

---

# Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés

— oOo —

Vincent ACARY

— oOo —

## LMA ESM2

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

Equipe Modèles Numériques

Ecole supérieure de mécanique de Marseille

LMA - UPR - CNRS - 7051

## GAMSAU/MAP

Groupe pour l'Applications des Méthodes  
Scientifiques à l'Architecture et à l'Urbanisme

Ecole d'architecture de Marseille - Luminy

Modèles et simulations pour l'Architecture

et le Paysage

MAP - UMR - CNRS - 694





## 1 – Contexte de l'étude

1.1 – Les monuments : Element essentiel du patrimoine culturel

1.2 – De l'utilité de la mécanique

1.3 – Nécessité d'une approche interdisciplinaire

- 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- 6 – Applications aux édifices maçonnés
- 7 – Conclusions et perspectives

# **1 – Contexte de l'étude**

# 1 – Contexte de l'étude

## 1.1- Les monuments : *Element essentiel du patrimoine culturel*



Témoin de l'humanité

Document historique

Emblème d'une identité culturelle

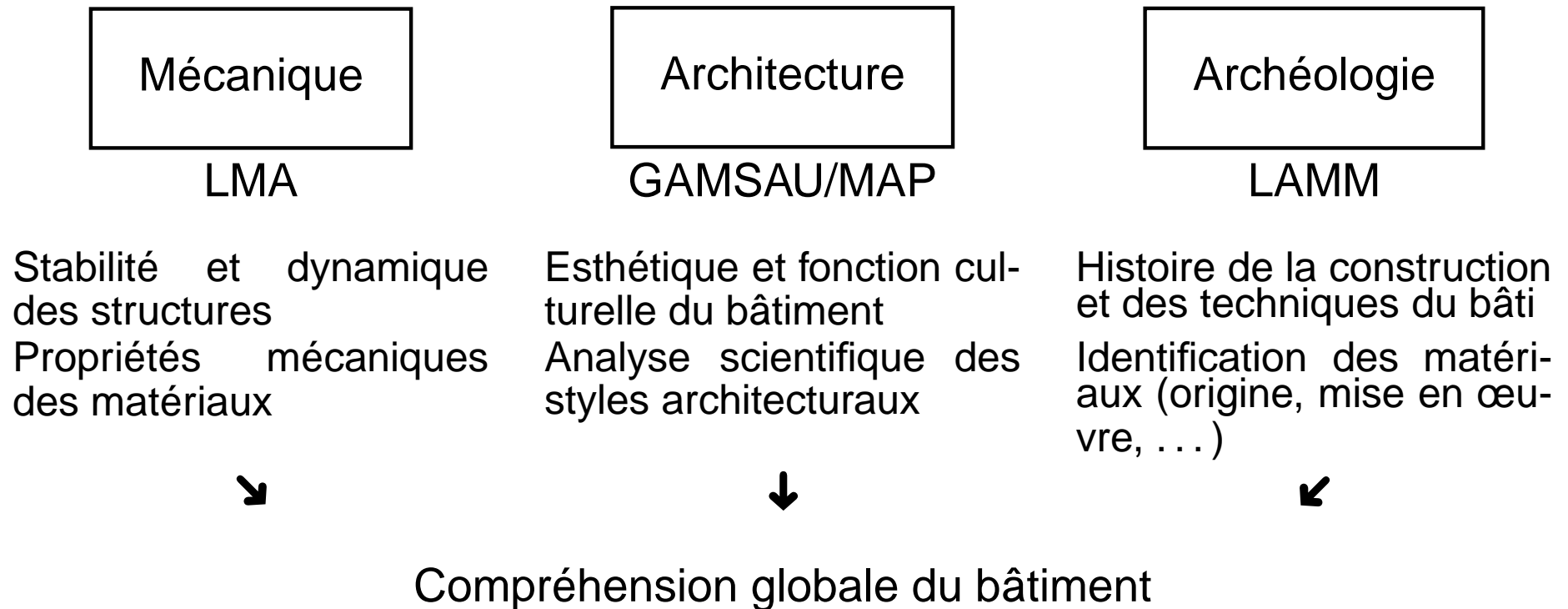
Rôle architectural actuel

Patrimoine à valoriser et à transmettre

Importance de la morphologie et de la structure du monument

- ✱ Support de la double fonction du monument :
  - fonction esthétique et emblématique
  - fonction architectural et urbaine
- Objectifs premiers des études mécaniques des monuments :
  - Conservation et restauration du patrimoine
  - Sécurité et stabilité

## 1.3- Nécessité d'une approche interdisciplinaire



- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
  - 2.1 – Définitions
  - 2.2 – Matériaux constitutifs : les éléments et les joints
  - 2.3 – Comportements globaux des maçonneries
- 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- 6 – Applications aux édifices maçonnés
- 7 – Conclusions et perspectives

## **2 – Les maçonneries : typologie et comportement**



#### ✱ Définition :

Tout ouvrage construit d'une collection d'éléments compactés entre eux par la gravité

→ Diversité des comportements mécaniques

#### ✱ Deux types principaux de maçonnerie :

- le blocage : éléments de différentes tailles jetés pêle-mêle dans un bain de mortier.
- l'appareil : éléments posés et non jetés, adaptés (taillés ou équarri) pour occuper une place déterminée.

→ Structure amorphe ou cristalline

#### ✱ Définition du joint :

Interfaces : Espace entre deux éléments et implicitement le matériau qui le remplit

- Joint de mortier
- Joint vif

→ Comportements différents

### 2.2- Matériaux constitutifs : les éléments et les joints

#### ✱ Les éléments :

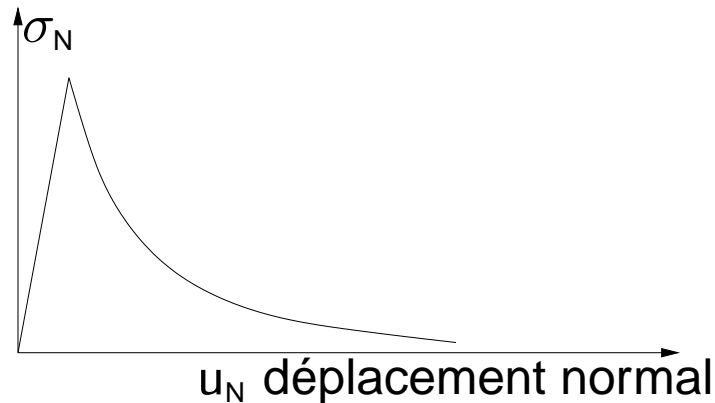
- Nature variée : pierre, brique, agglomérés, etc...
- Comportements mécaniques caractéristiques des géomatériaux :

Endommagement fragile couplé à la plasticité non associée

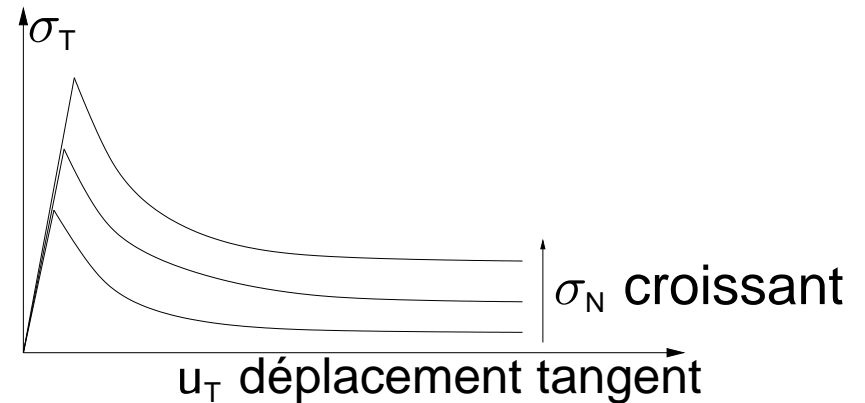
#### ✱ Les joints vifs :

- Comportement normal unilatéral, absence de cohésion
- Comportement tangent : Frottement de Coulomb

#### ✱ Les joints de mortier :

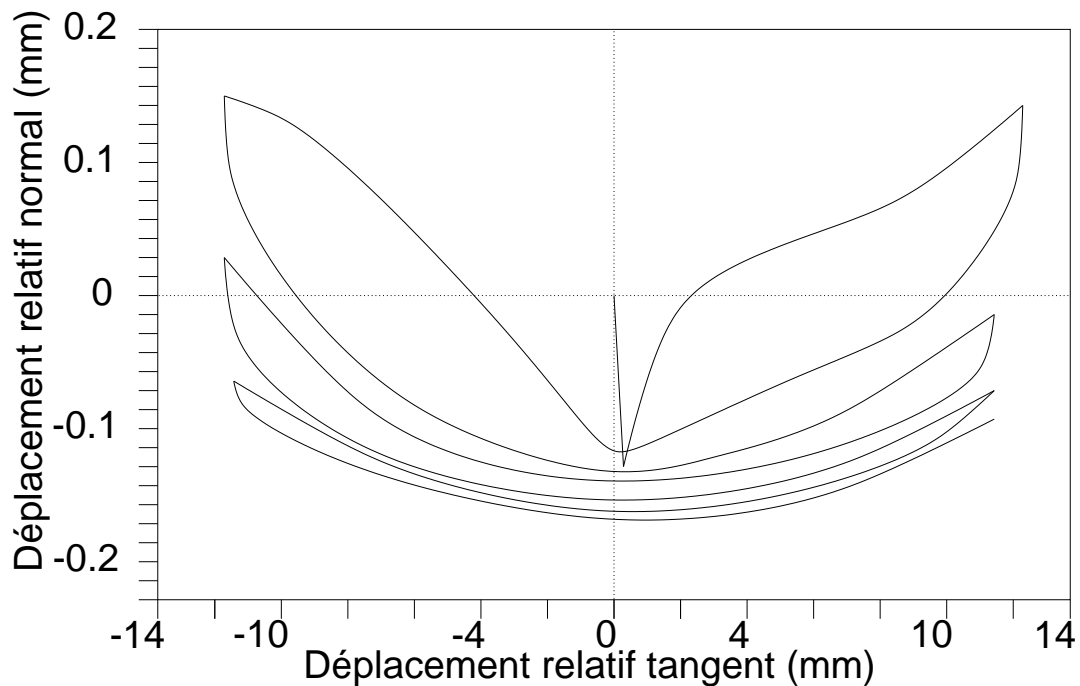
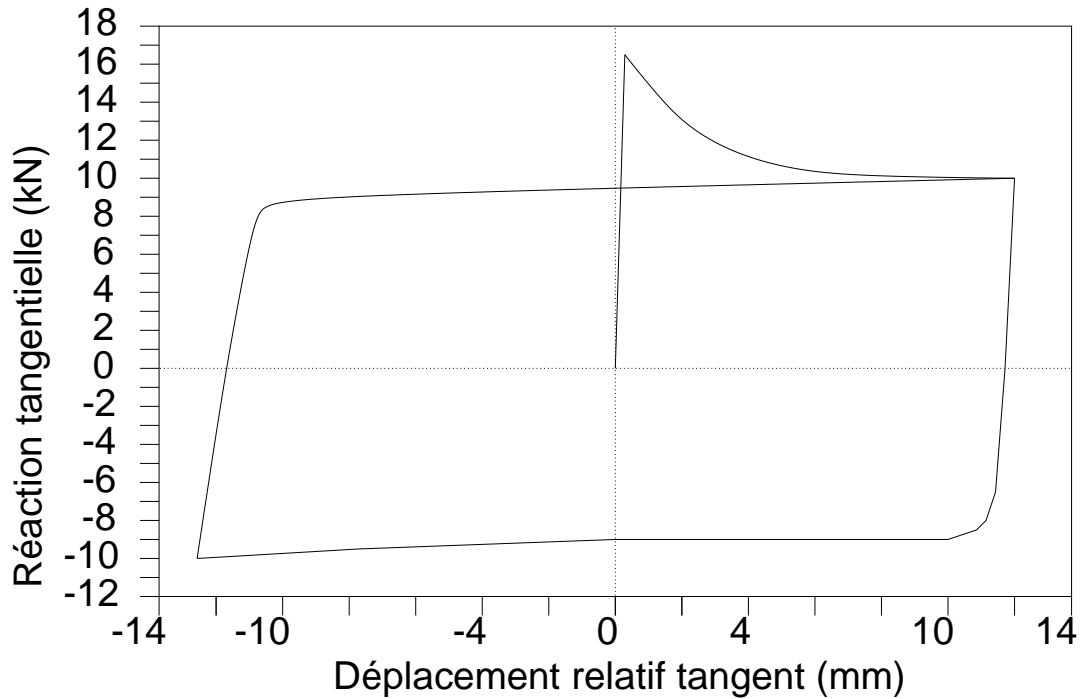


Traction directe



Cisaillement

### 2.2- Matériaux constitutifs : les éléments et les joints



Comportement tangent d'un joint de mortier moderne sous sollicitation cyclique, d'après [Atkinson *et al.* (1989)]

### 2.3- Comportements globaux des maçonneries

- ✱ Deux phénomènes inélastiques principaux :
  - Ouverture, refermeture et propagation de microfissures

#### **Endommagement fragile**

- Ecoulement plastique de type glissant avec frottement

#### **Plasticité non associée**

- ✱ Couplage fort entre ces phénomènes :
  - Renforcé par l'hétérogénéité
  - Dépendant de la structure des appareils
- ✱ Différentes échelles en interaction :
  - Echelle macroscopique, échelle de la structure
  - Echelle mésoscopique, échelle des hétérogénéités de l'appareil
  - Echelle microscopique

Caractère homogène ou hétérogène, continu ou discret



Comportements et mécanismes dissipatifs complexes

- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
  - 3.1 – Modélisations macromécaniques
  - 3.2 – Modélisations micromécaniques
  - 3.3 – Homogénéisation et passage micro-macro
  - 3.4 – Enseignements de cette étude bibliographique
- 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- 6 – Applications aux édifices maçonnés
- 7 – Conclusions et perspectives

## **3 – Synthèse des travaux déjà réalisés**

#### Calcul à la rupture, analyse limite et “No-tension material”

- ✱ Analyse limite et “No-tension material”  
[Coulomb (1773)], [Save (1986)], [Heyman (1995)], [Panzeca et Polizotto (1988)]

Hypothèses fondamentales :

- Aucune résistance à la traction
- Résistance illimitée à la compression
- Pas de glissement

→ Matériau plastique parfait (voire rigide)

- ✱ Résolution numérique en élasticité non linéaire  
[Cuomo & Ventura (2000)], [Alfano *et al.* (2000)]

- ✱ Calcul à la rupture [Delbecq (1982)]  
Prise en compte d'une résistance limitée à la compression et du frottement de Coulomb.

#### References :

- ▷ **Coulomb, C.A.**, Essai : Sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture. , Mémoire présenté à l'académie royale des sciences, 1773
- ▷ **Delbecq; J.M.**, Analyse de la stabilité des voûtes de maçonnerie par le calcul à la rupture, J. Méc. Appl., 1982
- ▷ **Heyman, J.**, The stone skeleton, Cambrigde Univeristy Press, 1995
- ▷ **Panzeca, T. and Polizotto, C.**, Constitutive equations for no-tension materials, Meccanica, 1988
- ▷ **Cuomo, M. and Ventura, G.** , A complementary energy formulation of no tension masonry-like solids, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol.189, pp313-339, 2000
- ▷ **Alfano, G. and Rosati, L. and Valoroso, N.** , A numerical strategy for finite element analysis of no-tension materials, Int. J. for Numer. Meth. Engrg., Vol.48, pp317-350, 2000



#### Modèles phénoménologiques traditionnels

- ✱ Modèles en élasticité linéaire [Godart *et al.* (1996)]
- ✱ Modèles de plasticité orthotrope [Lourenco *et al.* (1995)]
- ✱ Modèles d'endommagement fragile [Onate *et al.* (1997)]
- ✱ Modèles couplés plasticité et endommagement [Lofti & Shing (1991)]
- ✱ Applications de la théorie des milieux de Cosserat [Mühlhaus (1997)]

#### References :

- ▷ **Godart, B. Tiveron, M. and Duval, D.**, Modélisation de la cathédrale de Strasbourg à l'aide du code de calcul aux éléments finis CÉSAR-LCPC, Etude de l'influence de mouvements d'appuis sur le comportement d'une partie de l'édifice, Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées, 1996
- ▷ **Lourenço, P.B. and de Borst, R. and Rots, J.G.**, A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials, Int. J. for Numer. Meth. Engng. , Vol.40, pp4033-4057, 1997
- ▷ **Onate, E., Hanganu, A., Barbat, A., Oller, S., Vitaliani, Saetta, A. and Scotta, R.**, Structural analysis and durability assessment of historical construction using a finite element damage model, Structural analysis of historical constructions, possibilities of numerical and experimental techniques CIMNE, pp189-224, 1997
- ▷ **Lotfi, H.R. and Shing, P.B.**, An appraisal of smeared crack models for masonry shear wall analysis, Comp. & Struct., Vol.41, pp413-425, 1991
- ▷ **Mühlhaus, H.B., Sulem, J. and Unterreiner, P.**, Discrete and Continuous Models for Dry Masonry Columns, J. Eng. Mech. , Vol.123, pp399-403, 1997



Hypothèse fondamentale des modélisations macromécaniques :

#### Milieu Continu et homogène

Avantages	Inconvénients
Modèles sophistiqués Simulation d'édifices complets	Pas de prise en compte de la microstructure Caractéristiques homogénéisées Problèmes liés à l'adoucissement

Prise en compte du caractère hétérogène des maçonneries :

✱ Modèles micromécaniques discrets

Hypothèses : Condition de Signorini et frottement de Coulomb

- Analyse limite [Livesley (1978)]
- Méthode aux éléments distincts [Cundall & Strack (1979)], [Lemos (1997)]

✱ Modèles micromécaniques continus

Interfaces élastoplastiques : Critère de Mohr-Coulomb [Lofti & Shing (1994)], [Lourenco & Rots (1997)]

References :

- ▷ **Livesley, R.K.**, Limit analysis of structures formed from rigid blocks, Int. J. for Numer. Meth. Engng., Vol.12 pp1873-1871, 1996
- ▷ **Cundall, P.A. and Strack, O.D.L.**, A discrete numerical model for granular assemblies, Géotech., Vol.29 pp47-69, 1979
- ▷ **Lemos, J.V.**, Discrete element modelling of the seismic behaviour of stone masonry arches, In Middleton, J. and Pande, G.N. and Krajč B., Computer methods in structural masonry, 4 , pp220-227, 1997
- ▷ **Lofti, H.R. and Shing, P.B.**, Interface model applied to fracture of masonry structures, J. Struct. Engng. A.S.C.E, Vol.120 pp 63-80, 1994
- ▷ **Lourenço, P.B and Rots, J.G.**, Multisurface Interface Model for Analysis of Masonry Structures, J. Eng. Mech. A.S.C.E., Vol.123 pp660-668, 1997



##### Commentaires

Modélisations	Avantages	Inconvénients
discrètes	Contact unilatéral et Frottement Séparation de la matière autorisée Grande collection de blocs	Lois d'interfaces assez pauvres Traitement régularisé
continues	Lois sophistiquées : Plasticité non associée Adoucissement, anisotropie	Elastoplasticité uniquement Difficulté de mise en œuvre Séparation de la matière difficile

✱ Génération des maillages difficile et coûteuse

## 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés

---

### 3.3- Homogénéisation et passage micro-macro

Prise en compte du caractère hétérogène des maçonneries dans la formulation d'un milieu homogène équivalent.

- ✱ Propriétés élastiques des milieux périodiques [Anthoine (1992)]
- ✱ Homogénéisation des milieux à constituants dissipatifs
  - élastoplasticité [Lopez *et al.* (1999)]
  - endommagement fragile [Pegon & Anthoine (1997)], [Luciano & Sacco (1998)]
- ✱ Homogénéisation des milieux microfissurés [Alpa & Monetto (1994)]

#### References :

- ▷ **Anthoine, A.**, Derivation of in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory, *Int. J. Solids Structures*, Vol.32 pp137-163, 1992
- ▷ **Lopez, J. and Oller, E. and Onate, E. and Lubliner, J.**, A homogeneous constitutive model for masonry, *Int. J. for Numer. Meth. Engng.*, Vol. 46, pp1651-1671, 1999
- ▷ **Pegon, P. and Anthoine, A.**, Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening: application to the homogenization of masonry, *Comp. & Struct.*, Vol.64 pp623-642, 1997
- ▷ **Luciano, R. and Sacco, E.**, A damage model for masonry structures, *European J. Mech. A/Solids*, Vol.17 pp285-303, 1998
- ▷ **Alpa, G. and Monetto, I.**, Microstructural model for dry block masonry walls with in plane loadings, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.42 pp1159-1175, 1994



##### Commentaires

Acquis	Difficultés
Propriétés élastiques linéaires (appareil périodique et blocage)  Critères de rupture (appareil périodique )	Pas de loi d'évolution non linéaire homogénéisée  Approximation non linéaire : méthodes de bornes un peu anciennes (Voigt, Reuss, loi des mélanges)

### 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés

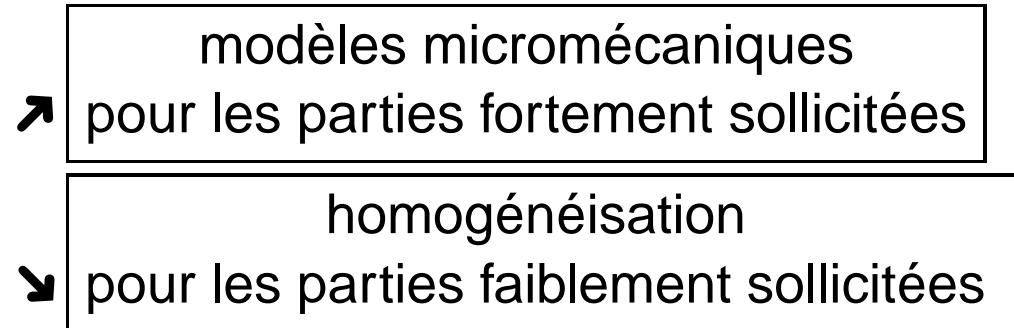
---

#### 3.4- Enseignements de cette étude bibliographique

- Nécessité de tenir compte de l'hétérogénéité et de la microstructure des appareils :

☞ Considérations micromécaniques obligatoires.

Stratégie mixte



→ Développement d'un modèle micromécanique discret :

- ✱ Enrichissement des lois d'interfaces à l'endommagement fragile couplé à la plasticité non associée de type frottement;
- ✱ Développement d'outil de génération de maillage et de détection des contact.

- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ✓ ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- ● 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
  - 4.1 – Représentation discrète des maçonneries
  - 4.2 – Contact unilatéral et frottement sec de Coulomb
  - 4.3 – Un modèle d'adhésion fragile
  - 4.4 – Un modèle de cohésion avec endommagement progressif
  - 4.5 – Pertinence du modèle pour les joints de mortier
- 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- 6 – Applications aux édifices maçonnés
- 7 – Conclusions et perspectives

## 4 – Formulation d'un modèle micromécanique dis





Choix motivé par :

- ✱ l'hétérogénéité forte des maçonneries,
- ✱ la géométrie des phases, en particulier des appareils :
  - Faible épaisseur des joints
  - Structure cristalline
- ✱ le comportement mécanique des phases :
  - Propriétés mécaniques différentes
  - Concentration et localisation des phénomènes de rupture dans les joints (fissures)

Il s'agit d'un granulat grossier ou d'un système multicorps

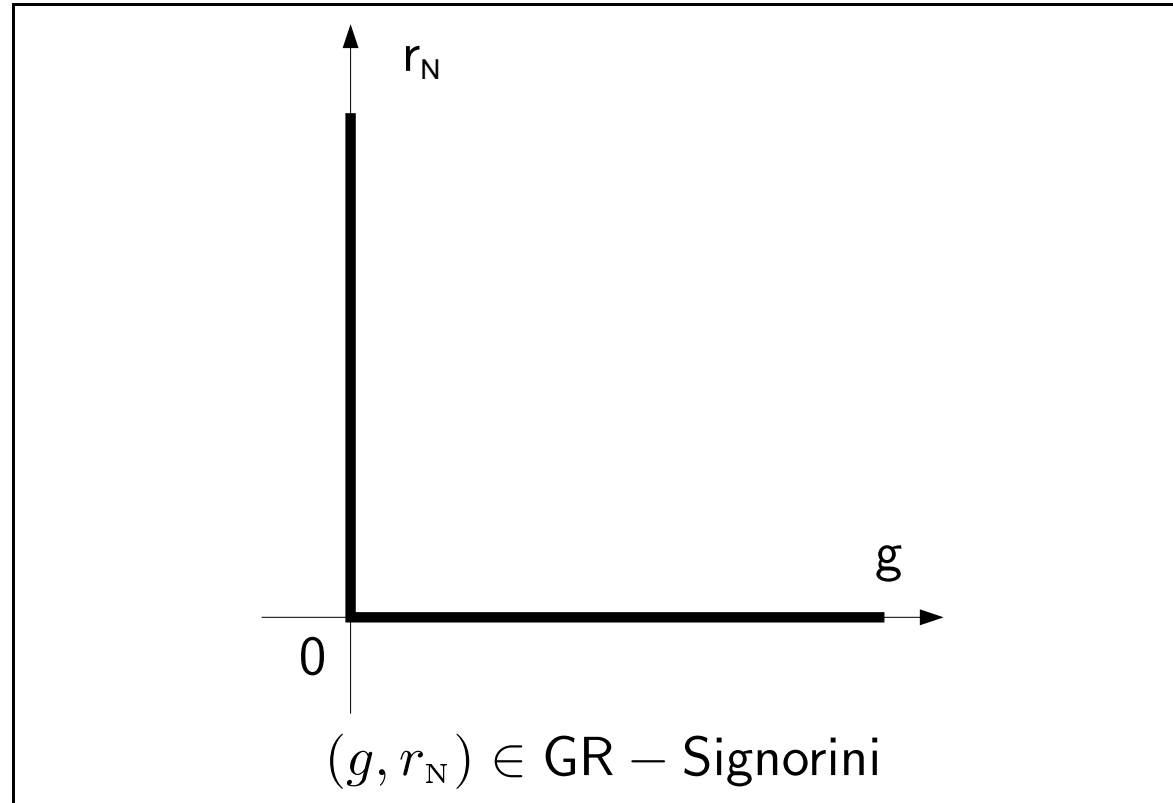
Hypothèses sous-jacentes :

- ✱ Description explicite de la géométrie des éléments
- ✱ Pour les éléments :
  - Hypothèse de continuité de la matière
  - Comportements inélastiques usuels de la Mécanique des Milieux Continus (élasticité, plasticité non associée, endommagement fragile)
- ✱ Pour les joints :
  - Assimilation géométrique et mécanique des joints à des interfaces
  - Localisation de la déformation et prise en compte des phénomènes de rupture dans les joints

#### **Comportement basique des joints peu cohésif (joints vifs et de mortier anciens)**

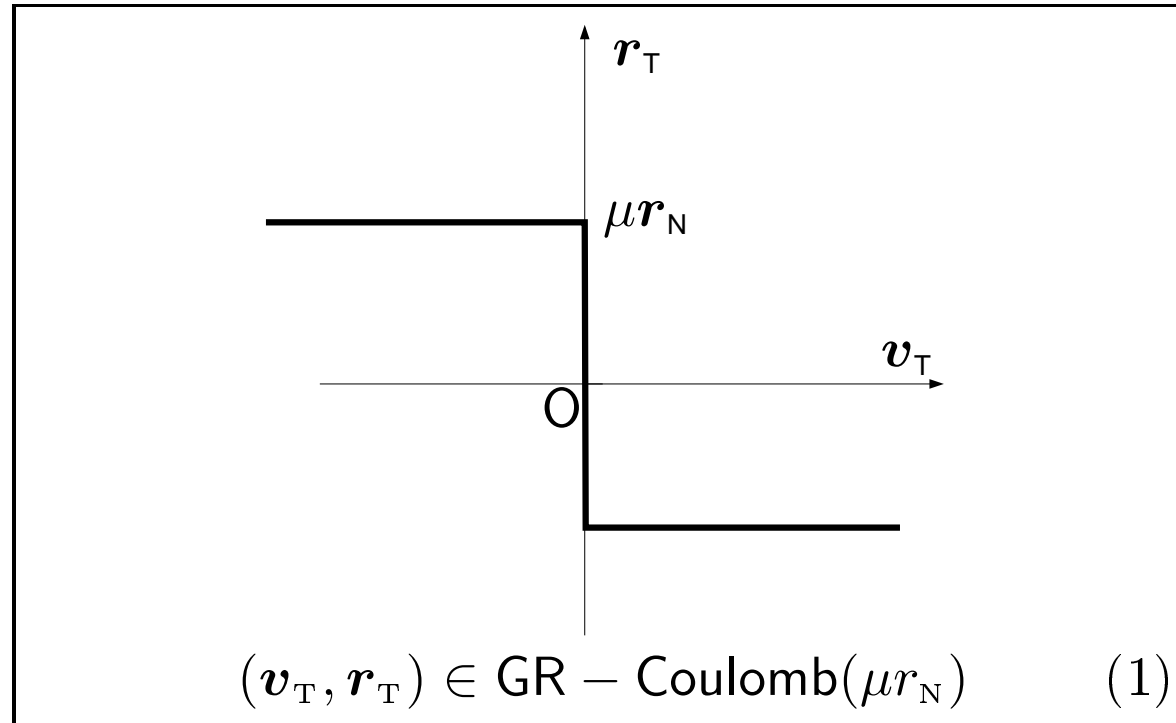
- ✱ Comportement unilatéral normal : Condition de SIGNORINI
  - Impénétrabilité
  - Contact sans cohésion
  
- ✱ Comportement tangent : Frottement sec de COULOMB
  - Frottement à seuil
  - Seuil proportionnel à la pression normale

#### Condition de SIGNORINI



$$g \geq 0, \quad r_N \geq 0, \quad g r_N = 0,$$
$$-r_N \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^+}(g), \quad g \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^+}^*(-r_N)$$

**Frottement sec de Coulomb**



$$\mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}_T\| \frac{\mathbf{r}_T}{\|\mathbf{r}_T\|}, \quad \|\mathbf{r}_T\| \leq \mu r_N, \quad \|\mathbf{v}_T\|(\|\mathbf{r}_T\| - \mu r_N) = 0$$

$$-\mathbf{v}_T \in \partial \Psi_{\mathcal{D}(\mu r_N)}(\mathbf{r}_T) \mathbf{r}_T \in \partial \Psi_{\mathcal{D}(\mu r_N)}^*(-\mathbf{v}_T)$$

## Comportement des joints de mortier cohésif

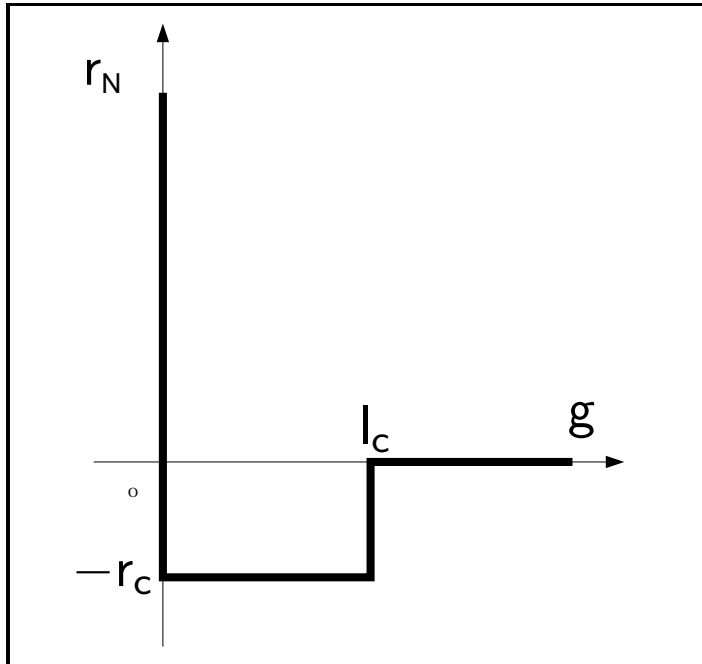
### Enrichissement des graphes de Signorini et Coulomb

- ✱ Modèles d'élasticité d'interfaces
- ✱ Modèles de cohésion fragile
- ✱ Modèles de cohésion avec endommagement progressif

### Modèles dérivés de la condition de Signorini

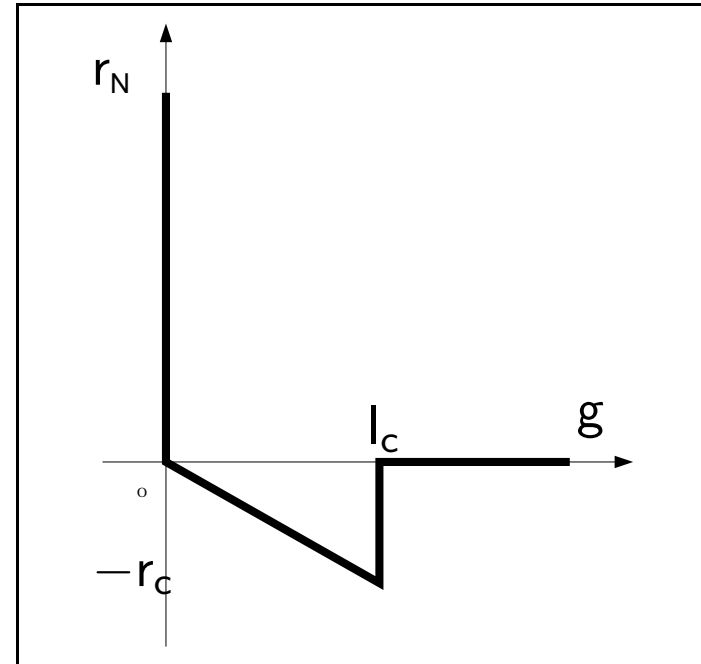
$$(r_N^R + r_c) \geq 0, \quad g \geq 0, \quad (r_N^R + r_c) g = 0$$

$$\tilde{r}_N = r_N + r_c \Leftrightarrow (g, \tilde{r}_N) \in \text{GR} - \text{Signorini}$$



Seuil de résistance constant

$$r_c \text{ constant}$$



Comportement élastique fragile

$$r_c = c_N g$$



### 4.4- Un modèle de cohésion avec endommagement progressif

Le modèle de FRÉMOND-CANGÉMI

✱ Contact unilatéral avec adhésion :

$$(r_N^R + \beta^2 c_N u_N) \geq 0, \quad u_N \geq 0, \quad (r_N^R + \beta^2 c_N u_N) u_N = 0$$

✱ Frottement de COULOMB avec adhésion :

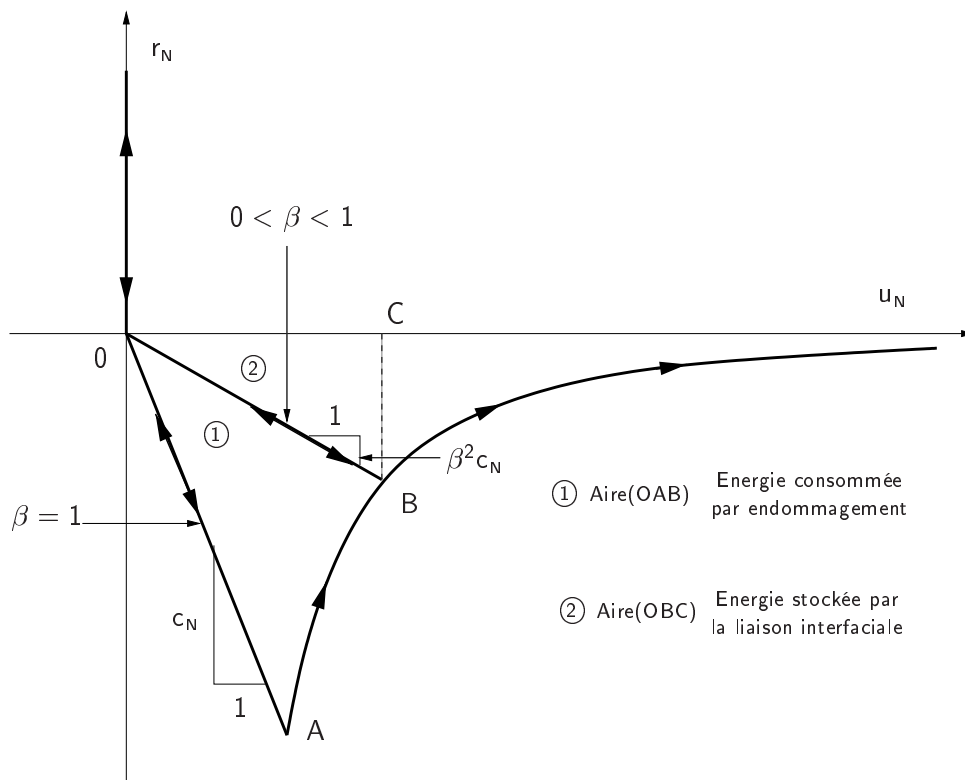
$$\left\{ \begin{array}{l} r_T^R = -\beta^2 c_T \mathbf{u}_T, \quad r_N^R = r_N, \\ \bullet \quad \|\mathbf{v}_T\| > 0, \quad \|\mathbf{r}_T^{\text{IR}}\| = \mu(\beta)(r_N^R + \beta^2 c_N u_N), \quad \frac{\mathbf{r}_T^{\text{IR}}}{\|\mathbf{r}_T^{\text{IR}}\|} = -\frac{\mathbf{v}_T}{\|\mathbf{v}_T\|}, \\ \bullet \quad \|\mathbf{v}_T\| = 0, \quad \|\mathbf{r}_T^{\text{IR}}\| < \mu(\beta)(r_N^R + \beta^2 c_N u_N), \end{array} \right.$$

✱ Evolution de l'intensité d'adhésion :

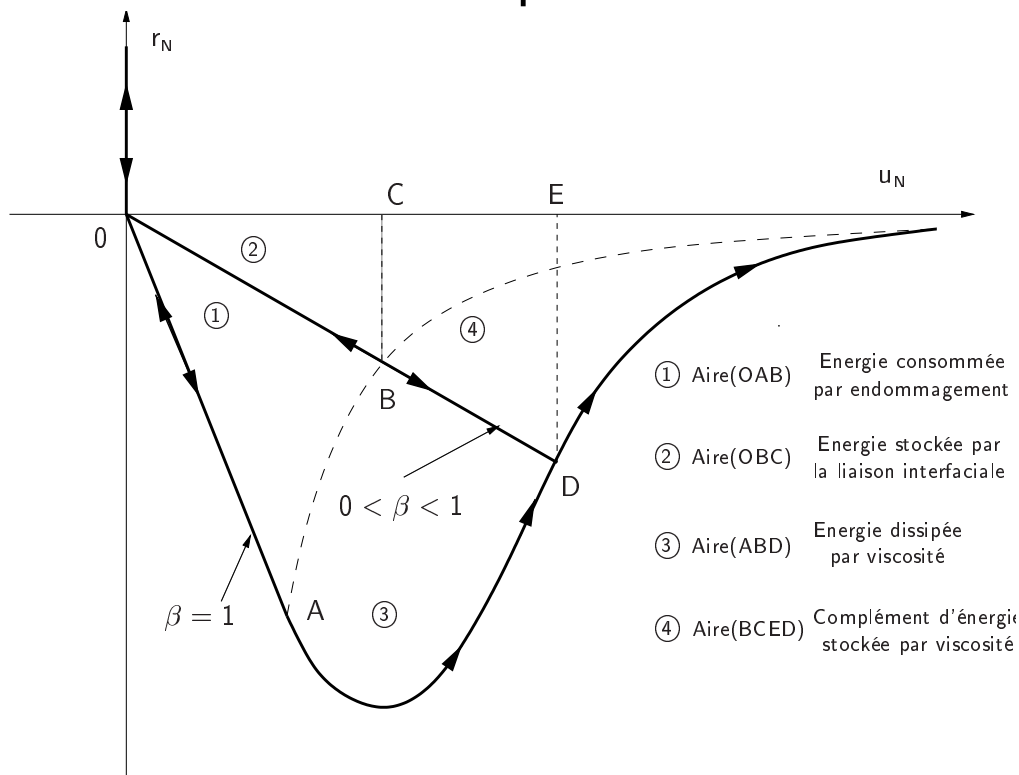
$$\left\{ \begin{array}{l} b\dot{\beta} = - \left[ (w h'(\beta) - \beta(c_N u_N^2 + c_T \|\mathbf{u}_T\|^2) - k \nabla \beta)^- \right]^{(1/p)}, \quad \text{si } \beta \in [0, 1] \\ b\dot{\beta} \leq - \left[ (w h'(\beta) - \beta(c_N u_N^2 + c_T \|\mathbf{u}_T\|^2) - k \nabla \beta)^- \right]^{(1/p)}, \quad \text{si } \beta = 1 \end{array} \right.$$

## 4.4- Interprétation du comportement normal

### Modèle indépendant du temps

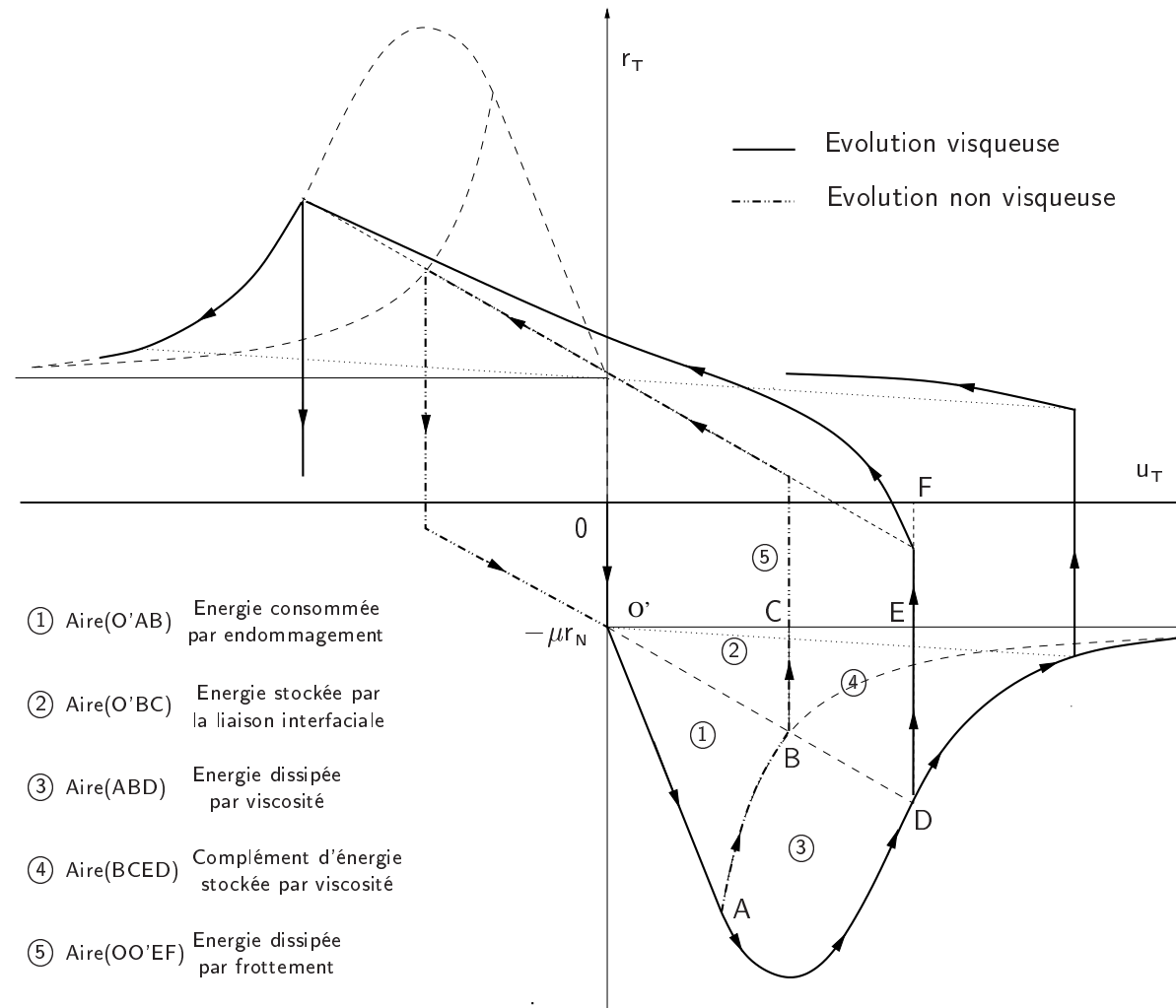


### Modèle visqueux



## 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret

### 4.4- Interprétation du comportement tangent



Points positifs :

- ✱ Dégradation de la cohésion : Endommagement plutôt que plasticité
- ✱ Evolution de l'intensité d'adhésion : Evolution non visqueuse ( $r_N - u_N$ ) hyperbolique
- ✱ Couplage tangent de la plasticité non associée (frottement) et de l'endommagement
- ✱ Coefficient de frottement variable

Améliorations envisageables :

- ✱ Déformation plastique résiduelle en traction
- ✱ Prise en compte de la dilatance(/contractance) des mortiers.

Forme de la courbe importe peu sur la propagation stable des fissures.

- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ✓ ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- ✓ ● 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- ● 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
  - 5.1 – Caractéristiques générales de la méthode
  - 5.2 – Discrétisation spatiale, spécificités de la méthode NSCD
  - 5.3 – Discrétisation temporelle
  - 5.4 – Résolution des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales
  - 5.5 – Commentaires et conclusions
- 6 – Applications aux édifices maçonnés
- 7 – Conclusions et perspectives

## **5 – Résolution numérique : La méthode NSCD**

### 5.1- Caractéristiques générales de la méthode

- ✱ Discrétisation spatiale usuelle des corps volumiques :
  - Méthode aux éléments finis
  - Lois de comportement générales
  
- ✱ Formulation dynamique du problème :
  - Spécificités liées aux mouvements non réguliers
  - Algorithme implicite d'ordre faible
  
- ✱ Traitement non régularisé des lois de contact :
  - Résolution locale des lois de contact
  - Algorithme itératif sur la liste des contacts



- ✱ Structure divisée du milieu : système discrétisé réduit à chaque corps ( $k$ ):

$$M^k(\mathbf{q}^k)\ddot{\mathbf{q}}^k + \mathbf{Q}^k(\dot{\mathbf{q}}^k, \mathbf{q}^k, t) - \mathbf{F}^k(\dot{\mathbf{q}}^k, \mathbf{q}^k, t) = \mathbf{R}^k$$

- ✱ Relation de passage entre variables globales et locales au contact  $\alpha$

$$\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{H}^\alpha(\mathbf{q})\mathbf{r}^\alpha$$

Relations tenant compte de la cinématique et de la discrétisation spatiale des corps.

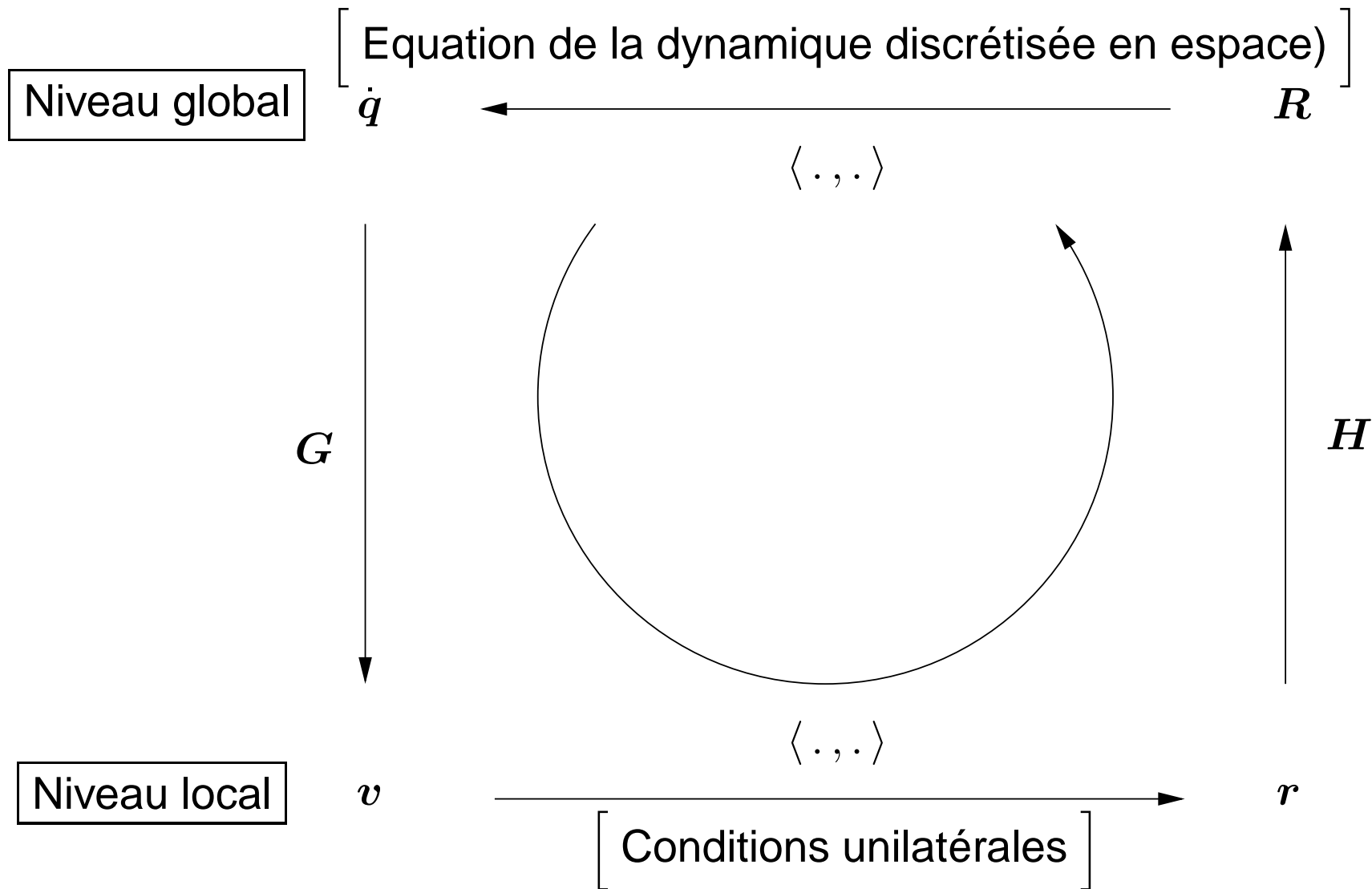


Schéma synoptique de l'approche NSCD, M. JEAN<sup>©</sup>

Esprit de la méthode :

Liaisons unilatérales  $\rightsquigarrow$  Présence de singularités.

- Choix des vitesses comme des fonctions à variations bornées
- Réactions de liaisons comme des impulsions (mesure de Dirac)

→ Ecriture des équations de la dynamique au sens des distributions :

$$M(\mathbf{q})d\mathbf{u} + \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t)dt - \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t)dt = \mathbf{R}_\nu d\nu$$

$d\mathbf{u}$  : mesure différentielle associée à  $\mathbf{u}$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_2^+) - \mathbf{u}(t_1^-)$$

✱ Intégration sur un intervalle  $]t_i, t_{i+1}]$  de longueur  $h$  :

$$\int_{]t_i, t_{i+1}] } \mathbf{M}(\mathbf{q}, t) d\mathbf{u} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) dt = \int_{]t_i, t_{i+1}] } \mathbf{R}_\nu d\nu,$$

$$\mathbf{q}(t_{i+1}) = \mathbf{q}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{R}(t_{i+1}) = \frac{1}{h} \int_{]t_i, t_{i+1}] } \mathbf{R}_\nu d\nu$$

✱ Système différentiel discrétisé par une  $\theta$ - méthode :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}^*)(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) = & -h [(1 - \theta)\mathbf{Q}_i + \theta\mathbf{Q}_{i+1}] \\ & + h [(1 - \theta)\mathbf{F}_i + \theta\mathbf{F}_{i+1}] + h\mathbf{R}_{i+1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i = h [(1 - \theta)\mathbf{u}_i + \theta\mathbf{u}_{i+1}]$$

✱ Relations de passage :

$$\mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{q}^\circ) \dot{\mathbf{q}}_{i+1}, \quad \mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{H}^\alpha(\mathbf{q}^\circ) \mathbf{r}^{i+1}$$

✱ Lois de contact frottant :

- Condition de Signorini discrétisée :

$$(\bar{g}^{i+1}, r_N^{i+1}) \in \text{GR} - \text{Signorini}$$

Choix d'une estimation décalée des intertices

$$\begin{aligned} \bar{g}^i &= g^i + h(1 - \theta)v_N^i \\ \bar{g}^{i+1} &= g^{i+1} + h(1 - \theta)v_N^{i+1}. \end{aligned}$$

- Condition de Signorini en vitesse :

$$(v_N^{i+1}, r_N^{i+1}) \in \text{GR} - \text{Signorini}$$

- Frottement de Coulomb :

$$(\mathbf{v}_T^{i+1}, \mathbf{r}_T^{i+1}) \in \text{GR} - \text{Coulomb}(\mu r_N^{i+1})$$

### 5.4- Résolution des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales

✱ Prise en compte de non linéarités “volumiques” (Newton-Raphson):

$$(\mathbf{M}^k + h\theta\mathbf{C}_t^k + h^2\theta^2\mathbf{K}_t^k)(\mathbf{u}_{i+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{i+1}^k) = \mathcal{R}(\mathbf{u}_{i+1}^k)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{u}_{i+1}^k) &= -\mathbf{M}^k(\mathbf{u}_{i+1}^k - \mathbf{u}_i) - h \left[ (1 - \theta)\mathbf{Q}_i + \theta\mathbf{Q}_{i+1}^k \right] \\ &\quad + h \left[ (1 - \theta)\mathbf{F}_i + \theta\mathbf{F}_{i+1}^k \right] + h\mathbf{R}_{i+1}^k \\ \mathbf{q}_{i+1}^{k+1} &= \mathbf{q}_i + h(1 - \theta)\mathbf{u}_i + h\theta\mathbf{u}_{i+1}^{k+1}\end{aligned}$$

✱ Système linéarisé :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^k &= (\hat{\mathbf{M}}^k)^{-1} = (\mathbf{M}^k + h\theta\mathbf{C}_t^k + h^2\theta^2\mathbf{K}_t^k)^{-1} \\ \mathbf{u}_{i+1}^{k+1} &= \mathbf{u}_{free}^{k+1} + \mathbf{W}^k \left[ h\mathbf{R}_{i+1}^k \right] \\ \mathbf{q}_{i+1}^{k+1} &= \mathbf{q}_i + h(1 - \theta)\mathbf{u}_i + h\theta\mathbf{u}_{i+1}^{k+1}\end{aligned}$$

### 5.4- Résolution des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales

- ✱ Résolution locale des équations :  
Opération de réduction (condensation) grâce aux opérateurs de passage aux variables locales :

$$\mathbf{w}^{\alpha\beta} = \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{q}^k) \mathbf{W}^k \mathbf{H}^\beta(\mathbf{q}^k) \quad (2)$$

$$(\mathbf{v}_{free}^\alpha)^{k+1} = \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{q}^k) \mathbf{u}_{free}^{k+1} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^\alpha = \mathbf{v}_{free}^\alpha + \underbrace{\sum_{\beta \neq \alpha}^{\chi} \mathbf{w}^{\alpha\beta} \mathbf{h} \mathbf{r}^\beta + \mathbf{w}^{\alpha\alpha} \mathbf{h} \mathbf{r}^\alpha}_{\mathbf{v}_{locfree}^\alpha} \quad (4)$$

- ✱ Intersection de graphes réalisée pour chaque contact  $\alpha$  :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{locfree} + \mathbf{w} \mathbf{h} \mathbf{r} \quad (5)$$

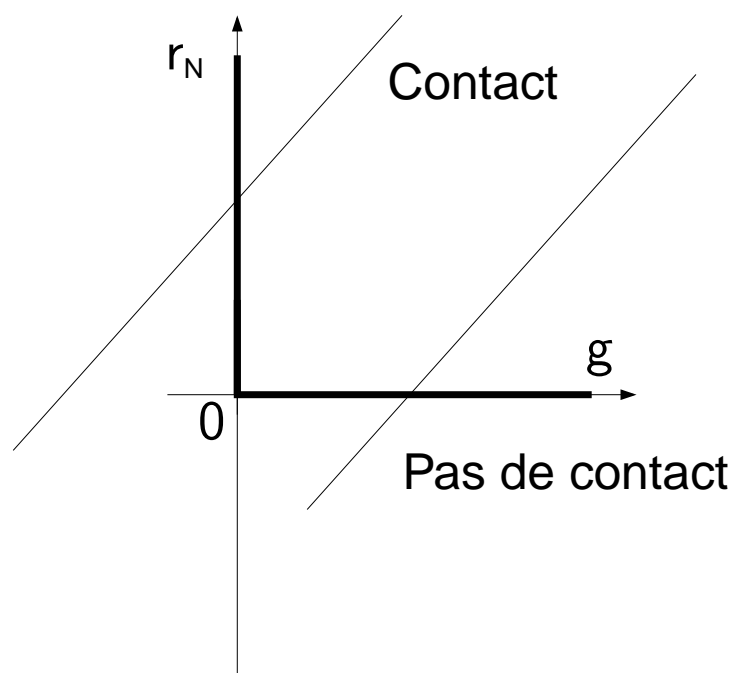
$$(\mathbf{v}_N, \mathbf{r}_N) \in \text{GR} - \text{Signorini} \quad (6)$$

$$(\mathbf{v}_T, \mathbf{r}_T) \in \text{GR} - \text{Coulomb}(\mu \mathbf{r}_N) \quad (7)$$

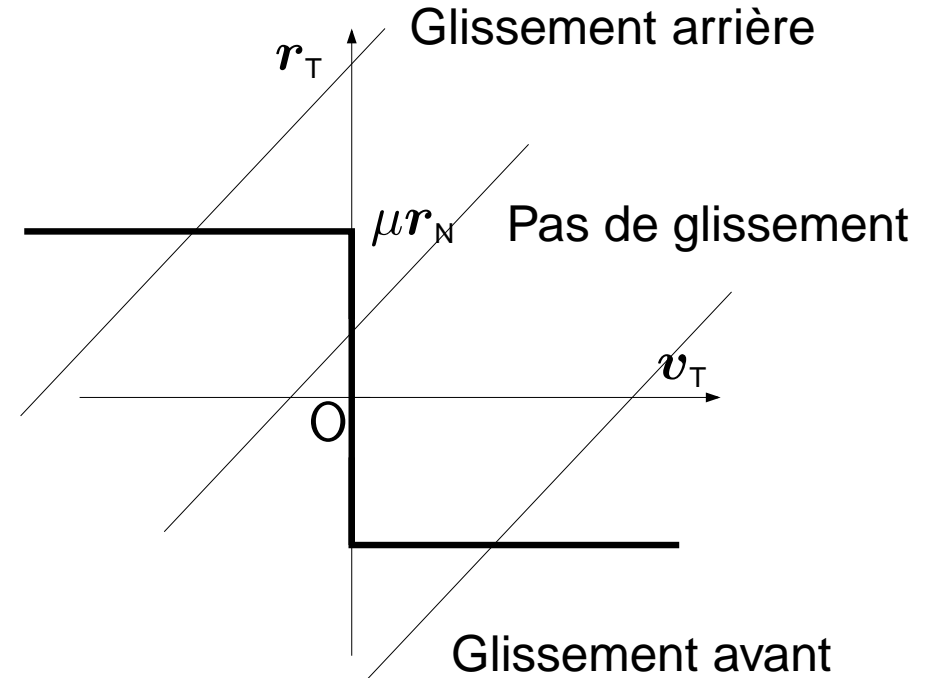
## 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD

### 5.4- Résolution des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales

- ✱ Exemple de résolution dans le cas d'un contact 2D :



Condition de SIGNORINI



Graphe de COULOMB

- ✱ Solution 3D obtenue par un algorithme de Newton généralisé
- ✱ Itérations de ces solutions jusqu'à convergence



Particularités concernant les modèles de cohésion :

- ✱ Introduction du changement de variables :

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{adh} \quad (8)$$

- ✱ Evaluation du terme  $\mathbf{r}_{adh}$

- ✱ Modification de la vitesse libre :

$$\mathbf{v}^\alpha = \underbrace{\mathbf{v}_{locfree}^\alpha - \mathbf{w}^{\alpha\alpha} h(\mathbf{r}_{adh}^\alpha)}_{\tilde{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha} + \mathbf{w}^{\alpha\alpha} h(\tilde{\mathbf{r}}^\alpha) \quad (9)$$

- ✱ Résolution identique des graphes :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^\alpha &= \tilde{\mathbf{v}}_{locfree}^\alpha + \mathbf{w}^{\alpha\alpha} h(\tilde{\mathbf{r}}^\alpha) \\ (\mathbf{v}_N, \tilde{\mathbf{r}}_N) &\in \text{GR} - \text{Signorini} \\ (\mathbf{v}_T, \tilde{\mathbf{r}}_T) &\in \text{GR} - \text{Coulomb}(\mu\tilde{\mathbf{r}}_N), \end{aligned} \quad (10)$$

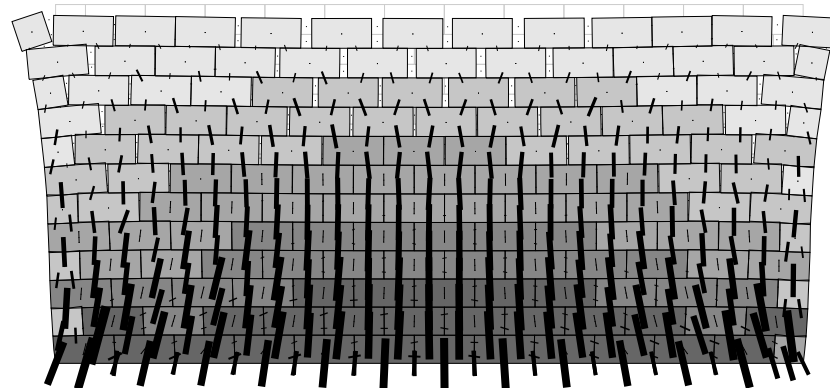
- ✱ Prise en compte de la structure discrète du milieu :
  - Efficacité dans la manipulation des objets
  - Traitement de grandes collections de blocs
- ✱ Introduction de modèles dérivés de Signorini et Coulomb  
élasticité, cohésion, endommagement, plasticité, *etc.*...
- ✱ Algorithme ouvert permettant d'autres perfectionnements

- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ✓ ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- ✓ ● 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- ✓ ● 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- ● 6 – Applications aux édifices maçonnés
  - 6.1 – Obtention d'un équilibre
  - 6.2 – Tests de validation sur des structures académiques
  - 6.3 – Application à l'étude des édifices monumentaux
  - 6.4 – Conclusions
- 7 – Conclusions et perspectives

## **6 – Applications aux édifices maçonnés**

#### Position du problème

- ✱ Formulation dynamique nécessaire pour déterminer les modes rigides
- ✱ Effet de la dynamique sur une position d'équilibre :

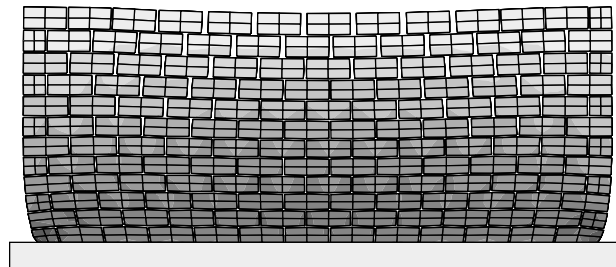
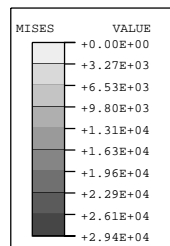


Réactions et déformée à l'équilibre, (amplification= 10000)

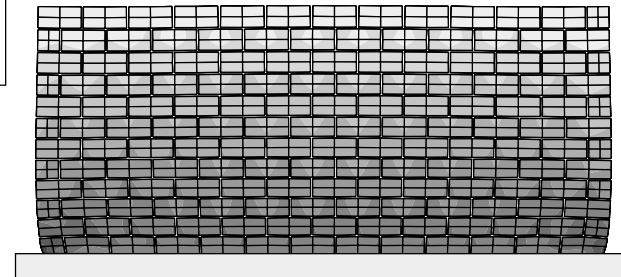
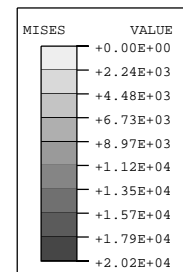
#### Méthodes proposées :

- ✱ Conditions aux limites artificielles
- ✱ Régularisation dynamique et viscosité numérique
- ✱ Régularisation par décomposition en valeurs singulières des opérateurs tangents
- ✱ Amortissement brutal - Amortissement linéaire par annulation de la vitesse

Exemple d'une murette 3D sous gravité (amplification=2.5E+06)

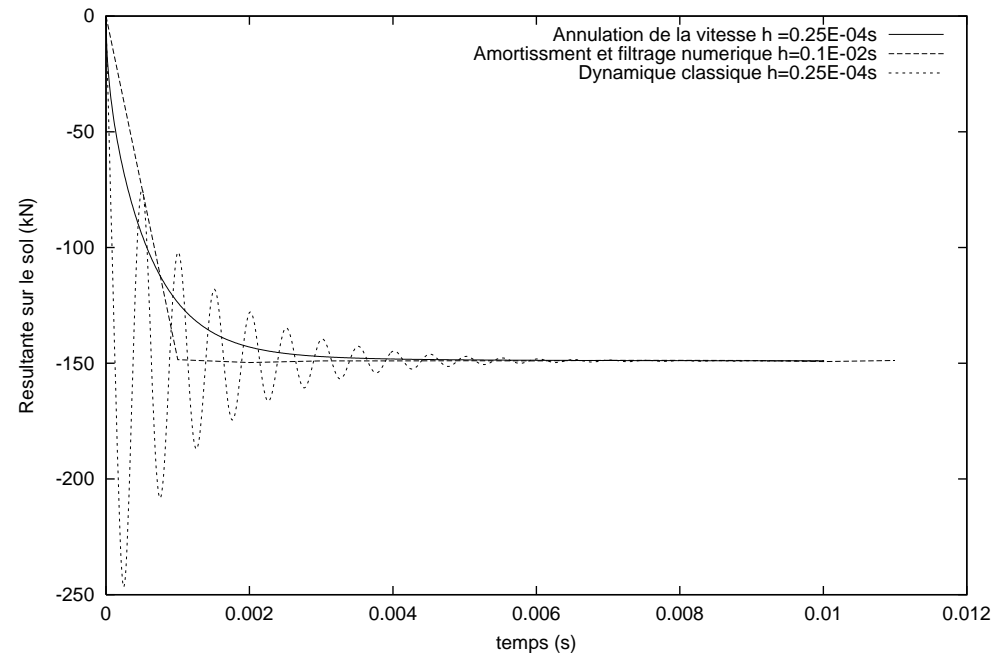


(a) Contraintes de von MISES - Dynamique standard



(b) Contraintes de von MISES - Annulation de la vitesse

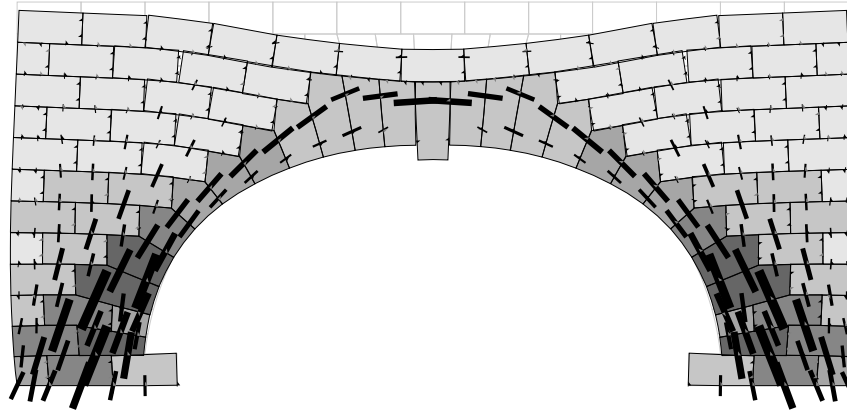
Exemple d'une murette 3D sous gravité (amplification=2.5E+06)



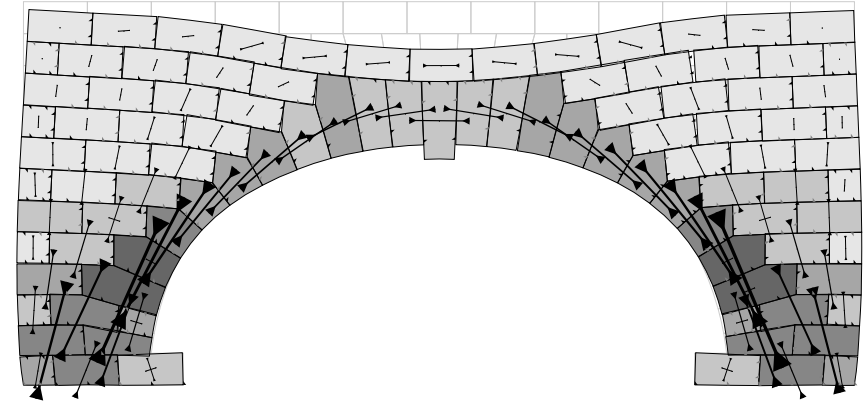
Résultante sur le sol en fonction du temps



#### Cas des arches et des arcs boutants



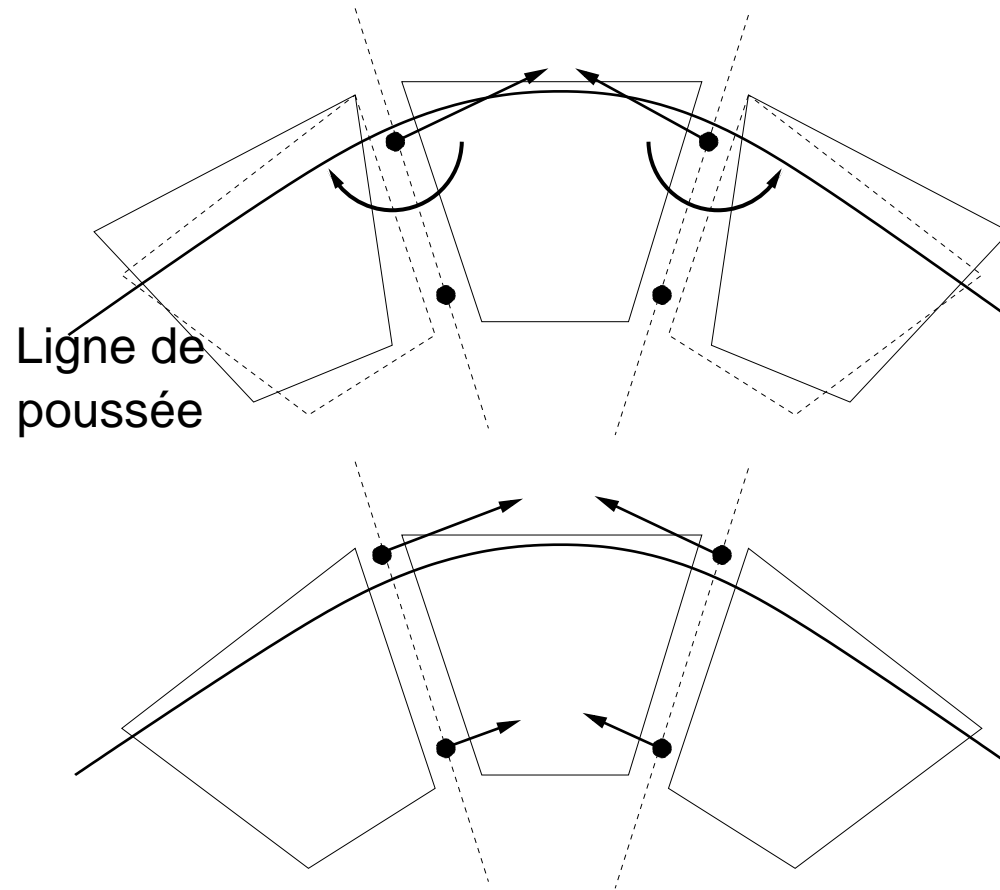
(c) Réactions



(d) Contraintes principales au centre des blocs

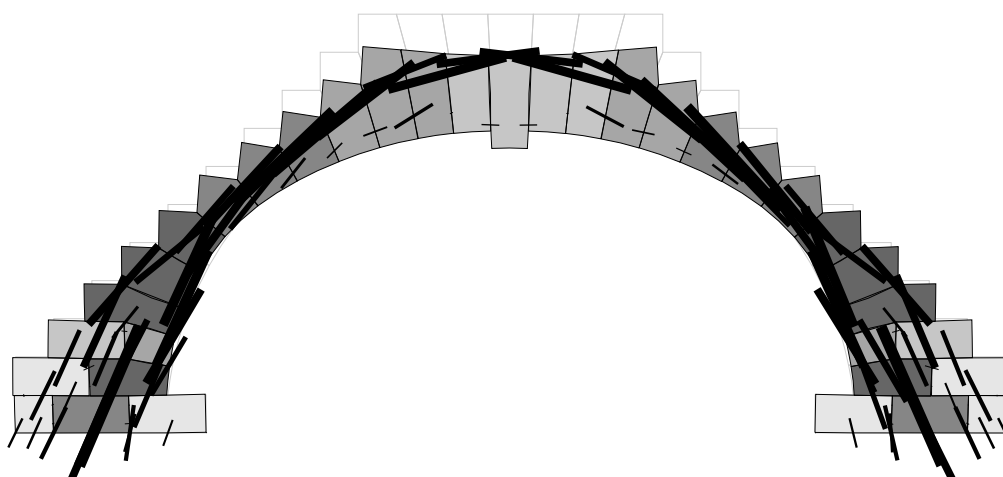
Déformée d'un arc sous gravité, ( $\times 30000$ )

#### Sensibilité aux positionnements des points de contact

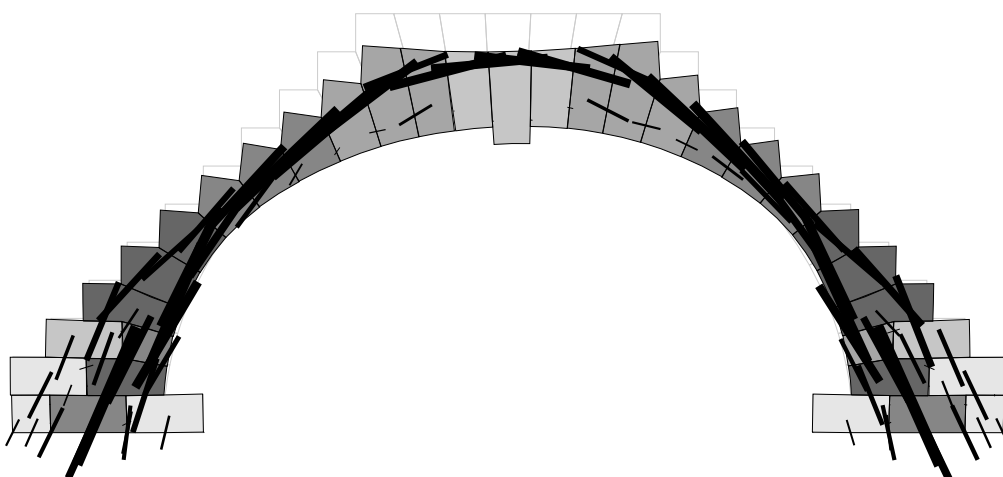


Ligne de poussée et placement des points de contact

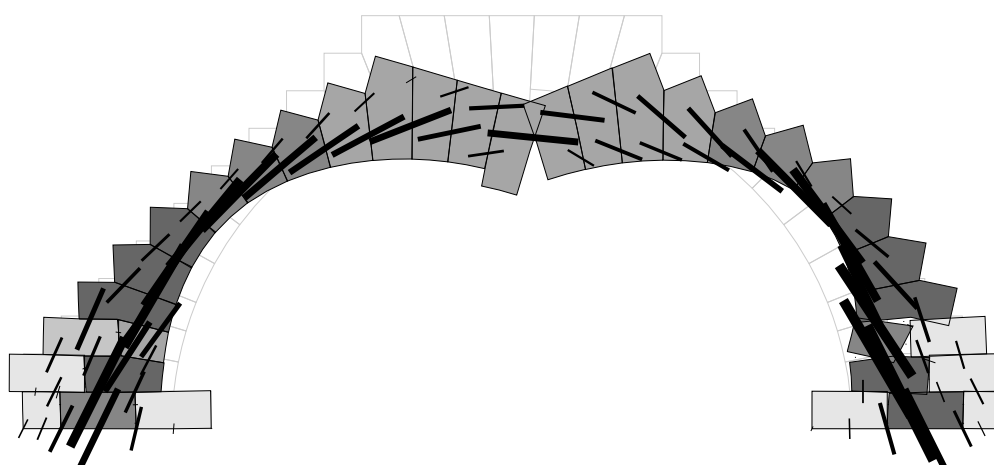
## 6.2- Tests de validation sur des structures académiques



Equilibre pour  $\xi = 0.95$ , ( $\times 30000$ )



Equilibre pour  $\xi = 0.75$ , ( $\times 30000$ )

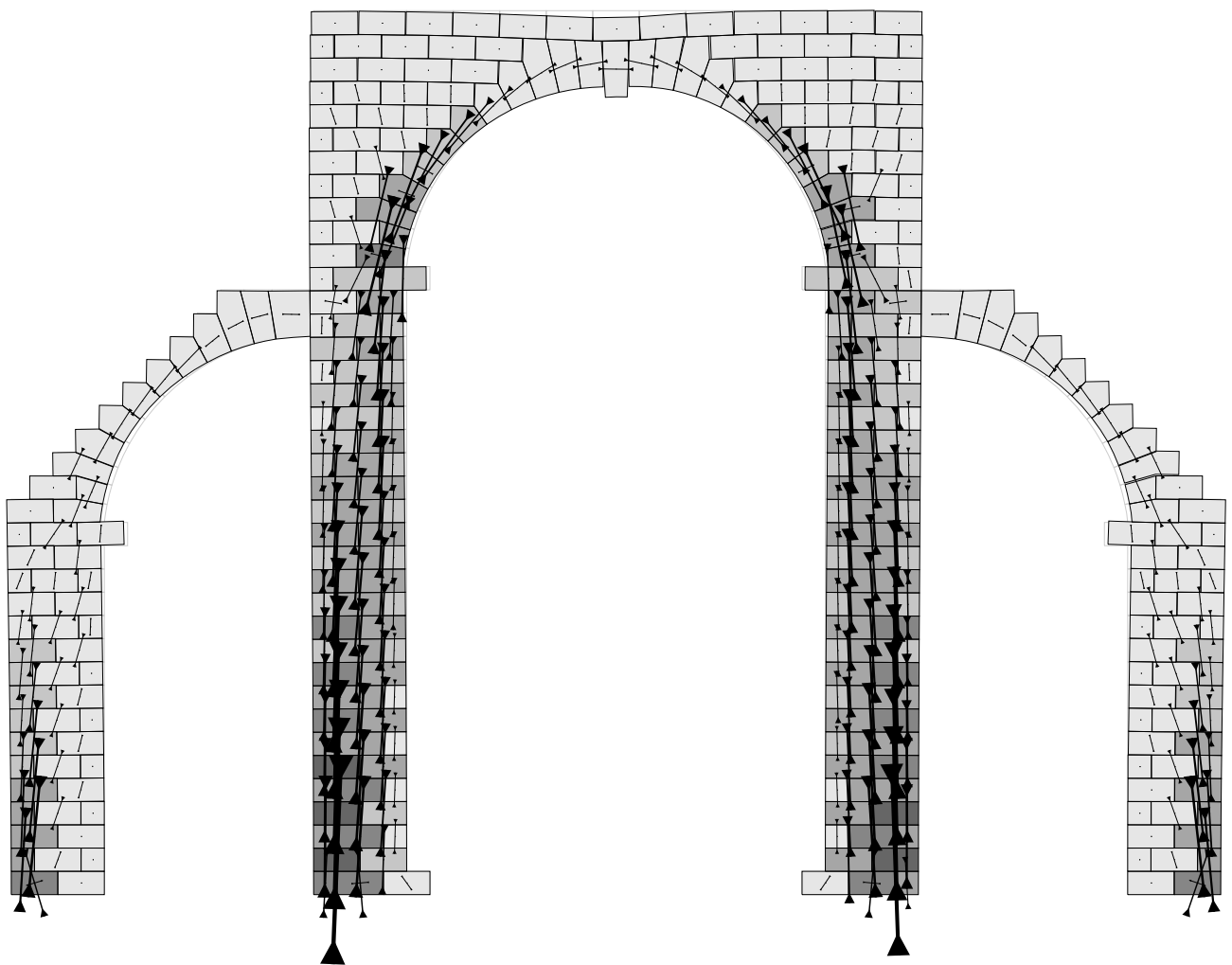


Développement d'un mécanisme pour  $\xi = 0.50$ , ( $\times 30000$ )

Effet du positionnement des points de contact

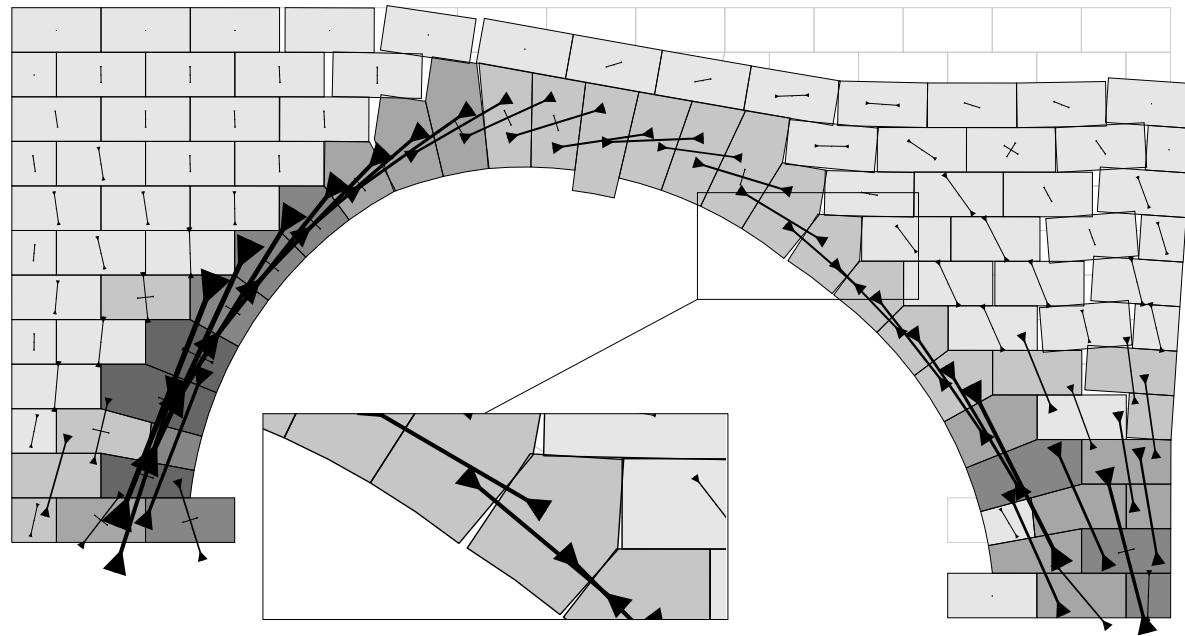
## 6.2- Tests de validation sur des structures académiques

### Etude de l'arc-boutement



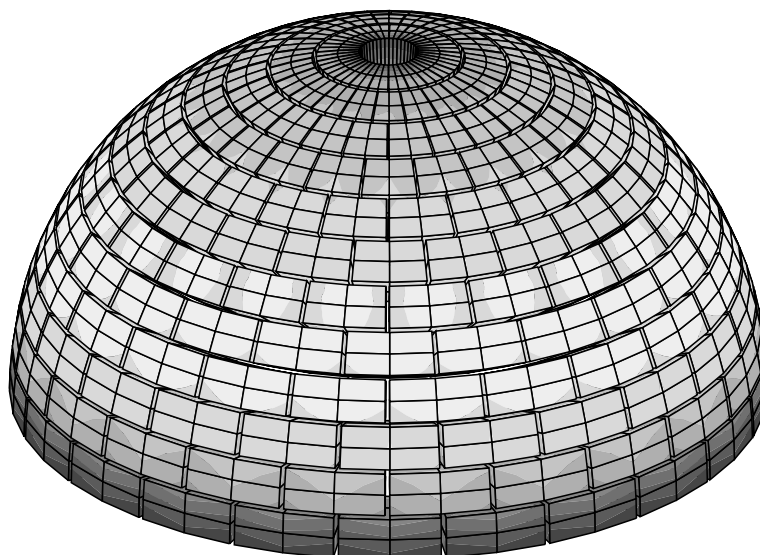
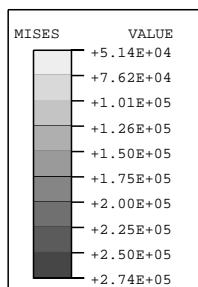
Contraintes principales et déformée d'un portique avec arcs-boutants, ( $\times 300$ )

#### Etude d'un affaissement

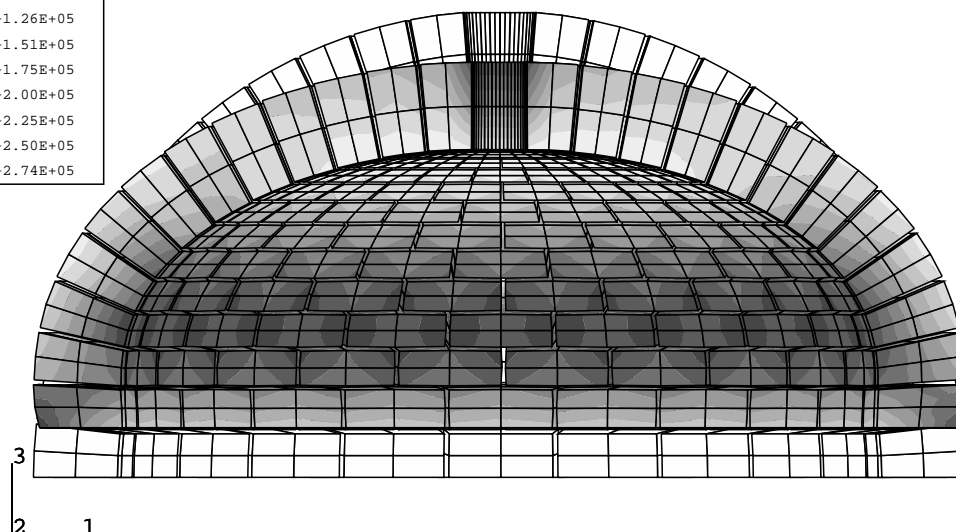
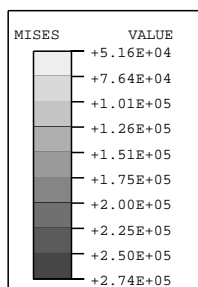


Contraintes après un affaissement de sol,  $-4$  cm, ( $\times 10$ )

## 6.2- Tests de validation sur des structures académiques



Contraintes de VON MISES

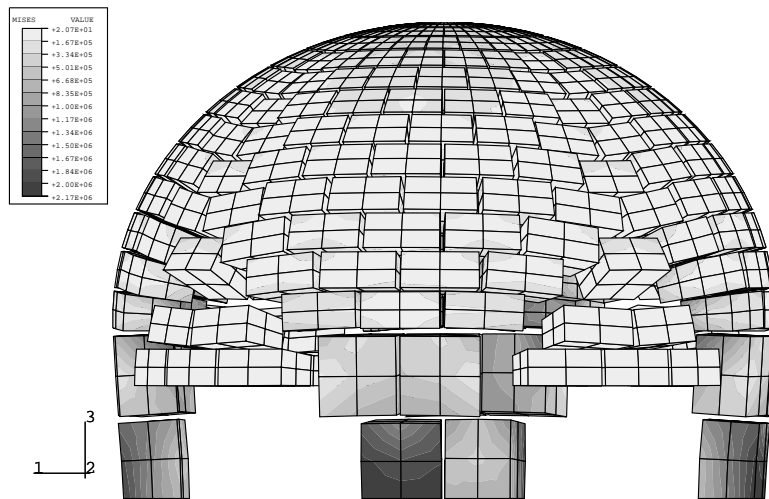


Contraintes de VON MISES dans un plan de coupe ( $\times 2.5 \cdot 10^6$ )

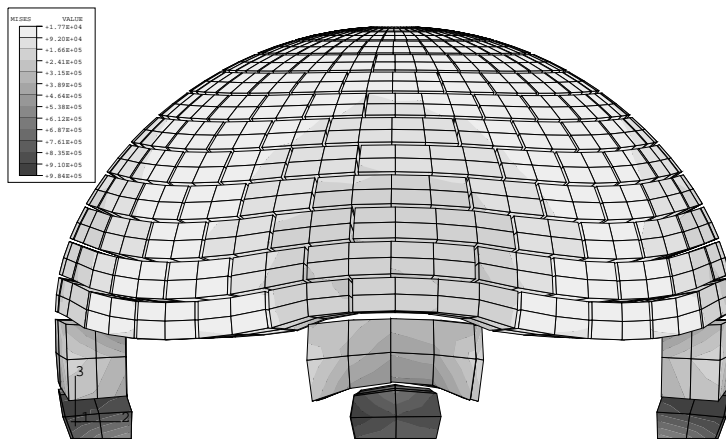
Dôme circulaire soumis à la gravité

## 6.2- Tests de validation sur des structures académiques

### Tests des modèles de cohésion



Modèle d'interface sans cohésion

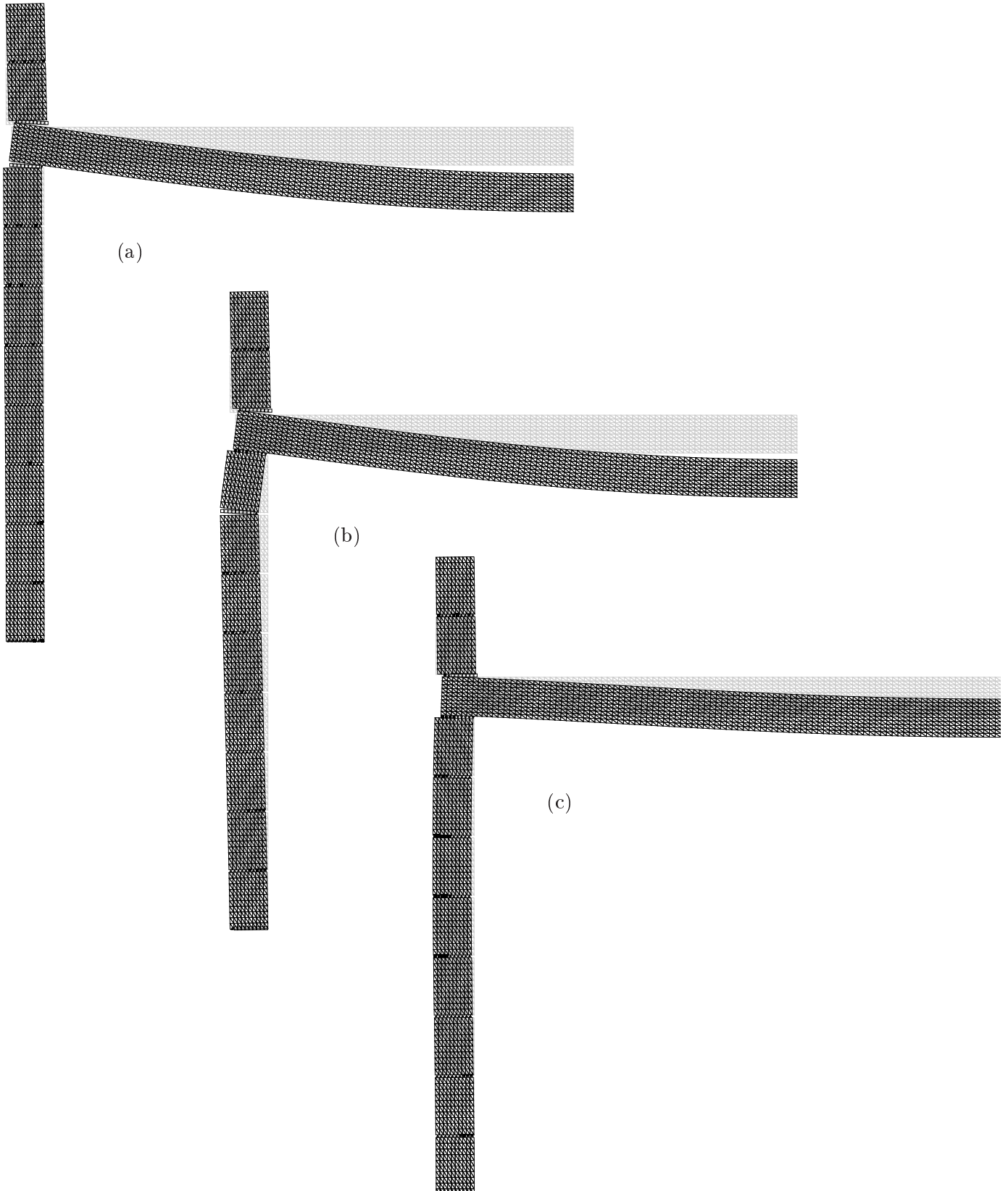


Modèle d'interface avec cohésion fragile ( $\times 2.5 \cdot 10^6$ )

### Dôme sur piliers soumis à la gravité

## 6.2- Tests de validation sur des structures académiques

### Mécanismes de fissuration dus à la rotation des planchers





### 6.3- Application à l'étude des édifices monumentaux

- ✱ Difficultés techniques supplémentaires :
  - Génération des maillages
    - Stéréophotogrammétrie numérique
  
  - Détection et positionnement des contacts
    - Méthodes en plusieurs étapes
      - Tri grossier de proximité des blocs
      - Détection entre polyèdres convexes
      - Introduction d'un plan séparateur au contact

## 6 – Applications aux édifices maçonnés

### 6.3- Application à l'étude des édifices monumentaux



Vues extérieures Sud-est, photographies PIERRE DRAP



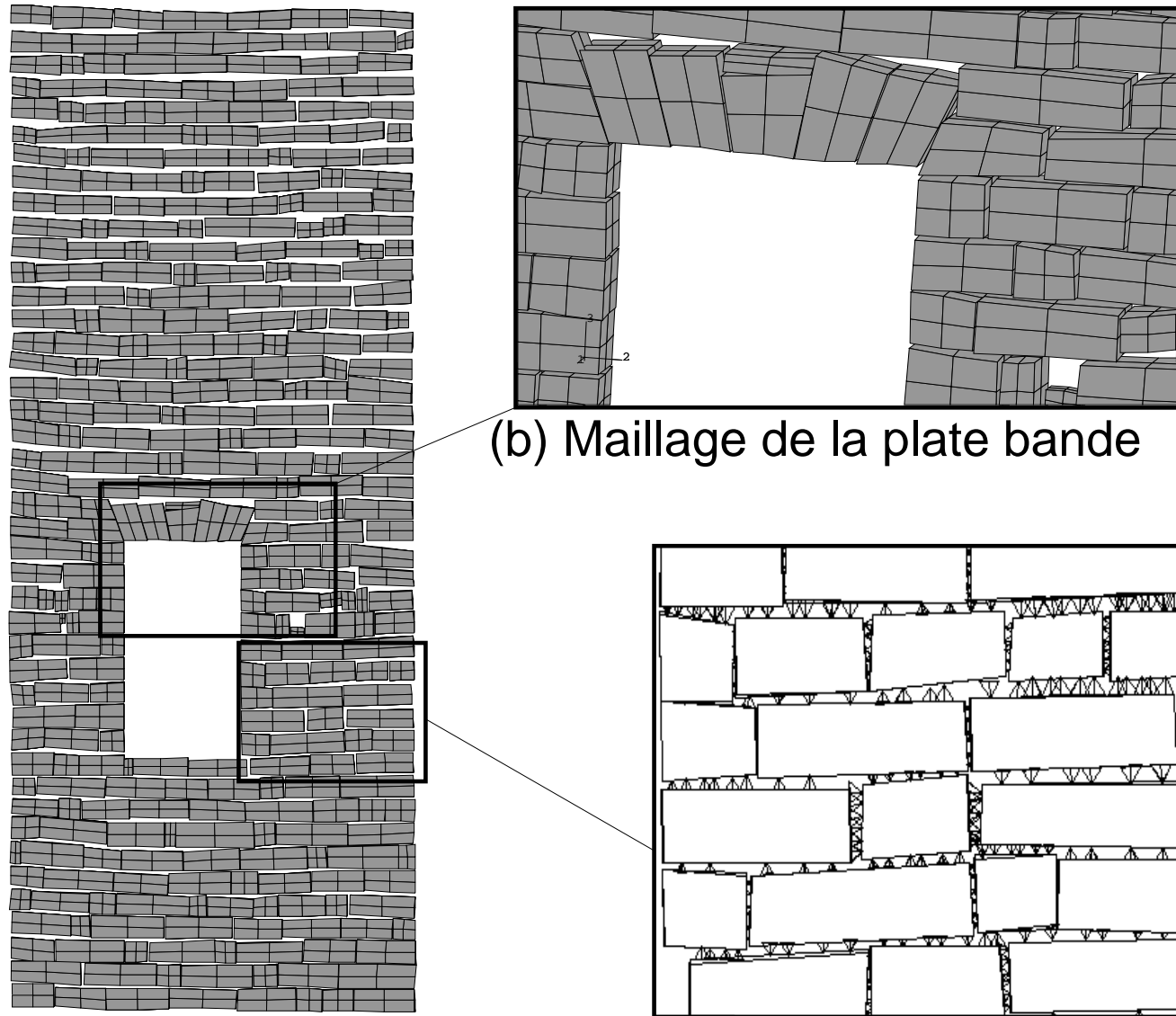
Détail de la baie, face Ouest

Le Palais des Papes et la Tour Saint Laurent

### *6.3- Application à l'étude des édifices monumentaux*

## 6 – Applications aux édifices maçonnés

$0.1\text{mm}=0.482150.1\text{mm}$



(a) Maillage en éléments hexaédriques (c) Détection des contacts

Figure 1: Illustrations des opérations de maillage et de détection des contacts

Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés

## 6 – Applications aux édifices maçonnés

---

$0.1\text{mm}=0.482150.1\text{mm}$





- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ✓ ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- ✓ ● 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- ✓ ● 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- ✓ ● 6 – Applications aux édifices maçonnés
- ● 7 – Conclusions et perspectives

## **7 – Conclusions et perspectives**



- ✓ ● 1 – Contexte de l'étude
- ✓ ● 2 – Les maçonneries : typologie et comportement
- ✓ ● 3 – Synthèse des travaux déjà réalisés
- ✓ ● 4 – Formulation d'un modèle micromécanique discret
- ✓ ● 5 – Résolution numérique : La méthode NSCD
- ✓ ● 6 – Applications aux édifices maçonnés
- ✓ ● 7 – Conclusions et perspectives