



**HAL**  
open science

# Optimisation vibroacoustique de structures amorties par des traitements en élastomère

Lionel Zoghaib

► **To cite this version:**

Lionel Zoghaib. Optimisation vibroacoustique de structures amorties par des traitements en élastomère. Acoustique [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2006. Français. NNT: . tel-00164596

**HAL Id: tel-00164596**

**<https://theses.hal.science/tel-00164596>**

Submitted on 21 Jul 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)

THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II**

*Discipline : ACOUSTIQUE*

présentée et soutenue publiquement

par

**Lionel Zoghaib**

le 22 décembre 2006

---

**OPTIMISATION VIBROACOUSTIQUE DE STRUCTURES  
AMORTIES PAR DES TRAITEMENTS EN ÉLASTOMÈRE**

---

**Directeur et Codirecteurs de thèse :**

Pierre-Olivier Mattei

Adnane Boukamel

Bruno Cochelin

**JURY**

MM.	Nacer	HAMZAOUI	Rapporteur
	Lucien	LAIARINANDRASANA	Rapporteur
	Claude	DEPOLLIER	Examineur
	El-Mostafa	DAYA	Examineur
	Patrick	CHABRAND	Examineur
	Pierre	LAMY	Invité



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Réduction du bruit et des vibrations</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Un aperçu des technologies actuelles . . . . .	6
1.2.1	Les contrôles actif et passif . . . . .	6
1.2.1.1	Le contrôle passif . . . . .	6
1.2.1.2	Le contrôle actif et semi-actif . . . . .	7
1.2.2	Le contrôle par traitement externe . . . . .	8
1.3	Quelques généralités sur l'amortissement . . . . .	9
1.3.1	L'amortissement en physique . . . . .	9
1.3.1.1	La physique des matériaux . . . . .	9
1.3.1.2	L'interférométrie . . . . .	10
1.3.1.3	L'acoustique instrumentale . . . . .	10
1.3.2	Les matériaux amortissants . . . . .	11
1.3.3	L'amortissement non-linéaire . . . . .	13
1.3.4	La mesure de l'amortissement . . . . .	14
1.3.4.1	Les mesures classiques . . . . .	14
1.3.4.2	Les mesures basées sur le problème aux valeurs propres matriciel . . . . .	15
1.4	Etude d'un traitement spécifique . . . . .	17
1.4.1	Des patches en polymère contraint . . . . .	17
1.4.2	Une première expérience . . . . .	17
1.4.3	Analyse des résultats . . . . .	21
1.5	La modélisation de l'amortissement . . . . .	25
1.5.1	Une classification possible des amortissements . . . . .	25
1.5.2	Les difficultés de la modélisation de l'amortissement . . . . .	26
1.5.3	L'amortissement aux limites du domaine . . . . .	27
1.5.3.1	Quelques références bibliographiques . . . . .	28
1.5.3.2	Le choix du fil . . . . .	28
1.5.3.3	Un amortissement négligé . . . . .	30
1.6	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Résolution d'un problème de dynamique amortie</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	34
2.2	La formulation du problème . . . . .	34
2.2.1	La formulation variationnelle classique . . . . .	34
2.2.1.1	Les formulations variationnelles en viscoélasticité . . . . .	35
2.2.1.2	Formulation variationnelle avec les équations adjointes . . . . .	35

2.2.2	Formulation variationnelle retenue . . . . .	36
2.2.2.1	Construction du champ adjoint . . . . .	37
2.2.2.2	La condition de biorthogonalité . . . . .	39
2.2.2.3	Les équations fréquentielles . . . . .	40
2.2.2.4	Les équations de Galerkin . . . . .	42
2.3	Le problème spatial . . . . .	44
2.3.1	Modélisation du champ cinématique . . . . .	44
2.3.1.1	Modèles cinématiques rencontrés . . . . .	44
2.3.1.2	Modèle cinématique et numérique retenu . . . . .	45
2.3.2	Description spatiale de l'amortissement . . . . .	48
2.3.2.1	Introduction . . . . .	48
2.3.2.2	L'amortissement homogène . . . . .	50
2.3.2.3	Extensions et limites du modèle d'amortissement homogène . . . . .	51
2.4	Résolution du problème dans le domaine de Laplace . . . . .	52
2.4.1	Inversion de l'opérateur . . . . .	53
2.4.1.1	Résolution directe . . . . .	53
2.4.1.2	Résolution modale . . . . .	53
2.4.2	Traitement numérique de l'amortissement non homogène . . . . .	54
2.4.2.1	Méthode par perturbation . . . . .	54
2.4.2.2	La méthode MSE . . . . .	55
2.4.2.3	Méthode de l'espace des phases . . . . .	56
2.4.2.4	Méthode introduisant des coordonnées de dissipation . . . . .	57
2.4.3	Traitement numérique de la dépendance fréquentielle . . . . .	58
2.5	Modes de résonance et réponse temporelle . . . . .	58
2.5.1	Les modes de résonance . . . . .	58
2.5.2	La solution temporelle . . . . .	59
2.5.2.1	La nature des solutions propres . . . . .	59
2.5.2.2	Le théorème des résidus . . . . .	60
2.5.3	Une solution fréquentielle alternative . . . . .	62
2.6	Réponse fréquentielle : comparaison numérique . . . . .	62
2.6.1	Le cas peu amorti . . . . .	63
2.6.2	Le cas très amorti . . . . .	65
2.6.3	Comparaison des différentes méthodes de calcul : étude de la puissance acoustique . . . . .	68
2.7	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	68
<b>3</b>	<b>La résolution numérique du problème aux valeurs propres</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.2	Diagonalisation . . . . .	72
3.2.1	Notions sur la diagonalisation . . . . .	72
3.2.2	Calcul de la base adjointe . . . . .	73
3.2.3	Vérification pratique du découplage . . . . .	74
3.3	Le problème aux valeurs propres . . . . .	74
3.3.1	Introduction . . . . .	74
3.3.2	Méthodes calculant un seul couple propre à la fois . . . . .	75
3.3.3	Méthodes calculant plusieurs couples propres à la fois . . . . .	76
3.3.3.1	L'analyse de Rayleigh-Ritz . . . . .	76

3.3.3.2	La méthode de condensation statique . . . . .	76
3.3.3.3	La méthode CMS . . . . .	76
3.3.3.4	La méthode d'itération par sous-espace . . . . .	77
3.3.3.5	La méthode de Lanczos . . . . .	77
3.3.3.6	La méthode d'Arnoldi . . . . .	78
3.3.4	Méthodes de calcul par transformation . . . . .	78
3.3.4.1	La méthode de Jacobi . . . . .	78
3.3.4.2	L'algorithme QR . . . . .	79
3.3.4.3	Les méthodes de tridiagonalisation . . . . .	79
3.3.5	Le choix d'un algorithme . . . . .	79
3.4	Inversion d'une matrice symétrique complexe . . . . .	80
3.4.1	Conditionnement du problème d'inversion . . . . .	80
3.4.2	Les méthodes itératives . . . . .	82
3.4.3	Les méthodes directes . . . . .	82
3.5	Comparaison numérique . . . . .	83
3.5.1	Comparaison des différents solveurs aux valeurs propres . . . . .	83
3.5.2	Le solveur aux valeurs propres à résolution directe . . . . .	84
3.6	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Amortissement par couplage</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Amortissement thermoélastique . . . . .	90
4.2.1	La thermoélasticité . . . . .	91
4.2.1.1	Base physique et thermodynamique . . . . .	91
4.2.1.2	Les équations du matériau isotrope . . . . .	92
4.2.1.3	Théorie généralisée de la thermoélasticité . . . . .	92
4.2.1.4	Hypothèses courantes . . . . .	93
4.2.2	Etat de l'art . . . . .	93
4.2.2.1	Le modèle de Zener . . . . .	93
4.2.2.2	Éléments bibliographiques supplémentaires . . . . .	94
4.2.3	Modèle retenu . . . . .	95
4.2.3.1	Le traitement du couplage par perturbation . . . . .	95
4.2.3.2	La résolution de l'équation de la chaleur . . . . .	96
4.2.4	Résultats numériques . . . . .	98
4.2.4.1	Comparaison avec l'expérience . . . . .	98
4.2.4.2	Influence des conditions aux limites mécaniques . . . . .	99
4.2.4.3	Influence de l'épaisseur . . . . .	103
4.3	Amortissement par couplage fluide/structure . . . . .	104
4.3.1	La nature du couplage fluide/structure . . . . .	106
4.3.1.1	Présentation du problème . . . . .	106
4.3.1.2	Dissipation thermoélastique . . . . .	106
4.3.1.3	Dissipation par viscosité et par rayonnement . . . . .	106
4.3.2	Amortissement par viscosité . . . . .	107
4.3.2.1	Introduction . . . . .	107
4.3.2.2	Modélisation de l'écoulement le long d'un plan infini . . . . .	108
4.3.2.3	Résolution numérique . . . . .	110
4.3.3	Amortissement par rayonnement acoustique . . . . .	111

4.3.3.1	Introduction . . . . .	111
4.3.3.2	Les équations acoustiques . . . . .	111
4.3.3.3	La représentation intégrale de la pression . . . . .	111
4.3.3.4	Cas d'une plaque plane non bafflée . . . . .	112
4.3.3.5	Cas d'une plaque plane bafflée . . . . .	114
4.3.3.6	Le problème vibratoire associé . . . . .	115
4.3.3.7	Réponse vibroacoustique par méthode itérative . . . . .	116
4.3.3.8	Méthode de perturbation . . . . .	117
4.3.3.9	Puissance acoustique . . . . .	119
4.3.4	Validation numérique et optimisation du modèle . . . . .	120
4.3.4.1	Validation du cas bafflé avec Mathematica . . . . .	120
4.3.4.2	Validation avec les calculs de référence C-Valor . . . . .	121
4.4	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	123
<b>5</b>	<b>L'amortissement viscoélastique</b>	<b>125</b>
5.1	Introduction . . . . .	126
5.2	La modélisation viscoélastique . . . . .	126
5.2.1	La viscoélasticité . . . . .	126
5.2.2	Les opérateurs viscoélastiques . . . . .	127
5.2.2.1	Opérateur à dérivées partielles . . . . .	127
5.2.2.2	Opérateur de convolution . . . . .	128
5.2.3	Transformées et principe d'équivalence . . . . .	129
5.2.4	Les hypothèses de la viscoélasticité . . . . .	130
5.2.5	Quelques exemples de modèles viscoélastiques analytiques . . . . .	131
5.2.5.1	Modèles rhéologiques élémentaires . . . . .	131
5.2.5.2	Séries de Prony-Dirichlet . . . . .	132
5.2.5.3	Modèles à dérivées temporelles fractionnaires . . . . .	133
5.2.6	Modèle viscoélastique adopté . . . . .	133
5.3	Les matériaux viscoélastiques . . . . .	134
5.3.1	La nature de la viscoélasticité . . . . .	134
5.3.2	Les métaux . . . . .	134
5.3.2.1	La structure des matériaux cristallins . . . . .	134
5.3.2.2	L'amortissement dans les métaux . . . . .	135
5.3.2.3	L'aluminium . . . . .	137
5.3.2.4	Identification de la dissipation viscoélastique de l'aluminium . . . . .	139
5.3.3	Les polymères . . . . .	141
5.3.3.1	Caractéristiques générales . . . . .	141
5.3.3.2	Modélisation physique . . . . .	142
5.3.3.3	Données de référence de l'élastomère Smactane . . . . .	143
5.4	Identification des caractéristiques dynamiques d'un polymère . . . . .	145
5.4.1	Introduction . . . . .	145
5.4.2	Les méthodes d'identification . . . . .	146
5.4.2.1	Approche vibratoire . . . . .	146
5.4.2.2	Approche propagative . . . . .	147
5.4.3	Méthode d'identification adoptée . . . . .	148
5.4.3.1	Etude de sensibilité . . . . .	148
5.4.3.2	Méthode numérique . . . . .	149

5.4.3.3	Procédure expérimentale . . . . .	151
5.4.3.4	Résultats . . . . .	152
5.4.4	Etude du collage . . . . .	153
5.5	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	156
<b>6</b>	<b>Optimisation</b>	<b>159</b>
6.1	Introduction . . . . .	160
6.2	Préalables à l'optimisation . . . . .	160
6.2.1	Définition d'une fonctionnelle . . . . .	160
6.2.2	Configurations étudiées . . . . .	161
6.2.3	Influence de la distorsion du maillage . . . . .	162
6.2.4	Influence dimensionnelle . . . . .	165
6.2.5	Influence des conditions aux limites . . . . .	167
6.3	Etudes quantitatives simples de traitements en élastomère contraint . . . . .	169
6.3.1	Introduction . . . . .	169
6.3.2	Influence de la position du patch . . . . .	170
6.3.2.1	Résultats généraux . . . . .	170
6.3.2.2	Un indicateur simple de position optimale . . . . .	174
6.3.2.3	Comparaison des spectres de patches de taille différente . . . . .	177
6.3.3	Influence la taille des patches . . . . .	177
6.3.4	Influence de l'épaisseur des couches du patch . . . . .	184
6.3.5	Influence de la rigidité et de la masse de la couche supérieure . . . . .	189
6.4	Etude de différents traitements amortissants . . . . .	191
6.4.1	Etude de la position d'un traitement en élastomère contraint . . . . .	192
6.4.2	Etude de la position de différents traitements amortissants . . . . .	192
6.5	Optimisation multiparamètre sur des structures académiques . . . . .	197
6.5.1	Etude d'une poutre encastree-encastree . . . . .	198
6.5.1.1	Optimisation d'un traitement avec un patch . . . . .	198
6.5.1.2	Optimisation d'un traitement avec deux patches . . . . .	200
6.5.2	Etude de plaques . . . . .	201
6.5.2.1	Optimisation de forme . . . . .	204
6.6	Bilan et conclusions du chapitre . . . . .	207
<b>A</b>	<b>Dérivée d'un potentiel de simple couche</b>	<b>221</b>
<b>B</b>	<b>Résolution de l'équation de Fredholm de première espèce</b>	<b>223</b>
<b>C</b>	<b>Intégration de la fonction de Green</b>	<b>227</b>
<b>D</b>	<b>Puissance acoustique</b>	<b>229</b>



# Introduction générale

La société actuelle connaît des problèmes écologiques de premier plan liés au développement de ses infrastructures, à l'essor industriel et à la proximité humaine en milieu urbain. La prise de conscience de ces problèmes a motivé la promulgation de lois comme la « loi bruit », qui met en application depuis 1992 des mesures préventives et correctives pour la réduction des nuisances sonores dans tous les secteurs d'activité. Malgré cette initiative politique, une enquête de l'INSEE d'octobre 2002<sup>1</sup> rapporte que le bruit reste la nuisance principale ressentie en ville et que 54% des français se déclarent gênés lorsqu'ils sont chez eux. Les origines du problème se situent sans doute à un niveau technologique ; les solutions actuelles sont insuffisantes ou pour le moins inabouties et requièrent un effort de recherche supplémentaire pour parvenir à une réduction significative du bruit environnant.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire et réalisé au LMA<sup>2</sup> à Marseille est une contribution en la matière. Il s'intéresse plus spécifiquement au contrôle passif du bruit et des vibrations par le biais de traitements amortissants en élastomère. Au premier abord, le choix d'un tel matériau est critiquable, tant son utilisation massive et semble-t-il maîtrisée n'a pas permis de régler le problème toujours actuel du bruit des transports. La première finalité de ce travail concerne donc l'analyse des potentialités des traitements en élastomère pour la réduction de bruit, notamment dans les basses fréquences où ils sont considérés inopérants. Bien que destinés initialement à augmenter l'amortissement structurel, nous en analysons l'efficacité tant du point de vue dynamique que du point de vue acoustique. Ce dernier point a d'ailleurs très peu été traité dans la littérature scientifique.

Ce travail de thèse possède également une dimension beaucoup plus fondamentale en matière de contrôle passif. Il y a été menée une étude physique approfondie des mécanismes dissipatifs spécifiques aux structures composites en aluminium/élastomère qui a conduit à la caractérisation générale des systèmes dynamiques amortis (modes complexes, homogénéité de l'amortissement, couplage multiphysique). L'analyse physique étant intimement liée aux méthodes de résolution, elle nous a amené à développer une plateforme de résolution numérique précise et rapide de problèmes généraux de dynamique amortie en régime instationnaire, qui pallie la plupart des problèmes des outils actuels.

Le mémoire de thèse se décompose en six chapitres.

Le premier chapitre présente les aspects fondamentaux de la réduction de bruit et du contrôle passif ainsi que la notion d'amortissement, au travers d'un exposé sur les disciplines qui l'étudient, sur sa mesure, sur les matériaux dissipatifs et sur certaines solutions technolo-

---

<sup>1</sup>Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

giques destinées à amortir les vibrations structurelles. L'analyse modale par une méthode sans contact d'une plaque en aluminium traitée avec des patches en élastomère contraint fournit un cadre expérimental plus spécifique à l'étude. Les résultats obtenus montrent que l'efficacité du traitement est restreinte aux moyennes et hautes fréquences et que son positionnement a une influence déterminante sur l'amortissement total. D'où la question : comment en connaître a priori la position optimale ? Et surtout, peut-on attendre de la part de traitements en élastomère des performances plus intéressantes en basses fréquences ?

Le deuxième chapitre concerne l'étude générale de systèmes vibratoires amortis en régime temporel/fréquentiel instationnaire par le biais des transformées intégrales. La formulation variationnelle à valeurs complexes du problème de dynamique dans le vide est d'abord écrite. Elle conduit après discrétisation par la méthode des éléments finis à un système matriciel symétrique, complexe et dépendant de la fréquence. Une analyse bibliographique détaillée présente ensuite les techniques actuelles destinées à traiter un tel système. La méthode développée emploie la transformée inverse de Laplace et a nécessité au préalable le calcul des solutions libres de l'opérateur appelées solutions de résonance. Ces solutions sont calculées d'une part par un solveur complexe dédié au problème dont le développement est présenté au chapitre trois, et d'autre part par une routine itérative classique dont nous améliorons la convergence par une méthode de perturbation. Le chapitre présente enfin des résultats comparatifs de simulation montrant la très nette supériorité des performances de l'algorithme final à celles d'algorithmes classiques implémentant la méthode de résolution directe ou la méthode de résolution modale. Une version algorithmique spéciale dont la précision est validée par un calcul comparatif de puissance acoustique permet d'obtenir des temps de calcul de l'ordre de ceux d'un système non amorti. La méthode ne formule pas d'hypothèse particulière sur la forme de l'amortissement, et utilise simplement les données brutes fréquentielles caractérisant le matériau.

Le troisième chapitre a pour objet la résolution numérique du problème aux valeurs propres linéaire complexe symétrique et l'inversion matricielle. Nous avons opté de la conserver dans un chapitre séparé du deuxième chapitre étant donné le travail spécifique qu'il a suscité et son propos numérique. La première partie du chapitre contient une présentation des différentes méthodes de calcul des solutions propres et justifie le choix de la bibliothèque d'algorithmes ARPACK, qui date du milieu des années 90. Les routines qu'elle propose implémentent la méthode d'Arnoldi destinée aux matrices générales et nécessitent une routine d'inversion matricielle performante. La suite du chapitre étudie les performances numériques de différentes solutions algorithmiques qui utilisent alternativement les méthodes d'inversion itératives ou les méthodes d'inversion par résolution directe. Les résultats justifient clairement l'emploi d'une formulation généralisée du problème aux valeurs propres et d'une méthode de résolution directe par méthode frontale et renumérotation.

Le quatrième chapitre s'intéresse à la physique de l'amortissement par couplage. On montre dans une première partie la façon dont le couplage thermoélastique dissipe l'énergie vibratoire dans l'aluminium. Une méthode originale par perturbation et modélisation du champ thermique fournit des résultats validés par l'expérience, ainsi que des éléments d'analyse permettant de valider et de critiquer le modèle thermoélastique de référence de Zener. La deuxième partie s'intéresse au couplage fluide/structure, dont il découle deux sources potentielles de dissipation. La première est liée au frottement visqueux de l'air sur les bords d'une

plaque en conditions libres ; l'évaluation semi-analytique de l'écoulement de l'air, cisailé, montre que sa contribution à l'amortissement total est négligeable. La deuxième source de dissipation est due au rayonnement acoustique. L'amortissement qui en résulte est modélisée par une méthode de perturbation traitant le couplage vibroacoustique. Deux algorithmes sont finalement validés par comparaison avec les données fournies par la commission C-Valor<sup>3</sup> ; le premier modélise le comportement vibroacoustique de structures amorties planes bafflées et le deuxième de structures amorties planes non bafflées.

Le cinquième chapitre traite de la viscoélasticité des matériaux. Les aspects théoriques et physiques de la viscoélasticité sont développés dans le cas précis des matériaux élastomère et aluminium. L'état actuel des connaissances nécessite dans les deux cas une identification de l'amortissement viscoélastique. L'identification de l'amortissement viscoélastique dans l'aluminium est réalisée en substituant l'amortissement thermoélastique modélisé à l'amortissement total mesuré sur une plaque en aluminium. La démarche fournit des résultats d'une grande précision étant donné le niveau très bas de dissipation dans l'aluminium. L'identification des caractéristiques de l'élastomère est effectuée par une méthode itérative indirecte à partir de deux expériences différentes : la première, basée sur une poutre couverte par un traitement en élastomère contraint permet d'estimer le module de stockage du matériau ; la deuxième, basée sur des mesures fines d'amortissement de plaque traitée en conditions aux limites libres, permet d'estimer son module de perte. L'étude se poursuit dans le cadre de l'étude du collage des traitements en élastomère étudiés et montre l'importance des caractéristiques de la zone interfaciale séparant la structure vibrante et l'élastomère. Il est montré qu'un collage très rigide est susceptible d'augmenter significativement l'amortissement de la plupart des modes de flexion.

Le sixième et dernier chapitre a pour objet l'optimisation du traitement amortissant de structures académiques (poutre, plaque). Il a été pensé pour obtenir des règles élémentaires et extrapolables en matière de traitement amortissant à partir d'études paramétriques simples. Il est destiné à la compréhension physique du comportement de tels systèmes et s'adresse clairement aux ingénieurs qui font usage des traitements amortissants pour réduire le bruit. Le chapitre se décompose en plusieurs parties. La première présente quelques études préalables sur l'influence du maillage, des dimensions structurelles et des conditions aux limites sur les résultats. Des règles élémentaires concernant les traitements en élastomère contraint sont ensuite définies dans le cadre de l'étude d'une poutre encastree. Il est ensuite question de l'optimisation effective du traitement d'une plaque et d'une poutre encastrees. Le chapitre se termine enfin sur l'étude de traitements spécifiques : inserts en élastomère, traitements non contraints et systèmes résonants.

Naturellement, la lecture de ce mémoire peut s'effectuer suivant l'ordre naturel des chapitres. Néanmoins, le chapitre trois, qui ne présente que des aspects numériques du calcul des modes propres, peut être omis dans un premier temps sans que cela ne nuise à la compréhension du reste du manuscrit. De même, le sixième chapitre peut être abordé sans connaissance théorique très approfondie, dans la mesure où il présente et commente uniquement des résultats de simulation numérique. La lecture du chapitre deux sur l'étude des systèmes amortis en revanche est un prérequis indispensable à la lecture du chapitre quatre sur l'amortissement par couplage.

---

<sup>3</sup>Commission de Validation des Logiciels en Vibro-Acoustique



# Chapitre 1

## Réduction du bruit et des vibrations

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Un aperçu des technologies actuelles</b>	<b>6</b>
1.2.1	Les contrôles actif et passif	6
1.2.2	Le contrôle par traitement externe	8
<b>1.3</b>	<b>Quelques généralités sur l'amortissement</b>	<b>9</b>
1.3.1	L'amortissement en physique	9
1.3.2	Les matériaux amortissants	11
1.3.3	L'amortissement non-linéaire	13
1.3.4	La mesure de l'amortissement	14
<b>1.4</b>	<b>Etude d'un traitement spécifique</b>	<b>17</b>
1.4.1	Des patches en polymère contraint	17
1.4.2	Une première expérience	17
1.4.3	Analyse des résultats	21
<b>1.5</b>	<b>La modélisation de l'amortissement</b>	<b>25</b>
1.5.1	Une classification possible des amortissements	25
1.5.2	Les difficultés de la modélisation de l'amortissement	26
1.5.3	L'amortissement aux limites du domaine	27
<b>1.6</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>31</b>

---

## 1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter les aspects fondamentaux de la réduction de bruit ainsi que les notions physiques dont il est question tout au long de la thèse. Après avoir abordé dans une première partie la notion de contrôle et exposé un certain nombre de solutions technologiques comme celle du traitement externe amortissant, les fondements du contrôle passif sont analysés dans une deuxième partie au travers d'un exposé général sur l'amortissement. Les disciplines qui l'étudient, les matériaux dissipatifs, la linéarité des phénomènes dissipatifs et la mesure de l'amortissement font partie des thèmes évoqués. L'étude modale expérimentale d'une structure traitée avec des patches en polymère contraint, que nous avons réalisée par le biais d'une méthode sans contact avec un vibromètre laser et un haut-parleur, est présentée dans une troisième partie. Les conclusions de l'étude nous amènent ensuite à spécifier dans une dernière partie le cadre et les grandes lignes de notre démarche de modélisation de l'amortissement, dont le détail est présenté dans les chapitres suivants.

## 1.2 Un aperçu des technologies actuelles

Le respect de l'environnement et la quête de confort sont à la base de normes de plus en plus restrictives et d'un effort de recherche soutenu dans divers secteurs (transports, génie civil) destinés à réduire le bruit et les vibrations pour des raisons directes (nuisances et gênes sonores) et indirectes (fatigue liée au bruit, excès de poids du traitement acoustique des véhicules). La notion de contrôle s'inscrit naturellement dans la recherche d'une maîtrise de l'environnement sonore et vibratoire. Le terme dès lors, est employé de façon extensive dans le jargon des dynamiciens et des acousticiens. On parle ainsi de contrôle passif lorsqu'il s'agit de réduire les vibrations ou le bruit par des moyens passifs (travail structural sur les matériaux et la géométrie), c'est-à-dire sans l'usage de matériel électrique, et de contrôle actif lorsqu'au contraire contrôleurs, micros, lames piézoélectriques entres autres sont employés.

### 1.2.1 Les contrôles actif et passif

#### 1.2.1.1 Le contrôle passif

Les réalisations exploitant les techniques passives sont omniprésentes (joints en polymère, amortisseurs, revêtements poreux dans les véhicules). Elles se basent sur la redistribution et la dissipation de l'énergie d'un système en manipulant masse, rigidité et amortissement. La finalité est d'obtenir un niveau d'énergie vibratoire ou acoustique minimum dans une zone délimitée : réduction de l'énergie vibratoire aux points d'accroche d'une suspension sur un châssis, réduction de l'énergie acoustique au niveau des oreilles. Citons à ce titre quelques exemples parmi tant d'autres de structures modélisées et optimisées pour la réduction des vibrations :

- les parebrises, sandwiches à trois couches avec un coeur viscoélastique (D'Haene et Lu [29]),
- les pneus, structures complexes avec des filaments de renforcement en textile de haut module, métal ou verre, encastrés dans une matrice de bas module en caoutchouc (Geng,

Popov et Cole [43]),

- Les tôles sandwich, avec un film viscoélastique en polymère (Landier, Mercier et Berveiller [63]),
- Les doubles vitrages (filtrage mécanique et dissipation visco-thermique du fait de la proximité des vitres, pompage et cisaillement de l'air, Önsay [119]).

Le contrôle passif repose sur la connaissance des mécanismes dissipatifs susceptibles d'être contrôlés et de réduire le niveau vibratoire ou acoustique. Aucun phénomène n'est a priori exclu et peut contribuer avantageusement à l'amortissement total : viscoélasticité des métaux, viscoélasticité des polymères, thermoélasticité, dissipation par rayonnement acoustique en sont quelques exemples. Notons qu'il existe une distinction qualitative essentielle entre les contrôles passifs vibroacoustique et vibratoire ; si le contrôle passif vibratoire a pour finalité de maximiser toutes les composantes de l'amortissement sans distinction aucune, le contrôle passif vibroacoustique vise à les maximiser toutes, sauf une : il s'efforce de minimiser simultanément la composante d'amortissement liée au couplage fluide structure, que nous nommerons amortissement acoustique. La maximisation de l'amortissement total réduit l'amplitude du mouvement vibratoire, tandis que la minimisation de l'amortissement acoustique réduit le transfert d'énergie vibratoire à l'air ambiant sous forme de bruit<sup>1</sup>.

L'histoire du contrôle passif n'est pas récente. En témoignent des ouvrages de référence comme celui de Rayleigh [107] qui date du XIX<sup>ème</sup> siècle, ou encore l'ouvrage un peu plus récent de Cremer et Heckl ([26], édition originale de 1966). Ce dernier donne une base qualitative dans l'analyse des processus de dissipation et de redistribution d'énergie, ainsi que des éléments quantitatifs analytiques. Thermoélasticité, viscoélasticité et atténuation (dans les connexions structurelles, au niveau des variations de section d'une poutre) sont abordées, et des réalisations pratiques sont présentées (traitements viscoélastiques locaux à l'efficacité large bande attachés à une structure, systèmes résonants agissants sur une bande étroite). L'analyse théorique qui y est faite est toujours d'actualité et les traitements envisagés restent très pertinents. Il n'en demeure pas moins que la quantification des différents phénomènes de dissipation et d'atténuation est assez limitée et que de grands progrès ont été réalisés depuis avec le développement de l'outil numérique.

### 1.2.1.2 Le contrôle actif et semi-actif

Si l'usage du contrôle passif est récurrent dans l'industrie, celui du contrôle actif est moins systématique. Citons en acoustique des applications comme le casque anti-bruit, et des développements aboutis dans les environnements clos (pot d'échappement, cockpit d'avion et d'hélicoptère) ; les suspensions hydrauliques actives font partie des applications en dynamique les plus répandues. Le contrôle actif fait encore l'objet d'intenses recherches, en particulier dans le domaine vibratoire où il est couplé alors à des études sur les matériaux dits intelligents (matériaux piézoélectriques, alliages à mémoire de forme, matériaux électrostrictifs, magnétostrictifs, fluides électrorhéologiques). L'énergie introduite, généralement électrique, permet de contrôler certaines caractéristiques du matériau, comme la rigidité et l'amortissement pour les matériaux électrorhéologiques. Par ailleurs, notons que des mé-

---

<sup>1</sup>à amplitude vibratoire fixée.

thodes hybrides de contrôle semi-actif ont également été développées pour tirer profit des deux approches de contrôle. La discussion comparative sur la performance des différentes formes de contrôle est toujours ouverte. Nous l'aborderons dans le cadre plus spécifique des traitements externes à une structure.

### 1.2.2 Le contrôle par traitement externe

L'intérêt pour les traitements externes, dont témoigne une littérature très abondante, n'est pas nouveau ; mais comme il s'agit d'une solution à la fois pratique, éprouvée, et au potentiel encore important, les industriels comme les chercheurs s'évertuent encore et toujours à développer de nouvelles extensions.

Les traitements externes, qui par un procédé d'adhésion ou de fixation ont été intégrés à une structure, sont sous la forme la plus classique de deux types, tous deux passifs (figure 1.1). Le premier est caractérisé par une seule couche de matériau, distribuée sur toute la surface de la structure, ou appliquée localement sous la forme d'un patch. Généralement en polymère, elle se déforme principalement en extension-compression lorsque la structure vibre en flexion. Le deuxième, plus populaire parce que plus efficace, dénommé PCLD pour l'amortissement qu'il confère (Passive Constrained Layer Damping), comporte quant à lui deux couches. La première couche est en métal et vient contraindre la deuxième couche, en polymère, qui adhère à la structure. L'ensemble forme un composite lamellé ou sandwich à trois couches (lorsque le traitement est uniformément distribué), dont le coeur est sollicité essentiellement en cisaillement lorsque la structure subit des déformations de flexion. Le polymère est en partie protégé de l'oxygène et de l'ozone qui participent à son vieillissement, caractérisé par une dégradation des propriétés mécaniques, des durcissements locaux, et des craquelures.

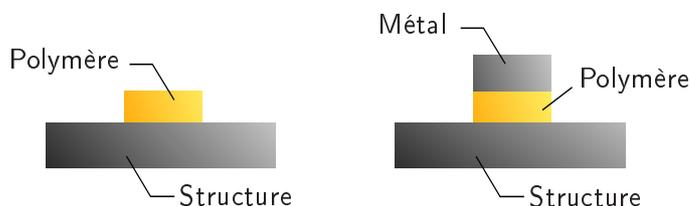


FIG. 1.1 – Traitements externes en polymère non contraint et contraint (PCLD).

Les avantages de ces traitements sont nombreux : robustes, peu chers, ils peuvent être appliqués a posteriori sur des développements préexistants, et sont très efficaces à moyenne et haute fréquence. Leur inconvénient majeur provient de leur relative inefficacité en basse fréquence, à laquelle s'adjoint une très grande sensibilité à la température, ce qui ne les rend guère attractifs pour des applications sous des environnements changeants.

Dans la gamme des traitements passifs externes, il est à noter également l'existence de traitements dénommés MCLD (Magnetic Constrained Layer Damping, étudié notamment par Ruzzene, Oh et Baz [111]) dont le concept est d'exploiter la force de répulsion ou d'attraction exercée entre eux par une série de patches bicouches, dans lesquels la couche inférieure est en polymère, et la couche supérieure constituée d'un aimant. L'aimant participe à l'augmentation de la déformation longitudinale des patches en induisant un chargement tensile

lorsque dans la flexion, les patches se rapprochent ou s'éloignent (figure 1.2). Une alterna-

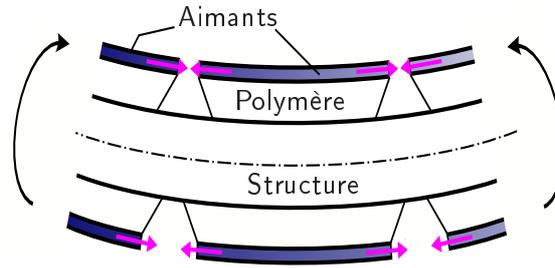


FIG. 1.2 – Traitement MCLD. Montage en attraction.

tive active à ces traitements passifs existe, il s'agit du traitement avec lame piézoélectrique. Comparativement plus cher et moins fiable, il semble complémentaire en étant surtout efficace en basses fréquences. D'où l'idée de développer des traitements hybrides, bénéficiant des qualités des deux traitements. Bien qu'altérant un peu l'efficacité de la couche ICL/ACL (Intelligent / Active Constrained Layer), le polymère constitue une sécurité en cas de panne. De nombreuses variantes de traitement hybride existent. Whiteman et Ferri [111] en citent de deux types : les traitements ACLD (Active Constrained Layer Damping), dans lesquels une lame piézoélectrique contraignante est déformée activement pour solliciter au maximum le polymère, et les traitements APDC (Active Piezoelectric Damping Composite) constitués de tiges piézocéramiques encastrées dans l'épaisseur d'une matrice polymérique adhérant à une paroi vibrante qui sont activées électriquement pour contrôler l'amortissement de compression. Park et Baz [99] envisagent même des configurations structurelles à quatre couches avec un traitement ACLD tricouche collé, comprenant une couche en polymère entourée par deux couches piézoélectriques. Les auteurs constatent un amortissement de l'ordre de quatre fois plus élevé pour le premier mode dans le cas activé ACLD que dans le cas non-activé (solution PCLD), deux fois plus élevé pour le deuxième mode.

## 1.3 Quelques généralités sur l'amortissement

### 1.3.1 L'amortissement en physique

L'amortissement émane de phénomènes très variés qui rendent difficile la prise en compte complète des sources de dissipation. Une science de l'amortissement n'existe pas à proprement parler, du moins pour l'instant. De ce fait, il existe des différences de vision et d'approche sensibles dans les branches de la physique concernées par l'amortissement. Une partie du travail a été inspirée par des lectures dans des domaines variés. D'autres domaines actifs en la matière ont été omis dans ce court aperçu illustratif (génie civil, dynamique, physique des polymères).

#### 1.3.1.1 La physique des matériaux

En physique des matériaux, dont nous présenterons quelques études au § 1.3.2, la démarche la plus récurrente est expérimentale et basée sur l'analyse des processus de fabrication au travers d'essais avec des pendules de torsion placés dans une enceinte dont la température est contrôlable. L'enceinte est parfois placée sous vide, ce qui permet de s'affranchir de l'amortissement fluide (amortissement visqueux et amortissement par rayonnement), et

partiellement de l'amortissement thermoélastique (solicitation en cisaillement, matériau inhomogène). Des modèles qualitatifs sont employés pour interpréter les expériences (modèle de Granato Lücke pour l'amortissement des dislocations [48], modèle de Schoeck); de sorte qu'aucune modélisation n'est envisageable sans identification préalable de quantités macroscopiques (module de cisaillement, coefficient de Poisson). L'utilisation des méthodes d'homogénéisation telles que la loi des mélanges, le volume représentatif élémentaire est fréquente; au même titre que la définition de modèles viscoélastiques équivalents, et de la méthode d'énergie de déformation modale (MSE), qui est une sorte de loi des mélanges appliquée à l'énergie de déformation des différents matériaux mis en jeu.

### 1.3.1.2 L'interférométrie

L'un des domaines les plus prolifiques en la matière semble sans doute être celui des interféromètres et des systèmes électromécaniques à échelle microscopique<sup>2</sup> ou nanoscopique<sup>3</sup>. Actionneurs rapides et précis, jauges diverses chimiques, accéléromètres, magnétomètres, calorimètres, filtres mécaniques, sont des exemples de MEMS. De conception à basse puissance, ils sont totalement intégrés dans les semi-conducteurs. La maîtrise des mécanismes d'amortissement pour réduire la dissipation dans les interféromètres revêt une importance singulière. L'augmentation du facteur de qualité permet en effet de diminuer les erreurs de lecture en augmentant stabilité, sensibilité et rapport signal/bruit (d'où le nom de facteur de qualité), et de réduire la puissance requise. Dans le cas des interféromètres à ondes gravitationnelles, les appareils doivent détecter les petits déplacements d'une masse libre suspendue, dont le mouvement est assimilable à celui d'un pendule. Ils utilisent pour cela des miroirs optiques sujets à un bruit vibratoire lié au coefficient d'expansion thermique et à l'agitation thermique. Cette dernière est alimentée par la dissipation de l'énergie vibratoire qu'il convient de réduire au minimum, au même titre que le couplage thermoélastique.

### 1.3.1.3 L'acoustique instrumentale

L'acoustique instrumentale est également un domaine de la physique très actif dans l'étude de la dynamique des systèmes amortis. Nécessitant une analyse fine de la vibration des instruments, la discipline participe aux développements actuels en matière de dynamique non-linéaire et de dynamique amortie. Citons un travail de référence sur les cordes présenté par Valette et Cuesta [120], que nous citerons à nouveau dans l'analyse d'une structure suspendue par des fils. Une recherche systématique et quantitative de l'amortissement est également faite par Chaigne et Lambourg [20] dans le cadre de la synthèse sonore. Les modèles d'amortissement que les auteurs présentent sont par conséquent utilisables dans le domaine temporel. Trois composantes principales sont distinguées et modélisées : l'amortissement thermoélastique, l'amortissement viscoélastique et l'amortissement par rayonnement. Seul l'amortissement viscoélastique est obtenu par identification. Pour une plaque en aluminium (dont nous nous servirons ultérieurement), suspendue par des fils, il est conclu que l'amortissement par rayonnement acoustique est prépondérant au dessus de la fréquence de coïncidence, tandis que l'amortissement thermoélastique est la composante principale de l'amortissement en basse fréquence.

---

<sup>2</sup>MEMS.

<sup>3</sup>NEMS.

### 1.3.2 Les matériaux amortissants

Ce paragraphe donne un aperçu pratique, non exhaustif de matériaux possédant des qualités amortissantes. Outre cette caractéristique, le choix d'un matériau relève bien entendu d'un compromis complexe, au sein duquel la rigidité, la légèreté, pour ne citer que quelques propriétés, pondèrent la décision. On trouvera un complément d'information spécifique à l'aluminium dans le chapitre 5 sur la viscoélasticité.

La plupart des publications concerne les matériaux composites, en particulier les composites à matrice métallique<sup>4</sup>. Xu et Schmauder [132] notamment, proposent une approche quantitative pour modéliser l'interface des matériaux MMC, avec un modèle non-linéaire de plasticité locale (autour des particules, dont la forme optimum est étudiée). C'est un pendant à l'approche qualitative micromécanique des dislocations. Il apparaît un seuil de chargement mécanique dans le modèle caractérisant sa non-linéarité ; lorsqu'il est franchi, la dissipation devient beaucoup plus importante. Toutefois, des zones plastiques peuvent apparaître pour des contraintes faibles en dessous de la limite élastique, donnant lieu à de la dissipation à bas niveau de déformation. En conclusion, l'auteur préconise l'augmentation de la fraction volumique des particules, ou l'augmentation de leur module de rigidité pour augmenter l'amortissement.

Les composites à matrice métallique avec un chargement de particules<sup>5</sup>, sont étudiés par de nombreux auteurs. Sastry, Krishna et Uchil [112] s'intéressent à l'ajout de particules d'aluminite dans des matrices en alliage de zinc-aluminium grâce auxquelles les propriétés d'amortissement et de rigidité sont accrues. Trois composantes d'amortissement principales sont invoquées : l'amortissement interfacial lié à la différence de coefficient d'expansion thermique entre les particules et la matrice d'une part (engendrant localement une augmentation de la densité de dislocation) et aux caractéristiques d'adhésion interfaciale matrice/particule d'autre part (modélisée par le modèle Schoeck idéalisant l'interface par une frontière visqueuse), l'amortissement thermoélastique, et l'amortissement intrinsèque à la matrice. Wang, Zhang et Yang [123] s'intéressent aux PMMC à particules de céramique et à matrice d'aluminium  $SiC_P/Al$ , en décomposant l'amortissement en deux composantes : la première correspond à l'amortissement des différentes phases et la deuxième à l'amortissement dû à la dissipation énergétique liée à la déformation locale micro-plastique. Cette deuxième est modélisée par le biais d'une méthode de volume représentatif (RVE, méthode d'homogénéisation). Un seuil d'amplitude est identifié, en dessous duquel l'amortissement est indépendant de l'amplitude. Le lien qualitatif est dressé entre le modèle numérique de plasticité et la théorie des dislocations de Granato-Lücke, dont la densité augmente avec l'amplitude du chargement. Srikanth et Gupta [115] recensent l'ensemble des mécanismes dissipatifs présents dans les composites PMMC de magnésium avec particules de SiC, dans le cadre d'une expérience de tige circulaire suspendue, en donnant des expressions de l'amortissement visqueux, de l'amortissement plastique (fonction de la fraction volumique de la zone plastique), de l'amortissement lié aux particules fragiles et dures qui ont pour effet d'augmenter la densité de dislocation (modèle de Granato-Lücke).

Les composites à fibre sont également l'objet d'intenses recherches. Une étude numérique

---

<sup>4</sup>MMC.

<sup>5</sup>PMMC.

tridimensionnelle de composites à fibres viscoélastiques basée sur la méthode énergétique est réalisée par Yin-Tao, Liang-Jin et Ting-Qing [134]. La discussion porte particulièrement sur l'influence de l'orientation des fibres sur l'amortissement ; les auteurs montrent que l'amortissement est sujet à des variations allant du simple au décuple. L'influence des fibres dans les matériaux plastiques est traité par Hufenbach *et al* [58]. Les auteurs font une analyse anisotrope de l'amortissement (théorie de Timoshenko et méthode énergétique) apporté par un renforcement en fibres (verre, aramide, carbone) et distinguent trois composantes d'amortissement : les composantes d'amortissement axiale, transverse et de cisaillement.

D'autres types de composite sont à l'étude. Finegan et Gibson [39] soulignent l'intérêt représenté par les composites de polymère : densité basse, raideur et amortissement élevés sont des qualités désirables exploitées sur les véhicules spatiaux. Les auteurs présentent une étude de l'influence de la fraction volumique des fibres, dont l'augmentation réduit l'amortissement, et de la fraction volumique de leur revêtement, dont l'augmentation conduit à un accroissement de l'amortissement. Leur travail s'appuie sur une analyse micromécanique linéaire par éléments finis sur un élément de volume représentatif (RVE) et sur la méthode d'énergie de déformation modale (MSE).

La maîtrise des alliages, du procédé de fabrication et du traitement thermique des métaux (trempe, recuit) est essentielle pour obtenir des matériaux résistants et amortissants. Xie, Schaller et Jaquerod [131] fournissent une étude expérimentale comparative de trois alliages d'aluminium du commerce (de cuivre, magnésium, cuivre/magnésium/Zinc) en utilisant un pendule de torsion et en mesurant le décrétement en oscillation libre d'échantillons de petite taille ( $1 \times 4 \times 100 \text{mm}^3$ ). Une explication qualitative de leurs propriétés amortissantes en fonction de la température, du processus de fabrication (temps de recuit), de l'amplitude de sollicitation, illustrée par de nombreux résultats expérimentaux, est proposée dans le cadre de la théorie des dislocations. L'inverse du facteur de qualité, qui est une mesure de l'amortissement, est selon les auteurs de l'ordre de  $Q^{-1} \approx (0,3 \pm 0,05) \times 10^{-3}$  pour l'alliage AlCu autour de  $3000 \text{ Hz}$  à température ambiante, de  $Q^{-1} \approx (0,45 \pm 0,05) \times 10^{-3}$  pour le composé AlMgZnCu et de  $Q^{-1} \approx (0,5 \pm 0,05) \times 10^{-3}$  pour l'alliage AlMgSi.

Les matériaux poreux sont des matériaux dont l'usage est récurrent, notamment en architecture et dans l'automobile, où ils tapissent les surfaces pour des raisons de confort, notamment acoustique. Les mécanismes d'amortissement et d'absorption sont finement décrits dans le travail de thèse de Jaouen [61]. Trois effets sont distingués : les effets dissipatifs structuraux (dont font partie le rayonnement acoustique et les pertes au travers des frontières), les effets visqueux et les effets thermiques. Wang, Zhu, Hou et Li [122] se focalisent sur la porosité des composites carbone/carbone (matrice de carbone avec fibres de carbone), en exploitant une loi constitutive d'amortissement décrite par  $Q^{-1} \approx \rho/(1 - \rho)$ , où  $\rho$  est la porosité. L'augmentation de la dissipation est quasi linéaire avec la porosité lorsque cette dernière est faible.

Les céramiques de bois, matériaux écologiques poreux, peuvent présenter une option intéressante si des propriétés de recyclabilité sont recherchées. Xian-qing, Tong-xiang, Di et Ren-jieRed [130] s'interrogent sur la nature de leur amortissement. Obtenues à partir de déchets de bois, papier, et considérablement améliorées par infiltration sous haute pression d'un alliage de magnésium, leurs propriétés mécaniques et amortissantes sont supérieures

à celles des céramiques conventionnelles. L'analyse des auteurs est la suivante : l'amortissement intrinsèque des céramiques de bois et l'amortissement par dislocation de la matrice sont jugés prépondérants à basse température, tandis que l'amortissement interfacial est considéré comme principal à haute température.

Enfin, parmi les matériaux non composites couramment employés, citons le béton et le sable, utilisés pour alourdir et amortir à très bon marché les machines outil, ou pour amortir les structures en génie civil (cas du sable). Dans un autre registre, citons également les matériaux ferromagnétiques (Harris et Crede [55]), qui disposent de qualités amortissantes supérieures à leurs homologues non-ferromagnétiques à bas et moyen niveau de contraintes, et constantes sur toute la plage fréquentielle des applications de l'ingénierie.

### 1.3.3 L'amortissement non-linéaire

L'essentiel du travail repose sur une approche linéaire de l'amortissement, qui a été validée par l'expérience. Cela tient à la nature du système étudié et au niveau d'excitation acoustique considéré comme relativement bas. Notons néanmoins que les polymères possèdent en général deux types de non-linéarité : une en déplacement, liée au phénomène d'hyperélasticité, et une liée à l'état variable du polymère, connue sous le nom d'effet Mullins. La rigidité du matériau neuf est élevée et diminue sous sollicitation ; elle se stabilise finalement après quelques cycles à une valeur d'usage utilisée pour la modélisation.

Nombreux sont les auteurs qui se sont intéressés à la fois à la dynamique non linéaire et à l'amortissement. Les deux domaines sont corrélés, dans la mesure où l'amortissement augmente significativement avec l'amplitude de vibration (pour de hauts niveaux de sollicitation) au même titre que les non-linéarités. Ils sont rattachés directement dans le cas de la friction (citons le phénomène de stick slip des essuie-glaces). Une classification courante peut être trouvée dans l'ouvrage sur les vibrations non linéaires de Nayfeh et Mook [95]. Trois cas de force d'amortissement  $f$  sont présentés :

$$\left| \begin{array}{ll} f = -\mu \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} & \text{Amortissement par frottement de Coulomb} \\ f = -\mu \dot{x} & \text{Amortissement visqueux} \\ f = -\mu \dot{x} |\dot{x}| & \text{Amortissement quadratique} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où  $x$  est le déplacement. L'amortissement par frottement de Coulomb est à l'origine d'une décroissance temporelle en  $a - bt$ . A l'amortissement visqueux, indépendant de l'amplitude, est associée une décroissance exponentielle. L'amortissement quadratique enfin, proportionnel à l'amplitude, donne une décroissance en  $1/(a + bt)$ . Tous trois appartiennent à une catégorie générale où la force est définie par  $f_d(x, \dot{x}) = a\dot{x}|\dot{x}|^{\theta-1}$ , la valeur de  $\theta$  déterminant un modèle spécifique (Kareem et Gurley [65]). L'écriture générale de la force sous la forme d'une loi en puissance trouve une justification expérimentale : la dissipation dans les matériaux est souvent identifiée en puissance de la contrainte, la puissance variant de 2 à plus de 3 suivant le niveau de sollicitation.

Dans le domaine du contrôle, l'amortissement par frottement offre de très grandes possibilités dans l'exploitation du caractère dissipatif des connections entre les structures. Certaines

connections semblent être à privilégier : les boulons plutôt que les rivets, la soudure quant à elle étant encore moins amortissante. Une étude sur une poutre boulonnée est présentée notamment par Esteban et Rogers [33]. Les auteurs s'intéressent spécifiquement à la notion de localisation énergétique due aux discontinuités incarnées par les boulons par le biais d'une approche propagative et du principe de correspondance.

Whiteman, Ferri [126] présentent l'étude d'une poutre encastree libre, sur laquelle s'applique une force de frottement de Coulomb ponctuelle générée par ses mouvements transversaux. Utilisant la méthode de la balance harmonique, un amortissement viscoélastique équivalent est défini dès lors que le mouvement est stabilisé, c'est-à-dire pour un certain niveau de déplacement. Notons par ailleurs deux études portant sur l'amortissement interfacial. Malyshev [86] s'intéresse à l'amortissement interfacial entre deux couches d'une même poutre susceptibles de glisser l'une sur l'autre, avec un frottement de type coulomb agissant entre elles. Hansen et Spies [53] étudient le même système en introduisant une couche adhésive entre les couches de taille négligeable. Le frottement est supposé proportionnel à la vitesse de glissement.

Notons que des méthodes semi-actives ont été élaborées en exploitant la dissipation par frottement plutôt que par viscoélasticité. Cette alternative a notamment été étudiée par Gaul et Nitsche [42] sous la forme d'un joint semi-actif liant deux plaques, remplaçant une connexion à boulon. Coexistent alors une dissipation naturelle et une dissipation activée électriquement par dilatation du matériau piézoélectrique, dont la force normale va augmenter, engendrant un effort tangentiel par frottement de Coulomb accru.

### 1.3.4 La mesure de l'amortissement

Il existe différentes façons de quantifier l'amortissement. Les mesures ne sont pas toujours équivalentes et illustrent les difficultés inhérentes à l'étude de la dissipation. L'obtention des mesures d'amortissement est expliquée en détail dans l'ouvrage de Zener [135] qui a valeur de référence en matière d'anélasticité des métaux. Le livre de Cremer, Heckl et Ungar [26] est un autre ouvrage de référence sur l'amortissement ; il diffère du livre de Zener dans la façon de construire les mesures de l'amortissement à partir du calcul de la propagation d'ondes amorties dans les poutres. L'objet de ce paragraphe est de rappeler dans un premier temps les mesures courantes puis d'établir un lien entre celles-ci et celles découlant d'un formalisme matriciel propre aux méthodes numériques comme la méthode des éléments finis.

#### 1.3.4.1 Les mesures classiques

En vibrations forcées, la détermination de l'amortissement d'une éprouvette peut être effectuée en mesurant le retard de phase  $\delta$  entre la force appliquée et le déplacement mesuré. C'est la méthode de référence pour de nombreux auteurs comme Zener ou Cremer *et al.* Zener en déduit ce qu'il nomme le **frottement intérieur**  $\tan \delta$  et Cremer *et al* ce qu'ils appellent le **facteur de perte**  $\eta$ . Dans les deux cas il s'agit de la tangente du décalage de phase entre force et déplacement en sollicitation forcée :

$$\tan \delta = \eta \tag{1.2}$$

Cette valeur peut être introduite dans la loi de comportement fréquentielle d'un matériau

isotrope qui relie la contrainte  $\tilde{\sigma}$  à la déformation  $\tilde{\epsilon}$ . La loi de comportement  $\tilde{\sigma} = \tilde{E} \tilde{\epsilon}$  fait apparaître le module complexe  $\tilde{E}$  donné par :

$$\tilde{E} = E (1 + i\eta) = E (1 + i \tan \delta) \quad (1.3)$$

Trois méthodes indirectes approchées sont alternativement employées pour évaluer le frottement intérieur : la méthode spectrale de largeur de bande à -3dB, la méthode évaluant la capacité spécifique d'amortissement et la méthode fondée sur le décrément logarithmique. La **méthode spectrale de largeur de bande à -3dB** est basée sur la mesure de la variation de fréquence  $\Delta f = f_2 - f_1$  autour d'un pic de résonance, où  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences pour lesquelles l'amplitude de vibration est réduite de moitié par rapport à l'amplitude à la fréquence de résonance. Zener préconise une sollicitation à amplitude constante pour la procédure expérimentale dont la fréquence varie lentement. En se basant sur des calculs de torsion d'une éprouvette d'essai, Zener établit que si le frottement intérieur est petit par rapport à l'unité, il est donné à la fréquence de résonance  $f$  par l'expression :

$$\tan \delta \sim \frac{\Delta f}{f\sqrt{3}} \quad (1.4)$$

L'énergie de déformation  $\Delta E$  dissipée dans un cycle divisée par l'énergie de déformation maximum permet de définir la **capacité spécifique d'amortissement  $\Psi$**  qui est aussi une mesure de l'amortissement. L'énergie de déformation dissipée correspond à l'aire de l'hystérèse apparaissant dans un graphique contrainte-déformation construit à partir d'essais cycliques en sollicitation forcée. Zener montre que pour un frottement intérieur faible, on a :

$$\tan \delta \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Psi}{2\pi} \quad (1.5)$$

La **méthode du décrément logarithmique  $\Delta$**  permet également de mesurer le frottement intérieur lorsque celui-ci est petit devant l'unité :

$$\tan \delta \sim \frac{\Delta}{\pi} \quad (1.6)$$

où  $\Delta$  est le logarithme du rapport de deux amplitudes successives mesurées sur une éprouvette en sollicitation libre. Cremer *et al* obtiennent le même résultat. Ils suggèrent une modification de la formule si l'amortissement est grand :

$$\tan \delta \sim \frac{\Delta}{\pi\sqrt{1+(\Delta/2\pi)^2}} \quad (1.7)$$

#### 1.3.4.2 Les mesures basées sur le problème aux valeurs propres matriciel

Considérons à présent le problème aux valeurs propres associé à un système vibratoire amorti général

$$(K_r + iK_i - \lambda M) u = 0, \quad (1.8)$$

où  $K_r$  et  $K_i$  sont des matrices de rigidité symétriques définies semi-positives,  $M$  est une matrice de masse symétrique définie positive,  $(\lambda, u)$  est un couple propre complexe, et  $i$  le nombre imaginaire. Le vecteur propre complexe<sup>6</sup> peut se décomposer en parties réelle et imaginaire  $u = u_r + iu_i$ . Il est possible de définir la notion d'énergie modale dès lors qu'un couple propre vérifie la relation (1.8). Il faut alors multiplier l'équation du problème aux valeurs propres par un vecteur de déplacement à gauche. Pour les calculs de cette section il peut être arbitraire tant qu'il ne rend pas l'égalité énergétique indéterminée; par souci de cohérence avec les calculs de puissance sous sollicitation périodique<sup>7</sup> nous optons pour le transposé conjugué de  $u$  qui s'écrit  $u^H = u_r^T - iu_i^T$ . Remarquons que la diagonalisation<sup>8</sup> d'un tel système matriciel nécessite de multiplier à gauche par  $u^T$ . Le calcul donne la valeur propre complexe  $\lambda$  sous la forme du rapport des énergies modales élastique et viscoélastique sur l'énergie modale d'inertie :

$$\lambda = \frac{u^H K_r u + i u^H K_i u}{u^H M u} = \frac{u_r^T K_r u_r + u_i^T K_r u_i + i (u_r^T K_i u_r + u_i^T K_i u_i)}{u_r^T M u_r + u_i^T M u_i} \quad (1.9)$$

Tous les termes sont des scalaires réels homogènes à une énergie, positifs ou éventuellement nuls (termes associés aux matrices de rigidité dans le cas des modes de corps rigide). La nature complexe des vecteurs propres fait apparaître deux contributions énergétiques pour chaque matrice, l'une associée à la partie réelle du vecteur, l'autre à sa partie imaginaire.

Etablissons à présent le lien entre le frottement interne  $\tan \delta$  et la valeur propre  $\lambda$ . Dans le cas où le modèle d'amortissement s'applique à l'ensemble des degrés de liberté du système<sup>9</sup>, on a  $K_i = \tan \delta K_r$ . Par conséquent,

$$\tan \delta = u^H K_i u / u^H K_r u = \text{Im}(\lambda) / \text{Re}(\lambda) \sim 2 \text{Im}(\omega) / \text{Re}(\omega) \quad (1.10)$$

où  $\text{Im}(\lambda)$  désigne la partie imaginaire de  $\lambda$ ,  $\text{Re}(\lambda)$  sa partie réelle et  $\omega$  la pulsation complexe du système. On en déduit la capacité spécifique d'amortissement  $\Psi$  :

$$\Psi = \Delta E / E = \text{Im}(\lambda) / (2\pi \text{Re}(\lambda)) \quad (1.11)$$

Nous définissons donc la capacité spécifique d'amortissement  $\Psi$  à partir du ratio de l'énergie dissipée par l'énergie élastique réversible (comme le préconisent Cremer *et al*) plutôt que par l'énergie de déformation maximum.

La mesure de l'amortissement  $\alpha$  qui a finalement retenu notre attention et qui sera constamment employée dans ce mémoire est simplement basée sur la partie imaginaire de la pulsation modale. Elle est reliée aux valeurs propres  $\lambda$  calculées par le solveur aux valeurs propres :

$$\alpha = \text{Im}(\omega) = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) \quad (1.12)$$

Si la partie réelle de la pulsation se mesure en  $\text{rad.s}^{-1}$ , la partie imaginaire est homogène

<sup>6</sup>La notion de complexité des modes sera discutée dans le chapitre 2, § 2.3.2.

<sup>7</sup>Le calcul de puissance sera présenté au chapitre 4, § 4.3.3.9.

<sup>8</sup>Nous aborderons la question de la diagonalisation au chapitre 3, § 3.2.

<sup>9</sup>Modèle d'amortissement dit homogène.

à l'inverse d'un temps;  $\alpha$  a donc pour unité le Hz. Lorsque le mode considéré est un mode de résonance, c'est-à-dire un mode propre de l'opérateur associé au problème vibroacoustique complet, cette quantité est directement accessible par l'expérience; il s'agit en effet de l'argument des exponentielles décroissantes  $\exp^{-Im(\omega)t}$  qui caractérisent les solutions transitoires après un choc par exemple.

Etablissons le lien entre  $\alpha$  et le décrement logarithmique en introduisant la période d'oscillation  $T$ . Le décrement s'écrit :

$$\Delta = \log 10 \frac{\exp(-\alpha t)}{\exp(-\alpha(t+T))} = \alpha T \quad (1.13)$$

On vérifie que :

$$\tan \delta \sim \Delta / \pi = 2 \alpha / Re(\omega) \quad (1.14)$$

## 1.4 Etude d'un traitement spécifique (fourni par la SMAC)

### 1.4.1 Des patches en polymère contraint

L'étude expérimentale validant les méthodes numériques a été largement basée sur l'étude d'un traitement amortissant fabriqué par la société SMAC à Toulon. Le traitement en question est un traitement externe se présentant sous la forme de plaques lamellées tricouches (adhésif/polymère/alu) de 1,7 mm d'épaisseur découpables; l'adhésif permet une application des patches sur une structure vibrante à la fois rapide et aisée. La structure d'un patch est présentée dans la figure 1.3.

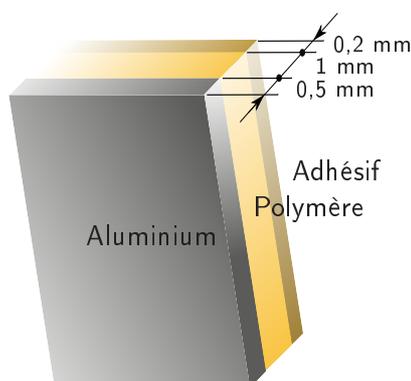


FIG. 1.3 – Patch contraint de la SMAC.

Il est fait usage des patches dans différents secteurs industriels comme celui de l'aéronautique, les phases de conception et de développement passées. Il a donc la forme d'un traitement externe utilisé a posteriori.

### 1.4.2 Une première expérience

L'étude dynamique de phénomènes aussi complexes que l'atténuation et la dissipation des ondes nécessite d'envisager avant toute tentative de modélisation l'étude expérimentale d'un

système donné, simple mais représentatif, qui puisse ensuite guider l'effort de modélisation et servir de référence ultérieurement pour valider la modélisation. L'une des questions centrales a concerné la prise en compte éventuelle dans le modèle de non linéarités en déplacement. Les sollicitations acoustiques étant très faibles, elles justifient en pratique une approche linéaire ; néanmoins les polymères sont caractérisés par un comportement hyperélastique fortement non linéaire même à bas niveau de chargement. L'expérience doit donc permettre de justifier l'une des deux hypothèses.

Il a donc été envisagé d'étudier une structure académique : une plaque fine rectangulaire en aluminium sur laquelle ont été collés les patches en polymère contraints présentés au paragraphe précédent. Quatre configurations différentes ont été testées pour obtenir quelques éléments expérimentaux de comparaison des traitements :

- plaque sans traitement,
- plaque avec un patch collé en son centre,
- plaque avec un patch de même taille collé dans un coin,
- plaque avec deux patches de même taille placés aux deux positions précédentes.

La figure 1.4 montre la disposition et la taille des traitements dans la dernière configuration. Il est à remarquer en outre qu'une tentative a été faite d'effectuer une analyse modale sur la plaque couverte intégralement, mais les résultats se sont révélés tout à fait inexploitable (tout au moins avec la méthode que nous expliquons par la suite), les résonances étant rarement observables du fait du très fort amortissement. L'objectif de l'analyse mo-

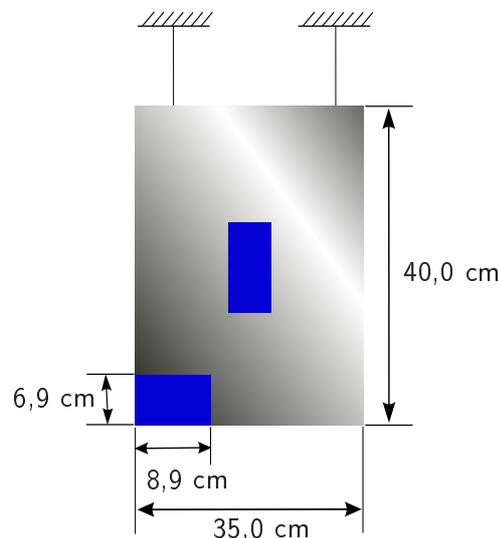


FIG. 1.4 – *Plaque avec traitement par patch en polymère contraint.*

dale est de connaître l'amortissement et la fréquence des modes de la structure, en essayant de s'affranchir au maximum de l'atténuation et de la dissipation aux frontières. Il a donc été privilégié de suspendre la plaque par deux fils en nylon fins, encastrés et collés après perçage

de la plaque (la question de l'amortissement des fils de suspension, que nous négligerons, est évoquée au § 1.5.3). L'inconvénient de telles conditions aux limites provient de l'excitation aisée de modes rigides, le système n'étant bloqué que dans la direction de la gravité. Une méthode sans contact a donc été retenue, par excitation acoustique (haut-parleur) et par mesure avec un vibromètre laser à balayage. Matériel et configuration expérimentales sont récapitulés dans la figure 1.5. Voici quelques remarques liées à l'utilisation de patches en polymère :

- les patches ont été collés 48h avant que ne débute l'expérience,
- la température ambiante n'a pas été contrôlée et a subi inmanquablement des fluctuations de quelques degrés au cours d'une expérience de plusieurs heures,
- il a été tenté de minimiser l'effet Mullins (phénomène de non linéarité d'un polymère vierge : la rigidité initiale, importante, décroît après plusieurs cycles de sollicitation vers une valeur stabilisée d'usage) en procédant au début de l'expérience à l'excitation de la structure à haut niveau acoustique ; mais aucune quantification de son influence n'a été précisément faite.

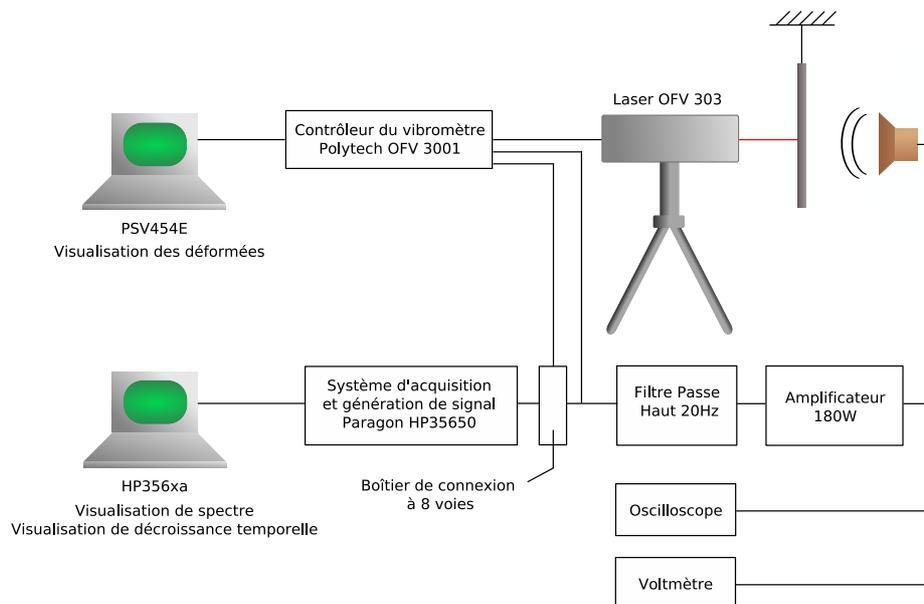


FIG. 1.5 – Représentation schématique de l'expérience et du matériel utilisé.

Une attention systématique a été portée sur le voltage d'entrée. Il a notamment été réduit dans les basses fréquences pour ménager le haut-parleur dont l'excavité est en  $1/f^2$  et dans le cas des excitations de type bruit blanc pour lesquelles la dynamique de crête est grande. Le niveau a été augmenté dans les hauts registres, variant finalement de 0,4V à 1,5V environ. Par ailleurs, il a été décidé de n'exciter le système viscoélastique qu'à une seule fréquence pour faciliter l'analyse et d'éviter la méthode usuelle de mesure de largeur de bande à  $-3dB$ . Cette méthode, bien que pratique, a pour hypothèse que le système étudié est peu sensible à la fréquence sur la bande de mesure  $\Delta f$  et restreint son application aux matériaux faible-

ment viscoélastiques. La procédure s'est déroulée en deux étapes :

- dans une première étape, la fréquence des modes de résonance a été repérée par une excitation large bande,
- dans une deuxième étape, l'amortissement de chacun de ces modes a été déduit de l'observation de la décroissance temporelle après excitation sinusoïdale à la fréquence du mode, puis arrêt brusque de celle-ci.

Les modes de résonance correspondent à la fréquence des maxima de la fonction de réponse fréquentielle lorsque la structure est soumise à une excitation de type bruit blanc. Les modes de résonance, qui ne sont autres que les oscillations libres du système couplé, seront au coeur d'une méthode de résolution de dynamique amortie particulièrement efficace présentée au chapitre 2. Dans la première étape, la résolution fréquentielle a été choisie de 0,25 Hz, le fenêtrage de type Hanning, et 30 moyennes ont été calculées par bande fréquentielle. L'identification des fréquences a été répétée pour différents points de mesure. Le repérage précis des modes a nécessité une deuxième phase au cours de laquelle la bande fréquentielle d'étude initialement très large a été remplacée par plusieurs bandes de taille modérée, de façon à concentrer l'énergie du signal autour des modes et à ne pas exciter les modes avoisinants. Rappelons qu'une condition suffisante pour repérer les modes de résonance est que le spectre d'excitation soit plat autour de ces modes. Dans la deuxième étape, deux points près des bord et coin (où l'amplitude de vibration est suffisamment importante pour tous les modes, les conditions aux limites étant libres) ont été systématiquement utilisés pour la mesure de l'amortissement.

Après arrêt de l'excitation, l'amplitude du déplacement décrit une exponentielle décroissante, dont l'argument est aisément observable par le biais d'une fonction de l'analyseur permettant de représenter en échelle logarithmique l'enveloppe du signal. Les courbes obtenues s'apparentent toujours précisément à une droite, sauf rarement lorsqu'interfèrent des modes très proches perturbant le signal temporel de décroissance. Ceci nous amène à différents constats, si ce n'est que la méthode est robuste et précise (les mesures répétées en différents points étant toujours très concordantes) :

- Les solutions temporelles en  $\exp i\omega t$  avec  $\omega \in \mathcal{C}$  peuvent être utilisées comme fonctions de Ritz pour le problème de vibrations libres amorties
- Le système est linéaire pour les chargements acoustiques employés, la pente de la droite mesurée étant constante au cours de la décroissance temporelle de l'amplitude

Il est à noter que les résultats de ce type de mesure, précise d'une part, et caractérisant l'amortissement à une seule fréquence d'autre part, n'est utilisable que pour certaines plages d'amortissement. S'il n'y a pas de limite inférieure a priori, le cas d'un amortissement très fort pose un double problème :

- La décroissance est très brève (rendant la mesure délicate) et requiert d'augmenter autant que possible l'excitation initiale

- Le système excitateur à bobine et électroaimant constitue un système masse ressort amortisseur qui peut ne pas s'arrêter aussi promptement que le système étudié cesse de vibrer

### 1.4.3 Analyse des résultats

Les résultats se présentent sous la forme de déformées modales (figures 1.6 et 1.7), spectres de réponse, et de signaux temporels de décroissance en échelle logarithmique, et comprennent une trentaine de modes jusqu'à 900 Hz.

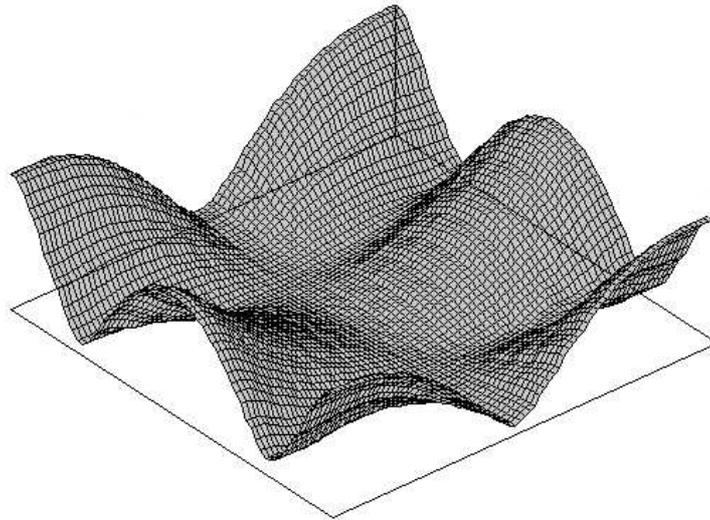


FIG. 1.6 – Déformée modale mesurée à 124,4 Hz.

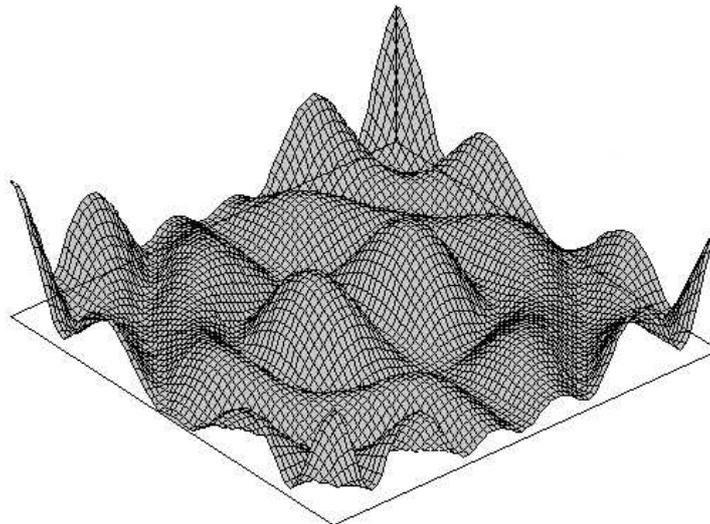


FIG. 1.7 – Déformée modale mesurée à 795,6 Hz.

L'amortissement mesuré est l'amortissement total : il prend en compte l'ensemble des phénomènes de dissipation et d'atténuation. Dans cette configuration spécifique, deux termes sont

prépondérants : l'amortissement viscoélastique du polymère et l'amortissement thermoélastique de l'aluminium. Leur analyse, ainsi que celle d'autres composantes comme l'amortissement par couplage fluide/structure (c'est-à-dire par rayonnement acoustique et par viscosité de l'air) ou comme la viscoélasticité de l'aluminium est faite dans les chapitres 4 et 5. L'amortissement des fils, négligé, est évoqué au § 1.5.3.

La figure 1.8 montre l'amortissement des premiers modes pour les quatre configurations étudiées.

Quelques remarques viennent immédiatement à l'esprit :

- l'amortissement de la plaque sans traitement en basse fréquence n'est pas négligeable devant celui des autres configurations traitées. Toutefois, il minore l'ensemble des résultats,
- l'amortissement de la configuration avec deux patches majore l'ensemble des résultats,
- il existe souvent des modes pour lesquels le traitement avec un seul patch est aussi amortissant que le traitement avec deux patches.

Il se dégage de ces remarques une conclusion forte : il semblerait qu'un traitement soit plus ou moins efficace suivant la façon dont il est appliqué, et a priori, pour certains modes, qu'une réduction du poids des traitements de moitié puisse conduire à des résultats optimaux.

Ces conclusions, toutefois, ne se placent que dans le cadre d'une analyse vibratoire simple. Elles sont satisfaisantes du point de vue du dynamiqueien, mais pas du point de vue du vibroacousticien : l'amortissement étant l'amortissement total, il contient notamment l'amortissement par rayonnement acoustique. Or, plus cet amortissement est important, plus l'amortissement total est élevé ; mais plus il est élevé, plus l'énergie vibratoire est transmise par rayonnement à l'air, plus la pression acoustique, et donc le bruit, sont importants. Nous verrons du reste plus tard que cet amortissement est très faible dans le cas d'une plaque suspendue sous sollicitation basse fréquence (en-dessous de la fréquence de coïncidence).

La figure 1.10 montre l'amortissement de la plaque seule et la figure 1.11 l'amortissement de la plaque avec deux patches auquel on a substitué ce premier. La procédure est destinée à ne garder que la contribution relative des patches et montre l'efficacité du polymère lorsque la fréquence augmente.

La modification des fréquences de résonance est relativement faible et le signe du décalage fréquentiel est négatif, ce qui montre que les patches apportent un effet de masse prépondérant devant l'effet de rigidité. Nous verrons que cela n'est pourtant pas toujours le cas. La figure 1.9 montre la variation en pourcentage de la fréquence de résonance des trois configurations traitées par rapport à la configuration de la plaque sans patch prise comme référence.

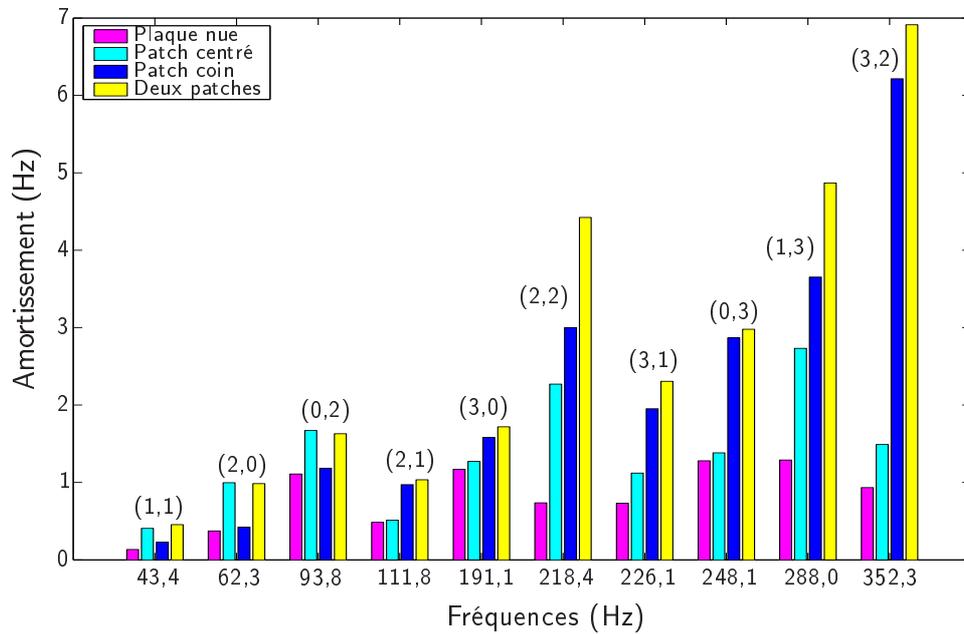


FIG. 1.8 – Amortissement des dix premiers modes avec quatre configurations de traitement. Plaque libre de dimensions 35cm × 40cm × 0,2 cm.

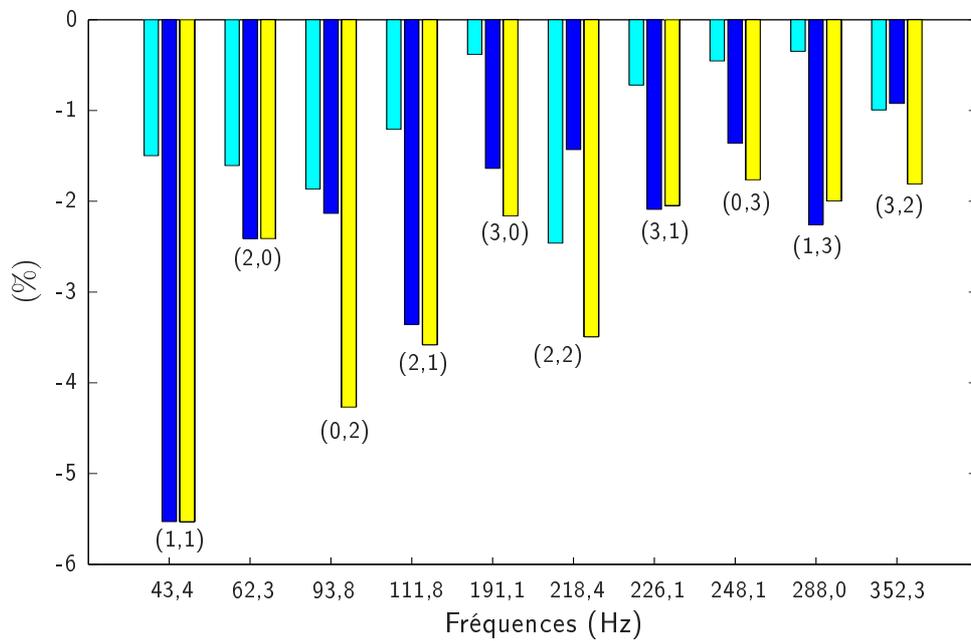


FIG. 1.9 – Variation de fréquence de la résonance des cas traités par rapport au cas de plaque seule.

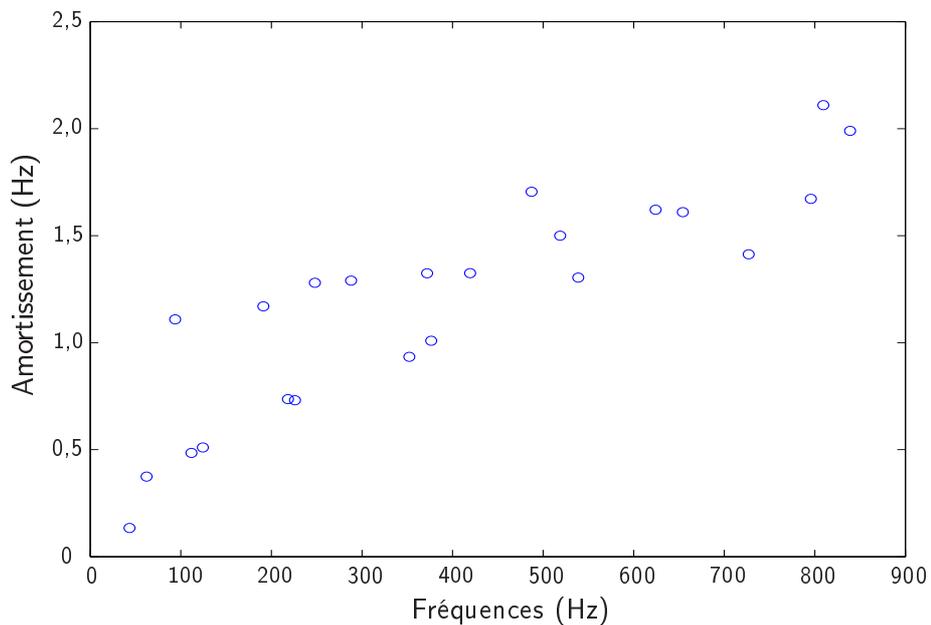


FIG. 1.10 – Amortissement de la plaque seule.

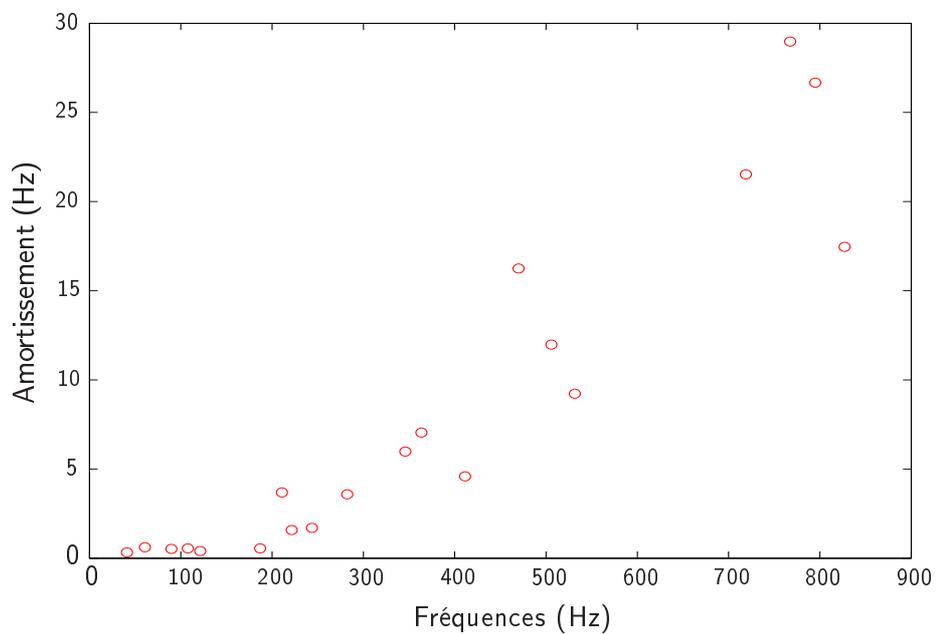


FIG. 1.11 – Amortissement de la plaque avec deux patches auquel a été soustrait l'amortissement de la plaque seule.

## 1.5 La modélisation de l'amortissement

Cette expérience nous a permis d'observer la dissipation d'un point de vue macroscopique, l'amortissement apparaissant comme une quantité «globale». Il importe à présent de définir une méthode de modélisation pour la quantifier, car son rôle est fondamental dans la réponse structurelle. L'une des démarches actuelles, à laquelle nous souscrivons, est de distinguer chacune des composantes de l'amortissement, car leur existence émane souvent de mécanismes très différents. Pour préciser l'approche de la modélisation par composante, nous nous intéresserons dans un premier temps aux classifications possibles de l'amortissement. Cette analyse nous amène à définir deux catégories fondamentales que sont l'amortissement viscoélastique<sup>10</sup> et l'amortissement par couplage<sup>11</sup>, dont la nature est très différente. Les difficultés inhérentes à la modélisation de ces deux catégories seront ensuite présentées. L'amortissement aux limites du domaine sera enfin abordé, et il sera expliqué de façon qualitative à partir d'une analyse bibliographique pourquoi l'amortissement des fils de suspension est négligé dans l'expérience de plaque suspendue.

### 1.5.1 Une classification possible des amortissements

On note dans la littérature des essais fréquents de classification de l'amortissement, dont voici un exemple :

- Amortissement matériau, ou intrinsèque, lié à l'inhomogénéité et à l'imperfection du réseau cristallin, à la présence d'atomes étrangers, de précipités, de dislocations associées macroscopiquement à la plasticité ; amortissement lié à la viscoélasticité des macromolécules de polymère,
- Amortissement interfacial dû aux phénomènes de friction, d'adhésion, de pompage, de thermoviscoélasticité,
- Amortissement par couplage, comprenant les amortissements thermoélastique, piézoélectrique, magnétique et par rayonnement acoustique.

De telles tentatives de classification se heurtent néanmoins à de nombreuses difficultés. L'amortissement thermoélastique, par exemple, est susceptible d'appartenir aux trois catégories : traduisant un couplage entre les équations dynamique et thermique, il peut être prépondérant à l'interface de deux matériaux conducteurs, mais peut aussi s'apparenter à un amortissement matériau dans le cas d'une plaque subissant des déformations de flexion, et dont l'épaisseur est fixée ; le modèle rhéologique de Zener est alors bien adapté à sa description.

Nous opterons pour une classification séparant simplement l'amortissement par couplage traité au chapitre 4 et l'amortissement viscoélastique abordé au chapitre 5. Bien qu'arbitraire et spécifique à notre cadre d'étude, il existe des différences fondamentales entre ces deux catégories d'amortissement. La modélisation de l'amortissement par couplage nécessite la prise en compte d'un domaine supplémentaire : domaine fluide en vibroacoustique, domaine thermique en thermoélasticité, domaine frontalier pour traiter le couplage aux

---

<sup>10</sup>Traité au chapitre 5.

<sup>11</sup>Traité au chapitre 4.

conditions aux limites. La définition d'un domaine est particulièrement ardue et nécessite souvent des hypothèses fortes restreignant le cadre de validation expérimental (conditions de Sommerfeld en acoustique, de flux nul en thermoélasticité, de transmission énergétique nulle aux conditions aux limites). La modélisation par couplage nécessite également la compréhension d'un phénomène décrit par une équation supplémentaire (équation de propagation, équation thermique, équation dynamique d'un système supplémentaire couplé au système principal au niveau des conditions aux limites). La modélisation de l'amortissement viscoélastique est une modélisation locale, susceptible de ce fait d'être utilisée pour la plasticité, le frottement sec et tous les phénomènes dissipatifs à l'échelle microscopique. L'équation de dynamique inclut un terme supplémentaire dissipatif, qui introduit éventuellement un comportement non linéaire en déplacement.

Remarquons que cette distinction n'est pas sans rappeler celle faite par Cremer *et al* [26] au sujet de la dissipation et de l'atténuation<sup>12</sup>. Tous deux conduisent à une réduction d'amplitude vibratoire en participant à l'amortissement structural. La dissipation est un processus au cours duquel le mouvement macroscopique est transformé en chaleur : plasticité, viscoélasticité, viscosité de l'air, frictions de tous types, sont des exemples de phénomènes à caractère dissipatif. La redistribution d'énergie ou l'atténuation sont liées à la façon dont l'énergie va être véhiculée et répartie dans un certain système. Elles sont attachées à la notion de sous-système, de réservoir énergétique et de couplage entre sous-système. L'atténuation géométrique par exemple, est un exemple courant de redistribution énergétique : l'énergie d'une onde divergente se répartit au fur et à mesure de sa propagation dans un espace de plus en plus important. C'est le cas de la lumière solaire arrivant sur la Terre dont l'énergie n'a pas été dissipée, mais uniquement atténuée sur son parcours spatial.

Remarquons enfin que l'amortissement thermoélastique ou l'amortissement par viscosité aérienne relèvent à la fois des phénomènes de dissipation et de redistribution : l'énergie vibratoire est d'abord transmise dans un autre sous-système par transduction (les énergies thermique et acoustique résultent de la transmission sans dissipation de l'énergie vibratoire par couplage thermoélastique et fluide / structure), puis elle est dissipée au sein de ces sous-systèmes. La dissipation figure explicitement dans les équations physiques associées à ces sous-systèmes (l'équation de la chaleur et l'équation de Navier-Stokes).

### 1.5.2 Les difficultés de la modélisation de l'amortissement

La difficulté de la modélisation de l'amortissement est multiforme. Nous en distinguons trois aspects essentiels :

- Un aspect mathématique lié à la non-stationnarité des processus, pour lesquels la notion d'énergie, d'inversion des opérateurs non auto-adjoints est délicate, pour les descriptions fréquentielle comme temporelle. L'un des points forts de la formulation énergétique et de la méthode de résolution du chapitre 2 concerne leur aptitude à prendre en compte tout amortissement linéaire général comme tel, sans faire d'extrapolation à partir du cas non-amorti

---

<sup>12</sup>Le terme de redistribution d'énergie serait sans doute plus approprié.

- Un aspect physique dans la modélisation de la dissipation. Les phénomènes microscopiques à ce titre, ne sont connus que qualitativement la plupart du temps (viscoélasticité des métaux, des polymères) et nécessitent encore un travail d'expérimentation pour dégager des lois macroscopiques (exceptions faites de la thermoélasticité et de la viscosité fluide, qui nécessitent seulement l'usage de quelques constantes expérimentales à caractère bien défini, et qui sont disponibles dans la littérature)
- Un deuxième aspect physique concernant la modélisation de l'atténuation. La délimitation d'un système par le biais des conditions aux limites idéalisées est souvent irréaliste. Si les conditions de flux thermique nul sont satisfaisantes autour d'une plaque en aluminium dans l'air, au même titre que les conditions de Sommerfeld en milieu aérien infini, le système dynamique est souvent borné de façon arbitraire (pour des raisons de modélisation physique et de taille du modèle numérique) à la limite d'un sous-système identifié que nous pensons isolé, mais qui ne l'est pas, ni dynamiquement, ni thermiquement.

L'amortissement en revanche peut faciliter la modélisation, à bien des égards :

- Les solutions propres du problème amorti sont uniformément décroissantes (en référence à l'expérience du § 1.4.2 et à des contributions théoriques comme celle de Park *et al* [100]) et à énergie finie. Elles forment une classe de solution plus large et plus simple à traiter mathématiquement que les solutions non-amorties
- L'amortissement réduit les effets non linéaires et les effets d'endommagement
- Une modélisation fine de l'amortissement peut fournir des critères pour délimiter un système sur une frontière appropriée

En l'état actuel de la modélisation, ce dernier point demeure inexploité, bien qu'étant tout à fait pertinent à notre sens. Prenons un seul exemple : la modélisation d'une voiture dans les hautes fréquences. Les prédictions dynamiques se limitent actuellement à un certain seuil fréquentiel, pour des raisons numériques. Or, s'il est vrai que l'ensemble de la structure est couplé en basses fréquences, il existe néanmoins un découplage entre les éléments structurels dans les hautes fréquences du fait de l'amortissement. Nous pensons que la compréhension des mécanismes de dissipation, associée à un travail d'analyse des couplages et de sous-structuration<sup>13</sup>, est une piste à envisager pour dépasser les limites actuelles.

### 1.5.3 L'amortissement aux limites du domaine : cas des fils de suspension

Ayant pris le parti de modéliser les différentes sources de dissipation, l'expérience menée sur une plaque suspendue nous a conduit à nous interroger sur l'amortissement aux limites du domaine au niveau des fils de suspension. Nous présentons ici une analyse bibliographique de l'amortissement des fils et des paramètres qui l'influencent puis justifions notre choix de ne pas prendre en compte l'amortissement aux limites du domaine.

---

<sup>13</sup>Par le biais de la méthode CMS par exemple (Component Mode Synthesis).

### 1.5.3.1 Quelques références bibliographiques

La littérature à ce sujet est assez fournie. L'une des raisons est liée au fait que l'étude des fils de suspension revêt une importance considérable pour l'amélioration des interféromètres, assimilés à des pendules. Il est fait la distinction entre le mode pendule en  $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$  (où  $l$  est sa longueur,  $g$  la gravité) et les modes supérieurs appelés modes violon, que l'on peut calculer à partir de l'équation de la corde.

Une expression de l'amortissement du pendule  $Q_p^{-1}$  est retrouvée systématiquement dans la littérature sur l'interférométrie laser (Rowan *et al* [110], Gretarsson *et al* [49])

$$Q_p^{-1} = Q_{mat(\omega)}^{-1} \frac{n\sqrt{TEI}}{mgl} \quad (1.15)$$

La formule est calculée à partir de la tension  $T$  des  $n$  fils de suspension de longueur  $l$  et de moment quadratique  $I$ , de la gravité  $g$ , du module d'élasticité  $E$ , de la masse  $m$  du pendule ; elle ne prend en compte que la flexion locale du fil près du point d'attache (celle du fil près de la masse est négligée). La valeur est multipliée par deux si la masse ne peut pas tourner dans le plan d'oscillation. Elle préconise l'utilisation de grands fils de suspension. Rowan *et al* ajoutent à ce modèle une contribution thermoélastique basée sur le modèle de Zener. Gretarsson *et al* considèrent de plus une perte matériau supplémentaire qu'ils considèrent liée à la surface des fils, du fait que la formule ne soit pas vérifiée par l'expérience pour de faibles diamètres de fil. Celle-ci préconise en effet une diminution de son diamètre qui intervient dans l'expression du moment quadratique  $I = d^4\pi/64$ .

L'une des études théorique et expérimentale les plus pertinentes, développant l'approche par composantes, est sans doute celle menée par Valette et Cuesta [120] au sujet des cordes de guitare. Un ensemble large de paramètres est pris en compte dans la modélisation de la corde (non-linéarités, rigidité, amortissement). Seul l'effet des conditions aux limites dans la dissipation et l'atténuation des vibrations n'est pas pris en compte. Trois composantes d'amortissement sont identifiées : l'amortissement thermoélastique (jugé assez faible mais constant sur tout le domaine fréquentiel), l'amortissement viscoélastique des métaux (jugé important dans le domaine des moyennes et hautes fréquences), et l'amortissement par viscosité aérienne (prépondérant en basse fréquence).

### 1.5.3.2 Le choix du fil

Nous poursuivons ce paragraphe par une analyse des caractéristiques (géométrie, matériau) des fils de suspension de façon à ce que leur amortissement soit négligeable et non inclus dans la modélisation de la dissipation du système.

**La longueur** Les arguments visant à réduire la dissipation pour des raisons dynamiques sont souvent en contradiction avec ceux visant à réduire l'amortissement du matériau. Le mouvement de la plaque impose un déplacement aux fils ; il est donc préférable que les fils soient les plus courts possibles pour que l'énergie de déformation moyenne qui leur est associée soit faible en regard à l'énergie de déformation totale. En première approximation, l'énergie de déformation moyenne est en effet une fonction linéaire de la longueur. Il est néanmoins montré que les fils courts sont plus dissipatifs ; Valette et Cuesta évaluent une

augmentation de l'ordre de 10-20 % de l'amortissement d'une corde lorsqu'elle est réduite de 1 m à 63 cm, du fait selon les auteurs des pertes thermiques aux extrémités, encastées en l'occurrence, qui sont prépondérantes pour les petites cordes. Il semble finalement raisonnable de choisir une longueur courte de fil mais pas trop pour pallier les inconvénients précédemment cités et pour éviter à tout prix que la corde ne soit trop sollicitée en tension/extension, car une dépendance non-linéaire à l'amplitude de vibration du bord de la plaque est alors introduite. Il est importe enfin d'effectuer un ajustement de la longueur retenue en tenant compte du comportement modal de la corde et en veillant à ce que ses modes soient éloignés de ceux de la plaque.

**La section** On privilégie la section la plus fine possible pour réduire l'amortissement du mode de pendule (équation (1.15)). Un tel choix rend la rigidité transverse du fil plus faible si tant est que celle-ci ne soit pas de toutes façons négligeable par rapport à la rigidité due à la tension du fil<sup>14</sup>.

La section ne semble pas avoir de rôle majeur sur la dissipation liée aux modes flexion. La force longitudinale est constante quelle que soit la section (du fait d'un poids structurel invariable) et le déplacement de l'extrémité du fil est fixé en première approximation par la vibration de la plaque : la réduction de section augmente la tension, décale les fréquences de flexion vers le haut du spectre mais ne modifie pas la force de rappel exercée par la corde sur la plaque. Le volume de la corde diminue de la même façon que sa tension augmente, le rapport de l'énergie de déformation de la corde par rapport à celle du système entier reste donc constante.

Considérons à présent les mécanismes de dissipation du fil. L'amortissement thermoélastique donné par le modèle de Zener et repris par Valette et Cuesta [120] est défini par deux paramètres : le premier est la position fréquentielle du pic de Debye thermoélastique (en  $1/r^2$ ) et le deuxième la valeur de l'angle de perte<sup>15</sup> en  $1/fr^2$ , où  $2r$  est la hauteur d'une section rectangulaire approchant au mieux la section circulaire du fil et  $f$  la fréquence considérée. Lorsque la hauteur de la section varie dans un rapport de deux, la position du pic est multipliée par quatre, mais l'angle de perte reste constant. L'énergie de déformation étant constante lorsque la section varie la méthode d'énergie de déformation modale nous indique que l'amortissement thermoélastique est également inchangé. Les physiciens étudiant les MEMS et la miniaturisation connaissent bien ce problème : le régime fréquentiel où la structure est la plus amortissante correspond à la plage d'utilisation du système et se déplace à mesure que l'on miniaturise. La miniaturisation n'apporte aucun effet positif a priori en matière d'amortissement thermoélastique.

L'amortissement viscoélastique présent dans les cordes métalliques apporte une contribution haute fréquence qui diminue si la tension augmente, ce qui est le cas si la section est réduite (Valette et Cuesta [120]). L'amortissement par frottement visqueux dans l'air est évalué par les mêmes auteurs à l'aide de la solution de Stokes d'un écoulement laminaire alternatif autour d'une cylindre, solution qui donne  $Q^{-1} = \frac{\eta + 2r\sqrt{\pi\eta\rho_{air}f}}{\rho_{fil}f}$ , où  $\eta$  est le coefficient de viscosité de l'air,  $\rho_{air}$  la densité de l'air,  $\rho_{fil}$  la densité de la corde,  $r$  son rayon,  $f$  la fréquence

<sup>14</sup>Les cordes idéalisées, contrairement aux poutres, n'ont pas de rigidité transverse.

<sup>15</sup>Cette formule approchée permet d'évaluer l'angle de perte thermoélastique lié aux mouvements de flexion du fil dans le cas où la fréquence du pic de relaxation thermoélastique est plus basse que la fréquence des modes considérés.

de sollicitation.

En conclusion, la réduction de section diminue l'amortissement du mode de pendule, l'amortissement visqueux aérien, l'amortissement viscoélastique du matériau, mais ne modifie ni l'amortissement thermoélastique ni l'énergie de déformation des modes de flexion.

**Le matériau** Naturellement, il convient d'opter pour un matériau peu dissipatif : peu viscoélastique, peu conducteur de chaleur. On peut également prendre note de l'analyse de Cremer *et al* [26] concernant la transmission des ondes longitudinales entre deux poutres semi-infinies et qui suggère d'introduire une forte rupture d'impédance des ondes associées aux deux milieux. L'impédance des ondes longitudinales dans une poutre infinie est donnée par  $Z = S\sqrt{\rho E}$  où  $S$  est la section,  $E$  le module de Young et  $\rho$  la densité du matériau. Le choix de fils de section fine, de densité et rigidité faibles par rapport à la plaque permet donc de réduire en partie le transfert énergétique entre les deux milieux.

### 1.5.3.3 Un amortissement négligé

L'analyse bibliographique précédente nous a poussé à ne pas inclure de dissipation associée aux fils et à la frontière du système. Nous invoquons trois raisons :

- La rigidité transverse des fils, s'apparentant plus à une corde qu'à une poutre, est faible. De ce fait, les mouvements transverses liés à la flexion de la plaque ne subiront qu'une force de rappel très faible de la part des fils (liée au poids de la plaque pour le mode pendule, et à la tension des fils pour les modes violon). Les fils représentent en outre une quantité de matière très inférieure à celle de la plaque. En conclusion, en se référant à la méthode énergétique, il semble que l'énergie dissipée par un système peu rigide, de taille très mesurée, et modérément amorti, soit tout à fait négligeable devant les autres sources de dissipation
- La difficulté de la modélisation physique de la dissipation : malgré l'existence de quelques résultats dans la littérature, il est délicat de proposer un modèle satisfaisant sans étude approfondie du matériau et des jonctions. A notre sens d'ailleurs, il est autant de sources de dissipation au point d'accroche des fils dans la plaque (ou sur le cadre qui les supporte), dues aux concentrations de contrainte et aux gradients thermiques importants au sein du métal, qu'au sein des fils
- La difficulté de la modélisation physique de l'atténuation : la limite du système étudié ne s'arrête pas à l'extrémité des fils. Le couplage avec l'extérieur n'est pas modélisable : il faudrait pour cela modéliser le domaine extérieur ; l'amortissement par dissipation dans le fil ne peut constituer au demeurant qu'une approximation minorant les pertes réelles (d'autant plus mauvaise du reste que les fils seront peu dissipatifs)

Ewins [34] fait une distinction entre les conditions aux limites suspendues réalisant une condition d'appui perpendiculaire au mouvement de la plaque (fils dans le plan de la plaque), et celles réalisant un appui parallèle à ce mouvement (fils qui ne sont pas dans le plan de la plaque). Seul le premier cas peut représenter des conditions libres pour les mouvements de flexion et garantit un couplage plaque/fil faible. Notons pour conclure qu'une expérience relativement simple d'étude des points d'accroche des fils sur l'amortissement d'une plaque

suspendue peut permettre de quantifier leur influence. Elle consiste simplement à faire varier les points d'attache des fils et à observer leur influence sur l'amortissement total.

## 1.6 Bilan et conclusions du chapitre

Ce chapitre d'introduction s'est intéressé aux aspects généraux de la réduction de bruit, notamment par méthode passive. Il a été décidé de privilégier la modélisation séparée des mécanismes de dissipation jugés prépondérants plutôt que d'effectuer une modélisation « globale » de l'amortissement. Deux types généraux d'amortissement ont été distingués : l'amortissement viscoélastique et l'amortissement par couplage. Les difficultés de leur modélisation a été présentée ; le premier, aux caractéristiques locales, nécessite a priori un travail d'identification du comportement matériau (viscoélasticité, plasticité, friction) ; le deuxième, aux caractéristiques globales, nécessite d'étendre le domaine d'étude et d'inclure des phénomènes physiques supplémentaires (thermoélasticité, acoustique). Une étude spécifique concernant une plaque traitée avec des patches en polymère nous a fourni quelques éléments d'analyse sur le comportement des structures composites en métal/polymère comme la linéarité en déplacement. Basée sur une méthode d'analyse modale sans contact utilisant un vibromètre laser et un haut-parleur comme source excitation, elle a permis une mesure précise par décrémentation logarithmique de l'amortissement structurel total avec une contribution dissipative au niveau de la frontière du domaine jugée négligeable du fait des conditions aux limites de type suspendues. Les données d'amortissement seront exploitées dans les prochains chapitres pour valider une méthode générale de modélisation susceptible de convenir en réalité à des structures à amortissement linéaire général très variées.



## Chapitre 2

# Résolution d'un problème de dynamique amortie

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>La formulation du problème</b>	<b>34</b>
2.2.1	La formulation variationnelle classique	34
2.2.2	Formulation variationnelle retenue	36
<b>2.3</b>	<b>Le problème spatial</b>	<b>44</b>
2.3.1	Modélisation du champ cinématique	44
2.3.2	Description spatiale de l'amortissement	48
<b>2.4</b>	<b>Résolution du problème dans le domaine de Laplace</b>	<b>52</b>
2.4.1	Inversion de l'opérateur	53
2.4.2	Traitement numérique de l'amortissement non homogène	54
2.4.3	Traitement numérique de la dépendance fréquentielle	58
<b>2.5</b>	<b>Modes de résonance et réponse temporelle</b>	<b>58</b>
2.5.1	Les modes de résonance	58
2.5.2	La solution temporelle	59
2.5.3	Une solution fréquentielle alternative	62
<b>2.6</b>	<b>Réponse fréquentielle : comparaison numérique</b>	<b>62</b>
2.6.1	Le cas peu amorti	63
2.6.2	Le cas très amorti	65
2.6.3	Comparaison des différentes méthodes de calcul : étude de la puissance acoustique	68
<b>2.7</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>68</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude générale de systèmes vibratoires amortis et propose une méthode précise et rapide pour les calculs de réponse temporelle et fréquentielle. Le cas d'une structure amortie en aluminium/polymère est étudié, mais l'algorithme se prête à la modélisation de systèmes à amortissement linéaire tout à fait généraux. Le chapitre se décline en trois volets. Le premier volet (§ 2.2) établit une formulation variationnelle adaptée aux équations non auto-adjointes. En optant pour une modélisation dynamique basée sur la méthode des éléments finis, la démarche conduit à l'équation matricielle suivante écrite dans le domaine de Laplace :

$$[s^2 M + sK^V(s) + K^E] \tilde{u}(s) = F(s) + sI_0 + V_0 \quad (2.1)$$

$M$  est la matrice de masse,  $K^E$  la matrice de rigidité élastique,  $sK^V(s)$  la matrice de rigidité viscoélastique à coefficients complexes dépendante de la fréquence,  $F(s)$  l'excitation du système et  $I_0, V_0$  des termes résultant des conditions initiales en déplacement et en vitesse.  $\tilde{u}(s)$  est le déplacement dans le domaine de Laplace. Le deuxième volet de l'étude concerne la forme spécifique des matrices employées dans l'équation (2.1) et à ce que nous nommons les caractéristiques spatiales du problème (§ 2.3) : la cinématique du problème, la modélisation de la quasi-incompressibilité et l'inhomogénéité de l'amortissement liée à la forme spécifique de la matrice  $sK^V(s)$  sont abordés.

Le troisième et dernier volet concerne la résolution du problème matriciel (2.1). Il se décline en trois parties. La première partie (§ 2.4) est bibliographique et présente les façons les plus courantes d'inverser l'opérateur viscoélastique ainsi que les méthodes standards permettant de traiter les deux problèmes centraux de la modélisation en dynamique amortie : l'inhomogénéité<sup>1</sup> de l'amortissement (problème à caractère spatial) et la dépendance fréquentielle. La dépendance fréquentielle se traduit par l'absence d'une relation d'orthogonalité entre les modes valable sur tout le spectre ; il en existe seulement une à fréquence fixée dont l'intérêt est limité. La deuxième partie de ce volet (§ 2.5) présente la méthode que nous avons retenue, basée sur le calcul de la transformée de Laplace inverse pour obtenir la solution temporelle et sur l'application d'une transformation de Laplace supplémentaire pour obtenir la solution fréquentielle. Elle nécessite une routine calculant les solutions propres de l'opérateur à fréquence fixée ainsi qu'une routine itérative et/ou de perturbation pour calculer les modes de résonance qui sont les solutions libres du système (ou solutions propres de l'opérateur non linéaire). Le théorème des résidus peut alors être utilisé simplement et donne l'expression analytique de la réponse temporelle du système. La démarche permet ainsi de résoudre les deux problèmes classiques précédemment évoqués. La troisième partie propose des résultats de simulation numérique comparant les performances d'algorithmes issus des méthodes standards et de notre méthode pour des configurations d'amortissement variées.

## 2.2 La formulation du problème

### 2.2.1 La formulation variationnelle classique

L'une des difficultés majeures des problèmes de dynamique amortie concerne l'écriture d'une formulation variationnelle adéquate pour la résolution. Elle réside dans le fait que l'opérateur

---

<sup>1</sup>Les différents points d'une structure à amortissement inhomogène ne sont pas amortis de la même façon.

d'amortissement n'est pas auto-adjoint et que le système n'est pas conservatif. Utiliser les solutions du problème physique comme quantités duales (champ admissible) en dynamique non amortie permet avec le formalisme usuel de construire une fonctionnelle énergétique au sens physique. Mais elle n'aboutit pas à un problème variationnel correctement formulé : la fonctionnelle tend vers zéro à mesure que le temps s'écoule et le calcul des solutions qui la minimisent ou la rendent stationnaire n'a pas de sens.

### 2.2.1.1 Les formulations variationnelles en viscoélasticité

On trouve dans la littérature une extrapolation de la plupart des théorèmes de l'élasticité au cas de la viscoélasticité (Gurtin, Biot, Christensen), tel que le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, ainsi que des exemples de fonctionnelles basées sur des lois viscoélastiques générales dont la variation s'annule en satisfaisant les équations du problème. Un théorème de minimum est proposé par Christensen [23] dans le cas harmonique. Il impose des conditions de positivité sur les parties réelle et imaginaire du module complexe de cisaillement. Malheureusement il se limite comme de nombreux autres théorèmes au cas quasi-élastique. De plus, la démonstration est basée sur l'hypothèse d'un coefficient de Poisson réel : elle repose donc sur l'hypothèse d'homogénéité de l'amortissement du matériau, que nous évoquerons plus tard au § 2.3.2 ; une seule loi dissipative s'applique de façon uniforme à l'ensemble du champ de déplacement, conduisant à un champ réel et au cadre classique de la dynamique amortie proportionnellement.

D'après Christensen, la démarche la plus rigoureuse nécessite l'emploi de tels théorèmes (théorème de stationnarité ou de minimum). Il note toutefois que ces théorèmes sont délaissés en général au profit d'une formulation comparable à la formulation élastique classique, du fait des cas limités qu'ils sont susceptibles de traiter. Cette formulation repose sur l'application directe des transformations intégrales (Laplace, Fourier, Carson) sur les équations de la dynamique. Les théorèmes variationnels d'élasticité sont alors réinterprétés comme théorèmes variationnels de viscoélasticité avec les variables transformées du domaine fréquentiel complexe (la démarche est présentée dans l'ouvrage de Soize et Ohayon [98]). La seule modification concerne l'utilisation du produit scalaire complexe plutôt que réel. Nous verrons qu'associée à l'hypothèse de séparation des variables d'espace et de temps, cette approche conduit à la résolution séparée d'un problème non auto-adjoint spatial à opérateur symétrique complexe dans le domaine de Laplace et à un problème temporel dont la résolution par transformation intégrale inverse conduit à la réponse temporelle.

### 2.2.1.2 Formulation variationnelle avec les équations adjointes

La façon la plus rigoureuse d'écrire une formulation énergétique consiste à construire l'espace dual des déplacements dits admissibles à partir des solutions du problème adjoint, que l'on se place dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. C'est la méthode employée par Tasi [117] par exemple, pour calculer la dissipation thermoélastique dans les plaques à partir de l'équation de diffusion. Tasi décrit l'introduction d'une équation adjointe d'«infusion», pour reprendre ses mots, dont les solutions croissent dans le temps dans la même proportion que les solutions physiques décroissent. En combinant les deux champs il résulte un système conservatif. D'autres auteurs ont recours à un système adjoint. Utilisant le formalisme de la mécanique lagrangienne, Morse et Feshbach [91] introduisent un système miroir décrit par la coordonnée  $x^*$  et doté d'une friction négative. En supposant l'énergie du

système total conservée, c'est-à-dire l'énergie conjointe du système physique de coordonnée  $x$  et du système miroir de coordonnée  $x^*$ , la fonction de Lagrange obtenue est invariante. Il en résulte deux équations différentielles de deuxième ordre de Lagrange,

$$\begin{cases} M\ddot{x}^* - C\dot{x}^* + Kx^* &= 0 \\ M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx &= 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Les paramètres  $M, K, C$  sont associés respectivement à la masse, à la rigidité et à l'amortissement des deux oscillateurs. L'hamiltonien est donné par  $H = M\dot{x}\dot{x}^* + Kxx^*$ .  $x$  décroît lorsque  $x^*$  croît,  $H$  reste donc constant.

La construction d'un opérateur adjoint est présentée dans l'ouvrage de Marchuk [87] dans le cadre des équations aux dérivées partielles. Muni d'un produit scalaire réel ou complexe, d'une équation et de conditions aux limites du problème aux frontières, l'intégration par partie de l'équation multipliée à un champ adjoint fait apparaître une équation adjointe. Prenons l'exemple des ondes amorties. L'opérateur d'amortissement combiné à l'opérateur de rigidité s'écrit  $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  et son opérateur adjoint  $A^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ . L'opérateur adjoint a été construit de façon à respecter l'identité de Lagrange que nous énoncerons au § 2.11. Elle requiert de satisfaire les conditions aux limites et les conditions initiales du système physique d'une part, et celles anti-causales du système adjoint d'autre part. Les solutions libres du système physique ont une dépendance temporelle en  $\exp(\pm i\omega t - \alpha t)$ , alors que les solutions du problème adjoint ont une dépendance en  $\exp(\pm i\omega t + \alpha t)$ . Dans le cas sans amortissement, l'équation est auto-adjointe ; les solutions libres physiques et adjointes sont confondues.

Nous verrons au chapitre 3 § 3.2 que la construction d'une base matricielle adjointe permet de réaliser un automorphisme : base physique et base adjointe permettent de réaliser une projection orthogonale dans le même espace que l'espace initial. Lorsque les bases physique et adjointe sont calculées à partir du problème spécifique des valeurs propres (problème aux valeurs propres physique dit à droite, et problème aux valeurs propres adjoint dit à gauche), la projection orthogonale a la particularité de diagonaliser les matrices de rigidité et de masse. Remarquons enfin qu'il existe une technique pour s'affranchir très simplement de la construction du problème adjoint dans le cas des systèmes vibratoires amortis sous sollicitation stationnaire. Le système dissipatif reste auto-adjoint du fait d'un apport énergétique qui compense la perte exactement. Les solutions physiques de déplacement  $x(t)$  sont égales aux solutions adjointes. Le travail de dissipation  $\Delta E$  est calculé en calculant le travail de la force excitatrice  $F$ , et ramené à une période, vaut

$$\Delta E = \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \dot{x}(t) dt = \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}(\tilde{F}) \text{Re}(\dot{\tilde{x}}) dt \quad (2.3)$$

Cette technique reste néanmoins spécifique aux systèmes stationnaires et n'est pas utilisable dans le cas général.

### 2.2.2 Formulation variationnelle retenue

La forme variationnelle retenue est comparable à l'approche généralement utilisée en visco-élasticité. Les équations sont d'abord écrites dans le plan fréquentiel complexe par le biais de la transformée de Laplace. Cette technique permet de scinder le problème temporel en deux

sous-problèmes : un problème non auto-adjoint spatial écrit dans le domaine fréquentiel et un problème de calcul de réponse temporelle. L'objet du paragraphe concerne ce premier en employant un formalisme basé sur le traitement des équations non auto-adjointes, plutôt que la méthode classique des résidus pondérés (Soize et Ohayon [98]). Si les deux méthodes aboutissent au même résultat, celle que nous employons permet d'établir de façon rigoureuse le champ adjoint<sup>2</sup>.

### 2.2.2.1 Construction du champ adjoint

Nous présentons dans ce qui suit un formalisme général permettant de calculer le champ adjoint. Tout opérateur de dynamique amortie se décompose dans le domaine de Laplace en un opérateur d'inertie  $\mathcal{L}$  et un opérateur de rigidité viscoélastique  $\mathcal{A}$ . Le problème fréquentiel s'écrit

$$\begin{cases} (\mathcal{L}(s) - \mathcal{A}(s)) \tilde{u}(s) &= \tilde{f}(s) \\ \mathcal{A}(s) &= \tilde{\sigma}_{ij,j}(s) \\ \mathcal{L}(s) &= s^2 \rho \end{cases} \quad (2.4)$$

L'obtention de telles équations à partir des équations temporelles est spécifié pour notre cas d'étude au § 2.2.2.3.  $\rho$  est la densité,  $\tilde{\sigma}_{ij}(s)$  le tenseur des contraintes et  $\tilde{f}(s)$  une force excitatrice. On a introduit l'espace vectoriel des fonctions  $\tilde{u}(s)$  complexes définies sur le domaine  $\Omega$ , continues, dérivables en tout point intérieur du domaine, quadratiquement sommables avec leurs dérivées première et seconde. Les quantités étant complexes, on se dote du produit scalaire complexe avec la convention de notation de sommation des indices muets  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} \tilde{u}_i \bar{\tilde{v}}_i d\Omega$ . Les fonctions  $\tilde{u}$  sont en partie déterminées par des conditions aux limites en déplacement sur la frontière  $\Sigma_{\tilde{u}}$  et en contrainte sur la frontière disjointe  $\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}$ . On ôte du domaine d'étude  $\Omega$  la frontière sur laquelle le déplacement  $\tilde{u}(s)$  est connu. Notons  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  l'ensemble des fonctions satisfaisant l'ensemble des conditions formulées : il s'agit du domaine de définition de l'opérateur  $(\mathcal{L} - \mathcal{A})$ . L'objectif du paragraphe est de construire le champ adjoint  $\tilde{w}(s)$  dont nous savons uniquement qu'il satisfait l'équation non-homogène suivante

$$(\mathcal{L}^*(s) - \mathcal{A}^*(s)) \tilde{w}(s) = \tilde{p}(s) \quad (2.5)$$

Le second membre  $\tilde{p}(s)$  est une force d'excitation qui ne nécessite pas d'être déterminée dans le cas d'étude présent. La construction de l'espace adjoint consiste à déterminer les opérateurs  $\mathcal{L}^*(s)$  et  $\mathcal{A}^*(s)$  ainsi que des conditions que le champ adjoint  $\tilde{w}(s)$  doit vérifier. Elle s'opère en deux étapes. Premièrement, une formulation énergétique est introduite à partir de la formulation forte par le biais du produit scalaire de l'équation physique par un champ adjoint, pour l'instant indéterminé. Des intégrations par partie successives sont conduites jusqu'à faire apparaître une formulation faible adjointe. La deuxième étape, moins classique, nécessite la satisfaction de l'identité de Lagrange qui garantit l'orthogonalité des projections. Intéressons-nous pour commencer à l'opérateur de rigidité  $\mathcal{A}$ . Introduisons le champ adjoint  $\tilde{w}(s)$ , et intégrons par partie la quantité scalaire  $(A\tilde{u}(s), \tilde{w}(s))$  :

---

<sup>2</sup>Champ cinématiquement admissible complexe.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) &= \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij,j}(\tilde{u}(s)) \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega \\
&= \int_{\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) n_j \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Sigma - \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) \overline{\tilde{w}_{i,j}}(s) d\Omega
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Le domaine  $\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}$  sur lequel la contrainte est fixée apparaît explicitement. La linéarité des équations constitutives viscoélastiques et les propriétés du produit scalaire complexe conduisent à l'égalité suivante :

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) \overline{\tilde{w}_{i,j}}(s) = \overline{\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{w}(s))} \tilde{u}_{i,j}(s) \tag{2.7}$$

Nous avons introduit la notation  $\overline{\tilde{\sigma}_{ij}} = \overline{\mathcal{A}}$  pour désigner l'opérateur transposé de  $\tilde{\sigma}_{ij} = \mathcal{A}$ . Ce résultat général se démontre assez simplement dans le cas d'un matériau viscoélastique isotrope dont la loi constitutive est donnée dans le domaine de Laplace<sup>3</sup> par

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) = \delta_{ij} s \tilde{\lambda}(s) \tilde{u}_{(k,k)}(s) + 2 s \tilde{\mu}(s) \tilde{u}_{(i,j)}(s) \tag{2.8}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) \overline{\tilde{w}_{(i,j)}}(s) &= \left[ \delta_{ij} s \tilde{\lambda}(s) \tilde{u}_{(k,k)}(s) + 2 s \tilde{\mu}(s) \tilde{u}_{(i,j)}(s) \right] \overline{\tilde{w}_{i,j}}(s) \\
&= \left[ \delta_{ij} s \tilde{\lambda}(s) \overline{\tilde{w}_{(k,k)}}(s) + 2 s \tilde{\mu}(s) \overline{\tilde{w}_{(i,j)}}(s) \right] \tilde{u}_{i,j}(s) \\
&= \overline{\left[ \delta_{ij} \bar{s} \overline{\tilde{\lambda}}(s) \tilde{w}_{(k,k)}(s) + 2 \bar{s} \overline{\tilde{\mu}}(s) \tilde{w}_{(i,j)}(s) \right]} \tilde{u}_{i,j}(s) \\
&= \overline{\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{w}(s))} \tilde{u}_{i,j}(s)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Après intégration par partie, la relation (2.6) devient

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) &= \int_{\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) n_j \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Sigma - \int_{S_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{w}(s))} n_j \tilde{u}_i(s) dS \\
&+ \int_{\Omega} \tilde{u}_i(s) \overline{\tilde{\sigma}_{ij,j}(\tilde{w}(s))} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Enonçons à présent l'identité de Lagrange. Muni de l'opérateur physique  $\mathcal{A}$  et de l'opérateur adjoint  $\mathcal{A}^*$  indéterminé, l'identité de Lagrange s'écrit

$$(\mathcal{A}\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = (\tilde{u}(s), \mathcal{A}^*\tilde{w}(s)) \tag{2.11}$$

L'identité est vérifiée par construction si

<sup>3</sup>L'obtention de l'équation est détaillée au § 2.2.2.3.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{u}(s), \mathcal{A}^* \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega} \tilde{u}_i(s) \overline{\tilde{\sigma}_{ij,j}(\tilde{w}(s))} d\Omega \\ \int_{\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{u}(s)) n_j \overline{\tilde{w}_i(s)} d\Sigma = \int_{S_{\tilde{\sigma}(\tilde{w})}} \overline{\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{w}(s))} n_j \tilde{u}_i(s) dS \end{array} \right. \quad (2.12)$$

La première équation permet d'identifier l'opérateur adjoint. On a  $\mathcal{A}^* = \overline{\tilde{\sigma}_{ij,j}} = \overline{\mathcal{A}}$  par construction. Intéressons-nous à présent au domaine de définition du champ adjoint  $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ . L'exclusion au préalable de la solution inhomogène du domaine  $\Omega$  a conduit à l'exclusion de la frontière  $\Sigma_{\tilde{u}}$  sur laquelle toute intégrale est à valeur nulle ; cela revient à considérer que le champ adjoint, dit cinétiquement admissible, est nul sur  $\Sigma_{\tilde{u}}$ .

La deuxième équation fait apparaître les conditions aux limites de contrainte superficielle que le champ adjoint doit vérifier. C'est le cas si on choisit d'une part  $\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} = S_{\tilde{\sigma}(\tilde{w})}$  et si d'autre part on prend  $\overline{\tilde{w}}(s) = \tilde{u}(s)$  sur  $\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}$ .

Intéressons-nous à présent à l'opérateur d'inertie  $\mathcal{L} = \rho s^2$ . Il a été obtenu après que la transformée de Laplace a permis d'extraire les conditions initiales de déplacement inhomogènes et les a placées dans le second membre  $\tilde{f}(s)$  de l'équation générale. Le traitement des équations en est grandement facilité. L'identité de Lagrange s'écrit

$$(\mathcal{L}\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = (\tilde{u}(s), \mathcal{L}^* \tilde{w}(s)) \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{L}\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega} \rho s^2 \tilde{u}_i(s) \overline{\tilde{w}_i(s)} \\ (\tilde{u}(s), \mathcal{L}^* \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega} \tilde{u}_i(s) \overline{(\rho s^2)^* \tilde{w}_i(s)} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

On en déduit que  $\mathcal{L}^* = (\rho s^2)^* = \overline{(\rho s^2)} = \overline{\mathcal{L}}$ . Aucune nouvelle condition n'apparaît sur le champ adjoint. Finalement, la linéarité des opérateurs permet d'écrire l'identité de Lagrange pour l'opérateur complet  $\mathcal{L} - \mathcal{A}$  :

$$((\mathcal{L}(s) - \mathcal{A}(s)) \tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = (\tilde{u}(s), (\mathcal{L}^*(s) - \mathcal{A}^*(s)) \tilde{w}(s)) \quad (2.15)$$

Cette égalité est définie pour un  $s$  fixé, c'est-à-dire à une fréquence fixée. Une extension au cas de  $s$  variable nécessite une expression analytique des opérateurs en fonction de  $s$  par le biais d'un modèle d'amortissement paramétrique.

### 2.2.2.2 La condition de biorthogonalité

L'identité de Lagrange garantit l'orthogonalité des projections. Dans le cas où les solutions physiques sont solutions du problème aux valeurs propres, la projection orthogonale permet de découpler le système et d'établir des propriétés de biorthogonalité. Les équations du problème aux valeurs propres physique et adjoint s'écrivent :

$$\begin{cases} [\mathcal{L}(\lambda_m(s), s) - \mathcal{A}(s)] \tilde{u}_m(s) = 0 \\ [\overline{\mathcal{L}}(\mu_k(s), s) - \overline{\mathcal{A}}(s)] \tilde{w}_k(s) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

$(\lambda_m(s), \tilde{u}_m(s))$  est un couple propre de l'équation physique et  $(\mu_k(s), \tilde{w}_k(s))$  un couple propre de l'équation adjointe. Le problème aux valeurs propres ainsi défini est un problème aux valeurs propres non linéaire dépendant du paramètre  $s$ . On remarque qu'en conjuguant la deuxième équation on obtient les mêmes opérateurs que dans l'équation physique. Par conséquent,  $\lambda_m(s) = \mu_m(s) \forall m \in \{1, \dots, N\}$  : les valeurs propres du problème physique et adjoint sont égales. On remarque de plus que  $\tilde{u}_m(s) = \overline{\tilde{w}}_m(s)$ . Cette caractéristique est retrouvée dans le cas matriciel des opérateurs symétriques complexes, forme discrète du problème présent. Effectuons à présent le produit scalaire de la première équation de (2.16) par le champ adjoint conjugué et le produit scalaire du champ physique par la deuxième équation conjuguée de (2.16). La soustraction des deux quantités scalaires donne :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) - (\tilde{u}_m(s), \overline{\mathcal{A}}\tilde{w}_k(s)) &= (\mathcal{L}(\lambda_m(s)) \tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) - (\tilde{u}_m(s), \overline{\mathcal{L}}(\lambda_k(s)) \tilde{w}_k(s)) \\ &= \lambda_m(s)(\rho\tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) - \lambda_k(s)(\tilde{u}_m(s), \overline{\rho}\tilde{w}_k(s)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$(\mathcal{A}\tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) - (\tilde{u}_m(s), \overline{\mathcal{A}}\tilde{w}_k(s)) = (\lambda_m(s) - \lambda_k(s))(\rho\tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) \quad (2.18)$$

Le premier terme est nul du fait de l'identité de Lagrange. Le deuxième conduit à la condition de biorthonormalité. Si les valeurs propres  $\lambda_m(s)$  et  $\lambda_k(s)$  ne sont pas confondues, alors

$$(\rho\tilde{u}_m(s), \tilde{w}_k(s)) = \begin{cases} \mathbf{0} & k \neq m \\ \mathbf{1} & k = m \end{cases} \quad (2.19)$$

Il est donc possible de définir *la base d'un système amorti construit à fréquence fixée qui vérifie des propriétés de biorthonormalité*. L'une des difficultés liées à l'étude des matériaux viscoélastiques apparaît ici très clairement : un opérateur viscoélastique a une base modale différente pour chaque valeur différente du paramètre  $s$ .

### 2.2.2.3 Les équations fréquentielles

Revenons aux équations temporelles ayant permis d'aboutir à la forme générale donnée par l'équation (2.4) en précisant leur forme spécifique dans le cas d'une structure composite constituée de deux matériaux isotropes. L'un est viscoélastique et occupe le domaine  $\Omega^V$ , l'autre élastique et occupe  $\Omega^E$ . Le domaine total  $\Omega^E + \Omega^V$  est noté  $\Omega$ . L'équation de la dynamique et les deux équations constitutives s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \ddot{u}_i(t) = \sigma_{ij,j}(t) + f_i(t) & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{ij}^V(t) = \delta_{ij} \left( \lambda^V(t) u_{(k,k)}(0) + \int_0^t \lambda^V(t-\tau) \frac{\partial u_{(k,k)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right) \\ \quad + 2 \left( \mu^V(t) u_{(i,j)}(0) + \int_0^t \mu^V(t-\tau) \frac{\partial u_{(i,j)}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right) & \text{dans } \Omega_V \\ \sigma_{ij}^E(t) = \lambda^E \delta_{ij} u_{(k,k)}(t) + 2 \mu^E u_{(i,j)}(t) & \text{dans } \Omega_E \end{array} \right. \quad (2.20)$$

La deuxième relation constitutive correspond au cas isotrope viscoélastique. L'équation constitutive viscoélastique fait apparaître des fonctions de relaxation isotrope  $\mu^V(t)$  et  $\lambda^V(t)$  comparables aux paramètres de Lamé  $\mu^E$  et  $\lambda^E$  du cas élastique. Pour des raisons de commodité de lecture, la dépendance spatiale est implicite. Nous notons par  $u_{(i,j)} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 = \epsilon_{i,j}$  la partie symétrique du tenseur  $u_{i,j}$  égale au tenseur de déformation infinitésimale dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations (Germain et Muller [44]). S'ajoutent pour compléter le problème deux conditions aux limites de déplacement et de contrainte imposés sur les domaines respectifs  $\Sigma_{\tilde{u}}$  et  $\Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})}$ , ainsi que deux conditions initiales sur le déplacement et la vitesse.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_i(t) = g_i(t) & \text{sur } \Sigma_{\tilde{u}} \\ \sigma_{ij} n_j(t) = h_i(t) & \text{sur } \Sigma_{\tilde{\sigma}(\tilde{u})} \\ u_i(0) = u_{i0} \\ \dot{u}_i(0) = \dot{u}_{i0} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Les équations sont transformées dans le domaine de Laplace, ce qui fait apparaître explicitement les conditions initiales ; les variables sont définies pour des temps positifs ou nuls. La transformée de Laplace s'écrit

$$\mathcal{L}[f_i(t)] = \tilde{f}_i(s) = \int_0^\infty f_i(t) \exp^{-st} dt \quad (2.22)$$

et s'applique aux fonctions continues par morceaux pourvu que leur croissance ne soit pas exponentielle, c'est-à-dire telles que

$$\exists \alpha \quad / \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} f_i(t) = 0 \quad (2.23)$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}[\ddot{u}_i(t)] = s^2 \tilde{u}_i(s) - s u_{i0} - \dot{u}_{i0} & (\Omega) \\ \tilde{\sigma}_{ij}^V(s) = \mathcal{L}[\sigma_{ij}^V(t)] = s \left[ \delta_{ij} \tilde{\lambda}^V(s) \tilde{u}_{(k,k)}(s) + 2 \tilde{\mu}^V(s) \tilde{u}_{(i,j)}(s) \right] & (\Omega_V) \\ \tilde{\sigma}_{ij}^E(s) = \mathcal{L}[\sigma_{ij}^E(t)] = \lambda^E \delta_{ij} \tilde{u}_{(k,k)}(s) + 2 \mu^E \tilde{u}_{(i,j)}(s) & (\Omega_E) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Les équations équations locales dynamiques sont données dans le domaine de Laplace par

$$\left\{ \begin{array}{ll} s^2 \rho^V \tilde{u}_i(s) - \tilde{\sigma}_{ij,j}^E(s) = \tilde{f}_i(s) + s \rho^V u_{i0} + \rho^V \dot{u}_{i0} & (\Omega_V) \\ s^2 \rho^E \tilde{u}_i(s) - \tilde{\sigma}_{ij,j}^V(s) = \tilde{f}_i(s) + s \rho^E u_{i0} + \rho^E \dot{u}_{i0} & (\Omega_E) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

### 2.2.2.4 Les équations de Galerkin

Il convient à présent d'utiliser les éléments précédents pour construire une formulation spécifique à notre problème, basée sur la méthode des éléments finis. On effectue le produit scalaire des équations (2.25) dépendantes de la variable  $\tilde{u}(s)$  par une fonction de pondération  $\tilde{w}(s)$  (champ adjoint), puis on intègre sur l'ensemble du domaine. La démarche est similaire à la méthode des résidus pondérés par un déplacement complexe vérifiant les conditions aux limites homogènes en déplacement (appartenant donc à l'espace de variation). La différence provient de la dépendance en  $s$  de  $\tilde{w}(s)$  qui n'existe normalement pas dans la méthode usuelle. Le domaine complet est  $\Omega$  et comprend le domaine associé au matériau élastique isotrope  $\Omega_E$  et le domaine associé au matériau viscoélastique isotrope  $\Omega_V$ . Après intégration par parties, la formulation faible s'écrit

$$\begin{aligned} & s^2 \mathcal{M}(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) + s \mathcal{K}^V(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s), s) + \mathcal{K}^E(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) \\ &= \mathcal{F}(\tilde{f}(s), \tilde{w}(s)) + \mathcal{H}(\tilde{h}(s), \tilde{w}(s)) + s \mathcal{I}_0(u_0, \tilde{w}(s)) + \mathcal{V}_0(\dot{u}_0, \tilde{w}(s)) \end{aligned} \quad (2.26)$$

On a introduit dans (2.26) les opérateurs de masse  $\mathcal{M}$ , de rigidité viscoélastique  $\mathcal{K}^V(s)$ , de rigidité élastique  $\mathcal{K}^E$ , l'opérateur des forces volumiques  $\mathcal{F}$ , celui des forces surfaciques  $\mathcal{H}$  apparaissant explicitement au cours de l'intégration par parties et les opérateurs liés aux conditions initiales en déplacement et en vitesse  $\mathcal{I}_0$  et  $\mathcal{V}_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega_V} \rho^V \tilde{u}_i(s) \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_V \\ \quad + \int_{\Omega_E} \rho^E \tilde{u}_i(s) \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_E \\ \mathcal{K}^V(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s), s) = \int_{\Omega_V} \tilde{\lambda}^V(s) \tilde{u}_{(k,k)}(s) \overline{\tilde{w}_{(m,m)}}(s) \\ \quad + 2 \int_{\Omega_V} \tilde{\mu}^V(s) \tilde{u}_{(i,j)}(s) \overline{\tilde{w}_{(i,j)}}(s) d\Omega_V \\ \mathcal{K}^E(\tilde{u}(s), \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega_E} \lambda^E \tilde{u}_{(k,k)}(s) \overline{\tilde{w}_{(m,m)}}(s) \\ \quad + 2 \int_{\Omega_E} \mu^E \tilde{u}_{(i,j)}(s) \overline{\tilde{w}_{(i,j)}}(s) d\Omega_E \\ \mathcal{F}(\tilde{f}(s), \tilde{w}(s)) = \int_{\Omega} \tilde{f}_i(s) \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega \\ \mathcal{H}(\tilde{h}(s), \tilde{w}(s)) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_{h_i}} \tilde{h}_i(s) \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Gamma_{h_i} \quad (\text{indices non muets}) \\ \mathcal{I}_0(u_0, \tilde{w}) = \int_{\Omega_E} \rho^E u_{i0} \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_E + \int_{\Omega_V} \rho^V u_{i0} \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_V \\ \mathcal{V}_0(\dot{u}_0, \tilde{w}) = \int_{\Omega_E} \rho^E \dot{u}_{i0} \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_E + \int_{\Omega_V} \rho^V \dot{u}_{i0} \overline{\tilde{w}_i}(s) d\Omega_V \end{array} \right. \quad (2.27)$$

La méthode numérique consiste ensuite à construire une approximation des espaces auxquels les solutions  $\tilde{w}$  et  $\tilde{u}$  appartiennent. Pour ce faire, la méthode de Bubnov - Galerkin à la base de la méthode des éléments finis est utilisée pour décomposer la solution test approchée  $\tilde{u}^h(s)$  en deux parties dépendantes de la fréquence  $\tilde{u}^h(s) = \tilde{v}^h(s) + \tilde{g}^h(s)$ .  $\tilde{v}^h(s)$

appartient au même espace discret que  $\tilde{w}^h$  (espace de variation ou de pondération).  $\tilde{g}^h(s)$  correspond à une solution particulière, connue ; l'espace de variation ne peut inclure de fonctions modélisant ce type de solution, car celles-ci le rendraient non linéaire. La solution  $\tilde{g}^h(s)$  est donc placée dans le second membre. Les équations de Galerkin pour le problème de la dynamique amortie s'écrivent

$$\begin{aligned}
& s^2 \mathcal{M}(\tilde{v}^h(s), \tilde{w}^h(s)) + s \mathcal{K}^V(\tilde{v}^h(s), \tilde{w}^h(s), s) + \mathcal{K}^E(\tilde{v}^h(s), \tilde{w}^h(s)) \\
= & -s^2 \mathcal{M}(\tilde{g}^h(s), \tilde{w}^h(s)) - s \mathcal{K}^V(\tilde{g}^h(s), \tilde{w}^h(s), s) - \mathcal{K}^E(\tilde{g}^h(s), \tilde{w}^h(s)) \\
& + \mathcal{F}(\tilde{f}^h(s), \tilde{w}^h(s)) + \mathcal{H}(\tilde{h}^h(s), \tilde{w}^h(s)) + s \mathcal{I}_0(u_0^h, \tilde{w}^h(s)) + \mathcal{V}_0(\dot{u}_0^h, \tilde{w}^h(s))
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Les solutions  $\tilde{v}^h(s)$  du problème, dites admissibles, sont celles de l'espace de variation. La solution complète prend en compte, de plus, les termes de frontière avec déplacement imposé qui ont été exclus de cet espace. Les solutions sont représentées par des séries de fonctions chapeau caractéristiques de la méthode des éléments finis (MEF). A chaque fonction est associé un degré de liberté  $A$ , et chacune est décomposée en deux facteurs, l'un  $N_A(x)$  spatial, et l'autre  $d_{iA}(s)$  fréquentiel. Ce dernier n'est pas déconnecté de toute notion spatiale : il est spécifique au degré en question (cette forme est tout à fait similaire à l'approche temporelle). Ceci permet notamment de modéliser l'amortissement inhomogène pour lequel chaque degré de liberté peut avoir sa propre dépendance vis-à-vis de la fréquence. L'ensemble des indices des degrés de liberté,  $N$  au total, est noté  $\eta$  ; l'ensemble des indices des degrés de liberté associés à la surface à déplacement imposé est noté  $\eta_{g_i}$ . Les solutions s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_i^h(x, s) = \sum_{B \in \eta - \eta_{g_i}} N_{iB}(x) \tilde{d}_{iB}(s) \\ \tilde{g}_i^h(x, s) = \sum_{C \in \eta_{g_i}} N_{iC}(x) \tilde{g}_{iC}(s) \\ \tilde{w}_i^h(x) = \sum_{A \in \eta - \eta_{g_i}} N_{iA}(x) \tilde{c}_{iA}(s) \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Les différents termes du second membre ont été projetés dans la base des fonctions de base des éléments finis. Nous utilisons la notation explicite  $N_{iA}$  mais la même fonction est utilisée pour chaque direction de l'espace ( $N_{iA} = N_A \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ). L'introduction de ces solutions conduit à une simplification du fait de la bilinéarité des opérateurs. Les coefficients  $\tilde{c}_{iA}(s)$  de  $\tilde{w}_i^h(x)$  peuvent être éliminés, transformant le problème énergétique scalaire en problème vectoriel :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \sum_{B=1}^N [s^2 \mathcal{M} + s \mathcal{K}^V(s) + \mathcal{K}^E](N_{kA}, N_{iB}) \tilde{d}_{iB}(s) \\
= & -[s^2 \mathcal{M} + s \mathcal{K}^V(s) + \mathcal{K}^E](N_{kA}, \tilde{g}^h(s)) + \mathcal{F}(N_{kA}, \tilde{f}^h(s)) \\
& + \mathcal{H}(N_{kA}, \tilde{h}^h(s)) + s \mathcal{I}_0(N_{kA}, u_0^h) + \mathcal{V}_0(N_{kA}, \dot{u}_0^h)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Les termes dépendants de  $(N_{kA}, N_{iB})$  définissent un lien entre les degrés  $kA$  et  $iB$  (lien de rigidité viscoélastique, de rigidité élastique ou d'inertie suivant l'opérateur concerné). Ils constituent les coefficients d'un système matriciel, dont la solution  $u(s)$  est composée

des coefficients  $\tilde{d}_{iB}$ . Nous serons amené à étudier des configurations structurelles avec des conditions aux limites homogènes telles que  $\tilde{g}^h(s) = 0$ ,  $\tilde{h}^h(s) = 0$ . Le problème matriciel aura donc la forme finale suivante :

$$[s^2M + sK^V(s) + K^E] u(s) = F(s) + sI_0 + V_0 \quad (2.31)$$

## 2.3 Le problème spatial

### 2.3.1 Modélisation du champ cinématique

Il existe de très nombreuses façons de représenter un champ de déplacement sous forme discrète, suivant le degré de précision exigé et l'efficacité de l'outil de résolution du problème discret. Nous résumons ici, de façon très succincte, trois tendances générales concernant la modélisation cinématique des composites stratifiés avec un coeur en élastomère. La première, toujours utilisée pour ses résultats éprouvés et simples à exploiter, est la plus ancienne : il s'agit de l'approche analytique (modèle RKU, modèle d'Oberst). La deuxième est extrêmement répandue, aussi bien dans la littérature scientifique que dans le cadre industriel : elle se base sur des cinématiques de plaque. Enfin, nous exposons notre modèle, qui reflète une troisième tendance, visant à privilégier des cinématiques riches, tridimensionnelles, au détriment de la qualité du conditionnement du problème numérique et de la rapidité de résolution.

#### 2.3.1.1 Modèles cinématiques rencontrés

**Modèles analytiques** Les premiers modèles qui sont apparus pour modéliser l'amortissement de lamellés viscoélastiques étaient analytiques. Cremer *et al* [26] proposent notamment un certain nombre d'expressions modélisant l'amortissement de structures simples. L'expérience d'Oberst, dont la finalité est l'identification des caractéristiques viscoélastiques d'un élastomère adhérent à une poutre cantilever, se base également sur des approximations analytiques permettant de déduire l'angle de perte du matériau en fonction de la fréquence à partir des quantités mesurées (fréquence, amortissement structurel). Le modèle RKU, du nom de ses auteurs Ross, Kerwin et Ungar, est tout aussi utilisé. Basé sur l'hypothèse d'un module dans les couches extérieures non amorties bien supérieur au module de la couche centrale viscoélastique, mais aussi sur le principe d'équivalence et sur la méthode d'énergie de déformation modale (§ 2.4.2.2), il fournit des approximations de l'amortissement de structures composites à trois couches avec coeur viscoélastique. La description détaillée du modèle est donnée dans l'article de Teng et Hu [118].

**Cinématique de plaque** Dans le cadre des traitements externes ou de l'étude des composites multicouches, les méthodes basées sur une simplification du champ cinématique avec l'introduction d'enrichissements pour tenir compte de l'épaisseur ou de l'inhomogénéité (théorie des plaques de Love-Kirchhoff enrichie, déplacement zig-zag entre les couches, prise en compte de l'inertie transverse, ...) constituent la très grande majorité des développements. Sisemore et Darvennes [114] proposent par exemple une étude basée sur une cinématique simple décrivant le comportement d'une poutre à trois couches, permettant de distinguer l'amortissement de compression lié au pincement et à l'étirement des couches amortissantes (modèle de Douglas et Yang), et l'amortissement plus classique de cisaillement (modèle de Mead et Markus basé sur une équation différentielle du 6ème ordre du

déplacement transverse). L'avantage d'une telle approche est lié au coût faible de la résolution et par conséquent, à son aptitude à résoudre de très gros ou de très nombreux systèmes (en optimisation par exemple). Elle se prête notamment particulièrement bien aux applications industrielles. On peut néanmoins formuler deux critiques à son égard. D'une part, elle impose dès le départ au traitement amortissant un éventail de formes assez limité, et ne rend compte que de certains mouvements (mouvements de flexion dans une direction donnée). D'autre part, comme en témoignent de nombreux articles, la qualité du modèle numérique ne permet pas lors d'une confrontation à l'expérience de faire une distinction claire entre l'erreur de modélisation cinématique et l'erreur de modélisation physique de l'amortissement.

### 2.3.1.2 Modèle cinématique et numérique retenu

**Un modèle EF 3D quadratique complet** La stratégie adoptée pour le calcul de la vibration amortie d'une structure de géométrie simple de type plaque ou poutre consiste à modéliser finement les phénomènes dissipatifs au détriment de la rapidité du code de calcul. Nous visons en effet la compréhension physique de l'amortissement, plus que la mise à l'essai d'une méthode numérique. Un modèle robuste et riche susceptible d'intégrer des routines annexes (thermoélasticité, frottement visqueux) et permettant de modéliser à la guise des configurations de traitement amortissant particuliers est privilégié. Le choix s'est porté sur un modèle à élément fini quadratique à vingt-sept noeuds composé de quatre-vingt-un degrés de liberté. La base polynomiale quadratique de l'élément étant complète la convergence de la MEF est très bonne. Le seuil fréquentiel au-dessus duquel l'approximation réalisée par la méthode est inacceptable est plus élevé que le seuil fréquentiel dans le cas des éléments linéaires.

Le tableau 2.1 et la figure 2.1 présentent les résultats d'une étude comparant les performances de l'élément à vingt-sept noeuds à celles des éléments solides C3D8 linéaire à huit noeuds et C3D20 quadratique à vingt noeuds (non-complet) du code éléments finis ABAQUS. Le cas d'étude concerne une poutre encastree libre<sup>4</sup> dont la densité de maillage varie suivant la longueur. Les configurations utilisant des éléments quadratiques ont un élément par section tandis que la configuration utilisant les éléments linéaires possède 2x2 éléments par section. Le tableau 2.1 représente la fréquence de différents modes en fonction du nombre d'éléments. Les résultats du tableau montrent clairement la supériorité des éléments quadratiques pour les problèmes de flexion. Ils mettent en évidence le problème de blocage caractéristique des éléments linéaires. La figure 2.1 compare plus précisément les deux éléments quadratiques en représentant la fréquence en fonction du nombre de noeuds, proportionnel au nombre d'inconnues. On remarque que l'élément quadratique développé et l'élément à vingt noeuds d'ABAQUS convergent de façon similaire en raffinant le maillage. L'élément à vingt noeuds représente un compromis précision/légèreté un peu plus favorable que celui de notre élément pour la flexion d'une poutre. Nous estimons cependant que l'élément à vingt-sept noeuds, plus coûteux, est bien adapté à la modélisation de structures composites et à l'optimisation de telles structures<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Poutre de dimensions 3cm × 7cm × 1m, E = 70GPa,  $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\nu = 0,3$ .

<sup>5</sup>L'optimisation géométrique requiert l'évaluation d'une fonctionnelle peu altérée par la méthode de discrétisation et donc de très bonnes qualités de convergence pour des maillages variables (légèrement distordus) et des champs de déformation complexes.

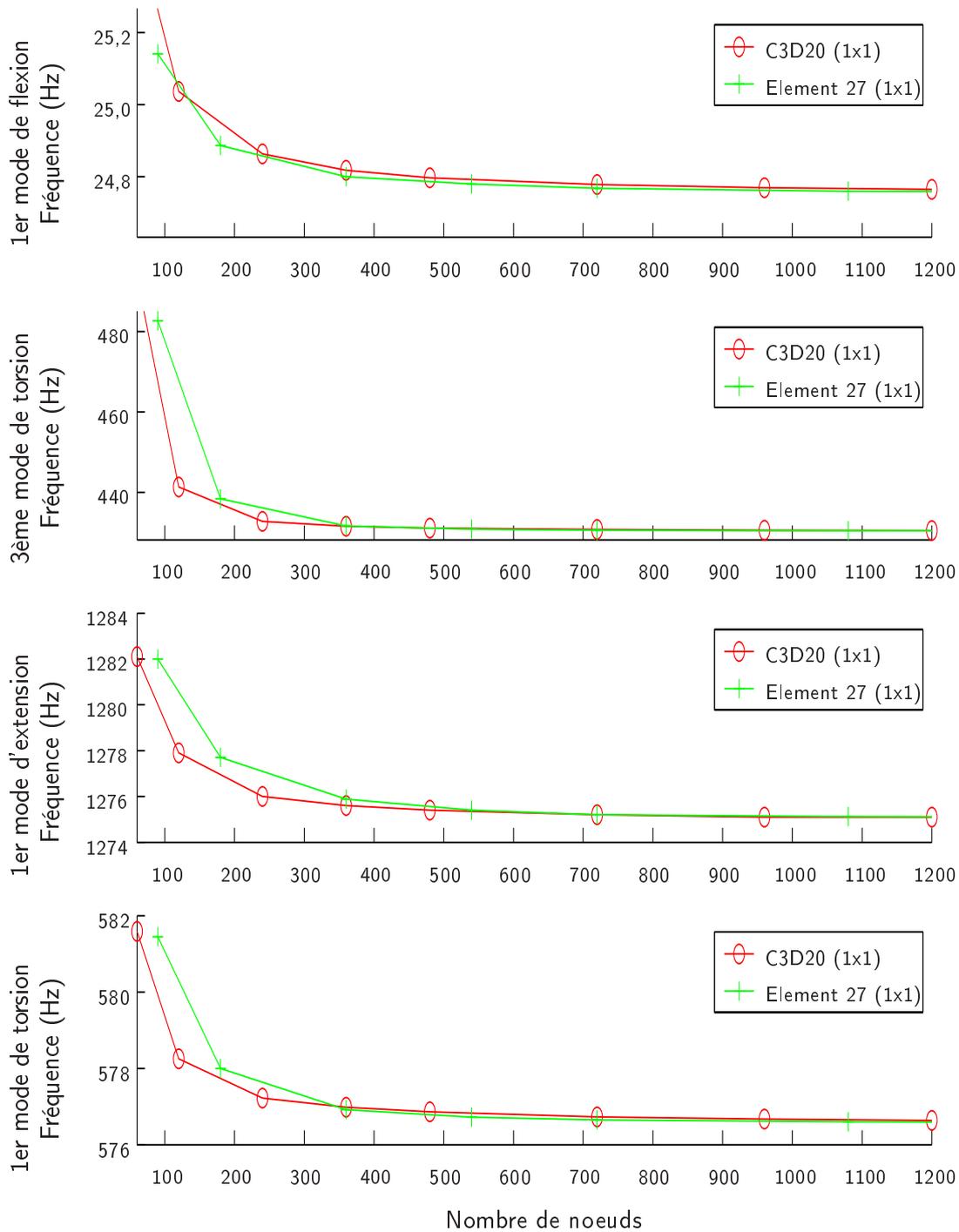


FIG. 2.1 – Etude de la convergence numérique en fonction du nombre de noeuds. Comparaison de l'élément solide quadratique C3D20 (ABAQUS) avec l'élément développé à 27 noeuds. Un élément par section de poutre ( $1 \times 1$ ).

Nombre d'éléments		5	10	20	60	100
1er mode de flexion	C3D8	102.87	56.06	34.88	25.29	24.35
	C3D20	25.49	25.04	24.86	24.78	24.77
	Elément 27	25.14	24.89	24.80	24.76	24.76
3ème mode de flexion	C3D8	1651.1	953.19	602.39	438.84	422.78
	C3D20	493.73	441.34	432.75	430.73	430.49
	Elément 27	482.71	438.4	431.59	430.41	430.32
1er mode d'extension	C3D8	1276.2	1276.3	1275.7	1275.1	1275.1
	C3D20	1282.1	1277.9	1276.0	1275.2	1275.1
	Elément 27	1282.0	1277.7	1275.9	1275.1	1275.1
1er mode de torsion	C3D8	485.15	476.47	472.55	470.66	470.4
	C3D20	581.59	578.25	577.22	576.73	576.64
	Elément 27	581.45	578.00	576.92	576.60	576.57

TAB. 2.1 – Comparaison des caractéristiques de convergence fréquentielle de la MEF associée aux trois éléments C3D8 (ABAQUS), quadratique C3D20 (ABAQUS) et quadratique à 27 noeuds (code développé)

**Modélisation de l'incompressibilité** Lorsque que le coefficient de Poisson tend vers 0,5, la prédiction des contraintes est mauvaise. Celles-ci sont sous-estimées. Le coefficient de Lamé  $\lambda$  devient très grand ce qui provoque de nombreux problèmes numériques.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \lim_{\nu \rightarrow 0,5} \lambda \rightarrow \infty \quad (2.32)$$

Une formulation mixte séparant la partie déviatorique de la déformation (laquelle est exprimée par des variables de déplacement) de la partie volumique (modélisée par le biais d'une variable de pression, égale à la pression hydrostatique lorsque  $\nu = 0,5$ ) est préconisée.

D'un point de vue numérique on distingue les modèles à pression continue  $\mathbf{u}/\mathbf{p-c}$  (Bathe [7]) et les modèles à pression discontinue  $\mathbf{u-p}$  (cas quasi-incompressibles,  $\nu < 0,5$ ). Ces premiers impliquent que la variable de pression modale soit partagée par les éléments adjacents. Par conséquent la matrice de rigidité élémentaire entière avec ses entrées supplémentaires liées aux variables de pression doit faire l'objet d'un assemblage élément fini. Les formulations u-p, quant à elles, sont à l'origine d'éléments finis à noeud de pression interne, qui ne sont pas partagés par les éléments voisins. La matrice élémentaire générée est alors réductible. La méthode numérique qui en découle est rapide et simple à implémenter : seuls les coefficients des matrices élémentaires issues de la formulation classique en déplacement sont altérés. La dimension de ces dernières n'est pas modifiée car les variables de pression n'apparaissent pas explicitement comme degré de liberté. Le processus d'assemblage classique n'est pas modifié non plus. Ce type de formulation nécessite en revanche d'utiliser un maillage suffisamment fin pour obtenir une précision satisfaisante ainsi que la continuité de la pression entre les éléments.

L'élément incompressible retenu pour le polymère est l'élément à vingt-sept noeuds de déplacement et à quatre noeuds de pression discontinue. La jonction entre les éléments associés à des matériaux différents ne nécessite donc pas de raccordement spécifique, ce qui garantit la possibilité d'étudier des configurations de traitement amortissant très variées. Les qualités de convergence de cet élément sont louées par Bathe<sup>6</sup>. Il vérifie les conditions inf-sup garantissant la stabilité et la convergence ainsi que le bon équilibre entre le nombre de degrés de liberté de déplacement et ceux de pression d'un élément mixte. Il faut en effet un nombre de degrés de liberté de pression suffisant pour modéliser la pression correctement, mais pas trop élevé toutefois pour éviter le blocage lorsque des degrés de liberté en déplacement font défaut. L'élément construit permet en outre d'étudier le cas quasi-incompressible, tout en étant adapté au cas compressible classique. C'est dans ce cadre que la mise en oeuvre informatique a été validée : en comparant les résultats des deux formulations mixte et en déplacement, dans le cas d'un matériau compressible, l'aluminium. Cette caractéristique nous a permis de valider la mise en oeuvre informatique. Nous avons simplement estimé la fréquence de vibration d'une plaque libre en aluminium de dimensions 35cm × 40cm × 2mm pour laquelle l'énergie de déformation en compression n'est pas négligeable. Le tableau 2.2 illustre la grande similarité des résultats obtenus par les deux formulations.

Formulation en déplacement	Formulation quasi-incompressible	Ecart relatif
Fréquence (Hz)	Fréquence (Hz)	(%)
46,3358	46,3366	0,0017
63,2587	63,2595	0,0013
89,2677	89,2686	0,0010
114,4822	114,4887	0,0057
126,1756	126,1840	0,0067
185,0322	185,0414	0,0050
220,0711	220,0996	0,0129
227,450	227,4761	0,0115
240,4852	240,4924	0,0030
281,3451	281,3718	0,0095

TAB. 2.2 – Comparaison des fréquences données par la formulation en déplacement et la formulation quasi-incompressible. Plaque libre en aluminium de dimensions 35cm × 40cm × 0,2 cm.

## 2.3.2 Description spatiale de l'amortissement

### 2.3.2.1 Introduction

Un modèle d'amortissement linéaire général possède deux caractéristiques fondamentales :

---

<sup>6</sup>Convergence en  $\mathcal{O}(h^3)$  pour le déplacement et en  $\mathcal{O}(h^2)$  pour les contraintes, où  $h$  est la taille caractéristique du maillage.

- une caractéristique *fréquentielle et temporelle*,
- une caractéristique *spatiale*.

La caractéristique fréquentielle et temporelle s'exprime au travers des modèles classiques (modèles à dérivées temporelles entières, modèles à dérivées temporelles fractionnaires ou basés sur des données fréquentielles brutes). La caractéristique spatiale est liée au fait que l'amortissement concerne certaines zones ou directions de l'espace données, ou bien certains degrés de liberté (pour les systèmes discrets). L'amortissement par couplage avec le fluide, par exemple, est localisé au niveau des surfaces extérieures de la structure. L'amortissement thermoélastique est aussi localisé, dans la mesure où il existe uniquement dans les mouvements de compression. La variété des lois de dissipation dans une structure composite est à la base d'une notion qualitative : il s'agit de la notion d'homogénéité ou de proportionnalité de l'amortissement. Un amortissement est considéré homogène (ou proportionnel) lorsque le modèle fréquentiel viscoélastique caractérisant la dissipation s'applique à l'ensemble de la structure. C'est le cas par exemple d'un matériau polymère dont le coefficient de Poisson est réel et constant. Le comportement viscoélastique est alors déterminé par le seul module de Young, complexe et dépendant de la fréquence. Cela n'est plus le cas en revanche lorsque ce même matériau est inséré dans une structure métallique : l'amortissement est dit inhomogène, ou non-proportionnel, car certaines zones de la structure sont amorties différemment.

La nature inhomogène de l'amortissement apparaît numériquement dans la forme particulière de la matrice d'amortissement du système vibratoire et expérimentalement avec les modes complexes. Un mode complexe est identifiable lorsqu'il existe un décalage de phase spatial entre les différents points de la structure. Dans le cas d'une corde par exemple, les points de la corde n'atteignent pas nécessairement l'amplitude maximum simultanément. Les composantes du vecteur propre associé à ce type de mouvement possèdent chacune une phase spécifique.

L'inhomogénéité implique en outre que la matrice d'amortissement ne peut être diagonalisée par la base de la structure non-amortie définie par les matrices de masse et de rigidité. Les solveurs classiques pour matrices réelles symétriques des codes EF industriels sont donc inappropriés au cas inhomogène. Cette impossibilité n'est pas tant liée aux coefficients complexes de la matrice d'amortissement qu'à sa forme spécifique<sup>7</sup>. Illustrons cette idée à l'aide d'un exemple. Prenons le cas d'un opérateur d'amortissement linéaire combinant plusieurs dérivées temporelles  $C = \sum_i^N \frac{\partial^i}{\partial t^i} \alpha_i$ . L'équation d'un système vibrant doté d'un tel opérateur excité par une force  $\tilde{f}(s, x)$  s'écrit dans le domaine de Laplace sous la forme

$$\rho s^2 \tilde{u}(s, x) + \sum_i^N s^i \alpha_i \tilde{u}(s, x) + k \tilde{u}(s, x) = \tilde{f}(s, x) \quad (2.33)$$

où les constantes de densité  $\rho$  et de rigidité  $k$  sont réelles. En posant  $S_k^2 = s_k^2 + (\sum_i^N s_k^i \alpha_i) / \rho$ , le problème aux valeurs propres s'écrit sous une forme comparable au cas non amorti,

$$\rho S_k^2 \tilde{u}(x) + k \tilde{u}(x) = 0 \quad (2.34)$$

<sup>7</sup>Dans le cas d'un amortissement homogène, la matrice est diagonalisable par la base du système non-amorti bien qu'ayant des coefficients complexes.

où  $S_k$  est imaginaire pur, ce qui correspond à une pulsation réelle. En décomposant l'équation en partie imaginaire et partie réelle, il vient  $\mathbf{Re}(\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x})) = \beta_k \mathbf{Im}(\tilde{\mathbf{u}}_k(\mathbf{x}))$ , où  $\beta_k$  est une constante réelle. Cette égalité caractérise les modes réels, définis à une constante multiplicative complexe près. La partie imaginaire n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport à la partie réelle et le vecteur propre peut être transformé en un vecteur strictement réel après normalisation. L'exemple montre dans le cas d'un modèle d'amortissement fréquentiel général induisant des pulsations propres complexes ( $\omega_k \in \mathcal{C}$ ,  $s_k = i\omega_k$ ) qu'une distribution homogène de cet amortissement dans l'espace conduit à des vecteurs réels. C'est également le cas des systèmes de type masse-amortisseur-ressort qui ne possèdent qu'un seul degré de liberté et par conséquent un amortissement sans caractéristique spatiale. Notons qu'une distribution d'amortissement inhomogène est une condition nécessaire à l'apparition de modes complexes. Notons aussi que la distinction entre un amortissement homogène et inhomogène est simplement qualitative.

On trouve souvent dans la littérature scientifique un amortissement décrit par un module de Young sous la forme de  $E(1 + i\eta)$  avec un coefficient de Poisson réel. La distribution de l'amortissement est de ce fait homogène : il est donc tout à fait envisageable d'utiliser une fonction  $\eta(s)$  beaucoup plus «élaborée» que la simple constante  $\eta$ , sans pour autant que la résolution du problème en soit affectée. Les vecteurs propres ne sont pas altérés et les valeurs propres  $\lambda_a$  du système amorti sont simplement données à partir des valeurs propres du système non amorti  $\lambda_n$  par

$$\lambda_a = (1 + i\eta(s))\lambda_n \quad (2.35)$$

Le modèle est valide si  $\nu$  est réel, le matériau homogène, la structure non composite et les conditions aux limites non dissipatives.

### 2.3.2.2 L'amortissement homogène

Le modèle d'amortissement homogène le plus connu est sans doute le modèle d'amortissement de Rayleigh (Bathe [7]). Disponible dans la plupart des codes EF industriels, il repose sur une écriture spécifique de la matrice d'amortissement  $C$  comme combinaison des matrices de masse  $M$  et de rigidité  $K$ .

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.36)$$

La base des vecteurs du système non-amorti diagonalisant simultanément  $K$  et  $M$  diagonalise  $C$  aussi. Les vecteurs propres du système amorti sont par conséquent égaux aux vecteurs propres du système non-amorti. La solution du problème aux valeurs propres avec un amortissement de Rayleigh s'écrit :

$$\begin{aligned} [K + sC + s^2M] u &= [K + s\alpha M + s\beta K + s^2M] u \\ &= [(1 + s\beta)K + (s^2 + s\alpha)M] u = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\left[ K + \left( \frac{s^2 + s\alpha}{1 + s\beta} \right) M \right] u = [K + S^2M] u = 0 \quad (2.38)$$

Les valeurs propres  $\omega_k$  ( $s_k = i\omega_k$ ) du système amorti sont calculées à partir des valeurs propres réelles  $\Omega_k$  ( $S_k = i\Omega_k$ ) du système non amorti.

$$\Omega_k^2 = \frac{\omega_k^2 - i\omega_k\alpha}{1 + i\omega_k\beta} \quad (2.39)$$

Le modèle d'amortissement de Rayleigh est très limité. La catégorie large des amortissement homogènes à laquelle il appartient permet pourtant, sans effort numérique supplémentaire, d'utiliser des "lois" viscoélastiques fréquentielles tout à fait variées. En conservant le formalisme précédent, il est possible par exemple de remplacer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , constants dans le modèle de Rayleigh, par des fonctions complexes de la pulsation tout à fait arbitraires  $\alpha(\omega)$  et  $\beta(\omega)$ . La structure de la matrice d'amortissement est conservée, tout comme la nature homogène de l'amortissement. Les fréquences propres, qui dépendent de la pulsation, sont alors définies de façon analytique à partir de celles du système non-amorti :

$$\Omega_k^2(\omega) = \omega_k^2 \left( \frac{1 - i\alpha(\omega)/\omega_k}{1 + i\beta(\omega)\omega_k} \right) \quad (2.40)$$

On remarque que la proportionnalité permet de simplifier les difficultés liées à la complexité des coefficients et à la dépendance fréquentielle à la fois. Caughey et Kelly ont apporté une contribution majeure dans la compréhension des systèmes vibratoires amortis et dans l'étude de l'homogénéité de l'amortissement. Ils ont énoncé des conditions sur les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement nécessaires et suffisantes pour que les modes soient réels, c'est-à-dire pour que l'amortissement soit réel. Elles concernent la structure des matrices d'amortissement, c'est-à-dire la nature spatiale de l'amortissement, et sont indépendantes du modèle d'amortissement fréquentiel/temporel. Dans le cas général du problème aux valeurs propres  $(K - \lambda M)u = 0$  où  $M$  est réelle symétrique définie positive (invertible) et  $K$  se décompose en une partie réelle  $K_r$  et une partie imaginaire  $K_i$ , la condition de Caughey et Kelly d'existence de vecteurs propres réels à un facteur multiplicatif complexe près s'écrit  $K_r M^{-1} K_i = K_i M^{-1} K_r$ . La démonstration consiste à séparer les parties réelle et imaginaire de l'équation du problème aux valeurs propres complexe en formant deux équations réelles. Parties imaginaire et réelle sont alors égales si les vecteurs propres du système matriciel  $(K_r, M)$  sont égaux aux vecteurs propres de  $(K_i, M)$ . Dans le cas du problème standard où  $M = I$ , la condition se réduit à  $K_r K_i = K_i K_r$  et signifie que  $K_r$  et  $K_i$  partagent les mêmes vecteurs propres. Dans le cas d'une matrice symétrique complexe  $K$ , vérifier la condition de Caughey et Kelly revient à vérifier que  $K_i M^{-1} K_r$  est symétrique<sup>8</sup>. Cette condition est vérifiée par les matrices  $K$  normales<sup>9</sup>. Dans le cas standard, de telles matrices vérifient en effet  $K^H K = K K^H$ , ce qui est équivalent à  $K_r K_i = K_i K_r$ . Dans le cas généralisé, la matrice  $K$  doit être telle que  $K^H M^{-1} K = K M^{-1} K^H$ . Cette égalité est vérifiée par les matrices hermitiennes et en particulier par les matrices symétriques réelles.

### 2.3.2.3 Extensions et limites du modèle d'amortissement homogène

Caughey et Kelly ont également proposé une extension au modèle d'amortissement de Rayleigh en définissant la série matricielle suivante :

$$C = M \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k [M^{-1} K]^k \quad (2.41)$$

<sup>8</sup> $K_i M^{-1} K_r = (K_i M^{-1} K_r)^T$ .

<sup>9</sup>Les matrices normales incluent les matrices hermitiennes et symétriques réelles.

Elle aboutit à un amortissement plus général que celui modélisé par (2.39). D'autres auteurs comme Adhikari [3], [2] se sont aussi intéressés à l'amortissement homogène. L'hypothèse d'amortissement homogène permet en conclusion une identification très précise et peu coûteuse par le biais de fonctions complexes de la fréquence à partir de mesures d'amortissement. Elle n'est valable néanmoins que si l'amortissement est "suffisamment homogène", lorsque par exemple un polymère est étudié seul, avec l'hypothèse d'un coefficient de Poisson réel. Un tel modèle est inadapté s'il est avéré expérimentalement que les déformées modales ont une phase spatiale variable. Cette phase peut en outre avoir des conséquences notables dans le calcul de rayonnement acoustique. Dans le cas pratique académique que nous avons appréhendé, celui d'une plaque en aluminium avec des patches de polymère contraints, un modèle d'amortissement homogène est inadapté : tant pour modéliser la dissipation par rayonnement acoustique que pour modéliser l'amortissement viscoélastique. Deux positions de patch différentes peuvent conduire à des amortissements très différents sans pour autant que la fréquence du mode ne soit modifiée de façon notable, ce que ne peut traduire un modèle homogène d'amortissement. Seul l'amortissement thermoélastique peut être modélisé dans certains cas par un amortissement homogène. Nous privilégierons toutefois une approche modélisant le couplage thermoélastique plutôt qu'une approche visant à identifier un modèle d'amortissement homogène équivalent (§ 4.2).

## 2.4 Résolution du problème dans le domaine de Laplace

Nous nous sommes intéressés à la formulation générale du problème et à certains aspects de la modélisation spatiale. Nous nous tournons à présent vers la résolution du problème (2.1) construit dans le domaine de Laplace et en particulier à l'inversion de l'opérateur  $\mathbf{A} = [\mathbf{s}^2 \mathbf{M} + \mathbf{s} \mathbf{K}^V(\mathbf{s}) + \mathbf{K}^E]$ . Cette opération est bien sûr essentielle dans la résolution directe mais elle est tout aussi importante dans la résolution du problème aux valeurs propres. Deux choix vont conditionner la résolution numérique : celui de l'opérateur à inverser (opérateur éventuellement différent de  $\mathbf{A}$ ) et celui de la méthode d'inversion.

L'inversion d'un opérateur est sans doute l'étape la plus coûteuse de la résolution numérique. Pour différentes raisons, il peut être opportun de choisir un opérateur ne correspondant pas tout à fait à l'opérateur  $\mathbf{A}$ . C'est le cas en dynamique non-linéaire, lorsque seul l'opérateur linéarisé (défini à une valeur fixée du paramètre contrôlant la non linéarité) peut être inversé. C'est le cas en dynamique amortie, lorsque le solveur n'est pas en mesure d'inverser des matrices à coefficients complexes : l'opérateur inversé est alors la partie réelle de  $\mathbf{A}$ . L'opérateur retenu n'étant pas nécessairement égal à  $\mathbf{A}$ , l'inversion n'est pas exacte : différentes méthodes (méthode de perturbation, méthode itérative) sont alors envisagées pour corriger l'approximation initiale. Une inversion inexacte se traduit dans le cadre de l'approche modale par un mauvais découplage des modes (les modes calculés n'étant pas précisément ceux de l'opérateur) et par l'apparition de coefficients de couplage intermodal.

Cette partie concerne plus spécifiquement l'étude des difficultés numériques de résolution liées à la viscoélasticité. Nous nous intéressons dans un premier temps aux méthodes d'inversion classiques. Deux méthodes sont présentées : la méthode modale et la méthode de résolution directe, qui sont toutes deux employées après discrétisation de l'axe fréquentiel, fréquence par fréquence. Le traitement des opérateurs obtenus dans le cadre de la viscoélas-

ticité est ensuite abordé et plus spécifiquement les méthodes existantes destinées à prendre en compte l'inhomogénéité de l'amortissement, ainsi que la dépendance fréquentielle de la matrice de rigidité. Le paragraphe débouche enfin sur une méthode exploitant les modes de résonance pour laquelle nous avons opté. La méthode permet d'obtenir les réponses temporelle et fréquentielle exactes en levant l'ensemble des difficultés liées à la viscoélasticité. Des applications numériques montrent enfin l'efficacité de l'algorithme final de résolution, par comparaison avec les méthodes classiques. Le traitement numérique des couplages thermoélastique et fluide/structure est développé dans le chapitre 4 et s'appuie sur cette plate-forme susceptible de résoudre des problèmes tout à fait généraux.

## 2.4.1 Inversion de l'opérateur

### 2.4.1.1 Résolution directe

La résolution directe consiste à calculer (en référence à l'équation (2.1)) :

$$u(s) = [s^2 M + sK^V(s) + K^E]^{-1} (F(s) + sI_0 + V_0) \quad (2.42)$$

Un tel calcul ne peut être effectué sous cette forme qu'à fréquence fixée. Il est donc d'autant plus coûteux que l'excitation considérée est de bande large. Les méthodes numériques d'inversion sont étudiées et testées (pour les plus courantes d'entre elles) dans le chapitre 3. Les résultats obtenus nous amènent à privilégier une résolution directe par factorisation complète (méthode frontale avec renumérotation par partition multiniveau) plutôt que par méthode itérative. Les performances des méthodes itératives sont en effet altérées par le mauvais conditionnement des matrices lié au choix de fonctions d'interpolation quadratiques dans la méthode des éléments finis.

### 2.4.1.2 Résolution modale

La résolution par méthode modale nécessite de résoudre le problème aux valeurs propres tiré de l'équation (2.1) sans second membre

$$[s_k^2(s)M + sK^V(s) + K^E] u_k(s) = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

Le calcul des éléments propres  $s_k(s), u_k(s)$  ne peut se faire qu'à  $s$  fixé par les solveurs linéaires. La symétrie des matrices complexes employées a pour conséquence les relations de biorthonormalité suivantes :

$$\begin{cases} u_i^T(s) M u_j(s) = \delta_{ij} \\ u_i^T(s) [sK^V(s) + K^E] u_j(s) = -s_j^2(s) \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.44)$$

On cherche ensuite la solution de l'équation (2.1) au travers d'une solution générique  $w(s) = \sum_i^N \alpha_i(s) u_i(s)$  constituée d'une combinaison des modes calculés. En multipliant à gauche par un vecteur propre  $u_j^T(s)$ , il vient

$$u_j^T(s) [s^2 M + sK^V(s) + K^E] \sum_i^N \alpha_i(s) u_i(s) = u_j^T(s) [F(s) + sI_0 + V_0] \quad (2.45)$$

La relation de biorthonormalité permet de déduire

$$\alpha_j(s) = \frac{\mathbf{u}_j^T(s) [F(s) + sI_0 + V_0]}{s^2 - s_j^2(s)} \quad (2.46)$$

La solution, dépendante de la fréquence et calculée à  $s$  fixé, s'écrit finalement

$$\mathbf{w}(s) = \sum_i^N \frac{\mathbf{u}_i^T(s) [F(s) + sI_0 + V_0]}{s^2 - s_i^2(s)} \mathbf{u}_i(s) \quad (2.47)$$

Un tel calcul ne présente pas beaucoup d'intérêt par rapport à la résolution directe, dans la mesure où la résolution directe ne nécessite qu'une seule inversion matricielle et n'effectue aucune troncature<sup>10</sup>. La méthode modale nécessite quant à elle plusieurs inversions matricielles, même lorsqu'un seul couple propre est cherché, et ne prend en compte qu'une partie du spectre. Elle "filtre" en effet la partie haute fréquence mal modélisée par la MEF qui apparaît dans la réponse calculée par la méthode directe. Elle fournit néanmoins des caractéristiques modales pertinentes pour l'analyse du système. Nous verrons au § 2.5.1 que la méthode utilisant les modes de résonance permet non seulement d'obtenir la réponse temporelle analytique, mais aussi la réponse fréquentielle du système en remédiant à la plupart des lacunes de l'approche modale classique en viscoélasticité.

## 2.4.2 Traitement numérique de l'amortissement non homogène

Dans le domaine de Laplace, les matrices de rigidité viscoélastiques ont des coefficients complexes, alors que la plupart des solveurs industriels ne sont adaptés qu'aux matrices réelles symétriques. Le problème peut être contourné si l'amortissement est de type homogène. Lorsque l'amortissement n'est pas homogène, plusieurs méthodes sont envisageables : une méthode de perturbation, la méthode de l'énergie de déformation modale (MSE<sup>11</sup>), la méthode utilisant l'espace des phases et les méthodes introduisant des coordonnées de dissipation (méthode GHM<sup>12</sup> et ADF<sup>13</sup>).

### 2.4.2.1 Méthode par perturbation

La méthode la plus simple, dans le cas d'un amortissement non homogène, consiste à supprimer purement et simplement les termes de couplage intermodaux qui apparaissent lorsque la matrice d'amortissement est projetée dans la base des modes du système non amorti. Seule la partie dite proportionnelle ou homogène de l'amortissement est retenue et les vecteurs propres sont ceux du cas sans amortissement.

Rayleigh [107] et Woodhouse [129] parmi d'autres ont étudié des schémas de perturbation, sous l'hypothèse d'un amortissement faible, permettant de tenir compte des termes extradiagonaux. Leur approche est modale et nécessite des techniques de développement en série autour d'un petit paramètre. Elle apporte une extension du cas bien maîtrisé des

---

<sup>10</sup>La résolution directe prend en compte la partie statique de la réponse liée aux modes des hautes fréquences.

<sup>11</sup>Modal Strain Energy analysis.

<sup>12</sup>Golla Hughes MacTavish.

<sup>13</sup>Anelastic Displacement Field.

systèmes non amortis à celui des systèmes faiblement amortis en permettant au travers d'expressions simples de dégager un sens physique appréciable. Elle requiert l'utilisation d'outils numériques classiques aisément disponibles (solveur EF usuel). Le cadre théorique de cette approche relève de l'analyse matricielle, et en particulier de l'étude du conditionnement des matrices et de la sensibilité d'un problème matriciel aux erreurs. Le résultat principal du développement au premier ordre s'énonce de la façon suivante (Lascaux et Théodor [74]).

Soit  $\lambda_k$  une valeur propre simple de la matrice diagonalisable  $K$  et  $\lambda_k(\epsilon)$  celle de  $K + \epsilon C$  telle que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_k(\epsilon) = \lambda_k$ . Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a :

$$\begin{cases} \lambda_k(\epsilon) = \lambda_k + \epsilon (v_k^* C u_k) + O(\epsilon^2) \\ u_k(\epsilon) = u_k + \epsilon \left( \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{v_i^* C u_k}{\lambda_k - \lambda_i} u_i \right) + O(\epsilon^2) \end{cases} \quad (2.48)$$

Dans le cas des matrices symétriques complexes, les vecteurs à gauche (adjoints)  $v_k$  sont tels que  $v_k^* = u_k^T$ . Notons qu'aucun critère quantifiant  $\epsilon$  ne figure dans les ouvrages académiques ; le domaine de validité de l'approximation n'est donc pas clairement établi. Les relations (2.48) restent en outre valables dans le cas du problème aux valeurs propres généralisé si l'on utilise des vecteurs propres  $u_k$  normalisés par la masse.

La matrice de perturbation  $\epsilon C$  peut prendre différentes formes. Rayleigh l'associe à la matrice d'amortissement ; dans le cas viscoélastique  $\epsilon C = i \operatorname{Im}(sK^v(s))$  (équation (2.1)). Les vecteurs propres à droite  $u_k$  et à gauche  $v_k$  sont donc ceux du système non-amorti. La relation (2.48) montre qu'une matrice d'amortissement constituée de termes imaginaires purs affectera uniquement la partie imaginaire des valeurs propres modales. Par ailleurs tout mode complexe  $u_k(\epsilon)$  s'écrit comme la somme du mode réel  $u_k$  associé et d'une combinaison de tous les autres modes réels. Cette combinaison est imaginaire pure si la matrice d'amortissement a des termes imaginaires purs. Les modes proches participent davantage à cette combinaison. En outre, plus la perturbation est importante, plus la partie imaginaire des modes le sera. Si la matrice d'amortissement est diagonalisable par  $(K, M)$  le terme résultant de la combinaison est nul et l'amortissement est homogène ou proportionnel. D'autres auteurs font usage d'une matrice de perturbation différente. Chung et Lee [69] la définissent par exemple comme la partie non-proportionnelle de la matrice d'amortissement, qui vient perturber le système amorti proportionnellement. Les auteurs soulignent la précision de la méthode par comparaison avec la méthode conventionnelle utilisant la matrice d'amortissement entière comme matrice de perturbation.

#### 2.4.2.2 La méthode MSE

La méthode d'énergie de déformation modale MSE (Modal Strain Energy) est très largement utilisée. Basée sur le principe d'équivalence, elle se prête bien au cadre de l'homogénéisation. Dans un premier temps, un amortissement matériau, fonction éventuelle de la fréquence, est affecté à une portion délimitée ou sous-système de la structure vibratoire. Cette portion peut se réduire à un degré de liberté seul. L'amortissement structural de la MSE est ensuite défini comme la somme des énergies de déformation modale des sous-systèmes, dans la base du système non-amorti, pondérées par leur amortissement matériau respectif, divisée par la somme des énergies de déformation. La MSE est donc d'une certaine façon comparable à une loi des mélanges basée sur les énergies de déformation.

Pour dégager la nature de l'approximation, intéressons-nous au cas général d'un système matriciel constitué de  $N$  sous-systèmes de masse  $M^q$  et de rigidité complexe  $K^q = K_r^q + iK_i^q$ . Le problème aux valeurs propres de couple propre  $(\lambda_j, u_j)$  s'écrit alors :

$$\left( \sum_q^N [K_r^q] + i \sum_q^N [K_i^q] - \lambda_j \sum_q^N [M^q] \right) \{u_j\} = \{0\} \quad (2.49)$$

Après multiplication à gauche par le vecteur adjoint  $u_j^T$ , la valeur propre est donnée par des quantités scalaires complexes, homogènes à des énergies,

$$\lambda_j = \frac{\sum_q^N u_j^T [K_r^q] u_j + i \sum_q^N u_j^T [K_i^q] u_j}{\sum_q^N u_j^T [M^q] u_j} \quad (2.50)$$

L'amortissement est décrit par l'énergie spécifique d'amortissement modale  $\Psi_j$  (présentée au § 1.3.4.2), qui est égale au rapport des parties imaginaire et réelle de la valeur propre :

$$\Psi_j = \frac{\sum_n^N u_j [K_i^n] u_j}{\sum_n^N u_j [K_r^n] u_j} \quad (2.51)$$

La méthode MSE repose donc sur deux hypothèses. D'une part, un coefficient d'amortissement est attribué à chaque partie du système : cette démarche n'est a priori envisageable que pour des amortissements à caractère local. L'amortissement liée à la viscoélasticité comme à la plasticité, se prêtent bien à la MSE ; il serait en revanche très délicat, voire impossible, de modéliser un amortissement non local comme le couplage fluide structure avec une méthode d'homogénéisation de ce type. D'autre part, si la méthode est exacte avec les vecteurs propres exacts, elle est utilisée en général avec les vecteurs propres du système non-amorti. L'approximation est donc correcte tant que les vecteurs en question ne sont pas trop différents des vecteurs exacts.

Parmi les études utilisant la MSE, Finegan et Gibson [39] présentent un travail d'homogénéisation sur une cellule représentative (élément de volume représentatif RVE). Les auteurs estiment l'amortissement structurel d'un composite à fibres  $\eta$  comme une combinaison de l'angle de perte ( $\eta_f, \eta_m, \eta_c$ ) et de l'énergie de déformation modale ( $W_f, W_m, W_c$ ) de trois parties distinctes (fibres, matrice et couche revêtant les fibres) du composite :

$$\eta = \frac{\eta_f W_f + \eta_c W_c + \eta_m W_m}{W_f + W_c + W_m} \quad (2.52)$$

Ma et He [85] proposent une extension de la MSE appliquée au cas de la vibration en flexion d'une plaque sandwich (théorie des plaques multi-couches avec prise en compte de l'inertie transverse). Une solution asymptotique de l'équation complexe basée sur un développement en série d'un petit paramètre (facteur de perte du matériau viscoélastique) est cherchée et fournit une expression des vecteurs et des valeurs propres complexes. Le premier terme du développement correspond à l'approximation de la MSE.

### 2.4.2.3 Méthode de l'espace des phases

Parmi les méthodes exactes, c'est-à-dire prenant en compte l'inhomogénéité sans approximation (sans l'hypothèse courante de petit amortissement), la plus répandue est sans doute

celle utilisant l'espace des phases. La méthode, présentée par exemple dans l'ouvrage de Hurty et Rubinstein [60], aboutit au calcul exact des modes complexes. Geng *et al* [43] l'utilisent dans le contexte de l'étude des pneus et présentent ensuite une façon de calculer les solutions temporelles par le biais de l'intégrale de Duhamel. Considérons le système matriciel classique de dimension  $N$  de dynamique amortie suivant :

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = Q \quad (2.53)$$

Les  $N$  équations complexes sont transformées en  $2N$  équations par adjonction d'un système trivial  $m\dot{q} = m\dot{q}$

$$\begin{bmatrix} 0 & m \\ m & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -m & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Ce système s'écrit également  $A\dot{y} + By = Y$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices symétriques réelles. La résolution du problème aux valeurs propres associé permet de déduire simplement valeurs propres et vecteurs propres complexes initiaux. L'inconvénient d'une telle méthode est qu'elle double la taille du système à résoudre. Son avantage réside dans son adaptabilité aux solvers EF existants. L'approche que nous retenons utilise également la base de l'opérateur non-adjoint. C'est cependant une approche entièrement complexe, qui ne nécessite donc pas de doubler la taille du système comme pour réécrire un nombre complexe sous la forme de deux nombres réels. La difficulté se situe au niveau de la résolution numérique du problème aux valeurs propres que nous évoquons dans le prochain chapitre. Elle nécessite l'utilisation de l'algorithme d'Arnoldi, qui est une extension de l'algorithme de Lanczos aux matrices quelconques, dont font naturellement partie les matrices complexes symétriques.

#### 2.4.2.4 Méthode introduisant des coordonnées de dissipation

Certaines méthodes numériques comme la méthode GHM (Golla Hughes Mac Tavish [47]) ou ADF (Anelastic Displacement Field [79]) exploitent la nature analytique du modèle viscoélastique<sup>14</sup> pour transformer le problème matriciel complexe en un problème matriciel équivalent, réel et indépendant de la fréquence. Un modèle viscoélastique simple ou décomposable en éléments simples (modèle à fraction rationnelle, modèle généralisé) permet d'introduire des coordonnées dites de dissipation caractérisant un champ intermédiaire. Les coordonnées de dissipation  $q_{vj}$  s'écrivent à partir des coordonnées classiques  $q$  en faisant apparaître explicitement les dépendances fréquentielle et complexe. Un modèle à fraction rationnelle issue d'une série de Prony et conduisant à un module de rigidité complexe de la forme

$$G(s) = G_\infty - \sum_{j=1}^N \frac{G_j}{s + \omega_j} \quad (2.55)$$

nécessite par exemple d'introduire  $N$  coordonnées de dissipation décrites par

$$q_{vj} = -\frac{E_j}{s + \omega_j} q \quad (2.56)$$

<sup>14</sup>La différence principale entre le modèle GHM et le modèle ADF provient du modèle viscoélastique utilisé. Le modèle GHM est représenté comme une série de mini-oscillateurs à amortisseur.

La relation explicite entre variables permet d'étendre le problème matriciel, opération inverse de la condensation statique, et d'extraire ainsi les dépendances fréquentielle et complexe. Tout comme pour la méthode de l'espace des phases, l'inconvénient réside dans la taille du système transformé, mais aussi dans sa forme réelle non-symétrique. Le nombre de variables associées au polymère est multiplié par trois dans le cas d'un modèle à pôle unique. Or, Kergoulay [66] estime qu'un nombre minimum de cinq pôles est requis pour modéliser correctement le comportement dynamique d'un élastomère.

### 2.4.3 Traitement numérique de la dépendance fréquentielle

L'inversion et la réponse structurelle sont calculés à partir de l'opérateur linéarisé construit en fixant la fréquence d'étude. Cette approche nécessite d'effectuer un calcul lourd, fréquence par fréquence. Pour pallier cet inconvénient différentes approches sont envisageables. Une première approche consiste à écrire le problème matriciel avec une dépendance fréquentielle explicite par le biais d'un modèle d'amortissement donné (modèle rhéologique, à dérivées fractionnaires). Il est alors possible «d'extraire» la dépendance fréquentielle du système en introduisant des variables portant cette dépendance (coordonnées de dissipation). Alternativement, il est possible d'utiliser un solveur non linéaire exploitant la dépendance fréquentielle explicite. On consultera par exemple l'article de Leung [81] qui propose une méthode traitant les problèmes aux valeurs propres matriciels polynomiaux.

L'utilisation des méthodes itératives est fréquente pour résoudre les problèmes non linéaires ainsi que des combinaisons de méthodes itératives et de méthodes de perturbation. La MSP (Multi-step Perturbation) en particulier est une méthode de réanalyse présentée par Ravi *et al* [106]. Elle se prête à l'introduction d'une perturbation sous la forme d'un amortissement ou d'une modification structurelle légère. Les caractéristiques de la structure modifiée sont obtenues à partir de la structure originelle sans nouvelle résolution complète. A chaque itération est effectuée une mise à jour des vecteurs à partir des derniers itérés, jusqu'à convergence. La dépendance fréquentielle peut également être appréhendée par le biais des méthodes de perturbation présentées au § 2.4.2.1 avec une matrice de perturbation définie par la variation de la matrice de rigidité construite à deux fréquences différentes  $\epsilon \mathbf{C} = (\mathbf{s} + \epsilon) \mathbf{K}^V(\mathbf{s} + \epsilon) - \mathbf{s} \mathbf{K}^V(\mathbf{s})$ . Nous avons implémenté cette technique pour accélérer la convergence du calcul des modes de résonance dont nous présentons l'étude au prochain paragraphe ; il résulte de cette technique des gains considérables en temps de calcul.

## 2.5 Modes de résonance et réponse temporelle

### 2.5.1 Les modes de résonance

Il existe une alternative aux approches décrites dans le paragraphe précédent, utilisant les modes de résonance, qui permet de traiter de façon efficace la dépendance fréquentielle des opérateurs. La méthode, formulée dans le cas présent avec la transformée de Laplace, est basée sur les travaux de Filippi *et al* [38]. L'un des avantages de la méthode réside dans la possibilité d'obtenir de façon exacte les réponses temporelle et fréquentielle de systèmes très variés (Mattei *et al* [88]). Les modes de résonance sont associés aux éléments propres de l'opérateur non linéarisé, et contrairement aux modes propres, ils ne dépendent pas de la fréquence. Nous les notons avec un chapeau pour les distinguer. Ils satisfont l'équation

$$[\hat{s}_i^2 M + \hat{s}_i K^V(\hat{s}_i) + K^E] \hat{u}_i = 0 \quad \forall i \in \{1, N\} \quad (2.57)$$

Les modes de résonance sont déterminés à l'aide d'une routine itérative effectuant des appels répétés à un solveur aux valeurs propres symétrique complexe. A l'étape  $k + 1$  le solveur calcule le couple propre  $(s_i^{k+1}, u_i^{k+1})$  du système matriciel construit à  $s_i^k$  :

$$\left[ (s_i^{k+1})^2 M + (s_i^k) K^V(s_i^k) + K^E \right] u_i^{k+1} = 0 \quad (2.58)$$

Le schéma itératif doit être répété pour chacun des modes de résonance recherchés. La valeur initiale de l'algorithme est prise à 0 Hz, sauf si éventuellement quelques informations sur le comportement vibratoire structurel sont disponibles. Au cours du processus, le solveur est réglé pour calculer quelques valeurs propres en plus, dont le surcoût est modeste<sup>15</sup>, de façon à anticiper sur le prochain mode de résonance à calculer et à connaître une estimation de sa fréquence qui initialise la routine itérative. En général, dans les cas que nous avons étudiés, seules deux itérations suffisent à atteindre la convergence, définie lorsque la variation du module de la fréquence de résonance est inférieure à une tolérance de 0,001%.

La convergence peut être accélérée en introduisant une estimation plus précise de la fréquence de résonance initiale par le biais de la méthode de perturbation présentée au § 2.4.2.1. Supposons que l'algorithme ait déjà convergé vers le mode de résonance  $i$  ( $\hat{s}_i, \hat{u}_i$ ). Pour alléger les écritures, notons  $f_0$  la fréquence associée à ce mode connu. L'algorithme a calculé plusieurs valeurs propres autres que celle associée à  $\hat{s}_i$  ; il dispose notamment d'une valeur approchée  $s_{i+1}(f_0)$  de  $\hat{s}_{i+1}$  associée au mode de résonance  $i + 1$ . Cette estimation peut être améliorée par perturbation en utilisant la matrice de viscoélasticité  $\Delta K^V$  comme suit :

$$\begin{cases} \hat{s}_{i+1}^2 \approx s_{i+1}^2(f_0) + u_{i+1}^T(f_0) \Delta K^V u_{i+1}(f_0) \\ \Delta K^V = s_{i+1}(f_0) K^V(s_{i+1}(f_0)) - \hat{s}_i K^V(\hat{s}_i) \end{cases} \quad (2.59)$$

Des comparaisons numériques entre l'algorithme sans perturbation (noté **V1**) et l'algorithme avec perturbation (noté **V2**) sont présentées au § 2.6. Les gains de temps sont importants, et les résultats identiques, le critère de convergence étant le même dans les deux cas.

## 2.5.2 La solution temporelle

### 2.5.2.1 La nature des solutions propres

La transformée de Laplace, définie par

$$\mathcal{L}[f_i(t)] = \tilde{f}_i(s) = \int_0^\infty f_i(t) \exp^{-st} dt \quad (2.60)$$

vérifie  $\tilde{f}_i(\bar{s}) = \overline{\tilde{f}_i(s)}$ . Cette propriété a des conséquences importantes sur la nature des

<sup>15</sup>L'influence du nombre de valeurs recherchées sur le coût numérique est présentée dans la figure 3.2.

solutions de l'équation aux valeurs propres. En conjuguant, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{[s_i^2 M + s_i K^V(s_i) + K^E] u_i(s_i)} &= 0 \\ \overline{[\bar{s}_i^2 M + \bar{s}_i \overline{K^V(s_i)} + K^E] \overline{u_i(s_i)}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

D'après (2.27)  $\overline{K^V(s_i)} = K^V(\bar{s}_i)$  et  $\overline{u_i(s)} = u_i(\bar{s}_i)$

Par conséquent

$$[\bar{s}_i^2 M + \bar{s}_i K^V(\bar{s}_i) + K^E] u_i(\bar{s}_i) = 0 \quad (2.62)$$

Le résultat s'énonce de la façon suivante : si  $s_i$  est une solution du problème aux valeurs propres, alors  $\bar{s}_i$  est aussi solution. En outre, il ne semble a priori pas que  $-s_i$  soit solution sauf dans le cas sans amortissement pour lequel  $-s_i = \bar{s}_i$ , ce qui est le cas des modes rigides ( $\hat{s}_i = 0$ ).

### 2.5.2.2 Le théorème des résidus

Il nous importe de déterminer la solution temporelle à partir du déplacement calculé dans le domaine de Laplace sous la forme d'un développement en série de modes propres (éq. (2.47)). Notons que la propriété de biorthogonalité des modes propres<sup>16</sup>, qui n'existe pas entre les modes de résonance, a donc *bien été exploitée pour obtenir cette expression*.

$$w(s) = \sum_i^N \frac{u_i^T(s) [F(s) + sI_0 + V_0]}{s^2 - s_i^2(s)} u_i(s) \quad (2.63)$$

Nous décomposons pour cela le vecteur d'excitation en une partie fréquentielle et une partie spatiale que nous supposons indépendante de la fréquence  $F(s) = \Psi(s)\phi$ . La partie fréquentielle  $\Psi(s)$  est la transformée de Laplace de  $\psi(t)$ . Le déplacement s'écrit donc

$$w(s) = \Psi(s) \sum_i^N \frac{u_i^T(s) \phi u_i(s)}{s^2 - s_i^2(s)} + \sum_i^N \frac{u_i^T(s) s I_0 u_i(s)}{s^2 - s_i^2(s)} + \sum_i^N \frac{u_i^T(s) V_0 u_i(s)}{s^2 - s_i^2(s)} \quad (2.64)$$

L'obtention du déplacement dans le domaine temporel nécessite le recours à la transformée intégrale inverse dite de Mellin-Fourier, ou formule de Bromvitch.

$$\mathcal{L}^{-1} [\tilde{f}(s)] = Y(t) f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (2.65)$$

$Y(t)$  est la fonction de heaviside. L'abscisse de valeur  $C$  est supposée supérieure à l'abscisse de convergence absolue de  $\tilde{f}(s)$ . Nous nous intéressons dans un premier temps à l'intégration de  $w_1(s)$ , transformée de Laplace de  $w_1(t)$ , définie par

$$w_1(s) = \frac{u_j^T(s) \phi u_j(s)}{s^2 - s_j^2(s)} \quad (2.66)$$

<sup>16</sup>La propriété de biorthogonalité des modes à la valeur de paramètre  $s$  est démontrée au § 2.2.2.2

La formule d'inversion s'écrit

$$Y(t) w_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} w_1(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u_j^T(s) \phi u_j(s)}{s^2 - s_j^2(s)} e^{st} ds \quad (2.67)$$

Le domaine d'intégration, transformé ici en contour  $\Gamma$  (contour semi-circulaire dans la figure 2.2), est altéré en vertu du théorème de Cauchy selon lequel  $\int_{\Gamma} g(s) ds = 0$  pour toute fonction  $g(s)$  holomorphe définie sur un domaine  $\Omega$  contenant la courbe fermée  $\Gamma$ . Le choix du contour  $\Gamma$  est justifié par la connaissance a priori de la position des pôles de la fonction à intégrer. Nous supposons à ce titre qu'à chaque mode de résonance calculé par l'algorithme correspondent deux résidus associés à deux pôles simples conjugués l'un de l'autre, notés  $\hat{s}_j$  et  $\bar{\hat{s}}_j$ .

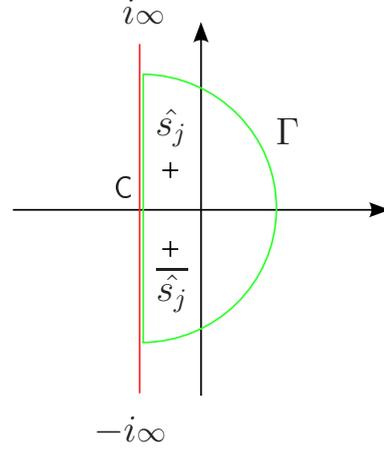


FIG. 2.2 – Contour d'intégration dans le plan complexe.

Nous invoquons à présent le théorème des résidus concernant l'intégration d'une fonction holomorphe sur  $\Omega \setminus \{\hat{s}_j, \bar{\hat{s}}_j\}$ ,  $\Omega$  étant défini pour des abscisses supérieures à l'abscisse de convergence de la fonction.

La solution temporelle s'écrit :

$$Y(t) w_1(t) = \text{Res}(\phi, \hat{s}_j) + \text{Res}(\phi, \bar{\hat{s}}_j) \quad (2.68)$$

Les résidus sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{Res}(\phi, \hat{s}_j) &= \lim_{s \rightarrow \hat{s}_j} (s - \hat{s}_j) \frac{u_j^T(s) \phi u_j(s)}{s^2 - s_j^2(s)} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow \hat{s}_j} \frac{u_j^T(s) \phi u_j(s)}{s + s_j(s)} e^{st} = \frac{\hat{u}_j^T \phi \hat{u}_j}{2\hat{s}_j} e^{\hat{s}_j t} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\text{Res}(\phi, \bar{\hat{s}}_j) = \overline{\text{Res}(\phi, \hat{s}_j)}$$

Par conséquent

$$Y(t) w_1(t) = \text{Re} \left[ \frac{\hat{u}_j^T \phi \hat{u}_j}{\hat{s}_j} e^{\hat{s}_j t} \right] \quad (2.70)$$

La solution temporelle complète s'écrit pour  $t \geq 0$  :

$$\mathbf{w}(t) = \sum_{j=1}^N \text{Re} \left[ \frac{\hat{u}_j^T \phi \hat{u}_j}{\hat{s}_j} \psi(t) * e^{\hat{s}_j t} + \hat{u}_j^T \left( \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_0}{\hat{s}_j} \right) \hat{u}_j e^{\hat{s}_j t} \right] \quad (2.71)$$

Cette expression fournit une solution exacte, très rapide à calculer car analytique et valide pour tout système linéaire à amortissement général. La routine itérative utilisée pour calculer les modes de résonance rend très aisée l'intégration par le théorème des résidus, comparée à celle que nécessiterait un modèle d'amortissement. En effet, même simple, celui-ci conduirait à des expressions polynomiales au dénominateur de l'équation (2.63) plus élaborées et plus difficiles à intégrer.

### 2.5.3 Une solution fréquentielle alternative

Il existe une solution fréquentielle alternative à celle utilisant les modes propres donnée par l'équation (2.47), que l'on peut obtenir par application de la transformée de Laplace sur l'expression temporelle du déplacement (2.71). Le calcul donne

$$w(s) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ \left[ \hat{\mathbf{u}}_j^T \frac{\phi \Psi(s) + \hat{s}_j \mathbf{I}_0 + \mathbf{V}_0}{\hat{s}_j (s - \hat{s}_j)} \hat{\mathbf{u}}_j \right] + \left[ \bar{\mathbf{u}}_j^T \frac{\phi \Psi(s) + \hat{s}_j \mathbf{I}_0 + \mathbf{V}_0}{\bar{s}_j (s - \bar{s}_j)} \bar{\mathbf{u}}_j \right] \right\} \quad (2.72)$$

L'avantage décisif de cette expression non-approchée de la réponse fréquentielle devant celle donnée par l'équation (2.63) est liée à *l'indépendance des vecteurs de résonance vis-à-vis de la fréquence*. Il est inutile de procéder à une discrétisation de l'axe fréquentiel et au calcul d'une nouvelle base pour chacun de ses points comme le nécessite la résolution de (2.63).

## 2.6 Réponse fréquentielle : comparaison numérique

L'objet de ce paragraphe concerne la comparaison des méthodes présentées, à savoir la résolution directe, la résolution par méthode modale et la résolution par série de modes de résonance. Cette dernière méthode existe sous trois versions. La première, notée **V1**, utilise la routine itérative classique exposée au § 2.5.1. La deuxième, notée **V2**, exploite la méthode de perturbation (2.59) pour faire converger plus vite la méthode itérative. La valeur initiale de 0 Hz prise par défaut rend la convergence en moins de trois itérations difficile ; avec la méthode de perturbation deux itérations suffisent dans la plupart des cas étudiés. Pour les modes suivants, dont une estimation est connue (le solver calcule plusieurs valeurs propres), un réajustement est effectué par la même méthode de perturbation, de sorte qu'une seule itération suffit plutôt que deux. La troisième version, notée **V3**, consiste à ne calculer qu'un seul problème aux valeurs propres en construisant le système à une fréquence centrale. Le milieu de la bande fréquentielle d'excitation est un choix correct. La méthode de perturbation est alors utilisée pour réajuster l'ensemble des valeurs propres aux valeurs de résonance et l'ensemble des vecteurs propres de façon à ce qu'ils soient une approximation correcte des vecteurs de résonance.

Un pas fréquentiel de 1 Hz est utilisé pour les calculs par résolution directe et par méthode modale. Le pas est adaptatif dans le cas du calcul par les modes de résonance : il suit une loi quadratique autour de la fréquence de résonance considérée, de sorte qu'il vaut par exemple 0,7 Hz près de celle-ci, 1,67 Hz à 100 Hz, et 4,5 Hz à 200 Hz de la fréquence de résonance. Cette stratégie permet une résolution supérieure dans les zones de forte amplitude, comparée aux méthodes modale et de résolution directe, et une réduction

de temps de calcul de l'ordre de 3,5 dans la routine calculant la réponse. Dans le cas d'un bruit blanc remarquons que la méthode basée sur les modes de résonance fournit précisément la position des maximums de vibration puisqu'ils sont localisés aux fréquences de résonance.

L'étude a concerné une plaque encastrée en aluminium de dimensions 35cm  $\times$  40cm et

	Cas peu amorti	Cas très amorti
Maillage de la plaque	20 $\times$ 20	20 $\times$ 20
Nombre d'éléments	480	1600
Nombre d'inconnues	16173	43947
Nombre de coefficients matriciels	2236977	7377561

TAB. 2.3 – Caractéristiques numériques des deux cas étudiés de plaque encastrée peu amortie ou très amortie.

de 2mm d'épaisseur. La plaque est excitée au point ( $x = 0,8 \times$  largeur,  $y = 0,5 \times$  longueur); le déplacement vibratoire de la structure est observé au point ( $x = 0,8 \times$  largeur,  $y = 0,8 \times$  longueur). L'excitation est un bruit blanc allant de 0 Hz à 1000 Hz. Deux configurations de traitement ont été retenues : une configuration peu amortie avec un patch viscoélastique contraint situé au centre de la plaque (voir chapitre 1) et une configuration très amortie avec un patch contraint couvrant la structure. Le maillage est constitué de 20 éléments dans la largeur et la longueur et de deux éléments dans l'épaisseur du polymère. Le temps CPU a été estimé pour chacune des méthodes, mais dans la mesure où il est relatif, le temps minimum a servi de référence pour normaliser les durées de calcul. Pour chacune des configurations, différents éléments de la résolution sont présentés : le nombre de résolutions de système, le nombre de factorisations numériques.

### 2.6.1 Le cas peu amorti

Les caractéristiques numériques des différentes méthodes utilisées sont présentées dans le tableau 2.4. Les symboles **V1**, **V2** et **V3** correspondent aux trois versions du programme utilisant les modes de résonance. Le nombre 999 est associé au nombre de pas fréquentiels utilisés dans les méthodes nécessitant un opérateur linéarisé (discrétisation régulière de l'axe fréquentiel tous les 1 Hz). Il s'agit donc aussi du nombre de factorisations requis par les méthodes directe et modale classique.

Un exemple de fonction de réponse fréquentielle (module et phase) est représenté dans les figures 2.3 et 2.4. Les résultats du calcul utilisant les modes propres ne sont pas représentés, celui-ci est tout au plus aussi précis que le calcul par résolution directe, et moins rapide. Le calcul par résolution directe (courbe bleue) nous sert de référence pour évaluer la qualité de l'ensemble des résultats. Les résultats de **V1** et **V2** sont absolument identiques puisque le même critère de convergence s'applique aux deux routines : ils sont représentés par une seule courbe, la courbe rouge. Les résultats de **V3** sont représentés par la courbe verte. La version **V3** est basée sur un calcul approché ; nous avons donc représenté la différence en pourcentage entre les valeurs propres obtenues par **V1** et celles obtenues par **V3** pour effectuer une comparaison plus fine (figure 2.5). L'approximation faite par **V1** est de très bonne qualité,

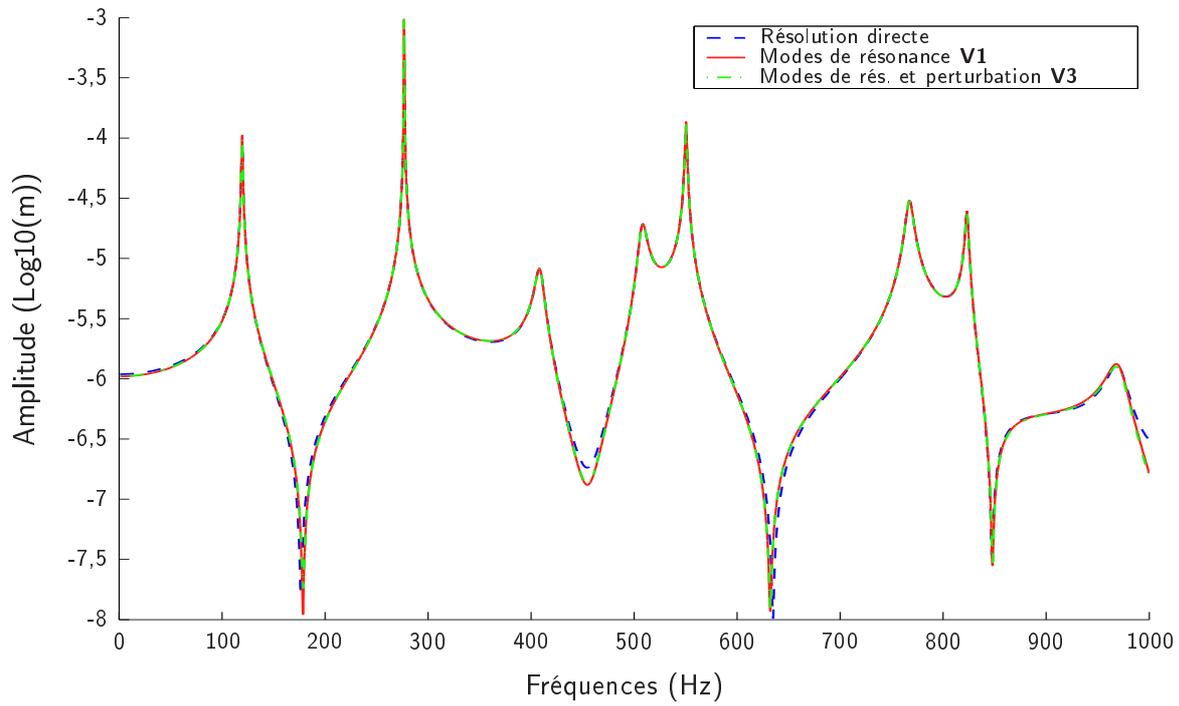


FIG. 2.3 – Amplitude de la réponse fréquentielle d'une plaque encastrée. Cas peu amorti.

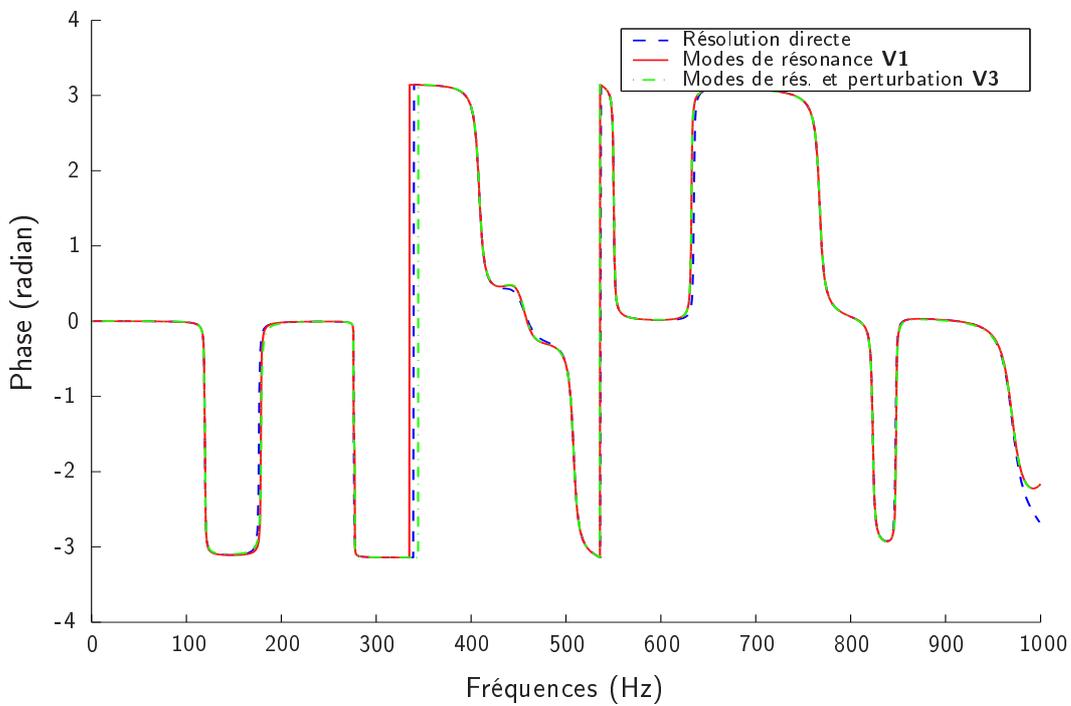


FIG. 2.4 – Phase de la réponse fréquentielle d'une plaque encastrée. Cas peu amorti.

	Directe	Modes propres	Modes de résonance		
			V1	V2	V3
Temps CPU normalisé	191.4	295.4	15.7	9.6	1.0
mémoire max. (MB)	86	91	112	112	112
Nombre de factorisations	999	999	31	16	1
Nombre de résolutions	999	1921	1921	976	60

TAB. 2.4 – Comparaison des méthodes de calcul de réponse fréquentielle pour le cas peu amorti : résolution directe, résolution modale classique et algorithmes **V1**, **V2** et **V3**.

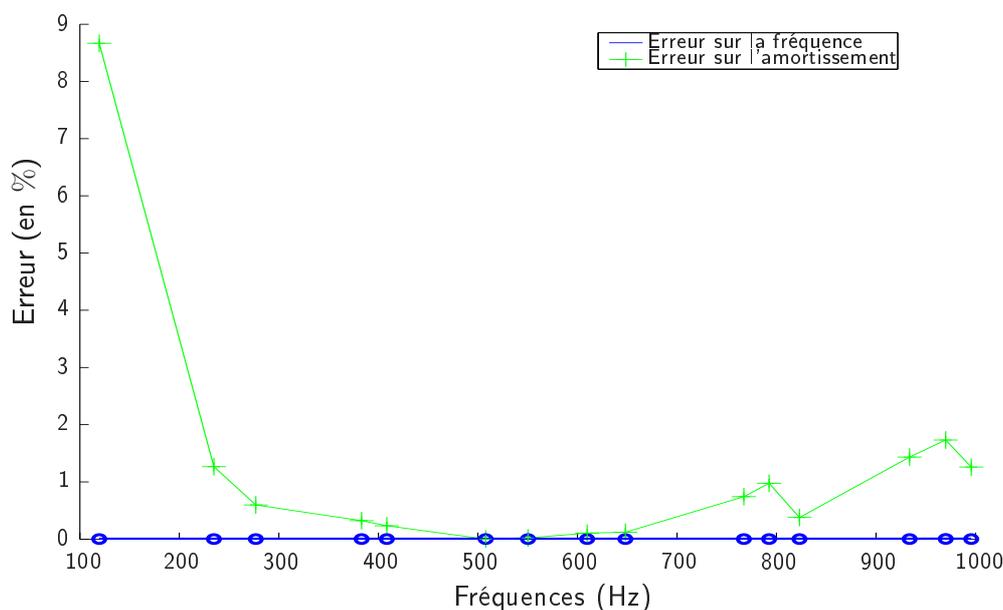


FIG. 2.5 – Erreur relative du calcul des valeurs propres par l'algorithme à perturbation **V3** par rapport aux valeurs propres calculées par l'algorithme itératif **V1**. Cas peu amorti.

avec une erreur de 9% maximum sur l'amortissement en basse fréquence et moins de 1% sur les trois quarts du spectre. L'erreur commise affecte directement l'amplitude des maxima de la réponse, mais ramenée à un niveau ( $\log_{10}$ ) dans la figure 2.3, elle est imperceptible. L'erreur sur la fréquence est tout à fait négligeable.

### 2.6.2 Le cas très amorti

Les caractéristiques numériques des différentes méthodes appliquées à une configuration très amortie sont présentées dans le tableau 2.5.

Les figures 2.6 et 2.7 représentent un exemple de réponse fréquentielle (amplitude et phase respectivement). On constate que l'amortissement augmente avec la fréquence, ce qui apparaît normal pour une structure amortie par un polymère. L'écart relatif entre la méthode utilisant les modes de résonance version **V2** (ou **V1** aux résultats identiques) et la version **V3** est représentée dans la figure 2.8. La courbe représentative de l'écart montre qu'à 500 Hz,

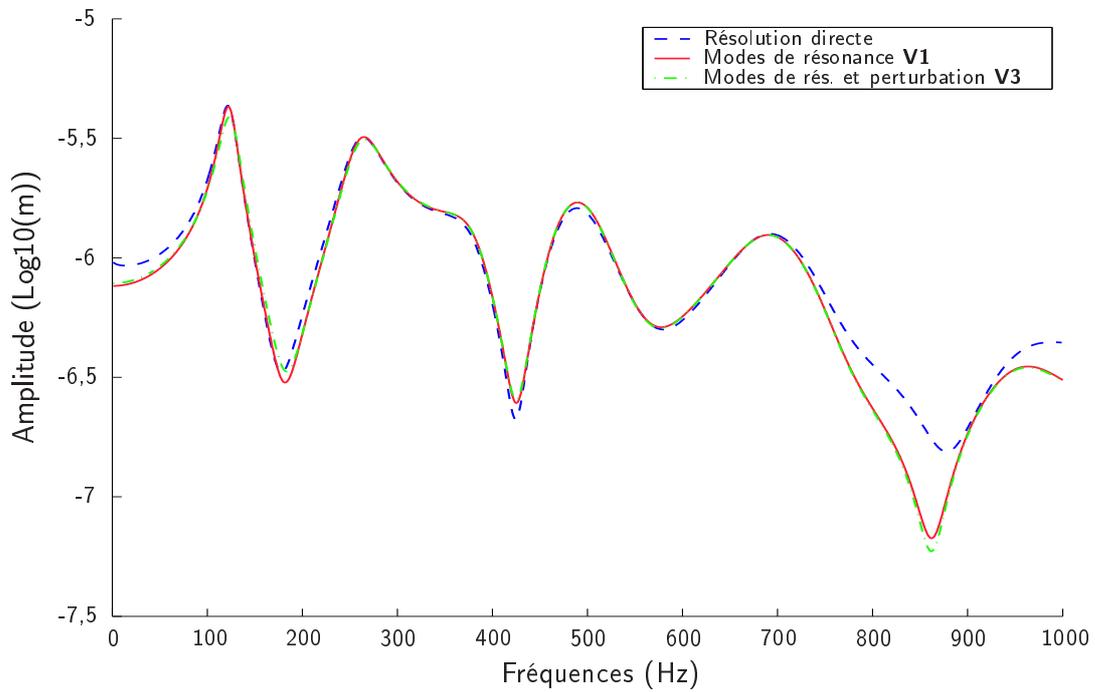


FIG. 2.6 – Amplitude de la réponse fréquentielle d'une plaque encastrée. Cas très amorti.

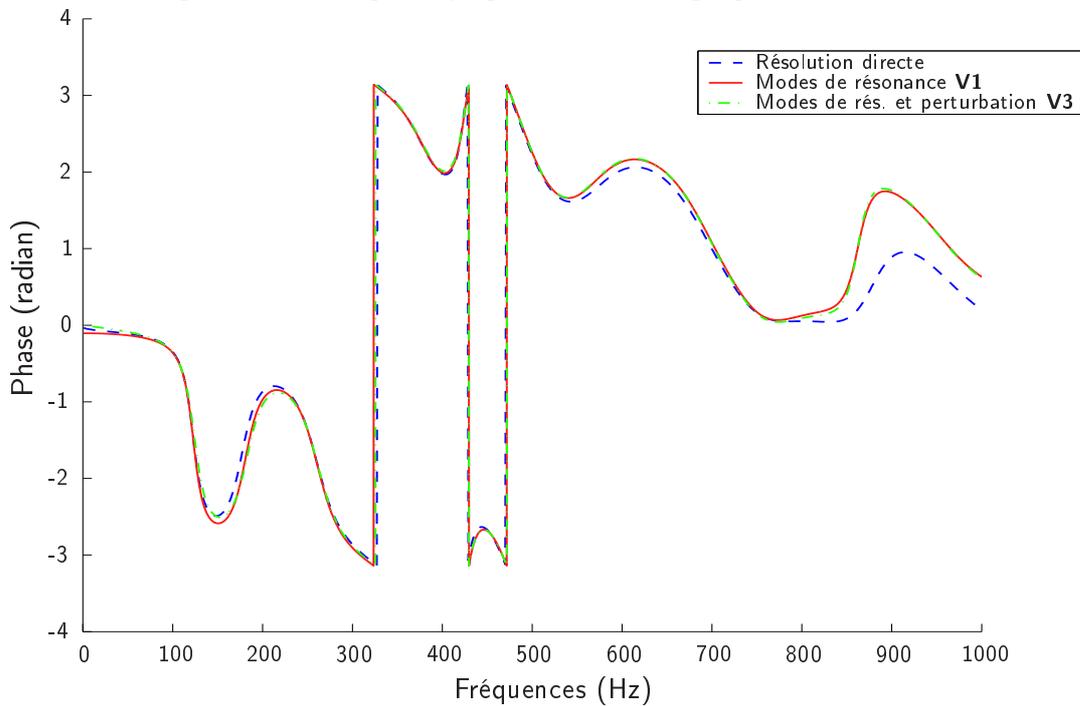


FIG. 2.7 – Phase de la réponse fréquentielle d'une plaque encastrée. Cas très amorti.

	Modes de résonance				
	Directe	Modes propres	V1	V2	V3
CPU normalisé	403.5	485.7	31.5	20.9	1.0
mémoire max. (MB)	413	425	454	455	457
Nombre de factorisations	999	999	51	31	1
Nombre de résolutions	999	26095	3289	1938	63

TAB. 2.5 – Comparaison des méthodes de calcul de réponse fréquentielle pour le cas très amorti : résolution directe, résolution modale classique et algorithmes V1, V2 et V3.

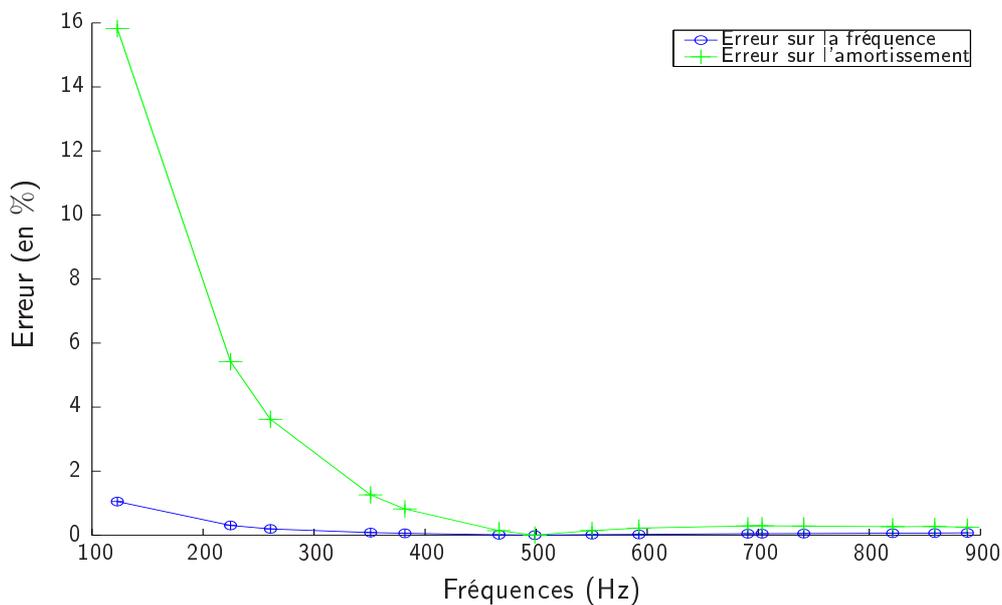


FIG. 2.8 – Erreur relative du calcul des valeurs propres par l'algorithme à perturbation V3 par rapport aux valeurs propres calculées par l'algorithme itératif V1. Cas très amorti.

fréquence servant de point de référence à la méthode de perturbation, l'écart relatif est nul. L'erreur aux fréquences supérieures est faible ; en revanche les résultats se dégradent un peu dans les basses fréquences avec une erreur maximum d'environ 16%. Dans certains cas il est donc souhaitable d'avoir plusieurs points de référence pour la méthode de perturbation plutôt qu'un seul (suivant la forme des données viscoélastiques) ; dans la configuration étudiée actuelle, des points de référence placés par exemple tous les 500 Hz constitueraient sans doute un bon choix.

L'ensemble des données présentées (temps de calcul, fonction de réponse fréquentielle), en résumé, montre la grande efficacité ainsi que la précision de la méthode utilisant les modes de résonance, pour des cas faiblement amortis ou très amortis. Le temps de calcul est de deux à trois ordres plus réduit que le temps de calcul avec la méthode fréquentielle de référence dans le cas amorti, la résolution directe. La différence observée entre la réponse calculée par résolution directe et celle calculée par notre méthode est liée au fait que seule la méthode de

résolution directe estime la contribution statique des modes de haute fréquence. Cette prise en compte est visible autour de 850 Hz dans la figure 2.6 notamment ; nous avons observé dans une autre simulation dont les résultats ne sont pas présentés ici que la différence se réduit en prenant davantage de modes de résonance ; en tout état de cause la disparité des résultats apparaît surtout au niveau des anti-résonances pour lesquelles la connaissance précise de l'amplitude de vibration est d'un intérêt limité. Par ailleurs, la méthode des modes de résonance donne parfois des résultats plus justes que la méthode de résolution directe au niveau des maximums des systèmes peu amortis, du fait qu'une résolution de 1 Hz n'est pas toujours suffisante.

### 2.6.3 Comparaison des différentes méthodes de calcul : étude de la puissance acoustique

Les figures précédentes qui représentent le déplacement en un point de la structure ne permettent pas vraiment de juger si l'approximation du déplacement est correcte. Il est en outre possible que la méthode de perturbation n'estime pas les vecteurs de résonance de façon satisfaisante. Nous avons donc décidé de valider cette méthode en comparant la puissance acoustique rayonnée (§ 4.3.3.9) calculée par la méthode des modes de résonance itérative **V1** prise comme référence à la méthode des modes de résonance avec perturbation **V3**. L'avantage de la puissance acoustique est double : elle donne d'une part une information sur la qualité générale des déformées modales en effectuant une intégration spatiale ; elle nous servira d'autre part d'indicateur de bruit, ultérieurement. L'influence du solveur sur cet indicateur est donc une information capitale.

L'étude menée a utilisé les deux configurations du paragraphe précédent : une configuration peu amortie avec un patch situé au centre d'une plaque en aluminium encastrée (figure 2.9) et une configuration très amortie avec une plaque intégralement couverte d'un patch en polymère contraint (figure 2.10). Dans les deux cas l'hypothèse de plaque bafflée est utilisée. L'analyse détaillée des calculs acoustiques sera donnée au chapitre 4. Les résultats montrent ici que les deux versions **V1** et **V3** estiment une puissance acoustique tout à fait similaire, pour le cas faiblement amorti comme pour le cas très amorti. Le solveur **V3** nous semble donc validé pour le calcul dynamique en général, mais aussi pour la vibroacoustique.

## 2.7 Bilan et conclusions du chapitre

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux spécificités de la modélisation dynamique de structures amorties : formulation du problème, modélisation spatiale et méthodes de résolution destinées à traiter la dépendance fréquentielle et l'inhomogénéité de l'amortissement. Cette étude a débouché sur le développement d'un algorithme de calcul de réponse fréquentielle et temporelle instationnaire précis et rapide, s'accommodant de tout type d'amortissement linéaire et susceptible d'utiliser les données brutes caractéristiques du matériau. L'algorithme se structure de la façon suivante. Les modes de résonance, solutions libres de la structure amortie, sont calculés les uns à la suite des autres par le biais d'une modélisation par éléments finis utilisant des éléments solides à 27 noeuds avec une formulation incompressible pour les élastomères, d'un solveur aux valeurs propres complexe et d'une routine itérative dont la convergence est accélérée par perturbation. La méthode de perturbation peut éventuellement être utilisée seule et conduire à une variante très rapide

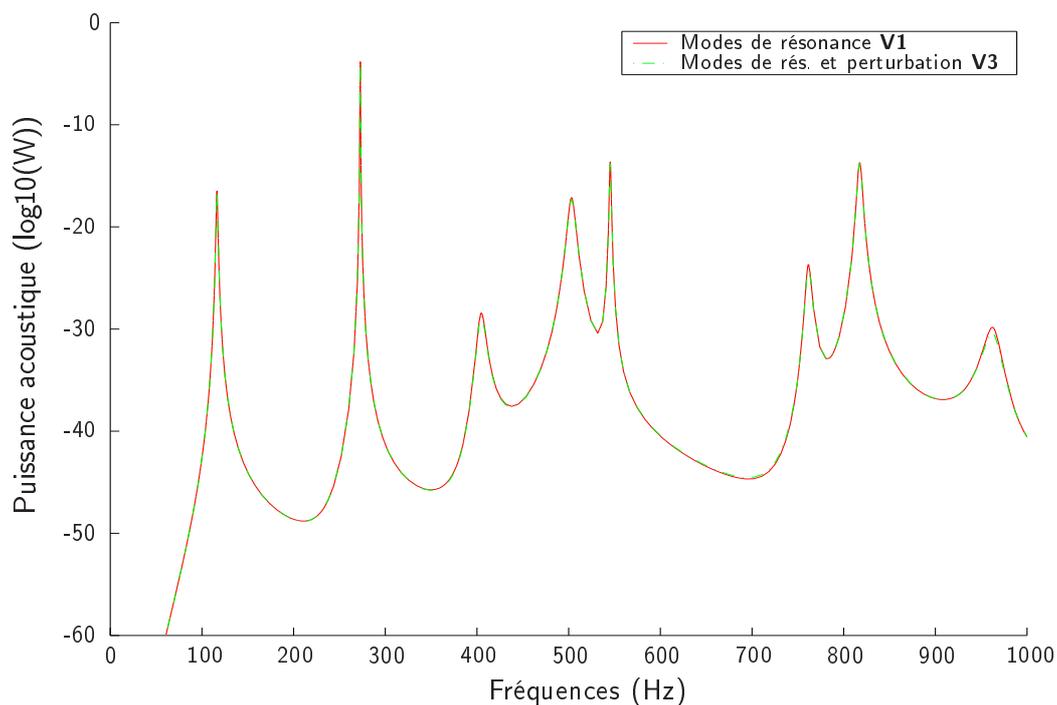


FIG. 2.9 – Comparaison de la puissance acoustique calculée par l'algorithme **V1** (référence) et par l'algorithme **V3** dans le cas d'une plaque encastrée peu amortie.

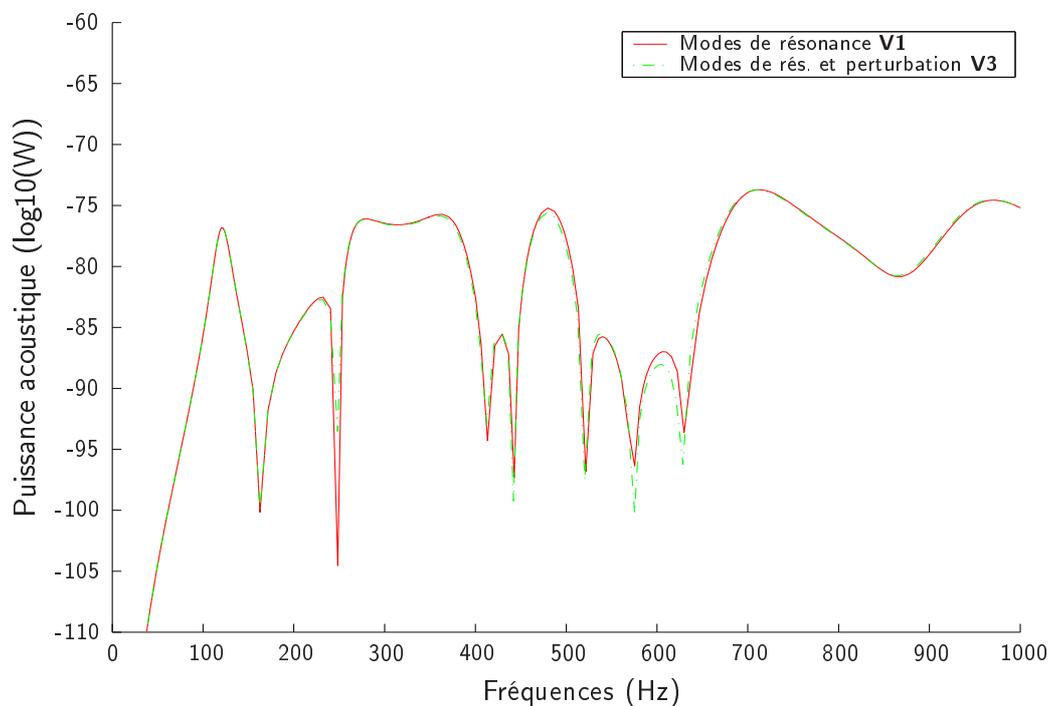


FIG. 2.10 – Comparaison de la puissance acoustique calculée par l'algorithme **V1** (référence) et par l'algorithme **V3** dans le cas d'une plaque encastrée très amortie.

et assez précise qui ne nécessite qu'une seule et unique résolution du problème aux valeurs propres. La qualité des solutions de l'ensemble des algorithmes a été validée par comparaison avec des algorithmes basés sur les méthodes standard (résolution directe, méthode modale). La version très rapide a été validée par un calcul de puissance rayonnée validant la précision du calcul des modes complexes.

En résumé, la combinaison originale de méthodes déjà existantes fournit un algorithme de résolution générale sans hypothèse lourde dont la rapidité peut être du même ordre de grandeur que celle des algorithmes traitant les problèmes non amortis.

# Chapitre 3

## La résolution numérique du problème aux valeurs propres

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>72</b>
<b>3.2</b>	<b>Diagonalisation</b>	<b>72</b>
3.2.1	Notions sur la diagonalisation	72
3.2.2	Calcul de la base adjointe	73
3.2.3	Vérification pratique du découplage	74
<b>3.3</b>	<b>Le problème aux valeurs propres</b>	<b>74</b>
3.3.1	Introduction	74
3.3.2	Méthodes calculant un seul couple propre à la fois	75
3.3.3	Méthodes calculant plusieurs couples propres à la fois	76
3.3.4	Méthodes de calcul par transformation	78
3.3.5	Le choix d'un algorithme	79
<b>3.4</b>	<b>Inversion d'une matrice symétrique complexe</b>	<b>80</b>
3.4.1	Conditionnement du problème d'inversion	80
3.4.2	Les méthodes itératives	82
3.4.3	Les méthodes directes	82
<b>3.5</b>	<b>Comparaison numérique</b>	<b>83</b>
3.5.1	Comparaison des différents solveurs aux valeurs propres	83
3.5.2	Le solveur aux valeurs propres à résolution directe	84
<b>3.6</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>86</b>

---

### 3.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude du problème aux valeurs propres matriciel résultant de la méthode numérique présentée au chapitre 2. La résolution de ce problème tient une place tout à fait centrale dans l'algorithme de modélisation vibroacoustique final et a nécessité de nombreux développements avant qu'une solution satisfaisante ait pu être obtenue. Nous lui accordons donc en toute logique une place importante dans ce recueil. Le chapitre aborde les spécificités du problème matriciel symétrique complexe construit avec des fonctions d'interpolation quadratiques, notamment les problèmes de la diagonalisation (§ 3.2) et du conditionnement. Il dresse ensuite un panorama large des méthodes existantes pour en calculer les valeurs propres (§ 3.3). La plupart d'entre elles nécessite une routine d'inversion dont il est question dans la suite du chapitre (§ 3.4). Le problème de la renumérotation des équations est également abordé. Des résultats comparatifs illustrent en dernière partie (§ 3.5) la performance des différents algorithmes développés (routines itératives et routine directe) et montrent la supériorité nette de la solution numérique retenue, basée sur les méthodes d'Arnoldi, de dissection multiniveau et de résolution directe.

## 3.2 Diagonalisation

### 3.2.1 Notions sur la diagonalisation

La résolution des équations de dynamique amortie par la méthode des éléments finis conduit à un système matriciel creux, symétrique, complexe. L'approche modale, c'est-à-dire la recherche des valeurs propres du système et la construction de sa réponse à une excitation sous la forme d'une série de modes requiert préalablement l'étude de la diagonalisation de ce système. Classiquement, le traitement numérique des équations de vibration non-amortie conduit à un système de matrices symétriques réelles, sous-catégorie des matrices hermitiennes, qui sont diagonalisables. La preuve s'établit par application du théorème de décomposition triangulaire de Schur<sup>1</sup>  $A = UTU^H$ , où  $U^H$  est la matrice transposée conjuguée de  $U$ , matrice unitaire, et  $T$  est une matrice triangulaire supérieure. Comme  $A$  est hermitienne<sup>2</sup> par hypothèse, la matrice triangulaire  $T$  vérifie nécessairement  $T = T^H$  : elle ne peut être que diagonale. Du reste, cette propriété concerne aussi bien le cas du problème aux valeurs propres standard que généralisé. La symétrie et définie positivité de la matrice de masse permet en effet la transformation d'un système généralisé en un système standard équivalent par décomposition de Cholesky. Contrairement au cas réel, la propriété de symétrie d'un système matriciel complexe n'est pas suffisante pour prouver que celui-ci est diagonalisable. Donnons l'exemple de la matrice symétrique complexe

$$\begin{bmatrix} 1 + 2i & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

de valeur propre double  $1 + i$  de multiplicité géométrique deux, mais de vecteur propre associé de multiplicité algébrique un. Le sous-espace associé est de dimension 1 ; les multiplicités géométrique et algébrique étant différentes, le système n'est pas diagonalisable.

Les applications générales que nous considérons, représentées matriciellement, réalisent un

---

<sup>1</sup>Théorème valable dans le cas général pour toute matrice carrée  $A$ .

<sup>2</sup> $A = A^H$ .

automorphisme en associant à un vecteur de déplacement de l'espace vectoriel complexe de dimension  $C^N$  un vecteur de force appartenant également à  $C^N$ . La base de représentation matricielle initiale est associée aux coordonnées physiques ou degrés de liberté du système discrétisé par éléments finis, mais elle peut être changée en effectuant une projection orthogonale de la forme  $A' = S^{-1}AS$ , où  $A$  est la matrice initiale,  $A'$  la matrice transformée, et  $S$  la matrice de changement de base. Cette relation de transformation, valable pour les automorphismes, permet d'exprimer la même application dans des bases différentes.  $A$  et  $A'$  sont dites semblables et partagent les mêmes valeurs propres.

La diagonalisation est un type spécifique de projection orthogonale réalisée dans l'espace des valeurs propres. La matrice du changement de base  $S$  transformant  $A$  dans la base des coordonnées modales est constituée des vecteurs propres à droite de  $A$  calculés en résolvant le problème aux valeurs propres dit à droite. La matrice  $S^{-1}$  inverse de  $S$  ou adjointe à  $S$  est constituée des vecteurs à gauche<sup>3</sup> de  $A$  calculés en résolvant le problème aux valeurs propres dit à gauche. La structure de  $A$  peut parfois jouer un rôle notable dans la simplification de la résolution de ces deux problèmes ; elle permet en effet de définir des relations de symétrie conduisant à la résolution d'un seul d'entre eux. La matrice adjointe  $S^{-1}$  se déduit alors simplement de  $S$ .

### 3.2.2 Calcul de la base adjointe

Les problèmes aux valeurs propres à droite et à gauche s'écrivent de la façon suivante

$$\begin{cases} (K - \lambda M) u &= 0 \\ v^H (K - \lambda M) &= 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans le cas des matrices hermitiennes, telles que  $K = K^H$  et  $M = M^H$ , la base adjointe se déduit aisément. Nous avons d'une part  $\lambda = \bar{\lambda}$  du fait des relations

$$\det K - \lambda M = \det K^T - \lambda M^T = 0 = \overline{\det K^T - \lambda M^T} = \det K^H - \bar{\lambda} M^H = \det K - \bar{\lambda} M \quad (3.3)$$

D'autre part, la transposition hermitienne du problème à gauche permet d'écrire

$$(K^H - \bar{\lambda} M^H) v = (K - \bar{\lambda} M) v = (K - \lambda M) v = 0 \quad (3.4)$$

On en déduit que les vecteurs à gauche sont égaux aux vecteurs propres à droite et que la base adjointe  $S^{-1}$  nécessaire à diagonalisation se calcule simplement à partir de  $S$  avec la relation  $S^{-1} = S^H$ . La symétrie d'un système matriciel complexe permet d'obtenir des relations tout aussi simplificatrices concernant la base adjointe. La transposition du problème à gauche débouche sur  $u = \bar{v}$ . La matrice adjointe  $S^{-1}$  se déduit de la matrice de changement de base avec  $S^{-1} = S^T \neq S^H$  (l'utilisation de  $S^H$  comme base adjointe conduit à une mauvaise diagonalisation). Notons qu'aucune déduction ne peut être faite sur la nature des valeurs et vecteurs propres, qui sont donc complexes dans le cas général. Dans le cas classique des matrices réelles symétriques, à la fois hermitiennes et symétriques complexes, les valeurs et vecteurs propres sont réels car  $S^{-1} = S^H = S^T$ . Un vecteur propre à droite défini à une constante multiplicative complexe près dans le problème à droite ne peut être que réel lorsque le problème à gauche est également pris en compte, après normalisation par la matrice de masse par exemple.

---

<sup>3</sup>Les vecteurs à gauche conjugués forment les lignes de  $S^{-1}$ .

### 3.2.3 Vérification pratique du découplage

En pratique seuls certains modes sont considérés comme d'intérêt. Il peut s'agir des modes de basse fréquence, ou des modes qui sont compris dans une bande fréquentielle donnée. Dès lors, à défaut de prouver que le système est diagonalisable a priori, la simple vérification a été faite que les vecteurs associés aux valeurs propres de multiplicité supérieure à un ne sont pas eux-mêmes redondants ; aucun cas problématique de système non diagonalisable n'a été observé au cours de nos simulations. Cette démarche n'est pas entièrement satisfaisante car tous les modes interviennent de façon pondérée dans la réponse d'un système. Toutefois, vérifier que le système est bien diagonalisable pour les couples calculés et les utiliser ensuite pour calculer la réponse du système revient à effectuer une troncature classique en analyse modale. La différence est que nous n'avons aucune connaissance a priori du sous-espace omis par la troncature.

## 3.3 Le problème aux valeurs propres

### 3.3.1 Introduction

Il existe de très nombreuses méthodes destinées à résoudre le problème matriciel aux valeurs propres. La plupart sont exposées dans les ouvrages de Bathe [7], Hughes [59], Lascaux [75]. Parmi ces méthodes, certaines s'appliquent à la forme standard  $(K - \lambda I)u = 0$ , d'autres à la forme généralisée du problème aux valeurs propres  $(K - \lambda M)u = 0$ , où  $K$  est assimilable à la matrice de rigidité,  $M$  à la matrice de masse et  $(\lambda, u)$  est un couple propre. Dans notre cas toutefois, les deux formes sont équivalentes dans la mesure où la matrice de masse  $M$  est symétrique définie positive. La factorisation de Cholesky, décomposant  $M$  en un produit d'une matrice triangulaire  $L$  par sa transposée  $M = LL^T$  permet en effet de réécrire le problème généralisé sous la forme  $L(L^{-1}KL^{-T} - \lambda I)L^T u = 0$  et conduit à la résolution du problème  $(\tilde{K} - \lambda I)v = 0$  où  $\tilde{K} = L^{-1}KL^{-T}$ ,  $v = L^T u$ .

Certaines méthodes se focalisent sur l'obtention des vecteurs propres (méthode d'itération inverse), d'autres sur les valeurs propres (bissection, sécante). Dès lors qu'un élément d'un couple propre  $(\lambda, u)$  a été obtenu il est assez simple de déduire l'autre élément. Le quotient de Rayleigh est utilisé pour calculer une valeur propre  $\lambda$  à partir du vecteur propre associé  $u$ . Dans le cas présent où  $K, M$  sont symétriques, il est donné par :

$$\lambda = \frac{u^T K u}{u^T M u} \quad (3.5)$$

On obtient un vecteur propre associé à une valeur propre par la méthode d'itération inverse (utilisée dans les méthodes d'itération de sous-espace et la méthode de Jacobi). Certaines méthodes calculent les couples propres les uns après les autres (méthode de la sécante, bissection, d'itération inverse), d'autres plusieurs simultanément (sous-espace, Lanczos, Arnoldi), d'autres encore, appartenant aux méthodes de calcul par transformation, déterminent toutes les valeurs. Dans cette dernière catégorie entrent les méthodes de tridiagonalisation (transformation de Householder, Givens) permettant de réaliser une étape du processus de diagonalisation.

### 3.3.2 Méthodes calculant un seul couple propre à la fois

Les méthodes de la sécante ou de la bisection sont basées sur le polynôme caractéristique  $p(\lambda) = \det(K - \lambda M)$ . Il est possible, plutôt que d'évaluer explicitement ses coefficients, de calculer sa valeur pour différents  $\lambda$ , en effectuant une factorisation triangulaire  $LU$  de  $K - \lambda M$ , où  $L$  est une matrice à diagonale unitaire. Le déterminant est alors égal au produit des éléments diagonaux de  $U$ . L'algorithme de la méthode de la sécante est un algorithme itératif calculant un nouvel itéré  $\lambda_{k+1}$  à partir des deux précédentes valeurs propres  $\lambda_k, \lambda_{k-1}$  et des deux précédentes valeurs du polynôme  $p(\lambda_k), p(\lambda_{k-1})$ . L'algorithme de la bisection utilise quant à lui la suite de Sturm pour déterminer le nombre de valeurs propres inférieures en module à une valeur fixée  $\lambda$ . Pour deux valeurs de  $\lambda$  différentes, il est alors possible de connaître le nombre de valeurs propres comprises dans l'intervalle délimité par ces deux valeurs. Une réduction systématique de l'intervalle est faite par dichotomie jusqu'à ce qu'il entoure de façon satisfaisante la valeur propre recherchée. La convergence de la méthode est faible; elle ne présente de réel avantage que dans le cas où des valeurs propres sont très proches (configuration délicate pour certains méthodes comme la méthode de Lanczos classique).

La méthode d'itération de vecteur repose sur le fait que la multiplication répétée d'une matrice  $K$  par un vecteur initial  $u_0$  fournit un vecteur colinéaire au vecteur propre de l'élément dominant  $u$  de  $K$ .

$$\lim K^N u_0 = u \quad (3.6)$$

La technique est aisément extrapolable à la recherche d'éléments propres appartenant au bas du spectre (méthode d'itération inverse) ou à une zone définie du spectre (méthode d'itération inverse avec décalage). Dans ce dernier cas, le plus général, on introduit un décalage spectral  $\sigma$ . Le problème aux valeurs propres s'écrit alors

$$(K - \sigma M - (\lambda - \sigma) M) u = 0 \quad (3.7)$$

Donc

$$\left( \frac{1}{\lambda - \sigma} I - (K - \sigma M)^{-1} M \right) u = \left( \Lambda I - \tilde{K} \right) u = 0 \quad (3.8)$$

où

$$\tilde{K} = (K - \sigma M)^{-1} M \quad (3.9)$$

L'obtention de l'élément dominant  $(\Lambda, u)$  de  $\tilde{K}$  permet de déduire la valeur propre  $\lambda = \frac{1}{\Lambda} + \sigma$  la plus proche en module de  $\sigma$ . Chaque itération procède au calcul de  $u_{k+1} = \tilde{K} u_k$  en calculant d'abord  $y = M u$  puis en inversant  $(K - \sigma M) u_{k+1} = y$ . Cette dernière étape est la plus coûteuse. Un dilemme se présente en outre dans la mesure où l'algorithme converge d'autant mieux que la distance  $|\lambda - \sigma|$  est réduite, ce qui rend la matrice  $K - \sigma M$  mal conditionnée, voire singulière dans le cas limite où  $\lambda = \sigma$ . L'ouvrage de Théodor et Lascaux [74] donne quelques éléments à ce sujet et préconise la recherche d'un décalage  $\sigma$  le plus proche de la valeur propre recherchée, car l'erreur grandissante commise par la routine d'inversion sur le vecteur propre est telle que le vecteur résidu lui demeure colinéaire. Si le décalage est mal choisi, les algorithmes sont susceptibles de mal converger ou de converger vers des valeurs inattendues. Il est à noter en outre, que le décalage peut être employé pour rendre une matrice semi-définie positive (matrice de rigidité singulière à cause de conditions

aux limites libres) définie positive. Notons également que l'écriture du problème aux valeurs propres sous la forme (3.8) est fréquente, en particulier avec la méthode d'Arnoldi que nous emploierons, car elle permet une convergence plus rapide vers les éléments dominants.

L'inconvénient des techniques calculant une seule valeur appartenant à l'extrémité du spectre (la méthode de la sécante converge vers la valeur la plus basse du spectre, la méthode de l'itération vers la plus haute), tient au fait qu'une déflation doit ensuite être effectuée pour calculer la valeur suivante, de façon à ce que cette dernière soit la nouvelle valeur extrême du spectre. La déflation consiste à retirer le sous-espace associé à la valeur propre déjà calculée (utilisation de l'algorithme de Gram-Schmidt). Or, le choix d'une méthode de résolution du problème aux valeurs propres est directement lié au nombre d'inversions et de factorisations qu'il faut accomplir. Cette étape, commune à toutes les méthodes, est en effet l'étape la plus coûteuse. C'est pourquoi la plupart des méthodes précédemment exposées sont délaissées en général au profit des méthodes calculant plusieurs valeurs propres simultanément. Certaines d'entre elles sont présentées au paragraphe suivant dans le cadre général de l'analyse de Rayleigh-Ritz.

### 3.3.3 Méthodes calculant plusieurs couples propres à la fois

#### 3.3.3.1 L'analyse de Rayleigh-Ritz

L'analyse de Rayleigh-Ritz forme un cadre commun à des méthodes aussi variées que la condensation statique, la méthode CMS (Component Mode Synthesis), la méthode d'itération par sous-espace ou la méthode de Lanczos. Elle consiste à rechercher les éléments propres d'une matrice appelée matrice de Rayleigh de taille très inférieure à la dimension du problème, obtenus après projection orthogonale dans une base qui est spécifique à chacune des méthodes. Ces éléments sont appelés éléments de Ritz. Les méthodes itératives (Lanczos, sous-espace) font une estimation de plus en plus précise de la matrice de projection au fil des itérations, jusqu'à convergence. Le sous-espace formé par les vecteurs de Ritz calculés approche alors de façon satisfaisante le sous-espace des vecteurs propres recherchés. Les éléments propres de Ritz permettent de déduire une estimation des éléments propres de la matrice originelle ; les valeurs propres calculées majorent les valeurs exactes. Le reste du paragraphe présente quelques méthodes de calcul des valeurs propres utilisant la procédure de Rayleigh-Ritz. Elles diffèrent dans la construction de la base de projection orthogonale.

#### 3.3.3.2 La méthode de condensation statique

La méthode de condensation statique consiste à concentrer la masse d'une structure en quelques degrés spécifiques, sans que le résultat ne soit modifié. La définition de  $N$  degrés sans masse conduira à une réduction de  $N$  la taille du système. La précision de la solution, néanmoins, n'est pas estimable a priori.

#### 3.3.3.3 La méthode CMS

La méthode CMS (Component Mode Synthesis) est destinée spécialement aux structures de grande taille, susceptibles d'être décomposées en sous parties. Chacune d'elle est étudiée séparément avec des conditions aux limites simplifiant le couplage réel entre les sous parties. Les vecteurs propres des sous parties sont alors combinés pour créer un chargement  $R$ . Les vecteurs fonction de base de Ritz sont ensuite calculés à partir de la résolution du problème

statique  $K\Psi = R$ , dans lequel  $K$  est la matrice de rigidité globale du système. Il n'est pas possible d'estimer a priori la précision du calcul.

### 3.3.3.4 La méthode d'itération par sous-espace

La méthode d'itération par sous-espace (Bathe [7]), tout comme la méthode de Lanczos, plus rapide, est programmée dans la plupart des codes industriels. Les deux méthodes sont restreintes au cas des matrices symétriques réelles et donc au modèle d'amortissement proportionnel. La méthode du sous-espace est une extension de la méthode d'itération, appliquée non pas à un vecteur initial, mais à un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, formant un sous-espace  $\mathcal{H}_0$ . À la  $k$ -ième itération, le sous-espace de même dimension que le sous-espace initial s'écrit  $\mathcal{H}_k = K^k\mathcal{H}_0$ . Au cours du processus, un travail d'orthogonalisation doit être effectué à chaque itération, sans lequel tous les vecteurs tendraient vers la même direction dominante. La matrice de Rayleigh, projection de  $K$  dans le sous-espace de  $\mathcal{H}_k$ , a une forme qui devient triangulaire au fil des itérations. Les éléments diagonaux sont les valeurs propres dominantes de  $K$ , classés par ordre de module. La taille  $m$  du sous-espace doit être supérieure au nombre  $p$  de valeurs propres recherchées. Bathe suggère le choix suivant :  $m = \min(2p, p + 8)$ .

### 3.3.3.5 La méthode de Lanczos

La méthode de Lanczos construit un espace de vecteurs orthonormés  $q_k$  dont la taille augmente à chaque itération, par le biais du schéma

$$\begin{cases} Kq_1 &= \alpha_1q_1 + \beta_1q_2 \\ \dots &= \dots \\ Kq_k &= \beta_{k-1}q_{k-1} + \alpha_kq_k + \beta_kq_{k+1} \end{cases} \quad (3.10)$$

Les vecteurs  $q_{k+1}$  sont définis à partir de  $q_k$  et  $q_{k-1}$  seulement. La projection de  $A$  dans l'espace de Krylov  $\mathcal{H}_m = \mathcal{E}(q_1, Kq_1, \dots, Kq_{m-1})$  construit a une forme tridiagonale (la méthode de Lanczos, initialement, était une méthode de tridiagonalisation). L'intérêt particulier de cette construction réside notamment dans la propriété d'orthogonalité des  $n$  itérés  $q_k$  par rapport à tous les précédents, propriété caractéristique des espaces de Krylov, exploitée également dans la méthode de gradient conjugué. Il reste à calculer les éléments propres du sous-espace de petite taille formé ; ces éléments, appelés éléments de Ritz, sont calculés par la méthode  $QR$ , ou alternativement par la méthode de bisection. Lorsque la méthode a convergé, après un certain nombre d'itérations, les éléments propres de  $A$  sont déductibles des éléments de Ritz. L'algorithme initial de Lanczos toutefois, est instable et sensible aux erreurs d'arrondi. L'instabilité dépend de la précision machine et de la répartition des valeurs propres. Les composantes de  $q_{k+1}$  n'étant obtenues qu'à partir des composantes  $q_k$  et  $q_{k-1}$ , les nouveaux itérés peuvent contenir en partie, à nouveau, des vecteurs déjà calculés auxquels ils sont supposés être normaux. Cette proportion va augmenter jusqu'à la résurgence de valeurs propres déjà calculées. Il est par conséquent requis de réorthogonaliser le nouvel itéré par rapport à certains vecteurs considérés comme corrects. Les nombreuses versions de l'algorithme de Lanczos diffèrent essentiellement dans la stratégie de réorthogonalisation adoptée (Hughes [59]). Il existe une généralisation de la méthode de Lanczos destinée à traiter le problème des valeurs propres multiples pour lesquelles l'algorithme classique n'est pas adapté : c'est la méthode de Lanczos par blocs.

### 3.3.3.6 La méthode d'Arnoldi

La méthode a été également généralisée dans le cas des matrices quelconques et en particulier celui des matrices symétriques complexes que l'on obtient en dynamique des structures amorties, avec un modèle d'amortissement général : il s'agit de la méthode d'Arnoldi. La différence entre les méthodes de Lanczos et d'Arnoldi tient au fait que l'espace de Krylov engendré, dans lequel la matrice  $K$  est projetée, confère à la matrice de Rayleigh une forme de Hessenberg supérieure. L'algorithme  $QR$  est ensuite employé pour calculer les éléments de Ritz. Tout comme dans la plupart des implémentations de l'algorithme de Lanczos, une stratégie de redémarrage est adoptée lorsqu'il y a perte d'orthogonalité. C'est le cas par exemple lorsque les modes de corps rigide ont été calculés. L'espace engendré est invariant par  $K$  ( $q_{k+1}$  n'est alors pas définie) et requiert un redémarrage de l'algorithme avant que le premier mode vibratoire ne soit calculé. Un vecteur initial orthogonal au sous-espace précédent, en l'occurrence celui des modes rigides, doit être utilisé. Le redémarrage peut aussi être employé dans une stratégie générale pour contrôler et limiter la taille croissante de l'espace de Krylov.

Si la méthode d'Arnoldi seule est envisageable dans le cas des matrices complexes symétriques, il convient de noter que certaines méthodes de perturbation associées à un solveur réel sont susceptibles de donner un résultat comparable (avec l'hypothèse fréquente d'un amortissement faible). Les méthodes d'Arnoldi et de Lanczos et leurs algorithmes associés sont alors placés en concurrence ; leur comparaison n'est pas dénuée d'intérêt. Le calcul en  $m$  étapes de valeurs propres d'un système matriciel de taille  $n$ , possédant  $c$  termes par ligne non nuls, aura un coût de  $mn(c + 3 + m)$  dans le cas d'Arnoldi, légèrement supérieur au coût  $mn(c + 5)$  de la méthode de Lanczos (Lascaux [75]). Le coût de l'algorithme de la triangularisation QR, en outre, doit être comparé lorsqu'il s'applique à une matrice de Hessenberg ou à une matrice tridiagonale.

## 3.3.4 Méthodes de calcul par transformation

Les méthodes calculant toutes les valeurs propres d'une matrice telles que la méthode de Jacobi et l'algorithme QR sont couramment employées, tant que la matrice reste de taille modérée. Elles sont particulièrement adaptées au calcul des éléments de Ritz des matrices de Rayleigh obtenues dans le cadre de l'analyse de Rayleigh-Ritz. Si les méthodes utilisant la procédure de Rayleigh-Ritz sont basées sur une projection orthogonale sur une base réduite, les méthodes de Jacobi, QR ou de triadiagonalisation sont basées quant à elles sur une transformation semblable, modifiant successivement la matrice originelle, jusqu'à ce qu'elle soit diagonale ou tridiagonale.

### 3.3.4.1 La méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi classique, adaptée au problème standard, emploie des transformations par rotation permettant d'éliminer les uns après les autres les éléments extra-diagonaux. Plusieurs algorithmes utilisant cette méthode diffèrent suivant le critère de choix de ces termes extra-diagonaux (élimination systématique des termes les uns après les autres<sup>4</sup>, élimination des termes de plus grand module ou des termes dépassant un seuil variable). Si certains termes annulés dans un premier temps peuvent réapparaître au cours du processus itératif, la méthode converge néanmoins, et ce linéairement puis quadratiquement au-dessus d'un

---

<sup>4</sup>Ordre naturel.

certain nombre d'itérations. Il existe, en outre, une forme généralisée de la méthode de Jacobi pour le problème aux valeurs propres généralisé (Bathe [7]).

### 3.3.4.2 L'algorithme QR

L'algorithme *QR* est basé sur la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Moins coûteux et plus rapide, il est préféré aux algorithmes issus de la méthode de Jacobi. Comparable à la méthode de l'itération d'un sous-espace appliquée à l'espace entier, la méthode *QR* est en vérité une méthode de triangularisation : elle décompose  $K$  en une matrice unitaire et une matrice triangulaire, la matrice triangulaire contenant les valeurs propres de  $K$  sur sa diagonale. La méthode est très performante dès lors que  $K$  est petite et structurée : elle est donc tout à fait adaptée à la recherche des valeurs propres des matrices de Rayleigh tridiagonales de faible taille obtenues par le biais de l'algorithme de Lanczos, tout comme celles de la matrice de Rayleigh de type Hessenberg supérieure construite par la méthode d'Arnoldi lorsque sont recherchées les valeurs propres d'une matrice générale.

### 3.3.4.3 Les méthodes de tridiagonalisation

Les méthodes de tridiagonalisation par transformation les plus courantes sont celles de Householder et de Givens (Lascaux [74]). Sous leur forme classique, elles s'appliquent aux matrices symétriques colonne après colonne (la transformation préservant la symétrie) ; tous les éléments sont annulés excepté ceux de la diagonale et de la première sous-diagonale. La méthode de Givens est une méthode de transformation par rotation qui diffère de la méthode de Jacobi, dans la mesure où la matrice de rotation est différente d'une part, et les termes annulés restent nuls d'autre part. Plus rapide que la méthode de Householder dans le cas des matrices creuses structurées (à bande étroite par exemple), elle n'est pas, à son instar, une méthode itérative : le nombre d'étapes de calcul est fixé à l'avance. Des versions modifiées des algorithmes de Givens et Householder permettent de transformer une matrice générale en matrice de Hessenberg supérieure (matrice triangulaire supérieure avec sous-diagonale inférieure). Les versions classiques, basées sur des matrices symétriques réelles sont utilisées en combinaison avec l'algorithme de Lanczos, qui construit des matrices de Rayleigh tridiagonales. Les versions modifiées, basées sur des matrices générales, sont requises dans le cas de la méthode d'Arnoldi avec matrices générales. Méthodes de bisection, Jacobi et surtout QR sont ensuite utilisées pour calculer les valeurs propres à partir de la matrice tridiagonale ou de Hessenberg.

### 3.3.5 Le choix d'un algorithme

De toutes les méthodes présentées dans ce chapitre, la méthode d'Arnoldi exposée au § 3.3.3.6 est la seule qui puisse traiter les matrices symétriques complexes issues de la MEF dans le domaine de Laplace. Notre choix algorithmique s'est donc porté sur les routines de la bibliothèque ARPACK, implémentant la méthode d'Arnoldi, qui sont susceptibles de résoudre des problèmes aux valeurs propres matriciels de forme générale. Ces routines sont néanmoins plus adaptées aux matrices structurées comme celles issues de la méthode des éléments finis. L'algorithme principal se base sur une variante de la procédure d'Arnoldi nommée IRAM<sup>5</sup>, qui se réduit à la variante de la procédure de Lanczos IRLM<sup>6</sup> lorsque le système est réel sy-

---

<sup>5</sup>Implicitly Restarted Arnoldi Method.

<sup>6</sup>Implicitly Restarted Lanczos Method.

métrique. Les routines d'ARPACK ont été incluses dans le logiciel MATLAB ; en revanche, à notre connaissance, rares sont les codes éléments finis industriels qui disposent d'algorithmes de solveur complexe implémentant la méthode d'Arnoldi ou toute autre méthode similaire.

L'algorithme d'ARPACK utilisé peut traiter les valeurs multiples sans grande difficulté par le biais de techniques de déflation. Une méthode de redémarrage implicite est employée, qui permet une gestion très efficace de l'espace de mémoire et de traiter par conséquent des problèmes de grande taille. Des formulations très variées peuvent être envisagées : formulation du problème aux valeurs propres standard ou formulation du problème généralisé pour problème réel ou complexe, symétrique ou non symétrique. Différents paramètres comme la taille du sous-espace de la matrice de Rayleigh ou le critère de convergence sont réglés par l'utilisateur ; leur étude numérique est présentée au § 3.5.2.

L'une des caractéristiques du programme est son interface de communication inverse ; des retours fréquents au programme principal appelant sont effectués pour réaliser des opérations variées, à la charge de l'utilisateur. Ce dernier doit donc fournir un certain nombre de routines supplémentaires (comme celle de l'inversion matricielle) susceptibles d'être activées suivant la valeur du paramètre de contrôle de l'interface. L'interface de communication inverse garantit donc la flexibilité maximum dans la représentation et le stockage des matrices, et accroît l'interaction avec l'utilisateur qui peut notamment contrôler la convergence.

### 3.4 Inversion d'une matrice symétrique complexe

La résolution directe du problème de réponse fréquentielle et la résolution du problème aux valeurs propres requièrent une routine susceptible d'inverser une matrice symétrique complexe. Le cadre spécifique de l'inversion est évoqué au § 3.4.1 sur le conditionnement du problème matriciel résultant de la méthode des éléments finis. Deux types de méthode d'inversion existent : les méthodes directes, dont le nombre d'opérations est fixé à l'avance, et les méthodes itératives, qui déterminent une solution approchée satisfaisant un critère de convergence à l'issue d'un processus itératif. Différents algorithmes relevant des méthodes itératives ont été testés et sont présentés au § 3.4.2. La méthode directe, finalement retenue, est présentée au § 3.4.3.

#### 3.4.1 Conditionnement du problème d'inversion

Rappelons brièvement la forme générale du problème de résolution auquel nous sommes confrontés. La méthode numérique des éléments finis appliquée à l'étude dynamique d'une structure amortie conduit à un problème aux valeurs propres de la forme  $(K - \lambda M)u = 0$ , où  $K$  est la matrice de rigidité, symétrique, complexe, éventuellement singulière, non-définie, et  $M$  est la matrice de masse, symétrique, définie positive, réelle. Les matrices  $K$  et  $M$  construites par le programme EF sont de grande taille, ont une structure similaire à celle d'une matrice tridiagonale par blocs lorsque le maillage a une forme de grille régulière et que la numérotation se fait ligne par ligne. Les blocs, associés aux éléments 3D à 27 noeuds utilisés, sont d'une taille très importante (81 par 81) correspondant au nombre de degrés de liberté par matrice élémentaire en conditions libre libre. Ils traduisent une connectivité locale dense au sein de chaque élément et d'une certaine manière la richesse de l'approximation, mais expliquent également le très mauvais conditionnement du problème inverse.

Le conditionnement du problème inverse concerne la sensibilité du problème  $Ku = b$  aux erreurs introduites dans  $K$  et  $b$ , dont les erreurs d'arrondi. Le nombre de conditionnement  $cond(K) = \|K\| \|K^{-1}\|$  exprime la qualité du conditionnement pour ce problème. C'est un paramètre central dans la vitesse de convergence des méthodes de résolution à gradient conjugué notamment, mais il apparaît également essentiel dans d'autres problèmes matriciels. Son expression, s'il est associé à la norme euclidienne, s'écrit pour les matrices symétriques :

$$cond_2(K) = \|K\|_2 \|K^{-1}\|_2 = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} \quad (3.11)$$

Par conséquent, un système possédant des modes rigides tels que  $\min |\lambda_i| = 0$  ou une connectivité locale dense, sera mal conditionné pour l'inversion. D'ailleurs, le choix d'un modèle EF basé sur une famille complète de fonctions d'interpolation quadratiques a des répercussions tout à fait notables sur la résolution du problème aux valeurs propres, du fait de son influence considérable sur la connectivité du système. Un modèle EF quadratique précisément n'est pas équivalent à un modèle linéaire possédant le même nombre de noeuds. Prenons l'exemple d'un élément linéaire solide à huit noeuds ; chaque noeud est lié à son plus proche voisin, soit sept en tout, alors que pour un élément quadratique, la rigidité locale est construite à partir des 26 noeuds voisins. La taille des matrices élémentaires est ainsi beaucoup plus grande dans ce dernier cas (taille de 81 plutôt que de 24 en 3D) ; en termes de coefficients matriciels, même la combinaison de huit éléments linéaires nécessite beaucoup moins de mémoire qu'un seul élément quadratique (deux fois moins environ).

Outre le problème de mémoire, le problème est moins bien conditionné du fait de l'existence de modes de haute fréquence qui sont des artefacts du processus de discrétisation (Hughes [59]). Présents quel que soit l'élément utilisé, les modes de haute fréquence constituent la grande majorité du spectre et n'ont pas de réalité physique, alors que les modes restants de basse fréquence (1% du spectre environ) fournissent à eux seuls l'approximation de la solution continue. Dès lors que l'ordre des polynômes de Lagrange est assez élevé, les matrices deviennent très mal conditionnées ; les polynômes de Tchebycheff, à ce titre, peuvent être privilégiés. Cela ne préjuge en rien pour autant des qualités de l'élément quadratique à converger vers une solution correcte en moyenne fréquence ; il est à ce titre supérieur à l'élément linéaire.

Le deuxième élément essentiel concernant l'inversion matricielle est lié au stockage choisi. Si un stockage creux est utilisé pour réduire la mémoire requise, l'inversion nécessite une factorisation<sup>7</sup> dont il résulte une matrice triangulaire qui dans le meilleur des cas a le même nombre de termes que la matrice symétrique factorisée ; mais du fait de la numérotation choisie<sup>8</sup>, il s'opère un phénomène de remplissage avec l'apparition de termes matriciels initialement nuls. Pour éviter la création d'une mémoire auxiliaire trop importante et pour éviter en partie les calculs supplémentaires occasionnés, certains algorithmes ont des stratégies de renumérotation des équations. En ce qui concerne notre étude, la renumérotation est impérative : si la numérotation ligne par ligne est employée classiquement pour numéroter

---

<sup>7</sup>Factorisation complète pour la résolution directe et factorisation incomplète pour les méthodes itératives les plus performantes

<sup>8</sup>Les numérotations classiquement utilisées pour les surfaces rectangulaires quadrillées sont la numérotation ligne par ligne qui donne une structure tridiagonale par bloc ou en damier (Lascaux [75]).

les noeuds d'une plaque discrétisée, des termes matriciels très éloignés de la diagonale apparaissent. Ils sont liés au traitement amortissant localisé et peuvent provoquer un remplissage matriciel très important du fait de leur position.

### 3.4.2 Les méthodes itératives

Nous avons testé différents algorithmes disponibles dans la bibliothèque NAG qui utilisent des méthodes de résolution itérative et les sous-espaces de Krylov : méthode RGMRES (Restarted Generalized Minimum Residual), méthode CGS (Conjugate Gradient Squared), Polynomial Stabilized bi-conjugate gradient (Bi-CGSTAB(1)), méthode TFQMR (Transpose-Free Quasi-minimal Residual). La plupart des méthodes itératives sont très dépendantes du conditionnement de la matrice à inverser. C'est la raison pour laquelle un préconditionneur est souvent employé. Celui-ci nécessite un effort numérique supplémentaire : son utilisation résulte donc d'un compromis entre cet effort et le gain en termes de convergence de la méthode itérative. Le préconditionneur détermine une approximation de la matrice à inverser, approximation dont il effectue l'inversion ou la factorisation. La plupart des préconditionneurs sont donc pour la plupart des routines d'inversion ou de factorisation (ILU, Jacobi, SSOR). Prenons l'exemple d'un préconditionneur effectuant une factorisation de Cholesky incomplète. Il calcule la matrice triangulaire à diagonale unité  $L$  et la matrice diagonale  $D$  qui fournissent une approximation de la matrice symétrique réelle  $A$  sous la forme  $A \approx LDL^T$ . Le problème d'inversion  $Ax = b$  s'écrit ensuite sous la forme suivante destinée à une procédure itérative :

$$\begin{cases} B &= A - LDL^T \\ LDL^T x^{j+1} &= b - Bx^j \end{cases} \quad (3.12)$$

Si la factorisation est complète, le conditionnement de la matrice  $(LDL^T)^{-1}A = I$  est optimal et vaut un, la méthode itérative converge en une seule itération. La procédure revient donc dans ce cas à une résolution directe du problème. L'inconvénient majeur de la factorisation complète est que la matrice triangulaire construite peut parfois nécessiter un espace mémoire considérable, du fait du remplissage matriciel, auquel est associé également un coût de calcul lié aux termes supplémentaires non nuls. Les stratégies utilisées lors de la factorisation incomplète concernent essentiellement la limitation de cette taille, en imposant par exemple un profil limité à la matrice triangulaire  $L$ .

### 3.4.3 Les méthodes directes

Les méthodes itératives sont souvent plus efficaces pour traiter l'inversion des matrices grandes et creuses, mais des problèmes de convergence importants liés au conditionnement du problème nous ont amené à étudier des algorithmes de résolution directe. Plusieurs alternatives sont proposées dans la bibliothèque SPARSEPAK, basées sur des stratégies de renumérotation et de stockage des matrices différentes : l'algorithme RCM (Cuthill-McKee inverse) utilisant un stockage du profil, l'algorithme QMD (quotient de degré minimum) à stockage creux et l'algorithme ND (nested dissection) nécessitant un stockage creux. Tous proposent des constructions du graph associé aux matrices ; quelques détails sont donnés pour l'algorithme Cuthill-McKee et de degré minimum dans Lascaux [74].

La méthode frontale effectuant simultanément élimination et assemblage, utilisée en combinaison avec l'algorithme ND, a été retenue. L'algorithme général se décompose en trois étapes. La première consiste à effectuer la construction du graphe, au cours d'un processus

de minimisation et de séparation, et à définir une numérotation adaptée. Au cours de la deuxième étape est effectuée une factorisation symbolique ou logique, pendant laquelle le repérage indiciel des termes complexes de la matrice à inverser est effectué (remplissage des tables de connectivité); la mémoire nécessaire pour stocker cette matrice est évaluée. Dans une troisième étape, les sous-matrices sont assemblées. Dans la méthode frontale, assemblage et élimination sont effectués simultanément<sup>9</sup>, ce qui permet de limiter les transferts de données et le stockage temporaire.

L'algorithme METIS est utilisé alternativement à l'algorithme ND, au cours de la première étape; il s'agit d'un algorithme de partition multi-niveau basé aussi sur la méthode ND, dont l'usage est varié. Il permet de partitionner des graphes grands et irréguliers, issus de grands maillages par exemple, pour la parallélisation d'un calcul; le découpage doit être tel que l'effort numérique est équitablement réparti entre les processeurs et la communication de données entre ceux-ci limitée. Il permet aussi, naturellement, de limiter le remplissage des matrices en proposant une renumérotation adaptée. L'algorithme possède de très nombreux paramètres réglables, mais les valeurs par défaut se sont avérées tout à fait satisfaisantes.

## 3.5 Comparaison numérique

### 3.5.1 Comparaison des différents solveurs aux valeurs propres

Le développement d'un solveur aux valeurs propres efficace a nécessité de comparer de nombreuses routines et variantes. Nous présentons ici l'analyse comparative de trois solveurs différents. Le premier solveur, baptisé **Solveur 1**, est basé sur la forme régulière standard du problème aux valeurs propres. Cette forme est obtenue en effectuant une factorisation de Cholesky  $M = LL^T$  de la matrice de masse :

$$[K - \lambda LL^T] u = L [L^{-1} K L^{-T} - \lambda I] L^T u \quad (3.13)$$

L'algorithme ARPACK est paramétré de façon à chercher les valeurs propres les plus basses de l'opérateur  $L^{-1} K L^{-T}$ . L'opérateur n'a pas besoin d'être inversé : c'est l'avantage de cette forme, relativement simple à implémenter. L'inconvénient réside dans le fait que l'algorithme d'Arnoldi converge mal vers les basses valeurs du spectre. La factorisation de Cholesky est effectuée avec la bibliothèque NAG et utilise la stratégie de Markowitz du choix des points de pivot pour limiter le remplissage.

Le deuxième solveur, nommé **Solveur 2**, utilise la forme généralisée avec inversion-décalage du problème dont l'obtention est présentée au § 3.3.2. La routine principale utilisant ARPACK fait des appels répétés à une sous-routine calculant le produit  $\tilde{K}x = (K - \sigma M)^{-1} Mx$ , où  $\sigma$  est un paramètre de décalage du spectre. La particularité du **Solveur 2** tient à la technique d'inversion par méthode itérative. Quatre méthodes (RGMRES, CGS, Bi-CGSTAB(1), TFQMR) ont été testées, avec quatre types de préconditionnement : Jacobi, SSOR, ILU et sans préconditionneur. Des routines implémentant ces méthodes sont disponibles dans la bibliothèque NAG, mais présentent l'inconvénient majeur d'utiliser un schéma de stockage

---

<sup>9</sup>A chaque étape de l'élimination de Gauss, pendant laquelle une variable donnée est éliminée de chacune des équations du système, seules quelques sous-matrices interviennent en plus d'une sous-matrice assemblée à l'étape précédente. L'assemblage consiste à sommer toutes ces sous-matrices pour l'étape suivante; l'élimination peut être effectuée simultanément plutôt qu'à la fin de l'assemblage complet.

non-symétrique. Différents essais conduisant à la divergence des méthodes nous ont fait observer la mauvaise qualité du conditionnement du problème : seul l'algorithme utilisant le préconditionneur ILU a convergé. Les méthodes itératives, dotées de ce préconditionneur, ont toutes des performances comparables ; nous avons donc décidé de ne représenter que la variante CGS/ILU.

Le troisième solveur (**Solveur 3**) utilise la même forme du problème aux valeurs propres. Le mode de résolution est en revanche très différent car il exploite la méthode de résolution directe frontale avec une renumérotation utilisant la méthode de partition multiniveau METIS.

Les résultats numériques sont extraits de simulations effectuant une résolution unique du problème aux valeurs propres. Le système matriciel a été construit en modélisant une plaque de dimensions  $35\text{cm} \times 40\text{cm} \times 2\text{mm}$  en conditions libres comportant un patch de  $10\text{cm} \times 10\text{cm}$  situé dans un coin et dont nous avons fait varier la densité du maillage. La construction du système matriciel ainsi que le décalage spectral  $\sigma$  ont été évalués à la fréquence de 45 Hz, c'est-à-dire très près de la fréquence du premier mode de flexion. Le tableau 3.1 présente les caractéristiques de temps de calcul et de mémoire maximum requise des trois solveurs pour cinq discrétisations de plaque différentes. Les valeurs comprennent le temps et la mémoire requis pour la construction des problèmes matriciels en fonction du nombre de degrés de liberté ou nombre d'inconnues ; le coût numérique de cette étape est toutefois négligeable devant le coût de la résolution. Le tableau montre clairement un niveau de performance

Nombre d'inconnues		387	891	1971	3051	4851
Temps de calcul (en s)	<b>Solveur 1</b>	7.62	171.56	2105.19	8249.6	35450.6
	<b>Solveur 2</b>	0.74	6.20	31.25	101.62	348.69
	<b>Solveur 3</b>	0.15	0.42	1.14	2.32	4.16
Mémoire maximum (MB)	<b>Solveur 1</b>	1	53	245	579	1453
	<b>Solveur 2</b>	0.98	0.98	59	91	150
	<b>Solveur 3</b>	1	1	15	23	36

TAB. 3.1 – Comparaison des performances des trois solveurs développés.

différent pour chaque solveur, en terme de mémoire comme en terme de temps de calcul. On remarque en outre que le **Solveur 3** est particulièrement lent et coûteux en terme de mémoire : il ne fonctionne qu'en construisant un sous-espace<sup>10</sup> de la même taille que la matrice d'étude. L'algorithme QR travaille donc sur la matrice entière, c'est-à-dire dans une configuration pour laquelle il est peu performant. Les performances de la routine d'inversion par résolution frontale directe avec renumérotation étant bien meilleures en terme de mémoire et de temps de calcul que les autres routines, nous retiendrons donc le **Solveur 3** pour les simulations à venir.

### 3.5.2 Le solveur aux valeurs propres à résolution directe

Nous proposons ici une étude plus approfondie des caractéristiques du **Solveur 3**. Les performances du solveur sont illustrées par la figure 3.1, qui présente le temps de calcul, la

<sup>10</sup>Sous-espace associé à la matrice de Rayleigh.

mémoire maximum requise et le nombre de coefficients matriciels en fonction du nombre d'inconnues du problème.

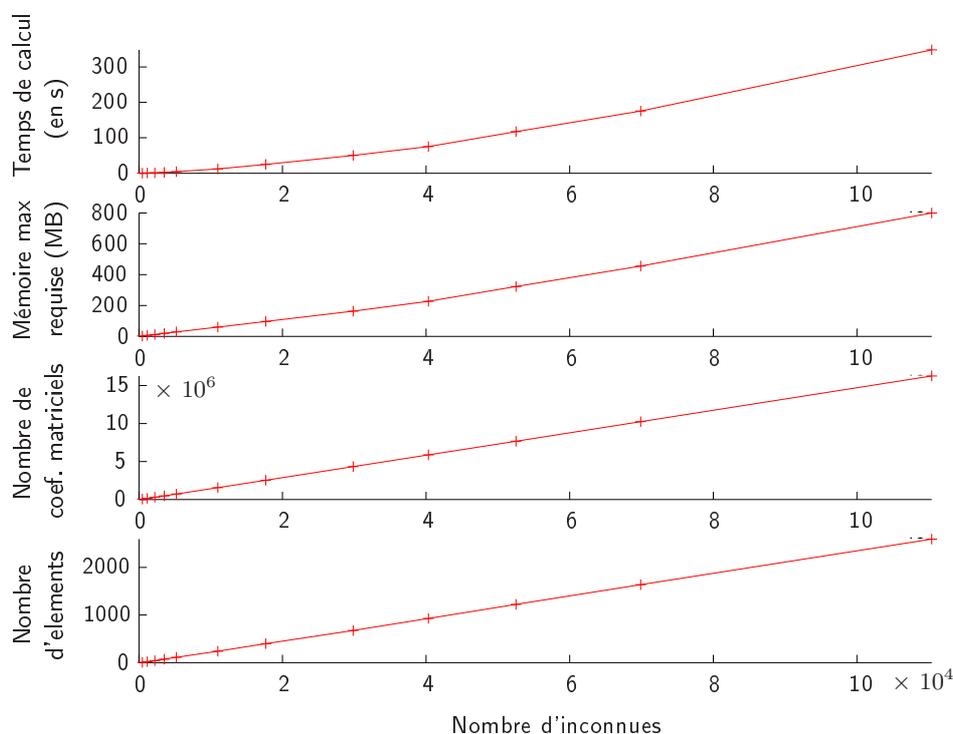


FIG. 3.1 – Performances du solveur développé retenu fonction du nombre d'inconnues.

Outre des critères de convergence que nous n'étudions pas ici, ARPACK a pour paramètres d'entrée principaux le nombre de valeurs propres recherché et la taille du sous-espace associé à la matrice de Rayleigh (§ 3.3.3.1). Nous présentons ici une étude courte de ces paramètres. Le tableau 3.2 montre l'influence du nombre de valeurs propres demandé sur le temps de calcul du solveur pour deux configurations de maillage différentes ( $15 \times 15$  et  $30 \times 30$ ). La taille du sous-espace a été fixée à 20 pour toutes les configurations numériques étudiées ; le problème a été résolu en effectuant 21 résolutions de système pour chacune des configurations. Les valeurs de temps présentées ne tiennent compte que du temps nécessité par le solveur aux valeurs propres et celui des routines d'inversion auxquelles il fait appel. Le tableau met

Nombre de val. pr. recherchées		1	2	3	4	5
Temps de calcul (s)	Maillage ( $15 \times 15$ )	4.349	4.392	4.508	4.708	4.729
	Maillage ( $30 \times 30$ )	21.214	21.979	22.249	22.819	23.090

TAB. 3.2 – Influence du nombre de valeurs propres requises sur le temps de calcul.

en évidence que le nombre de valeurs propres recherché n'altère quasiment pas le temps de calcul du solveur, tout au moins dans les cas que nous avons testés lorsque ce nombre reste très faible par rapport à la taille de la matrice. La figure 3.2 représente l'influence de la taille du sous-espace sur le temps de calcul, le nombre d'inversions et de redémarrages de l'algorithme. Elle montre clairement qu'il existe une taille de sous-espace optimale pour réduire le

temps de calcul. Il importe de façon prioritaire ne pas le sous-dimensionner, car l'algorithme connaît alors quelques difficultés (perte d'orthogonalité entre les vecteurs propres calculés) et doit effectuer de nombreux redémarrages qui sont très coûteux numériquement.

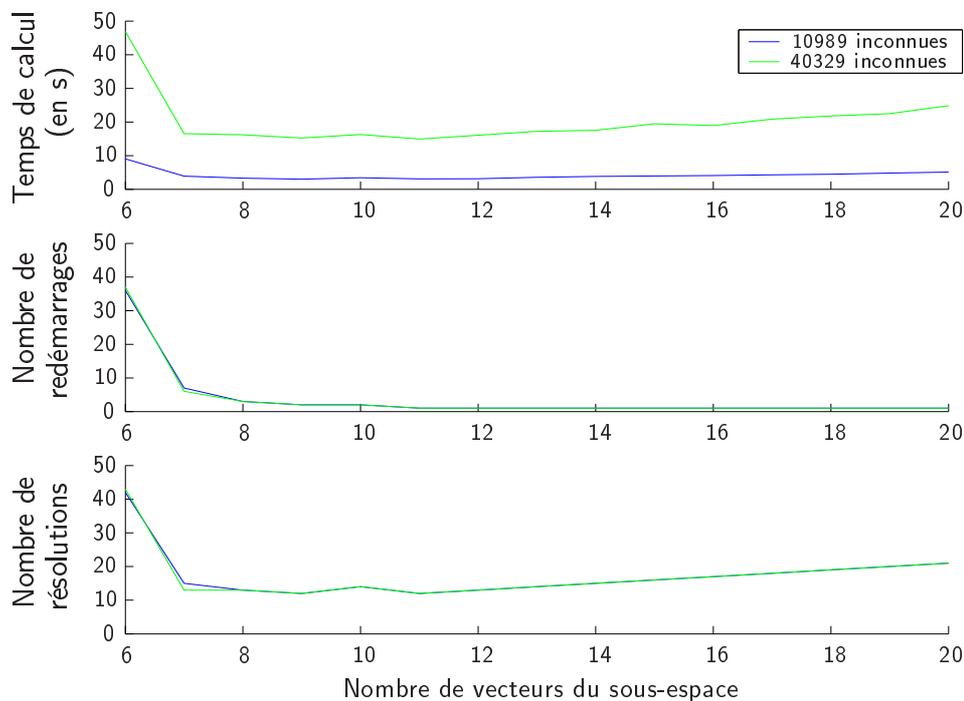


FIG. 3.2 – Influence de la taille du sous-espace sur le temps de calcul de l'algorithme de résolution du problème aux valeurs propres.

Notons enfin que la vitesse de convergence est très dépendante de la distance entre le décalage introduit  $\sigma$  et la valeur propre cherchée. Si nous n'avons pas remarqué que l'introduction d'un vecteur initial approchant la solution modifie beaucoup la qualité de la convergence, nous avons remarqué en revanche qu'il était primordial de définir un décalage qui soit le plus proche de la valeur de résonance recherchée. Au cours du processus itératif de recherche des solutions libres, le décalage est donc réajusté en permanence.

### 3.6 Bilan et conclusions du chapitre

L'objet du chapitre a concerné le développement d'un solveur complexe adapté au problème matriciel issu de la discrétisation par éléments finis d'un problème de dynamique formulé dans le plan fréquentiel. L'analyse des différentes méthodes matricielles nous a amené à privilégier la méthode d'Arnoldi et plus spécifiquement la bibliothèque ARPACK. Créée dans les années 90, elle met à disposition des algorithmes adaptés aux problèmes structurés de grande taille qui implémentent l'IRAM<sup>11</sup>. Différentes routines d'inversion matricielle appelées par ARPACK au cours de la résolution du problème aux valeurs propres ont par ailleurs été testées. Le conditionnement du problème est tel qu'il a été opté d'utiliser une méthode de résolution directe frontale (bibliothèque SPARSEPAK) avec renumérotation des équations matricielles par une méthode d'optimisation de partition de graphe ND<sup>12</sup>

<sup>11</sup>Implicitly Restarted Arnoldi Method.

<sup>12</sup>Nested Dissection.

multiniveau (bibliothèque METIS). Cette méthode a été préférée aux méthodes itératives basées sur l'espace de Krylov (méthode de type CGS avec préconditionnement ILU) qui sont pourtant reconnues comme étant très efficaces pour traiter les grandes matrices issues de la modélisation par éléments finis. L'algorithme final utilise la forme généralisée avec inversion-décalage du problème aux valeurs propres dont la vitesse de convergence est guidée par le décalage spectral introduit et la taille du sous-espace de la matrice de Rayleigh fixée par l'utilisateur. A taille de sous-espace fixée, il a été observé que le nombre de valeurs propres recherché n'altère que très peu le temps de calcul.



# Chapitre 4

## Amortissement par couplage

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Amortissement thermoélastique</b>	<b>90</b>
4.2.1	La thermoélasticité	91
4.2.2	Etat de l'art	93
4.2.3	Modèle retenu	95
4.2.4	Résultats numériques	98
<b>4.3</b>	<b>Amortissement par couplage fluide/structure</b>	<b>104</b>
4.3.1	La nature du couplage fluide/structure	106
4.3.2	Amortissement par viscosité	107
4.3.3	Amortissement par rayonnement acoustique	111
4.3.4	Validation numérique et optimisation du modèle	120
<b>4.4</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>123</b>

---

## 4.1 Introduction

L'objet de chapitre concerne l'étude de l'amortissement par couplage, dont la nature est différente de celle de l'amortissement viscoélastique (traité au chapitre 5). L'amortissement par couplage tient sa spécificité à l'existence d'un phénomène supplémentaire (thermique, acoustique, viscosité de l'air) susceptible d'altérer le comportement dynamique dominant en décalant les fréquences de résonance et en augmentant l'amortissement. Il nécessite la prise en compte éventuelle d'un domaine (milieu aérien) et de lois supplémentaires (équation thermique, acoustique ou décrivant les écoulements visqueux) comprenant un terme de couplage avec les équations de dynamiques. Les objectifs de ce chapitre comme ceux du chapitre sur l'amortissement viscoélastique sont multiples. Il est question de calculer les amortissements prépondérants de l'expérience de plaque suspendue présentée au § 1.4.2. La seule quantité expérimentale accessible pour la validation est en effet l'amortissement total, somme des composantes d'amortissement. L'étude du couplage acoustique permet par ailleurs d'évaluer la puissance acoustique rayonnée et la performance des traitements amortissants pour la réduction de bruit.

Le chapitre se décompose comme suit. L'amortissement thermoélastique est modélisé dans une première partie (§ 4.2). La méthode de résolution a été développée de façon à favoriser la comparaison avec le modèle de référence de Zener. Elle utilise à la fois le programme de modélisation dynamique (programme EF et solveur) présenté au chapitre 2 et une représentation du champ thermique en série de Fourier ; le couplage est traité par le biais d'une procédure itérative en trois étapes avec perturbation. Le modèle, validé par l'expérience, permet d'effectuer une analyse critique du modèle de Zener ; des simulations numériques concernant une plaque sont également présentées pour observer et commenter l'influence de certains paramètres tels que l'épaisseur ou les conditions aux limites sur la dissipation thermoélastique et le décalage fréquentiel des modes.

Le couplage fluide/structure est ensuite abordé dans une deuxième partie à travers la modélisation de l'écoulement visqueux sur les bords d'une plaque libre (§ 4.3.2) et le calcul du rayonnement de structures planes bafflées ou non bafflées (§ 4.3.3). L'amortissement par viscosité de l'air est estimé à partir d'un calcul analytique approché de l'écoulement le long d'un demi-plan dans une configuration bidimensionnelle et des solutions vibratoires estimées dans le vide. La modélisation du champ acoustique est réalisée par le biais d'une méthode de perturbation pour traiter le couplage vibroacoustique et nous amène à définir un amortissement acoustique lié à la perte d'énergie vibratoire par rayonnement. Une comparaison du modèle aux données numériques fournies par la commission de validation des logiciels de vibroacoustique C-Valor (§ 4.3.4) permet de le valider.

## 4.2 Amortissement thermoélastique

Habituellement non intégré dans la modélisation dynamique, le couplage thermoélastique apparaît pourtant explicitement dans les équations thermomécaniques fondamentales. Si le traitement des équations de la mécanique découplées du champ thermique<sup>1</sup> est grandement facilité, il n'en demeure pas moins que ce couplage modifie les caractéristiques dynamiques structurelles. Pour certaines configurations géométriques et certains matériaux le couplage

---

<sup>1</sup>Conditions isothermes.

thermoélastique est même la cause première de dissipation [135]. C'est le cas notamment de la plaque en aluminium suspendue que nous avons étudiée au chapitre 1.

## 4.2.1 La thermoélasticité

### 4.2.1.1 Base physique et thermodynamique

Il existe deux processus thermodynamiques couplés : un processus élastique réversible et un processus irréversible produit par un transfert de chaleur par conduction des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides. Conséquence du second principe de la thermodynamique, de l'entropie est créée, signifiant qu'une partie de l'énergie mécanique a été convertie en chaleur. Lorsqu'un matériau est sollicité dans un processus adiabatique réversible, l'hétérogénéité du champ de déformation crée une distribution de température. Les gradients locaux et la conductivité thermique du matériau initient alors un flux, décrit par la loi de Fourier, qui permet au solide de retrouver son état d'équilibre. Les équations thermoélastiques couplées sont obtenues en développant l'expression de l'énergie libre en fonction de la variation de température et des principaux invariants du tenseur des déformations autour d'un état de référence sans contraintes à la température<sup>2</sup>  $T_A$ . Ce formalisme utilise donc les constantes isothermes du matériau.

Les équations classiques découplées ont pour solution des ondes élastiques non dispersives non amorties, et des ondes thermiques très amorties et dispersives. Les équations couplées quant à elles, ont pour solution des ondes quasi-élastiques dispersives et amorties, et des ondes quasi-thermiques. La décomposition non unique du champ de déplacement en la somme d'un terme irrotationnel et d'un terme sans divergence (théorème de Clebsch-Helmholtz) permet de montrer que les ondes transverses sont découplées des phénomènes thermiques. Par conséquent, seules les sollicitations de flexion et d'extension/compression font apparaître un couplage entre le champ mécanique et le champ thermique. Ce constat justifie clairement l'emploi récurrent des pendules de torsion pour mesurer la viscoélasticité des métaux indépendamment de tout effet thermoélastique<sup>3</sup>.

La notion viscoélastique de temps de relaxation apparaît naturellement dans la théorie thermoélastique et justifie l'usage éventuel d'un modèle rhéologique équivalent. On distingue deux régimes, suivant que le processus de conduction pendant l'espace d'une période de vibration parvient à équilibrer les inégalités de température (régime isotherme ou relaxé) ou non (régime adiabatique ou non relaxé). La zone charnière est caractérisée par un paramètre dépendant du matériau et de la géométrie (fréquence ou temps de relaxation thermoélastique). En régime adiabatique, le champ thermique et mécanique sont en phase ; en régime isotherme, ils sont déphasés de  $90^\circ$ . Dans la zone de transition, ils sont déphasés de  $45^\circ$  et l'amortissement est maximum.

La nature du couplage dépend beaucoup de l'onde élastique étudiée, même si le processus de dissipation est similaire. Si les ondes de cisaillement ne sont pas couplées au champ thermique, le couplage thermoélastique introduit par des ondes longitudinales et celui par des ondes de flexion est qualitativement différent. Lifshitz et Roukes [84] soulignent en effet que la distance entre les zones froides et chaudes d'une structure diffère grandement sui-

<sup>2</sup>Une description thermodynamique très détaillée est présentée dans le livre de Nowacki [97].

<sup>3</sup>Exception faite des matériaux inhomogènes sollicités localement en compression.

vant l'onde considérée ; reliée en première approximation à la dimension transversale pour les ondes de flexion<sup>4</sup>, la distance caractéristique est proportionnelle à une demie longueur d'onde dans le cas d'une onde de compression. Conséquence notable dans ce dernier cas, les temps de relaxation thermique en haute fréquence sont très courts et le processus est isotherme (ou relaxé), alors qu'en basse fréquence le processus est adiabatique : c'est exactement l'inverse des ondes de flexion.

Un certain nombre de distances et de temps de relaxation liés au couplage thermoélastique caractérisent la propagation d'une onde dans une plaque infinie. Les fréquences caractéristiques associées forment un spectre de relaxation discret qui se trouve davantage altéré en présence de conditions aux limites. C'est la raison pour laquelle la plupart des modèles reposent sur une description géométrique simplifiée ; le cas des plaques infinies est en outre récurrent en thermoélasticité. Mentionnons le modèle de Zener, couramment utilisé, qui ne retient pour décrire le champ thermique que le premier mode transversal, auquel est associée une seule et unique distance, la distance transverse. Par conséquent, seuls les transferts thermiques suivant l'épaisseur sont pris en compte ; les transferts dans le plan de la plaque comme l'influence des conditions aux limites sur le pourtour de la plaque sont négligés.

#### 4.2.1.2 Les équations du matériau isotrope

Les équations couplées de la théorie classique de la thermoélasticité (CCT) avec la loi de constitutive de Fourier s'écrivent après linéarisation de l'équation thermique sous la forme tensorielle suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} &= \delta_{ij} \lambda \epsilon_{kk} + 2 \mu \epsilon_{ij} - \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_A) & \text{(dynamique)} \\ k T_{,mm} &= \rho c_V \dot{T} + \alpha T_A \sigma_{kk} & \text{(thermique)} \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\lambda$ ,  $\mu$  sont les constantes de Lamé,  $T$  est la température,  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes,  $\epsilon_{ij}$  le tenseur des déformations,  $T_A$  la constante de température ambiante,  $\rho$  la densité du matériau,  $k$  la conductivité thermique,  $c_V$  la chaleur spécifique par unité de volume à déformation constante,  $\alpha$  le coefficient linéaire d'expansion thermique,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. La première équation est appelée loi de Duhamel/Neumann et généralise la loi de Hooke en donnant une expression de la contrainte en fonction de la température et de la déformation. La deuxième équation est l'équation de thermique couplée au champ de déformation.

#### 4.2.1.3 Théorie généralisée de la thermoélasticité

La loi de Fourier décrit un processus de diffusion associé à la conduction thermique. L'hypothèse est la suivante : le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. Il en résulte un comportement considéré comme non réaliste (Achenbach [1]) : le champ thermique s'étend instantanément à l'infini et génère une petite déformation avant le front d'onde ; en d'autres termes, une petite perturbation thermique (liée par exemple à l'effet thermoélastique) affecte instantanément tout point du corps : la vitesse de propagation de

---

<sup>4</sup>Zener utilise la distance caractéristique  $h/\pi$  dans son modèle, où  $h$  est l'épaisseur.

la perturbation est infinie. On parle en analyse transitoire d'effet précurseur. La loi de Fourier a été modifiée en introduisant la dérivée temporelle du flux de chaleur, transformant l'équation parabolique classique en équation de type propagatif hyperbolique. Les ondes thermiques sont d'ailleurs appelées " second son " car deux fronts d'onde se propagent.

Deux approches modifient la théorie classique de la thermoélasticité et sont à la base de la théorie généralisée de la thermoélasticité. La première porte le nom de modèle LS (élaborée en 1967 par Lord & Shulman) ; une constante de temps est introduite pour la relaxation de la propagation thermique. La deuxième est imputable à Green et Lindsay et porte le nom de modèle GL ; deux constantes gouvernent la relaxation thermique et thermomécanique. Parmi les articles traitant du sujet, Verma [121] présente une étude de la propagation des ondes planes thermoélastiques dans une plaque fine infinie homogène dans le contexte de la théorie GL. L'auteur propose une comparaison de la réponse à un choc thermique calculée en temporel par les trois théories (CCT, LS , GL) avec la transformée de Laplace et une méthode d'éléments de frontière.

#### 4.2.1.4 Hypothèses courantes

Les hypothèses et techniques récurrentes facilitant la résolution analytique ou numérique sont les suivantes :

- utilisation de la loi de Fourier de conduction thermique,
- linéarisation de l'équation de la chaleur, en supposant les fluctuations de température petites par rapport à la température de référence  $T_A$ , c'est-à-dire  $T - T_A \ll T_A$ ,
- remplacement de  $\dot{T}$  et  $\sigma_{kk}$  par  $\frac{\partial T}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t}$  (hypothèse de variation infinitésimale des quantités autour d'un état de référence),
- omission du terme d'inertie (régime quasi-statique décrit par l'équation de Lamé/Clapeyron),
- adoption d'une géométrie de plaque infinie,
- hypothèse d'un champ thermique monodimensionnel conduisant à un gradient transversal (hypothèse de Zener pour la flexion d'une poutre mince),
- hypothèse de flux thermique nul traduisant l'isolation thermique par rapport à l'extérieur. La justification est fondée sur le fait qu'à température ambiante, la puissance thermique rayonnée par la surface (loi de Stephan/Boltzmann) est très inférieure à l'échange de chaleur dû à la conductivité thermique.

## 4.2.2 Etat de l'art

### 4.2.2.1 Le modèle de Zener

Zener s'est intéressé à l'amortissement des métaux dans les années 30 et en particulier à l'amortissement thermoélastique d'une poutre sur appui de type Euler-Bernoulli. L'approxi-

mation qu'il décrit est considérée comme une référence en la matière et apparaît de façon récurrente dans la littérature. Zener a montré en effectuant une décomposition du champ de température en modes transverses<sup>5</sup> que 98,6% de la relaxation est associée au premier mode transverse thermique. Son modèle fournit un temps de relaxation unique associé aux processus thermiques, qui est le temps de diffusion le long d'une distance transverse caractéristique  $d$  donnée par  $d = h/\pi$ , où  $h$  est l'épaisseur. Le temps de relaxation  $\tau$  vaut

$$\tau = d^2 c_V / k \quad (4.2)$$

où  $k$  est la conductivité thermique et  $c_V$  la chaleur spécifique par unité de volume à déformation constante. L'approximation conduit au modèle solide standard ou modèle rhéologique de Zener<sup>6</sup> et à la définition d'un coefficient de friction interne  $Q^{-1}$  donné par

$$\begin{cases} Q^{-1} &= \Delta_E \frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \\ \Delta_E &= \frac{E_a - E_i}{E_a E_i} = \frac{E \alpha^2 T_A}{c_V} \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $E_a$  est le module adiabatique dit non relaxé,  $E_i$  le module isotherme relaxé et  $c_V$  la capacité calorifique par unité de volume. La valeur  $E$  du module de Young est la valeur isotherme utilisée par défaut ( $E = E_i$ ). Cette valeur est valide en basse fréquence alors que la valeur adiabatique doit être privilégiée en haute fréquence. Le modèle d'amortissement défini est un modèle homogène : le facteur de perte calculé s'applique sans distinction aucune à toutes les zones de la structure sans tenir compte du champ de déformation spécifique. Il en résulte l'absence de caractère dissipatif " modal ". Notons enfin que l'approximation du champ thermique est utilisable sur des structures différentes d'une poutre (une plaque par exemple) avec des conditions aux limites dynamiques variées.

#### 4.2.2.2 Éléments bibliographiques supplémentaires

Nous donnons à présent quelques éléments bibliographiques destinés à illustrer le contexte et la finalité des études actuelles portant sur la thermoélasticité. Chaigne et Lambourg [20] étudient l'amortissement thermoélastique d'une plaque en conditions libres, analytiquement (modèle de Zener) et expérimentalement, avec différents matériaux et épaisseurs de plaque. Il est montré et vérifié que lorsque l'épaisseur augmente, l'amortissement thermoélastique diminue<sup>7</sup> en  $\frac{1}{h^2}$ . Le caractère modal de l'amortissement, lié à son inhomogénéité, apparaît clairement dans les résultats d'analyse modale d'une plaque en conditions aux limites libres. En ce qui concerne les méthodes de résolution de problèmes de thermoélasticité, on pourra consulter Tasi [117] qui fait référence à un système adjoint permettant de formuler une écriture énergétique adéquate, ou Chadwick [18] qui présente la solution du problème dans le cas d'un corps infini 3D pour ensuite l'extrapoler au cas de structures de dimension finie.

Notons que le problème de thermoélasticité peut être posé de façon inverse. Dimarogonas et Syrimbeis [30] proposent par exemple une méthode pour déterminer les caractéristiques vibratoires d'une plaque à partir de mesures de thermographie infrarouge. Contrairement à la

<sup>5</sup>Approximation monodimensionnelle.

<sup>6</sup>Modèle présenté au § 5.2.5.1.

<sup>7</sup>Les résultats numériques de la figure 4.10 et un calcul de passage à la limite basé sur le modèle de Zener montrent que cette assertion n'est valable que pour les modes situés bien au-dessus de la fréquence caractéristique.

démarche de Zener, le champ de température est considéré comme bidimensionnel : constant suivant l'épaisseur et variable dans les deux directions horizontales. Il est mentionné que les lignes nodales vibratoires coïncident avec les lignes nodales de température pour les plaques très fines seulement.

L'étude bibliographique de la thermoélasticité montre que l'interférométrie et les systèmes électromécaniques de petite échelle<sup>8</sup> font partie des domaines les plus actifs en la matière. Citons Cagnoli et *al* [15], Lifshitz et Roukes [84], Lifshitz [83], Gretařsson et *al* [49] parmi beaucoup d'autres auteurs dont l'objet d'étude concerne souvent les fils de suspension de détecteurs d'onde gravitationnelle. Lifshitz et Roukes [84] par exemple calculent une expression exacte de l'amortissement thermoélastique des poutres fines rectangulaires à partir de la forme exacte du champ de température transversal.

### 4.2.3 Modèle retenu

#### 4.2.3.1 Le traitement du couplage par perturbation

Le modèle retenu, appliqué à l'étude d'une plaque en aluminium obéissant à des conditions aux limites thermiques de flux nul, repose sur la résolution des équations thermoélastiques couplées (4.1) par méthode de perturbation.

L'algorithme est constitué de trois étapes :

- |   |   |
|---|---|
| 1 | <p>Résolution de l'équation dynamique avec l'équation constitutive</p> $\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$ <p>Représentation de <math>\sigma_{kk}</math> sous la forme d'une série de Fourier</p>  |
| 2 | <p>Résolution modale de l'équation de la chaleur avec second membre</p> $kT_{,mm} - \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T_A \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t}$ <p>Déduction d'une contrainte thermique et d'une matrice des contraintes thermiques</p> $\sigma_{ij}^{th} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_A) \delta_{ij}$ |

---

<sup>8</sup>NEMS, MEMS.

3	Calcul de l'énergie $E_{th}$ de déformation thermoélastique
	$E_{th} = \int_V \epsilon_{ii} \sigma_{kk}^{th}$
	Dédution des valeurs propres $\lambda_{th}$ du système thermoélastique
	$\lambda_{th} = \lambda + E_{th} \quad (\text{après normalisation par la masse})$

L'énergie est obtenue par projection de la matrice des contraintes thermiques dans la base du système non couplé. La valeur propre modifiée par le couplage thermoélastique est obtenue par perturbation à l'aide de la relation (1.9). Cette méthode s'implémente assez simplement à l'aide des routines calculant la vibration d'une structure non amortie de forme parallépipédique rectangle. La représentation des contraintes de compression  $\sigma_{kk}$  sous la forme d'une série de Fourier tridimensionnelle (étape 1) est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul. Elle permet de déduire le champ de température (étape 2) représenté également sous la forme d'une série de fonctions sinusoïdales. Ces fonctions satisfont l'équation de la chaleur pour une géométrie parallépipédique rectangle avec des conditions thermiques de flux nul sur les frontières. Le détail du calcul est présenté dans le prochain paragraphe. Enfin, un champ de contraintes puis une énergie de déformation thermiques sont déduits dans l'étape 3 (Batoz et Dhatt [8]). L'énergie, calculée pour un mode dont le vecteur est normalisé par la masse, apparaît directement sous la forme d'une perturbation du système dynamique découplé.

L'intérêt de la méthode réside dans le fait que les équations peuvent être traitées séparément : le terme de couplage constitue un second membre simple pour l'équation thermique et une contrainte supplémentaire pour l'équation dynamique. La méthode ne nécessite qu'une seule et unique résolution du problème aux valeurs propres. Enfin, elle permet de faire une analyse précise des modes thermiques participant à la dissipation thermoélastique, et donc de vérifier la validité de la méthode de Zener qui ne conserve dans le champ de température que le premier mode transversal.

#### 4.2.3.2 La résolution de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur linéarisée s'écrit :

$$\mathbf{k} T_{,mmm} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T_A \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Les conditions aux limites sont des conditions de flux thermique nul aux bords de la plaque (de largeur  $l$ , épaisseur  $e$ , longueur  $L$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x}(x=0, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x=l, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=0, z, t) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, y=L, z, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z=0, t) = \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z=e, t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Nous omettrons la dépendance spatiale pour des raisons de lisibilité. Les conditions initiales sont données par

$$\begin{cases} T_i &= T(0) \\ \sigma_{kki} &= \sigma_{kki}(0) \end{cases} \quad (4.6)$$

La transformée de Laplace des termes avec dérivée de l'équation de la chaleur les fait apparaître explicitement :

$$\begin{cases} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right] &= s \tilde{T}(s) - T_i \\ \mathcal{L} \left[ \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} \right] &= s \tilde{\sigma}_{kk}(s) - \sigma_{kki} \end{cases} \quad (4.7)$$

L'équation de la chaleur utilisée pour le calcul des solutions libres du problème thermoélastique couplé s'écrit dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales homogènes :

$$k \tilde{T}_{,mm}(s) - \rho c s \tilde{T}(s) = \alpha T_A s \tilde{\sigma}_{kk} \quad (4.8)$$

Le champ de température solution est cherché sous la forme d'une série de Fourier

$$\tilde{T}(s) = \sum_{m,n,q} T_{mnq}(s) \cos(m\pi x/l) \cos(n\pi y/L) \cos(q\pi z/e) \quad (4.9)$$

Cette solution est exacte pour un domaine parallépipédique rectangulaire dont un coin est placé à l'origine  $(0,0,0)$  avec des conditions aux limites de flux nul sur les bords. Notons que la dépendance fréquentielle est spécifique à chaque mode, ce qui permet de modéliser correctement l'inhomogénéité de l'amortissement. Un amortissement homogène comme le modèle de Zener aurait été modélisé quant à lui par une seule fonction fréquentielle  $f(s)$  commune à tous les modes telle que  $T_{mnq}(s) = P_{mnq} f(s)$ . Les valeurs propres de l'opérateur de l'équation (4.8) sont données par la loi de dispersion

$$s_{mnq} = -\frac{k\pi^2}{\rho c} \left( \left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{q}{e}\right)^2 \right) \quad (4.10)$$

En écrivant la contrainte de compression  $\tilde{\sigma}_{kk}$  sous la forme d'une série de Fourier,

$$\tilde{\sigma}_{kk} = \sum_{m,n,q} A_{mnq} \cos(m\pi x/l) \cos(n\pi y/L) \cos(q\pi z/e) \quad (4.11)$$

on déduit les coefficients de la série (4.9) définissant le champ de température

$$T_{mnq}(s) = \frac{\alpha T_A s A_{mnq}}{\rho c (s_{mnq} - s)} \quad (4.12)$$

Ce résultat permet de déduire la contrainte thermique qui s'exerce sur le système, dont l'expression s'écrit dans le domaine de Laplace sous la forme :

$$\sigma_{ij}^{th}(s) = -(3\lambda + 2\mu) \alpha (\tilde{T}(s) - T_A) \delta_{ij} \quad (4.13)$$

La température de référence ou température ambiante  $T_A$  est une composante modale statique associée au mode ( $m = 0, n = 0, q = 0$ ). On peut associer à  $\sigma_{ij}^{th}(s)$  une matrice de contraintes thermiques ainsi qu'une énergie modale thermique  $E_{th}$  en projetant cette matrice dans la base des modes du système découplé. Si la base est orthonormalisée l'énergie calculée correspond à un terme de perturbation de la valeur propre du système découplé.

#### 4.2.4 Résultats numériques

L'étude numérique a porté sur la plaque en aluminium suspendue de l'expérience présentée au § 1.4.2. La finalité escomptée est d'obtenir des éléments de validation de la méthode, de mettre en relief la précision du modèle de Zener dans différentes configurations, et de comprendre davantage le mécanisme de dissipation thermoélastique par le biais de la représentation modale. Les caractéristiques de la simulation sont présentées dans le tableau récapitulatif 4.1.

Dimensions	$35cm \times 40cm \times 2mm$
Maillage $x \times y \times z$	$30 \times 30 \times 3$
Module de Young	$70 MPa$
Coefficient de Poisson	0,3
Densité de l'aluminium	$2700 kg.m^{-3}$
Nombre de modes thermiques $x \times y \times z$	$10 \times 10 \times 6$
Coef. linéaire d'expansion thermique $\alpha$	$23,0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Température ambiante $T_A$	$295,15 K$
Chaleur massique à pression constante $C_p$	$900,0 J/(K.kg)$
Conductivité thermique $k$	$237,0 W/(m.K)$

TAB. 4.1 – *Caractéristiques des simulations thermoélastiques.*

Le calcul des coefficients de la série de Fourier est effectué par projection des contraintes de compression volumique calculées sans couplage dans la base modale thermique. Une étude non présentée ici montre que la contrainte de compression après projection est entachée d'une erreur proche de 3-4% dans le cas libre. La troncature modale (dix modes thermiques suivant  $x$  et  $y$ , six modes suivant  $z$ ) et le nombre de points d'intégration choisis nous ont donc semblé suffisants. La troncature  $e$  nous a donc semblé suffisante. Le calcul d'intégration, effectué élément par élément, est d'autant plus lourd que le nombre de modes thermiques est élevé. La méthode numérique qui en résulte n'est pas rapide, mais facilite l'interprétation et la comparaison avec le modèle de référence de Zener. Nous préconisons clairement l'utilisation d'une formulation élément fini avec des degrés de liberté thermiques pour obtenir des performances numériques plus intéressantes (Lepage et Golinval [78]).

##### 4.2.4.1 Comparaison avec l'expérience

La première étude numérique concerne la comparaison de l'amortissement<sup>9</sup> thermoélastique modélisé à l'amortissement total mesuré, dans le cas où la plaque est en condition libre. La

<sup>9</sup>L'amortissement représenté s'exprime en Hz et est défini par la relation (1.12).

figure 4.1 représente ces deux quantités ainsi que leur différence. Notre première remarque concerne le caractère modal marqué des deux amortissements, qui témoigne clairement de leur nature inhomogène. On remarque par ailleurs que la différence obtenue entre amortissement mesuré et amortissement modélisé est représentée en bonne approximation par une droite qui peut être représentative d'un amortissement résiduel viscoélastique. Il s'agit à notre sens d'un élément indéniable de validation. Le facteur de perte<sup>10</sup> viscoélastique de l'aluminium est en effet souvent considéré comme constant dans la littérature sur l'amortissement. Nous proposons une analyse plus détaillée de l'amortissement viscoélastique de l'aluminium ainsi qu'une identification au § 5.3.2.3.

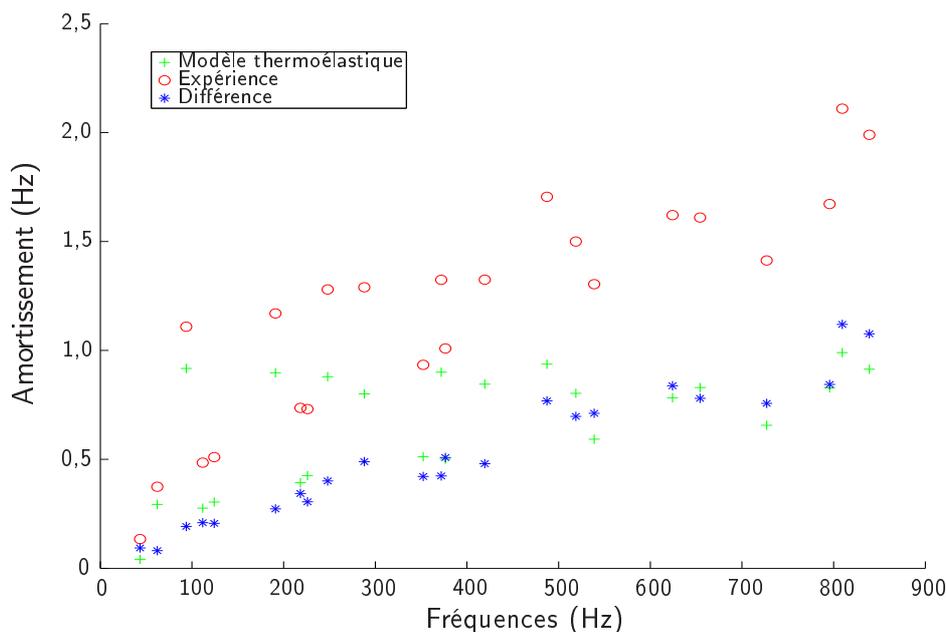


FIG. 4.1 – Comparaison de l'amortissement thermoélastique modélisé et de l'amortissement expérimental. Plaque libre de dimensions  $35 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$ .

La figure 4.2 montre la composition modale du champ thermique associé aux quatre premiers modes vibratoires. On note que le mode thermique dominant varie suivant le mode dynamique considéré ; les résultats indiquent que le champ thermique est très variable dans le plan de la plaque. On note également la prédominance de la composante modale  $n^{\circ} 2$  dans la direction transverse ( $z$ ) en adéquation avec l'analyse de Zener du champ thermique.

#### 4.2.4.2 Influence des conditions aux limites mécaniques

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'influence des conditions aux limites mécaniques sur le comportement dissipatif de la structure. Ses autres caractéristiques demeurent inchangées. Les résultats sont confrontés à ceux obtenus avec le modèle d'amortissement de Zener présenté au § 4.2.2.1. Ce dernier, homogène, s'applique simplement sans prise en compte des conditions aux limites et indépendamment du champ de déformation. Le seul paramètre structurel à ajuster est l'épaisseur. La figure 4.3 représente l'amortissement en

<sup>10</sup>Calculé en divisant l'amortissement en Hz par la pulsation réelle, fois deux.

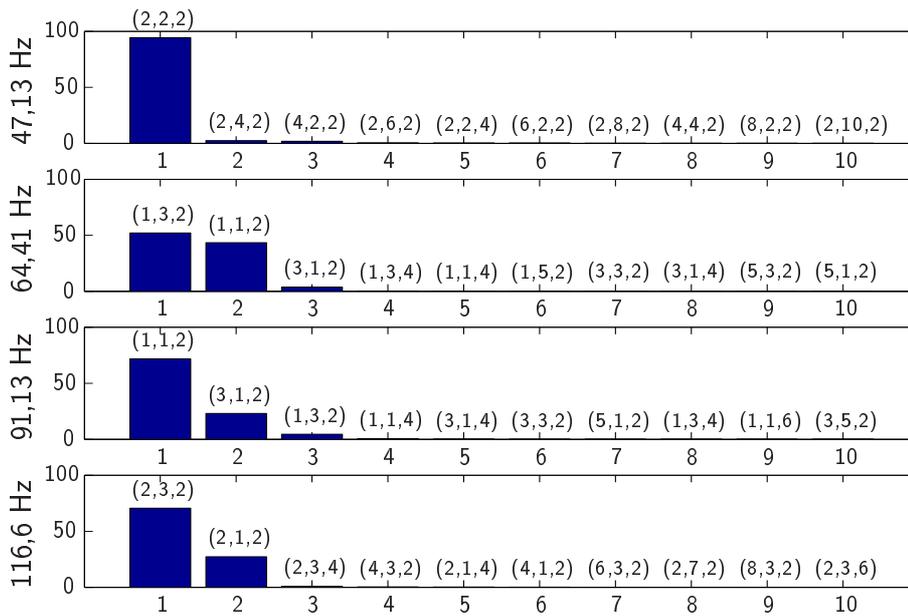


FIG. 4.2 – Modes thermiques contribuant le plus à l'amortissement thermoélastique. Représentation en % de l'amortissement total calculé avec tous les modes thermiques. Plaque libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

Hz et la figure 4.4 le facteur de perte déduit en divisant l'amortissement par la pulsation réelle; une trentaine de modes ont été calculés pour chacune des configurations. Nous remarquons une très grande similarité de nos résultats avec ceux du modèle de Zener dans le cas des conditions aux limites d'encastrement et d'appui. Les résultats sont en revanche très différents dans le cas des conditions aux limites de type libre avec une erreur parfois supérieure à 100%, le modèle de Zener majorant nos résultats.

Pour analyser la disparité des résultats nous avons représenté le rapport de l'énergie de déformation de compression sur l'énergie de déformation totale (figure 4.5). Cette démarche est classiquement utilisée dans la méthode d'énergie de déformation modale MSE<sup>11</sup>. Il faut alors pondérer le résultat par un coefficient d'amortissement dépendant de la fréquence mais indépendant de la déformation pour obtenir la valeur de l'amortissement modal. Le diagramme à barres 4.5 montre un lien clair entre ce ratio et l'amortissement modélisé. Dans le cas des conditions aux limites d'appui ou d'encastrement ce ratio a une valeur fixe indépendante du mode et des conditions aux limites. L'emploi d'un modèle d'amortissement homogène comme le modèle de Zener est alors pleinement justifié.

Nous avons poursuivi l'étude de l'influence des conditions aux limites en étudiant le décalage fréquentiel entre le cas dynamique couplé et le cas dynamique sans couplage thermoélastique. La figure 4.6 montre que ce décalage est une fonction linéaire de la fréquence dans le cas des conditions aux limites d'appui et d'encastrement, et qu'il est approché grossièrement par une droite dans le cas libre où le couplage est à la fois moins fort et dépendant du mode.

<sup>11</sup>Méthode présentée au § 2.4.2.2.

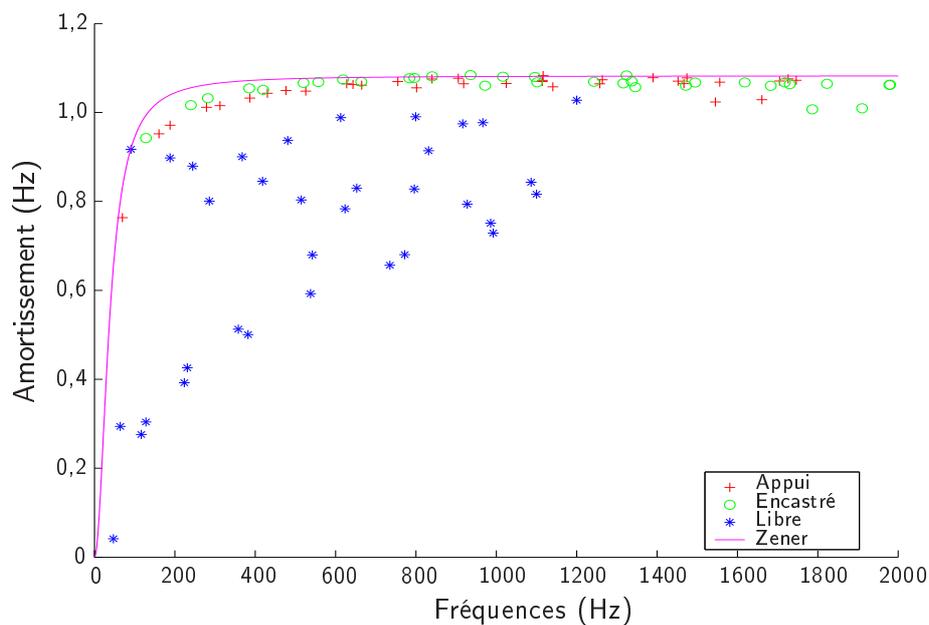


FIG. 4.3 – Comparaison de l'amortissement thermoélastique modélisé pour différentes conditions aux limites mécaniques. Plaque appuyée, encastée, libre de dimensions  $35 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$ .

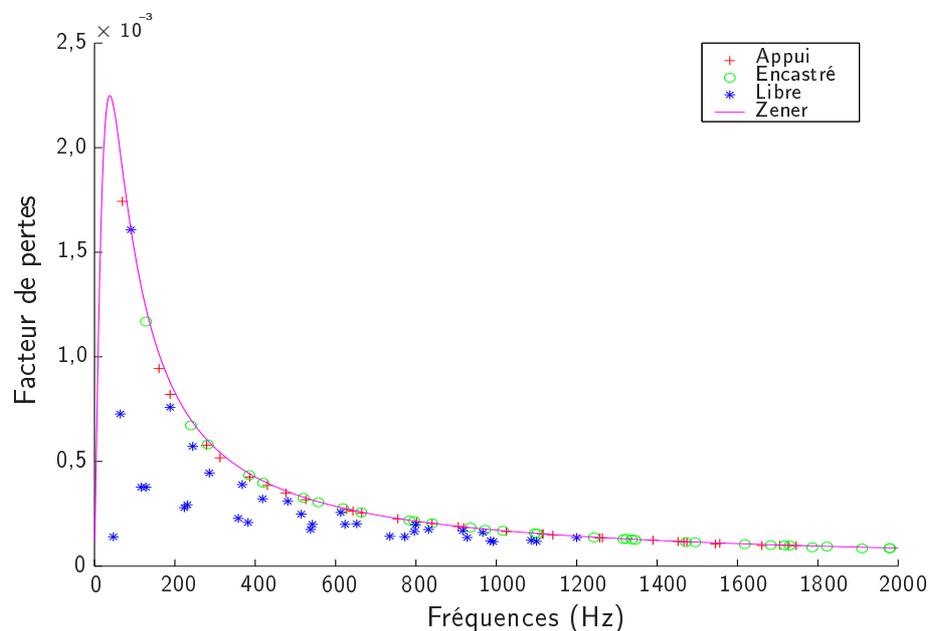


FIG. 4.4 – Comparaison du facteur de pertes thermoélastique modélisé pour différentes conditions aux limites mécaniques. Plaque appuyée, encastée, libre de dimensions  $35 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$ .

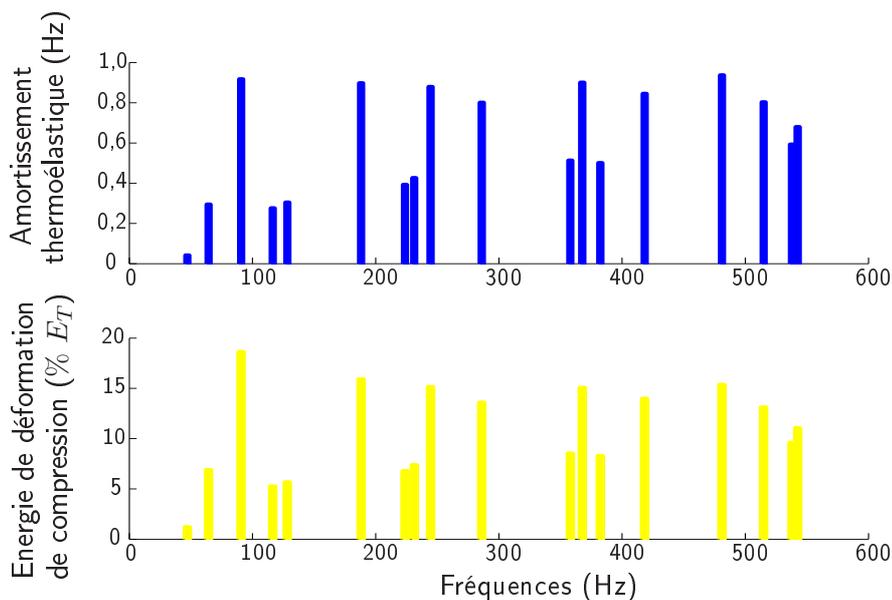


FIG. 4.5 – Comparaison de l'amortissement thermoélastique modélisé et du ratio de l'énergie de déformation de compression sur l'énergie de déformation totale. Plaque libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

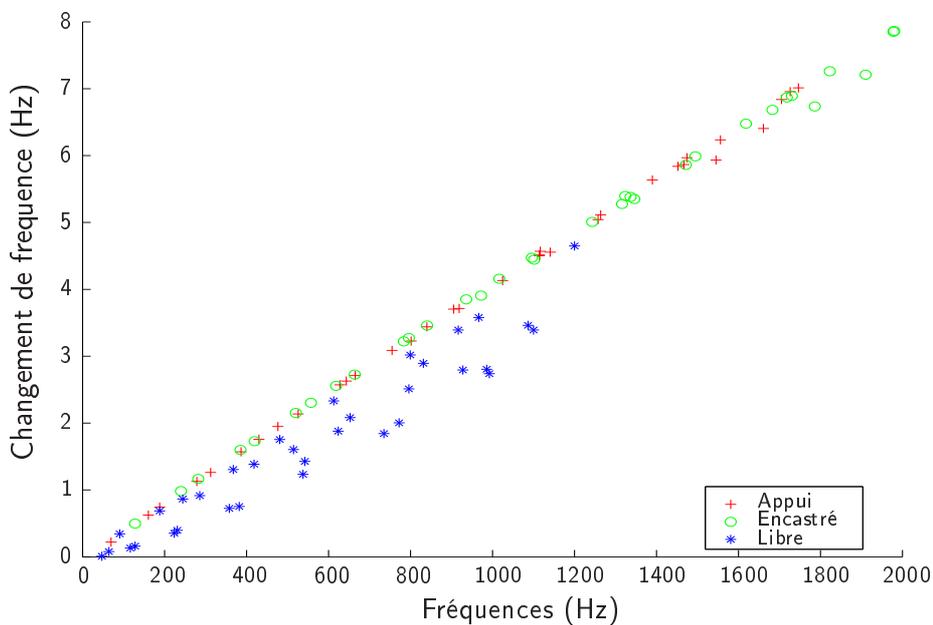


FIG. 4.6 – Comparaison du décalage fréquentiel lié au couplage thermoélastique modélisé pour différentes conditions aux limites mécaniques. Plaque appuyée, encastrée, libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

Nous avons également étudié la composition modale du champ thermique associé au premier mode dynamique et à chacune des conditions aux limites classiques. Les résultats obtenus sont représentés dans le diagramme 4.7. On remarque que la composition modale est très différente suivant les conditions aux limites, en particulier dans les cas sur appui et encastré alors que la déformée modale vibratoire des deux configurations est assez proche.

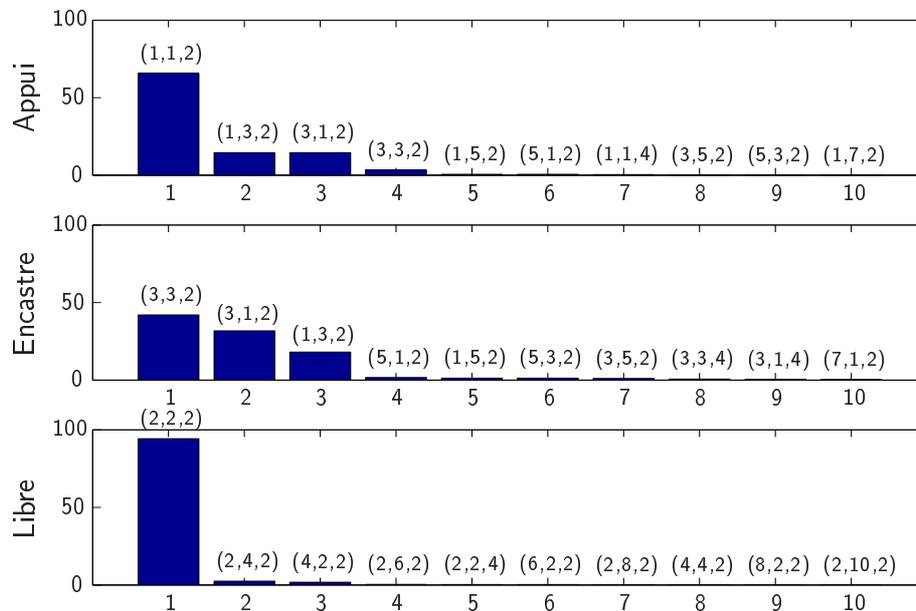


FIG. 4.7 – Modes thermiques contribuant le plus à l'amortissement thermoélastique du premier mode de vibration. Représentation en % de l'amortissement total calculé avec tous les modes thermiques. Plaque appuyée, encastrée, libre de dimensions  $35 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$ .

#### 4.2.4.3 Influence de l'épaisseur

La troisième partie de l'étude numérique a concerné l'influence de l'épaisseur de la plaque placée en conditions libres. Quatre épaisseurs différentes ont été étudiées : 1 mm, 2 mm, 3 mm et 4 mm. Les résultats du calcul concernent le décalage fréquentiel (figure 4.8) et l'amortissement en Hz (figure 4.9) des trente premiers modes.

Les résultats concernant le décalage fréquentiel montrent qu'il peut être modélisé en première approximation par une droite indépendante de l'épaisseur. Il existe néanmoins une certaine dispersion autour de cette droite. Par ailleurs on remarque dans la figure 4.9 que l'amortissement thermoélastique est très dépendant de l'épaisseur de la plaque et qu'il augmente considérablement lorsque l'épaisseur diminue. La représentation adoptée de l'amortissement (en Hz) permet d'observer un seuil fréquentiel à partir duquel l'amortissement se stabilise autour d'une valeur constante, sauf semble-t-il dans le cas d'une plaque d'épaisseur de 1 mm pour lequel ce comportement est moins flagrant. Ceci peut être interprété par le modèle de Zener, dans lequel la fréquence caractéristique dépend de l'épaisseur  $h$  en  $\sim 1/h^2$  : elle est de l'ordre de 140 Hz pour la configuration de 1 mm et de 17 Hz pour la plaque de 4 mm. Il est à noter que l'échelle de représentation de la figure ne permet pas de bien apprécier la

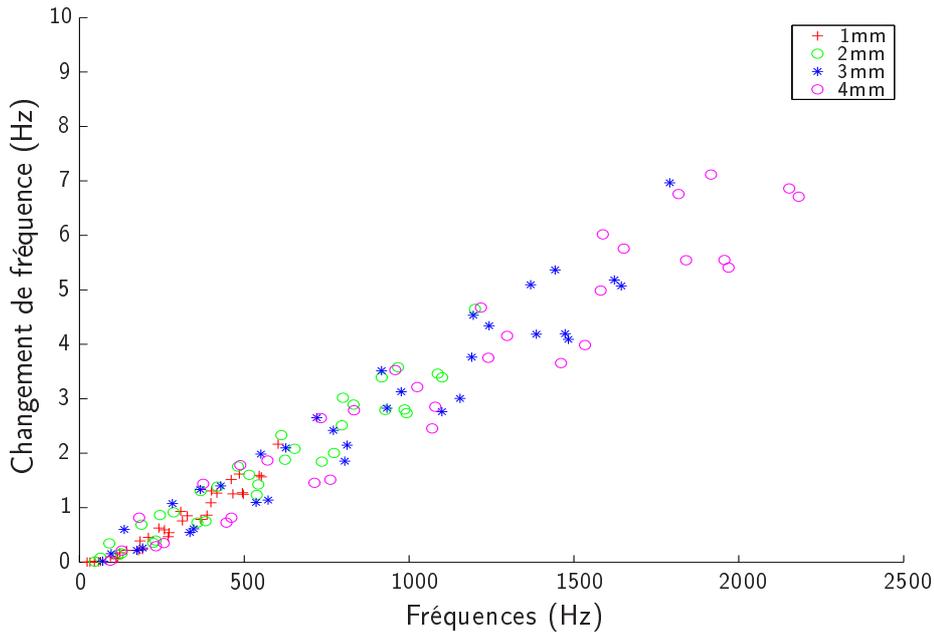


FIG. 4.8 – Comparaison du décalage fréquentiel lié au couplage thermoélastique modélisé pour des épaisseurs de plaque différentes. Plaque libre de dimensions  $35 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ , Épaisseur  $0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 \text{ cm}$ .

stabilisation de l'amortissement du cas d'épaisseur de 1 mm aux alentours de 140 Hz.

Il est tentant, pour un mode donné, de calculer le ratio de l'amortissement d'une configuration par celui d'une autre configuration de façon à quantifier le rôle de l'épaisseur. Nous avons représenté ce ratio " modal " dans la figure 4.10. L'amortissement de la plaque de 1 mm a été pris comme référence, et la valeur des ratios a été représentée à la fréquence des fréquences modales de cette même configuration. On remarque que la valeur des ratios se stabilise au dessus d'une certaine fréquence. On trouve dans la littérature une approximation définissant la dépendance de l'amortissement thermoélastique en  $\sim 1 / h^2$ ,  $h$  étant l'épaisseur de la structure. Un rapport d'épaisseur de 3 conduit alors à un ratio d'amortissement modal de 0,11 et un rapport de 2 un ratio d'amortissement modal de 0,25 : ces valeurs sont proches des valeurs respectives de 0,13 et 0,29 que la simulation calcule dans les hautes fréquences.

### 4.3 Amortissement par couplage fluide/structure

L'étude du couplage fluide/structure relève d'une double finalité. Il s'agit d'une part de modéliser finement le comportement vibratoire amorti et d'autre part de modéliser la puissance acoustique rayonnée pour l'utiliser comme indicateur de bruit. Deux amortissements, liés au couplage fluide/structure, peuvent être prépondérants : l'amortissement par frottement visqueux et l'amortissement par rayonnement acoustique. L'amortissement par frottement visqueux est évalué numériquement à partir des routines de modélisation dynamique présentées au chapitre 2 et d'un calcul d'écoulement visqueux analytique. Le couplage vibroa-

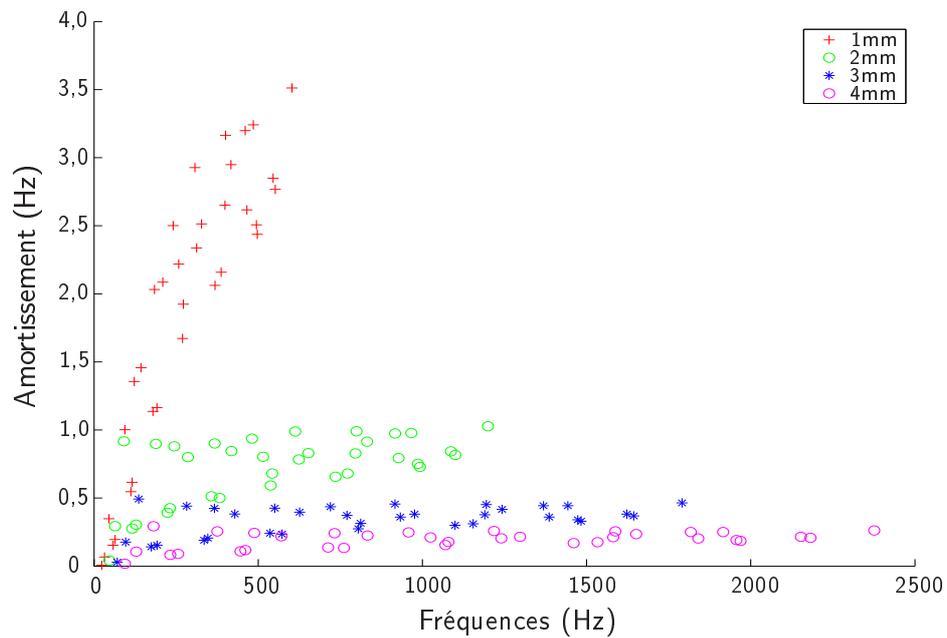


FIG. 4.9 – Comparaison de l'amortissement thermoélastique modélisé pour des épaisseurs de plaque différentes. Plaque libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ , Epaisseur 0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4 cm.

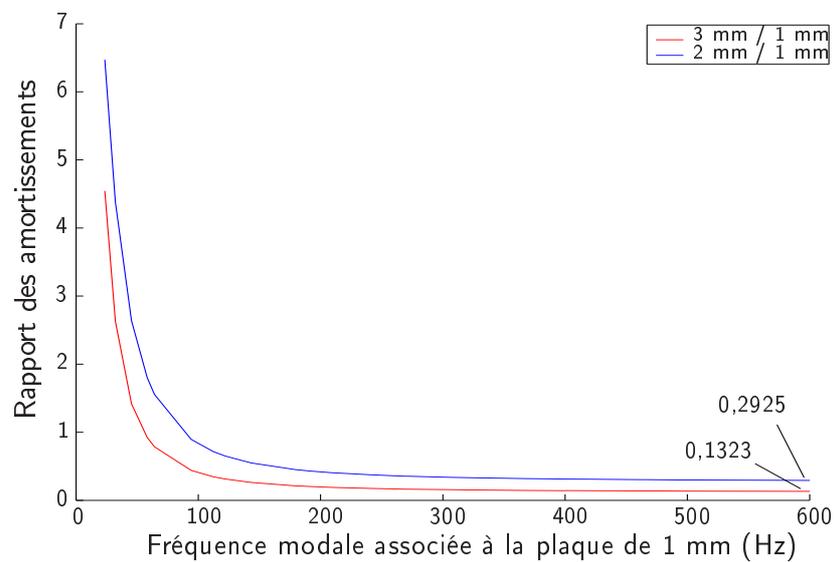


FIG. 4.10 – Etude du rapport de l'amortissement de deux configurations d'épaisseur différente pour un mode donné. Plaque libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ , épaisseur de référence 1mm.

coustique est traité avec une méthode de perturbation permettant d'évaluer l'effet du fluide sur la structure. L'amortissement calculé, que nous nommerons amortissement acoustique ou amortissement par rayonnement acoustique, quantifie d'une certaine façon l'intensité des échanges énergétiques entre les milieux solide et fluide indépendamment de toute sollicitation.

### 4.3.1 La nature du couplage fluide/structure

#### 4.3.1.1 Présentation du problème

Le couplage fluide /structure d'une plaque baignant dans un milieu aérien fait intervenir les mécanismes classiques couplés de transfert d'énergie. Il est toutefois possible de faire une distinction raisonnable entre trois sources de dissipation prépondérantes :

- la dissipation thermoélastique,
- la dissipation par viscosité aérienne,
- la dissipation par rayonnement acoustique.

Les phénomènes mis en jeu appartiennent au cadre de la viscothermoélasticité et ne sont pas aisément modélisables. Toutefois, étant donnée la nature des cas idéalisés étudiés et celle des lois constitutives mises en jeu, le problème nous semble physiquement bien posé. La relation pression/vitesse dans l'air utilise en effet des constantes physiques disponibles, contrairement à celles mises en jeu dans les matériaux polymères ou métalliques qui doivent faire l'objet d'une recherche expérimentale poussée. Les conditions aux limites d'adhésion pour un fluide visqueux ou de continuité des efforts à l'interface sont également simples et formulées de façon univoque. Enfin, le domaine d'étude acoustique idéalisé est délimité de façon explicite par le biais de conditions de non-retour des ondes.

#### 4.3.1.2 Dissipation thermoélastique

Deux conditions doivent être réunies pour que les effets de la thermoélasticité soient notables : la présence de gradients de température importants et d'une forte conductibilité. Ces conditions sont réunies au sein de l'aluminium. A l'interface aluminium/air où la température d'une plaque en flexion est maximum, les échanges thermiques sont en fait peu nombreux. Le fort gradient thermique n'est pas en mesure de compenser la conductibilité très faible entre les milieux solide et fluide. On peut s'en convaincre en observant les constantes de temps très grandes mises en jeu dans le refroidissement d'un objet métallique chauffé. La condition de flux thermique nul est d'ailleurs comparable à la condition idéalisée de paroi réverbérante en acoustique ; la pression est maximum sur la paroi alors qu'aucune énergie n'est transmise. Les phénomènes de thermoélasticité à l'interface ont donc été négligés.

#### 4.3.1.3 Dissipation par viscosité et par rayonnement

Les travaux de Valette et Cuesta [120] sur l'amortissement des cordes montre que la dissipation par viscosité de l'air ne saurait être négligée dans un modèle vibroacoustique relativement fin. Les auteurs montrent en effet que le cisaillement de l'air est le mécanisme

d'amortissement prépondérant des cordes dans les basses fréquences. De la même façon que Valette et Cuesta l'ont fait, nous avons traité le cas de la viscosité séparément du cas acoustique. La démarche semble peu rigoureuse tant il semble que les phénomènes de compression de l'air et de viscosité sont intimement liés. Nous avons obtenu une justification satisfaisante de cette approche a posteriori, après avoir quantifié un effet visqueux négligeable et donc fort probablement négligeable aussi dans le cas réel, couplé.

Suivant le cas étudié nous traitons de façon différente l'équation d'Euler :

- Dans le cas acoustique l'air est supposé être un fluide parfait adiabatique compressible. On considère des mouvements de petite fluctuation autour d'une position de repos, permettant de linéariser l'équation d'Euler et de définir une relation thermodynamique simple entre pression et vitesse. Ces hypothèses conduisent à l'équation des ondes sans dissipation
- Dans le cas visqueux, l'hypothèse d'incompressibilité et la configuration géométrique bi-dimensionnelle utilisée pour représenter le problème permettent de conserver le terme non-linéaire de l'équation d'Euler et de calculer la dissipation visqueuse générée par cet écoulement

### 4.3.2 Amortissement par viscosité

#### 4.3.2.1 Introduction

La viscosité aérienne dissipe de l'énergie dans les mouvements de cisaillement (viscosité dynamique) et dans les mouvements de compression (deuxième viscosité). Cette deuxième contribution est négligée. La première se manifeste dans les zones où les mouvements de cisaillement sont les plus importants : c'est le cas du pourtour d'une plaque en condition libre-libre. La viscosité dynamique a pour conséquence la génération d'une onde de cisaillement très vite amortie dans l'air, qui témoigne d'une transmission d'énergie vibratoire. Les phénomènes de viscothermoconduction peuvent devenir prépondérants lorsque le solide chasse l'air, ce qui dépend de la forme de la structure, ou lorsqu'un écoulement important se produit parallèlement à la surface solide. Ils apparaissent notamment dans les cavités de petite taille (structure d'un pneu, double vitrage, conduite de rayon faible, instruments à vent).

Le travail de Valette et Cuesta [120], déjà évoqué, reprend le raisonnement de Stokes. Il consiste à prendre en compte les effets dissipatifs de l'air en faisant l'hypothèse d'un écoulement laminaire à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre. L'utilisation du modèle est justifiée par les résultats expérimentaux des auteurs. Nous employons quant à nous un formalisme repris de Landau et Lifschitz [73], qui permet d'évaluer le frottement visqueux résultant de l'oscillation d'une surface dans son plan, ainsi qu'une approximation permettant de tenir compte du bord (oscillation d'un demi-plan). Contrairement à la solution de Blasius (Cousteix [24]) qui concerne le calcul de couche limite laminaire incompressible (écoulement parallèle à un demi-plan), les termes non-linéaires sont négligés devant les termes d'inertie. La solution de Blasius conduit à une couche limite d'épaisseur variable, nulle d'abord puis qui grossit le long du demi-plan jusqu'à stabilisation, alors que le modèle que nous étudions conduit à une couche limite d'épaisseur constante, caractéristique d'un écoulement établi, valable a priori pour une plaque suffisamment longue. Le modèle tient compte des forces d'inertie (négligées dans la solution de Blasius) et donne un amortissement linéaire, alors

qu'il serait non linéaire en incluant des termes d'inertie dans les équations de couche limite de Prandtl.

#### 4.3.2.2 Modélisation de l'écoulement le long d'un plan infini

La méthode s'appuie sur la géométrie bidimensionnelle représentée dans la figure 4.11. Le bord est assimilé à une ligne infinie  $\Gamma$  (plaque infiniment épaisse) effectuant des mouvements dans son plan suivant  $z$  décrits par l'amplitude  $u(t)$ , notée  $\tilde{u}(s)$  après passage dans le plan fréquentiel avec la transformée de Laplace. Les composantes  $v_i(x, y, z, t)$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) du

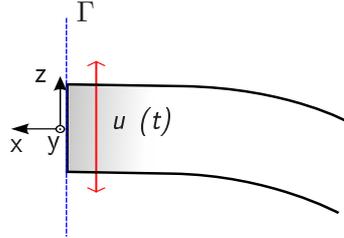


FIG. 4.11 – Modélisation 2D de l'écoulement au bord d'une plaque en conditions libre libre en mouvement de flexion.

vecteur vitesse d'une particule sont recherchées. Après utilisation de la transformée de Laplace, les équations d'un fluide visqueux incompressible s'écrivent

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i,i} = 0 & \text{(Equation de continuité)} \\ \rho_f (s\tilde{v}_i - v_i(0) + \tilde{v}_j \tilde{v}_{i,j}) = -\frac{1}{\rho} \tilde{p}_{,i} + \nu \Delta \tilde{v}_i & \text{(Equation d'Euler)} \end{cases} \quad (4.14)$$

L'incompressibilité est traduite par l'équation de continuité. La symétrie du problème avec l'hypothèse d'écoulement établi (le système est invariable par translation du repère le long de la paroi) induisent une dépendance des différentes quantités en la variable  $x$  uniquement,  $\tilde{v}(x, y, z, s) = \tilde{v}(x, s)$  notamment. Par ailleurs, les mouvements dans le fluide sont entièrement liés au couplage avec la structure, par conséquent  $v_i(0) = 0$ . Les conditions aux limites d'adhésion s'énoncent ainsi :

$$\begin{cases} \tilde{v}_1(0, s) = \tilde{v}_2(0, s) = 0 \\ \tilde{v}_3(0, s) = \tilde{u}(s) \end{cases} \quad (4.15)$$

On déduit de la symétrie du problème et de l'incompressibilité que  $\tilde{v}_{1,1} = 0$ . En vertu des conditions aux limites,  $\tilde{v}_1 = 0$ . De ce fait, le terme non linéaire s'annule  $\tilde{v}_j \tilde{v}_{i,j} = \tilde{v}_1 \tilde{v}_{i,1} = 0$ . Séparons les composantes vectorielles de l'équation d'Euler. Il vient

$$\begin{cases} \tilde{p}_{,1}(x, s) = 0 \\ s \tilde{v}_3(x, s) = \nu \tilde{v}_{3,11}(x, s) \end{cases} \quad (4.16)$$

On déduit de la première ligne que la pression est constante. La deuxième équation est une équation du même type que l'équation de la chaleur. La séparation de la solution en facteurs spatial et fréquentiel conduit à une représentation fréquentielle homogène en  $\tilde{u}(s)$  (facteur homogène déterminé par la condition aux limites d'adhésion). Le facteur spatial est pris en

$e^{ikx}$  et conduit à l'équation homogène :

$$(k^2\nu + s) \tilde{v}_3(x, s) = 0 \quad (4.17)$$

Avec  $s = i\omega$ , la solution homogène finale s'écrit

$$\begin{cases} k = i\sqrt{\frac{s}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1 + i) \\ \tilde{v}_3(x, s) = e^{-\sqrt{\frac{s}{\nu}} x} \tilde{u}(s) = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1+i) x} \tilde{u}(s) \end{cases} \quad (4.18)$$

Elle se traduit par l'existence d'une onde transversale qui est très vite amortie dans le fluide. La profondeur de pénétration de l'onde est définie par  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ . Une valeur de  $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}}$  est utilisée pour les écoulements le long d'un cylindre (Valette et Cuesta [120]). Dans l'ouvrage de Cousteix [24], la solution de Blasius modélisant un écoulement sur un demi-plan (plutôt qu'un plan infini), sans inertie, de vitesse  $u_e$ , prenant en compte la non-linéarité des équations, donne une estimation de la couche limite dont l'épaisseur est variable suivant  $z$  :  $\delta = 5\frac{z}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} = 5\sqrt{\frac{\nu z}{u_e}}$ . Les différents résultats sont homogènes en ce qui concerne la dépendance à la vitesse d'écoulement et à la fréquence, mais différent dans le coefficient de proportionnalité et la dépendance à  $z$ . Une illustration de l'épaisseur de couche limite dans le cas de la solution de Blasius et dans le cas du modèle de Landau et Lifschitz que nous reprenons est présentée dans la figure 4.12. Une contrainte tangentielle de cisaillement

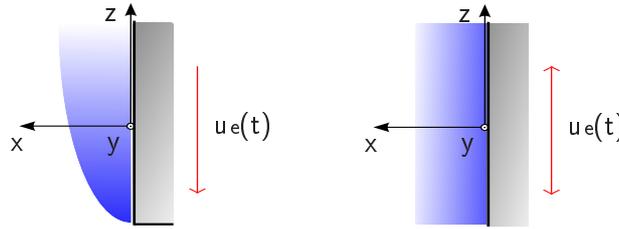


FIG. 4.12 – Couche limite obtenue avec la solution de Blasius (demi-plan, écoulement stationnaire non périodique) et avec le modèle de Landau et Lifschitz (plan infini, écoulement périodique).

$\tilde{\sigma}_{31}^f(x, s)$  apparaît dans le fluide :

$$\tilde{\sigma}_{31}^f(x, s) = \eta \tilde{v}_{3,1}(x, s) = -\sqrt{\frac{s}{\nu}} e^{-\sqrt{\frac{s}{\nu}} x} \tilde{u}(s) \quad (4.19)$$

Il en résulte une contrainte de cisaillement transverse  $\sigma_{31}(z, s)$  sur toute la ligne interfaciale  $\Gamma$  dans le solide, la normale à la paroi étant orientée suivant  $x$  et la force suivant  $z$  :

$$\tilde{\sigma}_{31}(z, s) = \tilde{\sigma}_{31}(s) = -\sqrt{\frac{s}{\nu}} \tilde{u}(s) \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.20)$$

Dans le cas de l'oscillation d'un demi-plan, il existe une force de frottement supplémentaire liée au bord, équivalente à un accroissement d'aire balayée par le demi-plan de  $\delta/2$  (Landau et Lifschitz [73]). En guise de correction également, Valette et Cuesta, reprenant le modèle de Stokes dans [120], ajoutent à la solution trouvée un terme supplémentaire basé sur le

fait que la couche limite  $\delta$  est de taille comparable au rayon du cylindre étudié (il s'agirait dans notre cas de l'épaisseur du bord). Cette modification est lourde de conséquences car elle introduit une résistance non nulle en basse fréquence, qui semble être la cause principale d'amortissement pour les cordes de guitare dans ce registre. L'approximation de Landau et Lifschitz que nous utilisons, du reste, ne conduit pas à un tel résultat.

### 4.3.2.3 Résolution numérique

Deux méthodes de résolution ont été testées. La première a consisté à intégrer la contrainte visqueuse, formulée en termes de déplacement dans l'équation (4.20), dans la formulation éléments finis. La deuxième a consisté à considérer l'énergie de la force visqueuse comme un terme de perturbation : une première étape permet d'établir fréquences et modes propres dans le vide. L'énergie visqueuse est alors calculée à partir de ces résultats, puis incluse comme un terme supplémentaire dans le problème aux valeurs propres écrit sous forme énergétique.

Les résultats numériques de modélisation de l'amortissement visqueux sur les bords d'une plaque libre correspondant à la plaque utilisée dans le chapitre 1 au § 1.4.2 sont présentés dans la figure 4.13. Les deux méthodes de résolution donnent des résultats numériques identiques, la viscosité exerçant une influence très mesurée sur la vibration de la plaque. On note en outre que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence vers les fréquences de résonance du système vibratoire avec frottement visqueux est très faible : une seule itération suffit pour chacun des modes. La variation fréquentielle des modes, qui sert de critère d'arrêt pour la méthode itérative, n'a d'ailleurs pas été représentée, car elle est tout à fait négligeable. De même, l'amortissement visqueux est de plusieurs ordres inférieur à l'amortissement total mesuré (de l'ordre de  $10^{-7}$ , comparé à l'unité) : on peut donc considérer que pour la structure étudiée, le frottement aérien visqueux est tout à fait négligeable.

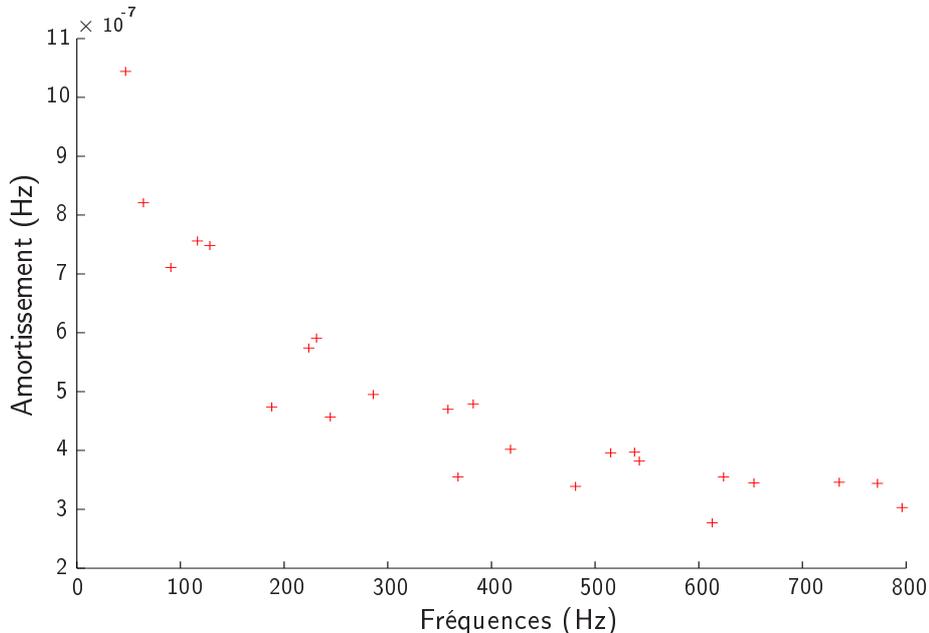


FIG. 4.13 – Amortissement visqueux calculé sur les bords d'une plaque libre de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

### 4.3.3 Amortissement par rayonnement acoustique

#### 4.3.3.1 Introduction

Induit par les mouvements structurels normaux à la surface solide, le couplage vibroacoustique est responsable d'un échange d'énergie bilatéral entre les milieux solide et fluide. Il est déduit des conditions aux limites de continuité de vitesse normale, ainsi que des équations de l'acoustique, lesquelles sont basées sur la compressibilité de l'air et l'hypothèse de petites fluctuations pour la linéarisation.

Pour traiter ce couplage, une méthode de perturbation basée sur l'approximation de fluide léger est employée. Permettant d'estimer la puissance sonore rayonnée, elle permet également de connaître l'influence de l'air sur la vibration structurelle (modification de la pulsation par masse ajoutée, modification des déformées modales - vecteurs propres complexes -). La normale de la plaque est orientée suivant la direction  $z$ . La surface supérieure est notée  $S_+$ , la face inférieure  $S_-$ .

#### 4.3.3.2 Les équations acoustiques

Les équations acoustiques temporelles comprennent l'équation de la propagation des ondes, des équations de couplage, des conditions aux limites et des conditions initiales. La transformée de Laplace de l'équation des ondes s'écrit

$$\Delta \tilde{p}(s) - \frac{s^2}{c^2} \tilde{p}(s) = \tilde{f}(s) - sp_0 - \dot{p}_0 \quad (\Omega_a) \quad (4.21)$$

où  $p_0$  et  $\dot{p}_0$  sont les conditions initiales et  $\tilde{f}(s)$  un terme d'excitation. La condition aux limites de couplage entre la plaque et le fluide, exprimant l'égalité du gradient de pression à l'accélération normale de la plaque, s'écrit :

$$\tilde{p}_{,3}(s) = -\rho_f s^2 \tilde{u}(s) + su_0 + \dot{u}_0 \quad (\Sigma_{z+} \cup \Sigma_{z-}) \quad (4.22)$$

#### 4.3.3.3 La représentation intégrale de la pression

La démarche permettant d'obtenir une représentation intégrale de la pression, bien adaptée aux espaces infinis ou semi-infinis, est constituée de deux étapes. La première consiste à écrire une formule de réciprocité pour un opérateur donné, en temporel ou en fréquentiel. La deuxième consiste à particulariser la solution du problème adjoint, telle qu'elle vérifie certaines conditions aux limites et l'équation avec excitation ponctuelle.

L'opérateur  $A = \Delta - \frac{s^2}{c^2}$  est l'opérateur auto-adjoint de l'équation de Helmholtz. La formule de réciprocité de Green est obtenue après multiplication de l'équation par un champ adjoint et intégration par parties sur l'ensemble du domaine :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \tilde{p}(M, s) \Delta \tilde{G}(M, M_0, s) - \tilde{G}(M, M_0, s) \Delta \tilde{p}(M, s) d\Omega \\ &= \int_{\Sigma} \tilde{G}(M, M_0, s) \partial_n \tilde{p}(M, s) - \partial_n \tilde{G}(M, M_0, s) \tilde{p}(M, s) dS \end{aligned} \quad (4.23)$$

Le signe du membre de droite dépend du sens de la normale au domaine. La normale est ici orientée vers l'intérieur du domaine. La formule de représentation intégrale de Green est obtenue en particulierisant le champ adjoint, tel qu'il vérifie la solution élémentaire du problème avec source unitaire ponctuelle en  $M$

$$\left(\Delta_Q - \frac{s^2}{c^2}\right) G(Q, M) = \delta_M(Q) \quad (4.24)$$

$G(Q, M)$  est le noyau de Green, et est défini de façon unique dès lors que les conditions aux limites ont été fixées, et vaut

$$G(Q, M, s) = -\frac{e^{ik(s)|QM|}}{4\pi|QM|} \quad (4.25)$$

où  $k(s) = -is/c$ . Inséré dans la formule de réciprocité, le noyau de Green conduit à la représentation de Green de la pression : l'opérateur de l'équation de Helmholtz a été inversé.

$$\begin{aligned} \tilde{p}(M, s) &= \int_{\Omega} G(Q, M, s) \left( \tilde{f}(Q, s) - sp_0(Q) - \dot{p}_0(Q) \right) d\Sigma(Q) \\ &+ \int_{\Sigma} \partial_{n(Q)} \tilde{p}(Q, s) G(Q, M, s) - \tilde{p}(Q, s) \partial_{n(Q)} G(Q, M, s) d\Sigma(Q) \end{aligned} \quad (4.26)$$

La solution est composée de deux champs. Le premier correspond au champ en milieu infini créé par la source  $\tilde{f}(Q, s)$  et les conditions initiales non homogènes  $-sp_0(Q) - \dot{p}_0(Q)$  en l'absence d'obstacle. Le deuxième correspond au champ créé par la réflexion, la diffraction et le rayonnement de cet obstacle ; il est constitué d'une distribution de sources de pression (sources monopolaires) et d'une distribution de sources de vitesse (sources dipolaires).

#### 4.3.3.4 Cas d'une plaque plane non bafflée

L'étude acoustique concerne les structures relativement minces (poutre, plaque), bafflées ou non bafflées, effectuant des mouvements vibratoires variés (flexion, extension-compression, torsion). L'originalité du calcul réside dans la prise en compte du pincement de la structure, et dans le fait que les bords de la structure relativement mince ne sont pas nécessairement parallèles. La géométrie de la configuration est présentée dans la figure 4.14. Il est à noter que des calculs similaires, concernant des structures minces non bafflées, sont présentés dans les articles de Laulagnet [76], Côté, Atalla et Guyader [27], et Atalla, Nicolas et Gauthier [5].

Le bord du domaine est constitué d'une frontière  $S_{inf}$  englobant la structure. La représentation de Green de la pression permet de la placer à une distance arbitrairement grande, de sorte que les conditions de Sommerfeld relatives au fait que les ondes se propagent à l'infini sans être réfléchies peuvent être appliquées. Ces conditions sont automatiquement satisfaites par les solutions élémentaires  $G$  et  $\partial_n G$  en milieu infini. Nous formulons en outre l'hypothèse que les bords latéraux de la structure n'ont pas d'influence sur le rayonnement. Par conséquent, seules les faces supérieure  $S+$  et inférieure  $S-$  vont contribuer au champ acoustique. Dans le cadre de la recherche de solutions propres, la représentation intégrale de la pression en un point  $M_0$  du volume aérien s'écrit :

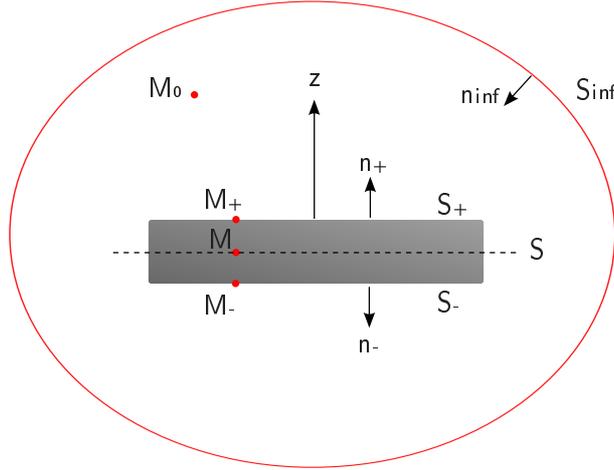


FIG. 4.14 – Configuration acoustique.

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(M_0, s) &= \int_{S_+} \partial_{n(M_+)} \tilde{p}_+(M_+, s) G(M_0, M_+, s) dS(M_+) \\
&- \int_{S_+} \tilde{p}_+(M_+, s) \partial_{n(M_+)} G(M_0, M_+, s) dS(M_+) \\
&+ \int_{S_-} \partial_{n(M_-)} \tilde{p}_-(M_-, s) G(M_0, M_-, s) dS(M_-) \\
&- \int_{S_-} \tilde{p}_-(M_-, s) \partial_{n(M_-)} G(M_0, M_-, s) dS(M_-)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Une distinction est faite entre les points  $M$ ,  $M_+$ ,  $M_-$  situés à la même position  $(x, y)$  mais à des hauteurs différentes : sur le plan neutre ( $z_M = 0$ ), sur la surface  $S_+$  ( $z_{M_+} = +h/2$ ) et sur la surface  $S_-$  ( $z_{M_-} = -h/2$ ) respectivement. La structure étant plane, les normales en  $M_+$  et  $M_-$  intérieures au volume fluide sont opposées,  $n(M_+) = -n(M_-) = z$ . L'hypothèse de structure relativement mince consiste à considérer que les solutions élémentaires  $G$  et  $\partial_n G$  sont telles que

$$\begin{aligned}
G(M_0, M_+, s) &\approx G(M_0, M_-, s) \approx G(M_0, M, s) \\
\partial_{z(M_+)} G(M_0, M_+, s) &\approx \partial_{z(M_-)} G(M_0, M_-, s) \approx \partial_{z(M)} G(M_0, M, s)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

L'intégration surfacique est effectuée sur la surface médiane  $S$ , sur laquelle les points  $M_+$  et  $M_-$  sont repérés par le point  $M$ . La pression en  $M_0$  vaut

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(M_0, s) &= \int_S (\partial_z \tilde{p}_-(M, s) - \partial_z \tilde{p}_+(M, s)) G(M_0, M, s) dS(M) \\
&+ \int_S (\tilde{p}_-(M, s) - \tilde{p}_+(M, s)) \partial_{z(M)} G(M_0, M, s) dS(M)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

En définissant le potentiel de double couche  $\tilde{\mu}(M, s) = \tilde{p}_+(M, s) - \tilde{p}_-(M, s)$ , il vient

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(M_0, s) &= \int_S (\partial_z \tilde{p}_-(M, s) - \partial_z \tilde{p}_+(M, s)) G(M_0, M, s) dS(M) \\
&- \int_S \tilde{\mu}(M, s) \partial_{z(M)} G(M_0, M, s) dS(M)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Cette représentation est appelée représentation indirecte de la pression (Filippi et al [37], Bonnet [12]) par potentiels de simple couche (premier terme) et double couche (deuxième terme). Le potentiel de simple couche est caractéristique d'un rayonnement de type monopolaire qui est souvent négligé dans le cas des plaques planes non bafflées (Laulagnet [76], Côté et Atalla [5]). Cette approximation est valable pour les mouvements de flexion sans

pincement, les faces  $S_+$  et  $S_-$  restant parallèles. Le potentiel de double couche  $\tilde{\mu}(M, s)$ , caractéristique d'un rayonnement de type dipolaire, est égal au saut de pression pariétale en  $M$ .

La représentation intégrale indirecte (4.30) fait apparaître une inconnue  $\tilde{\mu}(M, s)$  déterminée en exploitant la condition aux limites de couplage sur les faces de la plaque. Pour ce faire, la dérivée normale de la pression sur  $S$  est calculée au sens des distributions, en plaçant  $M_0$  sur une face extérieure de la plaque (face supérieure par exemple).

$$\begin{aligned} \partial_{z(M_0)} \tilde{p}(M_0, s) &= \int_S (\partial_z \tilde{p}_-(M, s) - \partial_z \tilde{p}_+(M, s)) \partial_{z(M_0)} G(M_0, M, s) dS(M) \\ &- P.F. \int_S \tilde{\mu}(M, s) \partial_{z(M_0)} \partial_{z(M)} G(M_0, M, s) dS(M) \end{aligned} \quad (4.31)$$

La deuxième intégrale est divergente, elle est à prendre au sens de la partie finie de Hadamard (*P.F.*). La première intégrale, faiblement singulière, est prise au sens des valeurs principales de Cauchy ([37]). Son calcul, pour le cas spécifique d'une structure plane finie, est présenté dans l'**annexe A**, dans laquelle la singularité est levée au cours du passage à la limite  $M_0 \rightarrow S$ . En utilisant les conditions aux limites de couplage vibroacoustique,

$$\begin{cases} \partial_z \tilde{p}_+(M, s) = -\rho_f s^2 u_+(M, s) \\ \partial_z \tilde{p}_-(M, s) = -\rho_f s^2 u_-(M, s) \end{cases} \quad (4.32)$$

le calcul donne

$$\begin{aligned} -\rho_f s^2 u_+(M_0, s) &= \rho_f s^2 (u_-(M_0, s) - u_+(M_0, s)) / 2 \\ &- P.F. \int_S \tilde{\mu}(M, s) \partial_{z(M_0)} \partial_{z(M)} G(M_0, M, s) dS(M) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\rho_f s^2 \frac{u_-(M_0, s) + u_+(M_0, s)}{2} = P.F. \int_S \tilde{\mu}(M, s) \partial_z^2 G(M_0, M, s) dS(M) \quad (4.34)$$

L'équation est une équation de Fredholm de première espèce que nous résolvons par une méthode de collocation à un point présentée dans l'**annexe B**. Les éléments de frontière développés utilisent un domaine correspondant à la face extérieure des éléments finis solides ; le même maillage est utilisé. On retrouve dans l'équation (4.34) les résultats établis (Laulagnet [76]) si les déplacements sur la face supérieure et inférieure sont égaux. Le résultat est identique en faisant tendre  $M_0$  vers la face inférieure  $S_-$  plutôt que vers la face supérieure  $S_+$  dans le calcul présent. Dans le cas particulier de mouvements symétriques par rapport au plan neutre (compression-extension d'une poutre, modes de Lamb symétriques), pour lesquels  $u_-(M, s) = -u_+(M, s)$ , la densité de double couche est nulle : le rayonnement est alors purement monopolaire. Dans le cas où le pincement de la structure n'est pas nul, une contribution monopolaire s'ajoute au terme dipolaire à la valeur réduite. C'est le cas de structures vibrant dans des modes qui ne sont pas des modes de flexion (modes de compression par exemple), et de structures sollicitées en flexion dont l'épaisseur n'est pas très faible par rapport à la plus grande dimension ; ceci explique l'emploi en début de paragraphe de la dénomination de "structure assez mince".

#### 4.3.3.5 Cas d'une plaque plane bafflée

L'approximation de plaque bafflée concerne le rayonnement ou la réflexion d'ondes sur une plaque lorsque celle-ci est prolongée dans son plan par un baffle infini. L'approximation, dont

découle la formule de Rayleigh (Fahy [35]), est valable en toute rigueur en espace semi-infini. Elle est basée sur une hypothèse de symétrie autour du plan de la plaque. La vérification de la symétrie est réalisée en introduisant des sources images dans l'espace semi-infini non étudié et implicitement un déplacement vibratoire  $u_-$  tel que  $u_-(M, s) = -u_+(M, s)$ . Le rayonnement est alors purement monopolaire : il est inutile de résoudre l'équation de Fredholm (4.34).

#### 4.3.3.6 Le problème vibratoire associé

Nous reprenons le formalisme du chapitre de vibration amortie. Les équations du couplage expriment la continuité de la contrainte normale. En utilisant la transformation de Laplace, il vient

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{33}(M, s) = \tilde{p}(M, s) & \text{sur } S_+ \\ \tilde{\sigma}_{33}(M, s) = -\tilde{p}(M, s) & \text{sur } S_- \end{cases} \quad (4.35)$$

Cette équation, incluse dans la formulation faible (2.26), fait apparaître un opérateur  $\mathcal{P}(\tilde{w}, \tilde{p}(s))$  comparable à l'opérateur  $\mathcal{H}(\tilde{w}, \tilde{h}(s))$  associé aux conditions aux limites de contraintes. En notant  $w$  la composante du déplacement dans la direction normale  $z$  à la structure, il vient

$$\mathcal{P}(\tilde{w}, \tilde{p}(s)) = \int_{S_+} \tilde{w}(M_0) \tilde{p}(M_0, s) dS - \int_{S_-} \tilde{w}(M_0) \tilde{p}(M_0, s) dS \quad (4.36)$$

Notons que la quantité  $\tilde{w}(M_0)$  contient encore une large part d'indétermination que nous ne pouvons pas lever pour l'instant. Plus tard, dans le cadre du calcul de puissance acoustique, nous lui confèrerons la forme de la vitesse conjuguée au point  $M_0$ . D'après le calcul de l'**annexe A** permettant de simplifier la représentation intégrale indirecte (4.30) lorsque  $M_0$  appartient à la face supérieure,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(M_0, s) &= -\tilde{\mu}(M_0, s) / 2 \\ &+ \rho_f s^2 \int_S G(M_0, M, s) (\tilde{w}_+(M, s) - \tilde{w}_-(M, s)) dS(M) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Le signe devant  $\mu$  devient négatif si  $M_0$  est situé du côté des  $z$  négatifs. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tilde{w}, \tilde{p}(s)) &= \int_S -(\tilde{w}_+(M_0, s) + \tilde{w}_-(M_0, s)) \tilde{\mu}(M_0, s) / 2 \\ &+ \rho_f s^2 \int_S \int_S (\tilde{w}_+(M_0, s) - \tilde{w}_-(M_0, s)) \\ &\quad \times G(M_0, M, s) (\tilde{w}_+(M, s) - \tilde{w}_-(M, s)) dS(M) dS(M_0) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Les termes de rayonnement dipolaire et monopolaire participent au couplage vibroacoustique. Ce dernier, habituellement, est négligé pour les structures fines. Quelques explications sur l'intégration du terme monopolaire sont données dans l'**annexe C**. La difficulté d'une telle intégration réside dans le caractère singulier de la double intégrale de surface et dans la nécessité d'avoir un élément de frontière déformable (non nécessairement rectangulaire) pour tolérer une grande variété de configurations géométriques.

Dans le cas de l'approximation bafflée  $\tilde{w}_+ = -\tilde{w}_-$ . L'équation (4.38) s'écrit alors

$$\mathcal{P}(\tilde{w}, \tilde{p}(s)) = 4\rho_f s^2 \int_S \int_S \tilde{w}_+(M_0, s) G(M_0, M, s) \tilde{w}_+(M, s) dS(M) dS(M_0) \quad (4.39)$$

On retrouve l'expression énergétique associée à un saut de pression calculé à partir de l'intégrale de Rayleigh (Hamdi [80], chapitre 9). Dans le cas général, le problème aux valeurs propres matriciel prend la forme suivante :

$$\tilde{w}^T(s) [s^2 M + sK^V(s) + K^E] \tilde{u}(s) - P^h(\tilde{w}, \tilde{u}, s) = \tilde{w}^T(F(s) + sI_0 + V_0) \quad (4.40)$$

où  $P^h(\tilde{w}, \tilde{u}, s)$  est l'approximation discrète de  $\mathcal{P}(\tilde{w}, \tilde{p}(s))$ . Le terme de pression  $P^h(\tilde{w}, \tilde{u}, s)$  n'est pas un second membre, mais un terme de couplage : la pression acoustique peut donc exciter la structure, mais la structure peut également transmettre une partie de l'énergie vibratoire à l'air. Le couplage altère les solutions propres de la plaque (fréquences de résonance, amortissement, déformées modales). Il est à noter que le problème pourrait être traité sous forme matricielle, en incluant la partie acoustique associée à  $P^h(\tilde{w}, \tilde{u}, s)$  dans la partie vibratoire (du moins les termes de champ monopolaire dépendant explicitement et directement du déplacement). Cela conduirait néanmoins à des matrices quasiment remplies, dans la mesure où l'ensemble des points appartenant à la frontière sont liés et interagissent dans le processus de rayonnement, conférant une connectivité dense aux matrices ; pour des structures élancées, ces points représentent en effet la grande majorité des degrés de liberté. Alternativement, on peut privilégier une formulation énergétique et conserver séparés les termes de vibration dans le vide et de couplage acoustique : cette forme va de pair avec la résolution par méthode de perturbation présentée au § 4.3.3.8 ; on peut également construire un terme de couplage fluide structure sous forme vectorielle et l'utiliser comme second membre : cette démarche s'associe naturellement à la méthode itérative que nous présentons à présent.

#### 4.3.3.7 Réponse vibroacoustique par méthode itérative

La méthode itérative requiert la construction d'un vecteur de chargement acoustique  $\mathcal{P}_{vec}^h(\tilde{u}, s)$  calculé à partir de l'équation (4.37). Le problème de réponse fréquentielle s'écrit

$$[s^2 M + sK^V(s) + K^E] \tilde{u}(s) = F(s) + sI_0 + V_0 - \mathcal{P}_{vec}^h(\tilde{u}, s) \quad (4.41)$$

En fixant la fréquence d'étude associée à  $s$ , on peut envisager l'utilisation d'une méthode itérative associée à la méthode de résolution directe. La première étape consiste à calculer le champ de déplacement dans le vide en résolvant

$$\tilde{u}_1(s) = [s^2 M + sK^V(s) + K^E]^{-1} \{F(s) + sI_0 + V_0\} \quad (4.42)$$

L'étape  $j + 1$  utilise les déplacements calculés à l'étape  $j$  pour contruire le vecteur de chargement acoustique  $\mathcal{P}_{vec}^h(\tilde{u}_j, s)$ .

$$\tilde{u}_{j+1}(s) = [s^2 M + sK^V(s) + K^E]^{-1} \{F(s) + sI_0 + V_0 - \mathcal{P}_{vec}^h(\tilde{u}_j, s)\} \quad (4.43)$$

A la convergence, à fréquence fixée, le vecteur contient le déplacement vibratoire du système vibroacoustique amorti. La méthode est efficace si l'inversion matricielle et le vecteur de chargement acoustique sont rapides à calculer, et si la convergence est rapide. La méthode semble séduisante ; notre algorithme s'est révélé toutefois très insatisfaisant (résultats erronés, caractéristiques de convergence mauvaises).

#### 4.3.3.8 Méthode de perturbation

La méthode de perturbation présente l'avantage de conserver séparées les différentes composantes modales participant au rayonnement. Il s'agit de la méthode que nous retiendrons. Elle consiste à introduire un paramètre  $\epsilon$  de pondération du couplage, dont la valeur varie entre  $\epsilon = 0$  pour le cas découplé et  $\epsilon = 1$  pour le cas couplé. Il eût été possible de le définir comme le ratio de la densité du fluide par celle de la structure (méthode basée sur l'approximation de fluide léger) et d'obtenir des développements identiques à ceux présentés ici, mais en altérant les matrices précédemment définies. Le problème aux valeurs de résonance tiré de l'équation (4.40) s'écrit :

$$\tilde{w}^T [s_k(\epsilon)^2 M + s_k(\epsilon) K^V(s_k(\epsilon)) + K^E] \tilde{u}_k(\epsilon) = \epsilon P^h(\tilde{w}, \tilde{u}_k(\epsilon), s_k(\epsilon)) \quad (4.44)$$

Le déplacement  $\tilde{w}$  est indéterminé pour l'instant. L'opérateur discret  $P^h$  est construit avec l'hypothèse de plaque bafflée (équation (4.39)) ou l'hypothèse de plaque non bafflée (équation (4.38)).

**Fréquences de résonance** Dérivons l'équation (4.44) par rapport à  $\epsilon$ . Il vient

$$\begin{aligned} & \tilde{w}^T [s_k(\epsilon)^2 M + s_k(\epsilon) K^V(s_k(\epsilon)) + K^E] \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\tilde{u}_k(\epsilon)) \\ & + \tilde{w}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(\epsilon)^2) M + \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(\epsilon) K^V(s_k(\epsilon))) \right] \tilde{u}_k(\epsilon) \\ = & P^h(\tilde{w}, \tilde{u}_k(\epsilon), s_k(\epsilon)) + \epsilon \frac{\partial}{\partial \epsilon} (P^h(\tilde{w}, \tilde{u}_k(\epsilon), s_k(\epsilon))) \end{aligned} \quad (4.45)$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro, et en notant que  $(s_k(0), \tilde{u}_k(0))$  est le couple propre vérifiant l'équation du problème aux valeurs de résonance dans le vide, on obtient

$$\tilde{w}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(0)^2) M + \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(0) K^V(s_k(0))) \right] \tilde{u}_k(0) = P^h(\tilde{w}, \tilde{u}_k(0), s_k(0)) \quad (4.46)$$

L'égalité est vérifiée quel que soit  $\tilde{w}$ , mais suivant le choix, peut aboutir sur une forme indéterminée. Nous avons opté pour  $\tilde{w} = \bar{\tilde{u}}_k(0)$  par simplicité et par soucis d'homogénéité avec le calcul de puissance acoustique (§ 4.3.3.9). Après normalisation des vecteurs par la masse, il vient

$$\frac{\partial s_k(0)}{\partial \epsilon} = P^h(\bar{\tilde{u}}_k(0), \tilde{u}_k(0), s_k(0)) / \left[ 2s_k(0) + \bar{\tilde{u}}_k(0) \frac{\partial}{\partial s_k(0)} (s_k(0) K^V(s_k(0))) \right] \tilde{u}_k(0) \quad (4.47)$$

La pulsation perturbée du système couplé vaut  $s_k(\epsilon) = s_k(0) + \epsilon \frac{\partial s_k(0)}{\partial \epsilon}$ .

Dans le cas où  $\epsilon = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k(1) &= \mathbf{s}_k(0) + P^h(\bar{\mathbf{u}}_k(0), \tilde{\mathbf{u}}_k(0), \mathbf{s}_k(0)) \\ &/ \left[ 2\mathbf{s}_k(0) + \bar{\mathbf{u}}_k(0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_k(0)} (\mathbf{s}_k(0) \mathbf{K}^V(\mathbf{s}_k(0))) \tilde{\mathbf{u}}_k(0) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

Cette solution donne une approximation de la valeur propre des modes de résonance de la structure couplée au fluide et montre l'influence du polymère sur le couplage vibroacoustique. Le couplage fluide structure altère les fréquences vibratoires en les décalant (premier terme du dénominateur). Le second terme du dénominateur apporte une correction viscoélastique liée à ce décalage. Si les modes propres définis en construisant la matrice de rigidité à une pulsation donnée associée à  $s$  sont recherchés, alors la solution, dépendante de  $s$ , est donnée par l'expression

$$s_k(1, s) = s_k(0, s) + P^h(\bar{\mathbf{u}}_k(0), \tilde{\mathbf{u}}_k(0), \mathbf{s}_k(0, s)) / 2s_k(0, s) \quad (4.49)$$

La correction viscoélastique présente dans l'expression de la fréquence de résonance (4.48) n'apparaît naturellement plus.

**Vecteurs de résonance** Examinons à présent l'influence du couplage sur les vecteurs de résonance. Reprenons l'équation (4.45) en fixant  $\epsilon = 0$ .

$$\begin{aligned} &\tilde{w}^T [s_k(0)^2 M + s_k(0) K^V(s_k(0)) + K^E] \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\tilde{\mathbf{u}}_k(0)) \\ &= P^h(\tilde{w}, \tilde{\mathbf{u}}_k(0), \mathbf{s}_k(0)) - \tilde{w}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(0)^2) M + \frac{\partial}{\partial \epsilon} (s_k(0) K^V(s_k(0))) \right] \tilde{\mathbf{u}}_k(0) \end{aligned} \quad (4.50)$$

L'opérateur apparaissant dans le premier membre définit un espace de dimension  $N-1$  auquel le vecteur propre  $\tilde{\mathbf{u}}_k(0)$  rendant cet opérateur singulier n'appartient pas. Une décomposition dans la base de cet opérateur peut être envisagée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} (\tilde{\mathbf{u}}_k(0)) = \sum_{i=1, i \neq k}^N \alpha_i \tilde{\mathbf{u}}_i(0) \quad (4.51)$$

Cette décomposition est similaire à celle de l'équation (2.48). Par conséquent :

$$\begin{aligned} &\tilde{w}^T [s_k(0)^2 M + s_k(0) K^V(s_k(0)) + K^E] \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\tilde{\mathbf{u}}_k(0)) \\ &= \tilde{w}^T \sum_{i=1, i \neq k}^N \alpha_i [(s_k(0)^2 - s_i(0)^2) M + s_k(0) K^V(s_k(0)) - s_i(0) K^V(s_i(0))] \tilde{\mathbf{u}}_i(0) \end{aligned} \quad (4.52)$$

En choisissant  $\tilde{w} = \bar{\mathbf{u}}_i(0)$ , les propriétés de biorthonormalité permettent de déduire les coefficients  $\alpha_i$  :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= P^h(\bar{\mathbf{u}}_i(0), \tilde{\mathbf{u}}_k(0), \mathbf{s}_k(0)) \\ &/ (s_k(0)^2 - s_i(0)^2 + \tilde{\mathbf{u}}_i^H(0) [s_k(0) K^V(s_k(0)) - s_i(0) K^V(s_i(0))] \tilde{\mathbf{u}}_i(0)) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le vecteur de résonance du système couplé est donné pour une valeur  $\epsilon = 1$

$$\tilde{u}_k(1) = \tilde{u}_k(0) + \sum_{i=1, i \neq k}^N \alpha_i \tilde{u}_i(0) \quad (4.54)$$

Dans le cas où les modes propres définis à la valeur  $s$  sont recherchés, les coefficients dépendent également de  $s$ . On a

$$\alpha_i(s) = P^h(\tilde{u}_i(0, s), \tilde{u}_k(0, s), s_k(0, s)) / (s_k(0, s)^2 - s_i(0, s)^2) \quad (4.55)$$

Les termes de couplage intermodal apparaissant dans l'expression des vecteurs de résonance sont calculés par l'algorithme développé. Plusieurs essais numériques nous ont montré que leur contribution était tout à fait négligeable du fait de la nature faible du couplage fluide-structure<sup>12</sup>. Leur calcul étant très coûteux en terme de temps de calcul ils ont été systématiquement omis.

#### 4.3.3.9 Puissance acoustique

Pour effectuer un travail de réduction de bruit, il importe d'avoir à disposition un indicateur susceptible de quantifier le bruit rayonné par une structure. En l'état de nos développements, la puissance semble être l'indicateur le plus approprié : il est à la fois simple à employer et a priori relativement pertinent d'un point perceptif. La puissance acoustique est en outre largement utilisée dans les normes européennes de mesure du bruit<sup>13</sup>. La puissance acoustique instantanée  $\mathcal{P}_a(t)$  se calcule à partir de l'expression suivante :

$$\mathcal{P}_a(t) = \int_S p(t, M) v(t, M) dM \quad (4.56)$$

où  $S$  est une surface entourant la source,  $p(t, M)$  la pression acoustique au point  $M$  et  $v(t, M)$  la vitesse acoustique au point  $M$ . On a vu au chapitre 2 § 2.5.2 qu'il est aisé de calculer la vitesse acoustique en fonction du temps (la vitesse acoustique s'identifiant à la vitesse vibratoire sur la frontière  $S$ ). L'utilisation de l'équation d'Helmholtz, en revanche, ne permet pas de définir un lien simple entre les descriptions temporelle et fréquentielle de la pression. Il existe deux alternatives pour éviter de calculer les quantités temporelles. La première nécessite d'intégrer l'équation (4.56) sur un domaine temporel infini. On définit alors une énergie totale  $E_T$  par le biais de la relation de Parseval, énergie qui est indépendante de toute description :

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}}(\omega, M) dM d\omega \quad (4.57)$$

La relation de Parseval permet de relier vitesse et pression à leur transformée intégrale respective.  $\tilde{p}(\omega, M)$  et  $\overline{\tilde{v}}(\omega, M)$  sont des fonctions à partie réelle paire et à partie imaginaire impaire de la pulsation, car transformées de Fourier de fonctions réelles. Il en va de même pour le produit de ces deux quantités. Par conséquent, l'intervalle d'intégration pour le calcul de  $E_T$  étant symétrique,  $E_T$  est une quantité réelle. La deuxième alternative fait l'hypothèse forte que les variables du système ont une dépendance temporelle périodique. La puissance est alors calculée comme la moyenne de la puissance instantanée sur une période :

<sup>12</sup>Ceci est en partie dû à la densité faible de l'air par rapport à celle de l'aluminium.

<sup>13</sup>Séries de normes **EN ISO 3740** et **EN ISO 9614**.

$$\mathcal{P}^a = \frac{1}{T} \int_0^T \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}(\omega, M)} dM d\omega \quad (4.58)$$

On a alternativement

$$\mathcal{P}^a = \frac{1}{T} \int_0^T \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt = \int_0^{\infty} \int_S \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}(\omega, M)}] dM d\omega \quad (4.59)$$

L'**annexe D** présente l'ensemble des détails du calcul permettant d'établir cette relation. Des calculs d'intensité similaires sont exposés dans la littérature (Lesueur [80], Pierce [103]). Outre l'intégration surfacique, la différence réside dans la prise en compte de variables dont l'expression fréquentielle est polychromatique.

La puissance acoustique du plan complexe se déduit simplement de l'opérateur discret  $\mathcal{P}^h(\tilde{w}, \tilde{u})$  construit à partir de l'hypothèse de plaque bafflée (équation (4.39)) ou de l'hypothèse de plaque non bafflée (équation (4.38)). Le déplacement  $\tilde{u}$  est le déplacement vibratoire calculé à partir de la série de modes de résonance (2.72) (voir § 2) et des expressions des modes et fréquences de résonance (équations (4.48) et (4.54)). D'après (4.58), la quantité  $\tilde{w}$  est déterminée explicitement : il s'agit de la vitesse conjuguée, en d'autres termes  $\tilde{w} = \overline{i\omega\tilde{u}}$ . Les résultats sont finalement exprimés en termes de niveau de puissance acoustique par le biais de l'expression

$$L_P = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}^a}{\mathcal{P}_{ref}^a} \quad (4.60)$$

où  $\mathcal{P}_{ref}^a = 10^{-12} W$  (Pierce [103]).

#### 4.3.4 Validation numérique et optimisation du modèle

##### 4.3.4.1 Validation du cas bafflé avec Mathematica

Le programme de vibroacoustique calculant les modes de résonance d'une plaque bafflée comprend une routine de modélisation par éléments finis, un solveur pour problème aux valeurs propres et une routine de calcul du couplage vibroacoustique. Il a fait l'objet d'une validation en confrontant les caractéristiques des modes de résonance calculées (fréquence et amortissement modaux) à celles obtenues par des routines écrites dans l'environnement Mathematica par P.-O. Mattei en se basant sur des solutions vibratoires analytiques (Maury et Mattei [89]). Ces routines sont basées sur une méthode de perturbation de type fluide léger sur laquelle notre algorithme repose également. Cette étude comparative est donc une validation de la mise en oeuvre informatique plutôt que de la méthode vibroacoustique. Les solutions de référence vibratoires sont les solutions analytiques exactes. Le cas spécifique d'étude concerne une plaque en aluminium sur appui dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 4.2. La comparaison des résultats (tableau 4.3) montre que les solutions vibratoires sont très bien évaluées et que la méthode de perturbation appliquée au cas non-bafflé a été correctement mise en oeuvre.

Dimensions	$35 \times 40 \times 0,2 \text{ cm}$
Module de Young	$70 \text{ MPa}$
Coefficient de Poisson	0,3
Densité de l'aluminium	$2700 \text{ kg.m}^{-3}$
Densité de l'air	$1,3 \text{ kg.m}^{-3}$
Vitesse du son	$340 \text{ m.s}^{-1}$
Maillage	$30 \times 30$

TAB. 4.2 – Comparaison des solutions vibroacoustiques calculées par Mathematica et par le code développé. Caractéristiques du problème de plaque bafflée en aluminium sur appui.

	Mode	1	2	3	4	5
Frequence dans le vide (Hz)	Code développé	69.72	160.55	188.39	278.97	312.42
	Mathematica	69.77	160.53	188.32	279.08	311.80
	Ecart relatif (%)	0.07	0.01	0.04	0.04	0.2
Frequence dans l'air (Hz)	Code développé	67.18	157.68	185.24	275.47	308.74
	Mathematica	67.21	157.62	185.16	275.57	308.12
	Ecart relatif (%)	0.04	0.04	0.04	0.04	0.2
Amortissement acoustique (Hz)	Code développé	1.975	0.298	0.428	0.103	2.791
	Mathematica	1.977	0.298	0.428	0.105	2.785
	Ecart relatif (%)	0.13	0.00	0.10	1.43	0.20

TAB. 4.3 – Comparaison des solutions vibroacoustiques calculées par Mathematica et par le code développé. Fréquence et amortissement acoustique des cinq premiers modes.

#### 4.3.4.2 Validation avec les calculs de référence C-Valor

Il existe en France une commission de validation des logiciels de vibroacoustique, la commission C-Valor, qui met à disposition de nombreux cas comparatifs d'étude vibroacoustique numérique ou expérimentale. On peut donc ainsi quantifier la précision d'un algorithme en le confrontant à des résultats de référence émanant de méthodes diverses. L'existence de ces données de référence est d'autant plus appréciable qu'il ne semble pas exister de solution de référence analytique simple pour les cas que nous avons étudiés.

Deux validations numériques ont été effectuées. Les données générales des deux études sont résumées dans le tableau 4.4. La première concerne la configuration acoustique de plaque bafflée en partie validée au paragraphe précédent. Une plaque en acier de dimensions  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ mm}$  est placée sur appuis et excitée au point ( $x = 0,7 \text{ m}$ ,  $y = 0,2 \text{ m}$ ) par un bruit blanc. La quantité observée est la densité de puissance acoustique rayonnée dans un seul des deux espaces semi-infinis ; un calcul de puissance totale nécessite d'intégrer cette quantité sur l'axe fréquentiel entier (de  $-\infty$  à  $+\infty$ , **annexe D**). Notre calcul s'est basé sur l'expression  $P^h$  du cas bafflé (relation (4.39)) et sur la méthode de perturbation présentée au § 4.3.3.8. L'amortissement acoustique a été calculé en considérant que la structure rayonne dans les deux espaces semi-infinis. Les codes de calcul dont les résultats sont donnés

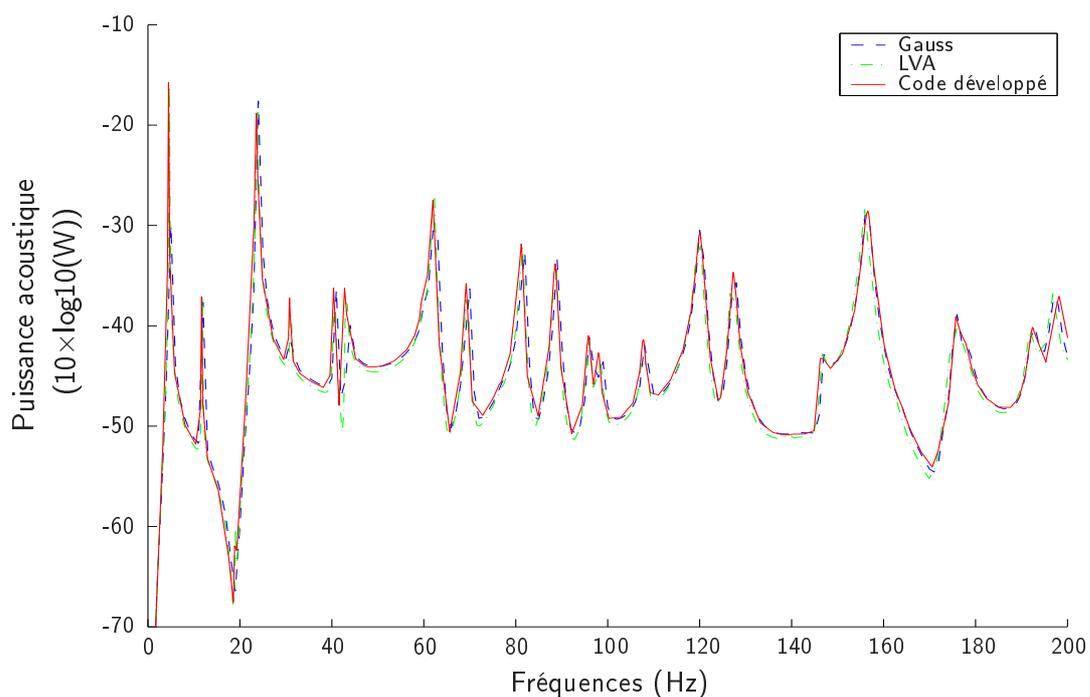


FIG. 4.15 – Puissance acoustique rayonnée par une plaque en acier bafflée sur appui de dimensions  $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ mm}$ . Comparaison avec les données fournies par la commission de validation des logiciels de vibroacoustique C-Valor.

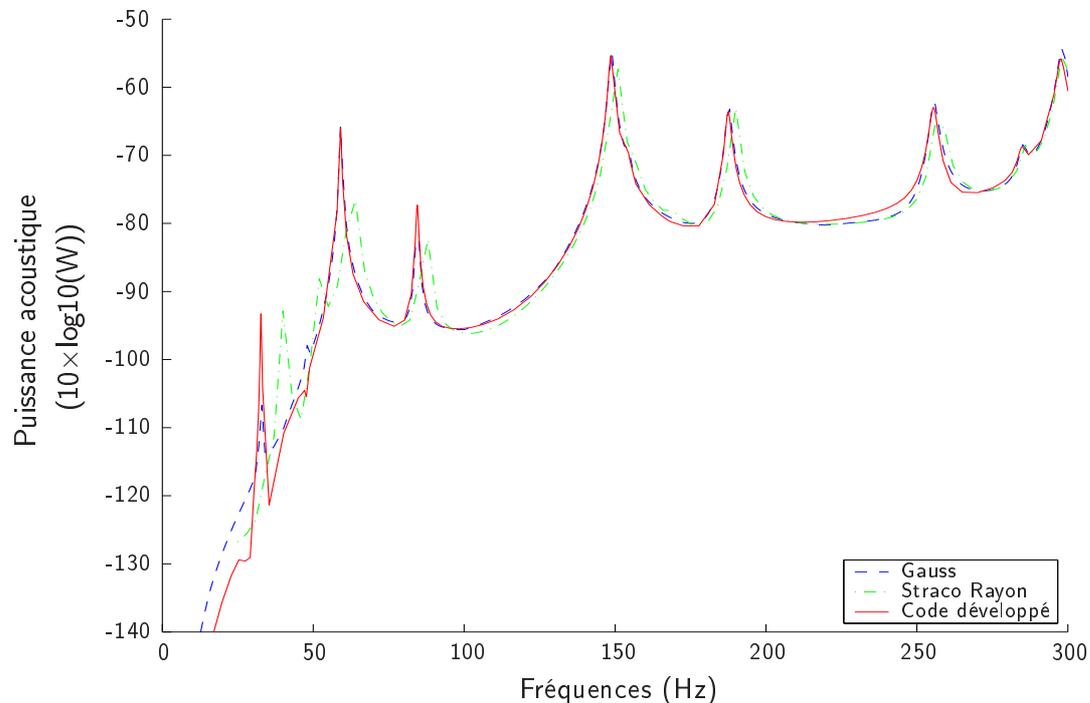


FIG. 4.16 – Puissance acoustique rayonnée par une plaque en acier non bafflée sur appui de dimensions  $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ cm}$ . Comparaison avec les données fournies par la commission de validation des logiciels de vibroacoustique C-Valor.

Module de Young	200 MPa
Coefficient de Poisson	0,3
Densité de l'aluminium	7800 kg.m <sup>-3</sup>
Densité de l'air	1,2 kg.m <sup>-3</sup>
Vitesse du son	340 m.s <sup>-1</sup>
Maillage	60 × 60
tan $\delta$	0,01

TAB. 4.4 – *Caractéristiques des cas d'étude C-Valor.*

proviennent du GAUS<sup>14</sup> et du LVA<sup>15</sup>. La figure 4.15 présente permet d'effectuer une comparaison des trois calculs. On note une grande similarité entre les résultats, aussi bien en ce qui concerne la hauteur des pics de puissance acoustique que leur positionnement fréquentiel.

La deuxième configuration acoustique concerne une plaque libre non bafflée de dimensions 1 m × 1 m × 10 mm excitée au point ( $x = 0,7$  m,  $y = 0,2$  m) par un bruit blanc. La quantité observée est la densité de puissance acoustique rayonnée dans l'espace infini. Le code que nous avons développé se base sur la méthode de perturbation présentée au § 4.3.3.8 et sur l'expression  $P^h$  du cas non bafflé (relation (4.38)). Deux calculs différents, l'un négligeant la contribution monopolaire, l'autre la prenant en compte, ont été effectués. Les résultats sont indissociables : les termes monopolaires du rayonnement liés au pincement sont donc totalement négligeables dans le cas présent, malgré l'épaisseur importante de la plaque. Le résultat de notre calcul ainsi que celui réalisé dans la même configuration par le GAUS et par la société Straco S.A. (Compiègne) avec logiciel Rayon sont représentés dans la figure 4.16. La grande similarité des résultats nous amène à conclure que le programme développé est valide aussi bien pour les configurations bafflés et que non bafflés. Le calcul en configuration non bafflée permet d'étudier le rayonnement de la plaque libre suspendue par des fils ayant fait l'objet d'une expérience d'analyse modale (§ 1.4.2) ; le calcul en configuration bafflée nous sera utile dans le chapitre 6 d'optimisation pour traiter des cas de rayonnement pratiques.

## 4.4 Bilan et conclusions du chapitre

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'étude de l'amortissement par couplage dans les structures élancées en métal. Deux composantes d'amortissement ont fait l'objet d'une attention particulière : l'amortissement par couplage thermoélastique dans l'aluminium et l'amortissement par couplage fluide-structure. Le modèle de résolution thermoélastique développé utilise une représentation du champ de température en série de Fourier et traite le couplage entre l'équation de la dynamique et l'équation thermique par perturbation. La confrontation au modèle de référence de Zener et à l'expérience de plaque suspendue présentée au § 1.4.2 valide notre méthode, et permet par ailleurs de formuler quelques critiques concernant la qualité du modèle de Zener dans le cas de la vibration d'une plaque libre. L'hypothèse d'homogénéité sous-jacente au modèle de Zener n'est d'ailleurs pas validée par l'expérience qui montre le caractère modal de l'amortissement dans l'aluminium. Il semble

<sup>14</sup>Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke

<sup>15</sup>Laboratoire Vibration et d'Acoustique de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

en revanche que le modèle de Zener soit tout à fait adapté à l'estimation de l'amortissement dans le cas des conditions aux limites en appui et encastrées.

L'amortissement par couplage fluide-structure se décompose en une composante visqueuse, liée au cisaillement de l'air sur les bords d'une plaque libre, et une composante acoustique liée à la transformation de l'énergie vibratoire en bruit. La première a été estimée négligeable. La deuxième a été traitée par une méthode de perturbation et par la modélisation du champ acoustique rayonné dans les cas bafflé et non bafflé. Les modèles ont fait l'objet d'une validation numérique par le biais des données fournies par la commission de validation des logiciels de vibroacoustique C-Valor.

# Chapitre 5

## L'amortissement viscoélastique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>126</b>
<b>5.2</b>	<b>La modélisation viscoélastique</b>	<b>126</b>
5.2.1	La viscoélasticité	126
5.2.2	Les opérateurs viscoélastiques	127
5.2.3	Transformées et principe d'équivalence	129
5.2.4	Les hypothèses de la viscoélasticité	130
5.2.5	Quelques exemples de modèles viscoélastiques analytiques	131
5.2.6	Modèle viscoélastique adopté	133
<b>5.3</b>	<b>Les matériaux viscoélastiques</b>	<b>134</b>
5.3.1	La nature de la viscoélasticité	134
5.3.2	Les métaux	134
5.3.3	Les polymères	141
<b>5.4</b>	<b>Identification des caractéristiques dynamiques d'un polymère</b>	<b>145</b>
5.4.1	Introduction	145
5.4.2	Les méthodes d'identification	146
5.4.3	Méthode d'identification adoptée	148
5.4.4	Etude du collage	153
<b>5.5</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>156</b>

---

## 5.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse à la dissipation viscoélastique, au sens large, émanant de processus transformant localement l'énergie en chaleur. La base mathématique et le cadre de validité de la viscoélasticité sont exposés dans un premier temps, puis le modèle viscoélastique implicite développé au chapitre 2 est commenté et comparé aux modèles classiques (§ 5.2). La nature physique de la viscoélasticité est ensuite présentée pour les matériaux aluminium et polymère (§ 5.3). Une courte synthèse des connaissances et limites actuelles en matière de modélisation des lois de comportement matériau nous amène à définir deux méthodes d'identification. La première, au § 5.3.2.4, conduit à une estimation de la viscoélasticité de l'aluminium ; elle se base à la fois sur les résultats expérimentaux d'amortissement d'une plaque suspendue simple en aluminium présentés au chapitre 1 et sur le modèle de thermoélasticité présenté au chapitre 4.

La deuxième expérience d'identification, présentée dans la dernière partie du chapitre (§ 5.4), tente d'évaluer les caractéristiques du polymère employé dans les patches amortissants en élastomère contraint présentés au § 1.4, en se basant sur deux expériences différentes, l'une étant plus adaptée à l'identification de la dissipation au sein des patches et l'autre plus adaptée à l'identification de la rigidité de l'élastomère. Une méthode itérative permet de combiner l'information émanant des deux expériences. L'expérience met en exergue l'importance de l'adhésion entre l'aluminium et le polymère, et débouche en réalité sur l'identification des caractéristiques dynamiques et amortissantes d'un matériau composite formé du polymère, de l'adhésif et de l'aluminium des patches. Le chapitre se termine sur une étude de l'influence du collage entre l'élastomère et l'aluminium sur l'amortissement structurel (§ 5.4.4).

## 5.2 La modélisation viscoélastique

### 5.2.1 La viscoélasticité

La viscoélasticité caractérise la capacité de certains corps fluides ou solides à stocker une partie de l'énergie tout en en dissipant une autre partie sans conservation. Ces deux comportements combinés placent tout matériau réaliste à mi-chemin entre les deux idéalizations que sont celle du matériau parfaitement élastique et celle du fluide visqueux de Newton. Les phénomènes liés à la viscoélasticité sont variés (dépendance fréquentielle, fluage, dissipation), et sont traités extensivement dans de nombreux ouvrages de référence tels que celui de Christensen [23], Persoz [101], Ferry [36] ou de Fung [40].

Si le terme de viscoélasticité est spécifique à la mécanique, les équations viscoélastiques comportent une dépendance temporelle autre qu'inertielle dont l'étude est commune à différents domaines (traitement du signal, électricité, ...). En mécanique, en outre, ces équations ne formalisent pas le comportement des seuls polymères : elles modélisent l'amortissement d'une façon générale, lorsque la dissipation locale<sup>1</sup> peut être caractérisée par une loi constitutive introduisant une dépendance temporelle entre les quantités duales de contrainte et de déformation. Ainsi, l'influence de la plasticité sur la dynamique d'une structure peut être prise en compte à l'aide des outils viscoélastiques si les hypothèses de l'homogénéisation

---

<sup>1</sup>Le terme local signifie que la dissipation en un point dépend exclusivement des processus dissipatifs mis en jeu en ce point. Des mécanismes de dissipation locale peuvent toutefois conduire à un amortissement inhomogène.

sont vérifiées et que le comportement général est linéaire. Il est alors possible de définir un amortissement local homogène.

L'amortissement thermoélastique (§ 4.2) peut également être représenté par des opérateurs viscoélastiques dans le cas des structures minces car la dissipation thermoélastique émane d'un processus local dans le plan de la structure. Les hypothèses formulées par Zener lui permettent de transformer les deux équations thermoélastiques couplées en une seule équation dynamique avec un terme de dissipation, après avoir effectué un travail d'homogénéisation dans la dimension transverse rendant le processus de dissipation local. L'approximation qu'il formule est telle que le modèle d'amortissement homogène inclut l'épaisseur comme paramètre géométrique; il n'est donc pas intrinsèque à proprement parler et ne modélise l'amortissement qu'en flexion et basse fréquence. Mais il témoigne des extrapolations aisées permises par les modèles viscoélastiques.

L'amortissement acoustique se prête difficilement aux analogies viscoélastiques, sauf au-dessus de la fréquence de coïncidence. La pression acoustique en un point résulte en effet d'interférences constructives et destructives résultant du rayonnement ou de la diffraction de zones distantes. En haute fréquence en revanche, le rayonnement relève d'un processus de plus en plus local qui rend possible une modélisation équivalente viscoélastique.

## 5.2.2 Les opérateurs viscoélastiques

Deux formalismes sont employés pour modéliser la viscoélasticité linéaire. Tous deux permettent de rendre compte des effets viscoélastiques (effet de mémoire, dépendance fréquentielle, décalage de phase entre les quantités duales, dissipation). Le premier utilise des opérateurs à dérivée temporelle  $A = \sum_i \alpha_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$  déclinés à des ordres différents, et en combinaison avec les opérateurs classiques tel que l'opérateur de rigidité. Le deuxième emploie des opérateurs de convolution dont le noyau est appelé fonction de retard, héréditaire ou de relaxation. Tous deux caractérisent différemment un comportement qui peut être équivalent, symbolisé alors par un même modèle rhéologique. L'équivalence des deux formalismes est analysée par Christensen [23] à l'aide de la transformée de Laplace. Opérateurs à dérivée temporelle ou opérateurs de convolution sont en outre aussi bien employés avec les modèles à dérivées partielles (ou intégrales) entières que fractionnaires. On les retrouve invariablement dans les équations constitutives ou dans les équations différentielles, après que la loi constitutive a été introduite dans les équations de mouvement, avec des variables scalaires ou matricielles.

### 5.2.2.1 Opérateur à dérivées partielles

L'opérateur à dérivées partielles adjoint à l'opérateur de rigidité conduit à des équations constitutives générales du type :

$$\sum_i^I \alpha_i \frac{\partial^i \sigma(t)}{\partial t^i} = \sum_j^J \beta_j \frac{\partial^j \epsilon(t)}{\partial t^j} \quad (5.1)$$

La notation tensorielle a été retirée pour des raisons de lisibilité. Ce modèle est acceptable d'un point de vue thermodynamique si  $J \geq I$ . La transformée de Laplace définie par

$$\mathcal{L}\sigma(t) = \tilde{\sigma}(s) = \int_0^\infty \sigma(t) \exp^{-st} dt \quad (5.2)$$

est appliquée à l'équation constitutive (5.1). Il vient :

$$\mathcal{P}(s) \tilde{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_i^I \alpha_i \sum_m^i s^m \sigma^{i-m}(0) = \mathcal{Q}(s) \tilde{\epsilon}(s) - \frac{1}{s} \sum_j^J \beta_j \sum_n^j s^n \sigma^{j-n}(0) \quad (5.3)$$

Avec

$$\begin{cases} \mathcal{P}(s) = \sum_i^I \alpha_i s^i \\ \mathcal{Q}(s) = \sum_j^J \beta_j s^j \end{cases} \quad (5.4)$$

L'équation (5.3) fait apparaître les termes modélisant la partie transitoire initiale de façon explicite, ainsi que des termes en  $\tilde{\sigma}(s)$  et  $\tilde{\epsilon}(s)$  liés au régime forcé non stationnaire.  $I$  conditions initiales instaurant une dépendance entre contrainte et déformation sont à vérifier. L'ordre des dérivées temporelles des conditions initiales varie entre 0 et  $I - 1$ , raison pour laquelle en pratique un ordre maximum de deux est retenu. Ce choix ne requiert en effet que les conditions mécaniques classiques portant sur le déplacement et la vitesse. Une alternative intéressante peut être de privilégier les opérateurs de convolution grâce auxquels les conditions initiales sont spécifiées de façon classique quelle que soit la complexité du modèle.

L'opérateur à dérivées partielles permet de construire un spectre d'amortissement constitué d'une série de pics de Debye conformes à une certaine réalité physique : chaque pic est associé à un mécanisme de relaxation et à une constante de temps ou fréquence caractéristique. L'opérateur temporel à puissance fractionnaire permet d'obtenir une distribution plutôt qu'une série, et pour des valeurs de puissance inférieures à un, une dépendance fréquentielle moins prononcée que les modèles à dérivée entière d'ordre bas.

Le module de rigidité complexe est calculé à partir des termes indépendants des conditions initiales en  $\tilde{\sigma}(s)$  et  $\tilde{\epsilon}(s)$ , et s'écrit sous la forme d'une série de Padé

$$\tilde{E}(s) = \frac{\mathcal{P}(s)}{\mathcal{Q}(s)} = \frac{\sum_i^I \alpha_i s^i}{\sum_j^J \beta_j s^j} \quad (5.5)$$

### 5.2.2.2 Opérateur de convolution

L'opérateur de convolution traduit plus explicitement l'effet de mémoire, qui à un instant donné, manifeste la dépendance de la réponse à des chargements antérieurs dont l'importance respective est pondérée par un noyau nommé fonction de relaxation ou fonction de retard. Dans le cas isotherme général tridimensionnel, la dépendance de la valeur actuelle du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}(t)$  sur l'histoire complète des composantes du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}(t)$  est exprimée par une fonctionnelle linéaire, dont une forme concrète peut être obtenue avec le théorème de représentation de Riesz :

$$\sigma_{ij}(t) = \epsilon_{kl} * dE_{ijkl} = \int_0^\infty \epsilon_{kl}(t-s) dE_{ijkl}(s) ds \quad (5.6)$$

Ce type de convolution est dénommé convolution de Stieltjes et repose sur le fait que  $\epsilon_{ij}(t)$  est continue en fonction du temps, et sur le fait que le tenseur  $E_{ijkl}(t)$  est nul en moins l'infini (il est même pris nul ici sur tout l'axe réel négatif). Une forme alternative est obtenue

en supposant la continuité de  $E_{ijkl}(s)$  et de sa dérivée, ainsi que la nullité de la déformation pour les temps négatifs :

$$\sigma_{ij}(t) = E_{ijkl}(0) \epsilon_{kl}(t) + \int_0^t \epsilon_{kl}(t-s) \frac{dE_{ijkl}}{ds}(s) ds \quad (5.7)$$

La fonction Dirac relative à la part élastique du module  $E_{ijkl}(s)$  a été extraite et apparaît dans le terme de gauche. Une discontinuité de  $\epsilon_{ij}(t)$  peut être tolérée en 0 et conduit par commutativité des intégrales de Stieltjes à

$$\sigma_{ij}(t) = E_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}(0) + \int_0^t E_{ijkl}(t-s) \frac{d\epsilon_{kl}}{ds}(s) ds \quad (5.8)$$

Le noyau  $E_{ijkl}(t)$  est comparable au tenseur des constantes de rigidité usuel. Il possède les mêmes symétries majeure et mineures, et peut être réduit sous l'expression de deux fonctions scalaires indépendantes dans le cas des matériaux isotropes (comparables aux paramètres de Lamé). Il est même en pratique réduit encore en ne conservant qu'une seule et unique fonction de relaxation, en supposant par exemple que le coefficient de Poisson est réel. La loi constitutive (5.8) peut être formulée dans le domaine de Laplace et s'écrit alors :

$$\tilde{\sigma}(s) = s \tilde{E}_{ijkl}(s) \tilde{\epsilon}(s) \quad (5.9)$$

où  $\tilde{\sigma}(s)$ ,  $\tilde{\epsilon}(s)$  et  $\tilde{E}_{ijkl}(s)$  sont les transformées de Laplace de la contrainte, de la déformation et du tenseur des rigidités respectivement. Dans le cas isotrope, la transformation fait apparaître un module de rigidité scalaire semblable à  $\tilde{E}(s)$  dans l'équation (5.5), dont l'expression classique s'écrit en séparant les parties réelle et imaginaire

$$\tilde{E}(s) = \tilde{E}'(s) + i \tilde{E}''(s) \quad (5.10)$$

où  $\tilde{E}'(s)$  est le module de stockage et  $\tilde{E}''(s)$  le module de perte. L'angle de perte (apparaissant dans les relations (1.14)) est le déphasage entre la contrainte et la déformation en sollicitation stationnaire. Il est donc donné par

$$\eta(s) = \arctan \left( \tilde{E}''(s) / \tilde{E}'(s) \right) \approx \tilde{E}''(s) / \tilde{E}'(s) \quad (5.11)$$

Notons que l'approximation donnée par la relation (5.11) introduit une erreur supérieure à 20% lorsque module de stockage et module de perte sont égaux.

### 5.2.3 Transformées et principe d'équivalence

La description fréquentielle des matériaux est fournit des informations indispensables. Elle est obtenue en introduisant des solutions de Ritz pour la partie temporelle d'un problème sous la forme de fonctions sinusoidales de la fréquence ou de série de Fourier, ou par le biais des transformées intégrales de Laplace, de Fourier ou de Carson (Persoz [101]). Les transformées permettent une représentation tout à fait équivalente entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel, sans altération de l'information transitoire notamment. L'une de leurs limitations concerne l'invariabilité des conditions aux limites, qui les rend par exemple inappropriées dans les problèmes de contact. Christensen [23] apporte toutefois quelques

alternatives pour pallier ce problème. Des cas d'étude transitoire utilisant les deux transformées sont présentés par Morse et Ingard [92]. Nous utilisons pour notre part la transformée de Laplace (comme dans les développements du chapitre 2 notamment) car elle permet de tenir compte explicitement des conditions initiales mais aussi la transformée de Fourier dont l'usage en conjonction avec les séries du même nom est plus cohérent.

L'un des avantages de la représentation fréquentielle d'un problème viscoélastique réside dans le fait qu'elle lui confère une forme tout à fait comparable à celle d'un problème d'élasticité statique. Les produits de convolution notamment sont transformés en simples produits dans le domaine fréquentiel. L'analogie porte le nom de principe d'équivalence, ou principe de correspondance, et permet de calquer la modélisation numérique dynamique sur la modélisation statique. Par exemple, la matrice de rigidité en dynamique amortie obtenue par la méthode des éléments finis est similaire à la matrice de rigidité calculée en statique, à ceci près que le module de Young est remplacé par un module complexe dépendant de la fréquence. Le principe d'équivalence facilite la résolution des problèmes de dynamique en introduisant un formalisme familier, mais occulte une partie de l'information en simplifiant l'expression de la transformée de Fourier, en omettant notamment la partie transitoire de la réponse.

#### 5.2.4 Les hypothèses de la viscoélasticité

Un certain nombre d'hypothèses mathématiques et thermodynamiques donnent un support théorique à l'écriture de lois constitutives viscoélastiques :

- Hypothèse des petites perturbations supposant que les déformations sont petites
- Linéarité de la fonctionnelle décrivant  $\sigma_{ij}(t)$  en fonction de  $\epsilon_{ij}(t)$  et  $\epsilon_{ij}(t-s)$
- Continuité de  $\epsilon_{ij}(t)$
- Principe de perte de mémoire
- Travail élastique positif
- Travail dissipatif positif
- Axiome de non-rétroactivité

L'hypothèse des petites perturbations permet d'exprimer la déformation comme une fonction linéaire du déplacement, et de ne retenir que la seule variable de temps dans les équations de convolution (la dépendance spatiale des dérivées temporelles est négligée).

L'hypothèse de linéarité de la fonctionnelle représentant le tenseur des contraintes en fonction de la valeur actuelle du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}(t)$  (supposé continu) et de ses valeurs passées  $\epsilon_{ij}(t-s)$  permet d'utiliser le théorème de représentation de Riesz de la fonctionnelle sous la forme d'une intégrale de Stieltjes. Ceci revient à utiliser le principe de superposition de Boltzman.

Le principe de perte de mémoire<sup>2</sup>, basé sur un fondement thermodynamique, s'énonce de la façon suivante. Si la valeur actuelle d'une variable est basée sur l'histoire complète d'une autre variable, alors l'hypothèse de perte de mémoire implique que la valeur courante de la première variable dépend plus de l'histoire récente de la deuxième variable que de son histoire éloignée. En termes mathématiques le principe est satisfait si les composantes du tenseur d'élasticité sont des fonctions décroissantes du temps dont la dérivée est de plus en plus faible à mesure que le temps s'écoule :

$$\left| \frac{dE_{ijkl}}{dt} \right|_{t=t_1} \leq \left| \frac{dE_{ijkl}}{dt} \right|_{t=t_2} < 0 \quad \forall t_2 \leq t_1 \quad (5.12)$$

Les conditions thermodynamiques de travail et de dissipation positifs peuvent être formulées dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Elles sont vérifiées dans le domaine fréquentiel dès lors que le module de stockage est positif et que le module de perte est négatif<sup>3</sup>, de façon à ce que l'énergie soit effectivement dissipée et non gagnée.

Certaines hypothèses enfin sont inhérentes à l'outil mathématique de représentation utilisé. La transformation de Fourier du module de rigidité, quantité réelle dans le domaine temporel, a nécessairement une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire. Ceci exclut en outre la possibilité (en tout état de cause non physique) d'une partie imaginaire non nulle dans le cas statique à 0 Hz, comme l'a souligné Crandall [25], et malgré le fait que certains modèles d'amortissement classiques comme celui de Rayleigh puissent s'en accommoder.

La transformée de Fourier requiert enfin la vérification de conditions portant sur les parties réelle et imaginaire de la solution pour s'assurer qu'elle est bien causale. L'axiome de non-rétroactivité est alors vérifié : l'action d'un chargement en  $t_0$  altère la réponse pour des temps  $t$  tels que  $t \geq t_0$ .

## 5.2.5 Quelques exemples de modèles viscoélastiques analytiques

### 5.2.5.1 Modèles rhéologiques élémentaires

Le comportement viscoélastique peut être modélisé en première approximation par des modèles rhéologiques simples caractérisés par une équation constitutive différentielle et une représentation schématique constituée de masses, ressorts et amortisseurs. La présentation détaillée de tels modèles fait l'objet de nombreux ouvrages (Persoz [101]). La figure 5.1 représente les plus classiques d'entre eux : modèle de Kelvin-Voigt, modèle de Maxwell et modèle de Zener. La transformée de Fourier permet de déduire aisément le module de rigidité fréquentiel complexe des équations constitutives différentielles.

Le modèle de Zener a déjà été utilisé au § 4.2.2.1 car il permet une description simple et fine de l'amortissement thermoélastique. Il permet une description approchée relativement correcte des comportements de fluage et de relaxation à la fois. Il permet aussi de

---

<sup>2</sup>Fading memory.

<sup>3</sup>Le signe requis du module de perte dépend de la convention de signe choisie. La convention dont il est fait usage tout au long de la thèse est celle d'une dépendance temporelle en  $\exp(-i\omega t)$ . Ce choix apparaît explicitement dans l'expression des transformées intégrales utilisées.

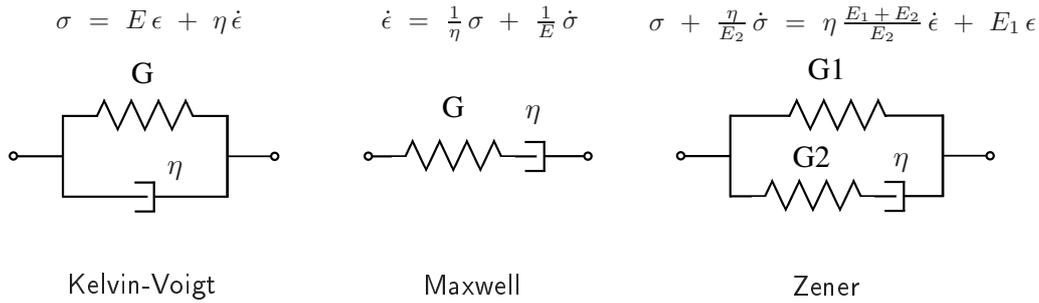


FIG. 5.1 – Quelques modèles rhéologiques élémentaires.

décrire qualitativement le couplage physique (vibroacoustique, thermoélasticité, viscoélasticité) entre deux variables ou deux phénomènes en introduisant une fréquence caractéristique dite aussi de relaxation. Cette fréquence est assimilable à la fréquence de coïncidence en vibroacoustique<sup>4</sup>, ou à la fréquence de relaxation en thermoélasticité<sup>5</sup>, et sépare deux zones fréquentielles distinctes (zones adiabatique et isotherme en thermoélasticité, par exemple) dans lesquelles une variable (ou un phénomène) devance l'autre variable (ou l'autre phénomène). Dans ces deux zones les variables sont soit en phase soit en opposition de phase, tandis qu'elles sont en quadrature de phase à la fréquence caractéristique.

### 5.2.5.2 Séries de Prony-Dirichlet

Les modèles élémentaires sont parfois incapables de rendre compte de certains comportements viscoélastiques complexes. On a donc souvent recours à des compositions d'éléments simples aboutissant à des modèles généralisés. Le modèle de Maxwell généralisé est obtenu par exemple en mettant en parallèle des modèles élémentaires de Maxwell. En ajoutant un ressort supplémentaire en parallèle pour que le matériau ne flue pas indéfiniment, c'est-à-dire pour que le matériau soit un solide, on obtient le modèle de représentation le plus général pour la fonction de relaxation. Il est décrit par le biais de séries de Prony-Dirichlet que l'on retrouve couramment employées dans des codes industriels tels que ABAQUS ainsi que dans la littérature sur l'amortissement (Yi et Sze [133]). La fonction de relaxation  $E(t)$  s'exprime comme une somme d'exponentielles décroissantes :

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \exp^{-\alpha_i t} \quad (5.13)$$

où le module instantané  $E_\infty$  et le module à long terme<sup>6</sup>  $E_0$  sont liés par  $E_\infty = E_0 - \sum_i^N E_i$ . La transformée de Fourier s'écrit alors

$$E(\omega) = \frac{E_\infty}{i\omega} + \sum_{i=1}^N E_i \frac{1}{i\omega - \alpha_i} \quad (5.14)$$

<sup>4</sup>Fréquence à laquelle ondes vibratoires et ondes acoustiques sont les plus couplées.

<sup>5</sup>Fréquence à laquelle ondes vibratoires et ondes thermiques sont les plus couplées.

<sup>6</sup>Le module instantané  $E_\infty$  est la valeur du module de stockage lorsque la fréquence tend vers l'infini, et le module à long terme  $E_0$  est la valeur du module de stockage lorsque la fréquence tend vers zéro.

### 5.2.5.3 Modèles à dérivées temporelles fractionnaires

Les modèles généralisés nécessitent beaucoup de termes pour modéliser finement le comportement viscoélastique et conduisent à un coût numérique important, dans le cas notamment des méthodes à coordonnée de dissipation (§ 2.4.2.4). Les dérivées temporelles fractionnaires forment une alternative intéressante grâce à laquelle il est possible d'obtenir une très bonne adéquation entre les données expérimentales brutes et un modèle à peu de termes, en particulier dans le cas des matériaux au comportement viscoélastique peu prononcé. Les dérivées fractionnaires conduisent à un spectre de relaxation continu constitué d'une distribution de mécanismes dissipatifs alors que les modèles classiques ne peuvent donner qu'un spectre de relaxation discret. Des arguments physiques basés sur les théories moléculaires décrivant le comportement viscoélastique fournissent également une justification de leur emploi (Bagley et Torvik [6]). L'inconvénient majeur des modèles à dérivées temporelles fractionnaires relève des schémas temporels lourds qu'ils nécessitent d'employer, du fait de la non-localité des opérateurs. L'effort calculatoire et de stockage est bien supérieur aux méthodes à dérivées entières, et augmente de façon importante au fur et à mesure de l'incrémentation temporelle (Schmidt et Gaul [113]). Un autre inconvénient, dont certaines formulations peuvent s'affranchir, relève des conditions initiales à ordre fractionnaire, non physiques, qu'il faut considérer (Enelund [32]).

### 5.2.6 Modèle viscoélastique adopté

Un modèle viscoélastique possède trois caractéristiques principales : il doit modéliser précisément le comportement amortissant et dynamique d'un matériau, mais il doit aussi permettre un passage aisé entre les domaines fréquentiels et temporels et conduire à des résolutions temporelles ou fréquentielles peu coûteuses en temps de calcul. Les méthodes introduisant des coordonnées de dissipation (§ 2.4.2.4), par exemple, tirent bénéfice de la formulation analytique de modèles viscoélastiques pour résoudre le problème matriciel complexe et dépendant de la fréquence avec les outils classiques de la modélisation dynamique (solveur réel). Les modèles à dérivées fractionnaires permettent des identifications soignées mais nécessitent en revanche des schémas numériques lourds et coûteux pour la résolution temporelle : la définition ou le choix d'un modèle résulte toujours d'un compromis entre ces trois caractéristiques.

Nous proposons au chapitre 2 une méthode utilisant la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse grâce à laquelle le passage entre les domaines ainsi que la résolution des problèmes fréquentiel et temporel se fait analytiquement dans le cas d'un système tout à fait général. De ce fait, la méthode se substitue en grande partie au modèle viscoélastique ; tout au moins, utiliser un modèle dans notre cas ne relève d'aucune nécessité. Les données expérimentales brutes ou des expressions polynomiales simples fonction de la fréquence peuvent convenir à notre modélisation. La méthode a tous les avantages des méthodes analytiques : elle est précise et rapide à la fois, tout en étant très générale. Les hypothèses classiques de la viscoélasticité énumérées au § 5.2.4 s'appliquent, et sont pour la plupart vérifiées par les données expérimentales (positivité du module de stockage, négativité du module de perte).

## 5.3 Les matériaux viscoélastiques

### 5.3.1 La nature de la viscoélasticité

La viscoélasticité a une origine physique souvent occultée, car les modèles macroscopiques mathématiques associés à un travail d'identification expérimentale se substituent pratiquement à son étude approfondie. La dissipation viscoélastique se traduit à l'échelle microscopique par la transformation d'un mouvement général périodique d'un ensemble de molécules vibrant de concert en un mouvement aléatoire d'agitation thermique. Elle est associée à un processus de reconstructions internes de la structure à différentes échelles, durant lequel les changements de conformation successifs produisent un travail dissipatif sous l'effet des contraintes locales. La reconstruction atomique dans un milieu cristallin est associée aux défauts ponctuels et au mouvement des dislocations. Dans les polymères, le phénomène de relaxation après déformation est incarné par la reconformation des chaînes ou des maillons de chaîne. Le décalage de phase entre contrainte et déformation correspond au temps nécessaire pour que se produisent les réarrangements moléculaires.

### 5.3.2 Les métaux

Les métaux présentent un comportement viscoélastique dont la nature s'explique par une analyse physique du réseau cristallin. Différents ouvrages traitent de ce sujet comme celui de Gittus [45] avec un chapitre sur la viscoélasticité dans les métaux, Persoz [101], et le livre de métallurgie de Cahn [16]. L'encyclopédie en ligne Wikipédia présente également des résumés clairs et pertinents en la matière. L'étude bibliographique dont nous exposons ici les conclusions traite des matériaux métalliques en général, puis se focalise plus spécifiquement sur l'aluminium. Différentes données sur son amortissement sont présentées, ainsi que des traitements spécifiques pour accroître ses capacités dissipatives.

#### 5.3.2.1 La structure des matériaux cristallins

Le comportement macroscopique d'un matériau métallique résulte de sa nature atomique, mais aussi de sa structure cristalline. Cette structure est constituée d'un empilement régulier d'atomes, d'ions, de molécules. Le réseau formé n'est pas parfait : il présente un certain nombre de défauts ponctuels (lacunes, présence d'un atome étranger entre deux atomes du réseau<sup>7</sup>, ou à la place d'un atome du réseau), linéaires (dislocations), bidimensionnels (joint de grain, à l'interface entre deux cristaux dans une structure polycristalline), tridimensionnels (pores, précipités). Les défauts, dont la présence et la nature dépendent fortement de la formule chimique et du procédé de fabrication, ont une influence remarquable sur le comportement du métal (conductivité, rigidité, amortissement). Ils sont également dépendants de l'environnement direct auxquels ils sont soumis (chargement mécanique, thermique). La température en outre, est susceptible d'extraire les atomes de leur emplacement respectif, c'est le phénomène thermiquement activé de diffusion. On parle en outre de diffusion interstitielle d'atomes étrangers, de diffusion lacunaire. Parmi les défauts mentionnés, les dislocations semblent tenir un rôle tout à fait central dans les phénomènes de plasticité et d'amortissement des matériaux cristallins. L'écoulement plastique notamment, est occasionné par un réarrangement du réseau cristallin : il est produit par une propagation de

---

<sup>7</sup>Défaut interstitiel.

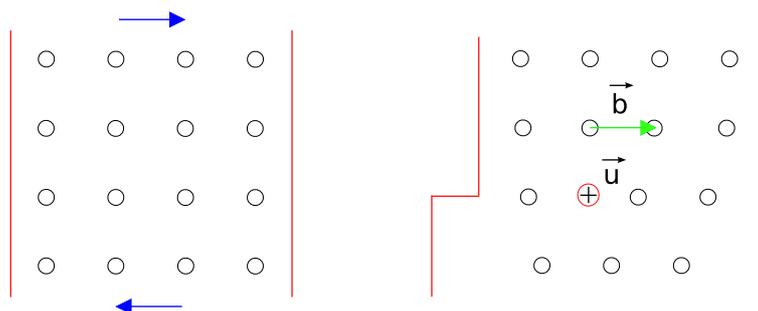


FIG. 5.2 – Déformation locale du réseau cristallin sollicité en cisaillement : apparition d'une dislocation coin.

dislocations. Il y a localement rupture des liaisons atomiques du fait d'un chargement mécanique, glissement puis recollement à une distance interatomique des lèvres de coupure. Le processus conduit à un relâchement des contraintes nécessaires au déplacement. La surface formée par les lèvres est bordée par une discontinuité linéaire : il s'agit de la dislocation. La particularité du phénomène de glissement est qu'il ne nécessite qu'une contrainte relativement faible, contrairement à la contrainte que nécessiterait le déplacement d'un pan entier du réseau cristallin le long de deux plans atomiques. La dislocation peut également se déplacer en dehors de son plan de glissement, mais le phénomène (la montée) ne peut s'opérer qu'à température élevée, grâce à la diffusion de lacunes ou d'atomes interstitiels. L'illustration d'une dislocation de type coin est donnée dans la figure 5.2. Deux quantités la définissent : sa ligne, en général courbe, et son vecteur de Burgers, qui représente la translation du réseau (sa norme peut être par exemple une distance interatomique). Par ailleurs, elle doit déboucher sur un défaut, par exemple sur une autre dislocation. Elle peut également se refermer sur elle même et former une boucle de dislocation. Différents types de point d'accroche existent : les points d'ancrage forts (aux intersections du réseau des dislocations), et les points d'ancrage faible (au niveau des impuretés et des interstices). Il est à noter (Gittus [45]) que l'interaction avec les atomes d'impuretés dépend des atomes en question et du type de dislocation (interaction forte pour les dislocation coin, faible pour les interactions vis). Dans un régime de sollicitation stationnaire, les dislocations sont continuellement créées et détruites (par annihilation par exemple de deux dislocations de signe opposé). En moyenne le nombre moyen est stable (Cahn [16]), le processus de génération et de destruction contrôlé par la diffusion des lacunes entre les dislocations étant équilibré.

### 5.3.2.2 L'amortissement dans les métaux

Deux mécanismes associés aux dislocations participent à la dissipation d'énergie. Le premier est un mécanisme de glissement et de détachement des dislocations des points d'accroche faible, qui doivent pour ce faire franchir les barrières énergétiques du réseau périodique. Les dislocations subissent en effet la répulsion ou alternativement l'attraction d'atomes étrangers ou d'autres dislocations lors de leur mouvement, dont il résulte une force comparable à une force de frottement<sup>8</sup>. Le glissement des dislocations, rendu possible par de fortes sollicitations, rend compte de l'écoulement plastique et de la viscoélasticité non linéaire des métaux. Il est illustré par le quatrième schéma de la figure 5.3. L'amortissement  $Q_{NL}^{-1}$  qui en

<sup>8</sup>La force dite de Peierls-Nabarro est responsable de l'échauffement lors de la déformation plastique.

résulte est quantifié par un modèle de référence pour de nombreux physiciens des matériaux, le modèle de Granato-Lücke [48] :

$$Q_{NL}^{-1} \approx \frac{C_2}{\epsilon_0} \exp(-C_3/\epsilon_0) \quad (5.15)$$

où  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes matériau, et  $\epsilon_0$  l'amplitude de déformation. Sous sollicitation plus forte encore, lors d'un écrouissage par exemple, les dislocations retenues par les points d'accroche forte se multiplient en formant des boucles concentriques (mécanisme de Frank-read illustré par le sixième schéma de la figure 5.3). Les points d'accroche forte ne cèdent qu'à des niveaux beaucoup plus élevés avec une activation thermique : le réseau des dislocations se déplace alors comme une entité propre (phénomène de montée).

Le deuxième mécanisme dissipatif est dû aux impuretés et défauts<sup>9</sup> susceptibles de migrer vers les dislocations par diffusion et de les épingler : seule la partie centrale de ces dernières peut alors se mouvoir en se courbant (deuxième et troisième schéma de la figure 5.3). La dislocation est alors comparée dans la théorie de Granato-Lücke à une corde vibrante, dont le comportement dynamique est décrit par une équation du deuxième ordre avec une tension effective (terme de rigidité) et un frottement visqueux (terme d'amortissement). Un transfert d'énergie vibratoire s'opère alors de la structure vers les dislocations qui le dégradent en chaleur. Ce deuxième mécanisme dépend de la fréquence et rend compte de la viscoélasticité linéaire des métaux à basse amplitude de déformation. L'amortissement  $Q_L^{-1}$  qui en résulte est donné par

$$Q_L^{-1} \approx \frac{C_1 \rho L^2 f^2}{b^2} \quad (5.16)$$

où  $C_1$  est une constante matériau,  $f$  la fréquence,  $L$  la longueur de boucle de dislocation,  $\rho$  la densité de dislocation,  $b$  le vecteur de Burgers. La longueur des boucles et la densité de dislocation favorisent l'amortissement à bas niveau de contraintes. Finalement, l'amortissement total du modèle de Granato-Lücke est donné par la somme des deux termes  $Q^{-1} = Q_L^{-1} + Q_{NL}^{-1}$ .

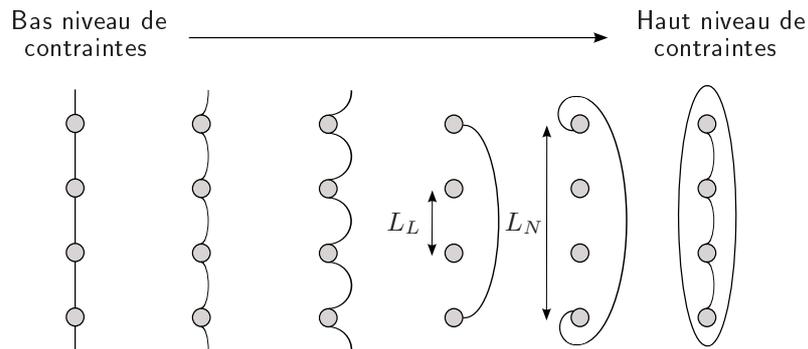


FIG. 5.3 – *Pliant à bas niveau de contrainte les lignes de dislocations se détachent des points d'accroche faible sous sollicitation forte.  $L_L$  longueur de dislocation entre les points d'accroche faibles,  $L_N$  longueur du réseau de dislocation.*

<sup>9</sup>Points d'accroche faible.

Ces formules qualitatives simplificatrices donnent des comportements en partie retrouvés par l'expérience. D'après Su *et al* [116] toutefois, la description fréquentielle donnée par le modèle du solide standard<sup>10</sup> convient davantage au domaine ultra-sonore. Le modèle à longueur de boucle de dislocation unique proposé par l'auteur décrit un pic de Debye gouverné par une seule constante de relaxation. La valeur maximum de l'amortissement se situe alors autour de 10 – 100 MHz. Valette et Cuesta [120] font le constat expérimental que l'amortissement par dislocation dans les cordes de guitare dépasse les autres composantes d'amortissement (fluide visqueux et thermoélastique) dans la partie haute du registre auditif. Le modèle linéaire d'amortissement de la théorie de Granato-Lücke en  $f^2$  (où  $f$  est la fréquence) leur semble valide. Johnson [64] souligne toutefois que certains résultats restent non expliqués, même lorsqu'une distribution des longueurs de boucle de dislocation (constituant une généralisation de la théorie) est utilisée. Du reste, le modèle ne tient pas compte du mouvement d'autres défauts, comme celui des atomes interstitiels, qui pourtant participent à la dissipation d'énergie dans les matériaux cristallins. La dissipation dans les joints de grain en particulier peut avoir une influence prépondérante dans les matériaux polycristallins. On consultera l'ouvrage de référence de Zener [135] pour obtenir une analyse détaillée de nombreux mécanismes de relaxation au sein des métaux (relaxation des contraintes à travers les joints de grain, à travers les joints de macle).

Les résultats de notre analyse bibliographique, dont des compléments portant sur l'aluminium sont présentés au paragraphe suivant, montrent que le comportement dissipatif des métaux n'est connu que de façon qualitative. Des essais expérimentaux sont nécessaires pour la modélisation des lois de comportement. La théorie permet toutefois de comprendre l'influence globale de l'environnement et des traitements sur l'amortissement des métaux. On sait par exemple que la température fait diminuer l'amortissement des matériaux homogènes en diminuant la concentration des dislocations et des défauts par diffusion. Elle est susceptible au contraire de favoriser l'amortissement des matériaux inhomogènes possédant de multiples coefficients d'expansion, car la concentration des dislocations est accrue à la jointure des différentes phases. En ce qui concerne les traitements thermiques, le procédé de recuit fait diminuer l'amortissement du fait de la température ; la trempe<sup>11</sup> le réduit également en favorisant l'apparition de défauts ponctuels et donc de points d'accroche légers pour les dislocations au détriment de précipités (Xie *et al* [131], Gittus [45]). La longueur des boucles de dislocation se trouve réduite. L'écrouissage<sup>12</sup>, enfin, introduit des dislocations en grand nombre qui favorisent l'amortissement. Au-dessus d'un certain seuil, leur glissement est ralenti par une répulsion à distance du réseau de dislocations agrandi, qui rend le matériau plus dur mais ne modifie plus sa capacité dissipative.

### 5.3.2.3 L'aluminium

Notre travail concerne plus spécifiquement l'aluminium, matériau qui constitue la plaque de l'expérience présentée au § 1.4 et les patches viscoélastiques contraints (composites en polymère/aluminium). Ses nombreuses qualités (légèreté, recyclabilité, résistance à l'oxydation) en font un métal particulièrement prisé dans l'industrie des transports. Notons que s'il est

<sup>10</sup>Modèle de Zener avec une dépendance à la fréquence  $f$  en  $\frac{f}{1+f^2}$ .

<sup>11</sup>La trempe est un traitement thermique au cours duquel le métal chaud est plongé dans un fluide qui le refroidit subitement.

<sup>12</sup>L'écrouissage est un traitement durcissant effectué par martelage par exemple, qui crée une déformation plastique permanente.

souvent admis que l'aluminium est un matériau isotrope, il n'en demeure pas moins qu'il s'agit d'une hypothèse forte, du fait du procédé de fabrication de structures élancées telles que les plaques et poutres. Les résultats de la modélisation thermoélastique et vibroacoustique<sup>13</sup> d'une plaque suspendue non bafflée dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 5.1 sont présentés dans le tableau 5.2. Ils montrent que les couplages décalent les solutions vibratoires calculées dans le vide. Toutefois, ces décalages ne sont pas en mesure d'expliquer la différence obtenue par rapport à l'expérience. Nous expliquons cette disparité par l'incertitude sur l'épaisseur et sur les caractéristiques anisotropes du matériau, que nous n'avons pas cherché à prendre en compte. Pour obtenir plus de détails sur ce sujet on pourra se référer au travail de Lambourg [72] sur l'identification des caractéristiques anisotropes de plaques.

Dimensions	35 cm × 40 cm × 2
Module de Young	65 MPa
Coefficient de Poisson	0,3
Densité de l'aluminium	2700 kg.m <sup>-3</sup>
Densité de l'air	1,3 kg.m <sup>-3</sup>
Vitesse du son	340 m.s <sup>-1</sup>

TAB. 5.1 – Caractéristiques du problème de plaque non bafflée en conditions libres.

Mode	1	2	3	4	5	6
Fréquence vide (Hz)	45.411	61.996	87.485	112.202	123.663	181.345
Decalage acoustique (Hz)	-0.368	-0.516	-0.815	-0.779	-0.819	-1.443
Decalage thermoélastique (Hz)	+0.008	+0.078	+0.344	+0.132	+0.160	+0.687
Fréquence résultante (Hz)	45.051	61.558	87.014	111.555	123.004	180.589
Fréquence mesurée (Hz)	43.375	62.25	93.75	111.75	124.375	191.125
Erreur (%)	3.8	-1.1	-7.5	-0.2	-1.1	-5.7

TAB. 5.2 – Résultats fréquentiels de la modélisation vibroacoustique et thermoélastique d'une plaque en aluminium non bafflée en conditions libres.

L'un des inconvénients de l'aluminium, du moins dans le cadre de la réduction du bruit, est lié à sa capacité dissipative très faible ; les données sur l'amortissement de l'aluminium sont d'ailleurs rares et variables, tant il semble difficile avec un tel matériau de mesurer autre chose que le bruit de mesure ou l'amortissement du banc d'essai. Les études sur l'amortissement de l'aluminium se placent pour la plupart dans le cadre de la métallurgie et de la physique des matériaux. Les essais sont souvent restreints aux basses fréquences, mais l'influence de la température est en revanche bien quantifiée. De nombreux auteurs ont ob-

<sup>13</sup>Les calculs thermoélastique et vibroacoustique ont été effectués séparément, mais on peut supposer raisonnablement que les phénomènes acoustique et thermique sont découplés du fait que tous deux altèrent très peu les solutions vibratoires dans le vide, et que les décalages fréquentiels respectifs peuvent s'additionner.

servé une dépendance exponentielle de l'amortissement à la température aux alentours de un hertz (Wei *et al* [125], Bremnes, Carreño-Morelli et Gremaud [14]). A cet amortissement régulier de fond s'ajoutent des maximums d'amortissement<sup>14</sup> à des températures spécifiques dans le cas des alliages et composites. Il existe notamment un pic à 18°C noté  $P_C$  dans la littérature (Bremnes *et al*) lié à l'interaction entre les dislocations et les impuretés. Il disparaît dans les aluminiums très purs. Gu *et al* [50] font état d'un pic d'amortissement dans l'aluminium polycristallin de grande pureté autour de 300°C à 1 Hz, Harms *et al* [54] d'un pic de relaxation dans le joint de grain de l'aluminium pour des températures ne dépassant pas 350°C. Sa position dépend aussi de la fréquence : à 78°C il est localisé à 120 Hz, et à 158 °C à 4700 Hz<sup>15</sup>. L'auteur établit que le processus de relaxation est thermiquement activé et représentable par une loi d'Arrhénius dont il estime l'énergie d'activation. L'auteur observe également un pic à haute température qu'il associe à la relaxation de diffusion au niveau de la triple jonction du joint de grain. Un amortissement de l'ordre de  $Q^{-1} \sim 0,0005$  à 4000 Hz et 50 °C est observé avec un essai de torsion.

Jia [62] mesure un amortissement variant linéairement avec la température de  $Q^{-1} = 0,005$  à température ambiante à plus de  $Q^{-1} \sim 0,03$  à 300°C. Rivière [108] étudie l'aluminium polycristallin et observe une augmentation de l'amortissement entre  $10^{-4}$  Hz et  $10^{-2}$  Hz puis une stabilisation aux alentours du Hz. L'auteur trouve  $Q^{-1} \sim 0,008$  à 0,001 Hz et  $Q^{-1} \sim 0,003$  à 0,01 Hz à température ambiante. Wei *et al* [125] mesurent des valeurs de friction interne de l'aluminium de l'ordre de  $Q^{-1} \sim 0,001$  à 1 Hz à température ambiante, et de  $Q^{-1} \sim 0,006$  à 1 Hz pour l'aluminium 4N7. Wang *et al* [123] ont mesuré un amortissement en basses fréquences à température ambiante de l'ordre de  $Q^{-1} \sim 0,0036$ .

#### 5.3.2.4 Identification de la dissipation viscoélastique de l'aluminium

La théorie micromécanique n'étant pas à même de fournir des lois constitutives suffisamment précises pour la modélisation, les modèles employés, pratiquement, sont ceux que l'on retrouve dans le cadre général de la viscoélasticité (modèles rhéologiques, dérivées fractionnaires ou entières) et sont construits par identification avec des données expérimentales. Pour notre part, nous avons finalement opté de quantifier l'amortissement viscoélastique après soustraction de l'amortissement thermoélastique modélisé aux valeurs d'amortissement total mesurées dans l'expérience de plaque suspendue, et de confronter le résultat à la littérature.

Le modèle vibroacoustique de plaque non bafflée présenté au § 4.3.3.4, qui utilise les données du tableau 5.1, fournit des valeurs d'amortissement résumées dans le tableau 5.3. Ces résultats numériques montrent clairement que le couplage fluide structure, en basses fréquences, dans le cas libre, provoque un effet d'ajout de masse mais pas de dissipation par rayonnement. Par ailleurs, nous négligeons l'amortissement des conditions aux limites pour les raisons évoquées au § 1.5.3.3, et rappelons que l'écoulement visqueux aérien a une influence négligeable (voir les calculs du § 4.3.2) sur la dynamique de la plaque.

Les résultats de la modélisation thermoélastique de la plaque suspendue sont présentés

---

<sup>14</sup>Pic de Debye.

<sup>15</sup>Résultats issus de tests en flexion de poutres cantilever miniatures peu amortissantes en silicium, d'épaisseur 20-60  $\mu\text{m}$ , et recouvertes d'un film d'aluminium fin d'épaisseur 40-250 nm.

Mode	1	2	3	4	5	6
<b>Fréquence vide (Hz)</b>	45.411	61.996	87.485	112.202	123.663	181.344
<b>Fréquence air (Hz)</b>	45.043	61.480	86.670	111.422	122.845	179.901
<b>Amortissement acoustique (Hz)</b>	0.0000	0.0001	0.0025	0.0000	0.0000	0.0005

TABLE 5.3 – Caractéristiques du problème de plaque non bafflée en conditions libres.

dans la figure 5.4. La différence entre l'amortissement (en Hz) total mesuré et l'amortissement thermoélastique calculé fait clairement apparaître une droite, qui donne quelques motifs de satisfaction quant à la précision et à la validité de la méthode de modélisation thermoélastique. Le modèle de Zéner, en outre, ne convient pas bien à la configuration de plaque libre et n'aurait pas permis une extraction de cette qualité.

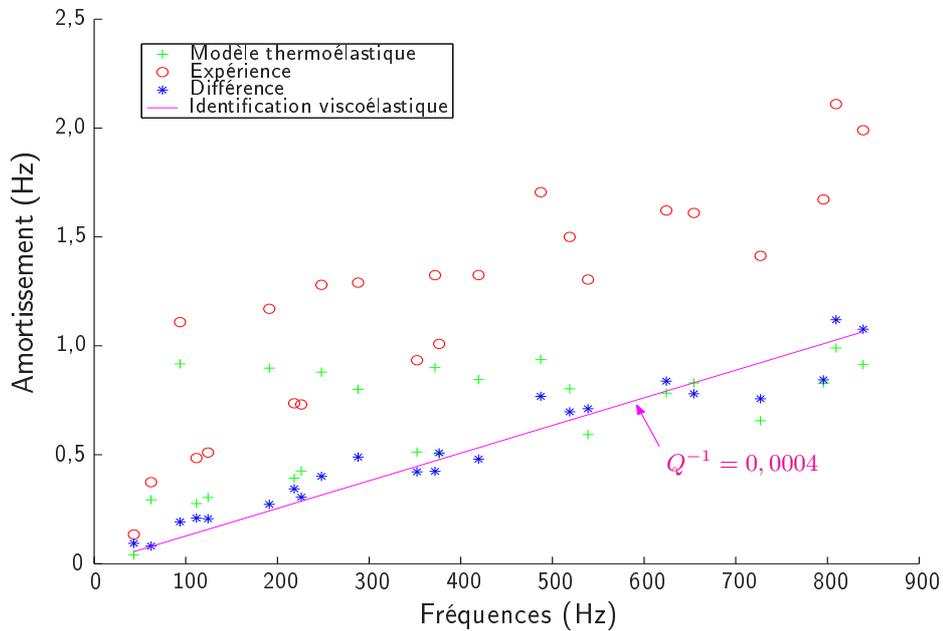


FIG. 5.4 – Comparaison de l'amortissement thermoélastique modélisé et de l'amortissement expérimental. Plaque libre de dimensions  $35\text{cm} \times 40\text{cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

L'identification par la méthode des moindres carrés de la pente de la droite permet de déterminer l'amortissement viscoélastique dans l'aluminium :

$$\tan \delta_{alu} = \eta_{alu} \sim Q^{-1} \sim 0,0004 \quad (5.17)$$

Exprimé ainsi sous la forme d'un facteur de qualité, l'amortissement est quasiment constant en fonction de la fréquence. Sa valeur minore l'ensemble des données recueillies au paragraphe précédent, et semble cohérente avec les résultats de Cremer [26] qui rapporte des valeurs de l'ordre de  $\eta_{alu} \sim 0,0001$ . Il est très difficile d'interpréter les variations faibles d'amortissement autour de la droite identifiée. Dans la mesure où le système étudié est très peu dissipatif, il est fort probable qu'elles soient surtout liées aux incertitudes de mesure expérimentale et de lecture.

### 5.3.3 Les polymères

#### 5.3.3.1 Caractéristiques générales

Les polymères industriels, classés d'après leurs propriétés thermomécaniques (thermoplastiques, thermodurcissables, élastomères), sont synthétisés par voie chimique par une réaction de polymérisation qui conduit à la formation de macromolécules, dites à l'état amorphe. La réaction établit des liaisons covalentes entre de petites molécules éventuellement différentes appelées monomères. Les grandes chaînes formées, enchevêtrées, sont en mouvement perpétuel du fait de l'agitation thermique. Elles sont susceptibles de glisser les unes par rapport aux autres sous sollicitation et forment un composé qui s'apparente à un fluide viscoélastique. Une opération de vulcanisation doit être effectuée de façon à améliorer ces caractéristiques en provoquant la réticulation du polymère. Des liaisons covalentes s'établissent alors entre les grandes chaînes et bloquent leur mouvement, conduisant à la formation d'une véritable macromolécule.

Les élastomères sont des polymères aux propriétés comparables à celles du caoutchouc naturel. Leur forte capacité amortissante les rend particulièrement attractifs pour la réduction des vibrations, et explique l'usage extensif qui en est fait dans l'industrie des transports. Outre l'hyperélasticité, l'une des autres caractéristiques spécifiques des élastomères est leur grande sensibilité aux facteurs environnementaux (température, précontrainte, fréquence de sollicitation). Elle rend leur utilisation parfois délicate du fait de la variabilité et de l'imprédictibilité de leur comportement, voire problématique dans les milieux à température très basse (cas de l'aéronautique). La température conditionne directement l'état général dans lequel l'élastomère se trouve, qui peut être de trois types : vitreux, caoutchoutique ou viscoélastique. Tous trois sont associés à des caractéristiques distinctes, illustrées par la figure 5.5, qui représente de façon schématique le module de stockage et la tangente de l'angle de perte de l'élastomère à différentes températures, l'ensemble des autres variables affectant l'état du matériau étant fixées.

Dans l'état vitreux, à basse température, les macromolécules sont pratiquement figées et les seules oscillations possibles sont atomiques. Le module de stockage de l'élastomère est élevé et sa capacité dissipative faible. Pour des températures un peu plus élevées, les chaînes sont susceptibles de se mouvoir davantage en subissant des reconformations locales, en particulier dans la zone charnière viscoélastique centrée sur la température dite de transition vitreuse et notée  $T_g$ . La fréquence caractéristique des oscillations moléculaires correspond alors à la fréquence fixée de l'expérience : l'amortissement matériau est maximum et le module de stockage, décroissant, présente une inflexion. Au-dessus de cette température, les molécules retrouvent rapidement leur conformation d'équilibre sans qu'une dissipation importante d'énergie ne se produise. Le module de stockage est dans ce cas stable et faible, et les pertes peu élevées.

Les variables d'environnement de pression et fréquence que nous avons pris le soin de «fixer» dans ce court descriptif conditionnent en réalité tout autant l'état de l'élastomère que la température. Il existe même une relation spécifique entre elles, énoncée par le principe de superposition fréquence/température ; ce principe a été étendu par certains auteurs à la précontrainte. On trouvera dans la thèse de Kergoulay [66] des éléments de validation expérimentale de cette extension. Nous considérerons pour notre part que la précontrainte

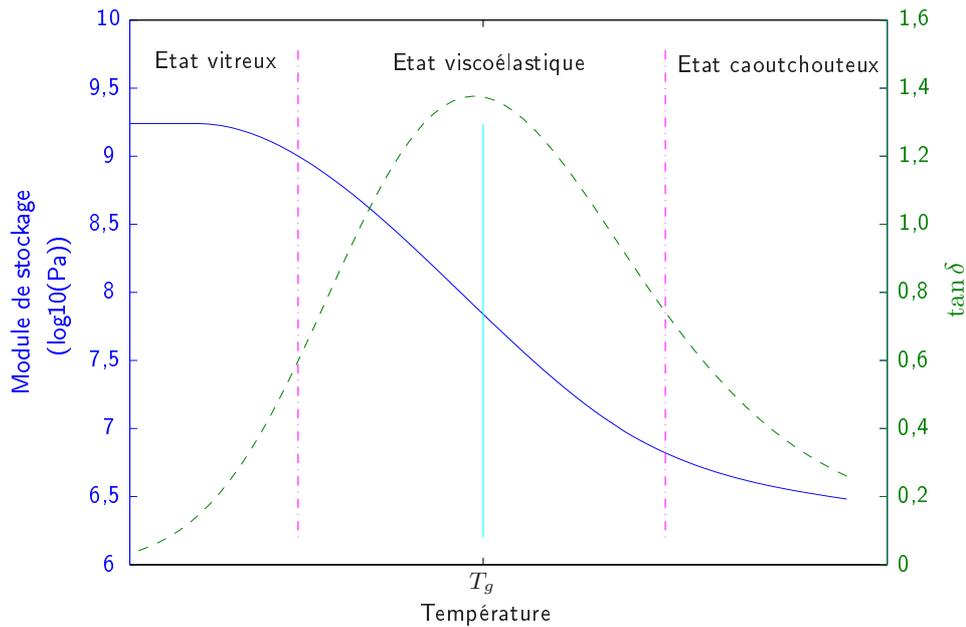


FIG. 5.5 – Représentation générique du module de stockage et de  $\tan \delta$  en fonction de la température, toutes les autres variables étant fixées.

est nulle dans les systèmes amortissants étudiés ; le principe d'adhésion des patches utilisés (§ 1.4) nous semble justifier cette hypothèse.

Le principe de superposition fréquence/température permet de relier les deux variables de température et de fréquence sous la forme d'une seule appelée variable réduite, dont la forme est explicitée dans la loi WLF (du nom de ses auteurs William, Landel et Ferry [127]). Selon cette loi, applicable aux matériaux homogènes non cristallins dans la zone de transition vitreuse, il existe des combinaisons des variables duales fréquence/température donnant des caractéristiques d'amortissement et de rigidité identiques. Un polymère chaud et sollicité à haute fréquence pourra par exemple être aussi rigide et dissipatif qu'un polymère froid sollicité en basse fréquence. De même, autour d'un état de référence, fixer la fréquence et augmenter la température (comme nous l'avons fait à l'instant) revient exactement à fixer la température et à diminuer la fréquence. Le principe de superposition explique notamment que les courbes représentatives du module de stockage et de perte tracées en fonction de la température (à fréquence fixée) soient le symétrique des courbes représentatives des modules tracées en fonction de la fréquence (à température fixée).

### 5.3.3.2 Modélisation physique

La modélisation physique du comportement viscoélastique a été étudiée par de nombreux auteurs. Une synthèse bibliographique dense est présentée sur le sujet dans la thèse de Bonnet [13]. On distingue les modèles phénoménologiques caractérisant le comportement hyperélastique des élastomères à l'aide des invariants du tenseur des déformations (modèle de Mooney-Rivlin par exemple) et de mesures expérimentales. Les modèles statistiques quant à eux sont basés sur la structure moléculaire et les mécanismes microscopiques de déformation avec représentation statistique du réseau des chaînes moléculaires (utilisant par exemple la distance entre les extrémités d'une chaîne). Tous les modèles conduisent à une

expression de l'énergie de déformation décrivant le polymère à des températures supérieures à la température de transition vitreuse.

Dans l'ouvrage de Bergen [10], Lee explique que la théorie fondamentale initiale est la théorie cinétique de l'élasticité caoutchouteuse, sur laquelle se sont ensuite ajoutés différents développements théoriques. Selon cette théorie la compliance d'équilibre d'un caoutchouc vulcanisé est directement proportionnelle à la longueur des ponts formés au cours de la réticulation. Une résistance visqueuse s'exerçant sur les segments des chaînes, proportionnelle à leur longueur, explique qualitativement l'origine de la dépendance fréquentielle viscoélastique ; l'augmentation du module avec la fréquence est justifiée par le fait que des segments continûment plus courts sont inclus dans le mouvement durant l'échelle de temps expérimental. A haute fréquence, la théorie de diffusion d'Eyring (exposée dans Persoz [101]) explique que seuls les segments de chaîne composés de quelques maillons<sup>16</sup> peuvent se déplacer. Des réajustements minimes se produisent (modification des angles et longueur des liaisons, changement des distances intermoléculaires). Le mouvement peut s'amplifier à mesure que la fréquence diminue (ou que la température augmente), les segments étant alors en mesure de diffuser et le centre de gravité des chaînes de se mouvoir. Notons pour conclure la remarque de Lee [10] au sujet de la modélisation actuelle ; selon lui, la théorie est susceptible de prédire la forme de la courbe des modules, sans détail, à moins d'un ordre de différence, dans la zone viscoélastique. Les connaissances qualitatives qu'elle apporte ne peuvent donc pas remplacer une étape d'identification des caractéristiques du matériau.

### 5.3.3.3 Données de référence de l'élastomère Smactane

Nous nous sommes appuyés dans un premier temps sur des données matériau issues de tests sur viscoanalyseur réalisés par l'entreprise Metravib à la demande de la société Smac. Le viscoanalyseur de Metravib peut mesurer la rigidité dynamique de spécimens de forme variée et dans des états divers (solides, pâtes, liquides), par le biais d'essais de cisaillement, de tension-compression ou de flexion sous sollicitation forcée. Les essais peuvent couvrir de larges bandes fréquentielles et de température, et donnent la possibilité d'étudier l'influence de l'amplitude de sollicitation sur le comportement du matériau. Les données fournies caractérisent le comportement fréquentiel de l'élastomère des patches présentés au § 1.4 et s'expriment sous la forme de polynômes d'ordre trois. Le module de stockage est représenté dans la figure 5.6 et la tangente de l'angle de perte dans la figure 5.7. Le module de cisaillement complexe est donné en fonction de la fréquence par les expressions :

$$\left| \begin{array}{l} X = \log_{10}(f) \\ \log_{10}(\tilde{G}(f)) = 6,004 + 0,095 X + 0,001 X^2 + 0,013 X^3 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

On en déduit le module de rigidité par le biais de la relation  $\tilde{E}(f) = \frac{\tilde{G}(f)}{2(1+\nu)}$

Ces résultats d'identification ne fournissent pas le coefficient de Poisson complexe. Nous nous sommes inspirés des travaux de Mousavi *et al* [93] et de Giovagnoni [90] pour pouvoir en définir une valeur raisonnable. Les résultats expérimentaux de Mousavi *et al* [93], basés sur une approche propagative, montrent que le coefficient de Poisson du polypropylène est approximativement constant en fonction de la fréquence ; ceux de Giovagnoni [90], qui

<sup>16</sup>Un maillon est constitué de deux atomes.

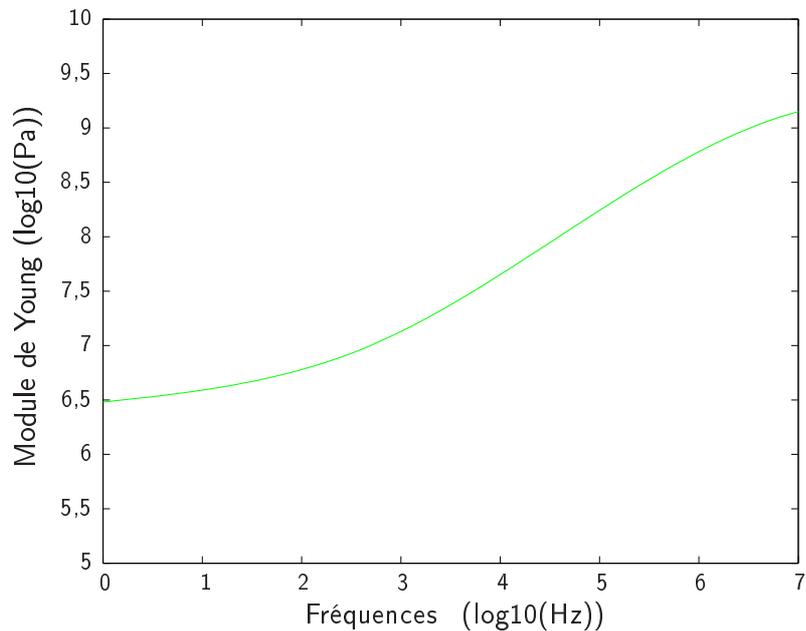


FIG. 5.6 – Module de stockage de l'élastomère Smactane en fonction de la fréquence.

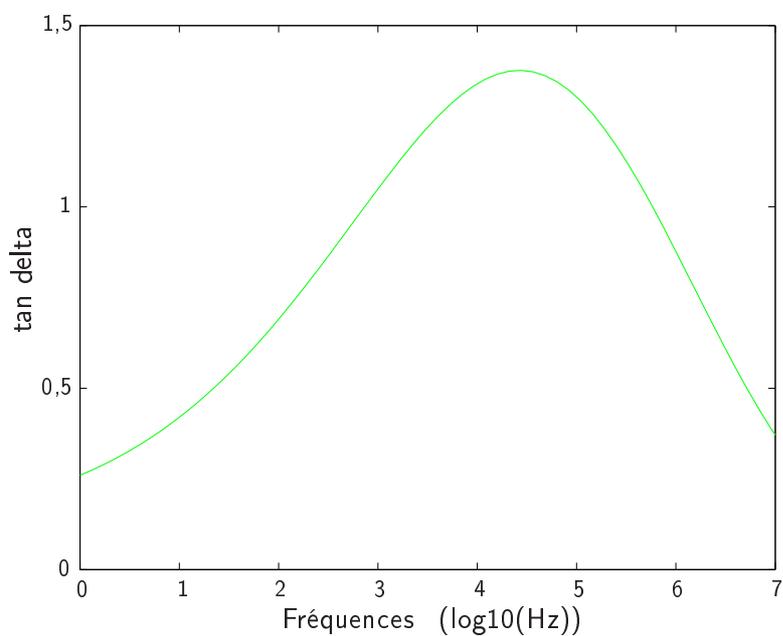


FIG. 5.7 – Tangente de l'angle de perte de l'élastomère Smactane en fonction de la fréquence.

portent sur des élastomères, donnent un coefficient de Poisson faiblement complexe avec une partie imaginaire inférieure à 1% de la partie réelle. Nous avons finalement choisi de prendre un coefficient de Poisson réel fixé à la valeur de  $\nu = 0,4875$  dans l'ensemble des simulations de la thèse. Cette valeur est assez arbitraire mais caractérise correctement le comportement quasi-incompressible du matériau.

## 5.4 Identification des caractéristiques dynamiques d'un polymère

### 5.4.1 Introduction

Les données matériau disponibles nous ont permis de faire une étude numérique simulant le comportement de la structure étudiée dans l'expérience présentée au § 1.4.2. La comparaison de l'amortissement<sup>17</sup> viscoélastique modélisé à l'amortissement expérimental est présentée dans la figure 5.8, dans le cas des trois configurations de traitement testées. Pour chacune d'entre elles, l'amortissement expérimental est obtenu en soustrayant à l'amortissement total mesuré l'amortissement de la plaque sans traitement. Il est supposé que les sources d'amortissement autres que la viscoélasticité du polymère (thermoélasticité, couplage fluide/structure) engendrent une dissipation similaire que la plaque soit traitée ou non, et que l'amortissement de l'aluminium des patches est négligeable. Les résultats du

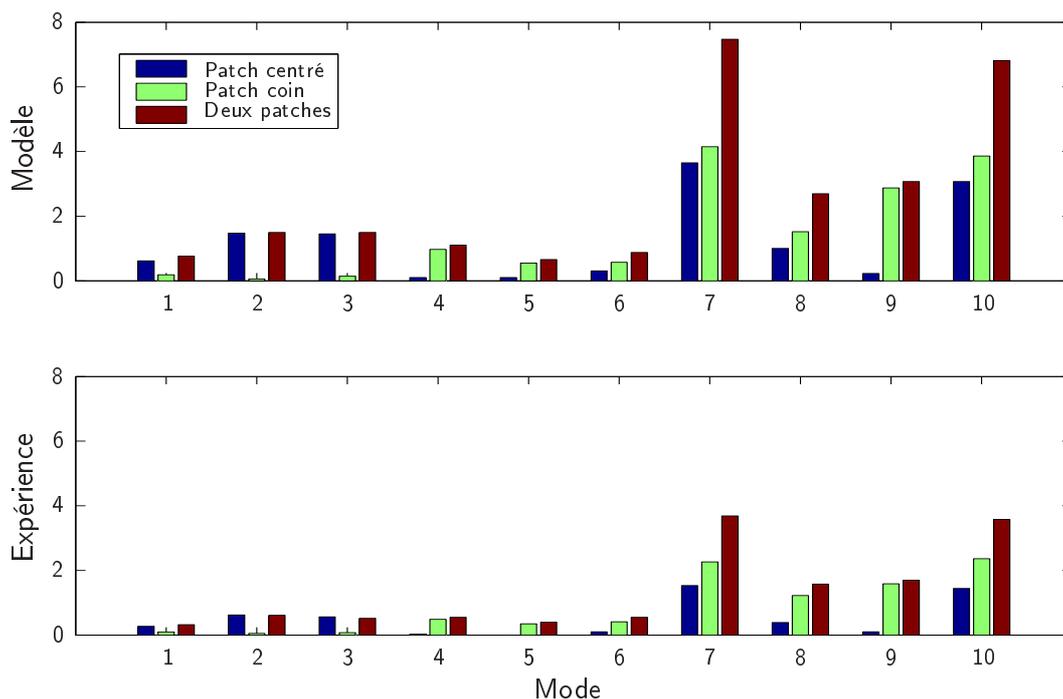


FIG. 5.8 – Comparaison de l'amortissement modélisé et de l'amortissement expérimental apporté par les patches pour trois configurations de traitement par patch. Plaque libre de dimensions  $35\text{cm} \times 40\text{cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

diagramme nous font remarquer la grande similitude de l'allure de l'amortissement entre le

<sup>17</sup>Amortissement donné par l'expression (1.12).

modèle et l'expérience. Quantitativement, néanmoins, les résultats sont très différents : il semble exister un rapport de proportionnalité entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques.

Deux études ont été menées pour pouvoir analyser ces disparités, et pour disposer d'un modèle conforme à l'expérience. La première a consisté à déterminer des caractéristiques matériau dans le cadre d'une expérience d'identification, et à vérifier que l'identification était satisfaisante pour des configurations variées. La deuxième s'est focalisé sur l'étude plus spécifique du collage, dont la nature altère considérablement les capacités dissipatives des traitements en polymère.

## 5.4.2 Les méthodes d'identification

La connaissance de la physique des polymères est telle qu'il n'est pas possible à l'heure actuelle de s'affranchir d'une expérience d'identification viscoélastique. L'objectif d'une telle expérience est de déterminer la fonction de relaxation  $G_{ijkl}(t)$  ou le module complexe dépendant de la fréquence  $\tilde{G}_{ijkl}(\omega)$  du matériau. Deux approches distinctes permettent de diviser les méthodes d'identification dans le registre qui nous intéresse, en dessous de  $20kHz$  : l'approche vibratoire et l'approche propagative. Elles ont été longtemps complémentaires mais sont à présent en concurrence du fait qu'elles couvrent des gammes de fréquences en partie similaires.

### 5.4.2.1 Approche vibratoire

**Méthode directe** La méthode directe consiste à étudier un échantillon de matériau dans un dispositif tel que les mesures dynamiques caractérisent directement son comportement. La DMA (Dynamic Mechanical Analysis), qui utilise éprouvettes, machine de traction, capteurs d'effort et de déplacement placés en série, est sans doute la méthode directe la plus répandue. La large variété de chargements possibles est illustrée par la figure 5.9 dans laquelle sont représentées des éprouvettes de cisaillement double et de traction/compression. L'identification de modules faiblement anisotropes est même envisageable. Notons néanmoins que la mesure n'est pas vraiment directe car l'éprouvette forme un composite constitué de métal et de polymère vulcanisé ; elle est en outre partiellement couplée au reste du banc d'essai par le biais de la fixation rigide.

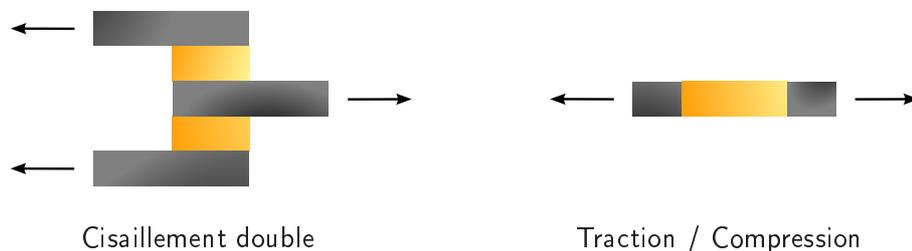


FIG. 5.9 – Exemples d'éprouvette d'essai.

La dépendance temporelle du chargement est en partie contrôlable. On peut ainsi réaliser des essais de fluage ou de relaxation en imposant une déformation ou une contrainte instan-

tanée<sup>18</sup>. Les essais de relaxation permettent théoriquement de déduire les caractéristiques haute fréquence du matériau, mais des limitations pratiques restreignent l'identification aux très basses fréquences de l'ordre du hertz. La première raison provient de la difficulté d'imposer une déformation très rapide. La deuxième raison est liée au fait que les caractéristiques hautes fréquences du matériau s'expriment dans l'instant bref qui suit l'application du chargement, rendant toute tentative d'identification délicate voire impossible. Les essais cycliques sont donc en général préférés aux essais de fluage ou de relaxation. Ils semblent même adaptés à la caractérisation des non linéarités du matériau en déplacement (Rousseau *et al* [109]).

L'une des applications du principe de superposition évoqué au § 5.3.3.1 concerne les méthodes d'identification des caractéristiques dynamiques. L'étude d'un élastomère sur une machine d'essai étant difficile sur une large gamme de fréquence, l'élastomère est placé dans une enceinte climatisée dans laquelle la température est réglable. Il est alors sollicité sur une plage fréquentielle étroite située en basse fréquence. Le principe de superposition permet alors d'extrapoler les résultats et de déterminer le comportement de l'élastomère dans les hautes fréquences.

**Méthode indirecte** La méthode vibratoire indirecte consiste à utiliser un système résonnant dont le comportement vibratoire permet de déduire les caractéristiques viscoélastiques du matériau. L'une des méthodes indirectes les plus connues est la méthode de la poutre d'Oberst. Elle repose sur l'étude d'une poutre cantilever en flexion sur laquelle le polymère à caractériser adhère. Un calcul analytique d'identification est fait à partir de la réponse de la poutre excitée à son extrémité (Garibaldi et Onah [41]).

L'avantage principal des méthodes indirectes réside dans la gamme fréquentielle qu'elles peuvent couvrir. La sollicitation étant aisément modulable cette gamme s'étend des basses fréquences (de l'ordre du Hz) jusqu'aux moyennes fréquences (de l'ordre du millier de Hz). Elles concurrencent de ce fait les méthodes propagatives. Contrairement aux méthodes directes, le chargement du matériau testé est complexe et varié : sur une structure en flexion, un traitement externe simple en élastomère subit surtout des efforts de traction/extension ; dans un traitement contraint l'élastomère est essentiellement sollicité en cisaillement. Les mesures doivent être traitées par des outils de modélisation qui permettent de déduire les caractéristiques fondamentales du polymère.

L'un des inconvénients de la méthode est lié aux lacunes des modélisations existantes qui conduisent à des hypothèses fortes : conditions aux limites non-dissipatives idéalisées, structure de référence non-dissipative. Un deuxième inconvénient concerne le fait que les valeurs de module calculées sont associées aux seules fréquences de résonance du système. On pallie le problème en changeant certains paramètres vibratoires comme la longueur de la poutre dans l'expérience d'Oberst pour obtenir une discrétisation fréquentielle suffisante.

#### 5.4.2.2 Approche propagative

Les méthodes propagatives reposent sur l'étude de la propagation des ondes dans des échantillons en élastomère assimilables à des structures monodimensionnelles. Les caractéristiques

---

<sup>18</sup>Définition théorique idéalisée de l'essai.

viscoélastiques sont déduites de la vitesse de phase et du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence à partir de mesures en différents points. Certaines méthodes tolèrent la superposition des échos grâce à la modélisation de la réflexion aux extrémités des échantillons qui peuvent être par conséquent de taille assez courte (Lemerle [77]). D'autres en requièrent la séparation et nécessitent l'utilisation de barres longues (Méthode d'impulsion séparée de Blanc [11]). Les méthodes avec superposition d'écho nécessitent trois mesures indépendantes des ondes quasi-longitudinales ou de torsion, ou deux en utilisant les conditions au limites. Hillström *et al* [57] ont mené une étude sur la multiplication des points de mesure disposés aléatoirement sur la barre, et ont montré qu'un tel dispositif conduit à la réduction de l'erreur à certaines fréquences critiques. Différentes formes d'excitation peuvent être envisagées. Hillström *et al* ont utilisé une excitation par impact axial avec pendule ou pistolet à air. Cette dernière permet d'atteindre des fréquences de sollicitation assez élevées (de 100 Hz à 10 kHz). L'un des inconvénients de la méthode mentionné par Lemerle [77] concerne le coût de fabrication des barres. Par ailleurs, l'extrapolation au modèle non-linéaire semble délicate. Enfin, les méthodes actuelles, du fait de la géométrie cylindrique et de l'approximation monodimensionnelle, ne permettent pas de mesurer l'anisotropie des matériaux. Il est possible de mesurer deux fonctions de relaxation isotropes indépendantes tout au plus ; on notera à ce titre l'étude de Mousavi *et al* [93] qui concerne la mesure du coefficient de Poisson complexe par le biais d'impacts axiaux et de torsion.

### 5.4.3 Méthode d'identification adoptée

La méthode employée relève des méthodes vibratoires indirectes utilisant un système résonant. Son originalité réside dans l'utilisation de l'outil de modélisation développé auquel est adjointe une routine de gradient conjugué. L'analyse de la sensibilité du système à des données perturbées simulant les erreurs de mesure nous a conduit à étudier deux systèmes différents. Le premier est une poutre cantilever largement couverte par un patch destiné à mesurer le module de stockage de l'élastomère. Le deuxième système est une plaque suspendue peu couverte par le traitement destinée à mesurer la capacité dissipative de ce polymère. La méthode a l'avantage de fournir des résultats bruts avec une erreur relative aux incertitudes expérimentales. Elle a été mise en oeuvre sans méthode de lissage ou de réduction d'erreur par multiplication des mesures de façon à quantifier clairement sa précision. Notons qu'elle n'utilise pas de loi de comportement a priori comme dans les identifications basées sur le principe de superposition température/fréquence.

#### 5.4.3.1 Etude de sensibilité

Le matériau élastomère utilisé est à la fois très peu rigide, relativement léger, et très dissipatif en regard à l'aluminium. Les conséquences physiques sont les suivantes :

- La dissipation est essentiellement due au polymère, et ce d'autant plus que la fréquence de sollicitation est élevée
- L'influence de l'élastomère sur la dynamique du système résonant auquel il adhère est très faible du fait de ses caractéristiques mais aussi parce qu'il est en quantité bien inférieure à la quantité de matériau de la structure

L'étude d'une plaque suspendue traitée avec des patches en élastomère présentée au § 1.4.2 nous a fourni des résultats très satisfaisants pour la mesure de la dissipation grâce à la méthode de décrément et grâce aux conditions aux limites suspendues. Elle est en revanche tout à fait insuffisante pour caractériser le module de stockage de l'élastomère : une étude numérique annexe nous a montré qu'une variation des fréquences modales mesurées bien inférieure à l'erreur de lecture (de l'ordre du centième de Hz) pouvait conduire à des résultats d'identification du module de stockage très différents voire erronés (module négatif). La rigidité du polymère, en quantité faible, n'a quasiment pas d'influence sur les fréquences de résonance de la plaque suspendue.

Il nous a donc fallu privilégier un autre système qui soit bien conditionné pour le problème d'identification du module de stockage. Notre choix s'est porté sur une poutre cantilever couverte à 91% par un patch en élastomère contraint. La structure composite formée possède les avantages suivants :

- elle possède une extrémité libre qui nous évite les problèmes de dilatation thermique et de précontrainte importants des poutres encastrees-encastrees,
- ses modes de résonances en flexion sont régulièrement espacés, et la première résonance est aux alentours de 4 Hz,
- tous ses modes sont excitables et mesurables en plaçant les dispositifs de mesure et d'excitation à l'extrémité de la poutre,
- ses déformées sont assimilables à des combinaisons de quart de longueur d'onde et ne requièrent pas une discrétisation particulièrement fine (le huitième mode de flexion situé autour de 600 Hz n'a que deux longueurs d'onde spatiales)

L'inconvénient principal de ce système concerne l'identification du module de perte. Dans la méthode de la poutre d'Oberst, un module de perte composite est identifié : il prend en compte la dissipation liée à l'encastrement et la dissipation du métal de la structure. Ces sources d'amortissement peuvent être prépondérantes en basses fréquences. Par ailleurs, une étude numérique basée sur l'identification simultanée du module de stockage et du module de perte nous a montré que l'erreur sur la mesure de l'amortissement a une influence faible sur la détermination du module de stockage, et qu'une erreur sur la mesure de la fréquence influence assez peu le module de perte. Nous avons donc opté de mener deux études séparées : la première est basée sur la poutre encastree pour identifier le module de stockage ; la deuxième s'appuie sur les résultats de l'expérience de plaque suspendue (§ 1.4.2) pour identifier le module de perte.

#### 5.4.3.2 Méthode numérique

Les deux systèmes résonants portent des informations complémentaires en partie décorréliées qui justifient leur étude séparée. Néanmoins, le module de perte influence légèrement les fréquences de résonance. Nous avons opté de prendre en compte cette influence en utilisant une méthode itérative.

La première étape de la méthode itérative se focalise sur la poutre cantilever. Une rou-

tine de gradient conjugué minimise pour chaque mode de résonance la différence entre la fréquence modale expérimentale modifiée  $f_{modif}^{Struc}$  et la fréquence modale calculée par le solveur complexe en faisant varier le module de stockage de l'élastomère. Le module de perte est considéré nul. La fréquence modale expérimentale mesurée  $f_{exp}^{Struc}$  est transformée en  $f_{Modif}^{Struc}$  pour limiter les erreurs de modélisation liées par exemple à l'anisotropie du métal. Un léger décalage égal à la différence entre les fréquences modales calculées  $f_{EF}^{Alu}$  et les fréquences mesurées  $f_{exp}^{Alu}$  de la configuration sans traitement est appliqué aux fréquences modales mesurées  $f_{exp}^{Struc}$  sur la configuration avec traitement :

$$f_{Modif}^{Struc} = f_{exp}^{Struc} + f_{EF}^{Alu} - f_{exp}^{Alu} \quad (5.19)$$

Ce décalage est dû à la très grande sensibilité de la routine d'identification aux variations de fréquence : c'est une façon simple de limiter les erreurs d'identification liées à la disparité des résultats entre la modélisation par éléments finis et les mesures expérimentales lorsqu'il n'y a pas de patch. Cette disparité (parfois quelques Hz) peut être supérieure aux erreurs de lecture tolérables par la méthode (de l'ordre du Hz). Des valeurs discrètes du module de stockage sont déduites à partir desquelles une interpolation du troisième ordre en fréquence est construite.

La deuxième étape se base sur les résultats de l'expérience de plaque suspendue. La routine de gradient conjugué minimise la différence entre l'amortissement expérimental modifié et l'amortissement viscoélastique calculé en faisant varier le module de perte de l'élastomère. La valeur du module de stockage est donnée par l'interpolation polynomiale calculée dans l'étape précédente. Sa valeur, pour un mode donné, est susceptible de varier au cours de l'étape de minimisation par gradient conjugué : les variations du module de perte altèrent la fréquence de résonance, qui altère à son tour le module de stockage. La continuité du module de perte est requise pour que l'algorithme converge correctement et justifie le calcul intermédiaire d'une interpolation polynomiale.

L'amortissement expérimental modifié est calculé en soustrayant l'amortissement mesuré de la plaque sans traitement à l'amortissement mesuré de la plaque traitée. Nous supposons donc que l'amortissement de la plaque est peu altéré par le traitement et que l'amortissement de l'aluminium présent dans les patches est négligeable devant l'amortissement de l'élastomère. La première hypothèse nous semble raisonnable : l'amortissement par couplage fluide/structure est négligeable (figure 5.3) ; le champ de déformation en compression de la plaque, peu altéré par la présence des patches employés, justifie l'hypothèse d'un amortissement thermoélastique inchangé. La deuxième hypothèse nous semble moins fondée, dans la mesure où la couche fine en aluminium recouvrant l'élastomère est susceptible d'avoir un amortissement thermoélastique non négligeable.

La troisième étape consiste en une répétition de la première étape pour affiner l'identification du module de stockage. Elle nécessite au préalable une interpolation polynomiale du module de perte réalisée à partir des valeurs discrètes obtenues dans la deuxième étape. Nous avons initié une quatrième étape calquée sur la deuxième avec les valeurs affinées du module de stockage, mais elle n'a résulté en aucun changement dans les valeurs identifiées du module de perte : trois étapes suffisent pour la convergence de la méthode. Les valeurs du module de perte sont les valeurs discrètes obtenues à la fin de la deuxième étape. Les

valeurs du module de stockage sont les valeurs discrètes obtenues à la fin de la troisième étape. Les interpolations polynomiales de ces modules ont donc seulement servi aux étapes intermédiaires de calcul.

### 5.4.3.3 Procédure expérimentale

Nous nous intéressons ici à la phase expérimentale de la méthode et plus spécifiquement à l'étude de la poutre cantilever ; l'expérience de plaque suspendue a déjà été présentée au § 1.4.2. La grande quantité de polymère favorise le bon conditionnement du problème d'identification du module de stockage, mais rend l'étude expérimentale plus délicate. La structure étant très amortie, elle est difficile à exciter et présente des amplitudes de mouvement très faibles dans le régime des hautes fréquences ; le repérage des maximums du spectre est délicat. Pour obtenir des amplitudes de vibration importantes quel que soit le mode, excitation et mesure ont été effectuées à l'extrémité de la poutre. Cette solution ne résout pas tous les problèmes : les déplacements associés au premier mode sont importants et visibles, mais aucune résonance n'est mesurable au-dessus de 600 Hz. C'est la limite claire de la méthode avec cette structure ; elle peut être accrue en employant une poutre plus courte par exemple.

L'excitation requise doit avoir un spectre relativement plat autour des fréquences de résonance ; des excitations de type bruit blanc ou de type Dirac semblent donc satisfaisantes. Trois techniques ont été essayées :

- la technique du marteau à choc. L'excitation s'est avérée insuffisante pour exciter les modes de moyenne et haute fréquence et sans doute trop forte pour le premier mode,
- la technique du pot vibrant. L'excitation est satisfaisante, les spectres d'excitation pouvant être réduits à des bandes étroites et le gain adapté au registre,
- la technique de l'électroaimant, détaillée dans la thèse de Pérignon [104]. Elle possède les mêmes avantages que la technique du pot vibrant tout en ne créant pas de contact direct avec la poutre. Aucune précontrainte liée à l'attache du système n'est donc présente. Le système d'étude est néanmoins altéré par la présence d'un petit aimant collé sur l'extrémité de la poutre.

Nous présentons dans la suite les résultats obtenus avec le troisième type d'excitation, qui nous a semblé le plus adapté. Les mesures ont été réalisées par vibrométrie laser avec le laser polytec monopoint OFV303 et le contrôleur OFV3001. La génération du signal et l'acquisition ont été réalisées par le système paragon HP3566A/67A. Un amplificateur (INTERM Risoplus) et un filtre en série ont été utilisés pour filtrer les composantes fréquentielles hors mesure du signal, en particulier en basse fréquence. La configuration de l'expérience est représentée dans la figure 5.10. La poutre a été encastrée par serrage avec deux cales maintenues par des vis.

La méthode numérique nécessite uniquement les fréquences de résonance situées au niveau des maximums de la réponse spectrale vibratoire. L'expérience a donc consisté à repérer ces maximums. Pour ce faire, la fonction de réponse fréquentielle et la cohérence ont été mesurées dans des bandes reserrées autour des modes de résonance observables, pour focaliser

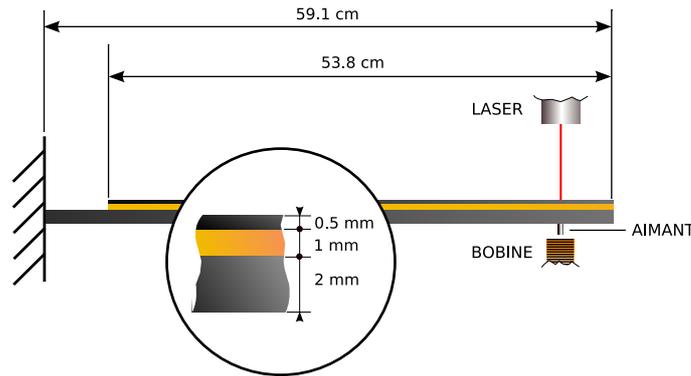


FIG. 5.10 – Géométrie de la poutre cantilever traitée avec un patch.

l'énergie du signal d'excitation. Le niveau d'amplification a souvent été proche du maximum toléré par le système<sup>19</sup>, sauf dans le cas des deux premiers modes pour lesquels le niveau a été réduit, car le déplacement de l'extrémité de la poutre est très important.

La sensibilité du laser a été systématiquement adaptée au mode et prise à la valeur maximum sans saturation (indiquée par un voyant), variant ainsi de  $1\text{mm/s}$  à  $25\text{mm/s}$  (des hautes valeurs fréquentielles vers les basses, respectivement). Une résolution fréquentielle très fine a été retenue, permettant de réaliser des mesures à  $\pm 0,06\text{ Hz}$ . 30 acquisitions moyennées ont été faites pour chaque mode. Les cohérences obtenues sont excellentes.

#### 5.4.3.4 Résultats

La figure 5.11 résume les résultats d'identification du module de stockage. Les valeurs de référence du matériau sont représentées, ainsi que les identifications des étapes 1 et 3 de la méthode itérative. Une étude de sensibilité est également incluse ; elle montre les variations du module de stockage identifié lorsqu'une perturbation de -2%, -1%, +1% et +2% a été introduite dans les fréquences de résonance identifiées expérimentalement. L'étude montre que le système reste assez sensible aux erreurs de lecture malgré le dimensionnement réalisé. On observe par ailleurs que le module de perte identifié (étape 2) et pris en compte dans l'étape 3 altère légèrement l'identification du module de stockage en provoquant une réduction de sa valeur. Le module de perte participe donc à la rigidité du matériau. Notons que les valeurs identifiées sont bien inférieures aux valeurs de référence.

La figure 5.12 présente les résultats d'identification du module de perte basés sur le module de stockage identifié à l'étape 1 et sur les valeurs d'amortissement structurel mesurées dans l'expérience de plaque suspendue. Il s'agit de l'étape 2 de la méthode itérative. L'identification a été effectuée pour les trois configurations de traitement (patch centré sur la plaque, patch situé dans le coin de la plaque, cas avec deux patches). Les résultats montrent une tendance générale satisfaisante permettant d'identifier le module de perte ; il y a toutefois pour certains modes des disparités marquées. Ces disparités peuvent résulter du mauvais conditionnement du système et de sa sensibilité aux erreurs de lecture ou de l'imprécision de la modélisation. Pour faire la part des choses, la figure 5.14 présente une étude de sensibilité montrant qu'une erreur de 1% sur la lecture de la valeur de l'amortissement conduit à des

<sup>19</sup>Le franchissement du seuil est indiqué par une diode.

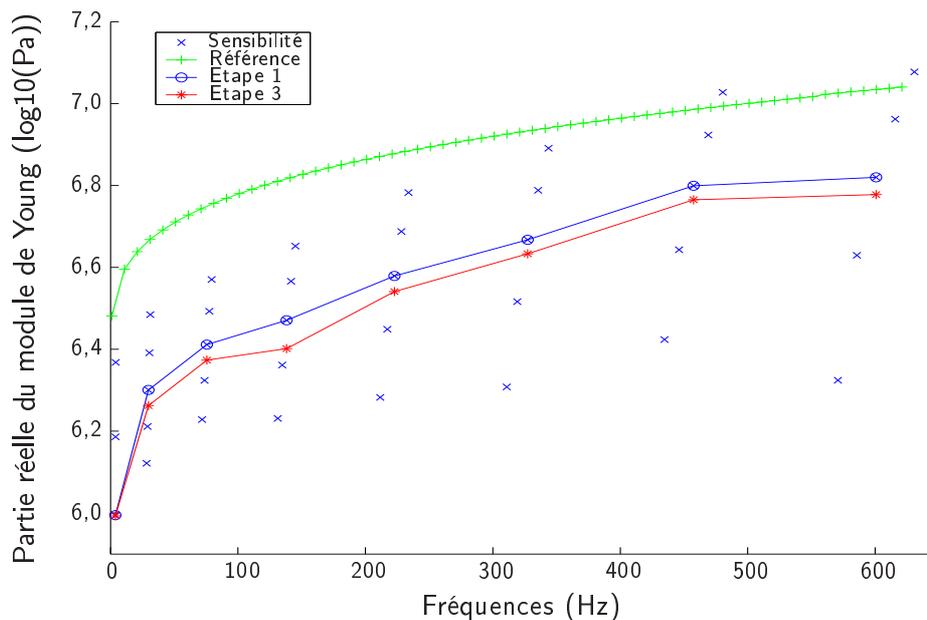


FIG. 5.11 – Partie réelle du module de Young du polymère SMACTANE identifiée en fonction de la fréquence à partir de l'expérience de poutre cantilever.

erreurs d'identification relativement peu importantes. Les variations de la valeur du module de perte suivant la configuration sont donc dues à un problème de modélisation : l'amortissement de l'aluminium des patches peut expliquer en partie la disparité des résultats. Nous retiendrons dans la suite les valeurs estimées à partir de la configuration à deux patches.

La comparaison entre les valeurs identifiées et les valeurs de référence nous amène à penser que l'identification effectuée n'est pas celle d'un matériau homogène : le matériau identifié est un matériau composite constitué du polymère et de la colle. Il n'en demeure pas moins que les valeurs identifiées permettent d'obtenir des résultats de modélisation concordants avec l'expérience (figure 5.15) ; les caractéristiques obtenues en se basant sur la configuration à deux patches permettent de modéliser très correctement l'amortissement de toutes les configurations.

#### 5.4.4 Etude du collage

L'objet de ce paragraphe concerne l'influence du collage, qui est susceptible semble-t-il de faire varier l'amortissement structural d'un facteur de 2. Nous avons donc procédé comme suit : nous avons introduit une épaisseur de colle de  $0,2\text{mm}$  entre la structure et le polymère, de densité égale à celle de l'élastomère. La valeur de la rigidité de la colle a été augmentée de façon continue, depuis des valeurs très basses ( $E_{colle} = 10000\text{Pa}$ ) jusqu'à des valeurs très hautes supérieures à la valeur du module de l'aluminium. Les valeurs de l'élastomère utilisées sont les valeurs de référence. Les figures 5.16, 5.17 et 5.18 présentent la valeur de l'amortissement structural calculé en fonction de la variation du module de la colle pour les deux premiers modes de la plaque suspendue (à 46 Hz et 62 Hz) et pour le sixième mode (à 186 Hz environ), respectivement. La configuration étudiée est celle d'un patch unique centré sur la plaque.

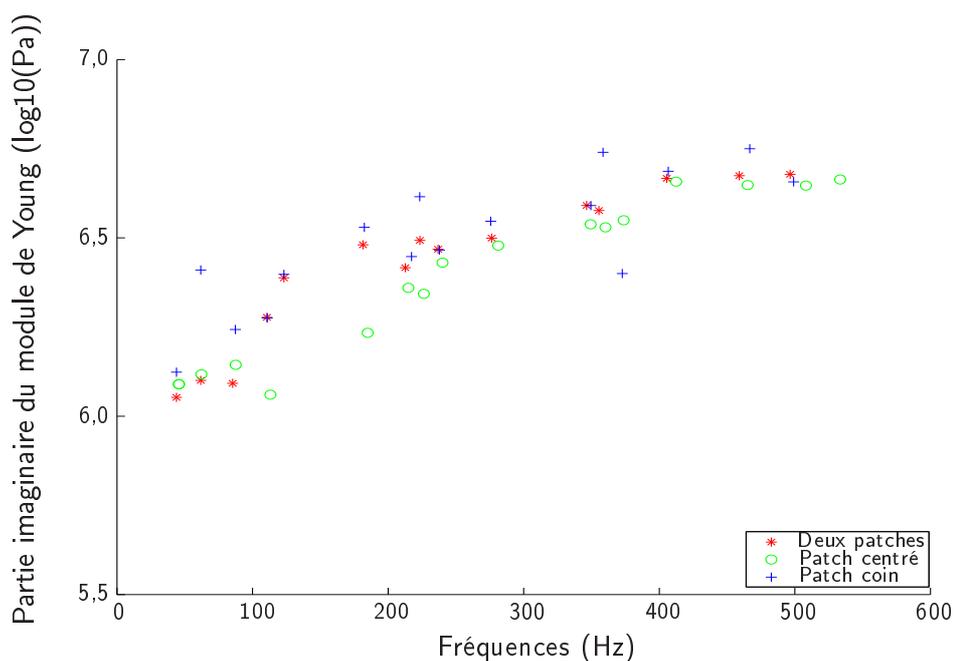


FIG. 5.12 – *Partie imaginaire du module de Young du polymère SMACTANE identifiée en fonction de la fréquence à partir de différentes configurations de traitement sur une plaque suspendue.*

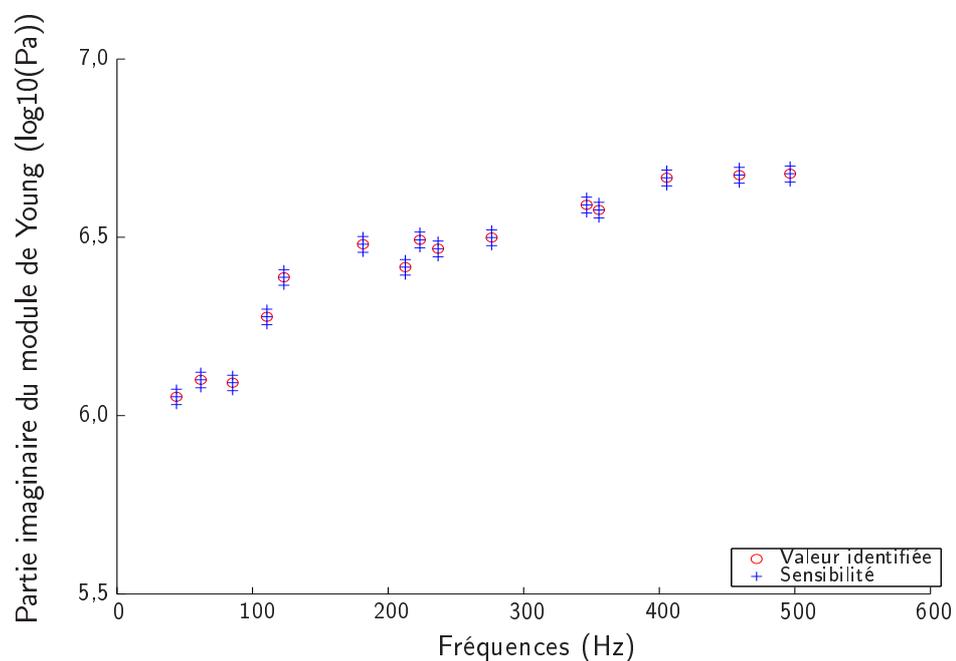


FIG. 5.13 – *Etude de sensibilité. Partie imaginaire du module de Young du polymère SMACTANE identifiée en fonction de la fréquence à partir de la configuration de traitement à deux patches sur une plaque suspendue.*

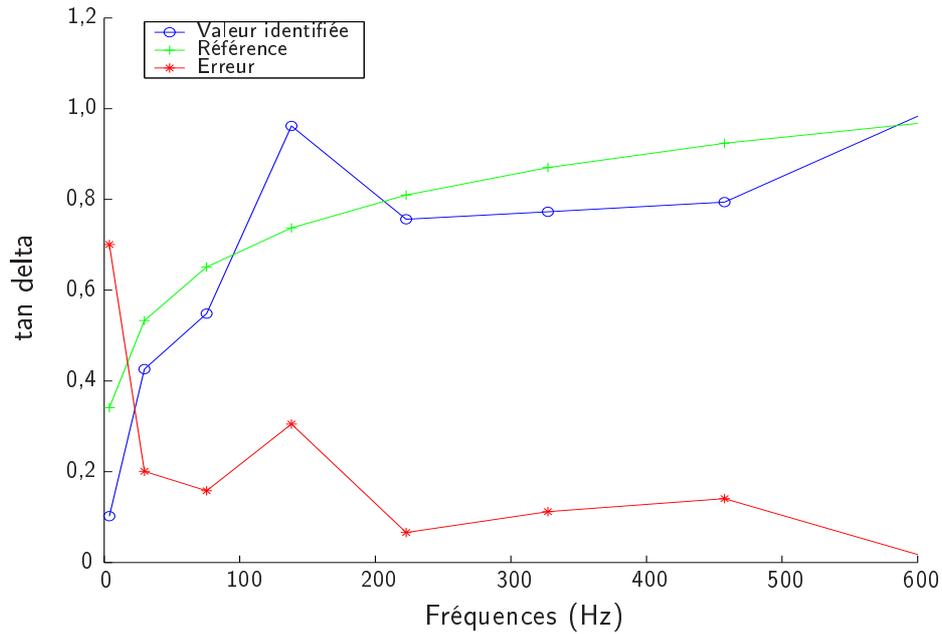


FIG. 5.14 – Caractéristique amortissante identifiée ( $\tan \delta$ ) du polymère SMACTANE en fonction de la fréquence.

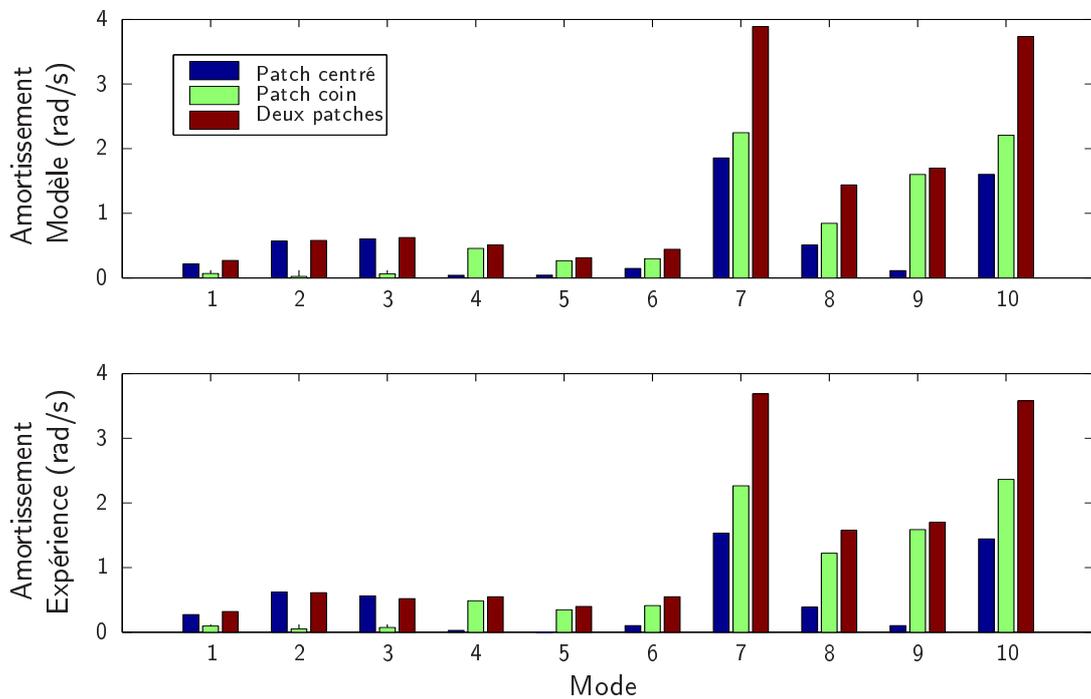


FIG. 5.15 – Comparaison de l'amortissement modélisé après identification et de l'amortissement expérimental apporté par les patches pour trois configurations de traitement par patch. Plaque libre de dimensions  $35\text{cm} \times 40\text{cm} \times 0,2\text{ cm}$ .

On observe que la mince couche de colle a une influence considérable sur les valeurs obtenues. On note notamment qu'une colle très rigide est à privilégier pour les trois modes représentés. Une rigidité semblable à celle de l'aluminium permettrait de multiplier par six la valeur de l'amortissement structural; un tel matériau, à la fois très rigide et aussi dissipatif que l'élastomère, n'existe malheureusement pas à l'heure actuelle. Il est en outre possible de déterminer la valeur de la rigidité de la colle en se référant aux valeurs d'amortissement expérimentales obtenues (après y avoir soustrait la valeur de l'amortissement du métal). Les courbes représentées conduisent toutes trois à des valeurs de module sensiblement proches de  $E_{colle} \sim 1,0 \cdot 10^{5,8}$ .

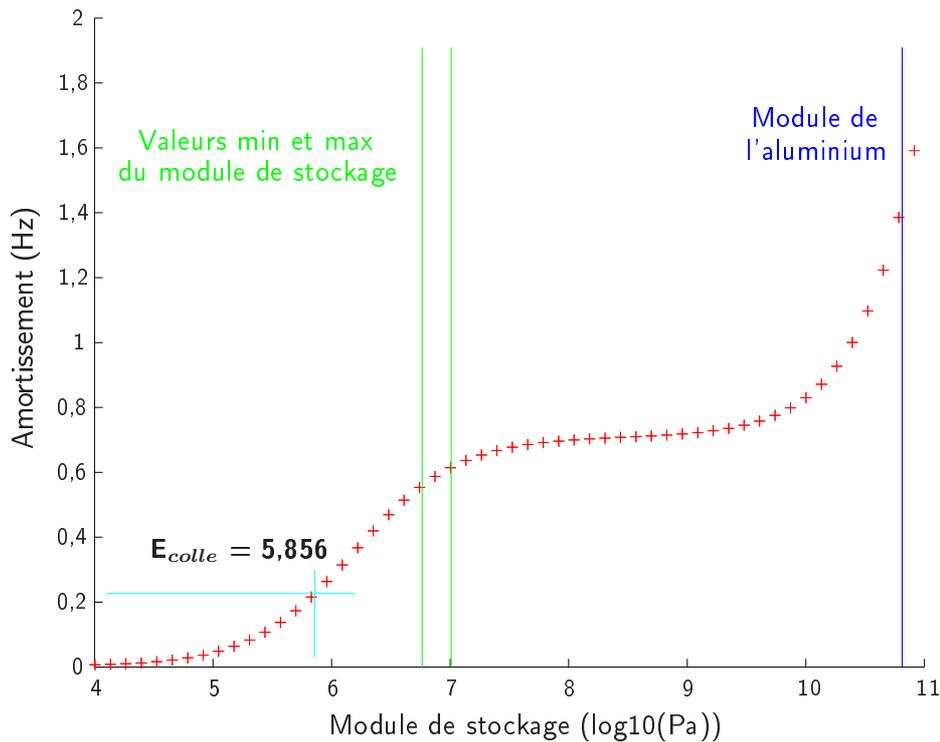


FIG. 5.16 – Influence de la rigidité de la colle sur l'amortissement du mode à 45 Hz.

## 5.5 Bilan et conclusions du chapitre

Ce chapitre a porté sur l'étude de l'amortissement viscolastique dans les structures composites en aluminium et en élastomère. L'analyse du comportement des matériaux ne permettant à l'heure actuelle que des prédictions qualitatives, une identification de l'amortissement viscoélastique a été effectuée dans l'aluminium et l'élastomère. L'identification de l'amortissement viscoélastique dans l'aluminium s'est basée sur les résultats expérimentaux de l'expérience de plaque suspendue présentée au § 1.4.2 et sur les résultats numériques de modélisation thermoélastique, et a conduit à l'estimation d'un facteur de qualité constant sur la plage fréquentielle étudiée. La valeur obtenue, très faible, est cohérente avec les résultats de la littérature. Elle témoigne de la grande précision de notre modèle thermoélastique ainsi que de la méthode de mesure expérimentale de l'amortissement.

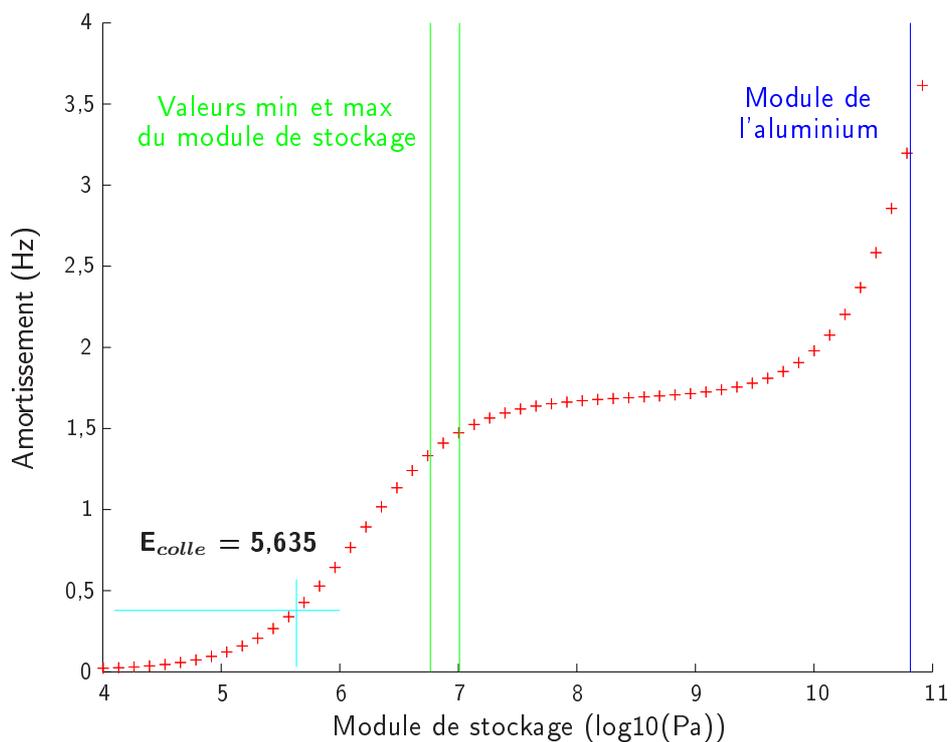


FIG. 5.17 – Influence de la rigidité de la colle sur l'amortissement du mode à 62 Hz.

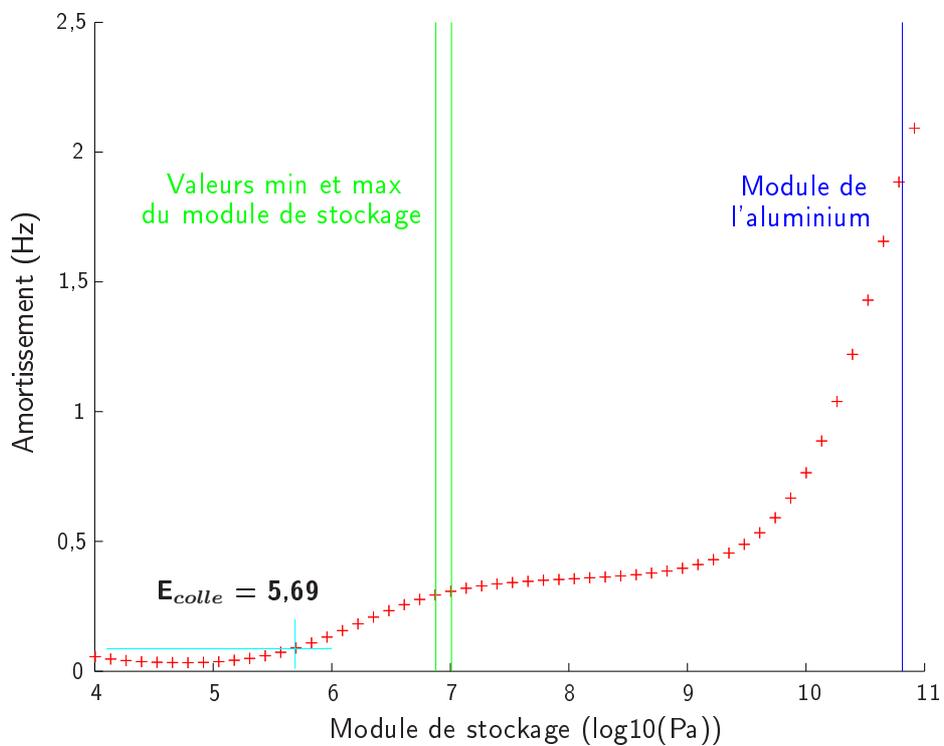


FIG. 5.18 – Influence de la rigidité de la colle sur l'amortissement du mode à 190 Hz.

L'identification de l'amortissement dans l'élastomère s'est appuyée sur l'expérience de plaque suspendue d'une part, et d'autre part sur l'analyse modale d'une poutre cantilever recouverte d'un traitement en élastomère contraint. Le problème d'identification associé à la configuration de plaque suspendue est à la fois très bien conditionné pour estimer la dissipation dans l'élastomère et très mal conditionné pour évaluer sa rigidité ; c'est l'inverse pour le problème associé à la poutre cantilever : l'ensemble des deux expériences nous a donc permis de réaliser une identification de bonne qualité des caractéristiques de l'élastomère. L'information émanant des deux configurations a été combinée par le biais d'un processus itératif.

La méthode indirecte utilisée, relativement lourde, a été validée par les résultats expérimentaux. S'il nous semble que la méthode directe est plus performante, la méthode indirecte a l'avantage de mettre en lumière la qualité de l'outil de modélisation. Elle nous a permis notamment d'expliquer l'importance de la couche d'adhésif et de comprendre pourquoi les données de référence de l'élastomère ne sont pas suffisantes pour bien modéliser les patches étudiés. Nos simulations ont montré par ailleurs que la dissipation structurelle peut être considérablement accrue en augmentant la rigidité de la colle.

# Chapitre 6

## Optimisation

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>160</b>
<b>6.2</b>	<b>Préalables à l'optimisation</b>	<b>160</b>
6.2.1	Définition d'une fonctionnelle	160
6.2.2	Configurations étudiées	161
6.2.3	Influence de la distorsion du maillage	162
6.2.4	Influence dimensionnelle	165
6.2.5	Influence des conditions aux limites	167
<b>6.3</b>	<b>Etudes quantitatives simples de traitements en élastomère contraint</b>	<b>169</b>
6.3.1	Introduction	169
6.3.2	Influence de la position du patch	170
6.3.3	Influence la taille des patches	177
6.3.4	Influence de l'épaisseur des couches du patch	184
6.3.5	Influence de la rigidité et de la masse de la couche supérieure	189
<b>6.4</b>	<b>Etude de différents traitements amortissants</b>	<b>191</b>
6.4.1	Etude de la position d'un traitement en élastomère contraint	192
6.4.2	Etude de la position de différents traitements amortissants	192
<b>6.5</b>	<b>Optimisation multiparamètre sur des structures académiques</b>	<b>197</b>
6.5.1	Etude d'une poutre encastree-encastree	198
6.5.2	Etude de plaques	201
<b>6.6</b>	<b>Bilan et conclusions du chapitre</b>	<b>207</b>

---

## 6.1 Introduction

Ce chapitre concerne l'étude numérique du comportement de structures amorties par un traitement en polymère pour la réduction de bruit. Il repose sur les qualités de précision, de rapidité et de robustesse des routines de modélisation vibroacoustique et se présente naturellement comme l'aboutissement final de ce travail de thèse. Les finalités du chapitre sont multiples. S'il nous importe de découvrir pour une structure donnée la configuration de traitement optimale pour la réduction de bruit, nous attachons également beaucoup d'importance à la compréhension du comportement vibroacoustique structurel et à la définition de certaines règles générales débouchant sur un savoir-faire pratique. Le chapitre est constitué de résultats numériques commentés qui ne nécessitent pas de prérequis théoriques particuliers. Il est original à double titre : d'une part, il remédie en partie à l'absence dans la littérature scientifique d'études sur les performances des traitements amortissants (constat réalisé par Nakra [94]) ; d'autre part, il a été pensé pour servir de guide pratique aux ingénieurs et expérimentateurs qui réalisent et appliquent ces traitements.

La première partie du chapitre est constituée de remarques et de calculs préalables destinés à préciser le problème d'optimisation. La dépendance des résultats à la déformation du maillage est étudiée. Dans la mesure où l'ensemble du chapitre se base sur des structures de type plaque/poutre à dimensions fixées en conditions d'encastrement, il a été jugé utile de présenter également quelques résultats sur l'influence des conditions aux limites et des dimensions structurelles sur la puissance rayonnée.

La deuxième partie se focalise sur l'étude de l'influence d'un patch en polymère contraint sur la puissance acoustique rayonnée et sur l'amortissement d'une poutre. L'étude des paramètres géométriques principaux (position et dimensions du lamellé ; épaisseur, rigidité et densité des couches du lamellé) permet de définir des règles simples pour réduire le bruit rayonné par les modes de flexion.

La troisième partie du chapitre présente une étude des performances de traitements particuliers (inserts, patches superposés, élastomère non contraint, élastomère contraint) appliqués à une plaque encadrée.

La quatrième et dernière partie s'intéresse enfin à la détermination d'une configuration optimale pratique de traitement en élastomère contraint sur une plaque encadrée et sur une poutre encadrée-encadrée. Des études d'optimisation paramétrique à quatre ou cinq variables sous contrainte de poids du traitement sont présentées ainsi qu'une optimisation locale de la forme du contour du patch maximisant l'amortissement viscoélastique.

## 6.2 Préalables à l'optimisation

### 6.2.1 Définition d'une fonctionnelle

L'optimisation consiste à déterminer parmi un ensemble de configurations possibles, décrites par un jeu de variables, celle qui satisfait au mieux un critère donné. Dans notre étude, la position des patches ou leur forme (épaisseur, largeur,...) sont des exemples de variable dont il s'agit de trouver la valeur optimale. Le critère se base sur la minimisation ou la maximisation d'une fonctionnelle adéquate. Parmi les quantités dont nous disposons, l'amortissement viscoélastique semble tout à fait adapté pour construire une fonctionnelle. En maximisant l'amortissement viscoélastique, l'amortissement total est susceptible d'avoir

de grandes valeurs et les déplacements vibratoires susceptibles d'être faibles. Si nous nous intéressons à une bande fréquentielle donnée, contenant un certain nombre de modes, la fonctionnelle peut être bâtie en sommant l'amortissement viscoélastique de ces modes. D'un point de vue purement acoustique, la minimisation de l'amortissement acoustique semble pertinente : le couplage fluide structure, comme la pression rayonnée par la structure (à amplitude vibratoire fixée), s'en trouvent réduits. Certaines configurations de traitement rendent en effet la structure plus ou moins bruyante en altérant la distribution de masse, de rigidité et d'amortissement du système.

En réalité, aucun des deux critères ne semble totalement satisfaisant pour la réduction de bruit, dans la mesure où le rayonnement est un phénomène complexe influencé par les effets combinés du couplage fluide structure et de l'amortissement total du système. Nous privilégions donc l'utilisation de la puissance acoustique rayonnée pour bâtir une fonctionnelle. Elle permet de déterminer des solutions pertinentes là où une étude basée sur les deux critères précédents (amortissement viscoélastique et amortissement acoustique) débouche parfois sur deux solutions incompatibles. L'utilisation de la puissance acoustique reste pour autant critiquable. Elle se base sur une excitation donnée qui particularise le résultat, alors que l'amortissement est une quantité spécifique à la structure. Elle est numériquement coûteuse à évaluer. Par ailleurs, notre étude a été menée en dehors de toute considération perceptive ou psychoacoustique, et le critère employé est donc à ce titre également critiquable. Toutefois, il nous semble raisonnable d'avoir opté pour une quantité moyennée dans l'espace, globale, plutôt qu'une quantité locale comme la pression acoustique sur laquelle se basent la plupart des programmes de sonie. Nous utiliserons fréquemment dans ce chapitre la puissance acoustique associée à un mode de résonance particulier : il s'agit simplement de la puissance rayonnée calculée à la fréquence de ce mode. Celui-ci n'est pas l'exclusif contributeur au rayonnement à cette fréquence ; de ce fait, il est abusif de parler de puissance acoustique modale. Mais le lien que nous définissons entre le mode et cette quantité facilite néanmoins l'analyse de l'efficacité des traitements.

### 6.2.2 Configurations étudiées

Les études se sont focalisées sur deux types de structure : plaque et poutre. Les caractéristiques générales des deux structures et du milieu aérien, présentées dans le tableau 6.1, ont été conservées tout au long des simulations de ce chapitre. La configuration de plaque encastrée bafflée est sans doute celle qui a le plus d'intérêt pratique nous semble-t-il. La configuration de poutre encastrée-encastrée bafflée est tout aussi intéressante et a été largement étudiée. Si son intérêt pratique est limité<sup>1</sup>, elle est numériquement moins coûteuse à modéliser que la plaque car nous utilisons un seul élément dans la section. Un tel maillage est suffisant pour assurer la convergence de la méthode de modélisation vibratoire ainsi que celle de la méthode de modélisation acoustique avec hypothèse de baffle. Dans le cas non bafflé, une étude numérique nous a montré que le code de calcul à éléments de frontière développé nécessite un minimum de huit éléments dans la largeur de la poutre car la distribution du potentiel double couche n'est pas uniforme. La deuxième justification de l'étude de poutres bafflées se fonde sur leur géométrie quasi-monodimensionnelle qui facilite l'analyse de l'influence des traitements sur le rayonnement des modes de flexion.

---

<sup>1</sup>Les poutres rayonnent en général assez peu ; par ailleurs, pratiquement, la plupart des poutres doivent être modélisées sans baffle.

Module de Young de l'aluminium	65 MPa
Coefficient de Poisson de l'aluminium	0,3
Densité de l'aluminium	2700 kg.m <sup>-3</sup>
Densité de l'air	1,2 kg.m <sup>-3</sup>
Célérité dans l'air	340 m.s <sup>-1</sup>
Densité de l'élastomère	1190 kg.m <sup>-3</sup>
Coefficient de Poisson de l'élastomère	0,4875
Epaisseur de l'élastomère (traitement)	1,2 mm
Epaisseur de l'aluminium (traitement)	0,5 mm

Dimensions de la poutre	1m × 2cm × 5mm
Maillage x × y × z	50 × 1 × 1

Dimensions de la plaque	35cm × 40cm × 2mm
Maillage x × y × z	20 × 20 × 1

TAB. 6.1 – Données générales utilisées pour les simulations d'optimisation.

Les caractéristiques du polymère sont données analytiquement et représentées au § 5.3.3.3. Nous avons décidé d'utiliser les caractéristiques du matériau évaluées par la société Metravib et données par l'équation (5.18) plutôt que celles identifiées au § 5.4.3. Ceci tient au fait que nous effectuons l'étude de configurations variées pour lesquelles il est préférable d'avoir les véritables caractéristiques matériau. Nous formulons donc l'hypothèse que le polymère adhère parfaitement à l'aluminium<sup>2</sup>. Par ailleurs, l'amortissement de l'aluminium n'a pas été inclus pour faciliter l'analyse des résultats qui comprennent déjà trois quantités principales : la puissance acoustique rayonnée, l'amortissement viscoélastique et l'amortissement acoustique.

### 6.2.3 Influence de la distorsion du maillage

L'optimisation d'un système ne peut être effectuée raisonnablement que si un certain nombre de prérequis ont été préalablement satisfaits : l'outil de modélisation numérique doit avoir été validé, si possible expérimentalement ; la modélisation et la résolution d'une configuration donnée doit être rapide. Nous estimons ces conditions vérifiées ; il nous reste cependant à tester l'influence du maillage sur les résultats. Nous présentons ici une étude spécifique sur la distorsion du maillage. Une poutre recouverte d'un traitement contraint a été maillée avec des éléments rectangulaires. Le maillage a été altéré de façon à ce que l'angle aigu des parallépipèdes formés par les éléments passe progressivement de 90° à 28° environ, ce qui correspond à un angle de distorsion variant de 0° à 62°.

---

<sup>2</sup>Hypothèse non vérifiée par les patches étudiés

La figure ci-contre représente une extrémité de la poutre maillée lorsque la distorsion est maximale. La finalité de l'étude est multiple : il s'agit d'abord d'un test supplémentaire sur les performances des éléments développés qui s'ajoute aux études de convergence présentées au § 2.3.1.2. L'étude permet par ailleurs d'observer l'influence de la distorsion des éléments sur le calcul acoustique. Celui-ci est affecté dans une certaine mesure par des résultats vibratoires modifiés, mais aussi par un calcul de double intégration de surface (équation (4.39)) faisant intervenir une matrice de transformation dont les termes extradiagonaux ne sont plus nuls.

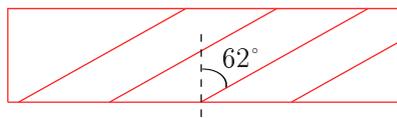


FIG. 6.1 – Maillage le plus distordu.

Le tableau 6.2 présente la variation relative en % de la fréquence et des amortissements entre la configuration la plus distordue et la configuration de référence pour les huit premiers modes de flexion. Deux d'entre eux sont des mouvements de flexion dans le plan de la poutre (direction  $y$ ) ; leur amortissement acoustique n'a pas été donné du fait qu'il est sans véritable sens physique<sup>3</sup>. La variation de puissance exprimée en niveau<sup>4</sup> est également présentée. On note que la distorsion rigidifie la structure en tirant les fréquences vers le haut, et qu'elle accroît l'amortissement acoustique. Ramenée à un niveau, la variation de puissance acoustique rayonnée est relativement faible.

Mode	z1	z2	y1	z3	z4	y2	z5	z6
<b>Fréq. dans l'air (Hz)</b>	25,5	70,4	95,2	136,4	222,7	262,3	329,3	456,5
<b>Fréq. dans l'air (%)</b>	1,00	1,85	1,34	2,94	4,23	2,64	5,65	7,18
<b>Am. viscoélastique (%)</b>	1,47	0,36	3,39	-0,73	-1,63	6,63	-2,40	-3,02
<b>Am. acoustique (%)</b>	1,44	0,47	-	1,48	5,12	-	8,17	9,02
<b>Puis. ac. linéaire (%)</b>	-1,85	0,48	-	11,40	-4,32	-	10,36	-3,62
<b>Puis. ac. logar. (<math>\Delta dB_W</math>)</b>	-0,08	0,02	-	0,4687	-0,19	-	0,43	-0,16

TAB. 6.2 – Comparaison entre le maillage non distordu et le maillage le plus distordu pour les huit premiers modes de flexion d'une poutre encastree-encastree recouverte d'un traitement en elastomere contraint. Ecart relatif (%) ou ecart absolu ( $\Delta$ ) entre les quantites vibroacoustiques caracteristiques : frequence dans l'air, amortissement viscoelastique et puissance acoustique calculée à la fréquence modale.

La variation du niveau de puissance acoustique rayonnée et la variation relative d'amortissement (viscoélastique, acoustique) sont représentées dans la figure 6.2 pour les trois premiers modes de flexion dans la direction transverse  $z$ . La configuration de référence correspond à un angle de distorsion nul. Les résultats montrent pour les trois quantités que l'erreur liée à la distorsion est très modérée jusqu'à une distorsion de  $40^\circ$ . Au-delà de  $50^\circ$  l'erreur n'est plus négligeable et augmente de façon très importante avec l'angle de distorsion.

<sup>3</sup>Le baffle est placé de telle sorte que seules les composantes du mode dans la direction  $z$ , de valeur négligeable, participent au rayonnement.

<sup>4</sup>Le niveau de puissance s'exprime en  $dB_W \sim 10 \log_{10}(W)$  (§ 4.3.3.9).

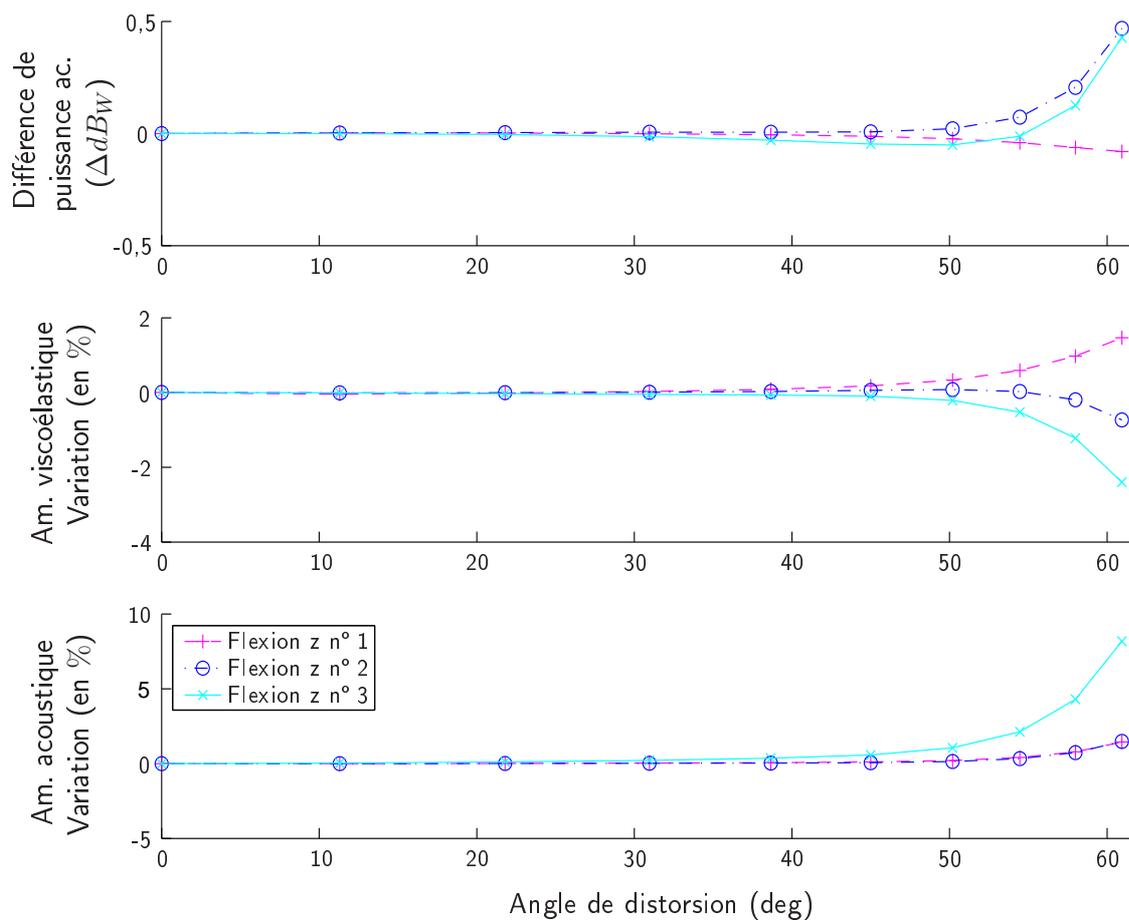


FIG. 6.2 – Etude de l'influence de la distorsion des éléments sur le calcul de l'amortissement acoustique, viscoélastique et sur la puissance acoustique rayonnée associés aux trois premiers modes de flexion suivant la direction transverse  $z$  d'une poutre encastrée-encastrée couverte par un traitement en élastomère contraint.

### 6.2.4 Influence dimensionnelle

L'essentiel du travail d'optimisation a porté sur des structures de type plaque ou poutre de taille fixe. Nous avons opté d'étudier ces structures en préservant la dimension des variables employées pour privilégier un certain sens physique. Ce choix ne permet pas d'interpréter les résultats dans un cadre général et en particulier de prévoir l'influence des dimensions structurelles sur les résultats obtenus. Pour pallier en partie cet inconvénient, nous avons souhaité mener une courte étude destinée à quantifier l'influence de la taille d'une structure sur les différents indicateurs dont nous disposons : amortissement acoustique, amortissement viscoélastique et puissance acoustique rayonnée aux fréquences modales. La simulation a concerné plus spécifiquement une poutre encastree-encastree dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.1. Un patch d'une longueur égale au dixième de celle de la poutre (soit 10 cm si la poutre fait 1m) est centré sur celle-ci et la recouvre dans la largeur. La figure 6.3 représente schématiquement la structure étudiée. Nous nous sommes intéressés au comportement vibroacoustique de la poutre traitée lorsque l'ensemble de ses dimensions sont affectées par un coefficient multiplicateur variant de 0,2 à 4,0. L'épaisseur de l'élastomère et de l'aluminium ont pour valeur respective 1,2 mm et 0,5 mm dans le cas d'un changement d'échelle nul, et dans les autres cas sont toutes deux redimensionnées de la même façon que la structure. La structure est excitée par une onde incidente normale de contenu spectral large bande (bruit blanc).

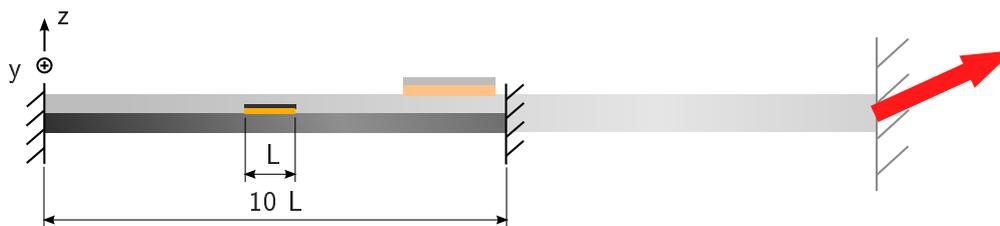


FIG. 6.3 – Représentation de la configuration de poutre traitée utilisée pour l'étude dimensionnelle.

La figure 6.4 représente la puissance acoustique calculée aux fréquences de résonance des quatre premiers modes en fonction du coefficient d'échelle ; il s'agit en quelque sorte d'une puissance acoustique modale. Parmi ces quatre modes, trois d'entre eux sont des modes de flexion suivant la direction  $z$ , le mode restant étant un mode de flexion suivant la direction  $y$ . La figure présente aussi l'amortissement acoustique, l'amortissement viscoélastique et la fréquence de résonance ; ces trois quantités sont des quantités modales normalisées de façon à ce que la valeur maximale soit égale à un. On observe pour l'ensemble des quantités et pour l'ensemble des modes une dépendance simple aux dimensions structurelles. Amortissement acoustique et fréquence varient en  $\alpha^{-1}$ ,  $\alpha$  étant le coefficient d'échelle<sup>5</sup>. Ceci est vérifié pour tous les modes de flexion à une exception près : on note que l'amortissement acoustique du mode de flexion dans le plan de la plaque, nommé **Flexion y n° 1**, ne suit pas la forme caractéristique observée. En réalité, le rayonnement associé à ce mode est mal estimé, dans la mesure où notre calcul se base exclusivement sur le rayonnement de la face supérieure de

<sup>5</sup>Nous avons préféré conserver l'échelle linéaire dans l'ensemble des figures pour privilégier un certain sens physique. Une échelle de représentation des amortissements et de la fréquence normalisés log log fait apparaître des droites superposées.

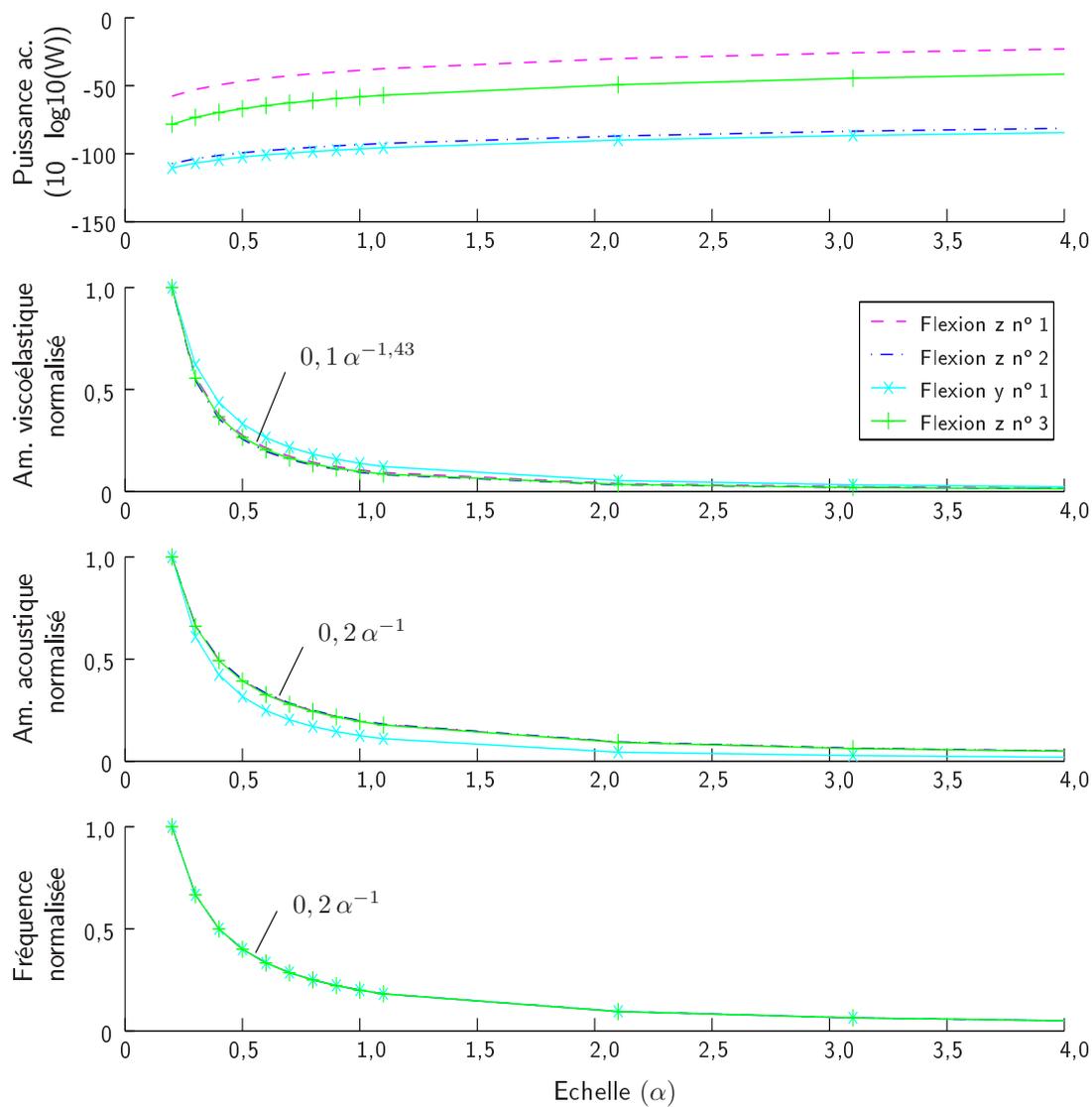


FIG. 6.4 – Influence dimensionnelle sur les caractéristiques modales d'une poutre encadrée-encadrée traitée avec un patch en élastomère contraint centré sur sa longueur.

la poutre, bafflée, et sur les déplacements transverses suivant  $z$  qui sont négligeables pour ce mode.

L'amortissement viscoélastique est estimé de façon correcte pour l'ensemble des modes, le mode de flexion suivant  $y$  compris. On note que la dépendance à l'échelle des modes de flexion suivant  $z$  est la même, leurs courbes respectives étant superposées ; le mode suivant  $y$  présente une dépendance à l'échelle légèrement différente. Notons également que l'amortissement viscoélastique a une dépendance à l'échelle en  $\alpha^{-1}$ ,<sup>43</sup> plus marquée que les autres quantités (fréquence, amortissement acoustique). Nous avons d'abord pensé que cette dépendance forte était due au fait que la fréquence et par conséquent les caractéristiques de l'élastomère varient avec l'échelle, mais l'accroissement de la dissipation avec la fréquence n'explique pas à elle seule une valeur d'exposant aussi forte.

Nous avons également mené la même étude dans le cas d'une plaque dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.1. Après normalisation, les courbes d'amortissement viscoélastique, d'amortissement acoustique et de fréquence des différents modes de flexion dans la direction transverse se superposent exactement, comme dans le cas de la poutre. La conclusion de ce paragraphe est qu'un changement d'échelle modifie les caractéristiques vibroacoustiques d'un système d'une façon qui ne permet pas d'extrapoler les résultats calculés sur une structure de taille fixée de façon immédiate. Néanmoins, les variations monotones des amortissements en fonction de l'échelle nous portent à croire qu'*une configuration optimale calculée à une échelle de taille donnée est également optimale à une échelle différente.*

### 6.2.5 Influence des conditions aux limites

La plupart des études du chapitre concerne des structures avec des conditions aux limites de type encastéré qui modélisent assez correctement les conditions aux limites de nombreuses structures (parois murales, fenêtres,...). Nous avons néanmoins souhaité consacrer une courte étude à l'influence des conditions aux limites sur le comportement vibroacoustique d'une structure avec un traitement amortissant. La structure en question est une poutre dont les données sont récapitulées dans le tableau 6.1 ; elle est traitée avec un patch de 4 cm placé au milieu de sa longueur et recouvrant sa largeur.

Les spectres de vibration et de puissance rayonnée de la structure ont été calculés avec une excitation de type acoustique<sup>6</sup>. Le point d'observation vibratoire est situé à 20 cm de l'extrémité de la poutre. Les résultats sont présentés dans la figure 6.5. On remarque que le niveau de puissance acoustique est comparable dans le cas des conditions aux limites encastérées et sur appui mais qu'il est très inférieur dans le cas des conditions aux limites libres. L'amortissement vibratoire étant à première vue similaire pour chacune des configurations, ce comportement semble résulter d'un couplage fluide structure très faible dû aux conditions aux limites libres. L'observation du spectre vibratoire montre en effet que l'onde plane excite relativement peu la structure. Le tableau 6.3 clarifie cette analyse en présentant les fréquences de résonance et l'amortissement acoustique en condition bafflée des six premiers modes de flexion suivant  $z$ , dans le cas de conditions aux limites d'encastrement, d'appui et libres. Les données confirment que l'amortissement acoustique et par conséquent le couplage fluide structure sont très dépendants des conditions aux limites vibratoires. La plaque est

---

<sup>6</sup>Onde plane à incidence normale appliquant une force de 1 Newton sur la poutre.

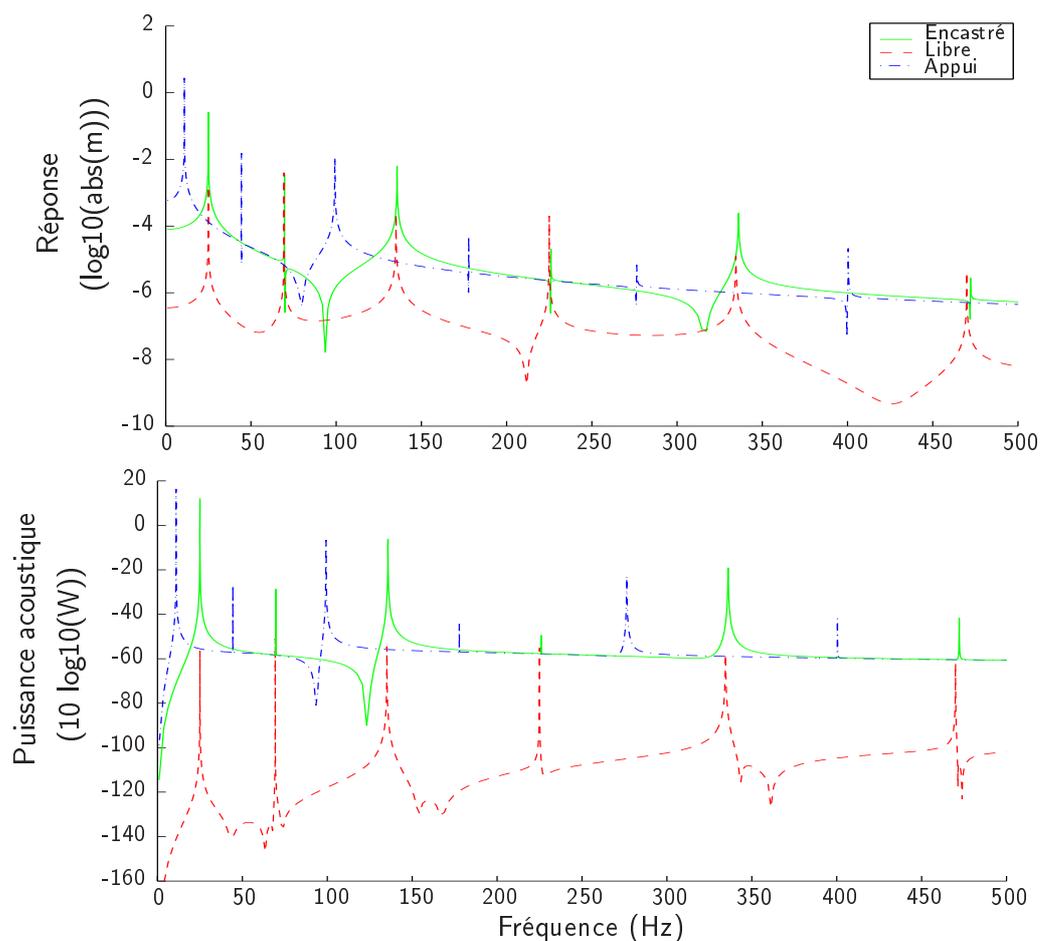


FIG. 6.5 – Influence des conditions aux limites sur les spectres de réponse de vibratoire et de puissance acoustique rayonnée d'une poutre de dimensions  $1\text{ m} \times 2\text{ cm} \times 5\text{ mm}$ .

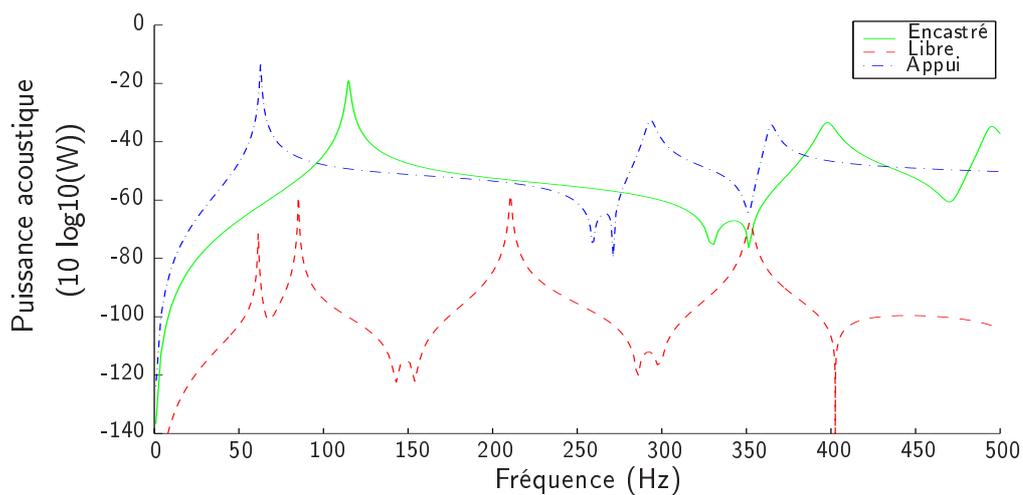


FIG. 6.6 – Influence des conditions aux limites sur le spectre de puissance acoustique rayonnée d'une plaque de dimensions  $35\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 2\text{ mm}$ .

Fréquences (Hz)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Encastrées	25,013	69,686	135,775	226,035	336,098	472,187
Libres	25,030	69,394	135,158	225,024	334,563	469,979
Appui	11,006	44,405	99,260	177,781	276,380	400,469

Am. acoustique (Hz)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Encastrées	0,0139	0,0031	0,0627	0,0793	0,0900	0,1291
Libres	0,00001	0,00000	0,00023	0,00014	0,00121	0,00034
Appui	0,0032	0,0007	0,0249	0,0297	0,0340	0,0558
Ratio caractéristique	1,91	2,82	1,84	2,10	2,18	1,96

TAB. 6.3 – Comparaison des conditions aux limites encastrée, libre et sur appui. Fréquence de résonance et amortissement acoustique des 6 premiers modes de flexion suivant  $z$  d'une poutre traitée avec un patch contraint de 4 cm. Ratio caractéristique comparant le facteur de perte acoustique des conditions aux limites encastrées et sur appui.

très couplée avec le fluide dans le cas de conditions aux limites encastrées et un peu moins dans le cas de conditions aux limites sur appui (l'amortissement étant trois à quatre fois moins important dans les basses fréquences). Remarquons que nos résultats sont homogènes à ceux de Lesueur [80] qui note un rapport de deux environ entre le facteur de perte<sup>7</sup> lié à l'amortissement acoustique en conditions aux limites encastrées et l'amortissement acoustique en conditions aux limites sur appui ; nous nommons ce rapport **ratio caractéristique** dans le tableau 6.3. Dans le cas des conditions aux limites libres le couplage est très faible, en étant un à deux ordres inférieur à celui des autres conditions aux limites. Les différences tendent à diminuer avec les modes de fréquence plus élevée.

Une étude similaire a concerné une plaque dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.1. Les résultats sont présentés dans le troisième graphique de la figure 6.5, et montrent que les conditions aux limites ont une influence comparable sur le comportement vibroacoustique des structures de type plaque ou poutre : les conditions aux limites libres rendent la structure moins couplée à l'air et par conséquent beaucoup moins sonore. Les conditions aux limites sur appui et encastrées sont assez semblables du point de vue du rayonnement.

## 6.3 Etudes quantitatives simples de traitements en élastomère contraint

### 6.3.1 Introduction

Il est reconnu que la compréhension du comportement physique d'un système favorise son optimisation. L'objectif de cette partie vise donc à identifier des règles simples caractérisant l'influence d'un patch en élastomère contraint sur une poutre. L'intérêt d'une telle struc-

---

<sup>7</sup>Relation (1.14).

ture, quasi-monodimensionnelle, se fonde sur la simplicité de l'interprétation des quantités évaluées que sont l'amortissement acoustique, l'amortissement viscoélastique de l'élastomère et la puissance acoustique rayonnée calculée aux fréquences modales. Les conditions d'encastrement et l'excitation en onde plane à incidence normale favorisent la prépondérance des premiers modes flexion symétriques orientés suivant  $z$  dans le rayonnement acoustique. Nous nous intéresserons donc spécifiquement à l'étude de ces modes, représentés dans la figure 6.7.

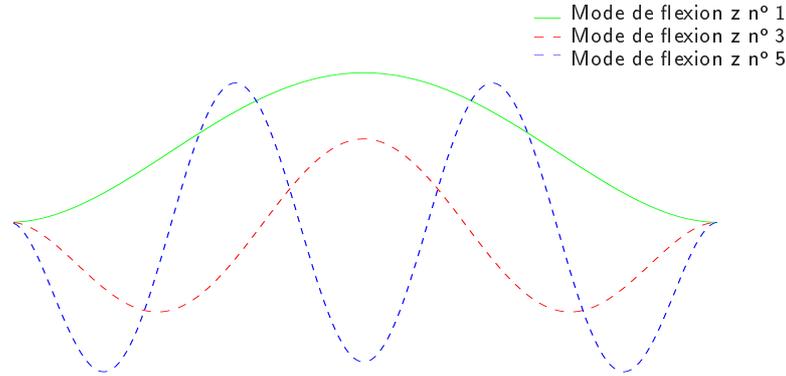


FIG. 6.7 – Représentation des déformées des trois premiers modes de flexion symétriques prépondérants dans le rayonnement acoustique (1<sup>er</sup>, 4<sup>ème</sup> et 7<sup>ème</sup> modes respectifs de la poutre).

### 6.3.2 Influence de la position du patch

Nous avons observé dans l'expérience présentée au § 1.4.2 que la position des patches en polymère contraint a une influence déterminante sur la valeur de l'amortissement. L'objet de ce paragraphe concerne l'étude de ce paramètre dans le cas de la poutre encadrée-encadrée dont les données sont résumées dans le tableau 6.1. Quatre patches de taille 1 cm, 4 cm, 10 cm et 20 cm ont été déplacés sur la longueur de la poutre ; leur largeur est égale à celle de la poutre.

#### 6.3.2.1 Résultats généraux

La figure 6.8 représente les différentes quantités modales calculées pour deux configurations de patch : un patch de 1 cm et un patch de 20 cm. Les résultats sont représentés en fonction de la position du centre du patch<sup>8</sup>. Le système étant symétrique, les graphiques représentent la première moitié de la poutre jusqu'à l'abscisse de 50 cm. Les quatre premiers modes structuraux ont été représentés. Parmi eux, le troisième mode noté **Flexion y n° 1** est un mode de flexion suivant la direction  $y$  dans le plan de la poutre. Les trois autres modes sont des modes de flexion suivant  $z$ . Les amortissements ont été normalisés à une valeur maximum de un pour pouvoir interpréter plus facilement l'allure des courbes.

Nous remarquons tout d'abord, comme nous l'attendions d'après les résultats expérimentaux, que la position des patches influence beaucoup l'amortissement viscoélastique. Nous

<sup>8</sup>Les courbes représentatives de la configuration avec un patch de 20 cm débutent donc à l'abscisse de 10 cm.

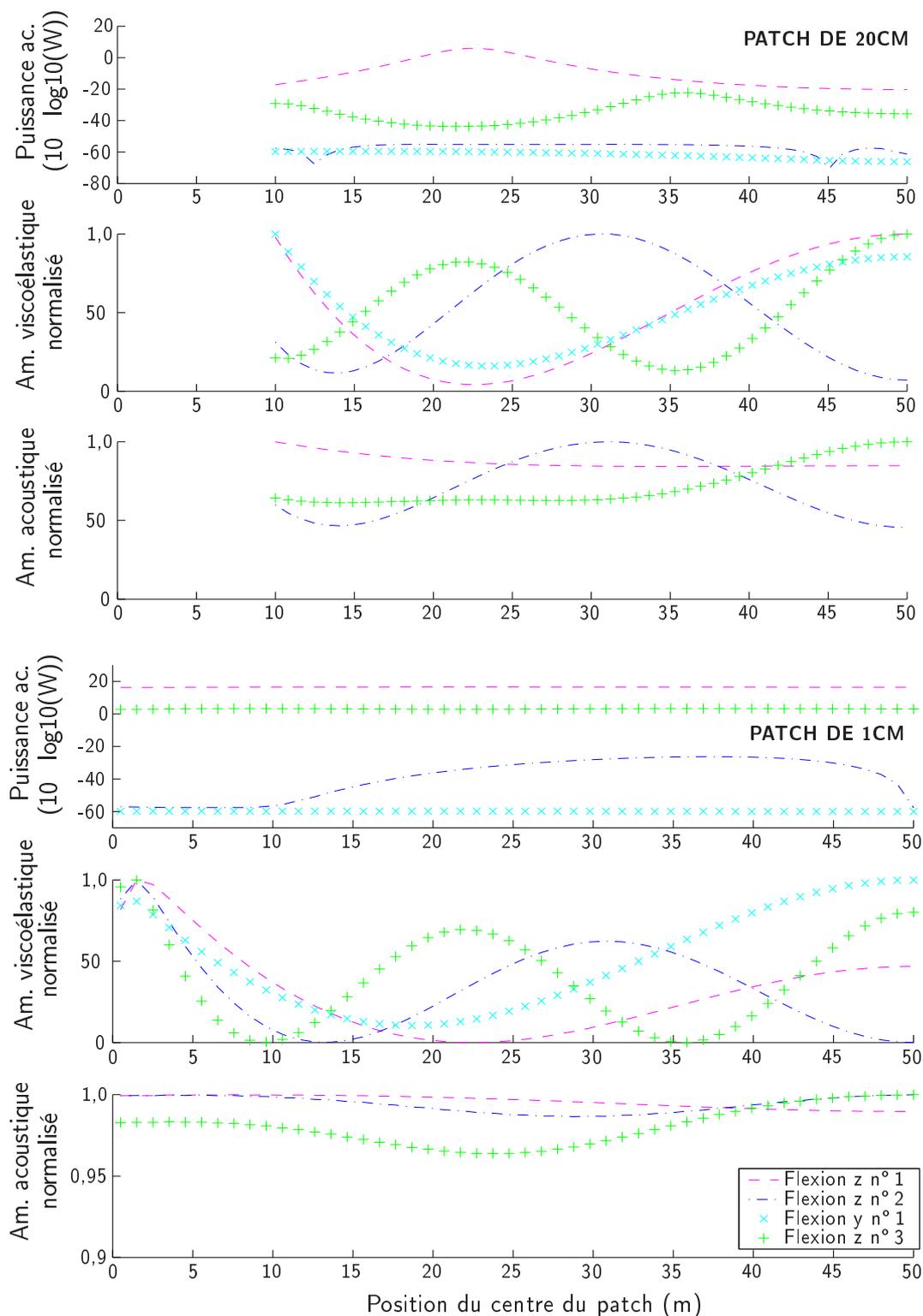


FIG. 6.8 – Influence de la position du milieu d'un patch (de taille 1 cm ou 20 cm) en élastomère contraint sur l'amortissement viscoélastique, acoustique et sur la puissance rayonnée des quatre premiers modes d'une poutre encadrée-encadrée.

observons une oscillation dont la période spatiale pour un mode donné est la même quel que soit le traitement (patch de 1 cm ou de 20 cm). Cette période spatiale semble correspondre a priori à celle des déformées modales et nous porte à croire qu'il doit exister un indicateur simple basé sur celles-ci permettant de définir une position optimale maximisant l'amortissement viscoélastique de l'élastomère contraint. On remarque par ailleurs en comparant les deux configurations que le rapport entre l'amortissement viscoélastique maximum et l'amortissement viscoélastique minimum (en une position différente) est beaucoup plus grand dans le cas d'un patch de 1 cm : *la position du traitement est d'autant plus importante que le patch est petit*. Néanmoins, même dans le cas d'un grand patch de 20 cm, l'amortissement viscoélastique peut varier d'un facteur de vingt environ suivant la position retenue pour le premier mode de flexion. Notons que la position de patch placé au milieu de la poutre semble être optimale<sup>9</sup> pour le patch de 20 cm, alors que la position proche de l'extrémité de la poutre semble être la plus appropriée pour le patch de 1 cm, pour tous les modes. Il est également intéressant de remarquer que l'allure de la courbe représentative de l'amortissement viscoélastique en fonction de la position du patch est la même pour le premier mode de flexion suivant z (**Flexion z n° 1**) et pour le premier mode de flexion suivant y (**Flexion y n° 1**), alors que le champ de déformation associé aux deux modes est a priori très différent.

Intéressons-nous à présent à l'amortissement acoustique (amortissement en Hz). On constate que ses fluctuations sont très faibles dans le cas du patch de 1 cm en restant inférieures à 3%, et qu'elles peuvent varier au maximum d'un facteur de deux dans le cas d'un patch de 20 cm. Le couplage vibroacoustique est altéré du fait de l'ajout local de masse et de rigidité qui modifient la forme générale des déformées modales. Mais le couplage est aussi sensible au changement léger de la fréquence de résonance lors du déplacement du patch, de sorte que l'interprétation des courbes obtenues est très difficile comparée à celle des courbes caractérisant l'amortissement viscoélastique.

Venons-en à la puissance acoustique rayonnée calculée à la fréquence du mode considéré. Cette quantité ne peut être rattachée au mode que si celui-ci rayonne suffisamment et participe de façon prépondérante à la puissance acoustique. Ça n'est pas le cas du premier mode de flexion suivant y. Ça n'est pas le cas non plus du premier mode de flexion anti-symétrique suivant z (**Flexion z n° 2**) qui est peu excité par l'onde plane incidente et rayonne peu. Nous ferons donc l'interprétation exclusive des deux premiers modes de flexion symétriques **Flexion z n° 1** et **Flexion z n° 3**. L'amortissement viscoélastique augmentant beaucoup avec la fréquence, ce sont les deux modes qui contribuent le plus au bruit rayonné. On remarque tout d'abord que la puissance est sensiblement constante dans le cas du patch de 1 cm pour les deux modes. On remarque en revanche que le patch de 20 cm a une influence prépondérante sur le bruit rayonné et que sa position est susceptible de faire varier le niveau de puissance d'une vingtaine de dB<sub>W</sub>. On observe par ailleurs qu'il semble exister un lien assez direct entre l'amortissement viscoélastique et la puissance rayonnée. Les maximums d'amortissement viscoélastique correspondent aux minimums de puissance rayonnée, de sorte qu'il semble pour le cas du patch de 20 cm que le niveau de puissance soit en grande partie guidé par l'amortissement viscoélastique plutôt que par l'amortissement acoustique.

Le tableau 6.4 fournit des données numériques issues des mêmes simulations mais sans normalisation. Les résultats associés aux quatre configurations de patch ont été placés dans des

---

<sup>9</sup>Constat concernant les modes symétriques uniquement et pas au mode de flexion z n° 2 anti-symétrique.

MODE z1	Position (cm)			V (Hz)		A (Hz)		P (10×log10(W))	
Patch	$p_{min}$	$V_{max}$	$A_{min}$	max	$\Delta V/V$	min	$\Delta A/A$	min	$\Delta P$
1 cm	1,5	1,5	49,0	0,00039	2320	0,01434	0,010	16,25	0,23
4 cm	2,0	2,0	49,0	0,01989	1433	0,01392	0,044	8,94	7,43
10 cm	5,0	5,0	5,0	0,20872	203	0,01336	0,117	-7,33	22,89
20 cm	50	50	34,5	0,68623	22,4	0,01346	0,186	-20,30	26,18

MODE z3	Position (cm)			V (Hz)		A (Hz)		P (10×log10(W))	
Patch	$p_{min}$	$V_{max}$	$A_{min}$	max	$\Delta V/V$	min	$\Delta A/A$	min	$\Delta P$
1 cm	1,5	1,5	24,8	0,00351	697	0,05754	0,037	2,74	0,53
4 cm	2,0	2,0	23,6	0,16692	261	0,05441	0,153	-8,50	11,63
10 cm	21,5	5,0	23,4	1,7896	40,6	0,05093	0,373	-28,78	27,12
20 cm	21,4	50	14,1	7,7677	6,6	0,05216	0,631	-43,83	21,542

MODE y1	Position (cm)			V (Hz)		A (Hz)		P (10×log10(W))	
Patch	$p_{min}$	$V_{max}$	$A_{min}$	max	$\Delta V/V$	min	$\Delta A/A$	min	$\Delta P$
1 cm	-	50	-	0,00046	8,5	-	-	-	-
4 cm	-	2,0	-	0,03449	111	-	-	-	-
10 cm	-	5,0	-	0,65736	169	-	-	-	-
20 cm	-	10	-	0,5761	5,2	-	-	-	-

TAB. 6.4 – 1er mode et 3ème modes de flexion suivant z, 1er mode de flexion suivant y. Positions optimales, valeurs extrêmes et variations de l'amortissement viscoélastique  $V$ , de l'amortissement acoustique  $A$  et de la puissance  $P$  pour quatre patches de taille différente. Le calcul acoustique pour le MODE y1 n'est pas valide et non représenté.

tableaux distincts pour chacun des modes. Nous fournissons à l'intérieur de ces tableaux la valeur optimale de puissance acoustique rayonnée (valeur minimum), d'amortissement viscoélastique (valeur maximum) et d'amortissement acoustique (valeur minimum) pour la réduction de bruit. Nous indiquons la position optimale du traitement (en cm) associée à ces valeurs. Nous donnons également l'intervalle maximum de variation de ces quantités sous la forme d'un écart relatif pour les amortissements et d'une différence de niveau pour la puissance.

Les résultats indiquant la position du centre du patch qui maximise l'amortissement viscoélastique confirment les remarques précédentes : il s'agit de l'extrémité de la poutre ou alternativement de son milieu. La position du minimum d'amortissement acoustique est très variable suivant le mode considéré et la taille du patch. Il ne semble pas qu'une règle simple puisse caractériser les résultats acoustiques. En ce qui concerne la puissance acoustique, elle est souvent minimum à l'endroit du maximum d'amortissement viscoélastique, mais pas de façon systématique. On note que la position optimale associée au mode **Flexion z n° 3** en

particulier, dans le cas d'un patch de 20 cm, diffère suivant que la fonctionnelle est associée à la puissance ou à l'amortissement viscoélastique. La position indiquée par ce dernier est néanmoins assez satisfaisante d'un point de vue acoustique (figure 6.8) et correspond à un deuxième minimum pour la puissance acoustique.

Nous pondérons nos remarques sur l'influence quasi exclusive de l'amortissement viscoélastique sur la puissance acoustique en observant pour le mode **Flexion z n° 3** dans la figure 6.8 que le couplage fluide-structure quantifié par l'amortissement acoustique joue un rôle central pour ce mode ; il modifie en effet la position optimale que nous aurions retenue en ne considérant que l'amortissement viscoélastique de l'élastomère. Ceci prouve que *l'étude acoustique est parfois nécessaire pour déterminer la configuration de traitement optimale pour la réduction de bruit*. Ceci confirme aussi les conclusions de l'une des rares études sur le rayonnement de structures avec un traitement amortissant, réalisée par Wodtke et Lamancusa [128]. En se basant sur un travail d'optimisation de la distribution de l'épaisseur d'un matériau viscoélastique sur des plaques circulaires, les auteurs expliquent que la réduction de puissance acoustique obtenue n'est pas seulement due à la réduction d'amplitude mais aussi aux changements de déformée modale et de fréquence.

L'observation de la variation des quantités étudiées est intéressante car elle permet d'estimer le potentiel du traitement en élastomère contraint. On note tout d'abord qu'il altère relativement peu le couplage-fluide structure ; la variation maximum obtenue pour la configuration avec un patch de 20 cm vaut 63% pour le mode de flexion n° 3 suivant z et 18,6 % pour le mode de flexion n° 1 suivant z. On note également que la variation d'amortissement acoustique augmente avec la taille du patch. La quantité présentant les variations les plus importantes en fonction de la position du patch est sans nul doute l'amortissement viscoélastique ; la variation maximum obtenue est de 232000 % dans le cas d'un patch de 1 cm pour le premier mode de flexion. Cette valeur assez spectaculaire est à relativiser dans la mesure où l'amortissement minimum est très faible. On remarque à nouveau que l'écart diminue avec l'augmentation de la taille du patch ; on remarque aussi qu'il diminue à mesure que l'ordre du mode symétrique considéré augmente. En ce qui concerne les maximums d'amortissement viscoélastique, on observe que leur valeur augmente très sensiblement avec la taille du patch, ainsi qu'avec l'ordre du mode considéré. Ainsi, le mode n° 3 suivant z est bien plus amorti que le mode n° 1 suivant z.

Les résultats de puissance acoustique montrent que le niveau peut être altéré dès lors que le patch est suffisamment grand et que la différence de niveau entre un traitement bien appliqué et un traitement mal appliqué peut atteindre 26 dB<sub>W</sub> dans le cas d'un patch de 20 cm pour le mode de fréquence la plus basse. La taille des patches joue un rôle prépondérant dans le niveau de puissance ; l'étude semble privilégier *l'utilisation de patches les plus grands possibles pour obtenir la meilleure réduction de bruit*.

### 6.3.2.2 Un indicateur simple de position optimale

Nous avons remarqué qu'il semblait exister un lien assez direct entre la position optimale des patches maximisant l'amortissement viscoélastique et la déformée du mode de flexion considéré. L'objet de ce paragraphe concerne la définition d'un critère simple caractérisant ce lien. Kung et Singh [70] évoquent le sujet en s'intéressant comme nous le faisons au positionnement de patches contraints sur une plaque. Ils se réfèrent à un critère de conception

empirique préconisant de placer les patches au niveau des ventres de vibration ; leur modélisation, basée sur des cinématiques de lamellés simplifiées, sur l'introduction de solutions analytiques et sur la méthode de l'énergie de déformation modale leur permet de valider ce critère pour le deuxième mode de flexion d'une poutre sur appui. Kung et Singh notent qu'il n'est pas tout à fait valide dans le cas du deuxième mode de flexion d'une poutre cantilever, en notant une différence de 10% environ entre leur estimation de la position maximisant l'amortissement viscoélastique et la position du ventre de vibration.

Le critère que nous proposons est différent. Il se base non pas sur les maximas de la déformée modale, mais sur *les maximas de la dérivée seconde de cette déformée*<sup>10</sup>. L'idée sous-jacente est d'ordre mécanique : le polymère dissipe d'autant plus qu'il est sollicité ; or, dans le cas des traitements contraints, le niveau de sollicitation dépend de la façon dont l'élastomère est cisailé et du moment de flexion local. C'est donc a priori aux endroits où la courbure est la plus importante que le patch dissipera le plus. Les figures 6.9 et 6.10 illustrent le choix de ce critère. Elles représentent la déformée modale des premier et troisième mode de flexion symétrique sans traitement, ainsi que la valeur absolue de la dérivée seconde associée à cette déformée modale. L'amortissement viscoélastique est également représenté en fonction de la position du patch et pour différentes tailles de patch.

On remarque que le critère est très pertinent pour le patch de 1 cm ; la courbe représentative de la dérivée seconde de la déformée modale a en effet une forme similaire à la courbe représentant l'amortissement de l'élastomère en fonction de la position du patch. Le critère permet même de privilégier pour le premier mode une position optimale proche de l'encastrement alors que le critère basé sur les ventres de vibration préconise le milieu de la poutre. Notre critère permet également de repérer les endroits qui doivent être absolument évités où la dérivée seconde s'annule. Nous remarquons qu'il reste valide d'un point de vue qualitatif quelle que soit la taille du patch. En ce qui concerne le patch de 1 cm, le critère semble même être quantitatif en permettant de choisir une position maximale unique, contrairement au critère classique qui ne fait pas la distinction entre les ventres de vibration. La quantification se détériore toutefois avec la taille du patch, et pour deux raisons. D'une part, un patch de grande taille altère le comportement modal et la déformée de la structure sans traitement qui nous sert de référence. Mais surtout, le critère est un critère local qui se détériore dès lors que le patch n'est plus ponctuel. Un critère plus élaboré peut être construit en mesurant la surface sous la courbe de la dérivée seconde entre le début et la fin du patch (calcul d'intégration). Ce critère permet d'expliquer simplement pourquoi il est préférable de placer le patch au milieu de la poutre plutôt qu'à une extrémité à partir d'une certaine longueur de patch. Il permet d'expliquer aussi pourquoi les variations d'amortissement viscoélastique en fonction de la position sont très importantes lorsque le patch est petit et se réduisent dans le cas des grands patches.

---

<sup>10</sup>Dans le cas d'une poutre sur appui, ces maximas sont situés au même endroit.

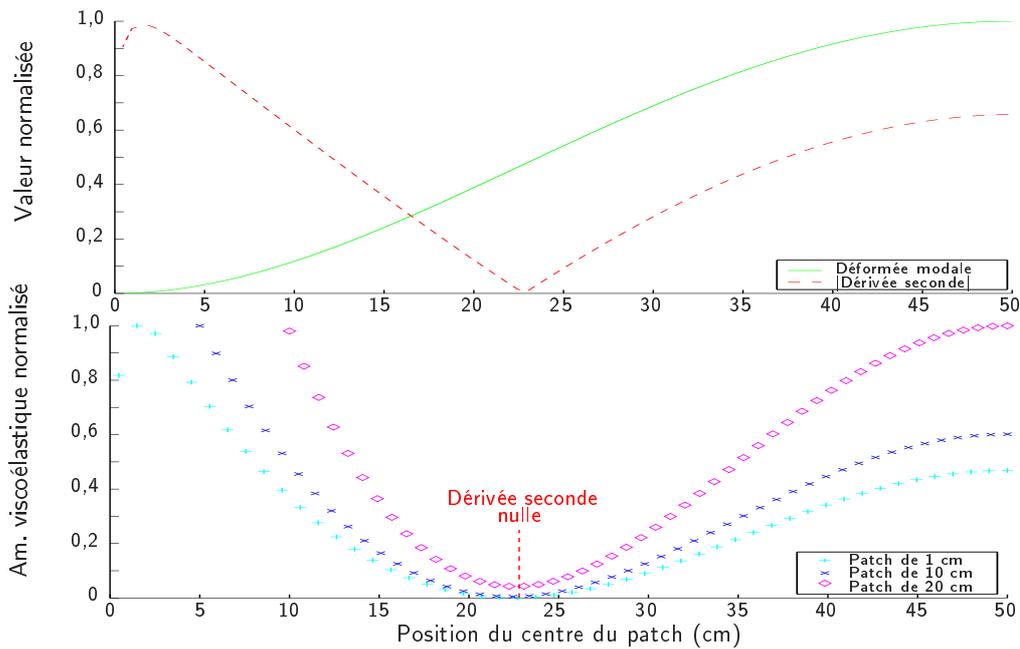


FIG. 6.9 – Représentation de l'amortissement viscoélastique d'une poutre traitée en fonction de la position du patch et de la valeur absolue de la dérivée seconde de la déformée du 1<sup>er</sup> mode de flexion .

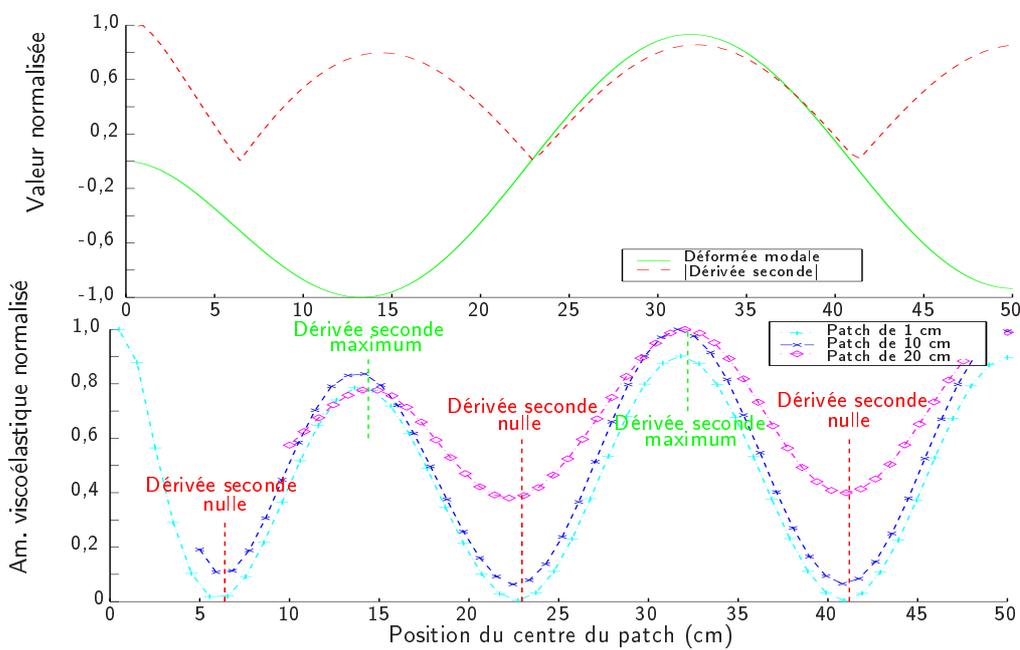


FIG. 6.10 – Représentation de l'amortissement viscoélastique d'une poutre traitée en fonction de la position du patch et de la valeur absolue de la dérivée seconde de la déformée du 5<sup>ème</sup> mode de flexion suivant  $z$  (3<sup>ème</sup> mode de flexion symétrique).

### 6.3.2.3 Comparaison des spectres de patches de taille différente

Pour compléter les informations du paragraphe sur l'étude d'une poutre encastree-encastree traitée avec un patch nous présentons dans la figure 6.11 les spectres de puissance acoustique et de vibration de deux configurations, calculés avec une excitation de type onde plane à incidence normale appliquant un effort de 1N sur la poutre. La première configuration est caractérisée par un patch de 1 cm et la deuxième par un patch de 20 cm. Tous deux se situent à l'endroit de la poutre où ils sont les plus efficaces, c'est-à-dire au milieu de celle-ci pour le patch de 20 cm et à 1,5 cm de son extrémité pour le patch de 1 cm. Les spectres de puissance acoustique et de réponse vibratoire confirment un certain nombre de résultats. On observe clairement dans le cas du patch de 20 cm que l'amortissement de l'élastomère augmente significativement avec la fréquence. Par ailleurs, on remarque que la configuration optimale déterminée pour le patch de 1 cm ne permet pas d'atteindre les niveaux de performance du traitement avec un patch de 20 cm : *la taille des patches semble donc être un paramètre tout aussi important que la position des patches.*

### 6.3.3 Influence la taille des patches

Nous poursuivons l'étude d'une poutre traitée avec un patch en nous intéressant à présent à la taille du patch en élastomère contraint. La question fondamentale est la suivante : la solution la plus efficace consiste-t-elle à couvrir intégralement les structures vibrantes comme les résultats du paragraphe précédent peuvent le suggérer ? Pour apporter quelques éléments à ce sujet, nous poursuivons notre analyse à partir d'une optimisation paramétrique simple. La structure étudiée est la même que dans les paragraphes précédents ; il s'agit d'une poutre dont les caractéristiques sont données par le tableau 6.1. L'idée est d'observer la puissance acoustique, l'amortissement viscoélastique et l'amortissement acoustique en fonction de la taille d'un patch. Pour cela, un patch est disposé à l'extrémité de la poutre, près d'un encastrement, et sa taille est accrue jusqu'à ce qu'il recouvre la poutre. Une deuxième simulation utilise le même procédé avec un patch situé cette fois-là au milieu de la poutre. L'excitation est une excitation de type onde plane à incidence normale qui applique un effort de 1N sur la poutre.

La figure 6.12 montre les résultats de niveau de puissance acoustique et d'amortissement viscoélastique en fonction de la taille du patch (situé au niveau de l'encastrement). Nous avons choisi de ne conserver ici que les modes participant majoritairement au rayonnement, à savoir les modes de flexion symétriques notés **z1**, **z3**, **z5** et **z7** qui sont respectivement les premier, quatrième, septième et dixième modes de la poutre. L'amortissement de l'élastomère est décrit pour tous les modes de flexion suivant la direction transverse par une droite d'ordonnée à l'origine nulle avec une oscillation légère dont la périodicité varie avec le mode. Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux de Kung et Singh [70] dont l'analyse porte aussi sur des traitements en élastomère contraint. Notons que la pente de la courbe représentative de l'amortissement viscoélastique modal augmente avec l'ordre de ce mode ; il a donc été jugé préférable d'adopter une représentation de l'amortissement de type tangente de l'angle divisant les valeurs d'amortissement en Hz obtenues par la fréquence. Les résultats sont représentés dans la figure 6.13 et montrent que l'amortissement viscoélastique est représenté approximativement par une seule et unique droite en fonction de la taille du patch. La droite est modulée différemment suivant le mode. La modulation est d'autant plus importante que le mode considéré est de basse fréquence et que la taille du patch est petite.

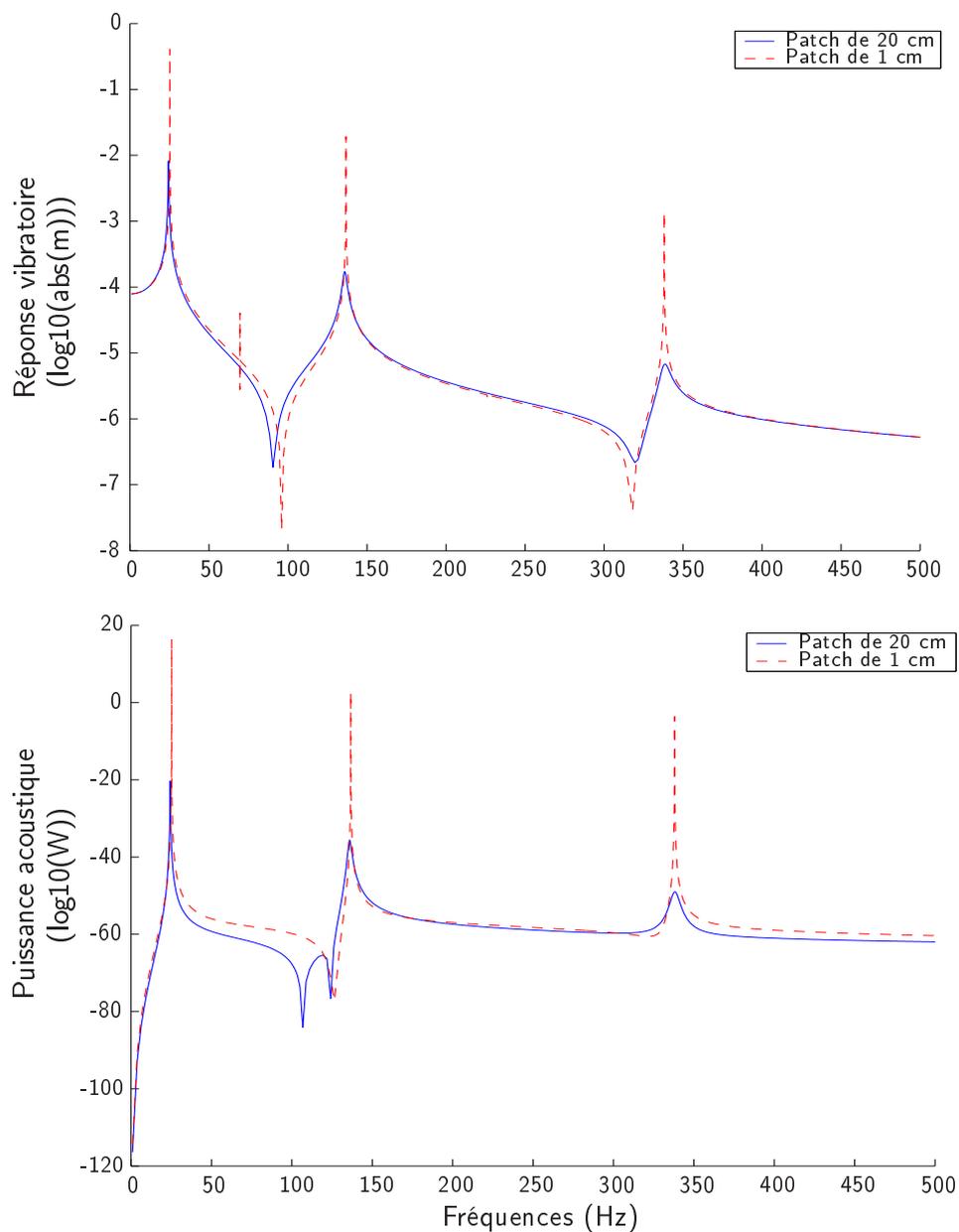


FIG. 6.11 – *Comparaison vibroacoustique de l'efficacité de deux traitements appliqués à une poutre encastree-encastree : patches de 1 cm et 20 cm en elastomere contraint situes au milieu d'une poutre encastree-encastree.*

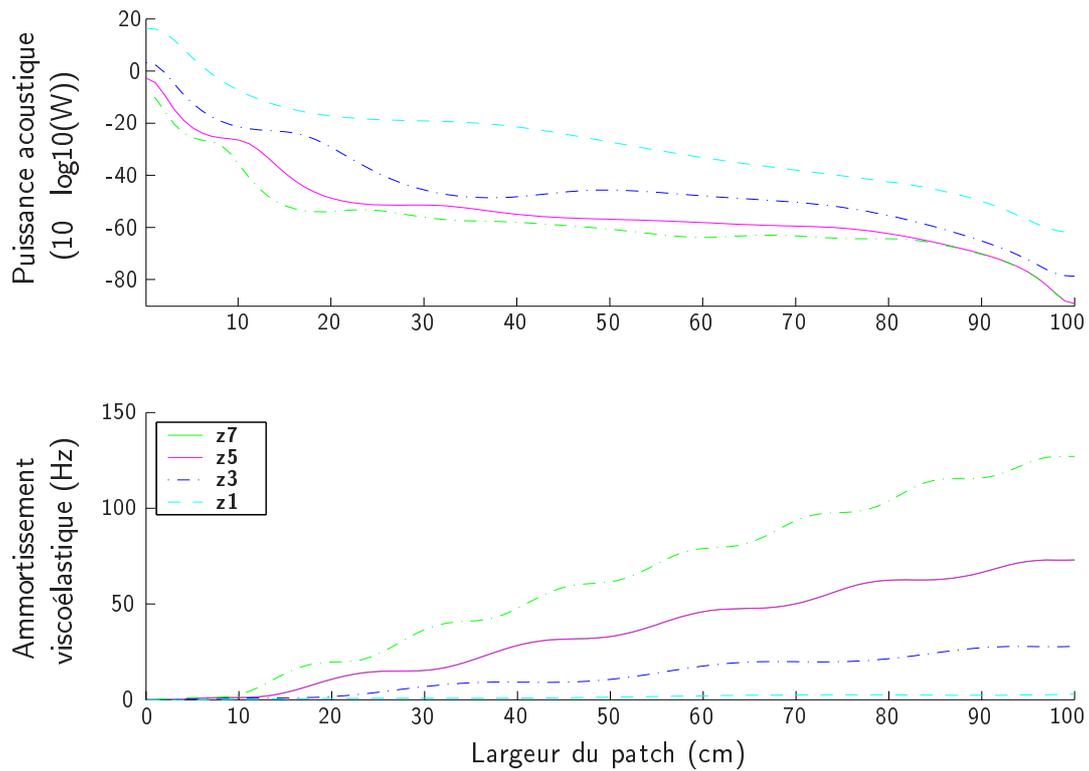


FIG. 6.12 – Etude de l'influence de la taille d'un patch en élastomère contraint placé près de l'extrémité d'une poutre encastrée-encastrée sur l'amortissement et la puissance acoustique des quatre premiers modes de flexion symétriques suivant  $z$ .

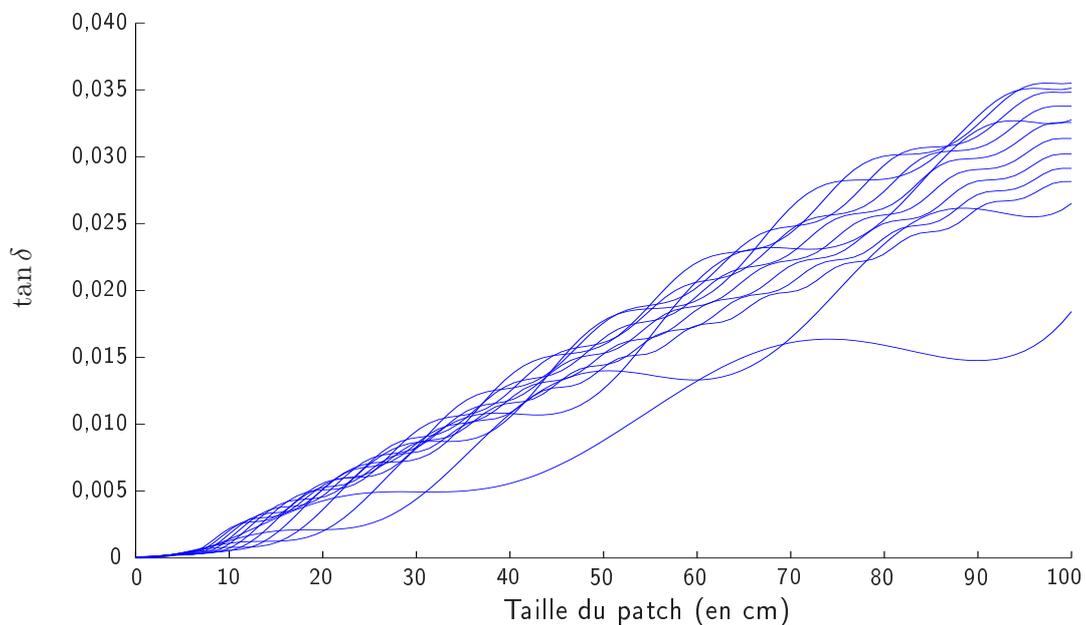


FIG. 6.13 – Influence de la taille d'un patch en élastomère contraint positionné sur l'extrémité d'une poutre encastrée-encastrée sur l'amortissement exprimé comme la tangente de l'angle des 12 premiers modes de flexion.

On peut raisonnablement penser que la position du patch joue un rôle particulier dans le cas des fortes modulations. Ceci concorde avec les fortes variations d'amortissement que nous avons constatées dans le cas du premier mode de flexion d'une poutre avec un patch de 1 cm dont la position varie.

Notons par ailleurs qu'une dépendance linéaire de ce type en fonction de la taille du patch ne justifie pas a priori l'utilisation de plusieurs patches pour améliorer les performances du système : il semble qu'à partir d'un certain seuil fréquentiel il y ait une simple dépendance à la surface de matériau appliquée sous forme de patch tout comme en acoustique des salles avec les matériaux poreux absorbants. L'analyse est différente pour les modes de basse fréquence. On observe en effet dans la figure 6.13 qu'un traitement de 25cm est tout aussi efficace qu'un traitement de 35cm dans le cas du premier mode : peut-être alors est-il envisageable d'utiliser plusieurs patches plutôt qu'un seul.

La figure 6.12 présente également le niveau de puissance acoustique associée aux quatre premiers modes de flexion symétriques suivant  $z$ . On observe une décroissance très forte de la puissance dans un premier temps qui concorde avec ce que nous avons noté en comparant des patches de 1 cm, 4 cm, 10 cm et 20 cm. Cette zone de décroissance est pondérée par des oscillations plus ou moins marquées. Il lui succède une zone dans laquelle la puissance décroît faiblement. Cette constatation nous amène à une conclusion très importante : il semble comme nous nous l'étions demandé que la *configuration de structure intégralement couverte est certainement la moins bruyante* ; néanmoins, *il existe des tailles de traitement assez faibles comparées à la taille structurelle permettant une réduction de bruit très importante*. Prenons quelques exemples : pour le premier mode de flexion  $\mathbf{z1}$ , un traitement de 20 cm semble aussi efficace qu'un traitement de 35 cm. En ce qui concerne le mode  $\mathbf{z3}$ , un traitement de 35 cm est équivalent à un traitement de 75 cm. Le rayonnement associé aux modes  $\mathbf{z5}$  et  $\mathbf{z7}$  est également très faible dès que le traitement a atteint 20 cm de longueur.

L'allure des courbes de puissance acoustique est expliquée d'une part par la dépendance linéaire de l'amortissement viscoélastique à la taille du patch (en  $L \times f$  où  $L$  est la longueur du patch et  $f$  la fréquence) et d'autre part par une relation approchée entre le déplacement vibratoire et l'amortissement structural. La relation est tirée de l'expression du déplacement sous la forme d'une série de modes de résonance (équation (2.72)) ; à la résonance, l'amplitude vibratoire est pondérée par l'inverse de l'amortissement total (en Hz). Or, le calcul de la puissance acoustique fait intervenir le produit de deux déplacements (équation (4.39)). Par conséquent, la puissance acoustique linéaire dépend de l'inverse du carré de l'amortissement total. Dans le cas présent on a donc une puissance acoustique linéaire en  $1/(L \times f)^2$ , où  $L$  est la taille du patch et  $f$  la fréquence. Une telle expression explique donc la décroissance monotone de la puissance observée mais aussi l'adoucissement de la pente dès qu'un certain niveau d'amortissement a été atteint, après lequel il devient difficile d'accroître les performances acoustiques.

La figure 6.14 compare la puissance calculée numériquement et une estimation basée sur l'inverse du carré de l'amortissement. Le maillage utilisé comporte deux cents éléments dans la longueur de la poutre. L'estimation est calculée à partir de l'amortissement total ou alternativement à partir de l'amortissement viscoélastique uniquement. Le niveau de l'approximation a été ajusté artificiellement ; l'intérêt du calcul approché ne réside pas dans la prédiction des valeurs absolues mais dans l'allure relative des courbes. Les résul-

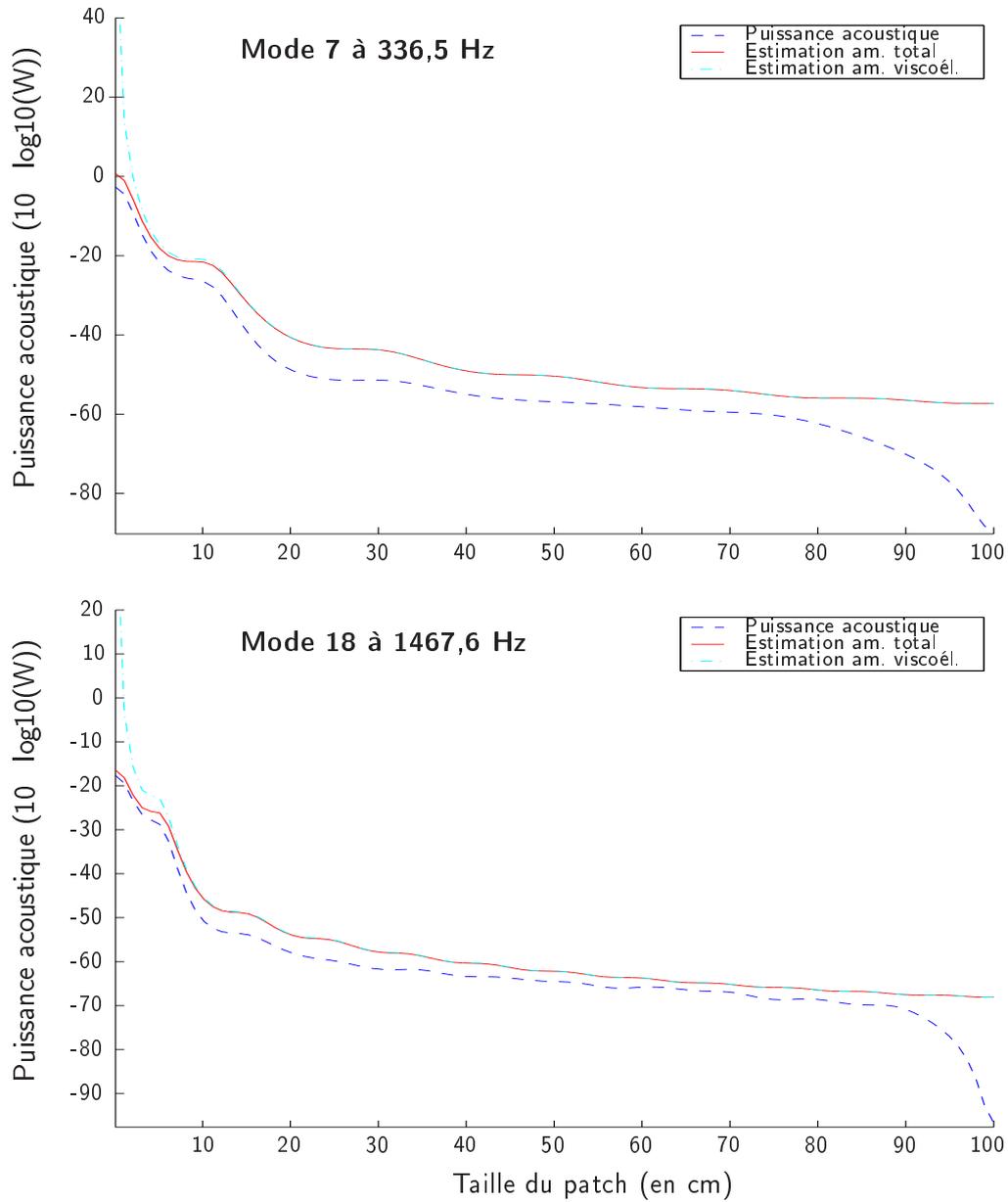


FIG. 6.14 – Estimation de la puissance rayonnée à la fréquence des modes 7 et 18 d'une poutre encadrée-encadrée à partir de l'inverse du carré de l'amortissement total ou de l'amortissement viscoélastique seul. Comparaison avec la puissance acoustique rayonnée de référence.

tats graphiques montrent clairement que ce calcul permet de dimensionner assez aisément la taille des patches en élastomère contraint en fournissant une bonne approximation de l'emplacement des minimums locaux de la puissance acoustique sans effectuer de calcul de rayonnement. On remarque en outre l'importance de la prise en compte de l'amortissement acoustique dans les zones où l'amortissement viscoélastique est faible. Ces résultats montrent également que *le patch doit avoir une taille minimum pour être vraiment efficace*. L'amortissement viscoélastique est alors prépondérant.

Nous nous intéressons à présent aux longueurs de patch qui à notre sens sont susceptibles d'être les plus intéressantes dans les problèmes d'optimisation industriels courants, pour lesquels le poids est un critère important de conception. Les longueurs en question sont

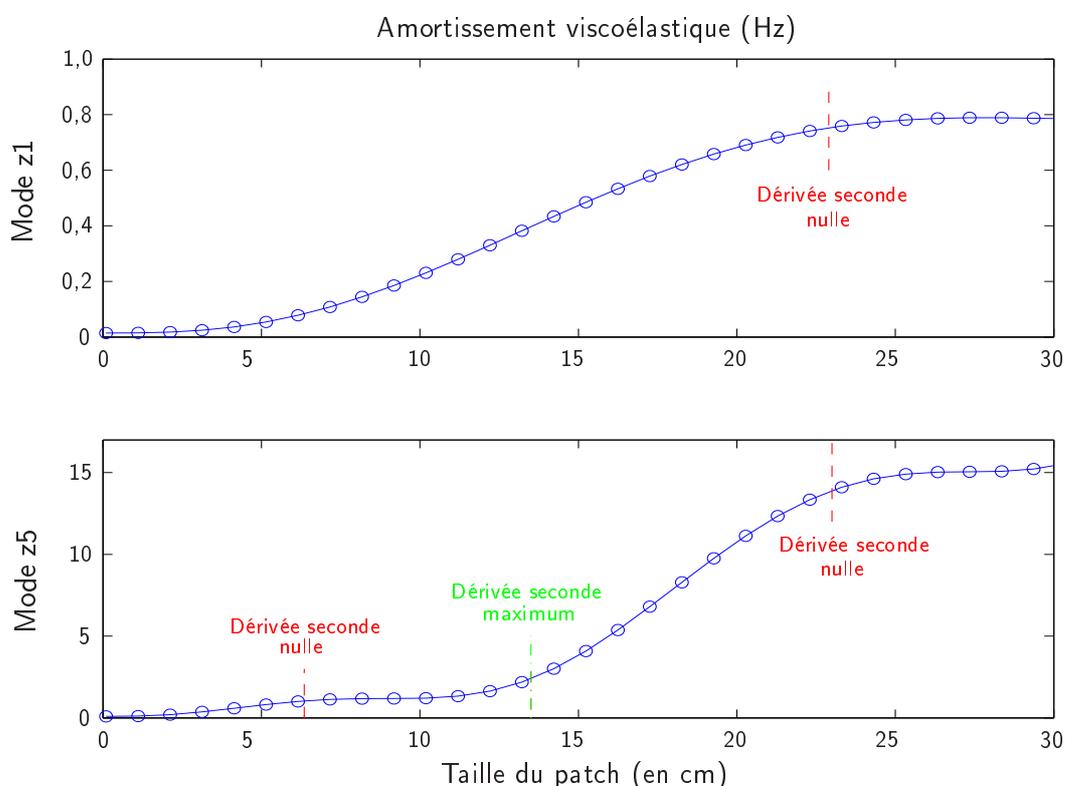


FIG. 6.15 – *Etude des oscillations de l'amortissement viscoélastique des modes de flexion symétriques 1 et 5 d'une poutre encastrée-encastrée lorsque la taille du traitement en élastomère contraint augmente.*

associées dans la figure 6.12 à la zone de transition du niveau de puissance acoustique entre pente très forte et pente douce et sont comprises vraisemblablement entre 10 cm et 30 cm. Cette zone est marquée par des fluctuations fortes de la puissance acoustique liées à la position des patches et au mode considéré. Nous proposons d'en faire l'analyse en représentant dans la figure 6.15 l'amortissement viscoélastique associé au premier et au cinquième mode de flexion suivant  $z$  (modes symétriques) en fonction de la taille du patch. Il nous a semblé possible que les fluctuations soient interprétables à l'aide de l'indicateur basé sur la valeur absolue de la dérivée seconde et présenté au § 6.3.2.2. Nous avons donc ajouté dans

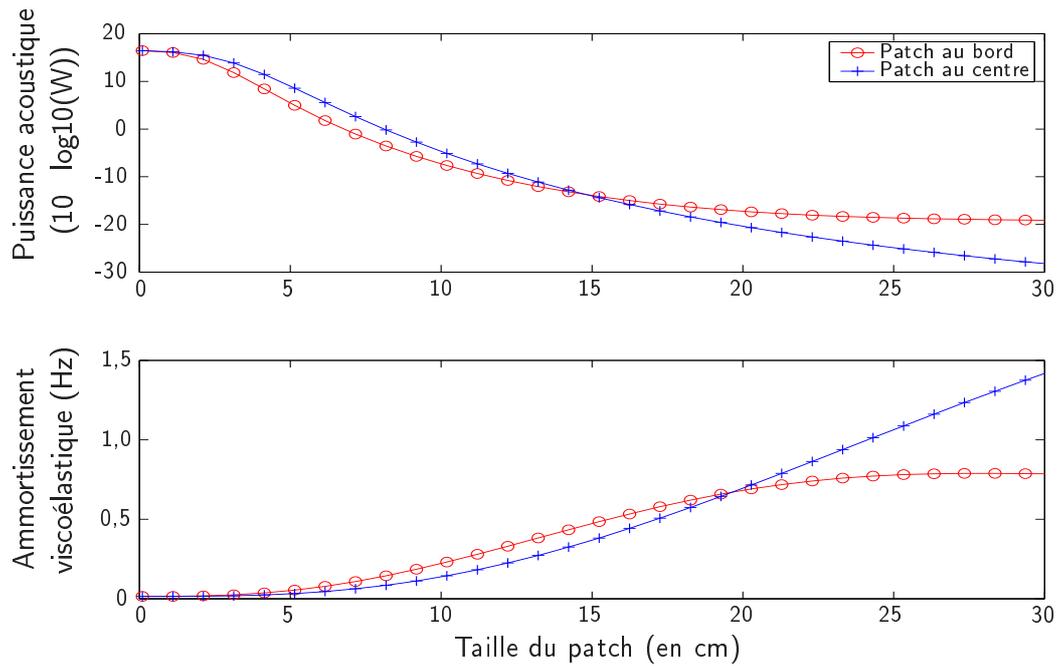


FIG. 6.16 – Représentation de l'amortissement viscoélastique du mode de flexion symétrique 1 d'une poutre encastrée-encastrée et de la puissance acoustique en fonction de la taille du traitement en élastomère contraint. Comparaison de deux configurations de traitement : patch à l'extrémité de la poutre (bord) et patch centré (centre).

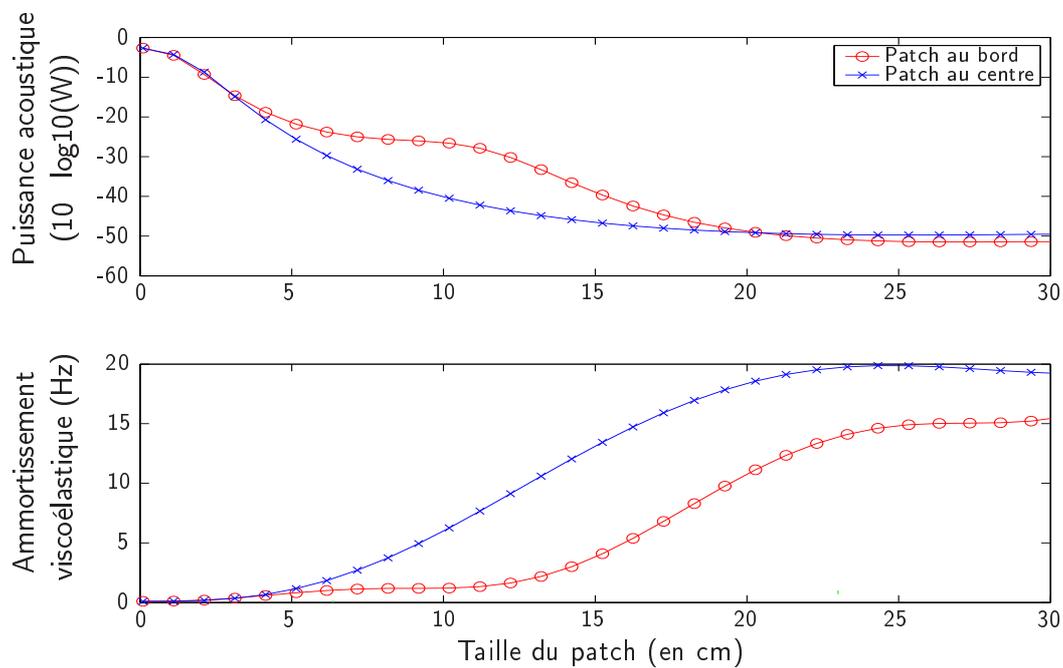


FIG. 6.17 – Représentation de l'amortissement viscoélastique du mode de flexion symétrique 5 d'une poutre encastrée-encastrée et de la puissance acoustique en fonction de la taille du traitement en élastomère contraint. Comparaison de deux configurations de traitement : patch à l'extrémité de la poutre (bord) et patch centré (centre).

les figures les positions où la dérivée seconde s'annule et devient maximale. Ces positions correspondent précisément aux transitions entre zones plates et zones où l'amortissement croît sensiblement avec la taille du patch. Les résultats concernent un patch dont un bord est situé près de l'encastrement ; une longueur pertinente pour la maximisation de l'amortissement sous contrainte de poids peut être déterminée en se basant sur les positions où la dérivée seconde s'annule. Une taille de patch de 23 cm faible correspondant à un point où la dérivée seconde s'annule pour le premier et le cinquième mode semble tout à fait adéquate dans le cadre d'une maximisation de l'amortissement viscoélastique sous contrainte de poids.

L'analyse se poursuit par une comparaison entre l'amortissement obtenu lorsque le patch est initialement positionné sur l'extrémité de la poutre (**Patch au bord**) et le cas où il est situé au milieu de celle-ci (**Patch au centre**). Dans les deux cas l'étude paramétrique de la taille du patch est effectuée ; la taille maximum est de 30 cm. Les résultats (amortissement viscoélastique et puissance acoustique) sont représentés dans les figures 6.16 pour le premier mode de flexion et la figure 6.16 pour le cinquième. On remarque que le choix de la position optimale du patch (centré ou au bord) est fortement corrélée à sa longueur. *Les deux variables de position et de longueur ont toutes deux une influence déterminante sur la qualité du traitement.*

#### 6.3.4 Influence de l'épaisseur des couches du patch

Pour couvrir l'ensemble des paramètres susceptibles d'être modifiés dans un traitement en élastomère contraint il importe d'étudier l'épaisseur des deux couches du patch lamellé. L'étude se base une nouvelle fois sur la poutre encastree encastree dont les données récapitulatives figurent dans le tableau 6.1. Nous avons procédé comme suit : quatre patches de taille différente (**1CM**, **4CM**, **7CM**, **10CM**) ont été placés alternativement sur l'extrémité la poutre (**BORD**) ou ont été centrés sur la structure (**CENTRE**). Nous avons fait varier l'épaisseur des deux couches (élastomère, aluminium) séparément ; quinze valeurs d'épaisseur variant de 0,01 mm à 1 cm ont été utilisées.

La représentation de l'amortissement viscoélastique du premier mode de flexion et du niveau de puissance acoustique en fonction des deux variables d'épaisseur est donnée dans la figure 6.18 sous la forme de courbes de niveau pour les quatre tailles de patch. Le traitement est placé au milieu de la poutre. Nous avons disposé les courbes de niveau de telle sorte qu'une comparaison directe entre la colonne gauche de la figure représentant le niveau de puissance acoustique calculée à la fréquence du premier mode puisse être faite avec la colonne de droite représentant l'amortissement viscoélastique de ce même mode. Nous remarquons d'ailleurs qu'il existe un lien clair entre l'amortissement viscoélastique et la puissance rayonnée ; un travail de maximisation de l'amortissement viscoélastique semble permettre une très bonne réduction de la puissance acoustique.

Notons qu'il est apparemment difficile de définir une règle élémentaire tant les surfaces observées sont contrastées. Nous ne notons pas en particulier de rapport spécifique entre les épaisseurs de polymère et d'aluminium qui maximise l'amortissement viscoélastique. On remarque toutefois que l'augmentation de l'épaisseur de la couche d'aluminium est toujours bénéfique pour minimiser la puissance acoustique. En ce qui concerne le polymère, augmenter l'épaisseur n'est pas en général la meilleure solution ; il semble exister des valeurs assez localisées d'épaisseur de polymère qui permettent une excellente réduction de bruit. Nous

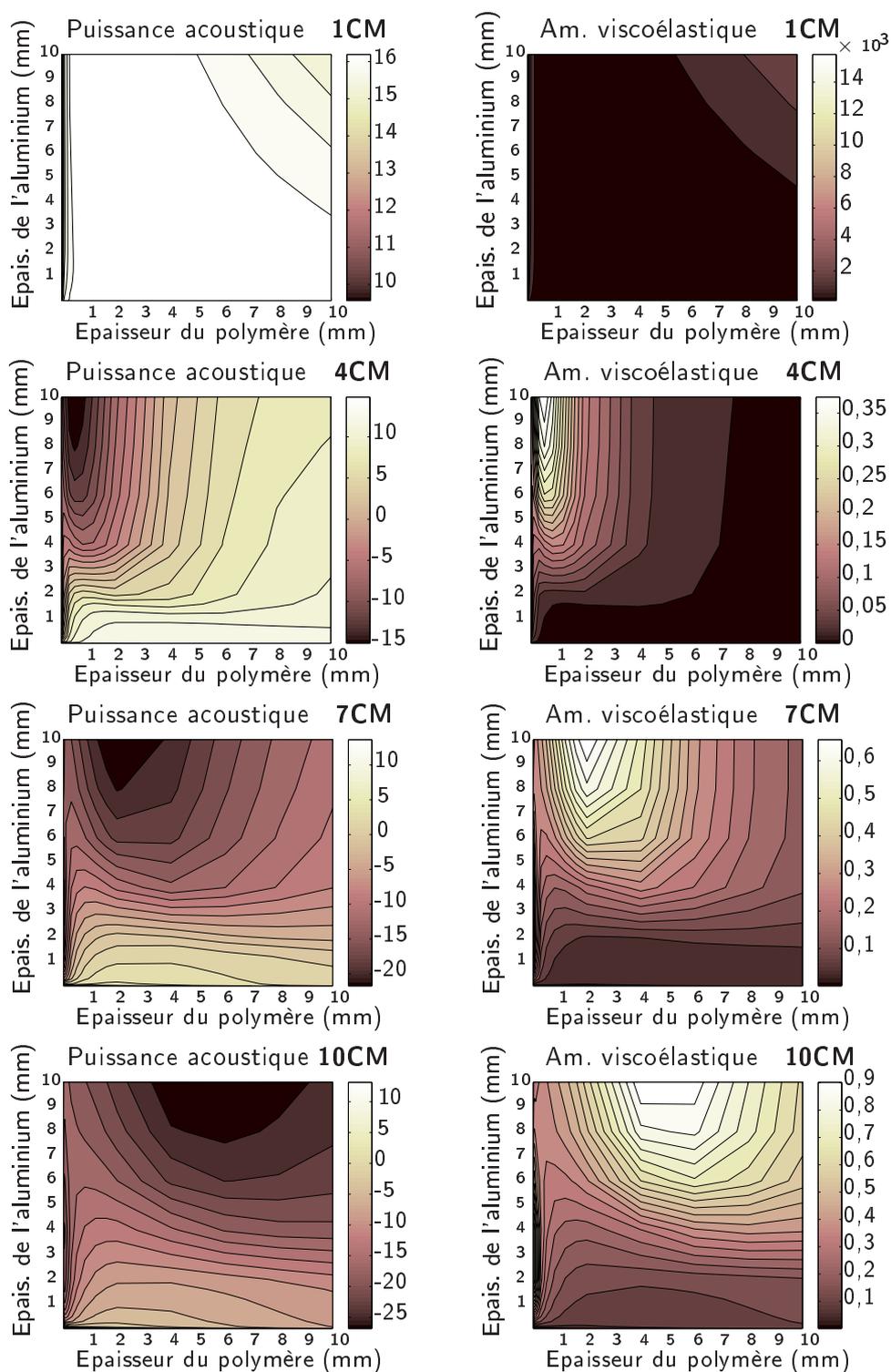


FIG. 6.18 – Etude de l'influence des épaisseurs de polymère et d'aluminium sur l'amortissement viscoélastique (Hz) et la puissance rayonnée ( $10 \log_{10}(W)$ ) associés au premier mode de flexion d'une poutre traitée avec 4 patches centrés sur la poutre de taille différente.

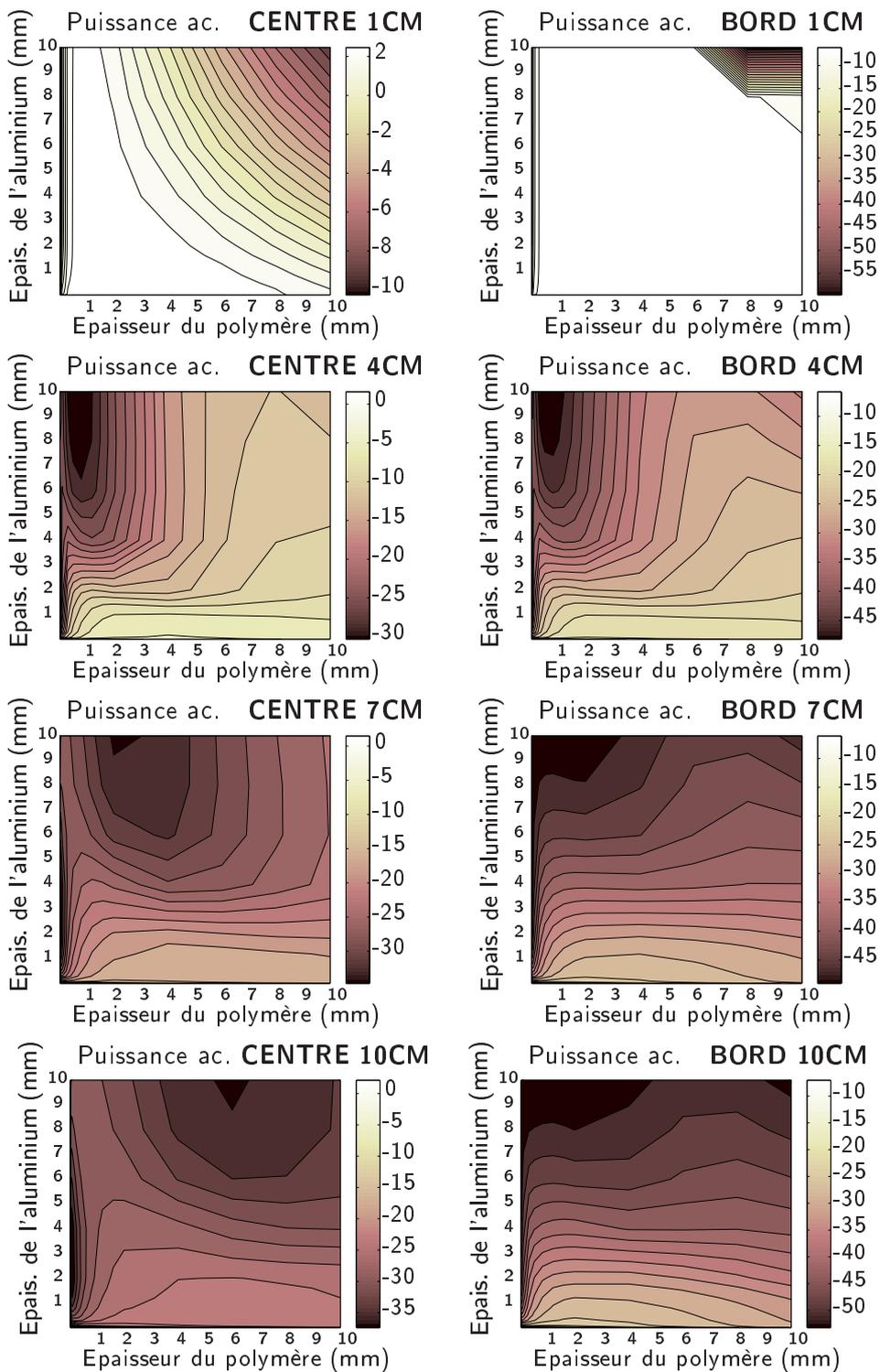


FIG. 6.19 – Etude de l'influence des épaisseurs de polymère et d'aluminium sur la puissance rayonnée ( $10 \log_{10}(W)$ ) associée au troisième mode de flexion suivant  $z$  (symétrique) d'une poutre traitée avec 4 patches de taille différente placés à l'extrémité de la poutre (BORD) ou au centre de la poutre (CENTRE).

remarquons notamment une zone où la puissance acoustique est faible voire minimum dont la position se déplace avec la taille du patch ; nous remarquons également pour chacune des tailles de patch qu'il existe une bande étroite associée à des valeurs très faibles d'épaisseur d'élastomère pour laquelle le niveau de puissance est considérablement réduit. Cette constatation justifie l'usage déjà courant de films viscoélastiques fins.

L'échelle de variation de la puissance acoustique et de l'amortissement est donnée par une barre colorée verticale sur le côté droit des courbes de niveau. On remarque que le contraste peut être très important entre la configuration la plus bruyante et la configuration la plus silencieuse. L'un des exemples les plus saisissants est celui du patch de 1 cm : alors qu'en altérant la position du traitement nous observons des variations de niveau maximum de 0,23 dB<sub>W</sub> la variation de niveau est supérieure à 6 dB<sub>W</sub> en modifiant les épaisseurs.

Variation du niveau de puissance ( $\Delta\text{dB}_W$ )								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	6,96	8,93	31,40	36,58	37,15	39,91	41,96	42,47
<b>z3</b>	13,36	14,63	33,48	40,98	37,96	42,58	41,48	44,55
<b>z5</b>	31,32	20,28	45,42	44,52	50,39	45,09	55,21	48,43

Variation relative de l'amortissement acoustique ( $\Delta A/A$ )								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	0,153	0,004	0,692	0,224	1,282	0,338	1,645	0,482
<b>z3</b>	0,226	0,006	0,746	0,277	1,174	0,411	1,638	0,669
<b>z5</b>	0,105	0,010	0,329	0,440	0,655	0,861	0,988	2,415

Variation relative de l'amortissement viscoélastique ( $\Delta V/V$ )								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	138,0	123,8	356,4	717,3	765,6	1177,3	1120,7	1789,5
<b>z3</b>	122,3	119,5	897,8	1236,3	1029,8	1804,7	2901,9	2750,3
<b>z5</b>	331,2	115,4	1272,1	1911,4	2433,9	2398,2	6116,6	3323,9

TAB. 6.5 – Variation relative maximum de la puissance et des amortissements acoustique et viscoélastique en fonction des épaisseurs de polymère et d'aluminium pour trois modes de flexion **z1**, **z2**, **z3** et huit configurations de traitement de taille et position différentes.

La figure 6.19 apporte quelques informations supplémentaires. Elle présente la puissance acoustique calculée à la fréquence du troisième mode de flexion pour quatre tailles de patch (1CM, 4CM, 7CM, 10CM). La différence entre la colonne de gauche et celle de droite provient de la position du patch. Dans le premier cas il est situé au centre de la poutre tandis que dans le deuxième il est situé à l'extrémité de la poutre. Nous remarquons que la forme générale des courbes de niveau associées au premier mode (figure 6.18) et la forme générale des courbes de niveau associées au troisième mode de flexion suivant z sont très similaires :

Puissance acoustique minimum								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	9,56	7,40	-15,07	-20,99	-21,74	-24,24	-26,81	-26,74
<b>z3</b>	-10,26	-11,73	-30,30	-38,62	-34,68	-40,18	-37,37	-42,30
<b>z5</b>	-34,79	-23,72	-49,32	-48,19	-54,40	-49,05	-57,06	-53,17

Amortissement acoustique minimum								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	0,013	0,014	0,009	0,015	0,006	0,015	0,006	0,015
<b>z3</b>	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,059	0,058
<b>z5</b>	0,084	0,093	0,080	0,093	0,082	0,089	0,085	0,060

Amortissement viscoélastique maximum								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	0,017	0,027	0,393	1,081	0,689	1,593	0,947	2,155
<b>z3</b>	0,252	0,269	4,51	7,37	7,80	9,03	12,57	12,62
<b>z5</b>	2,630	0,950	14,01	18,88	24,57	22,82	37,48	36,67

TAB. 6.6 – Valeurs minimum d’amortissement acoustique, de puissance acoustique et valeurs maximums d’amortissement viscoélastique pour trois modes de flexion **z1**, **z2**, **z3** et huit configurations de traitement de taille et position différentes.

les minimums et maximums semblent être approximativement placés aux mêmes endroits. La comparaison des colonnes de gauche et de droite de la figure 6.19 nous amène aussi à constater que les courbes de niveau des cas de patch centré et situé sur le bord près de l’encastrement de la poutre sont similaires. On peut donc supposer qu’un choix pertinent d’épaisseurs peut convenir à plusieurs modes simultanément et à des positionnements de patch différents.

Les données caractéristiques résumant les résultats fondamentaux de l’étude sont présentés dans les tableaux 6.5, 6.6 et 6.7. Le premier présente les variations de la puissance en  $\text{dB}_W$  et des amortissements en fonction de la configuration. Il y a huit configurations en tout : quatre tailles de patch et deux positions de traitement sur la poutre notés **Bord** (patch près de l’encastrement) et **Centre** (patch situé au milieu de la poutre). Les trois premiers modes de flexion symétriques **z1**, **z3** et **z5** sont observés. Le tableau se décompose en trois parties associées à la variation de niveau de la puissance acoustique exprimée en  $\text{dB}_W$  et à l’écart relatif des amortissements acoustique et viscoélastique. Les différences et écart sont calculés en comparant la valeur minimum et la valeur maximum obtenues en faisant varier l’épaisseur des deux couches d’élastomère et d’aluminium. Les résultats permettent de quantifier le rôle des épaisseurs et sont à comparer aux variations d’amortissement et de puissance associées à d’autres paramètres (taille, position du patch). La différence de niveau obtenue en positionnant optimalement un patch de 10 cm de large par rapport à l’emplacement le moins favorable est de 22,89  $\text{dB}_W$  pour le premier mode structurel (tableau 6.4). Elle

Épaisseur de poly pour Puis. acou. minimum								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	0,01	0,01	0,5	0,3	2	2	6	4
<b>z3</b>	0,01	0,01	0,8	0,5	0,03	2	0,06	0,03
<b>z5</b>	10	0,01	0,8	0,5	4	0,03	10	0,3

Épaisseur de l'alu pour Puis. acou. minimum (mm)								
Patch	1CM		4CM		7CM		10CM	
Mode	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord	Centre	Bord
<b>z1</b>	10	10	10	10	10	10	10	10
<b>z3</b>	6	10	10	10	2	10	2	6
<b>z5</b>	10	10	10	10	10	6	10	10

TAB. 6.7 – Valeur des épaisseurs de polymère et d'aluminium correspondant au minimum de puissance acoustique associée à trois modes de flexion **z1**, **z2**, **z3** et huit configurations de traitement de taille et position différentes.

est de 42,47 dB<sub>W</sub> en choisissant des épaisseurs adéquates par rapport au cas défavorable. L'amortissement acoustique semble être également beaucoup plus sensible à la variation des épaisseurs qu'à la variation de la position des patches. Dans le cas du premier mode de flexion d'un patch de 10 cm, la variation de l'amortissement liée à son positionnement est de 11,7 % (tableau 6.4) alors qu'elle peut atteindre 164,5% en modifiant les épaisseurs du lamellé. La variation d'amortissement viscoélastique du premier mode de flexion est de 20300% en altérant la position d'un patch de 10 cm alors qu'elle vaut 178950% en altérant le jeu des épaisseurs.

Le tableau 6.7 rapporte les valeurs d'épaisseur d'élastomère et d'aluminium qui minimisent la puissance rayonnée des trois premiers modes de flexion symétriques dans le cas des huit configurations de traitement (quatre tailles de patch, deux positionnements au bord ou au centre de la poutre). Nous remarquons que l'épaisseur d'aluminium maximum (10 mm) est presque systématiquement l'épaisseur optimale de notre problème à quelques exceptions près (concernant le deuxième mode de flexion symétrique). Les valeurs d'épaisseur du polymère optimales sont assez disparates suivant le mode et la taille du traitement et montrent la difficulté de la détermination d'un choix optimal.

### 6.3.5 Influence de la rigidité et de la masse de la couche supérieure

Nous avons observé qu'une augmentation de l'épaisseur de la couche supérieure en aluminium conduit à une augmentation de l'amortissement viscoélastique et à une diminution de la puissance acoustique rayonnée. Pour comprendre davantage le rôle de cette couche qui a pour fonction de contraindre l'élastomère, nous avons mené une dernière étude générale portant sur l'influence de sa masse et de sa rigidité. La configuration d'étude est celle d'une poutre encadrée encadrée dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.1. La poutre est traitée à l'aide d'un patch de 20 cm placé au milieu de sa longueur qui la couvre dans le sens de la largeur.

Dans une première étude nous avons fait varier la rigidité du matériau depuis des valeurs relativement faibles ( $E = 100$  MPa) jusqu'à des valeurs très importantes ( $E = 1000$  GPa). Les résultats d'amortissement viscoélastique, d'amortissement acoustique et de puissance acoustique sont présentés dans la figure 6.20. La valeur de la rigidité de l'aluminium et celle de l'acier sont également représentées. On constate que l'amortissement acoustique augmente un peu avec la rigidité ; l'amortissement viscoélastique croît considérablement. La puissance acoustique résultante diminue de façon tout aussi sensible en passant de  $14,3$  dB<sub>W</sub> à  $-22,3$  dB<sub>W</sub>. Pour une valeur de rigidité égale à celle de l'aluminium la puissance vaut  $-20,4$  dB<sub>W</sub> ; elle vaut  $-21,8$  dB<sub>W</sub> lorsque la valeur de la rigidité vaut celle de l'acier<sup>11</sup>. Par ailleurs, un seuil de rigidité peut être identifié autour de la valeur de rigidité de l'acier. Une fois dépassé toute augmentation de rigidité ne modifie plus les caractéristiques vibroacoustiques du système.

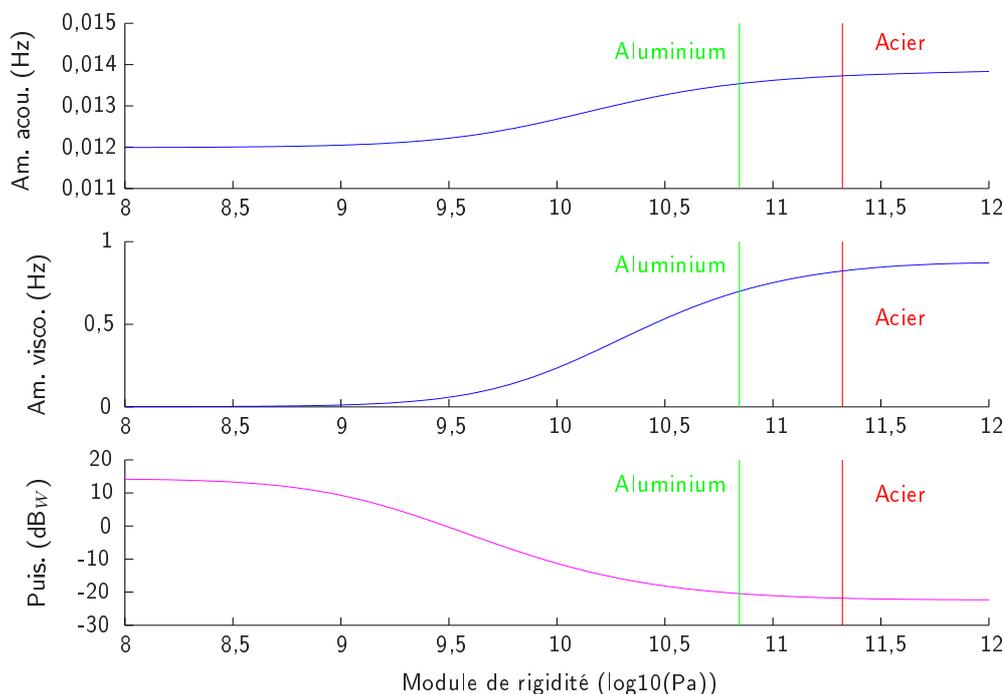


FIG. 6.20 – Etude de l'influence de la rigidité de la couche supérieure du patch sur les quantités vibroacoustiques : amortissement viscoélastique, amortissement acoustique et puissance acoustique. Patch de 20 cm centré sur une poutre de 1m.

Dans une deuxième étude nous avons fait varier la masse de la couche supérieure du patch depuis des valeurs très faibles ( $270$  kg.m<sup>-3</sup>) jusqu'à des valeurs très fortes ( $20000$  kg.m<sup>-3</sup>). Les résultats de l'étude sont représentés dans la figure 6.21 ainsi que les densités de l'aluminium et de l'acier comme repères. On remarque que l'amortissement acoustique et l'amortissement viscoélastique diminuent avec l'accroissement de la densité. Il en résulte une puissance acoustique qui diminue assez faiblement avec la densité. La puissance acoustique vaut  $-20,3$  dB<sub>W</sub> à la densité de l'aluminium et  $-21,1$  dB<sub>W</sub> à la densité de l'acier<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Dans les deux cas la densité est fixe et égale à celle de l'aluminium

<sup>12</sup>Dans les deux cas la rigidité est fixe et égale à celle de l'aluminium

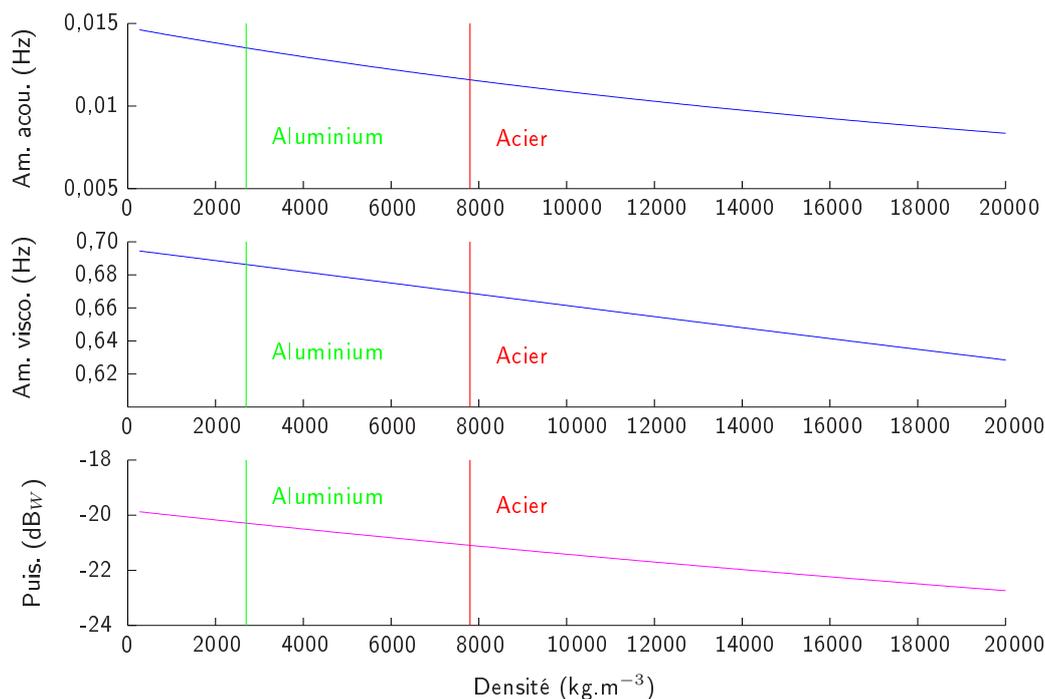


FIG. 6.21 – Etude de l'influence de la densité de la couche supérieure du patch sur les quantités vibroacoustiques : amortissement viscoélastique, amortissement acoustique et puissance acoustique. Patch de 20 cm centré sur une poutre de 1m.

La décroissance de la puissance acoustique liée à l'augmentation de épaisseur peut donc être attribuée à l'augmentation de masse ; mais elle est surtout liée à l'augmentation de la rigidité<sup>13</sup>. Ce constat est d'autant plus appréciable que la rigidité peut être modifiée sans gain excessif de poids par le biais de raidisseurs par exemple.

## 6.4 Etude de différents traitements amortissants

L'objet de ce paragraphe concerne l'étude de l'influence de différents traitements amortissants sur le comportement vibroacoustique d'une plaque encastree dont les caractéristiques sont données dans le tableau 6.1. Les dimensions de la plaque correspondent aux dimensions de la plaque suspendue étudiée dans le cadre de l'analyse modale présentée au § 1.4.2. L'exemple de deux modes de flexion de basse fréquence a été retenu : le premier est situé aux alentours de 119 Hz et le deuxième (cinquième mode de flexion) est proche de 400 Hz. Les études se sont intéressées plus spécifiquement au positionnement optimal des traitements étudiés : le traitement a été déplacé tous les centimètres approximativement, ce qui représente 15 positions en tout par direction. Au total 225 configurations ont été étudiées pour chacun des traitements.

<sup>13</sup>La rigidité en flexion varie comme le cube de l'épaisseur alors que la masse varie linéairement avec celle-ci.

### 6.4.1 Etude de la position d'un traitement en élastomère contraint

Nous nous intéressons dans un premier temps au traitement en élastomère contraint dont l'étude détaillée a été effectuée dans le paragraphe précédent dans le cas d'une poutre. Un patch<sup>14</sup> de 6,9 cm × 8,9 cm est positionné à des endroits différents de la plaque ; il modifie de ce fait l'amortissement viscoélastique et la puissance acoustique rayonnée aux fréquences modales que nous avons représentés dans la figure 6.22. La colonne de gauche est associée au premier mode de flexion et la colonne de droite au cinquième mode ; tous deux contribuent de façon prépondérante au bruit rayonné en basse fréquence du fait des conditions aux limites et de l'excitation en onde plane. Pour chacun des modes nous avons représenté la déformée modale, l'amortissement viscoélastique, la puissance acoustique et la valeur absolue de la courbure<sup>15</sup> dont nous avons vu au § 6.3.2.2 qu'elle pouvait servir de critère pour positionner les patches.

Plusieurs remarques viennent à l'esprit en observant les surfaces tridimensionnelles. Tout d'abord, le critère de courbure semble aussi pertinent dans le cas d'une plaque que dans le cas d'une poutre : la forme générale de la surface représentative de la valeur absolue de la courbure est très similaire à la forme de l'amortissement viscoélastique représenté en fonction de la position du patch en élastomère contraint. Ensuite, nous remarquons que la surface représentant le niveau de puissance ressemble à la surface associée à l'amortissement viscoélastique, retournée. Ceci est clairement lié à la dépendance de la puissance acoustique à l'inverse du carré de l'amortissement total. Nous remarquons également que le couplage fluide-structure a un rôle important dans le cas du mode 5 à 400 Hz : l'étude viscoélastique montre que le placement au centre de la plaque est optimal alors qu'en réalité le positionnement au niveau de l'un des deux maximums d'amplitude latéraux est bien plus performant d'un point de vue acoustique ; si le patch est placé au centre de la plaque la puissance acoustique vaut -33,5 dB<sub>W</sub> alors qu'elle vaut -40,3 dB<sub>W</sub> si le patch est placé sur le côté. Du point de vue de l'influence générale de la position du patch, nous notons en observant l'échelle sur le côté des figures qu'elle exerce une influence importante sur le comportement vibratoire de la structure (variation de puissance acoustique de 4,5 dB<sub>W</sub> pour le premier mode et de 16,4 dB<sub>W</sub> pour le mode 5).

### 6.4.2 Etude de la position de différents traitements amortissants

Nous abordons à présent la comparaison de différents traitements acoustiques : patch en élastomère contraint (**CONSTRAINT**), superposition de deux patches en élastomère contraint (**DOUBLE**), patch en élastomère non contraint (**NON CONSTRAINT**) et insert en élastomère (**INSERT**). Tous utilisent une quantité d'élastomère égale à celle d'un patch en élastomère contraint de 6,9 cm × 8,9 cm utilisé dans l'expérience d'analyse modale d'une plaque suspendue traitée présentée au paragraphe § 1.4.2, sauf le cas **DOUBLE** pour lequel la quantité est doublée. L'insert est obtenu en découpant une portion rectangulaire de la plaque et en remplaçant l'aluminium soustrait par de l'élastomère. Les résultats se présentent sous la forme de courbes de niveau dans les figures 6.23, 6.24 et 6.25.

La figure 6.23 représente l'**amortissement acoustique**, la figure 6.24 l'**amortissement viscoélastique** et la figure 6.25 la **puissance acoustique** rayonnée à la fréquence des deux

<sup>14</sup>Taille de patch utilisée dans l'expérience d'analyse modale du § 1.4.2

<sup>15</sup>La courbure est déterminée en calculant  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

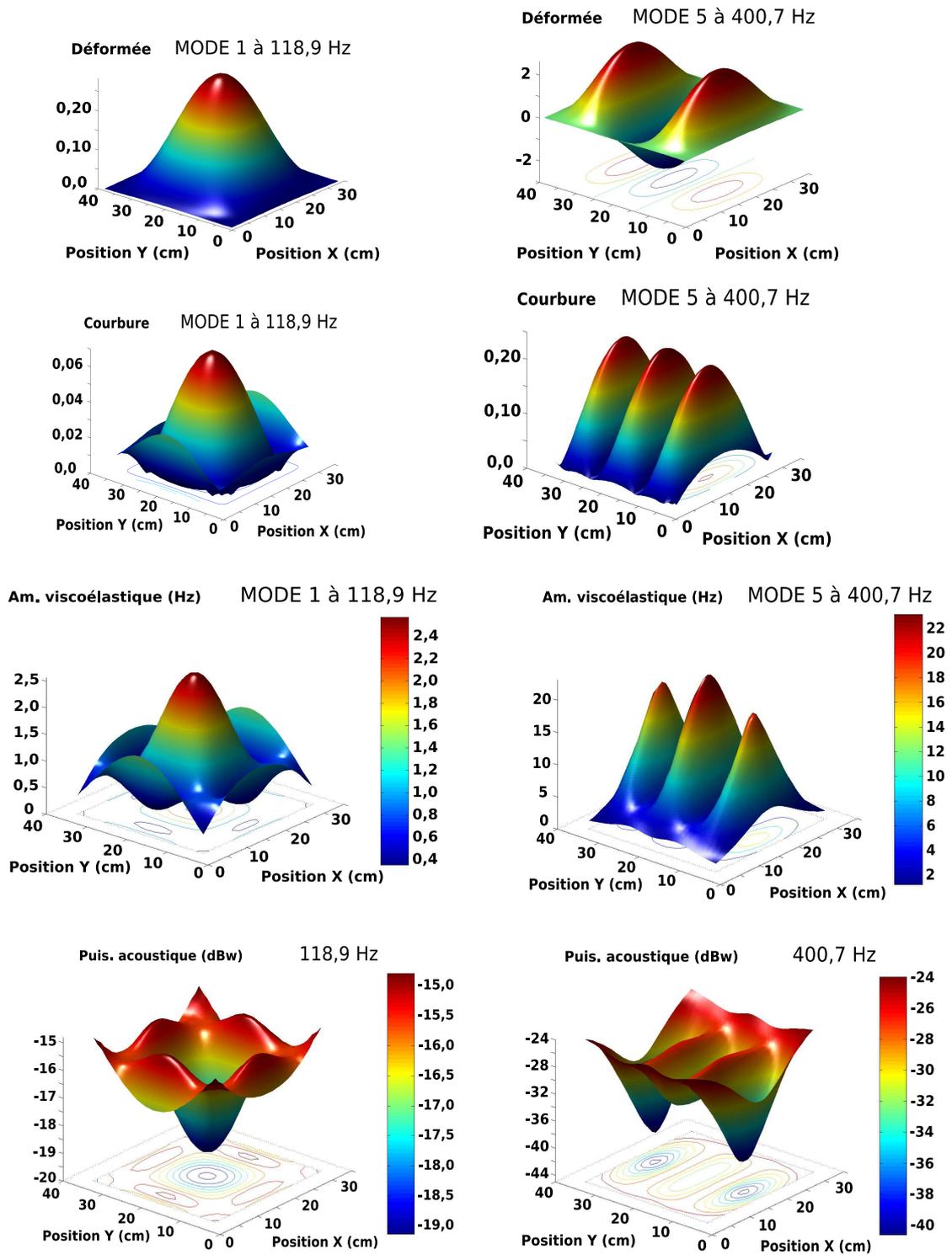


FIG. 6.22 – Etude de l'influence de la position d'un patch en élastomère contraint sur le comportement vibroacoustique d'une plaque encadrée. Représentation de la déformée modale, de la courbure (comme indicateur des zones les plus amorties), de l'amortissement viscoélastique des modes (1,1) et (3,1) et de la puissance acoustique rayonnée à la fréquence de ces deux modes.

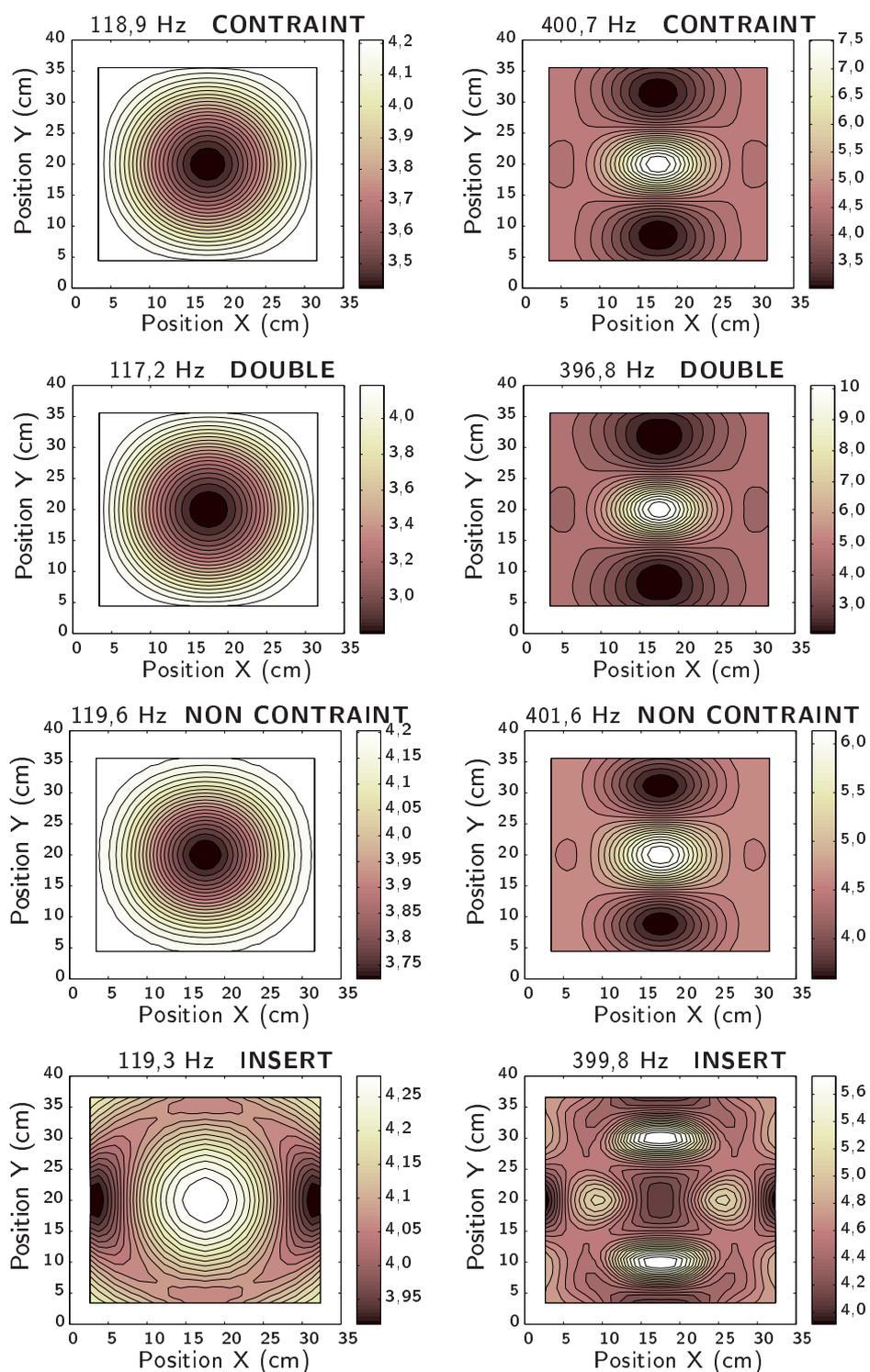


FIG. 6.23 – Etude de l'influence de la position de quatre traitements différents (patch en élastomère contraint, patches superposés, patch en élastomère non contraint et insert en élastomère) sur l'amortissement acoustique des modes (1,1) noté 1 et (3,1) noté 5 d'une plaque encastrée.

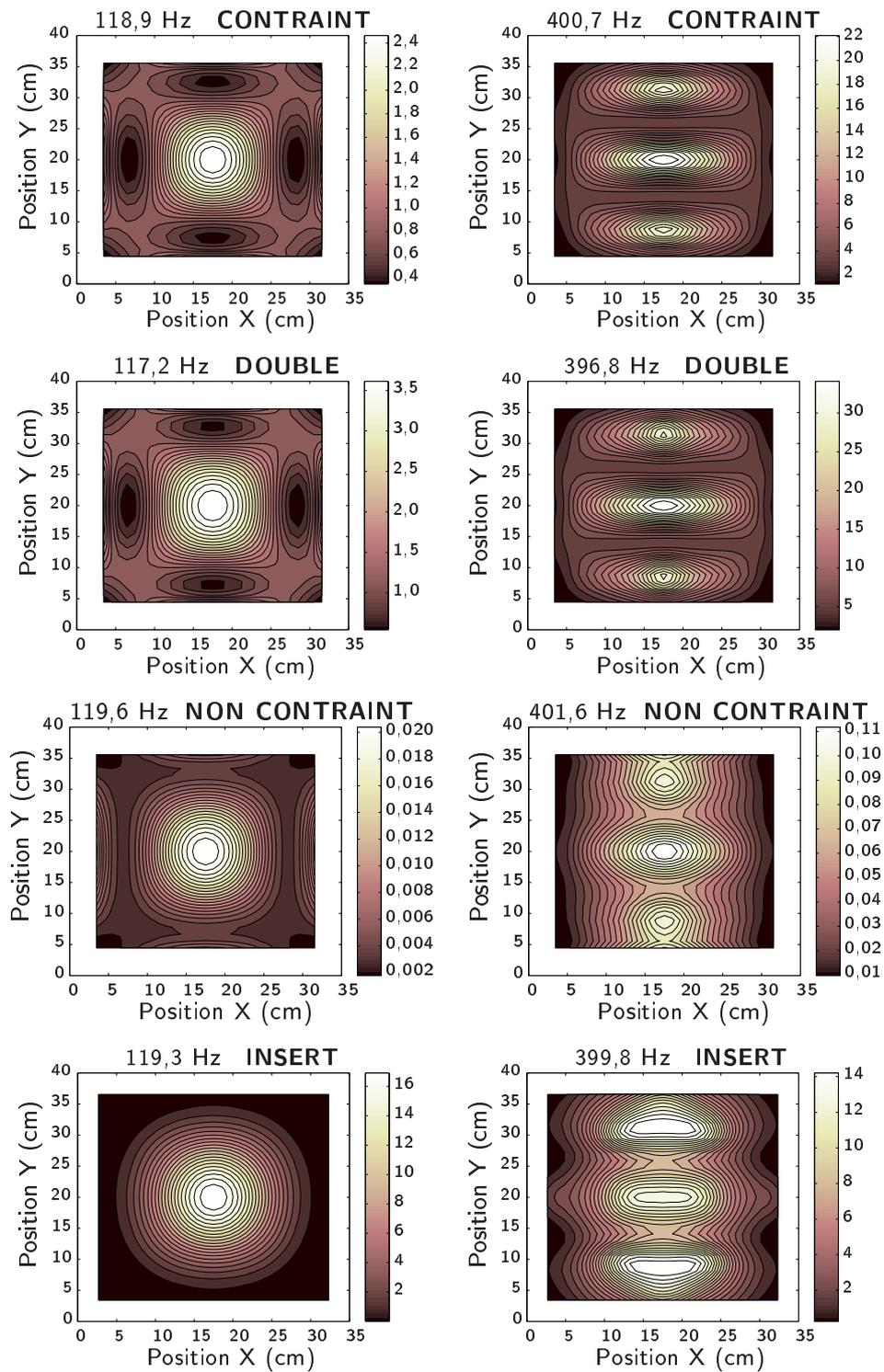


FIG. 6.24 – Etude de l'influence de la position de quatre traitements différents (patch en élastomère contraint, patches superposés, patch en élastomère non contraint et insert en élastomère) sur l'amortissement viscoélastique des modes (1,1) noté 1 et (3,1) noté 5 d'une plaque encadrée.

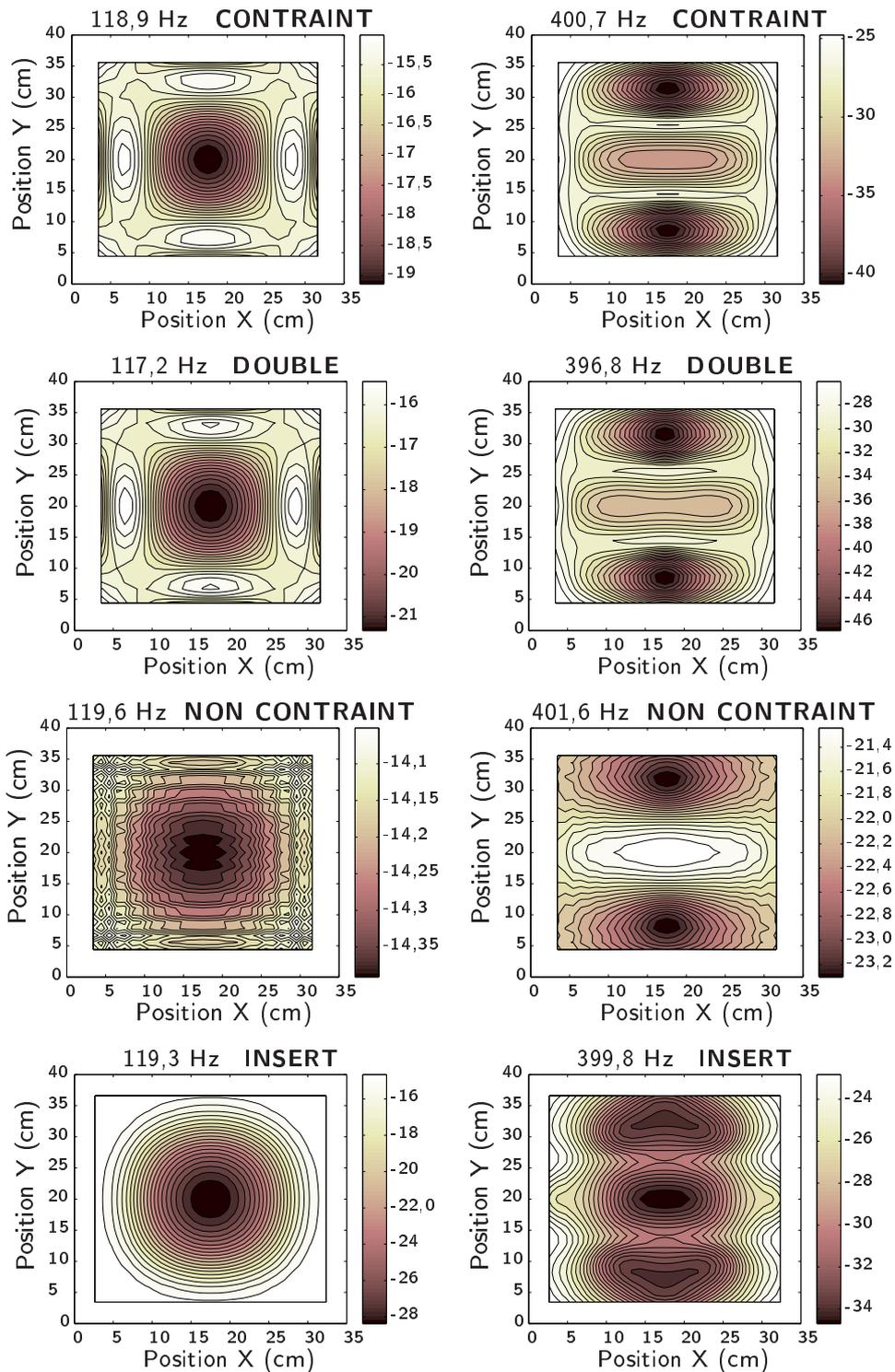


FIG. 6.25 – Etude de l'influence de la position de quatre traitements différents (patch en élastomère contraint, patches superposés, patch en élastomère non contraint et insert en élastomère) sur le niveau de puissance acoustique calculée à la fréquence des modes (1,1) noté 1 et (3,1) noté 5 d'une plaque encastree.

modes considérés. Le premier mode, à 120 Hz environ, est représenté dans la colonne de gauche des graphiques ; le deuxième mode, à 400 Hz environ, est représenté dans la colonne de droite. Dans chacune des figures les quatre configurations de traitement sont représentées.

Nous remarquons tout d'abord que la valeur de l'amortissement acoustique est beaucoup plus importante dans le cas d'une plaque que dans le cas d'une poutre. Dans la configuration considérée, l'amortissement acoustique du premier mode est même supérieur à l'amortissement viscoélastique. Nous remarquons par ailleurs que la position des traitements contraint, non contraint et doublé a une influence similaire sur l'amortissement acoustique et viscoélastique ; les courbes de niveau associées à ces traitements sont en effet très ressemblantes. L'échelle des graphiques montre que l'amortissement acoustique varie assez peu avec le traitement non contraint, léger ; il varie un peu plus avec le traitement en élastomère contraint et davantage encore avec le traitement avec des patches superposés.

L'amortissement viscoélastique associé au traitement non contraint est très faible. L'amortissement du traitement de patches superposés (**DOUBLE**) augmente de 50 % par rapport au cas contraint. Ce résultat semble intéressant mais il est à pondérer car le poids du traitement varie de 100 % entre les deux cas. Or nous avons vu dans le cas d'une poutre que l'amortissement viscoélastique peut varier linéairement avec la surface du traitement c'est-à-dire qu'à masse équivalente au patch double un traitement simple en élastomère contraint est susceptible d'apporter deux fois plus d'amortissement. En ce qui concerne la puissance acoustique on constate que le traitement de patches superposés (**DOUBLE**) est légèrement plus performant que le traitement en élastomère contraint. Par ailleurs nous notons que le traitement en élastomère non contraint est très peu influent sur le niveau de pression acoustique. Les variations du niveau sont d'ailleurs tellement faibles que le bruit numérique lié au maillage apparaît. Ce bruit est lié à la variation du chargement de pression appliqué aux noeuds du maillage car il n'apparaît pas dans les courbes de niveau d'amortissement. Nous avons pris soin de pondérer ce chargement nodal par la surface des éléments pour qu'il soit uniforme mais la variation des résultats due aux variations du maillage reste perceptible lorsque la puissance acoustique est quasiment constante.

Le traitement sous la forme d'un insert présente un comportement différent. L'amortissement acoustique varie en fonction de la position d'une façon qui est l'inverse de celle observée pour les autres traitements. Nous expliquons ceci par le rôle joué par la masse des traitements : les traitements représentent un ajout de masse excepté l'insert qui représente un prélèvement de masse (l'élastomère étant moins dense que l'aluminium qu'il remplace). Le traitement de type insert semble intéressant ici pour réduire le bruit rayonné par le premier mode ; la valeur de la puissance acoustique est en effet de 9 dB<sub>W</sub> inférieure à la valeur de la puissance acoustique associée au patch contraint. Ceci est lié à la déformation importante de l'élastomère dans cette plage fréquentielle ; le premier mode structural est d'ailleurs un mode extrêmement amorti de l'élastomère, localisé à 90 Hz.

## 6.5 Optimisation multiparamètre sur des structures académiques

Notre étude se poursuit par une optimisation multiparamètre de structures de type poutre ou plaque. Leur caractère académique nous a motivé comme dans les études précédentes à

privilégier une analyse paramétrique. L'analyse paramétrique permet de déterminer des valeurs quasi optimales globales en modifiant aisément un critère de contrainte (poids du traitement par exemple) et de jauger la sensibilité du problème d'optimisation. L'inconvénient de l'optimisation paramétrique réside dans le caractère approché des solutions obtenues. Il convient à ce titre de poursuivre l'optimisation en utilisant un algorithme d'optimisation locale de type gradient conjugué par exemple, ce que nous avons effectué en dernière partie pour définir une forme optimale de traitement. Le deuxième inconvénient des méthodes paramétriques réside dans les performances faibles de la méthode en termes de temps de calcul. L'algorithme de modélisation étant relativement rapide, il a néanmoins été possible d'effectuer des calculs d'optimisation avec un nombre de variables suffisant (jusqu'à cinq variables) pour déterminer les paramètres du modèle influents en matière de réduction de bruit et pour avoir une idée du traitement en élastomère contraint appliqué sur plaque ou poutre le plus performant. La difficulté du problème d'optimisation que nous nous sommes posé ne relève pas tant de l'impératif classique de détermination d'une valeur optimale mais plutôt de l'extraction d'une information pertinente, concise et exploitable pour des configurations pratiques industrielles.

### 6.5.1 Etude d'une poutre encastree-encastree

#### 6.5.1.1 Optimisation d'un traitement avec un patch

L'optimisation vibroacoustique d'un traitement en élastomère contraint appliqué à une poutre encastree-encastree a été effectuée sous contrainte de poids. Les caractéristiques de la poutre sont données dans le tableau 6.1. Quatre paramètres plus spécifiques ont été étudiés : la position du milieu du traitement, sa taille et les épaisseurs de polymère et d'aluminium. Le traitement a été déplacé de 5 cm en moyenne sur la première moitié de la poutre ; 13 valeurs d'épaisseur ont été étudiées, variant de 0,01 mm à 1 cm ; 13 tailles de patch ont été étudiées, variant de 1 cm à 90 cm. 14365 configurations ont ainsi été modélisées et comparées. Les résultats se présentent sous la forme d'un tableau en trois parties (tableau 6.8).

La première partie représente les valeurs des quatre variables permettant d'obtenir le niveau minimum de puissance acoustique. La contrainte de poids est matérialisée par la taille (1 cm, 4 cm, 10 cm, ...) d'un patch dit équivalent aux dimensions conventionnelles<sup>16</sup> et dont la masse ne peut être franchie. Les deux autres parties concernent le jeu de variable permettant d'obtenir le minimum d'amortissement acoustique et le maximum d'amortissement viscoélastique.

Les résultats tabulés montrent que les traitements les plus lourds ou de grande taille sont le plus souvent les traitements jugés optimaux, la contrainte de poids étant une limite presque toujours atteinte. Les valeurs d'amortissement acoustique minimales sont obtenues pour des patches courts et épais, favorisant la concentration de masse. Les épaisseur et taille de patch optimales vis-à-vis de l'amortissement viscoélastique ont tendance à augmenter toutes deux à mesure que la contrainte de poids se relâche. Cette observation vient confirmer l'analyse antérieure du tableau 6.7. On note néanmoins, dans certains cas, qu'une couche fine de polymère peut être la solution optimale du problème sous contrainte de poids (épaisseur de 0,05 mm, par exemple, dans le cas d'une taille équivalente de patch de 10 cm). La position optimale du patch conférant un amortissement acoustique minimum est la position

<sup>16</sup>Le patch équivalent possède une épaisseur de polymère de 1,2 mm et d'aluminium de 0,5 mm.

Puissance acoustique minimum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Niveau (dB <sub>W</sub> )	-1,75	-14,50	-20,60	-23,97	-37,67	-46,63
Pos. X (cm)	1	2,5	5	50	45	45
Taille X (cm)	2	5	10	30	90	90
Ep. élastomère (cm)	0,001	0,001	0,005	0,03	0,03	0,08
Ep aluminium (cm)	0,05	0,08	0,1	0,05	0,03	0,05

Amortissement acoustique minimum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Amortissement (Hz)	0,014	0,014	0,013	0,012	0,010	0,008
Pos. X (cm)	50	50	50	50	50	50
Taille X (cm)	1	1	1	2	10	5
Ep. élastomère (cm)	0,05	0,8	0,05	0,5	0,8	1
Ep aluminium (cm)	0,08	0,05	1	0,8	0,05	1

Amortissement viscoélastique maximum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Amortissement (Hz)	0,103	0,50	1,03	1,30	2,10	3,63
Pos. X (cm)	1	2,5	5	7,5	50	50
Taille X (cm)	2	5	10	15	40	50
Ep. élastomère (cm)	0,001	0,001	0,005	0,008	0,05	0,1
Ep aluminium (cm)	0,05	0,08	0,1	0,1	0,08	0,1

TAB. 6.8 – Optimisation des amortissements et de la puissance rayonnée associés au premier mode d'une *poutre traitée avec un patch* avec une contrainte de poids variable donnée par une taille de patch conventionnel équivalente en fonction de quatre variables : taille du patch, position et épaisseur de l'élastomère et de l'aluminium.

Puissance acoustique minimum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Niveau (dB <sub>W</sub> )	6,05	-13,16	-18,85	-24,41	-32,06	-47,04
Taille X (Patch 1) (cm)	1	2	10	20	40	5
Taille X (Patch 2) (cm)	1	5	5	15	2	90
Ep. élastomère (cm)	0,001	0,001	0,005	0,01	0,1	0,05

Amortissement acoustique minimum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Amortissement (Hz)	0,014	0,014	0,013	0,012	0,010	0,008
Taille X (Patch 1) (cm)	1	2	1	2	5	5
Taille X (Patch 2) (cm)	1	2	1	2	10	10
Ep. élastomère (cm)	0,001	0,1	1	1	0,5	1

Amortissement viscoélastique maximum						
Taille eq (cm)	1	4	10	20	40	80
Amortissement (Hz)	0,033	0,424	0,83	1,33	1,84	2,74
Taille X (Patch 1) (cm)	1	2	10	15	30	70
Taille X (Patch 2) (cm)	1	5	5	15	20	15
Ep. élastomère (cm)	0,001	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1

TAB. 6.9 – Optimisation des amortissements et de la puissance rayonnée associés au premier mode d'une *poutre traitée avec deux patches* avec une contrainte de poids variable donnée par une taille de patch conventionnel équivalente en fonction de quatre variables : taille du patch, position et épaisseur de l'élastomère et de l'aluminium.

centrée. En ce qui concerne l'amortissement viscoélastique, la position optimale est située alternativement à l'extrémité ou au centre de la poutre.

### 6.5.1.2 Optimisation d'un traitement avec deux patches

Une optimisation paramétrique sous contrainte à cinq variables basée sur l'étude de la position, de la taille et de l'épaisseur de polymère de deux patches en élastomère contraint traitant une poutre a été effectuée. Tous deux possèdent la même épaisseur variable de polymère. Le but de cette étude est de comparer les traitements à un patch et les traitements à deux patches dans le cadre de la réduction du bruit rayonné par le premier mode de flexion. 13 tailles de patch ont été étudiées, variant de 1 cm à 90 cm ; les patches ont été déplacés tous les 5 cm environ. 7 épaisseurs de polymère variant de 0,01 mm à 1 cm ont été étudiées. L'épaisseur de la couche d'aluminium a été conservée fixe à 0,5 mm. Finalement, 53466 configurations ont été modélisées et comparées.

L'augmentation linéaire de l'amortissement viscoélastique avec la taille d'un patch en élastomère contraint appliqué sur une poutre nous a porté à croire (figure 6.12) qu'il est possible d'avoir des performances équivalentes voire meilleures avec un patch plutôt qu'avec deux

sauf éventuellement en basse fréquence et pour des tailles de patch faibles (configuration pour laquelle nous avons noté une oscillation de l'amortissement viscoélastique lorsque la taille du patch varie). Les résultats de l'étude de ce paragraphe, qui corroborent notre intuition, sont présentés dans le tableau 6.9 en trois parties. La première partie du tableau rapporte les valeurs de puissance acoustique minimums et le jeu de variables permettant d'obtenir ces valeurs minimums. Les deux variables de position ont été omises dans les tableaux. Les deuxième et troisième parties concernent les valeurs optimales d'amortissement acoustique et viscoélastique avec la puissance associée. Les valeurs sont données en fonction d'un critère de contrainte de poids du traitement matérialisé par une taille de patch conventionnelle<sup>17</sup> équivalente. Elles peuvent donc être directement comparées aux valeurs obtenues dans le cas d'un patch unique (tableau 6.8).

Nous remarquons tout d'abord que la taille des deux patches permettant de maximiser l'amortissement viscoélastique est assez comparable, sauf dans le cas d'une contrainte de poids associée à un patch équivalent de 80 cm. La minimisation de la puissance acoustique favorise quant à elle un patch de dimensions bien supérieures à l'autre, surtout dans le cas d'une contrainte de poids relâchée (taille équivalente de 40 cm et de 80 cm). Il est alors sans doute préférable d'avoir un patch unique. La comparaison des tableaux 6.8 et 6.9 confirme et généralise en partie le résultat à toutes les tailles de patch : à contrainte de poids équivalente, l'amortissement viscoélastique est toujours supérieur dans le cas à un patch par rapport au cas à deux patches, sauf dans quelques rares cas, où il est alors du même ordre de grandeur. Pour la puissance acoustique le constat est similaire : *un traitement à patch unique est plus performant qu'un traitement à deux patches.*

### 6.5.2 Etude de plaques

Nous nous intéressons à présent à l'étude du premier mode de flexion d'une plaque encadrée dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 6.1. Dans la mesure où seul le premier mode de flexion a été étudié, un maillage plus grossier de 12 éléments dans chacune des deux directions du plan de la plaque a été adopté. L'influence de cinq variables a été étudiée dans le cadre d'une analyse paramétrique portant sur l'épaisseur de l'élastomère, la position du patch en élastomère contraint et ses dimensions (largeur, longueur). 9 tailles de patch ont été étudiées par direction, variant de 1 cm à 30 cm ; 7 valeurs d'épaisseur d'élastomère différentes variant de 0,01 mm à 1 cm ont été retenues. La position du traitement a été déplacée tous les 2 cm en moyenne. L'épaisseur de la couche d'aluminium a été conservée fixe à 0,5 mm. Au final 25035 configurations ont été modélisées et comparées.

Le tableau 6.10 présente les valeurs optimales des variables étudiées dans le cadre d'une minimisation de la puissance acoustique, de l'amortissement acoustique et d'une maximisation de l'amortissement viscoélastique. Les résultats d'optimisation ont été représentés à chaque fois pour une épaisseur de polymère donnée variant de 0,01 mm à 1 cm. On remarque tout d'abord que l'amortissement viscoélastique optimal (parmi les configurations étudiées) est presque toujours associé aux tailles de patch maximales autorisées (30 cm × 30 cm). La puissance acoustique optimale est également associée aux tailles de patch maximales quelle que soit l'épaisseur de l'élastomère. En ce qui concerne l'amortissement acoustique, on trouve alternativement pour les épaisseurs importantes de polymère des patches optimaux de forme

---

<sup>17</sup>Epaisseur de polymère de 1,2 mm et d'aluminium de 0,5 mm.

Puissance acoustique minimum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Niveau (dB <sub>W</sub> )	-34,50	-39,16	-41,51	-48,46	-51,67	-61,60	-67,24
Pos. X (cm)	15	15	15	17,5	17,5	17,5	17,5
Pos. Y (cm)	20	20	20	20	20	20	20
Taille X (cm)	30	30	30	30	30	30	30
Taille Y (cm)	30	30	30	30	30	30	30

Amortissement acoustique minimum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Amort. (Hz)	4,15	4,02	3,93	3,51	3,13	1,70	1,06
Pos. X (cm)	20,8	30,5	29,5	20	17,5	20	20
Pos. Y (cm)	12,5	7	8	17,5	20	17,5	17,5
Taille X (cm)	25	30	30	15	15	20	20
Taille Y (cm)	10	4	6	10	15	15	15

Amortissement viscoélastique maximum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Amort. (Hz)	9,5	17,4	21,6	36,58	46,76	82,29	97,9
Pos. X (cm)	15	15	15	15	17,5	17,5	17,5
Pos. Y (cm)	12,5	12,5	15	20	20	20	20
Taille X (cm)	30	30	30	30	30	30	30
Taille Y (cm)	25	25	30	30	30	30	30

TAB. 6.10 – Optimisation sans contrainte des amortissements et de la puissance rayonnée associés au premier mode d'une plaque traitée avec un patch en fonction de cinq variables : taille du patch, position et épaisseur de l'élastomère.

Puissance acoustique minimum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Niveau (dB <sub>W</sub> )	-21,03	-23,45	-24,30	-22,16	-21,05	-20,01	-15,98
Pos. X (cm)	15	17,5	17,5	9,5	12	8	13
Pos. Y (cm)	7	20	20	28	25,5	29,5	24,5
Taille X (cm)	30	10	10	4	4	1	1
Taille Y (cm)	4	10	10	20	15	20	10

Amortissement acoustique minimum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Amort. (Hz)	4,16	4,02	3,97	3,76	3,56	3,49	3,35
Pos. X (cm)	30,5	30,5	28	19,5	19,5	21,5	19,5
Pos. Y (cm)	7	7	9,5	15,86	18	16	18
Taille X (cm)	30	30	25	10	10	10	6
Taille Y (cm)	4	4	4	6	6	2	2

Amortissement viscoélastique maximum							
Epaisseur (cm)	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1	0,5	1
Amort. (Hz)	5,07	6,77	7,74	5,59	4,55	4,00	1,20
Pos. X (cm)	15	17,5	17,5	9,5	12	8	13
Pos. Y (cm)	7	20	20	28	25,5	29,5	24,5
Taille X (cm)	30	10	10	4	4	1	1
Taille Y (cm)	4	10	10	20	15	20	10

TAB. 6.11 – Optimisation des amortissements et de la puissance rayonnée d'une plaque traitée avec un patch avec une contrainte de poids du traitement en fonction de cinq variables : taille du patch, position et épaisseur de l'élastomère.

carrée, centrés, ou pour des épaisseurs plus faibles des patches rectangulaires décentrés.

L'étude a été poursuivie en incluant une contrainte de poids du traitement amortissant. Le poids du patch en élastomère contraint a été limité au poids d'un patch de taille 6,9 cm  $\times$  8,9 cm correspondant au traitement étudié dans l'expérience de plaque suspendue présentée au § 1.4.2. La présentation tabulaire adoptée est semblable aux présentations précédentes et sépare l'optimisation de la puissance acoustique et l'optimisation des deux amortissements. On note qu'un patch carré centré avec une épaisseur d'élastomère de 0,01 cm est le traitement optimal parmi toutes les configurations étudiées, sous contrainte de poids. Un patch en bande décentré est optimal dans le cas d'une épaisseur d'élastomère valant 1 mm (proche de l'épaisseur des patches utilisés expérimentalement). Il est intéressant de noter que l'étude sans contrainte précédente (tableau 6.10) suggérerait d'employer les épaisseurs d'élastomère les plus importantes possibles alors que l'ajout de la contrainte de poids favorise des épaisseurs intermédiaires. A poids équivalent, par exemple, la configuration d'épaisseur 0,01 cm optimale donne un niveau de puissance acoustique inférieur de 8,3 dB<sub>W</sub> au niveau obtenu avec un traitement optimal d'épaisseur 1 cm.

### 6.5.2.1 Optimisation de forme

Nous avons effectué une dernière étude pour compléter l'analyse paramétrique précédente. La finalité est de déterminer une forme optimale de patch en élastomère contraint pour le premier mode de vibration de la plaque encastrée à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué. Nous avons exploité pour cela les résultats de l'optimisation sous contrainte précédente pour définir une configuration initiale ; nous avons retenu d'une part le traitement optimal carré possédant une épaisseur de polymère de 0,1 mm (patch de 10 cm de côté), et d'autre part le traitement optimal ayant une épaisseur d'élastomère de 1 mm décentré de dimensions 4 cm  $\times$  15 cm. En utilisant d'abord une méthode globale puis une méthode locale, on peut s'approcher de l'optimum global de façon plus fine. La procédure locale a consisté à prendre la position des noeuds du contour du maillage comme variable à optimiser. La définition de la fonctionnelle se base sur le constat (figure § 6.12) que l'amortissement viscoélastique varie linéairement avec la surface du traitement. Nous l'avons donc bâtie en divisant l'amortissement viscoélastique par l'aire de la surface d'application du traitement, reliée directement à son poids.

L'algorithme de gradient conjugué pilote le déplacement des noeuds du contour du patch vers une configuration optimale. Un remaillage, permettant de régulariser le maillage en réajustant la position des noeuds dont la position n'est pas sujette à l'optimisation, a été développé spécialement. Il se base sur une procédure itérative au cours de laquelle les distances internodales sont uniformisées. Il permet à un contour de patch de forme relativement régulière d'évoluer vers des formes assez spécifiques ; il est donc bien adapté à la procédure d'optimisation locale. En revanche, il ne permet pas d'aboutir à des formes plus évoluées (croix, anneau) très différentes d'une forme initiale simple (rectangulaire, par exemple). L'algorithme s'arrête dès lors que la méthode de gradient conjugué a convergé ou que la distorsion angulaire d'un élément du maillage est trop importante. La dérivée de la fonctionnelle par rapport aux variables, requise par l'algorithme de gradient conjugué, est évaluée numériquement.

La figure 6.26 présente les résultats d'optimisation de forme du patch carré de 10 cm de

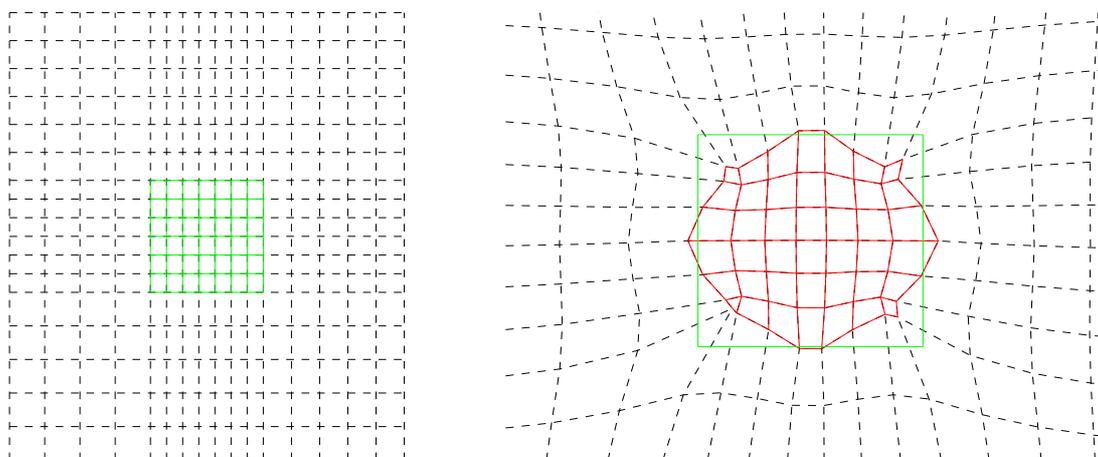


FIG. 6.26 – Optimisation de la forme d'un patch en élastomère contraint maximisant le rapport de l'amortissement viscoélastique en Hz par l'aire du patch. **CAS 1** : épaisseur d'élastomère de 0,1 mm. A gauche : Maillage initial. A droite : contour initial en vert; contour final en rouge.

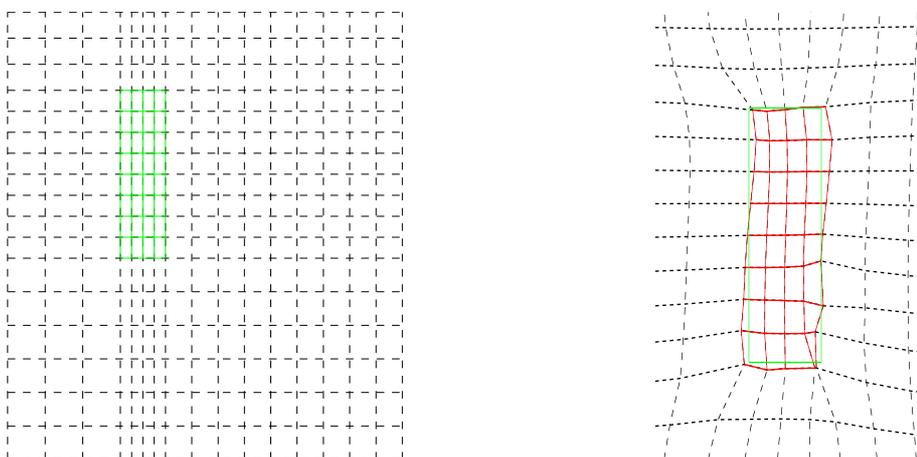


FIG. 6.27 – Optimisation de la forme d'un patch en élastomère contraint maximisant le rapport de l'amortissement viscoélastique en Hz par l'aire du patch. **CAS 2** : épaisseur d'élastomère de 1 mm. A gauche : Maillage initial. A droite : contour initial en vert; contour final en rouge.

Étape	CAS 1 : Epaisseur de 0,1mm		CAS 2 : Epaisseur de 1mm	
	Initiale	Finale	Initiale	Finale
Fréquence (Hz)	123,34	123,54	122,31	122,07
Am. viscoélastique (Hz)	7,56	6,05	1,42	1,69
Aire ( $10^{-3}$ m <sup>2</sup> )	10,00	7,66	6,00	6,36

TAB. 6.12 – Optimisation de la forme d'un patch en élastomère contraint maximisant le rapport de l'amortissement viscoélastique en Hz par l'aire du patch. Comparaison de l'aire du traitement et de son amortissement viscoélastique à l'étape initiale et à l'étape finale.

	CAS 1 : Epaisseur de 0,1mm	CAS 2 : Epaisseur de 1mm
Variation d'amort. (%)	-20,0	+ 19,0
Variation d'aire (%)	-23,4	+ 5,7
Fonctionnelle initiale	752,8	236,9
Fonctionnelle finale	789,6	265,8
Nombre de variables	52	48
Nombre d'itérations	8	6

TAB. 6.13 – Optimisation de la forme d'un patch en élastomère contraint maximisant le rapport de l'amortissement viscoélastique en Hz par l'aire du patch. Données sur l'algorithme d'optimisation et comparaison des solutions initiale et finale.

côté. La partie gauche de la figure présente le maillage initial ; la partie droite montre le maillage déformé obtenu. On note que le patch ne s'est pas déplacé, et que les deux symétries axiales ont été finement préservées. On note également que l'aire du patch s'est un peu réduite. Les configurations initiale et finale sont présentées dans le tableau 6.12 ; on observe dans le cas présent (**CAS 1**) que l'aire et l'amortissement diminuent tous deux. Le tableau 6.13 présente d'autres données sur la résolution : le problème d'optimisation est un problème à 52 variables ; la convergence a été atteinte rapidement, en huit itérations. La deuxième configuration nommée **CAS 2** a été déterminée comme optimale à la suite de l'étude paramétrique sous contrainte de poids ; le maillage associé à cette configuration est représenté dans la partie gauche de la figure 6.27. La forme est à peine modifiée par la méthode d'optimisation ; néanmoins le rapport de l'amortissement viscoélastique par l'aire du patch qui nous sert de fonctionnelle passe de 236,9 à 265,8 (tableau 6.13). On remarque, contrairement au cas précédent, qu'aire et amortissement viscoélastique ont tous deux augmenté.

L'intérêt de la démarche actuelle est assez limité semble-t-il ; une étude annexe nous a montré qu'un patch centré carré de taille équivalente au patch optimisé du **CAS 1** aurait apporté un amortissement viscoélastique de 5,81 Hz, c'est-à-dire un peu moins seulement que la valeur obtenue de 6,05 Hz. Nous pensons que l'utilisation de l'algorithme aurait certainement beaucoup plus d'intérêt dans le cas de traitements de taille plus importante avec une contrainte initiale de poids moins restrictive.

## 6.6 Bilan et conclusions du chapitre

Une étude détaillée du problème d'optimisation vibroacoustique de traitements à base d'élastomère a été conduite sur des structures académiques (poutre, plaque). L'objectif était d'apporter une connaissance générale, académique des traitements qui puisse être en partie extrapolable à des cas industriels pratiques. Nous avons privilégié pour cela des études paramétriques simples permettant de comprendre davantage certains aspects du comportement vibroacoustique des structures traitées. Il a été montré, notamment, que le traitement en élastomère contraint est un traitement très performant en comparaison à d'autres types de traitement simple.

L'analyse des paramètres caractérisant les traitements nous a amené à définir un certain nombre de règles permettant de traiter efficacement une structure avec un équipement expérimental modeste (matériel d'analyse modale). Nous avons par exemple montré qu'un critère basé sur la courbure des déformées modales permettait de positionner un patch en élastomère contraint de façon optimale. Nous avons également montré qu'il existait une taille de patch suffisante représentant une quantité de matériau seuil ; tout ajout de matériau amortissant n'a alors qu'un impact limité sur la réduction déjà importante de la puissance acoustique rayonnée.

Nous avons enfin montré que les performances des patches étaient extrêmement variables et qu'une modélisation avancée comme celle que nous sommes en mesure de réaliser permettait de dimensionner des traitements très efficaces, même dans les basses fréquences.



# Conclusion générale

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire est une contribution à la modélisation dynamique de structures amorties et à l'optimisation de traitements amortissants pour la réduction de bruit.

Le **premier apport** de ce travail concerne le calcul précis et très rapide de la réponse d'une structure à amortissement linéaire général en régime temporel/fréquentiel instationnaire. La méthode utilisée se base sur la combinaison originale d'un programme de modélisation par éléments finis à vingt-sept noeuds avec une formulation quasi-incompressible pour les élastomères, d'un solveur complexe dédié aux problèmes matriciels mal conditionnés issus de ce type de discrétisation, de routines itératives et de perturbation permettant de calculer les modes de résonance et d'un calcul analytique de la transformée de Laplace utilisant ces modes et le théorème des résidus. La méthode permet de rendre compte de l'inhomogénéité de l'amortissement sans hypothèse de modélisation particulière, de ne nécessiter que les données brutes du matériau. Elle permet de régler de façon simple les problèmes classiques de perte d'orthogonalité des modes et de dépendance fréquentielle qui caractérisent les systèmes à amortissement viscoélastique. Les simulations numériques qui ont été réalisées montrent que la méthode développée est aussi précise que la méthode de résolution directe quel que soit le niveau d'amortissement. Une version particulière calculant les modes de résonance par perturbation exclusivement, et dont la précision a été validée par un calcul comparatif de puissance acoustique, permet d'obtenir des temps de calcul de deux à trois ordres inférieurs au temps requis par la résolution directe. Le temps de calcul est ainsi comparable au temps nécessaire pour modéliser un système dynamique non amorti par la méthode modale classique.

La **deuxième contribution** de ce travail de thèse concerne la modélisation physique et l'identification des différentes sources d'amortissement d'une plaque en aluminium traitée avec des patches en élastomère contraint. Trois amortissements par couplage ont été modélisés : l'amortissement par frottement visqueux de l'air, l'amortissement par rayonnement acoustique et l'amortissement par couplage thermoélastique. Deux amortissements viscoélastiques ont été identifiés : l'amortissement viscoélastique de l'aluminium et l'amortissement viscoélastique de l'élastomère. Tous les amortissements aussi différents soient-ils se combinent pour former l'amortissement total qui est la seule quantité accessible expérimentalement ; nous l'avons identifié sur la plaque traitée suspendue par des fils par le biais d'une méthode d'analyse modale sans contact utilisant un laser, un haut parleur et la méthode du décrétement logarithmique des oscillations libres.

L'amortissement thermoélastique a été authentifié comme l'une des deux composantes prin-

cipales de l'amortissement de l'aluminium ; une méthode de résolution originale basée sur les algorithmes de modélisation dynamique développés ainsi que sur des routines supplémentaires, dont une routine de représentation du champ thermique par séries de Fourier, nous ont permis d'analyser le modèle de référence de Zener. Nos résultats montrent qu'il s'agit d'un modèle simple, précis, adapté aux configurations de plaque encastrée ou sur appui ; mais ils montrent également que le modèle de Zener est inadapté aux conditions aux limites libres pour lesquelles il est pourtant souvent utilisé. La substitution de l'amortissement thermoélastique modélisé à l'amortissement évalué dans l'expérience d'analyse modale de plaque suspendue nous a permis d'évaluer l'amortissement viscoélastique très faible de l'aluminium dont la valeur est quasiment constante en fonction de la fréquence.

L'identification de l'amortissement viscoélastique de l'élastomère a aussi requis un certain soin dans la procédure expérimentale et dans la modélisation mises en oeuvre. Elle a été conduite en partant du constat que les données viscoélastiques du matériau disponibles ne permettaient pas de retrouver les résultats expérimentaux de l'expérience de décrétement réalisée sur une plaque traitée avec des patches en élastomère contraint. La démarche retenue a été d'exploiter les routines de modélisation développées en y ajoutant une routine de gradient conjugué, de façon à résoudre le problème inverse d'identification de l'amortissement et du module de stockage dépendants de la fréquence à partir des données expérimentales d'analyse modale issues de deux configurations différentes mais complémentaires. La première configuration choisie a été celle de la plaque suspendue, dont les données étaient disponibles, et qui se prête bien à l'identification de l'amortissement associé aux patches. La deuxième configuration retenue a été celle d'une poutre cantilever couverte presque entièrement de patch contraint, qui se prête bien à l'identification du module de stockage. Une méthode itérative nous a permis d'exploiter et de relier les informations expérimentales émanant de ces deux configurations. La méthode a mis en lumière la qualité de la modélisation et les nombreuses difficultés liées au système étudié, comme celle de la modélisation de l'interface aluminium/polymère ; malgré cela, les données identifiées ont pu être validées dans une confrontation modèle/expérience.

Le **troisième apport** de la thèse concerne l'étude vibroacoustique de traitements amortissants. Un modèle vibroacoustique classique a été développé pour calculer le rayonnement d'une plaque de type bafflée ou non bafflée ; il a été validé numériquement. Le modèle non bafflé a été utilisé pour montrer que l'amortissement acoustique est négligeable dans le cas d'une plaque suspendue. Le modèle bafflé nous a permis d'apprécier sur un plan acoustique l'influence de traitements amortissants. Une démarche d'optimisation simple a été privilégiée, basée sur des études paramétriques, de façon à comprendre le comportement assez particulier des traitements en élastomère contraint. Elle débouche sur un savoir-faire pratique exploitable par les ingénieurs qui sont en charge de développer et d'appliquer des traitements amortissants. Nous avons montré au cours d'études paramétriques variées qu'il existe une taille de patch adéquate pour réaliser une réduction de bruit efficace sous contrainte de poids du traitement ; nous avons aussi montré qu'il existait un critère pour placer optimalement un traitement en élastomère contraint à partir de simples résultats d'analyse modale ; nous avons enfin montré que les élastomères ont un potentiel fort pour réduire le bruit, notamment dans les basses fréquences, mais que leur dimensionnement correct à l'aide d'outils numériques vibroacoustiques précis était de prime importance, surtout dans ce registre.

Certains aspects du travail nécessitent d'être développés davantage ; en outre, l'étude des plaques, pour lesquelles le couplage fluide-structure joue un rôle prépondérant, n'a pas été approfondi. Nous nous sommes finalement plus préoccupés de maximiser l'amortissement viscoélastique que d'altérer le couplage vibroacoustique à l'aide de raidisseurs ou de masses localisées. Nous avons également occulté tout travail d'optimisation «lourde» qu'il serait intéressant de mener sur des structures pratiques industrielles, en guidant le choix algorithmique à l'aide des notions académiques développées dans ce mémoire (choix des variables à optimiser, choix de la fonctionnelle et des contraintes). En matière de modélisation physique, deux éléments nous semblent faire défaut à l'heure actuelle, et doivent faire l'objet d'un effort de recherche soutenu : le premier concerne la modélisation des lois constitutives des matériaux viscoélastiques dont on doit pour l'instant identifier les caractéristiques. Le deuxième élément concerne la modélisation des conditions aux limites structurelles, dont la qualité actuelle altère sérieusement la prédiction du comportement vibroacoustique des structures réelles.



# Bibliographie

- [1] J.D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Publ., 1994.
- [2] S. Adhikari. *Damping models for structural vibration*. PhD thesis, Cambridge university, Cambridge, 2000.
- [3] S. Adhikari. Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of sound and vibration*, 293(1-2) :156–170, 2006.
- [4] A. Arpaci. Annular plate dampers attached to continuous systems. *Journal of sound and vibration*, 191(5) :781–793, 1996.
- [5] N. Atalla, J. Nicolas, and C. Gauthier. Acoustic radiation of an unbaffled vibrating plate with general elastic boundary conditions. *Journal of the acoustical society of america*, 99(3) :1484–1494, 1996.
- [6] R.L. Bagley and P.J. Torvik. A theoretical basis of the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of rheology*, 27(3) :201–210, 1983.
- [7] K.J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice-Hall, 1996.
- [8] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis, vol I*. Hermès, 1995.
- [9] J. Åberg, B. Widell, T. Bergström, and H. Fredriksson. Measurement of intrinsic material damping using differential calorimetry on specimens under uniaxial tension. *Thermochimica acta*, 411 :125–131, 2004.
- [10] J.T. Bergen. *Viscoelasticity. Phenomenological aspects*. Academic press, 1960.
- [11] R.H. Blanc. Transient wave propagation methods for determining the viscoelastic properties of solids. *Journal of applied mechanics*, 60 :763–768, 1993.
- [12] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Editions / Eyrolles, 1995.
- [13] N. Bonnet. *Etude du comportement sous sollicitations intenses d'élastomères. Application au cas du blindage réactif*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure des arts et métiers, Bordeaux, 1998.
- [14] Ø. Bremnes, B. Carre no Morelli, and G. Gremaud. Influence of the interaction between dislocations and mobile point-defects on the damping spectrum of aluminium. *Journal of alloys and compounds*, 310 :62–67, 2000.
- [15] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, J. Kovalic, F. Marchesoni, and M. Punturo. Low-frequency internal friction in clamped-free thin wires. *Physics letters A*, 255 :230–235, 1999.
- [16] R.W. Cahn. *Physical metallurgy (2nd ed. rev.)*. North-Holland Publ.Co., 1970.

- [17] F. Cassot. *Contribution à l'étude de la diffraction par un écran mince*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille I, Marseille, 1971.
- [18] P. Chadwick. Thermal damping of a vibrating elastic body. *Mathematika*, 9 :38–48, 1962.
- [19] A. Chaigne and V. Doutaut. Numerical simulation of xylophones. i. time-domain modeling of the vibrating bar. *Journal of the acoustical society of america*, 101(5) :539–557, 1997.
- [20] A. Chaigne and C. Lambourg. Time-domain simulation of damped impacted plates. *Journal of the acoustical society of america*, 109(4) :1422–1432, 2001.
- [21] A. Chaigne and C. Lambourg. Time-domain simulation of damped impacted plates. i. theory and experiments. *Journal of the acoustical society of america*, 109(4) :1433–47, 2001.
- [22] A. Cherkaev. *Variational methods for structural optimization*. Springer, 2004.
- [23] R.M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity, an Introduction*. Academic Press, 1971.
- [24] J. Cousteix. *Couche limite laminaire*. Cepadues editions, 1988.
- [25] S.H. Crandall. The role of damping in vibration theory. *Journal of sound and vibration*, 11(1) :3–18, 1970.
- [26] L. Cremer, M. Heckl, and E.E. Ungar. *Structure-borne sound, Second edition*. Springer-Verlag, 1988.
- [27] A.F. Côté, N. Atalla, and J-L. Guyader. Vibroacoustic analysis of an un baffled rotating disk. *Journal of the acoustical society of america*, 103(3) :1483–1492, 1998.
- [28] S.S. Dey and V. Tirumala Rao. Transient response of circular plates and membranes : a numerical approach. *Int. J. Mech. Sci.*, 39(12) :1405–1413, 1997.
- [29] P. D'Haene and J. Lu. Influence of pvb mechanical properties on the vibrational damping of windscreen. In *ISMA, Vol. V*, Leuven, 2002.
- [30] A.D. Dimarogonas and N.B. Syrimbeis. Thermal signatures of vibrating rectangular plates. *Journal of sound and vibration*, 157(3) :467–476, 1991.
- [31] A.E. Duwel, J.P. Gorman, M. Weinstein, J.T. Borenstein, and P.A. Ward. Quality factors of mems gyros and the role of thermoelastic damping. In *15th IEEE*, pages 214–219, Las Vegas, January 2002.
- [32] M. Enelund. *Fractional calculus and linear viscoelasticity in structural dynamics*. PhD thesis, Chalmers university of technology, Göteborg, 1996.
- [33] J. Esteban and C.A. Rogers. Wave localization due to material damping. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 177 :93–107, 1999.
- [34] D.J. Ewins. *Modal testing : theory and practice*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [35] F. Fahy. *Sound and structural vibration*. Academic press, 1987.
- [36] J.D. Ferry. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, Inc., 1970.
- [37] P. Filippi, D. Habault, J-P. Lefebvre, and A. Bergassoli. *Acoustics*. Academic press, 1999.
- [38] P.J.T. Filippi, D. Habault, P-O. Mattei, and C. Maury. The role of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure. *Journal of sound and vibration*, 239(4) :639–663, 2001.

- [39] I.C. Finegan and R.F. Gibson. Analytical modeling of damping at micromechanical level in polymer composites reinforced with coated fibers. *Composites science and technology*, 60 :1077–1084, 2000.
- [40] Y.C. Fung. *Foundations of solid mechanics*. Prentice-Hall, 1965.
- [41] L. Garibaldi and H.N. Onah. *Viscoelastic material damping technology*. Becchis osiride, 1996.
- [42] L. Gaul and R. Nitsche. Friction control for vibration suppression. *Mechanical systems and signal processing*, 14(2) :139–150, 2000.
- [43] Z. Geng, A.A. Popov, and D.J. Cole. Modelling of vibration damping in pneumatic tyres : Appropriate interpretation of complex modes. In *ISMA, Vol. I*, 2002.
- [44] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, 1995.
- [45] J. Gittus. *Creep, viscoelasticity and creep fracture in solids*. Applied Science Publishers Ltd, 1975.
- [46] J. Göken and W. Riehemann. Thermoelastic damping of the low density metals az91 and dispal. *Materials science & engineering*, A324 :134–140, 2002.
- [47] D.F. Golla and P.C. Hughes. Dynamics of viscoelastic structures - a time domain finite element formulation. *Journal of applied mechanics*, 52 :897–906, 1985.
- [48] A.V. Granato and K. Lücke. Theory of mechanical damping due to dislocations. *J. Appl. Phys.*, 27 :583–593, 1956.
- [49] A.M. Gretarsson, G.M. Harry, S.D. Penn, P.R. Saulson, W.J. Startin, S. Rowan, G. Cagnoli, and J. Hough. Pendulum mode thermal noise in advanced interferometers : a comparison of fused silica fibers and ribbons in the presence of surface loss. *Physics letters A*, 270 :108–114, 2000.
- [50] J. Gu, X. Zhang, M. Gu, Z. Liu, and G. Zhang. The damping capacity of aluminum matrix composites reinforced with coated carbon fibers. *Materials letters*, 58 :3170–3174, 2004.
- [51] D. Habault and P. Filippi. A numerical method for the computation of the resonance frequencies and modes of a fluid-loaded plate : application to the transient response of the system. *Journal of sound and vibration*, 270 :207–231, 2004.
- [52] M.A. Hamdi. Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de helmholtz avec des conditions aux limites mixtes. *C.R.Acad.Sci. Paris Ser.*, II :17–20, 1981.
- [53] S.W. Hansen and R.D. Spies. Structural damping in laminated beams due to interfacial slip. *Journal of sound and vibration*, 204(1) :183–202, 1997.
- [54] U. Harms, F. Klose, H. Neuhäuser, K. Fricke, E. Peiner, and A. Schlachetzki. Anelastic properties of aluminium thin films on silicon cantilevers. *Journal of alloys and compounds*, 310 :449–453, 2000.
- [55] Harris and Crede. *Shock and vibration handbook*. McGraw-Hill, 1961.
- [56] S.M. Hasheminejad and N. Safari. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluid. *Journal of sound and vibration*, 280 :101–125, 2005.

- [57] L. Hillström, M. Mossberg, and B. Lundberg. Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least-squares. *Journal of sound and vibration*, 230(3) :689–707, 2000.
- [58] W. Hufenbach, C. Holste, and L. Kroll. Vibration and damping behaviour of multi-layered composite cylindrical shells. *Composite structures*, 58 :165–174, 2002.
- [59] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Prentice-Hall, 1987.
- [60] W.C. Hurty and M.F. Rubinstein. *Dynamics of structures*. Prentice-hall, 1964.
- [61] L. Jaouen. *Contribution à la caractérisation mécanique de matériaux poro-visco-élastiques en vibro-acoustique*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 2003.
- [62] C. Jia. Study on damping behavior of FeAl<sub>3</sub> reinforced commercial purity aluminum. *Materials and design*, 2006.
- [63] J.Landier, P.Mercier, and M. Berveiller. Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 4(1) :51–84, 1994.
- [64] W. Johnson. Dislocation damping after plastic deformation in interstitial-free and carbon steels. *Journal of alloys and compounds*, 310 :423–426, 2000.
- [65] A. Kareem and K. Gurley. Damping in structures : its evaluation and treatment of uncertainty. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, 59 :131–157, 1996.
- [66] G. Kergoulay. *Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques, application à une enceinte acoustique*. PhD thesis, Ecole centrale de Paris, Paris, 2004.
- [67] J. Kidawa-Kukla. Vibration of a beam induced by harmonic motion of a heat source. *Journal of sound and vibration*, 205(2) :213–222, 1997.
- [68] Y. Koizumi, M. Ueyama, N. Tsuji, Y. Minamino, and K. Ota. High damping capacity of ultra-fine grained aluminum produced by accumulative roll bonding. *Journal of alloys and compounds*, 355 :47–51, 2003.
- [69] K.R.Chung and C.W.Lee. Dynamic reanalysis of weakly non-proportionally damped systems. *Journal of sound and vibration*, 111(1) :37–50, 1986.
- [70] S.-W. Kung and R. Singh. Development of approximate methods for the analysis of patch damping design concepts. *Journal of sound and vibration*, 219(5) :785–812, 1999.
- [71] C. Lalanne. *Vibrations sinusoïdales*. Hermès, 1999.
- [72] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - Application à la synthèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, Mans, 1997.
- [73] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*. Editions de Moscou, 1971.
- [74] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Méthodes directes*. Dunod, 2000.
- [75] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Méthodes itératives*. Dunod, 2000.
- [76] B. Laulagnet. Sound radiation by a simply supported unbaffled plate. *Journal of the acoustical society of america*, 103(5) :2451–2462, 1998.

- [77] P. Lemerle. Measurement of the viscoelastic properties of damping materials : adaptation of the wave propagation method to test samples of short length. *JSV*, 250(2) :181–196, 2002.
- [78] S. Lepage and J.-C. Golinval. Modélisation par éléments finis du couplage thermo-élastique dans les micro-structures. In *7ème colloque national en calcul des structures*, Giens, 2005.
- [79] G.A. Lesieutre and E. Bianchini. Time domain modeling of linear viscoelasticity using augmenting thermodynamic fields. *J. vibration and acoustics*, 117 :424–430, 1995.
- [80] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Editions Eyrolles, 1988.
- [81] A.Y.T. Leung. An algorithm for matrix polynomial eigenproblems. *Journal of sound and vibration*, 158(2) :363–368, 1992.
- [82] Y. Liao and V. Wells. Estimation of complex modulus using wave coefficients. *Journal of sound and vibration*, 295 :165–193, 2006.
- [83] R. Lifshitz. Phonon-mediated dissipation in micro- and nano-mechanical systems. *Physica B*, 316-317 :397–399, 2002.
- [84] R. Lifshitz and M.L. Roukes. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems. *Physical review B*, 61(8) :5600–5609, 1999.
- [85] B.-A. Ma and J.-F. He. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of sound and vibration*, 152(1) :107–123, 1992.
- [86] A.P. Malyshev. Dynamics of a two-layer beam with layer slip. *J. Appl. Maths Mechs*, 65(1) :133–137, 2001.
- [87] G.I. Marchuk. *Adjoint equations and analysis of complex systems*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [88] P-O. Mattei and U. Kristiansen. Transient sound generation of a plate coupled to an acoustic cavity. In *Actes du CFA/DAGA'04*, Strasbourg, 2004.
- [89] C. Maury and P-O. Mattei. Sound radiation by a rib-stiffened plate : validation of a light fluid approximation by comparison with experimental results. In *Euromech Colloquium Vibroacoustics and Flow Structure Interaction*, Cargèse, 1999.
- [90] M.Giovagnoni. On the direct measurement of the dynamic poisson's ratio. *Mechanics of materials*, 17 :33–46, 1994.
- [91] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, 1953.
- [92] P.M. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton, 1986.
- [93] S. Mousavi, D.F. Nicolas, and B. Lundberg. Identification of complex moduli and poisson's ratio from measured strains on an impacted bar. *Journal of sound and vibration*, 277 :971–986, 2004.
- [94] B.C. Nakra. Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping. *Journal of sound and vibration*, 211(3) :449–465, 1998.
- [95] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Non linear oscillations*. John Wiley and Sons, 1979.
- [96] E.J.M. Nijman and G.N.M. Bellussi. Helium as good as vacuum : the poor man's approach for accurate material damping measurements. *Applied acoustics*, 60 :385–392, 2000.
- [97] W. Nowacki. *Dynamic problems of thermoelasticity*. Polish scientific publishers, 1975.

- [98] R. Ohayon and C. Soize. *Structural acoustics and vibration*. Academic Press, 1998.
- [99] C.H. Park and A. Baz. Comparison between finite element formulations of active constrained layer damping using classical and layer-wise laminate theory. *Finite elements in analysis and design*, 37 :35–56, 2001.
- [100] J.Y. Park, J.J. Bae, and I.H. Jung. Uniform decay of solution for wave equation of kirchhoff type with nonlinear boundary damping and memory term. *Nonlinear analysis*, 50 :871–884, 2002.
- [101] B. Persoz. *Introduction à l'étude de la rhéologie*. Dunod, 1972.
- [102] L. Petit and P. Gondret. Redressement d'un écoulement alternatif. *Journal de physique II*, 12 :2115–2144, 1992.
- [103] Allan D. Pierce. *Acoustics. An Introduction to its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1989.
- [104] F. Pérignon. *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*. PhD thesis, Université Aix-Marseille II, Marseille, 2004.
- [105] T. Pritz. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of sound and vibration*, 265 :935–952, 2003.
- [106] S.S.A. Ravi, T.K. Kundra, and B.C. Nakra. Reanalysis of damped structures using the single step perturbation method. *Journal of sound and vibration*, 211(3) :355–363, 1998.
- [107] Lord Rayleigh. *Theory of sound*. Dover publications, New York, 1897.
- [108] A. Rivière. Analysis of the low frequency damping observed at medium and high temperatures. *Materials science and engineering A*, 370 :204–208, 2004.
- [109] M. Rousseau, F. Haddad, and Y. Gourinat. An apparatus for the characterization of damping properties of non-linear viscoelastic sheared materials. *Mécanique et industries*, 3 :271–278, 2002.
- [110] S. Rowan, R. Hutchins, A. McLaren, N.A. Robertson, S.M. Twyford, and J. Hough. The quality factor of natural fused quartz ribbons over a frequency range from 6hz to 160hz. *Physics letters A*, 227 :153–158, 1997.
- [111] M. Ruzzene, J. Oh, and A. Baz. Finite element modelling of magnetic constrained layer damping. *Journal of sound and vibration*, 236(4) :657–682, 2000.
- [112] S. Sastry, M. Krishna, and J. Uchil. A study on damping behaviour of aluminite particulate reinforced za-27 alloy metal matrix composites. *Alloys and compounds*, 314 :268–274, 2001.
- [113] A. Schmidt and L. Gaul. Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method. In *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamics Modelling (SDM)*, Madeira, 2002.
- [114] C.L. Sisemore and C.M. Darvennes. Transverse vibration of elastic-viscoelastic-elastic sandwich beams : compression-experimental and analytical study. *Journal of sound and vibration*, 252(1) :155–167, 2002.
- [115] N. Srikanth and M. Gupta. Damping characterization of mg-sic composites using an integrated suspended beam method and new circle-fit approach. *Materials reseach bulletin*, 37 :1149–1162, 2002.

- [116] J.R. Su, C.F. Zhu, Z.G. Zhu, D. Xu, and D.R. Yuan. Experimental evidence for the unusual damping parameter in L-arginine phosphate monohydrate single crystal. *Materials research bulletin*, 35 :977–983, 2000.
- [117] J. Tasi. Thermoelastic dissipation in vibrating plates. *Journal of applied mechanics*, Dec. 1963.
- [118] T.-L. Teng and N.-K. Hu. Analysis of damping characteristics for viscoelastic laminated beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3881–3892, 2001.
- [119] T.Önsay. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system. *Journal of sound and vibration*, 163(2) :231–259, 1993.
- [120] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermes, 1993.
- [121] K.L. Verma. Thermoelastic vibrations of transversely isotropic plate with thermal relaxations. *International journal of solid and structures*, 38 :8529–8546, 2001.
- [122] C. Wang, Z. Zhu, X. Hou, and H. Li. Damping characteristics of cvi-densified carbon-carbon composites. *Carbon*, 38 :1821–1824, 2000.
- [123] J. Wang, Z. Zhang, and G. Yang. The dependence of damping capacity of pmmcs on strain amplitude. *Computational materials science*, 18 :205–211, 2000.
- [124] J.N. Wei, H.F. Cheng, Y.F. Zhang, F.S. Han, Z.C. Zhou, and J.P. Shui. Effects of macroscopic graphite particulates on the damping behavior of commercially pure aluminum. *Materials science and engineering A*, 325 :444–453, 2002.
- [125] J.N. Wei, C.L. Gong, H.F. Cheng, Z.C. Zhou, Z.B. Li, J.P. Shui, and F.S. Han. Low-frequency damping behavior of foamed commercially pure aluminum. *Materials science and engineering A*, 332 :375–381, 2002.
- [126] W.E. Whiteman and A.A. Ferri. Displacement-dependent dry friction damping of a beam-like structure. *Journal of sound and vibration*, 198(3) :313–329, 1996.
- [127] W.L. William, R.F. Landel, and J.D. Ferry. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymer and other glassforming liquids. *Journal of american chemical society*, 77 :3701–3707, 1955.
- [128] H.-W. Wodtke and J.S. Lamancusa. Sound power minimization of circular plates through damping layer placement. *Journal of sound and vibration*, 215(5) :1145–1163, 1998.
- [129] J. Woodhouse. Linear damping models for structural vibration. *Journal of sound and vibration*, 215(3) :547–569, 1998.
- [130] X. Xian-qing, F. Tong-xiang, and W. Ren-jie Z. Di. Increasing the mechanical properties of high damping woodceramics by infiltration with a magnesium alloy. *Composites science and technology*, 62 :1341–1346, 2002.
- [131] C.Y. Xie, R. Schaller, and C. Jaquerod. High damping capacity after precipitation in some commercial aluminum alloys. *Materials science and engineering A*, 252 :78–84, 1998.
- [132] D. Xu and S. Schmauder. The plastic energy dissipation in metal matrix composites during cyclic loading. *Computational materials science*, 15 :96–100, 1999.
- [133] S. Yi and K.Y. Sze. A finite element formulation for composite laminates with smart constrained layer damping. *Advances in engineering software*, 31 :529–537, 2000.

- [134] W. Yin-Tao, G. Liang-Jin, and Y. Ting-Qing. Prediction of the 3-d effective damping matrix and energy dissipation of viscoelastic fiber composites. *Composite structures*, 54 :49–55, 2001.
- [135] C. Zener. *Elasticité et anélasticité des métaux*. Dunod, Paris, 1955.

## Annexe A

# Dérivée d'un potentiel de simple couche

L'objet de l'annexe concerne le calcul de la dérivée normale d'un potentiel de simple couche  $\Phi(M_0, M, s)$  dans un milieu fluide infini contenant une surface plane de taille finie notée  $S$ , lorsque les points  $M_0$  et  $M$  sont tous deux situés sur cette surface. Le formalisme est adapté au cas du rayonnement traité dans le chapitre 4.

$$\Phi(M_0, M, s) = \int_S \partial_{n(M)} \tilde{p}(M, s) \partial_{n(M_0)} G(M_0, M, s) dS(M) \quad (\text{A.1})$$

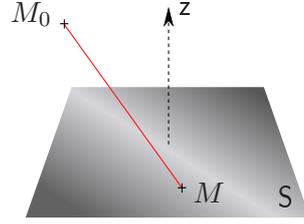


FIG. A.1 – Configuration géométrique

La démonstration du calcul présentée ici est classique (Bonnet [12]). Elle est rendue spécifique par la configuration étudiée (figure A.1). Le point  $M_0$  est situé initialement dans l'espace fluide, puis il est rapproché de la surface  $S$ . Un passage à la limite est ensuite effectué. La difficulté réside dans l'apparition d'une singularité lorsque  $M$  parcourant  $S$  s'approche de  $M_0$ . La technique consiste à exclure la zone singulière de l'intégrale  $\Phi(M_0, M, s)$  notée  $S_0$  dans un premier terme ( $M_0 \rightarrow S_0$ ) et à circonscrire les cas restants pour lesquels  $M \notin S_0$  dans un deuxième terme, régulier.

$$\begin{aligned} \Phi_{M_0 \rightarrow S_0}(M_0, M, s) &= \int_{S_0} \partial_{n(M)} \tilde{p}(M, s) \frac{\partial G(M_0, M, s)}{\partial n(M)} dS(M) \\ &+ \int_{S-S_0} \partial_{n(M)} \tilde{p}(M, s) \frac{\partial G(M_0, M, s)}{\partial n(M)} dS(M) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Le voisinage de taille réduite  $S_0$  autour de  $M_0$  est pris de forme circulaire (figure A.2). Le centre du repère est placé sur la surface en  $(x_{M_0}, y_{M_0}, 0)$ . La densité de double couche

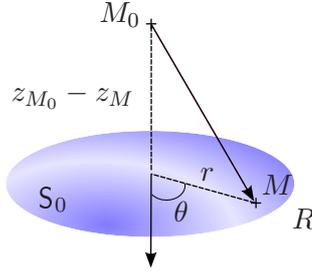


FIG. A.2 – Zone d'intégration singulière

$\partial_{n(M)} \tilde{p}(M, s)$  est prise constante sur ce voisinage d'exclusion et notée  $\partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s)$ . Le terme régulier est explicité, la normale à la surface étant constante et orientée suivant  $z$  : un facteur contenant la différence d'altitude  $(z_M - z_{M_0})$ , qui tend vers zéro, apparaît. Les autres termes de l'intégrale sont réguliers : l'intégrale est donc nulle.

$$\begin{aligned} \Phi(M_0, M, s) &= \partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s) (z_M - z_{M_0}) \int_{S_S} \frac{1}{MM_0} \frac{dG(M_0, M, s)}{dMM_0} dS(M) \\ &+ \int_{S-S_0} \partial_{n(M)} \tilde{p}(M, s) \overbrace{\frac{z_M - z_{M_0}}{4\pi}}^0 \left( \frac{1 - ikMM_0}{MM_0^3} \right) e^{ikMM_0} dS(M) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On effectue un changement de variable  $(x, y) \rightarrow (MM_0, \theta)$  faisant apparaître le déterminant du jacobien de la transformation  $MM_0$ .

$$\begin{aligned} \Phi(M_0, M, s) &= \partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s) (z_M - z_{M_0}) * \\ &\int_0^{2\pi} \int_{|z_{M_0} - z_M|}^{\sqrt{R^2 + (z_{M_0} - z_M)^2}} \frac{d}{dMM_0} \left( \frac{-e^{ikMM_0}}{4\pi MM_0} \right) d\theta dMM_0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Phi(M_0, M, s) &= \partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s) (z_M - z_{M_0}) / 2 * \\ &\left[ \frac{e^{ik|z_{M_0} - z_M|}}{|z_{M_0} - z_M|} - \frac{e^{ik\sqrt{R^2 + (z_{M_0} - z_M)^2}}}{\sqrt{R^2 + (z_{M_0} - z_M)^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

En rapprochant  $M_0$  de  $S$  ( $z_M - z_{M_0} \rightarrow 0$ ), il vient

$$\lim_{(z_M - z_{M_0}) \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow 0} \Phi(M_0, M, s) = \text{sgn}(z_M - z_{M_0}) \frac{\partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s)}{2} \quad (\text{A.6})$$

Le résultat final<sup>1</sup> s'écrit

$$\Phi(M_0, M, s) = -\text{sgn}(z_{M_0}) \frac{\partial_{n(M_0)} \tilde{p}(M_0, s)}{2} \quad (M, M_0 \in S) \quad (\text{A.7})$$

<sup>1</sup>Le signe  $\Phi(M_0, M, s)$  dépend de la face considérée (côté  $z_{M_0} > 0$  ou  $z_{M_0} < 0$ ).

## Annexe B

# Résolution de l'équation de Fredholm de première espèce

L'objet de l'annexe concerne la résolution d'une équation de Fredholm de première espèce par une méthode de collocation. Les éléments de frontière définis correspondent à la discrétisation établie dans le problème vibratoire. La démarche est empruntée à la thèse de F. Cassot [17], qui étudie la diffraction par un écran mince, plat. L'équation de Fredholm de première espèce a la forme suivante :

$$P.F. \int_S \tilde{\mu}(M, s) \partial_z \partial_{z_0} G(M_0, M, s) dS(M) = \rho s^2 v(M_0, s) \quad (B.1)$$

$\tilde{\mu}(M, s)$  est la densité de double couche dépendante de la pulsation  $\omega$  ( $s = i\omega$ ) au point M.  $v(M_0, s)$  est le déplacement vibratoire au point  $M_0$ . Les points  $M(x, y, z)$  et  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  définissent une distance  $MM_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . La fonction de Green solution élémentaire de l'équation élémentaire en milieu infini est prise comme  $G(M, M_0) = -e^{ikMM_0}/4\pi MM_0$ . Dans le cas d'une structure plane dont la normale est orientée suivant  $z$ , la dérivée seconde s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{z_0} G(M_0, M, s) &= \partial_{z_0} \left[ \frac{\partial MM_0}{\partial z} \frac{\partial G(M, M_0, s)}{\partial MM_0} \right] \\ &= \partial_{z_0} \left[ (z - z_0) (1 - ikMM_0) \frac{e^{ikMM_0}}{4\pi MM_0^3} \right] \end{aligned} \quad (B.2)$$

Le calcul de la dérivée par rapport à  $z_0$  avec  $z = z_0 = 0$  donne

$$\partial_z \partial_{z_0} G(M_0, M, s) = \frac{e^{ikMM_0}}{4\pi MM_0^3} (ikMM_0 - 1) \quad (B.3)$$

L'espace de la structure mince est discrétisé en pavés dont la géométrie est définie par les fonctions quadratiques utilisées dans le programme vibratoire (méthode des éléments finis). Chaque pavé ou élément de frontière correspond à la face extérieure d'un élément fini, dont le centre  $M_j$  est placé au niveau du noeud central (coordonnées du domaine parent définies par  $\xi = 0, \eta = 0$ ). La forme des pavés s'adapte donc à des maillages 2D irréguliers. On considère que la densité de double couche  $\tilde{\mu}(M, s)$  est constante sur les pavés. La valeur de cette constante est évaluée au niveau du point  $M_0 = M_{0i}$  placé successivement aux N positions centrales  $M_j$  : il s'agit d'une **méthode numérique de collocation à un point** par élément, laquelle, en plus d'être simple à programmer, assure l'existence de toutes les

intégrales notamment celle de l'intégrale hypersingulière (Hamdi [80]). Il en résulte  $N$  équations constituées de  $N - 1$  intégrales régulières et une intégrale hypersingulière de la forme

$$\begin{aligned} \rho s^2 v(M_{0i}, s) &= \tilde{\mu}(M_{0i}, s) P.F. \int_{S_{0i}} \partial_z \partial_{z_{0i}} G(M_{0i}, M, s) dS(M) \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mu}(M_j, s) \int_{S_j} \partial_z \partial_{z_{0i}} G(M_{0i}, M, s) dS(M) \end{aligned} \quad (B.4)$$

$i \in \{1, \dots, N\}$

Sous forme matricielle on a

$$\mathbf{A}_{ii} \boldsymbol{\mu}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{A}_{ij} \boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{f}_i \quad (B.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_{ii} = P.F. \int_{S_i} \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}^3} (ikMM_{0i} - 1) dS & M \in S_i, M_{0i} \in S_i \\ A_{ij} = \int_{S_j} \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}^3} (ikMM_{0i} - 1) dS & M \in S_j, M_{0i} \in S_i \\ f_i = \rho s^2 v(M_{0i}, s) & M_{0i} \in S_i \end{array} \right. \quad (B.6)$$

Le second membre  $f_i$  est donné par les déplacements vibratoires dans le vide calculés par la méthode EF ; les termes réguliers  $A_{ij}$  sont évalués par la méthode d'intégration de Gauss-Legendre.

L'intégration au sens des parties finies (termes  $A_{ii}$ ) nécessite un développement analytique relativement simple dans le cas d'une structure plane. Dans des configurations plus complexes, il peut être envisagé d'utiliser une méthode variationnelle en multipliant les équations précédentes par une fonction régulière arbitraire et en intégrant l'ensemble (régularisation par intégration, Hamdi [52]). Nous ne présentons pas ici le détail des calculs d'intégration analytiques présentés dans la thèse de F. Cassot [17]. La démarche est la suivante : en utilisant une géométrie simplifiée (disque) de surface équivalente aux pavés  $S_i$  dont on connaît la solution régulière et dont on peut calculer la solution divergente, il est possible d'identifier un voisinage de  $M_{0i}$  caractérisé par un paramètre  $\epsilon$  à exclure du domaine d'intégration. Pour un domaine plan quelconque  $S_i$ , on a

$$A_{ii} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i} \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}^3} (ikMM_{0i} - 1) dS + 1/2\epsilon \right\} \quad M \in S_i, M_{0i} \in S_i \quad (B.7)$$

En remarquant que

$$\frac{e^{ikMM_{0i}}}{MM_{0i}^3} (ikMM_{0i} - 1) = \frac{1}{MM_{0i}} \frac{d}{d(MM_{0i})} \frac{e^{ikMM_{0i}}}{MM_{0i}}, \quad (B.8)$$

l'utilisation de coordonnées cylindriques permet d'écrire

$$A_{ii} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\epsilon}^{R(\theta)} \frac{d}{d(MM_{0i})} \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}} d\theta dr + 1/2\epsilon \right\} \quad (B.9)$$

Les bords du domaine d'intégration sont associés au contour des éléments finis quadratiques. Le mailleur développé suppose que ces éléments peuvent avoir une géométrie parallépipédique générale dont le contour est linéaire mais non parabolique. L'utilisation de coordonnées cylindriques pour un tel contour expliquent donc l'introduction d'une variable de rayon  $R(\theta)$  dépendante de l'angle  $\theta$ . En séparant l'intégrale en deux parties, l'une définie pour des valeurs de  $r$  allant de 0 à  $\epsilon$  et l'autre pour des valeurs allant de 0 à  $R(\theta)$ , il vient :

$$A_{ii} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}} \right]_0^{R(\theta)} d\theta - \frac{e^{ik\epsilon}}{2\epsilon} + 1/2\epsilon \right\} \quad (\text{B.10})$$

Or  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{ik\epsilon} \sim 1/\epsilon + ik$ . On obtient finalement :

$$A_{ii} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[ \frac{e^{ikMM_{0i}}}{4\pi MM_{0i}} \right]_0^{R(\theta)} d\theta - ik/2 \quad (\text{B.11})$$

Dans le programme développé, nous utilisons une intégration numérique de Gauss pour évaluer cette intégrale à une dimension. La seule difficulté concerne la forme parallépipédique du contour qui nécessite de scinder le domaine d'intégration angulaire en plusieurs parties. La démarche générale est présentée dans l'annexe C, qui concerne l'intégration de la fonction de Green et qui fait également usage d'un changement de coordonnées.



## Annexe C

# Intégration de la fonction de Green

L'objet de l'annexe concerne le calcul de la double intégrale de surface **I** faiblement singulière :

$$I = \int_S \int_S \tilde{u}(M_0) G(M_0, M, s) \tilde{u}(M) dS(M) dS(M_0) \quad (C.1)$$

$\tilde{u}(M)$  et  $\tilde{u}(M_0)$  sont les déplacements structurels en  $M$  et  $M_0$  respectivement. La pulsation de vibration  $\omega$  est associée à  $s$  par  $s = i\omega$ . Les points  $M$  et  $M_0$  sont repérés par les coordonnées respectives  $(x, z, 0)$  et  $(x_0, z_0, 0)$ . Les déplacements  $\tilde{u}$  sont connus aux noeuds du maillage utilisé par le code vibratoire. Ils sont également connus explicitement en fonction des coordonnées  $(\xi, \eta)$  du domaine parent sur la face supérieure des éléments. La double intégrale de surface doit donc être scindée en sous-domaines d'intégration délimités par le maillage du code EF.

$$\begin{aligned} I &= \sum_i \int_{S_i} \int_{S_i} \tilde{u}(M_0) G(M_0, M, s) \tilde{u}(M) dS(M) dS(M_0) \\ &+ \sum_i \sum_{j, j \neq i} \int_{S_i} \int_{S_j} \tilde{u}(M_0) G(M_0, M, s) \tilde{u}(M) dS(M) dS(M_0) \end{aligned} \quad (C.2)$$

Un changement de variables  $(x, y, x_0, z_0) \rightarrow (\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$  doit être effectué dans les intégrales régulières pour pouvoir exprimer le déplacement structurel dans le domaine dit parent. L'intégrale singulière nécessite un changement plus spécifique en introduisant un système de coordonnées cylindriques dans le domaine parent  $(x, y, x_0, z_0) \rightarrow (\xi, \eta, r_0, \theta_0)$  où  $r_0 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$  et  $\theta_0 = \arctan((\eta - \eta_0)/(\xi - \xi_0))$  (figure C.1).

$$\begin{aligned} I &= \sum_i \int_{S_i} \int_{S_i} \left( \sum_{k=1}^{27} N_k(\xi_0, \eta_0, 1) \tilde{U}_k^i \right) G(M_0, M, s) \\ &\quad \times \left( \sum_{k=1}^{27} N_k(\xi, \eta, 1) \tilde{U}_k^i \right) J_1(x, y, x_0, y_0, \xi, \eta, \xi_0, \eta_0) d\xi d\eta d\xi_0 d\eta_0 \\ &+ \sum_i \sum_{j, j \neq i} \int_{S_i} \int_{S_j} \left( \sum_{k=1}^{27} N_k(r_0, \theta_0, 1) \tilde{U}_k^i \right) G(M_0, M, s) \\ &\quad \times \left( \sum_{k=1}^{27} N_k(\xi, \eta, 1) \tilde{U}_k^j \right) J_2(x, y, r_0, \theta_0, \xi, \eta, \xi_0, \eta_0) d\xi d\eta dr_0 d\theta_0 \end{aligned} \quad (C.3)$$

$\tilde{U}_k^i$  est le déplacement au noeud  $k$  de l'élément d'indice  $i$  dont la face supérieure est notée

$S_i$ .  $J_1$  et  $J_2$  sont les déterminants des matrices de transformation. Le jacobien  $J_2$  permet de régulariser les intégrales singulières, sans pour autant permettre une simplification analytique directe (élimination de  $MM_0$  apparaissant au dénominateur de  $G(M, M_0)$ ) comme nous aurions pu le faire en effectuant un changement  $(x, y, x_0, z_0) \rightarrow (x, y, R, \theta)$  avec  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = MM_0$ ,  $\theta = \arctan((y - y_0)/(x - x_0))$ . Nous avons donc utilisé après cette étape de régularisation un schéma d'intégration de Gauss-Legendre qui évite le point d'abscisse nul. Les intégrales singulières sont calculées en divisant le domaine parent

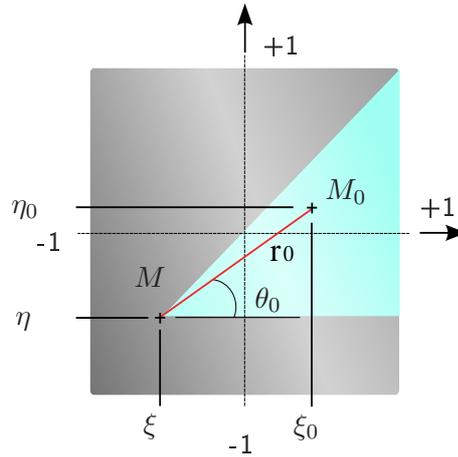


FIG. C.1 – *Domaine parent associé à l'intégrale singulière*

en huit secteurs triangulaires. Prenons l'exemple de l'intégration sur le premier secteur représenté dans la figure C.1. Les bornes d'intégration sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \xi & : -1 \rightarrow 1 \\ \eta & : -1 \rightarrow 1 \\ \theta_0 & : 0 \rightarrow \arctan((1 - \eta)/(1 - \xi)) \\ r_0 & : 0 \rightarrow (1 - \xi)/\cos(\theta_0) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

## Annexe D

# Puissance acoustique

L'annexe établit un lien entre la puissance acoustique du plan complexe et la puissance acoustique du plan temporel avec l'hypothèse forte que les variables du système ont une dépendance temporelle périodique. Vitesse et pression au point M peuvent s'écrire en temporel sous la forme de séries de Fourier complexes comme suit :

$$\begin{cases} p(t, M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(M) \cos(\omega_n t + \phi_{pn}(M)) \\ v(t, M) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(M) \cos(\omega_j t + \phi_{vj}(M)) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

La puissance  $\mathcal{P}^a$  est calculée comme la moyenne de la puissance instantanée sur une période :

$$\mathcal{P}^a = \frac{1}{T} \int_0^T \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt \quad (\text{D.2})$$

L'intégration sur une période permet d'annuler les termes croisés des deux séries lorsqu'ils ont une pulsation différente, transformant la double somme en simple somme de paramètre  $j$ . Les simplifications conduisent à l'expression suivante :

$$\mathcal{P}^a = \sum_j \frac{1}{T} \int_0^T \int_S p_j(M) v_j(M) \cos(\omega_j t + \phi_{pj}(M)) \cos(\omega_j t + \phi_{vj}(M)) dM dt \quad (\text{D.3})$$

Or

$$\begin{aligned} \cos(\omega_j t + \phi_{pj}(M)) \cos(\omega_j t + \phi_{vj}(M)) = \\ \frac{1}{2} \cos(2\omega_j t + \phi_{pj}(M) + \phi_{vj}(M)) + \frac{1}{2} \cos(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M)) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

La partie fluctuante en  $2\omega_j t$  associée à la puissance réactive ou non-propagative (Lesueur [80]) s'annule également par moyennage. Il reste

$$\mathcal{P}^a = \int_S \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_j(M) v_j(M) \cos(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M)) dM dt \quad (\text{D.5})$$

Nous souhaitons obtenir un lien avec la puissance acoustique complexe  $\tilde{\mathcal{P}}_a$  obtenue dans le plan fréquentiel et donnée par

$$\tilde{\mathcal{P}}_a = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}}(\omega, M) dM d\omega \quad (\text{D.6})$$

Nous privilégions ici la transformée de Fourier avec l'emploi des séries du même nom. Rappelons que

$$\begin{cases} \tilde{p}(\omega, M) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t, M) \exp^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(M) \left( \frac{1}{2} \exp^{i\phi_{pn}} \delta(\omega - \omega_n) + \frac{1}{2} \exp^{-i\phi_{pn}} \delta(\omega + \omega_n) \right) \\ \overline{\tilde{v}}(\omega, M) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t, M) \exp^{+i\omega t} dt \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j(M) \left( \frac{1}{2} \exp^{-i\phi_{vj}} \delta(\omega - \omega_j) + \frac{1}{2} \exp^{i\phi_{vj}} \delta(\omega + \omega_j) \right) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

La densité de spectre de puissance à la pulsation  $\omega$  au point  $M$  vaut

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}}(\omega, M) &= \frac{1}{4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j(M) v_j(M) \\ &\times \left( \exp^{i(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M))} \delta(\omega - \omega_j) + \exp^{-i(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M))} \delta(\omega + \omega_j) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Le produit de deux fonctions Dirac  $\delta(\omega - \omega_n)$  et  $\delta(\omega - \omega_j)$  étant égal à un pour  $\omega_j = \omega_n$  et nul sinon. La puissance acoustique complexe s'écrit finalement

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_a &= \int_S \frac{1}{4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j(M) v_j(M) \left( \exp^{i(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M))} + \exp^{-i(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M))} \right) dM \\ &= \int_S \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j(M) v_j(M) \cos(\phi_{pj}(M) - \phi_{vj}(M)) dM \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

On a établi que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}}(\omega, M) dM d\omega \quad (\text{D.10})$$

La puissance acoustique du plan fréquentiel est une quantité réelle égale à la puissance acoustique du plan temporel. Des arguments similaires à ceux précédemment exposés pour la relation de Parseval justifient l'obtention d'une quantité réelle.

La puissance acoustique est souvent évaluée différemment à l'aide d'un domaine d'intégration fréquentiel réduit de moitié :

$$\tilde{\mathcal{P}}_a = \int_0^{\infty} \int_S \tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}}(\omega, M) dM d\omega \quad (\text{D.11})$$

Le calcul donne alors

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_S p(t, M) v(t, M) dM dt = \int_0^\infty \int_S \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{p}(\omega, M) \overline{\tilde{v}(\omega, M)}] dM d\omega \quad (\text{D.12})$$

$$\mathcal{P}_a = \frac{1}{2} \text{Re} [\tilde{\mathcal{P}}_a] \quad (\text{D.13})$$

$\mathcal{P}_a$  est la partie dite active ou propagative de la puissance complexe  $\tilde{\mathcal{P}}_a$  (Lesueur [80]).

## Optimisation vibroacoustique de structures amorties par des traitements en élastomère

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution à la modélisation vibratoire de structures amorties et à l'optimisation de traitements en élastomère pour la réduction de bruit. Une méthode d'analyse modale sans contact a permis d'identifier dans un premier temps l'amortissement structurel total d'une plaque en aluminium suspendue, traitée par des patches en élastomère contraint. Une quantification précise des principales sources de dissipation a ensuite été effectuée. La dissipation thermoélastique de l'aluminium, visqueuse de l'air et la dissipation par rayonnement acoustique ont été modélisées ; les dissipations viscoélastiques de l'aluminium et de l'élastomère, identifiées. Le calcul thermoélastique repose sur la prise en compte du couplage par perturbation et apporte quelques éclairages sur le modèle de référence de Zéner. La modélisation de l'élastomère s'appuie sur une expérience d'identification du module de rigidité complexe en fonction de la fréquence. Une plate-forme de résolution, basée sur le calcul des modes de résonance à l'aide de la méthode des éléments finis, d'un solveur aux valeurs propres complexe et de routines itératives et de perturbation, permet le calcul précis et rapide de la réponse temporelle ou fréquentielle instationnaire de systèmes à amortissement linéaire, non-proportionnel et dépendant de la fréquence. Dans une dernière partie, des études d'optimisation paramétrique conduites sur des traitements en élastomère débouchent sur un savoir-faire pratique en matière de réduction de bruit.

**Mots-clefs :** amortissement, vibroacoustique, élastomère, thermoélasticité, viscoélasticité, optimisation, réduction de bruit, modes de résonance, aluminium.

## Vibroacoustic optimization of damped structures through elastomer treatments

This work is devoted to the modelling of damped structures and to the optimization of elastomer treatments for noise reduction purposes. The damping of a suspended aluminium plate partially covered by a constrained elastomer treatment has been identified in a first step through a contact-free modal analysis. A precise and systematic quantification of the main dissipation sources has then been carried out ; while the thermoelastic dissipation in the aluminium, the dissipation due to air viscosity and to the acoustic radiation have been modelled, the viscoelastic dissipations within the aluminium and the elastomer have been identified. The thermoelastic computation, based on a perturbation approach to solve the coupled problem, highlights the limits of Zener's model, considered as a reference. The modelling of the elastomer relies on an identification experiment of its complex frequency-dependent stiffness modulus. A resolution platform based on the computation of the resonance modes with a finite element program, a complex eigenvalue solver as well as iterative and perturbation routines has been developed in order to account for any specific type of damping. The final algorithm can compute the instationary time/frequency response of systems with a general unproportional linear damping very rapidly and precisely. In a last part, parametric optimization studies give a fine understanding of the influence of elastomer damping treatments as well as a practical know-how in the area of noise reduction.

**Key-words :** damping, vibroacoustics, elastomer, thermoelasticity, viscoelasticity, optimization, noise reduction, resonance modes, aluminium.