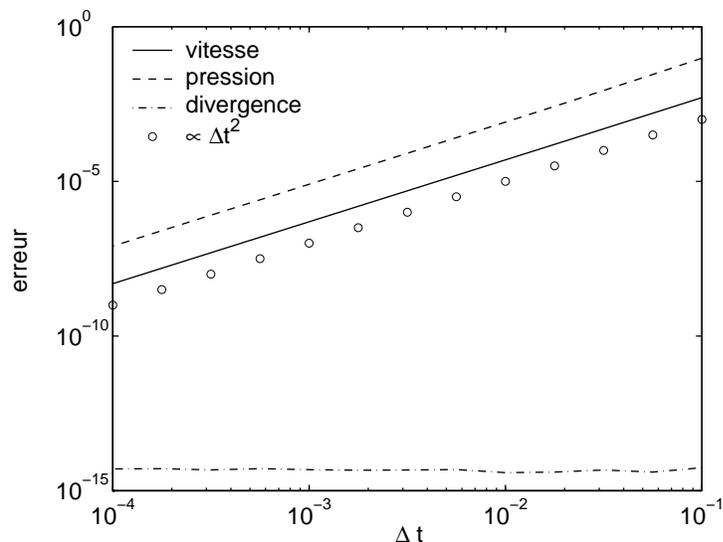


FIG. 3.1 – Maximum de l'erreur en temps sur la vitesse, sur la pression et sur la divergence, en fonction du pas de temps  $\Delta t$ .

On a également tracé une courbe proportionnelle à  $\Delta t^2$ , on constate que l'ordre du schéma est bien deux pour la vitesse et la pression. Pour  $Re = 1000$ , l'évolution est identique mais l'erreur est 1000 fois plus petite et sature autour de  $10^{-10}$ , où on a atteint la précision spatiale de résolution.

On trace l'erreur pour la pression dans le plan, sur la figure 3.2, avec  $t = 1$ ,  $N = 32$   $\Delta t = 10^{-2}$  et  $Re = 1$ .

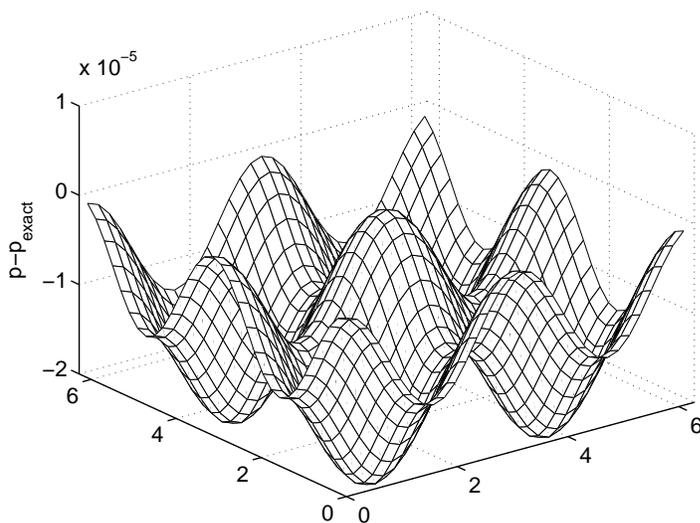


FIG. 3.2 – Erreur pour la pression dans le plan, avec  $t = 1$ ,  $N = 32$   $\Delta t = 10^{-2}$  et  $Re = 1$ .

On impose la valeur zéro sur la pression dans un angle on pourrait utiliser une valeur moyenne comme pression de référence. L'erreur sur la pression est répartie de manière homogène sur le domaine.

### 3.3 Chebyshev

La grille de collocation est formée par les  $N + 1$  points de Chebyshev-Gauss-Lobatto, définis comme :

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)$$

Pour améliorer la précision des calculs il est intéressant d'utiliser les formules trigonométriques pour la construction des matrices de dérivations (Weideman et Reddy [113]). Les éléments de la matrice de dérivée première dans  $P_N$  sont donnés par :

$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{cases} \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j} & i \neq j \\ -\frac{1}{2} \frac{x_i}{1-x_i^2} & i = j \neq 1, N \\ \frac{2(N-1)^2+1}{6} & i = j = 1 \\ -\frac{2(N-1)^2+1}{6} & i = j = N \end{cases}$$

$$c_0 = c_N = 2 \quad c_j = 1 \quad j \neq 1, N$$

La matrice de dérivation d'ordre  $n$  ( $\mathbb{D}_n$ ) est égale à  $\mathbb{D}^n$ . Pour les conditions aux limites on calcule alors la solution uniquement sur les points intérieurs, en d'autres termes on élimine les points du bord où la solution est connue.

En utilisant une base d'interpolant de Lagrange, on établit l'expression de l'opérateur de dérivation première dans  $P_{N-2}$  à partir de l'opérateur de dérivation classique en collocation :

$$\tilde{\mathbb{D}}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\pi j}{N}}{\sin^2 \frac{\pi i}{N}} \frac{(-1)^{i+j}}{\sin \frac{\pi(i+j)}{2N} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N}} & i \neq j \\ \frac{3}{2} \frac{\cos \frac{\pi i}{N}}{\sin^2 \frac{\pi i}{N}} & i = j \neq 1, N \end{cases}$$

Remarque : dans ce cas on a  $\tilde{\mathbb{D}}_n \neq \mathbb{D}^n$ .

Enfin on se ramène au domaine physique  $[0; y_\infty]$  en utilisant deux mapping : pour l'étude modale du chapitre 4 on a utilisé :

$$y = y_\infty \frac{1-x}{2},$$

Pour les autres cas on utilise un mapping algébrique qui resserre les points près de la paroi :

$$y = \frac{y_\infty H_e}{2} \frac{1-x}{1+H_e-x},$$

avec  $H_e = 1/9$  le paramètre d'étirement. Les matrices de dérivation et les poids d'intégration sont également modifiés en utilisant l'expression analytique du Jacobien.

#### Étude numérique des valeurs propres de $A_N$

On rappelle que  $A_N = \mathbb{D}_{P_N} \times \mathbb{D}_{P_{N-2}}$ , où  $\mathbb{D}_{P_N}$  est la matrice de dérivation dans l'espace  $P_N$  muni des conditions aux limites pour la vitesse. On effectue une étude numérique de la structure spectrale de l'opérateur  $A_N$  en calculant ses valeurs propres pour différentes valeurs de  $N$ . Notons  $\lambda_{max}$  et  $\lambda_{min}$  respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre non nulle, en valeur absolue, de  $A_N$ . La quantité  $\lambda_0$  désigne la valeur propre approchant la valeur zéro. On reporte quelques valeurs numérique dans le tableau 3.1.

TAB. 3.1 – Valeurs propres de l'opérateur  $A_N$  calculées numériquement.

$N$	$\lambda_{min}$	$\lambda_{max}$	$\lambda_{max}/N^4$	$\lambda_0$
4	-2.0	$-1.20 \times 10^1$	$-4.69 \times 10^{-2}$	$-4.47 \times 10^{-17}$
8	-2.467	$-2.02 \times 10^2$	$-4.92 \times 10^{-2}$	$-4.95 \times 10^{-15}$
16	-2.467	$-3.14 \times 10^3$	$-4.79 \times 10^{-2}$	$-4.71 \times 10^{-15}$
32	-2.467	$-4.98 \times 10^4$	$-4.75 \times 10^{-2}$	$-7.58 \times 10^{-13}$
64	-2.467	$-7.95 \times 10^5$	$-4.74 \times 10^{-2}$	$-4.74 \times 10^{-12}$
128	-2.467	$-1.27 \times 10^7$	$-4.74 \times 10^{-2}$	$-7.79 \times 10^{-13}$
256	-2.467	$-2.03 \times 10^8$	$-4.74 \times 10^{-2}$	$-1.46 \times 10^{-10}$

On remarque que ces valeurs propres sont réelles, distinctes, négatives sauf une qui est nulle, correspondant au mode de pression constant. Cela confirme qu'il n'est pas nécessaire d'associer une condition de Neumann sur la pression. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par Botella [21]. On constate que  $\lambda_{min}$  tend vers  $\pi^2/4$  et  $\lambda_{max}$  tend vers  $4.7 \times 10^{-2} N^4$ , lorsque  $N$  augmente.

### Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes

On considère la solution exacte des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \cos t \cos^2(\pi y/2) \cos(\pi z/2) \sin(\pi z/2) \\ w(x, y, t) &= -\cos t \cos(\pi y/2) \sin(\pi y/2) \cos^2(\pi z/2) \\ p(x, y, t) &= \cos t \cos(\pi y/2) \sin(\pi z/2) \end{aligned}$$

associée à des conditions aux limites de Dirichlet homogène sur les bords et à un terme source dans les équations. Le nombre de Reynolds, ou l'inverse de la viscosité, est fixé à 100. La discrétisation spatiale est choisie avec  $N = 32$ , ainsi l'erreur est dominée par la discrétisation temporelle.

On trace le maximum sur le temps des erreurs sur la vitesse, la pression et la divergence, en fonction du pas de temps sur la figure 3.3. Les calculs sont menés jusqu'à  $T = 2\pi$ , ce qui correspond à une période.

Premièrement on n'observe pas d'amplification des erreurs pour de faibles pas de temps, ce qui montre la stabilité du schéma numérique, il n'est pas nécessaire de conditionner le pas de temps en fonction de la discrétisation spatiale. Deuxièmement cette figure confirme la précision du second ordre en temps pour la vitesse, ainsi que pour la pression. Enfin la condition de divergence nulle est bien respectée.

Des essais ont été réalisés avec plus de points ( $N = 64$ ), les courbes d'erreur de vitesse et de pression sont identiques aux précédentes. Pour l'erreur sur la divergence, on observe un saut (l'erreur est dix fois plus grande) mais l'évolution est identique. En faisant varier le nombre de Reynolds, l'évolution des courbes d'erreur de la vitesse et de la pression reste identique ( $\propto \Delta t^2$ ). La convergence de la divergence est inchangée. Il faut noter que pour de grands nombres de Reynolds des instabilités peuvent se développer si le pas de temps est trop grand.

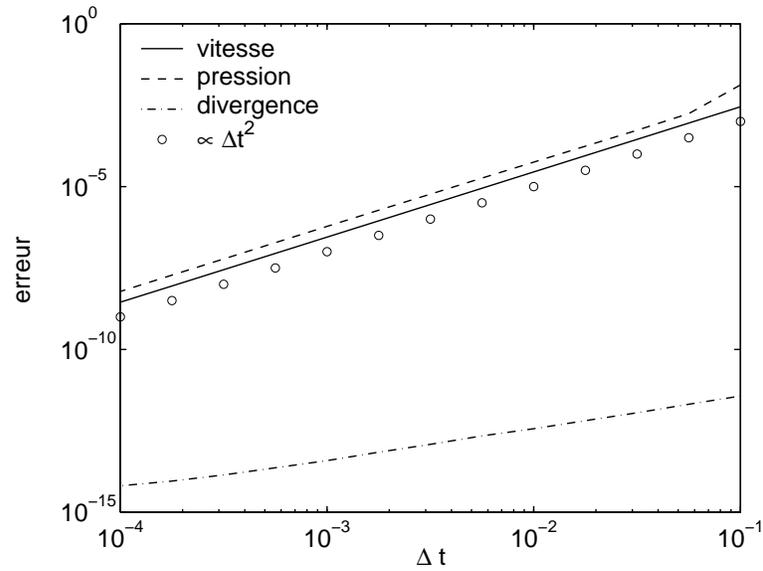


FIG. 3.3 – Maximum de l’erreur en temps sur la vitesse, sur la pression et sur la divergence, en fonction du pas de temps  $\Delta t$ .

On représente l’erreur sur la pression dans le plan, à  $t = 2$ , pour  $N = 32$ ,  $\Delta t = 10^{-2}$  et  $Re = 1$  sur la figure 3.4.

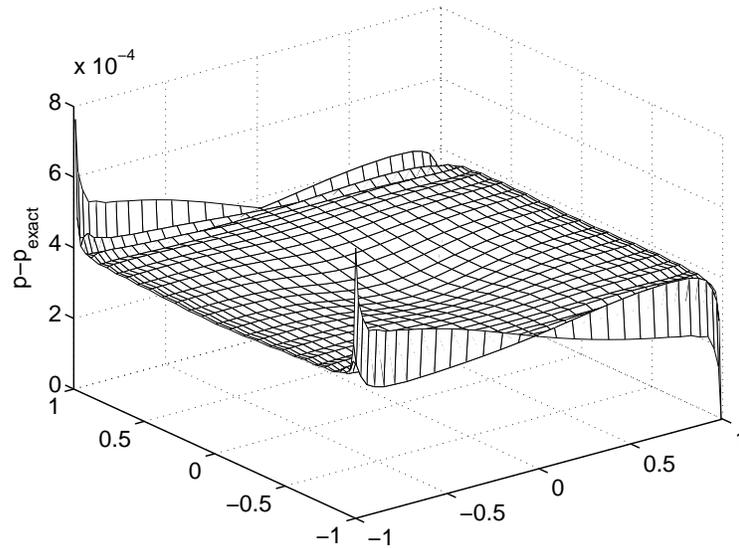


FIG. 3.4 – Erreur sur la pression dans le plan,  $t = 2$ ,  $N = 32$ ,  $\Delta t = 10^{-2}$  et  $Re = 1$ .

La principale différence entre Fourier et Chebyshev sur l’erreur de la pression, c’est la singularité dans les angles liée à la perte de régularité dans ces zones.

On trace sur la figure 3.5 l’évolution temporelle de l’erreur en temps sur la vitesse et sur la pression, sur environ 5 périodes. Les essais sont réalisés en prenant  $\Delta t = 10^{-3}$  et des polynômes de degré 32.

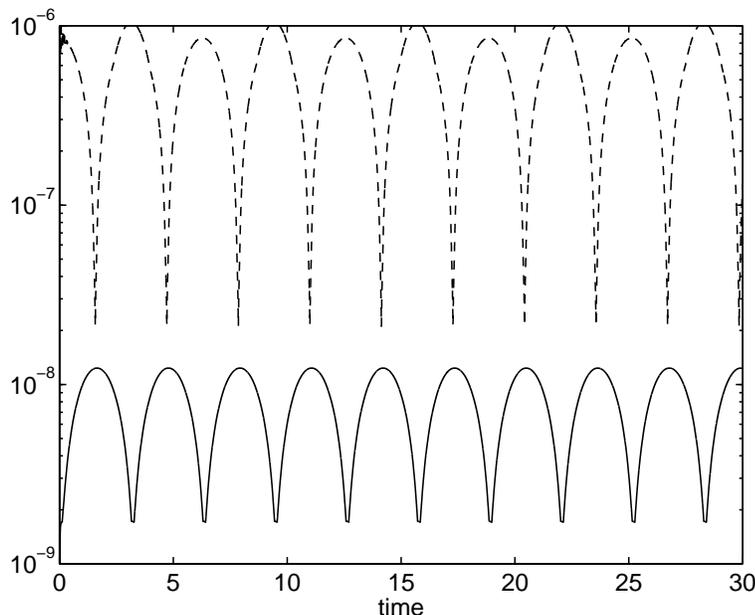


FIG. 3.5 – Evolution temporelle de l’erreur en temps sur la vitesse (trait continu) et sur la pression (traits discontinus), pour un pas de temps  $\Delta t = 10^{-3}$  et  $N = 32$  et  $Re = 1$ .

On n’observe pas d’amplification des oscillations en temps des erreurs, ce qui indique la stabilité du schéma.

### 3.4 Hermite

Les méthodes spectrales ou pseudo-spectrales basées sur un développement en série de Fourier sont fréquemment utilisées pour la résolution des équations de Navier-Stokes. En plus des problèmes périodiques, ces méthodes sont appliquées dans des cas de domaines non-bornés.

Même si les écoulements simulés ne présentent pas de périodicité naturelle, il est communément admis que l’influence de l’écoulement image sur les bords peut être rendu négligeable en augmentant la taille du domaine. Cependant si la solution recherchée n’est pas très régulière ou si ses dérivées ne sont pas périodiques jusqu’à un ordre élevé, alors les coefficients spectraux ne vont pas décroître très vite et l’erreur de troncature sera du même ordre que celle obtenue par une méthode de différences finies, pour un coût largement supérieur.

Pradeep et Hussain [89] ont montré qu’imposer une périodicité à la solution entraîne deux types d’erreur. Premièrement l’écoulement image exerce une influence sur le domaine de calcul, cet effet étant inversement proportionnel au carré de la taille du domaine. Deuxièmement la périodicité implique que la circulation nette s’annule. En conséquence un tourbillon isolé peut évoluer vers un état instable selon le critère de Rayleigh. L’utilisation de condition aux limites périodiques a donc une influence significative a long terme.

Rennich et Lele [92] proposent une méthode pour résoudre des écoulements non bornés dans deux directions, avec un traitement analytique pour la zone extérieure. La vorticit   est suppos  e localis  e. Le co  t engendr   par cette op  ration est compens   par l’utilisation de maillages moins raffin  s. Cette m  thode est une extension de celle propos  e par Corral

et Jimenez [36] dans le cas où une seule direction est non bornée. Le principe est d'utiliser une méthode spectrale de Fourier sur un domaine fini. Le caractère non borné est obtenu en ajoutant une corrélation irrotationnelle. Cette approche présuppose une décroissance rapide de la vorticité. Le champ de vitesse est décomposé en une partie rotationnelle et une partie potentielle plus éventuellement un écoulement uniforme. La partie rotationnelle est calculée analytiquement en coordonnées polaires. Ensuite les deux solutions sont raccordées à la frontière. Il est donc nécessaire d'effectuer des interpolations pour le changement de système de coordonnées. Il faut faire attention à ce que ces opérations ne pénalisent pas la précision du schéma numérique. Quand la vorticité sur le bord du domaine ne décroît pas assez rapidement, on observe une augmentation de l'erreur.

Dans cette thèse nous utiliserons une méthode différente et originale. Pour des problèmes dans des domaines infinis où les solutions ne présentent pas de conditions de p riodicite  suffisantes, c'est le cas par exemple si la solution est localisée dans une certaine région, nous utiliserons comme fonctions de base des polynômes d'Hermite.

Guo *et al.* [56] (2003) ont réalisé une analyse numérique des méthodes spectrales et pseudospectrales basée sur les polynômes de Hermite, appliquée à l'équation de Dirac nonlinéaire. Leur conclusion est que l'excellente convergence des résultats indiquent que les fonctions d'Hermite sont une alternative intéressante pour la résolution numérique de PDE dans des domaines non-bornés.

Cette méthode n'a jamais été utilisée, à la connaissance de l'auteur, pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

L'intervalle de discrétisation est  $[-\infty, +\infty]$ , les points sont les racines du polynôme d'Hermite. Ils sont calculés comme les valeurs propres de la matrice de Jacobi :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & & \\ 1/2 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & N/2 & \\ & & & N/2 & & 0 \end{pmatrix}$$

La valeur du dernier point est liée au nombre de points :  $x_N = -x_1 = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ . Il peut être utile d'utiliser un simple mapping  $x \rightarrow k x$  pour faire varier indépendamment la taille du domaine et le nombre de points.

Les matrices de dérivation d'ordre 1 et 2 pour la vitesse, sont calculées par récurrence suivant un algorithme développé par Welfert [114] en Fortran. Cet algorithme construit les matrices de dérivation à partir d'un ensemble de points de collocation et d'une fonction poids d'interpolation. Weideman et Reddy [113] ont converti le programme Fortran en une fonction MatLab. C'est cette fonction que nous avons utilisée. La matrice de dérivation d'ordre 1 pour la pression est calculée en utilisant la fonction précédente sur les points intérieurs.

### Etude numérique des valeurs propres d'Uzawa $A_N$

Comme pour les polynômes de Chebyshev, on effectue une étude numérique de la structure spectrale de l'opérateur  $A_N$  en calculant ses valeurs propres pour différentes valeurs de  $N$ . Comme précédemment, ces valeurs propres sont réelles, distinctes, négatives sauf une qui est nulle, correspondant au mode de pression constant. On reporte les valeurs numériques de  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_0$  pour différents  $N$  dans le tableau 3.2.

TAB. 3.2 – Valeurs propres de l'opérateur  $A_N$  calculées numériquement.

$N$	$\lambda_{min}$	$\lambda_{max}$	$\lambda_{max}/\lambda_{min} \times 1/N^2$	$\lambda_0$
4	-1.642	-3.397	0.1293	0
8	$-6.258 \times 10^{-1}$	$-1.189 \times 10^1$	0.2969	$-3.75 \times 10^{-15}$
16	$-2.742 \times 10^{-1}$	$-2.797 \times 10^1$	0.3985	$2.45 \times 10^{-15}$
32	$-1.290 \times 10^{-1}$	$-5.935 \times 10^1$	0.4493	$-3.06 \times 10^{-15}$
64	$-6.319 \times 10^{-2}$	$-1.221 \times 10^2$	0.4717	$-1.90 \times 10^{-15}$
128	$-3.169 \times 10^{-2}$	$-2.482 \times 10^2$	0.4780	$-5.49 \times 10^{-15}$

Pour  $N \geq 250$ , on ne peut plus calculer de valeurs propres. On constate que  $\lambda_{max} \propto N$ ,  $\lambda_{min} \propto 1/N$ , ainsi le conditionnement  $\lambda_{max}/\lambda_{min}$  est proportionnel à  $N^2$ .

### Essais numériques pour le problème de Navier-Stokes

On considère la solution exacte de Taylor pour un tourbillon axisymétrique :

$$v = z/a^2 \exp(-R^2/a)$$

$$w = -y/a^2 \exp(-R^2/a)$$

avec  $R = \sqrt{y^2 + z^2}$  et  $a = 4\nu(t + t_0)$ . On ne dispose pas de solution analytique pour la pression, on se contentera donc de valider la méthode à partir des calculs sur la vitesse et la divergence. Pour le calcul on applique des conditions aux limites de Dirichlet homogène sur les bords. La courbe d'erreur en fonction du pas de temps est tracée sur la figure 3.6.

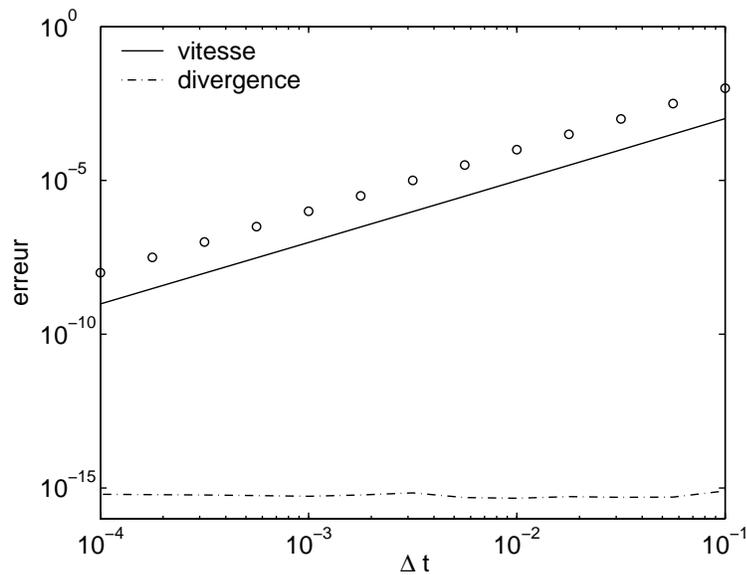


FIG. 3.6 – Maximum de l'erreur en temps sur la vitesse et sur la divergence, en fonction du pas de temps  $\Delta t$ , avec  $N = 32$ ,  $t_0 = 1$  et  $Re = 1$ .

Cette figure confirme la précision du second ordre en temps de la vitesse. La contrainte d'incompressibilité est bien vérifiée.

Deuxième partie  
Du laminaire...



## Chapitre 4

# Description (multi-)modale des perturbations

Dans la plupart des cas, pour des perturbations extérieures modérées, le comportement des perturbations est régi par une phase de croissance linéaire suivi d'une phase d'interactions non-linéaires. Une analyse linéaire peut se décomposer en trois étapes : formulation et linéarisation des équations pour les perturbations, analyse du problème en terme d'échelles caractéristiques enfin, recherche des perturbations amplifiées.

On se place dans le cas d'une couche limite sur plaque plane sans incidence. L'écoulement de base est donné sous la forme d'une solution de similitude (Blasius) représentée sur la figure 4.1. Dans la suite les lettres majuscules désignent l'écoulement de base, les minuscules désignent les perturbations.

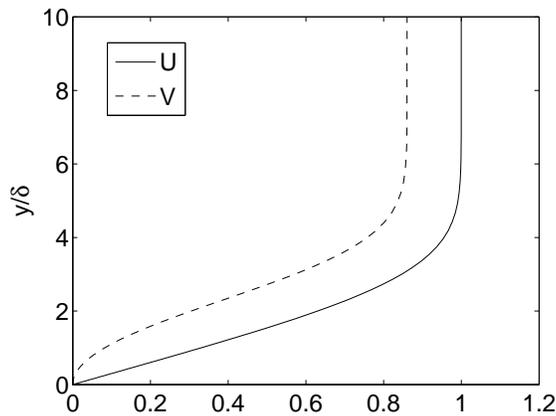


FIG. 4.1 – Solution de similitude de Blasius.  $U$  est adimensionné par  $U_e$  et  $V$  par  $U_e/\sqrt{Re_x}$

Pour ce type d'écoulement, la première étude théorique de stabilité remonte aux travaux de Lord Rayleigh (1880). Il a dérivé les équations, non visqueuses, d'évolution des perturbations linéarisées autour d'un écoulement de base parallèle (*i.e.*  $\vec{U} = U(y)\vec{e}_x$ ). En utilisant la transformation de Fourier, c'est-à-dire en cherchant les perturbations sous la forme d'un paquet d'ondes, il a obtenu un problème aux valeurs propres. Il en déduit une condition nécessaire de stabilité liée à l'existence d'un point d'inflexion sur le profil de vitesse ( $U''(y) = 0$ ). Une condition plus restrictive a ensuite été obtenue par Fjortoft,

stipulant que ce point d'inflexion devait correspondre à un maximum de vorticité. Plus tard Orr (1907) et Sommerfeld (1908) ont inclus les effets de la viscosité dans ce qui deviendra l'équation de Orr-Sommerfeld en bidimensionnel. Le cas de perturbations tridimensionnelles a été traité par Squire qui ajouta une deuxième équation, en montrant dans le même temps que le premier mode amplifié est bidimensionnel. Donc la stabilité d'un écoulement parallèle dépend de la fréquence, de la longueur d'onde de ce mode et du nombre de Reynolds défini à partir de l'épaisseur locale de la couche limite. Ainsi la stabilité évaluée à différents  $Re$  prend en compte l'épaississement de la couche limite. Les premières solutions de cette équation de Orr-Sommerfeld furent calculées par Tollmien (1929) et Schlichting (1933) et leur existence vérifiée expérimentalement par Schubauer et Skramstadt (1947). Depuis, des méthodes théoriques plus sophistiquées (asymptotiques, équations de stabilité parabolisées), prenant en compte plus rigoureusement le non-parallélisme de la couche limite, ont démontré la pertinence de cette théorie.

## 4.1 Théorie des petites perturbations

Le profil de vitesse de Blasius est une solution quasi-exacte des équations de Navier-Stokes ; pour de grands nombres de Reynolds, l'erreur commise est liée à l'ordre de troncature dans le développement asymptotique, ici  $Re_x^{-1/2}$ . Pourtant cette solution n'est plus observable expérimentalement au-delà d'une certaine abscisse ou, ce qui est équivalent, au-delà d'un nombre de Reynolds. Pour être observable un écoulement doit vérifier les équations de la dynamique des fluides mais aussi être stable au sens où les petites perturbations doivent s'amortir. Une étude théorique de stabilité se fait selon un schéma classique : on superpose une perturbation infinitésimale ( $\mathbf{u} = [u, v, w, p]$ )   la solution de base. On fait ici l'hypothèse que les perturbations s'adaptent instantanément à l'épaississement de la couche limite, en d'autres termes on considère une couche limite parallèle ( $\mathbf{U} = [U(y), 0, 0, P(x)]$ ). La solution résultante ( $\mathbf{U} + \mathbf{u}$ ) doit vérifier les équations de conservation, on obtient ainsi le système suivant :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{U} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}. \quad (4.2)$$

D'où l'on tire l'équation de Reynolds-Orr pour l'énergie des perturbations dans un écoulement parallèle  $U(y)$  :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{xyz} \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dV = -\rho \int_y U_y \langle uv \rangle dy - \mu \int_y \langle (\nabla \times \vec{\mathbf{u}}) \rangle dy, \quad (4.3)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  désigne une moyenne en  $x$  et en  $z$ . Les perturbations sont amplifiées si et seulement si le terme de production  $\rho \int_y U_y \langle uv \rangle dy$  domine le terme de dissipation  $-\mu \int_y \langle (\nabla \times \vec{\mathbf{u}}) \rangle dy$ . Cette équation nous permettra d'interpréter les différents mécanismes de croissance des perturbations.

Dans la suite on suppose que les perturbations sont infinitésimales, on néglige ainsi les termes non-linéaires  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ .

## 4.2 Echelles caractéristiques

Afin de généraliser nos résultats, on réécrit le problème sous forme adimensionnelle. Ce traitement des équations permet de repérer les similitudes entre écoulements, ainsi que les phénomènes physiques prépondérants et leurs paramètres de contrôle. Comme pour la solution de base, on utilise comme échelle caractéristique de vitesse la vitesse à l'extérieur de la couche limite ( $U_e$ ). D'après les approximations de Prandtl, on dispose de deux échelles de longueur : une échelle d'advection ( $x$ ) et une échelle de diffusion ( $\delta \propto \sqrt{\nu x/U_e}$ ). Comme échelle caractéristique dans la direction normale à la paroi, on utilise naturellement l'échelle caractérisant l'épaisseur locale de couche limite  $\delta$ . La question maintenant se pose pour les deux autres directions d'espace, longitudinale  $x$  et transversale  $z$ .

Dans la direction transversale, pour ne pas imposer de restriction d'échelle on utilise également  $\delta$ . On peut ajouter que Luchini en 1996 [77] a utilisé une échelle d'advection ( $L \gg \delta$ ) pour les directions longitudinales et transversales. Il a ainsi obtenu une solution de similitude pour les perturbations tridimensionnelles avec une croissance algébrique en  $x^{0.213}$ . Il a également explicité la réceptivité de ces perturbations en liant leurs amplitudes aux perturbations extérieures. Cette méthode a ensuite été appliquée par Tumin [109] à la couche limite avec gradient pression longitudinal (solution de similitude de Falkner-Skan). Les résultats confirment l'effet stabilisant d'un gradient de pression favorable ( $dP/dx < 0$ ), et inversement.

Pour la direction longitudinale ( $x$ ), on utilisera les deux adimensionnalisations  $\delta$  et  $L$ . Un des objectifs de ce chapitre est de mieux connaître les différences et les domaines d'application de ces deux approches.

A ce stade on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur les perturbations qui dépendent donc des coordonnées d'espace ( $x, y, z$ ) et du temps ( $t$ ). Cependant l'état de base ne dépend que de  $y$  (écoulement parallèle), les équations linéarisées sont donc à coefficients constants par rapport aux variables  $x, z$  et  $t$  et on cherche des solutions sous la forme d'une somme de modes de Fourier :

$$q(x, y, z, t) = \Re \left\{ \sum_{\alpha\beta\omega} \tilde{q}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \right\}.$$

Physiquement on décrit la dynamique d'une perturbation comme l'évolution d'un paquet d'ondes avec  $\alpha$  et  $\beta$  les nombres d'onde dans les directions longitudinale et transversale et  $\omega$  la pulsation. Il est important de noter que ces quantités sont supposées complexes, on doit donc s'interroger sur le type d'instabilité à étudier. Supposons que quelque part dans l'écoulement une faible perturbation déstabilisante apparaisse, son énergie sera advectée vers l'aval avec une certaine vitesse de groupe  $d\omega/d\alpha$ . On peut alors envisager deux possibilités. Dans le premier cas, malgré l'entraînement, la perturbation s'amplifie au cours du temps en tout point de l'écoulement. Cette instabilité est appelée absolue et elle réagit comme un oscillateur. Dans l'autre cas la vitesse d'advection est suffisamment grande pour qu'en tout point de l'espace la perturbation décroisse au cours du temps tout en s'amplifiant vers l'aval. Cette instabilité est appelée convective, elle se comporte comme un amplificateur de bruit.

Pour la couche limite de Blasius, et en général pour toute couche limite non décollée, c'est le deuxième cas que l'on observe, voir par exemple l'article de stabilité bidimensionnelle de Ehrenstein et Gallaire [42]. L'étude de stabilité sera donc spatiale :  $\beta, \omega \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . La partie imaginaire de  $\alpha$  nous donne le taux de croissance de l'instabilité.

Pour un écoulement parallèle, il est possible de se ramener à un problème à deux inconnues pour les perturbations en utilisant une formulation vitesse-vorticité normales ( $v, \eta = u_z - w_x$ ) ou ( $v, \eta = u_z$ ). Selon les échelles de longueur choisies, on obtient alors les équations de Orr-Sommerfeld et Squire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{OS}\tilde{v} &= 0 \\ \mathcal{C}\tilde{v} + \mathcal{L}_{Sq}\tilde{\eta} &= 0\end{aligned}$$

Où  $\mathcal{L}_{OS}$ ,  $\mathcal{L}_{Sq}$  et  $\mathcal{C}$  désignent respectivement les opérateurs de Orr-Sommerfeld, de Squire et de couplage. Ce sont des opérateurs différentiels qui dépendent des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\omega$ . En incluant des conditions aux limites homogènes, on obtient un problème aux valeurs propres  $\mathcal{L}(\alpha)q = 0$ , dans le sens où on cherche des solutions  $(v, \eta)$  non-nulles. Pour obtenir des solutions non triviales, on cherche les  $\alpha$  ( $\beta, \omega$  fixés) tels que l'opérateur  $\mathcal{L}$  soit non inversible, ainsi  $\alpha$  doit vérifier la relation de dispersion  $\det|\mathcal{L}(\alpha)| = 0$ . L'ensemble de toutes les valeurs propres s'appelle le spectre de l'opérateur.

Un des points importants de ce mémoire est l'utilisation et la validation des approximations de couche limite pour les perturbations. Le premier système d'équations, appelé par la suite elliptique, utilise la même échelle dans les trois directions spatiales (*i.e.*  $\delta$ ) :

$$\begin{aligned} [(-i\omega + i\alpha U - Re^{-1}\Delta)\Delta - i\alpha U'']\tilde{v} &= 0 \\ (-i\omega + i\alpha U - Re^{-1}\Delta)\tilde{\eta} &= -i\beta U'\tilde{v}\end{aligned}\tag{4.4}$$

avec  $\Delta = -\alpha^2 + \partial_{yy} - \beta^2$ . C'est la forme classique obtenue au début du  $XX^e$  siècle. La première équation est celle de Orr-Sommerfeld, la deuxième celle de Squire. Le deuxième système, appelé parabolique, utilise les approximations de Prandtl ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} [(-i\omega_L + i\alpha_L U - \Delta_L)\Delta_L - i\alpha_L U'']\tilde{v} &= 0 \\ (-i\omega_L + i\alpha_L U - \Delta_L)\tilde{u} &= -U'\tilde{v}\end{aligned}\tag{4.5}$$

avec  $\Delta_L = \partial_{yy} - \beta^2$ , l'opérateur de diffusion réduit aux directions normales à l'écoulement. On a les relations suivantes :  $\omega_L = \omega Re$  et  $\alpha_L = \alpha Re$ . On peut noter que le nombre de Reynolds, absent dans le deuxième système, est en fait contenu dans les échelles. Pour comparer ces deux modèles, on trace leur spectre *c.f.* figure 4.2.

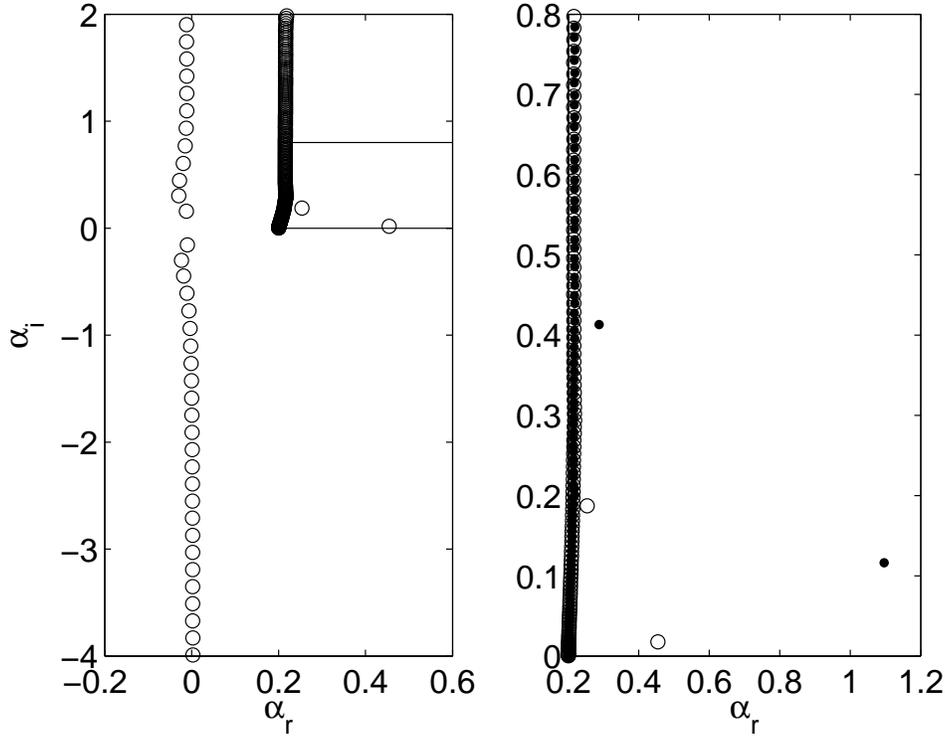


FIG. 4.2 – Spectre des valeurs propres dans le plan partie réelle  $\alpha_r$ , partie imaginaire  $\alpha_i$  pour  $Re_{\delta_1} = 400$ ,  $\omega = 0.2$  et  $\beta = 0$ . Les  $\circ$  correspondent au système d'équations elliptiques (4.4), les  $\bullet$  au système parabolique (4.5). A droite on a agrandi la partie du spectre correspondant à la zone encadrée sur la figure de gauche.

On constate quelques différences. Le deuxième modèle (4.5) ne donne pas la branche de mode  $\alpha_r \approx 0$ . De plus les modes discrets sont mal calculés, notamment le mode TS ( $\alpha_r = 0.4545$ ). Cependant on a un bon accord pour la branche continue  $\alpha_r = \omega$ . Ces différences sont liées à la nature du système d'équations. Celle-ci peut s'interpréter physiquement par la façon dont se propagent les informations dans le milieu. Pour un système elliptique l'information en un point se propage dans toutes les directions (exemple : un goutte de colorant dans un verre d'eau), alors qu'un système parabolique modélise un problème pour lequel les informations se propagent suivant une direction privilégiée, souvent la direction de l'écoulement (exemple : une goutte de colorant dans un jet, si on néglige la diffusion de nature elliptique). Pour comprendre la zoologie de ces modes, on analyse le cas d'un modèle simplifié où l'écoulement de base est supposé constant, on peut alors utiliser la transformée de Fourier dans la direction normale :  $\exp(i\gamma y)$ , avec  $\gamma$  le nombre d'onde dans la direction  $y$ . Pour le modèle elliptique on obtient 4 modes :

$$\alpha_{1,2} = \pm i(\gamma^2 + \beta^2) \quad ; \quad \alpha_{3,4} = \frac{-iU Re \pm i\sqrt{U^2 Re^2 + 4(\gamma^2 + \beta^2 - i\omega Re)}}{2}$$

et un seul pour le modèle parabolique :

$$\alpha_L = \frac{\omega + i(\gamma^2 + \beta^2)}{U}$$

On retrouve la caractéristique d'un système parabolique : l'information se propage dans une seule direction qui est déterminée par la vitesse de groupe :  $c_g = d\omega/d\alpha$ . Pour le modèle elliptique, on a donc une vitesse de groupe infinie pour les modes 1 et 2 qui correspondent en fait à des modes de pression dans un écoulement incompressible (la pression est solution de l'équation  $(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2)p = 0$ ). En faisant l'hypothèse  $U Re \gg 1$  la vitesse de groupe des modes 3 et 4 s'écrit simplement :  $c_{g,3} = U$  et  $c_{g,4} = -U$ . On a donc respectivement un mode aval et un mode amont, tous deux amortis si on regarde le signe de leur partie imaginaire. Il faut bien faire attention au fait qu'ici, avec une description spatiale de la dynamique des perturbations,  $\alpha_i < 0$  n'implique pas forcément que l'écoulement soit instable. Il faut également prendre en compte le sens de propagation de ce mode. On peut avoir un mode avec  $\alpha_i < 0$ , amorti vers l'amont.

Enfin le mode aval (mode 3) tend vers le mode parabolique pour  $Re \rightarrow \infty$ . Ce résultat se retrouve pour les systèmes 4.4 et 4.5 puisque dans le cas stationnaire l'écart entre les spectres est négligeable pour les modes évoluant vers l'aval.

En plus de la décomposition en modes orthogonaux de Fourier, après le calcul des modes propres  $\tilde{q}_n$  et valeurs propres  $\alpha_n$ , ces modes formant une base, on peut exprimer toute perturbation sous la forme :

$$q(x) = \sum_n \kappa_n \tilde{q}_n e^{i(\alpha_n x)}$$

Dans un premier temps on abordera la stabilité classique (modèle elliptique) de l'écoulement de couche limite : l'état de base est stable au sens de Lyapounov si une perturbation infinitésimale reste bornée au cours de son évolution. De plus si toute perturbation s'amortit le système est asymptotiquement stable.

Dans un deuxième temps on traitera le comportement transitoire de la perturbation et on comparera les modèles elliptique et parabolique.

### 4.3 Analyse asymptotique : ondes de Tollmien-Schlichting

Après avoir écrit le système linéarisé, la deuxième étape d'une étude de stabilité linéaire classique consiste à rechercher s'il existe éventuellement des modes croissants, synonymes d'instabilités, ce qui revient à s'intéresser au comportement asymptotique des perturbations :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \tilde{q}_1 e^{i(\alpha_1 x)}$$

En d'autres termes on recherche le mode  $\alpha_1$  le moins stable, ce type d'approche est également appelé étude modale puisque l'on étudie seulement le mode le plus instable. Il est implicitement convenu ici que seuls les modes se propageant vers l'aval sont considérés. Ce mode est solution de l'équation de Orr-Sommerfeld seule puisque le théorème de Squire montre que s'il existe un mode 3D instable pour un certain un nombre de Reynolds, alors il existe un mode 2D instable pour un nombre de Reynolds inférieur. De plus la transformation de Squire permet de se ramener à un problème bidimensionnel (*i.e.* on pose  $\beta = 0$ ). Ainsi l'écoulement peut être stable ou instable selon les valeurs de deux paramètres : la pulsation ( $\omega$ ) et le nombre de Reynolds ( $Re$ ). En décomposant  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ , on peut écrire le critère de stabilité en fonction du signe de  $\alpha_i$  : si tous les  $\alpha_i$  sont positifs alors les perturbations sont amorties, s'il existe un seul  $\alpha_i$  négatif alors l'écoulement est instable. Un des premiers résultats qu'on peut tirer du calcul de  $\alpha$  est donné par la courbe de stabilité neutre ( $\text{iso-}\alpha_i = 0$ ) qui délimite le domaine d'instabilité ( $\alpha_i < 0$ ) de la couche limite en

fonction du nombre de Reynolds et pour différentes fréquences de l'onde. Cette courbe, tracée sur la figure 4.3 pour le profil de Blasius, indique que l'écoulement est stable pour tout nombre de Reynolds inférieur à une certaine valeur critique. Les paramètres critiques adimensionnés sont :  $\alpha_c = 0.303$ ,  $\omega_c = 0.12$  pour un  $Re_{\delta_1} = 519.4$ . Ce mode instable est appelé onde de Tollmien-Schlichting (1929), il est bidimensionnel et se déplace vers l'aval à une vitesse de l'ordre de  $0.3U_e$ .

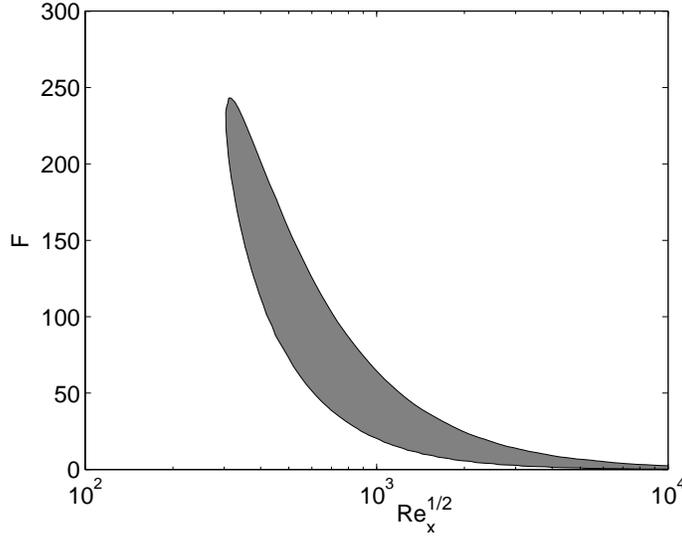


FIG. 4.3 – Courbe de stabilité neutre du profil de Blasius dans le plan Reynolds-fréquence, avec  $\sqrt{Re_x} = Re_\delta$  et  $F = 10^6 \omega / Re_\delta$ .

On peut ajouter un mot sur le mécanisme physique de l'origine de ce mode TS. Pour les écoulements parallèles il existe un mécanisme non visqueux d'instabilité, décrit par Rayleigh et Fjortorf, lié à la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse. On peut l'observer dans les écoulements cisailés libres tels que la couche de mélange, les jets ou les sillages. Dans ces cas la viscosité ne joue qu'un rôle diffusif et atténue le taux de croissance. Dans le cas d'un écoulement pariétal, la situation est différente. Le profil de Blasius par exemple est stable d'après le critère de Rayleigh. La déstabilisation de l'écoulement est paradoxalement liée aux effets visqueux. Plus exactement c'est le résultat d'un compromis entre la diffusion visqueuse qui a un effet stabilisant et la condition d'adhérence à la paroi qui crée un déphasage entre les composantes de vitesse et qui entraîne un terme de production positif dans l'équation (4.3) de Reynolds-Orr :

$$- \langle uv \rangle = \|u\| \|v\| \cos[\phi_u(y) - \phi_v(y)] \neq 0$$

Ce déphasage est illustré sur la figure 4.4. Ainsi la viscosité du fluide joue un rôle stabilisant et déstabilisant pour les perturbations dans la couche limite. On peut alors se demander si le nombre de Reynolds est le paramètre pertinent pour décrire l'instabilité. En fait c'est le cas. En effet on peut considérer que la condition d'adhérence, moteur de l'instabilité, est liée à la nature physique visqueuse du fluide alors que les effets dissipatifs sont déterminés par le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, caractérisé par ce fameux nombre de Reynolds. Enfin on notera que la nature visqueuse de l'instabilité se traduit par une fermeture de la courbe neutre (figure 4.3) pour  $Re \rightarrow \infty$ .

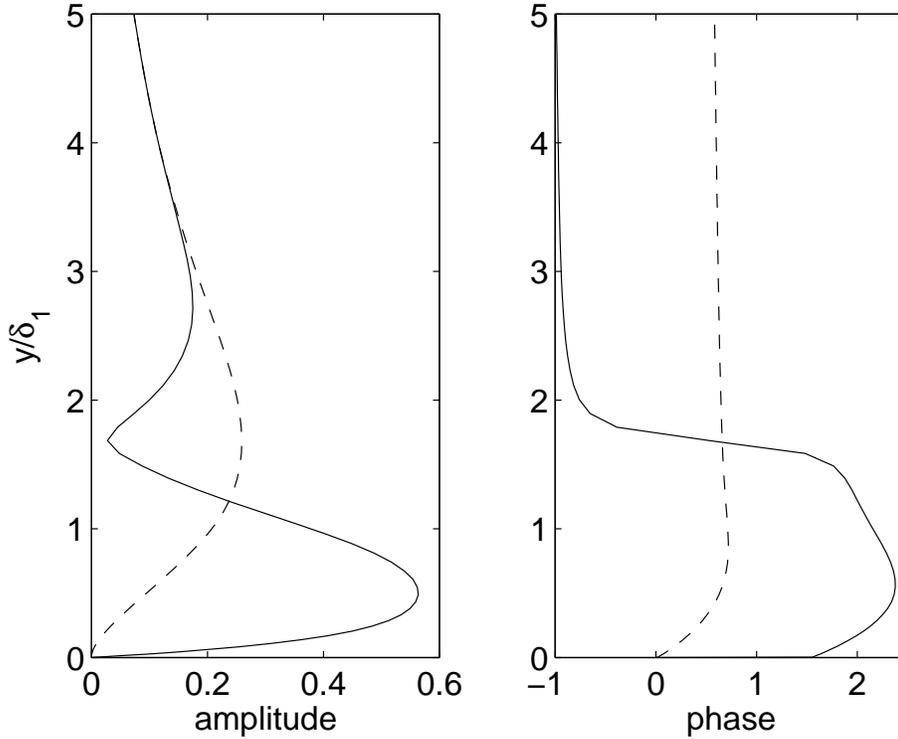


FIG. 4.4 – Amplitude ou module de l’onde TS et sa phase pour  $Re_{\delta_1} = 400$ ,  $\omega = 0.2$ . Le trait continu représente la vitesse longitudinale  $u$ , le trait discontinu la vitesse normale  $v$ . Le changement de phase indique que l’amplitude de  $u$  change de signe autour du point  $y/\delta_1 \approx 1.7$ .

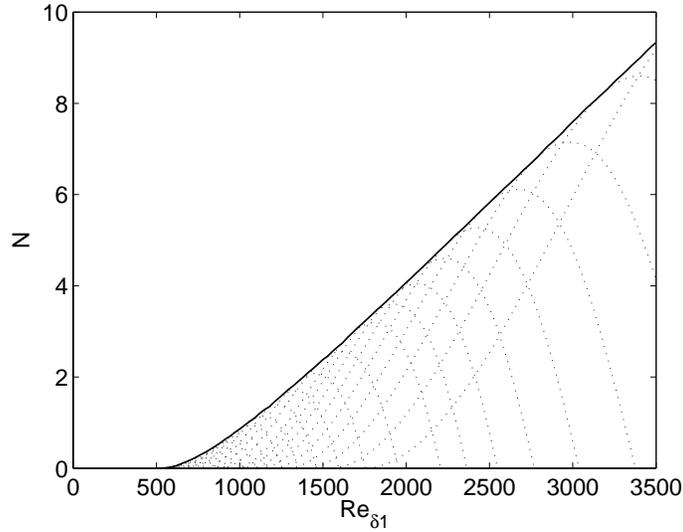
Le taux de croissance local d’une onde peut être relié à son amplitude  $A$  par la relation :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = -\alpha_i$$

On peut donc calculer une amplitude relative, pour chaque fréquence :

$$N(x, f) = \ln \frac{A(x, f)}{A(x_0, f)} = - \int_{x_0}^x \alpha_i(\xi, f) d\xi$$

On a fait l’hypothèse que  $\alpha_i$  est localement constant. Néanmoins il évolue sur de grandes variations de  $x$ , en conséquence l’amplitude ne croît pas exponentiellement. De plus la nature linéaire des équations, qui sont donc définies à une constante multiplicative près, ne permet pas de calculer une amplitude réelle. La normalisation par  $A(x_0, f)$  est nécessaire et son calcul ne peut se faire que par une théorie de réceptivité. On pourra lire à ce sujet l’article de Hill [59] basé sur les méthodes adjointes. D’un point de vue pratique, malgré les fortes hypothèses sous-jacentes, le calcul du facteur  $N$  permet d’évaluer le point de transition de manière semi-empirique. On suppose que la transition se produit pour un certain rapport d’amplitude critique, en calculant l’enveloppe  $\mathcal{C}(x)$  des courbes  $N(x, f)$  par un balayage en fréquence  $cf$  figure 4.5, on obtient l’abscisse de transition pour  $\mathcal{C}(x_{tr})$  égal à une constante  $N_{tr}$ , déterminée empiriquement entre 7 et 9.

FIG. 4.5 – Courbe enveloppe des facteurs  $N$  des ondes TS.

Mack (1977) [81] a amélioré la méthode par une corrélation entre  $N_{tr}$  et le taux de turbulence extérieure  $Tu$  :

$$N_{tr} = -8.43 - 2.4 \ln Tu \quad \text{pour} \quad 10^{-3} < Tu < 2 \times 10^{-2}.$$

A noter que cette méthode est très efficace pour des écoulements bidimensionnels et stationnaires, pour des cas plus complexes la méthode est plus délicate (voir revue dans Arnal [5]). Enfin des calculs prenant en compte les effets non-parallèles ont montré que, pour l'écoulement de Blasius, ces effets étaient négligeables pour  $Re_{\delta_1} > 600$ .

### Sensibilité de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld

Pour tester l'influence d'incertitudes, inévitablement présentes dans tous les écoulements, on aborde maintenant la sensibilité de l'opérateur de stabilité linéaire. Trefethen et al. [107] ont défini un pseudospectre comme étant la réunion des spectres de l'opérateur perturbé  $\mathcal{L} + \mathcal{E}$  :

$$\Lambda_\epsilon(\mathcal{L}) = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \in \Lambda[\mathcal{L} + \mathcal{E}] \text{ tel que } \|\mathcal{E}\| \leq \epsilon\}$$

La perturbation  $\mathcal{E}$  est telle que sa norme est inférieure à un certain  $\epsilon$  fixé. On peut considérer ces pseudo-spectres comme une incertitude sur l'étude modale des perturbations, mais l'interprétation physique est délicate<sup>1</sup>, par exemple on admet certains couplages non physiques entre les équations de Squire et d'Orr-Sommerfeld. Néanmoins le pseudo-spectre nous montre qu'une faible erreur sur l'opérateur entraîne une incertitude sur la valeur des modes d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est élevé. D'un point de vue numérique cette propriété se traduit par une difficulté pour la convergence des calculs pour de grands nombres de Reynolds (Meseguer et Trefethen [84]). On illustre ce pseudo-spectre pour l'opérateur de Orr-Sommerfeld en traçant, sur la figure 4.6, les contours des domaines de pseudo-modes possibles pour différentes valeurs de  $\epsilon$ .

<sup>1</sup>Une autre définition plus physique a été proposée par Bottaro et al. [22] où l'incertitude porte sur l'écoulement de base, on obtient ainsi une perturbation structurée de l'opérateur.

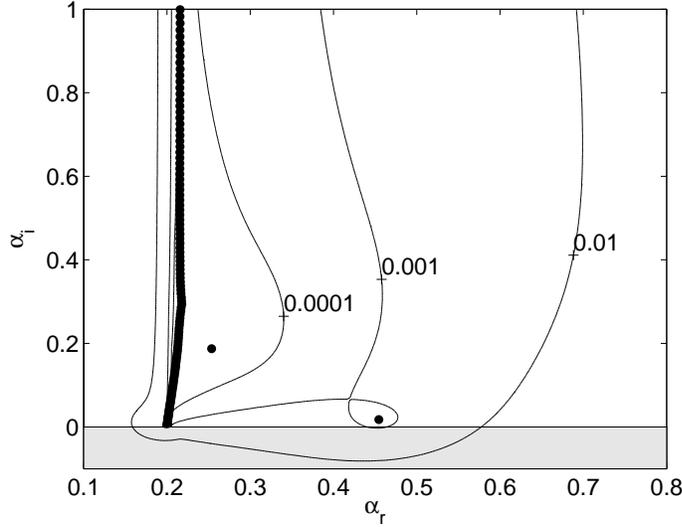


FIG. 4.6 – Spectre de de l'opérateur de Orr-Sommerfeld (points) avec  $Re_{\delta_1} = 400$ ,  $\omega = 0.2$ . L'ensemble du pseudo-spectre est représenté par des iso-contours désignant la norme de l'opérateur  $\epsilon$ .

Comme on peut le voir, le spectre de Orr-Sommerfeld révèle une forte sensibilité aux perturbations ; pour une perturbation de norme  $10^{-2}$  on a même la possibilité de pseudo-modes instables. Ceci est lié à la présence de vecteurs propres non orthogonaux. Si l'opérateur  $\mathcal{L}$  est normal, alors le pseudo-spectre est l'ensemble de tous les points situés à une distance inférieure à  $\epsilon$  du spectre  $\Lambda(\mathcal{L})$ , mais dans le cas d'un opérateur non-normal cet ensemble est plus grand. Cette propriété est liée au terme  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  de l'équation 4.1. La matrice  $\nabla\mathbf{U}$  est généralement non symétrique (Grossmann [54]), par exemple pour un écoulement cisailé parallèle  $U(y)$  on a :

$$\nabla\mathbf{U} = \begin{vmatrix} 0 & U' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Cette dissymétrie est transférée à l'opérateur  $\mathcal{L}$ , ce qui implique sa non normalité. Une autre conséquence de la non normalité des fonctions propres se traduit par un phénomène de croissance transitoire de l'énergie des perturbations qui n'est pas décrit par une approche modale. On définit  $E$ , l'énergie des perturbations :  $E = \langle u_i, u_j \rangle$  où  $u_i$  sont les vecteurs propres de  $\mathcal{L}$ . Si  $\mathcal{L}$  est non-normal alors on a :  $\langle u_i, u_j \rangle \neq \delta_{ij}$  ainsi l'énergie totale des perturbations n'est pas égale à la somme des énergies de chaque mode. On a une interférence constructive ou destructive de plusieurs modes (on parle parfois d'étude de stabilité multi-modale). C'est ainsi qu'on peut observer une étape de croissance spatiale transitoire de l'énergie des perturbations suivie du comportement asymptotique prévu par une étude modale. Cependant si cette croissance est trop importante, les effets non-linéaires peuvent provoquer une transition dite 'bypass' de l'écoulement laminaire vers un état turbulent. On est alors amené à rechercher quelle est la perturbation initiale (en  $x = 0$ ) qui maximise l'énergie des perturbations à une certaine abscisse ( $x$ ).

## 4.4 Analyse multi-modale : stries longitudinales

On rappelle que toute perturbation peut s'exprimer sur la base des fonctions propres :

$$q(x) = \sum_n \kappa_n \tilde{q}_n e^{i(\alpha_n x)}$$

Où  $\alpha_n$  et  $\tilde{q}_n$  sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres qui satisfont la relation de dispersion  $\mathcal{L}(\alpha_n)\tilde{q}_n = 0$ . La perturbation est décomposée sur la base réduite des modes évoluant vers l'aval. Les poids  $\kappa_n$  sont calculés de sorte à maximiser le gain défini comme :

$$G(x) = \frac{E(x)}{E(0)}. \quad (4.6)$$

où  $E$  désigne l'énergie des perturbations basée sur le produit scalaire :

$$(a, b) = \int_{t=0}^{t=2\pi/\omega} \int_{z=0}^{z=2\pi/\beta} \int_{y=0}^{y=\infty} \bar{a}^T b \, dy \, dz \, dt = \frac{4\pi^2}{\beta\omega} \int_y \bar{a}^T b \, dy,$$

avec  $\bar{\bullet}^T$ , le conjugué transposé.

En fonction des échelles utilisées, on obtient deux expressions pour l'énergie adimensionnée :

-pour le modèle elliptique (4.4)

$$E = \frac{4\pi^2}{\beta\omega} \int_y (\bar{u}^T u + \bar{v}^T v + \bar{w}^T w) \, dy$$

-pour le modèle parabolique (4.5)

$$E = \frac{4\pi^2}{\beta\omega} \int_y \left( \bar{u}^T u + \frac{1}{Re^2} (\bar{v}^T v + \bar{w}^T w) \right) dy$$

Avec le modèle parabolique et pour de grands nombres de Reynolds le gain maximal, qui correspond au minimum du dénominateur du gain, est donné par [78] :

$$G(x; \omega, \beta) = Re^2 \frac{\int_y \bar{u}^T u + \frac{1}{Re^2} (\bar{v}^T v + \bar{w}^T w) \, dy|_x}{\int_y \bar{v}^T v + \bar{w}^T w \, dy|_0}$$

soit à l'ordre 1 :

$$G(x; \omega, \beta)/Re^2 = \frac{\int_y \bar{u}^T u \, dy|_x}{\int_y \bar{v}^T v + \bar{w}^T w \, dy|_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Re^2}\right) \quad (4.7)$$

Sous cette forme, on remarque que le gain maximal est proportionnel au carré du nombre de Reynolds. Si on avait conservé le terme  $\bar{u}^T u$  au dénominateur, on aurait obtenu un gain maximal de l'ordre de 1.

La méthode de calcul des perturbations optimales basée sur la décomposition en valeur singulière [91] est présentée en annexe A.

Étant donnée la nature du problème considéré, il a été montré par Reshotko and Tumin [93] que seuls les modes évoluant vers l'aval doivent être conservés dans la projection des perturbations ( $\mathbf{q}$ ). Cette condition est nécessairement vérifiée dans le cas des équations paraboliques, alors que pour le problème elliptique, l'existence de modes avec  $\alpha_i < 0$  (un

exemple est tracé dans la figure 4.2) est liée au fait que le problème aux valeurs initiales est mal posé en spatial puisque les perturbations peuvent se propager vers l'aval et/ou vers l'amont. Dans des applications numériques la sommation doit être tronquée, on s'assure néanmoins que la convergence est atteinte.

Dans l'étude de stabilité classique, on se limite à des perturbations bidimensionnelles (équation de Orr-Sommerfeld avec un nombre d'onde transversal  $\beta$  nul, en se basant sur le théorème de Squire). Mais dans le cas d'une étude multi-modale, cette restriction n'est plus justifiée et on observe les plus fortes croissances transitoires pour des perturbations tridimensionnelles. En effet les perturbations optimales pour des écoulements cisailés (Couette, Poiseuille, Blasius...) ont toujours la même forme (Corbett et Bottaro [35], Butler & Farrell [28], Trefethen et al. [107], Luchini [78]). Ce sont des tourbillons stationnaires allongés dans la direction de l'écoulement. Comme on l'a déjà signalé, l'interaction entre des tourbillons incidents et un écoulement cisailé se traduit par le développement de stries de hautes et basses vitesses longitudinales créées par un effet 'lift-up', ou de redistribution de la vorticité. On illustre sur la figure 4.7 l'évolution de ces perturbations pour la solution de Blasius, on trace également les perturbations optimales associées.

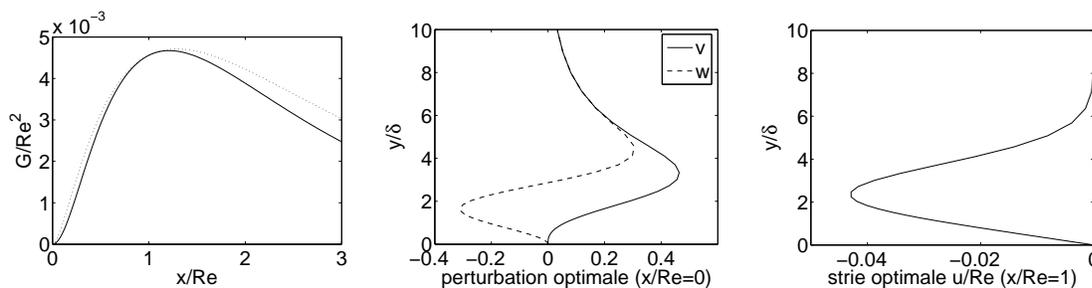


FIG. 4.7 – Gain maximal global, et l'enveloppe des maxima locaux en traits discontinus, tracés en fonction de  $x$ . Perturbations optimales et stries optimales associées.

Le gain est proportionnel au nombre de Reynolds longitudinal  $Re_x = U_e x / \nu = Re^2$ , comme on peut le voir par exemple sur la figure 4.9 de gauche.  $G_{max}$  ne dépend donc que du nombre d'onde  $\beta$  et de la pulsation  $\omega$ , l'étude paramétrique est représentée sur la figure 4.8 où on a maximisé le gain en  $x/Re = 1$  pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $\omega$ . Nous reviendrons sur l'interprétation de cette figure au chapitre suivant, pour le cas plus réaliste d'une couche limite non-parallèle.

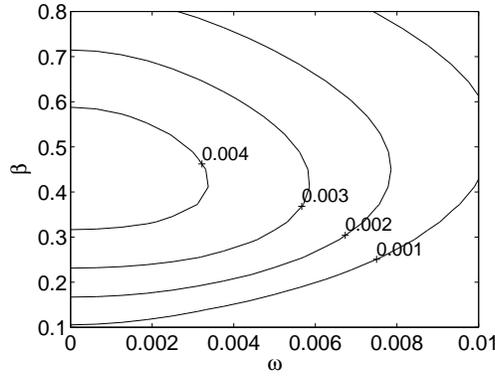
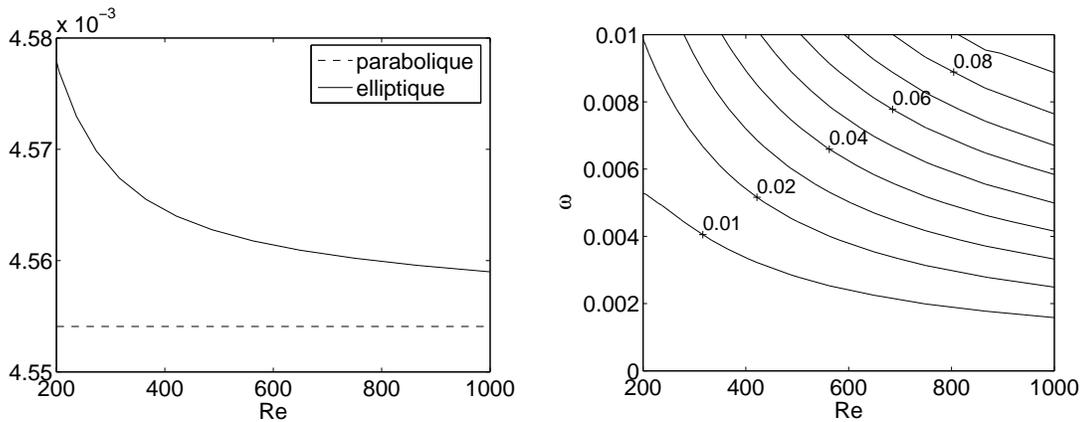
On s'intéresse maintenant au domaine de validité du modèle parabolique dont on rappelle les hypothèses :

- perturbations quasi-stationnaires  $\omega Re \ll 1$ ,
- nombre de Reynolds élevé  $Re \gg 1$ . On voit sur la figure 4.9 que le rapport  $G/Re^2$  est quasi-constant pour  $Re > 300$ . On quantifie l'erreur relative entre le modèle parabolique et le modèle elliptique, supposé exact, par la relation :

$$erreur = \frac{|G_{max}^{parabolique} - G_{max}^{elliptique} / Re^2|}{G_{max}^{elliptique} / Re^2}$$

Cette erreur est représentée sur la partie droite de la figure 4.9.

Dans cette section on a donc validé l'utilisation des approximations de Prandtl pour les perturbations sous la contrainte  $\omega Re \ll 1$ .

FIG. 4.8 – Gain divisé par  $Re^2$  dans le plan  $\omega, \beta$  avec  $Re = 1000$ .FIG. 4.9 – A gauche on compare les gains ( $G/Re^2$ ) obtenus par les modèles parabolique/elliptique en fonction de  $Re$  avec  $\omega = 0$  et  $\beta = 0.45$ . A droite on trace les iso-contours de l'erreur parabolique/elliptique dans le plan  $(Re, \omega)$  avec  $\beta = 0.45$ .

## Synthèse

Dans ce chapitre on a pu comparer les approches modale et multi-modale. L'onde TS est bidimensionnelle instationnaire et s'amplifie exponentiellement au-delà d'un certain nombre de Reynolds critique. Les stries optimales sont stationnaires tridimensionnelles et asymptotiquement stables, leur croissance est algébrique et n'est pas liée à un nombre de Reynolds critique. On doit cependant nuancer cette dernière affirmation puisque l'équation de Reynolds-Orr révèle un nombre de Reynolds minimal de l'ordre de quelques dizaines, en-deçà duquel les effets visqueux dissipent toutes les fluctuations. Enfin on a vu que l'étude multi-modale n'entraîne pas en contradiction avec l'étude modale. Cette dernière nous donne en fait le comportement asymptotique de la première.

On peut ajouter que dans le cas de l'analyse classique on se limite à un seul mode croissant ou décroissant selon le signe de sa valeur propre ( $\alpha_1$ ). Sur cette hypothèse on peut définir un critère de transition basé sur le taux d'amplification de ce mode de pulsation  $\omega$  :

$$\frac{\mathbf{q}(x, \omega)}{\mathbf{q}(x_0, \omega)} = e^{i\alpha_1 x}$$

Par opposition, le problème multi-modal des perturbations avec croissance algébrique n'est

pas un problème de stabilité comme on vient de le présenter : le problème n'est plus de déterminer s'il existe une valeur propre instable. C'est avant tout un problème de réceptivité, ou ce qui est équivalent un problème aux conditions initiales. Par exemple, le taux d'amplification s'exprime :

$$\frac{\mathbf{q}(x, \omega)}{\mathbf{q}(x_0, \omega)} = \frac{\sum \kappa_n q_n e^{i\alpha_n x}}{\sum \kappa_n q_n}$$

Il est donc nécessaire de connaître les poids  $\kappa_n$  si on veut baser un critère de transition sur le principe du  $e^N$ . En d'autres termes on ne peut plus s'affranchir de l'étape de réceptivité.

En conclusion on peut dire que si l'approximation parallèle a été largement validée pour le scénario mono-modal, pour la modélisation des stries cette hypothèse n'est plus valide puisque l'amplitude de la perturbation varie comme l'écoulement de base, en racine de  $x$  (son énergie étant proportionnelle à  $x^2$ ). Nous allons donc aborder dans la prochaine partie le cas de la couche limite non-parallèle.

# Chapitre 5

## Méthode des perturbations optimales

Dans ce chapitre on présente la méthode de calcul des perturbations optimales dans une couche limite non parallèle, décrite par Luchini [78] et Andersson *et al.* [2]. A partir de ces calculs nous verrons de quelle manière les stries influencent les quantités intégrales de la couche limite. Enfin les résultats obtenus seront comparés qualitativement aux expériences réalisées à l'ONERA en 2006.

### 5.1 Problème d'optimisation

#### La méthode des multiplicateurs de Lagrange

Les principes variationnels font partie du quotidien. Par exemple l'optimisation sous contrainte est une façon de répondre à une recherche d'équilibre entre des intérêts contradictoires. De plus les lois de la physique peuvent s'exprimer à travers ces principes qui sont une forme globale de lois locales. On trouvera un panorama dans le livre captivant de Basdevant [10]. On peut citer Fermat qui en 1661 démontra les lois de l'optique géométrique en posant que le chemin effectivement suivi par la lumière est celui qui minimise le temps de parcours. Ces idées se sont imposées sur celles de Descartes puisqu'elles seules pouvaient expliquer l'existence de mirages atmosphériques. Depuis les principes variationnels sont devenus une pièce maîtresse en physique théorique. Euler, Lagrange<sup>1</sup> puis Hamilton ont réinterprété la mécanique de Newton à partir des principes variationnels ; au lieu de chercher la position et la vitesse d'une particule à un instant quelconque, connaissant son état initial, ces derniers ont montré que la trajectoire suivie par cette particule minimise à chaque instant une certaine quantité. Cette approche est connue comme le principe de moindre action. Feynman était réticent durant ses études à l'utilisation de ce principe d'un minimum d'une fonction qui n'avait pas de sens physique pour lui. Il appliqua pourtant avec succès ce principe au problème de l'électrodynamique quantique. Il aboutit ainsi au célèbre concept d'intégrale de chemin ce qui lui valut le prix suédois en 1965. Une perspective formidable serait d'interpréter la turbulence suivant ces principes. En suivant par exemple une voie ouverte par Onsager qui chercha à appliquer le principe du désordre maximal au système hors équilibre. Ce ne sera pas sans soulever quelques problèmes fondamentaux comme la détermination de constantes du mouvement pour des systèmes dissipatifs, ou la détermination de la bonne fonctionnelle à minimiser.

---

<sup>1</sup>A ce propos Basdevant [10] rapporte une anecdote, Euler reçut en 1754 la visite du jeune Lagrange qui lui exposa ses travaux. Enthousiasmé par le talent de cet homme, il dissimula un temps ses propres résultats pour que le mérite en revienne au seul Lagrange.

### Un exemple simple

Imaginons qu'un fabricant de batteries de cuisine souhaite fabriquer une casserole bon marché. Supposons la casserole cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ , la surface métallique vaut  $S = \pi R^2 + 2\pi RH$  et son volume  $V = H\pi R^2$ . Dans le but de diminuer les coûts de production, il cherchera donc à maximiser la contenance  $V$  pour une certaine surface de matière première  $S = S_0$ .

En d'autres termes, on a donc le problème d'optimisation suivant : on cherche la relation entre les variables  $R$  et  $H$ , qui maximise la fonction  $V = H\pi R^2$  et qui vérifie la relation  $\pi R^2 + 2\pi RH = S_0$ .

Par analogie avec les problèmes qui nous concernent dans cette thèse,  $R$  et  $H$  sont les inconnues, la relation  $\pi R^2 + 2\pi RH = S_0$  correspond à une équation de conservation (problème direct) et  $V$  est le gain.

La fonctionnelle lagrangienne correspondante s'écrit :

$$\mathcal{L}(R, H) = V(R, H) - \lambda(\pi R^2 + 2\pi RH - S_0)$$

$\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange.

À un extremum de la fonctionnelle de Lagrange, les variations de  $\mathcal{L}$  par rapport aux différentes variables vont s'annuler. Ainsi on vérifie que le maximum de la fonction coût est atteint et, dans le même temps, on vérifie les contraintes imposées aux variables.

$$d\mathcal{L}(R, H) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \delta R + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} \delta H = 0$$

Dans l'expression ci-dessus,  $d\mathcal{L}$  représente bien une variation infinitésimale d'une fonction : mathématiquement,  $d\mathcal{L}$  est une différentielle. Par contre il n'existe en général aucune fonction  $R$  ou  $H$  dont  $\delta R$  et  $\delta H$  seraient les variations : mathématiquement,  $\delta R$  et  $\delta H$  sont des formes différentielles. Cette distinction se retrouve fréquemment en thermodynamique, par exemple, le premier principe implique que la différentielle de l'énergie cinétique est égale à la somme des formes différentielles du travail et de la chaleur.

Si  $d\mathcal{L} = 0$ , cela implique que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \delta R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} \delta H = 0$ , on obtient alors les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \delta R = 0 \Leftrightarrow 2\pi HR - \lambda(2\pi R + 2\pi H)(\pi R^2 + 2\pi RH - S_0) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H} \delta H = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \lambda(2\pi R)(\pi R^2 + 2\pi RH - S_0) = 0$$

La deuxième équation nous donne :  $\lambda = R/2$  et on obtient au final :  $R = H$ . On pourra vérifier dans le commerce que les casseroles les moins chères vérifient ce rapport d'aspect. Ce problème nous a permis d'illustrer le principe de la méthode : on cherche à résoudre un problème sous contrainte. En appliquant les principes variationnels on obtient deux problèmes à résoudre sans contraintes : on introduit ainsi une nouvelle inconnue : le multiplicateur de Lagrange.

### Application au problème des perturbations optimales

On rappelle l'expression l'énergie adimensionnée donnée au chapitre 2 :

$$E = \frac{1}{2} \left( u^2 + \frac{1}{Re}(v^2 + w^2) \right),$$

où le nombre de Reynolds est  $Re_L = U_e L / \nu$ .

On définit le gain ou facteur d'amplification des perturbations comme le rapport entre l'énergie moyenne et l'énergie des perturbations incidentes en  $x = 0^-$ , ce qui s'écrit :

$$G = \frac{\int u^2 + Re_L^{-1}(v^2 + w^2)d\mathcal{V}}{\left[ \int_{y,z,t} u^2 + Re_L^{-1}(v^2 + w^2)dy dz dt \right]_{x=0^-}}$$

Luchini [78] a montré que pour être cohérent avec les approximations de Prandtl, le gain se réécrit (voir également chapitre 4 équation 4.7) :

$$G_{max} = Re_L \frac{\int u^2 d\mathcal{V}}{\left[ \int_{y,z,t} v^2 + w^2 dy dz dt \right]_{x=0^-}}$$

avec une erreur en  $1/Re_L$ .

Au paragraphe suivant on utilisera d'autres définitions de gain mais le principe de la méthode développée sur cet exemple reste le même.

Ainsi l'enveloppe du gain  $max_{\forall \beta} G(x, \beta)$  est proportionnelle à  $Re_x$ , en accord avec les expériences. Andersson *al.* [2] n'ont pas utilisé les approximations de Prandtl, ils ont néanmoins retrouvé ce résultat par une étude paramétrique sur le nombre de Reynolds

Pour le calcul des perturbations optimales on se restreint aux cas des petites perturbations : on utilise les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de Blasius noté :  $[U V P]$ . Cet état base est étant stationnaire et bidimensionnel, les coefficients de ces équations ne dépendent ni du temps ( $t$ ) ni de la coordonnées transversale ( $z$ ). On peut donc décrire les perturbations sous la forme d'une somme de modes orthogonaux de Fourier en  $e^{i(\beta z - \omega t)}$ . Ces équations s'écrivent :

$$u_x + v_y + i\beta w = 0 \quad (5.1)$$

$$i\omega u + (Uu)_x + Vv_y + U_y v = u_{yy} - \beta^2 u \quad (5.2)$$

$$i\omega v + (Vu + Uv)_x + 2(Vv)_y + i\beta Vw = -p_y + v_{yy} - \beta^2 v \quad (5.3)$$

$$i\omega w + (Uw)_x + (Vw)_y = -i\beta p + w_{yy} - \beta^2 w \quad (5.4)$$

Les conditions aux limites associées sont  $u = v = w = 0$  à la paroi et  $u, v, w \rightarrow 0$  à l'extérieur. La pression est définie à une constante additive près puisqu'elle n'intervient que sous forme de gradient dans les équations, on la met à zéro à l'infini, après chaque itération. Ce système est identique à celui de Goertler utilisé dans le cas d'une paroi courbe.

Les équations sont notées sous leur forme discrète :

$$\frac{\partial(A\mathbf{q})}{\partial x} = B\mathbf{q} \quad (5.5)$$

Les perturbations sont normalisées en imposant une énergie initiale (*i.e.*  $x = 0^-$ ) unitaire. Le gain maximal s'écrit alors :  $G_{max}/Re = \int u^2 d\mathcal{V}$ . Le gain, sous une forme discrétisée dans la direction  $y$  devient :

$$G = \int_x \mathbf{q}(x)' Q \mathbf{q}(x) dx$$

où  $Q$  contient les poids d'intégrations sur  $y$ .

L'objectif est maintenant de calculer la perturbation incidente en  $x = 0^-$  qui maximise le gain  $G$ . On obtient un problème d'optimisation sans contrainte en utilisant la fonction Lagrangienne

$$\mathcal{L} = G - \left( \mathbf{p}, \left( \frac{\partial(A\mathbf{q})}{\partial x} - B\mathbf{q} \right) \right) \quad (5.6)$$

On se ramène à un problème d'optimisation sans contrainte en introduisant une nouvelle fonction, l'adjoint noté  $\mathbf{p}$ . On cherche à résoudre :

$$d\mathcal{L}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p} = 0$$

La variation de  $\mathcal{L}$  par rapport à la variable adjointe  $\mathbf{p}$  nous redonne l'équation du problème direct. En calculant  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}}$ , et en définissant un produit scalaire comme  $(a, b) = \int_x \bar{a}^T b \, dx$ , on obtient l'équation du problème adjoint :

$$-\bar{A}^T \mathbf{p}_x = \bar{B}^T \mathbf{p} + 2Q\mathbf{q}$$

avec sa condition terminale  $p(1) = 0$ , ainsi que la condition d'optimalité liant la perturbation optimale à  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{q}(x = 0) = Q^{-1} \bar{A}^T \mathbf{p}(x = 0)$$

Le signe  $-$  devant le terme de dérivation par rapport à  $x$  de la variable adjointe signifie que le problème adjoint, parabolique également, doit s'intégrer de l'aval vers l'amont. La solution optimale peut alors aisément se calculer par des itérations direct/adjoint<sup>2</sup>.

En pratique on fait les calculs en  $x = 0^+ \approx 10^{-4}$  puis on utilise la condition de saut donnée précédemment *cf.* équation (2.2). Le critère d'arrêt, fixé à  $10^{-4}$ , porte sur la convergence du gain, il est atteint en quelques itérations.

Les perturbations optimales en entrée, comme dans le cas de la couche limite parallèle, sont des tourbillons longitudinaux et les perturbations résultantes en sortie sont des stries. Dans la suite on réalise une étude paramétrique à partir de ces calculs d'optimalité.

## 5.2 Application à la couche limite de Blasius

Comme la dépendance en nombre de Reynolds est contenue implicitement dans les échelles, les seuls paramètres sont le nombre d'onde transversal ( $\beta$ ) et la pulsation ( $\omega$ ). Comme dans le chapitre précédent (figure 4.8), on trace sur la figure 5.1 la courbe des iso-valeurs du gain dans le plan  $(\omega, \beta)$ .

On rappelle que le gain représenté est proportionnel à  $Re_L = U_e L / \nu$ . D'autre part l'adimensionnalisation utilisée nous donne :  $\omega = \omega^* (Re_L \delta) / U_e$ , et  $\beta = \beta^* \delta$  (les  $*$  désignent des quantités dimensionnées). A titre d'indication, on rappelle également que les paramètres critiques du mode TS pour l'écoulement de Blasius sont :  $\omega = 0.12$ ,  $Re_{\delta_1} = 519.4$ . En ramenant ce résultat aux échelles caractéristiques de la couche limite utilisées ici, le mode TS se développe pour des pulsations adimensionnées  $\omega \approx 21$ , au delà du domaine de la figure 5.1.

Premièrement les perturbations optimales sont stationnaires puisqu'une oscillation temporelle (*i.e.*  $\omega \neq 0$ ) se traduirait, avec l'advection, par des changements de signe de la vitesse normale ( $v$ ) défavorable au développement des stries. Le gain ( $G/Re_x$ ) est donc

<sup>2</sup>On présente en annexe A le principe de cette méthode, en la comparant notamment avec la méthode multi-modale utilisée dans le chapitre 4.

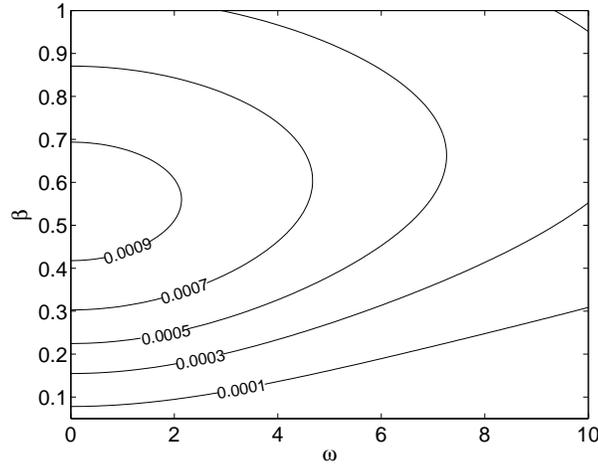


FIG. 5.1 – Courbes d’iso-valeurs du gain défini à partir de l’énergie moyenne des stries dans le plan  $(\omega, \beta)$ .

une fonction décroissante de la pulsation  $(\omega x/U_e)$ . Si on augmente le nombre de Reynolds, ce qui revient à se déplacer le long des  $x$  croissants (pour une vitesse et un fluide donnés), l’étalement en fréquence des stries optimales se réduit. En d’autres termes si la turbulence extérieure pénètre dans la couche limite au bord d’attaque, on observe un filtrage des hautes fréquences au cours du développement de la couche limite. Ceci se retrouve expérimentalement (voir par exemple les résultats obtenus par Arnal et Juillen (1978) [6]) et valide a posteriori l’hypothèse de quasi-stationarité des perturbations.

Deuxièmement on remarque une sélection d’un certain nombre d’onde transversal. Ce  $\beta_{opt} = 0.548$  est le résultat d’un compromis. On peut faire ici une analogie avec l’instabilité de Rayleigh-Bénard d’un fluide, entre deux plaques horizontales, chauffé par le bas. Des rouleaux de convection se développent, augmentant ainsi les transferts thermiques. Dans ce cas aussi le système choisit un certain espacement des tourbillons. Le compromis est le suivant : pour de faibles nombres d’onde les tourbillons sont plus larges ( $\Lambda_z = 2\pi/\beta$ ,  $\lambda$  la longueur d’onde), la vitesse normale est plus faible et les transferts thermiques sont moins efficaces. Pour de grands nombres d’onde, les tourbillons sont plus resserrés et se dissipent plus vite par l’action de la viscosité. Dans le cas des perturbations optimales, c’est le même compromis : les tourbillons optimaux, ceux qui maximisent les transferts de quantités de mouvement, ont une forme quasi-circulaire.

Les calculs précédents ont été réalisés en utilisant comme gain l’énergie des stries moyennées en  $x$  :

$$E_m = \int_{xyzt} u^2 dx dy dz dt,$$

Deux autres définitions sont maintenant examinées, on cherche à maximiser l’énergie finale :

$$E_f = \left[ \int_{yzt} u^2 dy dz dt \right]_{x=L},$$

ou l’amplitude finale des stries :

$$A_f = \max_{\forall y} \left[ \int_{zt} u^2 dz dt \right]_{x=L}.$$

Pour maximiser l'amplitude, on cherche le maximum en un point  $(y_0)$ , ensuite on fait une étude paramétrique sur  $y_0$  pour obtenir le maximum global ( $\forall y$ ).

Pour chaque cas, les paramètres optimaux et les valeurs des gains sont récapitulées dans le tableau 5.1.

TAB. 5.1 – Comparaison de trois définitions de gain

	$\omega_{opt}$	$\beta_{opt}$	$y_{opt}/\delta$	$G_m/Re$	$G_f/Re$	$A_f/\sqrt{Re}$
$E_m$	0	0.548	2.25	$1.00^{-3}$	0.0019	0.0297
$E_f$	0	0.45	2.25	$9.55^{-4}$	0.0022	0.0313
$A_f$	0	0.45	2.25	$9.57^{-4}$	0.0022	0.031

L'optimisation de l'amplitude finale donne exactement les mêmes résultats que l'optimisation de l'énergie finale, c'est une conséquence de la nature auto-semblable du profil des stries. La courbe d'iso-gain, basé sur l'énergie finale, dans le plan  $(\omega, \beta)$  (figure 5.2) est similaire à la figure 5.1.

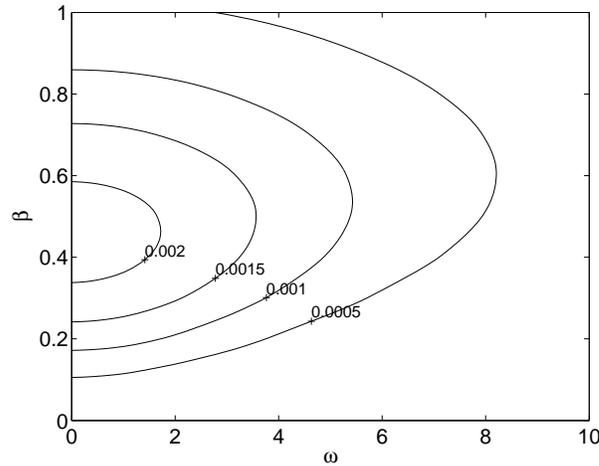


FIG. 5.2 – Courbes d'iso-valeurs du gain défini à partir de l'énergie finale des stries dans le plan  $(\omega, \beta)$ .

Les différentes définitions du gain n'ayant pas d'influence sur les résultats, (ou une légère influence sur  $\beta_{opt}$ ), on conservera la définition de l'énergie moyennée ( $E_m$ ) sur  $x$  dont la validité est plus générale puisqu'elle s'applique également aux problèmes de contrôle [30].

De plus sur la figure 5.3 on compare l'allure des stries obtenues ainsi que le mode de Stewartson [101]. Ce mode, obtenu par une perturbation bidimensionnelle des équations de Blasius donne une bonne représentation du profil des stries (voir Luchini [77] [78]), nous y reviendrons dans la dernière partie de ce chapitre. La courbe correspondant au gain basé sur le maximum de l'amplitude  $A_f$  (non tracée) est confondue avec celle correspondant au maximum de l'énergie finale  $E_f$ .

On constate que le profil des stries normalisé est peu sensible aux variations du nombre d'onde  $\beta$  et de la pulsation  $\omega$ .

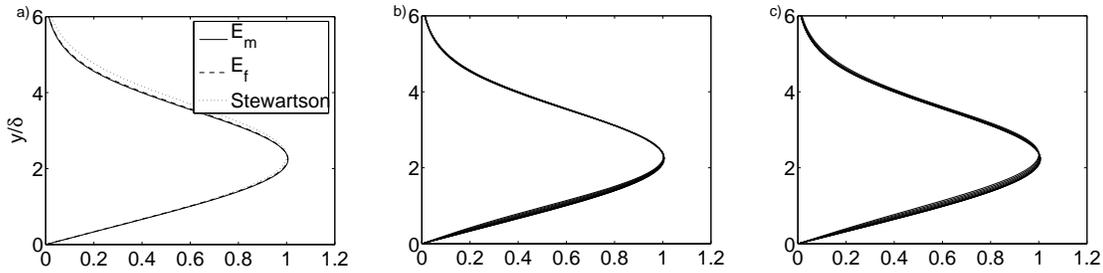


FIG. 5.3 – Comparaisons des stries finales normalisées avec leur valeur maximale pour différentes définitions du gain (a), différentes valeurs de  $\omega$  comprises entre 0 et 2 ( $\beta = 0.54$ ) (b) et pour différentes valeurs de  $\beta$  comprises entre 0.1 et 1, ( $\omega = 0$ ) (c).

## Mécanisme physique

En résumé les deux principales caractéristiques des stries décrites par les équations parabolisées sont les suivantes : leurs profils sont auto-semblables et semble-t-il universels. L'enveloppe de l'énergie, sur les nombres d'onde  $\beta$ , est proportionnelle à  $Re_x$  avec un nombre d'onde transversal optimal qui varie proportionnellement à l'épaisseur de couche limite, dans la limite de l'hypothèse des petites perturbations. Enfin les stries optimales sont stationnaires (voir figures 5.2 et 5.1). Sur la figure 5.4 sont représentés dans la section d'entrée les tourbillons optimaux, et dans la section de sortie les stries résultantes. On peut noter que les tourbillons optimaux sont plus tassés près de la paroi dans une couche limite non-parallèle par rapport à la forme quasi-circulaire du cas parallèle.

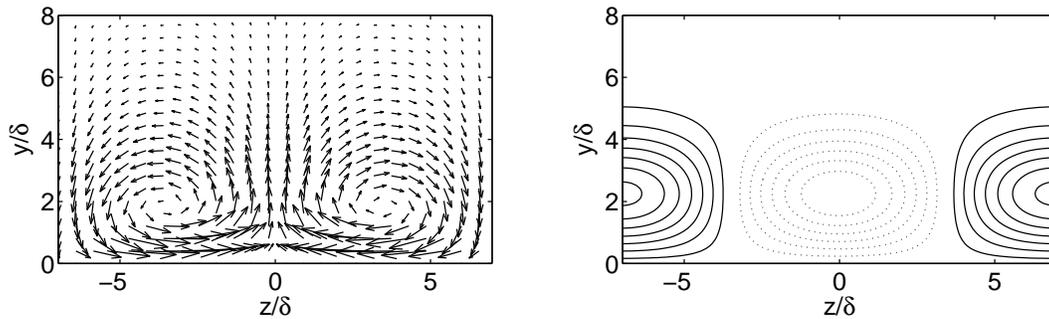


FIG. 5.4 – Perturbation optimale (à gauche) sous la forme de vecteurs  $(v, w)$ , dans le plan  $(y, z)$ . Stries résultantes (à droite) sous la forme d'iso-contours de la vitesse longitudinale  $(u)$  positive (traits pleins) et négative (traits pointillés).

Dans la suite on présente, sous différentes formes, le mécanisme de formation des stries dans un écoulement cisailé.

## Modèle non-visqueux

La phase initiale de la croissance algébrique de stries superposées à un écoulement parallèle  $U(y)$  peut se décrire en utilisant les équations d'Euler linéarisées (*cf.* Biau et Bottaro

[16]). Une longue échelle longitudinale ( $L$ ) est utilisée pour normaliser les distances dans la direction longitudinale et une courte échelle ( $L\epsilon$ ) est utilisée dans les deux autres directions. En conséquence les échelles de vitesse sont de l'ordre  $U_0$  dans la direction longitudinale et  $U_0\epsilon$  dans les autres directions. Ici  $\epsilon$ , supposé très petit devant 1, est un paramètre non défini, c'est l'analogie de l'inverse du nombre de Reynolds dans le cas visqueux. Au premier ordre les équations pour des perturbations stationnaires sont :

$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0, \\ U\partial_x u + vU' &= 0, \\ U\partial_x v + \partial_y p &= 0, \\ U\partial_x w + \partial_z p &= 0,\end{aligned}$$

Suivant l'analyse de Libby et Fox [76] ou Luchini [77] pour le cas de la couche limite, on cherche des solutions sous une forme algébrique en  $x$  :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= x^\lambda \tilde{u}(y) e^{i\beta z}, \\ v(x, y, z) &= x^{\lambda-1} \tilde{v}(y) e^{i\beta z}, \\ w(x, y, z) &= x^{\lambda-1} \tilde{w}(y) e^{i\beta z}, \\ p(x, y, z) &= x^{\lambda-2} \tilde{p}(y) e^{i\beta z},\end{aligned}$$

avec  $\beta$  le nombre d'onde transversal. En injectant cette solution dans les équations précédentes, on constate que la seule valeur admissible pour  $\lambda$  est  $\lambda = 1$ , ainsi la solution de ce système s'écrit :

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= -x \frac{U'}{U} \tilde{v} e^{i\beta z}, \\ v(x, y, z) &= \tilde{v} e^{i\beta z}, \\ w(x, y, z) &= \frac{i}{\beta} \left( \partial_y - \frac{U'}{U} \right) \tilde{v} e^{i\beta z}, \\ p(x, y, z) &= 0.\end{aligned}$$

Toute fonction  $\tilde{v}(y)$  qui satisfait la condition de Dirichlet homogène à la paroi est une solution acceptable. Le point important c'est que la strie  $u$  croît en  $x$  en extrayant de l'énergie de l'écoulement de base, alors que les autres composantes de vitesse,  $v$  et  $w$ , ne varient pas le long de l'écoulement.

Cette analyse non-visqueuse est bien sûr incomplète, les effets visqueux amortissent les fluctuations de vitesse, notamment  $v$ , et on observe alors le phénomène de croissance transitoire : la croissance algébrique est suivie d'une décroissance exponentielle visqueuse. D'autre part, l'espacement des stries  $\Lambda_z = 2\pi/\beta$  intervient dans ce modèle dans le rapport entre les vitesses  $v$  et  $w$ . Supposons que l'énergie du tourbillon soit constante :  $0.5 \int_V v^2 + w^2 dV = \text{constante}$ . Si  $\beta$  augmente, *i.e.* si la largeur du tourbillon diminue, pour une même énergie l'amplitude de  $w$  diminue et celle de  $v$  augmente, ce qui augmente le transfert d'énergie vers les stries  $u$ . La sélection du nombre d'onde transversal  $\beta$ , pour le cas des perturbations optimales, est donc le résultat d'un compromis entre la croissance algébrique non visqueuse et la dissipation visqueuse. Dans le cas général il faut également prendre en compte la signature spectrale de la perturbation incidente à travers l'étape de réceptivité.

### Vision schématique du transfert de quantité de mouvement

Dans le système d'équations d'Euler linéarisées précédent, on a retrouvé le terme moteur de la création de stries :  $-uvdU/dy$ . Ce terme représente, dans l'équation de Reynolds-Orr [87], un transfert d'énergie de l'écoulement de base vers les perturbations (voir également

chapitre 4 sur les mécanismes de croissance d'énergie des perturbations). D'après les résultats numériques et expérimentaux, ce terme est strictement positif dans la zone précédant la transition (remarque : c'est également vrai dans la plupart des écoulements pariétaux turbulents [31]). Ce résultat peut s'expliquer à partir du schéma de la figure 5.5. Si on suppose une fluctuation de vitesse normale positive ( $v' > 0$ ) en un point quelconque de la couche limite, en négligeant la dissipation visqueuse, la particule fluide est en sous-vitesse par rapport à l'écoulement de base ce qui se traduit par une fluctuation de vitesse longitudinale négative. Le même raisonnement peut être fait dans le cas  $v' < 0$ ,  $u'$  est alors positif. Dans tous les cas on a bien  $-u'v' \leq 0$ .

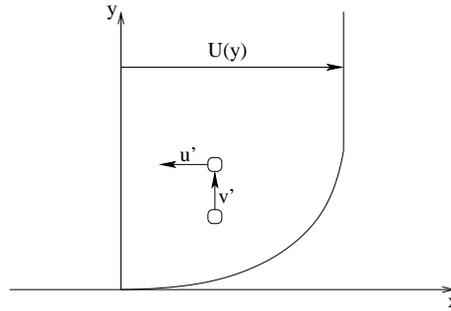


FIG. 5.5 – Schéma du mécanisme de transfert de quantité de mouvement dans écoulement de base cisailé.

On peut ajouter que Waleffe *et al.* [57] ont montré que ce mécanisme était à l'origine du maintien des stries de proche paroi dans les écoulements turbulents développés. Ce mécanisme, dit mécanisme de Orr [87], intervient dans d'autres types d'écoulements, par exemple Antkowiak et Brancher [4] ont identifié un processus 'anti-lift up' à l'origine d'une croissance algébrique de perturbations dans un tourbillon de Lamb-Oseen. Dans ce cas, ce sont des stries (*i.e.* des fluctuations de vitesse azimutale) qui, par des effets centrifuges, génèrent des tourbillons orientés dans la direction azimutale.

### Effet contraire : le basculement de la vorticité

Pour conclure on peut ajouter qu'il existe un effet contraire à la création des stries lié au basculement, par le cisaillement de l'écoulement de base, de la vorticité longitudinale vers la vorticité normale (*cf.* figure 5.6). Ainsi un tourbillon longitudinal intéragit avec la couche limite pour donner des stries de signes opposées à celles obtenues par l'effet lift-up décrit précédemment.

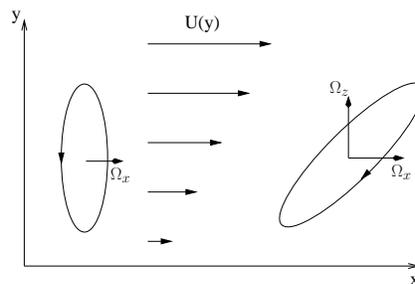


FIG. 5.6 – Schéma du mécanisme basculement de la vorticité dans un écoulement de base cisailé.

## Perturbations optimales non-linéaires - Bibliographie

Zuccher *et al.* [117] ont réalisé des calculs de perturbations optimales non linéaires à partir des équations paraboliques. Ils ont utilisé deux définitions du gain, l'énergie des stries moyenne et l'énergie finale. Les effets non linéaires interviennent pour des énergies initiales adimensionnées supérieures à 10. Les effets non linéaires tendent à déformer l'écoulement en faisant apparaître des structures champignons, comme dans le cas d'une instabilité centrifuge (Gortler ou Dean). Il n'y a pas de mécanisme non linéaire particulier de sélection du nombre d'onde  $\beta$ ; quand l'amplitude initiale augmente, le  $\beta$  optimal décroît légèrement. Quand on augmente l'énergie initiale, le gain maximum diminue par saturation non linéaire. L'énergie du mode  $\beta$  est redistribuée vers les harmoniques et vers le mode 0 comme nous le verrons dans la suite. Cependant les auteurs rappellent que l'apparition d'un plateau dans la courbe de gain n'est pas toujours la signature d'effets non linéaires. Le même plateau est observé pour de grands nombres d'onde dans des calculs linéaires. Les résultats expérimentaux et DNS semblent indiquer que des stries avec des amplitudes d'au moins 20% sont nécessaires pour déclencher la transition. D'après leurs calculs, Zuccher *et al.* obtiennent une valeur critique de l'énergie initiale :  $E_0 Re_L = 23$ . Si on considère les perturbations optimales comme le calcul du pire scénario, cette valeur devrait correspondre à un minimum global.

### 5.3 Influence des stries sur les quantités intégrales

A partir du calcul des stries par la méthode des perturbations optimales, on s'intéresse maintenant à la manière dont ces stries influencent les quantités intégrales. On rappelle leurs définitions dans le cas d'une couche limite bidimensionnelle de Blasius. On a défini une longueur caractéristique dans la direction normale  $\delta = \sqrt{\nu x / U_e}$  à partir de sa nature diffusive, on peut également utiliser l'épaisseur de déplacement :

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = 1.7208 \delta,$$

ou l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = 0.6641 \delta.$$

Le facteur de forme est égal au rapport  $H = \delta_1 / \theta$ , il est constant  $H = 2.591$  pour la couche limite de Blasius.

En présence de stries l'écoulement devient tridimensionnel. On peut donc redéfinir les quantités intégrales de deux manières, soit on calcule ces quantités localement :

$$\begin{aligned} \delta_1(z) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{U(y,z)}{U_\infty}\right) dy, \\ \theta(z) &= \int_0^\infty \frac{U(y,z)}{U_\infty} \left(1 - \frac{U(y,z)}{U_\infty}\right) dy, \\ H(z) &= \delta_1(z) / \theta(z), \end{aligned}$$

soit on les calcule à partir des définitions classiques appliquées à une vitesse moyennée en envergne :

$$\bar{U}(y) = \frac{1}{\Lambda_z} \int_0^{\Lambda_z} U(y,z) dz,$$

où  $\Lambda_z = 2\pi/\beta$  désigne la période spatiale, ou longueur d'onde, des stries.

### Approche analytique

A ce stade, il est intéressant de revenir sur le mode de Stewartson. Pour commencer on rappelle que les équations de Prandtl, pour le cas d'un écoulement extérieur constant (Blasius), sont invariantes par dilatation et par translation. La première propriété n'est que le résultat mathématique des hypothèses de couche limite avec une direction de translation ( $x$ ) et une direction de dilatation ( $y$ ). Ainsi entre deux abscisses les profils de vitesses sont auto-semblables à un facteur de dilatation près en  $y$ . L'invariance par translation est liée à l'uniformité de l'écoulement extérieur. Stewartson [101] en 1957 en a déduit une solution semi-analytique pour un mode stable qui correspond très bien au profil de strie (voir figure 5.3) :

$$u = - \left( \frac{d\delta/dx}{\delta} \right) \eta U_\eta, \quad \eta = y/\delta.$$

Ce mode a également été obtenu par Crow en 1966 [40] en étudiant la croissance linéaire des perturbations induites par une oscillation transversale dans l'écoulement extérieur, dans le but de comprendre l'origine des oscillations transversales rencontrées expérimentalement. Ce mode a été retrouvé par Libby et Fox [76] (1964) et Luchini (1996) [77]. Luchini dans son article sur les perturbations optimales [78] a constaté que le profil caractéristique des stries était très proche de ce mode de Stewartson. On utilise donc ce mode comme modèle analytique de strie :  $U_{St} = A(z)\eta F''$ , où  $F$  est la solution de similitude de Blasius (voir chapitre 4) et  $A$  est une fonction de  $z$  dont la valeur maximale est liée à l'amplitude des stries. Par intégration par parties, on calcule les épaisseurs de déplacement :

$$\delta_1(z) = 1.7208 \delta (1 - A(z))$$

et de quantité de mouvement :

$$\theta(z) = 0.6641 \delta (1 - A(z)).$$

Ainsi on constate qu'au premier ordre en amplitude, les stries ne modifient pas le facteur de forme de la couche limite ( $H = \delta_1/\theta$ ). Ces résultats sont valables pour de faibles amplitudes (théorie linéaire), on ne prend pas en compte la déviation de l'écoulement de base par les stries.

### Résultats

Dans cette partie on utilise les équations (PNS) de Navier-Stokes parabolisées non-linéaires (équations 2.1 du chapitre 2). Dans un premier temps on a vérifié que les résultats pour de petites perturbations (régime linéaire) correspondent bien aux résultats précédents. Dans un deuxième temps on utilise les PNS pour étudier les effets non-linéaires sur les quantités intégrales.

Les résultats non-linéaires sont obtenus à partir d'une même condition d'entrée, donnée par un calcul de perturbations optimales linéaires, pour deux amplitudes initiales. Dans le premier cas, l'amplitude finale des stries atteint 1%, ce cas est proche d'un cas linéaire. Dans le deuxième, l'amplitude des tourbillons initiaux est multipliée par 10 et l'amplitude finale des stries vaut 9.4%, les 10% ne sont pas atteints à cause de la saturation non-linéaire. L'amplitude est définie par le maximum sur  $y$  de la valeur  $U_{rms}$  avec une moyenne spatiale en  $z$ .

Dans un premier temps on s'intéresse à l'influence locale des stries, voir figure 5.7.

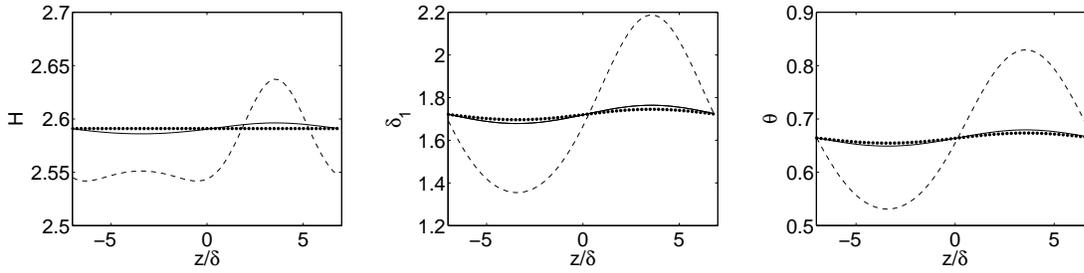


FIG. 5.7 – Quantités intégrales ( $H$ ,  $\delta_1$  et  $\theta$ ) pour deux valeurs d'amplitudes de stries, 1% en traits continus et  $\approx 10\%$  en traits discontinus. Le modèle théorique basé sur le mode de Stewartson est tracé en points pour une amplitude de stries de 1%.

Sur cette figure 5.7, on a reporté les résultats des calculs pour deux amplitudes ainsi que le résultat théorique, linéaire, pour une amplitude de 1%.

La définition de l'épaisseur de déplacement  $\delta_1$  est une fonction linéaire de  $U$ , l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  est une fonction quadratique de  $U$ . On a donc :

$$\delta_1(\bar{U}) = \overline{\delta_1(U)},$$

mais

$$\theta(\bar{U}) \neq \overline{\theta(U)} \quad \text{et} \quad H(\bar{U}) \neq \overline{H(U)}.$$

Les valeurs numériques sont présentées dans le tableau 5.2.

TAB. 5.2 – Comparaison des différentes quantités intégrales.

amplitude	$H(\bar{U})$	$\overline{H(U)}$	$\delta_1(\bar{U})$	$\overline{\delta_1(U)}$	$\theta(\bar{U})$	$\overline{\theta(U)}$
1%	2.591	2.591	1.7208	1.7208	0.664	0.664
9.4%	2.50	2.57	1.724	1.724	0.691	0.67

Les stries influent localement sur les quantités intégrales à travers une déformation tridimensionnelle de l'écoulement (figure 5.7). Cet effet n'est pas intrinsèquement de nature non-linéaire. Nous allons maintenant aborder un effet global, purement non-linéaire.

Dans le cas linéaire les tourbillons interagissent avec le cisaillement de la couche limite pour générer des stries. On a représenté sur la figure 5.8 les stries obtenue par un calcul non linéaire; cette figure est à comparer avec la figure 5.4 correspondant au calcul linéaire. En prenant en compte les effets non linéaires les tourbillons agissent également sur les stries pour les déformer : les stries de basse vitesse sont transportées vers le haut et réciproquement les stries de haute vitesse sont rapprochées de la paroi.

Pour mieux comprendre les effets non linéaires, on fait une analyse spectrale en  $z$ . Le spectre de Fourier des stries est tracé sur la figure 5.9 (à gauche) pour  $y = 2.24 \delta$ , ce qui correspond au milieu de la couche limite, où l'amplitude des stries est maximale. Par interaction quadratique entre les modes de Fourier, un mode  $\beta = 0$  est créé. Ce mode correspond à une déviation de l'écoulement de base ( $\Delta U(x, y)$ , figure 5.9 à droite) responsable de la baisse globale du facteur de forme  $H$ .

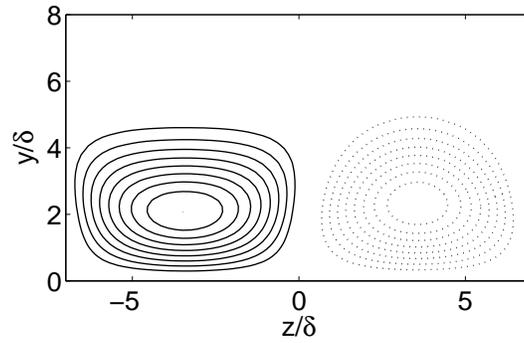


FIG. 5.8 – Coupe transversale dans le plan  $(y, z)$  des stries pour une amplitude de 10%.

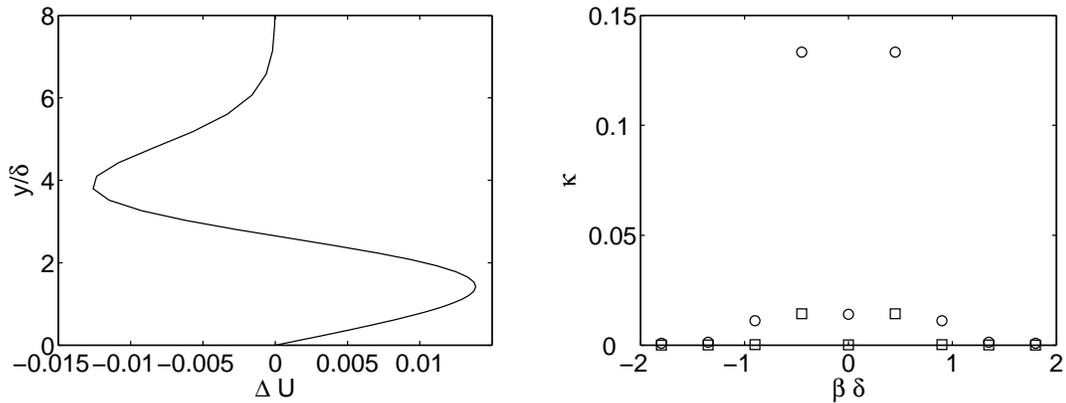


FIG. 5.9 – A gauche, spectre de Fourier dans la direction transversale pour le cas quasi-linéaire ( $\square$ ) et pour le cas non linéaire ( $\circ$ ).  $\kappa$  désigne l'énergie du mode associé au nombre d'onde  $\beta$ . A droite, déviation du profil de vitesse ( $\Delta U = \bar{U} - U_{Blasius}$ ) correspondant au mode  $\beta = 0$  du spectre de la figure de gauche.

On peut noter également qu'une diminution de  $H$  se traduit par une stabilisation de la couche limite vis-à-vis des instabilités modales (ondes TS). Dans ce cas, on peut considérer que globalement, la couche limite est stabilisée par la présence de stries d'amplitude finie.

## 5.4 Comparaison avec l'expérience

Dans cette section on présente les résultats expérimentaux obtenus sur une plaque plane placée dans un écoulement à basse vitesse perturbé par une grille de turbulence. Ces expériences ont été réalisées par Alain Seraudie de l'ONERA dans la soufflerie subsonique 'Juju' du DMAE en octobre 2005, et ont fait l'objet d'un rapport interne [17]. Les résultats de mesures au fil chaud sont comparés qualitativement à ceux obtenus par un calcul de perturbation optimale.

## Moyens de mesure

La maquette est une plaque plane. Elle est équipée d'un bord d'attaque dissymétrique, étudié pour minimiser le pic de survitesse généré à l'extrados, et d'un corps central. Un volet de bord de fuite métallique permet d'ajuster (minimiser) la survitesse de bord d'attaque. Cette plaque a une longueur utile de  $1200\text{ mm}$ , une largeur de  $600\text{ mm}$  et une épaisseur de  $38\text{ mm}$  (voir figure 5.10).

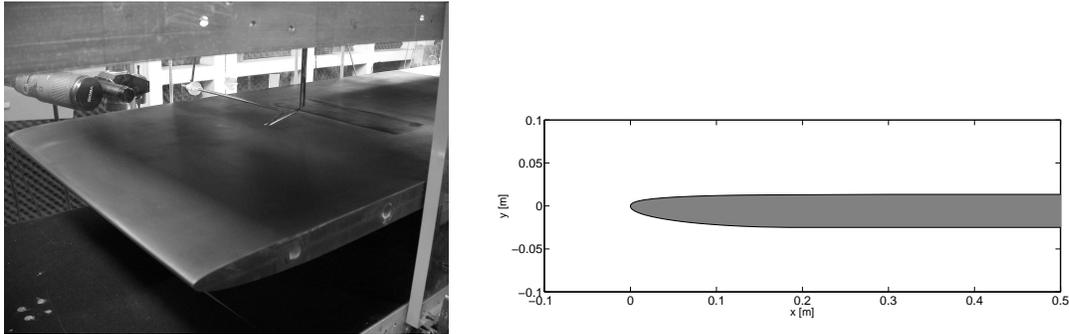


FIG. 5.10 – À gauche, photo de la plaque plane d'essais. À droite, forme géométrique.

La plaque est placée en incidence négative ( $\alpha = -1^\circ$ ) pour déplacer la transition vers l'aval et disposer d'une plus grande zone de mesures en aval du bord d'attaque. Les évolutions de la vitesse extérieure (mesure) et du facteur de forme (calcul) sont représentées sur la figure 5.11. On voit que l'écoulement est très légèrement accéléré.

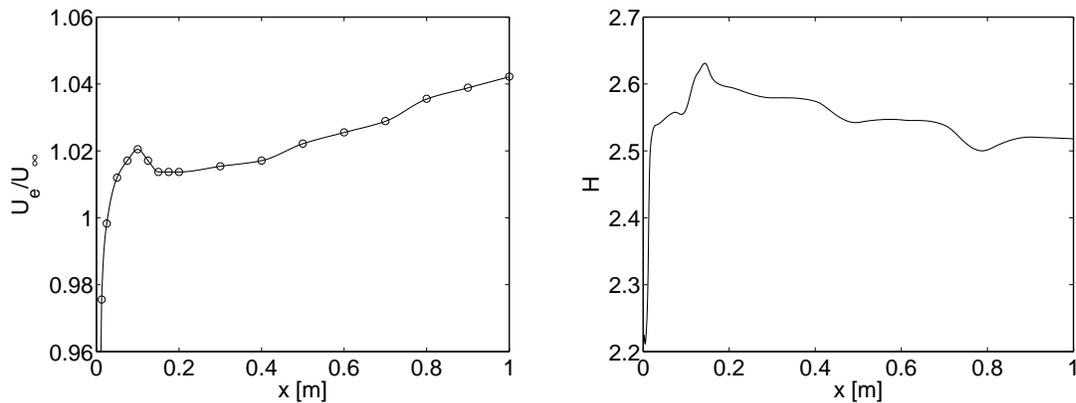


FIG. 5.11 – Vitesse extérieure ( $U_e$ ) et facteur de forme ( $H$ ).

Une grille de turbulence est fixée verticalement dans le plan de sortie du convergent, à  $300\text{ mm}$  en amont du bord d'attaque. Le taux de turbulence est de l'ordre de  $1.6\%$  au niveau du bord d'attaque de la maquette. Les mesures ont été réalisées à deux sections différentes,  $x = 350\text{ mm}$  et  $450\text{ mm}$  du bord d'attaque. Pour la majorité des mesures la vitesse de l'écoulement est fixée à  $8\text{ m/s}$ . Quelques configurations à  $5\text{ m/s}$  ont été réalisées pour étudier les effets de la vitesse de l'écoulement.

### Explorations de la couche limite

Les premières mesures ont consisté à réaliser des sondages de la couche limite dans le plan médian de la plaque pour  $U_0 = 8 \text{ m/s}$  en deux positions longitudinales de la sonde. Les résultats sont reportés (symboles) sur la figure 5.12 pour la vitesse moyenne et sur la figure 5.13 pour les profils de fluctuations  $rms$ .

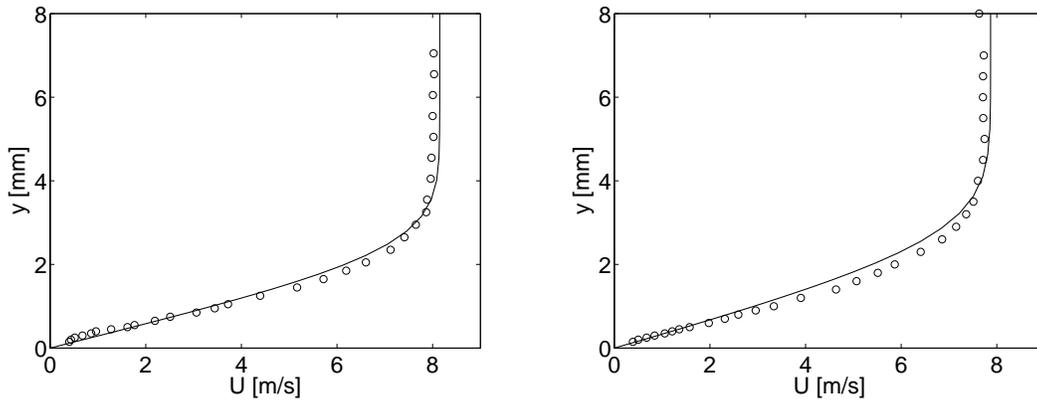


FIG. 5.12 – Profils moyens de vitesse pour  $x = 0.350 \text{ m}$  et  $x = 0.450 \text{ m}$  ( $U_e = 8 \text{ m/s}$ ).

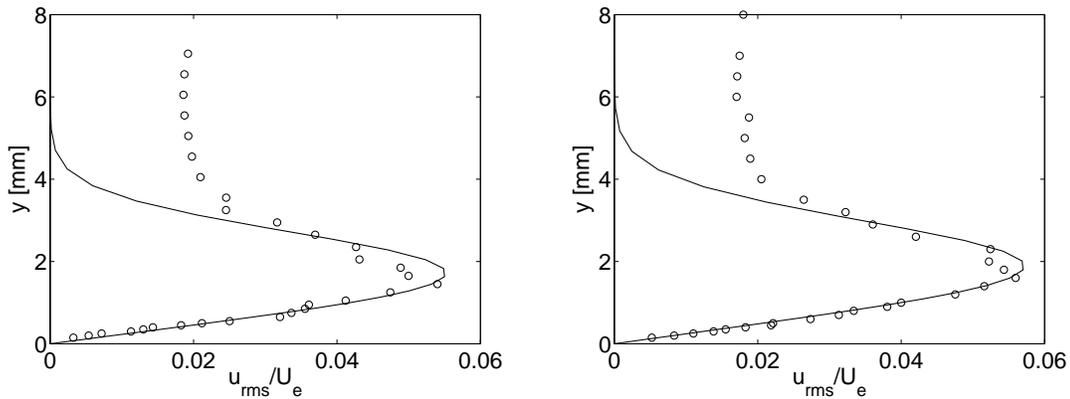


FIG. 5.13 – Profils rms de vitesse pour  $x = 0.350 \text{ m}$  et  $x = 0.450 \text{ m}$  ( $U_e = 8 \text{ m/s}$ ).

A ces expériences on a superposé les résultats numériques (traits continus) donnés par un calcul de couche limite pour l'écoulement moyen et un calcul linéaire de perturbations optimales pour les profils de vitesse fluctuante.

Les profils de vitesse moyenne calculés et mesurés se superposent à peu près correctement pour les deux sections étudiées (figure 5.12). Les fluctuations de vitesse (figure 5.13) indiquent la présence des modes de Klebanoff dans la couche limite, dont on retrouve la forme typique des profils. Le maximum de fluctuation de vitesse atteint 6% et se situe à  $1.9 \text{ mm}$  de la paroi pour  $x = 0.350 \text{ m}$  et  $2 \text{ mm}$  pour  $x = 0.450 \text{ m}$ . Cette altitude correspond au milieu de la couche limite ( $y/\delta_1 = 1.3$ ). On note une bonne correspondance entre l'expérience et le calcul, sauf à l'extérieur de la couche limite où expérimentalement on me-

sure la turbulence de la grille alors que le calcul donne un niveau nul de fluctuations. Cet écart se justifie par le fait que les fluctuations de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite sont décorréliées [6]. Ceci s'explique par le fait que leur origine est différente, à l'extérieur, on observe des fluctuations amorties provenant de la grille de turbulence, à l'intérieur il s'agit de stries quasi-stationnaires qui sont amplifiées selon la direction principale de l'écoulement, leur dynamique étant relativement indépendante de l'extérieur.

### Mesures de vitesse dans la direction transversale de l'écoulement

Pour réaliser ces mesures de vitesse, une sonde mobile a été réglée à une hauteur constante dans la couche limite et déplacée en envergure, parallèlement au bord d'attaque de la plaque plane. Les pas élémentaires de déplacement étaient de  $1\text{ mm}$ . Le fil chaud a été placé au milieu de la couche limite, cette hauteur correspondant au maximum de fluctuation de vitesse repéré par les sondages précédents (figure 5.13).

Les résultats de ces sondages, moyennés en temps, sont tracés sur la figure 5.14 pour la vitesse moyenne. Pour chaque cas on donne deux abscisses de sondage ( $x = 0.35\text{ m}$  et  $x = 0.45\text{ m}$ ) et deux vitesses  $U_0 = 5\text{ m/s}$  (figure de gauche) et  $U_0 = 8\text{ m/s}$  (figure de droite). A titre indicatif on a également représenté une exploration pour le cas sans grille avec  $U_e = 8\text{ m/s}$  et  $x = 0,350\text{ m}$ . On a d'autre part vérifié qu'à l'extérieur de la couche limite les fluctuations *rms* étaient constantes en envergure. On n'a donc pas de corrélation des fluctuations entre l'intérieur et l'extérieur de la couche limite. On peut donc supposer que les stries observées résultent bien d'un mécanisme naturel d'interaction entre la turbulence extérieure et le cisaillement de l'écoulement moyen.

Les variations de vitesse moyenne mesurées sont de l'ordre de  $0.5\text{ m/s}$  dans la première configuration ( $U_0 = 5\text{ m/s}$ ) et elles atteignent  $1\text{ m/s}$  pour le second cas ( $U_0 = 8\text{ m/s}$ ). Ces oscillations selon l'envergure sont bien en phase entre les deux stations d'exploration, ce qui est bien représentatif de la présence des stries longitudinales dont l'espacement se situe aux alentours de  $15\text{ à }20\text{ mm}$ .

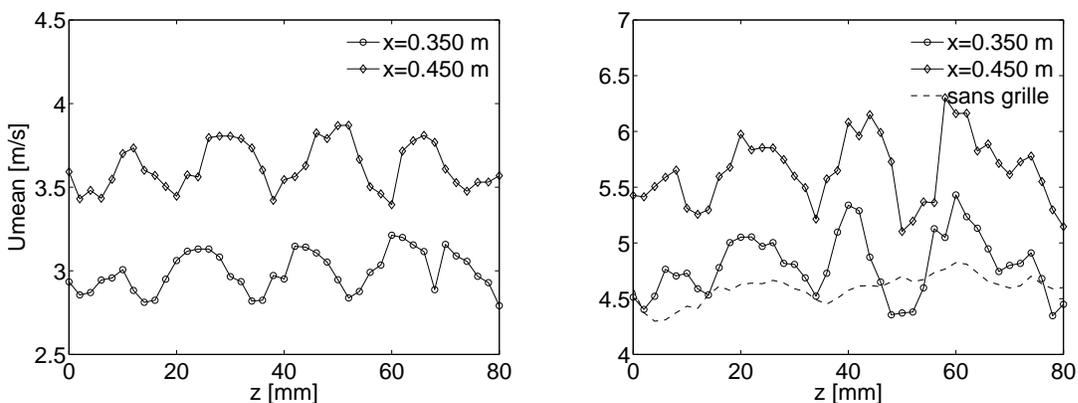


FIG. 5.14 – Evolution de la vitesse moyenne ; pour deux vitesses  $5\text{ m/s}$  à gauche et  $8\text{ m/s}$  à droite.

Même si la variation n'est pas sinusoïdale, on peut faire une comparaison avec les résultats obtenus par un calcul de perturbations optimales. Sur la figure 5.15, on trace le gain maximal d'énergie en fonction de l'espacement des stries.

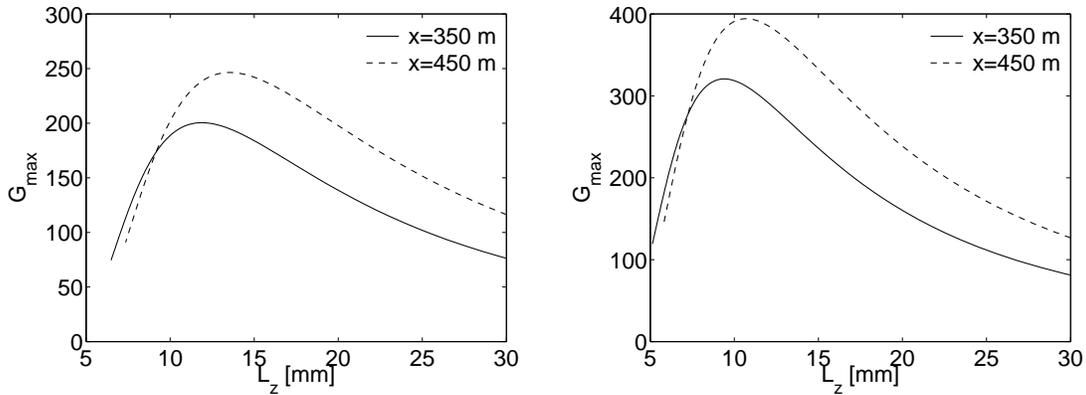


FIG. 5.15 – Gain maximal prévu par la méthode des perturbations optimales pour  $x = 0.350 \text{ m}$  et  $x = 0.450 \text{ m}$  à  $U_\infty = 5 \text{ m/s}$  (gauche) et  $U_0 = 8 \text{ m/s}$  (droite).

Les stries optimales sont espacées de 10 à 15 mm, ce résultat est en assez bon accord avec les variations observées sur les mesures de la figure 5.14.

Un autre moyen de déterminer l'espacement caractéristique entre les stries consiste à calculer le coefficient d'auto-corrélation entre les signaux de la sonde fixe et ceux de la sonde déplacée selon l'envergure. La figure 5.16 montre la corrélation ( $R_{ee}$ ) entre les signaux des deux sondes en fonction de leur espacement transversal ( $\Delta z$ ). La sonde fixe est placée dans l'axe médian de la plaque plane, l'autre, mobile, est éloignée progressivement de la première. Les deux sondes sont placées simultanément à mi-hauteur dans la couche limite ( $y = 2 \text{ mm}$ ) puis à l'extérieur ( $y = 10 \text{ mm}$ ).

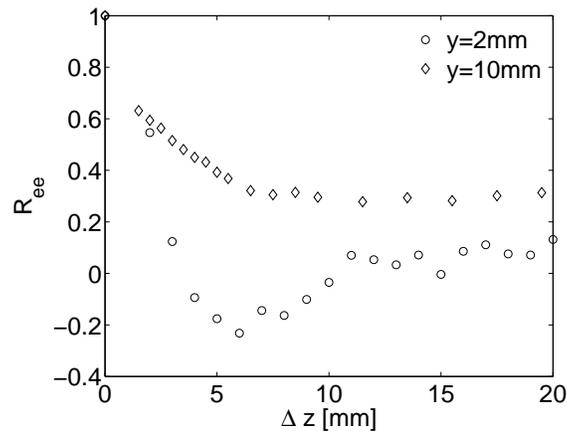


FIG. 5.16 – Corrélations pour le cas avec grille  $x = 450 \text{ mm}$ ,  $U_0 = 8 \text{ m/s}$ . A l'extérieur ( $y = 10 \text{ mm}$ ), le signal a été filtré (filtre passe-haut  $f > 100 \text{ Hz}$ ).

Dans la couche limite ( $y = 2 \text{ mm}$ ), la corrélation, importante quand les sondes sont proches l'une de l'autre, devient nulle aux alentours de 3 mm. Elle présente un minimum vers 6 mm. Ce minimum peut être interprété comme étant la distance (moyenne) entre deux stries de signe opposé ; c'est-à-dire qu'il représente la demi-longueur caractéristique

évoquée précédemment (ou demi-période pour les perturbations optimales). Cette longueur peut également s'interpréter comme l'ordre de grandeur du diamètre des tourbillons les plus dangereux qui vont créer, par interaction avec la couche limite, des stries de signe opposé. Cette longueur de référence ( $12\text{ mm}$ ) est en bon accord avec les mesures brutes de vitesse moyenne de la figure 5.14 et avec les résultats du calcul de perturbations optimales ( $10 - 15\text{ mm}$ ). A l'extérieur de la couche limite ( $y = 10\text{ mm}$ ) seule la turbulence de grille subsiste et la corrélation est strictement décroissante. La corrélation ne tend pas vers zéro pour de grandes distances entre les sondes car une perturbation résiduelle existe dans le circuit de la soufflerie. En effet pour avoir une zone laminaire suffisamment étendue, il a fallu travailler à basse vitesse ( $5\text{ m/s}$ ), alors que la vitesse optimale de fonctionnement de la soufflerie est de l'ordre de  $30\text{ m/s}$ .

En conclusion on rappellera que dans ce chapitre les perturbations ont été calculées selon le pire scénario. La perturbation incidente est celle qui maximise l'énergie des stries à une certaine distance en aval. Maximiser l'énergie est un choix arbitraire, on pourrait chercher à maximiser une autre quantité que l'énergie comme le cisaillement par exemple. Malgré le caractère arbitraire de ces calculs, on retrouve certaines caractéristiques essentielles des stries données par l'expérience, comme les profils autosemblables et l'évolution en  $\sqrt{x}$  de l'amplitude.

D'autre part une comparaison qualitative concernant plus particulièrement l'espacement des stries montre que cette distance, qui est le résultat d'un processus de réceptivité, est en accord avec la théorie. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre 7.

Enfin on peut ajouter que la comparaison du calcul et des mesures présente des similarités malgré les différentes moyennes utilisées (moyenne temporelle pour l'expérience et spatiale, en envergure, pour les calculs). Cependant on ne peut pas conclure que ces moyennes sont identiques pour ce problème. Pour répondre à cette question on pourrait envisager des mesures par PIV donnant des résultats simultanés en temps et en espace.

## Chapitre 6

# Réceptivité à un tourbillon longitudinal

Dans ce chapitre nous allons tester le modèle des équations de Navier-Stokes parabolisées sur le cas d'une interaction tourbillon/couche limite. Par interaction avec le cisaillement de la couche limite, un tourbillon longitudinal isolé va créer une paire de stries de haute et basse vitesse. Ce cas académique a déjà été abordé expérimentalement, ce qui nous donnera des éléments de validation des calculs.

Il existe deux travaux expérimentaux sur ce problème. Dans les deux cas le tourbillon longitudinal est généré par un micro-profil d'aile.

Un profil d'aile agit sur l'air qui l'entoure en le propulsant vers le bas. L'air ainsi déplacé imprime sur l'aile une force de réaction dirigée vers le haut : c'est la portance utilisée par les avions. En contournant les extrémités de la voilure, la masse d'air acquiert un mouvement de giration. Cela aboutit à la formation d'une paire persistante de tourbillons contrarotatifs parallèles très intenses. Les traces blanches que l'on observe souvent dans le ciel par beau temps sont la matérialisation des deux tourbillons de sillage d'un avion. Ce sont des traînées de condensation formées par des cristaux de glace produits à partir de la condensation de la vapeur d'eau capturée dans les centres dépressionnaires (donc froids) que constituent les tourbillons de sillage. Lorsque le temps est calme, ces traînées peuvent persister plusieurs minutes, ce qui prouve la grande robustesse de ces tourbillons de fluide.

Bertolotti et Kendall [14] ont étudié la réponse d'une couche limite à un tourbillon isolé généré par un micro profil-d'aile. Ils ont comparé les mesures à des calculs par PSE. Le modèle numérique ne donne pas de translation du tourbillon par effet de paroi, les auteurs attribuent cette lacune aux linéarités des équations. Ils ont une bonne correspondance calcul/mesure sur les valeurs crête à crête des profils transversaux des stries. Leur conclusion est que l'amplitude des stries croît linéairement en  $x$  en contraste avec l'évolution en  $\sqrt{x}$  rencontrée habituellement avec une turbulence de grille. Leur explication est que les stries de basse fréquence ont une croissance linéaire et que les stries de haute fréquence sont faiblement croissantes. Un spectre large bande donnerait ainsi la croissance en  $\sqrt{x}$ .

Une étude spectrale temporelle sur le tourbillon montre que les instationnarités sont dans une gamme inférieure à  $2Hz$  avec de faibles amplitudes, l'hypothèse stationnaire semble donc justifiée. La valeur du maximum de vitesse azimutale mesurée est de  $0.6 m/s$ , la valeur utilisée pour les simulation est de  $0.22 m/s$ , cette valeur a été fixée de façon à avoir une bonne correspondance sur les amplitudes des stries. Les auteurs ajoutent que la décroissance de la vitesse azimutale ne se comporte pas en  $1/r$  comme c'est le cas pour le

tourbillon de Lamb-Oseen. Les mesures montrent une décroissance plus rapide en  $1/r^2$  ce qui explique pourquoi les auteurs ont dû sous-estimer l'amplitude du tourbillon.

Bertolotti [13] a poursuivi ses simulations par PSE en calculant la réponse d'une couche limite de Blasius à une perturbation extérieure sous la forme de vorticité bi ou tridimensionnelle, stationnaire ou non. Il obtient que les perturbations instationnaires excitent très peu les ondes TS. Par contre la réponse maximale de la couche limite est obtenue par une excitation tridimensionnelle stationnaire, cette réponse prenant la forme bien connue de stries.

Le travail expérimental le plus détaillé sur le sujet a été réalisé par Boiko [18] (2002). Ce travail, que nous présentons ci-dessous, nous fournira une base de données pour valider notre modèle d'équations de Navier-Stokes parabolisées (PNS).

## 6.1 Présentation de l'expérience de Boiko

Boiko [18] a étudié la réceptivité d'une couche limite de Blasius laminaire vis-à-vis d'un tourbillon longitudinal, c'est-à-dire aligné avec l'écoulement principal. Le tourbillon est généré par un micro-profil d'aile placé à l'extérieur de la couche limite (voir le schéma 6.1). L'intensité du tourbillon est control e en faisant varier l'angle d'incidence du profil d'aile.

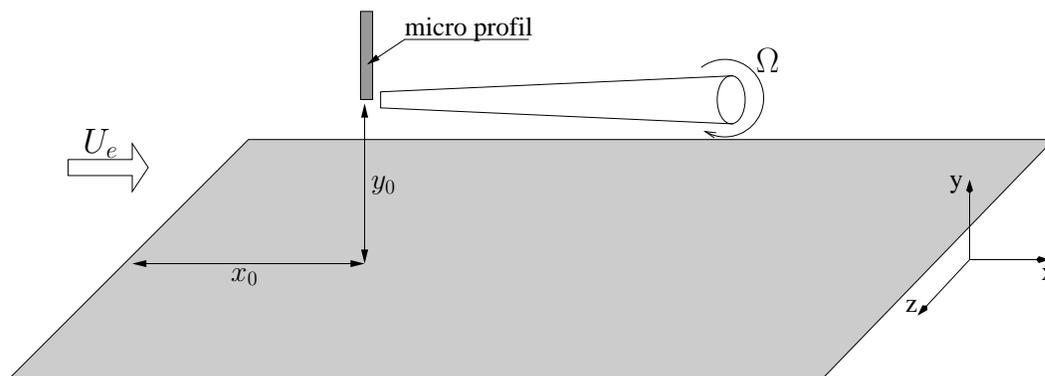


FIG. 6.1 – Schema de l'expérience de Boiko (2002).

Pour cette expérience, le taux de turbulence vaut  $Tu = \sqrt{(u'^2 + v'^2 + w'^2)}/3U_e^2 = 0.12\%$  avec une certaine anisotropie :  $u' = 0.19\%$ ,  $v' = 0.07\%$  et  $w' = 0.06\%$ .

L'extrémité inférieure du profil est située à une distance de  $y_0 = 15 \text{ mm}$  de la paroi et  $x_0 = 215 \text{ mm}$  du bord d'attaque. Les mesures sont faites pour quatre abscisses :  $x = 0.215 \text{ m}$ ,  $0.255 \text{ m}$ ,  $0.345 \text{ m}$  et  $0.480 \text{ m}$ , sur une distance transversale  $\pm 40 \text{ mm}$  de part et d'autre du profil. Les essais ont été réalisés pour deux vitesses amont  $U_\infty = 5.9 \text{ m/s}$  et  $7.8 \text{ m/s}$ . L'épaisseur de déplacement ( $\delta_1$ ) mesurée, dans le cas non perturbé (*i.e.* sans tourbillon), est en bon accord avec le résultat théorique de Blasius :  $\delta_1 = 1.7208\sqrt{(x + x_f)\nu/U_e}$ . Boiko signale une correction  $x_f = 14 \text{ mm}$  de l'origine de la couche limite. Ce léger décalage des abscisses a été pris en compte dans la comparaison calcul/expérience.

La paroi supérieure n'a pas été prise en compte, on s' st assuré néanmoins que la limite  $y_\infty$  du domaine est suffisante pour la convergence des calculs.

## 6.2 Présentation des calculs

Pour adimensionner les caractéristiques du tourbillon, on se donne une longueur de référence  $L = 0.55 m$ . La vitesse caractéristique est la vitesse extérieure, constante,  $U_e$ . Ce qui nous donne  $\delta = \sqrt{L\nu/U_e}$ .

La condition d'entrée est donnée par un tourbillon de Batchelor [11] adimensionné :

$$\eta(r) = r^2/(4(x + x_i)) \quad (6.1)$$

$$v_\theta(r) = \gamma_0(1 - e^{-\eta})/r \quad (6.2)$$

$$u(r) = u_0/(4(x + x_i))e^{-\eta^2} \quad (6.3)$$

avec  $r^2 = (y - y_0)^2 + z^2$ .  $v_\theta$  et  $u$  sont respectivement la vitesse azimutale et axiale du tourbillon. On a utilisé la transformation de Taylor ( $t \rightarrow x/U_e$ ) sur la variable de similitude  $\eta$ . Boiko propose pour le sillage  $u(r)$ , une fonction plus complexe qui n'est pas nécessaire. En effet le sillage étant situé à l'extérieur de la couche limite, il n'a pas d'influence sur celle-ci. Des calculs réalisés sans sillage  $u$  ne montrent aucune différence visible sur les résultats dans la couche limite.

Le tourbillon de Batchelor fait apparaître trois constantes :  $x_i$ ,  $\gamma_0$  et  $u_0$  qui sont données dans les tableaux 6.1. Elles sont proches de celles données par Boiko [18].

TAB. 6.1 – Paramètres sans dimension définissant le tourbillon de sillage.

$U_e$ [m/s]	$\gamma_0$	$u_0$	$x_i$
5.9	$1.8 \cdot 10^{-4}/\delta$	$-1.6 \cdot 10^{-7}/\delta^2$	$-140/L$
7.8	$2.1 \cdot 10^{-4}/\delta$	$-1.6 \cdot 10^{-7}/\delta^2$	$-120/L$

Les deux cas étant qualitativement similaires, pour alléger la présentation, seules les figures correspondant au premier cas sont présentées.

Les paramètres numériques utilisés sont :  $y_\infty = 60$ ,  $z_\infty = 60$ ,  $N_x = 140$ ,  $N_y = 160$  et  $N_z = 180$ . La divergence de la vitesse se situe en-dessous de  $10^{-8}$ .

## 6.3 Comparaison des résultats

La comparaison des résultats se fera en deux étapes. Premièrement il est essentiel de s'assurer que la résolution numérique capture correctement l'évolution du tourbillon. Le corps du tourbillon étant situé hors de la couche limite, il doit correspondre à la solution analytique de Batchelor. Dans un deuxième temps on détaillera les résultats sur les stries.

### Validation du tourbillon

On donne ici quelques notations utiles :  $\Delta U/U_e$  est l'amplitude maximale du sillage,  $V_\theta/U_e$  est la vitesse azimutale maximale, enfin  $R$  est la distance entre le centre du tourbillon et le point où la vitesse azimutale est maximale. Dans les tableaux 6.2 et 6.3 on compare ces quantités sur trois abscisses différentes. Les résultats sont de trois types :

- théorique : donnés par la formule analytique du tourbillon de Batchelor,
- numérique : donnés par le modèle des équations de Navier-Stokes parabolisées,
- expérimental : donnés par Boiko [18].

TAB. 6.2 – Caractéristiques du tourbillon pour  $U_e = 5.9 \text{ m/s}$ .

$x[m]$	théorique			numérique			expérimental		
	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$
0.255	1.2	0.106	-0.135	1.2	0.106	-0.128	1.33	0.115	-0.143
0.345	1.6	0.079	-0.076	1.5	0.080	-0.068	2.00	0.069	-0.063
0.480	2.1	0.062	-0.046	2.0	0.062	-0.042	2.33	0.050	-0.048

TAB. 6.3 – Caractéristiques du tourbillon pour  $U_e = 7.8 \text{ m/s}$ .

$x[m]$	théorique			numérique			expérimental		
	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$	$R[mm]$	$V_\theta/U_0$	$\Delta U/U_0$
0.255	1.2	0.131	-0.156	1.2	0.131	-0.139	1.33	0.132	-0.153
0.345	1.5	0.101	-0.093	1.5	0.102	-0.082	1.66	0.097	-0.093
0.480	1.9	0.080	-0.058	1.8	0.080	-0.051	2.00	0.075	-0.059

On constate que les valeurs calculées sont très proches des valeurs attendues (théoriques). De plus on capture relativement bien l'évolution du tourbillon réel (expérimental). Pour avoir une meilleure correspondance il faudrait certainement une condition initiale différente de la solution de Batchelor qui décrit théoriquement les tourbillons de sillage loin en aval. Cependant on notera qu'il existe un écart entre l'amplitude du sillage ( $\Delta U$ ) calculée et théorique. Cette différence peut être attribuée aux effets non linéaires ( $\Delta U \partial \Delta U / \partial x$ ) qui ne sont pas pris en compte dans la transformation de Taylor

Un autre élément de comparaison concerne la translation du tourbillon par interaction avec la paroi. En présence d'une paroi, le tourbillon subit une auto-induction : son centre se déplace sur l'envergure. En supposant un tourbillon image, symétrique par rapport à la paroi, la vitesse de déplacement de deux tourbillons contra rotatifs est donnée par  $u = \gamma_0 / (2y_0) U_0$ , en faisant l'hypothèse que la distance entre les deux tourbillons  $2y_0$  est très grande devant leur rayon  $R$ . Sur une distance  $\Delta x = 0.265 \text{ m}$ , on aurait un déplacement  $\Delta z = u \Delta x / U_e = 1.6 \text{ mm}$ . Le code nous donne  $\Delta z = 1 \text{ mm}$ .

Les vitesses en coordonnées cartésiennes ( $V$ ,  $W$ ) sont liées à la vitesse azimutale  $v_\theta$  par les relations adimensionnées suivantes :

$$V(y, z) = z/r v_\theta \sqrt{Re_L} \quad (6.4)$$

$$W(y, z) = -(y - y_0)/r v_\theta \sqrt{Re_L} \quad (6.5)$$

$$(6.6)$$

On compare les profils calculés aux profils théoriques sur la figure 6.2. Sur la figure de gauche on a représenté, en coupe horizontale passant par le centre du tourbillon, la vitesse azimutale théorique  $v_\theta(r)$  et la vitesse calculée  $V(z)$  (ici  $W = 0$ ). De la même manière, sur la figure de droite sont représentées, en coupe verticale, la vitesse azimutale et  $-W(y)$ . L'accord est satisfaisant. De plus sur la figure de gauche on voit l'effet de la paroi ( $y = 0$ ) sur la vitesse du tourbillon : une couche limite se développe.

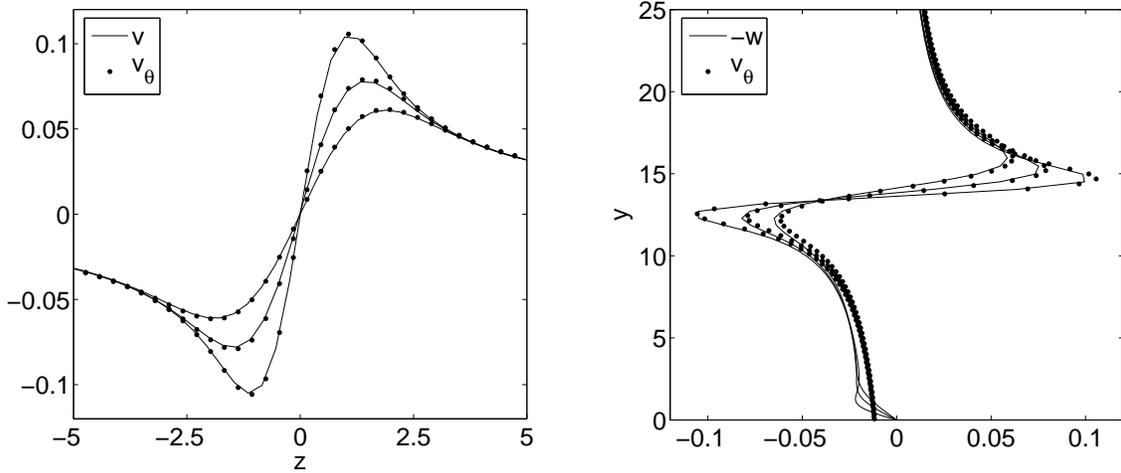


FIG. 6.2 – Solution exacte du tourbillon de Batchelor  $v_\theta(r)$ , pour  $x = 0.48 m$ , comparé aux résultats numériques  $v(z)$  à gauche et  $-w(y)$  à droite.

### Validation des stries

Pour présenter l'influence du tourbillon sur la couche limite on trace sur la figure 6.3 les iso-contours des stries (calculées et mesurées) dans le plan  $(y, z)$ , pour l'abscisse  $x = 0.48 m$ .

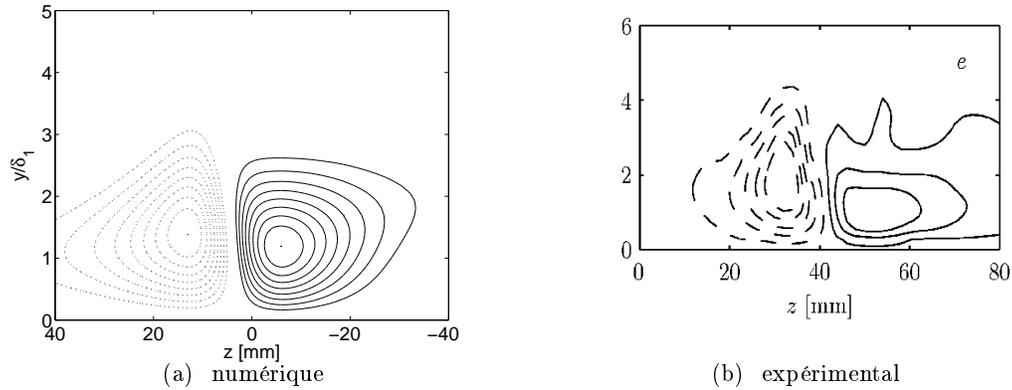


FIG. 6.3 – Iso-contours, équi-espacés, de la vitesse longitudinale  $U - \bar{U}$  pour  $x = 0.48 m$ . Les traits continus représentent la strie de haute vitesse, les traits pointillés la strie de basse vitesse. Note : la dimension transversale est la même dans les deux cas, pour le calcul on a utilisé un repère orienté, avec  $z$  variant de  $-40 mm$  à  $+40 mm$ .

Les numériques valeurs extrêmes sont  $U_{min} = -0.156 U_e$  et  $U_{max} = 0.147 U_e$ ; à comparer avec les valeurs expérimentales qui sont :  $U_{min} = -0.290 U_e$  et  $U_{max} = 0.140 U_e$ . Nous reviendrons sur cet écart quantitatif. Les mesures et les calculs sont cependant en bon accord qualitatif, on voit nettement les effets non linéaires. Par des effets linéaires, le tourbillon interagit avec le cisaillement de l'écoulement moyen ( $\bar{U}_y$ ) pour générer une paire de stries de signes opposés. Ensuite par des effets non linéaires, le tourbillon agit sur les stries elles-mêmes en les déformant. La strie de basse vitesse, générée par une fluctuation

de vitesse normale positive, est transportée vers le haut. Réciproquement, la strie de haute vitesse est tassée sur la paroi. On notera que l'étalement des stries calculées ne correspond pas exactement aux mesures. Cette différence est certainement la conséquence d'un écart entre la vitesse normale du tourbillon calculée et la vitesse réelle.

### Influence sur quantités intégrales

Sur la figure 6.4 sont représentées les quantités intégrales, calculées et mesurées, pour l'abscisse  $x = 0.48 m$ . Ces quantités sont locales, *i.e.* elles dépendent de la coordonnée transversale  $z$ .

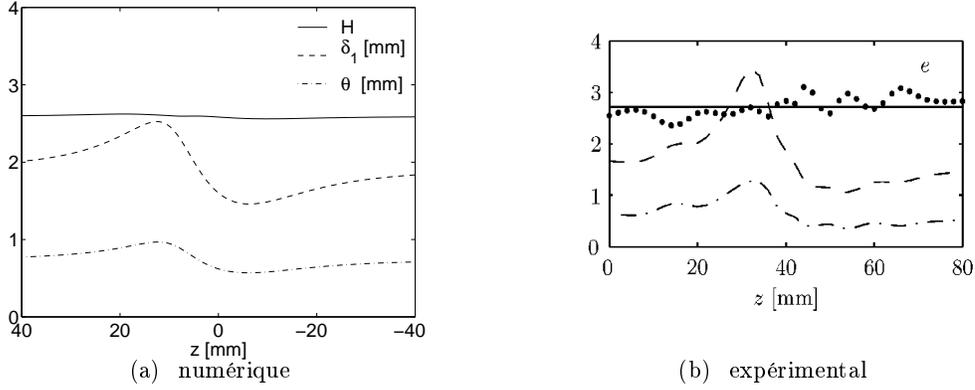


FIG. 6.4 – Quantités intégrales calculées et mesurées pour  $x = 0.48 m$

On retrouve le comportement obtenu à partir d'un calcul de perturbations optimales (*cf* chapitre 5). Le facteur de forme local  $H(z)$  varie peu, alors que les épaisseurs intégrales varient inversement au signe de la strie. Le calcul et les mesures sont en bon accord qualitatif mais on note un écart quantitatif, notamment pour l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$ .

### Etude des profils de vitesse moyennés

On rappelle la définition de la moyenne spatiale :

$$\bar{f} = \frac{1}{z_{max} - z_{min}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} f(z) dz,$$

et la valeur *rms* associée :

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{z_{max} - z_{min}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} (\bar{f} - f(z))^2 dz}.$$

On prendra, pour être cohérent avec les mesures,  $z_{max} - z_{min} = 0.08m$ , même si le domaine de calcul s'étale sur  $z_{max} - z_{min} = 0.132m$ .

On définit l'amplitude des stries comme le maximum sur  $y$  de la fluctuation *rms* de la vitesse longitudinale. Sur la figure 6.5 sont représentées les amplitudes calculées et mesurées.

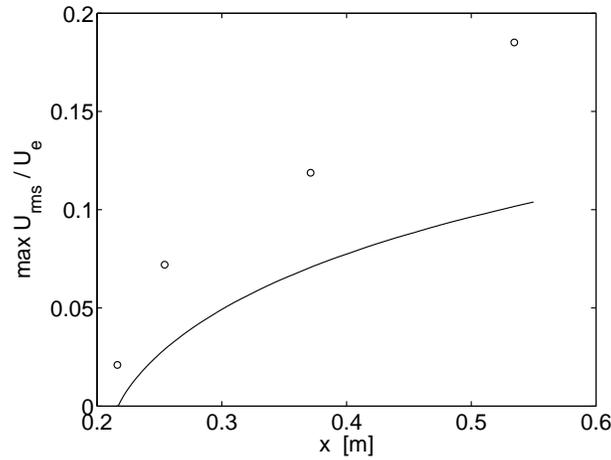


FIG. 6.5 – Croissance de l’amplitude des stries, le trait continu correspond au résultat numérique, les symboles *o* correspondent à l’expérience.

D’après le calcul, la croissance de l’amplitude des stries, est proportionnelle à  $\sqrt{x}$ . Cependant d’après Boiko, ou Bertolotti et Kendall [14], la croissance des stries est linéaire. Il est difficile d’être catégorique puisque la courbe ne comporte que 4 points de mesure. De plus, dans l’article de Boiko, il y a une contradiction entre les maxima relevés sur la courbe de l’amplitude et les maxima relevés directement sur les profils de  $u_{rms}$ . D’autre part, si on suppose que, compte tenu du faible taux de turbulence, les stries sont inexistantes à l’origine du tourbillon en  $x = 0.215 m$ , alors la courbe devrait passer par zéro.

On trace sur la figure 6.6 les profils de fluctuation  $u_{rms}$ , normalisés par leur valeur maximale, en fonction de la coordonnée normale, normalisée par l’épaisseur de déplacement ( $y/\delta_1(x)$ ).

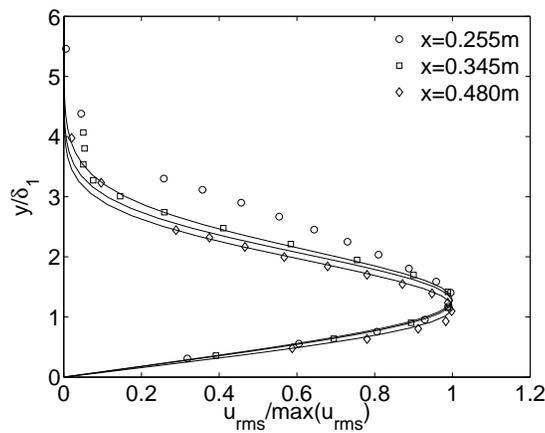


FIG. 6.6 – Stries normalisées.

On retrouve l’allure auto-semblable des stries. Les profils de vitesse moyenne (non représentés) sont quasiment identiques au profil théorique de Blasius. Malgré la présence de stries de grande amplitude, on n’a pas de déviation de l’écoulement moyen par interaction quadratique comme on a pu le voir dans le chapitre 5.

Boiko [18] a réalisé une analyse spectrale sur l’envergure. Il obtient que le nombre

d'onde optimal est quasi constant, quelle que soit l'abscisse  $x$ , il vaut  $\beta \approx 0.08 \text{ mm}^{-1}$  soit  $\Lambda_z \approx 80 \text{ mm}$ , soit la taille du domaine de mesure. Le même problème s'est posé sur les calculs, la valeur du  $\beta$  optimal correspond à la taille du domaine. Cependant, d'après les résultats du calcul dans l'espace physique, on trouve que la distance inter-stries est quasiment constante. Cette distance est imposée par le profil, en envergure, de la vitesse normale  $V$  du tourbillon dans la couche limite.

On peut dire que la sélection de cette échelle transversale caractéristique (*i.e.* la distance inter stries) est dominée par la réceptivité.

## Synthèse

On a obtenu une bonne correspondance qualitative entre les résultats expérimentaux et numériques. On retrouve la position du maximum des stries pour  $y/\delta_1 = 1.3$  et  $\beta \approx 0.086 \text{ mm}^{-1}$ . À l'extérieur de la couche limite, la méthode numérique utilisée donne une bonne évolution du corps du tourbillon longitudinal. Le calcul indique que l'amplitude des stries est proportionnelle à  $\sqrt{x}$ . Ce point est en désaccord avec l'analyse de Boiko [18] ou avec celle de Bertolotti et Kendall [14].

Il reste une erreur importante sur l'amplitude maximale des stries. Si le modèle parabolique n'est pas en cause, cette erreur peut être liée au modèle de Batchelor utilisé comme condition initiale. Les comparaisons entre les mesures et le tourbillon de Batchelor sont correctes près du centre du tourbillon. Cependant loin du centre, notamment près de la paroi, aucune comparaison n'est présentée (Boiko [18] précise que, dans cette région, les vitesses sont trop faibles pour être mesurées). Or c'est cette partie du tourbillon qui interagit avec la couche limite. Le facteur deux d'erreur sur l'amplitude des stries pourrait s'expliquer par une erreur d'un facteur deux sur la vitesse du tourbillon loin du centre où cette vitesse est difficilement mesurable.

Il faut cependant ajouter que les polynômes d'Hermite ne donnent pas une précision spectrale sur la discrétisation du tourbillon de Oseen. Cependant l'erreur est faible et concentrée dans les angles. D'autres méthodes de discrétisation spatiale ont été essayées (Fourier ou les fonctions sinus cardinale), une amplitude finale de l'ordre de 10% a toujours été obtenue. Ces méthodes donnent des résultats sensiblement identiques à ceux présentés dans ce chapitre. Cependant l'utilisation des série de Fourier fait apparaître une vorticité parasité sur les bords, ce qui n'est pas le cas avec les polynômes d'Hermite.

Les résultats présentés ici sont basés sur un cas stationnaire. Boiko *et al.* [19] ont étudié le cas instationnaire en faisant osciller le profil. Les effets des instationnarités sont inhibiteurs sur le développement des stries. Les oscillations réduisent la croissance des stries et on observe rapidement leur décroissance, ce qui n'était pas le cas, du moins dans le domaine de mesure, pour le cas stationnaire. Les profils instantanés des stries montrent un changement de signe au niveau du milieu de la couche limite. La vitesse de phase est de l'ordre de  $0.4 U_e$ , elle est deux fois plus importante que celle des ondes TS.

Dans le cadre de cette thèse l'objectif était de calculer la réceptivité de la couche limite vis-à-vis d'un tourbillon longitudinal. En perspective, les équations de Navier-Stokes parabolisées pourraient être utilisées pour calculer l'évolution spatiale de tourbillons de sillage. L'approche spatiale est plus réaliste pour simuler le sillage puisque la transformation (linéaire) de Taylor n'est valide que dans les cas de sillages de très faible amplitude. Le modèle PNS pourrait fournir une solution de base, pour l'étude de l'instabilité de Crow par exemple, plus réaliste que les modèles analytiques du type Rankine ou Batchelor.

Troisième partie  
...vers le turbulent



## Chapitre 7

# Réceptivité à une turbulence bidimensionnelle

La mise en évidence, par la méthode des perturbations optimales, de mécanismes d'amplification dans la couche limite ne prouve pas que, lorsque l'écoulement est soumis à un forçage aléatoire et incohérent, ces mécanismes soient observés. Le développement des perturbations dans la couche limite dépend non seulement de la forme des perturbations extérieures, mais aussi de leur intensité et de leur composition spectrale. On appelle réceptivité le mécanisme décrivant le passage de l'extérieur vers l'intérieur, c'est-à-dire comment la couche limite digère les fluctuations de l'écoulement extérieur. La compréhension de ce processus est donc cruciale dans le déroulement de la transition vers la turbulence.

Pour répondre à cette question, il convient de réaliser une étude numérique de forçage stochastique afin de vérifier si la couche limite filtre certaines composantes du bruit et en amplifie d'autres. Pour reproduire les caractéristiques aléatoires d'une excitation turbulente, nous avons plusieurs possibilités. On peut utiliser un terme source stochastique dans les équations de conservation (voir par exemple Machiels et Deville [80]). Dans ce chapitre on se tourne vers une autre approche. En accord avec le problème aux conditions initiales des équations de Navier-Stokes parabolisées, nous avons choisi d'imposer un champ turbulent bidimensionnel comme condition d'entrée.

### 7.1 La turbulence bidimensionnelle

Reynolds proposa une approche statistique de la turbulence développée en décomposant les champs turbulents en une partie moyennée et une partie fluctuante. Ceci posa alors un problème de fermeture des équations de Navier-Stokes réécrites de cette façon, difficulté que Prandtl (1925) résolut en remplaçant les moments du premier ordre (produit des fluctuations de vitesse moyenné) par un terme de viscosité turbulente construit à partir d'une longueur de mélange caractérisant l'échelle des fluctuations de vitesse. En 1921, Taylor remplaça l'idée de longueur de mélange par celle de fonction de corrélation, mais sans savoir comment relier ces fonctions à des grandeurs mesurables.

Ce point de vue statistique fut repris par Kolmogorov (1941), Onsager (1945)<sup>1</sup> et Heisenberg (1948). En traitant les composantes de la vitesse comme des variables aléatoires au sens de la théorie des probabilités, ces auteurs établirent que dans la zone inertielle, gamme

---

<sup>1</sup>On pourra lire l'article de Eyink et Sreenivasan [45] sur les idées de Onsager (certaines non publiées) sur la turbulence.

d'échelles où l'on suppose que le système a un comportement conservatif, c'est-à-dire que l'énergie n'est ni produite ni dissipée mais seulement transférée entre différentes échelles, l'énergie turbulente cascade selon  $\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ , où  $\epsilon$  est le taux de transferts d'énergie et  $k$  le nombre d'onde. Cette théorie, communément appelée K41, repose sur trois hypothèses :

- la turbulence est statistiquement homogène (invariante par translation) et isotrope (invariante par rotation) à petite échelle,
- les propriétés statistiques ne dépendent que de l'énergie dissipée,
- dans la zone inertielle l'énergie est transférée sans dissipation et selon un taux constant.

Ce modèle explique comment les plus gros tourbillons se divisent en plus petits, qui se divisent à leur tour et ainsi de suite au cours de cette cascade turbulente, jusqu'à arriver à une échelle de taille tellement petite que la turbulence cesse et que l'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Cependant aux petites échelles on observe des écarts par rapport à la théorie, certainement liés au phénomène d'intermittence, c'est-à-dire à l'apparition, imprévisible, de structures tourbillonnantes violentes.

Ces analyses s'appliquent à la turbulence 3D, pourtant des exemples de turbulence 2D sont nombreux. On la retrouve dans la dynamique des écoulements géophysiques à grande échelle, rendus bidimensionnels par la faible épaisseur de ces écoulements par rapport à leur étendue et par l'effet conjugué d'une stratification stable et d'une forte rotation du référentiel (un exemple étant la tache rouge de Jupiter). On peut l'observer plus simplement dans des expériences avec des films de savon tombant. On peut aussi conjecturer que dans certains écoulements tridimensionnels les régions à fort gradient s'organisent en nappes où le comportement est du type turbulence bidimensionnelle.

Malgré son apparente simplicité par rapport au cas 3D, la turbulence bidimensionnelle suscite des controverses. En effet il existe en dimension deux, un mécanisme de cascade inverse, c'est-à-dire un transfert d'énergie des petites échelles qui maintient la turbulence à grande échelle. Von Neumann faisait la remarque que les arguments qui s'appliquent à la turbulence 3D devraient s'appliquer au cas 2D, pourtant leurs signatures spectrales sont différentes.

Kraichnan (1967) et Batchelor (1969) proposent que l'énergie se comporte suivant deux lois de puissance. Pour les nombres d'onde inférieurs à un certain nombre d'onde d'injection  $k_{inj}$ , l'énergie est proportionnelle à  $\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$  et pour  $k > k_{inj}$ , l'énergie est proportionnelle à  $\eta^{2/3}k^{-3}$ , où  $\epsilon$  et  $\eta$  sont respectivement les taux de transfert d'énergie et d'enstrophie. La conservation de l'enstrophie est due à la conservation du tourbillon, celle-ci provenant du fait qu'en dimension deux le tourbillon et le gradient de vitesse sont orthogonaux. Ainsi, bloquée par la conservation de l'enstrophie, l'énergie, au lieu d'être transférée vers les petites échelles, remonte-t-elle vers les grandes échelles, donnant lieu à une cascade inverse, ce que Kraichnan a interprété comme l'apparition d'une viscosité négative.

Un point de vue est de considérer que cette cascade est le résultat de fusions de tourbillons. D'un autre point de vue, la cascade est attribuée au regroupement de tourbillons de même signe. Ou encore la cascade inverse résulte du cisaillement à grande échelle qui allonge et amincit les tourbillons de petite échelle, ce qui diminue leur vitesse et transfère une partie de leur énergie vers les grandes échelles. C'est cet amincissement des tourbillons qui explique l'idée de viscosité négative de Kraichnan.

Toutefois, l'idée de turbulence bidimensionnelle et de sa remontée de l'énergie vers les grandes échelles fut longue à s'imposer, car on pensait la turbulence directement liée à l'étirement des tubes de tourbillon par les gradients de vitesse, mécanisme qui en dimension trois assure le transfert de l'énergie vers les petites échelles, mais qui est inhibé en dimension deux à cause de la conservation du tourbillon. La turbulence bidimensionnelle a cependant

en commun avec la turbulence tridimensionnelle la dynamique non linéaire à l'origine du caractère chaotique et imprédictible de sa structure macroscopique. Elle est aujourd'hui un sujet actif de recherche ; on présente trois exemples d'articles récents consacrés à ce sujet.

Rutgers [96] a réalisé des mesures d'une turbulence 2D forcée et décroissante dans un film de savon tombant. La turbulence est excitée par une rangée de cylindres. Près des cylindres on distingue trois zones dans le spectre. Une région en  $k^{-3}$  pour les grands nombres d'onde, une région intermédiaire en  $k^{-5/3}$  et un maximum prononcé d'énergie correspondant à la moitié de la distance inter-cylindre. Dans le spectre, le nombre d'onde d'injection de la turbulence correspond à la frontière entre les régions des deux cascades. Plus en aval la turbulence décroît librement et le spectre se comporte en  $k^{-3}$ .

Clercx et van Heijst [34] ont simulé une turbulence 2D libre dans un carré délimité par des parois. Pour de grands nombres de Reynolds (20000), il existe près des parois une zone inertielle en  $k^{-5/3}$  suivie d'une décroissance en  $k^{-3}$ . Ceci est lié à la production de vorticités à petite échelle près des parois, l'échelle d'injection (non imposée ici) étant liée à l'épaisseur de la couche limite.

Amarouchene et Kellay [1] se sont intéressés à l'influence de polymères solubles sur la turbulence 2D. Ces longues chaînes de molécules ont des propriétés étonnantes : ramassées au repos, elles peuvent s'allonger et s'étirer considérablement en présence de cisaillement. Une vieille question concerne l'effet de Toms, c'est-à-dire la réduction importante de traînée par effets de polymères sur la turbulence. Il y a plusieurs réponses possibles, ces effets peuvent venir de la modification de la rhéologie du fluide, ou encore ces longues chaînes interfèrent dans les transferts d'énergie entre les échelles. Amarouchene et Kellay [1] ont découvert que les polymères inhibent les transferts d'énergie vers les grandes structures, ce qui réduit leur amplitude dans le spectre de densité d'énergie. Les auteurs expliquent ce résultat surprenant en considérant que les polymères limitent la fusion des tourbillons.

La décroissance en  $k^{-3}$  est difficile à obtenir numériquement, souvent on observe une décroissance plus rapide. Les résultats dépendent de la précision de la méthode et de la condition initiale.

On résout les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles par la méthode de collocation, basée sur les séries de Fourier, décrite au chapitre 3. Le nombre de points est  $N = 256$  pour un domaine  $[20\pi, 20\pi]$ . Le nombre de Reynolds est fixé à  $Re = 1000$ .

Comme condition initiale, on impose un champ de 200 tourbillons de Oseen :

$$\begin{aligned} v &= \frac{A_0}{R_0} \frac{z - z_0}{R^2} \left(1 - e^{-R^2}\right) \\ w &= -\frac{A_0}{R_0} \frac{y - y_0}{R^2} \left(1 - e^{-R^2}\right) \end{aligned}$$

avec  $R = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . L'amplitude  $A_0$  de chaque tourbillon est aléatoire et comprise entre 0 et 0.05. La taille du tourbillon est constante  $R_0 = 2$ . La position de chaque tourbillon  $(y_0, z_0)$  est aléatoire mais éloignée du bord du domaine d'une distance d'au moins  $2\pi$  pour éviter une incompatibilité avec les conditions aux limites périodiques. A chaque tourbillon de vorticités positive est associé un tourbillon identique, de vorticités négative, placé aléatoirement. Ainsi la circulation totale est nulle.

Le calcul est réalisé jusqu'au temps  $t = 200$ , avec un pas de temps de  $5 \times 10^{-2}$ . On obtient ainsi une bonne convergence temporelle sur les résultats.

La turbulence est continûment forcée à une certaine échelle. On note  $\gamma$  et  $\beta$ , respectivement les nombres d'onde dans les directions  $y$  et  $z$ . L'énergie du mode  $\gamma = \beta = 2$  est maintenue constante à chaque itération. Ces nombres d'onde correspondent à la longueur

d'injection décrite précédemment. On trace sur la figure 7.1, l'énergie cinétique, moyennée dans la direction  $y$ , des différents modes en fonction du nombre d'onde  $\beta$ .

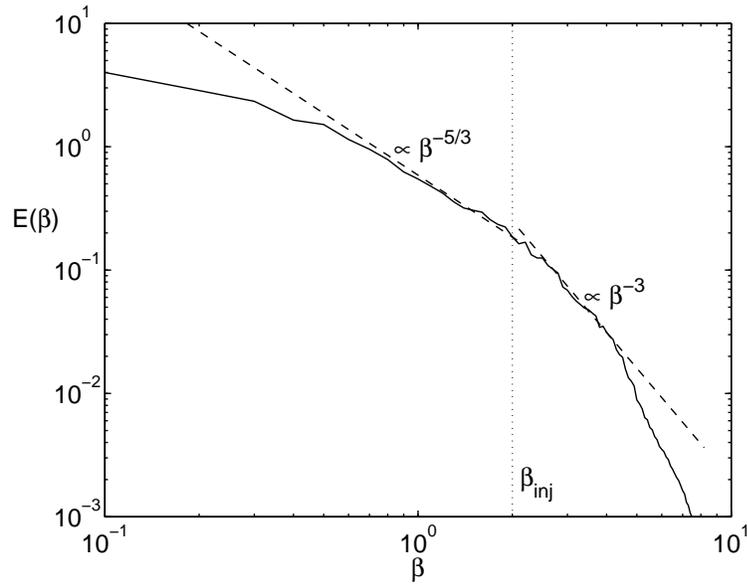


FIG. 7.1 – Spectre de la turbulence.  $\beta_{inj}$  correspond à la longueur d'injection.

On retrouve la loi en  $\beta^{-5/3}$  à gauche de la longueur d'injection suivie d'un comportement en  $\beta^{-3}$ . Sur la figure 7.2, on a représenté le champ de vorticité  $\Omega = w_y - v_z$ , dans le plan.

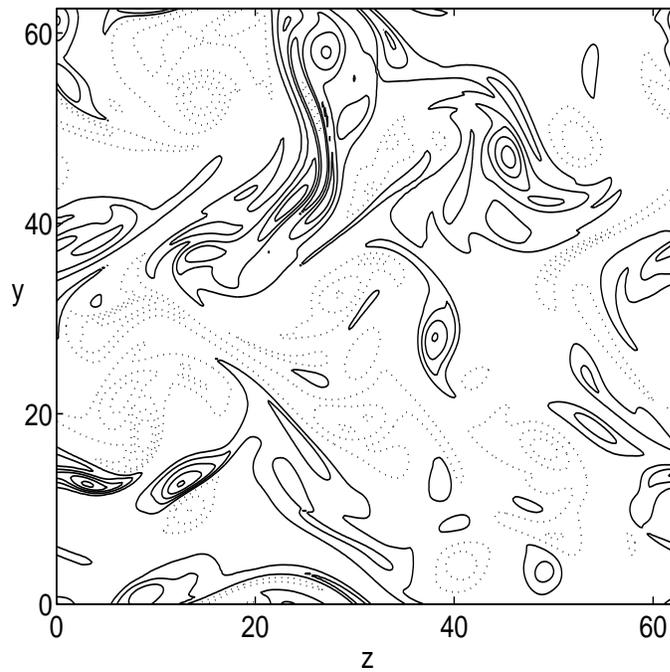


FIG. 7.2 – Champ de vorticité, positive (trait continu) et négative (traits discontinus).

## 7.2 Influence sur la couche limite

Au chapitre 5 on a étudié la réceptivité d'une couche limite de Blasius vis-à-vis de tourbillons sinusoidaux calculés par une méthode de perturbations optimales (Luchini [78] et Andersson *et al.* [2]). Au chapitre 6 on a étudié la réceptivité à un tourbillon isolé. On va maintenant analyser la réceptivité d'une couche limite de Blasius vis-à-vis d'une excitation plus complexe.

Le champ turbulent bidimensionnel calculé précédemment est utilisé comme condition d'entrée des équations de Navier-Stokes parabolisées définies au chapitre 2. Dans la direction transversal on garde une discrétisation par la méthode de collocation de Fourier ( $N_z = 256$ ). Dans la direction normale à la paroi on utilise à présent les polynômes de Chebyshev ( $N_y = 121$ ) enfin on utilise  $N_x = 300$  points dans la direction de l'écoulement.

On impose une énergie initiale, en  $x = x_0 = 10^{-2}$ , des perturbations égale à 10. Les vitesses initiales sont calculées avec les conditions de saut décrites au paragraphe 2 et dans l'article de Luchini et Bottaro [79]. La pression initiale est imposée nulle.

On rappelle les définitions de moyenne spatiale :

$$\bar{U} = \frac{1}{\Delta z} \int_{\Delta z} U dz \quad ; \quad u_{rms} = \sqrt{\overline{u'^2}} \quad \text{avec} \quad u' = U - \bar{U}$$

Tout d'abord on regarde l'évolution du taux de turbulence défini comme :

$$Tu = \sqrt{\frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{y=\delta_{99}}^{y=y_\infty} \int_{z=0}^{z=20\pi} \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) dy dz}$$

où  $\delta_{99}$  désigne la frontière de la couche limite. L'amplitude des stries est définie comme le maximum sur  $y$  du profil de  $u_{rms}(x, y)$ . Ces quantités sont représentées sur la figure 7.3

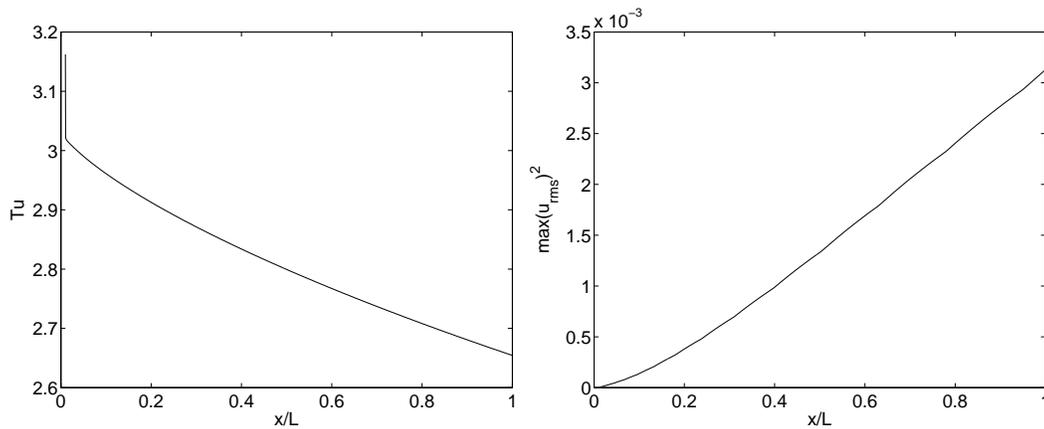


FIG. 7.3 – Décroissance du taux de turbulence extérieure (à gauche) et croissance de l'amplitude, au carré, des stries (à droite).

On note une brutale chute de l'intensité des perturbations extérieures au début du calcul. Ce fait est un artefact numérique, l'erreur intervient, d'une part, lors de la projection de la solution initiale sur les points de Chebyshev dans la direction normale. D'autre part la résolution des conditions de saut au niveau du bord d'attaque est également une source d'erreur. Ensuite le taux de turbulence décroît comme  $x^{-1.1}$ . L'amplitude des stries, définie comme le maximum de la valeur *rms*, est proportionnelle à  $\sqrt{x}$ .

On s'intéresse à présent aux corrélations entre les stries  $u'$  et les autres fluctuations de vitesse  $v'$  et  $w'$ , voir figure 7.4.

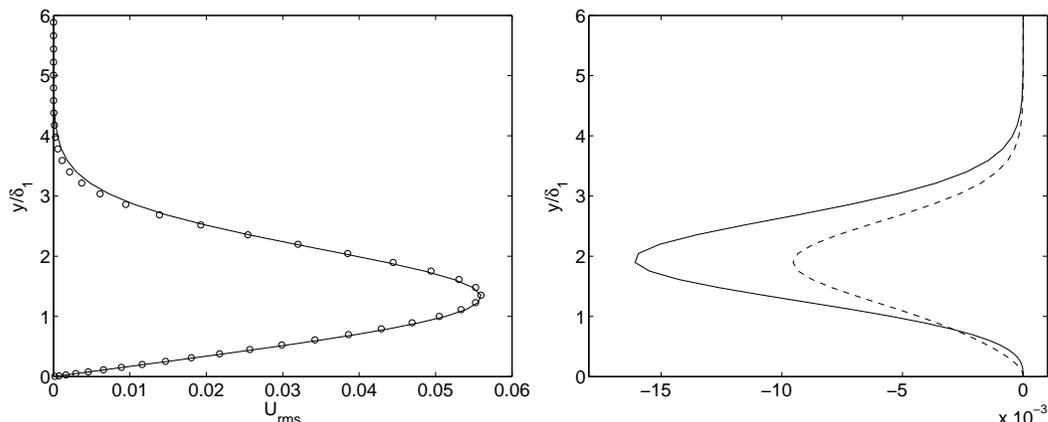


FIG. 7.4 – Figure de gauche, on trace la corrélation  $\overline{u'u'}$ , à droite les corrélations  $\overline{u'v'}$  (trait continu) et  $\overline{u'w'}$  (traits discontinus).

Les stries sont fortement corrélées aux fluctuations de vitesse normales à travers le cisaillement. On rappelle que le terme moteur de la création des stries est de la forme  $-u'v' \partial \bar{U} / \partial y$  (voir chapitre 5). Cependant on note également que sur la figure 7.4 les stries sont fortement corrélées aux fluctuations de vitesse transversale  $w'$ . Ce résultat n'est pas la conséquence d'un quelconque mécanisme de formation des stries. Il est lié à une forte corrélation entre les vitesses  $v'$  et  $w'$  dans le cas d'une turbulence bidimensionnelle. Dans le cas plus réaliste d'une turbulence tridimensionnelle  $\overline{u'w'}$  serait certainement négligeable devant  $\overline{u'v'}$ .

Pour une vue globale de l'écoulement on représente sur la figure 7.5 deux coupes, horizontale et verticale, du champ des stries  $u'$ .

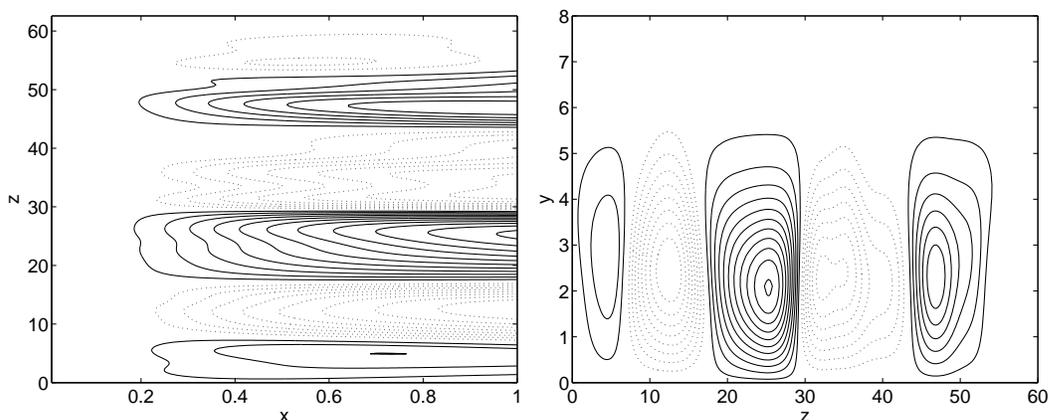


FIG. 7.5 – A gauche, champ de vitesse  $u_{rms}$  dans le plan horizontal pour  $y/\delta_1 = 1.3$ . A droite, champ de vitesse  $u_{rms}$  dans le plan vertical, pour  $x/L = 1$ .

On observe sur la figure 7.5 la fusion de stries de même signe. Ce phénomène est fréquemment observé dans le cas de paroi concaves (instabilité de Gortler), lire par exemple Mitsudharmadi *et al.* [85]. Ici c'est la structure initiale de la turbulence bidimensionnelle

qui impose la répartition transversale des stries. A noter que la largeur transversale du domaine (*i.e.*  $20\pi$ ) correspond à une dizaine de stries optimales ( $\beta_{opt} = 0.5/\delta$ ) calculées au chapitre 5. Sur la figure 7.5 les stries, au nombre de 5 sont plus larges à cause de la présence de grands tourbillons.

Dans le chapitre 5 sur les perturbations optimales on a vu que l'espacement transversal des stries peut s'expliquer, en partie, comme un processus de sélection de la couche limite ; un compromis entre la production non visqueuse des stries et la diffusion visqueuse. Pour mettre en balance l'importance relative des deux mécanismes en jeu (*i.e.* la réceptivité et la sélection de la couche limite d'un certain nombre d'onde  $\beta$  optimal), on fait une analyse de Fourier pour comparer les résultats avec ceux de la théorie linéaire des perturbations optimales.

On définit le gain  $G_k$  associé au nombre d'onde  $\beta_k$  :

$$G_k(x) = \frac{\int_y \hat{u}'^2(x, y, \beta_k) dy}{\int_y \hat{v}'^2(x=0, y, \beta_k) + \hat{w}'^2(x=0, y, \beta_k) dy}$$

où  $\hat{u}'$ ,  $\hat{v}'$  et  $\hat{w}'$  désignent les transformées de Fourier dans la direction  $z$  des fluctuations de vitesse. Les courbes du gain pour différents nombres d'onde significatifs sont tracées sur la figure 7.6.

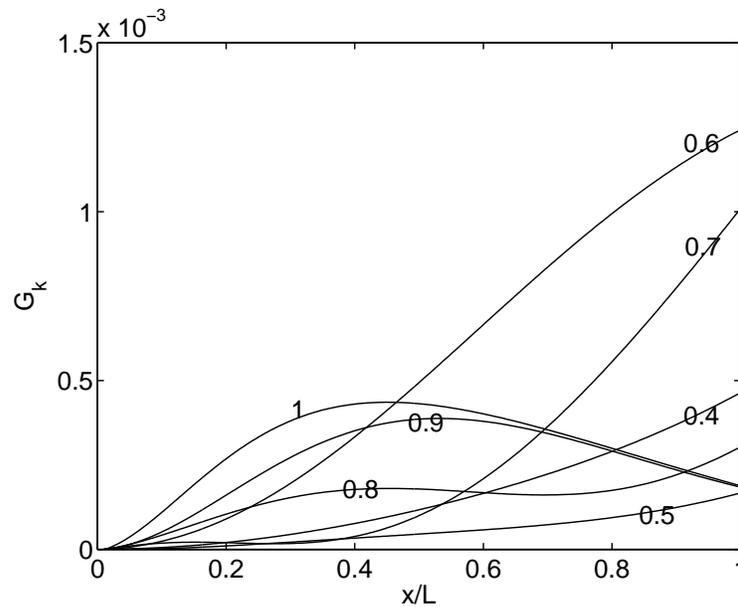


FIG. 7.6 – Evolution du gain  $G_k$  pour différents modes  $\beta_k$ .

Le mode optimal  $\beta = 0.5$  est peu amplifié, toutefois les modes les plus amplifiés sont proches :  $\beta = 0.6$  et  $\beta = 0.7$ . La lente croissance des stries suggère que le processus de réceptivité est distribué le long de la plaque plutôt que localisé au niveau du bord d'attaque, ce qui expliquerait l'émergence des stries optimales. Pour  $x/L = 0.4$ , le nombre d'onde prévu par la méthode des perturbations optimales vaut 0.8, sur la figure 7.6, les modes dominants, pour  $x/L = 0.4$ , sont  $\beta = 0.8$ ,  $\beta = 0.9$  et  $\beta = 1$ . On peut noter également que si l'évolution des gains n'est pas en parfait accord avec la théorie des perturbations optimales, on retrouve une croissance de l'amplitude des stries proportionnelle à  $\sqrt{x}$  (figure

7.3) prévue par Luchini [78]. Ainsi cette croissance algébrique, observée dans toutes les expériences sur des couches limites perturbées par une turbulence de grille, est certainement une caractéristique fondamentale de la dynamique des stries.

En conclusion on peut dire que la sélection de l'échelle transversale des stries est dominée par la structure du forçage. Cependant la sélection d'une certaine échelle par la couche limite n'est pas négligeable.

## Chapitre 8

# Sur la stabilité d'une strie

Dans les chapitres précédents nous avons cherché à modéliser les stries. Les calculs nous ont permis de mieux comprendre leur dynamique dans un écoulement laminaire. A présent on s'intéresse au dernier stade précédant la transition, dans ce chapitre nous allons aborder l'étude des instabilités se superposant à une strie isolée de basse vitesse. Enfin on présente une simulation numérique directe pour observer les mécanismes de régénération des structures longitudinales. Les résultats seront comparés, qualitativement, aux expériences de Asai *et al.* [7].

### 8.1 Ecoulement de base

Asai *et al.* [7] ont étudié, expérimentalement, la stabilité d'une strie isolée de basse vitesse dans une couche limite sur plaque plane. La vitesse extérieure, constante, vaut  $U_\infty = 4 \text{ m/s}$ . La strie est le résultat d'un sillage produit derrière une grille placée dans la couche limite à une distance  $x_0 = 50 \text{ mm}$  du bord d'attaque. L'utilisation d'une grille présente l'avantage, par rapport à une rugosité, de ne pas déclencher de détachements tourbillonnaires. Les auteurs n'observent pas de tourbillons longitudinaux, c'est-à-dire que la déviation par rapport à l'écoulement idéal de Blasius consiste simplement en une strie de type sillage.

Les auteurs ont étudié l'évolution de perturbations, variqueuses ou sinueuses, excitées par des pulsations au niveau de la paroi, respectivement symétriques ou antisymétriques par rapport au centre de la strie (voir figure 8.1).

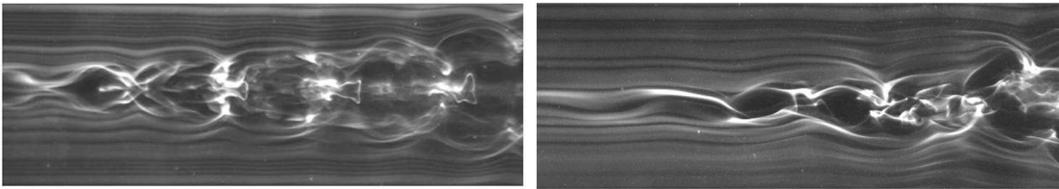


FIG. 8.1 – Visualisation du développement de la perturbation symétrique ( $F = 110 \text{ Hz}$ ), à gauche et de la perturbation antisymétrique ( $F = 60 \text{ Hz}$ ), à droite, pour  $y = 3 \text{ mm}$ . (Figures provenant de l'article de Asai *et al.* [7]).

Le taux de croissance spatiale du mode variqueux est très sensible à la largeur de la strie et diminue rapidement quand la strie décroît. Par contraste le mode sinueux, lié au cisaillement transversal, est peu sensible à l'amortissement de la strie. Du point de

vue de la compétition entre les deux type d'instabilité, les auteurs notent que, lorsque la largeur de la strie est étroite et comparable à l'épaisseur de la couche de mélange, le mode antisymétrique (sinueux) est plus instable que le symétrique. Les auteurs observent que le mode variqueux mène à des tourbillons de type 'épingle à cheveux' avec une paire de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Le mode antisymétrique évolue vers un train de tourbillons quasi-longitudinaux de signes alternés et donne à la strie une apparence de méandre.

L'épaisseur de déplacement au niveau de la grille vaut  $\delta_1 = 2.4 \text{ mm}$ , le nombre de Reynolds associé est  $Re = U_\infty \delta_1 / \nu = 650$ . Pour finir on se donne un temps caractéristique  $T_{car} = \delta_1 / U_\infty = 6 \times 10^{-4} \text{ s}$ . Ces quantités nous permettront de dimensionner nos calculs pour les comparer aux expériences. On s'est basé sur les mesures concernant la grille de  $7.5 \text{ mm}$  de large, mais il faut noter que d'autres mesures ont été réalisées avec une grille de  $5.5 \text{ mm}$ .

Dans cette étude de stabilité linéaire, l'instabilité est pilotée par les stries, c'est-à-dire par la présence d'une perturbation de vitesse longitudinale, et il n'est pas nécessaire d'inclure les deux autres composantes de vitesse dans l'état de base. On décompose donc l'écoulement de base comme une superposition de la solution de Blasius  $U$  et de la strie  $U_s$ . Il reste maintenant à modéliser cette strie à partir des données de Asai *et al.* [7].

On considère la strie comme étant composée par deux sillages, dans les directions normale et transversale. Nous avons donc choisi l'expression suivante :

$$U_s = - \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0} \left( ye^{-y^3/3} \right) \left( e^{-z^2/2} \right)$$

La comparaison entre ce modèle et les mesures est représentée sur la figure 8.2.

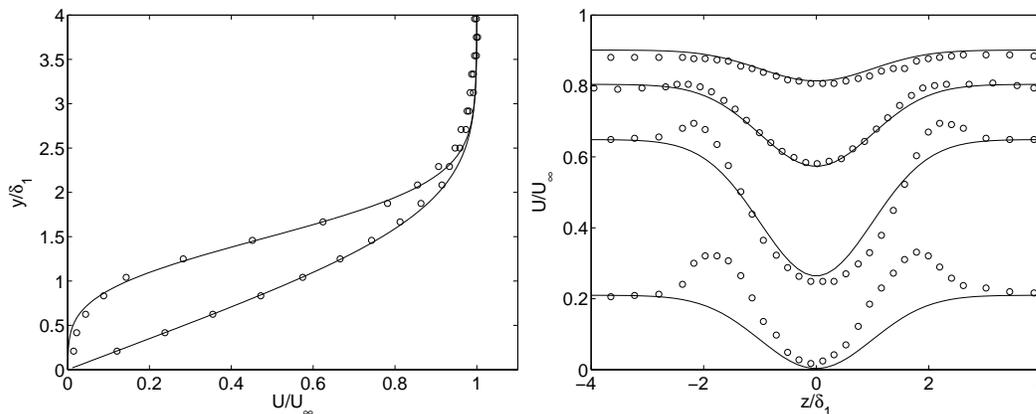


FIG. 8.2 – Comparaison entre le modèle (traits continus) et les mesures ( $\circ$ ). A gauche, profils selon  $y$  en  $z = 0$  et  $z = 30 \text{ mm}$ . A droite profils selon  $z$  en  $y = 1, 3, 4$  et  $5 \text{ mm}$ .

On note que pour un meilleur accord entre le modèle et les mesures, il apparaît nécessaire d'utiliser une fonction plus complexe que la forme  $f(y)g(z)$ . Notamment pour prendre en compte le léger pic de survitesse qui flanque la strie de basse vitesse. Cela dit, pour les objectifs que l'on se donne dans ce chapitre, liés à la compréhension du phénomène, on ne cherche pas à reproduire exactement les résultats de l'expérience. On considère que ce modèle de strie contient tous les ingrédients nécessaires pour aborder la déstabilisation de l'écoulement.

On trace sur la figure 8.3 les iso-lignes de la vitesse longitudinale dans le plan vertical.

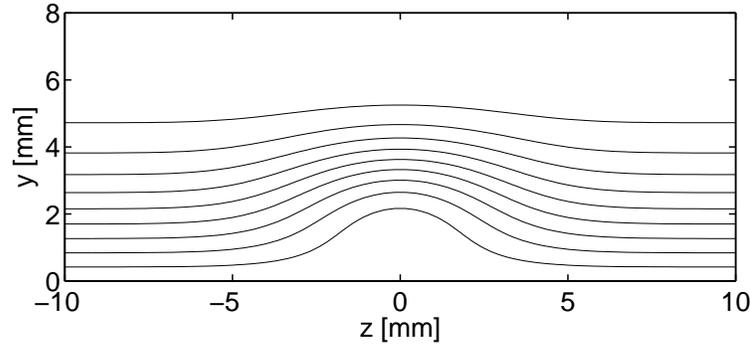


FIG. 8.3 – Iso-lignes de la vitesse longitudinale  $U$  dans le plan vertical  $(y, z)$ , les niveaux correspondent aux valeurs :  $[0.1 : 0.1 : 0.9] U_\infty$ .

## 8.2 Perturbations linéaires

On écrit les perturbations sous la forme d'ondes progressives, c'est-à-dire composées d'une partie enveloppe et d'une partie onde, périodique en temps :

$$q(x, y, z, t) = \tilde{q}(y, z, t) e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

Nous reviendrons sur l'intérêt pratique d'utiliser cette écriture un peu plus loin. En injectant cette forme dans les équations de Navier-Stokes, après linéarisation autour de la solution de base  $U(y, z)$ , on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} i\alpha u + v_y + w_z &= 0 \\ u_t - i\omega u + i\alpha U u + v U_y + w U_z &= -i\alpha p - \alpha^2 u + u_{yy} + u_{zz} \\ v_t - i\omega v + i\alpha U v &= -p_y - \alpha^2 v + v_{yy} + v_{zz} \\ w_t - i\omega w + i\alpha U w &= -p_z - \alpha^2 w + w_{yy} + w_{zz} \end{aligned}$$

Ces équations sont associées aux conditions aux limites :

$$u = v = w = 0, \quad \text{pour } z = \pm\infty, y = 0 \text{ et } y \rightarrow \infty.$$

On a plusieurs possibilités pour calculer ces perturbations :

- par un forçage harmonique à la paroi (problème aux conditions aux limites),
- par la théorie de stabilité linéaire classique (problème aux valeurs propres),
- par la méthode des perturbations optimales (problème aux conditions initiales).

L'expérience de Asai *et al.* utilise la première possibilité. Nous utiliserons la dernière : les perturbations sont calculées par la méthode des perturbations optimales. Cette méthode contient entre autre la théorie de stabilité linéaire classique.

Une étude de perturbations optimales a été réalisées par Hœpffner *et al.* [88] dans le cas d'une couche limite de Blasius modifiée par un arrangement périodique de stries, stables du point de vue de la théorie de stabilité linéaire classique. Ces stries sont obtenues par simulation non linéaire de stries optimales.

On cherche la perturbation initiale qui maximise, au temps  $T_{opt}$ , l'énergie définie comme :

$$E = \frac{1}{2} \int_y \int_z (\bar{u}u + \bar{v}v + \bar{w}w) \quad dy \quad dz$$

où  $\bar{\bullet}$  désigne le complexe conjugué. La méthode d'optimisation est basée sur les multiplieurs de Lagrange (voir le chapitre 5 et l'annexe A). Le problème adjoint s'écrit :

$$\begin{aligned} i\alpha u^\dagger + v_y^\dagger + w_z^\dagger &= 0 \\ -u_t^\dagger + i\omega u^\dagger - i\alpha U u^\dagger &= -i\alpha p^\dagger - \alpha^2 u^\dagger + u_{yy}^\dagger + u_{zz}^\dagger \\ -v_t^\dagger + i\omega v^\dagger - i\alpha U v^\dagger + u^\dagger U_y &= -p_y^\dagger - \alpha^2 v^\dagger + v_{yy}^\dagger + v_{zz}^\dagger \\ -w_t^\dagger + i\omega w^\dagger - i\alpha U w^\dagger + u^\dagger U_z &= -p_z^\dagger - \alpha^2 w^\dagger + w_{yy}^\dagger + w_{zz}^\dagger \end{aligned}$$

Ces équations sont associées aux conditions aux limites :

$$u^\dagger = v^\dagger = w^\dagger = 0, \quad \text{pour } z = \pm\infty, \quad y = 0 \quad \text{et } y \rightarrow \infty.$$

Le problème adjoint s'intègre en remontant le temps. Comme condition initiale, à  $t = T_{opt}$ , du problème adjoint on impose :  $[u^\dagger \ v^\dagger \ w^\dagger] = [u \ v \ w]$ . Comme condition initiale, à  $t = 0$ , du problème direct on impose :  $[u \ v \ w] = [u^\dagger \ v^\dagger \ w^\dagger]$ .

La forme  $q(t)exp(i\omega t)$  ne signifie pas que  $\omega$  soit un paramètre libre. Le seul paramètre libre est le nombre d'onde  $\alpha$ . La pulsation est liée à ce nombre d'onde par la vitesse de phase :  $\omega = \alpha c(\alpha)$ . En d'autres termes on ne peut pas imposer à la fois  $\alpha$  et  $\omega$ . La pulsation de l'instabilité est obtenue à partir de l'expression suivante :

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{2E} \int_y \int_z \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad dy \quad dz$$

La partie réelle de  $\tilde{\omega}$  donne la pulsation, la partie imaginaire correspond au taux de croissance. La pulsation est adapté à chaque itération direct/adjoint :  $\omega^{n+1} = \omega^n + Real(\tilde{\omega}^n)$ . Ainsi la forme d'onde progressive permet de simplifier le post-traitement en décomposant la perturbation en une partie oscillante  $exp(i\omega t)$  et une amplitude  $q(t)$ . Le taux de croissance, calculé sur l'évolution de l'amplitude, est alors plus précis.

Les résultats sont obtenus avec une discrétisation spatiale, basée sur les polynômes de Chebyshev dans la direction normale ( $y$ ), Hermite dans la direction transversale ( $z$ ) et associée un schéma d'ordre deux en temps. Les paramètres numériques sont :

$$\begin{aligned} N_y &= 51, \quad y_\infty = 10 \quad \delta_1 = 24 \text{ mm}, \\ N_z &= 61, \quad z_\infty = 5 \quad \delta_1 = 12 \text{ mm}, \\ \Delta t &= 10^{-2}. \end{aligned}$$

Le critère d'arrêt des itérations direct/adjoint vaut  $10^{-8}$  ; il porte, soit sur le gain  $(G^{n+1} - G^n)/G^{n+1}$ , soit sur taux de croissance  $|\tilde{\omega}_i^{n+1} - \tilde{\omega}_i^n|/|\tilde{\omega}_i^{n+1}|$ .

On peut distinguer les instabilités selon leurs symétries :

- variqueuses :  $u, v$  symétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  antisymétrique.
- sinueuses :  $u, v$  antisymétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  symétrique.

Le mode variqueux résulte d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz sur une inflexion du profil dans la direction normale à la paroi. Le mode sinueux est lié au cisaillement transversal. Deux exemples sont donnés sur la figure 8.4.

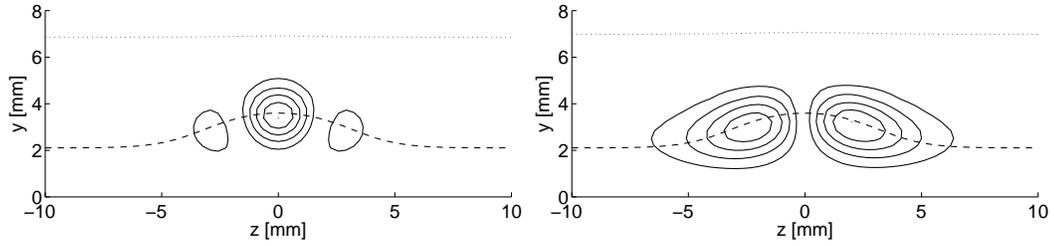


FIG. 8.4 – Iso-contours du module de  $u$ . A gauche perturbation variqueuse (symétrique),  $T_{opt} = 10$ ,  $\alpha = 0.85$  et  $F = (2\pi/\omega)/T_{car} = 109 \text{ Hz}$ . A droite perturbation sinueuse (antisymétrique)  $T_{opt} = 200$ ,  $\alpha = 0.31$  et  $F = 39 \text{ Hz}$ . On a superposé la ligne critique  $U = c$  (traits discontinus) et la frontière de la couche limite (traits pointillés).

Les perturbations se situent sur la courbe critique de l'écoulement, *i.e.* la ligne où la vitesse de phase de l'onde est égale à la vitesse de l'écoulement de base. Ce résultat est à comparer avec les mesures reproduites sur la figure 8.5.

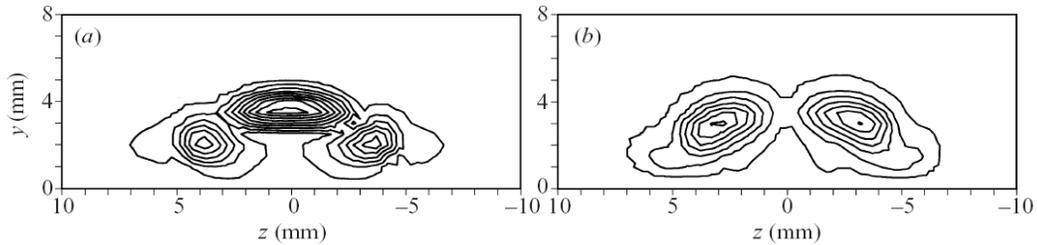


FIG. 8.5 – Distribution de l'amplitude des fluctuations ( $u'$ ) à  $x - x_0 = 50 \text{ mm}$ . (a) Symétrique (variqueuse) à  $F = 110 \text{ Hz}$ , représenté par des iso-lignes de  $u'/U_\infty = 0.002$  à  $0.018$ . (b) Anti-symétrique (sinueuse) à  $F = 60 \text{ Hz}$ , représenté par des iso-lignes de  $u'/U_\infty = 0.00025$  à  $0.00175$ . (Figure provenant de l'article de Asai *et al.* [7]).

Les fluctuations mesurées présentent des iso-contours, autour de  $z = \pm 5 \text{ mm}$ , plus incurvés près de la paroi par rapport aux calculs. Ceci est lié à l'absence de stries de haute vitesse dans notre modèle qui auraient pour effet d'incurver la courbe critique ( $U = c$ ) et donc de rapprocher les contours de  $u_{rms}$  de la paroi. Néanmoins la comparaison calcul/mesures est satisfaisante autour du sillage ( $z = 0$ ;  $y \approx 4 \text{ mm}$ ).

### Etude paramétrique sur le nombre d'onde

Pour commencer, on réalise une étude paramétrique sur  $\alpha$ , représentée sur la figure 8.6, pour une perturbation optimale calculée aux temps  $T_{opt} = 10$ . On choisit un temps court pour deux raisons, d'une part pour être cohérent avec l'hypothèse d'un écoulement de base gelé, c'est-à-dire stationnaire. D'autre part la transition vers la turbulence se faisant de manière brutale, on peut s'attendre à ce que les effets non linéaires interviennent avant que l'instabilité n'atteigne un comportement asymptotique (modal).

La vitesse de phase est quasi-constante  $c \approx 0.49$  vis-à-vis du nombre d'onde. De plus les perturbations optimales, aux temps courts, ne sont pas stationnaires, elles ont la forme d'ondes progressives, avec un certain nombre d'onde optimal. Ce résultat a également été obtenu par Butler et Farrell [28] pour des écoulements bidimensionnels parallèles (Couette, Poiseuille et Blasius). Aux temps courts ces auteurs ont obtenu des perturbations optimales

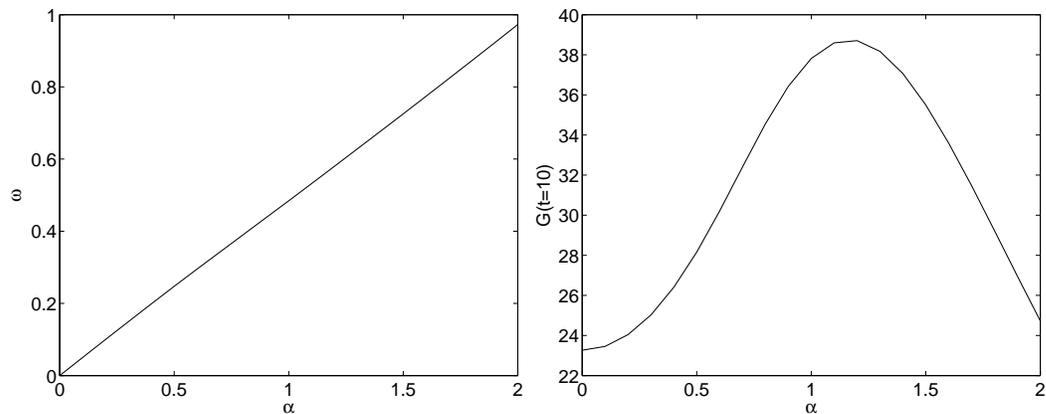


FIG. 8.6 – A gauche pulsation ( $\omega$ ) de la perturbation optimale en fonction du nombre d'onde ( $\alpha$ ). A droite valeur du gain à  $t = 10$  en fonction de  $\alpha$ .

sous la forme d'ondes obliques ( $\alpha \neq 0, \beta$ ). Il faut ajouter que pour de faibles nombre d'onde,  $\alpha \rightarrow 0$ , l'hypothèse d'un écoulement de base parallèle (ou stationnaire) n'est plus vérifiée.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution de ces perturbations : croissance exponentielle (instabilité modale classique) ou algébrique.

### Croissance exponentielle vs algébrique

Pour une étude modale, on cherche le comportement asymptotique des perturbations. On utilise  $T_{opt} = 200$  pour la perturbation variqueuse et  $T_{opt} = 400$  pour la perturbation sinueuse. Ces valeurs nous assurent d'une bonne convergence sur le taux de croissance, prouvant que le régime asymptotique (modal) est atteint. On représente sur la figure 8.7 les taux de croissance en fonction de la fréquence.

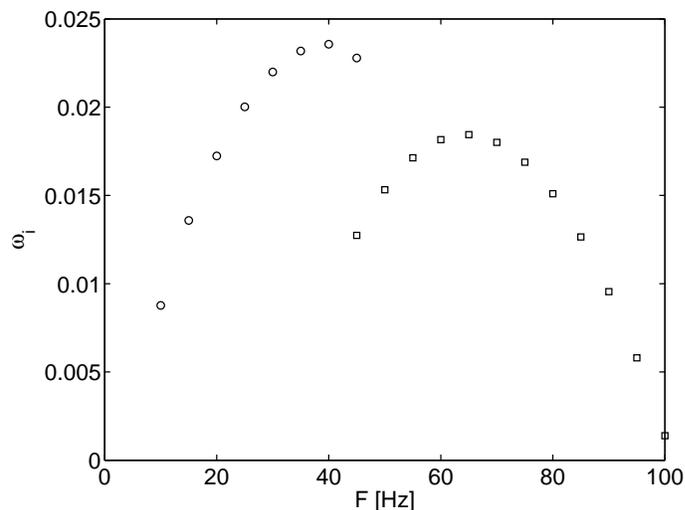


FIG. 8.7 – Taux de croissance (adimensionné) des ondes instables en fonction de la fréquence. Les  $\circ$  désignent une perturbation sinueuse, les  $\square$  une perturbation variqueuse.

Le taux de croissance ( $\omega_i$ ) des perturbations sinueuses est plus important que celui

des perturbations variqueuses pour les basses fréquences. Cependant aux temps courts les perturbations les plus amplifiées sont toujours symétriques (variqueuses). Il est important de noter que ces résultats dépendent du modèle de strie utilisé puisque la compétition sinueux/variqueux dépend des cisaillements normal et transversal.

Sur la figure 8.8, on représente l'évolution de l'amplitude des perturbations définie comme le maximum de  $u_{rms} = \sqrt{\overline{u'u}}$ . Pour comparer, qualitativement, nos résultats avec l'expérience de Asai *et al.*, on opère une transformée de Taylor :  $x = U_\infty t$ . Ainsi  $T_{opt} = 10$  correspond à une abscisse dimensionnée  $x_{opt} = 24 \text{ mm}$ .

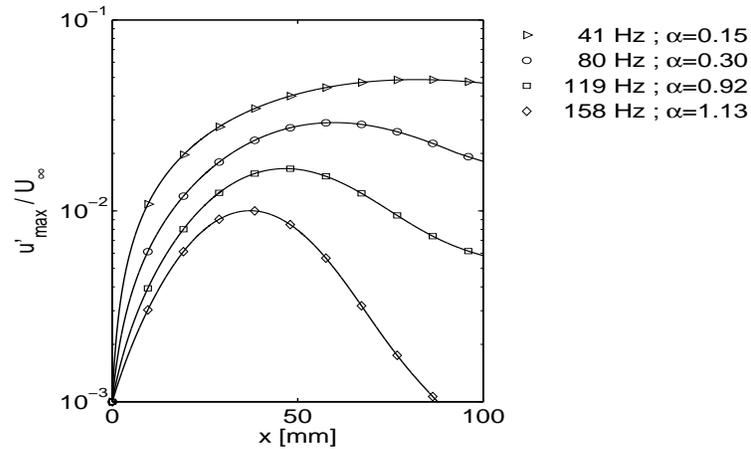


FIG. 8.8 – Développement de l'amplitude de  $u$ , pour différentes fréquences.

Les fluctuations  $u'$  les plus amplifiées sur cette courbe correspondent à une fréquence de  $40 \text{ Hz}$ , soit un nombre d'onde adimensionné de  $\alpha = 0.15$ . Pourtant on se rappelle que l'énergie totale des perturbations est maximale pour un nombre d'onde de l'ordre de 1 (figure 8.6).

On peut comparer l'évolution de l'amplitude de  $u'$  calculée avec les mesures reportées sur la figure 8.9.

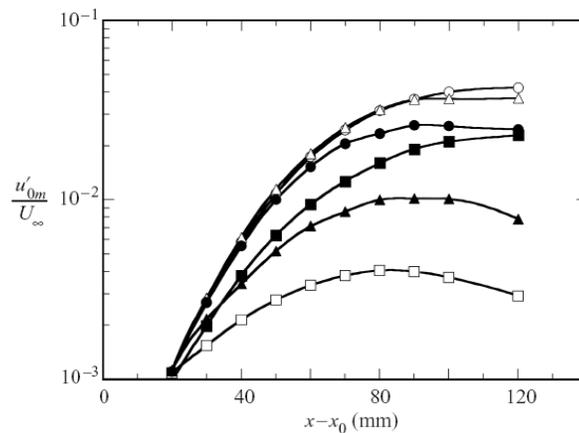


FIGURE 8. Streamwise development of the symmetric mode in the case of the 7.5 mm wide screen.  
 $\square$ , 40 Hz;  $\blacksquare$ , 80 Hz;  $\circ$ , 110 Hz;  $\triangle$ , 120 Hz;  $\bullet$ , 140 Hz;  $\blacktriangle$ , 170 Hz.

FIG. 8.9 – (Figure provenant de l'article de Asai *et al.* [7]).

Les mesures de Asai *et al.* montrent une fréquence optimale pour  $u'$  autour de  $110 \text{ Hz}$ , qui n'est pas restituée par le calcul. On peut donner deux explications pour justifier cette différence. D'une part on peut supposer que nos calculs sont trop différents de l'expérience : mauvaise modélisation de la strie, méthode des perturbations optimales qui ne correspond pas au forçage de l'expérience. D'autre part on peut supposer que les mesures par fil chaud ne restituent pas seulement  $u'$  mais plutôt  $\sqrt{u'^2 + v'^2}$ .

Asai *et al.* [7] ont observé des plateaux sur les courbes d'amplitudes des modes variqueux (figure 8.9) qui seraient liés, d'après les auteurs, aux effets non linéaires. Il est possible, d'après nos résultats, que ces plateaux soient la signature d'une croissance algébrique des perturbations. Les mesures sur les modes sinueux montrent des niveaux d'amplitude plus faibles, avec une nette croissance exponentielle, sans plateaux.

D'après nos calculs ces instabilités sinueuses montrent des croissances algébriques plus faibles mais des croissances exponentielles plus importantes par rapport aux instabilités variqueuses. Autrement dit, pour ce modèle de strie, les perturbations les plus amplifiées aux temps courts sont symétriques (variqueuses) alors qu'aux temps longs se sont les perturbations antisymétriques (sinueuses) qui sont le plus amplifiées. Il est important d'ajouter que, pour un nombre d'onde  $\alpha$  fixé, les perturbations optimales ont la même forme que les modes instables. Ce résultat a également été obtenu par Hoepffner *et al.* [88] pour le cas de stries périodiques en envergure. Si la transition vers la turbulence s'opère dès que l'instabilité atteint un certain seuil critique, il est nécessaire de prendre en compte le comportement transitoire des perturbations.

Pour vérifier l'hypothèse d'un état de base quasi-stationnaire, des calculs ont été réalisés avec les mêmes conditions initiales, mais avec une strie amortie au cours du temps. La strie  $U_s$  est solution du problème de diffusion :

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right).$$

Les résultats sont très peu différents du cas où la strie est gelée en temps.

### 8.3 Simulation numérique directe

L'étude précédente nous a permis de calculer des instabilités linéaires superposées à un modèle de strie de basse vitesse. On a choisi de calculer des perturbations avec une forte croissance initiale, susceptibles de déclencher rapidement la turbulence. On s'intéresse maintenant à l'évolution non linéaire de ces perturbations.

Nous avons réalisé une simulation numérique directe de la transition initiée par un mode variqueux. Le code, développé par l'auteur, est une extension de la résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles au cas tridimensionnel (voir annexe C). Les paramètres numériques sont :  $Ny = 51$ ,  $y_\infty = 10\delta_1 = 24 \text{ mm}$  ;  $Nz = 63$ ,  $z_\infty = 6\delta_1 = 14.4 \text{ mm}$ . Dans la direction longitudinale on utilise  $Nx = 64$  modes de Fourier. Un schéma temporel d'ordre deux en temps a été utilisé, associé à un pas de temps de  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ . On impose un bruit de fond sur l'écoulement, jusqu'au temps  $t = 50$ , avec une amplitude aléatoire inférieure à  $10^{-5}$ . De cette manière, les différents modes de Fourier se développent à partir d'un niveau plus élevé. La divergence évolue autour de  $10^{-14}$ . La discrétisation spatiale est certainement trop faible pour obtenir des résultats comparables à la réalité, néanmoins on espère capturer qualitativement l'essentiel des phénomènes mis en jeu.

Le nombre de Reynolds, comme précédemment vaut 650. On initialise la simulation avec une perturbation optimale en  $T = 10$ . Comme pour l'expérience de Asai *et al.*, la fréquence

de la perturbation est choisie égale à  $110 \text{ Hz}$  et l'amplitude, basée sur le maximum de  $u'$ , est imposée à 1%. Il s'agit de la perturbation variqueuse-symétrique calculé précédemment (figure 8.4). Le nombre d'onde associé à cette perturbation vaut  $\alpha_0 = 0.8463 \approx 2 \text{ mm}^{-1}$ . Les calculs sont réalisés sur deux périodes spatiales, on a donc deux familles de mode : le mode  $\alpha_0$  et ses harmoniques (*i.e.*  $2\alpha_0, 3\alpha_0, \dots$ ), et le mode  $\alpha_0/2$  et ses harmoniques propres (*i.e.*  $3\alpha_0/2, 5\alpha_0/2, \dots$ ). Pour ne pas exciter en continu les instabilités, nous avons choisi d'inclure la strie dans la perturbation initiale. Ainsi le sillage est amorti au cours du temps et on a une compétition entre la croissance des instabilités et la décroissance de la strie.

Dans ce chapitre on utilise une moyenne spatiale sur  $x$  :

$$\bar{f} = \frac{1}{L_x} \int_{L_x} f \, dx,$$

où  $L_x = 2 \times \frac{2\pi}{\alpha_0}$  désigne la longueur du domaine. Les fluctuations sont notées  $f' = f - \bar{f}$ .

La fluctuation de vitesse longitudinale initiale est représentée sur la figure 8.10.

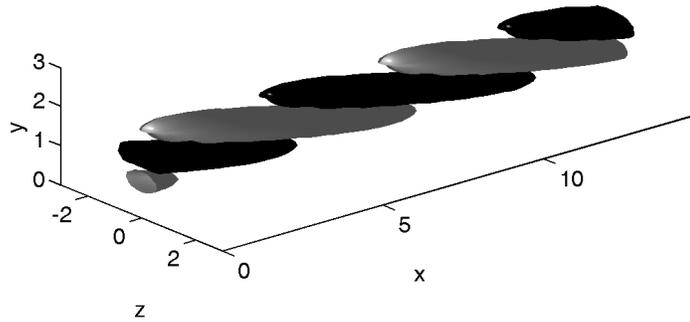


FIG. 8.10 – Fluctuations de vitesse  $u'$  imposée comme condition initiale. Les isosurfaces correspondent à des valeurs de  $\pm 20\%$  de la valeur maximale (*i.e.*  $|u|_{max} = 1\% U_\infty$ ).

On représente la fluctuation de vitesse longitudinale  $u'$  au temps  $t = 20$  sur la figure 8.11.

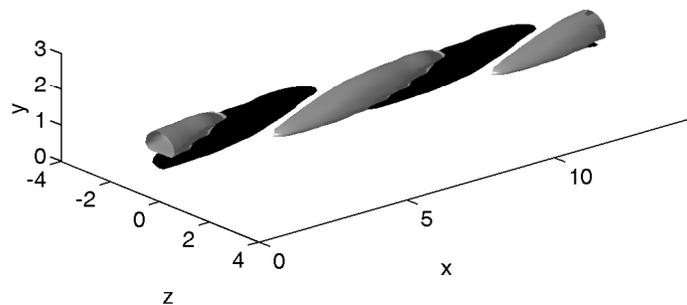


FIG. 8.11 – Isosurface de  $u'$  correspondant à  $\pm 40\%$  de la valeur maximale (*i.e.*  $|u|_{max} = 13.8\% U_\infty$ ), pour  $t = 20$ .

Les perturbations optimales à  $t = 0$  sont orientées, en suivant la direction de l'écoulement, vers la paroi alors que les perturbations à  $t = 20$  sont orientées vers l'extérieure de la couche limite, en accord avec l'étude de Høpfner *et al.* [88] ou Schoppa et Hussain [99].

L'évolution temporelle de l'énergie des modes de Fourier est représentée sur la figure 8.12.

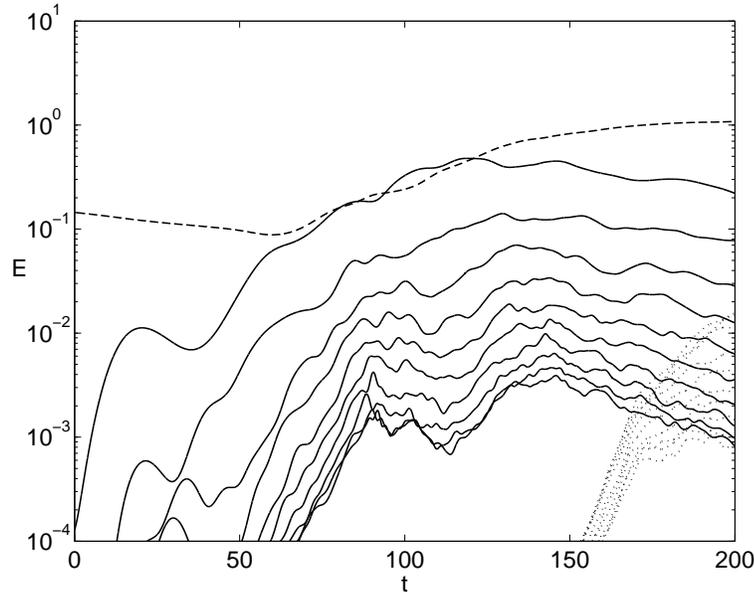


FIG. 8.12 – Evolution temporelle de l'énergie des différents modes. Le mode  $\alpha = 0$  est représenté par un trait discontinu. Le mode  $\alpha_0$  et ses harmoniques  $n\alpha_0$  sont représentés en traits continus. Enfin les modes  $\alpha = n\alpha_0/2$  sont représentés par des pointillés.

Dans un premier temps, on observe la croissance algébrique du mode variqueux et la décroissance du mode constant  $\alpha = 0$ , qui correspond à la diffusion de la strie de basse vitesse. Dans un deuxième temps on observe l'émergence des modes  $n\alpha_0/2$ , ce qui se traduit par la perte progressive de la périodicité initiale ( $2\pi/\alpha_0$ ) de l'écoulement, l'écoulement devient aperiodique.

Un des phénomènes importants observés dans la transition par des perturbations symétriques concerne la naissance de tourbillons en 'fer à cheval' chevauchant la strie de basse vitesse. Ces structures sont caractérisées par de basses pressions ce qui permet de les mettre en évidence. Sur la figure 8.13 on a superposé une isosurface de basse pression à la déviation de vitesse longitudinale :  $\Delta u = U - U_{Blasius}$ . La déviation de vitesse  $\Delta u$  contient le sillage (la strie) en plus de la fluctuation de vitesse ( $u'$ ).

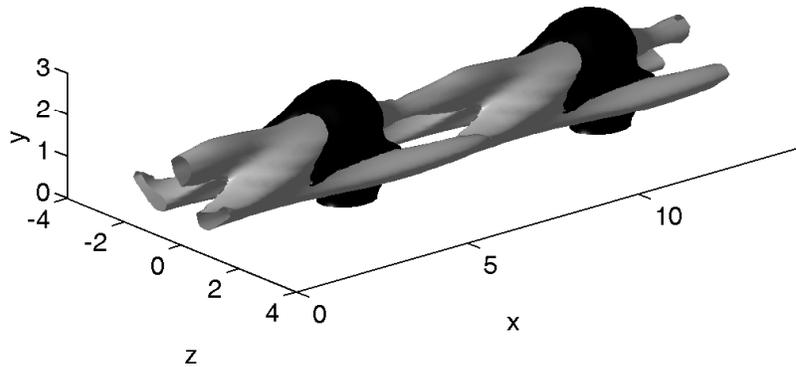


FIG. 8.13 – Au temps  $t = 50$ , en clair : isosurface de  $\Delta u$  correspondant à  $-60\%$  de la valeur maximale (*i.e.*  $\max|\Delta u| = 36\%$ ), et en noir : isosurface de  $p'$  correspondant à  $-50\%$  de la valeur maximale (*i.e.*  $\max|p'| = 1.7\%$ ).

Par interactions quadratique, les fluctuations de vitesse  $\pm\alpha$  créent un mode constant (*i.e.*  $\alpha = 0$ ), représenté sur la figure 8.14.

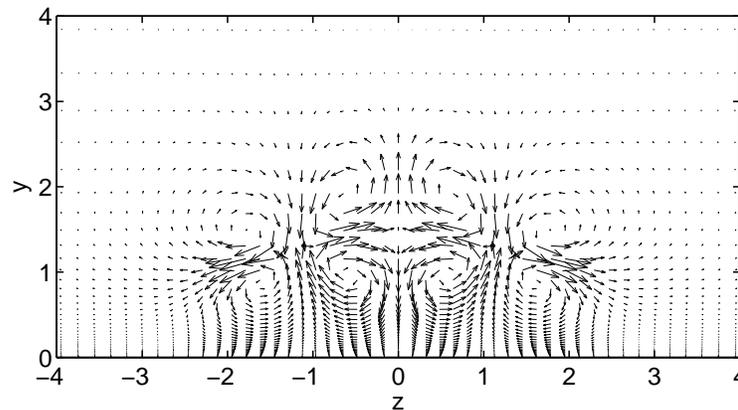


FIG. 8.14 – Au temps  $t = 50$ , vecteurs  $(v_0, w_0)$  correspondant au mode  $\alpha = 0$  ( $|v_0|_{\max} = 2.1\% U_\infty$  et  $|w_0|_{\max} = 3.5\% U_\infty$ ).

Ce mode constant peut s'interpréter comme une déviation de l'écoulement moyen, susceptible de générer d'autres instabilités algébriques et déclencher ou accélérer la transition. Il faut noter que des calculs avec un profil de strie gelé, *i.e.* stationnaire, donnent des tourbillons similaires à ceux de la figure 8.14. On observe que ces tourbillons longitudinaux tendent à se rapprocher de la paroi au cours du temps. Ces structures pourraient constituer une amorce pour le cycle pariétal d'une turbulence développée.

D'après les résultats précédents on peut faire une ébauche schématique du processus de transition : la strie induit la croissance d'une onde qui, par des effets quadratiques (non linéaires), déforme l'état de base donnant lieu à de nouvelles ondes instables et ainsi de suite.

Pour atteindre un écoulement turbulent développé, le point de vue le plus couramment admis est celui proposé par Hopf-Landau, selon lequel l'apparition du chaos se fait

progressivement, par excitation de proche en proche dans le spectre d'un grand nombre de degrés de liberté, la turbulence pleinement développée se définissant alors comme un régime asymptotiquement atteint quand tous les degrés de liberté du système sont excités. Les mécanismes d'excitation, peuvent correspondre à un nombre croissant de modes instables qui remplissent le spectre, ou à une succession de croissances algébriques, comme l'a proposé Grossmann [54].

Pour conclure ce chapitre, on signalera que Konishi et Asai [74] ont étendu l'étude expérimentale au cas de stries de basse vitesse multiples, arrangées périodiquement en envergure. Le mode fondamental et le premier sub-harmonique sont excités artificiellement pour chaque type : sinueux ou variqueux. Le développement du mode harmonique est faiblement dépendant de l'espacement des stries. Le mode fondamental, sinueux ou variqueux, est pour sa part très sensible à l'espacement des stries. Le point à retenir est que, pour des amplitudes de stries égales, le taux de croissance est toujours plus faible par rapport au cas précédent d'une strie isolée.

## Chapitre 9

# Critère de transition

En 1928, Frank Whittle publia sa théorie sur les turbines à gaz. Le premier vol réussi avec ce type de propulsion eut lieu en 1939. Ensuite le développement de ces turbines devient très rapide, et aujourd'hui le champ d'application dépasse le domaine de la propulsion aéronautique. Par exemple la production d'électricité dans de grandes turbines peut atteindre plusieurs centaines de mégawatts. Une turbine à gaz est constituée de trois parties, le compresseur, la chambre de combustion et la turbine. L'air après compression est mélangé avec un carburant, après combustion les gaz chauds sont éjectés au travers de la turbine. Pour obtenir de bons rendements les températures doivent être élevées, il est donc nécessaire de bien connaître les transferts de chaleur entre l'aube de turbine et le fluide ambiant. Ces flux sont fortement dépendants de la nature laminaire et/ou turbulente de la couche limite qui se développe sur la paroi. En effet l'agitation turbulente peut augmenter d'un facteur trois les flux de chaleurs.

Ce paragraphe est consacré à la prévision de la transition d'une couche limite soumise à une turbulence extérieure. Ce travail a fait l'objet d'un article [15].

### 9.1 Critères empiriques de transition : bibliographie

La plupart des modèles de transition bypass utilise une approche turbulente, basée sur la fonction d'intermittence. Le processus de transition peut être incorporé arbitrairement dans un calcul numérique en modifiant la viscosité turbulente, obtenue par un modèle de turbulence, avec un facteur d'intermittence ( $\nu_t \rightarrow \gamma \nu_t$ ). Par définition  $\gamma(x)$  est égal à 0 pour un écoulement laminaire et 1 pour un écoulement turbulent. Emmons en 1951 [44] a proposé une théorie pour décrire la relation entre la production d'un spot turbulent et le facteur d'intermittence, basée sur des considérations probabilistiques. Si on suppose qu'un spot turbulent est créé à un certain point  $\vec{x}_0$ , par transport/diffusion, il contaminera une certaine région appelée cône d'influence. Si maintenant on retourne le problème : on cherche quelle est la fraction du temps  $\gamma$  au cours de laquelle l'écoulement en un certain  $\vec{x}$  est turbulent. Cette zone est contaminée par un ensemble de point  $\vec{x}_0$ . Emmons a dérivé l'expression suivante :  $\gamma(\vec{x}) = 1 - \exp(-\int_{\Gamma} \rho(\vec{x}_0) dV)$ , où  $\rho$  est le taux de production de spots. En supposant que les spots sont créés à l'abscisse de transition, notée  $x_t$ , on obtient un Dirac pour la fonction de production :  $\rho = n \delta_{x_t}$ , où  $n$  caractérise le nombre de spots créés. Une fonction plus régulière que le Dirac serait plus réaliste mais il semble qu'on puisse négliger la zone de production de spots devant la taille de la zone transitionnelle. On obtient alors la distribution de Narasimha, sous forme adimensionnée :  $\gamma(\vec{x}) = 1 - \exp(-\lambda(Re_x - Re_{x_t})^2)$

Il reste alors à déterminer deux paramètres, le nombre de Reynolds du début de transition  $Re_{x_t}$  et  $\lambda$  qui caractérise la longueur de la zone transitionnelle. Ces deux paramètres dépendent, entre autres, du taux de turbulence extérieur  $Tu$  et de l'écoulement moyen. Quand le taux de turbulence augmente ou quand l'écoulement est décéléré, la transition se produit plus tôt, sur une zone plus courte, et réciproquement.

Fransson *et al.* [49] ont appliqué le modèle de Narasimha à la couche limite de Blasius. En utilisant leurs résultats expérimentaux et la relation  $Re_{x,tr} = Re_{x,\gamma=0.5} = K Tu^2 = 196 Tu^2$ , ils ont obtenu :

$$\lambda = \frac{1.52}{\Delta Re_{tr,min}^2} \left( 1 + \frac{0.33K}{\Delta Re_{tr,min}} Tu^{-2} \right)^{-2},$$

avec  $\Delta Re_{tr,min} = 3.9 \times 10^4$ . Mais ces résultats ne sont valables que pour des écoulements sans gradient de pression extérieur.

Une alternative a été proposée par Suzen et Huang [103] en 1999. Dans un premier temps, les paramètres  $(x_t, \lambda)$  sont déterminés en fonction du taux de turbulence extérieur  $Tu$  pour le cas sans gradient de pression par des corrélations empiriques. Par exemple Abu Ghanam et Shaw ont proposé  $Re_{\theta_t} = 163 + \exp(6.91 - Tu)$  et  $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-11} Tu^{7/4}$ . Les effets du gradient de pression sont alors pris en compte en écrivant une équation de transport pour la fonction d'intermittence. Suzen et Huang [103] ont ensuite inclus cette équation dans une code couche limite turbulent en utilisant une viscosité turbulente calculée par un modèle SST de Menter (1994) [83]. Ils ont testé leur modèle sur la série d'expériences T3 (T3A, T3B, T3C1, et T3C2). Les comparaisons pour le coefficient de frottement ( $Cf$ ) et le nombre de Reynolds ( $Re_\theta$ ) donnent de bons résultats. Il pourrait être intéressant d'utiliser la fonction d'intermittence de Narasimha modifiée par Fransson *et al.* pour le problème spécifique de la transition bypass.

On présente maintenant deux critères pour estimer la transition, adaptés aux cas de forts taux de turbulence extérieure.

Van Driest and Blumer (1963) [41] ont postulé que la transition se produit quand le nombre de Reynolds basé sur la vorticité atteint un certain seuil. Leur critère prend en compte l'influence d'un gradient de pression extérieur en utilisant la théorie de Pohlhausen.

$$1690 Re_{x_t}^{-1/2} = 0.312(m + 0.11)^{-0.528} + 0.73\delta^2 Re_{x_t}^{1/2} Tu^2,$$

où  $Re_{x_t}$  est le nombre de Reynolds au point de transition basé sur la vitesse extérieure locale, et  $\delta = \delta_{99}/x Re_{x_t}^{1/2}$ . Le paramètre  $m$  est lié au gradient de pression adimensionné. En conclusion ils ont indiqué que des calculs préliminaires sur des écoulements compressibles donnent une transition plus en amont quand le nombre de Mach augmente, en accord avec les expériences. Ils n'ont cependant pas donné plus de détails.

Utilisant des données expérimentales, sur des cas sans gradient de pression, Andersson *et al.* [2] proposent une corrélation entre le nombre de Reynolds au point de transition  $Re_{x_t}$  et le taux de turbulence  $Tu$ . Pour modéliser le processus de réceptivité, l'énergie des stries à l'entrée est supposée proportionnelle au taux de turbulence au bord d'attaque. La croissance de l'énergie des stries est supposée proportionnelle au nombre de Reynolds longitudinal. Leur critère est alors basé sur une énergie critique :

$$Tu^2 Re_{x_t} = K$$

où  $K$  est une constante. Andersson *et al.* [2], à partir des résultats de Coupland [37] notamment, proposent la valeur  $K = 144$ . Fransson *et al.* [49] ont refait des mesures plus précises

et donnent la valeur  $K = 196$ . Il faut noter qu'ils définissent l'abscisse de transition comme le point où la fonction d'intermittence  $\gamma$  est égale à 0,5. Cette définition est différente de la définition habituelle où on aurait plutôt  $\gamma \approx 0,1$ . Il faut noter pour conclure que ce critère ne s'applique pas aux écoulements avec gradient de pression extérieur.

On reporte ces deux critères ainsi que les valeurs expérimentales de Coupland [37] et Arnal et Juillen [6] dans un diagramme  $(Re_{xt}, Tu)$  sur la figure 9.1. Sur la courbe on a également représenté le critère de Mack pour les ondes TS (voir définition dans le chapitre 4).

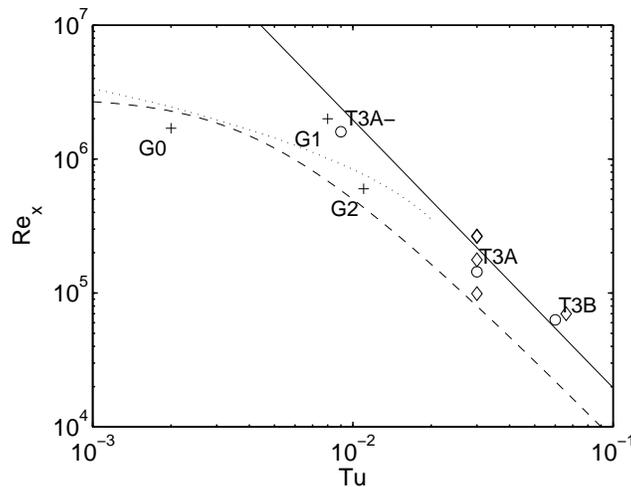


FIG. 9.1 – Comparaison entre les modèles de transition d'Andersson *et al.* (trait plein), de Van Driest & Blumer (traits discontinus) de Mack (pointillés) et les valeurs expérimentales. Les + correspondent aux résultats de Arnal et Juillen, o T3 sans gradient de pression,  $\diamond$  T3 avec gradient de pression.

Si le critère de Andersson *et al.* [2] donne de bons résultats pour la couche limite de Blasius, il ne peut être appliqué aux écoulements avec gradient de pression. Dans ce paragraphe on propose un modèle semi-empirique, basé sur les approximations de couche limite, qui imite la croissance des stries et leur influence sur l'écoulement moyen. Ce modèle sera calibré à partir de cas sans gradient de pression, ensuite il sera testé sur les cas avec gradient de pression.

## 9.2 Equation du modèle et critère de transition

### Equation du modèle

Pour des taux de turbulence modérés ( $1\% < Tu < 6\%$ ), la contribution de la turbulence extérieure dans le bilan de quantité de mouvement ne peut pas être négligée, même avant la transition. Notre approche consiste à utiliser des équations de couche limite pseudo-turbulente dans la zone laminaire. La modélisation est basée sur la triple décomposition introduite par Reynolds et Hussain (1972) [94]. Cette triple décomposition a depuis été utilisée, entre autres, par Reau and Tumin [90], Bottaro *et al.* [23] et Jang *et al.* [65]. Les quantités instantanées  $\mathbf{Q} = [U \ V \ W \ P]$  sont décomposées, en une composante moyenne  $\bar{\mathbf{Q}}$  et fluctuante  $\mathbf{q}'$ . Cette dernière est elle même décomposée en une partie cohérente  $\mathbf{q}_c$  et

une partie aléatoire  $\mathbf{q}_r$  :

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{q}', \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q}_c + \mathbf{q}_r \quad (9.1)$$

Avec  $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{U} \ \bar{V} \ 0 \ \bar{P}]$ ,  $\mathbf{q}_c = [u_c \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  et  $\mathbf{q}_r = [u_r \ v_r \ w_r \ p_r]$ . Une notion importante est implicitement présente dans cette définition : les parties cohérentes et fluctuantes sont décorréliées, excepté le terme source des stries :  $\overline{u_c v_r}$  qui est strictement négatif. Pour la partie cohérente on se limite à la fluctuation de vitesse longitudinale puisque c'est la seule composante amplifiée par le mécanisme 'lift-up' décrit dans cette thèse.

Nous allons maintenant construire un système d'équations pour  $\bar{\mathbf{Q}}$  et  $u_c$ . Pour décrire l'écoulement moyen, on se base sur les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) et adimensionnées, en utilisant les échelles de couche limite. Dans la direction principale de l'écoulement, on utilise une échelle caractéristique de longueur  $L$ , par exemple la corde, associée à une échelle de vitesse  $U_e(L)$ . Les directions transverses sont adimensionnées par une longueur caractéristique de l'épaisseur de la couche limite  $\delta = \sqrt{\nu L / U_e(L)}$ , et une vitesse associée  $U_e(L) / Re_\delta$ . Ces échelles appliquées aux équations moyennées donnent au premier ordre un système de deux équations indépendantes du nombre de Reynolds et paraboliques dans la direction de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \bar{U}_x + \bar{V}_y &= 0, \\ \bar{U}\bar{U}_x + \bar{V}\bar{U}_y &= U_e U_{e,x} + \bar{U}_{yy} - (\overline{u_c u_c})_x - (\overline{u_c v_r})_y, \end{aligned} \quad (9.2)$$

associé aux conditions aux limites :

pour  $y = 0$ ,  $U = V = 0$ , pour  $y \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow U_e$ . La condition d'entrée est donnée par la solution de similitude de Hiemenz décrivant une couche limite près d'un bord d'attaque. Dans ces équations, on a négligé le terme aléatoire (amorti)  $(\overline{u_r u_r})_x$  devant le terme cohérent (amplifié)  $(\overline{u_c u_c})_x$ .

Pour les fluctuations cohérentes (stries) on utilise l'équation de conservation de quantité de mouvement longitudinale parabolisée et linéarisée. Ainsi l'équation pour les stries est obtenue en injectant la décomposition (9.1) dans les équations de Navier-Stokes et en soustrayant les équations pour l'écoulement moyen. En appliquant les échelles de couche limite décrites précédemment, on obtient que la fluctuation de vitesse cohérente ( $u_c$ ) est de l'ordre de  $U_e(L)$ , alors que la fluctuation de vitesse aléatoire ( $v_r$ ) est de l'ordre de  $U_e(L) / Re_\delta$ . L'équation pour la composante  $u_c$  s'écrit :

$$u_{c,t} + \bar{U}u_{c,x} + \bar{U}_x u_c + \bar{V}u_{c,y} = u_{c,yy} + u_{c,zz} - \bar{U}_y v_r. \quad (9.3)$$

associé aux conditions aux limites :  $u_c(y = 0) = u_c(y \rightarrow \infty) = 0$ . Il faut noter ici que les stries ne peuvent pas être créées en l'absence de cisaillement de l'écoulement moyen, donc  $u_c$  tend vers zéro à l'extérieur de la couche limite. En condition d'entrée on impose :  $u_c(x = 0, y) = 0$ .

Les perturbations sont décomposées en série de Fourier dans les directions homogènes (*i.e.* en temps et dans la direction transversale). De plus la linéarité des équations permet une analyse mode par mode. Ainsi  $u_c$  et  $v_r$  s'écrivent :

$$\begin{cases} u_c(x, y, z, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \tilde{u}_c^{m,n}(x, y) \exp(i\beta_m z - i\omega_n t) \\ v_r(x, y, z, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \tilde{v}_r^{m,n}(x, y) \exp(i\beta_m z - i\omega_n t) \end{cases} \quad (9.4)$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $\beta$  le nombre d'onde transversal.

La turbulence est supposée homogène et stationnaire en moyenne. On définit la moyenne comme :

$$\bar{f} = \lim_{T, Z \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \frac{1}{Z} \int_t \int_z f \, dz dt \right) \quad (9.5)$$

En analyse mode par mode, les corrélations deviennent :

$$\overline{a b} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\beta}{2\pi} \int_t \int_z \tilde{a} \tilde{b} \times e^{2i(\beta z - \omega t)} \, dz dt = \tilde{a} \tilde{b}, \quad (9.6)$$

ce qui implique :  $\overline{u_c v_r} = \tilde{u}_c \tilde{v}_r$  and  $\overline{u_c u_c} = \tilde{u}_c \tilde{u}_c$ . De la même manière l'écart type de la vitesse longitudinales s'écrit :  $u_{rms} = |\tilde{u}_c|$ .

Pour déterminer  $\omega$  et  $\beta$  on se base sur les résultats de perturbations optimales (cf chapitre 5) : les stries les plus amplifiées sont stationnaires ( $\omega = 0$ ) avec une largeur proportionnelle à l'épaisseur de couche limite ( $\beta = 0.3/\theta(x)$ , avec  $\theta$  l'épaisseur de quantité de mouvement).

Des expériences sur des stries induites par une turbulence de grille montrent que ces stries sont effectivement quasi-stationnaires. Cependant leur échelle transversale est le résultat d'une compétition complexe entre la réceptivité au niveau du bord d'attaque, les échelles de la turbulence extérieure et le développement de la couche limite (voir Matsubara et Alfredsson [82]). Cependant en augmentant le taux de turbulence et suffisamment loin du bord d'attaque, l'échelle transversale caractéristique tend vers la longueur d'onde optimale.

En conclusion le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{aligned} \bar{U}_x + \bar{V}_y &= 0, \\ \bar{U}\bar{U}_x + \bar{V}\bar{U}_y &= U_e U_{e,x} + \bar{U}_{yy} - (\tilde{u}_c \tilde{u}_c)_x - (\tilde{u}_c \tilde{v}_r)_y, \\ \bar{U}\tilde{u}_{c,x} + \bar{U}_x \tilde{u}_c + \bar{V}\tilde{u}_{c,y} &= \tilde{u}_{c,yy} - \beta^2 \tilde{u}_c - \bar{U}_y \tilde{v}_r. \end{aligned} \quad (9.7)$$

avec  $\beta = 0.3/\theta(x)$  et les conditions aux limites et conditions initiales données précédemment.

Ce ré-arrangement des équations permet d'isoler ce qui est calculable numériquement (les stries  $u_c$ ) de ce qui ne l'est pas (les fluctuations turbulentes et incohérentes  $v_r$ ). En contrepartie ce système d'équations n'est pas fermé. Il faut donc modéliser, avec une part d'arbitraire, la fluctuation de vitesse normale à la paroi  $v_r$ .

Pour modéliser  $v_r$  on se base sur quelques résultats expérimentaux. Des mesures LDV (Fransson *et al.* [50]), PTV (Inasawa *et al.* [62]) et des simulations numériques [64] montrent que pour des stries de faibles amplitudes, le profil  $v$  est une fonction strictement croissante dans la couche limite qui tend vers la valeur moyenne à l'extérieur de la couche limite. En accord qualitatif avec ces résultats, le profil est choisi décroissant et monotone de l'extérieur vers la paroi :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r(x, y) &= A y^2 e^{-\alpha y} Tu Re_\delta & \text{pour } y < \delta_{99} \\ \tilde{v}_r(x, y) &= cst & \text{pour } y > \delta_{99} \end{aligned} \quad (9.8)$$

$\delta_{99}$  est l'épaisseur locale de couche limite où la vitesse longitudinale atteint 99% de la vitesse extérieure. Cette fonction vérifie les conditions aux limites physiques à la paroi :  $v_r = v_{r,y} = 0$ . Elle est continûment dérivable à la frontière  $v_{r,y}(y = \delta_{99}) = 0$  en prenant  $\alpha = 2/\delta_{99}$ . La constante de normalisation est déterminée empiriquement, à partir d'expériences sur plaque plane sans gradient de pression :  $A = 0.07$ . Enfin, le profil de  $v_r$  à l'extérieur de la couche limite n'influe pas sur les calculs puisque l'interaction  $v_r \bar{U}_y$  est nulle.

On peut ajouter que des mesures de  $v_{rms}$  par fils chauds croisés sont incorrects. L'erreur est liée à une variation transversale de la vitesse longitudinale (Fransson *et al.* [50]).

Les effets de la turbulence extérieure (FST) sur l'écoulement moyen interviennent à travers l'apport des fluctuations de vitesse dans le bilan de quantité de mouvement. Le tenseur de Reynolds agit comme un terme source nécessaire pour reproduire correctement les caractéristiques de l'écoulement moyen avant la transition. À noter que le terme de tension de Reynolds supplémentaire par rapport aux équations de couche limite turbulente  $(\overline{u_c u_c})_x$  est une conséquence de l'utilisation des échelles de Prandtl dans la modélisation des stries. Cependant ce terme n'a qu'une faible influence par rapport à  $(\overline{u_c v_r})_y$ .

Il faut noter que les moyennes expérimentales sont temporelles, alors que les moyennes utilisées dans ce modèle sont spatiale (*i.e.* en envergure). On suppose ici, sans le justifier, que ces deux moyennes sont équivalentes.

### Critère de transition

On cherche un critère simple, cohérent avec le modèle développé précédemment. Le critère utilisé dans la suite s'appuie sur l'idée que la turbulence ne peut se développer dans la couche limite que si le rapport entre le terme moteur  $(-\overline{u_c v_r})$  et le terme dissipatif  $(\nu U_y)$  dépasse un certain seuil déterminé empiriquement :

$$\max_{\forall y} \left| \frac{-\overline{u_c v_r}}{\nu \partial U / \partial y} \right| = C = 0,5 \quad \text{pour } x = x_t \quad (9.9)$$

### 9.3 Influence des stries sur l'écoulement moyen

Cette section a pour but de caractériser l'influence des stries sur l'écoulement moyen, l'évolution de ses quantités intégrales et sa stabilité vis-à-vis des ondes TS. On se place dans le cas d'une couche limite de Blasius idéale avec une vitesse extérieure de  $30 \text{ m/s}$ . Il est important de noter que l'étude de stabilité porte ici sur l'écoulement moyen  $\bar{U}(x, y)$ , il ne s'agit pas de stabilité de l'écoulement tridimensionnel  $U(x, y, z)$ .

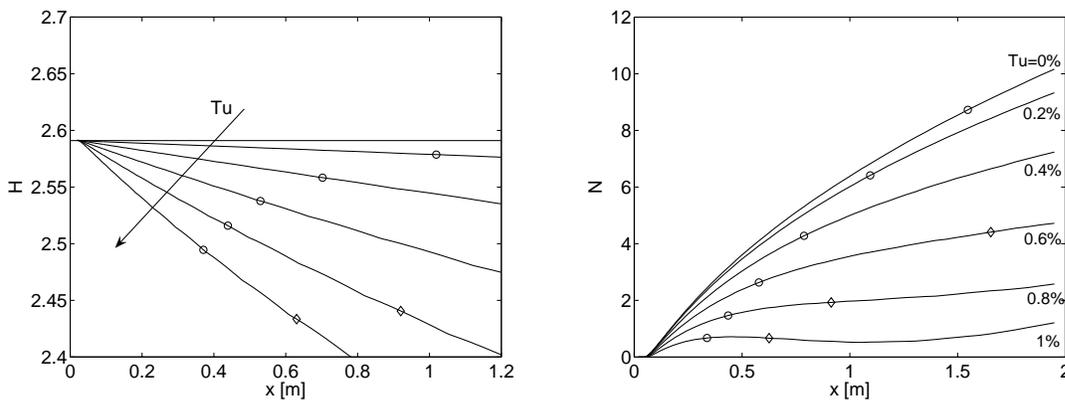


FIG. 9.2 – Couche limite de Blasius avec  $U_e = cste = 30 \text{ m/s}$ . Influence du taux de turbulence  $Tu$  sur le facteur de forme  $H$  (à gauche). Influence du taux de turbulence  $Tu$  sur le facteur  $N$  (à droite). Les symboles désignent les points de transition :  $\circ$  transition TS,  $\diamond$  transition bypass.

Sur la figure 9.2 à gauche, on représenté l'évolution du facteur de forme  $H$  pour différents taux de turbulence  $Tu$ . A droite on a représenté le facteur  $N$  des ondes TS, pour la définition, se reporter au chapitre 4. Les cercles désignent les points de transition estimés par le critère de Mack, appliqué au profil idéal de Blasius (transition classique). Les losanges désignent les points de transition estimés par le critère donné par l'équation 9.9 (transition bypass).

Le facteur de forme  $H$  n'est pas constant en présence de stries, il a une évolution sensiblement linéaire décroissante. Ceci est cohérent avec la décroissance du facteur d'amplification  $N$ . Ainsi l'influence des stries sur la stabilité de l'écoulement est ambigu. D'une part les stries amortissent les ondes TS, d'autres part leur influence locale sur l'écoulement peut générer de nouvelles instabilités, certainement d'origine inflectionnelles. Ce processus de destabilisation est complexe et nécessite un traitement numérique lourd (étude de stabilité 2D).

## 9.4 Résultats

Les résultats de ce modèle ont été comparés aux mesures de Coupland [37], qui présentent différents écoulements avec ou sans gradient de pression extérieur. Ces mesures ont été faites sur une plaque plane, le gradient de pression étant créé par une forme sur la paroi supérieure de la veine représentée sur le schéma 9.3. On élimine ainsi l'influence de la courbure de paroi longitudinale qui n'est pas négligeable pour le développement des tourbillons longitudinaux (*cf.* instabilité de Goertler).

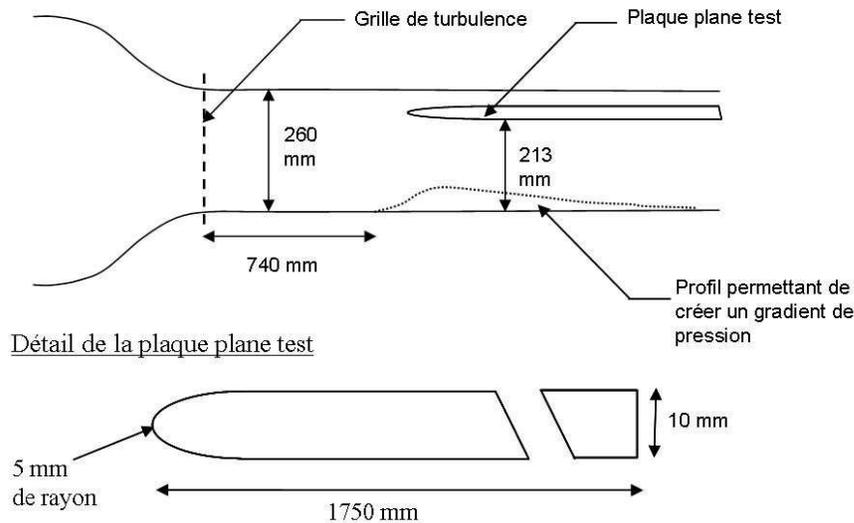


FIG. 9.3 – Dispositif expérimental de Coupland.

Les caractéristiques des différents cas sont présentées dans le tableau 9.1.

Dans les figures qui suivent, les résultats expérimentaux sont représentés par des symboles et les calculs en traits pleins. De plus, des résultats calculés à partir des équations de couche limite laminaire sont représentés en traits discontinus, ils correspondent aux équations (9.7) sans couplage (*ie.* sans le terme  $-(\overline{u_c u_c})_x - (\overline{u_c v_r})_y$ ).

TAB. 9.1 – Expériences de Coupland (Rolls-Royce)

	$U_\infty$ (m/s)	$Tu$ (%)	$Re_{x_{tr}} \times 10^{-3}$	$dP/dx$
T3A	5.4	3.0	144	0
T3B	9.4	6.0	63	0
T3A-	19.8	0.9	16000	0
T3C1	5.9	6.6	70	$\neq 0$
T3C2	5.0	3.0	264	$\neq 0$
T3C3	3.7	3.0	267	$\neq 0$
T3C4	1.2	3.0	99	$\neq 0$
T3C5	8.4	3.0	177	$\neq 0$

### Plaque plane sans gradient de pression (cas T3A)

Le facteur de forme  $H$  et le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $Re_\theta$  sont tracés sur la figure 9.4. Le facteur de forme est un indicateur très sensible qui décroît lentement en présence de stries et qui décroît fortement au moment de la transition.

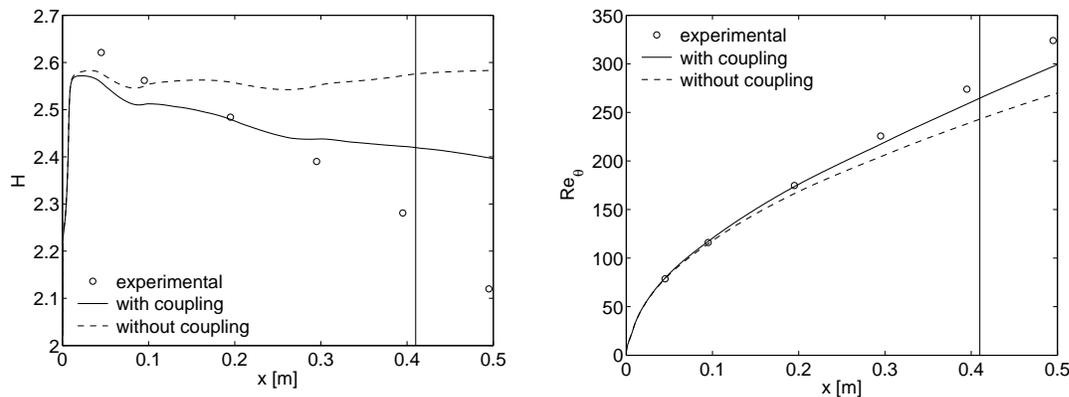


FIG. 9.4 – Cas T3A. Facteur de forme  $H$  (gauche) et nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $Re_\theta$  (droite).

Pour le calcul sans couplage le facteur de forme est proche de la valeur théorique de Blasius :  $H = 2,59$ . Le calcul avec couplage capture relativement bien la décroissance mesurée. L'influence du couplage est plus nette sur l'évolution du nombre de Reynolds. Le point de transition donné par le critère est représenté par une ligne verticale. Il est en bon accord avec la valeur estimée par Coupland à partir des mesures (voir le tableau récapitulatif 9.2).

L'influence des stries sur le coefficient de frottement  $Cf$  est négligeable, les calculs avec et sans couplage sont tous deux très proches des mesures. Le coefficient de frottement est lié à l'épaisseur de quantité de mouvement par la relation  $Cf/2 = d\theta/dx$ . En présence de stries, la variation sur la dérivée de l'épaisseur de quantité de mouvement reste faible.

Les fluctuations de vitesse longitudinale mesurées et calculées sont comparées sur la

figure 9.5 pour quatre abscisses. Les profils auto-semblables des stries sont en bon accord dans la couche limite. Les mesures ne tendent pas vers zéro à l'extérieur où on retrouve la turbulence extérieure. En effet le profil mesuré contient la partie cohérente  $u_c$  ainsi que la partie aléatoire  $u_r$ , mais ces deux composantes sont, par hypothèse du modèle, décorréliées  $\overline{u_r u_c} = 0$ ; ce résultat a été expérimentalement vérifié par Arnal et Juillen [6]. En d'autres termes on peut dire que la turbulence dans la couche limite n'est pas un prolongement de la turbulence extérieure.

On peut noter que le maximum des fluctuations est situé au milieu de la couche limite alors qu'il est proche de la paroi dans le cas des ondes TS. Ce maximum atteint des valeurs de l'ordre de 10% avant la transition, ce niveau est supérieur à celui obtenu pour un écoulement turbulent développé qui se situe aux alentours de 7%.

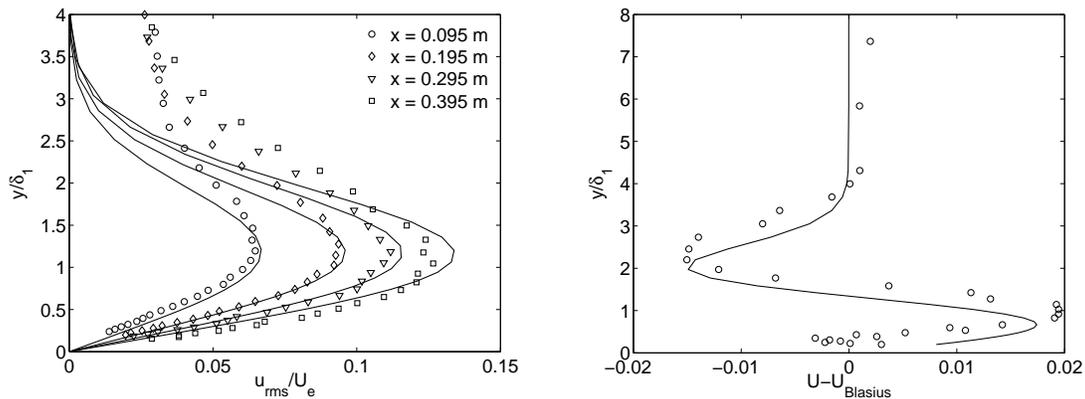


FIG. 9.5 – Cas T3A. Profils des fluctuations de vitesse pour différentes abscisses (gauche) et déviation de l'écoulement moyen à  $x = 0,195$  m (droite).

Pour illustrer la distorsion de l'écoulement de base par les stries, la figure 9.5 montre la déviation entre l'écoulement perturbé par rapport à la solution idéale de Blasius pour  $x = 0,195$  m. Le calcul est en bon accord avec l'expérience. La turbulence extérieure a pour effet d'augmenter la vitesse de l'écoulement moyen près de la paroi et de diminuer cette vitesse dans la partie supérieure de la couche limite. Cette distorsion explique la décroissance du facteur de forme (figure 9.4) comme on l'a vu au chapitre 5. Le point où la déviation s'annule correspond au maximum du profil des stries, il correspond donc au zéro de la dérivée du tenseur de Reynolds :  $\partial(\overline{u_c v_r})/\partial y = 0$  qui est le terme de forçage dominant des équations (9.7).

### Couche limite sur plaque plane avec gradient de pression (Cas T3C2)

Dans le paragraphe précédent, le modèle a été calibré sur des cas académique de couches limites du type Blasius. Les deux constantes empiriques étant fixées, il reste maintenant à vérifier si ce modèle est prédictif : c'est-à-dire faire des tests pour les cas avec gradient de pression.

Nous illustrerons les résultats avec le cas T3C3 qui est très proche du précédent :  $Tu = 3\%$  et  $U_\infty = 5$  m/s. Sur la figure (9.6), on a représenté l'évolution de la vitesse extérieure. Le gradient de pression est initialement négatif (écoulement accéléré) puis légèrement positif (écoulement décéléré sur la fin de la plaque), cette évolution est une approximation grossière

des écoulements sur des turbo-machines.

Dans ce cas la phase accélérée initiale a pour effet de retarder la transition par comparaison au cas sans gradient de pression (T3A). Cependant il faut noter que cet effet stabilisant sur les stries est très faible par rapport à ce qu'il serait sur les ondes TS. La figure 9.6 montre la comparaison entre le facteur de forme calculé et mesuré, le modèle semble bien prendre en compte l'influence du gradient de pression.

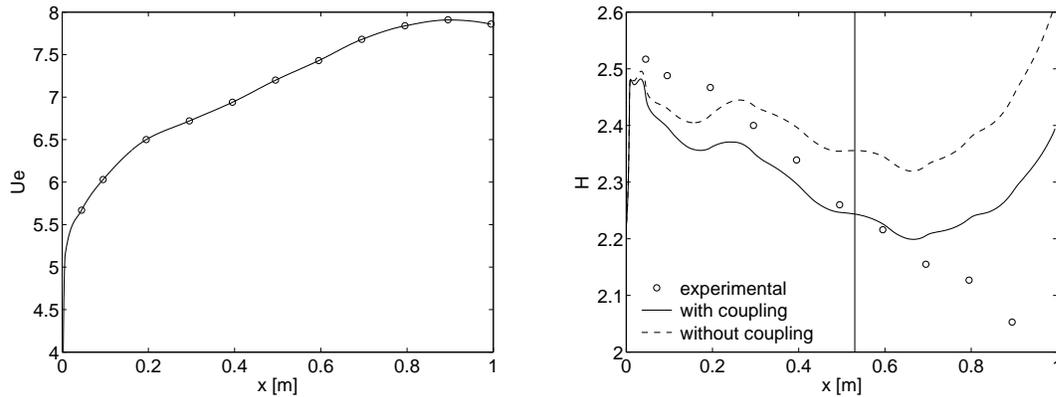


FIG. 9.6 – Cas T3C2. Vitesse extérieure (gauche) et facteur de forme  $H$  (droite).

L'amplitude maximale des stries ainsi que le nombre de Reynolds  $Re_\theta$  sont tracés sur la figure 9.7. La comparaison entre les mesures et les calculs est satisfaisante. L'amplitude est quasi-proportionnelle à  $x^{1/2}$  malgré la présence d'un gradient de pression.

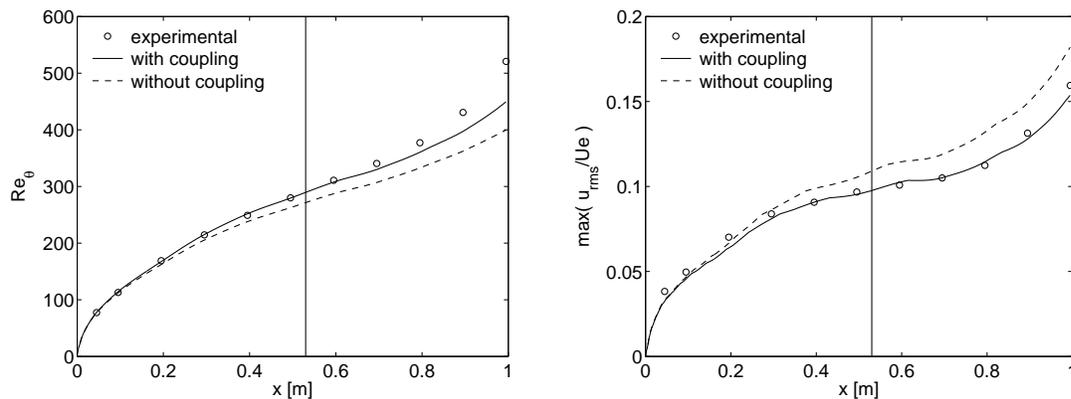


FIG. 9.7 – Cas T3C2. Nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement  $Re_\theta$  (gauche) et amplitude des stries (droite).

Ce cas montre en outre que le passage à un gradient de pression positif déclenche brutalement la transition. Ceci est un argument en faveur d'une instabilité de type modale superposée aux stries, puisque ce type d'instabilité est très sensible au gradient de pression extérieur.

## Récapitulation

Un résumé des estimations du point de transition ( $x_t$  numérique), pour les différents cas tests est donné dans le tableau 9.2. On rappelle que les valeurs de comparaison ( $x_t$  expérimental) sont données par Coupland [37]. Les courbes correspondantes sont données en annexe B.

TAB. 9.2 – Comparaisons des différents cas tests.

Cas	$U_\infty$ [m/s]	$Tu$ [%]	expérimental		numérique	
			$x_t$ [m]	$Re_{\theta,t}$	$x_t$ [m]	$Re_{\theta,t}$
T3A-	19,8	0,9	1,25	894	1,13	875
T3A	5,4	3	0,38	267	0,41	266
T3B	9,4	6	0,1	188	0,08	134
T3C1	5,9	6,6	0,18	195	0,09	131
T3C2	5	3	0,8	380	0,53	290
T3C3	3,7	3	1,1	435	0,77	300
T3C4	1,2	3	1,25	289	1,23	265
T3C5	8,4	3	0,32	309	0,31	296

Pour le cas T3C3 la transition a lieu sur un point de décollement. Comme l’a remarqué Morkovin [86], pour des taux de turbulence  $Tu \geq 6\%$ , la transition se produit pour des nombres de Reynolds minimum où la couche limite turbulente est auto-entretenu *i.e.* à  $Re_\theta \approx 190$ . Il faudrait plutôt parler d’écoulement transitionnel puisque la turbulence, même si elle n’est pas encore développée, est trop importante pour parler d’écoulement laminaire. Pour ces très fortes perturbations, l’existence d’une zone laminaire est discutable, on a probablement une continuation de la turbulence extérieure vers la couche limite. Pour les autres cas le modèle donne une estimation correcte de la transition, même en présence de gradient de pression.

Il reste maintenant à adapter ce modèle à des cas de plus en plus réalistes, en l’appliquant aux écoulements instationnaires et compressibles, pour se rapprocher des configurations d’aubes de turbines. Par exemple, un cas de référence intéressant concerne le ‘blunt body paradox’, ces cas de transitions précoces sur des corps sphériques observés en écoulement supersonique. Cette transition se produit dans une région où un fort gradient de pression favorable stabilise sans ambiguïté les ondes TS. Dans ce contexte la transition induite par des stries instables est une explication plausible. Une autre voie possible pour ce type de critère concerne la transition dans un écoulement instationnaire périodique. La zone de turbulence se propage au cours du temps et on a un nouveau paramètre de contrôle le nombre de Strouhal  $St$ . En instationnaire, on distingue trois types de transition, ou frontières, laminaire/turbulent (voir par exemple [98]) :

- (1) transition par instabilités (scénario classique ou bypass)
- (2) transition par convection de spot
- (3) transition par impact de sillage fortement turbulent.



# Chapitre 10

## Conclusion

### 10.1 Synthèse

Ce travail présente une modélisation des stries se développant dans une couche limite sur plaque plane.

Dans une première partie, on a validé les approximations de Prandtl appliquées aux équations de Navier-Stokes linéarisées dans le cas d'une couche limite parallèle.

Ensuite ce modèle est appliqué au cas non-parallèle. Dans un premier temps, l'étape de réceptivité est modélisée par une méthode de perturbations optimales pour différents modes de Fourier. Les deux caractéristiques essentielles des stries qui ressortent de ces calculs sont d'une part leur croissance algébrique et proportionnelle à  $\sqrt{Re_x}$  et d'autre part leurs profils auto-semblables. De plus l'épaississement de la couche limite implique que l'enveloppe sur les nombres d'onde  $\beta$  des gains est croissante et non bornée, contrairement au cas des écoulements parallèles où les stries sont finalement amorties. Ces résultats sont comparés qualitativement avec des mesures en soufflerie. Dans un deuxième temps le modèle est appliqué au cas plus réaliste d'une interaction tourbillon/couche limite.

A travers nos résultats et la bibliographie, nous avons essayé de dégager quelques résultats fondamentaux concernant la structure des stries et leur déstabilisation.

Concernant la largeur caractéristique des stries, on peut dire qu'elle est le résultat d'une combinaison entre un mécanisme de sélection de la couche limite et de la structure des perturbations extérieures. Les calculs de perturbations optimales dégagent un certain nombre d'onde optimal, mais la courbe est relativement plate. Donc la sélection du nombre d'onde par la couche limite est faible et l'espacement des stries dans les cas d'excitation turbulente est plus fortement lié à la structure de la turbulence extérieure.

La question de la déstabilisation des stries reste aujourd'hui ouverte. Les résultats instantanés de DNS montrent qu'au moment de la transition l'amplitude des stries est bien plus grande que les valeurs *rms* mesurées. Le lissage de l'opération de moyenne masque certainement les profils réels, il est donc difficile d'en déduire les mécanismes de déstabilisation. Des études à partir de modèles simplifiés de strie, comme celle réalisée au chapitre 8, permettent d'isoler des mécanismes de base de la transition. Il est possible que cette transition soit le résultat d'une amorce du cycle de paroi. Des structures longitudinales déclenchent des instabilités à courtes longueurs d'onde qui, par interaction quadratique, régénèrent des structures longitudinales et ainsi de suite jusqu'à maintenir une turbulence auto entretenue. Cependant ces expériences contrôlées ne peuvent reproduire la complexité d'une transition induite par turbulence extérieure.

Dans le dernier chapitre, on a présenté un modèle plus pragmatique pour reproduire

la dynamique des stries et estimer le seuil de transition. Il faut noter que ce modèle ne prétend pas à une description des phénomènes complexes mis en jeu. Les résultats ont été comparés et validés avec des données expérimentales existantes. En particulier ce modèle est capable de prendre en compte les effets d'un gradient de pression externe. Ces premiers résultats sont encourageant et il reste maintenant à adapter ce modèle aux écoulements instationnaires et compressibles, pour se rapprocher des configurations d'aubes de turbines.

## 10.2 Perspectives

Un autre cas test intéressant n'a pas été abordé dans cette thèse. Il s'agit d'une expérience réalisée par B. Tanguay [105] qui concerne la déstabilisation d'une strie de basse vitesse isolée. Une paire de tourbillons contra-rotatifs est créée par injection de fluide au travers d'une fente pariétale dirigée selon l'écoulement. Tanguay a montré que le rapport d'injection (vitesse d'injection/vitesse extérieure) est le paramètre clé de cette expérience. Dès que ce rapport atteint un seuil, la strie de basse vitesse induite par les tourbillons se déstabilise. On observe une perturbation oscillante, avec une croissance exponentielle, sous la forme d'un tourbillon de type 'fer à cheval' qui chevauche la strie. Ensuite, avec le cisaillement, le tourbillon évolue vers une forme en épingle à cheveux', des tourbillons secondaires sont alors générés par l'interaction des jambes du tourbillon primaire avec la paroi. Il a été montré que cette instabilité, initialement convective, devient non linéairement absolue. L'évolution de cette instabilité aboutit à une transition. Ce type de processus pourrait être abordé avec les outils développés dans cette thèse. D'une part l'écoulement de base, tourbillons plus la strie, peut être calculé à partir des équations PNS, d'autre part la stabilité de cette solution peut être traitée avec la la théorie de stabilité linéaire.

L'utilisation des équations PNS peut permettre également le calcul des instabilités de Dean et Goertler dans des cas où la géométrie est plus complexe, avec une courbure inhomogène dans les deux directions d'espace par exemple. De même on peut espérer calculer l'évolution spatiale de tourbillons de sillages.

L'utilisation des équation paraboliques peut également s'envisager via un couplage NS-PNS ; dans des simulations de sillage, derrière une rugosité pariétale par exemple. La région proche de la rugosité est traitée par des équations de Navier-Stokes avec comme condition de sortie les équations parabolisées. Enfin le comportement lointain est résolu par les équations PNS pour un gain de temps très important. Ce type de décomposition de domaine peut conduire à une parallélisation des calculs puisque l'information entre domaines est uni-directionnelle.

Pour terminer ce mémoire on rappellera que les structures cohérentes, sous forme de stries, au sein des écoulements cisailés laminaires ou turbulents présentent des aspects d'universalité. La considération de ces structures cohérentes nous amènent à un nouveau point de vue sur la turbulence. L'état laminaire peut être considéré comme un attracteur global à bas nombre de Reynolds. Cependant il devient un attracteur local quand on augmente le nombre de Reynolds, son bassin d'attraction évoluant comme  $Re^\gamma$ , avec  $\gamma < 0$ . Les solutions non triviales des équations de Navier-Stokes (par exemple des ondes progressives superposées à des stries) forment des points selles dans l'espace de phase, c'est-à-dire des points à la fois attracteurs et répulseurs. La solution physique visite ces différentes solutions au cours du temps suivant un hyper-cycle.

# Bibliographie

- [1] Y. Amarouchene and H. Kellay. Polymers in 2D turbulence : suppression of large scale fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 89-10, 2002.
- [2] P. Andersson, M. Berggren, and D.S. Henningson. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layer. *Phys. Fluids*, 11 1 :134–150, 1999.
- [3] P. Andersson, L. Brandt, A. Bottaro, and D.S. Henningson. On the breakdown of boundary layer streaks. *J. Fluid Mech.*, 428 :29–60, 2001.
- [4] Arnaud Antkowiak and Pierre Brancher. Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids*, 16(1) :L1–L4, 2004.
- [5] D. Arnal. Boundary layer transition : prediction based on linear theory. Technical Report 793, AGARD, 1993.
- [6] D. Arnal and J. C. Juillen. Contribution expérimentale à l'étude de la réceptivité d'une couche limite laminaire à la turbulence de l'écoulement général. Technical Report 1/5018 AYD, ONERA, 1978.
- [7] M. Asai, M. Minagawa, and M. Nishioka. The instability and breakdown of a near-wall low-speed streak. *J. Fluid Mech.*, 455 :289–314, 2002.
- [8] Mejdî Azaiez. *Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1990.
- [9] A. A Bakchinov, G. R. Grek, B. G. B Klingmann, and V. V. Koslov. Transition experiments in a boundary layer with embedded streamwise vortices. *Phys. Fluids*, 7 :820–832, 1995.
- [10] J.L. Basdevant. *Principes variationnels & dynamique*. VUIBERT, 2004.
- [11] G.K. Batchelor. Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, 20 :645–658, 1964.
- [12] S. Berlin, M. Wiegel, and D.S. Henningson. Numerical and experimental investigations of oblique boundary layer transition. *J. Fluid Mech.*, 393 :23–57, 1999.
- [13] F.P. Bertolotti. Response of the Blasius boundary layer to the free stream vorticity. *Phys. Fluids*, 9 :2286–2299, 1997.
- [14] F.P. Bertolotti and J.M. Kendall. Response of the Blasius boundary layer to controlled free stream vortices of axial form. *AIAA*, 97 :2018, 1997.
- [15] D. Biau, D. Arnal, and O. Vermeersch. A transition prediction model for boundary layer subjected to free-stream turbulence. *Aero. Sc. Tech.*, pages –, submitted.
- [16] D. Biau and A. Bottaro. Transient growth and minimal defects : Two possible initial paths of transition to turbulence in plane shear flows. *Phys. Fluids*, 16 :3515–3529, 2004.

- [17] D. Biau, A. Seraudie, and D. Arnal. Mesures de vitesse dans une couche limite laminaire de plaque plane soumise à une turbulence de grille. Technical Report RT 1/11046, ONERA DMAE, décembre 2005.
- [18] A. V. Boiko. Receptivity of a flat plate boundary layer to a free stream axial vortex. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 21 :325–340, 2002.
- [19] A.V. Boiko and H. H. Chun. Development of low-frequency streaks in Blasius boundary layer. *Phys. Fluids*, 16 :3153–3160, 2004.
- [20] A.V. Boiko, K.J.A. Westin, B.G.B. Klingmann, U.V. Koslov, and P.H. Alfredsson. Experiments in boundary layer subjected to free stream turbulence. Part 2. the role of TS-waves in the transition process. *J. Fluid Mech.*, 281 :219–245, 1994.
- [21] O. Botella. Résolution des équations de Navier-Stokes par des schémas de projection Tchebychev. Technical report, INRIA, 1996.
- [22] A. Bottaro, P. Corbett, and P. Luchini. The effect of base flow variation on flow stability. *J. Fluid Mech.*, 476 :293–302, 2003.
- [23] A. Bottaro, A. Soueid, and B. Galletti. Formation of secondary vortices in turbulent square-duct flow. *AIAA Journal*, 44 :803–811, 2006.
- [24] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover, Mineola, second edition, 2001.
- [25] L. Brandt, C. Cossu, J-M. Chomaz, P. Huerre, and D.S. Henningson. On the convectively unstable nature of optimal streaks in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 485 :221–242, 2003.
- [26] L. Brandt and D.S. Henningson. Transition of streamwise streaks in zero-pressure-gradient boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 472 :229–262, 2002.
- [27] L. Brandt, P. Schlatter, and D.S. Henningson. Transition in boundary layers subject to free-stream turbulence. *J. Fluid Mech.*, 517 :167–198, 2004.
- [28] K.M. Butler and B.F. Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids*, 4 :1637–1650, 1992.
- [29] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [30] P. Cathalifaud and P. Luchini. Algebraic growth in boundary layers : optimal control by blowing and suction at the wall. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 19 :469–490, 2000.
- [31] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. CEPADUES-EDITIONS, 2000.
- [32] A. Cherhabili and U. Ehrenstein. Spatially localized two-dimensional finite-amplitude states in plane Couette flow. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 14 :677–696, 1995.
- [33] A. Cherhabili and U. Ehrenstein. Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 342 :159–177, 1997.
- [34] H.J.H. Clercx and G.J.F. van Heijst. Energy spectra for decaying 2D turbulence in a bounded domain. *Phys. Rev. Lett.*, 85-2, 2000.
- [35] P. Corbett and A. Bottaro. Optimal linear growth in swept boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 435 :1–23, 2001.
- [36] R. Corral and J. Jiménez. Fourier/Chebyshev methods for the incompressible Navier-Stokes equations in infinite domains. *J. Comp. Phys.s*, 121 :261–270, 1995.

- [37] J. Coupland. Transition modelling for turbomachinery flows, T3 test cases. Technical report, RollsRoyce, 1990.
- [38] M. Cox and P.C. Matthews. Exponential time differencing for stiff problems. *J. Comp. Phys.*, 176 :430–455, 2002.
- [39] A. Craik. Non-linear resonant instability in boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 50 :393–413, 1971.
- [40] S. C. Crow. The spanwise perturbations of two-dimensional boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 24 :153–164, 1966.
- [41] E.R. Van Driest and C.B. Blumer. Boundary layer transition : Freestream turbulence and pressure gradient effects. *AIAA journal*, 1 :1303–1306, 1963.
- [42] U. Ehrenstein and F. Gallaire. On two-dimensional temporal modes in spatially evolving open flows : the flat-plate boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 5365 :209–218, 2005.
- [43] T. Ellingsen and E. Palm. Stability of linear flow. *Phys. Fluids*, 18 :487–488, 1975.
- [44] H. W. Emmons. The laminar-turbulent transition in a boundary layer-Part I. *J. Aero. Sci.*, 18 :490–498, 1951.
- [45] G.E. Eyink and K.R. Sreenivasan. Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Rev. Mod. Phys.*, 78 :87–135, 2006.
- [46] B.F. Farrell. Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. *Phys. Fluids*, 31 :2093–2102, 1988.
- [47] H. Fasel. Numerical investigation of the interaction of Klebanoff-mode with a Tollmien-Schlichting wave. *J. Fluid Mech.*, 450 :1–33, 2002.
- [48] J.H.M. Fransson and P. H. Alfredsson. On the disturbance growth in an asymptotic suction boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 482 :51–90, 2003.
- [49] J.H.M. Fransson, M. Matsubara, and P.H. Alfredsson. Transition induced by free-stream turbulence. *J. Fluid Mech.*, 527 :1–25, 2005.
- [50] J.H.M. Fransson and K.J.A. Westin. Errors in hot-wire x-probe measurements induced by unsteady velocity gradients. *Exp. Fluids*, 32 :413–415, 2002.
- [51] M. E. Goldstein, S.J. Leib, and S.J. Cowley. Distorsion of a flat-plate boundary layer by free-stream vorticity normal to the plate. *J. Fluid Mech.*, 237 :231–260, 1992.
- [52] M. E. Goldstein and D.W. Wundrow. Effect on a laminar boundary layer of small-amplitude streamwise vorticity in the upstream flow. *J. Fluid Mech.*, 426 :229 – 262, 2001.
- [53] C.E. Grosh and H. Salven. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part 1. The spectrum and eigenfunction. *J. Fluid Mech.*, 87 :33–54, 1978.
- [54] S. Grossmann. The onset of shear flow turbulence. *Rev. Modern Phys*, 72 :603–618, 2000.
- [55] J.-L. Guermond, P. Mineev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2005.
- [56] B. Guo, J. Shen, and C. Xu. Spectral and pseudospectral approximations using Hermite functions : application to the Dirac equation. *Advances in Comp. Math.*, 19 :35–55, 2003.

- [57] J. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, 287 :317–348, 1995.
- [58] D.S. Henningson. Comment on 'transition in shear flows. nonlinear normality versus non-normal linearity'. *Phys. Fluids*, 8 :2257–2258, 1996.
- [59] D. C. Hill. Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 292 :283, 1995.
- [60] B. Hof, C W. H. van Doorne, J. Westerweel, F. T. M. Nieuwstadt, H. Faisst, B. Eckhardt, H. Wedin, R. R. Kerswell, and F. Waleffe. Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*, 305 :1594 – 1598, 2004.
- [61] L.S. Hultgren and L :H : Gustavsson. Algebraic growth of disturbances in a laminar boundary layer. *Phys. Fluids*, 24 :1000–1004, 1981.
- [62] A. Inasawa, F. Lundell, M. Matsubara Y. Kohama, and P.H. Alfredsson. Velocity statistics and flow structures observed in bypass transition using stereo PTV. *Exp. Fluids*, 34 :242–252, 2002.
- [63] R. G. Jacobs and P. A. Durbin. Shear sheltering and the continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. *Phys. Fluids*, 10 :2006–2011, 1998.
- [64] R. G. Jacobs and P. A. Durbin. Simulations of bypass transition. *J. Fluid Mech.*, 428 :185–212, 2001.
- [65] P.S. Jang, D.J. Benney, and R.L. Gran. On the origin of streamwise vortices in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 169 :109–123, 1986.
- [66] J. Jimenez and A. Pinelli. The autonomous cycle of near-wall turbulence,. *J. Fluid Mech.*, 389 :335 – 359, 1999.
- [67] H. Johnston and J.G. Liu. Accurate, stable and efficient Navier-Stokes solver based on explicit treatment of pressure term. *J. Comp. Phys.*, 199 :221–239, 2004.
- [68] Pavel Jonás, Oton Mazur, and Václav Uruba. On the receptivity of the by-pass transition to the length scale of the outer stream turbulence. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 19 :707–722, 2000.
- [69] J. M. Kendall. Experiments on boundary–layer receptivity to freestream turbulence. *AIAA paper*, 98 :0530, 1998.
- [70] J. Kim and J. Lim. A linear process in wall-bounded turbulent shear flows. *Phys. Fluids*, 12 8, :1885–1888, 2000.
- [71] P.S. Klebanoff. Effect of free-stream turbulence on a laminar boundary layer. *Bull Am. Phys. Soc.*, 16, 1971.
- [72] P.S. Klebanoff, K.D. Tidstrom, and L.M. Sargent. The three-dimensional nature of boundary layer instability. *J. Fluid Mech.*, 12 :1–34, 1962.
- [73] M.N. Kogan, V.G. Shumilkin, M.V. Ustinov, and S.G. Zhigulev. Response of boundary layer flow to vortices normal to the leading edge. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20 :813–820, 2001.
- [74] Y. Konishi and M. Asai. Experimental investigation of the instability of a spanwise-periodic low-speed streak. *Fluid Dyn. Res.*, 34 :299–315, 2004.
- [75] M.T. Landahl. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 98 :243–251, 1983.
- [76] P.A. Libby and H. Fox. Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory. *J. Fluid Mech.*, 17 :433–449, 1964.

- [77] P. Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface. *J. Fluid Mech.*, 327 :101–115, 1996.
- [78] P. Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface : Optimal perturbations. *J. Fluid Mech.*, 404 :289–309, 2000.
- [79] P. Luchini and A. Bottaro. Görtler vortices : A backward-in-time approach to the receptivity problem. *J. Fluid Mech.*, 363 :1–23, 1998.
- [80] L. Machiels and M.O. Deville. Numerical simulation of randomly forced turbulence flows. *J. Comp. Phys.*, 145 :246–279, 1998.
- [81] L.M. Mack. Transition prediction and linear stability theory. *JPL Publication 77-15*, pages –, 1977.
- [82] M. Matsubara and P.H. Alfredsson. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence. *J. Fluid Mech.*, 430 :149–168, 2001.
- [83] F. R. Menter. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Application. *AIAA Journal*, 32(8) :1598–1605, 1991.
- [84] A. Meseguer and L.N. Trefethen. Linearized pipe flow to Reynolds number  $10^7$ . *J. Comp. Phys.*, 186 :178–197, 2003.
- [85] H. Mitsudharmadi, S. H. Winoto, and D. A. Shah. Development of most amplified wavelength Görtler vortices. *Phys. Fluids*, 18 :014101, 2006.
- [86] M.V. Morkovin. Bypass transition to turbulence and research desiderata. *Transition in Turbines, NASA Conf. Pub. 2386*, pages 161–204, 1984.
- [87] W.M.F. Orr. The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad. Ser. A*, 27 :9–68, 1907.
- [88] J. Hoepffner, L. Brandt, and D.S. Henningson. Transient growth on boundary layer streaks. *J. Fluid Mech.*, 537 :91–100, 2005.
- [89] D.S. Pradeep and A. K. M. F. Hussain. Effects of boundary condition in numerical simulations of vortex dynamics. *J. Fluid Mech.*, 516 :115 – 124, 2004.
- [90] N. Reau and A. Tumin. On harmonic perturbations in a turbulent mixing layer. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 21 :143–155, 2002.
- [91] S.C. Reddy and D.S. Henningson. Energy growth in viscous channel flow. *J. Fluid Mech.*, 252 :209–238, 1993.
- [92] S.C. Rennich and S. K. Lele. Numerical method for incompressible vortical flows with two unbounded directions. *J. Comp. Phys.*, 137 :101–129, 1997.
- [93] E. Reshotko and A. Tumin. Spatial theory of optimal disturbances in circular pipe flow. *Phys. Fluids*, 13 4 :991–996, 2001.
- [94] W. C. Reynolds and A. K. M. F. Hussain. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. theoretical models and comparisons with experiments. *J. Fluid Mech.*, 54 :263–288, 1972.
- [95] R.S. Rogallo. Numerical experiments in homogeneous turbulence. Technical Report 81315, NASA, 1981.
- [96] M. Rutgers. Forced 2D turbulence : experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades. *Phys. Rev. Lett.*, 81-11, 1998.
- [97] P.J. Schmid and D. S. Henningson. A new mechanism for rapid transition involving a pair of oblique waves. *Phys. Fluids*, A4 :1986–1989, 1992.

- [98] Robert Schook. *Bypass transition experiments in subsonic boundary layer*. PhD thesis, Eindhoven, Netherlands, 2000.
- [99] Schoppa and A. K. M. F. Hussain. Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 453 :57–108, 2002.
- [100] E. Serre and J.P. Publicani. A three-dimensional pseudospectral method for rotating flows in a cylinder. *Comp. Fluids*, 30 :491–519, 2001.
- [101] K. Stewartson. On asymptotic expansion in the theory of boundary layer. *J. Math. Phys.*, 36 :137, 1957.
- [102] S.P. Sutera. Vorticity amplification in stagnation-point flow and its effect on heat transfer. *J. Fluid Mech.*, 21 :513–534, 1965.
- [103] Y.B. Suzen and P.G. Huang. Modeling of Flow Transition Using an Intermittency Transport Equation. Technical Report 209313, NASA, 1999.
- [104] J. D. Swearingen and R. F. Blackwelder. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of wall. *J. Fluid Mech.*, 182 :255, 1987.
- [105] B. Tanguay. *Experimental stability investigation of an isolated streak in a Blasius boundary layer*. PhD thesis, EPFL, Suisse, 2004.
- [106] L.N. Trefethen. Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis. *SIAM*, under review :–, 2006.
- [107] L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, S.C. Reddy, and T.A Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261 :578–584, 1993.
- [108] N.L. Trefethen. *Spectral Methods in MatLab*. Siam, 2000.
- [109] A. Tumin. A model of spatial algebraic growth in a boundary layer subjected to streamwise pressure gradient. *Phys. Fluids*, 13 5 :1521–1523, 2001.
- [110] A. Tumin and E. Reshotko. Spatial theory of optimal disturbances in boundary layer. *Phys. Fluids*, 13 7 :2097–2104, 2001.
- [111] M.V. Ustinov. Response of boundary layer developing over a blunt-nosed flat plate to free-stream non-uniformity. *Eur. J. Mech. B-Fluids*, 20 :799–812, 2001.
- [112] F. Waleffe. Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity. *Phys. Fluids*, 7 :3060–3066, 1995.
- [113] J.A.C. Weideman and S.C. Reddy. *A MATLAB differentiation matrix suite*, volume 26. ACM Trans. Math. Soft., 2000.
- [114] B.D. Welfert. Generation of pseudo-spectral differentiation matrices. *SIAM J : Num. Anal.*, 34 :1640–1657, 1997.
- [115] K.J.A. Westin, A.A. Bakchinov, V.V. Koslov, and P.H. Alfredsson. Experiments on localized disturbances in a flat plate boundary layer. Part 1. The receptivity process and evolution of localized free stream disturbance. *Eur. J. B/Fluids*, 17 :823–846, 1998.
- [116] T. A. Zaki and P. A. Durbin. Mode interaction and the bypass route to transition. *J. Fluid Mech.*, 531 :85–111, 2005.
- [117] S. Zuccher, A. Bottaro, and P. Luchini. Algebraic growth in a blasius boundary layer : nonlinear optimal disturbances. *Eur. J. B/Fluids*, 25 :1–17, 2006.

## Annexe A

# Calcul des perturbations optimales

Cette annexe a pour but de comparer les méthodes multimodale et direct/adjoint pour les calculs de perturbations optimales. Ces méthodes, utilisées respectivement aux chapitres 4 et 5, sont en pratique très différentes mais fondamentalement identiques.

Pour commencer, on exprime les équations de Navier-Stokes linéarisées sous forme discrète :

$$q_t = Lq, \quad q(t=0) = q_0 \quad (\text{A.1})$$

On définit le propagateur  $\mathcal{P}$  de la condition initiale :

$$q(t) = \mathcal{P}q_0$$

Dans le calcul des perturbations optimales,  $q_0$  est a priori inconnue. On cherche alors à calculer cette condition initiale qui maximise une certaine fonction gain définie comme :

$$G(t) = \frac{q(t) \cdot q(t)}{q_0 \cdot q_0}$$

où  $q \cdot q$  désigne un produit scalaire, par exemple  $q \cdot q = \bar{q}^T q$ . On pourrait également utiliser  $q \cdot q = \bar{q}^T W q$ , avec  $W$  une matrice diagonale contenant les poids d'intégration ou servant de filtre. Il est également possible d'utiliser deux définitions de produit scalaire pour le numérateur ou le dénominateur du gain.

En utilisant le propagateur, le gain se réécrit sous la forme d'un quotient de Rayleigh :

$$G(t) = \frac{q_0 \cdot \bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} q_0}{q_0 \cdot q_0}$$

Ainsi le gain maximal  $G_{max}$  correspond à la plus grande valeur propre<sup>1</sup> du problème :

$$\bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} q_0 = G q_0$$

En d'autres termes  $G_{max}$  est la plus grande valeur singulière de  $\mathcal{P}$  et la perturbation optimale  $q_0$  est le vecteur singulier droit associé.

On peut noter que Farrell [46] et [28] a obtenu la forme du quotient de Rayleigh en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Il a cherché à maximiser l'énergie finale  $E(t)$  sous la contrainte d'une énergie initiale unitaire  $E(t=0) = 1$ .

$$\mathcal{L} = G - \lambda(E(t=0) - 1)$$

---

<sup>1</sup> $\bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P}$  est auto-adjoint par construction donc  $G_{max}$  est réel.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L} &= q_0 \cdot \overline{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} q_0 - \lambda(q_0 \cdot q_0 - 1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_0} \delta q_0 &= 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} q_0 = \lambda q_0 \end{aligned}$$

Le problème étant linéaire, la contrainte d'énergie unitaire peut s'interpréter comme une condition de normalisation.

Pour résoudre un problème de perturbation optimale, on distingue deux méthodes. Soit on construit le propagateur et la perturbation optimale est calculée par décomposition en valeurs singulières. Soit on intègre numériquement l'équation  $q_t = Lq$ . C'est-à-dire qu'on calcule l'effet du propagateur sans le construire explicitement.

- Soient  $Q$  et  $\Lambda$  respectivement les matrices des vecteurs propres et des valeurs propres de l'opérateur  $L$ . Par définition, on a la relation  $Q^{-1}LQ = \Lambda$ . Si on suppose que l'ensemble des vecteurs propres forme une base, toute perturbation peut se décomposer sur cette base sous la forme :  $q = Q\kappa$ , où  $\kappa$  est le vecteur des poids de projection. Le problème (A.1) peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} Q\kappa_t &= LQ\kappa \\ \kappa_t &= \Lambda\kappa \\ \kappa &= \kappa_0 e^{\Lambda t} \end{aligned}$$

Ainsi, dans l'espace spectral des vecteurs propres de l'opérateur  $L$ , on a une expression simple du propagateur, en revenant dans l'espace physique :

$$q = \underbrace{Qe^{\Lambda x}Q^{-1}}_{=\mathcal{P}} q(0)$$

La perturbation optimale est obtenue par une décomposition singulière de  $\mathcal{P}$ . On ouvre ici une parenthèse pour interpréter les différences entre la décomposition en valeurs singulières  $L = U\Sigma\tilde{V}$  et la décomposition sur les vecteurs propres  $L = Q\Lambda Q^{-1}$ . Premièrement rappelons que la décomposition en valeur singulière de  $\mathcal{P}$  correspond au problème aux valeurs propre de  $\overline{\mathcal{P}}^T\mathcal{P}$ . Ces deux décompositions permettent d'exprimer un système algébrique linéaire  $b = Lx$  sous la forme d'un système diagonal :  $b' = \Sigma x'$  avec  $b' = \tilde{U}b$  et  $x' = \tilde{V}x$

ou

$$b' = \Lambda x' \text{ avec } b' = Q^{-1}b \text{ et } x' = Q^{-1}x,$$

on a donc deux projections différentes pour la décomposition en valeurs singulières. De plus les vecteurs colonnes des matrices  $U$  et  $V$  sont orthonormaux par construction alors que les vecteurs de  $Q$  ne le sont pas en général.

- Si la construction du propagateur est impossible, pour différentes raisons (spectre continu, problèmes aux dérivées partielles), on doit alors passer par des itérations de puissance (power method) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}q^n(0) &\rightarrow q^n(x) \\ \overline{\mathcal{P}}^T q^{n+1}(x) &\rightarrow q^{n+1}(0) \end{aligned}$$

Les calculs sont initiés par  $q^1(0)$  arbitraire et le critère d'arrêt est basé sur le gain par exemple. On remarquera que le propagateur adjoint propage pour des temps décroissants.

On peut montrer que l'itération de puissance converge vers le gain maximal. Soient  $g$  les valeurs propres, rangées dans l'ordre décroissant, et  $e$  les fonctions propres associées du problème :  $\bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P}e = g e$ . On cherche  $e_1$  correspondant à la perturbation optimale. On projette  $\kappa_0$  sur ces fonctions propres :  $\kappa_0 = \sum_k c_k e_k$ . On a alors pour  $n$  itérations :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} \kappa_0^{(0)} &= \sum_k c_k \bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} e_k \\ &= \sum_k c_k g_k e_k \\ &\dots \\ \bar{\mathcal{P}}^T \mathcal{P} \kappa_0^{(n)} &= \sum_k c_k g_k^n e_k \\ &= g_1^n \left[ c_1 e_1 + \sum_k \left( \frac{g_k^n}{g_1^n} \right) c_k e_k \right] \\ &\approx \lambda_1^n c_1 e_1 \end{aligned}$$

Donc la solution de ce processus d'itération converge bien vers la valeur recherchée  $e_1$ . Cependant si  $\kappa_0^{(0)}$  est orthogonal à  $e_1$ , on converge vers la deuxième valeur  $e_2$ . On peut ajouter que cette méthode converge d'autant plus vite que le rapport  $g_1/g_2$  est grand.

L'intérêt de cette méthode c'est qu'il n'est pas nécessaire de construire le propagateur, on peut intégrer directement les problèmes direct et adjoint. Cette méthode est facile à mettre en œuvre pour des problèmes paraboliques, comme c'est le cas pour la modélisation des stries. On fait alors des itérations du problème direct (dans le sens des  $x$  croissants) et du problème adjoint (dans le sens des  $x$  décroissants), jusqu'à atteindre le critère d'arrêt :

$$\begin{aligned} q_t^{n+1} &= Lq^{n+1}, \quad q^{n+1}(0) = p_0^n \\ p_t^{n+1} &= -\bar{L}^T p^{n+1}, \quad p^{n+1}(t_f) = q^{n+1}(t_f) \end{aligned}$$

On converge vers le gain maximal à condition, comme précédemment, que la condition de départ  $q^1(0)$  ne soit pas orthogonale à la perturbation optimale.



## Annexe B

# Autres résultats du critère de transition

Cette annexe contient des résultats complémentaires au chapitre 9. Dans un premier temps, on présente les figures associées aux résultats du tableau récapitulatif 9.2. Dans un deuxième temps le critère est appliqué aux expériences de Arnal et Juillen [6] faites à l'ONERA en 1978.

### cas Rolls-Royce

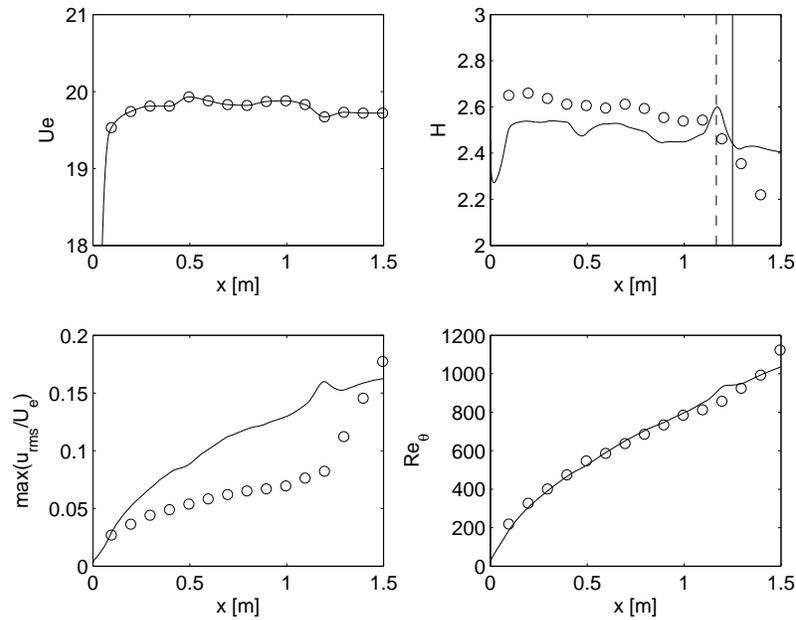


FIG. B.1 – Cas T3A-.

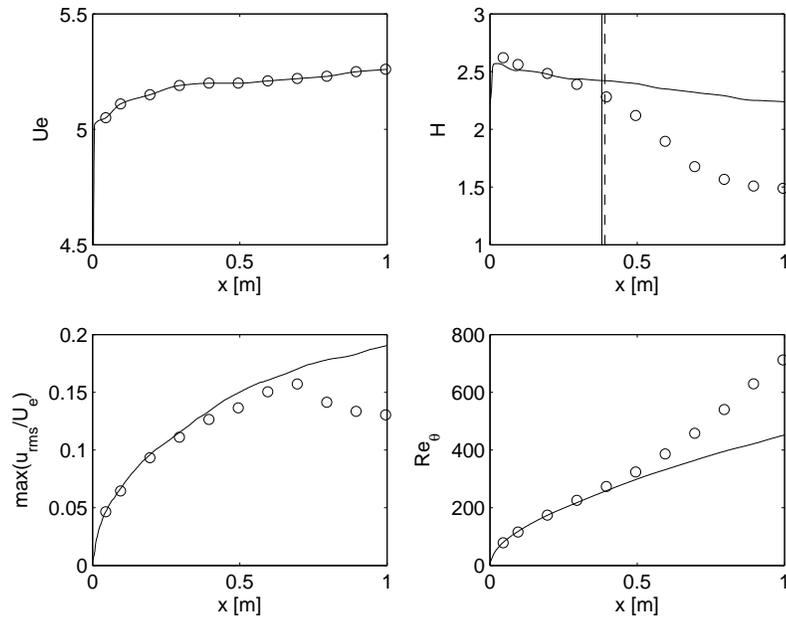


FIG. B.2 – Cas T3A.

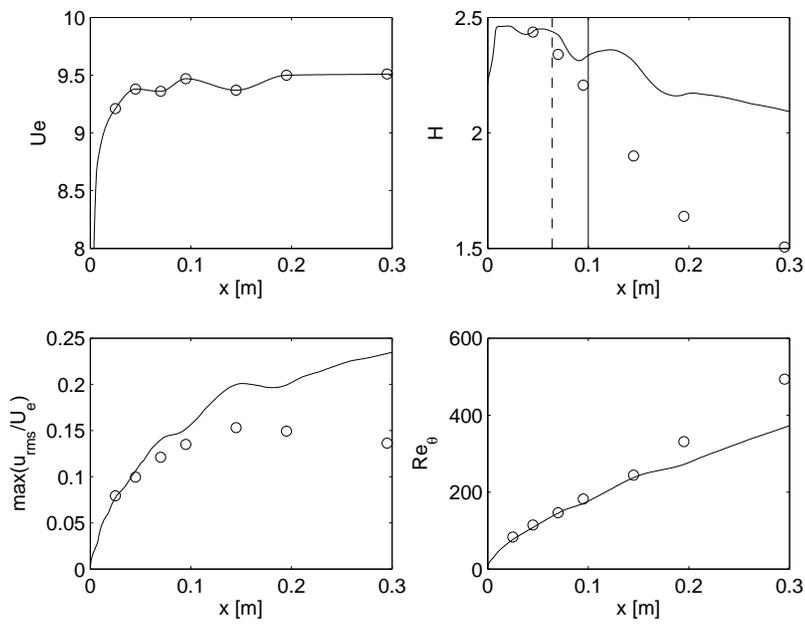


FIG. B.3 – Cas T3B.

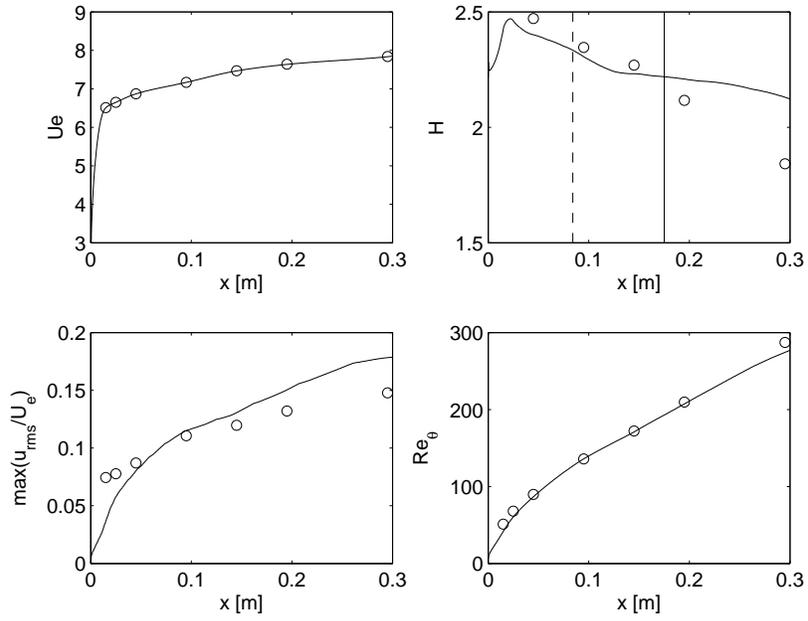


FIG. B.4 – Cas T3C1.

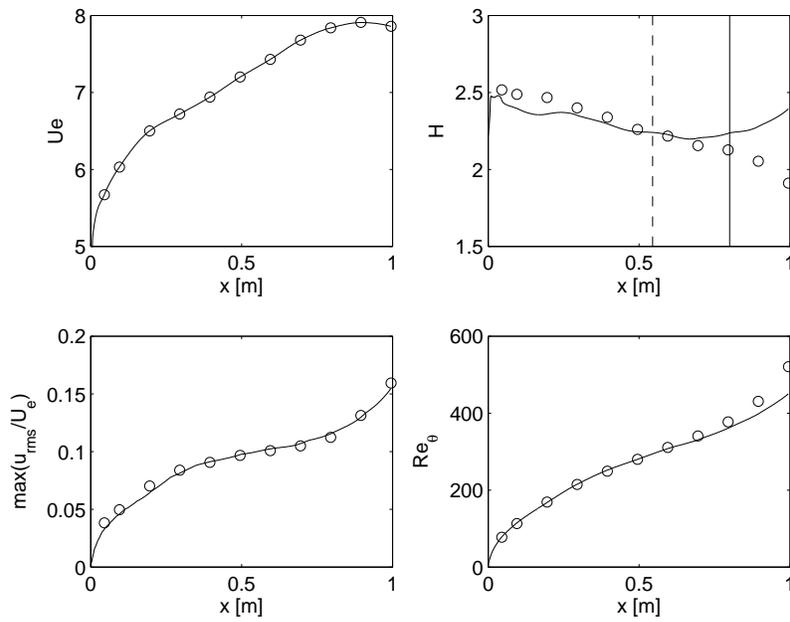


FIG. B.5 – Cas T3C2.

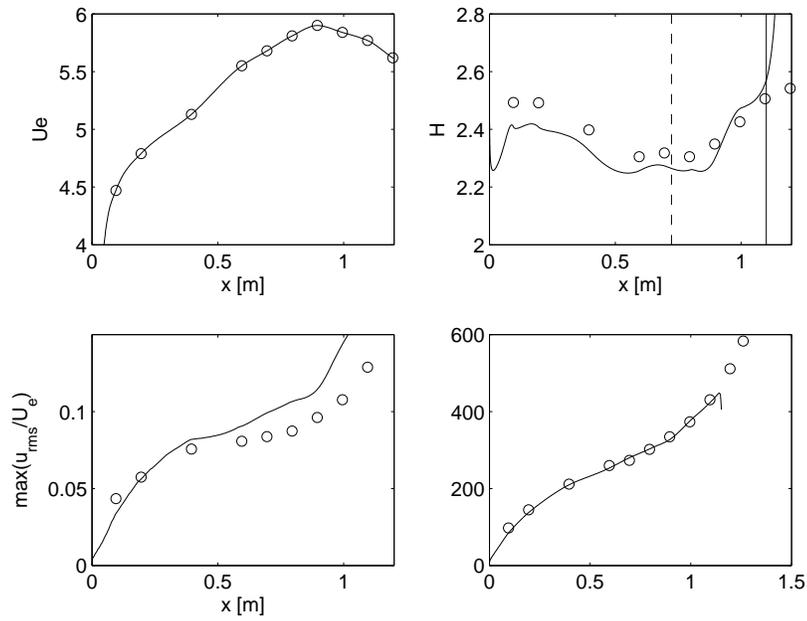


FIG. B.6 – Cas T3C3.

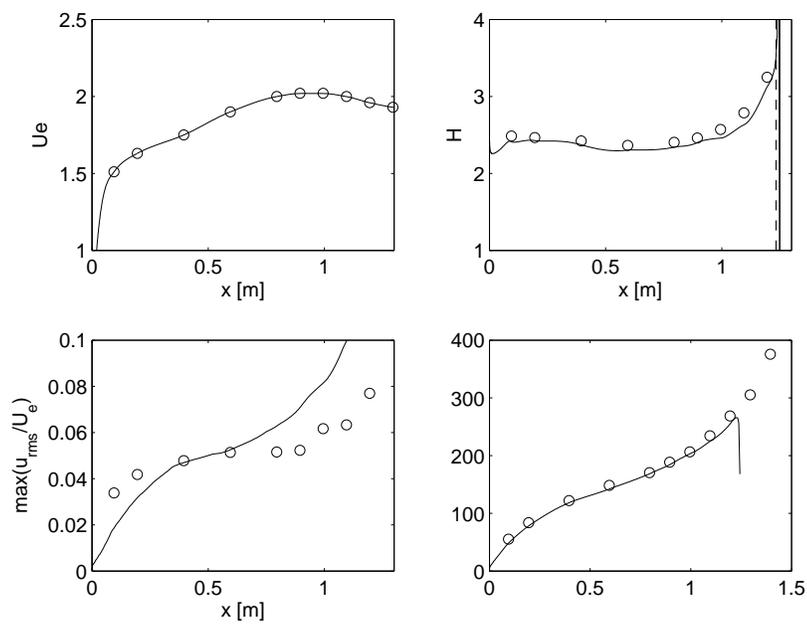


FIG. B.7 – Cas T3C4.

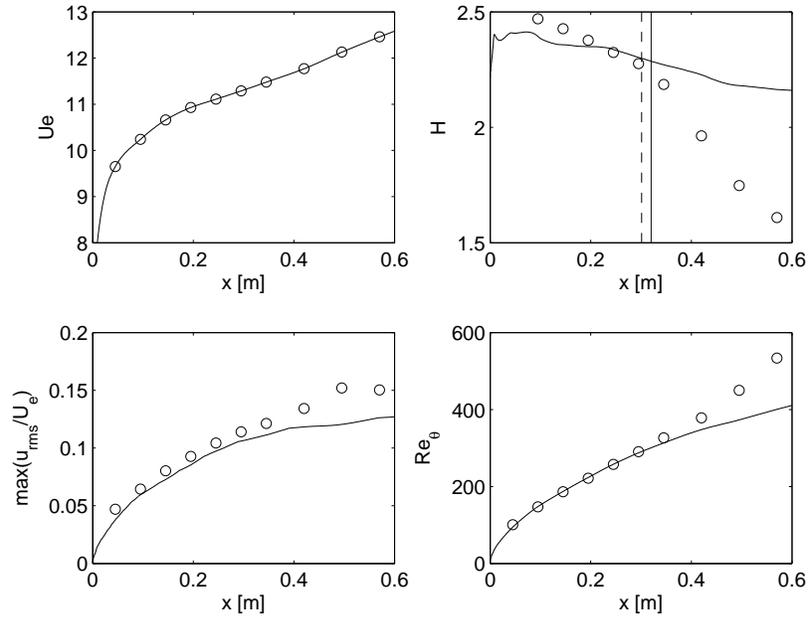


FIG. B.8 – Cas T3C5.

## Expériences de Arnal et Juillen

On présente ici les résultats du critère appliqué aux expériences de Arnal et Juillen réalisées à l'ONERA, pour plus de détails sur les mesures, on se réfèrera au rapport [6]. Ces essais ont été réalisés dans une soufflerie de révolution d'un diamètre de 20cm, sur un cylindre de 6cm de diamètre et environ 1m de longueur précédé d'une ogive de 20cm (voir schéma B.9).

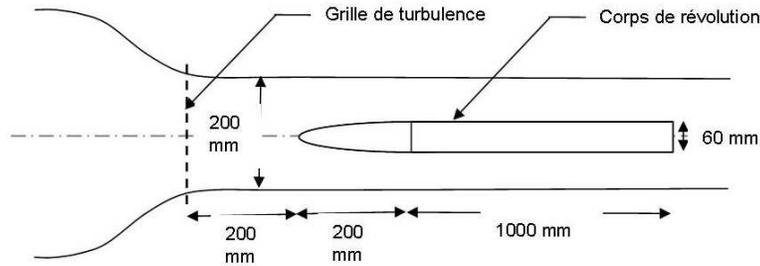


FIG. B.9 – Dispositif expérimental.

La vitesse nominale de la soufflerie est de 29m/s. Pour générer la turbulence, une grille est placée à la fin du convergent pour assurer une turbulence homogène. On montre que la courbure transversale de la paroi n'a pas d'influence sur les stries dans le modèle décrit précédemment (*i.e.* les termes correcteurs apparaissent aux ordre supérieurs dans le développement en  $1/Re$ ), contrairement au cas de l'instabilité de Goertler où la courbure est longitudinale. Trois cas ont été testés, premièrement le cas sans grille (G0) où le taux de turbulence extérieure est très faible ( $Tu = 0.2\%$ ). Ensuite deux cas avec grille (G1,  $Tu \approx 0.7\%$ ) et (G2,  $Tu \approx 1\%$ ). Les paramètres de transition pour ces trois cas sont reportés dans le tableau B.1.

TAB. B.1 – Expériences de Arnal et Juillen (ONERA)

	$Tu(\%)$	$x_{tr}$ [m] expérimental	$x_{tr}$ [m] numérique
sans grille G0	0.2	.9	
grille 1 G1	0.7-0.8	1.05	.88
grille 2 G2	1-1.1	.40	.48

On remarquera dans le tableau ci-dessus que l'abscisse de transition avec la grille 1 est légèrement supérieure à celle mesurée sans grille, malgré un taux de turbulence extérieur supérieur. On se trouve certainement en présence du phénomène de contrôle par stries 'modérées', signalé dans la conclusion. Les courbes correspondantes : facteur de forme  $H$ , nombre Reynolds et amplitude des stries, sont reportées sur les figures B.10 pour la grille 1 et B.11 pour la grille 2. Sur les courbes de  $H$ , le trait vertical continu repère l'abscisse de transition expérimentale, le trait interrompu l'abscisse théorique. Le calcul estime correctement l'abscisse de transition et l'évolution du nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement, mais surestime, pour des raisons inconnues, l'amplitude des stries.

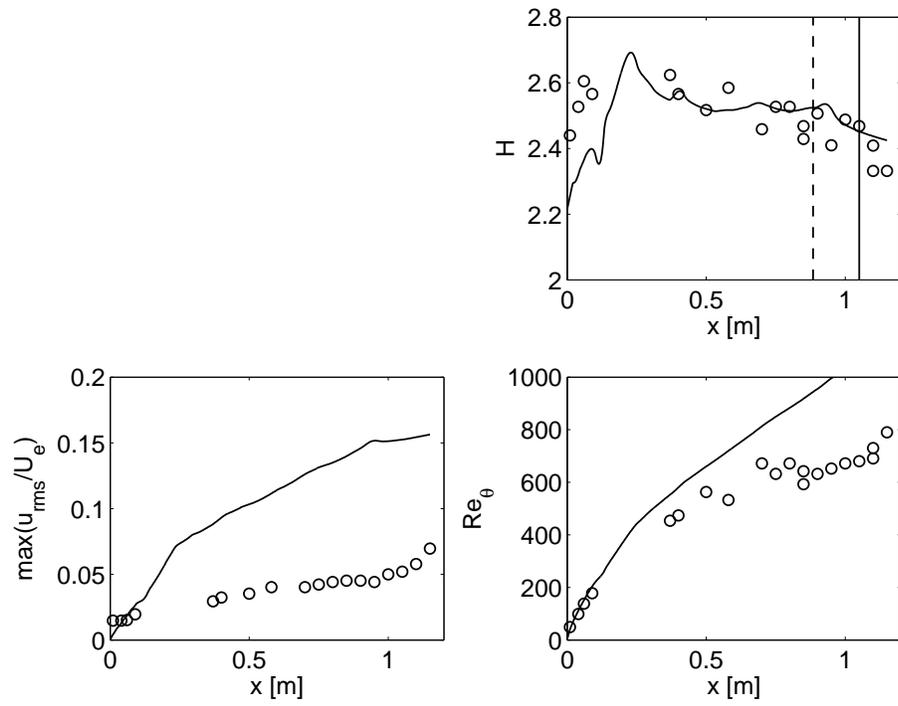


FIG. B.10 – Cas grille 1 (G1).

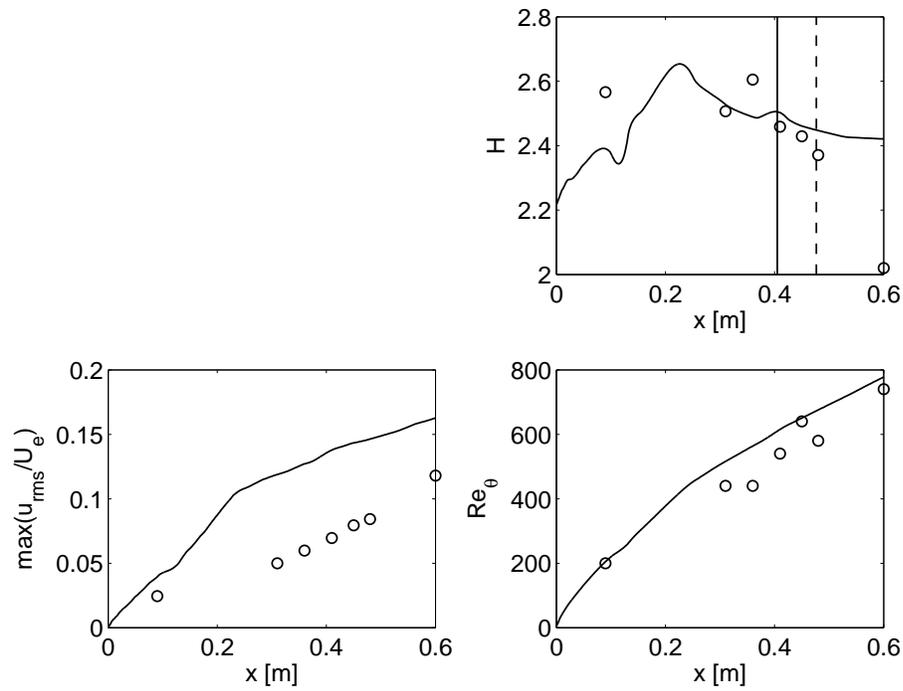


FIG. B.11 – Cas grille 2 (G2).



## Annexe C

# Résolution des équations de Navier-Stokes : du 2D au 3D

Il est aisé d'adapter l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles décrit au chapitre 2 au cas tridimensionnel. La discrétisation spatiale s'appuie sur une décomposition de Fourier dans la direction de l'écoulement principal, donnant un ensemble de problèmes elliptiques bidimensionnels dans l'espace de Fourier dépendant des deux autres directions spatiales.

$$q = [u, v, w, p]^T = \sum_{k=0}^{N_x} \hat{q}_k(y, z, t) e^{i\alpha_k x}$$

Il est important de noter que les dérivations selon  $y$  et  $z$  (directions orthogonales à l'écoulement principal) s'opèrent dans l'espace physique, selon la méthode de collocation décrite au chapitre 3. Dans la direction de l'écoulement ( $x$ ), les dérivations sont calculées dans l'espace spectral (Fourier) et le terme de convolution (non linéaire) est calculé dans l'espace physique. On parle de méthode pseudo-spectrale.

On rappelle que, dans l'espace spectral, les inconnues sont les poids de projection (coefficients de Fourier) alors que dans l'espace physique, les inconnues sont les différentes valeurs de la fonction aux points de collocation. On constate que les opérations de dérivations sont plus simples à calculer dans l'espace de Fourier ( $\partial/\partial x \rightarrow i\alpha \times$ ) alors que les termes non linéaires sont plus simples à calculer dans l'espace physique ( $\sum \hat{q} \times \sum \hat{q} \rightarrow q \times q$ ).

Il apparaît nécessaire de faire des allers/retours entre l'espace de Fourier (où sont effectués les calculs linéaires, mode-par-mode) et l'espace physique (où sont calculées les différentes composantes du terme non linéaire  $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ ).

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{u}} & \xrightarrow{\text{IFFT}} & \mathbf{u} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}) & \xleftarrow{\text{FFT}} & \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \end{array}$$

Il est important de réaliser une opération de de-aliasing en utilisant la règle de Orzag (voir chapitre 3).

L'algorithme peut se synthétiser à l'ordre 1 en temps, de la manière suivante. On suppose connues, à un certain instant  $n\Delta t$ , les  $k$  composantes de Fourier pour la vitesse et la pression ( $\hat{\mathbf{u}}_k^n, \hat{p}_k^n$ ). On notera la  $k$ -ème composante de l'opérateur nabla dans l'espace de Fourier :  $\nabla_k = [i\alpha_k; \partial_y; \partial_z]^T$ . Après avoir calculé la transformée de Fourier du terme non linéaire

$\mathcal{F}(\mathbf{u}\nabla\mathbf{u})$ , à partir de l'ensemble des modes  $\hat{\mathbf{u}}_k^n$ , on obtient un système de  $N_x$  équations linéaires indépendantes, à résoudre mode-par-mode :

– étape de prédiction

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}_k - \hat{\mathbf{u}}_k^n}{\Delta t} + \mathcal{F}(\mathbf{u}^n \nabla \mathbf{u}^n)_k = -\nabla_k p_k^n + \frac{1}{Re} \nabla_k^2 \tilde{\mathbf{u}}_k$$

– étape de projection :

$$\begin{aligned} \Delta p_k^{n+1} &= 1/\Delta t \nabla_k \cdot \tilde{\mathbf{u}}_k + \nabla_k^2 p_k^n \\ \hat{\mathbf{u}}_k^{n+1} &= \tilde{\mathbf{u}}_k - \Delta t \nabla_k (p_k^{n+1} - p_k^n) \end{aligned}$$

Chaque sous système  $k$  est inversé par la technique de diagonalisation successive, qui s'adapte sans problème au cas tridimensionnel dans l'espace de Fourier. La même approche a été utilisée par Serre *et al.* [100] dans le cas axisymétrique d'une cavité tournante tridimensionnelle.

## **Etude des structures longitudinales dans la couche limite laminaire et de leur lien avec la transition.**

**Résumé :** Ce travail est consacré à la modélisation des stries dans une couche limite laminaire et à l'étude de leur influence sur la transition. Dans une première partie, on présente une modélisation de ces structures longitudinales en utilisant les équations de Navier-Stokes paraboliques. La résolution numérique est basée sur des schémas de projection, de type Chorin-Temam, associés à des méthodes de discétisation spectrales. Ce modèle parabolique est appliqué au problème de réceptivité de la couche limite laminaire vis-à-vis de différentes perturbations extérieures. La dernière étape du processus de transition vers la turbulence est abordée par une étude de stabilité linéaire ainsi qu'une simulation numérique directe. Enfin on propose un modèle pragmatique pour reproduire la dynamique des stries et estimer le seuil de transition 'bypass'. Sur l'ensemble, on a cherché à comparer les résultats à différents travaux expérimentaux existants.

**Mots-clés :** Mécanique des fluides, transition laminaire-turbulent, stabilité hydrodynamique, réceptivité, écoulement de couche limite, méthodes spectrales.

## **Analysis of streaky structures in laminar boundary layers and their link to bypass transition.**

**Abstract :** Streamwise elongated structures, called streaks, are observed in boundary layers exposed to significant levels of external perturbations. The effect of these streaks on the transition process is investigated in this thesis.

The equations for the streaks' dynamics are obtained using the streamwise parabolic form of the Navier-Stokes equations. The numerical resolution is based on projection schemes associated to spectral spatial discretization. Simulations of a boundary layer subject to different external perturbations have been performed. The receptivity of the boundary layer is studied in detail for different inflow conditions : optimal vortices, single tip-vortex and two-dimensional turbulence fields.

The breakdown of an isolated streak is investigated by linear stability analysis and direct numerical simulation. The instability, characterised by a short streamwise wavelength, regenerates streamwise structures by non-linear interactions. The streak's breakdown is then characterised by the appearance of quasi-streamwise vortices following the meandering of the streak. This mechanism shows some similarities with the near-wall cycle of fully developed turbulent flows.

In the last part, a model is proposed to mimic the streaks' dynamics in laminar boundary layers subject to free-stream turbulence. This empirical model is then applied to estimate the bypass transition position.

Throughout the thesis, numerical results are compared, as much as possible, to existing experimental data.

**Key words :** Fluid mechanics, laminar-turbulent transition, hydrodynamic stability, receptivity, boundary layer flow, spectral methods.