





# ANNEXES



# ANNEXES B2

**Analyse écologique des manuels de 1971 à 2002**



## STRUCTURATION DES MANUELS EN CHAPITRES ET PARTIES

### REVUZ

| Revuz71                  |  |
|--------------------------|--|
| Chap1 : Entiers naturels |  |
| I.                       | Entiers naturels. Ensembles finis  |
| II.                      | Division euclidienne dans $\mathbf{N}$ . Systèmes de numération.                               |
| Chap2 : Entiers relatifs |  |
| I.                       | Anneau totalement ordonné $(\mathbf{Z}, +, \times, \leq)$ .                                    |
| II.                      | Sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ . Idéaux de $(\mathbf{Z}, +, \times)$ . Entiers modulo $n$ . |
| III.                     | Divisibilité dans l'anneau $\mathbf{Z}$ . P.G.C.D et P.P.C.M.                                  |
| IV.                      | Nombres premiers.  |

### DECLIC

| Dec98                                      | Dec02   |
|--|---|
| Chap1 : Divisibilité. Division Euclidienne | Chap1 : Divisibilité dans $\mathbf{Z}$        |
| 1. Divisibilité dans $\mathbf{Z}$ .        | 1. Divisibilité dans $\mathbf{Z}$ .           |
| 2. Nombres premiers.                       | 2. Nombres premiers.                          |
| 3. Décomposition d'un entier               | 3. Décomposition d'un entier.                 |
| 4. Division euclidienne.                   | 4. Division euclidienne.                      |
|  | 5. Congruences.                               |
| Chap2 : PGCD – PPCM                        | Chap2 : PGCD – PPCM                           |
| 1. Divisions successives.                  | 1. Diviseurs communs à deux entiers naturels. |
| 2. Plus grand commun diviseur.             | 2. PGCD de deux entiers relatifs.             |
| 3. Nombres premiers entre eux.             | 3. Nombres premiers entre eux.                |
| 4. Plus petit commun multiple.             | 4. PPCM de deux entiers relatifs.             |
| 5. Décomposition du PGCD et du PPCM.       |   |

### TERRACHER

| Ter98                                       | Ter02   |
|---|---|
| Chap1 : Divisibilité. Nombres premiers.     | Chap1 : Division euclidienne et congruences dans $\mathbf{Z}$ |
| 1. Divisibilité dans $\mathbf{Z}$ .         | 1. Divisibilité dans $\mathbf{Z}$ .                           |
| 2. Nombres premiers.                        | 2. Division euclidienne.                                      |
|   | 3. Le langage des congruences.                                |
|   | 4. PGCD et PPCM de deux entiers.                              |
|   | 5. Les théorèmes de Bézout et de Gauss.                       |
| Chap2 : Division euclidienne – PGCD et PPCM | Chap2 : Nombres premiers                                      |
|   | 1. Généralités sur les nombres premiers.                      |

|   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Division euclidienne.</li> <li>2. PGCD et PPCM de deux entiers.</li> <li>3. Les théorèmes de Bézout et de Gauss.</li> <li>4. Le langage des congruences.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>2. Divisibilité et nombres premiers.</li> <li>3. Le théorème fondamental de l'arithmétique.</li> <li>4. Le théorème de Fermat.</li> </ol> |
|---|--|

## TRANSMATH

| Trans98  | Trans02  |
|--|--|
| <p>Chap1 : Divisibilité. PGCD, PPCM.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Les ensembles <math>\mathbf{N}</math> et <math>\mathbf{Z}</math>.</li> <li>2. Divisibilité dans <math>\mathbf{Z}</math>.</li> <li>3. Division euclidienne.</li> <li>4. Diviseurs communs à deux entiers positifs. PGCD</li> <li>5. Nombres premiers entre eux.</li> <li>6. Caractérisations et propriétés du PGCD.</li> <li>7. Applications</li> <li>8. Plus petit commun multiple à deux entiers positifs <math>a</math> et <math>b</math>.</li> </ol> <p>Chap2 : Nombres premiers dans <math>\mathbf{N}</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Définitions.</li> <li>2. Décomposition d'un entier en facteurs premiers.</li> <li>3. L'ensemble des nombres premiers.</li> <li>4. Nombres premiers et divisibilité dans <math>\mathbf{N}</math>.</li> </ol> | <p>Chap1 : Divisibilité dans <math>\mathbf{Z}</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Divisibilité dans <math>\mathbf{Z}</math>.</li> <li>2. La division euclidienne.</li> </ol> <p>Chap2 : PGCD, PPCM</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Plus grand commun diviseur.</li> <li>2. Théorème de Bézout.</li> <li>3. Caractérisations et propriétés du PGCD.</li> <li>4. Applications.</li> <li>5. Plus petit commun multiple.</li> </ol> <p>Chap3 : Les congruences</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Congruences modulo <math>n</math>.</li> <li>2. Applications des règles de calculs.</li> <li>3. Résolution de l'équation <math>a \equiv b \pmod{m}</math>.</li> </ol> <p>Chap4 : Les nombres premiers</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Définition. L'ensemble des nombres premiers.</li> <li>2. Décomposition en produits de nombres premiers.</li> <li>3. Nombres premiers et divisibilité dans <math>\mathbf{N}</math>.</li> </ol> |

## EXERCICES A RESOUDRE SANS CALCULATRICE DANS TER02

### Exercice 2 p. 382

Déterminer à l'aide de divisions successives et de la proposition 1, page 368, si les entiers suivants sont premiers ou composés :  
97 ; 109 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719

Proposition 1, page 368 :

« Tout entier naturel  $n$  ( $n \geq 2$ ) admet un division premier. Si  $n$  est composé, il admet un division premier  $p$  tel que  $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ .

### Exercice 16, p. 383

Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres :  
80 ; 220 ; 400 ; 729 ; 1500.

### Exercice 17, p. 383

Même exercice avec : 196 ; 240 ; 570 ;  $300^{300}$  ; 5 040.

### Exercice 18, p. 383

A l'aide de la décomposition en facteurs premiers, mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :  
 $315/84$  ;  $1\ 792/96$  ;  $480/225$  ;  $637/1\ 183$  ;  $540/192$ .

### Exercice 19, p. 383

Mettre chacun des nombres suivants sous la forme  $a\sqrt{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers avec  $b$  sans facteur carré (c'est-à-dire  $b$  non divisible par un carré supérieur à 2) :  
 $\sqrt{1\ 460}$  ;  $\sqrt{640}$  ;  $\sqrt{1\ 715}$  ;  $\sqrt{1\ 998}$  ;  $\sqrt{1\ 201\ 250}$ .



## EXERCICE A RESOUDRE AVEC ORDINATEUR DANS DEC98

### Exercice 74 p. 80

#### Équation $a^m \equiv 1 \pmod{n}$

Soit  $n$  un entier strictement positif donné, et  $a$  un entier compris entre 1 et  $n - 1$ .

On cherche un entier  $m$  tel que  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ , c'est-à-dire tel que  $n$  divise  $a^m - 1$ .

Par exemple : si  $n = 7$  et  $a = 3$ , alors  $m = 6$  convient, car  $3^6 - 1 = 728$ , et on a bien 7 divise 728.

1°) Écrire un programme permettant, pour tout entier  $n$  donné, de déterminer, pour tout entier  $a$  compris entre 1 et  $n - 1$ , s'il existe un entier  $m$  tel que  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$  ; et, en cas de réponse positive, de déterminer cet entier  $m$ .

*Indication :*

On admettra, qu'en cas de réponse positive, il existe un entier  $m$ , solution du problème, compris entre 1 et  $n$ .

2°)

- a) Pour  $n = 5$ , déterminer, pour chaque entier  $a$  compris entre 1 et 4, un entier  $m$  (s'il existe) tel que :  $a^m \equiv 1 \pmod{5}$ .
- b) Même question pour :  $n = 6$  ;  $n = 7$  ;  $n = 8$  ;  $n = 9$  ;  $n = 10$  et  $n = 11$ .
- c) Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier  $n$  afin que, pour tout entier  $a$  compris entre 1 et  $n - 1$ , l'équation  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$  possède au moins une solution (équation d'inconnue l'entier  $m$ ).
- d) Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers  $a$  et  $n$ , afin que l'équation  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ , possède au moins une solution.



## ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DES EXERCICES DES MANUELS DE 1998

L'analyse présentée ci-dessous est extraite de notre mémoire de DEA. Cette analyse porte sur les manuels Dec98, Ter98 et Trans98. Notons que les notations des types de tâches introduites dans cette analyse diffèrent de celles des chapitres précédents.

### I. RESULTATS DE L'ANALYSE PRAXEOLOGIQUE.

#### I.1 Méthodologie.

Nous avons écarté de l'analyse les exercices d'application directe du cours, les exercices Vrai/Faux de Ter98 et les problèmes de synthèse de fin de chapitre. En effet, les problèmes de synthèse sont :

- soit très longs. Les questions sont alors souvent dépendantes les unes des autres et ne portent pas toutes sur l'arithmétique.  
Exemple : L'exercice 49 p.160 de Trans98 qui a pour thèmes les suites et les nombres premiers.  
«  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$ . Le but du problème est de chercher tous les nombres premiers de cette suite [...] »
- soit courts mais très ouverts et donc plutôt difficiles.  
Exemple : exercice<sup>1</sup> 107, p. 136 de Trans98 :  
« Résolvez dans  $\mathbb{N}^3$  l'équation :  $ab + bc + ca = abc$ . »

Nous n'avons donc pas estimé qu'il était nécessaire de les intégrer à l'analyse praxéologique des exercices si l'on souhaitait avoir une idée du type de tâches les plus courants dans les manuels. Ces exercices sont au nombre de 7 dans Trans98, 18 dans Ter98 et 7 dans Dec98, ce qui est relativement peu, comparé au nombre total d'exercices analysés.

Nous avons donc pris en compte au total 418 exercices dont 140 de Trans98, 135 de Ter98 et 143 de Dec98. Le nombre d'exercices étant à peu près équivalents dans chaque manuel, nous n'avons pas jugé nécessaire de donner les résultats de l'analyse praxéologique en pourcentage.

Dans les résultats que nous allons donner par la suite, on voit à la fin de chaque tâche le nombre d'exercices des différents manuels se rapportant à cette tâche ; il y a 431 entrées au total alors que l'on a remarqué plus haut que 418 exercices avaient été classés. En effet, un même exercice peut être classé dans des tâches différentes. Voici un exemple pour illustrer notre propos :

- « 1) Décomposer 135 en produit de facteurs premiers.
- 2) Dresser le liste des diviseurs de 135. Préciser le nombre de ces diviseurs. » (Dec98, 42 p.37)

---

<sup>1</sup> C'est un exercice noté *trois étoiles*. Il fait donc partie des exercices les plus durs que l'on peut trouver dans ce manuel.

La première question de cet exercice est classée dans la tâche **T<sub>14</sub>** alors que la seconde l'est dans la tâche **T<sub>15</sub>**. On peut toutefois remarquer que la plupart des exercices ne comportent qu'un seul type de tâche (431 tâches pour 418 exercices).

Nous n'avons pas non plus classé les exercices de la rubrique « Avec ordinateur » de Dec98. Cela représente 11 exercices. Nous n'avons de plus pas réussi à classer la totalité des 418 exercices : 40 n'ont pas été comptabilisés. Nous allons maintenant expliquer pourquoi nous n'avons pas pu les classer.

Les exercices non classés peuvent se regrouper en six catégories. Les trois premières catégories correspondent à un choix de notre part tandis que les trois dernières catégories sont composées d'exercices que nous n'avons pas réussi à classer facilement avec l'outil praxéologique. Nous avons donc décidé de ne pas classer les exercices que l'on peut « ranger » dans la catégorie « jeux mathématiques » car ces exercices sont souvent très particuliers et ne relèvent souvent pas des principaux types de tâches que nous avons dégagés lors de l'analyse des exercices (voir le paragraphe suivant pour la liste de ces tâches). Voici deux exemples de tels exercices :

« **Tri binaire.** Comment peut-on deviner un entier naturel inférieur à un million, à l'aide d'au plus 20 questions auxquelles on ne peut répondre que par OUI ou par NON ? » (Ter98, 70 p.53)

« **Hommage au prince.** Déterminer une fraction dont l'écriture décimale est 0,1998 1998 ... et dont le numérateur est, à un an près, l'année de naissance de Karl Friedrich GAUSS, que certains ont surnommé : 'le Prince' des mathématiques. » (Ter98, 41 p.27)

Par ailleurs, ces exercices sont très peu représentatifs de l'ensemble des exercices proposés dans les manuels : on en dénombre 5.

De même, nous n'avons pas classé les exercices d'arithmétique qui portent sur des notions qui ne sont plus au programme d'arithmétique aujourd'hui mais qui en faisaient partie avant. Trois sortes d'exercices font partie de cette catégorie : les exercices de dénombrement<sup>2</sup> (1 exercice dans Trans98), les exercices portant sur la notion de récurrence<sup>3</sup> (5 exercices dans Dec98) et les problèmes de rationalité<sup>4</sup> (3 exercices dans Ter98).

Les exercices (peu nombreux) dont l'objectif est de démontrer les résultats qui n'ont pas été démontrés dans la partie cours ne sont pas classés non plus.

Voici maintenant les trois catégories d'exercices que nous n'avons pas pu classer facilement dans le cadre de l'analyse praxéologique des exercices et que nous avons donc choisi d'écarter de notre analyse.

Certains exercices courts (sans questions intermédiaires) mais dont la résolution est longue et nécessite une succession de sous-tâches fortement dépendantes les unes des autres. (5 exercices).

Exemple :

<sup>2</sup> « Combien y a-t-il de nombres écrits avec trois chiffres dans le système décimal ? Dans le système à base 2 ? » (Trans98, 87 p.135).

<sup>3</sup> « Les nombres triangulaires. [...] soit  $(t_n)$  la suite des nombres triangulaires. 1) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $t_n = 1 + 2 + \dots + n = n(n+1) / 2$ . [...] » (Dec98, 3 p.34).

<sup>4</sup> « Montrer que  $(\sqrt{2})^{1/3}$  est irrationnel [...]. » (Ter98, 98 p.55).  
nécessairement entière. 3) En déduire que le nombre  $\sqrt{a}$

« a et b sont deux entiers strictement positifs et g est leur pgcd ; p, q, r, s sont des entiers strictement positifs tels que  $ps - qr = 1$ . On pose  $A = pa + qb$  et  $B = ra + sb$ . Quel est le pgcd  $g'$  de A et de B ? » (Trans98, 48 p.132)

Éléments de réponse : Examiner l'énoncé et remarquer que  $g \leq g'$  puis, en se donnant des valeurs numériques, vérifier que chaque fois on trouve  $g' = g$ . Il suffit donc de démontrer que  $g' = g$  en démontrant que  $g'$  divise g. Or pour cela, il suffit de démontrer que  $g'$  divise a et b. L'idée est donc maintenant d'exprimer a en fonction de A et B et b aussi pour pouvoir conclure.

Des exercices dont les techniques à mettre en œuvre sont très spécifiques et dépendent fortement des données du problème et des questions intermédiaires de celui-ci. Cela concerne une dizaine d'exercices.

Exemples :

« Trouvez un nombre de quatre chiffres qui est un carré parfait et qui est tel que lorsqu'on augmente chacun de ces chiffres d'une unité, on obtient encore un carré parfait. » (Trans98, 99 p.135)

« a et b sont deux entiers tels que  $a^2 + 2b$  est un carré parfait. 1) Démontrer  $2b$  est le produit de deux entiers positifs pairs. 2) Démontrer que  $a^2 + b$  est une somme de deux carrés. » (Trans98, 100 pp.135-136)

« Trouvez, s'ils existent, les chiffres a et b tels que le nombre qui s'écrit aabb dans le système décimal est un carré parfait. » (Trans98, 102 p.136).

Les exercices dont la résolution passe par une démonstration par l'absurde (7 exercices au total). En effet, ce type de raisonnement n'apparaît pas au niveau des techniques. Or il nous semble important de faire figurer l'obligation d'utiliser un raisonnement par l'absurde pour résoudre l'exercice dans l'analyse de celui-ci. C'est pour cette raison que nous avons préféré ne pas les comptabiliser dans notre analyse praxéologique<sup>5</sup>. Voici un exemple d'exercice appartenant à cette catégorie :

« a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux tels que  $a > b$ . On note  $b_1, \dots, b_n$  les entiers naturels inférieurs à b et premiers avec b.

1) Démontrez qu'aucun des éléments de l'ensemble  $E = \{b_1 a, \dots, b_n a\}$  n'est divisible par b.

2) Démontrez qu'en divisant par b deux éléments quelconques de l'ensemble E, on obtient des restes différents et premiers avec b. Quel est alors l'ensemble des restes ? » (Trans98, 73 p.134)

## **I.2 Description des tâches et des techniques associées à ces tâches relevées dans les manuels.**

Pour ce qui est des technologies justifiant les techniques, nous avons chaque fois essayé de faire en sorte que leur rédaction soit aussi ressemblante que possible à celle des théorèmes ou propriétés données dans les trois manuels étudiés. Nous avons limité notre analyse praxéologique au triplet tâche, technique et technologie pour des raisons de simplicité. En effet, il n'est pas toujours aisé de distinguer clairement le niveau théorique du niveau technologique et nous avons fait l'hypothèse que de restreindre notre analyse au triplet décrit ci-dessus devrait nous permettre de dégager des résultats significatifs.

### **T<sub>1</sub> : Vérifier une propriété dans un nombre fini de cas.**

Les techniques relatives à cette tâche vont dépendre de l'exercice. Dans tous les cas, on est ramené à effectuer la même sous-tâche dans un nombre fini de cas. La technologie justifiant

---

<sup>5</sup> Le travail d'Egret basé sur ceux de Raymond Duval nous semble plus pertinent pour analyser cette catégorie d'exercices.

cette technique relève du principe (élémentaire) de logique :  $(\forall t \in \{t_1, \dots, t_n\}, P(t)) \Leftrightarrow (P(t_1) \wedge P(t_2) \wedge \dots \wedge P(t_n))$

**Exemple 1 :**

« Vérifier qu'il existe au moins un nombre premier dans chacun des intervalles suivants : [5,10] ; [10, 20] ; [20, 40] ; [40, 80] ; [80, 160] ; [160, 320]. » (Ter98, 22 p.25)

On peut :

- soit consulter la table des nombres premiers du livre ;
- soit tester la primalité des nombres compris dans les intervalles et qui ne vérifient pas les principaux critères de divisibilité (par 2, 3, 5, 9 et 11).

**Exemple 2 :**

« 1) Montrer qu'il n'existe qu'un seul entier naturel parfait inférieur à 10.[...] »

4) Montrer que 496 est parfait. [...] » (Dec98, 67 p.40).

**Trans98 :** 3 exercices ; **Ter98 :** 12 exercices ; **Dec98 :** 6 exercices.

**T<sub>2</sub> : Passer de l'écriture d'un nombre dans une base donnée à sa valeur.**

Cette tâche apparaît généralement dans les exercices de numération. En voici un exemple :

« Trouvez, s'ils existent, les chiffres a et b tels que le nombre qui s'écrit aabb dans le système décimal est un carré parfait. » (Trans98, 102 p.136)

$\tau^2_1$  : Transformer l'écriture  $n = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$  en base b en  $n = x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_1 b + x_0$ .

$\theta$  : **Définition** : l'écriture d'un nombre N dans le système de numération de base a sous la forme  $N = b_n b_{n-1} \dots b_0$  signifie que  $N = b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0$  avec  $0 \leq b_i \leq a - 1$  si  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $1 \leq b_n \leq a - 1$ .

**Trans98 :** 7 exercices ; **Ter98 :** 9 exercices ; **Dec98 :** 11 exercices.

**T<sub>3</sub> : Trouver le pgcd g de deux nombres a et b.**

$\tau^3_1$  : Donner D(a) et D(b) en extension et repérer le plus grand élément de l'intersection.

$\theta$  : **Théorème – Définition** : L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément D ; D est le pgcd de a et b.

$\tau^3_2$  : Appliquer l'algorithme d'Euclide au couple (a,b).

$\theta$  : **Théorème** : Le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est le pgcd de a et b.

$\tau^3_3$  : Appliquer l'algorithme des différences successives au couple (a,b).

$\theta$  : Connaissances sur le lien entre division euclidienne et algorithme des différences successives.

$\tau^3_4$  : Décomposer a et b de la manière suivante :  $a = a'g$  et  $b = b'g$  où  $\text{pgcd}(a',b') = 1$ .

$\theta$  : **Corollaire du théorème de Bézout** : d est le pgcd de a et b si et seulement si d divise a et b et a/d et b/d sont premiers entre eux. Ou décomposition en facteurs premiers.

$\tau^3_5$  : Décomposer a et b en facteurs premiers.

$\theta$  : Propriété : Si  $a = p_1^{A1} p_2^{A2} \dots p_k^{Ak}$  et si  $b = p_1^{B1} p_2^{B2} \dots p_k^{Bk}$  alors  $\text{pgcd}(a,b) = p_1^{\inf(A1,B1)} \dots p_k^{\inf(Ak,Bk)}$ .

$\tau_6^3$  : Trouver une combinaison linéaire de a et b de la forme  $au + bv = c$  où  $c \in \mathbf{N}$ .

$\theta$  : Théorème de Bézout : g est le pgcd de a et b si et seulement si g est un diviseur de  $au + bv = c$ .

**T<sub>3 bis</sub>** : Trouver le ppcm m de deux nombres a et b.

$\tau_1^{3 \text{ bis}}$  : Décomposer a et b en facteurs premiers.

$\theta$  :  $\text{ppcm}(a,b) = p_1^{\sup(A1,B1)} \dots p_k^{\sup(Ak,Bk)}$ .

$\tau_2^{3 \text{ bis}}$  : Appliquer la formule  $mg = ab$  ; on est donc ramené à une sous-tâche de type **T<sub>3</sub>** pour calculer g.

$\theta$  : Théorème :  $ab = \text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b)$ .

**Remarque** : Cette tâche se divise en deux sous-tâches : trouver le pgcd de deux nombres a et b fixés et trouver le pgcd de deux nombres variables. La technique  $\tau_1^3$  ne s'applique pas dans le cas de deux nombres variables. Pour la recherche du ppcm de deux nombres variables, la technique  $\tau_2^{3 \text{ bis}}$  est favorisée. Par ailleurs, deux exercices seulement indiquent dans leur énoncé qu'il faut rechercher le pgcd par la méthode des différences successives.

**Trans98** : 14 exercices dans lesquels a et b sont fixés et 5 dans lesquels ils sont variables ;

**Ter98** : 15 exercices dans lesquels a et b sont fixés et 3 dans lesquels ils sont variables ;

**Dec98** : 8 exercices dans lesquels a et b sont fixés et 11 dans lesquels ils sont variables.

Certains manuels proposent quelques exercices dont la tâche est : **Montrer que  $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(c,d)$  où a, b, c et d sont des nombres variables.**

Outre la technique consistant à rechercher les deux pgcd et à montrer qu'ils sont égaux, une technique possible pour cette tâche consiste à trouver une combinaison linéaire de a et b égale à c et une autre égale à d, et réciproquement.

On trouve aussi dans Trans98 un exercice de recherche d'un pgcd de deux nombres fixés qui génère une technique particulière :

« On note E l'ensemble des entiers naturels dont la décomposition en facteurs premiers s'écrit  $2^x 3^y$ . On munit le plan d'un repère orthonormal (O; i; j) et à tout nombre  $2^x 3^y$  on associe le point de coordonnées (x; y). On dira que ce point M (x; y) est l'image du nombre  $2^x 3^y$ . [...] Quelle est la représentation graphique de l'ensemble des diviseurs de  $a = 2^7 3^3$  ? Même question pour le nombre  $b = 2^5 3^{11}$ . Quelle est la représentation graphique de l'ensemble des diviseurs communs à a et b ? Précisez l'image D du pgcd de a et b. [...] » (Trans98, 16 p.157)

**T<sub>4</sub>** : Démontrer que deux entiers positifs a et b sont premiers entre eux.

Il s'agit en fait d'un sous-type du type de tâche **T<sub>3</sub>**. Nous avons choisi de la distinguer de celle-ci car elle génère des techniques particulières.

Si a et/ou b sont des nombres variables :

$\tau_1^4$  : Dresser la liste des diviseurs de a et de b.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^3_1$  (définition du pgcd).

$\tau^4_2$  : Calculer le pgcd de a et de b avec l'algorithme d'Euclide.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^3_2$  (propriété du reste de l'algorithme d'Euclide).

$\tau^4_3$  : Appliquer la méthode des différences successives.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^3_3$ .

$\tau^4_4$  : Montrer que tout diviseur commun à a et b est égal à 1 en cherchant une combinaison linéaire de a et b égale à 1.

$\theta$  : Propriété : Soit d un diviseur de a et b. Alors d divise  $\alpha a + \beta b$ , pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ . Et aucun autre nombre que 1 ne divise 1.

$\tau^4_{4\text{bis}}$  : Chercher une relation entre a et b du type  $au + bv = 1$ .

$\theta$  : Théorème de Bézout :  $\text{pgcd}(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^* / au + bv = 1$ .

$\tau^4_5$  : Décomposer a en un produit de k nombres premiers chacun avec b.

$\theta$  : Théorème : Soit  $a = a_1 a_2 \dots a_k$ . Si  $\text{pgcd}(b, a_i) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , b est premier avec le produit des  $a_i$ .

$\tau^4_6$  : Trouver deux combinaisons linéaires de a et b premières entre elles. Donc le  $\text{pgcd}(a,b)=1$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^4_4$  et propriété : Si d divise a et b, d divise  $\text{pgcd}(a,b)$ .

Si a et b sont des nombres fixés :

$\tau^4_7$  : On est ramené à une sous-tâche du type  $\mathbf{T}_3$ .

**Trans98** : 8 exercices ; **Ter98** : 7 exercices ; **Dec98** : 4 exercices.

**T<sub>5</sub>** : Résoudre dans  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$  une équation du type  $au + bv = c$ .

On a en fait trois sous-tâches à effectuer pour résoudre celle-ci :

- Vérifier s'il existe une solution :

$\tau^5_1$  : calculer le pgcd de a et b (on est ramené à une tâche de type  $\mathbf{T}_3$ ).

$\theta$  : Corollaire du théorème de Bézout :  $au + bv = c$  possède des solutions entières si et seulement si c est un multiple du pgcd de a et b.

Mais cette question est rarement posée dans les manuels car le programme dit explicitement que c doit être un multiple du pgcd. Un seul exercice (Ter98, 18 p.50) s'intéresse à la résolution de type d'équation dans le cas général : « L'équation  $ax + by = n$  possède des solutions entières si et seulement si n est un multiple du pgcd D de a et b. »

- Chercher une solution particulière de l'équation :

$\tau^5_2$  : Chercher une solution particulière par essais – erreurs.

$\theta$  : Référence à une pratique ancienne liée aux équations (dans le passé de l'élève) que l'on peut rattacher à des pratiques référencées d'arithmétique élémentaire comme la méthode de fausse position.

$\tau^5_3$  : Chercher une solution particulière avec l'algorithme d'Euclide.

$\theta$  : Résultat : Soit  $r_i$  les restes successifs de l'algorithme d'Euclide. De proche en proche, on exprime  $r_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , en fonction de  $a$  et  $b$ . Ainsi,  $r_n$ , le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, s'écrit sous la forme  $r_n = au + bv$ .

- Chercher l'ensemble des solutions de l'équation :

$\tau^5_4$  : Se ramener à l'égalité  $a(x-x_0)=b(y-y_0)$  où  $(x_0, y_0)$  est une solution particulière de l'équation  $au + bv = d$  et  $(x, y)$  une solution de cette équation pour en déduire  $x$  et  $y$ .

$\theta$  : Théorème : Si  $(x_0, y_0)$  est une solution particulière de l'équation  $au + bv = c$ , l'ensemble des

solutions est : 
$$\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases} \text{ où } k \in \mathbf{Z}.$$

**Trans98** : 1 exercice ; **Ter98** : 11 exercices ; **Dec98** : 23 exercices.

**Remarque** : Les deux types de tâche suivants pourraient être regroupés dans un même type mais les techniques spécifiques à chacun sont si différentes que nous les avons séparés.

**T<sub>6</sub>** : Soit l'ensemble {dividende  $a$ , diviseur  $b$ , quotient  $q$ , reste  $r$ }. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble quand on en connaît les autres.

Exemple :

« Dans une division euclidienne entre entiers naturels, quels peuvent être le diviseur et le reste lorsque le dividende est 990 et le reste 39 ? » (Trans98, 20 p.130).

$\tau^6_1$  : Écrire l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité de la division euclidienne puis exploiter ce système.

$\theta$  : Théorème : Pour tout couple  $(a, b)$  de  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ , il existe un unique couple  $(q, r)$  tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

$\tau^6_2$  : Si l'on connaît  $a$  et  $r$ , décomposer  $a - r$  en facteurs premiers pour retrouver  $b$  et  $q$ .

$\theta$  : Identité de la division euclidienne :  $a = bq + r$  et théorème de décomposition d'un entier : Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ . Alors  $n$  se décompose de manière unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de facteurs premiers.

**Trans98** : 16 exercices ; **Ter98** : 4 exercices ; **Dec98** : 15 exercices.

On trouve aussi dans les manuels des exercices relatifs à la tâche suivante qui est en fait un sous-type du type de tâche **T<sub>6</sub>**.

**T<sub>7</sub>** : trouver le reste de la division d'un nombre  $a$  par un nombre  $b$ .

$\tau^7_1$  : Avoir une idée du reste  $r$  et vérifier que  $a-r = kb$  ou que  $a-r$  est congru à zéro modulo  $b$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau_1^6$  (théorème de la division euclidienne) et définition de la congruence :  $\forall (a,b) \in \mathbf{Z}, [a \equiv b [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} / a - b = kn] \Leftrightarrow n \mid a - b$ .

$\tau_2^7$  : Utiliser les critères usuels de divisibilité.

$\theta$  : Critères de divisibilité<sup>6</sup> (éventuellement vus en T.P. ou en exercice).

$\tau_3^7$  : Décomposer a en produit ou en somme et calculer le reste dans la division par b de chaque terme du produit ou de la somme.

$\theta$  : Théorème «opérations» sur les restes : Soit a,b deux entiers relatifs, n un entier naturel ( $n \geq 2$ ), r et s les restes respectifs de a et b dans la division euclidienne par n. Alors, dans la division euclidienne par n : a+b a le même reste que r+s ; a-b a le même reste que r-s ; ab a le même reste que rs et  $a^k$  a le même reste que  $r^k$  pour tout  $k \in \mathbf{N}$ .

$\tau_4^7$  : Si  $a \equiv x^y$  : Calculer  $z=x$  modulo b puis  $(z)^y$  modulo b.

$\theta$  : Cas particulier de la technologie associée à la technique  $\tau_3^7$  : opérations sur les congruences et non plus sur les restes.

$\tau_{4 \text{ bis}}^7$  : Trouver une valeur z telle  $x^z$  soit congru à  $\pm 1$  modulo b et poser la division euclidienne de y par z.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique précédente (opérations sur les congruences).

$\tau_5^7$  : Si  $a \equiv \mathbf{N}(n)$  : Faire une disjonction de cas selon les restes de la division euclidienne de n par b.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau_3^7$  (opérations sur les restes).

On remarque que les trois dernières techniques se réfèrent en fait à des sous-types du type de tâche **T<sub>7</sub>** car elles dépendent de la forme de a.

**Trans98** : 4 exercices ; **Ter98** : 17 exercices ; **Dec98** : 12 exercices.

**T<sub>8</sub>** : Trouver deux nombres x et y connaissant des relations entre leur pgcd et/ou leur ppcm et/ou x et y.

Exemple :

« a et b étant deux entiers naturels non nuls, soit d leur pgcd et m leur ppcm. Trouver tous les couples

$$(a ; b) \text{ vérifiant le système : } \begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geq b \end{cases} \text{ » (Dec98, 53 p.76)}$$

Ici, tout dépend des relations que l'on donne mais les techniques que l'on peut relever sont les suivantes (elles ne sont pas valables pour chaque cas). De plus, cette tâche conduit en fait à deux sous-tâches consécutives :

- Transformer l'équation :

<sup>6</sup> Pour montrer par exemple qu'un nombre est divisible par 2, il suffit de regarder s'il finit pas un nombre pair. La technologie qui justifie cette technique est liée à la congruence d'un nombre modulo 2. Ici, si  $N = a_n 10^n + \dots + a_0$ , N est congru à  $a_0$  modulo 2. Dans ce cas, le critère de divisibilité est : N est divisible par 2 si  $a_0$  est congru à 0 modulo 2.

$\tau^8_1$  : Si on donne des informations concernant le ppcm, utiliser la relation  $mg = xy$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^{3\text{bis}}_2$  : (relation entre pgcd et ppcm).

$\tau^8_2$  : Si on connaît le pgcd  $g$  de  $x$  et  $y$  poser  $x = x'g$  et  $y = y'g$  où  $\text{pgcd}(x',y') = 1$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^3_4$ .

$\tau^8_3$  : Si on connaît les valeurs de  $m$  et de  $g$ , décomposer  $m$  et  $g$  en facteurs premiers pour retrouver  $x$  et  $y$ .

$\theta$  : Voir technologies associées aux techniques  $\tau^3_5$  (décomposition en facteurs premiers du pgcd) et  $\tau^{3\text{bis}}_1$  (décomposition en facteurs premiers du ppcm)

- Résoudre l'équation :

$\tau^8_4$  : Résoudre de manière exhaustive le problème en utilisant au mieux les données de l'énoncé et les transformations du système<sup>7</sup>.

$\theta$  : Connaissances sur le raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante. Pratiques algébriques.

**Trans98** : 12 exercices ; **Ter98** : 1 exercice ; **Dec98** : 21 exercices.

**T<sub>9</sub>** : **Montrer qu'un nombre  $N(n)$ , "  $n \in \mathbb{N}$ , est divisible par un nombre  $m$ .**

$\tau^9_1$  : Décomposer  $N(n)$  en la somme de plusieurs entiers divisibles par  $m$ .

$\theta$  : Théorème : si  $d \mid a$  et  $d \mid b$  alors  $d \mid \alpha a + \beta b$  pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  (Voir  $\tau^4_4$ ).

$\tau^9_2$  : Faire apparaître  $m$  dans la mise en facteur de  $N(n)$  soit par un calcul de factorisation soit en décomposant  $N(n)$  en facteurs premiers.

$\theta$  : Définition de  $b \mid a$  :  $b \mid a$  si et seulement si il existe  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $a = bq$ .

$\tau^9_3$  : Montrer que  $N(n)/m \in \mathbb{N}$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique précédente (Définition de  $b \in a$ ).

$\tau^9_4$  : Faire une disjonction de cas selon les restes de la division de  $n$  par  $m$  puis soit  $\tau^1_1$  ou  $\tau^1_2$  pour chaque cas, soit conclusion immédiate.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^7_3$  (opérations sur les restes).

$\tau^9_{4\text{bis}}$  : Faire une disjonction de cas selon les congruences possibles de  $n$  modulo  $m$  pour pouvoir calculer dans chaque cas la congruence de  $N(n)$  modulo  $m$ .

$\theta$  : Voir technologie associée la technique  $\tau^7_4$  (opérations sur les congruences).

$\tau^9_{4\text{ter}}$  : Calculer « directement » la congruence de  $N(n)$  modulo  $m$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^7_1$  (définition de la congruence).

$\tau^9_5$  : Faire apparaître dans  $N(n)$  le produit de  $m$  nombres consécutifs.

$\theta$  : Soit  $n$  nombres consécutifs. Les restes respectifs de ces nombres dans la division euclidienne par  $n$  sont deux à deux distincts et appartiennent à  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

---

<sup>7</sup> Ce type de tâche a été particulièrement étudié dans Egret, 1999.

$\tau_6^9$  : Écrire  $m$  comme produit de  $k$  nombres premiers deux à deux et on se ramène à  $k$  sous-tâches du type **T<sub>10</sub>** pour la récursivité.

$\theta$  : Corollaire du théorème de Gauss :  $a_1, a_2$  et  $b$  étant des entiers naturels non nuls, si  $a_1$  et  $a_2$  divisent  $b$  et si  $a_1$  et  $a_2$  sont premiers entre eux, alors leur produit  $a_1 a_2$  divise  $b$ .

$\tau_7^9$  : Montrer que  $N(n)$  est divisible par un diviseur  $d$  de  $m$  puis que  $N(n)/d$  est divisible par  $m/d$ .

$\theta$  :  $d \mid N(n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N} / N(n) = kd$ . Itération.

$\tau_8^9$  : Utiliser la récurrence. On est alors ramené à deux sous-tâches : une immédiate (initialisation) et une du type **T<sub>10</sub>**.

$\theta$  : Principe de la récurrence.

$\tau_9^9$  : Trouver une relation du type  $k_1 m = k_2 N(n)$  avec  $k_1$  et  $k_2$  dans  $\mathbf{N}$  et  $k_2$  tel que  $\text{pgcd}(k_2, m) = 1$  ou montrer que  $m \mid kN(n)$  avec  $\text{pgcd}(m, k) = 1$ .

$\theta$  : Théorème de Gauss : Si  $a \mid bc$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a \mid c$ .

$\tau_{10}^9$  : Appliquer un critère de divisibilité connu.

$\theta$  : Critères de divisibilité.

Dans les exercices que l'on peut classer dans la tâche **T<sub>9</sub>**, deux se distinguent des autres. Dans ces deux exercices, il s'agit de démontrer une égalité (un exercice sur l'égalité de deux nombres et un sur l'égalité de deux ensembles). Or, en arithmétique, pour démontrer que  $a=b$ , il suffit de démontrer que  $a \mid b$  et que  $b \mid a$ .

« On pose  $a = (n^2+1)/(n^2+1)$ ,  $n$  est un entier,  $n \geq 1$ .

1) Prouvez que l'ensemble des diviseurs communs du numérateur et du dénominateur est égal à 2. [...] » (Trans98, 81 p.134)

**Trans98** : 33 exercices ; **Ter98** : 28 exercices ; **Dec98** : 18 exercices.

**T<sub>10</sub>** : résoudre dans  $\mathbf{Z}$  une équation du type  $ax = by$ .

La résolution de cette tâche fait appel à deux sous-tâches successives :

- Calculer le pgcd  $g$  de  $a$  et  $b$  pour pouvoir simplifier l'équation par  $g$  : tâche du type **T<sub>3</sub>**.

- Résoudre l'équation  $ax = by$  où  $\text{pgcd}(a,b) = 1$ .

$\tau_{10}^9$  : Dédurre par le théorème de Gauss que  $a \mid y$  (ou que  $b \mid x$ ) et que donc l'ensemble des solutions est :  $S = \{ (kb, ka) / k \in \mathbf{Z} \}$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau_9^9$  (Théorème de Gauss).

**Trans98** : 1 exercice ; **Ter98** : 2 exercices ; **Dec98** : pas d'exercice.

**T<sub>11</sub>** : Écrire la fraction  $a/b$  sous forme irréductible.

$\tau_{11}^9$  : Décomposer  $a$  et  $b$  en facteurs premiers.

$\theta$  :  $a/b$  est irréductible si  $a$  et  $b$  n'ont aucun facteur premier commun.

$\tau^{11}_2$  : Calculer le pgcd de a et b ; on est ramené à une sous-tâche du type **T<sub>3</sub>**.  
 $\theta$  : a/b est irréductible si  $\text{pgcd}(a,b) = 1$ .

On trouve aussi dans les manuels deux types de tâche proches de **T<sub>11</sub>** qui sont les suivants :

**Montrer qu'une fraction a/b est irréductible**  
**Chercher sous quelles conditions une fraction est irréductible si a et/ou b sont variables.**

Ces types de tâche font appel aux mêmes techniques que le type **T<sub>11</sub>**. Nous les classerons donc dans le même type.

**Trans98** : 6 exercices ; **Ter98** : 4 exercices ; **Dec98** : pas d'exercice.

**T<sub>12</sub>** : Soit a un nombre écrit dans une base x. L'écrire dans une base  $y^1$  x.

$\tau^{12}_1$  : Si  $x = 10$  et  $y \neq 10$  : Diviser a par y pour trouver  $a_0$   $a = yq_0 + a_0$ . Réitérer ce procédé (diviser  $q_0$  par y etc.) jusqu'à ce que l'on obtienne  $q_1 = 0$ . On a alors l'écriture de a en base y :  $a_n a_{n-1} \dots a_0$ .

$\theta$  : Voir technique  $\tau^6_1$  (division euclidienne).

$\tau^{12}_{1 \text{ bis}}$  : si  $x = 10$  et  $y \neq 10$  : Factoriser x sous la forme  $x = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$ .

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau^2_1$  (définition de l'écriture en base a d'un nombre).

$\tau^{12}_2$  : Si  $x \neq 10$  et  $y = 10$  : Calculer la valeur de  $a = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ .

$\theta$  : Voir technique précédente.

$\tau^{12}_3$  : Si  $x \neq 10$  et  $y \neq 10$  : Appliquer  $\tau^{12}_2$  puis  $\tau^{12}_1$  ou  $\tau^{12}_{1 \text{ bis}}$ .

$\theta$  : Voir les techniques  $\tau^{12}$  précédentes.

**Trans98** : 3 exercices ; **Ter98** : 5 exercices ; **Dec98** : 7 exercices.

**T<sub>13</sub>** : Effectuer des opérations dans une base de numération donnée ou reconstituer des additions ou des multiplications « à trous » en base 10.

$\tau^{13}_1$  : Mettre en œuvre des techniques de calcul identiques à celles utilisées en base 10, notamment en ce qui concerne le principe des retenues<sup>8</sup>.

$\theta$  : Principe de généralisation, justifié ou non.

$\tau^{13}_2$  : Passer en base 10 pour effectuer les opérations puis revenir dans la base initiale pour donner les résultats.

$\theta$  : Les propriétés d'un nombre sont indépendantes de sa représentation.

---

<sup>8</sup> Les deux manuels qui proposent des opérations à effectuer en une base b autre que la base 10 (Ter98 et Dec98) ne donnent aucune information sur la manière d'effectuer ces opérations. Faut-il revenir à l'écriture des nombres en base 10 pour effectuer les opérations ? A-t-on dans ces bases un système de retenues ? Doit-on effectuer les opérations en revenant à l'écriture des nombres qui est de la forme :  $x = a_n b^n + \dots + a_1 b + a_0$  ? La question de la légitimité de la technique  $\tau^{13}_1$  est entièrement laissée à la charge des élèves.

**Trans98** : 2 exercices ; **Ter98** : 1 exercice ; **Dec98** : 2 exercices.

**T<sub>14</sub>** : Trouver la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

$\tau^{14}_1$  : Appliquer l'algorithme « d'Eratosthène ».

$\theta$  : Théorème : Tout entier naturel  $n$ , autre que 0 et 1 et non premier, admet au moins un diviseur premier  $p$  tel que  $p^2 \leq n$ . **A revoir**

$\tau^{14}_2$  : Factoriser « à vue » de manière successive jusqu'à n'avoir que des facteurs premiers.

$\theta$  : Critères de divisibilité.

**Trans98** : pas d'exercice ; **Ter98** : 4 exercices ; **Dec98** : 7 exercices.

**T<sub>15</sub>** : Déterminer la liste des diviseurs d'un nombre  $n$  ou déterminer le nombre de diviseurs d'un nombre  $n$ .

$\tau^{15}_1$  : Essayer de diviser  $n$  successivement par tous les entiers naturels  $m < n^9$ .

$\theta$  : Propriété : Si  $m \mid n$ ,  $m \leq n$ .

$\tau^{15}_2$  : Décomposer  $n$  en facteurs premiers.

$\theta$  : Théorème :  $n$  est un entier non premier. Écrivons la décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers  $p_1, p_2, \dots, p_m$  :  $n = p_1^{A_1} p_2^{A_2} \dots p_m^{A_m}$ . Alors, les diviseurs de  $n$  sont tous les nombres qui s'écrivent  $p_1^{B_1} p_2^{B_2} \dots p_m^{B_m}$  avec  $0 \leq B_i \leq A_i$  où  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

**T<sub>15 bis</sub>** : Retrouver un nombre  $n$  connaissant tous ses diviseurs premiers  $a_i$  et de le nombre  $b$  de ces diviseurs<sup>10</sup>.

$\tau^{15 \text{ bis}}_1$  : Résoudre le problème de manière exhaustive en recherchant tous les triplets  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tels que  $\prod(\alpha_i + 1) = b$  où les  $\alpha_i$  sont les puissances des  $a_i$  dans la décomposition de  $n$  en facteurs premiers.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique précédente.

**Trans98** : 3 exercices ; **Ter98** : 5 exercices ; **Dec98** : 8 exercices.

**T<sub>16</sub>** : Démontrer qu'un nombre fixé  $n$  est premier ou pas.

$\tau^{16}_1$  : Si  $n$  n'est pas trop grand, consulter la table des nombres premiers du manuel.

$\theta$  : Légitimité des tables.

$\tau^{16}_2$  : Diviser  $n$  par tous les entiers naturels  $m < n^{11}$ .

<sup>9</sup> On peut améliorer cette technique en s'arrêtant au dernier entier inférieur à  $\sqrt{n}$  et en donnant tous les diviseurs par couple.

<sup>10</sup> Nous avons énoncé cette tâche d'une manière générale mais dans les manuels,  $i$  vaut toujours 2 ou 3.

<sup>11</sup> On peut améliorer cette technique en s'arrêtant au dernier entier inférieur à  $\sqrt{n}$  et en donnant tous les diviseurs par couple.

$\theta$  : Définition d'un nombre premier ; on dit qu'un nombre naturel  $p$  est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs (1 et lui-même).

$\tau_{3}^{16}$  : Diviser  $n$  par tous les entiers premiers inférieurs à  $n^{12}$ .

$\theta$  : Théorème : Si un entier  $n$  n'est pas divisible par  $k$ , pour tout  $k$  premier tel que  $2 \leq k \leq \sqrt{n}$ , alors  $n$  est premier. (Voir technologie associée à la technique  $\tau_{1}^{14}$ ).

$\tau_{4}^{16}$  : Trouver une factorisation de  $n$  du type  $n=ab$  avec  $1 < a < n$  pour montrer  $n$  n'est pas premier.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau_{2}^{16}$  (définition d'un nombre premier).

$\tau_{5}^{16}$  : Commencer par vérifier si  $n$  vérifie ou non les critères de divisibilité connus ; si non, appliquer une des techniques décrites ci-dessus.

$\theta$  : Critères de divisibilité.

Remarque : dans le cas où l'on veut savoir si  $N(n)$ , nombre variable, est premier ou pas, on utilise  $\tau_{4}^{16}$ .

**Trans98** : 2 exercices où  $n$  est variable et 2 exercices où  $n$  est fixé ; **Ter98** : 2 exercices où  $n$  est variable et 5 exercices où  $n$  est fixé ; **Dec98** : 3 exercices où  $n$  est variable et 5 exercices où  $n$  est fixé.

**T<sub>17</sub>** : Résoudre une équation produit du type  $P f_i(x_i) = b$  où  $b$  est un entier naturel donné et  $1 \leq i \leq k$ .

Voici un exemple d'exercice relatif à ce type de tâche :

« **La caisse.** Une caisse est parallélépipédique. Si on ajoute les longueurs de toutes les arêtes (en cm), les aires de toutes les surfaces (en  $\text{cm}^2$ ), et son volume (en  $\text{cm}^3$ ), on trouve 33 033. Quel est le volume de la caisse ? Bonus : l'identité  $(a + 2)(b + 2)(c + 2) = \dots$  » (Ter98, 61 p.28)

$\tau_{1}^{17}$  : Si  $\prod f_i(x_i)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$ , résoudre l'équation avec les techniques usuelles pour les équations polynomiales (déterminant etc.).

$\theta$  : Connaissances algébriques.

Si ce n'est pas le cas, on est ramené à la sous-tâche suivante : Décomposer  $b$  en facteurs premiers (**T<sub>14</sub>**) avant d'appliquer la technique  $\tau_{2}^{17}$ .

$\tau_{2}^{17}$  : Chercher les valeurs possibles pour les  $f_i(x_i)$  une fois que  $b$  est décomposé en facteurs premiers.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique  $\tau_{2}^{15}$ .

Un type proche de ce type de tâche est présent dans les manuels sous la forme suivante :

**T<sub>17 bis</sub>** : Résoudre dans  $\mathbb{N}$  une équation du type  $x^2 - y^2 = a$ , où  $a$  est un nombre donné.

<sup>12</sup> Idem.

$\tau^{17 \text{ bis}}_1$  : Factoriser  $x^2 - y^2$  en  $(x - y)(x + y)$ . Décomposer  $a$  en facteurs premiers. En déduire les valeurs possibles de  $x + y$  et  $x - y$ . Résoudre les systèmes linéaires  $2 \times 2$  correspondants pour conclure.

$\theta$  : Voir technologie associée à la technique précédente.

**Trans98** : 7 exercices ; **Ter98** : 4 exercices ; **Dec98** : 2 exercices.

Nous avons aussi relevé un autre type de tâche dans les manuels mais celui-ci étant marginal en terme de nombre d'exercices concernés, nous avons décidé de ne pas inclure ce type de tâche à l'analyse que nous avons faite ci-dessus. Il s'agit de la tâche suivante : **Trouver l'ensemble des  $n$  tel que  $M(n)$  divise  $N(n)$ .**

$\tau$  : Trouver entre  $N(n)$  et  $M(n)$  une relation du type  $N(n) = kM(n) + d$ , où  $d \in \mathbb{N}$ , et rechercher pour quelle(s) valeur(s) de  $n$   $M(n)$  est égal à un diviseur de  $d$ .

$\theta$  : Propriété : Pour tout entier  $a$ , si  $m$  et  $m'$  sont deux multiples de  $a$ , alors: pour tous les entiers  $\alpha$  et  $\beta$ , la combinaison linéaire  $\alpha m + \beta m'$  est un multiple de  $a$ .

**Trans98** : 1 exercice ; **Ter98** : pas d'exercice ; **Dec98** : 3 exercices.

## II. ANALYSE DES RESULTATS

### II.1 L'aspect algorithmique

Les techniques algorithmiques sont en fait relativement peu nombreuses. Nous retrouvons essentiellement les algorithmes vus dans le cours, à savoir l'algorithme d'Euclide et le test de primalité.

Trois tâches n'offrent qu'une technique algorithmique pour être résolues :

- **T<sub>5</sub>** : Résoudre une équation du type  $ax + by = d$ .
- **T<sub>12</sub>** : Passer de l'écriture en base dix d'un nombre en une écriture dans une base  $y \neq 10$ .
- **T<sub>14</sub>** : Trouver la décomposition en facteurs premiers d'un nombre.

Dans le cas où un type de tâche peut se résoudre de façon algorithmique, les manuels insistent parfois pour que celui-ci soit résolu autrement. Prenons pour exemple les deux exercices suivants :

« Pour chacun des entiers naturels  $a$  et  $b$  donnés, trouvez l'ensemble des diviseurs  $D(a)$  et  $D(b)$ . Déduisez-en le pgcd de  $a$  et  $b$ .

$a = 48$  et  $b = 32$  ;  $a = 120$  et  $b = 168$  ;  $a = 30$  et  $b = 96$ . » (Trans98, 36 p.132)

« Expliquez pourquoi dans chacun des cas suivants, on peut donner très rapidement le pgcd de  $a$  et  $b$ .

$a = 5 \times 12$  et  $b = 11 \times 12$  ;  $a = 3 \times 15$  et  $b = 8 \times 15$  ;  $a = 22 \times 26$  et  $b = 15 \times 26$ . » (Trans98, 39 p.132)

Comme nous pouvons le constater, les techniques algorithmiques ne sont pas systématiquement privilégiées. Nous pouvons de plus estimer que seulement 1/8 environ des

exercices proposés par les manuels relèvent d'une tâche qui nécessite obligatoirement la mise en œuvre d'un algorithme lors de sa résolution.

Remarquons tout de même que deux exercices proposent de résoudre une tâche en appliquant un algorithme non vu en cours ou en T.P. Il s'agit de deux exercices de Ter98 :

« **Un autre algorithme.** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls. Montrer que les diviseurs communs de  $a$  et  $b$  sont les diviseurs communs de  $b$  et  $a - b$ . En déduire une méthode de calcul du pgcd de 1575 et 210 par différences successives. » (Ter98, 15 p.49)

« **Pgcd fixé.** Déterminer tous les entiers  $n$  tels que le pgcd de  $2n + 8$  et  $3n + 15$  soit égal à 6. Utiliser le résultat de l'exercice 15. » (Ter98, 37 p.51)

Dans l'exercice 15, nous avons une première approche de la démarche algorithmique. Cependant, on ne met en œuvre ce «nouvel» algorithme que numériquement sur un seul exemple en appliquant de nouveau le résultat de la question 1 à chaque nouvelle étape. Il n'est pas demandé de travailler sur ce qui caractérise un algorithme : l'initialisation, la règle d'itération et surtout le test d'arrêt.

Nous constatons que les techniques algorithmiques font vivre la niche «algorithmique» comme étant un outil pour résoudre des tâches particulières.

## II.2 Tâches les plus courantes et profil des manuels

Nous allons récapituler dans un tableau les résultats obtenus par l'analyse praxéologique des exercices des trois manuels.

|              | T1        | T2        | T3        | T4        | T5        | T6        |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Trans98      | 3         | 7         | 19        | 8         | 1         | 16        |
| Ter98        | 12        | 9         | 18        | 7         | 11        | 4         |
| Dec98        | 6         | 11        | 19        | 4         | 23        | 15        |
| <b>Total</b> | <b>21</b> | <b>27</b> | <b>56</b> | <b>19</b> | <b>35</b> | <b>35</b> |

|              | T7        | T8        | T9        | T10      | T11       | T12       |
|--------------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| Trans98      | 4         | 12        | 33        | 1        | 6         | 3         |
| Ter98        | 17        | 1         | 28        | 2        | 4         | 5         |
| Dec98        | 12        | 21        | 18        | 0        | 0         | 7         |
| <b>Total</b> | <b>33</b> | <b>34</b> | <b>79</b> | <b>3</b> | <b>10</b> | <b>15</b> |

|              | <b>T13</b> | <b>T14</b> | <b>T15</b> | <b>T16</b> | <b>T17</b> |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Trans98      | 2          | 0          | 3          | 4          | 7          |
| Ter98        | 1          | 4          | 5          | 7          | 4          |
| Dec98        | 2          | 7          | 8          | 8          | 2          |
| <b>Total</b> | <b>5</b>   | <b>11</b>  | <b>16</b>  | <b>19</b>  | <b>13</b>  |

Une première lecture de ce tableau nous montre que la tâche **T<sub>9</sub>** (Montrer qu'un nombre  $N(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , est divisible par un nombre  $m$ ) est de loin la tâche la plus souvent demandée dans les manuels suivie par la tâche **T<sub>3</sub>** (Trouver le pgcd de deux nombres  $a$  et  $b$ ).

Viennent ensuite les tâches :

- **T<sub>5</sub>** : Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  une équation du type  $ax + by = c$ .
- **T<sub>6</sub>** : Soit l'ensemble {dividende, diviseur, quotient, reste}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble quand on connaît les deux autres.
- **T<sub>7</sub>** : Trouver le reste de la division d'un nombre  $a$  par un nombre  $b$ .
- **T<sub>8</sub>** : Trouver deux nombres  $x$  et  $y$  connaissant des relations entre leur pgcd et/ou leur ppcm et/ou  $x$  et  $y$ .

En regroupant certaines colonnes de ce tableau par « thèmes », nous obtenons des informations intéressantes sur les notions les plus souvent abordées dans les exercices d'arithmétique présentés dans les manuels. Voici les principaux « thèmes » :

- « La recherche d'un pgcd » : en regroupant les tâches **T<sub>3</sub>** et **T<sub>4</sub>**, cela représente 75 exercices. (Remarquons que si l'on inclut à ce « thème » la tâche **T<sub>8</sub>** (trouver deux nombres  $x$  et  $y$  connaissant des relations entre leur pgcd et/ou leur ppcm et/ou  $x$  et  $y$ ), on passe de 75 exercices à 109.).
- « la divisibilité » : la tâche **T<sub>9</sub>** est représentée dans 79 exercices.
- « La division euclidienne » : les tâches **T<sub>6</sub>** et **T<sub>7</sub>** se rapportent à ce thème. Il compte 68 exercices.
- « Les nombres premiers » : on trouve 59 exercices en réunissant les tâches **T<sub>14</sub>**, **T<sub>15</sub>**, **T<sub>16</sub>** et **T<sub>17</sub>**.

Nous nous apercevons donc que les principales notions d'arithmétique qui sont travaillées dans les exercices sont les notions fondamentales suivantes : la divisibilité, la division euclidienne, le pgcd de deux nombres et, de manière un peu moins importante, les nombres premiers. Ceci semble normal dans la mesure où la classe de terminale spécialité mathématique est la première classe dans laquelle les élèves font de l'arithmétique.

Par ailleurs, mis à part les exercices relatifs à la tâche **T<sub>5</sub>** et certains de ceux relatifs à la tâche **T<sub>3</sub>**, les résultats de ce tableau confirment que la nouvelle fonction de l'arithmétique (son caractère algorithmique) n'occupe pas une place prépondérante dans l'ensemble des exercices proposés. En effet, les notions de divisibilité et de division euclidienne sont les notions sur lesquelles portent le plus grand nombre d'exercices.

Cependant, cette classification des tâches les plus courantes est à pondérer par le phénomène suivant : ce tableau récapitulatif nous permet de relever certaines approches différentes en ce qui concerne le choix des exercices effectué par chacun des trois manuels. En effet, rares sont les tâches qui regroupent un nombre équivalent d'exercices dans chaque manuel.

Cette vision globale doit donc être rectifiée par une analyse des tâches les plus couramment demandées, manuel par manuel.

### **Trans98 :**

Quasi absence de la tâche **T<sub>5</sub>** (équation au  $+ bv = c$ ). L'algorithme d'Euclide est donc peu exploité dans ce manuel ; il n'est mis en œuvre que dans des recherches de pgcd.

Très peu d'exercices se rapportant à tâche **T<sub>6</sub>** comparativement aux deux autres manuels. La notion de congruence (qui devrait être abordée par les opérations sur les restes) est donc peu présente dans ce manuel.

Aucun exercice dans la tâche **T<sub>14</sub>** (Trouver la décomposition d'un nombre en facteurs premiers). Ceci appuie notre hypothèse<sup>13</sup> selon laquelle la décomposition en facteurs premiers n'est pas mise en avant dans ce manuel et montre que les exercices proposés dans Trans98 ne demandent pas, de façon majoritaire, une résolution algorithmique.

### **Ter98 :**

Relativement beaucoup d'exercices proposant une tâche de type **T<sub>1</sub>** par rapport aux deux autres manuels. L'aspect recherche et manipulation sur les entiers est ici mis en avant.

Peu d'exercices relatifs à la tâche **T<sub>6</sub>**. Les deux autres manuels ont plus développé la partie du programme qui stipule «il s'agit d'exploiter l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité définissant une division euclidienne » en proposant quatre fois plus d'exercices dans cette tâche.

Un seul exercice dans la tâche **T<sub>8</sub>** (trouver deux nombres  $x$  et  $y$  connaissant des relations entre leur pgcd et/ou leur ppcm et/ou  $x$  et  $y$ ) alors que Dec98 en propose 21 et Trans98 12. Cette tâche est l'une de celles qui permettent de mettre en œuvre des techniques de résolution de problèmes de type exhaustif. Cette façon de résoudre un problème est de fait peu présente dans Ter98.

### **Dec98 :**

Le raisonnement exhaustif est quand-à-lui beaucoup sollicité dans ce manuel. En effet, Dec98 est celui qui propose le plus d'exercices dans la tâche **T<sub>8</sub>**.

La technicité à acquérir sur certains types de problèmes est aussi privilégié : 23 exercices demandant de résoudre une équation de type  $au+bv=c$  sont posés (tâche **T<sub>5</sub>**). Or la résolution nécessite la mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide. Ceci nous permet de d'avancer que Dec98 est le manuel qui «intègre » le plus l'aspect algorithmique de l'arithmétique comme outil de résolution des exercices qu'il propose. Par ailleurs, comme nous l'avons souligné précédemment, c'est le seul manuel qui comporte une rubrique « Avec l'ordinateur » et que les exercices de cette rubrique font tous appel à la programmation des principaux algorithmes du cours d'arithmétique.

Cependant, un élément de la comparaison des trois manuels nous échappe dans cette analyse praxéologique. En effet, Trans98, contrairement à Dec98 et Ter98, ne pose aucun problème de calendrier et de cryptographie.

---

<sup>13</sup> Hypothèse faite dans l'analyse de la partie cours des manuels.

Cette différence n'apparaît pas dans notre analyse du fait que ces deux grands types de tâches se ramènent à des sous-tâches qui font systématiquement l'objet de questions intermédiaires dans l'énoncé de tels problèmes. Les exercices de cryptographie ou de calendrier sont donc classés dans ces sous-tâches. Ainsi par exemple, résoudre un exercice de cryptographie demande toujours de résoudre une question se rapportant à la tâche  $T_7$ <sup>14</sup> et une autre à la tâche  $T_5$ <sup>15</sup> dans le cas de codages par des fonctions affines, ce qui est généralement le cas dans les manuels. Or comme le souligne le programme :

« L'introduction de quelques exemples de problèmes de calendriers, de méthodes de codage ou de cryptage permet de familiariser les élèves avec les diverses notions du programme, à l'occasion d'applications concrètes, et non d'exiger d'eux la connaissance d'une liste d'algorithmes. »

Ainsi, ces exercices de calendriers et de cryptographie permettent d'utiliser les algorithmes connus en arithmétique dans des applications concrètes. Cette dimension est intéressante pour comprendre à quoi sert l'arithmétique aujourd'hui, entre autre notamment pour les problèmes de cryptage d'informations en informatique. Trans98 n'a cependant pas choisi de développer ces applications de l'arithmétique dans son choix d'exercices, même si ce choix pourrait par ailleurs être un moyen de plus d'intégrer l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans les exercices.

### II.3 Les techniques les plus fréquemment utilisées dans les exercices.

Lorsque nous avons résolu les exercices proposés par les manuels, six techniques nous ont semblé se démarquer en terme d'importance d'usage parmi la liste de techniques que nous avons pu établir par l'analyse praxéologique des exercices :

1. Les disjonctions de cas (voir particulièrement la tâche  $T_9$ ).
2. Les techniques qui sont une application du théorème suivant :  
« Soit  $a$ ,  $b$  et  $d$  trois entiers naturels non nuls.  $\text{Pgcd}(a,b) = d$  si, et seulement si,  $a/d$  et  $b/d$  sont premiers entre eux. »
3. Les techniques nécessitant la recherche de combinaisons linéaires avec des nombres variables.  
« Démontrer que si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux [...] » (Trans98, 53 p.133)  
Solution : Si  $d$  divise  $a + b$  et  $ab$ , il divise aussi  $a^2 + ab$  donc  $a^2$ . On montre de la même façon que  $d$  divise  $b^2$ , or du fait que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux,  $a^2$  et  $b^2$  sont premiers entre eux donc  $d = 1$ .
4. Les techniques justifiées par la technologie « Théorème de Gauss ». (Voir tâche  $T_9$  notamment).
5. La technique  $\tau_1^6$  qui consiste à écrire l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité de la division euclidienne.
6. Les techniques qui consistent à appliquer l'algorithme d'Euclide et celles qui consistent à appliquer « le crible d'Eratosthène ».

Certaines techniques, comme celles citées dans 5) et 6), étaient prévisibles à la lecture du programme. Celui-ci précise en effet que :

« Il s'agit d'exploiter l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité définissant une division euclidienne. »

Et qu'il est nécessaire de :

« Donner aux élèves un minimum cohérent de notions élémentaires permettant l'élaboration d'algorithmes simples et fondamentaux [...]. »

<sup>14</sup> Si  $f$  est la fonction de codage et  $x$  la valeur associée à la lettre à coder, calculer le reste de  $f(x)$  modulo 26.

<sup>15</sup> Résoudre une équation du type  $ax + by = c$ .

Par contre, les trois premières techniques présentées ci-dessus n'étaient apparues ni lors de l'étude des programmes ni lors de celle de la partie cours des manuels.

## II.4 Les technologies

Nous avons, dans cette analyse praxéologique, relevé un nombre important de technologies différentes. Rares sont les technologies justifiant plus de trois ou quatre techniques.

Nous pouvons tout de même citer les plus courantes : les technologies justifiant les techniques relatives aux problèmes de base de numération, la définition du pgcd, les propriétés des opérations sur les restes ou sur les congruences, le théorème de décomposition en facteurs premiers.

Il est intéressant de regarder si l'ensemble de ces technologies font partie des résultats énoncés dans la partie cours des manuels et, inversement, regarder si certains théorèmes du cours n'entrent pas dans l'ensemble des technologies que nous avons énoncé.

Seul un théorème, présent dans les trois manuels, ne fait pas partie de l'ensemble des technologies énoncées : le théorème d'infinité des nombres premiers. Par contre, plusieurs technologies ne se retrouvent pas dans les résultats de la partie cours des manuels.

C'est le cas notamment des technologies suivantes : « critère de divisibilité », les technologies se rapportant à des méthodes de raisonnement (par essai-erreur, connaissances sur le raisonnement par condition nécessaire et condition suffisante, par récurrence), le principe de généralisation et des technologies qui n'appartiennent pas au domaine arithmétique (cf. connaissances algébriques etc.).

En règle générale donc, nous trouvons un grand nombre de technologies, ce qui montre que celles-ci sont dans l'ensemble spécifique à la technique qu'elles justifient.

## CONCLUSION

Comme nous avons pu le montrer au cours de cette analyse, les exercices d'arithmétique proposés par les manuels portent essentiellement sur trois gros blocs qui sont des notions fondamentales d'arithmétique à savoir : la division euclidienne, la divisibilité, le pgcd. Ce n'est qu'après qu'apparaît, en terme de nombre d'exercices, le bloc sur les nombres premiers. Nous retrouvons donc bien l'orientation développée dans le programme qui est de ne pas utiliser de manière systématique la décomposition en facteurs premiers.

Nous avons cependant observé d'importantes différences dans les choix d'exercices faits par chaque manuel. Tout comme la partie cours ou comme la façon d'intégrer les moyens informatiques en arithmétique, les exercices offrent une grande variabilité pour les manuels. Nous avons aussi vu dans notre analyse praxéologique que cela modifie considérablement la « nature » de l'arithmétique présentée dans ces trois manuels.

Néanmoins, aucun des trois manuels ne profite de cette variabilité possible pour s'inscrire dans l'orientation du programme : l'aspect algorithmique de l'arithmétique.

–Nous pouvons avancer une hypothèse pour expliquer cette constatation. Comme nous l'avions remarqué dans la partie «arithmétique et informatique », la conception d'un manuel ne peut se faire sans référence aux derniers manuels ayant présenté les mêmes notions à un même niveau d'étude. Il semble en effet impossible de créer près de soixante-dix exercices en partant de rien pour chaque chapitre d'arithmétique. Or, les derniers manuels s'inscrivaient dans un programme axé sur l'aspect structurel arithmétique. Ceci peut donc expliquer en partie pourquoi peu d'exercices nécessitent d'être résolus de façon algorithmique dans les manuels actuels<sup>16</sup>.

La niche «algorithmique » de l'arithmétique est en partie prise en charge dans les exercices, sa viabilité n'est pas assurée. En effet, un nombre relativement peu important d'exercices comparé au nombre total d'exercices analysés se résolvent de façon algorithmique. De plus, cette niche n'est pas entièrement exploitée : les exercices qui se résolvent de façon algorithmique utilisent dans la quasi totalité des cas les algorithmes vus en cours et souvent, d'autres techniques sont mises en œuvre pour les résoudre. De plus, ces algorithmes sont uniquement employés comme technique pour résoudre un exercice et ne sont jamais des objets d'étude dans les exercices.

Nous pouvons faire les suppositions suivantes sur les difficultés éventuelles des élèves face aux exercices d'arithmétique :

- Les élèves peuvent bloquer devant l'exercice ne sachant pas quelle technique choisir. Notre analyse praxéologique a en effet montré que peu de tâches faisaient appel à une seule technique. Nous pensons que ce choix important de techniques qui s'offre aux élèves pour résoudre un exercice peut être source de difficulté.
- D'autre part, nous estimons<sup>17</sup> aussi que les difficultés en arithmétique peuvent parfois être plus liées aux types de raisonnement à mettre en œuvre et aux choix du type de raisonnement à utiliser qu'aux contenus d'arithmétique en eux-mêmes.

---

<sup>16</sup> Par ailleurs, une comparaison rapide des trois manuels étudiés au manuel de 71 que nous avons pris comme référence a montré que bon nombre d'exercices des années 70 (excepté ceux portant explicitement sur  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ) se trouvaient presque mot pour mot dans les manuels d'aujourd'hui. Remarquons aussi que cette relative stabilité des exercices peut faire vivre la niche « culturelle » de l'arithmétique. En effet, ces exercices portent généralement sur des questions qui ont longtemps eu de l'importance en arithmétique.

<sup>17</sup> Cette hypothèse s'appuie sur le travail d'Egret : « Le cours d'arithmétique en Terminale S spécialité nécessite relativement peu de pré-requis. Il permet d'approfondir ou de travailler différentes sortes de raisonnements : raisonnement exhaustif, raisonnement par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par condition nécessaire, par condition suffisante, par condition nécessaire et suffisante. » (Egret 1999 p.95)

# ANNEXES B3

**Analyse écologique du savoir apprêché par les  
enseignants**





- Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? O / N  
Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

Programmes faibles avec élèves = Raisonner si un nombre est premier, donner pour un nb premier,  
Trouver pgcd (a,b) et sa div solution pour a et b de  $ax + by = \text{pgcd}(a,b)$

Préparation de recherche = faire la liste des diviseurs d'un entier.

Groupements faibles à trois puis qu'il n'y ait pas d'inégalité entre élèves (Tanche pgcd sur TI 83 par exemple).  
Explication de quelques structures logiques mais pas d'origine de travaux de programmation en DS.  
(If - Then - Else, Boucle...) (Trop d'inégalité entre calculatrices).

- Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?

assez important ?

important ?

indispensable ?

2 types d'évaluation selon les DS = avec ou sans  $\rightarrow$  obligation de calculer "à la main"  
 $\hookrightarrow$  calculatrice indispensable

- Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ?  O  N

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) :

Obligation de contrôler son résultat avant de présenter l'exercice.

- Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? O /  N

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

Absence de ces moyens au lycée -- La question ne s'est donc pas posée

- Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ? (Merci de répondre sur la feuille suivante).

On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$11\,475 = 9\,750 + 1\,725$$

$$1\,125 = 600 + 525$$

$$9\,750 = 1\,725 \times 5 + 1\,125$$

$$600 = 525 + 75$$

$$1\,725 = 1\,125 + 600$$

$$525 = 75 \times 7$$

L'algorithme d'Euclide, si on ne donne pas sa calculatrice et que les premiers de la décomposition des 2 nombres sont grands peut se révéler plus performant.

En DS, nous avons donné Piquet (792, 240) et nous avons exigé les deux méthodes de calcul de Piquet.

Dans les années de Bac à "la mode", les élèves ont souvent besoin de l'algorithme d'Euclide pour avoir une solution particulière de  $ax + by = \text{Pgcd}(a, b)$ .  
 Le calcul sur les décompositions en facteurs premiers a son intérêt au début d'année pour s'approprier la liste des "petits nombres premiers" mais ensuite, les élèves utilisent le programme de la calculatrice.  
 Il m'est plus sûr le fait que les 2 méthodes de calcul de Piquet doivent donner le même résultat.

D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ? O (N) en général  
 Si oui, laquelle et pourquoi ? oui presque toujours dans l'année

Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ?

Plusieurs exemples avec 2 méthodes pour le même couple (a, b)  
 Lorsque  $a = qb + r$  et  $r$  très petit, c'est intéressant.

• Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p ; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .  
 (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

Plus un exercice de programmation nécessite une liste de nombres premiers qu'un exercice d'arithmétique. Dommage à programmer simplement si on ne dispose pas d'une liste de nombres premiers ou sur les calculatrices "bas de gamme".

Je trouverais intéressant de parler de la conjecture pour montrer qu'il existe des résultats d'apparence simple difficile à démontrer... mais l'aspect programmation de ce résultat ne me tente guère.



RAVEL Laetitia

114, chemin de ribotière  
38 330 Saint-Ismier  
Laetitia.Ravel@imag.fr

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité.

Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire.

En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille).

Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom : ~~XXXXXXXXXX~~

Depuis quand enseignez-vous ? : Sept. 79

Nom de l'établissement : ~~XXXXXXXXXX~~

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : Bordas "Fractale"

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

- mes propres connaissances sur la partie
- le manuel ci-dessus
- Les "Bibles" de mon temps
 

|   |                              |
|---|------------------------------|
| { | Nathan Coll. Guysans - Peruy |
|   | Delagrave Coll. J. Vissis    |
|   | et.                          |

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  OUI

Si oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ?

sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ...)?

sur la propriété d'Archimède ?

autre (précisez) :

par la partie 3 sub. des :  $\exists r$  tel  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r < b$   
 la même. nombre d  $\exists r = E(a/b)$  et  $r = a - bq$ .

$$p = E(a/b) \text{ et } r = a - bq \rightarrow \text{unités}$$

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

Avant d'avoir introduit les nombres premiers.

Après.

3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  OUI

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

$E = \{ am + bn / (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne.

l'algorithme d'Euclide.

autre (précisez) :

4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ? O / (N)

- Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :  par récurrence.  
 la méthode de "descente".  
 par l'absurde.  
 autre (précisez) :

*(on a juste expliqué oralement pour quoi on avait cette décomposition)*

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? O / N  
 Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

- pour obtenir quel  $n$  dans le div. <sup>non</sup> eucl.
  - pour obtenir la div. en f. premiers
  - pour obtenir les coeff.  $u$  et  $v$  de Bezout (à la Hjel, et le HCF en prime)
- (J'ai fait ces programmes et je les ai directement montrés en classe avec quelques (rapides) explications orales)*

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ? (la théorie)

- assez important ? *(pratiquement !) car si est bon de pouvoir s'affranchir de certains calculs "fastidieux" fast/oi, et les être sont tout autre de pouvoir facilement contrôler les résultats (coeff. de Bezout par ex.)*
- important ?
- indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? O / N

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) : *une condition nécessaire étant trouvée, la recherche de la condition suffisante peut nécessiter beaucoup de div. euclidiennes par exemple, la machine (avec la propr. "q,r") est alors essentielle.*

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? O / (N)

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

- F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?  
On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$\begin{aligned} 11\,475 &= 9\,750 + 1\,725 \\ 9\,750 &= 1\,725 \times 5 + 1\,125 \\ 1\,725 &= 1\,125 + 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\,125 &= 600 + 525 \\ 600 &= 525 + 75 \\ 525 &= 75 \times 7 \end{aligned}$$

*Dans ce cas, à la main, la 1<sup>re</sup> est probablement la plus rapide ---*

*Pour la machine c'est la 2<sup>de</sup>!*

*En TS on nous suggère plutôt d'utiliser l'alg. d'E.*

2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ?  O /  N  
Si oui, laquelle et pourquoi ?

*↳ Seul cas particulier aux immédiats\*, algorithme d'Euclide (et contrôler avec la calculatrice!)  
• pour des raisons d'efficacité : le temps de calcul.*

*\* dans d'éc. se f. pr. les triangles, on le calcul de pp. (la, bi l'alg. est par ex.*

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? Si oui, lesquels ?

*Oui bien sûr - La règle étant le minimum de calculs... si possible  
D'autre part la méthode est plus simple que l'alg. d'Euclide :  
- elle ne fait pas intervenir les nombres premiers  
- c'est la plus économique sur le plan du temps de calcul en général.*

G) Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p ; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .

(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

non.

c'est plutôt un exercice de programmation concernant une question d'arithmétique

→ 1) La programmation n'est pas une capacité exigible en TS

2) on doit faire à priori l'exercice par soi-même (sans l'aide de l'ordinateur) une recherche typos si possible ... Il n'est pas très intéressant de mes yeux de chercher à l'ordinateur un couple (dont l'existence n'est pas assurée de surcroît).

RAVEL Laetitia

114, chemin de ribotière  
38 330 Saint-Ismier  
Laetitia.Ravel@imag.fr

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité.

Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire.

En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille).

Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom : ~~XXXXXXXXXX~~

Depuis quand enseignez-vous ? : 1975

Nom de l'établissement : ~~XXXXXXXXXX~~

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : Transmath - Nathan

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

- |   |   |
|---|---|
| - Manuels d'autres collections              | - Différents articles de Tangente                                   |
| - Hors-série de Tangente sur l'arithmétique | - Brochure de l'IREN de Marseille                                   |
| - Livre de J. Llorca chez Ellipse           | - Brochure de l'IREN de Montpellier<br>(pour enseignants)           |
| - Collection de M. Guinot chez Alia         | - Brochure de l'IREN de Montpellier<br>(L'arithmétique - le retour) |

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  /

Si oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ?

sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ...) ?

sur la propriété d'Archimède ?

autre (précisez) :

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

Avant d'avoir introduit les nombres premiers.

Après.

3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  /

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

$E = \{ am + bn / (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne.

l'algorithme d'Euclide.

autre (précisez) :

4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ?  O /  N

Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :  par récurrence.

la méthode de "descente".

par l'absurde.

autre (précisez) :

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ?  O /  N  
Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

*Je leur ai fourni des programmes pour :*

- la décomposition en facteurs premiers,
- la division euclidienne,
- l'algorithme d'Euclide.

*Ils ne sont pas obligés de les utiliser.*

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?

assez important ?

important ?

indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ?  O /  N

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) :

*Conjectures - Recherche de contre-exemples*

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ?  O /  N

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

*T.I. 92 + tablette de rétroprojection (les élèves ne possèdent pas tous des calculatrices permettant, sans programmation préalable, la décomposition en facteurs premiers, par exemple)*

- F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?  
On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$\begin{aligned} 11\,475 &= 9\,750 + 1\,725 \\ 9\,750 &= 1\,725 \times 5 + 1\,125 \\ 1\,725 &= 1\,125 + 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\,125 &= 600 + 525 \\ 600 &= 525 + 75 \\ 525 &= 75 \times 7 \end{aligned}$$

Aucune ne me paraît sensiblement meilleure que l'autre sans outil de calcul permettant, de manière simplifiée et exclusive, la mise en œuvre de l'une d'elles.

2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ? O/N  
Si oui, laquelle et pourquoi ?

Sans donner de conseil, j'ai employé plus souvent, à l'économie de calcul a priori égales, l'algorithme d'Euclide car il semble être privilégié par l'esprit du programme.

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? Si oui, lesquels ?

Non (me' ayant pas pu les mettre en œuvre sur des grands nombres, avec des ordinateurs, les problèmes de temps de calcul de coût de calcul qui se posent ne me paraissent pas suffisamment parlants pour les élèves)

G) Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple

$(p ; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .

(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

Je considère que l'exercice proposé ne relève pas de l'arithmétique (contrairement à la conjecture sous-jacente) car sa résolution ne me semble pas mettre en œuvre des propriétés ~~arithmétiques~~ des structures algébriques de  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  (en dehors, évidemment, du caractère fini des parties bornées qui assure la terminaison des algorithmes)

J'estime qu'il s'agit plus d'un exercice d'algorithmique.

Je ne le proposerais qu'à des élèves volontaires "branchés informatique".

Bon courage.

Bien cordialement



RAVEL Laetitia

114, chemin de ribotière  
38 330 Saint-Ismier  
Laetitia.Ravel@imag.fr

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité.

Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire.

En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille).

Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom :

Depuis quand enseignez-vous ? : 1970

Nom de l'établissement :

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : Tenacien

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

Mes camarades intervenants, les cours d'arithmétique de TC (Guysson Rivy de 1971) et les livres actuels.

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  OUI

Si oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ?

sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ...)?

sur la propriété d'Archimède ? ou son corollaire avec  $p = E\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b$  etc. ---

autre (précisez) :

J'avais donc parlé avant de la partie "partie entière" somme de  $\mathbb{R}$  au lieu

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

Avant d'avoir introduit les nombres premiers.

Après.

3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  OUI

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

$E = \{ am + bn \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne.

l'algorithme d'Euclide.

autre (précisez) :

4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ?  O /  N

Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :  par récurrence.

la méthode de "descente". (on résume même *même finie*)

par l'absurde.

autre (précisez) :

N.B. par convention tacite, je fais toutes les démonstrations que les élèves peuvent suivre.

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ?  O /  N

Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ? Non

*Je leur ai fourni les programmes*

- recherche de nombres premiers + décomposition en produit de facteurs premiers
- coefficients de Bezout (en relation avec la résolution de  $ax + by = c$ )
- pgcd

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?

assez important ?

important ?

indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ?  O /  N (en arithmétique)

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) :

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ?  O /  N

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

*programmation en Pascal compilé et/ou à base compilé de même, programmes que ceux pour la calculatrice  
→ fournis aux élèves qui les voulaient !*

- F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?  
On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$11\,475 = 9\,750 + 1\,725$$

$$9\,750 = 1\,725 \times 5 + 1\,125$$

$$1\,725 = 1\,125 + 600$$

$$1\,125 = 600 + 525$$

$$600 = 525 + 75$$

$$525 = 75 \times 7$$

*Par de réponse ; la meilleure méthode est celle que l'élève pratique avec le plus d'aisance. Le hasard des données peut mettre en faveur l'une ou l'autre des méthodes.*

*L'élève doit connaître les deux méthodes ; elles sont au programme et une méthode peut toujours être imposée au bac.*

2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ?  O  N  
Si oui, laquelle et pourquoi ? *Voir plus haut.*

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? Si oui, lesquels ?

*Mes commentaires, évidemment ceux faits dans le F) 1. Certains élèves attendaient un avis net et précis, qu'ils n'ont pas obtenu.*

G) Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .

(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ? Oui (1)

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ? Non (2)

(1) L'arithmétique est, que je sache, de l'algèbre dans  $\mathbb{Z}$ . Il s'agit ici de résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation  $n = 2p + q$  où  $n$  est un paramètre et  $(p, q)$  le couple inconnu.  $\Rightarrow$  c'est de l'arithmétique !

(2) L'objectif est de préparer les élèves au bac. Cet exercice relevant dans le cadre d'un rallye ou d'olympiade n'est absolument pas dans l'esprit d'un exercice à 5 points du bac ; il est d'une part trop court, et d'autre part les questions manquent de détails et ne permettent pas une avancée graduelle dans la recherche d'un problème. L'élève moyen ne se distinguera pas du mauvais élève et seuls les bons, à condition d'être inspirés, pourront trouver quelque chose.

Ceci-dit l'algorithmique n'est pas encore entrée dans nos classes de lyc. L'objectif n'est pas d'en faire actuellement, à l'exception du crible d'Ératosthène et d'Euclide.

PS: je suis aussi AIPRT du lycée, c'est-à-dire responsable de l'informatique donc capable de programmer dans les langages usuels (Basic, Turbo Pascal, DOS Algol (là j'ai oublié!))

ces réflexions: Sans d'une solide formation sur les anneaux, j'ai évité l'enseignement en 1970 en TC avec de l'arithmétique à l'unique. La formation constructive répétitive et euclidienne, j'ai un souvenir certain pour l'arithmétique. Par ailleurs la spécificité de cette partie des maths, comme les probabilités, fait que l'élève peut se révéler (ou s'effondrer) dans ces domaines. En arithmétique la maîtrise de mathématiques le raisonnement me paraît très intéressant pour la formation scientifique des élèves.

Par ailleurs, la suppression totale de l'arithmétique au collège a pu handicaper des générations de jeunes dans la pratique du calcul factoriel (PPM pour les réductions au même dénominateur et PGCD pour les fractions irréductibles). Rétablir ces éléments me paraît indispensable... mais je suis de la vieille école

RAVEL Laetitia

114, chemin de ribotière  
38 330 Saint-Ismier  
Laetitia.Ravel@imag.fr

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité.

Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire.

En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille).

Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom : ~~XXXXXXXXXX~~

Depuis quand enseignez-vous ? : 1966

Nom de l'établissement : LYCÉE ~~XXXXXXXXXX~~

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : Hachette collection Terruchon

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

- "L'enseignement de l'Arithmétique en Terminale S" par Bilgout-Moncorge - Nouvelles Éditions CROD d'Avignon
- Publications IREM - MARSAILLE
- Problèmes de l'ARITHMÉTIQUE (71)
- Livres d'arithmétique anciens et récents de l'enseignement secondaire

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  OUI / N

Si oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ?

sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ...) ?

sur la propriété d'Archimède ?

autre (précisez) :

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

Avant d'avoir introduit les nombres premiers.

Après.

3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  OUI / N

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

$E = \{ am + bn / (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne.

l'algorithme d'Euclide.

autre (précisez) :

4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ?  O /  N

Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :  par récurrence.

la méthode de "descente".

par l'absurde.

autre (précisez) :

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ?  O /  N  
Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

- recherche de la "primarité" d'un nombre
- recherche du pgcd à l'aide de l'algorithme d'Euclide
- recherche de solutions de l'équation  $ax+by=1$

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?

assez important ?

important ?

indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ?  O /  N

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) :

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ?  O /  N

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

Non, non ce n'est pas une question d'âge !  
j'ai prévu de le faire l'année prochaine !

- F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?  
On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$\begin{array}{l} 11\,475 = 9\,750 + 1\,725 \\ 9\,750 = 1\,725 \times 5 + 1\,125 \\ 1\,725 = 1\,125 + 600 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1\,125 = 600 + 525 \\ 600 = 525 + 75 \\ 525 = 75 \times 7 \end{array}$$

*Le intérêt est d'avoir les 2 méthodes, bien sûr ! Ici, il est évident que la 1<sup>re</sup> pourrait être plus simple (!) mais il y a au moins autant de divisions à effectuer et encore... j'ai cependant systématiquement utilisé la 2<sup>e</sup> qui me semble plus dans "l'esprit du programme" et qui permet surtout aux élèves d'arriver à une bonne destination dans le mécanisme de l'algorithme d'Euclide.*

2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ?  $\overline{O} / N$   
Si oui, laquelle et pourquoi ?  $\uparrow$

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? Si oui, lesquels ?

*Si la question intervient dans un examen, avant le contexte impose l'une ou l'autre des méthodes*

*Ex<sub>1</sub>: quel est le plus petit nombre par lequel il faut multiplier 270 pour obtenir un carré ?*

*Ex<sub>2</sub>: on a souvent besoin de l'algorithme d'Euclide (cf exemples nombreux)*

*Il n'y a pas de méthode absolue, cela dépend de la situation et aussi des nombres (mais, c'est un*

*quelques commentaires : le cours d'arithmétique est un îlot tant à fait particulier dans l'enseignement de Mathématiques.*

*Les élèves n'ont pas tant à fait le même comportement*

G) Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .

(Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

oui c'est un exercice d'arithmétique dans son énoncé, c'est aussi un exercice d'arithmétique dans le travail pratique qui est demandé

→ que dans les autres parties du programme de spécialité ou que dans les cours de mathématiques du tronc commun.

Certains élèves qui ont eu ailleurs qq difficultés (surtout calculatrices) comprennent très bien, sur les exercices de raisonnement pur, on retrouverait un peu le même phénomène en analyse combinatoire. Les élèves sont là en position très active.

Le cours d'arithmétique est un lieu privilégié pour "apprendre à raisonner" on fait faire d'ailleurs une typologie des différents exercices

(cf publications IREM Clermont-Ferrand octobre 1999 "Annuaire de la Région Boc - Post Boc : 45 de contenus --) Le domaine des nombres exacte aussi une réelle "fascination" un beaucoup d'élèves qui aiment beaucoup ce cours même s'ils redoutent parfois les exercices. Les travaux pratiques sur les systèmes de numération, les codages (surtout affines !), les problèmes de calendrier les intéressent beaucoup.

on pourrait aussi parler de la stratégie à adopter : les collègues que j'ai rencontrés l'année dernière, ont dispersé le cours d'arithmétique dans l'album avec la géométrie ont eu plus de difficultés que ceux qui l'aurait scindé en au moins 2 fois..

Il y a aussi beaucoup de professeurs sur ce qui on doit attendre d'un élève le jour de l'examen -- Il y a aussi le problème, que semble vous intéresser plus particulièrement, qui est celui du lien avec l'algorithmique, l'algorithmique de la calculatrice -- ! c'est aussi peut-être une bonne préparation à l'enseignement supérieur scientifique quel qu'il soit !

Je vous prie de m'excuser pour ces quelques lignes si grossières mais je suis à votre disposition si vous le souhaitez ! (je m'excuse quelques fois !)

RAVEL Laetitia

114, chemin de ribotière  
38 330 Saint-Ismier  
Laetitia.Ravel@imag.fr

Actuellement en DEA EIAHD à l'université Joseph Fourier de Grenoble (DEA de didactique des disciplines scientifiques), j'ai choisi comme thème de mémoire la réintroduction de l'arithmétique en classe de terminale S spécialité.

Je vous adresse le questionnaire que j'ai élaboré dans le cadre de ce mémoire.

En le remplissant, n'hésitez pas à faire toutes les remarques et commentaires que vous souhaitez (vous pouvez au besoin ajouter une feuille).

Je vous remercie sincèrement pour votre aide et le temps que vous voudrez bien accorder à ce projet.

Nom-Prénom : ~~XXXXXXXXXX~~

Depuis quand enseignez-vous ? : 1973

Nom de l'établissement : ~~XXXXXXXXXX~~

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : TERRACHER.

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

les livres actuels (Déclic (Rachette), Transmath (Nathan) ... BREAL)  
et connaissances universitaires

A) Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  N

Si oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ?

sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ... ) ?

sur la propriété d'Archimède ?

autre (précisez) :

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

Avant d'avoir introduit les nombres premiers.

Après.

3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  N

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

$E = \{ am + bn / (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne.

l'algorithme d'Euclide.

autre (précisez) :

4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ? O / N

Si oui, laquelle avez-vous retenue ? :  par récurrence.

la méthode de "descente".

par l'absurde.

autre (précisez) :

B) Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? O / N

Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

• Recherche de la primalité d'un nombre entier naturel.

• PGCD de  $a$  et  $b$

*Cependant je m'ai pas utilisé ces algorithmes en classe*

C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?

assez important ?

important ?

indispensable ?

D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? O / N

Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres.

TP ou exercice de programmation.

autre(s) (précisez) :

E) Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? O / N

Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

- F) 1. Pour le calcul du pgcd de 11 475 et 9 750, entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithme d'Euclide, y en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (économique) que l'autre ? Pourquoi ?  
On donne ci-dessous les résultats des "calculs" :

décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$\begin{aligned} 11\,475 &= 9\,750 + 1\,725 \\ 9\,750 &= 1\,725 \times 5 + 1\,125 \\ 1\,725 &= 1\,125 + 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1\,125 &= 600 + 525 \\ 600 &= 525 + 75 \\ 525 &= 75 \times 7 \end{aligned}$$

si la seule question est la recherche du PGCD la 1<sup>re</sup> méthode me paraît plus judicieuse (pour le calcul à la main)

Si la question est accompagnée par le calcul des coefficients de Bezout ou si l'exercice doit être programmé la seconde est bien meilleure (en informatique on peut utiliser la récursivité)

2. D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ?  O /  N il faut connaître toutes les méthodes  
Si oui, laquelle et pourquoi ?

3. Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? Si oui, lesquels ?

oui :

j'ai répondu à cette question au F.

G) Voici un énoncé d'exercice :

"Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : *tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.*

Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .

Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p ; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .

(*Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.*)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ?

C'est plus un problème informatique que 'un exercice d'arithmétique.

Je ne poserais pas ce type de problème car. les élèves n'ayant pas tous les mêmes moyens. (calculatrice, PC.....) certains risquent d'être très favorisés par rapport aux autres. De plus les moyens au Lycée sont tels que 'il est très difficile d'utiliser la programmation pour ce type de question (classes surchargées ; matériel desueté etc.....).

D'autre part : la diminution des horaires de math. ne favorise pas cette démarche qui ne me paraît pas pourtant intéressante.

Nom-Prénom : 

Depuis quand enseignez-vous ? : 30 ans (70)

Nom de l'établissement : Quelles classes avez-vous cette année ? : TS, Terminale 2 (1<sup>re</sup> terminale)

Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité Maths ? : Fractals.

Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? :

lire (Dumathéie) - tangente (exercices de nombre)

## • Dans votre cours d'arithmétique :

1. Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?  NSi oui, était-elle basée :  sur la méthode des soustractions successives ? sur les propriétés de  $\mathbb{N}$  relatives à la relation d'ordre  $\leq$  (plus grand élément ...) ? sans le dire : multiples successifs. sur la propriété d'Archimède ? autre (précisez) :

2. A quel moment avez-vous introduit la notion de pgcd ?

 Avant d'avoir introduit les nombres premiers. Après.3. Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bezout ?  N

Si oui, quels en étaient les éléments importants ? :

  $E = \{ am + bn / (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \}$  et la division euclidienne. l'algorithme d'Euclide. autre (précisez) :4. Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel  $n \geq 2$  en produit de facteurs premiers ?  NSi oui, laquelle avez-vous retenue ?  par récurrence. la méthode de "descente". par l'absurde. autre (précisez) :• Avez-vous demandé aux élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ?  N

Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?

- Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément :  dont on pouvait se passer ?  
 assez important ?  
 important ?  
 indispensable ?
- Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? O / N  
 Si oui, la raison en était :  travail sur les grands nombres. (décomposition facteurs premiers)  
 TP ou exercice de programmation.  
 autre(s) (précisez) :

- Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? O / N  
 Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul ...) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?

- décomposition en facteurs premiers de 11 475 et 9 750 :

$$11\,475 = 3^3 \times 5^2 \times 17 \quad \text{et} \quad 9\,750 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 13$$

algorithme d'Euclide appliqué à (11 475, 9 750) :

$$\begin{aligned} 11\,475 &= 9\,750 + 1\,725 \\ 9\,750 &= 1\,725 \times 5 + 1\,125 \\ 1\,725 &= 1\,125 + 600 \\ 1\,125 &= 600 + 525 \\ 600 &= 525 + 75 \\ 525 &= 75 \times 7 \end{aligned}$$

Pour calculer le pgcd du couple d'entiers (11 475, 9 750), laquelle des deux méthodes précédentes utiliseriez-vous ? Pourquoi ?  
*la première : certaines calculatrices donnent directement le résultat ...  
 bien sûr on a utilisé la 2<sup>e</sup> méthode sur un exemple ou 2.*

D'une manière générale, avez-vous conseillé aux élèves une méthode de recherche de pgcd plutôt qu'une autre ?  O  N  
 Si oui, laquelle et pourquoi ? *facteurs premiers -*

Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un pgcd ? *- oui ; dépend des exercices -*

- "Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair  $n \geq 5$  peut s'écrire sous la forme  $n = 2p + q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers.  
 Par exemple :  $51 = 2 \times 23 + 5$ .  
 Écrire un programme permettant, pour un entier impair  $n \geq 5$  donné, de déterminer un couple  $(p ; q)$  de nombres premiers tels que  $n = 2p + q$ .  
 (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)"

Jugez-vous que cet exercice est un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?  
 Si oui, poseriez-vous un tel exercice ? *non - trop difficile* ? *pas sûr -*



# ANNEXES C1

**Analyse des pratiques enseignantes : point de vue  
théorique et choix méthodologiques**



# COURS P1

## Cours P1 n°1, lundi 23/10/00

Transparent : Numération

Arithmétique

### Propriétés de $\mathbf{N}$ :

1) Toute partie  $A$  de  $\mathbf{N}$  non vide admet un plus petit élément  $a$ , ce qui signifie  $a \in A$  et  $a \leq x$  pour tout  $x$  de  $A$ .

Fausse dans  $\mathbf{Q}$  et dans  $\mathbf{R}$  :Dans  $\mathbf{Q}$  :  $A = \{p/q, p/q > 1/2\}$ Dans  $\mathbf{R}$  :  $A = ]1/2; +\infty[$ Dans  $\mathbf{N}$  :  $A = ]3; +\infty[$ ,  $a=4$ 

2) Principe de récurrence

Objectif : Propriété  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0$  ( $n_0$  fixé).

Cas général :

1) Vérifier  $P(n_0)$ 2) Si ou hypothèse ou supposons que  $P(n)$  vraie, démontrer que  $P(n+1)$  est vraie.3) Conclusion : d'après le principe de récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ .Exemple : démontrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :  $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$ *La démonstration est faite au tableau.*

### Multiples et diviseurs dans $\mathbf{Z}$ (résultats analogues dans $\mathbf{N}$ ) :

 $(a,b) \in \mathbf{Z}^2$ .  $a$  divise  $b$  équivaut à il existe  $c$  dans  $\mathbf{Z}$  tel que  $b = a \times c$ . $a$  est un diviseur de  $b$ .  $b$  est un multiple de  $a$ .Notation :  $a \mid b$  se lit  $a$  divise  $b$ .

Propriétés :

1)  $0 = 0 \cdot n$  est un multiple de tout nombre.2)  $1$  et  $-1$  divisent tous les nombres  $b = 1 \times b = (-1) \times (-b)$ 3) Les seuls diviseurs de  $1$  et  $-1$  sont eux-mêmesDém :  $1 = cd$ ,  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $|c| \geq 1$ ,  $|d| \geq 1$  $|c| = |d| = 1$ ,  $c=d=1$  ou  $c=d=-1$ 4)  $a$  et  $-a$  ont les mêmes diviseurs.  $a = b \times c$ ,  $-a = b \times (-c)$ 5) Si  $(a,b) \in (\mathbf{Z}^*)^2$  et si  $a \mid b$  et  $b \mid a$ , alors  $a=b$  ou  $a=-b$ Dém :  $a \mid b$   $b = a \times c$  (1) $b \mid a$   $a = b \times d$  (2). (1)  $\times$  (2)  $ab = abcd$  avec  $ab \neq 0$   $1 = cd$ D'après 3),  $c=d=1$ ,  $a=b$  ou  $c=d=-1$ ,  $a=-b$ 6) si  $a \mid b$  et  $a \mid c$ , alors si  $a \mid (b+c)$ ,  $a \mid kb$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $a \mid (xb+yc)$ ,  $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ Dém :  $a \mid b$   $b = a \times d$ ,  $a \mid c$   $c = a$  $b+c = a(d+e)$  donc  $a \mid (b+c)$  $kb = a \times (kd)$  $xb+yc = xad+yae = a(xd+ye)$ 

*Distribution de la feuille d'exercices n°1. Commencer par l'exercice 8, questions a et c puis reprendre dans l'ordre à partir de l'exercice 1. Pour après les vacances, finir la feuille, sauf exercices 1à et 8, question b qui sont facultatifs.*

**Cours P1 n°2, lundi 06/11/00**

**Nombres premiers :**

**Bis livre :** (P1 s'appuie sur le manuel pour faire son cours)

- 2, 3, 5, 7...
- 2 diviseurs 1 et lui-même.
- $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ . a admet un diviseur premier.

**Premier cas :** a premier,  $a \mid a$

**Second cas :** a non premier, a admet au moins un diviseur  $\neq 1$ , {div de  $a \neq 1$ } admet un plus petit élément p.

**Si p n'est pas premier :**  $d \neq 1, d \neq p, d \mid p$ .

$d \mid p$  et  $p \mid a$  donc  $d \mid a$  contre-dit la définition de p donc p est premier.

$$a = p \times q, q \neq 1, p \leq q \Rightarrow p^2 \leq p \times q = a, p \leq \sqrt{a}$$

**A noter :**

- Critère en exercice pour justifier qu'un nombre est premier :

Un nombre n est premier si et seulement si il n'admet aucun diviseur premier  $\leq \sqrt{n}$

61 est premier car  $\sqrt{61} < 8$  et 61 est non divisible par 2, 3, 5, 7.

- Il est bon de connaître les premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19...
- Un nombre est divisible par 3 (par 9) ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3 (par 9).

**Bis livre :**

- Infinité de nombres premiers :

Absurde :  $p_1, p_2, \dots, p_n$  nombre fini.  $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1 \geq 2^{n-1} p_{i+1} > p_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$

**Si N premier :** contradiction.

**Si N pas premier :** N admet un diviseur premier qui est  $p_1, p_2, \dots$  ou  $p_n$ .

$p_1 p_2 \dots p_n = N - 1, N = k p_i, p_i \mid N - 1$  impossible.

- $n = p^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$

**Si n est premier :**  $n = p$

**Si n non premier :**  $p_1 \mid n, n = n_1 p_1$

- Théorème 5 : admis (Voir Ter98)
- Exemple :  $N = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Diviseurs  $\neq 1$  de  $N = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3}$  avec  $\beta_1 = 0, 1, 2$  ou  $3, \beta_2 = 0, 1, 2$  et  $\beta_3 = 0$  ou  $1$ .

$N = 1, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ .

**A noter : Savoir-faire**

- Décomposer un nombre en facteurs premiers.

|        |    |
|--------|----|
| 16 758 | 2  |
| 8 379  | 3  |
| 2 793  | 3  |
| 931    | 7  |
| 113    | 7  |
| 19     | 19 |
| 1      |    |

$$16\ 758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$$

Tester la divisibilité par les nombres premiers par ordre croissant.

*Distribution du corrigé de la fiche 1. Correction au tableau de l'exercice 9. Rappel de 1ère S : formule  $x^n - a^n$ .*

**Cours P1 n°3, lundi 20/11/00**

**Première heure :**

*Demander des explications sur les exercices 1 à 10 de la fiche nombres premiers.*

*Traiter les exercices suivants dans cet ordre : 11, 13, 14.*

Si fini, faire l'activité 2 p.11 (Ter98)

Aide pour la correction du 11 et du 13 au tableau.

**Deuxième heure** : D.S.

**Cours P1 n°4, lundi 20/11/00**

Le cours débute par des commentaires sur le DS avec quelques indications de correction.

**DIVISION (EUCLIDIENNE)**

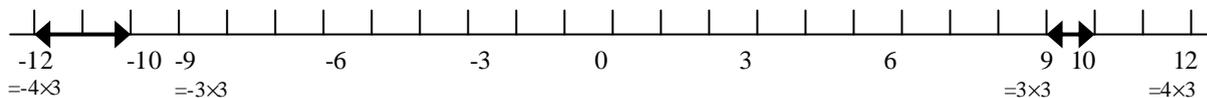
**Théo et dèf:**

$a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*$ . Il existe un couple  $(q,r)$  unique avec  $q \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{N}$  et  $0 \leq r < b$  tel que  $a=bq+r$

$a$  = dividende,  $b$  = diviseur

$q$  = quotient,  $r$  = reste.

(à l'oral : « il faut que  $r \neq 0$  »)



10 divisé par 3     $10=3 \times 3 + 1$

-10 divisé par 3     $-10 = -4 \times 3 + 2$

~~$-10 = 3 \times 3 - 1$~~

**Dem : Existence**

1<sup>er</sup> cas :  $a \in \mathbf{N}$

$E = \{n \in \mathbf{N}, nb > a\}$ .  $E \neq \emptyset$  car  $\lim nb = +\infty$  (ou  $n > a/b$  réalisé si  $n >$  partie entière de  $a/b + 1$ ). Pour  $n$  assez grand,  $n \in E$ .

$E$  admet un plus petit élément  $Q$ .  $0 \notin E$  donc  $Q \neq 0$ .

Il existe  $q \in \mathbf{N}$  tel que  $Q = q + 1$ .  $(q + 1) \in E$  et  $q \notin E$

$qb \leq a < (q + 1)b$

$a = bq + r \Leftrightarrow r = a - bq$

$0 \leq a - bq < b$

Donc  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$

2<sup>nd</sup> cas :  $a < 0$  ( $-a > 0$ )

En utilisant le 1<sup>er</sup> cas,  $-a = bq' + r'$  avec  $q' \in \mathbf{N}$  et  $0 \leq r' < b$

$a = b(-q') - r'$      $-b < r' \leq 0$

$\alpha)$  Si  $r' = 0$

$a = b(-q') - 0$

$\beta)$  Si  $r' \neq 0$



$a = b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + b - r'$

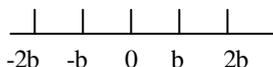
avec  $b - r' \in ]0, b]$

**Unicité**

$a = bq + r = bs + t$  avec  $(q,s) \in \mathbf{Z}^2$

$0 \leq r < b$  et  $0 \leq t < b$

$b(q - s) = t - r$



$0 \leq t < b$

$-b < -r \leq 0$

$-b < t - r < b$  et  $(t - r)$  multiple de  $b$  d'où  $t=r$  ; d'où  $bq=bs$  ;  $q=s$  car  $b \neq 0$ .

**Remarque :**

TI 80 Math Int ÷

$32 \text{ Int} \div 5 \quad 32=6 \times 5 + 2$

$32/5 = 6 + 2/5 = 6,4$   $q=6$  partie entière de  $32/5$

Machine : Int(32/5) donne 6 Reste  $32 - 6 \times 5$

*Fiche d'exercices sur la division euclidienne.*

**Cours P1 n°5, lundi 27/11/00**

**Programmation :**

*L'enseignante commente 3 transparents sur la programmation des calculatrices des élèves.*

**Plan de la séance :**

- 1) *Les élèves doivent rentrer les programmes sur leur calculatrice puis les tester (programme 1 : 703 divisible par 19 et 853 premier ; programme 2 : 120 et 16 758).*
- 2) *Lire le corrigé des exercices 1 à 8 (sauf exercice 4) de la fiche division euclidienne.*
- 3) *Finir la fiche d'exercice sur la division euclidienne en remplaçant le n°12 par l'activité 2 p.11 du livre.*
- 4) *Correction de l'exercice 4 au tableau.*
- 5) *Indications de correction pour l'activité 2 p.11 au tableau.*

**Pour lundi prochain :**

*Chercher sur le cahier la feuille sur les congruences (tout faire sauf les critères de divisibilité).*

**Cours P1 n°6, lundi 04/12/00**

**Correction de la feuille congruence :**

*Le tableau est séparé en trois. L'enseignante envoie trois élèves au tableau :*

- *un corrige la divisibilité par 9.*
- *un autre l'exemple numérique (1) et (2)*
- *le dernier montre que  $a$  et  $a'$  ont le même reste dans la division par  $n$  ssi  $a - a'$  multiple de  $n$*

*L'enseignante corrige à la fin les erreurs puis passe au tableau pour finir la correction de cette fiche.  
Les élèves continuent les exercices.*

**Cours P1 n°7, lundi 11/12/00**

Second D.S. d'arithmétique (Deux heures)

**Cours P1 n°8, lundi 18/12/00**

**PGCD = Plus Grand Diviseur Commun de deux entiers relatifs non nuls**

**Existence :**

$D_1 = \{\text{Diviseurs de } a \text{ appartenant à } \mathbf{N}\}$

$D_2 = \{\text{Diviseurs de } b \text{ appartenant à } \mathbf{N}\}$

$D_1 \cap D_2$  est une partie de  $\mathbf{N}$ , non vide, finie : admet un plus petit grand élément : PGCD( $a, b$ )

Exemples :  $\text{PGCD}(15,34) = 1$        $15 = 3 \times 5$     $34 = 2 \times 17$   
 $\text{PGCD}(12,30) = 6$        $12 = 2^2 \times 3$     $30 = 2 \times 3 \times 5$

**Définition :**

a et b sont premiers entre eux ssi  $\text{PGCD}(a,b) = 1$

**Propriétés :**

1)  $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(|a|,|b|)$

Raison : a et -a ont les mêmes diviseurs.

2)  $a/\text{PGCD}(a,b)$  et  $b/\text{PGCD}(a,b)$  sont premiers entre eux.

Dem : Soit  $k = \text{PGCD}(a/\text{PGCD}(a,b), b/\text{PGCD}(a,b)) \geq 1$ .

Il existe  $q_1$  tel que  $a/\text{PGCD}(a,b) = kq_1 \Leftrightarrow a = k\text{PGCD}(a,b)q_1$  (car k est un diviseurs de  $a/\text{PGCD}(a,b)$ ).

Donc  $k\text{PGCD}(a,b)$  divise a. De même,  $k\text{PGCD}(a,b)$  divise b.

$k\text{PGCD}(a,b)$  divise a et b et  $k\text{PGCD}(a,b) \geq \text{PGCD}(a,b)$ .

Le  $\text{PGCD}(a,b)$  est le plus grand diviseur commun à a et b donc  $k=1$ .

3) p premier,  $a \in \mathbb{Z}^*$  : Soit p divise a alors  $\text{PGCD}(a,p) = p$ . Soit p ne divise pas a et  $\text{PGCD}(a,p) = 1$

**Deux méthodes pour calculer PGCD(a,b), a, b entiers naturels :**

1) Algorithme d'Euclide

**Exemple :**  $4\ 539 > 1\ 958$

$$4\ 539 = 2 \times 1\ 958 + 623$$

$d|4\ 539$  et  $d|1\ 958$  alors  $623 = 4\ 539 - 2 \times 1\ 958$  multiple de d.  $d|623$ .

$$1\ 958 = 3 \times 623 + 89 \text{ si } d|1\ 958 \text{ et } d|623 \text{ alors } d|89$$

$$623 = 7 \times 89 + 0 \quad d|89$$

**Préliminaire :** (à savoir redémontrer en exercice)

$(a,b) \in \mathbb{N}^*$      $d = \text{PGCD}(a,b)$

Si  $a = bq + r$ ,  $r \neq 0$  (ceci n'est pas nécessairement une division) alors  $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$ .

Méthode :  $\begin{cases} \text{PGCD}(a,b) \leq \text{PGCD}(b,r) \\ \text{PGCD}(a,b) \geq \text{PGCD}(b,r) \end{cases}$

$\text{PGCD}(a,b)|a$  et  $\text{PGCD}(a,b)|b$  et  $r = a - bq$  multiple de  $\text{PGCD}(a,b)$

$\text{PGCD}(a,b)$  divise b et r.

Donc  $\text{PGCD}(a,b) \leq \text{PGCD}(b,r)$

$\text{PGCD}(b,r)|b$  et  $\text{PGCD}(b,r)|r$  et  $a = bq + r$  multiple de  $\text{PGCD}(b,r)$

$\text{PGCD}(b,r)$  divise a et b.

Donc  $\text{PGCD}(b,r) \leq \text{PGCD}(a,b)$

$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$

Application à l'algorithme d'Euclide :

$$a > b > 1$$

$$a = bq_0 + r_0 \quad \text{division de a par b} \quad 0 \leq r_0 < b$$

• Si  $r_0 = 0$  :  $\text{PGCD}(a,b) = b$

• Si  $r_0 \neq 0$  :  $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r_0)$

$$b = r_0q_1 + r_1$$

• Si  $r_1 = 0$  :  $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r_0) = r_0$

• Si  $r_1 \neq 0$  :  $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r_0) = \text{PGCD}(r_0,r_1)$  avec  $0 \leq r_1 < r_0$

etc.

$\text{PGCD}(a,b)$  est le dernier reste non nul obtenu dans cette suite de divisions.

**Exemple :** 12 et 30

$$\begin{cases} 30 = 2 \times 12 + 6 \\ 12 = 2 \times 6 + 0 \end{cases} \quad \text{PGCD}(30,12) = \text{PGCD}(12,6) = 6$$

2) Décomposition en facteurs premiers de a et b

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$   
 Diviseurs de  $a$  :  $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$  avec  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

PGCD(a,b) a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a et b, avec comme exposant le plus petit de ceux apparaissant dans a et b.

$$a = 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 7, b = 2^2 \times 5 \times 7^2, \text{PGCD}(a,b) = 2^2 \times 5 \times 7$$

*P1 demande que ce cours soit connu par cœur pour le jour de la rentrée car elle fera  $ax+by=c$ .*

*Plan de travail du reste de la séance : lire l'exercice corrigé n°44. Faire le TP p.44 et les exercices 12, 14, 15, 16, 6, 8, 37 ainsi que le 2 p.45 des annales.*

### Cours P1 n°9, lundi 08/01/01

#### Théorème de Bézout :

a et b deux entiers relatifs non nuls.  $D=\text{PGCD}(a,b)$ . Il existe deux entiers u et v tels que  $au+bv=D$

#### Corollaire :

Si a et b sont premiers entre eux  $D = 1$ . Il existe u et v tel que  $au + bv = 1$

Dem :

$$G = \{am+bn, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\} \cap \mathbf{N}^*$$

$G \neq \emptyset$  G contient  $|a|$  ( $m=1$  ou  $-1$  selon signe de a,  $n=0$ ). G est une partie non vide de  $\mathbf{N}$  donc admet un plus petit élément d.

Objectif :  $d = D$

$\text{PGCD}(a,b)|a$  et  $\text{PGCD}(a,b)|b$ . Donc tout élément de G est un multiple de D.

$$d \in G \Rightarrow D|d \Rightarrow \boxed{D \leq d}$$

Montrons que  $|a$  et  $d|b$ .

On divise a par d :  $a = dq + r$  avec  $0 \leq r < d$

$d \in G$  il existe donc u et v dans  $\mathbf{Z}$  tels que  $d = au + bv$

$$r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1 - uq) + b(-vq)$$

Si r était non nul, on aurait  $r \in G$  et  $r < d$  ce qui contredit d plus petit élément de G donc  $r=0$  et  $d|a$ . De même,  $|b$ .

d est diviseur commun à a et b donc  $\boxed{d \leq D}$ . Conclusion :  $D=d=au+bv$

#### Conséquence :

Tout diviseur commun à a et b divise  $\text{PGCD}(a,b)$

Dem : si  $\delta|a$  et  $\delta|b$  alors  $\delta|(au+bv)$   $\delta|\text{PGCD}(a,b)$

#### Théorème de Gauss :

Soit a,b,c trois entiers non nuls.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } a \text{ divise } bc \\ \text{PGCD}(a,b) = 1 \end{array} \right\} \text{ alors } a|c$$

#### Application :

Si p premier et si  $p|bc$  alors  $p|b$  ou  $p|c$  (car  $\text{PGCD}(b,p)=1$  ou p)

Dem (du théorème de Gauss) :

D'après le théorème de Bézout, il existe u et v dans  $\mathbf{Z}$  tels que  $au+bv = 1$

$acu + bcv = c$ . acu multiple de a. bcv multiple de a car  $a|bc$  donc  $a|c$

#### Exemple de détermination d'un couple (u,v) tel que $au + bv = \text{PGCD}(a,b)$ :

• Algorithme d'Euclide :

$$\text{PGCD}(62,43) = 1$$

Trouver u et v tels que  $62u + 43v = 1$

Algorithme d'Euclide :

$$62 = 1 \times 43 + 19 \quad (1)$$

$$43 = 2 \times 19 + 5 \quad (2)$$

$$19 = 3 \times 5 + 4 \quad (2)$$

$$5 = 1 \times 4 + 1 \dots\dots\dots(2)$$

$$1 = 5 - 1 \times 4 \quad (4)$$

$$= 5 - 1 \times (19 - 3 \times 5) \quad (3)$$

$$= 4 \times 5 - 1 \times 19$$

$$= 4 \times (43 - 2 \times 19) - 1 \times 19 \quad (2)$$

$$= 4 \times 43 - 9 \times 19$$

$$= 4 \times 43 - 9 \times (62 - 1 \times 43) \quad (1)$$

$$= 13 \times 43 - 9 \times 62$$

$$\boxed{1 = 13 \times 43 - 9 \times 62}$$

Démarche :

Isoler les restes en remontant de la dernière égalité vers la première.

Exercice très classique :

Trouver toutes les solutions  $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$  de  $62x + 43y = 1$

Corrigé :

$$62x + 43y = 1 \Leftrightarrow 62x + 43y = -9 \times 62 + 13 \times 43 \Leftrightarrow 62(x+9) = 43(13-y)$$

d'après le théorème de Gauss, 62 divise  $43(13-y)$  et  $\text{PGCD}(62,43) = 1$  donc  $62 \mid 43(13-y)$

Il existe  $k$  dans  $\mathbf{Z}$  tel que  $13-y = 62k$

$$\left. \begin{array}{l} 43 \mid 62(x+9) \\ \text{PGCD}(43,62) = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } 43 \text{ divise } (x+9)$$

Il existe  $l$  dans  $\mathbf{Z}$  tel que  $x+9 = 43l$

$$62(x+9) = 43(13-y)$$

$$62 \times 43k = 43 \times 62l \text{ donc } k=l$$

Les solutions  $(x,y)$  sont de la forme  $(43k-9; 13-62k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$

*Livre p.46 : Résolution de  $62x + 43y = 3$ .*

*Plan de travail de la suite de la séance :*

*Algorithme d'Euclide avec  $a=4420$  et  $b=2772$ . Trouver  $u$  et  $v$  tel que  $au+bv=\text{PGCD}(a,b)$ .*

*Lire le corrigé de l'exercice 2 p.45 des annales.*

*Sur la feuille PGCD, faire la première partie 2) et 3) ainsi que l'exercice type bac (premier exercice Bézout-Gauss, le groupe qui va au musée).*

*Pour le 22/01/01 : DM n°238 des annales.*

*DS de 2h le lundi 19/02 sur toute l'arithmétique étudiée*

### **Cours P1 n°10, lundi 15/01/01**

*Elève au tableau pour corriger l'exercice 1 de Bézout-Gauss jusqu'à la question c) puis un autre pour la suite.*

Point méthode pour les exercices :

$a$  et  $b$  entiers relatifs non nuls.  $ax+by = c$

Exemple :

•  $10x+6y = 17$

$2(5x+3y) = 17$ . 2 ne divise pas 17 ; pas de solution

•  $10x+6y = 14 \Leftrightarrow 5x+3y = 7$

Il existe  $u$  et  $v$  tel que  $5u+3v = 1$

$5 \times 7u + 3 \times 7v = 7$  avec  $7u = x_0$  et  $7v = y_0$ .

Premier cas :

$c$  n'est pas multiple de  $\text{Pgcd}(a,b)$ ;  $ax+by$  multiple de  $\text{Pgcd}(a,b)$

Pas de solution pour  $ax+by = c$

Second cas :

$ax+by = c$  ;  $c$  multiple de  $\text{Pgcd}(a,b)$  ; Simplifier par  $\text{Pgcd}(a,b)$ .

Distribution du corrigé de « Pgcd-Bézout-Gauss exercice 1 » puis distribution de « calcul de Pgcd(a,b) par l'algorithme d'Euclide ».

Ensuite plan de travail :

- Question sur le corrigé de l'exercice 1 ?
- Rentrer le programme si nécessaire.
- Faire exercice 2 Bézout-Gauss bas de feuille (lorsque fini, demander le corrigé)
- $-Pgcd(a,b) = 1 \iff PGCD(a^2, b^2) = 1$ .
- Annales n°234 à faire sur le cahier.
- le produit de trois entiers consécutifs n'est pas un carré.

Correction au tableau par l'enseignante de  $Pgcd(a,b) = 1 \iff Pgcd(a^2, b^2) = 1$  avec un raisonnement par l'absurde.)

### Cours P1 n°11, lundi 22/01/01

#### **PGCD :**

a/b devient irréductible lorsqu'on la simplifie par PGCD(a,b)

$$PGCD(ka, kb) = |k|PGCD(a, b), k \in \mathbf{Z}^*$$

#### **PPCM :** (en anglais lcm=least common multiple)

a, b éléments de  $\mathbf{Z}^*$

$$A = \mathbf{N}^* \cap \{\text{multiples communs à a et b}\}. |ab| \in A, A \neq \emptyset$$

$A \subset \mathbf{N}$  donc A admet un plus petit élément appelé PPCM(a,b) (plus petit multiple commun à a et b).

Exemple :  $15 = 3 \times 5 \quad 18 = 2 \times 3^2, \text{PPCM}(15, 18) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

#### **Propriétés :**

- 1)  $\text{PPCM}(a, b) = \text{PPCM}(|a|, |b|)$  (multiples de a = multiples de -a)
- 2)  $a > 0, b > 0$ . Si  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ , alors  $\text{PPCM}(a, b) = a \times b$
- 3) Tout multiple commun à a et b est multiple de  $\text{PPCM}(a, b)$
- 4)  $\text{PPCM}(ka, kb) = |k| \text{PPCM}(a, b), k \in \mathbf{Z}^*$

Exemple :  $15 = 3 \times 5 \quad 18 = 2 \times 3^2, \text{PPCM}(15, 18) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90, \text{PGCD}(15, 18) = 3$

5)  $\boxed{\text{PPCM}(a, b) \times \text{PGCD}(a, b) = ab}, a > 0, b > 0$

Conséquence :  $\text{PPCM}(a, b) = ab / \text{PGCD}(a, b)$

- 6) Si on connaît les décompositions en facteurs premiers de a et b, on obtient celle du PPCM(a,b) en prenant tous les facteurs premiers apparaissant dans a ou b avec le plus grand exposant apparaissant dans a ou b.

#### **Dem :**

2)  $a | \text{PPCM}(a, b)$  il existe k tel que  $\text{PPCM}(a, b) = ka$

D'autre part,  $b | \text{PPCM}(a, b)$  donc  $b | ka$  et  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ . d'après le théorème de Gauss,  $b | k$  donc il existe k' tel que  $k = k'b$ .

$$\text{PPCM}(a, b) = k'ba = k'(ab).$$

ab est un multiple de a et b,  $k' \in \mathbf{N}^*, k'ab \geq ab$

PPCM est le plus petit des multiples communs à a et b donc  $k'=1$

3) Il s'agit de montrer qu'un multiple commun m à a et b est multiple de  $\text{PPCM}(a, b)$ . On divise m par  $\text{PPCM}(a, b)$

$$m = \text{PPCM}(a, b)q + r \quad 0 \leq r < \text{PPCM}(a, b)$$

$$r = m - \text{PPCM}(a, b)q \quad \text{multiple de a et de b.}$$

Donc  $r=0$  (car sinon on aurait  $r < \text{PPCM}(a, b), r \in \mathbf{N}^*$  r multiple de a et b)

Conséquence : ab est un multiple de  $\text{PPCM}(a, b)$

5)

|   |
|---|
| $\begin{aligned} d &= \text{PGCD}(a,b) \\ a &= da' \\ b &= db' \quad \text{avec } \text{PGCD}(a',b') = 1 \end{aligned}$ |
|---|

Méthode pour démarrer certains exercices. Connaître a et b : savoir calculer a' et b'

$$\text{PPCM}(a',b') = a'b'$$

$$\text{PPCM}(a,b) = \text{PPCM}(da',db') = d\text{PPCM}(a',b') = da'b'$$

$$\text{PPCM}(a,b) \times \text{PGCD}(a,b) = da'b' \times d = (da')(db') = ab$$

Plan de travail pour le reste de la séance :

- 1) semaine prochaine : corrigé DM et programme u et v Bézout à rentrer
- 7) 2) Corrigé n°234 Annales
- 2) Fiche PPCM à faire dans cet ordre : 1a, 2, 3, 5, 4

Puis l'enseignante donne une aide pour le 5

Pour la semaine prochaine faire le n°251 des annales et terminer la fiche PPCM. Amener le livre et les annales.

**Cours PGCD :** (P1 avait oublié de démontrer la réciproque du théorème de Bézout lors du cours n°9)

**Réciproque du théorème de Bézout :**

S'il existe u et v tels que  $au + bv = 1$  alors  $\text{PGCD}(a,b) = 1$

**Dem :** Si  $d|a$  et  $d|b$  alors  $d|(au + bv)$  donc  $d|1$

$$\left. \begin{array}{l} d = \text{PGCD} \in \mathbb{N}^* \\ d | 1 \end{array} \right\} d = 1$$

### Cours P1 n°12, lundi 29/01/01

Plan de travail de la séance :

- Corrigé du n°251 des annales à regarder
- faire les exercices de la feuille PPCM, PGCD
- faire les exercices non traités

Puis corrections au tableau (partielles ou complètes) exercices 4, 6 et 2

- Annales 2p.53 et n°246

DS la semaine prochaine (2H)

### Cours P1 n°13, lundi 19/02/01

Troisième D.S. d'arithmétique (Deux heures).



## - Division euclidienne - exercices -

- 1°) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 32 par 6 ; de -32 par 6.
- 2°) Trouver tous les entiers naturels  $x$  et  $y$  qui vérifient  $4321 = 731x + y$ .
- 3°) On divise 524 par un entier naturel non nul  $b$ . Le quotient est 15 le reste est  $r$ . Déterminer les valeurs possibles de  $b$  et  $r$ .
- 4°) On augmente le dividende d'une division de 20, le diviseur de 4. Le quotient et le reste sont inchangés. Quel est le quotient?
- 5°) Soit  $a$  un entier naturel le quotient et le reste de la division de  $a$  par 4 sont respectivement  $q$  et  $r$ . Quel est le reste de la division de  $a$  par 12?  
(On distinguera les 3 cas  $q=3k$  ;  $q=3k+1$  ;  $q=3k+2$ )
- 6°) a) Montrer que tout entier naturel  $n$  peut s'écrire sous la forme  $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$  ( $k \in \mathbb{N}$ )  
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $n^2 - 3n$  par 5  
c) En déduire l'ensemble  $S$  des entiers naturels  $n$  tels que le reste de la division euclidienne de  $n^2 - 3n$  par 5 soit 3.
- 7°) En divisant l'entier naturel  $a$  par 155 et par 161, on obtient le même quotient et comme restes respectifs 65 et 23. Calculer  $a$ .
- 8°) Quel est le reste de la division par 3 du nombre  $\frac{n(n+1)}{2}$ ?
- 9°) La différence de deux entiers est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces deux entiers?  
La somme de deux entiers est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces deux entiers?
- 10°) Quel peut être le reste de la division par 5 du carré d'un nombre entier naturel?
- 11°) Démontrer que le nombre  $n = ab(a^2 - b^2)$  est divisible par 3 pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ .
- 12°) ~~n° 30 p 26~~. Fiche n°2 p 11
- 13°) Déterminer tous les entiers  $a$  qui divisés par 8 donnent un quotient égal au reste.
- 14°) Soit  $x \in \mathbb{N}$  d'écriture décimale  $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ . Le reste de la division de  $x$  par 9 (par 3) est égal au reste de la division de  $a_k + a_{k-1} + \dots + a_0$  par 9 (par 3).  
En déduire un critère de divisibilité par 3, par 9.  
ex:  $x = 15678$   
Ceci: On démontrera par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$  le reste de la division de  $10^n$  par 9 est 1.

**DIVISION EUCLIDIENNE**

①  $32 = 5 \times 6 + 2$     quotient 5    Reste 2  
 $-32 = -6 \times 6 + 4$     quotient -6    Reste 4

②  $4321 = 731x + y$   
 donc  $731x \leq 4321$  car  $y \geq 0$   
 $x \leq \frac{4321}{731}$   
 or  $4321 = 5 \times 731 + 666$   
 d'où  $\frac{4321}{731} = 5 + \frac{666}{731} < 6$   
 Ainsi  $y = 4321 - 731x$

Par conséquent  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$   
 D'où  $(x, y) \in \{(0, 4321), (1, 3590), (2, 2859), (3, 2128), (4, 1397), (5, 666)\}$

③  $524 = 15b + z$  avec  $0 \leq z < 15$   
 Par conséquent  $524 \geq 15b$  car  $z \geq 0$  or  $524 < 16b$  car  $z < 15$   
 $15 \times 34 + 14 \geq 15b$  or  $32 \times 16 + 12 < 16b$   
 $32 < 32 + \frac{12}{16} < b \leq 34 + \frac{14}{15} < 35$   
 D'où  $32 < b < 35$     b = 33 ou 34

$524 = 15 \times 33 + 29$      $534 = 15 \times 34 + 14$   
 $(b, z) = (33, 29)$  ou  $(34, 14)$

⑤  $a = 12q + r$  avec  $0 \leq r < 12$   
 Le reste de la division de q par 3 est soit 0, soit 1, soit 2  
 1<sup>er</sup> cas  $q = 3k$      $a = 12k + r$  or  $0 \leq r < 12$     Reste de la division de a par 12 = r  
 2<sup>em</sup> cas  $q = 3k + 1$      $a = 12k + 12 + r$  or  $0 \leq 12 + r < 24$     Reste de la division de a par 12 = r + 12  
 3<sup>em</sup> cas  $q = 3k + 2$      $a = 12k + 24 + r$  or  $0 \leq 24 + r < 36$     Reste de la division de a par 12 = r + 24

⑥ a) Le reste de la division d'un entier par 5 est 0, 1, 2, 3 ou 4.  
 Il est donc de la forme  $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3$  ou  $5k+4$ ,  $k \in \mathbb{N}$   
 b)  $n^2 - 3n = n(n-3)$   
 Si  $n = 5k$      $n(n-3) = 5k(5k-3)$  multiple de 5    Reste de la division par 5 = 0  
 Si  $n = 5k+1$      $n(n-3) = (5k+1)(5k-2) = 25k^2 + 5k - 10k - 2 = 25k^2 - 5k - 2 = 5(5k^2 - k - 1) - 2$     Reste de la division par 5 = 3  
 Si  $n = 5k+2$      $n(n-3) = (5k+2)(5k-1) = 25k^2 + 5k - 2 = 5(5k^2 + k - 1) + 3$     Reste 3  
 Si  $n = 5k+3$      $n(n-3) = (5k+3)5k = 5[5k(5k+3)]$  multiple de 5    Reste = 0  
 Si  $n = 5k+4$      $n(n-3) = (5k+4)(5k+1) = 25k^2 + 25k + 4 = 5(5k^2 + 5k) + 4$     Reste = 4

⑦  $a = 155q + 65$  (1)  
 $a = 161q + 23$  (2)  
 En calculant (2) - (1), on obtient  $0 = -6q + 42$   
 $q = 7$   
 $a = 1150$

Vérifions  $1150 = 7 \times 155 + 65 = 7 \times 161 + 23$

⑧ Remarque préliminaire  $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  donc  $\frac{n(n+1)}{2}$  est bien un entier multiple du division par 2.  
 Les premiers valeurs de  $\frac{n(n+1)}{2}$  sont 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... dont les restes de la division par 3 sont 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...  
 A cause de la présence du 2 au dénominateur, il est plus simple de s'intéresser au reste de la division de n par 6.  
 n est de la forme  $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4$  ou  $6k+5$ ,  $k \in \mathbb{N}$   
 $n = 6k$      $\frac{n(n+1)}{2} = 3k(6k+1)$  multiple de 3  
 $n = 6k+1$      $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(6k+1)(6k+2)}{2} = (3k+1)(6k+1) = 18k^2 + 9k + 1 = 3(6k^2 + 3k) + 1$     Reste de la division par 3 = 1  
 $n = 6k+2$      $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(6k+2)(6k+3)}{2} = 3(3k+1)(2k+1)$  multiple de 3  
 $n = 6k+3$      $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(6k+3)(6k+4)}{2} = 3(2k+1)(3k+2)$  multiple de 3  
 $n = 6k+4$      $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(6k+4)(6k+5)}{2} = (3k+2)(6k+5) = 18k^2 + 27k + 10 = 3(6k^2 + 9k + 3) + 1$     Reste = 1  
 $n = 6k+5$      $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(6k+5)(6k+6)}{2} = 3(2k+1)(k+5)$  multiple de 3  
 Le reste de la division de  $\frac{n(n+1)}{2}$  par 3 est  $\begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 6k+1 \text{ ou } 6k+4 \\ 0 & \text{si } n \text{ est de la forme } 6k \text{ ou } 6k+3 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 6k+1 \text{ ou } 6k+4 \\ 0, 2, 3 \text{ ou } 5 & \text{si } n \text{ est de la forme } 6k+2 \text{ ou } 6k+3 \end{cases}$   
 or  $n = 6k+1$  ou  $6k+4 = \frac{(6k+3)+1}{2}$  équivalant à  $n$  est de la division de  $n$  par 3 est 1

DIVISION: EUCLIDEENNE

9) \* Soient  $a$  et  $b$  ces deux entiers  
 $a - b = 538$  donc  $a > b$   
 Par conséquent  $a$  est  $a$  que l'on divise par  $b$  par obtient un quotient  $13 > 0$   
 $a = 13b + 22$   
 $a = b + 538$  d'où  $b + 538 = 13b + 22$  soit  $12b = 516$  donc  $b = 43$   
 $a = 538 + 43 = 581$  (a, b) = (581, 43) vérification:  $581 = 13 \times 43 + 22$

\* Soient  $a$  et  $b$  ces deux entiers avec  $a < b$  (quotient de  $a$  par  $b = 5 > 0$ )  
 $a + b = 2096$   
 $a = 5b + 206$  par division euclidienne donc  $206 < b$   
 Par substitution  $2096 - b = 5b + 206$  d'où  $6b = 1890$  soit  $b = 315$   
 $(a, b) = (1781, 315)$  Vérification:  $1781 = 5 \times 315 + 206$

10) Teste ces nombres naturels notés de la forme  $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3$  ou  $5k+4, k \in \mathbb{N}$

$n = 5k$   $n^2 = 25k^2$  multiple de 5  
 $n = 5k+1$   $n^2 = 25k^2 + 10k + 1$  reste 1 dans la division par 5  
 $n = 5k+2$   $n^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5(5k^2 + 4k) + 4$  reste 4  
 $n = 5k+3$   $n^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 5(5k^2 + 6k + 1) + 4$  reste 4  
 $n = 5k+4$   $n^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 5(5k^2 + 8k + 3) + 1$  reste 1

Le reste de la division de  $n^2$  par 5 est 0 si  $n$  multiple de 5  
 1 si le reste de la division de  $n$  par 5 est 1 ou 4  
 4 si le reste de la division de  $n$  par 5 est 2 ou 3

11)  $n = ab(a-b)(a+b)$   
 Si  $a$  ou  $b$  multiple de 3,  $n$  est multiple de 3.  
 Si non reste donc qu'il y a un multiple de 3 dans  $a-b$  ou  $a+b$  reste de la division de  $a$  et de  $b$  par 3 est 1 ou 2, soit 4 cas  

|                           |            |             |                               |
|---------------------------|------------|-------------|-------------------------------|
| $\frac{1}{3} \text{ res}$ | $a = 3k+1$ | $b = 3k'+1$ | $a-b = 3(k-k')$ multiple de 3 |
| $\frac{2}{3} \text{ res}$ | $a = 3k+2$ | $b = 3k'+2$ | $a-b = 3(k-k')$               |
| $\frac{1}{3} \text{ res}$ | $a = 3k+1$ | $b = 3k'+2$ | $a+b = 3(k+k'+1)$             |
| $\frac{2}{3} \text{ res}$ | $a = 3k+2$ | $b = 3k'+1$ | $a+b = 3(k+k'+1)$             |

 Conclusion:  $n$  est toujours multiple de 3

12)  $N^{\circ} 30$  p 26 Fact 2 | 12 3 | 12  $2+3=5$  ne divise pas 12  
 $N^{\circ} 39$  p 26  $63 = 7 \times 3^2$   $15 = 3 \times 5$   
 $315 = 63 \times 5 = 3^3 \times 5 \times 7$  est divisible par 63 et par 15, mais pas par 965  
 le résultat est le facteur 3 commun à 63 et à 15.

13)  $a = 8q + r$  avec  $\begin{cases} 0 \leq r < 8 \\ r = q \end{cases}$  qui divise par 8

$a \pm 9q$  et  $0 \leq q < 8$   
 d'où  $a = 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54$   
 $\begin{pmatrix} 9 = 8 \times 1 + 1 \\ 18 = 8 \times 2 + 2 \end{pmatrix}$

14) Critère de divisibilité par 9, par 3.

**Chap 3** Congruences dans  $\mathbb{Z}$

... nombres ayant même reste dans la division par  $n$

- 1° On considère les entiers  $-27, -12, 2, 37$  et  $52$ .
- a) Quels sont les restes des divisions euclidiennes par 5 de ces nombres ?
- b) Soit  $a$  un entier dont le reste de la division euclidienne par 5 est 2. Que devient ce reste si on ajoute à  $a$  un multiple de 5 ?
- c) Soit  $a$  et  $a'$  deux entiers dont le reste de la division euclidienne par 5 est 2 ? Que peut-on dire de  $a - a'$  ?
- 2° On pose  $a = -18, a' = 12, b = 29$  et  $b' = -6$ .
- a) Quels sont les restes des divisions par 5 de  $a$  et  $a'$  ? de  $b$  et  $b'$  ?
- b) Quels sont les restes des divisions par 5 de  $a + b$  et  $a' + b'$  ?
- c) Quels sont les restes des divisions par 5 de  $7a - 3b$  et  $7a' - 3b'$  ?
- d) Quels sont les restes des divisions par 5 de  $ab$  et  $a'b'$  ?
- e) Quels sont les restes des divisions par 5 de  $a^3$  et  $a'^3$  ? de  $b^2$  et  $b'^2$  ?

définition

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
 Deux entiers  $a$  et  $a'$  qui ont le même reste dans la division euclidienne par  $n$  sont dits congrus modulo  $n$ .  
 On écrit :  $a \equiv a' \pmod{n}$  et on lit «  $a$  congrus à  $a'$  modulo  $n$  ».

- 1° Démontrer la propriété :  
 Deux entiers sont congrus modulo  $n$  si, et seulement si,  $a - a'$  est un multiple de  $n$ .
- 2°  $a, a', a''$  étant des entiers, montrer les propriétés suivantes :  
 a)  $a \equiv a \pmod{n}$  ;  
 b) si  $a \equiv a' \pmod{n}$ , alors  $a' \equiv a \pmod{n}$  ;  
 c) si  $a \equiv a' \pmod{n}$  et  $a' \equiv a'' \pmod{n}$ , alors  $a \equiv a'' \pmod{n}$  ;  
 d) si  $a \equiv a' \pmod{n}$ , alors, pour tout entier  $k, ka \equiv ka' \pmod{n}$ .
- 3°  $a, a', b$  et  $b'$  étant des entiers, montrer les propriétés suivantes :  
 a) si  $a \equiv a' \pmod{n}$  et  $b \equiv b' \pmod{n}$ , alors :  
  - $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$  ;
  - $ab \equiv a'b' \pmod{n}$  ;
  - pour tous les entiers  $k$  et  $k', ka + k'b \equiv ka' + k'b' \pmod{n}$ .
 b) si  $a \equiv a' \pmod{n}$ , alors, pour tout entier naturel  $p$  non nul,  $a^p \equiv a'^p \pmod{n}$ .
- 4°  $a$  et  $r$  étant deux entiers, montrer que :  
 $a \equiv r \pmod{n}$  et  $0 \leq r < n \iff r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $n$ .

restes de la division par  $n$  des puissances d'un entier

Exemple

On désire déterminer les restes de la division par 5 des nombres  $2^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ).  
 On a pour les premières puissances de 2 :

$$2^0 = 1 \equiv 1 \pmod{5}; \quad 2^1 = 2 \equiv 2 \pmod{5}; \quad 2^2 = 4 \equiv 4 \pmod{5};$$

$$2^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}; \quad 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}; \quad 2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{5};$$

$$2^6 = (2^3)^2 \equiv 3^2 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5}; \quad \text{etc.}$$

Il semble que les restes se reproduisent périodiquement de 4 en 4.

Soit  $k$  un entier naturel quelconque ; on peut écrire :

$$2^{4k} = (2^4)^k \equiv 1^k \pmod{5};$$

$$2^{4k+1} = 2^{4k} \times 2 \equiv 1 \times 2 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5};$$

$$2^{4k+2} = 2^{4k} \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \pmod{5} \equiv 4 \pmod{5};$$

$$2^{4k+3} = 2^{4k} \times 2^3 \equiv 1 \times 3 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}.$$

Conclusion : les restes des divisions de  $2^{4k}, 2^{4k+1}, 2^{4k+2}, 2^{4k+3}$  par 5 sont respectivement 1, 2, 4 et 3.

1° En utilisant la méthode précédente, déterminer :

- a) les restes de la division par 4 de  $3^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) ;
- b) les restes de la division par 7 de  $3^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) ;

2° En déduire que  $3^{1998} - 1$  est divisible par 4 et par 7.

règles de divisibilité

1° Divisibilité par 2 et 5 :  $\overline{abc} \equiv \overline{bc} \pmod{2}$  et  $\overline{abc} \equiv \overline{bc} \pmod{5}$ .

a) Montrer que  $5428 \equiv 8 \pmod{2}$  et que  $5428 \equiv 8 \pmod{5}$ .

b) Montrer que tout entier est congru, modulo 2 ou modulo 5, à son dernier chiffre.

c) En déduire les règles de divisibilité d'un entier par 2, ou par 5.

2° Divisibilité par 4 et 25

a) Montrer que  $5428 \equiv 28 \pmod{4}$  et que  $5428 \equiv 28 \pmod{25}$ .

b) Montrer que tout entier est congru, modulo 4 ou modulo 25, au nombre formé par ses deux derniers chiffres.

c) En déduire les règles de divisibilité d'un entier par 4, ou par 25.

3° Divisibilité par 3 et 9

a) Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $10^n \equiv 1 \pmod{9}$  et  $10^n \equiv 1 \pmod{3}$ .

b) En remarquant que  $5428 = 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10 + 8$ , montrer que :  
 $5428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8 \pmod{9}$  et  $5428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8 \pmod{3}$ .

c) Montrer que tout entier est congru, modulo 9 ou modulo 3, à la somme de ses chiffres.

d) En déduire les règles de divisibilité d'un entier par 3, ou par 9.

*Handwritten note:*  $k = 1-5 p \leq 1$

## Devoir surveillé d'arithmétique du lundi 11 décembre 2000. TS Spécialité

### Exercice 1 :

Déterminer les entiers naturels  $n$  non nuls dont la division euclidienne par 16 donne un reste égal au carré du quotient.

### Exercice 2 :

1)  $a = 15q + 10 + r$  avec  $q$  et  $r$  entiers naturels et  $0 \leq r \leq 8$

Quel est le reste de la division de  $a$  par 15 ?

2) Si un nombre est divisible par 42 et 56, est-il divisible par  $42 \times 56$  ?

### Exercice 3 :

1) Montrer que pour tout entier relatif  $a$ , le nombre  $a(a^2 - 1)$  est multiple de 6.

2) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul et tout entier relatif  $a$ , le nombre  $a(a^{2n} - 1)$  est multiple de 6.

3) a) Vérifier alors que  $11(11^{110} - 1)$  est multiple de 6.

b) Quel est le reste de la division de  $11^{111}$  par 6 ?

### Exercice 4 :

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel.

1) Pour  $0 \leq n \leq 6$ , calculer le reste de la division de  $3^n$  par 7.

2) Démontrer que pour tout  $n$ ,  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7.

En déduire que  $3^n$  et  $3^{n+6}$  ont le même reste dans la division par 7.

3) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de  $3^{22}$  par 7.

4) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de  $3^n$  par 7, pour  $n$  quelconque ?

5) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , 7 ne divise pas  $3^n$ .

### Exercice 5 :

L'objectif de l'exercice est de démontrer que tout entier naturel  $n$  a un multiple qui ne s'écrit qu'avec les chiffres 1 et 0.

1) Exemple  $n=24$

On appellera  $a_k$  le nombre formé de  $k$  chiffres 1 ( par exemple  $a_3 = 111$  )

a) Calculer les restes de la division de  $a_3, a_4, a_5$  par 24.

b) Calculer  $a_6 - a_3$

2) Démontrer la proposition pour  $n$  quelconque.

Conseillon du DS du 11/12 - Arithmétique.

I On cherche  $r \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 16q + r$  avec  $0 \leq r < 16$  et  $r = q^2$   
 donc  $n = 16q + q^2$  avec  $0 \leq q^2 < 16$

Les valeurs possibles de  $q$  sont  $0, 1, 2, 3, 4$

si  $q=0, n=0$   
 si  $q=1, n=17$   
 si  $q=2, n=36$

si  $q=3, n=57$   
~~si  $q=4, n=184$~~

à supprime car  $q^2 < 16$

(Complète le DS de mardi 18/12/00)

II On suppose  $a \in \mathbb{N}$  et  $a = 15q + 10 + r$   $q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq r < 8$

Rque :  $0 \leq r < 8 \Rightarrow 0 \leq 10+r < 18$   
 de plus  $10+r \geq 15$  car  $r \geq 5$

si  $5 \leq r < 8$

alors  $10+r \geq 15$  alors  $10+r$  n'est pas le reste de la division euclidienne de  $a$  par 15.  $10+r = 15 + (r-5)$

alors  $a = 15q + 15 + r - 5 = 15(q+1) + r - 5$  avec  $0 \leq r-5 < 3 < 15$

Donc  $r-5$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 15

si  $0 \leq r < 5$

alors  $a = 15q + 10 + r$  avec  $0 \leq 10+r < 15$

Donc  $10+r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par 15

III (\*)  $\forall a \in \mathbb{Z},$  les restes de la division euclidienne de  $a$  par 6 sont  $0, 1, 2, 3, 4$  ou  $5$

Donc,  $\forall a \in \mathbb{Z}, a = 6k$  ou  $6k+1$  ou  $6k+2$  ou  $6k+3$  ou  $6k+4$  ou  $6k+5$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

Supposons  $a = 6k$  alors  $a(a^2-1) = 6k(a^2-1)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6

Supposons  $a = 6k+1$  alors  $a(a^2-1) = a(a-1)(a+1) = (6k+1)6k(6k+2)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$   
 donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6

Supposons  $a = 6k+2$  alors  $a(a^2-1) = a(a-1)(a+1) = (6k+2)(6k+1)(6k+3)$   
 $= 6(3k+1)(6k+1)(2k+1)$   $k \in \mathbb{Z}$   
 Donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6

Supposons  $a = 6k+3$  alors  $a(a^2-1) = (6k+3)(6k+2)(6k+4) = 6(2k+1)(3k+1)(6k+4)$   $k \in \mathbb{Z}$   
 Donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6

Supposons  $a = 6k+4$  alors  $a(a^2-1) = (6k+4)(6k+3)(6k+5) = 6(3k+2)(2k+1)(6k+5)$   $k \in \mathbb{Z}$   
 Donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6

Supposons  $a = 6k+5$  alors  $a(a^2-1) = (6k+5)(6k+4)(6k+6) = 6(6k+5)(6k+4)(k+1)$   $k \in \mathbb{Z}$   
 Donc  $a(a^2-1)$  est multiple de 6.

Concl :  $\forall a \in \mathbb{Z}, a(a^2-1)$  est multiple de 6.

2)  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall a \in \mathbb{Z}, a(a^{2n}-1) = a[(a^2)^n - 1] = a(a^2-1)[(a^2)^{n-1} + (a^2)^{n-2} + \dots + a^2 + 1]$

$\forall a \in \mathbb{Z},$  il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a(a^2-1) = 6k$  (voir 1))

D'où  $a(a^{2n}-1) = 6k[(a^2)^{n-1} + (a^2)^{n-2} + \dots + a^2 + 1]$

$k \in \mathbb{Z},$  le crochet est un entier relatif car  $a \in \mathbb{Z}$

Donc  $a(a^{2n}-1)$  est multiple de 6 pour tout  $n \in \mathbb{N}$

3) a)  $11[11^{110} - 1] = 11[11^{2 \times 55} - 1]$  de la forme  $a(a^{2n}-1)$  avec  $a=11$  et  $n=55$

Donc  $11[11^{110} - 1]$  est divisible par 6

b)  $11[11^{110} - 1] = 11^{111} - 11$

On sait que  $11[11^{110} - 1]$  est divisible par 6, donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$

tel que  $11[11^{110} - 1] = 6k$  donc  $11^{111} - 11 = 6k$

D'où  $11^{111} = 6k + 11$   $11$  n'est pas le reste de la

division euclidienne de  $11^{111}$  par 6 car  $11 \geq 6$

On écrit

$11^{111} = 6k + 6 + 5 = 6k' + 5$   $k' \in \mathbb{Z}, 0 \leq 5 < 6$

Donc 5 est le reste de la division euclidienne de  $11^{111}$  par 6

| IV |     | Correspondance de DS de II/II                |  |
|----|-----|--|--|
| a) | $n$ | $3^n, n \in \mathbb{N}$<br>$0 \leq n \leq 6$ | Les restes de la division de $3^n$ par 7 |
|    | 0   | $3^0 = 0 \times 7 + 1$                       | 1 avec $0 \leq 1 < 7$                    |
|    | 1   | $3^1 = 0 \times 7 + 3$                       | 3 avec $0 \leq 3 < 7$                    |
|    | 2   | $3^2 = 1 \times 7 + 2$                       | 2 avec $0 \leq 2 < 7$                    |
|    | 3   | $3^3 = 2 \times 7 + 6$                       | 6 avec $0 \leq 6 < 7$                    |
|    | 4   | $3^4 = 8 \times 7 + 4$                       | 4 avec $0 \leq 4 < 7$                    |
|    | 5   | $3^5 = 2 \times 7 + 5$                       | 5 avec $0 \leq 5 < 7$                    |
|    | 6   | $3^6 = 7 \times 7 + 1$                       | 1 avec $0 \leq 1 < 7$                    |

b)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{n+6} - 3^n = 3^n \times 3^6 - 3^n = 3^n (3^6 - 1) = 3^n \times 104 \times 7$   
 Donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{n+6} - 3^n$  est multiple de 7

Effectuons la division euclidienne de  $3^{n+6}$  par 7. Il existe un unique couple  $(q, r) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $3^{n+6} = 7q + r$  avec  $0 \leq r < 7$ .  
 On sait que  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7, donc il existe  $R \in \mathbb{N}$  tel que  $3^{n+6} - 3^n = 7R \Rightarrow 3^{n+6} = 3^n + 7R$   
 $\Rightarrow 3^{n+6} = 7q + 7R + r$  avec  $0 \leq r < 7$   
 $\Rightarrow 3^{n+6} = 7(q+R) + r$  avec  $0 \leq r < 7$

Il est donc également le reste de la division euclidienne de  $3^{n+6}$  par 7.  
 Conclusion :  $3^n$  et  $3^{n+6}$  ont le même reste de la division par 7

c)  $22 = 6 + 6 + 6 + 4$

Dans la division euclidienne par 7,  $3^{22}$  a même reste que  $3^{6+6+4}$   
 $3^{6+6+4}$  a même reste que  $3^{6+4}$   
 $3^{6+4}$  a même reste que  $3^4$   
 $3^4$  a pour reste 4 donc  $3^{22}$  a pour reste 4 dans la division euclidienne par 7.

d) On effectue la division euclidienne de  $n$  par 6. Il existe  $(a, R) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n = 6a + R$  avec  $0 \leq R < 6$ .  
 alors  $n = \underbrace{6+6+\dots+6}_a + R$

De la division euclidienne de  $3^n$  par 7,  $3^n$  a même reste que  $3^{n-6}$   
 $3^{n-6}$  a même reste que  $3^{n-12}$   
 $3^{n-6(a-R)}$  a même reste que  $3^{n-6a} = 3^R$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ , de la division euclidienne de  $3^n$  par 7,  $3^n$  a même reste que  $3^R$  avec  $R$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par 6.  $R$  prend donc les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ou 5

e)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $3^n$  a même reste que  $3^R$  avec  $3^0 = 3^0$  ou  $3^1$  ou  $3^2$  ou  $3^3$  ou  $3^4$  ou  $3^5$   
 or  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$  ont pour restes respectifs 1, 3, 2, 6, 4, 5

Donc quand on effectue la division euclidienne de  $3^n$  par 7 avec  $n$  quelconque le reste n'est jamais nul.  
 $\forall n \in \mathbb{N}$ ;  $3^n$  n'est jamais un multiple de 7. Donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n$  n'est jamais divisible par 7

$a_2 = III \quad III = 24 \times 4 + 15$  le reste de la division de III par 24 est 15  
 $a_4 = IIII \quad IIII = 24 \times 46 + 7$  le reste de la division de IIII par 24 est 7  
 $a_5 = IIIII \quad IIIII = 24 \times 462 + 23$  le reste de la division de IIIII par 24 est 23  
 $a_6 = IIIIII \quad IIIIII = 24 \times 4629 + 15$  le reste de la division de IIIIII par 24 est 15  
 $a_6 - a_3 = 111000 = 24 \times 4629 + 15 - 24 \times 4 - 15 = 24k$  avec  $k \in \mathbb{N}$   
 ainsi  $a_6 - a_3$  est un multiple de 24 qui ne se lit qu'avec des 1 et des 0

Soit  $n$  un entier fixé quelconque.

Soit  $r_k$  le reste de la division de  $a_k$  par  $n$ .  $0 \leq r_k < n$

Il y a donc au plus  $n$  valeurs distinctes possibles de  $r_k$  parmi ses valeurs de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, (n-1)\}$

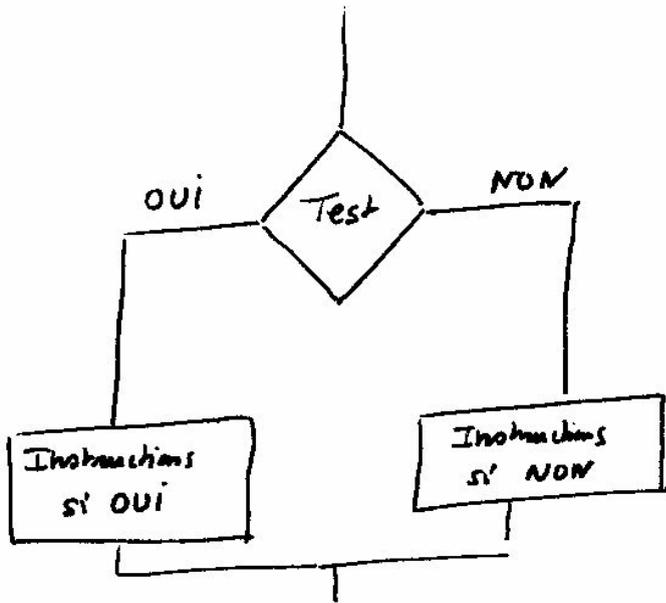
Parmi les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  qui sont  $(n+1)$

nombre distinctes au moins deux ont même reste de la division euclidienne par  $n$  puisqu'il y a au plus  $n$  restes distincts possibles.

On suppose que  $a_i$  et  $a_j$  ont même reste  $-R$  avec  $1 \leq i \leq n+1$  et  $i < j \leq n+1$  et  $j > i$

alors  $a_j = nq + R$  et  $a_i = nq' + R$   $q \in \mathbb{N}, q' \in \mathbb{N}, R \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq R < n$   
 D'où  $a_j - a_i = n(q - q')$   $q - q' \in \mathbb{N}$

Conclusion : On vient de trouver un nombre entier  $a_j - a_i$  qui ne s'écrit qu'avec des 1 et des 0 et qui de plus est un multiple de  $n$ .



CASIO Récentes

```

    IF condition Test
    Then --- Instructions si OUI
    Else --- Instructions si NON
    IF End.
  
```

TI 80, 82, 83, 85, 86

```

    IF ---
    Then ---
    Else ---
    End.
  
```

TI 92

```

    IF --- Then
    Else ---
    End IF.
  
```

Calculatrices sans Instruction ELSE (TI 81 Casio Mais récentes)

```

    IF A = 0 Goto 1
    Instructions si A ≠ 0
    Goto 0
    Lbl 1
    Instructions si A = 0
    Lbl 0
  
```

```

    A = 0 => Goto 1
    Instructions si A ≠ 0
    Goto 0
    Lbl 1
    Instructions si A = 0
    Lbl 0
  
```

Comment reconnaître que B divise A?

Critère  $\frac{A}{B}$  est un entier

Touche **FPart** sur TI dans MATH NUM

$$\text{FPart}(52/5) = 0,4 \quad \text{car} \quad \frac{52}{5} = \underbrace{10}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{0,4}_{\text{FPart}}$$

Touche sur CASIO  $\text{Frac}(52 \div 5) = 0,4$

$\frac{A}{B}$  est un entier équivaut à  $\text{FPart}(A/B) = 0$   
ou  $\text{Frac}$

Comment déterminer si un nombre N est premier ou non?

On va tester la divisibilité par 2 puis par tous les entiers impairs  $3=2+1$ ;  $5=3+2$ ;  $7=5+2$ ;  $9=7+2$  etc ... car il est inutile de rétester les multiples de 2 et la machine fait rapidement les divisions alors qu'il est long de tester parmi les nombres impairs ceux qui sont premiers. Il suffit de tester les entiers  $D \leq \sqrt{N}$  ou tels que  $D^2 \leq N$

Sur CASIO

"N PREMIER": ? → N

2 → D : 1 → C

Lbl 1

If  $D^2 \leq N$

Then If  $\text{Frac}(N/D) = \emptyset$

Then "DIVISEUR": D ▸

Else D+C → D : 2 → C

Goto 1

If End

Else "PREMIER" ▸

End.

Sur Texas

PROGRAM : PREMIER

Disp "N PREMIER?"

INPUT N

2 → D

1 → C

Lbl 1

If  $D^2 \leq N$

Then

If  $\text{FPart}(N/D) = \emptyset$

Then

Disp "DIVISEUR", D

Else

D+C → D

2 → C

Goto 1

End

Else

Disp "PREMIER"

End.

Pour tester le programme :

703 est divisible par 19 - 853 est premier.

## DECOMPOSER UN NOMBRE EN FACTEURS PREMIERS

Objectif : Décomposer  $N$  en facteurs premiers

On commencera par tester la division par 2 et ses puissances puis on cherchera les facteurs impairs  $3 = 2 + 1$ ,  $5 = 3 + 2$ ,  $7 = 5 + 2$ ,  $9 = 7 + 2$  (même si c'est inutile car il n'y a pas sur TI80 une liste des nb premiers...)  $11 = 9 + 2$ , etc...

Les diviseurs seront rangés par ordre croissant dans la liste L1 préalablement effacée.

Il suffit de tester les diviseurs premiers inférieurs ou égaux au nombre restant à décomposer

Si  $\frac{N}{D}$  est un entier alors  $D$  divise  $N$  et va compléter la liste des diviseurs (Numéro I)

Il faut alors continuer en décomposant  $\frac{N}{D}$  en facteurs premiers

Rappel "A la main"

|     |   |
|-----|---|
| 120 | 2 |
| 60  | 2 |
| 30  | 2 |
| 15  | 3 |
| 5   | 5 |
| 1   |   |

Programme à tester avec 120  
mais  $16758 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 19$

Sur TI  
Si toute la liste L1 ne tient pas à l'affichage, réaffichez avec 2nd L1 puis se déplacer avec le curseur  $\blacktriangleright$  pour voir les nombres suivants.

sur TI 80

PROGRAM : DECOMPO

```

Disp " N "
Input N
2 → D
1 → C
1 → I
ClrList L1
Lbl 1
If D² ≤ N
Then
If FPart(N/D) = 0
Then
D → L1(I)
I + 1 → I
N/D → N
Else
D + C → D
2 → C
End
Goto 1
End
N → L1(I)
Disp "FACTEURS", L1
    
```

Liste L1 accessible avec 2nd L1  
car écrit en orange  
Pour effacer une liste  
ClrList ("Clear List") accessible  
avec STAT 4

## Arithmétique et calculatrices

## 1) Comment déterminer si un nombre est multiple d'un nombre donné dans un programme ?

On utilisera la partie fractionnaire du quotient. Exemple  $\frac{52}{5} = 10 + 0.4$ , avec 10 = partie entière et 0.4 = partie

fractionnaire. 0.4 est obtenu avec  $\text{Frac}(52 \div 5)$  sur Casio et  $\text{FPart}(52/5)$  sur Texas (en général dans menu MATH puis NUM). 5 ne divise pas 52 car 0.4 est non nul.

Un critère de divisibilité de A par B est  $\text{FPart}(A/B)=0$

## 2) Comment déterminer si un nombre N est premier ou non ? Dans le deuxième cas, comment trouver son plus petit diviseur premier ?

Principe : On ne va pas disposer d'une liste des nombres premiers sur les calculatrices ; on va donc tester la division par 2 puis par tous les nombres impairs  $3=2+1$ ,  $5=3+2$ ,  $7=5+2$ ,  $9=7+2$ ... car il est inutile de retester la division par 4, 6, 8... qui sont des multiples de 2 si on a montré qu'un nombre était non divisible par 2. La machine fait rapidement les divisions et il serait plus long de tester parmi les entiers impairs uniquement ceux

qui sont premiers. D'après le cours, il suffit de tester les entiers  $D \leq \sqrt{N}$  ou tels que  $D^2 \leq N$  comme diviseurs.

## Programme pour CASIO

```
"N ◻ PREMIER" : ? → N
2 → D : 1 → C
Lbl 1
If  $D^2 \leq N$ 
Then If  $\text{Frac}(N \div D) = 0$ 
Then "DIVISEUR" : D ◀
Else D + C → D : 2 → C
Goto 1
IfEnd
Else "PREMIER" ◀
End
```

## Programme pour Texas (sauf TI 81)

```
PROGRAM : PREMIER
Disp "N ◻ PREMIER ?"
Input N
2 → D
1 → C
Lbl 1
If  $D^2 \leq N$ 
Then
If  $\text{FPart}(N/D) = 0$ 
Then
Disp "DIVISEUR", D
Else
D + C → D
2 → C
Goto 1
End
Else
Disp "PREMIER"
End
```

Sur calculatrices avec calcul formel (HP40, TI89, TI92)  
La commande Factor donne la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.  
Si elle retourne le nombre entré, cela signifie que celui-ci est premier.

## 3) Décomposer un nombre N en facteurs premiers

On commence par tester la division par 2 puis par tous les nombres impairs 3, 5, 7, 9... même si c'est inutile pour les nombres impairs non premiers.

Sur les calculatrices TI qui disposent de listes (80, 82, 83, 86), les diviseurs sont rangés par ordre croissant dans la liste L1 préalablement effacée. Il suffit de tester les diviseurs premiers inférieurs ou égaux à la racine carrée du nombre restant à décomposer.

Si  $N/D$  entier, alors D divise N et D va compléter la liste L1 des diviseurs. Il faut alors continuer en décomposant  $N/D$  en facteurs premiers.

Programme à tester avec  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$  puis avec  $16758 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 19$

Sur TI, si toute la liste L1 ne tient pas à l'écran, la réafficher en entrant L1 seul puis se déplacer avec les curseurs de déplacement.

```
Sur TI 80, 82, 83, 86
PROGRAM : DECOMPO
Disp "N"
Input N
2 → D
1 → C
1 → I (lettre I = N° du diviseur)
ClrList L1
Lbl 1
If  $D^2 \leq N$ 
Then
If  $\text{FPart}(N/D) = 0$ 
Then D → L1(I)
I + 1 → I aller à la ligne
N/D → N
Else
D + C → D
2 → C
End
Goto 1
End
N → L1(I)
Disp "FACTEURS", L1
```

## Programme pour calculatrices Casio sans liste

```
? → N
2 → C
 $\sqrt{N}$  → B
Lbl 1
C > B ⇒ Goto 2
If  $\text{Frac}(N \div C) = 0$ 
Then C ◀
Goto 4
IfEnd
C + 1 → C
Goto 1
Lbl 4
(N ÷ C) → N
Goto 3
Lbl 2
N ◀
"FIN"
```

### Calcul de PGCD(a,b) par l'algorithme d'Euclide

Exemple de programme écrit pour calculatrice Texas, facilement adaptable aux autres marques  
 Pgcd se dit en anglais gcd (greatest common divisor) pour comprendre la touche des calculatrices style TI 89 ou HP 40.

Consigne : Pour tous, traduire par une phrase de commentaire le programme ci-dessous.  
 Pour tous ceux qui n'ont pas de touche pgcd, rentrer le programme.  
 Pour tous, tester sur votre calculatrice Pgcd(4539,1958)=89

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| PROGRAM : PGCD              |    |
| DISP "PGCD(A,B) □ ET □ A>B" | 1) |
| DISP "A"                    |    |
| INPUT A                     |    |
| DISP "B"                    |    |
| INPUT B                     |    |
| LBL 1                       | 2) |
| A Int÷B→Q                   | 3) |
| A-B×Q→R                     | 4) |
| If R≠0                      | 5) |
| THEN                        | 6) |
| B→A                         |    |
| R→B                         | 7) |
| GOTO 1                      | 8) |
| ELSE                        | 9) |
| DISP B                      |    |

PROGRAMMATION THEOREME DE BEZOUT

A et B entiers naturels donnés avec  $A > B$   
 Trouver deux entiers relatifs U et V tels que  $AU + BV = \text{Pgcd}(A, B)$

Démarche

$$\begin{aligned} a &= bq + r_0 \\ b &= r_0 q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= \dots \end{aligned}$$

$$r_{n-2} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}$$

Le Pgcd de a et b est le dernier reste non nul

Il s'agit d'exprimer  $r_n$  en fonction de a et b  
 sous la forme  $r_n = u_n a + v_n b$

( $u_n$  et  $v_n$  existent mais sont non uniques)

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} \text{ équivaut à}$$

$$u_{n-1} a + v_{n-1} b = u_n q_{n+1} a + v_n q_{n+1} b + u_{n+1} a + v_{n+1} b$$

Pour que cette égalité soit vérifiée, il SUFFIT que

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_{n-1} - u_n q_{n+1} & (1) \\ v_{n+1} = v_{n-1} - v_n q_{n+1} & (2) \end{cases}$$

Pour connaître un terme il faut avoir calculé les 2 termes précédents. Il est judicieux de découper la suite  $(r_n)$  de 2 termes par la forme commençant par a et b (cf 1<sup>er</sup> colonne au début - Algorithme d'Euclide).

$$R_n = r_{n-2} \quad n \geq 2 \quad R_0 = a \quad R_1 = b$$

donc on découpe de même  $(u_n)$  et  $(v_n)$  avec

$$\begin{aligned} A &= 1 \times A + 0 \times B & \text{donc on choisit} & \begin{cases} U_0 = 1 & V_0 = 0 \\ U_1 = 0 & V_1 = 1 \end{cases} \\ B &= 0 \times A + 1 \times B \end{aligned}$$

$U_n$  et  $V_n$  vérifient les relations (1) et (2) avec

$Q_{n+1}$  quotient de  $R_{n-1}$  par  $R_n$

Variables utilisées pour le programme

Programme pour TI 80

```

PROGRAM : BEZOUT
Disp " AU + BV = D LET A > B "
Disp " A "
Input A
Disp " B "
Input B
1 -> U
0 -> W
0 -> V
1 -> X
A -> R
B -> Y
Lbl 1
R Int = Y -> Q (ou TI autre Int(R/Y) -> Q)
U -> Z
W -> U
Z - Q*W -> W
V -> Z
X -> V
Z - Q*X -> X (Z moins Q multiplié par X)
R -> Z
Y -> R
Z - Q*Y -> Y
If Y = 0
Goto 1
Disp " U ", U
Disp " V ", V
Disp " D ", R
    
```

| $U_n$ | $V_n$ | $R_n$ | $U_{n+1}$ | $V_{n+1}$ | $R_{n+1}$ | $Q_{n+1}$ | Calculs intermédiaires |
|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------------------|
| U     | V     | R     | W         | X         | Y         | Q         | Z                      |

$D = \text{PGCD}(A, B)$   
 Pour tester  $A = 4539$   $B = 1958$   
 $U = -3$   $V = 7$   $D = 89$   
 $7 \times 1958 - 3 \times 4539 = 89$

Pour les élèves qui ont HP 40 - Dans le menu Intégr (Entier) de la touche MATH  
 IEgcd (A, B) renvoie U, V et PGCD (A, B)  
 A tester sur l'exemple numérique ci-dessous.

En anglais - Ppcom = ppm - Least common multiple - La touche existe sur HP40, TI 89, TI 82  
 - Si par le truché ppm, utiliser pour vérifier programme Pgcd puis ppm(a,b) =  $\frac{ab}{\text{Pgcd}(a,b)}$



## SEANCE DE PROGRAMMATION DE P1 (COURS N°5)

Donc les deux programmes que je propose tout faits et éventuellement après vous pourrez en faire d'autres. Pour bien être sur que tout le monde a compris les en gros les ... entre les instructions de base pour la programmation, on ne va pas programmer très très souvent dans l'année, en fait il restera après euh deux programmes à faire bon plus des facultatifs c'est-à-dire que pour exemple la liste des diviseurs, je peux vous le proposer si vous avez envie de le faire éventuellement, c'est pas obligatoire à cette séance c'est pas un programme obligatoire.

Les deux programmes qu'on va faire aujourd'hui c'est chercher si un nombre est premier comme on cherche à la main, simplement on va tester des diviseurs autres que les nombres premiers parce qu'on n'a pas de liste de nombres premiers dans euh la machine et deuxième chose qu'on va faire à la machine, ça vous permettra de vous contrôler le jour du bac surtout si vous êtes étourdi, c'est décomposer un nombre en facteurs premiers et le programme tourne bien pour des nombres beaucoup plus grands que ceux qui sont dans les annales. Alors pour faire ça je vais donner un certains nombres d'explications (*Un élève entre en cours*) ...

Euh donc ce que je veux faire aujourd'hui c'est un peu des instructions de programmation de base alors je pense que ceux d'entre vous en fait qui ont programmé en dehors euh ce que je vais raconter sera relativement connu et euh parce que je vais simplement parler des tests conditionnels et de choses comme ça, je ne vais pas prendre beaucoup de temps (mais qu'au moins vous pourrez essayer dans vos propres machines ...)

Euh dans un deuxième temps, pour les (...) en facteurs premiers, j'ai besoin d'un programme euh en fait de choses que vous n'avez sans doute jamais utilisées qui sont en fait les listes statistiques. Euh le principe que je vais utiliser c'est que quand j'ai par exemple 2 au carré fois 3 au cube fois cinq etc. ces deux, ces trois je vais les coller dans une liste parce que si je ... si je fais afficher le produit, je ne verrai plus rien, je retrouverai le résultat du produit, je ne verrai pas chacun des termes.

Donc la solution que j'ai utilisée bon, on peut en prendre d'autres, on peut aussi afficher les diviseurs un par un, c'est ce que je proposerai sur les vieilles Casio. Mais pour les calculatrices Texas ou les Casio récentes dans la mesure où l'on dispose de listes on va un peu apprendre à les utiliser.

Donc je fais ça au rétro projecteur et donc vous aurez une synthèse de tout enfin sauf du premier transparent mais qui est très court.

Le premier principe qu'on va utiliser en programmation, donc ce que j'ai dit en haut c'est qu'on va avoir des besoins de tests avec des réponses oui ou non.

Bon je prends un exemple de ce qu'on fait à la main quand on décompose un nombre en facteurs premiers. On teste les divisions par 2, puis par 3 puis par 5. La réponse à le reste de la division par 3 par exemple est nul ou n'est pas nul, il y a deux réponses possibles, soit le reste de la division est nul soit il n'est pas nul. Donc ça, c'est la première item de programmation dont j'ai besoin. Donc du point de vue logique, ça veut dire que je vais poser une question, alors dans l'exemple que je vais prendre en fait ça sera par exemple la partie fractionnaire égale zéro voudra dire que a divise b et donc la réponse du test c'est oui ou non et je vais donner des instructions si oui et je vais donner des instructions si non hein.

Et puis bon, à la fin, le programme se rejoint on le termine on finit ou on continue sur autre chose et c'est tout.

Alors les instructions c'est (...) en français des si sinon hein et je vous avais mis euh test avec réponse oui ou non (*va écrire au tableau*).

Si je prends du français, ça peut donner (parce que bon les calculatrices travaillent en...) si on fait quelque chose, donc on regarde un test sur lequel la réponse est si quelque chose oui alors je fais ça sinon je fais autre chose. Et donc, euh, du point de vue langage parce que moi j'ai écrit tout pour les ... j'ai écrit des programmes pour plutôt la TI 80 et plutôt pour certains types de Casio parce que je ne les ai pas donc il faudra éventuellement vous adapter un petit peu, alors c'est toujours if, then, else et puis terminer le conditionnel hein.

Simplement sur les ... donc les Casio récentes ou les TI 92, je pense que la 89 aussi j'l'ai pas regardée, le end il faut préciser que c'est une fin d'un test conditionnel ou non c'est-à-dire, sur les petites euh les petites Texas, le end sert de fin d'instruction à des tas de choses, sur les Casio plus perfectionnées donc on les dernières Texas, il faut mettre un end if pour fermer le test conditionnel.

## Annexes chapitre C1

Donc ça c'était la première chose que je voulais dire. Bon petite remarque, je ne sais plus si il y en a dans la classe, les TI 81 il y en a ou pas, je crois y'en a plus dans votre classe. Et sur les vieilles Casio, je crois .. est qu'il y en a qui ont des Casio noires ?

(...) en fait on triche, on met si a égale zéro donc on fait un test sur a égale zéro ou a différent de zéro. Si a égale zéro, on va à un label et si a est différent de zéro, ça passe directement ici donc on met les instructions si a différent de zéro et on met un goto zéro, on s'arrange avec des labels (il faut en fait bricoler les programmes).

Euh je ne veux pas me lancer dans les détails je vais m'assurer de toute façon que toutes les machines tournent avant de (...).

Bon je pense à quelque chose donc que vous ne prenez pas en note parce que ça je vous l'ai donné par écrit, euh je vais peut-être vous le donner avant .... Donc je vais vous les donner donc ça j'ai tapé ... *(passe dans les rangs distribuer la feuille)*.

Euh, ... donc euh les programmes, ce que je voudrais vous expliquer c'est donc un peu plus les ... euh les structures, pour que en cas où euh vous voudriez vous amuser à faire d'autres programmes à l'occasion ou des choses comme ça, vous ne soyez pas quand même complètement ignares en programmation, sachant que en fait, en terminale, le fait de faire des programmes ne fera pas partie des... des évaluations, c'est-à-dire qu'il faut faire une différence entre ce qui est culture que je veux que vous ayez en sortant de terminale et ce qu'on peut vous demander un jour de devoir surveillé ou au bac. Je pense (...) il n'est pas question de vous donner un programme à taper.

Alors je vais reprendre les donc les explications au début. Ca on l'avait déjà parlé un petit peu. Pour ... dans le programme, j'utilisais que b divise a, je prends comme critère que a sur b est un entier et donc je prends comme critère que la partie fractionnaire de a sur b est égale à ... zéro, c'est-à-dire que quand vous divisez, je vais prendre des exemples numériques.

Si je divise 10 par 5 ça donne 2, donc ça donne 2 plus une partie fractionnaire qui est nulle. Si je prends 9 cinquième, si je demande la partie fractionnaire de neuf cinquième, neuf cinquième c'est un entier qui est 1 plus une partie fractionnaire qui est quatre cinquième. Donc le test que j'ai pris pour programmer, euh je dis qu'on pourrait faire d'autre choix c'est comme la touche de division là que je vous avais montrée le (math int) là ou le euh (...) qui existe sur la TI 80 mais qui n'existe pas sur toutes les machines, j'ai pris ce principe là, hein.

Donc je vous ai mis des euh vous avez donc un exemple avec cinquante deux cinquième hein, dix plus zéro virgule 4, comme zéro quatre n'est pas entier ça prouve que cinq ne divise pas cinquante deux.

Alors ensuite, on rentre donc dans le programme comment déterminer si un nombre n est premier ou non. Alors comme je ne dispose pas, ce que j'ai expliqué au début, comme je ne dispose pas de liste de nombres premiers sur les petites calculatrices, je vais faire des économies mais des économies qui sont minimales. Je ne vais pas tester quand même la division par 4, par 6, par 8 c'est à-dire que ce que je suis en train de raconter là sur le haut du ... c'est qu'à la main, je teste les divisions par 2, 3, euh 5, 7 et après je saute à nombre premier suivant c'est 11. Pour (...) la machine ça me prendrait plus de temps euh ... ça me prendrait plus de temps de faire un programme qui me donne les nombres premiers parce qu'il faudrait que j'adapte ma liste de nombres premiers à la taille du nombre et peut être que je ferais mouliner la machine longtemps.

(...) Je ne vais pas tout tester, c'est-à-dire que si je prends tous les nombres euh donc ici y'a 4, ici y'a 6, ici y'a 8, ici y'a 9, 10. Je dis que les nombres pairs, je vais quand même en faire l'économie parce que les nombres pairs, ça fait un nombre sur deux donc si je fais tester les divisions par tous les nombres pairs, ça fait un programme qui tourne exactement deux fois plus euh longtemps. Donc ceux-là, on va les enlever.

Par contre le programme va quand même tester la division par 9 et va tester de la même façon (la division d'après) c'est pas grave, mais va aussi tester la division par 15 alors que 15 c'est trois fois cinq, c'est-à-dire si le nombre avant n'est plus divisible ni par 3 ni par 5, tester la division par 15 c'est un peu idiot mais comme le gain en terme de programme est court je vais la tester quand même.

Alors comment est fait ce programme.

On va peut-être regarder la colonne du programme Texas, bon euh les deux programmes c'est les mêmes hein. Euh donc je vous ai proposé le programme en deux temps donc le premier programme c'est celui que vous avez en haut sur la feuille, c'est comment tester donc si un nombre est premier ou non, et donc on va tester les diviseurs parmi les nombres impairs qui sont premiers et on va quand même utiliser le résultat du cours. On sait que si on ne trouve pas de diviseur inférieur ou égale à la racine carrée, le

## Annexes chapitre C1

nombre est premier donc c'est ça qui va servir de test d'arrêt final. Pour le  $D$  inférieur ou égale à racine de  $n$ , je dis que ça n'a pas d'importance, je l'ai passé au carré et je vais en fait l'utiliser comme  $D$  carré inférieur ou égale à  $n$ , je vais essayer de prendre des notations qui soient euh, logiques.

Bon le programme a donc, euh bon ça c'est son titre, euh je l'ai appelé premier simplement pour que les titres des programmes soient sans ambiguïté (le jour où) vous (allez) les utiliser. Bon le début du programme, je pense que euh, je vous remis de toute façon du texte, c'est pour vous. J'ai fait afficher, pour quand vous l'utilisez,  $n$  premier point d'interrogation au cas où vous ayez oublié d'après le titre ce qu'il fait, ça vous le remémore, ce sont des commentaires que vous pouvez éventuellement supprimer, c'est juste des aides.

Donc on rentre  $n$ . Et après donc, quand on commence à tester, on fait comme à la main, le premier nombre par lequel on teste la division c'est le nombre 2 donc j'écris 2 donne  $D$ .

Il faut maintenant que j'explique le rôle du  $c$ . Le rôle du  $C$  c'est juste ça, c'est qu'en fait je vais tester de 2 à 3, ici il y a une différence de 1. Pour tous les nombres suivants pour lesquels je vais tester la divisibilité, parce que j'ai dit que je testais par les nombres impairs, la constante vaudra 2. Donc en fait, ce que j'ai fait, c'est que le  $C$  c'est la différence entre deux diviseurs que je vais tester et l'avantage de lui donner un nom, c'est que ça évite de faire un sous-programme avant pour la division par des puissances de 2 en regardant si elles sont euh grandes ou non. Donc c'est pour ça que vous voyez au début 1 donne  $C$ , parce qu'on va passer de 2 à 3, et que voyez nettement plus bas ici 2 donne  $C$ , parce qu'à part au tout début, cette constante de différence on prendra toujours la valeur 2.

Bon après le programme est fait, en fait, de deux euh de ... deux instructions différentes. Donc il y a un `if then else` dont j'ai déjà parlé et l'autre instruction, on a besoin très souvent en programmation, euh celle là, ce que je vous ai dit tout à l'heure, c'est est-ce que tout le monde l'a utilisé l'année dernière, les labels ? Pour voir ce que ça veut dire ou il faut que je réexplique, il vaut peut-être mieux que je réexplique.

Bon les labels, ça va être pour faire des tests. On va s'en servir beaucoup, c'est des instructions de boucle pour faire des tests répétitifs.

Quand je prends un nombre à la main, ... donc un exemple le 709, donc mettons que je rentre dans la machine le nombre 709.

Il faut comprendre l'analogie avec ce qui se passe à la main. Quand je prend 709, je commence par tester comme diviseur 2, et puis je réponds 2 ça va pas ... hein. Après je teste comme diviseur 3 et donc, ce que je vais faire faire à la machine, ça va être des tests répétitifs c'est-à-dire qu'à ce niveau là donc, à 709 divisé par 3, on va regarder si la partie fractionnaire est nulle ou non. Bon ici la partie fractionnaire est non nulle donc il faudra passer au diviseur suivant qui sera ... cinq c'est-à-dire que j'irai recommencer l'action avec un diviseur qui aura pris la valeur suivante.

Donc dans ce programme qui est ici, il y a en fait deux instructions un peu emboîtées. Ici, vous avez l'instruction de début de boucle qui va vouloir dire on retournera ici ... ici, quand le diviseur n'aura pas marché parce que ça va prendre le diviseur suivant.

Donc ici on commence là, vous avez le `if then else`, vous avez donc le test conditionnel. C'est pas la peine de continuer à diviser si  $D$  carré est inférieur ou est supérieur  $n$  et qu'on a trouvé que tous les  $D$  d'avant ne marchaient euh pas. Euh on ne va pas continuer l'action.

Donc si  $D$  carré est inférieur ou égale à  $n$ ,  $D$  est un diviseur premier potentiel enfin premier ou non en fait, mais ça n'a pas d'importance parce que s'il n'est pas premier, il marchera pas.

Si la partie entière de  $n$  sur  $d$  est égale à zéro, ça veut donc dire que  $D$  divise ...  $n$ . Alors je vais lui faire afficher donc du coup, là je vous ai mis des flèches, faire afficher que il y a comme diviseur, la valeur de  $D$  que je viens de trouver.

Bon sinon ... donc on commence ici ... sinon c'est que  $D$  n'était pas un diviseur, donc il faut que je passe au diviseur suivant. Le diviseur suivant, c'est ce que j'ai expliqué ici, si ici j'ai  $D$ , le diviseur suivant c'est  $D$  plus la constante de différence.

Donc le premier coup où je passe la boucle, (où) ça n'a pas marché pour 2, ça marchera, ... euh, le nombre suivant sera 3. Par contre dès que j'ai passé la boucle une fois, il faut que ma constante reste égale à 2, hein. c'est pour ça qu'ici vous avez le 2 donne  $C$ . Donc si ce diviseur là n'a pas marché, je retourne ici et je vais donc tester le diviseur suivant.

## Annexes chapitre C1

Par contre si je ne suis pas passé ici, c'est que je n'ai pas trouvé de diviseur inférieur ou égale à  $n$  et donc je vais demander à la machine de m'afficher que le nombre est ... premier.

Et là je mets donc une instruction de fin de programmation c'est-à-dire qu'en fait j'ai fermé euh ... j'ai fermé les ouvertures de mes instructions.

Bon donc ça c'est le premier programme. Je vais continuer avec en expliquant le deuxième hein et je vérifierai tout à l'heure que ça marche chez tout le monde, j'ai prévu des exercices pour gérer les différents usages de la machine.

Et le deuxième programme que je propose, c'est donc sur le même principe, c'est un programme un peu plus sophistiqué, utiliser le même principe pour décomposer un nombre en facteurs premiers.

Voilà on peut cette fois ci, euh vous n'avez à l'écran que le programme Texas bien que ce qui correspond euh deuxième colonne du programme que vous avez en ... ce que vous avez au tableau c'est les deux premières colonnes.

Donc principe, objectif décomposer un nombre en facteurs premiers. Donc même principe que tout à l'heure, comme je viens de l'expliquer, je pense que ce n'est pas la peine de réexpliquer.

Je vais aussi chercher si parmi les facteurs il y a 9 même si c'est idiot parce que comme ça prend pas de temps ou très peu, euh, on le cherchera quand même en sachant que la réponse sera toujours non.

Et c'est là que je vais commencer à utiliser les listes de statistiques. Donc sur les ... euh sur la Ti 80, les listes de statistiques sont des instructions en jaune qui sont (l un), pour ceux qui ont des grosses machines je pense qu'il faudra (aller chercher dans ...) enfin bon, si il a des gens qui ont des problèmes tout à l'heure pour trouver les touches, on regardera ensemble.

Alors les listes, simplement y'a des précautions à prendre. Comme quand vous aurez fait tourner le programme une fois on aura mis dans la liste les facteurs premiers du nombre précédent, je suis obligée dans mon programme, bon euh ...

Le début je dirais est pareil, je rentre mon nombre, euh, je rentre le premier diviseur  $D$ , le  $C$  c'est le même que dans le programme d'avant, c'est la constante de différence entre les deux nombres par lesquels je teste la division, et simplement le  $i$ , c'est le numéro du nombre dans la décomposition en facteurs premiers.

Bon je prends un exemple simple pour vous montrer. Imaginez que le nombre que j'ai donné c'est 2 au cube fois 3 fois 5. Pour comprendre ce que va m'afficher la machine dans ce cas là, je dis que ça, ça s'écrit  $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ , ça je vais pas m'amuser à regrouper les nombres parce que je dis sinon que j'ai des problèmes de résultats que j'arriverai plus à analyser.

Donc l'objectif c'est que pour le nombre qui est là, la machine m'affiche cette liste là sous cette forme là, ce qui rendra pas les choses bien compliquées, il suffira de compter le nombre de 2, le nombre de 3 le nombre de 5.

Le  $i$  ici ce sera le numéro du diviseur c'est-à-dire que sur cet exemple là, ça, ça donnera l un de un, celui là s'appellera l un de ... deux, c'est le deuxième terme de la liste l un, celui-là s'appellera de la même façon l un de trois, l un de quatre, l un de cinq.

Donc le  $i$  c'est le numéro du diviseur premier sachant que plusieurs termes peuvent être égaux si (...) des exposants.

Bon il faudra prendre la précaution d'effacer les ... listes. Alors pour effacer les listes, tout ce qui est liste je dis, à part les touches (genre l un et touches qui apparaît à l'écran), il faut en général aller dans le menu ... euh statistique et, sur la TI 80, c'est la dernière instruction qui vous donnera ça. Vous n'avez pas clr, il faut trouver cette instruction là, donc elle est en bas quand vous êtes en stats, c'est le c'est la dernière instruction ... Là c'est pareil, si vous la trouvez pas sur des machines autres bon, je viendrai la chercher avec vous.

Bon le principe est exactement le même, je teste un diviseur et je regarde si la partie entière de  $n$  sur, euh la partie fractionnaire est nulle ou non.

Quand elle est nulle, ça veut dire que c'est un diviseur donc je vais le mettre dans le numéro  $i$  qui sera l'endroit où j'en serai. J'avance le numéro de diviseur de 1, parce que ça voudra dire qu'après je cherche le diviseur suivant et sinon je continue sur les diviseurs suivants. Donc je continue et je fais afficher les facteurs (les l un).

Alors en bas je vous ai mis une instruction euh ... qui va être utile dans certains cas. Il y a, il peut y avoir des problèmes de taille d'écran. C'est-à-dire que si vous avez le jour du Bac des nombres pas très grands

## Annexes chapitre C1

mais qu'avec des facteurs 2 et des facteurs 3, peut-être que quand vous allez afficher, vous aurez des petits ... pointillés. Donc je vous ai donné comme conseil c'est qu'à ce moment là, la liste 1 un vous pouvez la revoir, vous ferez seconde 1 un. Et à ce moment, vous vous déplacerez après avec les curseurs sur lesquels vous vous déplacez à l'écran, c'est ce que j'appelle le pavé des curseurs, ce pavé là euh de déplacement et vous pouvez à ce moment là avancer et reculer dans la liste exactement comme vous voulez. Donc si jamais le nombre premier euh le nombre pardon le nombre premier qu'on vous donne à décomposer à plein de facteurs, vous vous déplacerez avec euh ceci.

Alors j'ai mis ici des tests c'est-à-dire que il y a des nombres euh il y a 120, ça je crois que je n'avais plus la place de vous les mettre, bon je vais vous les mettre.

Ce que vous allez faire c'est que chacun des programmes, on va les rentrer, et je vais vous redonner des tests pour les tester.

Alors ceux qui ont des HP, euh 40, là ou les TI 80 ou 92, je dirai qu'il n'y a pas nécessité de rentrer les programmes. Ce qui serait bien, c'est éventuellement de les comprendre et ce que vous pouvez faire sur les mêmes principes, c'est en fait en utilisant soit des listes soit des choses comme ça, vous pouvez sur le même principe faire des programmes qui donnent donc la liste des diviseurs d'un ... entier. Bon si vous avez vraiment du mal, éventuellement, on pourra (regarder ça) à une pause ou certains jours.

Ce qui serait important c'est que vous compreniez les structures, pas que vous soyez capables je dirai forcément de me faire un programme ce n'est pas le but ici (...). Je pense que euh, c'est un objectif trop difficile pour la classe de ... de terminale.

Donc le plan de travail que je vous propose ...

Les labels, les goto et tout, tout le monde sait qu'ils sont dans les instructions de programmation donc il faut c'est pareil il faut (...).

Donc ... je voudrais que vous rentriez les programmes ...donc je dis sauf si vous avez une 89 ou une 92 ... ou une HP 40 (*en train d'écrire au tableau*), c'est pas la peine puisqu'à ce moment là vous utilisez les touches, c'est ce que je vous ai mis dans la colonne vous utilisez les touches factor et ça revient au même hein. Euh donc à ce moment là, vous pouvez vous dispenser de rentrer les ... de rentrer les programmes.

Donc du coup je vais donner des plans de travail un peu étalés puisque vous n'avez pas les mêmes choses à faire. ...

Alors pour tester les programmes, je vous suggère celui-là, vous vérifierez que pour 703, sur le programme numéro un, il vous sort comme diviseur ... 19, que pour 853, il vous affiche que c'est un nombre ... premier et pour le programme numéro, deux vous testerez 120 (...) vous testerez 120 et vous testerez 16 758. Normalement si ça tourne sur ces deux là, ça tournera quelque soit la ... la valeur.

Donc deuxièmement donc, je vais vous donner les corrigés des exos un à huit pour aujourd'hui ...euh sauf ... euh il en manque un qu'on corrigera au tableau ... on le fera au tableau tout à l'heure ... Après vous finirez la feuille, simplement y'en a un (à remplacer par une activité du livre (...)) ... Bon et si y'en a qui finissent avant j'ai du travail parce que tout façon je vais vous en donner pour la semaine prochaine euh pas maintenant ...

(292)



## Cours P1

## DIVISION EUCLIDIENNE

Schéma 1 :

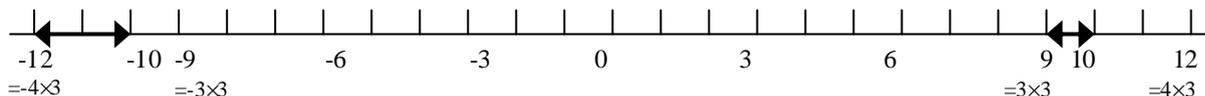


Schéma 2 :

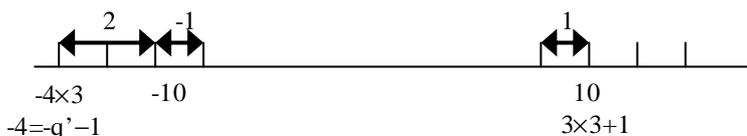
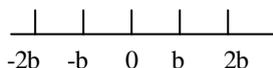


Schéma 3 :



| Lignes | Discours  | Remarques                         |
|--------|---|-----------------------------------|
| 1      | <b>P</b> : Bon ce que je propose c'est que je fais le cours sur la division et tout à l'heure si vous avez des questions sur des trucs que j'ai marqués dans vos copies, j'y répondrai en passant dans les rangs.   | 8h22<br>(Brouhaha dans la classe) |
| 2      | <b>P</b> : Aujourd'hui on va faire la théorie de la division qui est un cours qui est pas très long et après quoi on commencera des exercices. Par contre c'est un cours qui va prendre donc 20 minutes je pense, il y a 20 minutes de cours mais il y a 2h30 3h d'exercices sur les notions de division. Cad que le problème c'est qu'il y a énormément de démarches.  |                                   |
| 3      | <b>P</b> : Je pense que vous n'allez pas apprendre grand chose de nouveau sur les nombres positifs. Cad que sur les nombres positifs il s'agit de faire la théorie de la division de l'école primaire, d'expliquer que je sais pas que 12 c'est divisé par 5, 2 fois 5 plus 2 ou des choses analogues.  |                                   |
| 4      | <b>P</b> : Donc pour les nombres positifs, vous n'allez rien apprendre de bien nouveau si ce n'est la seule différence c'est qu'on va faire la théorie de la division cad qu'à partir des propriétés de $\mathbb{N}$ qu'on a donné le premier jour que toute partie non vide de grand $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément on va prouver l'existence et l'unicité du quotient et du reste dans la division. |                                   |
| 5      | <b>P</b> : Par contre il y a un petit problème pour diviser un nombre négatif par un nombre positif parce que là il y a des petites choses à apprendre. Les critères sur les restes c'est qu'on impose des restes positifs et donc il y a un problème du côté des nombres négatifs.   |                                   |
| 6      | <b>P</b> : Donc ce que je vous propose c'est qu'on va faire une introduction à partir des multiples. Je vais vous le montrer sur un nombre positif et un nombre négatif et après on fera la démonstration théorique.  | (Brouhaha dans la classe)         |
| 7      | <b>P</b> : Donc le cours d'aujourd'hui c'est ce qu'on appelle la division, on précise souvent que c'est la division euclidienne à cause des livres d'Euclide et de la théorie qu'il a développés. Dans la pratique division tout court c'est ce que je dirai souvent.   | (Brouhaha dans la classe)         |
| 8      | <b>P</b> : Alors y'a ... Je vais commencer par théorème et définition, je vais les faire tourner avant de les démontrer.  | 8h25<br>(Classe plus calme)       |

Annexes C1

|    |   |   |
|----|---|---|
| 9  | <b>P</b> : Au départ on prend un entier donc vous faites bien attention aux hypothèses. a est un entier relatif par contre, ce par quoi je divise, vous savez que vous n'avez pas le droit de diviser par 0 et pour des histoires de convention on va systématiquement diviser par des nombres positifs. Donc a appartient à Z et b appartient à N étoile. Et on va démontrer qu'il existe un couple q r unique avec q dans Z, r dans N et le reste | (P écrit au tableau)<br>$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ . Il existe un couple (q,r) unique avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ |
| 10 | ... (Silence)   |   |
| 11 | <b>P</b> : Bon quand vous faites on prend un exemple simple, quand vous faites une division par 5 vous savez que le reste d'une division par 5 c'est 0, 1, 2, 3 ou 4.   |   |
| 12 | <b>P</b> : Donc de manière générale, si je divise par b, le reste sa propriété ça va être qu'il peut être nul mais par contre il est strictement inférieur à b et on écrit $a=bq+r$ .   | (P écrit au tableau)<br>et $0 \leq r < b$ tel que $a=bq+r$  |
| 13 | <b>P</b> : Bon c'est ce que vous écrivez quand vous écrivez 10 divisé par 3 ça fait 3 fois 3 +1. Le quotient c'est 3 et le reste c'est 1.   |   |
| 14 | <b>P</b> : Alors il y a des problèmes de vocabulaire là-dessus, il faut que je vérifie que vous soyez au point. En général, quotient et reste c'est du vocabulaire que vous possédez. a et b est-ce que vous connaissez leur nom en terme de vocabulaire ?  | 8h26  |
| 15 | <b>Els</b> : ...  |   |
| 16 | <b>P</b> : Bon b c'est le diviseur et a ça porte un nom   |   |
| 17 | ...   | (Des élèves parlent entre eux)  |
| 18 | <b>P</b> : a ça s'appelle le dividende, b ça s'appelle le diviseur, c'est la division de a par b, q on l'appelle par cette lettre là, on prend les premières lettres donc r c'est le reste.   | (P écrit au tableau)<br>$a=\text{dividende}$ $b=\text{diviseur}$<br>$q=\text{quotient}$ , $r=\text{reste}$ .                                |
| 19 | <b>P</b> : Bon ça fait parti des théorèmes qu'on doit démontrer et comme je trouve la démonstration relativement délicate on va commencer par expliquer sur un axe avec des nombres positifs et des nombres négatifs.   | 8h27  |
| 20 | <b>P</b> : J'ai besoin qu'en gros vous alliez de -15 à 15 que vous preniez des petites unités. Et je voudrais montrer sur un axe 10 divisé par 3 qui pose pas de problème et mettons -10 divisé par 3 car si vous comprenez l'idée sur un exemple numérique vous allez après suivre la démonstration théorique.   | (Voir schéma 1)   |
| 21 | <b>P</b> : Pourquoi est-ce que vous dites que 10 c'est 3 fois 3 + 1 et pas autre chose ? C'est parce qu'en fait 10 on essaie de le placer par rapport aux multiples de 3. Cad si sur l'axe ici je représente les multiples de 3 c'est 0, 3, 6, 9, 12 et puis du côté des négatifs, les multiples de 3 c'est -3, -6, -9, -12. Donc si je place 10 il va être par là et si je place -10 il va être ici.   | (Voir schéma 1)   |
| 22 | <b>P</b> : Bon quand vous apprenez à l'école primaire à faire la division, pourquoi est-ce qu'on dit que 10 le quotient c'est 3 ? C'est parce qu'en fait si vous prenez 3 fois 3 c'est encore plus petit que 10 mais quand vous prenez 4 fois 3 qui fait 12, ça dépasse.  |   |
| 23 | <b>P</b> : Et la démonstration qu'on va faire elle va être basée sur cette idée là, cad que le nombre 10 ici, il est coincé entre 3 fois 3, il pourrait être éventuellement égal s'il y avait un reste nul et il est plus petit que 4 fois 3. Ca ça veut dire que le quotient va être 3.  |   |
| 24 | <b>P</b> : Et le reste, où est-ce qu'on le voit ? Cad que 10 divisé par 3, si j'écris la définition d'au-dessus, 10 c'est 3 fois 3 + 1 cad que le reste c'est 1 ce dont j'ai besoin donc pour tout à l'heure c'est arriver à lire le reste sur la différence avec le multiple de 3 qui précède.   | (Voir schéma 1)<br>(P écrit au tableau)<br>$10 \text{ divisé par } 3$<br>$10=3 \times 3+1$  |
| 25 | <b>P</b> : Donc ça, ça va être la démonstration.  | 8h30  |
| 26 | <b>P</b> : Donc pour les nombres positifs je dirai qu'il n'y a pas de nouveauté, ce qui m'intéresse juste, que vous ayez compris en préliminaire, c'est que le quotient on va le trouver par l'inégalité sur ... en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3.   |   |
| 27 | <b>P</b> : Alors pour les nombres négatifs, il y a juste une histoire de convention. La convention importante c'est que par convention le reste est un nombre positif.  |   |

## Annexes C1

|    |   |   |
|----|---|---|
| 28 | <b>P</b> : Donc -10, donc le raisonnement est le même, -10 il est entre -4 fois 3 et -3 fois 3. Mais si je prenais ce nombre là, -9, si je veux aller de -9 à -10 le problème c'est qu'il faut soustraire -a ou rajouter enfin soustraire a ou rajouter -a. Donc par définition, la division de -10 par 3 on va écrire que -10 c'est plutôt -4 par 3 plus quelque chose et donc ce quelque chose ce qu'on trouve là cad c'est le +2.  | (Voir schéma 1)   |
| 29 | <b>P</b> : Donc la division ça va s'écrire -10 égal -4 fois 3 + 2 donc voilà le quotient et voilà le reste.   | (P écrit au tableau)<br>-10 divisé par 3<br>-10 = -4 * 3 + 2<br><del>-10 = 3 * 3 - 1</del>        |
| 30 | <b>P</b> : Ca c'est un exemple numérique pour vous expliquer comment on va faire cette démonstration.   |   |
| 31 | <b>P</b> : La démonstration va être faite en 2 temps.   | 8h32  |
| 32 | <b>P</b> : Premier temps on va pas s'occuper du cas où a est négatif et on va faire donc en théorie cette démonstration là en prenant un nombre positif et on comparant à des multiples.  |   |
| 33 | <b>P</b> : Dans un deuxième temps, on se servira de la démonstration qu'on a fait du côté positif pour passer du côté négatif.  |   |
| 34 | <b>P</b> : Et ce qui m'intéresse c'est l'observation de ce qui c'est passé ici entre le reste 1 et le reste 2. La propriété que vous avez sur cet exemple là et qu'on aura sur les lettres tout à l'heure c'est que 2 plus 1 ici ça redonne 3 qui est le diviseur.  |   |
| 35 | <b>P</b> : Donc il y aura un petit problème pour passer des nombres positifs aux nombres négatifs.  |   |
| 36 | <b>P</b> : Pour les nombres négatifs il faut bien que vous ayez compris qu'il faut absolument pas oublier la condition que r est positif ou nul. Il ne faut pas me proposer comme division de -10 la division c'est pas -3 fois 3 moins 1 car ça, ça donnerait un r négatif hein.   |   |
| 37 | <b>P</b> : Bon dans la pratique y'a au moins 90% des exercices qui portent sur la division dans grand N cad que le détour par Z c'est en fait un détour pour le post-bac parce que c'est là-dessus que les structures en post-bac. Au niveau de la terminale presque tous les exercices portent sur des divisions dans N et pas dans Z. On fera très peu d'exercices sur ces idées là.  |   |
| 38 | <b>P</b> : Bon alors ceci étant dit donc on va se lancer dans la démonstration.   | 8h34  |
| 39 | ... (Un surveillant vient chercher la feuille d'absence)  |   |
| 40 | <b>P</b> : Bon donc la démonstration on va faire une démonstration en 2 cas. Donc premier cas on prend a dans N cad l'analogue du 10. Pour se repérer sur cette démonstration là...   | (P écrit au tableau)<br><u>Dem</u> : <u>Existence</u><br>1 <sup>er</sup> cas : $a \in \mathbb{N}$ |
| 41 | <b>P</b> : Bon donc le théorème se fera en 2 temps, quand je dis qu'il existe et qu'il est unique j'ai 2 choses à démontrer qui est l'existence et l'unicité. Donc en fait on va commencer par le problème de l'existence et quand on aura fait le problème de l'existence on s'intéressera au problème de l'unicité.   | 8h35  |
| 42 | <b>P</b> : Alors pour faire cette démonstration là, on va considérer l'ensemble des entiers naturels tel que n fois b soit plus grand que a.  | 8h35<br>(P écrit au tableau)<br>$E = \{n \in \mathbb{N}, nb > a\}$                                |
| 43 | <b>P</b> : Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu'on est en train de faire.  |   |
| 44 | <b>P</b> : Quand je divise 10 par 3, j'ai des multiples, n fois b c'est les multiples de b. Donc si je regarde l'ensemble des multiples de 3 ici, j'ai ceux qui sont plus grands que 10 et ça démarre à 12 donc ici, cet ensemble là, sur cet exemple là c'est en fait 4, 5, 6, 7... hein le premier multiple qui dépasse 10 c'est 3 fois 4 cad quand n vaut 4. Ca ça va nous permettre de dire que cet ensemble là donc c'est 12, 15 sur l'exemple numérique, c'est un ensemble non vide de grand N. |   |
| 45 | <b>P</b> : Bon pour expliquer qu'il est non vide on va utiliser un argument sur les limites.  |   |

|    |  |  |
|----|--|--|
| 46 | <b>P</b> : Si $n$ est très grand, $n$ fois $b$ tend vers l'infini et donc va finir par être plus grand que $a$ quelque soit la valeur de $a$ . Cad que si je prend $a$ égal million peut-être qu'il faudra que j'aïlle loin mais ce nombre là existe toujours.   |  |
| 47 | <b>P</b> : Donc ça permettra de travailler sur ce nombre là.   |  |
| 48 | <b>P</b> : Celui-là sera le plus petit de ceux qui seront plus grand que 10. Ça entraînera par conséquence sur cet exemple là que 3 fois 3 c'est celui qui est juste avant sera plus petit que 10 et ça permettra de coïncider ce 10 entre deux multiples successifs de 3 et d'expliquer que la différence qui reste ici est bien plus petite que le 3 qui est là. |  |
| 49 | <b>P</b> : Donc ce qu'on va faire dans la démonstration théorique c'est la même chose simplement on travaille sur des lettres.   |  |
| 50 | <b>P</b> : Donc on commence par dire que l'ensemble $E$ est un ensemble non vide parce que limite quand $n$ tend vers plus l'infini de $nb$ c'est plus l'infini donc pour $n$ assez grand, l'entier $n$ appartient à $E$ .   | 8h38<br>(P écrit au tableau)<br>$E \neq \emptyset$ car $\lim nb = +\infty$<br>Pour $n$ assez grand,<br>$n \in E$ . |
| 51 | <b>P</b> : En fait on peut même calculer hein.   |  |
| 52 | <b>P</b> : On peut donner soit cet argument là soit ça c'est pareil que $n$ plus grand que $a/b$ , $a/b$ c'est une fraction et je prends $n$ plus grand que la partie entière de $a/b$ plus 1 et ça c'est réalisé ces conditions là hein.  | (P écrit au tableau)<br>(ou $n > a/b$ réalisé si<br>$n >$ partie entière de<br>$a/b + 1$ )                         |
| 53 | <b>P</b> : Donc vous avez 2 types d'argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l'ensemble $E$ est non vide.  |  |
| 54 | <b>P</b> : Bon deuxième type d'argument qu'on va utiliser, c'est que cet ensemble là.  | 8h39   |
| 55 | <b>P</b> : Donc $E$ est un ensemble non vide de grand $N$ , donc $E$ admet un plus petit élément.  | (P écrit au tableau)<br>$E$ admet un plus petit<br>élément $Q$   |
| 56 | <b>P</b> : Bon je l'appelle grand $Q$ parce que pour l'instant c'est pas le quotient.  |  |
| 57 | <b>P</b> : Sur 10 le plus petit qui est multiple de 3 qui est plus grand que 10 c'est 4 donc c'est 1 de trop par rapport à ce dont j'ai besoin.  |  |
| 58 | <b>P</b> : Bon il faut que j'explique que ce nombre là est non nul   |  |
| 59 | <b>P</b> : Pourquoi est-ce qu'il est non nul ? Parce que c'est un élément de $E$ ; Si je prends $n=0$ ici j'ai 0 fois $b$ . J'ai supposé que $a$ appartient à $N$ donc j'ai pas 0 plus grand que $a$ . Donc j'ai 0 qui n'appartient pas à $E$ . Donc $Q$ est différent de 0.   | (P écrit au tableau)<br>$0 \notin E$ donc $Q \neq 0$   |
| 60 | <b>P</b> : Bon si j'ai donc maintenant un entier naturel non nul, un entier naturel non nul je dis que je peux toujours l'écrire un entier plus un, l'entier restant naturel.  |  |
| 61 | <b>P</b> : Le plus petit entier naturel non nul c'est 1, 1 peut s'écrire $1+0$ . Bon s'ils sont plus grands, si vous prenez 3, 3 c'est $1+2$ .   |  |
| 62 | <b>P</b> : Donc je dis qu'il existe $q$ , cette fois-ci il est petit, c'est celui que je veux, il existe petit $q$ appartenant à grand $N$ tel que grand $Q$ égale $q$ plus 1.   | (P écrit au tableau)<br>Il existe $q \in N$ tel que<br>$Q = q + 1$   |
| 63 | <b>P</b> : Ca ça vient juste du fait que $Q$ est non nul.  |  |
| 64 | <b>P</b> : Bon et ce qu'il faut expliquer c'est l'histoire de l'encadrement entre les 2 multiples.   | 8h41   |
| 65 | <b>P</b> : J'ai dit que par hypothèse on a donc $q+1$ appartient à l'ensemble grand $E$ . Et comme $q$ , grand $Q$ c'est le plus petit élément de $E$ , il faut comprendre que le petit $q$ appartient pas $E$ .   | (P écrit au tableau)<br>$(q+1) \in E$ et $q \notin E$  |
| 66 | <b>P</b> : Hein, $q$ plus 1, si je reprends mon dessin de tout à l'heure avec 10, j'ai 0, 3, 6, 9, 12 ici j'ai 4 fois 3 ici j'ai 3 fois 3 là j'ai 10. 4 fois 3 c'est le plus petit multiple de 3 plus grand que 10 ça veut donc dire que celui qui est avant, cad le 3 fois 3 n'est pas dans $E$ .   |  |
| 67 | <b>P</b> : Ca ça donne une chaîne d'inégalité qui est la même que le 9 inférieur à 10 inférieur à 12.  |  |

|    |  |   |
|----|--|---|
| 68 | <b>P</b> : Ca va me permettre d'écrire, j'ai pris comme définition $nb$ plus grand que $a$ pour être dans $E$ . Donc je dis que si je remplace par $q+1$ j'ai $(q+1)b$ qui est plus grand que $a$ et que comme $q$ n'appartient pas à $E$ , qu'est-ce que ça veut dire que $q$ n'appartient pas à $E$ , ça veut dire que je n'ai pas $qb$ plus grand que $a$ . |   |
| 69 | <b>P</b> : Si je n'ai pas $qb$ plus grand que $a$ , nier un plus grand ça veut dire que $qb$ est inférieur ou égal à $a$ .   |   |
| 70 | <b>P</b> : Bon ce qu'il faut comprendre c'est qu'on est arrivé exactement à la valeur de 1 cad que si je mets à côté sur 10 et 12, j'ai exhibé le quotient en fait en disant que je suis entre 2 multiples consécutifs du diviseur.  | (P écrit au tableau)<br>$qb \leq a < (q+1)b$  |
| 71 | <b>P</b> : Bon, ce qui me reste à expliquer, donc ça c'est en fait exhiber le quotient, c'est que maintenant si je m'intéresse à $a$ moins $bq$ , quand j'écris $a=bq+r$ , mon objectif, c'est pareil que $r=a-bq$ , il faut que j'explique $a-bq$ est bien un bon candidat pour être un reste de division euclidienne.  | 8h43<br>(P écrit au tableau)<br>$a=bq+r \quad \hat{U} \quad r=a-bq$   |
| 72 | <b>P</b> : Il faut donc encadrer $a-bq$ , c'est pas difficile, il faut juste oublier chaque fois un des côtés. Donc je fais $a-bq$ .   |   |
| 73 | <b>P</b> : Dans un premier temps j'oublie ce côté-là, le $qb$ là où le $bq$ je le passe de l'autre côté. Donc $a-bq$ il est bien positif ou nul.   |   |
| 74 | <b>P</b> : Après vous oubliez la première, on développe ça. Ca, ça fait $qb$ plus $b$ donc si je fais $a-bq$ ça veut dire que je prendrais le premier terme du produit, il restera $b$ ici donc il reste bien ce qu'il me faut cad que j'ai bien démontré que $a-bq$ est entre 0 et $b$ .  | (P écrit au tableau)<br>$0 \leq a-bq < b$   |
| 75 | <b>P</b> : Donc j'ai bien démontré que $a=bq+r$ et avec un reste compris entre 0 et $b$  | 8h45<br>(P écrit au tableau)<br>Donc $a=bq+r$ avec<br>$0 \leq r < b$  |
| 76 | <b>P</b> : Donc ça, ça termine la démonstration de l'existence dans le cas où je divise un nombre positif par un nombre positif.   |   |
| 77 | <b>P</b> : Bon le deuxième temps de la démonstration, c'est l'analogue du -10. Cette fois-ci il faut diviser un nombre négatif par un nombre positif.  | 8h45  |
| 78 | <b>P</b> : Alors on va être relativement flemmard parce que comme on a déjà fait la démonstration du côté positif, on va simplement je veux dire que quand j'ai fait la division pour 10, pour passer à -10, -10 c'est l'opposé. Cad que si j'ai -10, si je prends $-(-10)$ ça me redonne plus 10.   |   |
| 79 | <b>P</b> : Donc on va baser la démonstration sur cette idée là.  |   |
| 80 | <b>P</b> : Donc deuxième cas, $a$ est un nombre négatif. Donc ce qu'on peut raconter c'est que dans ce cas là, moins $a$ est un nombre positif.  | 8h45<br>(P écrit au tableau)<br>2 <sup>nd</sup> cas : $a < 0 \quad (-a) > 0$  |
| 81 | <b>P</b> : Donc on sait diviser, donc en utilisant le premier cas, moins $a$ peut s'écrire sous la forme euh je vais l'appeler $q$ prime car ça sera pas encore le bon reste. Moins $a$ s'écrit $bq'$ plus $r'$ avec comme conditions donc que $q'$ en fait appartient à $\mathbb{N}$ et que $r'$ , donc c'est un reste, il est compris entre 0 et $b$ .       | (P écrit au tableau)<br>En utilisant le 1 <sup>er</sup> cas<br>$-a=bq'+r'$ avec $q' \in \mathbb{N}$ et<br>$0 \leq r' < b$ |
| 82 | <b>P</b> : Et il faut que je refasse le passage de moins $a$ à $a$ .   |   |
| 83 | <b>P</b> : Alors en fait là, il va y avoir 2 cas. Donc pour passer de $a$ à $-a$ ce qu'il est naturel de faire c'est de changer les signes de partout. On va garder le $b$ car le $b$ c'est le diviseur positif donc on va pas le changer on va plutôt écrire $b$ fois $(-q)$ moins $r'$ .   | (P écrit au tableau)<br>$a=b(-q)-r'$<br>$-b < r' \leq 0$  |
| 84 | ... (Silence)  |   |
| 85 | <b>P</b> : Bon le problème qui surgit tout de suite c'est le problème qui surgit sur le passage du 10 au -10. Le problème c'est que l'encadrement qu'on a de $r'$ maintenant n'est pas bon. Cad que enfin du moins $r'$ . Si $r'$ est un nombre entre 0 et $b$ , $-r'$ est un nombre qui lui est entre $-b$ et 0.  | 8h48  |
| 86 | <b>P</b> : Donc on va être obligé de subdiviser en 2 cas parce que si $r'$ est 0 c'est fini.   |   |

Annexes C1

|     |  |   |
|-----|--|---|
| 87  | <b>P</b> : Cad qui si c'était le cas gentil, sur le dessins de tout à l'heure, si j'avais -9, -9 c'est -3 fois 3. Dans toutes les valeurs qui sont ici, la valeur qui reste admissible pour un reste est le cas où r' est nul.   |   |
| 88  | <b>P</b> : Donc si r' égale 0, j'ai a, moins a pardon, égale b fois moins q' plus 0 et ça c'est admissible pour une distance euh... pour le reste de la division. Ca voilà mon quotient et voilà le reste est c'est fini.  | (P écrit au tableau)<br><b>a) <math>\underline{Si\ r'=0, -a=b(-q')-0}</math></b>  |
| 89  | <b>P</b> : Bon le deuxième cas qui marche pas directement c'est si r' est différent de 0.  | 8h49  |
| 90  | <b>P</b> : Alors si r' est non nul, il faut jouer au jeu auquel on a joué tout à l'heure, je vais refaire un petit dessin.   | (Voir schéma 2)   |
| 91  | <b>P</b> : Quand j'avais 10 ici, c'était 3 fois 3 + 1.   |   |
| 92  | <b>EL1</b> : Madame, vous avez écrit $-a=b(-q')$ enfin là je comprends pas.  | 8h49  |
| 93  | <b>P</b> : J'ai divisé le nombre que j'ai divisé -a. Ah la ligne d'en dessous  |   |
| 94  | <b>EL2</b> : non plus bas encore.  |   |
| 95  | <b>EL3</b> : non c'est a   |   |
| 96  | <b>P</b> : Ah oui pardon, c'est a, merci.  | (P corrige au tableau)<br><b>a) <math>\underline{Si\ r'=0, a=b(-q')-0}</math></b> |
| 97  | <b>P</b> : Donc si donc r' est différent de 0 c'était le cas avec -10 tout à l'heure je reprends l'exemple numérique pour expliquer ce qu'il s'est passé.  | 8h50<br>(P écrit au tableau)<br><b>b) <math>\underline{Si\ r'\neq 0}</math></b>   |
| 98  | <b>P</b> : Quand j'avais 10, ici qui était 3 fois 3 + 1 je vous ai expliqué tout à l'heure que ici, par rapport à ce quotient là, en valeur absolue je suis obligée de passer à -4. Cad que ici vous aviez un cas où vous aviez ici q'=3 et si vous regardez ce que c'est qu'on est amené ici à mettre, le nombre -4 ici c'est du -q' moins 1.   |   |
| 99  | <b>P</b> : Bon l'idée étant qu'en fait la différence que j'avais de 1 ici, si je veux une différence positive, là je vais me retrouver avec le -1 pour aller à -9.   |   |
| 100 | <b>P</b> : Mais si je veux la différence positive par rapport au précédent je suis amenée à prendre le +2.   |   |
| 101 | <b>P</b> : Donc ici, il y a un petit bricolage à faire parce que la valeur de -r' est un encadrement non admissible et est entre -b et 0.  |   |
| 102 | <b>P</b> : Si vous avez un nombre entre -b et 0, la manière de le passer dans l'intervalle 0 b c'est en fait de rajouter b. Et rajouter b ça se fait en enlevant b et en le rajoutant.   |   |
| 103 | <b>P</b> : Donc ce qu'on va faire c'est qu'on va dire que ce résultat là c'est pareil que b fois -q' moins b plus b moins r'. Quand je fais ça j'ai rien changé hein. J'ai introduit un moins b et j'ai remis un plus b.   | (P écrit au tableau)<br>$a=b(-q')-b + b - r'$<br>$=b(-q'-1) + b - r'$             |
| 104 | <b>P</b> : Et cette fois ci donc ça va marcher. J'ai b facteur de moins q' moins 1 plus b moins r'.  |   |
| 105 | <b>P</b> : Mais cette fois ci, r' était différent de 0 ce qui veut dire que mon encadrement il est entre -b est 0.   | (P écrit au tableau)<br><i>avec <math>b-r' \in ]0, b]</math></i>                  |
| 106 | <b>P</b> : Donc quand je rajoute b à cette inégalité là, mon b-r' il appartient à l'intervalle 0 exclu et b exclu puisque j'ai exclu le cas b égal 0. Cad que comme le nombre r' est entre moins b et 0 je rajoute b qui est un nombre positif donc ici j'obtiens en borne inférieure ici j'obtiens b en borne supérieure. Donc ça c'est bien un résultat admissible pour la division. |   |
| 107 | <b>P</b> : Et l'effet que ça a c'est le même que celui que ça avait du passage du 10 à -10, c'est qu'en fait le quotient on va prendre -4 au lieu du 3 du côté positif.  |   |
| 108 | <b>P</b> : Bon la fin de la démonstration elle est plus facile, la partie théorique c'était plus celle là. Il reste à faire l'unicité et l'unicité elle est facile à démontrer.  | 8h53  |
| 109 | <b>P</b> : Quand en arithmétique on veut démontrer qu'un résultat est unique, ce qu'on fait c'est qu'on suppose qu'on a 2 divisions et puis on démontre qu'en fait y'a ... on arrivera à démontrer que les deux quotients sont égaux et que les deux restes sont égaux.  |   |
| 110 | <b>P</b> : Donc ce qu'on suppose qu'il y a a priori deux divisions. Cad on pose a égale bq plus r égale aussi bq' plus r'.   | 8h53<br>(P écrit au tableau)<br><u>Unicité</u><br>$a=bq+r$                        |

|     |  |   |
|-----|--|---|
| 111 | <b>P</b> : Euh, je vais pas prendre cette écriture là, j'ai peur que vous mélangiez. Euh, bs plus t, parce que ça n'a rien avoir avec le q' du deuxième cas.   |   |
| 112 | <b>P</b> : Et on suppose donc que les conditions que q et s sont des entiers relatifs et on suppose que r et t sont des candidats à être de restes cad qu'ils sont tous les deux plus petits que b.  | (P écrit au tableau)<br>$=bs+t$ avec $(q,s) \in \mathbb{Z}^2$<br>$0 \leq r < b$ et $0 \leq t < b$             |
| 113 | <b>P</b> : Et on essaie d'aboutir donc, à l'égalité, l'objectif c'est de montrer que $q=s$ et $t=r$ .  |   |
| 114 | <b>P</b> : Donc pour faire ça on va regrouper les termes de même type de chaque côté d'un côté on met tous les termes en b et de l'autre côté on met tous les termes qui sont tous seuls et on oublie que c'est égal à a, ça servira en fait à rien.   |   |
| 115 | <b>P</b> : La seule chose qui servira c'est cette égalité là.  |   |
| 116 | <b>P</b> : Donc je dis que je passe les termes en b mettons dans le premier membre ça fait b facteur de q moins s égale t moins r.   | 8h55<br>(P écrit au tableau)<br>$b(q-s)=t-r$  |
| 117 | <b>P</b> : Et on va raisonner juste sur les inégalités sur t-r et sur b fois (q-s). On va dire d'une part que b fois (q-s) c'est de manière lisible un multiple de b.  |   |
| 118 | <b>P</b> : Bon les multiples de b, c'est le même genre de dessin que tout à l'heure, on sait que c'est 0, b, 2b du côté positif et -b, -2b etc. du côté des négatifs.  | (Voir schéma 3)   |
| 119 | <b>P</b> : Et pour prouver qu'ils sont égaux, on va prouver que le seul multiple que ça peut-être vu les encadrements c'est 0.   |   |
| 120 | <b>P</b> : Donc on va encadrer t-r. Donc t on le garde comme il est. Il nous faut un encadrement, pour voir un encadrement de t-r il nous faut un encadrement de -r.   | (P écrit au tableau)<br>$0 \leq t < b$  |
| 121 | <b>P</b> : Quand vous passer aux nombres négatifs, ça va vous changer les côtés, cad que le minorant c'est moins b et le majorant c'est 0. Et ça, ça va permettre d'encadrer t moins r.  | (P écrit au tableau)<br>$-b < -r \leq 0$  |
| 122 | <b>P</b> : Alors il faut être un peu précis pour bien repérer que ici, dans chacun des deux côtés quand je fais des inégalités, chaque fois j'ai une des deux inégalités au moins qui est stricte. Cad que quand j'additionne membre à membre, si vous devez additionner des inégalités dont au moins une est stricte, je dis que l'inégalité à l'arrivée, ce sont des inégalités strictes.  | (P écrit au tableau)<br>$0 \leq t < b$<br>$-b < -r \leq 0$<br>$-b < t-r < b$                                  |
| 123 | <b>P</b> : Et donc je me retrouve avec -b et b bon je dis qu'après c'est fini.   |   |
| 124 | <b>P</b> : On raconte que t-r est un multiple de b qui est strictement compris entre -b et b. Le seul multiple de b qui vérifie cette condition là c'est 0.  |   |
| 125 | <b>P</b> : Et t moins r multiple de b d'où t égale r et quand j'ai t égale r je pense que vous me ferez le cadeau que j'ai fini. Si j'ai r égale t, ici je peux simplifier, j'ai bq égale bs. Et comme j'ai pas fait de division par 0 j'ai q égale s car b différent de 0.  | 8h57<br>(P écrit au tableau)<br>et (t-r) multiple de b<br>d'où $t=r$ ; d'où $bq=bs$ ;<br>$q=s$ car $b \neq 0$ |
| 126 | <b>P</b> : Donc on a démontré l'existence et l'unicité de la division.   |   |
| 127 | <b>P</b> : Donc la seule différence par rapport à ce que vous avez fait en primaire c'est qu'au lieu, en primaire en fait on apprend à compter à des petits, pour apprendre à diviser on fait exactement faire ça. On fait chercher les multiples au dessus, cad on dit que c'est trop petit ou c'est trop grand on peut aller plus loin pour trouver quel est le bon quotient. Cad qu'on apprend exactement sur ce même principe. | 8h58  |
| 128 | <b>P</b> : La seule vraie grosse nouveauté pour vous c'est la division par des nombres négatifs où il faut être un peu prudent, il faut bien avoir en tête que le reste est toujours par définition un nombre positif donc il faut aller en fait au multiple précédent pour pouvoir rajouter quelque chose de positif.   |   |
| 129 | <b>P</b> : Alors la division ça va donc nous occuper à peu près la séance d'aujourd'hui et je pense encore toute la séance de la prochaine fois.   | 8h59  |

Annexes C1

|     |   |                  |
|-----|---|------------------|
| 130 | <p><b>P</b> : Je vais peut-être plutôt vous donner des exercices sur la division aujourd'hui et la semaine prochaine j'ai besoin que tout le monde ait ces calculatrices car on parlera un peu des programmes avec éventuellement des feuilles, je vous les donnerai peut-être à rentrer avant pour tous ceux qui les ont pas et puis je ferai un commentaire au rétroprojecteur de quels sont les programmes et quels sont les programmes que vous pourrez rajouter.</p> |                  |
| 131 | <p><b>P</b> : Cad que ceux parmi vous qui sont étourdis auront peut-être intérêt à se faire un programme qui donne par exemple la liste des diviseurs parce que ça permet des contrôles les jours où je laisse les machines pour ceux qui ont tendance à en oublier, on peut faire des programmes pas très difficiles.</p>  | (Sonnerie de 9h) |

## ENTRETIEN AVEC P1, LE 13/06/01

L : Combien de fois as-tu déjà eu cette classe ?

P1 : J'ai fait trois fois Attends, c'était la troisième fois que je faisais le programme d'arithmétique. ça faisait trois ans que et alors autrement, je colle, je ne sais pas depuis combien de temps il y a des TS.

L : Non mais c'était la spécialité mathématique.

P1 : j'ai toujours fait.

L : Tu l'as toujours fait donc depuis l'arithmétique, tu as fait l'arithmétique.

P1 : (rires) j'ai fait des TC avant.

L : Pour toi, quelle est la fonction de la spécialité mathématique. à quoi ça sert la spécialité mathématique ?

P1 : (soupir)....

L : Ton avis personnel sur la spécialité mathématique.

P1 : Moi je dirai que pour les ... pour les élèves, eh ben l'objectif de formation qui est plus l'abstraction, c'est-à-dire qu'on fait moins de ... en cours obligatoire actuellement on fait presque que de la technique ... alors qu'en spécialité math sur le cours de géométrie ou le cours d'arithmétique on fait les démonstrations, on fait les raisonnements, on va jusqu'au bout et on... on truande moins sur le départ c'est à dire qu'il y a une axiomatique qui est plus claire et il y a des démonstrations qui sont nettement plus rigoureuses donc en fait ça ... ça sert énormément aux élèves qui font des études de maths après même à ceux qui font des études de physique ça...

L : En fait c'est surtout pour le post-bac d'après toi c'est pour les former (...).

P1 : Euh disons que les élèves disent que ça fait une différence sinon y'a des élèves qui le prennent par goût, pour eux, pour voir justement ce que c'est qu'un raisonnement rigoureux parce que l'année d'avant j'avais des élèves qui allaient en hypokhâgne qui l'avaient pris mais en objectif de se former à la rigueur quoi (rires).

L : La rigueur par rapport à la technique de l'obligatoire. Alors qu'est-ce que t'as pensé de la réintroduction de l'arithmétique en terminale S ?

P1 : Moi j'ai bien aimé, j'avais des regrets de ne plus l'enseigner (rires). Euh parce qu'en plus je pense que justement, ça ... ça a l'avantage de partir de enfin, d'une axiomatique sur les propriétés de  $\mathbf{N}$  qui sont simples et que ça a l'avantage justement de pouvoir être rigoureux c'est-à-dire qu'on a ... on a le sujet qui nous permet d'être rigoureux (rires).

L : donc d'aller dans la fonction de la spécialité math (...). Et est-ce que tu es en accord avec enfin... Pour toi, quels sont les objectifs principaux de ce programme d'arithmétique ?

P1 : ....

L : Quand tu as lu le programme, tu as vu quoi comme objectifs principaux ? Ou objectif principal s'il y en a qu'un ?

P1 : Non moi je dirai c'est approcher bon la ... approcher la structure des nombres entiers et justement préparer ... préparer les notions d'anneaux euclidiens ou des ... des généralisations qu'on peut voir après derrière euh c'est-à-dire que moi, c'est plutôt une formation de base euh pour continuer éventuellement sur d'autres sujets d'algèbre dans la même veine ... plutôt que l'arithmétique elle-même finalement.

L : Donc t'étais en accord avec les objectifs du programme ou euh quand tu as lu pour la première fois le programme en 98 d'arithmétique t'étais en accord avec les objectifs ou pas du tout ?

P1 : Je ne m'en rappelle plus de ce que j'ai lu en 98 (rires) c'est ça le problème.

L : C'est le même que maintenant, ça a pas changé (rires).

P1 : Oui mais je dis je sais plus ce qu'il y a ... je ne me rappelle plus ce qu'ils mettent si tu veux dans les ... dans les bandeaux parce que je l'ai pas ... j'l'ai pas sous les yeux et honnêtement après quand tu fais ton cours, tu modifies ton propre cours et tu peux pas toujours ... (rires) je serai incapable de dire ce qu'il y a dans les bandeaux en introduction à l'arithmétique.

L : Disons y'a souvent le mot algorithme dans le (...).

P1 : Oui c'est vrai que ça apparaissait que ça c'était une approche qui était différente de celle justement de l'ancien programme de TC où on faisait ... par exemple, le pgcd on le faisait très peu avec l'algorithme d'Euclide à l'époque, on le faisait beaucoup beaucoup décomposition en facteurs premiers alors que maintenant c'est vrai que si on regarde les annales, l'algorithme d'Euclide est finalement le savoir faire de base qui est demandé dans presque tous les exercices d'arithmétique. Non et puis l'autre approche qui a changé c'est justement aussi le fait qu'on ait des calculatrices qui permettent de faire des programmes avec le fait qu'on a pas le temps de les faire chercher aux élèves c'est-à-dire que (rires) on a des objectifs qu'on aimerait bien avoir et qu'on, euh que moi je dirais j'ai ... j'ai moins privilégié qu'au début parce que on n'a pas le temps à y passer si on veut faire parce qu'il y a aussi toute la géométrie plane si on veut faire la géométrie plane comme il faut en allant jusqu'au bout euh ... moi j'en suis venue un peu à négliger les calculatrices tout en parlant un peu.

L : Et donc, si tu ... si tu avais participé à un groupe de réflexion sur ce programme d'arithmétique, est-ce que tu aurais changé des choses ou est-ce que tu aurais gardé des choses ? pourquoi ?

P1 : Non, moi je ... enfin globalement, je trouve qu'il est intellectuellement satisfaisant ce programme mais bon.

L : Intellectuellement satisfaisant d'accord.

P1 : Moi mais je dis comparé à ... le programme de géométrie justement je trouve a des défauts sur ... on ne sait pas si on parle des groupes si on parle des structures donc on en parle. Le programme d'arithmétique je trouve qu'il est ... il est bien structuré enfin pour moi il a pas de défauts.

L : Majeurs.

P1 : (rires)

L : D'accord. Et donc selon toi, ça va être quoi le rôle de la calculatrice dans ce programme on en a un petit peu parlé (...) tu as dit que tu avais évolué.

P1 : C'est-à-dire que je pense que la calculatrice ça peut être une aide justement pour ne pas se limiter aux petits nombres, pour apprendre aux élèves à se contrôler surtout. Enfin moi je le vois beaucoup comme ça c'est-à-dire que dire aux élèves que ... euh ... de toutes façons enfin j'avais une politique où certains jours je faisais avec et certains jours sans (rires) donc euh moi je dirais que les jours avec ça permet d'avoir des exercices qui peuvent être plus intéressants et plus complets parce que par exemple on n'est pas limité euh on n'est pas trop limité sur le nombre de facteurs premiers des nombres sur lesquels on travaille ni sur la taille du nombre donc ça permet une plus grande richesse au niveau des ... au niveau des exercices mais pour moi par exemple, ça ne dispense pas de justement de bien comprendre ce que c'est qu'un algorithme bon par exemple en faisant le théorème de Bézout à la main enfin sur des exemples numériques c'est-à-dire que pour moi c'est ... c'est un peu des approches complémentaires et ... et je crois que pour les élèves, ce qui m'intéresse le plus c'est à la fois un peu d'initiation à la programmation mais très élémentaire c'est-à-dire des structures de boucles ou les tests conditionnels et des choses comme ça et puis surtout qu'ils apprennent à être cohérents dans les démonstrations et à s'auto-contrôler bon (rires).

L : La calculatrice a surtout un rôle de contrôle dans cette partie et un peu d'initiation.

P1 : Ben disons que les ... les élèves de la classe qui étaient ... Si tu te rappelles ben par exemple Benjamin David ou... enfin il y en avaient quelques uns qui en fait aimaient bien programmer auxquels ça a permis de progresser même s'ils n'ont pas forcément progressé beaucoup avec moi mais de se poser des questions sur comment on faisait un programme, qu'est-ce qu'on faisait qui tourne en fait plus même en cours obligatoire c'est-à-dire que

sur quoi je suis tombée l'autre fois l'autre fois j'avais une ... j'avais une variable aléatoire avec une loi et puis des formules et donc ils ont tendance en fait à programmer par exemple Bernoulli et à programmer un certain nombre de choses qu'ils n'auraient peut-être pas programmé s'ils n'avaient pas suivi le cours d'arithmétique c'est que ça peut avoir des retombées euh sur des ... pour des élèves qui sont intéressés par la programmation, je dirais qu'il y avait deux types d'élèves dans la classe hein, y'avait tout un groupe de filles en particulier qui ont vraiment pris les programmes que j'ai donné tels quel on vérifiait qu'ils marchaient on les utilisait et on était ... enfin la calculatrice presse bouton quoi outil de contrôle mais l'utilisation du programme uniquement en presse bouton en refusant je dirais même de la part de ces élèves de comprendre pourquoi on avait tapé ça.

L : D'accord. Et bon, je suppose que tu es au courant de la réintroduction de l'arithmétique en troisième et en seconde alors qu'est ce que tu penses du contenu d'arithmétique justement qui est revenu en troisième et en seconde ? En troisième c'est le pgcd ...

P1 : Ben c'est-à-dire qu'en fait j'ai deux ..j'ai deux avis un peu enfin... un petit peu contradictoires mais sur des questions d'horaires. Je pense que c'était bien de remettre un peu d'arithmétique parce que je pense que tous les problèmes au niveau fractions et réduction au même dénominateurs sont en fait liés aux problèmes de pgcd et ppcm et cetera donc de faire travailler avec les élèves avec sur les fractions en nombres entiers ou même après bon ... avec des polynômes et de ne jamais aborder ces problèmes c'était vraiment un tort c'est un manque et ça manque réellement aux élèves qui ne suivent que le cours obligatoire. Euh bon par contre j'aurai un avis qui va un peu dans l'autre sens les retours parce que je suis en train de dépouiller des ... j'ai fait une enquête au niveau de l'APM sur les nouveaux programmes et ... le problème de réintroduire de l'arithmétique c'est que le programme de seconde est déjà très éparpillé et qu'en fait ça l'émiette encore plus c'est-à-dire ça fait un truc dont on parle ou en plus donc on parle de l'arithmétique enfin un petit peu on fait nombres premiers et décompositions en nombres premiers et des choses comme ça mais pour les élèves ça rajoute un chapitre de plus mais en fait les élèves... les collègues ont eu du mal à le réinvestir et donc ils ont eu l'impression que l'arithmétique elle passait et qu'elle allait être oubliée immédiatement. et ce que je trouve regrettable par contre vraiment c'est le fait qu'on ne reparle pas d'arithmétique en première S c'est-à-dire que finalement, moi j'ai peur qu'on récupère des élèves quasiment dans le même état parce qu'ils auront vu euh.. et tous les collègues ne l'ont pas fait ils auront vu éventuellement un peu d'arithmétique en seconde et qu'il n'y a aucun entretien de ces notions là.

L : Et le fait qu'en troisième pour réduire au même dénominateur ils sont censé le faire avec les différences successives en troisième et après en seconde ils passent à la décomposition en facteurs premiers.

P1 : Ca moi je trouve ... enfin ça avait pas l'air d'être gênant et puis là ... bon c'est pareil, moi j'ai d'autres informations au niveau des collègues de troisième, je veux dire cette réintroduction elle passe plutôt bien enfin bon (rires).

L : Et bon vu qu'on parle des nouveaux programmes tu penses quoi de l'avenir de l'arithmétique en spécialité math ?

P1 : Je pense qu'elle va ... de toutes façons, euh... enfin même dans les projets du mois de mai parce qu'ils ont enfin y a des projets qui ont été publiés moi je pense qu'elle a elle a de fortes chances de rester.

L : Dans les projets elle y est ??

P1 : Oui oui, dans les projets elle y est.

L : Y'avait des changements où ?

P1 : Elle y était quasiment en programme actuel ben ...

L : Donc toi tu penses qu'elle a un bel avenir ?

P1 : Hum, je ne m'avancerai, non je ne m'avancerai peut-être pas jusque là parce qu'il y a ... y'a un problème de ... justement de savoir si y'a ... enfin y'a des groupes de personnes. Enfin c'est-à-dire que je pense que l'arithmétique va rester avec le (geps) actuel c'est-à-dire sur euh mais sur une période de euh le dernier programme il aura fait trois ans (rires) ou quatre ans, non quatre ans. Donc le problème en fait c'est que je pense que sur le groupe actuel elle va rester parce que dans le groupe il y a suffisamment de gens qui y tiennent. Que par contre il y a toute une évolution qui se fait donc soit en direction des probas parce que dans les projets il y avait aussi les lois de probas continues et des choses comme ça et l'autre défaut qu'à le programme d'arithmétique

enfin moi pour moi c'est un avantage c'est-à-dire que ça fait que les élèves qui aiment les maths le prennent et font de l'abstraction mais il y des gens qui trouvent que de mettre ça dans la spécialité ça fait justement trop de différenciation par rapport au cours obligatoire c'est-à-dire que ceux qui voudrait un programme de spécialité math qui ne soit pas trop un tremplin pour le supérieur en fait le programme de spé math actuellement que ce soit la géométrie plane ou l'arithmétique c'est le meilleur tremplin qu'on puisse trouver pour une math sup mpsi je veux dire il faut dire les choses comme elles sont (rires)... Euh donc en fait le problème il est c'est plutôt à mon avis ça va être un choix plus politique sur est-ce qu'on veut que la spé math soit ... je dirai un complément très accessoire.

L : En fait c'est sur la fonction de la spé mathématique.

P1 : Oui voilà ou est-ce qu'on veut que ça soit ... enfin comme c'est actuellement une formation solide au raisonnement c'est ça qui va décider si l'arithmétique restera ou restera pas (rires) enfin plus que tout autre chose.

L : Bon là pour l'instant on a parlé de l'arithmétique en général donc maintenant on va passer à ta classe alors euh bon, comme c'est pas la première année que tu enseignes en spécialité, c'est surtout l'arithmétique, est-ce que ... tu as fait des modifications au fil des années dans ton enseignement de l'arithmétique ?

P1 : Oui.

L : Et si oui, les grandes modifications.

P1 : J'ai fait des modifications bon d'une part de calendrier c'est-à-dire que ... euh depuis l'année dernière enfin euh la première année j'ai fait mon cours et en plus j'y ai travaillé seule depuis deux ans je travaille avec P11 ce qui veut dire qu'en fait on ... on a préparé tous nos cours à deux je dirai que cette année on a fait assez peu de modifications par rapport à l'année dernière par contre j'avais fait beaucoup de modifications de la première année à la ... à la deuxième année. Dans les modifications principales y'a eu le fait de la faire plus tôt plus loin c'est-à-dire de la grouper plus finalement de garder qu'un tout petit bout pour la fin de l'année euh c'est-à-dire que euh au début je m'étais dit et c'est vrai que les élèves ont du mal à rentrer dans le sujet c'est-à-dire tous les (bu) toutes les fautes ou par exemple ils n'ont pas envie de travailler avec les entiers donc ils mettent des fractions de partout bon y'a toute une typologie d'erreurs qu'on trouve parce qu'en fait ils n'ont pas fait d'arithmétique avant donc la première année j'avais vraiment scindé en deux parties à peu près égales bon une partie à peu près là où je l'ai fait c'est-à-dire dès qu'on a révisé homothétie translation lieux géométriques on attaque l'arithmétique mais la première année j'avais fait un ... un bout là mais un deuxième bout presque aussi conséquent en fin d'année alors que là, en fait on tire presque tout et on ... j'aurais on garde des bricoles parce que bon des changements de bases et les machins et puis ça permet de refaire quelques exos sur Bézout en fin d'année c'est-à-dire que le fait de pas aller jusqu'au bout c'est juste euh pour permettre un je dirais un réinvestissement un peu au (ras) du bac. Euh voilà une remise en train on se (remet) dans le sujet euh ... autrement ... non je dirais enfin en en plan général pas trop. De toutes façons le cours là depuis deux ans on l'a beaucoup calqué sur la brochure du crdp de ...

L : Clermont.

P1 : De Clermont oui ... de toutes façons.

L : Et tu avais dit que tu avais aussi changé un petit peu par rapport à la calculatrice tout à l'heure, qu'au début tu ...

P1 : La première année le problème c'est que j'y ai passé euh j'ai passé beaucoup de temps, c'est-à-dire que j'ai ... j'avais donné juste le je crois le programme de division enfin que j'avais fait avec eux et après j'avais donné un peu aux élèves à faire des programmes chez eux et bon d'abord le problème c'est que tous ceux qui sont pas intéressés en fait s'investissaient pas et après l'autre problème qu'il y a c'est que quand il faut corriger il faut éventuellement corriger plusieurs trucs, trouver des erreurs, trouver des erreurs sur des modèles qu'on a pas ... et euh comme le programme de géométrie plane est quand même très long et que là aussi on a fait des choix de vraiment classer les antidéplacements, les déplacements enfin de vouloir faire un cours structuré parce qu'on a ici quand même beaucoup d'élèves qui vont en sup donc y'avait des choix ... y'avait des choix stratégiques à faire c'est pour ça que la calculatrice j'ai un peu (rires) ou du moins j'ai continué à en parler mais un peu effectivement que ça soit un outil tout près pour ceux qui le voulaient comme un outil tout près en sachant que tout le monde ne le prendrait pas comme ça dans le groupe.

L : La place de la calculatrice donc qui diminue et puis que tu travailles pas autant tu l'as fait un peu à contre-cœur ou ...

P1 : Bon puis y'a aussi ... y'a aussi les problèmes je dirais de calculs à la main des élèves c'est-à-dire que cette année je pense pas par exemple avec P11 on a sûrement fait beaucoup plus de devoirs sans calculatrice qu'avec et là c'est vrai que j'ai une évolution personnelle qui me conduit à évaluer de moins en moins avec la calculatrice. Et que si je fais un devoir avec c'est justement parce que j'ai des nombres trop grands et que ... et que ce jour là l'outil calculatrice sera ... sera pertinent quoi mais autrement je dirais que les élèves ont de telles difficultés en calculs numériques et algébriques que ma tendance a été de faire des devoirs sans calculatrice.

L : Et donc au moment de préparer ton cours, là tu m'as dit que tu ne t'en rappelais plus trop mais bon quand même, alors est-ce que à certains moments t'as hésité sur plusieurs options plusieurs scénarios dans enfin, tu as dit que tu avais...

P1 : Ben si y'a des ... enfin ... j'ai de toutes façons y'a des grands ordres y'a par exemple savoir si on fait décomposition en nombres premiers d'abord ou pgcd d'abord ... euh bon ben je dirais que ça c'est aussi joué dans des discussions avec P11 et avec euh ... je dirais que j'ai un peu hésité la première année puis que finalement tu vois à partir du moment où on pris la brochure de l'IREM de Clermont qui était vraiment très structurée on a décidé de suivre son ordre quoi.

L : D'accord et au niveau des démonstrations y'a pas eu des moments où tu as hésité entre plusieurs démonstrations pour un même théorème justement dans ... dans la brochure du crdp de Clermont-Ferrand le cours il est donné avec certaines démonstrations et après y'a un petit passage où ils indiquent plusieurs types de démonstrations par théorème...

P1 : Ben alors là j'aurai besoin de voir ... (rires) donc ça ...

L : Mais tu ne te rappelles pas avoir hésité à un moment sur un type de démonstration pour la division euclidienne par exemple ou ... ou la décomposition en facteurs premiers.

P1 : J'suis pas sûre en plus d'avoir fait les mêmes tous les ans si tu veux ... enfin je veux dire même...

L : Si t'es pas sûre d'avoir fait les mêmes tous les ans (si tu as changé) c'était par rapport à toi ou...

P1 : Oui sur l'aspect je dirais répétition parce que bon toute façon même cette année euh si tu veux avec P11 on se voyait quand même tous les lundis et en fait chaque lundi on rediscutait du cours suivant, y'a des feuilles qu'on a refait pas refait bon ça dépendait ... ça dépendait lesquelles c'est-à-dire que c'est vrai quand l'année d'avant certains exercices allaient un peu vite ou étaient mal passés on les reprenait pas on en rajoutait on a eu aussi ... on a eu des sources qui étaient nouvelles parce que je veux dire que moi quand j'ai commencé à enseigner l'arithmétique y'avait rien dans les annales après y'en a eu très peu et je dirais que cette année par contre on disposait comparativement aux autres années les annales de l'année étaient relativement riches en ... en exercices donc ça aussi changé parce que avant on avait du en inventer on avait du en ... ça veut pas dire qu'on n'en a pas réutilisé certains mais c'est vrai que ... pour les élèves faibles on savait aussi plus parce que bon ben dans le groupe il y avait un peu de tout euh donc je dirai que pour les élèves faibles on voyait plus justement quels étaient les objectifs d'évaluation pour le bac même s'il y'a pas que ça qui nous guidait je veux dire malgré tout ça influence sur le ... ce sur quoi on va insister pour les élèves faibles et moyens du groupe quoi.

L : Et pour toi c'était quoi les choses importantes sur lesquelles insister justement pour ces élèves pour l'évaluation au bac ?

P1 : Ben je dirai que l'évaluation bac elle tourne beaucoup Euclide Bézout et des choses comme ça hein c'est vrai qu'elle est assez elle est assez stéréotypée ce qui veut pas dire qu'on a fait que ces exercices là mais ... mais disons que pour eux enfin les révisions à la fin de l'année, c'est vrai que...

L : Tu as fait beaucoup d'exercices là-dessus.

P1 : Oui.

L : OK quand tu as travaillé avec P11 alors est-ce que vous avez eu de ... des points de divergence assez importants ou non.

P1 : Le problème c'est que ça fait 10 ans qu'on travaille ensemble (rires) donc ben.

L : Au niveau du contenu d'arithmétique, y'a pas eu de ...

P1 : C'est pas ... non de toute façon on a globalement une approche des mathématiques qui est très ... enfin on a une approche que ça soit de notre pédagogie ou des notions qu'on pense importantes ou ce qu'on pense important dans la formation des élèves qui est très très proche donc je dirais qu'avec elle c'est extrêmement rare qu'on soit pas d'accord même au point ou quand une de nous est fatiguée elle prépare la feuille pour l'autre. c'est-à-dire que normalement on se voit chaque semaine justement plutôt pour enrichir ou pour voir ce qu'on a trouvé par nos lectures je dirais dans les différents manuels ou dans les brochures ou dans les articles on a pu repérer l'une ou l'autre des exercices plus intéressants euh ou on mixe des feuilles avec nos préparations mais ce qui est vrai c'est que quand on est à la bourre moi en automne je veux dire j'ai pris des feuilles de P11 et inversement quand elle est fatiguée elle prend mes feuilles comme ça avec elle j'ai pas ce problème là que j'ai avec les collègues.

L : D'accord et tu disais que vous aviez des points beaucoup de points communs sur la façon de voir ce que ... euh sur ce que vous estimez important à faire passer aux élèves c'est quoi justement ces points importants en quelques mots.

P1 : Hum ben je pense que justement on ... on aime bien sur certaines parties quand on peut insister sur le raisonnement la formation la rigueur du raisonnement les points de logique les choses comme ça et qu'on raisonne ... enfin qu'on n'est pas obnubilé par le ... ce que c'est que l'épreuve de bac et qu'on raisonne plutôt en terme de formation je dirai à long terme pour les élèves même pour ceux qui arrêtent ... une formation à ce peuvent être des mathématiques rigoureuses disons plus que de la de la technique...

L : D'accord.

P1 : Ou la façon de fonctionner je dirai aussi enfin euh ... enfin de fonctionner beaucoup avec des exercices bon de toutes façons on n'a pas énormément de temps mais c'est vrai que ...

L : Oui dans le cours c'est vrai en général maximum 45 minutes voir 40 et après beaucoup de feuilles d'exercices et chacun avance à son rythme.

P1 : Oui voilà ça c'est ... et puis obliger les élèves ben justement à apprendre à travailler avec des corrigés enfin avoir ... avoir une pédagogie qui permette euh à la fois bon d'être plus disponible je dirais pour les élèves faibles de la classe en se disant que les plus rapides ils avancent presque euh presque tous seuls et qu'on a pas à aller les voir quoi.

L : D'accord alors donc tu m'as dit que l'année prochaine tu allais de nouveau avoir de l'arithmétique alors tu penses que tu garderas à peu près le ... le même schéma, y'aura pas de gros changement ?

P1 : Euh non disons ce qui est sur c'est que je vais avoir un groupe qui sera relativement différent point de vue niveau puisqu'en fait cette année j'avais dans mes élèves les plus faibles y'avait quand même beaucoup beaucoup de nationaux donc je pense qu'en fait je vais avoir un groupe qui sera un peu différent à mon avis ils seront plus nombreux mais il sera plus homogène.

L : Et plutôt vers le haut ?

P1 : Plutôt vers le haut.

L : et tu penses que ça va changer quelque chose un petit peu dans le choix des exercices dans ... euh la calculatrice.

P1 : Oui je pense que justement j'aurai peut-être un peu plus de latitude pour faire certaines choses sur lesquelles cette année j'ai du aller vite parce que y'en avait quand même beaucoup qui traînaient donc j'ai choisi de privilégier et que je serais peut-être moins obligé de répéter que souvent on a donné des exercices en double voir en triple pour pouvoir s'assurer que même si on avait expliqué le premier voir le deuxième l'élève pourra faire le troisième donc je pense qu'effectivement que ça sera plutôt dans ce sens là que je trierai les feuilles ... surtout que bon en pourcentage en plus il semblerait qu'il y ait un peu moins d'élèves qui aient choisi la spé maths donc euh ... parce que qu'il court beaucoup les bruits : la spé physique ça donne pas de travail, spé bio ça en donne entre

les deux et les maths bon plus (rires) et puis c'est vrai que bon ... on peut pas non plus cacher aux élèves de première S ... moi je leur ai mis sur la feuille que je donne pour définir la spé math qu'il fallait au moins avoir 9 de moyenne ... en première S pour envisager de prendre une spé maths en TS et qu'on est quand même obligé de leur dire que si vraiment ils ont eu beaucoup beaucoup de difficultés en géométrie en première S c'est peut être pas la peine d'en rajouter tout en disant que c'est ouvert euh parce que justement dans le euh dans le groupe y'a des élèves qui n'étaient pas forcément très forts mais qui étaient intéressés et sur lesquels ça a bien marché puis comme les sujets sont plus fermés hein y'a quand même des élèves qui ont de meilleures notes en spécialités maths qu'en obligatoire alors que paradoxalement c'est plus difficile mais comme les sujets sont plus fermés parce que l'arithmétique par exemple elle part avec ... j'en envie de dire avec très très peu de pré-requis en fait quand on tombe sur des difficultés on tombe sur des difficultés d'algèbre de collège hein euh c'est-à-dire que des élèves qui sont en difficulté c'est pas des difficultés récentes sur lesquelles on tombe.

L : Alors est ce que tu fais un lien entre l'arithmétique et le reste du programme avec tes élèves enfin en spécialité ... est-ce que tu arrives à faire des liens avec l'obligatoire ou est-ce qu'en obligatoire .... c'est peut-être un peu dur parce que c'est pas...

P1 : Ce qui est sur c'est que finalement les ... euh je dirais que c'est plus les élèves des fois dans des exercices dire qu'ils m'ont étonnée par exemple sur des réinvestissements quand on a fait les probas où c'est vrai qu'il y a pas mal de fractions assez épouvantables les élèves de spécialité maths ont pas hésité deux secondes pour aller prendre leur programme de décomposition en facteurs premiers ou le pgcd et simplifier ça en deux temps trois mouvements et au point qu'ils l'ont même passé parce que cette année ça m'a amusé, c'est la première fois que ça arrive ... quand ils ont vu que les autres galéraient sur leur fractions, ils leur ont passé les programmes de décomposition en leur expliquant que ça leur faciliterait la tâche (rires) mais autrement je vois pas trop parce que finalement on tombe très peu sur les ... sur les ... non sinon je dirais qu'il m'est arrivé de faire des parenthèses au niveau des structures ou des choses comme ça c'est-à-dire que ... euh ... quand on a parlé par exemple d'équations ... enfin euh ... rechercher les solutions dans ces sous-ensembles ou des choses comme ça ou parler mais c'est presque plus finalement avec le cours de géométrie de spécialité c'est-à-dire tous les aspects bon qui sont vraiment à la limite du programme mais c'est vrai on en parle aux élèves sans les interroger trop mais tout ce qui tourne autour des structures de groupe ... euh moi en fait les jours où j'ai défini les structures de groupe je ne m'en rappelle plus si c'était en arithmétique ou pas (rires) je suis incapable de m'en rappeler euh mais quand je parle de groupe de transformation en géométrie je refais le ... je refais le pas avec les structures de groupe et justement bon pourquoi on passe ... euh ... par exemple Z avec l'addition pourquoi N suffit pas et des choses comme ça donc ça sert d'illustration aux notions de structures mais je dirais plus dans le cours de spécialité. Et puis je ne suis pas vraiment dans l'esprit du programme là (rires).

L : Toi tu estimes ... enfin qu'estimes-tu être le plus important à faire passer en arithmétique avec tes élèves ? Que souhaites tu qu'ils retiennent vraiment de cette partie du programme enfin de l'arithmétique en spécialité ? ... C'est quoi le point...

P1 : Moi je pense plutôt c'est les modes de raisonnement qui m'intéressent. C'est pas un contenu particulier je veux dire je vais pas aller privilégier Bézout par rapport à Gauss ou par rapport à je ne sais lequel euh c'est pas ça qui est intéressant et d'ailleurs ... enfin quand les élèves de spé maths viennent présenter en première S c'est-à-dire dire qu'on leur demande de venir parler aux élèves de première S pour parler de la spé maths y'en a quand même beaucoup qui ont parlé je veux dire sans que parce que moi je suis là pour servir de modérateur c'est tout mais y'en a beaucoup beaucoup qui ont parlé de la rigueur des raisonnements et je pense que c'est important que ça soit ça qui les marque.

L : Tu veux que ça soit ça qu'ils retiennent en fait du cours d'arithmétique. Tu estimes que c'est un des trucs les plus importants

P1 : Ben puis aussi parfois on a eu des choix de méthodes ou des ... enfin parce que c'est vrai que bon le cours d'obligatoire moi je trouve que du point de vue formation il est quand même très très décevant.

L : Alors à ton avis, bon là on va un peu plus rentrer dans le contenu d'arithmétique, as ton avis sur quoi tu as le plus insister sur euh comme tu disais Euclide enfin tous les exos type bac ou plutôt sur un type de raisonnement enfin sur quoi tu as le plus insister ?

P1 : Moi je dirais que de toutes façons y'a des grandes étapes y'a le raisonnement par récurrence en début d'année y'a effectivement euh ... je dirais où quand même bon pour la plupart c'est pas acquis en fin de première S donc ça c'est des grands modes de raisonnement en arithmétique euh ... mais après je dirais que par exemple entre les

utilisations de du théorème de Gauss c'est vrai qu'on passe beaucoup de temps sur Euclide parce que finalement il faut que ça fonctionne pour que Bézout fonctionne mais bon je dirais que c'est pas parce que on passe beaucoup de temps sur Euclide que j'ai considéré que c'est ... que c'est vraiment ... un des outils fondamentaux du programme de terminale.

L : Vu que la question c'était à ton avis sur quoi as-tu le plus insisté donc au début ... ça dépendait des périodes au début c'était plutôt la récurrence après...

P1 : Et puis après bon je dirais qu'il y a une période de l'année (...) sur certains exercices on avait plusieurs corrigés possibles et plusieurs approches et ça finalement c'est qui est le plus intéressant quoi.

L : Et à ton avis, quel type d'exercices as tu le plus donné ?

P1 : Oh Bézout ça je pense (rires) euh je suis prête à parier enfin surtout sur la fin de l'année euh ... mais ce qui veut pas dire euh je veux dire là ... là ça correspond plus à la nécessité d'en faire pour les élèves moyens et faibles pour qu'ils aient une chance de s'il y a de l'arithmétique on soit sur qu'il aient un résultat correct récompensant le travail de l'année mais je dirais que c'est pas ...

L : Et si on met Bézout à part ? pour les autres ?

P1 : Je dirais ce qui tourne autour des récurrences après il me semble que c'est le deuxième grand type.

L : Et selon toi quelles sont les principales difficultés des élèves en arithmétique ?

P1 : Moi je dirais qu'au début d'année y'a tout ces problèmes avec les fractions c'est-à-dire qu'ils ont systématiquement envie de ... de ils ont jamais envie d'écrire que quelque chose est égal à  $k$  fois quelque chose ou s'il y a un diviseur donc au début d'année y'a énormément de non aboutissement dans leur réponse qui viennent d'un passage à des fractions dont après ils ne savent plus quoi faire parce que finalement ... enfin ils tournicotent en rond avec leurs fractions sur lesquelles ils ont écrit des conditions qu'ils savent pas exploiter. Euh ... le deuxième grosse difficulté je dirais en fait c'est des problèmes de non maîtrise des calculs un peu longs c'est-à-dire qu'il y a beaucoup d'élèves qui ... euh qui en fait connaissent la théorie mais sont incapables de la mettre en pratique à partir du moment où il y a plusieurs lignes de calcul euh ils vont toujours se perdre quelque part en route ... euh et puis bon après je sais pas après c'est plus difficile parce que on va tomber sur des erreurs plus typiques ou des euh si toutes les erreurs qui sont liées en fait à ... à du pseudo Gauss mal utilisé pour te dire tous les trucs du genre euh ... parce que ce que j'ai appelé pseudo Gauss mal utilisé c'est (rires) non mais c'est tous les trucs où ils ont un produit qui est divisible par quelque chose et ils vont affirmer que l'un des termes du produit qui les arrange est divisible par ce nombre sans vérifier les conditions quoi.

L : Et comme le théorème  $d$  divise  $a + b$  donc  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$  ?

P1 : Voilà ou ce genre de chose aussi ... et aussi tous les trucs tu sais euh utiliser comme il faut  $d$  divise  $a$ ,  $d$  divise  $b$  entraîne  $d$  divise ... euh

L :  $d$  divise toute combinaison...

P1 :  $d$  divise les combinaisons linéaires de  $a$  et  $b$  ça c'est un théorème qui pour eux n'est pas du tout naturel c'est-à-dire qu'en fait si l'exercice est bien amené ou qu'il est suffisamment téléguidé ça va sortir mais si on leur donne une combinaison linéaire bon dans laquelle même il y'a assez lisiblement des facteurs qui sont tous les deux divisibles c'est quelque chose qu'ils ont du mal à utiliser.

L : Donc là on parlait des types d'erreurs sur la récurrence, les erreurs de calcul, euh pseudo Gauss mal utilisé et les fractions aussi alors à ton avis à quoi elles sont dues ces erreurs tu peux avoir différents types de réponses ?

P1 : Moi je les mets pas ... les fractions ça vient d'un autre (inaudible) sur les problèmes d'entiers c'est-à-dire qu'en fait tout ce qu'on leur fait avant comme on travaille euh bon en fait quasiment toujours avec des réels voir bon avec des rationnels pour eux c'est une tendance naturelle c'est-à-dire que le fait d'apprendre à se servir de la divisibilité pour rester sur des entiers ou exploiter les quotients les restes y'a un autre truc qui n'est pas naturel du tout pour eux c'est dans les problèmes euh de divisibilité de penser à diviser un nombre enfin de regarder le reste de la division du nombre quand on a un problème du genre  $4$  divise une expression avec des  $n$  et des choses comme ça regarder euh écrire les différents possibles ... restes possibles de la division de  $n$  par  $4$  pour arriver à

travailler ça c'est quelque chose qu'ils ont énormément de mal à faire d'eux-mêmes euh c'est-à-dire qu'ils le font très bien si on leur dit en étudiant ... si on leur dit tout ils le font euh si on leur met la question brute ... servie brute c'est quelque chose qui n'est pas naturel du tout du tout.

L : Et à ton avis les explications pour ça ? ... euh quoi ça peut être du ce...

P1 : Là aussi c'est pareil moi je pense que l'apprentissage par exemple la notion de quotient de diviseur et reste c'est en fait une notion qu'ils ont vu quand ils étaient tout petit sur lesquelles on les a encore fait travaillé enfin par exemple écrire le a égal bq + r. Pour beaucoup d'élèves c'est une vraie difficulté hein et dans les très faibles de la classe y'en a qui savaient jamais où ils devaient mettre les choses c'est-à-dire que ...

L : Et que le r doit être 0 et b.

P1 : Ca c'est euh ... c'est-à-dire que y'a des choses qui n'ont pas été justement je pense ou je pense que c'était pas assez progressif et dans ce sens là je suis contente du nouveau programme de troisième je pense que ... même si on parle pas très longtemps des choses on en parle un petit peu ... on peut peut-être espérer que ça (revienne) plus.

L : Après pour les problèmes de récurrence ?

P1 : La récurrence de toutes façons c'est ... c'est qu'en fait ils perdent ... bon je dirais y'a des élèves très faibles qui ont pas compris ce que c'était le raisonnement par récurrence c'est-à-dire qu'ils font vraiment des fautes ou qu'ils ressortent comme on insiste sur 1 2 3 parce que c'est vrai qu'avec les élèves faibles moi j'en suis là ... leur dire on note 123 les trois étapes et les trois étapes doivent être correctes euh bon ça c'est le problème je dirais des élèves très faibles qui ont pas compris sinon le gros problème c'est en fait sur la deuxième étape c'est que les élèves n'arrivent pas à formuler correctement l'objectif pour trouver un chemin c'est-à-dire qu'ils sont capables de formuler l'hypothèse, ils savent éventuellement quelle sera la conclusion mais ils arrivent pas à ... tous les exercices où on avait des 3 puissance n enfin.

L : Dans le premier DS surtout.

P1 : Ou des choses du genre le problème c'est que les élèves n'arrivent pas du tout à ... à se fixer une organisation des calculs qui permette d'arriver au résultat c'est-à-dire qu'ils arrivent pas à ... ils savent où commence ou ça finit mais euh c'est de toutes façons à ce niveau là que ça coince la récurrence.

L : Et le pseudo Gauss et toutes les histoires de d divise une combinaison linéaire de a+b tous les problèmes de divisibilité ?

P1 : Là moi je pense que c'est un ... que justement c'est aussi lié à leurs ... leurs mauvaises maîtrises des calculs élémentaires c'est-à-dire que je suis persuadée que ... y'a des types de réflexes que ... enfin que les gens de ma génération avaient sur voir les décompositions ou je veux dire que 72 ça fait 8 fois 9 c'est fait 2 au cube fois 3 au carré pour quelqu'un ... pour ma génération c'était un automatisme enfin ... là je dirais que même en début d'année ça peut ... enfin à mon avis c'est partiellement lié ... c'est vrai qu'en début d'année quand ils arrivent ils ne savent pas leurs tables 7 8 9 c'est toujours un problème ... c'est aussi pour ça qu'on fait des devoirs sans et qu'après je pense que justement comme ils ne sont pas assez familiers les ... je dirais les nombres ils ont tendance à ... à prendre des règles ... parce que bon ce théorème sur les divisibilités en fait ils l'utilisent bien avant qu'on ait fait le théorème de Gauss ils ont tendance à vouloir s'en servir alors qu'on a même pas parlé du théorème de Gauss donc en fait c'est une erreur qui est antérieure à tout enseignement et à la limite à partir du moment où on a fait le théorème de Gauss ... moi je trouve que dans les copies on la trouve moins parce que même si on fait parce que on avait fait les vrais faux là du Terracher sur lesquels y'avait.

L : Oui si d divise le produit alors d divise chacun des nombres.

P1 : Oui voilà y'avait pas mal d'exercices qui tournaient autour de ces idées là mais le fait de faire les vrais faux finalement ne résout pas le problème par contre je trouve que le fait de faire quand on a vraiment bien fait toutes les décompositions en facteurs premiers puis qu'on a aussi fait le théorème de Gauss complètement c'est une erreur qui a tendance à disparaître chez beaucoup d'élèves quand même.

L : Même pour les combinaisons linéaires ; pas juste pour le produit ?

P1 : Euh les combinaisons linéaires le problème là c'est que les ...

L : Oui parce que là c'était pour le pseudo Gauss. Pour les combinaisons linéaires parce que celle-là elle ressort très souvent aussi comme erreur ?

P1 : Mais celle-là elle est plus ... enfin justement elle perdure plus.

L : A ton avis pourquoi ?

P1 : Je sais pas.

L : Pourquoi quand ils ont divisé une combinaison linéaire ils disent que  $d$  divise  $a$  et  $d$  divise  $b$  ?

P1 : J'ai l'impression ... Je trouve que ça suffit pas justement d'en parler. Je sais pas trop ce qu'il faudrait faire parce que c'est pas faute de leur avoir mis...

L : Oui, tu as mis des contre-exemples. justement est-ce que tu penses que les contre-exemples ça leur parle entre guillemets, qu'ils trouvent ça convaincant ?

P1 : Moi je pense que le contre-exemple numérique leur parle beaucoup plus c'est-à-dire que ...

L : De toutes façons c'est ce que tu as mis dans les copies souvent quand ils l'utilisaient ...

P1 : Oui oui non mais je sais que je fais comme ça ... je trouve qu'ils sont beaucoup plus convaincus par des contre-exemples sur des petits nombres ou justement c'est indiscutables comme raisonnement mais ça ... ça suffit pas forcément.

L : Donc euh, on a parlé un peu du bac et tu disais que l'année prochaine comme tu allais avoir que des internationaux ça allait être peut-être ... tu allais peut-être avoir moins de répétition à faire à la fin de l'année pour préparer...

P1 : C'est-à-dire qu'à ce moment là le bac ça devient moins une contrainte ... enfin le bac le bac je veux dire le problème c'est que ... bon pour certains nationaux là qui sont justes pour l'avoir je veux dire c'est le ticket de passage obligatoire et donc on se retrouve pris enfin prof de terminale on est pris entre deux contrats ... parce que finalement actuellement pour les élèves corrects je veux dire la contrainte du bac ... pouf ... je dirais que de toutes façons ils l'auront, ils l'auront très largement (rires) donc ça donne une plus grande liberté qu'inversement quand on a des classes très faibles avec des élèves qui la plupart du temps ne poursuivront pas du tout dans des filières scientifiques il faut leur donner un ticket de ... un ticket d'entrée pour le supérieur et que donc à ce moment là, on est plus tenté de bachoter.

L : Et donc justement sur ton cours d'arithmétique euh quel était le poids de la contrainte du bac sur l'organisation d'une part et après sur le contenu du cours ? enfin de votre cours d'arithmétique.

P1 : Le contenu du cours je dirai que pour moi c'est pas le bac qui était une contrainte c'est-à-dire que c'était ... euh qui m'intéressait c'est d'avoir justement un cours structuré et formateur et que là je me suis pas occupée du tout ... enfin au niveau du cours la partie cours magistral je me suis pas occupée du tout du tout à mon avis de ce qu'était l'épreuve du bac enfin qu'à ce moment là c'était pas ce qui ... c'est pas du tout ce qui me préoccupait. Que par contre c'est évident que dans les choix de feuilles d'exercices ça a compté ... mais avec le fait que ça a compté de manière modérée parce que j'avais quand même beaucoup d'élèves qui avaient des visées post-bac donc soit on mettait en fin ... enfin surtout les premières feuilles on a mis des fois en fin des exercices qu'on a pas fait avec tout le monde donc là c'était justement pour donner matière à chercher pour ceux qui voulaient qui aient envie qui avaient le temps ... que par contre que c'est sur ... je dirais c'est plus en fin d'année ... en fin d'année j'ai plus été tentée par du bachotage pour toute la ... enfin pour le groupe des élèves moyens et faibles ... euh qui en avaient besoin alors que bon c'est vrai que quand on a des élèves qui n'ont pas vraiment besoin de réviser on peut ... je veux dire qu'on peut s'amuser à aller prendre des exercices ailleurs ou à faire des exercices plus variés parce que justement y'a moins nécessité de répétition.

L : Mais finalement ils sont quand même assez stéréotypés, c'est-à-dire c'est le mot que tu as employé, enfin ces exercices de bac par rapport à tous les exercices qu'on fait en arithmétique...

P1 : Oui mais justement on n'a pas tapé ... enfin je pense qu'on est loin dans le cours qu'on fait avec P11 on est quand même loin de ne taper que dans des exos bacs ... je veux dire que nos choix ... c'est une part qu'on peut pas oublier complètement donc on en as mis euh mais que je dirais que quand on fait notre feuille de cours ça a pas été ... ça joue plus au niveau de la répétition ça a pas tellement joué je veux dire les exercices qu'on avait envie de faire on les a mis qu'on pense qu'ils tombent au bac ou pas c'est-à-dire qu'on s'est pas occupé de ... on savait pertinemment enfin à mon avis y'a des collections d'exercices qu'on a mis où il est absolument impensable qu'ils tombent au bac.

L : Est-ce que tu te rappelles ... est ce que t'as un souvenir justement d'un de ces exercices que vous aviez vraiment envie de mettre et que vous avez mis ? est-ce qu'il y en a un qui t'a marqué ?

P1 : Non mais je dirais ... il me semble qu'il y en a plusieurs et qu'éventuellement ça pouvait être des choses très courtes c'était plutôt le fait qu'ils étaient enrobés ... enfin ce qui caractérise l'exo de bac actuel c'est premièrement petit a petit b petit c où on dit tout donc des fois c'était même pas tellement le fait que ça ... ça pouvait ne pas être un sujet de bac c'était le fait qu'on le posait pour obliger les élèves à réfléchir et pas pour leur dire on vous met tous les jalons intermédiaires et vous allez arriver là ... nécessairement donc euh...

L : Et puis souvent, j'ai regardé les annales et à la fin ils mettent plusieurs ... enfin en dehors de ce qui est vraiment tombé au bac en 98 enfin en 99 et 2000 y'a aussi pleins d'exercices, enfin dans certaines annales qui datent des années...

P1 : Ben c'était ... non mais c'était (...) disons que moi c'est des exercices que j'ai fait. en fait le problème c'est que c'est des exercices qui la plupart sont plus du tout dans l'esprit du programme actuel parce que c'était des énoncés euh ... enfin moi j'ai enseigné à cette époque là c'était des ... parce que moi j'ai enseigné l'arithmétique ... 80 deux années euh 80 euh rentrée 81 rentrée 82 j'ai enseigné ce vieux programme d'arithmétique que j'avais moi même subit enfin c'était le même (rires) euh mais la grosse différence c'est qu'en fait c'était des exercices qui étaient euh qui étaient extrêmement concis dans leur euh dans leur approche alors en fait moi ce que j'ai fait là aussi en objectif de formation c'est qu'en fait même en révisions de fin d'année c'est plutôt des exercices que j'ai donné au moment des révisions justement aux très bons élèves qui allaient aller en prépa mais je considère qu'actuellement c'est des exercices qui ne tomberont pas tels quels au bac c'est-à-dire qui ne sont pas du tout dans l'optique du bac actuel. Ce qui veut pas dire que certains d'entre eux ne soient pas très intéressants (rires) mais y'en a qui enfin y'en a qui reposent sur des astuces en particulier ceux sur les bases enfin qui reposent sur des astuces qu'il faut essayer certaines choses ou pas penser que les chiffres sont pairs ou impairs c'est-à-dire qu'il y a des choses pour gagner du temps qui sont très astucieuses très intéressantes et c'est très intéressant d'en parler avec les bons élèves mais à mon avis ... moi je les ai pas fait avec une partie de la classe.

L : Et justement quand tu dis que tu as subi ce cours d'arithmétique enfin le cours d'arithmétique avant qu'il soit supprimé et que tu l'ai enseigné deux ans tes grands souvenirs de ... ?

P1 : Non mais c'est-à-dire que l'approche des élèves à l'époque était pas du tout la même parce que justement ils calculaient bien euh je veux dire que les calculatrices étaient pas du tout rentrées dans les mœurs hein euh c'est-à-dire qu'il y avait que quelques rares élèves qui avaient ... l'équivalent ... ils avaient même pas aussi bien que les calculatrices collèges actuelles donc en fait de toutes façons on faisait tout à la main euh ... par contre les élèves avaient une euh ils voyaient à l'œil des tas de choses euh tout ce qui était je veux dire la preuve par neuf ou les règles de trois ... donc ils avaient des ... leurs outils de contrôle étaient complètement différents c'est-à-dire qu'un élève par exemple s'apercevait qu'il s'était trompé dans Bézout ou des choses comme ça pour des histoires de divisibilité de parité ou de c'est-à-dire y'a des ... qu'il y a des erreurs de calcul numérique en fait du genre dans Bézout s'ils sont premiers entre eux et qu'il faut trouver 1 je veux dire 1 on ne peut pas le trouver avec n'importe quel nombre et n'importe quelles unités donc les élèves avaient des types de contrôle ils avaient aussi des contrôles en ordre de grandeur parce que là les élèves cette année y'en a que ça a pas gêné de me mettre enfin deux nombres dont la différence étaient 1 et dont visiblement l'ordre de grandeur (rires) ou à vue de nez ils différaient d'un facteur 100 donc c'était pas du tout et puis c'était un enseignement qui s'adressait à des classes de TC euh donc je veux dire que le public enfin le public c'est ce qui correspond actuellement vraiment au ... aux têtes de groupe de spé math donc le public est devenu beaucoup plus hétérogène aussi ça c'est ... mais c'était aussi une partie enfin et ça l'est resté c'était une partie des ... enfin de l'enseignement de terminale où certains élèves réussissent alors qu'ils réussissent moins bien ailleurs et inversement y'a des élèves qui réussissent bien ailleurs et qui ... ne rentrent pas bien dans les raisonnements d'arithmétique ...

L : Et là, quand tu parles du contrôle à l'époque, ils avaient pas de calculatrices ou vraiment très peu.

P1 : Non mais ils passaient tous leur épreuve de bac sans hein.

L : Oui oui, je suis d'accord mais moi je voudrais revenir un petit peu sur quand même sur le nombre de fois où il y a le mot algorithmique ou enfin algorithme dans le programme actuel d'arithmétique de spé. Est que tu penses pas que c'est un appel à utiliser beaucoup plus la calculatrice ou euh ...

P1 : Oui en fait je vais te dire ce que j'ai vu un peu disons dans mon entourage des gens que j'ai rencontrés moi je suis quand même sidérée parce que il y'a énormément de ... de gens ou d'élèves enfin quand je faisais passer le rattrapage y'a énormément de gens qui n'ont même pas fait des ... enfin dont les élèves n'ont pas fait les programmes élémentaires enfin même décomposition en facteurs premiers pgcd bon sans parler Bézout pour programmer il faut peut-être travailler un tout petit peu encore que ça se trouve je veux dire c'est un programme qui se trouve dans le dans le Déclic de chez Hachette qui doit être aussi je crois dans le Transmath je sais plus enfin il me semble qu'il y a deux éditeurs qui .. qui ont mis des programmes prêts à emploi entre guillemets euh qu'on peut pratiquement prendre tels quels mais il y a énormément de gens qui en fait euh non pas fait justement cette euh cette structure enfin le passage de l'algorithme je dirais la théorie de l'algorithme d'Euclide à la main ou de Bézout à la main au passage à la calculatrice c'est pas fait.

L : Et toi tu trouves que c'est quelque chose sur lequel il faudrait insister peut-être un peu plus qui est intéressant ou ...

P1 : Bon le problème c'est le problème du temps ... en deux heure moi je sais pas si c'est parce que qu'en plus on est gêné par les par les instructions c'est-à-dire que les élèves qui ont des calculatrices de bas de gamme ils ont pas le for ou le while ou le ... donc c'est vrai qu'on est aussi un peu coincé parce que ... euh moi souvent j'ai proposé des programmes dont je pense qu'ils sont pas ... ben justement ils sont pas très bien du point de vue ... euh algorithmique ou structure parce que le label le goto que y'a des instructions qui existent sur tous les modèles et que ce qui m'intéressait c'était de pouvoir parler à toute ma classe en même temps ... je sais pertinemment qu'en fait j'ai ... voulant faire ça, j'ai proposé des programmes qui du point de vue structure sont pas très jolis ... et puis y'a un gros problème qui globalement est le manque de formation des collègues enfin bon c'est-à-dire que on a eu aucune formation sérieuse hein au niveau académique ou même national y'a eu aucune formation sérieuse y'a eu aucune réflexion justement sur les instructions sur les calculatrices qui devraient être enseignées et qui ne devraient pas l'être euh y'a pratiquement rien dans les justement dans les programmes y'a une initi ... enfin y'a effectivement ce désir de parler d'algorithmique mais après ... je dirais euh en dehors du mot algorithme d'Euclide je sais pas si y'a un autre endroit où il y a algorithme dans les intitulés de programme.

L : Il y est au moins 7 ou 8 fois quand on lit ...

P1 : Non mais en dehors des introductions c'est-à-dire en dehors du fait d'en parler quand on passe au corps du programme ... moi je te parle du ... de la partie principale ... je pense qu'il y a algorithme d'Euclide.

L : Oui c'est vrai.

P1 : Mais je crois pas qu'à côté de par exemple de décomposition en facteurs premiers il y ait on pourra développer un algorithme permettant de ... et je veux dire tant qu'on aura pas écrit ça ... il faut pas compter que ça passe réellement au niveau de l'enseignement enfin moi j'y crois pas (rises) c'est-à-dire dire que le problème c'est des intentions annoncées en haut moi ça me rappelle exactement ce qui est en train de se passer pour l'informatique pour l'informatique tous nos programmes de la 6ème à la terminale euh insistent sur l'outil informatique euh les nouvelles technologies et cetera

L : Oui c'est transversal, c'est pas lié qu'à l'arithmétique

P1 : Et je vais dire après on n'a pas les salles, on n'a pas la formation on n'a pas non plus les livres de formation pour enseigner qui vont avec parce que actuellement sur les calculatrices y'a en fait je veux dire pour se former c'est d'aller aux stages du constructeur en fait moi c'est là que je me suis formée ... je veux dire que je reconnais que je dois à Texas (rises) ma formation en ma formation en programmation et après bon il faut accepter d'être autodidacte et après c'est vrai que plus on en fait plus on arrivera soi-même à ... à s'améliorer mais que pour passer le premier seuil ... y'a énormément de collègues qui l'ont pas encore passer.

L : Mais en arithmétique aussi on pourrait utiliser pas mal des tableurs moi j'ai là dernièrement j'ai vu une publication de l'IREM de Poitiers ... où à la fin ils mettent tout un cours qui s'est beaucoup appuyé sur l'usage des

tableurs. Bon y'avait des exercices classiques plus plein d'illustrations avec les tableurs et qu'est-ce que tu en penses ?

P1 : Mais là le problème c'est que moi cette année j'ai même pas songé ... je ne pouvais pas aller sur tableurs donc euh donc en fait ça règle un peu la question mais de toutes façons le problème de ces outils là c'est le problème qu'ont eu les collègues qui ont en fait en seconde ... les gens qui veulent en faire sérieusement là aussi c'est pareil pour les élèves y'a aussi un temps d'apprentissage c'est-à-dire que le problème c'est le temps qu'il faut consacrer au tableur avant d'arriver à faire des mathématiques avec le tableur donc c'est vrai qu'aussi je pense ... enfin la situation changera si les élèves de collège s'approprient vraiment le tableur à ce moment là on pourrait dire qu'en lycée on y va en cours de maths et qu'on fait des maths sur tableurs alors qu'actuellement le problème qu'il y a pour les collègues qui ont essayé enfin les retours que j'ai sur l'enquête de seconde c'est que le problème c'est que la prise en main de l'outil est tellement lourde que le temps qu'il faut pour arriver à faire le problème de math avec est tel que ça fait reculer énormément de gens.

L : Et parce que pourtant dans le programme de troisième d'arithmétique, c'est un peu fait pour le tableur la soustraction ... enfin les différences successives.

P1 : Oui oui mais le problème là c'est pareil enfin moi l'année dernière j'avais essayé de voir combien de collègues pouvaient vraiment aller sur tableur et sur l'académie là j'en connais pas beaucoup quoi.

L : Problème de temps, problème de moyen, problème de formation et après c'est vrai qu'au bac après...

P1 : Oui et puis même quand il va falloir l'évaluer parce que bon il y'a des discussions pour le math-informatique de première L le problème aussi c'est que ... y'a pas eu euh enfin nous l'année dernière par exemple on nous a refusé de nous payer Excel alors que tous les modèles enfin sur les sites académiques sont sous Excel le gratuit c'est star office mais star office il fonctionne pas exactement comme Excel alors je veux dire quand on met (...) à une collègue qui sait déjà pas faire fonctionner un tableur qu'on lui demande déjà d'entrée de changer de tableur de réécrire la fiche d'exercices posée à ses élèves je veux dire bon ... je veux dire il faudrait aussi décider nettement des priorités qu'on donne ... c'est-à-dire moi c'est vrai si par exemple j'avais un tableur ... si j'avais un tableur disponible en rétroprojection dans ma salle de cours je veux dire mon rapport serait différent mais que dans la mesure où ... donc bon je pense que en fait pour l'instant si tu veux je prépare je dirais ma formation personnelle avec des exercices de simulation je commence à apprendre à me servir d'un tableur mais je suis pas ... c'est vrai que ça donnerait plus envie de s'y mettre si on savait qu'on peut s'en servir ... et c'est vrai que moi j'ai tendance à privilégier la calculatrice parce que je trouve que les élèves l'ont tout le temps c'est un outil qu'ils ont tout le temps qu'ils peuvent continuer à travailler à la maison donc euh bon actuellement enfin je trouve que ça reste un meilleur outil ... euh sur les calculatrices j'avais quelque chose à rajouter là sur les HP tu sais qu'il y avait dans ma classe parce que ... euh moi je trouve que le fait qu'ils aient introduit les programmes en tout fait je sais pas t'avais regardé quand ils étaient là sur Bezout où ils ont leur u et v.

L : Oui.

P1 : Je veux dire moi je trouve que c'est dommage parce que c'est vrai que ça ... ça enlève toute envie de programmer là aussi c'est pareil c'est un outil qui a été je veux dire y'a pas nécessité de mettre ces programmes d'arithmétique dans les machines et que à partir du moment où ça y'est les élèves ont pas du tout de regarder quand j'ai donné décomposition en facteurs premiers y'en a eu qui ont même pas eu envie de regarder comment ça marcher.

L : Oui parce que moi même ma calculatrice que j'avais en 93 la TI 85 enfin elle a pgcd et ppcm...

P1 : C'est-à-dire que le problème c'est aussi de savoir justement si on veut que ça reste un outil pédagogique y'a des moments où on aurait envie prof de math de demander à ce qu'il y est des choses justement au niveau des structures enfin le tant que ou pour tout n de tant à tant ça c'est intéressant en tant qu'outil pour faire des maths mais y'a d'autres choses ou c'est du gadget qui finalement ... va enlever aux élèves euh l'envie de comprendre un programme quoi.

L : Merci beaucoup.



## COURS P2

Cours P2 n°1, mardi 03/10/00

### DIVISIBILITÉ, NOMBRES PREMIERS

#### I] Multiples et diviseurs (dans $\mathbb{Z}$ )

##### 1) Multiples

###### a. Définition :

Pour tout  $a$  et  $b$  entiers naturels,  $b$  multiple de  $a$  ssi il existe  $k$  tel que  $b=ak$

exemple : 4 multiple de 2

Notation :  $M_a$  : multiples de  $a$ .

$M_0 = \{0\}$  0 a un seul multiple

Attention : 0 est multiple de tous les entiers relatifs : quelque soit  $a$  entier relatif,  $0=0 \times a$

$M_1 = \mathbb{Z} = M_{-1}$

$M_a = \{ka/k \in \mathbb{Z}\}$   $M_a = M_{-a}$

###### b. Propriétés :

Théo : Quelque soit  $a, b, c$  trois entiers relatifs.

Si  $b$  multiple de  $a$  et  $c$  multiple de  $b$  alors  $c$  multiple de  $a$

Dem : soit  $a, b, c$  trois entiers relatifs tels que  $b$  multiple de  $a$  et  $c$  multiple de  $b$ .

$b$  multiple de  $a$ . Il existe un entier relatif, soit  $k$  cet entier, tel que  $b = ak$

$c$  multiple de  $b$ , ...,  $c = bk'$

$c = bk' = akk'$  avec  $kk'$  entier relatif.

$c$  est multiple de  $a$

**Théo** : Si  $b$  multiple de  $a$  et si  $c$  multiple de  $a$  alors  $b+c$ ,  $b-c$  et plus généralement  $\alpha b + \beta c$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  entiers relatifs, sont multiples de  $a$

##### 2) Diviseurs

###### a. Définition :

Quelque soit les entiers relatifs  $a$  et  $b$ ,  $a \neq 0$ ,  $a$  divise  $b$  ssi il existe un entier relatif  $k$  tel que  $b = ka$

remarque :  $a$  divise  $b$  ssi  $b$  multiple de  $a$

Notation :  $a \mid b$

On note  $D_a$  l'ensemble des diviseurs de  $a$ .

$D_0 = \mathbb{Z}^*$

$D_1 = \{1, -1\}$

$D_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$

Si  $a \neq 0$ ,  $D_a$  a un nombre fini d'éléments. il en a au plus  $2 \mid a \mid$

$D_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$

$D_a = D_{-a}$

Calcul pratique : Trouver, sans en oublier,  $D_{27}$  (élève au tableau)

###### b. Propriétés :

Théo 1 : Quelque soit les entiers relatifs  $a, b$  et  $c$ , si  $a \mid b$  et si  $b \mid c$  alors  $a \mid c$

Théo 2 : Quelque soit les entiers relatifs  $a$  et  $b$ , si  $a \mid b$  et  $b \mid a$  alors  $a = \pm b$

Dem : (élève au tableau)

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs tels que  $a \mid b$  et  $b \mid a$

$ka = b$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  car  $a$  divise  $b$

$k'b = a$  avec  $k' \in \mathbb{Z}$  car  $b$  divise  $a$

$k'(ka) = k'b = a$   $kk'a = a$

$kk'a - a = 0$   $a(kk' - 1) = 0$

$a \neq 0$   $kk' - 1 = 0$   $kk' = 1$

$k = k' = 1$  ou  $k = k' = -1$  donc  $a = b$  ou  $a = -b$

remarque : quelque soit les entiers naturels  $a$  et  $b$ , si  $a \mid b$  et  $b \mid a$  alors  $a = b$

Théo 3: Quelque soit les entiers relatifs  $a, b$  et  $c$ , si  $a \mid b$  et  $a \mid c$  alors  $a \mid b+c$ ,  $a \mid b-c$  et  $a \mid \alpha b + \beta c$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  entiers relatifs.

### 3) Exercices

(Elèves au tableau pour faire les exercices 1 à 3 de la fiche divisibilité.)

## Cours P2 n°2, mardi 10/11/00

(DIVISIBILITÉ, NOMBRES PREMIERS - SUITE)

### 3) Exercices

Elèves au tableau pour exercices 4 à 6 de la fiche divisibilité

### 4) Critères de divisibilité

Elèves au tableau pour les exercices 7 et 8 de la fiche de divisibilité.

Divisibilité par 2, par 5, par 3, par 9.

## II] Nombres premiers. **On travaille dans $\mathbb{N}$**

### 1) Définition

Un nombre entier est premier si il a exactement deux diviseurs (1 et lui-même)

Exemple : 1 n'est pas premier; 2 est premier; 3, 5, 7, 11 sont premiers.

### 2) Propriétés

Théo 1 : Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ .  $n$  admet au moins un diviseur premier.

Théo 2 : Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ . Si  $n$  n'est pas premier alors  $n$  admet un diviseur premier  $p$  tel que  $p \leq \sqrt{n}$  ( $p^2 \leq n$ )

Dem : Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ .

premier cas :  $n$  est premier et  $n \mid n$

second cas :  $n$  non premier

$n$  admet au moins un diviseur strictement compris entre 1 et  $n$ . Soit  $p$  le plus petit de ces diviseurs alors  $p$  est premier car s'il ne l'était pas, il admettrait un diviseur strictement inférieur à  $p$  et qui serait aussi un diviseur de  $n$  et  $p$  ne serait pas le plus petit diviseur de  $n$ .

On sait que  $p \mid n$  et que  $2 \leq p \leq n$

Soit  $q$  l'entier naturel qui vérifie  $n = pq$  ; on a  $p \leq q$ . Comme  $p \leq q$ , on a  $p^2 \leq pq$ , c-à-d  $p^2 \leq n$ .

Théo 3 : Il y a une infinité de nombres premiers.

Dem : Supposons qu'il y en a un nombre fini  $n$ . soit  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ces nombres premiers.

Considérons  $N = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ .  $N$  n'est pas premier donc il admet un diviseur premier  $p$ . donc  $p = p_1$  ou  $p = p_2$  ou ...  $p = p_n$  donc  $p \mid p_1 p_2 \dots p_n$

Or  $p \mid N$  donc  $p \mid 1$  donc  $p = 1$ . Or  $p$  premier ; impossible.

Conclusion : il y a une infinité de nombres premiers.

Théo 4 : Soit  $n$  un entier naturel,  $n \geq 2$ . Si  $n$  n'admet aucun diviseur  $p$  tel que  $p \leq n$  alors  $n$  est un nombre premier.

Dem : contraposée du théorème 2.

Exemple : Les entiers suivants sont-ils premiers ? 631, 1763, 1321.

(Elèves doivent, à partir de la liste des nombres de 1 à 200, retrouver les nombres premiers en suivant les indications de la prof)

## Cours P2 n°3, mardi 07/11/00

(Début de séance avec un élève au tableau pour corriger l'exercice 23 p.25 puis un autre pour l'exercice 50 p.27)

(DIVISIBILITE, NOMBRES PREMIERS - SUITE)

**II] Nombres premiers (suite)**

**3) Propriété fondamentale**

Théo : Tout entier naturel  $n, n \geq 2$ , s'écrit comme produit de nombres premiers. On dit qu'il se décompose en produit de facteurs premiers. On admet que cette décomposition est unique à l'ordre près.

Dem : Soit  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ .  $n$  admet au moins un diviseur premier  $p_1$  et  $n = p_1 n_1$

Si  $n_1 = 1$  : fini

Si  $n_1 \geq 2$  :  $n_1$  admet au moins un diviseur premier  $p_2$  et  $n_1 = p_2 n_2$  et  $n = p_1 p_2 n_2$

Si  $n_2 = 1$  : fini

Si  $n_2 \geq 2$  : on recommence

La suite des entiers naturels  $n_1, n_2, \dots$  est strictement décroissante et après un nombre fini d'étapes  $k$  on aura  $n_k = 1$  et  $n = p_1 p_2 \dots p_k$

Décomposition pratique :

$$240 = 2 \times 120 = 2 \times 2 \times 60 = \dots$$

$$240 \quad 2$$

$$120 \quad 2$$

$$60 \quad 2$$

$$30 \quad 2$$

$$15 \quad 3$$

$$5 \quad 5$$

$$1$$

Exercice :

1) Décomposer 720, 17 640 et 435 600.

2) Pour la prochaine fois, décomposer à la main 954 493

3) - Décomposer 540 en produit de facteurs premiers.

- Caractériser la décomposition en facteurs premiers d'un diviseur de 540.
- En déduire le nombre de diviseurs de 540.
- Donner la liste de ces diviseurs.
- Calculer la somme de tous les diviseurs et exercice 44 p.27 du livre

(Elève au tableau pour corriger l'exercice 3 jusqu'à la quatrième question)

**Cours P2 n°4, mardi 14/11/00**

(Le même élève au tableau pour finir de corriger la dernière question de l'exercice de l'autre fois)

(DIVISIBILITE - NOMBRES PREMIERS- SUITE)

**III] Division euclidienne**

**1) Théorème**

Théo :

Soit  $a$  un entier relatif et  $b$  un entier naturel non nul; Il existe un unique couple d'entier  $(q,r)$  tel que  $a = bq + r$  avec  $0 \leq r < b$

Remarque :  $q$  est un entier relatif,  $r$  est un entier naturel

Dem :

Existence

Soit  $a \in \mathbf{Z}$ , soit  $b \in \mathbf{N}^*$ .

Encadrons  $a$  par deux multiples consécutifs de  $b$

Soit  $q \in \mathbf{Z}$  tel que  $bq \leq a < b(q+1)$

(remarque :  $q \leq a/b < q+1$   $q = E(a/b)$ )

$$a = bq + a - bq \quad \text{avec } r = a - bq$$

Comme  $bq \leq a < b(q+1)$ , on a  $0 \leq r < b$

Unicité

Soit  $(q,r)$  et  $(q',r')$  deux couples solution.

$$\text{On a } \begin{cases} a = bq + r & \text{avec } 0 \leq r < b \\ a = bq' + r' & \text{avec } 0 \leq r' < b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ -b < -r \leq 0 \end{cases} \text{ donc } -b < r-r' < b$$

De plus,  $bq + r = bq' + r'$  donc  $r-r' = b(q'-q)$  avec  $q'-q$  entier

donc  $r-r'$  multiple de  $b$

D'où  $r-r' = 0$  donc  $r = r'$

donc  $q'-q = 0$  donc  $q' = q$  d'où l'unicité.

Pratiquement :

Ex1 : quotient et reste de la division euclidienne de 343 par 15, de 234 765 par 311, de -2 345 par 29.

Ex2 : Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$

Déterminer (en discutant selon les valeurs de l'entier  $n$ ) le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n^3-2$  par  $n-2$ .

(Correction de l'exercice 1 par la prof au tableau puis élève au tableau pour la correction du second exercice. DS en deuxième heure)

**Cours P2 n°5, mardi 21/11/00**

(DIVISIBILITE- NOMBRES PREMIERS - SUITE)

**(III) Division euclidienne suite**

**1) Théorème**

**2) Changement de bases de numération**

Écriture :

En base 10, les nombres sont écrits avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9.

En base 2, les nombres sont écrits avec les chiffres 0 et 1.

En base 3, les nombres sont écrits avec les chiffres 0,1 et 2.

$$325 = 5 \times 1 + 2 \times 10 + 3 \times 100$$

En base 1, les nombres sont écrits avec les chiffres 0, ..., 9,  $\alpha$  et  $\beta$ .

Écriture en base 10 d'un nombre écrit dans une autre base :

$$\overline{13\ 425}^7 = 5 \times 1 + 2 \times 7 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7^3 + 1 \times 7^4$$

$$\overline{1011110101}^2 = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^9 = 757$$

$$\overline{312\ 310}^4 = 3\ 508$$

Écriture dans une base donnée d'un nombre écrit en base 10 :

Écrire 2 34761 en base 5.

Écrire 17 298 en base 2. (deux élèves au tableau pour ces deux exercices mais avant, exemple fait par le professeur)

Écrire 254 en base 3 :

$$254 = \dots \times 1 + \dots \times 3 + \dots \times 3^2 + \dots \times 3^3 = 2 + 3[3 \times 28 + 0]$$

$$254 = 3 \times 84 + 2$$

$$\begin{aligned}
 254 &= 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 28 \times 3^2 \\
 &= 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 3^2 [9 \times 3 + 1] \\
 &= 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 3^3 \times 9 \\
 &= 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^3 + 0 \times 3^4 + 1 \times 3^5
 \end{aligned}$$

$$254 = \overline{100102}^3$$

Exercice :

1) Résoudre  $\overline{121}^x = \overline{16}^{10}$

2) Calculer  $\overline{1101}^2 + \overline{1011}^2$  et  $\overline{1101}^2 - \overline{1011}^2$

3) Combien de nombres de 5 chiffres peut-on écrire en base 2 ? Quel est le plus petit ? Quel est le plus grand ? Donner les valeurs en base 10.

(élève au tableau pour corriger la première question. Les deux autres sont à chercher pour la semaine prochaine)

## 2) Congruences

Déf : Soit a et b deux entiers relatifs.

Soit n un entier naturel non nul. On dit que a est congru à b modulo n et on note  $a \equiv b [n]$  lorsque a-b est un multiple de n.

Ex :  $13 \equiv 4 [3]$      $4 \equiv -3 [7]$

$3 \equiv -2 [5]$      $34 \equiv 1 [11]$

Propriétés :

qqst les entiers relatifs a, b et c.

qqst l'entier naturel non nul n.

- Si  $a \equiv b [n]$  et si  $b \equiv c [n]$  alors  $a \equiv c [n]$
- Si  $a \equiv b [n]$  alors  $ac \equiv bc [n]$
- Si  $a \equiv b [n]$  alors qqst  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a^k \equiv b^k [n]$

(à l'oral, traduction des propriétés en terme de multiples)

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

...

$$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

Propriétés :

qqst les entiers relatifs a, b, a' et b'.

qqst l'entier naturel non nul n.

$$\text{Si } a \equiv b [n] \text{ et si } a' \equiv b' [n] \text{ alors } \begin{cases} a+a' \equiv b+b' [n] \\ a-a' \equiv b-b' [n] \\ aa' \equiv bb' [n] \end{cases}$$

(puis correction du DS au tableau par le professeur)

## Cours P2 n°6, mardi 28/11/00

(DIVISIBILITE- NOMBRES PREMIERS - SUITE)

### (III) Division euclidienne

#### 3) Congruences suite

(élève au tableau pour finir de corriger l'exercice donné la dernière fois sur les opérations en base deux)

qqst les entiers relatifs a, b, a', b', c...

qqst les entiers naturels non nuls  $n, k \dots (n \neq 0)$

Déf :  $a \equiv b [n] \Leftrightarrow n \mid a - b \Leftrightarrow a - b$  est un multiple de  $n$ .

$P_1$  : Si  $a \equiv b [n]$  et si  $b \equiv c [n]$  alors  $a \equiv c [n]$

$P_2$  : Si  $a \equiv b [n]$  alors qqst  $k \in \mathbb{N}, a^k \equiv b^k [n]$

$P_3$  : Si  $a \equiv b [n]$  alors  $ac \equiv bc [n]$

$P_4$  : Si  $a \equiv b [n]$  et si  $a' \equiv b' [n]$  alors  $a + a' \equiv b + b' [n]$

$P_5$  : Si  $a \equiv b [n]$  et si  $a' \equiv b' [n]$  alors  $a - a' \equiv b - b' [n]$

$P_6$  : Si  $a \equiv b [n]$  et si  $a' \equiv b' [n]$  alors  $aa' \equiv bb' [n]$

$P_7$  : Si  $a \equiv b [n]$  alors  $a + c \equiv b + c [n]$

$P_7$  : Si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $n$  alors  $a \equiv r [n]$

Ex :  $13 \equiv 1 [3]$

Ex1 : Soit  $N = \overline{xyz} 10$

Montrer que  $N \equiv x - y + z [11]$ .

En déduire un critère de divisibilité par 11 pour les nombres entiers de trois chiffres.

Ex2 : Montrer que  $3^{2k+1} \equiv 3 \times 2^k [7]$

En déduire que  $7 \mid 3^{2k+1} + 2^{k+2}$

Ex3 : Trouver tous les entiers  $n$  tq  $7 \mid n^3 + n - 2$

(élèves au tableau pour corriger les exercices ; le dernier est à finir à la maison ; DS en deuxième heure)

## Cours P2 n°7, mardi 06/03/01

### PGCD - PPCM - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

#### II PGCD

##### 1) Définition

On appelle PGCD de deux entiers naturels (non nuls simultanément) leur Plus Grand Commun Diviseur.

Notation : PGCD ( $a, b$ )

Exemples : PGCD (30, 12) = 6, PGCD (30, 20) = 10, PGCD (24, 8) = 8 PGCD (15, 0) = 15.

##### 2) Propriété fondamentale

Théorème : Soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls. Soit  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . les diviseurs communs à  $a$  et  $b$  sont les diviseurs communs à  $b$  et  $r$ .

Dem : Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls. soit  $q$  et  $r$  respect<sup>t</sup> le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

\*Montrons que tout diviseur commun à  $a$  et  $b$  est un diviseur commun à  $b$  et  $r$

Soit  $d$  un diviseur commun à  $a$  et  $b$ . montrons que  $d$  divise  $r$  (il divise déjà  $b$ ).

$a = bq + r$  donc  $r = a - bq$ . Or  $d \mid b$  donc  $d \mid bq$ . De plus,  $d \mid a$  donc  $d \mid a - bq$  c'ad  $d \mid r$ .

\*Réciproquement : montrons que tout diviseur commun à  $b$  et  $r$  est un diviseur commun à  $a$  et  $b$

Soit  $d$  un diviseur commun à  $b$  et  $r$ . Montrons que  $d$  divise  $a$  ( $d$  divise déjà  $b$ ).

$$\begin{cases} a = bq + r \\ d \mid bq \text{ car } d \mid b \quad \text{donc } d \mid a. \\ d \mid r \end{cases}$$

Conséquence : Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls et si  $r$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  alors PGCD ( $a, b$ ) = PGCD ( $b, r$ )

##### 3) Algorithme d'Euclide

Méthode de calcul du PGCD de deux entiers naturels basée sur le résultat établi précédemment.

**Exemple :** Recherche du PGCD de 225 et 120.

Recherche des diviseurs communs à 225 et 120

(On notera  $D_a$  l'ensemble des diviseurs naturels de  $a, a \in \mathbb{N}$ )

|     |     |
|-----|-----|
| 225 | 120 |
| 105 | 1   |

$$D_{225} \cap D_{120} = D_{120} \cap D_{105}$$

$$\text{PGCD}(225, 120) = \text{PGCD}(120, 105)$$

(élève au tableau pour continuer le procédé jusqu'à la valeur du PGCD)

**Cas général :**  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels  $0 < b \leq a$

- |                                 |
|---------------------------------|
| Recherche du PGCD de $a$ et $b$ |
|---------------------------------|
- |  |
|--|
| Recherche des diviseurs communs à $a$ et $b$ |
|--|

  - Soit  $q_1$  et  $r_1$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$   $a = bq_1 + r_1$  avec  $0 \leq r_1 < b$
  - $D_a \cap D_b = D_b \cap D_{r_1}$  et  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r_1)$
  - Si  $r_1 \neq 0$ , soit  $q_2$  et  $r_2$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $b$  par  $r_1$ .  $b = r_1q_2 + r_2$  avec  $0 \leq r_2 < r_1$
  - $D_b \cap D_{r_1} = D_{r_1} \cap D_{r_2}$  et  $\text{PGCD}(b, r_1) = \text{PGCD}(r_1, r_2)$
  - Si  $r_2 \neq 0$ , soit  $q_3$  et  $r_3$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $r_1$  par  $r_2$ .  $r_1 = r_2q_3 + r_3$  avec  $0 \leq r_3 < r_2$
  - $D_{r_1} \cap D_{r_2} = D_{r_2} \cap D_{r_3}$  et  $\text{PGCD}(r_1, r_2) = \text{PGCD}(r_2, r_3)$

La suite des restes  $r_1, r_2 \dots$  est une suite d'entiers naturels strictement décroissante : donc après un nombre fini d'opérations, on trouvera un reste nul. Soit  $r_i$  ce reste.

$$D_a \cap D_b = D_{r_{i-1}} \cap D_{r_i} = D_{r_{i-1}}$$

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(r_{i-1}, r_i) = \text{PGCD}(r_{i-1}, 0) = r_{i-1}$$

**Conclusion :** dans la suite des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide, le PGCD est le dernier reste non nul.

**Conséquence :** les diviseurs communs de deux entiers naturels non nuls sont les diviseurs de leur PGCD.

Exercice :  $\text{PGCD}(1155, 520)$  et  $D_{1155} \cap D_{520}$

(élève au tableau pour résoudre cet exercice)

#### 4) Complément

**Théorème :**

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls et si  $\delta$  est leur PGCD alors il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $\delta = au + bv$ .

On montre par récurrence que tous les restes successifs des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide s'écrivent sous cette forme.

**Exercice :** Trouver  $u$  et  $v$  tels que  $5 = 1155u + 520v$

(Benjamin au tableau pour faire cet exercice)

**Réciproque :** Vrai ou Faux ?

Si  $a, b, \delta$  entiers naturels non nuls et si il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $\delta = au + bv$  alors  $\delta = \text{PGCD}(a, b)$ .

FAUX :  $a=1155$  et  $b=520$ .  $60 = -4a + 9b$  et  $60 \neq \text{PGCD}(a, b)$

## II] Nombres Premiers entre eux

**Vrai-Faux :**  $a, b$  et  $c$  sont des entiers naturels non nuls.

1) Si  $a \mid c$  et si  $b \mid c$  alors  $ab \mid c$       Faux :  $6 \mid 24$  et  $8 \mid 24$  mais  $48$  ne divise pas  $24$ .

2) Si  $a \mid bc$  alors  $a \mid b$  ou  $a \mid c$       Faux :  $24 \mid 6 \times 8$  mais  $24$  ne divise pas  $6$  et  $24$  ne divise pas  $8$ .

### 1) Définition

Deux entiers naturels non nuls sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemples : 20 et 9, 17 et 23.

Exercice : Montrer que 9 867 et 2 755 sont premiers entre eux.

## 2) Propriétés

Théorème 1 : Si a et b sont deux entiers naturels non nuls de PGCD  $\delta$  alors les entiers naturels  $a'$  et  $b'$ , définis par  $a'\delta = a$  et  $b'\delta = b$ , sont premiers entre eux.  
(*dem par l'absurde à l'oral*)

Théorème 2 : Quelque soit les entiers naturels non nuls a et b, a/b irréductible si et seulement si a et b premiers entre eux.

## 3) Théorème de Bézout

Théorème : Soit a et b deux entiers naturels non nuls. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que  $1 = au + bv$ .

Dem : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

\*Montrons que si a et b sont premiers entre eux alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que  $1 = au + bv$

Hyp : a et b premiers entre eux donc PGCD (a,b) = 1

Or il existe deux entiers relatifs -soit u et v ces entiers- tels que PGCD(a,b)=au+bv c'est-à-dire  $1 = au + bv$

\*Montrons que s'il existe u et v deux entiers relatifs tels que  $1 = au + bv$  alors a et b sont premiers entre eux

Hyp : il existe deux entiers relatifs u et v tels que  $1 = au + bv$ .

Soit d un diviseur positif commun à a et b.

$$\begin{cases} d|a \text{ donc } d|au \\ d|b \text{ donc } d|bv \end{cases} \text{ donc } d | au + bv, \text{ c'est-à-dire } d|1$$

donc  $d = 1$  donc a et b premiers entre eux.

Exercice 1 :  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer -en utilisant le théorème de Bézout- que  $3n+2$  et  $2n+1$  sont premiers entre eux.

Exercice 2 : En calculant leur PGCD par l'algorithme d'Euclide, montrer que 82 et 21 sont premiers entre eux. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que  $82u + 21v = 1$  Sont-ils uniques ?

Exercice 3 :  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $n^2/(n+1)$  est irréductible.

Exercice 4 : a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que a et a+b sont premiers entre eux. Montrer lorsque  $a > b$ , a et a-b sont premiers entre eux.

(*élève au tableau pour résoudre l'exercice 1. Exos à chercher pour le prochain cours : 75 et 78 p.54 de Terracher*)

## Cours P2 n°8, mardi 13/03/01

### PGCD - PPCM - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX (Suite)

## II] Nombres Premiers entre eux (suite)

(*Interro surprise de 25 minutes en début de cours puis Aminata au tableau pour corriger l'exercice 1, un autre pour les deux suivants et Arnaud au tableau pour le quatrième*)

### 4) Théorème de Gauss

Théorème :

Quelque soit les entiers naturels non nuls a, b et c, si  $\begin{cases} a|bc \\ a \text{ premier avec } b \end{cases}$  alors  $a | c$

Dem : Soit a, b, c des entiers naturels non nuls tels que  $\begin{cases} a|bc \\ a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \end{cases}$   
a et b étant premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs -soit u et v ces entiers- tels que  $au + bv = 1$ .  
D'où  $c = acu + bcv$ .

$a | bc$  donc  $a | bcv$  et  $a | acu$  donc  $a | acu + bcv$  c-à-d  $a | c$

Exercice : Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   $15x - 7y = 0$

(*Adrien au tableau pour faire l'exercice*)

**5) Complément**Théorème :

a, b, c entiers naturels non nuls. Si  $\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \end{cases}$  alors  $ab \mid c$

Dem : Soit a, b, c des entiers naturels non nuls tels que  $\begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \text{ et } b \text{ premiers entre eux} \end{cases}$ .

a et b étant premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs u et v tels que  $1 = au + bv$ .  
 $c = acu + bcv$ .

$a \mid c$  donc il existe un entier  $\alpha$  tel que  $c = \alpha a$

$b \mid c$  donc il existe un entier  $\beta$  tel que  $c = \beta b$

D'où  $c = au\beta + bv\alpha = ab(u\beta + v\alpha)$   
entier

donc  $ab \mid c$

**III] Equations diophantiennes**

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   $38x + 35y = 6$

1) Montrer que 38 et 35 sont premiers entre eux et trouver deux entiers relatifs u et v tels que  $6 = 38u + 35v$ .

2) Résoudre l'équation proposée.

(Benjamin au tableau pour faire l'exercice)

Cas général :

Une équation diophantienne est une équation de la forme  $ax + by = c$  avec a, b et c entiers. Résoudre une telle équation, c'est chercher tous les couples d'entiers relatifs (x,y) tels que  $ax + by = c$ .

Théorème :

a, b et c étant des entiers relatifs ( $a > 0$  et  $b > 0$ )

L'équation  $ax + by = c$  a des solutions dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  si et seulement si c est un multiple du PGCD de a et b.

Dem : Soit a, b, c entiers tels que  $a > 0$  et  $b > 0$ . Soit  $\delta$  le PGCD de a et b.

\*Montrons que si  $ax + by = c$  a des solutions alors c est un multiple du PGCD de a et b

$ax + by = c$  a des solutions. soit  $(x_0, y_0)$  une solution. On a  $ax_0 + by_0 = c$

$\begin{cases} \delta \mid a \text{ donc } \delta \mid ax_0 \\ \delta \mid b \text{ donc } \delta \mid by_0 \end{cases}$  donc  $\delta \mid ax_0 + by_0$  c'est-à-dire  $\delta \mid c$  donc c est un multiple de  $\delta$ .

\*Réciproquement, montrons que si c multiple de  $\delta$  alors  $ax + by = c$  a des solutions

$\delta = \text{PGCD}(a, b)$  donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que  $\delta = au + bv$ .

c est un multiple de  $\delta$  : il existe un entier  $\alpha$  tel que  $c = \alpha\delta$

$\delta = au + bv$  donc  $\alpha\delta = \alpha au + \alpha bv$  c'est-à-dire  $c = \alpha ua + \alpha vb$  donc  $(\alpha u, \alpha v)$  est solution.

Exercice : Une première bourse contient p billets de 100 F et rien d'autre. Une seconde contient 540 F en pièces de 20 F et rien d'autre. On fait passer un billet de 100 F de la première bourse dans la seconde et une pièce de 20 F de la seconde dans la première. On répète cette opération pour obtenir des sommes égales dans les deux bourses. Ce procédé permet effectivement d'obtenir la même somme dans chacune des deux bourses pour certaines valeurs de p. Le but de cet exercice est de trouver ces valeurs de p.

1) On note n le nombre de fois où l'opération est effectuée. Montrer que  $p \geq 6$  et  $n \leq 27$ .

2) montrer que (p,n) est solution de  $5x - 8y = 27$ .

3) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   $5x - 8y = 27$ .

4) Déterminer toutes les valeurs de p et préciser pour chacune de ces valeurs le nombre d'opérations à effectuer.

(exercice à faire pour vendredi 16/03 avec en plus les exercices 85, 86, 87 p.54 de Terracher)

**Cours P2 n°9, Vendredi 16/03/01**

(Interro surprise de 20minutes en début de cours puis Aminata au tableau pour corriger l'exercice donné dans le cours le mari précédent, et Benjamin au tableau pour le 87)

PGCD - PPCM - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX (Suite)

**IV] PPCM**

**1) Définition**

Le PPCM de deux entiers naturels non nuls est le Plus Petit Commun Multiple strictement positif.

PPCM (12,15) = 60

**2) Propriété**

Propriété :

Les multiples communs à deux entiers naturels non nuls sont les multiples de leur PPCM.

Dem : Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Soit  $\mu = \text{PPCM}(a,b)$ .

\*Montrons que tout multiple commun à a et b est un multiple de  $\mu$

Soit m un multiple ( $m > 0$ ) commun à a et b.

Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de m par  $\mu$ .

$m = q\mu + r$  avec  $0 \leq r < \mu$ .

Montrons que  $r=0$  par l'absurde.

Supposons  $r > 0$ .

$r = m - q\mu$  avec m et  $\mu$  multiples communs à a et b donc r multiple commun à a et b.

Or  $r < \mu$  et  $\mu$  est le plus petit multiple commun à a et b donc  $r=0$  donc m multiple de  $\mu$ .

\*Réciproquement, si un nombre est multiple de  $\mu$ , alors il est multiple commun à a et b

**3) PGCD et PPCM**

Théorème :

Le produit de deux entiers naturels non nuls est égal au produit de leur PGCD par leur PPCM.

Dem : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

Soit  $\delta = \text{PGCD}(a,b)$ ,  $\mu = \text{PPCM}(a,b)$ .

Soit a' et b' tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$  a' et b' sont premiers entre eux.

$\mu$  multiple commun à a et b : il existe deux entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que  $\mu = \alpha a = \beta b$ .

On a  $\mu = \alpha \delta a' = \beta \delta b'$

$\alpha a' = \beta b'$  a' |  $\beta b'$  a' |  $\beta$  car a' et b' premiers entre eux.

$\beta = ka'$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $\alpha = kb'$

D'où  $\mu = kb' \delta a' = kba' = kb'a$

Or  $\mu$  est le plus petit multiple commun à a et b d'où  $k=1$

et  $\mu = b' \delta a'$   $\mu \delta = b' \delta \delta a' = ba$

Conséquence : Lorsque a et b premiers entre eux,  $\text{PPCM}(a,b) = ab$ .

Exercices :

Exercice 1 : PPCM (2 145,126)

Exercice 2 : PPCM (n,2n+1),  $n \in \mathbb{N}$ .

Exercice 3 : Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b tels que :

$\text{PGCD}(a,b) + \text{PPCM}(a,b) = 9+b$

1) Posons  $\delta = \text{PGCD}(a,b)$ . Montrons que  $\delta | 9$

2) En déduire les valeurs possibles de  $\delta$

3) Soit a' et b' tels que  $a = \delta a'$  et  $b = \delta b'$ . Chercher (a',b') pour chacune des valeurs possibles de  $\delta$ . Vérifier.

(Benjamin au tableau pour commencer à faire l'exercice)

**Cours P2 n°10, mardi 20/03/01**

(Benjamin au tableau pour continuer l'exercice commencé vendredi)

PGCD - PPCM - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX (Suite)

**V] PGCD-PPCM-Décomposition en facteurs premiers**

**1) PGCD**

Exemple : 24 et 100

(élève au tableau pour effectuer la décomposition en facteurs premiers et chercher le PGCD)

Règle : On obtient le PGCD de deux entiers naturels dont on connaît la décomposition en produit de facteurs premiers en multipliant les facteurs premiers communs aux deux décompositions affectés du plus petit exposant avec lequel ils figurent dans ces décompositions.

Exercice : 9 867 et 2 755 (*Adrien au tableau pour faire l'exercice*)

Exercice : PGCD (385,234)

**2) Nombres premiers entre eux**

Deux entiers naturels non nuls sont premiers entre eux lorsque leur décomposition en produit de facteurs premiers ne présentent aucun facteur premier commun.

Conséquences :

- Si a et b premiers entre eux alors  $a^n$  et  $b^n$  sont premiers entre eux.
- Si a et b sont premiers entre eux alors a+b et ab premiers entre eux.

(Dorian au tableau pour montrer le second point)

**3) PPCM**

Règle : On obtient le PPCM de deux entiers naturels dont on connaît la décomposition en produit de facteurs premiers en multipliant tous les facteurs premiers présents dans les deux décompositions affectés du plus grand exposant avec lequel ils figurent dans ces décompositions.

Exercice : PPCM et PGCD de 270 et 1 548

(Aurélien au tableau pour faire l'exercice)

Exercice :

1) Trouver tous les entiers relatifs n tels que  $n+2$  divise  $2n-1$ .

2) Montrer que pour tout entier relatif n,  $n+2$ ,  $2n^2+3n-1$  sont premiers entre eux ( $n \neq 2$ )

3) Trouver tous les entiers relatifs n tels que  $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$  entier relatif.

(Michael puis Dorian au tableau pour faire l'exercice)

Exercice :

1) Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que  $\frac{n+8}{2n-5}$  entier relatif.

2) Montrer que  $\text{PGCD}(n+8, 2n-5) = \text{PGCD}(21, n+8)$ . En déduire l'ensemble V des entiers relatifs n tels que  $\frac{n+8}{2n-5}$  irréductible.

(Exercice à chercher en plus : 80 p.54 Terracher)

**Cours P2 n°11, mardi 27/03/01**

Troisième D.S. d'arithmétique (Deux heures).



T<sup>er</sup>S2-S3 – D.S. N°3 – Mardi 28 novembre 2000

Exercice 1 :

ABC est un triangle direct. On construit, extérieurement à ce triangle, trois carrés nommés respectivement ACGF, BAIH et CBED et trois parallélogrammes nommés respectivement GCDW, IAFU et EBHV.

Q, R et P sont respectivement les centres des carrés ACGF, BAIH et CBED

1) Montrer que les composées  $R_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ T_{BA}^-$  et  $T_{CG}^- \circ R_{(C, \frac{\pi}{2})}$  sont égales à  $R_{(Q, \frac{\pi}{2})}$

2) En choisissant l'une des transformations précédentes, déterminer les images des points A, B, C et Q par  $R_{(Q, \frac{\pi}{2})}$ .

3) En déduire que :

- (AU) et (BC) sont orthogonales ;
- Le triangle BWU est rectangle isocèle en B ;
- Q est le milieu de [UW] ;
- (RQ) et (UW) sont orthogonales.

4) Montrer que les droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes.

5) Montrer que (AP), (BQ) et (CR) sont les hauteurs du triangle PQR.

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n : 2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.

Exercice 3 :

1) En considérant les différents restes possibles de la division euclidienne d'un entier relatif par 3, montrer que tout entier relatif s'écrit sous la forme :  $3k$  ou  $3k + 1$  ou  $3k + 2$  avec  $k$  entier relatif.

2) En déduire que si l'entier relatif  $a$  n'est pas un multiple de 3 alors  $a^2$  s'écrit sous la forme  $3k' + 1$  avec  $k'$  entier relatif.

3) En déduire que si aucun des entiers relatifs  $a$ ,  $b$  et  $c$  n'est un multiple de 3 alors  $a^2 + b^2 + c^2$  est un multiple de 3.

Exercice 4 :

1) Écrire 256 en base 2, puis en base 5.

2) Écrire en base 10 le nombre  $\overline{2546123}_7$  (donné en base 7)

3) Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $\overline{14641}^x = 10000$

4) Montrer que pour tout entier  $n$ , on a :  $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2$  et en écrire  $n^4 + n^2 + 1$  comme produit de deux entiers naturels.

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que pour tout  $n, n \geq 2, \overline{10101}^n$  est un multiple de  $\overline{111}^n$ .

Calculer le quotient pour  $n = 8$



## Cours P2

## DIVISION EUCLIDIENNE

| Lignes | Discours  | Remarques   |
|--------|---|---|
| 1      | <b>P</b> : On continue le cours. Donc paragraphe suivant. Grand 4 grand 5? Donc on venait de travailler sur les nombres premiers. Donc c'est grand 3 maintenant ?   | 10h11   |
| 2      | <b>El</b> : oui   |   |
| 3      | <b>P</b> : Division euclidienne   | (P écrit au tableau)<br><i>III] Division euclidienne</i>  |
| 4      | <b>P</b> : Sous un nom savant, c'est la première division que vous avez apprise à l'école primaire, cad la division avec reste et sans virgule.   |   |
| 5      | <b>El</b> : (inaudible)   |   |
| 6      | <b>P</b> : Oui ?  |   |
| 7      | <b>El</b> : faut que je réapprenne.   |   |
| 8      | <b>P</b> : Faut que je réapprenne. Je préfère avancer un petit peu le cours. Y'en a pas besoin pour le moment.  |   |
| 9      | <b>P</b> : Alors premièrement, théorème qui est à la base de la division euclidienne. Soit $a$ un entier relatif et $n$ un entier naturel non nul. Et bien on va démontrer l'affirmation suivante : il existe un unique couple d'entiers $q$ et $r$ tels que $a$ s'écrive $b$ que multiplie $q$ plus $r$ avec la contrainte $0$ inférieur ou égal à $r$ strictement inférieur à $b$ . | (P écrit au tableau)<br><i>1) Théorème</i><br><i>Théo :</i><br><i>Soit <math>a</math> un entier relatif et <math>n</math> un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entier <math>(q,r)</math> tel que <math>a=bq+r</math> avec <math>0 \leq r &lt; b</math></i> |
| 10     | (Silence pour que les élèves recopient)   | 10h14   |
| 11     | <b>P</b> : Une remarque tout de suite à propos de ce théorème, c'est que $q$ est un entier relatif. Bon en pratique on travaille la plupart du temps sur des entiers naturels. Et $r$ , mais $a$ et $q$ peuvent être des entiers relatifs mais le reste $r$ est toujours un entier naturel, comme le diviseur $b$ .   | (P écrit au tableau)<br><i>Remarque : <math>q</math> est un entier relatif, <math>r</math> est un entier naturel</i>  |
| 12     | <b>P</b> : Ah je l'ai appelé $b$ , pardon, y'a pas de $n$ , $b$ . Donc je vais diviser $a$ par $b$ . (inaudible) utilisé les notations habituelles, j'avais mis $n$ donc vous rectifier.  |   |
| 13     | <b>P</b> : Soit $a$ un entier relatif et $b$ un entier naturel non nul. On va prouver qu'il existe un unique couple d'entier $q$ $r$ tels que $a$ s'écrive $b$ que multiplie $q$ plus $r$ . Alors démonstration. On va la faire en 2 temps, on va d'abord s'intéresser à l'existence et on établira ensuite l'unicité.  |   |
| 14     | <b>P</b> : Soit $a$ un entier relatif. Soit $b$ un entier naturel non nul. Alors on va ... il est possible d'encadrer $a$ par 2 entiers consécutifs, deux multiples de $b$ consécutifs. Donc ça va être le premier travail. Encadrons $a$ par deux multiples consécutifs de $b$ . Donc soit $q$ appartenant à $\mathbb{Z}$ tel que $a$  | 10h15 (P écrit au tableau)<br><i>Dem :</i><br><i>Existence</i><br><i>Soit <math>a \in \mathbb{Z}</math>, soit <math>\mathbb{N}^*</math>.</i><br><i>Encadrons <math>a</math> par deux multiples consécutifs de <math>b</math></i>  |
| 15     | (silence)   | (P écrit au tableau)<br><i>Soit <math>q \in \mathbb{Z}</math> tel que <math>bq \leq a &lt; b(q+1)</math></i>  |
| 16     | <b>P</b> : Alors est-ce que $bq$ est bien ? Première question qu'on peut se poser, est-ce qu'ils sont bien rangés déjà ? Parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs, on pourrait se poser la question.  | 10h16   |
| 17     | ...   |   |

Annexes chapitre C1

|    |  |   |
|----|--|---|
| 18 | <b>P</b> : Donc j'ai pris 2 multiples consécutifs de b. Alors est-ce que bq est bien le plus petit ?   |   |
| 19 | ...  |   |
| 20 | <b>El</b> : oui  |   |
| 21 | <b>P</b> : Pourquoi ?  |   |
| 22 | ...  |   |
| 23 | <b>P</b> : Ca moins ça, ça vaut combien ? La différence entre ces 2 multiples elle est égale à   |   |
| 24 | ...  |   |
| 25 | <b>P</b> : Ce multiple ci moins celui-là, la différence est égale à ?  |   |
| 26 | <b>El</b> : b  |   |
| 27 | <b>P</b> : b est un nombre   |   |
| 28 | <b>El</b> : entier...entier naturel non nul  |   |
| 29 | <b>P</b> : Donc de signe   |   |
| 30 | <b>El</b> : positif  |   |
| 31 | <b>P</b> : Donc ce nombre là est bien plus petit que celui-ci. Une petite remarque, si q n'est pas nul et est positif ... on a aussi ça  | (P écrit au tableau)<br>$b \leq a/q < b(1+1/q)$ |
| 32 | (Silence)  |   |
| 33 | <b>P</b> : Si je divise par q je vais avoir 1 + b que multiplie 1 + quelque chose mais surtout qu'est-ce que c'est finalement a/q ?  | 10h18   |
| 34 | ...  |   |
| 35 | (Silence)  | (P écrit au tableau)<br>$b \leq a/q < b+b/q$    |
| 36 | ...  |   |
| 37 | <b>P</b> : Personne n'a d'idée ?   |   |
| 38 | ...  |   |
| 39 | <b>P</b> : Oui, ça m'étonne pas, c'est pas celui là qu'ils vous donnent. J'ai pas fait la bonne remarque. Si je divise par b, qu'est-ce que j'obtiens ici ?  | 10h19   |
| 40 | ...  | (P barre au tableau)<br>$q \leq a/b < q+1$      |
| 41 | <b>P</b> : Donc là vous devez avoir la réponse tout de suite. Qu'est-ce que ça caractérise ça ?  |   |
| 42 | ...  |   |
| 43 | <b>P</b> : Quelqu'un a une idée ?  |   |
| 44 | ...  |   |
| 45 | <b>P</b> : q et q+1 sont des entiers consécutifs. Donc, vous connaissez la définition, vous connaissez ça, ça doit vous rappeler quelque chose.  |   |
| 46 | <b>El</b> : c'est divisible par b  |   |
| 47 | <b>P</b> : Oui ?   |   |
| 48 | <b>El</b> : c'est divisible par b  |   |
| 49 | <b>P</b> : Non.  |   |
| 50 | <b>El</b> : c'est un encadrement   |   |
| 51 | <b>P</b> : Oui c'est un encadrement mais encore ?  | (rires)   |
| 52 | ...  |   |
| 53 | <b>P</b> : C'est une petite ... On l'utilise assez fréquemment cette fonction parce que c'est la seule qui marche pas comme les autres. Elle a des tas de petites propriétés qui sont anachroniques. Je veux dire : elle est pas continue, elle est pas toujours dérivable la fonction qu'il y a là dessous. |   |
| 54 | ...  |   |
| 55 | <b>P</b> : Non, vous connaissez pas de fonctions qui ... un petit peu bizarres ?   |   |
| 56 | <b>El</b> : la fonction inverse ?  |   |
| 57 | <b>P</b> : Oui, elle est, la fonction inverse, une fonction rationnelle elle rentre dans la grande famille des fonctions classiques.   |   |
| 58 | ...  |   |
| 59 | <b>P</b> : Non ?   |   |

Annexes chapitre C1

|     |  |  |
|-----|--|--|
| 60  | ...  |  |
| 61  | <b>P</b> : On en a parlé nous pourtant.  |  |
| 62  | ...  |  |
| 63  | <b>P</b> : En d'autres termes, $q$ c'est le plus grand entier inférieur ou égal à $a/b$ . Oui, non ?   |  |
| 64  | <b>El</b> : Oui  |  |
| 65  | <b>P</b> : Ben vous connaissez, ça s'appelle comment ?   |  |
| 66  | ...  |  |
| 67  | <b>P</b> : Oui ?   |  |
| 68  | <b>El</b> : la fonction entière non ?  |  |
| 69  | <b>P</b> : Presque.  |  |
| 70  | <b>El</b> : $f(x)$ ...   |  |
| 71  | <b>P</b> : La...   |  |
| 72  | ...  |  |
| 73  | <b>El</b> : la part entière de...  |  |
| 74  | <b>P</b> : Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à 3,5 ?   |  |
| 75  | <b>El</b> : 4  |  |
| 76  | <b>P</b> : Inférieur ?   |  |
| 77  | <b>El</b> : euh 3  |  |
| 78  | <b>P</b> : A 2,7 ?   |  |
| 79  | <b>El</b> : 2  |  |
| 80  | <b>P</b> : Alors qu'est-ce que c'est que 2 pour 2,7 ? Qu'est-ce que c'est que 3 pour 3,5 ?   |  |
| 81  | <b>El1</b> : approximation ?<br><b>El2</b> : La part entière de...   | (simultanément)  |
| 82  | <b>P</b> : Oui, c'est une valeur approchée...par défaut...à une unité près. Mais encore ?  |  |
| 83  | <b>Els</b> : La partie entière   | (Classe)   |
| 84  | <b>P</b> : C'est la partie entière. Donc $q$ c'est ce qu'on appelle la partie entière de $a/b$ . Est-ce que vous connaissez la notation ? $E$ de $a/b$ .   | ( $P$ écrit au tableau)<br>$q=E(a/b)$  |
| 85  | <b>P</b> : Alors dans ces conditions là, $a$ va s'écrire comment ?   | 10h21  |
| 86  | ...  |  |
| 87  | <b>P</b> : Il va s'écrire $bq + a - bq$ . Ca je vais l'appeler $r$ .   | ( $P$ écrit au tableau)<br>$a=bq+a-bq$ avec $r=a-bq$                           |
| 88  | <b>P</b> : Alors est-ce que $r$ va vérifier les bonnes conditions ?  |  |
| 89  | ...  |  |
| 90  | <b>P</b> : Donc si j'enlève $bq$ je vais trouver 0 à gauche et à droite $b$ . Donc on les a trouvés. $q$ c'est la partie entière de $a/b$ et $r$ c'est la différence $a-bq$ . Alors maintenant deuxième  | ( $P$ écrit au tableau)<br>Comme $bq \leq a < b(q+1)$ ,<br>on a $0 \leq r < b$ |
| 91  | <b>El</b> : c'est où que vous avez trouvé ça là ?  | 10h22  |
| 92  | <b>P</b> : Comment ?   |  |
| 93  | <b>El</b> : euh $bq + a - bq$ ?  |  |
| 94  | <b>P</b> : Ben j'ai essayé d'écrire...   |  |
| 95  | <b>El</b> : ah ouais d'accord, ouais non c'est bon   |  |
| 96  | <b>P</b> : D'écrire $a$ sous cette forme, simplement en vérifiant que ce que j'ai mis à côté vérifiait bien les conditions du théorème d'accord ? Donc j'ai trouvé 2 nombres qui satisfont la condition. $q$ c'est la partie entière de $a/b$ et $r$ c'est la différence entre $a$ et $bq$ . |  |
| 97  | <b>P</b> : Donc maintenant, pour terminer, l'unicité. Donc c'est une démonstration que vous avez peut-être pas eu l'occasion de faire souvent. Comment est-ce qu'on pourrait faire pour montrer que quelque chose est unique ?   | 10h23  |
| 98  | ...  |  |
| 99  | <b>P</b> : Qu'en pensez-vous ?   |  |
| 100 | ...  |  |
| 101 | <b>P</b> : Le bon sens vous suggérerait de faire quoi ?  |  |

Annexes chapitre C1

|     |   |   |
|-----|---|---|
| 102 | <b>EI</b> : ben on montre qu'il en existe pas pour d'autres (inaudible)   |   |
| 103 | <b>P</b> : Je sais pas, je comprends pas bien, ça n'existe pas pour d'autres, qu'est-ce que ça veut dire ?  |   |
| 104 | ...   |   |
| 105 | <b>P</b> : Être unique ça veut dire qu'on va trouver qu'un seul résultat. Donc il existe le résultat mais il est tout seul.   |   |
| 106 | <b>EI</b> : montrer qu'il est (inaudible)   |   |
| 107 | <b>P</b> : Effectivement, il va falloir montrer qu'il y en a pas d'autre possible. Alors pour faire ça, comment on fait ?   |   |
| 108 | <b>EI</b> : on va supposer qu'il y a un possible...   |   |
| 109 | <b>P</b> : On va supposer qu'il y en a un deuxième et on va montrer...  |   |
| 110 | <b>EI</b> : euh que...  |   |
| 111 | <b>P</b> : Que les deux résultats en fait...  |   |
| 112 | <b>EI</b> : (inaudible)   |   |
| 113 | <b>P</b> : Si concordent mais n'en font...  |   |
| 114 | <b>EI</b> : qu'un   |   |
| 115 | <b>P</b> : Qu'un seul. Je suppose qu'il y en a deux et je montre qu'ils sont ... Qu'ils sont les mêmes en fait.   |   |
| 116 | ...   |   |
| 117 | (Silence)   | (P écrit au tableau)<br><u>Unicité</u><br>Soit $(q,r)$ et $(q',r')$ deux couples solution.<br>On a<br>$\begin{cases} a=bq+r & \text{avec } 0 \leq r < b \\ a=bq'+r' & \text{avec } 0 \leq r' < b \end{cases}$ |
| 118 | <b>P</b> : Bon supposons soit $q, r$ et $q', r'$ deux couples solutions. Et je veux montrer qu'en fait qu'ils sont égaux. Donc puisqu'ils vérifient tous les 2 les conditions on va avoir $a$ égale $bq$ plus $r$ avec $0$ inférieur ou égal à $r$ strictement inférieur à $b$ et on va avoir aussi $a$ égale $bq'$ plus $r'$ avec $r'$ compris entre $0$ et $b$ . Donc l'égalité large du côté de $0$ , stricte du côté de $b$ . $-r'$ lui il va être compris entre $-b$ et $0$ . Donc $r$ moins $r'$ est compris au sens strict ... entre $-b$ et $b$ . | $10h24$<br>(P écrit au tableau)<br>$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ -b < -r' \leq 0 \end{cases}$<br>donc $-b < r - r' < b$<br>De plus, $bq+r=bq'+r'$<br>donc $r-r'=b(q'-q)$ avec $q'-q$ entier                  |
| 119 | (Silence, laisse les élèves écrire)   |   |
| 120 | <b>P</b> : Vous êtes d'accord ?   |   |
| 121 | ...   |   |
| 122 | <b>P</b> : Ce que je viens d'écrire me fait apparaître quoi, $r-r'$ ?   | 10h27   |
| 123 | ...   |   |
| 124 | <b>EI</b> : c'est un multiple   |   |
| 125 | <b>P</b> : Oui c'est un multiple...   |   |
| 126 | <b>EI</b> : c'est un multiple de $q-q'$   |   |
| 127 | <b>P</b> : Oui mais c'est pas celui-là qui m'intéresse.   |   |
| 128 | <b>EI</b> : de $b$  |   |
| 129 | <b>P</b> : C'est aussi un multiple de $b$ oui.  |   |
| 130 | (Silence)   | (P écrit au tableau)<br>donc $r-r'$ multiple de $b$   |
| 131 | <b>P</b> : J'ai d'une part $r-r'$ multiple de $b$ et d'autre part $r-r'$ strictement compris entre $-b$ et $b$ . Alors, est-ce qu'il y en a un multiple de $b$ strictement compris entre $-b$ et $b$ ? Y'en a combien en fait ?   |   |
| 132 | ...   |   |
| 133 | <b>P</b> : Y'en a, y'en a pas, y'en a plusieurs ?   |   |
| 134 | ...   |   |
| 135 | <b>P</b> : Si je vous demandais la liste des multiples positifs de $b$ , qu'est-ce que vous me diriez comme $b$ est positif, c'est entier naturel ?   |   |
| 136 | ...   |   |
| 137 | <b>P</b> : Si je vous demandais de me citer les multiples de $b$ par ordre croissant ?  |   |

Annexes chapitre C1

|     |   |  |
|-----|---|--|
| 138 | ...   |  |
| 139 | <b>P</b> : 0, 1 fois b, 2 fois b, 3 fois b etc. Et les multiples négatifs de b par ordre décroissant ?  |  |
| 140 | ...   |  |
| 141 | <b>P</b> : 0  |  |
| 142 | <b>El</b> : -b  |  |
| 143 | <b>P</b> : -b   |  |
| 144 | <b>El</b> : -2b   |  |
| 145 | <b>P</b> : -2b etc. Bon alors, dans l'intervalle ouvert -b, b, est-ce qu'il y a un ou plusieurs ou pas du tout multiple de b ?  |  |
| 146 | <b>El</b> : 0   |  |
| 147 | <b>P</b> : Y'en a combien ?   |  |
| 148 | <b>El</b> : un seul   |  |
| 149 | <b>P</b> : Un seul et c'est ?   |  |
| 150 | <b>El</b> : 0   |  |
| 151 | <b>P</b> : 0. D'où comme $r-r'$ est un multiple de b est qu'il est strictement compris entre -b et b, il est nul. Donc r égale r'. Ben si r égale r' ça entraîne que q' moins q est aussi égale à 0 donc que q' et q sont égaux d'où unicité. | 10h29<br>(P écrit au tableau)<br><i>D'où <math>r-r'=0</math> donc <math>r=r'</math><br/>donc <math>q'-q=0</math> donc <math>q'=q</math><br/>d'où l'unicité.</i><br>10h29 |
| 152 | <b>P</b> : Alors des petits exercices pour voir ce que ça donne ... Donc pratiquement ... Je vous ai pas dit le nom mais q ça s'appelle comment ?   |  |
| 153 | ...   |  |
| 154 | <b>P</b> : Dans une division, le ?  |  |
| 155 | <b>El</b> : le quotient   |  |
| 156 | <b>P</b> : Et r ?   |  |
| 157 | <b>El</b> : reste   |  |
| 158 | <b>P</b> : Le reste oui.  |  |
| 159 | (Silence)<br><b>P</b> : Alors on va commencer par ça, après je donnerai un petit exercice   | 10h31 (P écrit au tableau)<br><i>Pratiquement :</i><br><i>Ex1 : quotient et reste de la division euclidienne de 343 par 15, de 234 765 par 311, de -2 345 par 29.</i>    |
| 160 | <b>P</b> : Donc les trois premiers exemples, les deux premiers au moins ne doivent pas poser de problème, vous pouvez faire avec votre machine.   | 10h31  |
| 161 | <b>P</b> : Donc qu'est-ce qu'on détermine tout de suite ? Compte tenu de ce qu'on a vu tout à l'heure ?   |  |
| 162 | (Silence - les élèves travaillent avec leur machine)  |  |
| 163 | <b>El</b> : elle donne pas le reste.  |  |
| 164 | <b>P</b> : Elle ne donne pas le reste mais elle fait la plupart des calculs quand même. Vous pouvez le faire à la main si voulez hein, c'est pas interdit. Alors sur les machines un peu sophistiquées le travail doit se faire tout seul.    |  |
| 165 | (Silence)   |  |
| 166 | <b>P</b> : Alors une bonne habitude à prendre c'est chaque fois qu'on vous parle de division euclidienne, prenez la peine d'écrire l'égalité qui définit la division euclidienne et la condition portant sur le reste.                        |  |
| 167 | <b>P</b> : Ca vous permettra d'éviter bien...d'écrire bien des bêtises. Parce que souvent la contrainte sur le reste, vous l'oubliez et l'égalité que vous proposez, ce n'est pas une égalité de division euclidienne. Donc attention.        |  |
| 168 | <b>P</b> : avec ? Mettez la contrainte sur le reste, écrivez la systématiquement parce que c'est quelque chose que vous avez tendance à oublier et qui vous fait faire des bêtises la plupart du temps.                                       | <i>Prof dans les rangs, parle à un élève en particulier</i>  |

Annexes chapitre C1

|     |  |  |
|-----|--|--|
| 169 | (Silence)  |  |
| 170 | <b>P</b> : à la machine ? Je ne vais quand même pas vérifier si vous savez encore faire les divisions !  | <i>P parle à un élève en particulier</i>   |
| 171 | <b>El</b> : non  |  |
| 172 | <b>P</b> : c'est vrai que ça peut être utile   | <i>P toujours à cet élève</i>  |
| 173 | (Silence)  |  |
| 174 | <b>P</b> : Alors pour la première, est-ce que tout le monde sait comment trouver facilement en utilisant sa machine, le quotient et le reste ?                               | 10h36  |
| 175 | <b>P</b> : Donc on vous demande le quotient et le reste. Alors qu'est-ce que vous avez fait comme calcul ? Qu'avez-vous posé comme opérations sur votre machine à calculer ? |  |
| 176 | <b>El</b> : je divise 343  |  |
| 177 | <b>P</b> : On divise 343 par 15 et on prend  |  |
| 178 | <b>El</b> : euh... la partie entière   |  |
| 179 | <b>P</b> : La partie entière du résultat, ça donne combien ?   |  |
| 180 | <b>El</b> : 22   |  |
| 181 | <b>P</b> : Peut-être, 22 c'est ça ?  |  |
| 182 | <b>El</b> : 22   |  |
| 183 | <b>P</b> : Et pour avoir le reste eh bien il suffit de faire 343 moins 15 fois 22 et on trouve   | (P écrit au tableau)<br>$343=15\times 22+$   |
| 184 | <b>El</b> : 13   |  |
| 185 | <b>P</b> : 13. Et 13 est bien...   |  |
| 186 | <b>P</b> : Donc le quotient c'est 22 et le reste 13.   | (P écrit au tableau)<br>$343=15\times 22+13$ avec<br>$0\leq 13<15$<br>quotient=22 ; reste=13 |
| 187 | <b>P</b> : 234 765 c'est 311 que multiplie...  | 10h37  |
| 188 | <b>P</b> : Combien ?   |  |
| 189 | <b>El</b> : 754  |  |
| 190 | <b>P</b> : 754 plus...   | (P écrit au tableau)<br>$234\ 765=311\times 754+$  |
| 191 | <b>El</b> : 271  |  |
| 192 | <b>P</b> : Deux cents... 271.  |  |
| 193 | <b>P</b> : Donc quotient 754, reste 271  | (P écrit au tableau)<br>$234\ 765=311\times 754+271$<br>quotient=754<br>reste=271            |
| 194 | <b>P</b> : Et la dernière ?  | 10h38  |
| 195 | (Silence)  |  |
| 196 | <b>P</b> : Alors cette partie entière ?  |  |
| 197 | <b>El</b> : moins 80, moins 81   |  |
| 198 | <b>P</b> : J'ai pas entendu.   |  |
| 199 | <b>El</b> : euh c'est moins 80   |  |
| 200 | (Silence)  |  |
| 201 | <b>P</b> : C'est ça ?  |  |
| 202 | <b>El</b> : 81   |  |
| 203 | <b>P</b> : Tout le monde est d'accord ?  |  |
| 204 | <b>P</b> : Le problème se pose parce que vous ne savez pas s'il faut prendre   |  |
| 205 | <b>El</b> : 80 ou 81   |  |
| 206 | <b>P</b> : 80 ou 81.   |  |
| 207 | <b>P</b> : Si on revient à la démonstration, c'est la partie entière de -2 345 divisé par 29.  |  |
| 208 | <b>P</b> : Quel est le résultat affiché par votre machine ?  |  |
| 209 | <b>Els</b> : -80,8   |  |
| 210 | <b>P</b> : Moins 80,8 et d'autres choses derrière.   |  |
| 211 | <b>P</b> : Donc la partie entière c'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal.  |  |
| 212 | <b>P</b> : Donc est-ce que c'est -80 ?   |  |

Annexes chapitre C1

|     |  |  |
|-----|--|--|
| 213 | <b>P</b> : Non.  |  |
| 214 | <b>P</b> : Donc si on a fait le travail comme il faut, on a pris -81.  | (P écrit au tableau)<br>$-2\ 345=29\times(-81)+$   |
| 215 | <b>P</b> : Et qu'est-ce qu'on trouve ici ?   |  |
| 216 | <b>El</b> : 4  |  |
| 217 | <b>P</b> : Plus  |  |
| 218 | <b>El</b> : 4  |  |
| 219 | <b>P</b> : Plus 4.   | (P écrit au tableau)<br>$-2\ 345=29\times(-81)+4$  |
| 220 | <b>P</b> : Donc de toute façon, il y a une vérification possible : il faut absolument que ce nombre soit positif et plus petit que le diviseur.  | 10h40  |
| 221 | <b>P</b> : Si vous prenez -80 ici vous trouvez un nombre négatif, donc vous n'avez pas choisi, vous n'avez pas pris le bon quotient.   |  |
| 222 | <b>P</b> : Donc quotient égale à -81 et reste égale à 4.   |  |
| 223 | <b>P</b> : Un petit peu plus technique, l'exercice 2.  | 10h41  |
| 224 | <b>P</b> : Donc déterminer en discutant suivant les valeurs de l'entier n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3, le quotient et le reste de la division euclidienne de n cube moins 2 par n moins 2.  | (P écrit au tableau)<br><i>Soit <math>n \in \mathbb{N}</math>, <math>n \geq 3</math>.</i><br><i>Déterminer (en discutant selon les valeurs de l'entier n) le quotient et le reste de la division euclidienne de <math>n^3 - 2</math> par <math>n - 2</math>.</i> |
| 225 | (Silence- Laisse les élèves chercher)  |  |
| 226 | <b>P</b> : Trouver quotient et reste ça veut dire écrire, arriver à écrire n cube moins deux sous la bonne forme, cad n moins deux que multiplie quelque chose plus un autre nombre qui pourrait faire office de reste.  | 10h42  |
| 227 | <b>P</b> : Alors quel...quel point de départ pourrait-on prendre ?   |  |
| 228 | (Silence)  |  |
| 229 | <b>P</b> : Je peux effacer le tableau central ?  |  |
| 230 | (Silence)  |  |
| 231 | <b>P</b> : Ah, voilà une bonne initiative. ... Il faut toujours essayer.   | (P passe dans les rangs et s'adresse à un élève)   |
| 232 | (Silence)  |  |
| 233 | <b>P</b> : Donc première étape, c'est peut-être la plus facile, trouver une égalité, cad essayez d'écrire n cube moins deux comme étant le produit de n-2 par un entier plus un autre entier. Donc ça va être la première étape de notre travail.                      | (P écrit au tableau)<br>$n^3 - 2 = (n-2)(\dots) + \dots$   |
| 234 | Et la deuxième étape consistera à voir dans quelle condition cette égalité est une égalité de division euclidienne ou pas.   |  |
| 235 | <b>P</b> : Alors vous avez quelques camarades qui ont des idées...   |  |
| 236 | (Silence)  |  |
| 237 | <b>P</b> : Vous allez nous faire ça au tableau ?   | (Un élève va au tableau)   |
| 238 | <b>P</b> : Donc première idée effectivement, c'est que vous savez diviser un polynôme par un autre hein donc on peut essayer cette division et en tirer une égalité. Et puis l'étape suivante, l'égalité obtenue est-elle ou non une égalité de division euclidienne ? | 10h45<br>(Elève écrit au tableau)<br>$\begin{array}{r l} n^3 - 2 & n - 2 \\ n^3 - 2n^2 & n^2 + 2n + 4 \\ \hline 2n^2 - 2 & \\ 2n^2 - 4n & \\ \hline 4n - 2 & \\ 4n - 8 & \\ \hline 6 & \end{array}$  |
| 239 | (Prof contrôle le tableau)   |  |
| 240 | <b>P</b> : Oui   |  |
| 241 | <b>El</b> : y'a un moins là  |  |
| 242 | <b>P</b> : Oui et puis l'autre aussi, c'était deux moins. Donc attention, deuxième ligne, y'a aussi une erreur de signe.   |  |

Annexes chapitre C1

|     |  |  |
|-----|--|--|
| 243 | <b>P</b> : Voilà donc à enlever, il nous reste deux n carré moins deux hein...oui...ça m'étonnerait que ça soit des n carré encore... oui, non ça c'était bon.<br>Donc deux n carré moins quatre n à enlever, ce qui fait qu'il nous reste quatre n moins deux... plus quatre oui. |  |
| 244 | (Silence)  | (Elève écrit au tableau)<br>$n^3 - 2$                                |
| 245 | <b>P</b> : Pourquoi vous complétez pas au-dessus, remplacez les pointillés...  | (Elève écrit au tableau)<br>$n^3 - 2 =$<br>$(n-2)(n^2 + 2n + 4) + 6$ |
| 246 | <b>P</b> : Donc n au carré plus deux n plus quatre plus six. Donc ça c'est une égalité qui est vraie pour tout n.  |  |
| 247 | <b>P</b> : Mais c'est pas fini. Maintenant on va se poser la question la plus intéressante.  | 10h47  |
| 248 | <b>P</b> : Est-ce que c'est une égalité de division euclidienne ou pas ?   |  |
| 249 | <b>El</b> : ben oui parce que c'est positif. Et (inaudible)  | (Elève écrit au tableau)<br>$\tilde{U} \quad 0 \leq 6 < n - 2$       |
| 250 | <b>P</b> : Non, attention, elle est large d'un côté et stricte de l'autre.   |  |
| 251 | <b>P</b> : Vous êtes sur de ce que vous m'écrivez ?  |  |
| 252 | <b>El</b> : non  |  |
| 253 | <b>P</b> : Quel est le diviseur ?  |  |
| 254 | <b>El</b> : n moins deux.  |  |
| 255 | <b>El</b> : Euh... il y a une condition  | 10h48  |
| 256 | <b>P</b> : Ah oui. D'ailleurs on le savait dès le départ qu'il y aurait des conditions, c'était écrit dans l'énoncé. Où ?  |  |
| 257 | <b>El</b> : ...  |  |
| 258 | <b>P</b> : Où est-ce que c'était écrit dans l'énoncé qu'il y aurait une condition ?  |  |
| 259 | <b>El</b> : ...  |  |
| 260 | <b>P</b> : Vous avez lu l'énoncé ?   |  |
| 261 | <b>El</b> : là...  |  |
| 262 | <b>P</b> : Je ne suis pas tout à fait d'accord. Vous relisez l'énoncé et puis répondez à ma question.  |  |
| 263 | <b>El</b> : ... discussion sur les valeurs de l'entier n.  |  |
| 264 | <b>P</b> : Oui.  |  |
| 265 | <b>P</b> : Donc j'aimerais que vous m'écriviez cette égalité est une égalité de division euclidienne si et seulement si je donne quelles conditions pour n ?   | 10h49  |
| 266 | <b>P</b> : ... n strictement supérieur à 8.  | (Elève écrit au tableau)<br>$\tilde{U} \quad n > 8$                  |
| 267 | <b>P</b> : Ce qui veut dire qu'il va falloir regarder ce qui se passe pour n = 3, 4, 5, 6, 7, 8.   | 10h50  |
| 268 | <b>P</b> : Alors soit on...on fait toutes les études au cas par cas soit on essaie de se débrouiller autrement.  |  |
| 269 | <b>P</b> : Donc ça veut dire que si n est plus grand que 8, cette égalité est une égalité de division euclidienne avec un quotient égale à n carré plus deux n plus quatre et un reste égale à six.  |  |
| 270 | <b>P</b> : Et maintenant si n n'est pas plus grand que 8, ça ne marche pas.  |  |
| 271 | <b>P</b> : Donc il faut aussi regarder ce qui se passe pour les autres valeurs de n.   |  |
| 272 | <b>P</b> : Alors si n...   |  |
| 273 | <b>El</b> : on prend pour n égale 0...   |  |
| 274 | <b>P</b> : Je ne suis pas d'accord non plus  |  |
| 275 | <b>El</b> : ah ben non, euh oui, pour 3  |  |
| 276 | <b>P</b> : Pour n égale 3 donc on peut faire un catalogue pour les valeurs 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ca en fait 6, moi ça me paraît un petit peu beaucoup.   | 10h51  |
| 277 | <b>P</b> : Alors pour n=3 vous l'écrivez...  |  |
| 278 | <b>P</b> : Qu'est ce que vous allez faire ?  |  |
| 279 | <b>El</b> : Non, pour n égale 3, ce qu'on a là. A quoi c'est égal ça.  |  |

Annexes chapitre C1

|     |   |  |
|-----|---|--|
| 280 | <b>P</b> : Oui, j'aimerais que ça soit rédigé clairement donc vous ne voulez pas écrire pour $n=3$ $n$ cube moins 2 égale et $n$ moins 2 égale ?  |  |
| 281 | (Silence)   | (L'élève écrit au tableau)<br>$Pour n=3, n^3-2$  |
| 282 | <b>P</b> : Égale 3. $n$ cube moins 3 ça vaut...   |  |
| 283 | (Silence)   | (L'élève écrit au tableau)<br>$Pour n=3, n^3-2=25$ et $n$  |
| 284 | <b>P</b> : Égale 5 et $n$ moins 2 ?   |  |
| 285 | (Silence)   | (L'élève écrit au tableau)<br>$Pour n=3, n^3-2=25$ et $n-2=1$  |
| 286 | <b>P</b> : Donc le quotient ? 25 c'est 1 fois 25 plus un reste égale à  |  |
| 287 | <b>El</b> : 0   |  |
| 288 | <b>P</b> : A zéro donc vous l'écrivez. 25 égal 1 fois 25 plus zéro donc le quotient vaut 25 et le reste...  |  |
| 289 | (Silence)   | (L'élève écrit au tableau)<br>$Pour n=3, n^3-2=25$ et $n-2=1$<br>$25=1 \times 25+0$  |
| 290 | <b>P</b> : Alors pour $n=4$ et puis etc.  | 10h52  |
| 291 | <i>Changement de face de la K7.</i><br><i>P explique le principe de division de 35 par 12 (Voir ligne 331)</i>  | <b>(Fin de K7)</b>   |
| 292 | <b>P</b> : On pourra alors après réitérer l'opération. Ca peut être intéressant quand il y a beaucoup de cas particulier à étudier.   |  |
| 293 | <b>P</b> : Alors c'est une égalité de division euclidienne. Voilà. Il est plus petit que $n$ moins 2 donc équivalent à... mais on sait déjà que $n$ est plus petit que 8. Donc cette partie là est elle réalisée hein dans ce cadre là. | 10h53<br>(P écrit au tableau)<br>Si $n \leq 8$<br>$n^3-2=(n-2)(...)+...$<br>$n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5)+6-(n-2)$<br>$n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5)+8-n$ |
| 294 | <b>P</b> : Donc il nous reste... quoi ?   |  |
| 295 | <b>El</b> : ... ben rien.   |  |
| 296 | <b>P</b> : Si, il nous reste quelque chose, une condition sur $n$ à cause de ça. Celles-ci elles sont pas toujours réalisées de conditions.   |  |
| 297 | <b>P</b> : Donc qu'est-ce qu'elles nous donnent sur $n$ ?   |  |
| 298 | (Silence)   | (P écrit au tableau)<br><i>C'est une égalité de division euclidienne</i><br>$\exists 0 \leq 8-n < n-2$                                     |
| 299 | <b>P</b> : Ben ça donne ?   |  |
| 300 | (Silence)   |  |
| 301 | <b>P</b> : Ca donne 8 et 2 dix plus petit que $2n$ . 10 plus petit que $2n$ ça fait ?   |  |
| 302 | <b>Classe</b> : 5 plus petit que $n$ .  |  |
| 303 | <b>P</b> : Donc autrement dit, $n$ supérieur à...   |  |
| 304 | <b>Classe</b> : 5   |  |
| 305 | <b>P</b> : à 5.   | (P écrit au tableau)<br>$\exists n > 5$  |
| 306 | <b>P</b> : Donc ça règle le problème de 8, de 7 et de 6.  |  |

Annexes chapitre C1

|     |   |   |
|-----|---|---|
| 307 | <b>P</b> : Donc pour $n=6, 7$ ou $8$ , on a un quotient égale à   | 10h54 (milieu)<br>(P s'adresse à l'élève au tableau)  |
| 308 | <b>El</b> : euh j'ai pas suivi là...  |   |
| 309 | <b>P</b> : Donc ça règle le problème...   |   |
| 310 | <b>P</b> : ici, je traite combien de cas en même temps ?  |   |
| 311 | <b>El</b> : .. 8  |   |
| 312 | <b>P</b> : Non pas 8.   |   |
| 313 | <b>P</b> : Pour $n$ inférieur ou égal à $8$ , cette égalité là est une égalité de division euclidienne à condition que $n$ soit plus grand que $5$ .  |   |
| 314 | <b>P</b> : Donc là, vous réglez combien de cas en même temps ?  |   |
| 315 | <b>El</b> : 3   |   |
| 316 | <b>P</b> : 3. Je viens de régler $n=6, n=7$ et $n=8$ . Donc pour $n=6, n=7$ ou $n=8$ , le quotient s'écrit  | (Pendant ce temps, l'élève écrit au tableau)<br><i>Pour <math>n=6, n=7</math> ou <math>n=8</math></i>   |
| 317 | <b>P</b> : le quotient vaut combien ?   |   |
| 318 | <b>El</b> : $n$ carré...  |   |
| 319 | <b>P</b> : $n$ carré plus $2n$ plus $5$ et le reste ?   |   |
| 320 | <b>El</b> : $8$ moins $n$ .   |   |
| 321 | <b>P</b> : $8$ moins $n$ .  |   |
| 322 | <b>P</b> : Donc quotient égale $n$ carré plus $2n$ plus $5$ et reste égale $8$ moins $n$ .  | (Pendant ce temps, l'élève écrit au tableau)<br><i>Pour <math>n=6, n=7</math> ou <math>n=8</math>,<br/>quotient=<math>n^2+2n+5</math> et<br/>reste=<math>8-n</math></i> |
| 323 | <b>P</b> : Voilà, et puis maintenant, si $n$ est inférieur ou égal à $6$ , le reste est à nouveau trop grand donc je réitère l'opération.   | 10h55 (milieu)  |
| 324 | <b>P</b> : Donc il me reste à régler le problème, $n=5, n=4$ , il n'y en a que $2$ , on peut les régler à la main directement donc là c'est bon.  |   |
| 325 | <b>P</b> : Vous avec le choix. Y'en a plus que $2$ à régler, donc on peut essayer de faire le même travail ou régler au cas par cas.  | P s'adresse à l'élève au tableau  |
| 326 | <b>P</b> : Est-ce que vous avez compris comment se faisait ce travail là ou pas ?   | 10h56   |
| 327 | <b>El</b> : la deuxième partie elle est un peu chaude, j'ai pas très bien compris.  |   |
| 328 | <b>P</b> : Ben est-ce que...  |   |
| 329 | <b>P</b> : ici ça veut dire que le reste allait être trop grand.  |   |
| 330 | <b>P</b> : Donc si le reste est trop grand, ça veut dire que j'ai pas fait ma division correctement.  |   |
| 331 | <b>P</b> : C'est l'exemple que je prenais tout à l'heure.   |   |
| 332 | <b>P</b> : Si je divise $35$ par $12$ et je vais mettre une fois, il va me rester $23$ donc mon reste est trop grand.   | (P écrit au tableau)<br>$35=12\times 1+23$<br>$35=12\times 2+11$  |
| 333 | <b>P</b> : Mon reste est trop grand ça veut dire que mon diviseur est trop petit. Donc je l'augmente d'une unité et puis je regarde.  |   |
| 334 | <b>P</b> : Donc $2$ fois $12, 24, 24$ pour aller à $35, 11$ , cette fois c'est bon puisque $11$ est plus petit que $12$ .   |   |
| 335 | <b>P</b> : Et bien, si $n$ est plus petit que $8, n$ moins $2$ va être inférieur ou égal à $6$ donc j'ai un reste qui est trop grand.   |   |
| 336 | <b>P</b> : Puisque ce reste est trop grand, ça veut dire que mon diviseur est trop petit donc j'augmente mon diviseur d'une unité et je diminue mon reste puisque j'ai mis une fois $n$ moins $2$ de plus ici, je l'enlève là pour conserver l'égalité. |   |
| 337 | <b>P</b> : Et ensuite je regarde si ça, ça traduit une division euclidienne et dans quelles conditions.   |   |
| 338 | <b>P</b> : D'accord ?   |   |
| 339 | <b>P</b> : Sinon vous pouvez faire tous les cas hein, de $n=3$ jusqu'à $n=8$ , c'est à vous de choisir.   |   |
| 340 | <b>P</b> : Alors je crois qu'on va en rester là car après c'est les bases de numération, donc la semaine prochaine encore de l'arithmétique.  | 10h57   |

Annexes chapitre C1

|     |           |  |
|-----|-----------|--|
| 341 | (Silence) | <i>En deuxième heure,<br/>c'est le premier DS<br/>d'arithmétique</i> |
|-----|-----------|--|



## ENTRETIEN AVEC P2, LE 24/10/01

L : Donc c'est la troisième année en fait...que tu as des spécialités maths ?

P2 : Oui.

L : Et alors d'abord je vais te poser des questions un peu générales sur la spécialité avant de passer à des questions d'arithmétique.

P2 : On verra si je sais bien mon programme (rires).

L : Pour toi, c'est quoi la fonction de la spécialité mathématiques ? Ou si tu préfères, le rôle ?

P2 : ...

L : Quand ça a été créé, tu as vu ça comme quoi ?

P2 : C'est difficile à dire, je pense que c'est la seule partie du programme où on raisonne vraiment. Donc pour moi c'est le plus grand des intérêts.

L : Donc tu vois plutôt ça comme un endroit où tu peux faire vraiment des maths avec des ...

P2 : avec des raisonnements intéressants, construits pas un simple si alors.

L : Et donc avec des élèves qui sont assez motivés par les mathématiques si ils choisissent ça en gros ?

P2 : oui mais alors la question du choix c'est aussi autre chose. J'ai l'impression que c'est aussi fonction des personnes qui enseignent, en fonction de ce qu'on veut faire plus tard, plus qu'au niveau des capacités en mathématiques.

L : Et quand ils ont décidé de réintroduire l'arithmétique en spécialité, tu en as pensé quoi ?

P2 : Moi ravie.

L : Ravie ? Pourquoi ?

P2 : (rires) parce que j'aime ça. Donc moi je me régale, c'est comme les probas donc j'aime beaucoup.

L : Et quand on met en place un nouveau programme, bon il y a ce qui est écrit et il y a plusieurs façon de le lire. En général, les profs ils ont quand même une assez grande liberté. Et toi, qu'est-ce que tu as vu comme objectifs principaux de ce programme d'arithmétique ? Quels sont pour toi même maintenant les principaux objectifs de ce programme ?

P2 : Euh, j'en sais rien comme ça ?

L : Un avis personnel.

P2 : Oui mais d'accord mais. Non mais je crois que c'est faire connaissance avec les nombres entiers car ils ont plein de propriétés que la plupart des élèves ne connaissent pas et qui sont très intéressantes. Mais... Et puis bon ça permet peut-être de faire, de les différencier par rapport aux autres nombres et puis ça permet aussi de résoudre plein de petits problèmes de la vie de tous les jours auxquels on ne pense pas en fait.

L : Donc toi, tu es ravie qu'il y ait de l'arithmétique de nouveau en terminale donc je pense que tu es d'accord avec un peu ces objectifs que tu viens de décrire. Bon si jamais justement tu avais eu à participer à un groupe de travail qui construisait le programme d'arithmétique, est-ce que tu l'aurais laissé sous cette forme ou est-ce que tu l'aurais changé certaines choses ou non ? Tu l'aurais rédigé autrement ?

P2 : je n'ai pas réfléchi à la question mais moi il me convient. Je constate qu'au fil de des ans, j'allège. Donc je ne présente pas les choses de la même façon d'une année sur l'autre et maintenant que je les ai pour la troisième année, je sais ce qui est important, ce qui est secondaire et cetera. Donc il faut bien trois ans pour faire le tri.

L : Trois ans pour tout mettre en place.

P2 : oui, pour vraiment avoir un cours au point trois ans.

L : Parce qu'au début, comme tu dis, les changements c'est surtout des...

P2 : c'est ma façon de voir les choses parce que quand tu regardes les livres, tu t'aperçois que ça part dans tous les sens et que c'est très touffu donc t'es bien obligée de faire un tri. Donc le premier tri, personnellement, je veux essayer de ne pas oublier de choses donc il n'est pas assez sélectif et au fil des ans le tri devient plus sélectif avec en fin de compte le même objectif cad que les élèves au bout savent la même chose mais j'ai fait le tri dans tout ce qui était essentiel, ce qui l'était un peu moins et le superflu.

L : Donc t'as allégé

P2 : oui, c'est général, à chaque fois que je fais un nouveau programme...

L : Et qu'est-ce que tu as allégé justement ? Les principaux allègements ?

P2 : J'ai pas allégé mais j'ai fais ressortir ce qui était important.

L : Avant c'était à peu près de même niveau et maintenant...

P2 : Voilà et maintenant j'ai fait trois chapitres avec deux chapitres où je mets les choses essentielles et un troisième qu'on fera plus tard où il y a l'accessoire, ce que j'appelle accessoire, les congruences, les petites choses comme ça.

L : Et donc ce que tu as mis en avant c'est quoi ? Enfin ce que tu essaies de faire ressortir au mieux ?

P2 : Le travail sur la divisibilité, le travail sur les nombres premiers qui me paraît important. Bon j'oublie peut-être quelque chose mais en gros c'est ça.

L : Donc bon dans ce qui est accessoire donc congruences...

P2 : Euh oui, je pense que je ferai les congruences plus tard et puis tous les tas de petits de problèmes annexes comme les écriture en d'autres bases et les choses comme ça qui finalement ne sont pas fondamentales hein.

L : Ok.

P2 : pas fondamentales pour moi.

L : Et donc quel va être selon toi le rôle de la calculatrice dans cette partie du programme ? Parce qu'on en général les programmes du lycée, de partout dans la présentation, avant même de parler des contenus, il font pas mal de topo sur les calculatrices et toi, quel est le rôle et la place de la calculatrice en arithmétique ?

P2 : Bon elle peut servir à conjecturer, elle peut aussi servir à faire des calculs quand ils sont longs et fastidieux. Maintenant élaborer des petits programmes aussi mais ça je reconnais que j'ai pas beaucoup le temps d'en faire. Mais ça pourrait être intéressant.

L : C'est sur que le temps c'est une contrainte qui est très forte.

P2 : non négligeable.

L : Tu dois certainement savoir que maintenant il y a de l'arithmétique en troisième, en seconde mais pas en première. Donc en troisième il y a l'algorithme d'Euclide.

## Annexes chapitre C1

P2 : Oui, y'a les nombres premiers, pgcd, ppcm, réduction euh avec leurs applications de base réduction de fractions de fractions au même dénominateur et simplification ;

L : Et en seconde il y a les nombres premiers. Donc tu en penses quoi ?

P2 : Très bien. J'ai enseigné ça en cinquième et j'aimais beaucoup et ça passait bien.

L : C'était quand ça, c'était les anciens programmes ?

P2 : Oh c'est pas aussi vieux que ça, c'était y'a 17 ans, 16/17 ans. Moi j'étais à St-Martin le Vinoux et en cinquième y'avait des jolis petits problèmes que j'aimais bien et les élèves aussi.

L : Et qu'est-ce que tu penses du fait que ça n'ai pas continué en première ?

P2 : Y'a rien dans les programmes mais on peut en parler. Reconnaître un nombre décimal et cetera les choses comme ça. C'est des choses qui bon en seconde sont peut-être pas forcément acquises.

L : Et tu en penses quoi donc... Bon là, on va passer à la spécialité maths... T'en penses quoi de l'avenir de l'arithmétique dans cette partie du programme ?

P2 : J'en pense quoi. J'aimerais qu'elle perdure l'arithmétique mais ça dépend pas de moi. Normalement il me semble avoir vu qu'il y allait encore en avoir l'année prochaine donc c'est très bien.

L : Donc maintenant ça c'était un peu des question générales. On va passer à ce qui se passe dans ta classe. Donc en fait la première question, tu y as déjà répondu. C'était vu que c'est pas la première année que tu enseignes, je voulais savoir quelles modifications tu avais faites. Tu as surtout dit que tu avais mis plus de choses en évidence...

P2 : Et puis je commence en début d'année pour laisser des choses décanter. Et la dernière partie, tout ce qui est accessoire, je le ferai en fin d'année. Ça permettra de faire des rappels.

L : Donc tu commences les deux premiers chapitres...

P2 : Les deux premiers chapitres d'arithmétiques en septembre

L : Et ça dure jusqu'en octobre ?

P2 : Oui, je viens de finir et je vais attaquer la géométrie.

L : Oui donc ça tu laisses et tu reviens plus tard. Donc au moment où tu as préparé ton cours est-ce que tu as hésité entre différentes options ou scénarios par exemple sur l'ordre d'introduction des... ?

P2 : Oui, bien sur.

L : Alors qu'est-ce qui t'as permis de faire ton choix ? Tu as hésité en quoi et quoi ?

P2 : J'ai changé d'ailleurs en cours d'année. Euh... pas en cours d'année, la première année j'ai fait un certain... je me souviens plus de l'ordre précis mais je sais que la seconde année j'ai pas fait la même chose. Pas dans le même ordre. C'est l'introduction des nombres premiers que je n'ai pas fait au même moment. Maintenant je le fais plus tôt qu'avant.

L : Oui, enfin l'année dernière c'était juste après la divisibilité.

P2 : Ou alors que la première année je les avais laissé pour les mettre ... et en fait pas un bon calcul.

L : Pourquoi ?

P2 : Ca m'a gêné, y'a des tas de moments où j'en aurai eu... où j'aurais eu envie de les utiliser et je ne les avais pas à ma disposition.

L : Donc pour le pgcd par exemple, des choses comme ça ?

P2 : Je ne m'en souviens plus.

L : Et sinon, pour certaines démonstrations de théorèmes, parce que pour certains tu peux choisir entre plusieurs démonstrations. Comment est-ce que tu as fait ton choix ? Est-ce que tu as changé d'une année sur l'autre ?

P2 : Oh, là je peux pas dire que je choisis. Je trouve une démonstration qui me plait et je reste là, je vais pas chercher s'il y en a d'autres.

L : Et en général, t'as pris celles du manuel ou d'autres ?

P2 : De toutes façons, je prépare mon cours avec plusieurs livres alors... Donc j'ai fait mon choix à ce moment là.

L : D'accord.

P2 : Et puis bon c'est fonction aussi de ce qu'on a fait avant donc à un certain moment donné tu ne peux pas faire n'importe quelle démonstration aussi.

L : Et est-ce que tu te rappelles plus ou moins d'une démonstration où t'as hésité assez longtemps pour choisir une démonstration ?

P2 : Non.

L : Euh, il n'y a qu'une seule classe de spécialité dans ton lycée ?

P2 : Y'en avait 2 les autres années, y'en a qu'une cette année parce que le collègue est malade.

L : D'accord et quand il y en avait deux, est-ce que tu as un peu travaillé en collaboration avec lui ?

P2 : Oui bien sur.

L : Et est-ce que vous étiez toujours d'accord ou est-ce qu'il y avait des divergences ?

P2 : On était relativement d'accord. Bon la première année on n'a pas fait les nombres premiers au même moment mais si si, pas de problème. Euh, je dirai qu'il est plus... euh comment dire ? Il se met plus à la portée des élèves que moi (rires). Moi je les bouscule un peu plus.

L : T'es plus exigeante ?

P2 : Voilà. Je découpe moins...

L : Bon sinon, là aussi la question qu'on a là, tu y as déjà un peu répondu. C'était changeras-tu quelque chose dans ton cours l'année prochaine si tu as encore spécialités maths ?

P2 : Oui toujours. Je change toujours des choses. Je ne peux pas refaire deux fois la même chose.

L : Les exos, tout ?

P2 : Les exos oui, l'ordre des choses et puis bon, certaines fois en lisant, ça te fait penser à un autre exercice que tu pourrais donner et peut être intéressant. Je ne fais jamais deux fois la même chose. Ou exceptionnellement.

L : Et est-ce que tu essaies de faire un lien avec les élèves entre l'arithmétique et ce qu'ils voient en maths ?

P2 : Oui bien sur. Je leur demande d'exposer aux autres.

L : En obligatoire ?

P2 : Oui, en obligatoire. J'en ai fait il n'y pas longtemps mais je ne sais plus quel sujet. Ah ben on a fait la récurrence en spécialité. Tu ne diras c'est des problèmes normal mais je les fais avant en spécialité et j'en ai profité pour que ceux qui connaissaient relativement mieux expliquent aux autres... C'est plus intéressant.

L : Et donc en fait, les élèves de spécialité ont quand même un rôle au niveau obligatoire pour...

P2 : Pour moi oui. S'ils ont une petite longueur d'avance, j'en profite.

L : Et ça se passe bien ?

P2 : Oh oui. (J'ose pas te dire combien j'en ai).

L : Alors pour toi, qu'estimes-tu être le plus important à faire passer dans ce cours d'arithmétique ?

P2 : Pour ceux qui veulent faire une prépa, j'essaie cette année particulièrement sur les raisonnements. Avec les parties directes, réciproques contraposées... Chaque fois que j'ai l'occasion, j'en profite.

L : Et pour les autres ?

P2 : Euh pour les autres...Oui bon un peu la même chose. Les initier au raisonnement même si c'est pas un raisonnement aussi performant.

L : Donc en fait, ce que tu souhaites que les élèves retiennent de...

P2 : C'est une façon de penser. En particulier les contre-exemples. Parce qu'ils ont pas l'habitude. C'est quelque chose qui est difficile pour eux.

L : Et à ton avis, pourquoi ?

P2 : manque d'habitude. Moi j'en fais avant, style cette phrase est-elle vraie ou fausse mais bon il faudrait que ça soit plus systématique. A mon avis, il faudrait consacrer plus de temps et en cours on fait de moins en moins de démonstrations donc de moins en moins de contre-exemples, ça va avec.

L : Maintenant, au niveau du contenu, c'est sur quoi que tu as le plus insisté ? La divisibilité ? La division ? Les nombres premiers ? L'algorithme d'Euclide ? Les équations diophantiennes ?

P2 : Pour l'instant la divisibilité. Les équations diophantiennes je ne les ai pas encore faites mais j'insiste aussi pas mal sur les équations diophantiennes ne serait ce que... Je vais les faire maintenant puisque j'ai fait l'algorithme d'Euclide donc je vais faire Bézout, Gauss et les équations diophantiennes. Oui, ça c'est dans la partie importante à mon avis. Ne serait-ce que pour être pratique au niveau du bac.

L : Donc c'est surtout sur la divisibilité et l'algorithme d'Euclide. Pourquoi ? C'est à cause du bac ou c'est ce qui te semble...

P2 : Euh non, je dirai qu'il y a des petits raisonnements élémentaires que tout le monde devrait savoir faire. Donc euh...

L : A ton avis, c'est quel type d'exercice que tu as le plus donné ?

P2 : J'ai sais rien. En plus, c'est vicieux comme truc car je me rends compte que d'une année sur l'autre... Quand j'ai des terminales un an sur deux, je sais exactement ce que j'ai fait à quel moment et cetera Mais quand je les ai plusieurs années de suite, y'a des choses que j'ai fait une année et pas l'autre et à la fin je ne sais plus trop ce que j'ai fait ou pas fait donc je suis incapable de te répondre là sans papier.

L : A ton avis, quelles sont les principales difficultés des élèves en arithmétique ? Ca peut être euh on va d'abord parler des difficultés au niveau du raisonnement et après au niveau des notions.

P2 : Oh, au niveau des notions, ils ne sont pas bien gênés quand même car ce sont des notions je dirai élémentaires.

L : Même au niveau de la divisibilité ?

P2 : Oh oui. Si, je crois pas que ça soit ça qui les gêne. Moi je pense plutôt que c'est le raisonnement. Donc la notion de divisibilité, je pense que oui, elle est peut-être pas forcément toujours très bien comprise car ils ont tendance à mélanger divisible par est multiple de... Et ils mélangent à juste titre mais... Tu as compris ce que je voulais dire.

L : Donc c'est plutôt sur le raisonnement. Et quel type de raisonnement plus particulièrement ? Est-ce qu'il y en a un qui leur pose plus de problèmes de qu'autres ou c'est tous ?

P2 : Mais tous leur posent problème. Mais moi ce que j'aimerais qu'ils arrivent à faire en fin d'année, c'est d'être capable de se rendre compte qu'ils écrivent de grosses bêtises. C'est surtout ça.

L : Mais comment ?

P2 : Comment, ben en prenant quand ben ils ont par exemple... je sais pas moi... sur un cas particulier de prouver que ce qu'ils ont trouvé dans le cadre général fonctionne. Prendre des assurances, essayer des preuves, prendre des exemples. Chaque fois que l'occasion se présente j'essaie de leur faire faire.

L : Et à ton avis, leurs difficultés sur le raisonnement, elle est due à quoi ?

P2 : Manque d'habitude ?

L : Manque d'habitude dans tout le reste de leur scolarité ?

P2 : Oui. Et puis peut-être qu'ils n'argumentent pas assez dans la vie courante non plus. Ils n'ont pas l'habitude de justifier leur position, d'argumenter pied à pied, je sais pas. Et puis nous en plus on a des internes. Donc euh, à par entre eux...

L : Et donc tu penses que ça c'est un des principaux obstacles qui fait qu'ils ne réussissent pas forcément toujours bien en arithmétique, le manque d'habitude ?

P2 : Le manque d'habitude oui, bon et puis le manque de travail aussi. Parce que il ne faut pas l'oublier (rires).

L : Donc après on a déjà un peu parlé du bac et le fait que pour pouvoir faire un exercice du bac il faut savoir résoudre une équation diophantienne car c'est assez stéréotypé. Et donc, à ce niveau là, je voulais savoir quel a été le poids de la contrainte du bac sur l'organisation un peu de ton cours et sur les exos ?

P2 : Bon le poids de la contrainte du bac c'est faire la totalité du programme, point.

L : Et t'as pas plus insisté sur les équations diophantiennes du fait que c'est toujours ça qui...

P2 : Non.

L : Et tu penses que à part les équations diophantiennes il peut y avoir d'autres choses au bac ?

P2 : Ah ben oui, bien sur. Trouver... rendre euh écrire que des fractions sont irréductibles, les nombres entiers et cetera Y'a plein de petites choses là qui peuvent être intéressantes.

L : Mais quand on regarde les annales...

P2 : on n'a pas de recul, on a que trois ans.

L : Là c'est la fin, je voulais juste te poser quelques questions sur...mais je ne sais pas si tu t'en rappelles, ton cours sur la division euclidienne.

P2 : Hum.

Alors c'était quoi ton projet quand tu as fait ton cours sur la division euclidienne au niveau...

P2 : Je ne m'en souviens plus.

L : Euh, tu avais choisi une démonstration, enfin l'année dernière, cette année je sais pas si tu as fait la même, où tu as encadré a par des...

P2 : des entiers consécutifs, oui. Non cette année j'ai travaillé sur la partie entière parce que j'en ai besoin en analyse parce que c'est une bonne fonction qui me fournit plein de contre-exemples. Donc j'ai utilisé la fonction partie entière. Donc on l'a représenté, c'était quasiment la même chose.

L : Parce que justement l'année dernière tu avais eu des problèmes avec la fonction partie entière parce que tu en avais eu besoin à un moment et ils ne savaient pas la reconnaître donc là t'as changé ?

P2 : J'avais déjà préparé le terrain en première (rires). Ils ne l'aiment pas en plus mais c'est vrai que c'est la seule fonction qui leur permet de... qui est bizarre je dirai par rapport aux autres.

L : Donc tu avais pour projet de faire ça avec la partie entière parce que ça te permettait de...

P2 : Et puis ne serait-ce que de vérifier que leur calculatrice leur donne... trouver la bonne touche, des choses comme ça. J'ai fait ça en classe normale et j'ai réutilisé en spécialité derrière. Parce que ça me permet d'avoir des fonctions qui n'ont pas de limite, des choses comme ça, cette fonction partie entière, c'est intéressant.

L : Oui donc pour la division euclidienne, ton projet c'est non seulement travailler sur la partie entière en plus de trouver que...

P2 : Utiliser la partie entière pour justifier l'égalité de la division euclidienne.

L : Merci.

